UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Cássio Henrique Vieira Morais

CURVAS INVARIANTES DE BILHARES CONVEXOS EM SUPERFÍCIES

Belo Horizonte - MG
2021

Cássio Henrique Vieira Morais

CURVAS INVARIANTES DE BILHARES CONVEXOS EM SUPERFÍCIES

Versão final

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática d da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadoras: Profa. Dra. Sônia Pinto de Carvalho e Profa. Dra. Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva

Belo Horizonte - MG
2021

Morais, Cássio Henrique Vieira.

M828c Curvas invariantes de bilhares convexos em superfícies [manuscrito] / Cássio Henrique Vieira Morais. – 2021.
89 f. il.

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho.
Coorientadora: Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.88-89
.
1. Matemática – Teses. 2. Sistemas dinâmicos – Teses. 3. Superfícies algébricas– Teses. 4. Curvas invariantes – Teses. I. Carvalho, Sônia Pinto de. II. Silva, Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da. III.Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Curvas Invariantes de bilhares convexos em superfícies

CÁSSIO HENRIQUE VIEIRA MORAIS

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Sônia Pinto de Carvalho

Profa. Sônia Pinto de Carvalho
UFMG

Sylvie O. Kamp

Profa. Sylvie Oliffson Kamphorst
UFMG

Prof. José Barbosa Gomes
UFJF

Mário Jorge Dias Carneiro

Prof. Mário Jorge Dias Carneiro
UFMG

Prof. Pierre Berger
Institut de Mathématiques de Jussieu - Paris Rive Gauche

Prof. Rafael Ramirez-Ros
Politécnica de Barcelona

Prof. Rafael Ruggiero
PUC-Rio

Belo Horizonte, 13 de outubro de 2021.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Agradeço aos professores da UFMG, pelo aprendizado ao longo de 10 anos. Em especial ao Mário Jorge, Sônia e Sylvie pela orientação.

Aos meus pais, José Geraldo e Ilma, à minha esposa Luana, e à Sylvie pelo imenso suporte que me deram durante os altos e baixos do doutorado.

Aos amigos dos Sistemas Dinâmicos e da Computação: Cláudia, Álvaro, Túlio, Luana, Rafael, Jéssica, Hellen, Carol, Luís Felipe.

À CAPES pelo fundamental auxílio financeiro.

Resumo

Nesse trabalho estudamos bilhares convexos em variedades Riemannianas de dimensão 2. Provamos que propriedades bem conhecidas para bilhares planos, como a diferenciabilidade a propriedade Twist também são válidas nessa situação. Deduzimos uma fórmula para a derivada da aplicação do bilhar e investigamos condições para existência de curvas rotacionais invariantes, extendendo os teoremas de Hubacher, Mather, Douady-Lazutikin. Por fim, apresentamos uma demonstração da existência de círculos geodésicos cuja aplicação do bilhar não é completamente integráveis.

Palavras-chave: Sistemas Dinâmicos. Bilhares. Convexidade. Integrabilidade. Curvas Invariantes. Twist. Superfície. Círculos.

Abstract

This work presents a framework for billiards on convex domains in a two dimensional Riemannian manifold. In this context, some basic properties that have long been known for billiards on the plane such as differentiability and twist property are established. We deduce a formula for the billiard derivative and investigate conditions for the existence and non existence of rotational invariant curve, extending Hubacher, Mather and Douady-Lazutikin's results. We also prove there are geodesic circles such that the billiard map is not totally integrable.

Keywords: Dynamical Systems. Billiards. Convexity. Integrability. Twist. Invariant Curve. Surfaces. Geodesic Circle.

Sumário

Introdução

Bilhares consistem no estudo do movimento de uma partícula no interior de uma região Ω. A partícula move-se nessa região e sofre colisões com o bordo de Ω. Tradicionalmente, considera-se que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, que a partícula move-se em linha reta e sofre colisões respeitando a Lei da Reflexão. Isto é, tal situação correspondem aos Bilhares planos. De maneira geral, busca-se compreender como a geometria de Ω afeta o movimento da partícula. Do ponto de vista de Sistemas Dinâmicos, queremos saber quais condições devem ser impostas a Ω para observarmos fenômenos como trajetórias periódicas, estabilidade, hiperbolicidade, dentre outros.

Naturalmente, podemos procurar generalizações para o problema. Bilhares planos podem ser vistos como um caso particular de bilhares em dimensões maiores. Isto é, quando consideramos que $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Outra possibilidade seria considerar que o movimento não é em linha reta, mas regido por alguma outra lei. Podemos também combinar ambas as possibilidades numa situação mais geral: movimentos não necessariamente retos em regiões com dimensão arbitrária. Neste trabalho, estamos interessados no segundo caso. Ω será um conjunto aberto, conexo, simplesmente conexo de $\mathbb{R}^2$ cuja fronteira é uma curva regular de classe $\mathscr{C}^2$. Tal região será munida de uma métrica Riemanniana g e o movimento da partícula se dará sobre as geodésicas. Essa abordagem é análoga a considerar Ω como um conjunto de uma superfície (variedade Riemanniana de dimensão 2). Isso justifica a terminologia 'Bilhares em Superfícies' empregada neste trabalho. Procuramos generalizar para esse contexto diversos resultados de bilhares planos convexos, a fim de formar uma base para pesquisas futuras. O tópico mais abordado se refere a existência de curvas invariantes do tipo rotacional.

Alguns dos resultados que generalizamos foram os teoremas de Lazutkin-Douady [10] , de Mather [20] e de Hubacher [16]. Tais resultados tratam de critérios para existência e inexistência de curvas rotacionais invariantes na aplicação do bilhar para conjuntos convexos. No estudo desses resultados, vimos que a propriedade twist é fundamental nas demonstrações. Por exemplo, o teorema de Lazutkin-Douady depende do teorema do Twist de Moser, e o teorema de Mather decorre de outro teorema, do próprio Mather, para aplicações Twist. Assim, mostramos que, assumindo que Ω é um conjunto totalmente normal, vale a propriedade:

Teorema. Se o bordo do bilhar é uma curva $\mathscr{C}^2$ com curvatura geodésica positiva, então a aplicação do bilhar é um twist diferenciável.

Com a hipótese de Ω ser um conjunto totalmente normal, as generalizações que provamos dos teoremas de Lazutkin-Douady, Mather e de Hubacher podem ser enunciadas como:

Teorema. Se o bordo do bilhar é uma curva $\mathscr{C}^7$ com curvatura geodésica positiva, então existe um conjunto de Cantor $K \subset [0, \frac{1}{2}) \setminus \mathbb{Q}$ tal que para cada $\alpha \in K$ existe uma curva rotacional C_α invariante pela aplicação do bilhar, com número de rotação α.

Teorema. Se o bordo do bilhar é uma curva $\mathscr{C}^2$ convexa (estritamente) suficientemente pequena cuja curvatura geodésica se anula em algum ponto, então não existem curvas rotacionais invariantes para a aplicação do bilhar, além dos bordos.

Teorema. Se o bordo do bilhar é uma curva $\mathscr{C}^2$ exceto em um número finito de pontos (ao menos um) onde é $\mathscr{C}^1$, para os quais existem os limites laterais da curvatura geodésica e se esta é sempre maior que $\varepsilon > 0$, então existe uma vizinhança dos bordos onde não há curvas invariantes rotacionais para a aplicação do bilhar, além dos bordos.

Notamos nos resultados acima que o comportamento é muito similar ao que acontece no caso plano. A fim de investigarmos mais a fundo a influência da curvatura (da superfície) no comportamento da aplicação do bilhar, encontramos uma expressão para a derivada da aplicação:

Teorema. Seja γ o bordo de uma mesa de bilhar convexa de classe $\mathscr{C}^2$ contida numa vizinhança totalmente normal e seja T a aplicação do bilhar correspondente. Digamos que $T(s_1, \theta_1) = (s_2, \theta_2)$ e que a curvatura de γ em $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$ é κ_1, κ_2 respectivamente. Então a derivada de T em (s_1, θ_1) é

$$dT = \frac{1}{\sin\theta_2} \begin{bmatrix} \kappa_1 G - G_2' \sin\theta_1 & G \\ \kappa_1\kappa_2 G - \kappa_1 G_1' \sin\theta_2 - \kappa_2 G_2' \sin\theta_1 + \sin\theta_1 \sin\theta_2 \left(\frac{G_1' G_2' - 1}{G}\right) & \kappa_2 G - G_1' \sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

Essa matriz pode ser fatorada:

$$dT = \frac{1}{\sin\theta_2} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_2 & \sin\theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \frac{2k_2}{\sin\theta_2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C_1 & C \\ -C_{12} & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{bmatrix}$$

No teorema acima, os coeficientes G e C dependem da métrica (curvatura) da superfície considerada e valem as relações: $C = G$, $C_1 = G_1'$, $-C_2 = G_2'$ e $-C_{12} = \dfrac{G_1' G_1' - 1}{G}$. Como pode ser vista na forma fatorada, apenas na terceira matriz temos termos dependentes da curvatura. No caso plano (curvatura nula), plano hiperbólico (curvatura -1) e hemisfério (curvatura 1) tais matrizes são, respectivamente, iguais a:

$$\begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cosh \ell & \sinh \ell \\ \sinh \ell & \cosh \ell \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \cos \ell & \sin \ell \\ -\sin \ell & \cos \ell \end{bmatrix}$$

onde ℓ é a distância entre $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$.

Um bilhar é completamente integrável quando seu espaço de fase é folheado por curvas rotacionais invariantes pela aplicação do bilhar. Para o plano, Bialy [2] mostrou que isso acontece se, e somente se, o bordo é um círculo. Posteriormente, Bialy também mostrou que o mesmo também vale para bilhares no plano hiperbólico e na esfera [3]. Porém, para superfícies quaisquer, nem todo círculo geodésico é integrável, como mostramos:

Teorema. Existem círculos geodésicos cuja aplicação do bilhar correspondente não é completamente integrável.

Capítulo 1

Preliminares

Introdução

Neste capítulo faremos uma breve revisão sobre algumas feramentas de geometria Riemanniana usadas ao longo dos capítulos posteriores. Grande parte dos resultados foi obtida a partir da aplicação exponencial.

Na primeira seção introduzimos as definições e notações básicas e também enunciamos alguns resultados relevantes ao entendimento da exponencial. Em especial o teorema 1.5 mostra que em superfícies de curvatura negativa todas as vizinhanças são totalmente normais. Isso permite que os resultados posteriores sejam aplicados a uma vasta quantidade de curvas nessas superfícies.

Na seção seguinte analisamos a exponencial do ponto de vista local, em especial, através do uso de coordenadas polares. Encontraremos os símbolos de Christoffel nessas coordenadas, o que permitirá o cálculo de derivadas covariantes e também relacionar os coeficientes da métrica com a curvatura.

1.1 Notações e Definições

Ao longo deste texto M denotará uma variedade riemanniana. Neste capítulo alguns resultados serão enunciados em dimensão n, mas nos capítulos posteriores a dimensão será 2 salvo menção em contrário. M será sempre de classe $\mathscr{C}^\infty$, embora a maioria dos resultados necessite apenas de $\mathscr{C}^k$ com $k \geq 3$.

Se $p \in M$, T_pM é seu espaço tangente e TM é o fibrado tangente. A métrica de M é denotada por

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ou por g e ∇ é a conexão de Levi-Civita. Quando for necessário especificar o ponto, usaremos $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$. Assumiremos que a métrica tem a mesma diferenciabilidade de M. Uma parametrização é um homeomorfismo $x : U \to x(U) \subset M$ admissível (i.e., x^{-1} é uma carta do atlas de M). Dado $p \in x(U)$, dizemos que $(x^1, \ldots, x^n) = x^{-1}(p)$ são as **coordenadas** de p em relação a x. Os campos $X_i = \dfrac{dx}{dx^i}$ são os **campos coordenados** da parametrização x e Γ_{ij}^k definidos por

$$\nabla_{X_i} X_j = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k X_k$$

são os símbolos de Christoffel da parametrização. Usaremos g_{ij} para denotar os coeficientes da métrica e g^{ij} são os coeficientes inversos. Isto é, $g_{ij} = \langle X_i, X_j \rangle$ e $\displaystyle\sum_k g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij}$.

Uma **curva** em M é uma aplicação $\gamma : I \to M$ de classe $\mathscr{C}^1$ regular (i.e., uma imersão) onde $I \subset \mathbb{R}$ é um intervalo. Muitas vezes chamaremos de curva o traço de γ; isto é, o conjunto $\gamma(I) \subset M$. Dada $\gamma : I \to M$ denotamos a derivada covariante por $\dfrac{D\gamma}{ds}$. Fixada uma parametrização, $\dfrac{D}{dx^i}$ denota a derivada covariante na direção de X_i. A **curvatura** de uma curva se refere sempre a curvatura geodésica. Dada uma vizinhança coordenada, o plano tangente de cada um de seus pontos herda a orientação da parametrização. Assim, podemos falar em curvatura com sinal em dimensão 2. Assumiremos então que M é orientada. Em dimensão 2, consideraremos ângulos orientados. Se v é um vetor, denotaremos por $v^\perp$ a rotação de v em $\pi/2$ no sentido positivo. Ou seja, $v^\perp$ é o único vetor tal que $\{v, v^\perp\}$ é base positiva e $||v^\perp|| = ||v||$.

Diremos que γ é uma **geodésica** caso $\dfrac{D\gamma'}{ds}(s) = 0$ para todo $s \in I$ (como pedimos γ regular, estamos excluindo as geodésicas cujo traço é um ponto). Recordamos que dado um ponto p e $v \in T_pM$ existe uma única geodésica passando por p cuja velocidade é v. O seguinte resultado se encontra em [8]

Teorema 1.1. Sejam M e g de classe $\mathscr{C}^\infty$. Dado $p \in M$, existem um aberto $V \subset M$, $p \in V$, números $\delta > 0$ e $\varepsilon > 0$ e uma aplicação $\mathscr{C}^\infty$

$$\eta : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M, \qquad \mathcal{U} = \{(q, v); q \in V, v \in T_qM, |v| < \varepsilon\}$$

tais que a curva $t \mapsto \eta(t, q, v)$, $t \in (-\delta, \delta)$, é a única geodésica de M que no instante $t = 0$ passa por q com velocidade v, para cada $q \in V$ e para cada $v \in T_qM$ com $0 < |v| < \varepsilon$. Se $v = 0$ então $\eta(t, q, v) = q$.

Observamos que reduzindo ε podemos aumentar δ. Assim, podemos supor $\delta > 1$. Então dados $p \in M$ e $\mathcal{U} \in TM$ como no teorema acima definimos a aplicação **exponencial** $\exp : \mathcal{U} \to M$ por

$$\exp(q, v) = \eta(1, q, v)$$

A restrição de exp à bola de raio ε em T_qM é denotada por $\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$. Segue então que $\exp_q$ é $\mathscr{C}^{k-1}$. Se $v \in T_qM$, identificando T_vT_qM com T_qM (e sempre faremos tal identificação) segue também que $d\exp_q(0) : T_qM \to T_qM$ é a identidade. Assim $\exp_q$ é um difeomorfismo local na origem.

Definição 1.2. Dizemos que M é geodesicamente **completa** quando para todo $p \in M$ a aplicação exponencial está definida em todo T_pM.

A partir desse momento M será sempre geodesicamente completa. A esse respeito temos o teorema de Hopf-Rinow (pode se encontrado em [8]):

Teorema 1.3 (Hopf-Rinow). Seja $p \in M$. As seguintes afirmações são equivalentes:

a) $\exp_p$ está definida em todo o T_pM.

b) Os limitados e fechados de M são compactos.

c) M é completa como espaço métrico.

d) M é geodesicamente completa.

Além disso, cada uma das afirmações acima implica que para todo $q \in M$ existe uma geodésica ligando p a q cujo comprimento é $d(p,q)$, isto é, o ínfimo dos comprimentos de todos os caminhos diferenciáveis por partes e com extremos em p, q.

Seja $\mathscr{X}(M)$ o espaço vetorial dos campos $\mathscr{C}^\infty$ em M. A **curvatura** de M é R tal que para cada par $X, Y \in \mathscr{X}(M)$, $R(X,Y) : \mathscr{X}(M) \to \mathscr{X}(M)$ é a aplicação definida por

$$R(X,Y)Z = \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_X \nabla_Y Z + \nabla_{[X,Y]} Z$$

onde $[X,Y] = XY - YX$ é o colchete de Lie.

Definição 1.4. Dado um subespaço de dimensão 2 $\sigma \subset T_pM$, a **curvatura seccional** de M na direção σ é o número $K(\sigma) = \langle R(v,w)v, w \rangle$, onde v, w é uma base ortonormal de σ.

Se M tem dimensão 2, então a única possibilidade é $\sigma = T_pM$. Assim, denotamos a curvatura seccional apenas por K ao longo desse texto. Se M pode ser imerso isometricamente em $\mathbb{R}^3$, então K coincide com a curvatura Gaussiana.

Agora podemos enunciar o seguinte teorema de Hadamard (este e o segundo teorema podem ser encontrados em [8] e [29]):

Teorema 1.5 (Hadamard). Seja M uma variedade Riemanniana completa, simplesmente conexa, conexa, com curvatura seccional $K(p,\sigma) \leq 0$ para todo $p \in M$ e todo $\sigma \subset T_pM$. Então $\exp_p : T_pM \to \mathbb{M}$ é um difeomorfismo. Em particular M é difeomorfa a $\mathbb{R}^n$.

Embora $\exp_p$ seja sempre um difeomorfismo local na origem, nem sempre será um difeomorfismo global como no teorema 1.5 acima, como pode ser visto no teorema 1.7 a seguir.

Definição 1.6. Dizemos que um aberto V é uma **vizinhança normal** de p se existe $W \subset T_pM$ vizinhança de 0 tal que $\exp_p$ restrito a W é difeomorfismo sobre V. V é chamada de **vizinhança totalmente normal** se é vizinhança normal de cada um de seus pontos.

Segue do teorema 1.1 que todo ponto possui vizinhança totalmente normal.

Teorema 1.7 (Hadamard). Seja $M \subset \mathbb{R}^3$ uma superfície compacta com curvatura seccional estritamente positiva em todos os pontos. Então M é difeomorfa à esfera.

1.2 Aplicação Exponencial e Coordenadas

O ponto de partida dessa seção é o fato da derivada da aplicação exponencial ser a identidade na origem. Isso vai além do fato de termos um difeomorfismo local. Podemos realizar cálculos em T_pM com alguma tranquilidade e transportarmos os resultados de volta a variedade. Ângulos, comprimentos e até a curvatura (que depende da derivada segunda) é preservada na origem. O uso dessas propriedades é recorrente neste trabalho.

Lema 1.8. Vale que $d(\exp_p)_0 : T_0(T_pM) \approx T_pM \to T_pM$ é a identidade.

Demonstração. Dado $v \in T_pM$ vamos calcular $(d\exp_p)_0\, v$. Temos

$$(d\exp_p)_0\, v = \frac{d}{dt}\exp_p(tv)\bigg|_{t=0}$$

Notamos que $\exp_p(tv) = \eta(t,v)$ onde $\eta(t,v)$ é a geodésica partindo de p com velocidade v. Ou seja,

$$(d\exp_p)_0\, v = \frac{d}{dt}\eta(t,v)\bigg|_{t=0} = v$$

Assim, $(d\exp_p)_0$ é a identidade. ■

Lema 1.9 (de Simetria). Seja M variedade riemanniana e X, Y campos com $[X,Y] = 0$

coordenados em M. Então vale que

$$\frac{D}{dy}X = \frac{D}{dx}Y$$

onde $\frac{D}{dx}$ e $\frac{D}{dy}$ são as derivadas covariantes na direção de X, Y. Em particular, o resultado vale quando X, Y são campos coordenados

Demonstração. Segue diretamente de

$$\frac{DX}{dy} - \frac{DY}{dx} = \nabla_Y X - \nabla_X Y = [Y, X] = 0$$

■

Lema 1.10 (de Simetria 2). Sejam X, Y campos com $[X, Y] = 0$ Então

$$\frac{D}{dx}\frac{D}{dy}V - \frac{D}{dy}\frac{D}{dx}V = -R(X, Y)V$$

Demonstração. Segue diretamente da definição de R e de

$$\frac{D}{dx}\frac{D}{dy}V - \frac{D}{dy}\frac{D}{dx}V = \nabla_X\nabla_Y V - \nabla_Y\nabla_X V$$

■

Lema 1.11. Seja M uma superfície mergulhada em $\mathbb{R}^3$, com a métrica induzida e curvatura Gaussiana K. Vale que se X, Y, V são campos tangentes a M então

$$K(X \wedge Y) \wedge V = R(X, Y)V$$

Demonstração. Observamos que $K(X \wedge X) \wedge V = 0 = R(X, X)V$. Assim, pela linearidade, basta mostrar a identidade para o caso em que $\{X, Y\}$ é uma base ortonormal positiva. Novamente, pela linearidade, precisamos verificar apenas os casos $V = X$ e $V = Y$. Mas como $X \wedge Y = -Y \wedge X$ e $R(X, Y) = -R(Y, X)$, é suficiente provar para $V = X$. Daí temos

$$K(X \wedge Y) \wedge X = KY$$

Por outro lado,

$$\langle R(X, Y)X, Y\rangle = K \qquad \text{e} \qquad \langle R(X, Y)X, X\rangle = 0$$

Logo, $R(X, Y)X = KY$ e portanto $R(X, Y)X = K(X \wedge Y) \wedge X$. Isso conclui a prova. ■

Lema 1.12 (de Gauss). Seja $p \in M$ e seja $v \in T_pM$ tal que $\exp_p v$ esteja definida. Seja $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$. Então

$$\big\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \big\rangle = \langle v, w\rangle$$

Demonstração. O resultado é verdadeiro para $w = v$. Assim basta provar quando v e w são perpendiculares. Ou seja, queremos mostar que

$$\big\langle (d\exp_p)_v v, (d\exp_p)_v w \big\rangle = 0$$

Consideramos a função $f(s,t) = \exp_p t(v + sw)$. Segue que $\dfrac{\partial f}{\partial s}(0,1) = (d\exp_p)_v w$ e que $\dfrac{\partial f}{\partial t}(0,1) = (d\exp_p)_v v$. Logo:

$$\big\langle (d\exp_p)_v w, (d\exp_p)_v v \big\rangle = \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}(0,1), \frac{\partial f}{\partial t}(0,1) \right\rangle$$

Iremos mostrar que

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}(0,t), \frac{\partial f}{\partial t}(0,t) \right\rangle = 0$$

De fato, temos

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}(0,t), \frac{\partial f}{\partial t}(0,t) \right\rangle = \left\langle \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial t}(0,t), \frac{\partial f}{\partial s}(0,t) \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}(0,t), \frac{D}{dt}\frac{\partial f}{\partial s}(0,t) \right\rangle$$

O primeiro produto escalar na igualdade acima é nulo, pois uma das entradas é a derivada covariante da derivada da geodésica $t \mapsto f(0,t)$. Usando o lema de simetria 1.9 no outro termo temos

$$\frac{d}{dt}\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle (0,t) = \left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{D}{ds}\frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle (0,t) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle (0,t) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds} t^2(|v|^2 + s^2|w|^2) = 0$$

Isso mostra que $\left\langle \dfrac{\partial f}{\partial s}, \dfrac{\partial f}{\partial t} \right\rangle (0,t)$ não depende de t. Fazendo $t \to 0$ temos $\dfrac{\partial f}{\partial s}(0,t) \to 0$. Logo, segue o afirmado. ■

Seja $p \in M$. Então $\exp_p : T_pM \to M$ é um difeomorfismo local numa vizinhança de $0 \in T_pM$. Assim, sejam $0 \in \tilde{U} \subset T_pM$ e $p \in U$ vizinhanças tais que $\exp_p\big|_{\tilde{U}} : \tilde{U} \to U$ é difeomorfismo.

Observamos que T_pM tem estrutura de espaço vetorial, e portanto, T_vT_pM pode ser naturalmente identificado com T_pM, como fizemos no lema de Gauss acima. E já que T_pM possui produto interno dado pela métrica g de M, obtemos uma estrutura de variedade riemanniana em T_pM, que é equivalente a métrica euclidiana de $\mathbb{R}^n$.

Entretanto, $\exp_p : \tilde{U} \to U$ não é uma isometria. Ainda assim, muitas demonstrações podem ser feitas realizando os cálculos em $\tilde{U}$ e levando os resultados para U. Portanto estabeleceremos a seguinte notação ao longo desse texto. Dado um objeto X, o símbolo $\sim$ será utilizado para denotar o objeto correspondente em T_pM. Assim, se $X \subset U$ é um conjunto, então $\tilde{X}$ é o subconjunto de $\tilde{U}$ tal que $\exp_p(\tilde{X}) = X$. Se γ é uma curva em M, então $\tilde{\gamma}$ denota a curva tal que $\gamma = \exp_p \circ \tilde{\gamma}$. E similarmente faremos para outros tipos de objetos.

O uso de diversos tipos de coordenadas em $\mathbb{R}^n$ pode ser transportado para M usando a aplicação exponencial. Consideraremos inicialmente a aplicação identidade $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Dada uma base ortonormal positiva $\tilde{X}_1, \ldots, \tilde{X}_n$ de T_pM, f induz uma parametrização $\tilde{\psi} : \mathbb{R}^n \to T_pM$ dada por

$$\tilde{\psi}(x^1, \ldots, x^n) = x^1\tilde{X}_1 + \cdots + x^n\tilde{X}_n$$

Sendo $\psi = \exp_p \circ \tilde{\psi}$, obtemos uma parametrização de uma vizinhança de $p \subset M$. Tais coordenadas serão denominadas coordenadas normais centradas em p. Observamos que os campos coordenados dessa parametrização são exatamente os campos $X_i = d\exp_p \cdot \tilde{X}_i$.

Proposição 1.13. Seja M com dimensão 2, $p \in M$. Sendo Γ_{ij}^k os símbolos de Christoffel das coordenadas normais centradas em p, vale que

$$\Gamma_{ij}^k(p) = 0$$

Demonstração. Sejam X_i os campos coordenados da parametrização. Recordamos que

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_m \left(\frac{\partial}{\partial x^i}g_{jm} + \frac{\partial}{\partial x^j}g_{mi} - \frac{\partial}{\partial x^m}g_{ij}\right)g^{mk}$$

Daí, mostraremos que as derivadas parciais dos coeficientes da métrica g_{ij} são nulas em p´. Pelo lema de Gauss 1.12 temos

$$g_{ij}(\exp(tY_i)) = \langle X_i, X_j\rangle_{\exp(tY_i)} = \langle d\exp \cdot Y_i, d\exp \cdot Y_j\rangle_{\exp(tY_i)} = \langle Y_i, Y_j\rangle = \delta_{ij}$$

Isso mostra que $\dfrac{\partial g_{ij}}{\partial x^i}(p) = 0$. Como estamos em dimensão 2 o único caso restante é

$$\frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j}(p) = 2\left\langle \frac{DX_i}{dx^j}, X_i\right\rangle(p) = 2\left\langle \frac{DX_j}{dx^i}, X_i\right\rangle(p) = 2\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^i}(p) - 2\left\langle X_j, \frac{DX_i}{dx^i}\right\rangle(p) = 0$$

Na segunda igualdade usamos o lema de simetria 1.9 e na última igualdade usamos que $x^i(t) = \exp(tY_i)$ é geodésica. Com isso, todos os coeficientes Γ_{ij}^k são nulos em p. ∎

Proposição 1.14. Seja M de dimensão 2, $p \in M$, γ uma curva em M passando por p e $\tilde{\gamma}$ curva em T_pM tal que $\gamma = \exp \circ \tilde{\gamma}$. Se κ é a curvatura de γ em p e $\tilde{\kappa}$ a curvatura de $\tilde{\gamma}$ em $0 \in T_pM$ então vale que $\kappa = \tilde{\kappa}$.

Demonstração. Consideramos γ parametrizada pelo comprimento de arco s com $\gamma(s_0) = 0$. Seja $\tilde{X}_i$ base ortonormal de T_pM de forma que $\gamma'(s_0) = \tilde{X}_1$ e sejam Xi campos coordenados em M com $X_i = d\exp \cdot \tilde{X}_i$. Assim, escrevendo $\tilde{\gamma}(s) = a(s)\tilde{X}_1 + b(s)\tilde{X}_2$ temos

$$\tilde{\gamma}'(s) = a'(s)\tilde{X}_1 + b'(s)\tilde{X}_2 \qquad \text{e} \qquad \gamma'(s) = a'(s)X_1 + b'(s)X_2$$

Além disso, pela proposição 1.13 temos:

$$\frac{D\tilde{\gamma}'}{ds}(s_0) = a''(s_0)\tilde{X}_1 + b''(s_0)\tilde{X}_2 \qquad \text{e} \qquad \frac{D\gamma'}{ds}(s_0) = a''(s_0)X_1 + b''(s_0)X_2$$

Por outro lado em s_0 temos $\gamma' = X_1$ e portanto vale $b'(s_0) = 0$ e $a'(s_0) = 1$. Assim $\frac{D\gamma'}{ds}(s_0) = \kappa X_2$. Comparando isso com a equação anterior obtemos $a''(s_0) = 0$ e $b''(s_0) = \kappa$. Com isso podemos calcular $\tilde{\kappa}$ através da fórmula

$$\tilde{\kappa} = \frac{a'b'' - a''b'}{\left((a')^2 + (b')^2\right)^{3/2}}$$

obtendo $\tilde{\kappa} = \kappa$. ∎

Além de coordenadas normais, as coordenadas polares geodésicas que definimos agora serão de grande utilidade ao longo desse trabalho. Consideramos a aplicação $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ dada por

$$f(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Assim, escohido um par de vetores ortonormais positivamente orientados $\tilde{X}, \tilde{Y}$ a aplicação f induz coordenadas $\tilde{\varphi} : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\tilde{\varphi}(r, \theta) = r\cos\tilde{X} + r\sin\tilde{Y}$ em T_pM. Logo, $\varphi = \exp_p \circ \tilde{\varphi}$ é (localmente) uma parametrização de M. Tais coordenadas serão chamadas de coordenadas polares geodésicas centradas em p. Como usual, denotamos por g_{11}, g_{12} e g_{22} os coeficientes da métrica nessas coordenadas, ou $g_{rr}, g_{r\theta}$ e $g_{\theta\theta}$ quando for necessário distingui-los dos coeficientes de outra parametrização . Observamos que curvas da forma $r =$ cte. são círculos geodésicos e curvas da forma $\theta =$ cte. são geodésicas radiais por p. Pelo lema de Gauss 1.12, os raios são perpendiculares aos círculos geodésicos. Em outras palavras:

Proposição 1.15. Em coordenadas polares geodésicas, os coeficientes da métrica são $g_{11} = 1$, $g_{12} = 0$ e $g_{22} = G^2$.

Podemos calcular os símbolos de Christoffel dessa parametrização em função de G:

Proposição 1.16. Os símbolos de Christoffel das coordenadas polares geodésicas são:

$$\Gamma^1_{22} = \Gamma^r_{\theta\theta} = -G \cdot G_r \qquad \Gamma^2_{12} = \Gamma^\theta_{r\theta} = \frac{G_r}{G} \qquad \Gamma^2_{22} = \Gamma^\theta_{\theta\theta} = \frac{G_\theta}{G}$$

Os demais coeficientes são todos nulos.

De posse dos símbolos podemos calcular a derivada covariante e a curvatura:

Proposição 1.17. Se $\gamma(s) = \varphi(r(s), \theta(s))$ é uma curva e $V = \alpha(s)\dfrac{\partial}{\partial r} + \beta(s)\dfrac{\partial}{\partial \theta}$ é um campo ao longo de γ, então a derivada covariante de V é

$$\frac{DV}{ds} = \left(\alpha' - \beta\theta' G \cdot G_r\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\beta' + \alpha\theta'\frac{G_r}{G} + \beta r'\frac{G_r}{G} + \beta\theta'\frac{G_\theta}{G}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Em particular,

$$\frac{D\gamma'}{ds} = \left(r'' - (\theta')^2 G \cdot G_r\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\theta'' + 2r'\theta'\frac{G_r}{G} + (\theta')^2\frac{G_\theta}{G}\right)\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Demonstração. Usando as propriedades da conexão temos

$$\frac{DV}{ds} = \nabla_{\gamma'}\left(\alpha\frac{\partial}{\partial r} + \beta\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = \alpha'\frac{\partial}{\partial r} + \beta'\frac{\partial}{\partial \theta} + \alpha\nabla_{\gamma'}\frac{\partial}{\partial r} + \beta\nabla_{\gamma'}\frac{\partial}{\partial \theta}$$

Como $\gamma = (r, \theta)$ temos $\gamma' = r'\dfrac{\partial}{\partial r} + \theta'\dfrac{\partial}{\partial \theta}$. Logo

$$\nabla_{\gamma'}\frac{\partial}{\partial r} = \nabla_{\left(r'\frac{\partial}{\partial r} + \theta'\frac{\partial}{\partial \theta}\right)}\frac{\partial}{\partial r} = r'\left(\Gamma^r_{rr}\frac{\partial}{\partial r} + \Gamma^\theta_{rr}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \theta'\left(\Gamma^r_{r\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \Gamma^\theta_{r\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

E similarmente

$$\nabla_{\gamma'}\frac{\partial}{\partial \theta} = \nabla_{\left(r'\frac{\partial}{\partial r} + \theta'\frac{\partial}{\partial \theta}\right)}\frac{\partial}{\partial \theta} = r'\left(\Gamma^r_{r\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \Gamma^\theta_{r\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right) + \theta'\left(\Gamma^r_{\theta\theta}\frac{\partial}{\partial r} + \Gamma^\theta_{\theta\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\right)$$

Substituindo os símbolos de Christoffel dados pela proposição 1.16 acima obtemos o resultado. ∎

Proposição 1.18. A curvatura seccional K pode ser calculada por

$$K = -\frac{G_{rr}}{G}$$

Demonstração. Pela definição de curvatura seccional temos $K = \langle R(X,Y)X, Y\rangle$, para campos ortonormais X, Y. Aplicando para os campos coordenados (ortonormalizando se necessário) obtemos a fórmula de Gauss:

$$\partial_1\Gamma_{12}^2 - \partial_2\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^1\Gamma_{11}^2 + \Gamma_{12}^2\Gamma_{12}^2 - \Gamma_{11}^2\Gamma_{22}^2 - \Gamma_{11}^1\Gamma_{12}^2 = -g_{11}K$$

Usando os símbolos de Christoffel calculados anteriormente temos

$$-K = \partial_r\Gamma_{r\theta}^\theta + \Gamma_{r\theta}^\theta\Gamma_{r\theta}^\theta$$

Logo

$$K = -\frac{G_{rr}}{G}$$

como queríamos. ∎

Usaremos o símbolo $o(x)$ para denotar uma função f que satisfaz

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} = 0$$

Nesse caso dizemos que f é $o(x)$ e escreveremos $f(x) = o(x)$. Usaremos $O(x)$ para denotar uma função f que satisfaz

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x} < \infty$$

Nesse caso dizemos que f é $O(x)$ e escreveremos $f(x) = O(x)$.

Proposição 1.19. Vale que

$$G(r,\theta) = r - \frac{r^3}{6}K + o(r^3)$$

Demonstração. Consideramos parametrizações φ e ψ referentes a coordenadas polares e normais centradas em p, respectivamente. Notamos que $\psi^{-1}\circ\varphi$ é dada por $(r,\theta) \mapsto (x,y) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Disso segue que

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial r} = \cos\theta\dfrac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial\theta} = -r\sin\theta\dfrac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\dfrac{\partial}{\partial y} \end{cases}$$

Sendo g_{xx}, g_{xy}, g_{yy} os coeficientes da métrica em coordenadas normais, temos

$$G^2 = r^2(\sin^2\theta g_{xx} - 2\sin\theta\cos\theta g_{xy} + \cos^2\theta g_{yy})$$

Como em p temos $g_{xx} = g_{yy} = 1$ e $g_{xy} = 0$ (proposição 1.13), da continuidade dessas funções temos $g_{xx} = 1 + o(1)$, $g_{yy} = 1 + o(1)$ e $g_{xy} = o(1)$. Segue que $G = r\sqrt{1 + o(1)} = r + o(r)$. Consideramos então $G = r + ar^2 + br^3 + o(r^3)$. Como $2a + O(r) = G_{rr} = -KG$ temos $a = 0$. Por outro lado

$$G_{rrr} = -KG_r - K_r G \implies 6b = -K(p)$$

onde $K(p)$ denota a curvatura em p. Por fim, notamos que $K = K(p) + o(1)$ (isto significa que $K(p)$ é o primeiro termo da expansão de K em série em torno de p. Ou também que a função $x \mapsto K(x)$ e a função constante $x \mapsto K(p)$ tem o mesmo termo de grau 0 na expansão em série). Assim, $G = r - \frac{K(p)}{6}r^3 + o(r^3) = r - \frac{K}{6}r^3 + o(1)r^3 + o(r^3) = r - \frac{K}{6}r^3 + o(r^3)$. ■

Para concluir essa seção, definiremos o gradiente e a hessiana de uma função $f : M \to \mathbb{R}$: Seja $f : M \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Para cada $p \in M$ existe um único vetor $\nabla f(p) \in T_pM$ tal que

$$\langle \nabla f(p), v \rangle = df_p \cdot v$$

para todo $v \in T_pM$. $\nabla f : M \to TM$ é o gradiente de f. Se f é $\mathscr{C}^2$ podemos definir o Hessiano de f por

$$\text{Hess } f(p) \cdot (X, Y) = \langle \nabla_X \nabla f, Y \rangle$$

onde X, Y são campos diferenciáveis em M.

Lema 1.20. Em coordenadas podemos escrever

$$\nabla f = \sum_{ij} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i} X_j \qquad \text{e} \qquad \text{Hess} f = \sum_{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) dx^i \otimes dx^j$$

onde g^{ij} é a inversa de g_{ij}. Isto é, $\displaystyle\sum_k g_{ik} g^{kj} = \delta_{ij}$.

Demonstração. De fato, seja $\nabla f = \displaystyle\sum_k f^k X_k$. Então vale que

$$\langle \nabla f, X_i \rangle = \left\langle \sum_k f^k X_k, X_i \right\rangle = \frac{\partial f}{\partial x^i} \implies \sum_k f^k g_{ki} = \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Multiplicando por g^{ij} e somando em i obtemos

$$\sum_{i,j} f^k g_{ki} g^{ij} = \sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} g^{ij}$$

Como $\sum_i g_{ki} g^{ij} = \delta_{ij}$ segue que

$$f^k = \sum_i g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^i}$$

Para a hessiana, primeiro observamos que $\langle \nabla f, Y\rangle = df \cdot Y = Yf$. Logo, derivando em X temos

$$X(Yf) = \langle \nabla_X \nabla f, Y\rangle + \langle \nabla f, \nabla_X Y\rangle$$

Portanto $\mathrm{Hess} f(X,Y) = X(Yf) - (\nabla_X Y)\, f$. Escrevendo $\mathrm{Hess} f = H_{ij} dx^i \otimes dx^j$, ou seja, $H_{ij} = \mathrm{Hess} f(X_i, X_j)$ obtemos

$$H_{ij} = X_i(X_j f) - (\nabla_{X_i} X_j)\, f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \sum_k \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}$$

como queríamos. ∎

Assim como no caso real, o gradiente de uma função aponta para a direção de maior crescimento. Para a função distância, o gradiente está naturalmente associado as geodésicas. Definiremos agora uma função distância que coincide com a distância de M em vizinhanças suficientemente pequenas, o que justifica o uso da mesma notação.

Definição 1.21. Seja $p \in M$ e U uma vizinhança normal de p. Para $x \in U$ definimos a distância $d(p,x)$ como

$$d(p,x) = |(\exp_p)^{-1}(x)|$$

Observação 1.22. Para pontos próximos, a distância definida acima coincide com a distância usual. Isto é, com o ínfimo de todos os caminhos diferenciáveis por partes ligando os pontos p, x. Assim, usaremos a mesma notação para ambas. Como estamos trabalhando apenas dentro de vizinhanças totalmente normais neste texto, salvo menção em contrário, a distância se refere a esta função.

Proposição 1.23. A aplicação $x \mapsto d(p,x)$ é de classe $\mathscr{C}^\infty$ para $x \in U \setminus \{p\}$. A aplicação $x \mapsto d^2(p,x)$ é $\mathscr{C}^\infty$ em todo U.

Demonstração. De fato, $x \neq p \implies \exp_p^{-1}(x) \neq 0$. Como $\exp_p^{-1}$ é $\mathscr{C}^\infty$ e $t \mapsto \sqrt{t}$ também é para $t \neq 0$ segue o afirmado pela regra da cadeia. ∎

Proposição 1.24. Sendo $d_p(x) = d(p,x)$ vale que

$$\exp_x\left(-d_p(x) \cdot \nabla d_p(x)\right) = p$$

Demonstração. De fato, seja w tal que $\exp_x(w) = p$. Assim, consideramos a curva $\gamma(t) = \exp_x(tw)$. Disso segue que $d_p(\gamma(t)) = (1-t)|w|$. Logo temos

$$\left\langle \nabla d_p(x), \gamma'(0) \right\rangle = -|w|$$

Como $\gamma'(0) = w$, pela desigualdade de Cauchy segue que $\nabla d_p(x)$ é um vetor unitário na direção de $-w$. Assim segue a afirmação. ■

Capítulo 2

Convexidade

Introdução

Neste capítulo discutiremos a convexidade de um conjunto Ω em uma variedade M de dimensão 2. Queremos relacionar a curvatura geodésica de $\partial\Omega$ com a convexidade, como é feito no plano. Nos restringiremos a situação onde Ω está contido numa vizinhança totalmente normal e é limitado.

A próxima seção contém as notações utilizadas nesse capítulo e no restante do texto. Na seção que segue, definimos convexidade e analisamos cada ponto de $\partial\Omega$ localmente, através das geodésicas tangentes. Apenas o necessário é desenvolvido aqui; uma caracterização mais geral pode ser obtida usando funções de Busemann [1]. Na seção final, analisaremos a curvatura de $\partial\Omega$.

2.1 Notações

M é uma variedade de dimensão 2 completa e com métrica Riemanniana g. Trabalharemos sempre dentro de um conjunto $U \subset M$, onde U é aberto, conexo, simplesmente conexo e uma vizinhança totalmente normal. Essa última restrição é motivada pelo seguinte fato: fora de vizinhanças totalmente normais, nem sempre é verdade que a aplicação do bilhar (a ser definida no capítulo seguinte) tem a propriedade *twist*. É o que acontece por exemplo, com o equador da esfera. Qualquer partícula partindo de um ponto do equador atingirá o ponto antípoda, independente do ângulo inicial. Isto é, toda órbita tem período dois pela aplicação do bilhar.

Usaremos a seguinte terminologia para geodésicas. Dados p, q pontos de M, uma M-geodésica por p, q é uma curva $\eta : \mathbb{R} \to M$ que contém p e q em sua imagem e tal que $\dfrac{D\eta'}{ds} = 0$. Entretanto, estamos interessados apenas no que acontece em U. Como U não é necessariamente completa

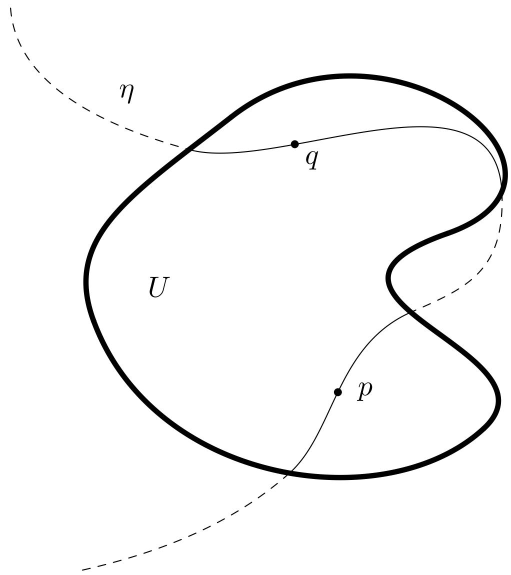


Figura 2.1: Geodésicas em U.

(apesar de M ser), é possível que a imagem de η não esteja contida em U. Assim, por U-geodésica entenderemos uma restrição de η a intervalos I de forma que $\eta(I) \subset U$. Pediremos que tais intervalos sejam maximais. Isto é, se $J \supset I$ e $J \neq I$ então $\eta(J) \not\subset U$. Observamos que com essa terminologia, dados $p, q \in U$, pode não existir a U-geodésica passando por tais pontos. De fato, a mesma curva η pode dar origem a mais de uma U-geodésica (figura 2.1). Por outro lado, sabemos que as U-geodésicas não possuirão auto interseção. Além disso, qualquer U-geodésica dividirá U em duas componentes conexas, ambas simplesmente conexas. Nesse capítulo, o termo geodésica sem o acompanhamento de U ou M se refere a U-geodésicas.

Ao usarmos a expressão 'a geodésica por p e q', assumiremos que $\eta : I \to U$ estará orientada no sentido de p a q. Por outro lado, o segmento (ou arco) geodésico por p e q denotará apenas o trecho da geodésica que vai de p a q. Isto é, é uma curva $\eta : [a, b] \to M$ com $\eta(a) = p$ e $\eta(b) = q$. Por fim, se $\eta : I \to U$ é uma geodésica passando por $\gamma(s) = p$, então um raio geodésico com origem em p é a restrição de η a $\{s\}$ unido a uma das componentes conexas de $I \setminus \{s\}$.

Usando a aplicação exponencial podemos cobrir o conjunto U por uma única carta. Assim, podemos fixar uma orientação para U. Os ângulos serão sempre orientados. Ou seja, dados $v, w \in T_pU$, a expressão "o ângulo entre v e w indica o ângulo orientado de v para w e é distinta da expressão "o ângulo entre w e v". Usaremos o símbolo $\perp$ para denotar a rotação de um vetor em $\pi/2$ no sentido positivo. Ou seja, se $v \neq 0$, então $v^\perp$ é o único vetor tal que $||v^\perp|| = ||v||$ e $\{v, v^\perp\}$ é uma base ortogonal positiva. Dadas duas curvas α, β concorrentes em um ponto, o ângulo entre α e β é o ângulo formado por seus respectivos vetores tangentes.

Neste capítulo, todas as curvas serão regulares de classe $\mathscr{C}^1$, como no capítulo anterior. Além disso, assumiremos também que serão simples. Dada uma curva (simples) e fechada $\gamma \subset U$, pelo teorema da curva de Jordan, $U \setminus \gamma$ tem duas componentes conexas, uma das quais, Ω, é simplesmente conexa. Diremos que Ω é o interior de γ. Similarmente, a outra componente é denominada o exterior de γ. Diremos também que γ está positivamente orientada caso sua orientação seja compatível com a orientação de Ω (que por sua vez é herdada de U).

Seja p um ponto de U. Então existe $\tilde{U}_p \subset T_pM$ tal que a restrição de $\exp_p$ a $\tilde{U}_p$ é difeomorfismo sobre U. A partir de agora, $\exp_p$ sempre denotará tal restrição. Ou seja, $\exp_p = \exp_p\big|_{\tilde{U}_p} : \tilde{U}_p \to U$. Quando for claro pelo contexto, usaremos $\tilde{U}$ ao invés de $\tilde{U}_p$.

Como T_pM é espaço vetorial, dado $v \in \tilde{U}$, $T_v\tilde{U}$ pode ser naturalmente identificado com T_pM. Logo, $\tilde{U}$ é variedade riemanniana com métrica $\tilde{g} = g_p$, onde g_p é o produto interno de T_pM. Em outras palavras, $\tilde{U}$ é, desse ponto de vista, igual a um aberto de $\mathbb{R}^2$ com a métrica euclidiana. Observamos que com essas métricas, $\exp_p$ não necessariamente é uma isometria. Mas como as contas em geral são mais fáceis em $\tilde{U}$, muitas demonstrações serão realizadas trazendo objetos de U para $\tilde{U}$, via $\exp_p^{-1}$. Feitos os cálculos em $\tilde{U}$, levaremos os resultados de volta com $\exp_p$. Com isso em mente, adotaremos o símbolo $\sim$ para denotar objetos em $\tilde{U}$. Mais precisamente, se $A \subset U$, então $\tilde{A}$ será um conjunto contido em $\tilde{U}$ de forma que $\exp_p^{-1}(A) = \tilde{A}$. Dada uma curva $\gamma : I \to U$, então $\tilde{\gamma} : I \to \tilde{U}$ é a curva definida por $\tilde{\gamma} = \exp_p^{-1} \circ \gamma$. Se X é um campo em U, então $\tilde{X}$ é o campo em $\tilde{U}$ tal que $d\exp_p \cdot \tilde{X} = X$. Se θ é o ângulo entre as curvas α e β, então $\tilde{\theta}$ é o ângulo formado por $\tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ ($\tilde{\theta}$ é medido usando a métrica $\tilde{g}$). Por fim, se κ é a curvatura geodésica de uma curva α, então $\tilde{\kappa}$ é a curvatura geodésica de $\tilde{\alpha}$.

Consideraremos em U a distância como na definição 1.21. Isto é, $d : U \times U \to \mathbb{R}$,

$$d(x, y) = |\exp_x^{-1}(y)| = |\exp_y^{-1}(x)|$$

Observamos que tal distância não é necessariamente igual à distância de U como variedade Riemanniana. Assim, o termo distância será usado exclusivamente para a função definida acima.

2.2 Convexidade

Definição 2.1. Um conjunto $\Omega \subset U$ tem a **propriedade de convexidade** se $\overline{\Omega} \subset U$ e se para quaisquer $p, q \in \Omega$ existe um segmento geodésico ligando p, q contido em Ω.

Se Ω tem a propriedade de convexidade, então existe exatamente um segmento geodésico passando por $p, q \in \Omega$ contido em Ω. Essa é uma das vantagens de se trabalhar numa vizinhança totalmente normal. De fato, caso η_1 e η_2 sejam dois segmentos geodésicos por p, q, observamos que $\tilde{\eta}_1, \tilde{\eta}_2 \subset \tilde{U}_p$ são segmentos de reta ligando $0 \in \tilde{U}_p$ e $\tilde{q} = \exp_p^{-1}(q)$. Logo $\tilde{\eta}_1 = \tilde{\eta}_2 \implies \eta_1 = \eta_2$.

Outra propriedade de um conjunto Ω com a propriedade de convexidade é que são estrelados a partir de qualquer ponto interior. Em particular são simplesmente conexos. Além disso, se Ω tem a propriedade de convexidade, o conjunto $\overline{\Omega}$ também a possui. Observamos que se $\overline{\Omega}$ é um quadrado, então sua fronteira contém segmentos geodésicos. Ou seja, é possível que dados $p, q \in \partial\Omega$, o segmento geodésico por tais pontos esteja inteiramente contido em $\partial\Omega$. Isso não aconteceria caso $\overline{\Omega}$ fosse um círculo, por exemplo. Alguns autores dizem que o círculo é estritamente convexo, e que o quadrado é apenas convexo. Neste trabalho, estamos interessados apenas no caso estrito, assim definiremos convexidade para nos restringirmos a apenas essa situação. Nesse capítulo, usaremos a letra Ω para denotar um conjunto convexo, conforme a definição a seguir.

Definição 2.2. Um conjunto $\Omega \subset U$ é **convexo** se possui a propriedade de convexidade, é aberto, e sua fronteira $\partial\Omega$ é uma curva regular de classe $\mathscr{C}^1$. Além disso, $\partial\Omega$ não deve conter nenhum segmento geodésico. Equivalentemente, dados $p, q \in \partial\Omega$, o segmento geodésico η por p, q deve estar contido em $\Omega \cup \{p, q\}$.

Definição 2.3. Dado um conjunto convexo Ω definimos a **distância** $d(p, q)$ entre $p, q \in \overline{\Omega}$ como o comprimento do segmento geodésico por p, q.

A distância definida acima coincide com d da definição 1.21 que estamos usando em U. Observamos que d não necessariamente coincide com a distância (geodésica) de M, apenas para pontos próximos o suficiente. Por outro lado, Ω é uma subvariedade de M, e sua distância como variedade riemanniana é exatamente d. Assim, intuitivamente, usar d é considerar apenas o que acontece em Ω e abandonar M. Além disso, pela proposição 1.23 d é $\mathscr{C}^\infty$ se $p \neq q$ e d^2 é $\mathscr{C}^\infty$ em todo $\overline{\Omega} \times \overline{\Omega}$.

Definição 2.4. Dizemos que uma curva γ em U é **convexa** se γ é uma curva regular de classe $\mathscr{C}^1$, fechada e é o bordo de um conjunto convexo Ω.

Observamos que existem conjuntos convexos cuja fronteira não é uma curva fechada. Isso acontece por exemplo, no conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y > x^2\}$. Tal conjunto é convexo considerando a métrica usual de $\mathbb{R}^2$ e sua fronteira é a parábola de equação $y = x^2$, que é regular mas não é fechada. Nesse trabalho estamos interessados em curvas fechadas, pois serão o bordo de mesas de bilhar, por isso removemos tais casos da definição.

Sabemos que no plano conjuntos convexos também podem ser caracterizados em termos de suas retas tangentes. Mais precisamente, um conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ cujo bordo é suave e não contém segmentos de reta, é convexo se, e somente se, está totalmente contido em um dos semiplanos determinado por suas tangentes. Em geral numa variedade perdemos esse aspecto 'global' das geodésicas tangentes. Mas aqui estamos trabalhando apenas dentro de U. Recordamos que por geodésicas (mais precisamente, U-geodésicas) entendemos as restrições de M-geodésicas, de forma que estejam inteiramente contidas em U e são maximais em relação a essa propriedade (isto é, não é possível 'prolongar' as geodésicas sem sair de U). Ou seja, aqui as geodésicas são sempre homeomorfas a intervalos. Não temos problemas como auto interseções, ou geodésicas fechadas. Com isso em mente, estabeleceremos algumas notações para uso neste capítulo.

Observação 2.5. Qualquer geodésica divide U em duas componentes simplesmente conexas. Faz sentido então dizer que um determinado ponto ou conjunto está neste ou naquele lado de uma dada geodésica.

Definição 2.6. Dizemos que uma curva regular $\gamma \subset U$ é **suportada** no ponto $p \in \gamma$ se $\gamma \setminus \{p\}$ está totalmente contida em uma das componentes conexas de $U \setminus \eta$, onde η é a geodésica tangente a γ no ponto p.

Na definição acima, se γ é suportada no ponto p, então $\eta \cap \gamma = \{p\}$. Tal condição é necessária, mas não suficiente. Por exemplo, na curva $\gamma_1 \subset \mathbb{R}^2$ cuja equação é $y = x^3$, a geodésica η_1 tangente na origem é o eixo x, cuja interseção com γ_1 é apenas a origem. Entretanto, γ_1 não é suportada nesse ponto, pois possui pontos acima e abaixo do eixo x. Por outro lado, o que ocorreu com γ_1 é bem distinto do que acontece com a curva γ_2, de equação $y = x^3 - 3x$ (figura 2.2). Quando $x = 1$, a função $f(x) = x^3 - 3x$ tem um mínimo local. Assim, a geodésica η_2 tangente à γ_2 no ponto $(1, -2)$ é uma reta horizontal. Isso implica que $\eta_2 \cap \gamma_2$ tem dois pontos, a saber, $(1, -2)$ e $(-2, -2)$. Em particular γ_2 não é suportada em $(1, -2)$. Com base na diferença entre as duas situações acima, introduziremos o conceito de uma curva localmente suportada.

Dada uma curva γ, um ponto $p \in \gamma$, $p = \gamma(s_0)$ (recordamos que por curva podemos nos referir tanto a aplicação $\gamma : I \to M$ quanto à seu traço) e uma bola B aberta centrada em p, então γ_p denota a restrição $\gamma\big|_J : J \to U$ onde J é o maior subintervalo de I contendo s_0 tal que $\gamma(J) \subset B$. Isto é, γ_p é a componente conexa de $\gamma \cap B$ que contém p, já que nesse capítulo todas as curvas são simples (figura 2.3).

Definição 2.7. Dizemos que uma curva $\gamma \subset U$ é **localmente suportada** em $p \in \gamma$ se existe uma bola aberta B centrada em p tal que γ_p é suportada.

Digamos agora que $\gamma \subset U$ é fechada, com interior Ω (isto é, Ω é a componente conexa simplesmente conexa de $U \setminus \gamma$) e exterior Σ. Se γ é localmente suportada em p, considere B da definição. Então devemos ter $\eta_p \cap \Omega = \varnothing$ ou $\eta_p \cap \Sigma = \varnothing$, onde η é a geodésica tangente a γ no ponto p e η_p é a restrição de η a bola B. Caso seja $\eta_p \cap \Omega = \varnothing$, diremos que Ω é o **lado côncavo** de γ no ponto p e que Σ é o **lado convexo**. Similarmente, no segundo caso, diremos

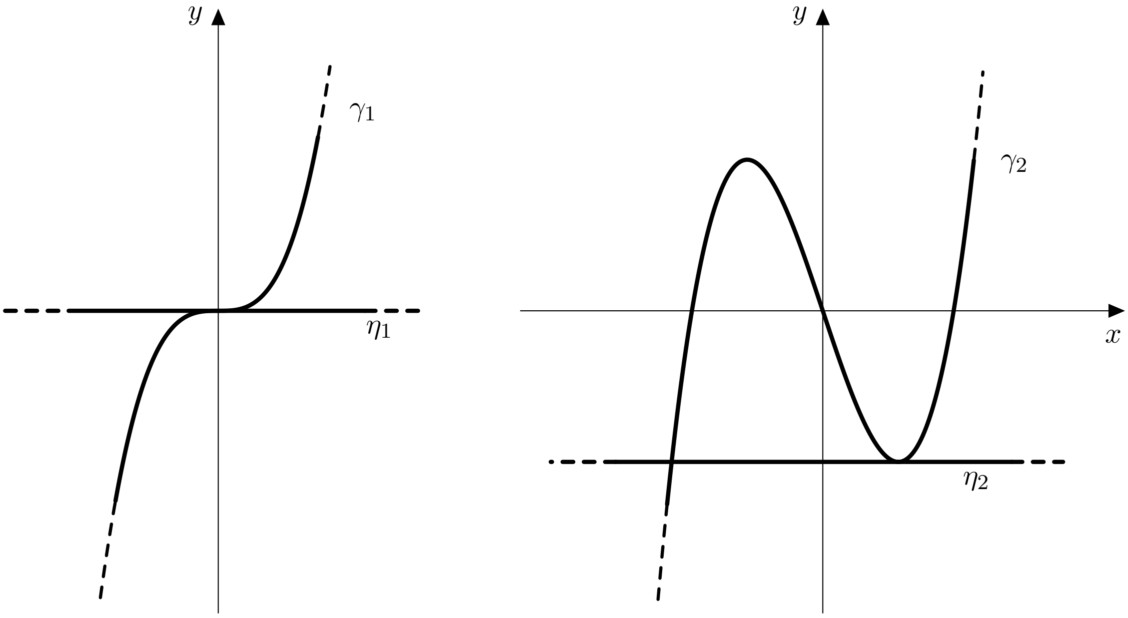


Figura 2.2: γ_1 e γ_2 não são suportadas por η_1 e η_2.

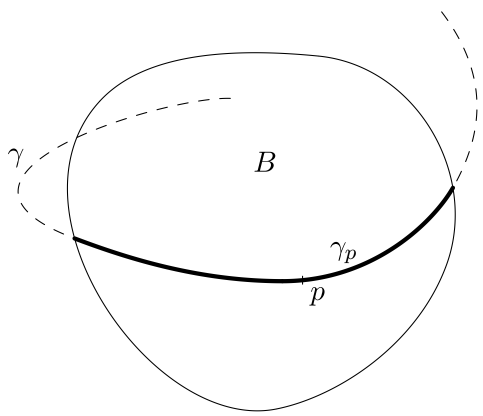


Figura 2.3: O segmento γ_p da curva γ em relação a bola B.

que Σ é o lado côncavo de γ em p e que Ω é o lado convexo. Usaremos o símbolo L_p para denotar o lado côncavo de uma curva simples e fechada γ no ponto p. Assim, devemos ter sempre $L_p = \Omega$ ou $L_p = \Sigma$, quando L_p estiver definido.

Voltamos ao problema de caracterizar convexidade por suas tangentes. Já podemos enunciar o principal resultado dessa seção:

Teorema 2.8. Uma curva regular $\mathscr{C}^1$ simples e fechada $\gamma \subset U$ é convexa se, e somente se, é suportada em todos os seus pontos.

Dividiremos a demonstração em duas proposições, sendo a primeira a ida e a segunda a volta.

Proposição 2.9. Seja γ convexa e $p \in \gamma$. Então γ é suportada em p.

Demonstração. Seja Ω o interior de γ. Dado $p \in \gamma$, seja S um círculo geodésico centrado em p. Definimos a função $f : S \to \{0, 1\}$ da seguinte forma. $f(s) = 0$ se o raio geodésico $r(s)$ partindo de p na direção de s não tem pontos de Ω e $f(s) = 1$ caso contrário. Notamos que $f^{-1}(1)$ é um arco aberto de S. De fato, dados $s_1, s_2 \in S$, com $f(s_1) = f(s_2) = 1$, então existem $q_1, q_2 \in \Omega$ com $q_1 \in r(s_1)$ e $q_2 \in r(s_2)$. Pela convexidade de Ω, o segmento geodésico por q_1, q_2 está contido em Ω. Daí, $f^{-1}(1)$ é conexo. E é aberto pois Ω é aberto.

Por outro lado, $f^{-1}(1)$ não pode conter dois pontos diametralmente opostos de S. Isso implicaria que p está contido em um segmento geodésico com extremos em Ω, e portanto, $p \in \Omega$ por convexidade. Logo, existem dois pontos diametralmente opostos de S em $f^{-1}(0)$. Assim, existe uma geodésica por p que não contém pontos de Ω. A única possibilidade é que tal geodésica seja tangente a γ. Logo, γ é suportada no ponto p, como queríamos demonstrar. ∎

Observação 2.10. A proposição acima implica que sendo γ convexa, então $L_p = \Omega$ para todo $p \in \gamma$.

Proposição 2.11. Seja $\gamma \subset U$ uma curva regular ($\mathscr{C}^1$) simples fechada. Se γ é suportada em todos os seus pontos, então é convexa.

Demonstração. Pelo teorema da curva de Jordan, seja Ω o interior de γ. Como γ é suportada em todo ponto, não existem segmentos geodésicos contidos em $\partial\Omega$. Assim, resta verificar que Ω tem a propriedade de convexidade. Dados $q_1, q_2 \in \Omega$, seja η, o segmento M-geodésico por esses pontos. Caso η não esteja contido em Ω, existiria $p \in \eta \cap \partial\Omega$. Mas isso implica que γ não pode ser suportada em p. De fato, $\tilde{q}_1$, $\tilde{q}_2$ e 0 são colineares em T_pM e portanto nenhuma reta passando pela origem de T_pM deixa $\tilde{q}_1$ e $\tilde{q}_2$ em um mesmo semiplano (aberto) de T_pM. Logo, concluímos

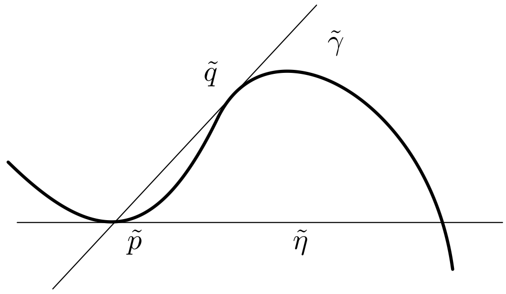


Figura 2.4: $L_p \neq L_q$.

que $\eta \subset \Omega$. ■

Se uma curva γ é suportada em p, então também é localmente suportada nesse ponto. Fica então a questão de saber se uma curva fechada e simples localmente suportada em todos os pontos é suportada em todos os pontos. Faremos uma breve discussão informal sobre o problema. Se γ é localmente suportada em p mas não é suportada, deve existir um ponto além de p em $\gamma \cap \eta$, onde η é a geodésica tangente. Mas isso implica a existência de $q \in \gamma$ com $L_p \neq L_q$. A figura 2.4 retrata a situação em T_pM. O problema é descobrir se é possível ir de p a q sem passar por um ponto r tal que L_r não está está definido. Em outras palavras, é possível que as geodésicas tangentes passem de um lado para o outro da curva sem passar por um ponto de inflexão?

Por outro lado, as geodésicas tangentes variam continuamente, já que a curva é $\mathscr{C}^1$. Isso implica que o ângulo φ da tangente varia continuamente ao longo da curva. Espera-se que na situação da figura 2.4, exista r onde φ tem um máximo ou mínimo, e isso implicaria que L_r não está definido. De fato o comportamento de φ fornece muita informação sobre a convexidade de uma curva. Para curvas com maior regularidade, podemos falar nas derivadas de φ. O caso $\mathscr{C}^2$ é o assunto da próxima seção, e a derivada primeira de φ é justamente a curvatura geodésica.

Terminaremos a seção mostrando que círculos geodésicos suficientemente pequenos são convexos. Exemplo adaptado de [8].

Lema 2.12. Seja $C \subset U$ um círculo geodésico de raio r e interior Ω. Se r é suficientemente pequeno, então $L_p = \Omega$ para todo $p \in C$. Em particular, C é localmente suportada.

Demonstração. Sejam p o centro de C, $q \in C$ e η a geodésica tangente a C em q. Digamos que $\eta(0) = q$ e seja $f(s) = d^2(\eta(s), p)$. Pela proposição 1.23 f é $\mathscr{C}^2$. Vamos provar que 0 é ponto de mínimo local para f. De fato, se $\eta(s) = \exp_p v(s)$ então $f(s) = \|v(s)\|^2$. Logo

$$f'(s) = 2\left\langle v'(s), v(s)\right\rangle$$

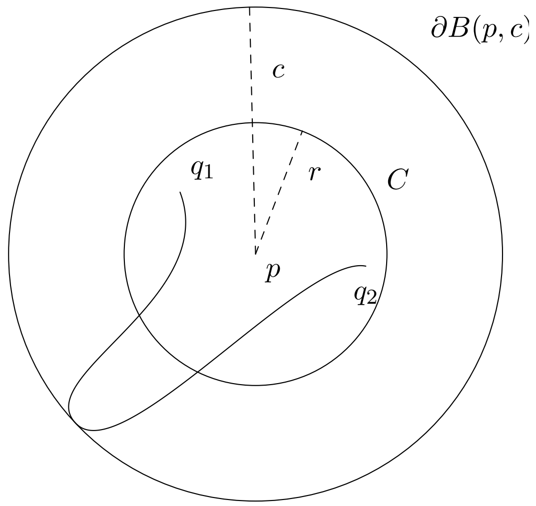


Figura 2.5: Círculos pequenos são convexos.

Pelo lema de Gauss (lema 1.12) $f'(0) = 0$ e portanto 0 é ponto crítico. Derivando novamente obtemos

$$f''(s) = 2\left\langle v''(s), v(s)\right\rangle + 2\|v'(s)\|^2$$

Observando que se η é uma geodésica passando pela origem, então $f''(0) = 2$. Assim por continuidade, se o raio de C é pequeno o suficiente temos $f''(0) > 0$. Logo 0 é mínimo local de f. ■

Proposição 2.13. Seja $C \subset U$ um círculo geodésico de raio r. Se r é suficientemente pequeno, C é convexo.

Demonstração. Seja C um círculo geodésico com interior Ω, centro em p e raio r. Suponhamos que r é pequeno o suficiente para que $B(p, 4r) \subset U$ e que o lema anterior vale para $4r$. Ou seja, círculos de raio menor ou igual a $4r$ e centro p são localmente suportado em todo ponto.

Dados dois pontos $q_1, q_2 \in \Omega$, pela desigualdade triangular, o segmento geodésico η por tais pontos tem comprimento menor que $2r$. Daí η está contido em $B(q_1, 2r) \subset B(p, 4r)$. Caso fosse $\eta \not\subset \Omega$, existe $c \geq r$ mínimo tal que tal geodésica está contida em $\overline{B}(p, c)$ (figura 2.5). Mas como $c < 4r$, isso contradiz o lema anterior. ■

2.3 Curvatura e Convexidade

O objetivo dessa seção é relacionar a curvatura geodésica com convexidade, assim como acontece para curvas no plano. Para isso as curvas serão $\mathscr{C}^2$ e parametrizadas por comprimento de arco, salvo menção em contrário. κ denotará a curvatura geodésica.

Recordamos da seção anterior que um conjunto convexo Ω está contido em um dos lados de suas geodésicas tangentes. Como nenhuma geodésica fica presa a conjuntos compactos de U, segue que as tangentes de Ω sempre estão no seu exterior. Isto é, $L_p = \Omega$ para todo $p \in \partial\Omega$. Portanto, ter informações sobre L_p é útil para decidir a convexidade de uma curva. E a curvatura geodésica fornece informações sobre L_p como veremos.

Dada $\gamma \subset U$ regular, simples e fechada com interior Ω e exterior Σ, e $p \in \gamma$, diremos que um vetor não nulo $v \in T_pM$ aponta para Ω (respectivamente Σ) se v não é tangente a γ, e a geodésica η com $\eta(0) = p$, $\eta'(0) = v$ é tal que $\eta(t) \in \Omega$ (respectivamente Σ) para $0 < t < \varepsilon$ e algum $\varepsilon > 0$.

Proposição 2.14. Seja $\gamma \subset U$ uma curva regular, simples e fechada. Se $\gamma(s_0) = p$ e $\kappa(s_0) \neq 0$ então γ é localmente suportada em p e $\dfrac{D\gamma'}{ds}(s_0)$ aponta para L_p.

Demonstração. Pelo Lema 1.14 a curvatura de $\tilde{\gamma}$ em $\tilde{\gamma}(s_0) = 0$ é $\tilde{\kappa}(s_0) = \kappa(s_0) \neq 0$. Por continuidade, a curvatura de $\tilde{\gamma}$ é não nula em um intervalo contendo s_0. Isso mostra que $\tilde{\gamma}$ está (localmente) contida em um dos lados da sua reta tangente na origem. Logo, γ é localmente suportada em p. Por outro lado, sendo $n(s_0) = \gamma'(s_0)^{\perp}$ o vetor normal a γ, segue que $\tilde{\gamma}''(s_0) = \tilde{\kappa}(s_0)n(s_0)$ aponta para $\tilde{L_p}$, pelas propriedades da curvatura no plano. Assim, $d(\exp_p)_0 \cdot \tilde{\kappa}(s_0)n(s_0)$ aponta para L_p. Como $d\exp_p$ é a identidade na origem segue que $\dfrac{D\gamma'}{ds}(s_0)$ aponta para L_p, como queríamos demonstrar. ■

Seja $\Omega \subset U$ aberto com fronteira regular. Então Ω é subvariedade de U e herda sua orientação. Dizemos que $\partial\Omega$ está positivamente orientado quando sua orientação é compatível com a orientação de Ω.

Corolário 2.15. Seja γ uma curva convexa. Então $\kappa \geq 0$ se γ está positivamente orientada, ou $\kappa \leq 0$ caso contrário.

Demonstração. Caso houvessem pontos p, q onde a curvatura geodésica tem sinal distinto, teríamos $L_p \neq L_q$. Isso contradiz a Observação 2.10. Por outro lado, a normal a γ aponta para seu interior se, e somente se, γ está positivamente orientada. Disso seguem as afirmações ■

A recíproca do corolário acima não é válida. É possível encontrar curvas positivamente orientadas cuja curvatura satisfaz $\kappa \geq 0$ e não são convexas. Basta que elas contenham, por exemplo, um segmento de geodésica, como acontece com a curva em formato de estádio. Por outro lado, na proposição provaremos a seguir que se $\kappa > 0$ então a curva é de fato convexa. Por fim,

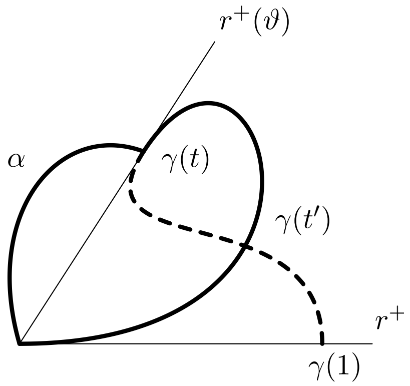


Figura 2.6: Caso $\lambda < 0$.

observamos também que não podemos melhorar o corolário acima, pois existem curvas convexas que possuem pontos de curvatura nula.

Lema 2.16. Seja $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ uma curva regular de classe $\mathscr{C}^1$ e simples de forma que $\gamma(0) = (0,0)$ e $\gamma(1) = (1,0) = \gamma'(0)$. Se $\gamma((0,1))$ não tem pontos no eixo x, existem $t \in (0,1)$ e $\lambda > 0$ tal que $\gamma'(t) = \lambda\gamma(t)$. Além disso, o traço de γ está contido no cone determinado por $(1,0)$ e $\gamma'(t)$. Isto é, o conjunto $\{c_1(1,0) + c_2\gamma'(t);\, c_1, c_2 \geq 0\}$.

Demonstração. Como $\gamma(s)$ não intercepta o eixo x para $s \in (0,1)$, podemos supor sem perda de generalidade que $\gamma(s)$ está acima do eixo x. A semirreta $r^+ = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2;\, x > 0\}$ contém pontos de γ, mas a semirreta $r^- = \{(x,0) \in \mathbb{R}^2;\, x < 0\}$ não. Consideramos $r^+(\theta)$ a rotação de r^+ no sentido positivo em um ângulo θ. Seja $K = \{\theta \in [0,\pi];\, r^+(\theta) \cap \gamma((0,1]) \neq \varnothing\}$. Como $\gamma([0,1])$ é compacto e $\gamma'(0) = (1,0)$, K é compacto. Daí tem máximo $\vartheta < \pi$, já que $r^- = r^+(\pi)$ não encontra γ. Disso segue que existe $t \in (0,1)$ mínimo com $\gamma(t) \in r^+(\vartheta)$ e que γ está contida no cone C cuja fronteira são as semirretas r^+ e $r^+(\vartheta)$ e o ponto $(0,0)$. Além disso, $r^+(\vartheta)$ deve tangenciar γ. De fato, caso não o fosse, γ deveria ter pontos em ambos os semiplanos definidos por $r^+(\vartheta)$, o que contradiria a maximalidade de ϑ. Logo, existe $\lambda \neq 0$ tal que $\gamma'(t) = \lambda\gamma(t)$.

Resta mostrar que $\lambda > 0$. Seja α uma curva simples ligando a origem a $\gamma(t)$, de forma que esses são os únicos pontos de α no cone C. E seja β a curva obtida pela união de $\gamma([0,t])$ e α. Como γ é uma curva simples, segue que β é uma curva simples e fechada. Pelo teorema de Jordan, β tem interior e exterior bem definidos. Daí, caso fosse $\lambda < 0$, deveríamos ter $\gamma(t+\varepsilon)$ contido no interior de β para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno. Mas como $\gamma(1)$ está no exterior, pela continuidade de γ, existe $t' > t$ com $\gamma(t') \in \beta$ (figura 2.6). Por fim, $\gamma'(t) \in C \implies \gamma'(t) \in \gamma$. Mas isso é uma contradição, já que γ é simples. Portanto, $\lambda > 0$, como queríamos demonstrar.
■

Proposição 2.17. Seja $\gamma \subset U$ uma curva simples e fechada. Se γ tem curvatura geodésica

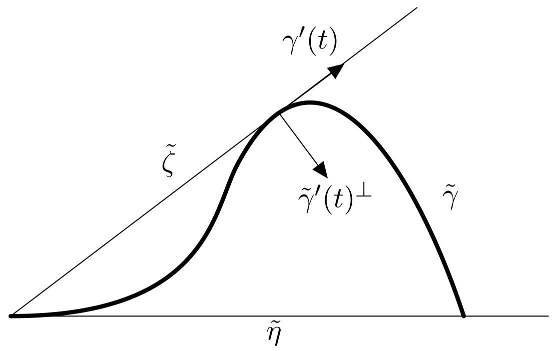


Figura 2.7: Prova da proposição 2.17

positiva então γ é convexa.

Demonstração. Vamos provar que γ é suportada em todos os seus pontos. Daí o resultado seguirá do teorema 2.8. Seja $p = \gamma(0)$ e η a geodésica tangente. Se η não é suporte de γ, então existe $q \in \gamma$ contido em η. Sem perda de generalidade, podemos supor que $\gamma(1) = q$ e que $\gamma([0,1]) \cap \eta = \{p, q\}$. Levando o problema para T_pM e identificando $\tilde{\eta}$ com o eixo x, pelo lema 1.14 temos $\tilde{\kappa}(0) > 0$. Logo, $\tilde{\gamma}((0,1))$ está acima do eixo x. Pelo lema 2.16, existe $t \in (0,1)$ e $\lambda > 0$ tal que $\tilde{\gamma}'(t) = \lambda\gamma(t)$. Além disso, $\gamma([0,1])$ está contida num cone $\tilde{C}$.

Observamos que se $\tilde{\zeta}$ é a reta passando pela origem com direção $\gamma'(t)$, então $\zeta = \exp_p \circ \tilde{\zeta}$ é geodésica. Daí, $-d\exp_p \cdot \tilde{\gamma}'(t)^{\perp}$ aponta para $L_{\gamma(t)}$. Mas pelo lema de Gauss, esse vetor é um múltiplo negativo de $\gamma'(t)^{\perp}$. Como $\dfrac{D\gamma'}{ds}(t)$ aponta para $L_{\gamma(t)}$ (proposição 2.14) segue que $\kappa(t) \leq 0$, que é uma contradição. Logo, γ é suportada em p, e portanto é convexa. ■

A mesma prova ainda vale quando a curva tem descontinuidades na curvatura, desde que existam os limites laterais. De fato, a informação realmente usada foi o sentido de $\dfrac{D\gamma'}{ds}$.

Corolário 2.18. Seja $\gamma \subset U$ uma curva simples e fechada $\mathscr{C}^2$ exceto num número finito de pontos onde é $\mathscr{C}^1$ e existem os limites laterais da curvatura. Suponhamos também que $\kappa > \varepsilon > 0$. Então γ é convexa.

Para concluir a seção, provaremos que círculos pequenos têm curvatura geodésica não nula, generalizando a proposição 2.12.

Proposição 2.19. Seja $\gamma \subset U$ um círculo geodésico de raio r. Se r é suficientemente pequeno, γ tem curvatura não nula.

Demonstração. Seja p o centro de γ. Por definição de círculo, $d(p, \gamma(s)) = d_p(\gamma(s)) = r$.

Derivando temos

$$\langle \nabla d_p, \gamma'(s) \rangle = 0$$

Derivando novamente temos

$$\langle \nabla_{\gamma'(s)} \nabla d_p, \gamma'(s) \rangle + \left\langle \nabla d_p, \frac{D\gamma'}{ds}(s) \right\rangle = 0$$

Sem perda de generalidade vamos supor que γ está orientada no sentido positivo. Isto é, $n(s)$ aponta para o interior de γ. Assim $\kappa \geq 0$ (proposição 2.14). Como $\nabla d_p = -n(s)$ (proposição 1.24) segue que

$$\operatorname{Hess} d_p(\gamma'(s), \gamma'(s)) + \langle -n(s), \kappa(s) n(s) \rangle = 0 \implies \operatorname{Hess} d_p(\gamma'(s), \gamma'(s)) = \kappa(s)$$

Agora analisaremos a igualdade acima. Sabemos que fixado um ponto q, $\operatorname{Hess} d_p$ é uma transformação bilinear de $T_qM \times T_qM$ em $\mathbb{R}$. Por outro lado, em um espaço vetorial real com produto interno V, uma transformação bilinear $B : V \times V \to \mathbb{R}$ pode ser naturalmente identificada com uma transformação linear $T : V \to \mathbb{R}$, através da igualdade $B(v_1, v_2) = \langle Tv_1, v_2 \rangle$. Assim, faz sentido falar nos autovalores de B; basta olhar para os autovalores de T. Além disso, se v é autovetor com autovalor λ segue que $B(v, v) = \langle Tv, v \rangle = \lambda |v|^2$. Então, para concluir o problema, mostraremos que $\gamma'(s)$ é autovetor de um autovalor positivo de $\operatorname{Hess} d_p$.

Seja $q = \gamma(0)$ um ponto de γ e $\tilde{X}$, $\tilde{Y} = \tilde{X}^{\perp}$ de forma que $r\tilde{X} = \tilde{q}$. Assim, $\psi(x, y) = \exp_p(x\tilde{X} + y\tilde{Y})$ é a parametrização por coordenadas normais centradas em p. Calcularemos $\operatorname{Hess} d_p$ no ponto $q = \psi(r, 0)$ com essas coordenadas. Também denotaremos por d_p a função $d_p \circ \psi$. Recordamos que o lema 1.20 dá a expressão em coordenadas para a Hessiana. Assim, sua forma matricial pode ser escrita como

$$\operatorname{Hess} d_p = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} d_p - \Gamma_{11}^1 \dfrac{\partial}{\partial x} d_p - \Gamma_{11}^2 \dfrac{\partial}{\partial y} d_p & \dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} d_p - \Gamma_{12}^1 \dfrac{\partial}{\partial x} d_p - \Gamma_{12}^2 \dfrac{\partial}{\partial y} d_p \\ \dfrac{\partial^2}{\partial y \partial x} d_p - \Gamma_{21}^1 \dfrac{\partial}{\partial x} d_p - \Gamma_{21}^2 \dfrac{\partial}{\partial y} d_p & \dfrac{\partial^2}{\partial y^2} d_p - \Gamma_{22}^1 \dfrac{\partial}{\partial x} d_p - \Gamma_{22}^2 \dfrac{\partial}{\partial y} d_p \end{bmatrix}$$

Precisamos calcular as derivadas parciais de d_p em $(r, 0)$. Primeiro observamos que $d_p(x, 0) = |x|$. Daí temos para $x > 0$

$$\frac{\partial}{\partial x} d_p(x, 0) = 1$$

Isso mostra que $\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}(r, 0) = 0$. Por outro lado, dado $x > 0$ a reta vertical $y \mapsto x\tilde{X} + y\tilde{Y}$ tangencia o círculo de raio x e centro na origem de T_pM. Como as curvas de nível de $d_p \circ \exp_p$ são círculos, segue que $(x, 0)$ é mínimo de $t \mapsto d_p(x, t)$. Ou seja, $\dfrac{\partial}{\partial y} d_p(x, 0) = 0$. Portanto, $\dfrac{\partial^2}{\partial x \partial y} d_p(r, 0) = 0$.

Para calcular $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}d_p$ primeiro observamos que d_p não é diferenciável em p mas $f(x,y) = d_p^2(x,y)$ é. Por um lado, $f(0,y) = y^2 \implies \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}f(0,0) = 2$. Por outro lado, pela regra da cadeia

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}f(x,0) = 2d_p(x,0)\frac{\partial^2}{\partial y^2}d_p(x,0) + \left[\frac{\partial}{\partial y}d_p(x,0)\right]^2 = 2x\frac{\partial^2}{\partial y^2}d_p(x,0)$$

Por continuidade, para $r > 0$ pequeno o suficiente temos $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}f(r,0)$ próximo de 2. Assim $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}d_p(r,0) > 0$. De fato, $\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}d_p(r,0) \to +\infty$ quando $r \to 0^+$. Com isso nessas coordenadas podemos escrever a hessiana de d_p no ponto q:

$$\operatorname{Hess} d_p = \begin{bmatrix} -\Gamma_{11}^1 & -\Gamma_{12}^1 \\ -\Gamma_{12}^1 & \dfrac{\partial^2 d}{\partial y^2} - \Gamma_{22}^1 \end{bmatrix}$$

Resta calcular os símbolos de Christoffel. Ao longo de $\exp_p(tX) = \psi(t,0)$ temos $\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{12}^1 = 0$. Por outro lado, todos os símbolos são nulos em p. Logo

$$\operatorname{Hess} d_p = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial^2 d}{\partial y^2}(r,0) - \Gamma_{22}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Ou seja, a matriz $\operatorname{Hess} d_p$ tem um autovalor nulo, com autovetor $(1,0)$ e um autovetor $\lambda > 0$, com autovetor $(0,1)$. Ou seja, o autovetor correspondente a λ tem a direção y. Assim, $\gamma'(0)$ é autovetor de $\operatorname{Hess} d_p$. Portanto, segue que $\operatorname{Hess} d_p(\gamma'(0),\gamma'(0)) > 0$ e que $\kappa(0) > 0$, como queríamos demonstrar. ∎

Capítulo 3

Bilhares Convexos

Introdução

Dada uma região $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com bordo suave ($\mathscr{C}^1$), um bilhar em Ω consiste no movimento livre de uma partícula em Ω sofrendo reflexões especulares em $\partial\Omega$, e o problema clássico é entender como a forma de Ω influencia na aplicação do bilhar (i.e., a transformação que associa a cada impacto de uma trajetória o impacto posterior). Uma pergunta que surge naturalmente é: O que acontece quando consideramos uma partícula movendo-se ao longo de geodésicas de uma região não plana? Tal questionamento motiva a definição de bilhares em superfícies que é o objetivo desse capítulo.

Para bilhares convexos planos, um resultado imprescindível é que a aplicação do bilhar é *twist*. Isso nos permite usar diversas ferramentas, como o teorema de Birkhoff, a teoria de conjuntos de Aubry Mather e também o teorema do twist de Moser. Entretanto em superfícies vários problemas podem acontecer que impossibilitam que a aplicação possua a propriedade de twist.

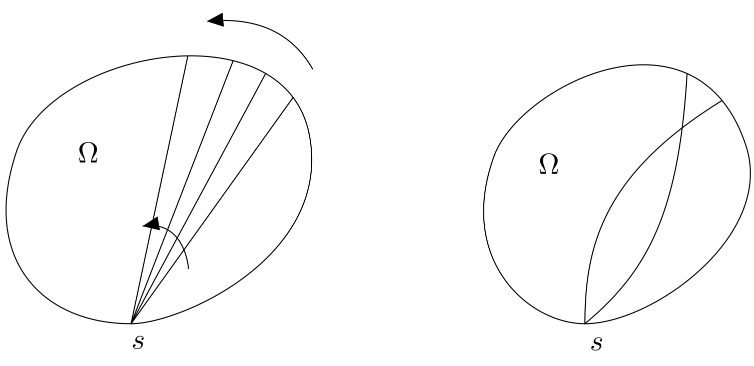


Figura 3.1: Presença e ausência de twist para bilhares em superfícies

Intuitivamente podemos ver que bilhares planos são twist da seguinte forma. Dado um ponto $s \in \partial\Omega$, o ponto de impacto de uma partícula partindo de s varia monotonamente com o ângulo de saída (figura 3.1 à esquerda). Por outro lado, numa superfície qualquer isso não é óbvio (figura 3.1 à direita). De fato como sugere a figura a existência de pontos conjugados pode ser um empecilho a presença da propriedade de twist Entretanto é possível que a aplicação tenha a propriedade de twist mesmo com a presença de pontos conjugados.

A fim de evitarmos tais dificuldades trabalharemos com $\Omega \subset U$, como no capítulo anterior. As observações sobre a notação feitas em Seção 2.1 do capítulo anterior continuam válidas para este capítulo. Na próxima seção daremos a definição de aplicação twist. Em seguida, definiremos bilhares e provaremos que bilhares convexos são aplicações twist. Trataremos também de Campos de Jacobi, que serão usados para deduzir uma expressão para a derivada da aplicação do bilhar.

3.1 Twist

Nessa seção definimos uma aplicação twist. Usaremos a seguinte terminologia. $\mathbb{A}$ denota o anel $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times [a,b]$ e A denota a faixa $\mathbb{R} \times [a,b]$. int A é o interior da faixa A, isto é, o conjunto $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times (a,b)$. Similarmente, int $\mathbb{A} = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times (a,b)$. O bordo de $\mathbb{A}$ (respectivamente A) é o conjunto $\partial\mathbb{A} = \mathbb{A} \setminus \text{int } A$ (respectivamente $\partial A = A \setminus \text{int } A$). Tanto ∂A quanto $\partial\mathbb{A}$ possuem duas componentes conexas que chamamos de bordo superior e bordo inferior. Se F é uma aplicação de A em A (ou de $\mathbb{A}$ em $\mathbb{A}$), podemos escrever $F = (F_1, F_2)$. Assim, na notação $F(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, os termos x_2, y_2 podem se referir tanto às funções F_1, F_2 quanto à imagem do ponto (x_1, y_1), dependendo do contexto.

Definição 3.1. Seja f um homeomorfimo de $\mathbb{A}$ que preserva orientação e os bordos do anel $\mathbb{A}$. Dizemos que f é twist positivo se possui um levantamento $F : A \to A$ tal que para todo x a aplicação $F_x(y) = F(x,y)$ é estritamente crescente. Similarmente definimos um twist negativo pedindo que F_x seja estritamente decrescente. Quando existe c tal que para $y \neq \tilde{y}$ vale

$$\frac{1}{c} \leq \frac{F_x(y) - F_x(\tilde{y})}{|y - \tilde{y}|} \leq c$$

dizemos que f é um twist uniforme.

Notamos que se f é um twist positivo, então f^{-1} é um twist negativo. Um resultado importante para aplicações twist é que curvas invariantes não homotopicamente triviais são gráficos. Para esse resultado precisaremos que o twist preserve uma medida μ tal que $\mu(V) > 0$ para qualquer aberto (nesse caso diremos que μ é uma medida *estritamente positiva*). Uma prova pode ser encontrada em [7].

Teorema 3.2 (Birkhoff). Seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ um homeomorfismo twist que preserva uma medida estritamente positiva. Seja $V \subset A$ aberto homeomorfo a $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times [a, b)$ tal que $\overline{V} \cap \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \{b\} = \varnothing$. Se V é invariante por T então ∂V é o gráfico de uma função de $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ em (a, b). Se o twist é uniforme, a função é Lipschitziana.

Definição 3.3. Uma aplicação $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ é um twist diferenciável se f é um twist e se é difeomorfismo $\mathscr{C}^1$ em int $\mathbb{A}$. Ou seja, se seu levantamento F é diferenciável em int A Se existe $c > 0$ tal que $\frac{1}{c} \leq \left|\frac{\partial F_1}{\partial y}(x, y)\right| \leq c$ então dizemos que o twist é uniforme.

Observamos que a condição para o twist uniforme no caso diferenciável equivale a condição no caso contínuo pelo teorema do valor médio. A partir de agora sempre assumiremos que os twists são diferenciáveis, a menos de menção em contrário.

Seja então f um twist diferenciável e F seu levantamento, $F(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$. Observamos que a condição de twist implica que, fixado x a função $y \mapsto x_2(x, y)$ é um difeomorfismo da fibra aberta (ou seja, sem as extremidades (x, a) e (x, b)) $x_1 = x$ sobre a projeção no eixo x_2 de sua imagem. Intuitivamente isso quer dizer que ao movermos um ponto para cima, sua imagem por F se move para a direita (respectivamente esquerda) num twist positivo (respectivamente negativo). Além disso, segue também que a aplicação $\varphi(x_1, y_1) = (x_1, x_2)$ é um mergulho de int A em $\mathbb{R}^2$.

Consideramos agora o caso em que f preserva área. Isso implica que $\det dF = 1$ já que f mantém orientação. Assim, $dx_1 \wedge dy_1 = dx_2 \wedge dy_2$. Logo, se $\omega = y_2 dx_2 - y_1 dx_1$ então $d\omega = 0$. Como o int A é simplesmente conexo, pelo lema de Poincaré existe H de classe $\mathscr{C}^2$ em int A tal que $dH = \omega$. Usando as coordenadas x_1, x_2 isso implica que

$$\frac{\partial H}{\partial x_1} = -y_1 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial H}{\partial x_2} = y_2$$

Por um lado, como F é levantamento, vale que $F(x_1 + L, y_1) = F(x_1, y_1) + (L, 0)$. Ou seja $F \circ S = S \circ F$ onde S é a translação $S(x, y) = (x + L, y)$. Daí $S * y_1 = y_1$, já que S preserva a segunda coordenada. Segue também que $S^* dx_1 = dx_1$. De fato, dado w vetor tangente de $T_p A$, por definição de pull back temos $S^* dx_1(w) = dx_1(dS \cdot w)$. Como S é isometria, e como podemos identificar os planos tangentes de $\mathbb{R}^2$, dS é a identidade. Daí $S^* dx_1(w) = dx_1(w)$. Como w é arbitrário, vale que $S^* dx_1 = dx_1$. Por outro lado,

$$S^* y_2 dx_2 = S^*(F^* y_1 dx_1) = (S \circ F)^* y_1 dx_1 = (F \circ S)^* y_1 dx_1 = F^*(S^* y_1 dx_1) = y_2 dx_2$$

Portanto, $S^* \omega = \omega$. Da fórmula de mudança de variáveis temos também que

$$\int_{S \circ \gamma} \omega = \int_\gamma S^* \omega = \int_\gamma \omega$$

onde γ é um caminho qualquer entre p_1, p_2. Do teorema de Stokes, temos

$$H(S(p_2)) - H(S(p_1)) = H(p_2) - H(p_1)$$

Portanto segue $H \circ S - H$ é constante. Observamos que $H \circ S - H$ é exatamente a diferença entre as áreas de uma curva $\gamma : [0,1] \to A$, $\gamma(1) = S(\gamma(0))$ e de $F \circ \gamma$ (em relação ao eixo x). Como f preserva os bordos de $\mathbb{A}$, concluímos que $H \circ S - H = 0$. Portanto H induz uma aplicação em $\mathbb{A}$ (ao usarmos as coordenadas (x_1, y_1)), que também chamaremos de H. Resumimos tais observações no seguinte lema:

Lema 3.4. Seja f twist diferenciável positivo que preserva área e F seu levantamento. Então existe H definido na faixa $\varphi(A)$ que é $\mathscr{C}^1$ e $\mathscr{C}^2$ em seu interior. H é chamada função geradora e tem as seguintes propriedades:

$$H(x_1 + L, x_2 + L) = H(x_1, x_2) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} < 0$$

Se o twist é uniforme também vale que

$$\frac{1}{c} \leq \left| \frac{\partial^2 H}{\partial x_1 \partial x_2} \right| \leq c$$

Além disso também temos

$$y_1 = -\frac{\partial H}{\partial x_1} \qquad \text{e} \qquad y_2 = \frac{\partial H}{\partial x_2}$$

É possível calcular a derivada de um twist T a partir das derivadas de sua função geradora:

Proposição 3.5. Seja T uma aplicação twist que preserva área com função geradora H. Então sua derivada é dada por

$$dT = -\frac{1}{H_{12}} \begin{bmatrix} H_{11} & 1 \\ H_{11}H_{22} - H_{12}^2 & H_{22} \end{bmatrix}$$

Demonstração. Escrevendo $T(x_1, y_1) = (x_2(x_1, y_1), y_2(x_1, x_2))$ queremos calcular as derivadas de x_2, y_2 em relação a x_1 e y_1. Observamos que $H_1 = -y_1$ implica que

$$x_2(x_1, -H_1(x_1, x_2)) = x_2$$

Derivando em relação a x_2 obtemos

$$-\frac{\partial x_2}{\partial y_1} H_{12} = 1 \implies \frac{\partial x_2}{\partial y_1} = -\frac{1}{H_{12}}$$

Derivando agora em relação x_1 e usando o resultado anterior advém

$$\frac{\partial x_2}{\partial x_1} - \frac{\partial x_2}{\partial y_1} H_{11} = 0 \implies \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = -\frac{H_{11}}{H_{12}}$$

Similarmente, usando também $H_2 = y_2$ segue a equação

$$y_2(x_1, -H_1(x_1, x_2)) = H_2(x_1, x_2)$$

Derivando em x_2 temos

$$-\frac{\partial y_2}{\partial y_1} H_{12} = H_{22} \implies \frac{\partial y_2}{\partial y_1} = -\frac{-H_{22}}{H_{12}}$$

Por fim, derivando em x_1 concluímos

$$\frac{\partial y_2}{\partial x_1} - \frac{\partial y_2}{\partial y_1} H_{11} = H_{12} \implies \frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{H_{12}^2 - H_{11} H_{22}}{H_{12}}$$

Com isso obtemos dT. ■

3.2 Bilhares

Nessa seção definiremos a aplicação do bilhar para curvas convexas. Como nas seções anteriores, todas as curvas são de classe $\mathscr{C}^1$ regulares e parametrizadas por comprimento de arco. Se uma curva fechada γ tem comprimento L, então podemos dizer que sua parametrização é $\gamma : [0, L) \to M$. Aqui identificamos 0 e L, já que γ é fechada. Ou seja, $[0, L) = S^1 = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$. A vantagem da notação $[0, L)$ é que temos uma ordem (local) dos pontos de γ. Suporemos também que curvas simples e fechadas estão orientadas positivamente e os ângulos serão orientados, conforme observações do capítulo anterior.

Definição 3.6. Seja $\gamma \subset U$ uma curva convexa de comprimento L. Então definimos o ângulo de saída $\theta_1(s_1, s_2)$ como o ângulo entre $\gamma'(s_1)$ e a geodésica η saindo de $\gamma(s_1)$ e chegando em $\gamma(s_2)$ onde $s_1, s_2 \in [0, L)$ e $s_1 \neq s_2$. Similarmente definimos o ângulo de chegada $\theta_2(s_1, s_2)$ como o ângulo entre η e $\gamma'(s_2)$ (figura 3.2).

Primeiramente observamos que as funções acima estão bem definidas. De fato, por definição de convexidade sempre existe um segmento passando por $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$ contido em U. E tal segmento está contido em $\overline{\Omega}$, onde Ω é o conjunto convexo com $\gamma = \partial\Omega$. Além disso, η não pode tangenciar γ, e isso implica que $\theta_1, \theta_2 \in (0, \pi)$. Não podemos entretanto definir (continuamente) tais ângulos para $s_1 = s_2$, pois segue da proposição a seguir que os limites laterais são distintos.

Proposição 3.7. Seja $\gamma \subset U$ uma curva convexa e $\theta_1(s_1, s_2)$, $\theta_2(s_1, s_2)$ como na definição acima. Então $s \mapsto \theta_1(0, s)$ (respectivamente $s \mapsto \theta_2(s, 0)$) é um homeomorfismo crescente

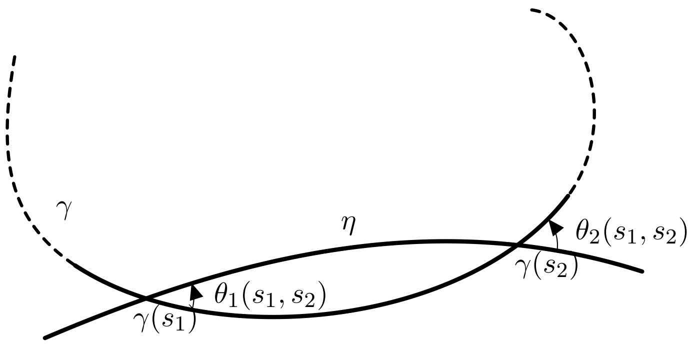


Figura 3.2: Os ângulos θ_1 e θ_2.

(respectivamente, decrescente) sobre $(0,\pi)$.

Demonstração. Seja $p=\gamma(0)$. Em T_pM temos $\tilde{\theta}_1(0,s)=\dfrac{\langle\tilde{\gamma}(s),\tilde{\gamma}'(0)\rangle}{|\tilde{\gamma}(s)|}$. Como $\tilde{\theta}_1=\theta_1$, segue o afirmado para θ_1, pois $\tilde{\gamma}$ é estrelado em relação a origem de T_pM, pela convexidade de γ. Para θ_2 basta observarmos que $\theta_2(s_1,s_2)=\pi-\theta_1(s_2,s_1)$. ■

Observamos da proposição anterior que dado $\theta_1\in(0,\pi)$ e $s_1\in[0,L)$, existe um único $s_2\in[0,L)\setminus\{s_1\}$ tal que $\theta_1(s_1,s_2)=\theta_1$. Fica assim definida uma função $s_2(s_1,\theta_1)$. Fica também definida uma função $\theta_2(s_1,\theta_1)$ através da expressão $\theta_2(s_1,s_2(s_1,\theta_1))$. Com isso definimos a aplicação do bilhar.

Definição 3.8 (Aplicação do Bilhar). Seja γ uma curva convexa de comprimento L. A cada número $s_1\in[0,L)$ e ângulo $0<\theta_1<\pi$ está associado um único $s_2\in[0,L)$ e um único $\theta_2\in(0,\pi)$ tais que $\theta_1(s_1,s_2)=\theta_1$ e $\theta_2(s_1,s_2)=\theta_2$. A aplicação do bilhar $T:[0,L)\times(0,\pi)$ é definida por

$$T(s_1,\theta_1)=(s_2,\theta_2)$$

Podemos estender T para $[0,L)\times[0,\pi]$ definindo $T(s_1,0)=(s_1,0)$ e $T(s_1,\pi)=(s_1,\pi)$.

Observação 3.9. Seguindo a notação da seção anterior, iremos usar $\mathbb{A}=[0,L)\times[0,\pi]$ e $A=[0,L)\times\mathbb{R}$.

Observação 3.10 (Simetria da Aplicação do Bilhar). Como vale $\theta_1(s_1,s_2)+\theta_2(s_2,s_1)=\pi$, obtemos

$$T(s_1,\theta_1)=(s_2,\theta_2)\implies T(s_2,\pi-\theta_2)=(s_1,\pi-\theta_1)$$

Com isso concluímos que T é invertível. Sua inversa pode ser calculada por

$$T^{-1}(s_1,\theta_1)=(s_2(s_1,\pi-\theta_1),\pi-\theta_2(s_1,\pi-\theta_1)$$

Definição 3.11. Dada uma curva convexa γ seja $H(s_1, s_2)$ o comprimento da geodésica ligando $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$. Ou seja, $H(s_1, s_2) = d(\gamma(s_1), \gamma(s_2))$. H é chamada função geradora.

Observação 3.12. Como veremos adiante, a função $-H$ é a função geradora da aplicação do bilhar, se considerarmos a definição para twists dada na seção anterior. Apesar disso, continuaremos dizendo que H é a função geradora.

Proposição 3.13. Seja γ uma curva convexa com função geradora H. Então para $s_1 \neq s_2$ temos

$$H_1 := \frac{\partial H}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -\cos\theta_1(s_1, s_2) \qquad \text{e} \qquad H_2 := \frac{\partial H}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \cos\theta_2(s_1, s_2)$$

Demonstração. Fixado $p = \gamma(s_1)$, levamos o problema para T_pM via $\exp_p$. Dessa forma, pelo lema de Gauss $H(s_1, s_2)$ é o comprimento de $\tilde{\gamma}(s_2)$. Então temos

$$H_2 = \frac{\partial H}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \frac{d}{ds_2}|\tilde{\gamma}(s_2)| = \frac{\langle \tilde{\gamma}(s_2), \tilde{\gamma}'(s_2) \rangle}{|\tilde{\gamma}(s_2)|} = \left\langle \frac{\tilde{\gamma}(s_2)}{H}, \tilde{\gamma}'(s_2) \right\rangle$$

Novamente pelo lema de Gauss segue que $H_2 = \cos\theta_2$. Da simetria $H(s_1, s_2) = H(s_2, s_1)$ obtemos também $H_1 = \cos(\pi - \theta_1) = -\cos\theta_1$, que conclui a demonstração. ■

Lema 3.14. Para γ de classe $\mathscr{C}^2$ e $s_1 \neq s_2$ vale que $H_{12} > 0$.

Demonstração. Seja $p = \gamma(s_1)$ e $\tilde{\gamma} = \exp_p^{-1} \circ \gamma$ como usual. Logo temos pela proposição 3.13

$$H_1(s_1, s_2) = -\cos\theta_1 = -\frac{\langle \tilde{\gamma}'(s_1), \tilde{\gamma}(s_2) \rangle}{H} \implies H \cdot H_1 = -\left\langle \tilde{\gamma}'(s_1), \tilde{\gamma}(s_2) \right\rangle$$

Derivando em s_2 obtemos

$$H_1 \cdot H_2 + H \cdot H_{12} = -\left\langle \tilde{\gamma}'(s_1), \tilde{\gamma}'(s_2) \right\rangle$$

Como $\theta_1 = \tilde{\theta}_1$ temos

$$-\cos\theta_1 \cos\theta_2 + H \cdot H_{12} = -|\tilde{\gamma}'(s_2)| \cos(\theta_1 + \tilde{\theta}_2) \implies H_{12} = \frac{|\tilde{\gamma}'(s_2)| \sin\theta_1 \sin\tilde{\theta}_2}{H}$$

Disso temos $H_{12} > 0$ para $s_1 \neq s_2$. ■

Proposição 3.15. Se γ é de classe $\mathscr{C}^1$, então a aplicação do bilhar $T : [0, L) \times [0, \pi] \to [0, L) \times [0, \pi]$ é um homeomorfismo twist.

Demonstração. De fato, como γ é $\mathscr{C}^1$, segue que $H(s_1, s_2) = d(\gamma(s_1), \gamma(s_2))$ é também $\mathscr{C}^1$ para $s_1 \neq s_2$. Disso e da proposição 3.13 concluímos que $\theta_1(s_1, s_2), \theta_2(s_1, s_2)$ são contínuas. Assim $(s_1, s_2) \mapsto (s_1, \theta_1)$ e $(s_1, s_2) \mapsto (s_2, \theta_2)$ são contínuas. Da simetria da aplicação do bilhar tais aplicações são bijeção em $[0, L) \times (0, \pi)$. Pelo teorema da invariância do domínio são de fato homeomorfismos. Com isso segue que T é homeomorfimo. A propriedade twist segue da proposição 3.7. ■

Lema 3.16 (Principio Variacional). Seja γ uma curva convexa e T aplicação do bilhar. Então s_1, s_2, s_3 estão em uma órbita (i.e., existem $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ tais que $T^2(s_1, \theta_1) = T(s_2, \theta_2) = (s_3, \theta_3)$) se, e somente se

$$H_2(s_1, s_2) + H_1(s_2, s_3) = 0$$

Demonstração. Pela proposição 3.13 vale que $H_2(s_1, s_2) = \cos\theta_2(s_1, s_2)$ e que $H_1(s_2, s_3) = -\cos\theta_1(s_2, s_3)$. Caso s_1, s_2, s_3 estejam numa órbita, o ângulo de chegada em s_2 é o mesmo do de saída (isto é, $\theta_2(s_1, s_2) = \theta_1(s_2, s_3)$). Reciprocamente, caso seja $H_2(s_1, s_2) + H_1(s_2, s_3) = 0$ definimos $\theta_1 = \theta_1(s_1, s_2)$, $\theta_2 = \theta_2(s_1, s_2)$ e $\theta_3 = \theta_2(s_2, s_3)$. Assim, temos $T^2(s_1, \theta_1) = T(s_2, \theta_2) = (s_3, \theta_3)$. ■

Proposição 3.17. Seja γ uma curva convexa. Se γ é de classe $\mathscr{C}^r$, $r \geq 2$ então a aplicação do bilhar é $\mathscr{C}^{r-1}$ em int $\mathbb{A}$.

Demonstração. Definimos F por

$$F(s_1, \theta_1, s_2, \theta_2) = (H_1(s_1, s_2) + \cos\theta_1, H_2(s_1, s_2) - \cos\theta_2)$$

Pelo Teorema da Função Implícita existe $T(s_1, \theta_1) = (s_2, \theta_2)$ tal que $F((s_1, \theta_1), T(s_1, \theta_1)) = (0, 0)$. De fato, a derivada de F na direção (s_2, θ_2) é

$$\begin{bmatrix} H_{12} & 0 \\ H_{22} & \sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

cujo determinante é $\sin\theta_2 \, H_{12} > 0$ para $s_1 \neq s_2$ pelo lema 3.14. Pela proposição 3.13 segue que T é a aplicação do bilhar. ■

Corolário 3.18. Se γ é $\mathscr{C}^r$ a aplicação do bilhar é um difeomorfismo $\mathscr{C}^{r-1}$ em int $\mathbb{A}$.

Proposição 3.19. Se γ é $\mathscr{C}^2$, então a aplicação do bilhar é um twist diferenciável, que preserva a medida $\sin\theta ds \wedge d\theta$.

Demonstração. Basta considerarmos a mudança de coordenadas $r = -\cos\theta$. Isto é, consideramos a aplicação $\Phi : [0, L) \times [-1, 1] \to [0, L) \times [-1, 1]$ dada por $\Phi(s_1, r_1) = (s_2, r_2)$. Mais precisamente

$$\Phi \circ F(s_1, \theta_1) = F \circ T(s_1, \theta_1)$$

onde $F(s, \theta) = (s, -\cos\theta) = (s, r)$. Φ é um homeomorfismo twist positivo que preserva $ds \wedge dr$ cuja função geradora é $-H(s_1, s_2) = -d(\gamma(s_1), \gamma(s_2))$. Por outro lado F é difeomorfismo $\mathscr{C}^\infty$ em int$\mathbb{A}$ e que

$$\det dF = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta \end{vmatrix} = \sin\theta > 0$$

concluímos pela regra da cadeia que T é twist positivo diferenciável e preserva $\sin\theta ds \wedge d\theta$. ∎

Com isso provamos o seguinte resultado:

Teorema 3.20. Se γ é uma curva convexa então a aplicação do bilhar é um twist positivo. Se γ é $\mathscr{C}^2$, então o twist é diferenciável e preserva a medida $\sin\theta ds \wedge d\theta$.

Disso e dos resultados do capítulo anterior decorre também que

Corolário 3.21. Se γ é uma curva simples fechada $\mathscr{C}^2$ exceto num número finito de pontos onde é $\mathscr{C}^1$ e onde existem os limites laterais da curvatura geodésica $\kappa > \varepsilon > 0$, então a aplicação do bilhar é um twist e preserva $\sin\theta ds \wedge d\theta$.

No próximo capítulo provaremos o seguinte resultado:

Proposição 3.22. Se γ é $\mathscr{C}^2$ e tem curvatura geodésica positiva, então a aplicação do bilhar é um twist diferenciável uniforme.

De fato, a prova disso consiste em observar o que acontece com $\dfrac{\partial s_2}{\partial \theta_1}$, quando θ_1 está próximo de 0. Provaremos que, assim como no caso plano, vale que

$$\begin{cases} s_2 = s_1 + \dfrac{2}{\kappa(s_1)}\theta_1 + o(\theta_1) \\ \theta_2 = \theta_1 + o(\theta_1) \end{cases}$$

3.3 Campos de Jacobi

Usaremos campos de Jacobi para deduzirmos uma expressão para derivada da aplicação do Bilhar. Nessa seção desenvolveremos os resultados necessários. Aqui denotaremos por M uma variedade 2-dimensional.

Campos de Jacobi aparecem naturalmente no estudo da aplicação exponencial. Sendo α uma curva em T_pM com $\alpha(0) = v$ e $\alpha'(0) = w$, considerando a função f dada por

$$f(s,t) = \exp_p(t\alpha(s))$$

segue que $(d\exp_p)_v\, w = \dfrac{\partial f}{\partial s}(0,1)$. Assim o campo $\mathbf{J}(t) = \dfrac{\partial f}{\partial s}(0,t)$ tem informações sobre a derivada da aplicação exponencial, e faz a conexão entre geodésicas e curvatura. Aqui enfatizamos que as geodésicas não precisam estar normalizadas.

Definição 3.23. Dada uma curva $\gamma : I \to M$, uma variação de γ é uma aplicação diferenciável $h : (-\varepsilon, \varepsilon) \times I \to M$ tal que $h(0,t) = \gamma(t)$. O campo

$$V(t) = \frac{\partial h}{\partial s}(0,t)$$

é chamado campo variacional de h. Quando $h_s(t) = h(s,t)$ é geodésica para todo s, dizemos que h é uma variação geodésica.

Definição 3.24. Um campo de Jacobi ao longo de uma geodésica $\gamma : I \to M$ é um campo $\mathbf{J}$ satisfazendo

$$\frac{D^2\mathbf{J}}{dt^2} + R(\gamma', \mathbf{J})\gamma' = 0$$

onde R é a curvatura de M.

Proposição 3.25. O campo variacional V de uma variação geodésica h é um campo de Jacobi.

Demonstração. Seja $\gamma(t) = h(0,t)$ geodésica. Temos então

$$\frac{D^2V}{dt^2} = \frac{D}{dt}\frac{D}{dt}\frac{\partial h}{\partial s}$$

Pelo lema 1.9 de simetria segue

$$\frac{D^2V}{dt^2} = \frac{D}{dt}\frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial t}$$

Pelo lema 1.10 temos

$$\frac{D^2V}{dt^2} = \frac{D}{ds}\frac{D}{dt}\frac{\partial h}{\partial t} - R\left(\frac{\partial h}{\partial t}, \frac{\partial h}{\partial s}\right)\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{D}{ds}\frac{D\gamma'}{dt} - R(\gamma', V)\gamma'$$

Como γ é geodésica temos $\frac{D\gamma'}{dt} = 0$ e segue o afirmado. ∎

Em coordenadas, notamos que o a equação de Jacobi é uma equação diferencial homogênea. Assim, existem no máximo 4 soluções linearmente independentes (estamos em dimensão 2). E tais soluções ficam unicamente determinadas pelas condições iniciais $\mathbf{J}(0)$ e $\frac{D\mathbf{J}}{dt}(0)$. Além disso, dado qualquer campo de Jacobi $\mathbf{J}$ ao longo de uma geodésica γ, podemos encontrar uma variação de γ cujo campo variacional é $\mathbf{J}$, conforme proposição a seguir.

Proposição 3.26. Dado um campo de Jacobi $\mathbf{J}$ ao longo da geodésica γ, existe uma variação geodésica h de γ tal que

$$\frac{\partial h}{\partial s} = \mathbf{J}$$

Demonstração. Seja α uma curva com $\alpha(0) = \gamma(0)$ e W um campo sobre α. Consideramos

$$h(s,t) = \exp_{\alpha(s)} tW(s)$$

Então h é uma variação geodésica. Assim seu campo variacional V é um campo de Jacobi. Além disso V satisfaz:

$$V(0) = \frac{\partial h}{\partial s}(0,0) = \frac{d}{ds}\alpha(s)\bigg|_{s=0} = \alpha'(0)$$

E também

$$\frac{DV}{dt}(0) = \frac{D}{dt}\frac{\partial h}{\partial s}(0,0) = \frac{D}{ds}\frac{\partial h}{\partial t}(0,0) = \frac{DW}{ds}(0)$$

onde usamos o lema de simetria 1.9. Logo, escolhendo α com $\alpha'(0) = \mathbf{J}(0)$ e W com $W(0) = \gamma'(0)$ e $\frac{DW}{ds}(0) = \frac{D\mathbf{J}}{dt}(0)$ segue o desejado. ∎

Da demonstração da proposição acima temos o seguinte resultado, que nos será útil posteriormente:

Corolário 3.27. Seja α uma curva e V campo sobre α. O campo variacional de

$$h(s,t) = \exp_{\alpha(s)} tV(s)$$

é o campo de Jacobi $\mathbf{J}$ sobre a geodésica $\gamma(t) = \exp_{\alpha(0)} tV(0)$ com condições iniciais $\mathbf{J}(0) = \alpha'(0)$ e $\frac{D\mathbf{J}}{dt}(0) = \frac{DV}{ds}(0)$.

Dada uma geodésica γ, os campos $\gamma'(t)$ e $t\gamma'(t)$ são campos de Jacobi linearmente independentes e paralelos a γ. Qualquer campo de Jacobi paralelo a γ é combinação linear desses dois. De fato, é possível mostrar também que qualquer campo de Jacobi é uma soma de dois campos de Jacobi, um paralelo a γ, e outro perpendicular. Portanto passamos a estudar a partir de agora os campos de Jacobi perpendiculares. Além disso, para um campo perpendicular em dimensão 2 podemos escrever

$$\mathbf{J}(t) = J(t)n(t)$$

onde $n(t)$ é o vetor unitário perpendicular a γ (como M é orientada, temos uma escolha natural para n). Vamos assumir a partir de agora que γ está normalizada (isto é, parametrizada com velocidade unitária). Disso temos

$$R(\gamma'(t), n(t))\gamma'(t) = Kn(t)$$

de fato, $\langle R(\gamma'(t), n(t))\gamma'(t), n(t)\rangle = K$ e $\langle R(\gamma'(t), n(t))\gamma'(t), \gamma'(t)\rangle = 0$. Portanto, a equação de Jacobi torna-se

$$J''(t) + K\,J(t) = 0$$

Resumimos isso na proposição

Proposição 3.28. Seja γ geodésica normalizada e $\mathbf{J}$ campo de Jacobi ortogonal. Então

$$J''(t) + K\,J(t) = 0$$

Intuitivamente, podemos pensar em variações $h(s,t)$ ao longo de uma geodésica γ como um feixe de raios (geodésicos) infinitesimais. As curvas transversais $s \mapsto h(s,t)$ são as frentes de onda. Assim, a componente perpendicular do campo de Jacobi nos dá informação sobre o espalhamento ou convergência desse feixe. Já a componente paralela dá informação sobre a diferença de velocidade de cada um dos raios do feixe. Para esclarecer essa última afirmação, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.29. Sejam α uma curva parametrizada por comprimento de arco e V um campo unitário sobre α, e f uma função com $f(0) = 1$. Então as variações $h_1(s,t) = \exp_{\alpha(s)} tV(s)$ e $h_2(s,t) = \exp_{\alpha(s)} tf(s)V(s)$ são tais que os campos de Jacobi associados possuem a mesma componente perpendicular.

Demonstração. De fato, pelo corolário 3.27, os campos de Jacobi associados satisfazem $\mathbf{J}_1(0) =$

$\mathbf{J}_2(0) = \alpha'(0)$ e $\dfrac{D}{dt}\mathbf{J}_1(0) = \dfrac{D}{ds}V$, $\dfrac{D}{dt}\mathbf{J}_2(0) = \dfrac{D}{ds}fV$. Observamos que

$$\frac{D}{ds}fV = f'V + f\frac{D}{ds}V$$

Como $f(0) = 1$ e notando que V tem direção tangente, segue que a componente ortogonal de ambos os campos é a mesma. ■

Em particular, a proposição acima mostra que dado um campo de Jacobi ortogonal $\mathbf{J}$ sobre uma geodésica γ e duas curvas α e β passando por p e q, podemos construir uma variação $h(s,t)$ de forma que $h(s,0) = \alpha(s)$ e $h(s,L) = \beta(s)$ e de forma que a componente perpendicular do campo variacional de h é $\mathbf{J}$. Ressaltamos entretanto que para isso, α, β não estarão necessariamente parametrizadas por comprimento de arco, estamos analisando apenas os traços dessas curvas.

Passamos agora a analisar campos ao longo de uma geodésica fixada. Estaremos sempre falando de campos ortogonais, então J sempre denotará a componente do campo nesta direção. Nosso objetivo é o seguinte: dado um campo de Jacobi com $J(0) = a$ e $J'(0) = b$, como encontrar $J(t)$? Seja γ geodésica parametrizada por comprimento de arco, e consideramos campos de Jacobi ortogonais a γ. Sabemos que J satisfaz a equação diferencial $X'' + KX = 0$. Por outro lado, observamos que em coordenadas polares geodésicas centradas em $\gamma(0)$, a métrica riemanniana pode ser escrita na forma $ds^2 = dr^2 + G^2(r,\theta)d\theta^2$ para alguma função G, conforme proposição 1.15 e observação subsequente. Seja θ_0 tal que as coordenadas (r,θ_0) estão associadas ao ponto $\gamma(r)$. Assim, da proposição 1.18 segue que $t \mapsto G(t,\theta_0)$, para $t > 0$ é solução da equação $X'' + KX = 0$. Além disso, pela proposição 1.19, segue que tal solução satisfaz as condições iniciais $X(0) = 0$ e $X'(0) = 1$. Definimos então uma nova função que codifica tais informações:

Definição 3.30. Seja $\gamma : \mathbb{R} \to M$ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco, e $K(t)$ a curvatura Gaussiana de M no ponto $\gamma(t)$. Definimos a função $C : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de forma que $t \mapsto C(s,t)$ é solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} X''(t) + K(t)X(t) = 0 \\ X(s) = 0 \quad \text{e} \quad X'(s) = 1 \end{cases}$$

Como observamos anteriormente, segue que $G(r,\theta_0) = C(0,r)$. Também notamos que se considerarmos coordenadas polares centradas em $\gamma(s)$ ao invés de $\gamma(0)$ obteríamos uma nova função $G(r,\theta)$. Para essa nova função teríamos $G(r,\theta_0) = C(s, s+r)$ para algum outro θ_0. Ou seja, a função C contem simultaneamente informações sobre os coeficientes da métrica para qualquer parametrização por coordenadas polares centrada em algum ponto de γ.

Já que K é diferenciável, C também será. Assim, C satisfaz:

$$\begin{cases} C_{22}(s,t) + K(t)C(s,t) = 0 \\ C(s,s) = 0 \quad \text{e} \quad C_2(s,s) = 1 \end{cases} \tag{3.1}$$

onde C_{22} e C_2 denotam derivadas parciais. A seguinte proposição mostra uma simetria existente nas duas variáveis de C:

Proposição 3.31. Vale que

$$C(s,t) + C(t,s) = 0$$

Em particular, isso implica também que

$$C_1(s,t) + C_2(t,s) = 0 \qquad \text{e} \qquad C_{12}(s,t) + C_{12}(t,s) = 0$$

Demonstração. Primeiro verificaremos que a expressão

$$E(t) = C(a,t)C_2(b,t) - C(b,t)C_2(a,t)$$

não depende de t. De fato, isso é uma consequência direta da fórmula de Abel para o wronskiano, mas faremos a conta pois é simples. Derivando em relação a t temos:

$$\begin{aligned} E'(t) &= \cancel{C_2(a,t)C_2(b,t)} + C(a,t)C_{22}(b,t) - \cancel{C_2(b,t)C_2(a,t)} - C(b,t)C_{22}(a,t) \\ &= C(a,t)C_{22}(b,t) - C(b,t)C_{22}(a,t) \end{aligned}$$

Por (3.1) segue que

$$E'(t) = C(a,t)K(t)C(b,t) - C(b,t)K(t)C(a,t) = 0$$

Logo, E não depende de t, em particular $E(a) = E(b)$. Como $C(a,a) = C(b,b) = 0$ e $C_2(a,a) = C_2(b,b) = 1$ segue que $C(a,b) = E(b) = E(a) = -C(b,a)$, como queríamos. ∎

Como consequência dessa simetria, encontramos outra solução da equação $X'' + KX = 0$ além das da forma $t \mapsto C(s,t)$:

Proposição 3.32. A função $t \mapsto C_1(s,t)$ é solução do pvi

$$\begin{cases} X''(t) + K(t)X(t) = 0 \\ X(s) = -1 \quad \text{e} \quad X'(s) = 0 \end{cases}$$

Demonstração. Derivando a equação $C_{22}(s,t) + K(t)C(s,t) = 0$ em relação a s segue que C_1 é solução de $X'' + KX = 0$. Resta verificarmos que $C_1(s,s) = -1$ e $C_{12}(s,s) = 0$. De fato, ambas as afirmações seguem do lema anterior. Como $C_1(s,t) + C_2(s,t) = 0$, para $s = t$ temos $C_1(s,s) = -C_2(s,s) = -1$. E também $C_{12}(s,t) + C_{1,2}(t,s) = 0$ implica para $s = t$ que $2C_{12}(s,s) = 0$. ∎

Observamos agora que $C(0,t)$ e $C_1(0,t)$ formam um conjunto de soluções linearmente independentes para a edo $X'' + KX = 0$. Logo qualquer solução é combinação linear dessas duas. Em particular, $C(s,t)$ e $C_1(s,t)$:

Proposição 3.33. Vale que

$$C(s,t) = -C_1(0,s)C(0,t) + C(0,s)C_1(0,t)$$

Consequentemente temos também:

$$\begin{aligned} C_2(s,t) &= -C_1(0,s)C_2(0,t) + C(0,s)C_{12}(0,t) \\ C_1(s,t) &= -C_{12}(0,s)C(0,t) + C_2(0,s)C_1(0,t) \\ C_{12}(s,t) &= -C_{12}(0,s)C_2(0,t) + C_2(0,s)C_{12}(0,t) \end{aligned}$$

Demonstração. Seja $F(t) = -C_1(0,s)C(0,t) + C(0,s)C_1(0,t)$. Então F é uma solução de $X'' + KX = 0$ pois é combinação linear de $C(0,t)$ e $C_1(0,t)$. Além disso, $F(s) = 0$ e

$$F'(t) = -C_1(0,s)C_2(0,t) + C(0,s)C_{12}(0,t)$$

Logo $F'(s) = -C_1(0,s)C_2(0,s) + C(0,s)C_{12}(0,s)$. De maneira análoga ao feito na prova da proposição 3.31, vale que a expressão

$$-C_1(s,t)C_2(s,t) + C(s,t)C_{12}(s,t)$$

não depende de s nem de t. Em particular, segue que

$$F'(s) = -C_1(0,0)C_2(0,0) + C(0,0)C_{12}(0,0) = 1$$

Logo, pela unicidade das soluções, segue da proposição 3.32 que $F(t) = C(s,t)$. Isso mostra a primeira fórmula. As demais são obtidas derivando esta. ∎

Finalmente podemos aplicar os resultados anteriores a campos de Jacobi ao longo de uma geodésica:

Proposição 3.34. Seja γ uma geodésica parametrizada por comprimento de arco e considere um campo de Jacobi ortogonal ao longo de γ de forma que $J(s) = a$ e $J'(s) = b$. Então podemos calcular $J(t)$ e $J'(t)$ através das expressões:

$$\begin{bmatrix} J(t) \\ J'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1(s,t) & C(s,t) \\ -C_{12}(s,t) & C_2(s,t) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Demonstração. Basta notar que $-aC_1(s,t) + bC(s,t)$ é uma solução para o pvi

$$\begin{cases} X''(t) + K(t)X(t) = 0 \\ X(s) = a \quad \text{e} \quad X'(s) = b \end{cases}$$

Logo, pela unicidade das soluções, $J(t) = -aC_1(s,t) + bC(s,t)$. ∎

3.4 Derivada da Aplicação do Bilhar

Nessa seção calcularemos uma expressão para a derivada da aplicação do bilhar. Faremos a dedução de duas maneiras distintas: uma calculando as derivadas da função geradora e outra a partir de campos de Jacobi. Seja então γ uma curva $\mathscr{C}^2$, contida numa vizinhança totalmente normal e bordo da mesa de bilhar. H denota a função geradora, isto é, $H(s_1, s_2) = d(\gamma(s_2), \gamma(s_2))$. T denotará a aplicação do bilhar, como usual.

3.4.1 Derivada via Função Geradora

A ideia aqui é usar a proposição 3.5. Apesar da aplicação do bilhar não preservar área, mas sim a medida $\sin\theta d\theta \wedge ds$ podemos resolver o problema com uma mudança de variáveis. De qualquer forma, precisaremos calcular as derivadas parciais de H.

Já sabemos que $H_1 = -\cos\theta_1$ e $H_2 = \cos\theta_2$ das seções anteriores. Além disso, fixado um ponto $p = \gamma(s_1)$ e sendo $\tilde{\gamma} = \exp_p^{-1} \circ \gamma$ encontramos (conforme demonstração do lema 3.14)

$$H_{12}(s_1, s_2) = \frac{|\tilde{\gamma}'(s_2)| \sin\theta_1 \sin\tilde{\theta}_2}{H(s_1, s_2)}$$

Procedendo similarmente podemos encontrar também que

$$H_{22}(s_1, s_2) = \frac{|\tilde{\gamma}'(s_2)|^2 \sin^2\tilde{\theta}_2 + \langle \tilde{\gamma}(s_2), \tilde{\gamma}''(s_2) \rangle}{H}$$

O inconveniente dessas expressões é que a curva $\tilde{\gamma}$ depende do ponto $p = \gamma(s_1)$ considerado.

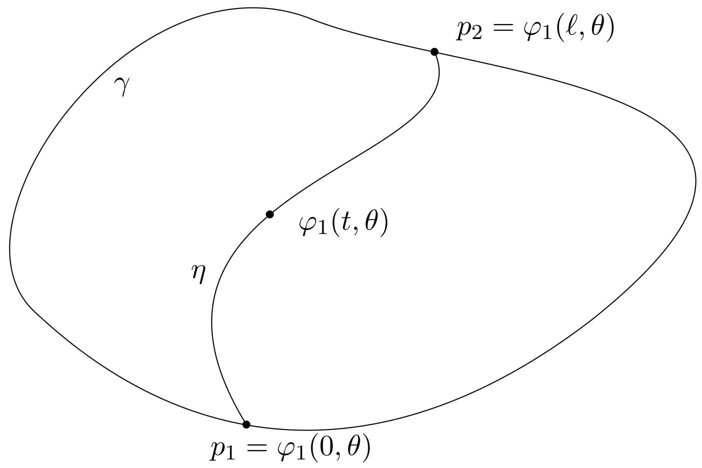


Figura 3.3: Coordenadas polares geodésicas centradas em p_1

Outro inconveniente é que ela depende de $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2$.

Usando coordenadas polares geodésicas, que passamos a recordar sucintamente, obteremos agora outra expressão para as derivadas de H. Seja φ uma parametrização por coordenadas polares geodésicas. Ou seja, a cada par (r, θ), $r > 0$ associamos um ponto $\varphi(r, \theta) \in M$. Denotamos por $\dfrac{\partial}{\partial r}$ e $\dfrac{\partial}{\partial \theta}$ os vetores tangentes as curvas coordenadas da parametrização. Ou seja, se $\gamma(s) = \varphi(r(s), \theta(s))$, então $\gamma'(s) = r'(s)\dfrac{\partial}{\partial r} + \theta'(s)\dfrac{\partial}{\partial \theta}$. Além disso, pela proposição 1.16 os coeficientes da métrica são 1, 0 e G^2. Isto é, $\left\| a\dfrac{\partial}{\partial r} + b\dfrac{\partial}{\partial \theta} \right\|^2 = a^2 + b^2 G(r, \theta)^2$.

Consideramos agora dois pontos p_1, p_2 e seja η o segmento geodésico ligando tais pontos. Denotamos por ℓ a distância $d(p_1, p_2)$. Centrada em p_1, seja φ_1 parametrização por coordenadas polares. Assim, existe θ tal que $r \mapsto \varphi_1(r, \theta)$, $0 \leq r \leq \ell$ é a parametrização de η, por comprimento de arco e com sentido de p_1 para p_2 (figura 3.3). Com essas coordenadas, os coeficientes da métrica são $1, 0$ e $G_1(r, \theta)^2$. Como trabalharemos apenas em η, vamos desconsiderar a dependência em θ dessas funções. Portanto, denotamos por $G_1(r)^2$ o terceiro coeficiente.

Similarmente, seja φ_2 parametrização por coordenadas polares geodésicas centradas em p_2. Existe θ tal que $r \mapsto \varphi_1(r, \theta)$, $0 \leq r \leq \ell$ é a parametrização de η, por comprimento de arco e com sentido de p_2 para p_1. Nessas coordenadas os coeficientes da métrica são $1, 0$ e $G_2(r)^2$.

Agora calcularemos expressões para as derivadas de H em termos de G_1, G_2. Como usual, seja γ o bordo do bilhar, $\gamma(s_1) = p_1$ e $\gamma(s_2) = p_2$. $\theta_1(s_1, s_2)$ e $\theta_2(s_1, s_2)$ denotam os ângulos de saída e de chegada. Sabemos que $H_1 = -\cos\theta_1$ e $H_2 = \cos\theta_2$. Assim, a partir das derivadas parciais de θ_1, θ_2 podemos calcular as derivadas parciais segundas de H.

Proposição 3.35. Vale que

$$\begin{cases} \sin\theta_2 = G_1 \cdot \partial_2\theta_1 \\ \sin\theta_1 = -G_2 \cdot \partial_1\theta_2 \end{cases}$$

onde $G_1 = G_1(\ell)$ e $G_2 = G_2(\ell)$.

Demonstração. Considerando as coordenadas polares centradas em $p_1 = \gamma(s_1)$, podemos escrever $\gamma(s) = \varphi_1(r(s), \theta(s))$. Assim temos

$$H(s_1, s_2) = r(s_2) \implies H_2(s_1, s_2) = r'(s_2) = \cos\theta_2$$

Temos também

$$\gamma'(s) = r'\frac{\partial}{\partial r} + \theta'\frac{\partial}{\partial\theta} \implies |\gamma'|^2 = r'^2 + (G_1)^2\theta'^2 = 1$$

Disso obtemos $\sin^2\theta_2 = G_1(\ell)^2\theta'(s_2)^2$. Como $\theta_1(s_1, s) = \theta(s) + C$, onde C é uma constante, temos $\theta'(s_2) = \partial_2\theta_1(s_2, s_2)$. Por fim, $\sin\theta_2 \geq 0$, $G_1(\ell) > 0$ e $s \mapsto \theta_1(s_1, s)$ é crescente, conforme 3.7. Portanto concluímos a primeira afirmação. A segunda segue analogamente. ■

Corolário 3.36. Vale que

$$H_{12} = \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2}{G_1(\ell)} = \frac{\sin\theta_1 \sin\theta_2}{G_2(\ell)}$$

Em particular, $G_1(\ell) = G_2(\ell)$.

Demonstração. Obtemos de $H_1 = -\cos\theta_1$ que $H_{12} = \sin\theta_1\partial_2\theta_1$ e de $H_2 = \cos\theta_2$ obtemos $H_{21} = -\sin\theta_2\partial_1\theta_2$. Da proposição anterior segue o afirmado. Notamos que a relação $G_1(\ell) = G_2(\ell)$ é equivalente à afirmação $C(s,t) + C(t,s) = 0$ da proposição 3.31. ■

Proposição 3.37. Vale que

$$H_{11} = \sin\theta_1 \left(\sin\theta_1 \frac{G_2'}{G_2} - \kappa_1\right)$$
$$H_{22} = \sin\theta_2 \left(\sin\theta_2 \frac{G_1'}{G_1} - \kappa_2\right)$$

onde κ_1 e κ_2 são as curvaturas de γ em s_1, s_2.

Demonstração. Usando coordenadas centradas em $\gamma(s_1) = p_1$ escrevemos $\gamma(s) = \varphi_1(r(s), \theta(s))$. Daí

$$\gamma'(s) = r'\frac{\partial}{\partial r} + \theta'\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Logo, o vetor normal a γ em s será

$$n(s) = -G_1'\theta'\frac{\partial}{\partial r} + \frac{r'}{G_1}\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Por um lado, sabemos que $\dfrac{D\gamma'}{ds} = \kappa n$. Por outro, pela proposição 1.17, vale que

$$\frac{D\gamma'}{ds} = \left(r'' + \theta'^2\Gamma^r_{\theta\theta}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\theta'' + 2r'\theta'\Gamma^\theta_{r\theta} + \theta'^2\Gamma^\theta_{\theta\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Temos também que $\Gamma^r_{\theta\theta} = -G_1G_1'$. Assim, comparando o coeficiente de $\dfrac{\partial}{\partial r}$ obteremos

$$r'' - \theta' G_1 G_1' = -\kappa_1 G_1 \theta'$$

Por fim, como $H_{22}(s_1, s_2) = r''(s_2)$ e $\theta_1(s_1, s_2) = \theta(s_2)$ concluímos que

$$H_{22} = (\partial_2\theta_1)^2 G_1G_1' - \kappa_2 G_1\partial_2\theta_1$$

Usando a proposição 3.35 advém

$$H_{22} = \sin\theta_2\left(\sin\theta_2\frac{G_1'}{G_1} - \kappa_2\right)$$

A outra fórmula pode ser obtida analogamente. ■

Teorema 3.38. Seja γ o bordo de uma mesa de bilhar convexa de classe $\mathscr{C}^2$ contida numa vizinhança totalmente normal e seja T a aplicação do bilhar correspondente. Digamos que $T(s_1, \theta_1) = (s_2, \theta_2)$ e que a curvatura de γ em $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$ é κ_1, κ_2 respectivamente. Considere as funções G_1 e G_2 como definidas anteriormente. Então a derivada de T em (s_1, θ_1) é

$$dT = \frac{1}{\sin\theta_2}\begin{bmatrix} \kappa_1 G - G_2'\sin\theta_1 & G \\ \kappa_1\kappa_2 G - \kappa_1 G_1'\sin\theta_2 - \kappa_2 G_2'\sin\theta_1 + \sin\theta_1\sin\theta_2\left(\dfrac{G_1'G_2' - 1}{G}\right) & \kappa_2 G - G_1'\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

onde $G = G_1(\ell) = G_2(\ell)$, $G_1' = G_1'(\ell)$ e $G_2' = G_2'(\ell)$, sendo ℓ a distância entre $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$.

Demonstração. Pela prova do corolário 3.19, sendo F dada por $F(s,\theta) = (s, -\cos\theta)$ podemos escrever

$$\Phi \circ F = F \circ T$$

onde Φ é um twist gerado por $-H$. Assim temos $dT = dF^{-1} \circ d\Phi \circ dF$. Pela proposição 3.5, lembrando que Φ é gerada por $-H$ temos

$$dT = \frac{1}{\sin\theta_2}\begin{bmatrix} \sin\theta_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{H_{12}} \begin{bmatrix} -H_{11} & 1 \\ H_{11}H_{22} - H_{12}^2 & -H_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

Multiplicando obtemos

$$dT = \frac{1}{\sin\theta_2 H_{12}} \begin{bmatrix} -H_{11}\sin\theta_2 & \sin\theta_1\sin\theta_2 \\ H_{11}H_{22} - H_{12}^2 & -H_{22}\sin\theta_1 \end{bmatrix}$$

Usando as proposições 3.35 e 3.37 obtemos o desejado. ■

3.4.2 Derivada via Campos de Jacobi

Seja γ o bordo de uma mesa de bilhar de comprimento L. Assumimos γ de classe $\mathscr{C}^2$, contida numa vizinhança totalmente normal e convexa. Seja $T : [0,L] \times [0,\pi] \to [0,L] \times [0,\pi]$. A cada ponto (s,θ) corresponde uma posição $\gamma(s)$ do bordo e uma direção $V(\theta) = \cos\theta\gamma'(s) + \sin\theta n(s)$ de saída para a partícula. Assim, a cada curva $\varepsilon \mapsto \Gamma(\varepsilon) = (s(\varepsilon), \theta(\varepsilon))$ contida no espaço de fase $[0,L] \times [0,\pi]$ fica naturalmente associada a variação geodésica

$$h(\varepsilon, t) = \exp_{\gamma(s)} tV(\theta)$$

Cada um dos raios da variação h encontra a curva γ. Podemos então considerar a reflexão desses raios nessa curva, que nos dá uma nova variação. Isto é, os raios dessa nova variação são reflexões dos raios de h pela curva γ. Isso nos dá a seguinte ideia (informal) para analisar a derivada de T: Dado um vetor tangente v_1 ao espaço de fase, escolhemos uma curva tangente a esse vetor e encontramos uma variação h_1 associada. A seguir fazemos a reflexão de h_1 obtendo a variação refletida h_2. Por fim, encontramos o vetor v_2 associado a h_2. Um problema com essa ideia é que a associação entre variações e vetores tangentes pode ser sutil. Entretanto veremos que as dificuldades são resolvidas ao usarmos os campos de Jacobi correspondentes.

Definição 3.39. Dada $\Gamma : (-\delta, \delta) \to [0,L] \times [0,\pi]$, o campo de Jacobi associado a Γ no ponto $(s_0, \theta_0) = \Gamma(0)$ é

$$\mathbf{J}(t) = \frac{\partial h}{\partial \varepsilon}(0,t)$$

onde $h(\varepsilon,t) = \exp_{\gamma(s)} tV(\theta)$, $V(\theta) = \cos\theta\gamma'(s) + \sin\theta n(s)$ e $n(s)$ é o vetor normal de γ.

Observamos que $\mathbf{J}$ é um campo ao longo da geodésica passando por $\gamma(s_0)$ e formando ângulo θ_0 com γ. Ou seja, é um campo sobre a trajetória correspondente a (s_0, θ).

Proposição 3.40. Sejam $\Gamma_1, \Gamma_2 : (-\delta, \delta) \to [0, L] \times [0, \pi]$ com $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0)$ e $\Gamma_1'(0) = \Gamma_2'(0)$ e sejam $\mathbf{J}_1$, $\mathbf{J}_2$ os respectivos campos de Jacobi associados. Então as componentes perpendiculares de $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$ são iguais.

Demonstração. Escrevendo $\Gamma_i(\varepsilon) = (s^i(\varepsilon), \theta^i(\varepsilon))$, pelo corolário 3.27 segue que

$$\mathbf{J}_i(0) = \gamma'(s_0)$$

onde $\Gamma_i(0) = (s_0, \theta_0)$. Em particular temos $\mathbf{J}_1(0) = \mathbf{J}_2(0)$. Pelo mesmo corolário, sendo $V_i(\theta^i) = \cos\theta^i \gamma'(s^i) + \sin\theta^i n(s^i)$ segue que

$$\frac{D}{dt}\mathbf{J}_i(0) = \frac{D}{d\varepsilon}V_i(\theta_0) = \left(\frac{d\theta^i}{d\varepsilon} + k(s_0)\frac{ds^i}{d\varepsilon}\right)\left(-\sin\theta_0\gamma'(s_0) + \cos\theta_0 n(s_0)\right)$$

Disso segue que $\frac{D}{dt}\mathbf{J}_1(0) = \frac{D}{dt}\mathbf{J}_2(0)$. Portanto, os campos $\mathbf{J}_1$ e $\mathbf{J}_2$ são iguais, em particular sua componente perpendicular é a mesma. ■

A partir de agora, vamos denotar por Σ o espaço de fase da aplicação do bilhar. Isto é, $\Sigma = [0, L] \times (0, \pi)$. Recordamos que se $\mathbf{J}(t)$ é um campo de Jacobi ao longo da geodésica η, então sua componente perpendicular pode ser escrita como $J(t)w(t)$, onde $w(t)$ é o vetor normal unitário a η.

Definição 3.41. Seja $(s_0, \theta_0) \in \Sigma$ e $v \in \mathbb{R}^2 \equiv T_{(s_0,\theta_0)}\Sigma$. O campo de Jacobi correspondente a v é o campo associado à curva $\Gamma : (-\delta, \delta) \to \Sigma$ dada por $\Gamma(\varepsilon) = (s_0 + \varepsilon v_s, \theta_0 + \varepsilon v_\theta)$, onde $(v_s, v_\theta) = v$. Se a componente perpendicular de tal campo é $J(t)w(t)$, chamamos o par $(J(0), J'(0))$ de coordenadas associadas ao vetor v.

Proposição 3.42. Seja $v = (v_s, v_\theta) \in T_{(s_0,\theta_0)}\Sigma$. Então as coordenadas associadas a v são $J(0) = -\sin\theta_0 v_\theta$ e $J'(0) = k(s_0)v_s + v_\theta$. Ou seja:

$$\begin{bmatrix} J(0) \\ J'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_0 & 0 \\ \kappa(s_0) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_s \\ v_\theta \end{bmatrix}$$

onde κ denota a curvatura de γ. Em particular, a correspondência $v \leftrightarrow (J, J')$ é um isomorfismo de $T_{(s_0,\theta_0)}\Sigma$ em $\mathbb{R}^2$.

Demonstração. Observamos pelo corolário 3.27 que o campo associado a $v = (v_s, v_\theta)$ satisfaz $\mathbf{J}(0) = \gamma'(s_0)v_s$ e $\frac{D}{dt}\mathbf{J}(0) = \frac{D}{d\varepsilon}V(\theta_0)$, onde V é o campo em γ dado por $V(\theta) = \cos\theta\gamma'(s) + \sin\theta n(s)$. Por outro lado, $\mathbf{J}$ é um campo ao longo da geodésica $t \mapsto \exp_{\gamma(s_0)} tV(\theta_0)$, assim

$w = -\sin\theta_0\gamma'(s_0) + \cos\theta_0 n(s_0)$ é o vetor normal a tal geodésica. Portanto

$$J(0) = \langle \mathbf{J}(0), w\rangle = \big\langle \gamma'(s_0)v_s, w\big\rangle = -\sin\theta_0 v_s$$

Também temos

$$\frac{D}{dt}\mathbf{J}(0) = \frac{D}{d\varepsilon}V(\theta_0)) = (v_\theta + k(s_0)v_s)\big(-\sin\theta_0\gamma'(s_0) + \cos\theta_0 n(s_0)\big) = (v_\theta + k(s_0)v_s)\, w \implies$$

$$J'(0) = \left\langle w, \frac{D}{dt}\mathbf{J}(0)\right\rangle = \langle w, (v_\theta + k(s_0)v_s)\, w\rangle = v_\theta + k(s_0)v_s$$

como queríamos. ■

Agora analisaremos o que acontece com os campos de Jacobi ao refletirmos as variações. Sejam $p_1 = \gamma(s_1)$ e $p_2 = \gamma(s_2)$ pontos cuja distância é $\ell = d(p_1, p_2)$ e sejam θ_1, θ_2 tais que $T(s_1, \theta_1) = (s_2, \theta_2)$. η denota a geodésica por p_1, p_2 com sentido de p_1 para p_2, e $w(t)$ é o vetor normal a η em $\eta(t)$. Dada uma curva $\Gamma_1 : (-\delta, \delta) \to \Sigma$, tangente a um vetor $v \in T_{(s_1,\theta_1)}\Sigma$, como vimos anteriormente podemos associar a variação

$$h_1(\varepsilon, t)\exp_{\gamma(s)} tV(\theta)$$

onde s, θ são funções de ε, com $s(0) = s_1$ e $\theta(0) = \theta_1$. Assim, o campo de Jacobi correspondente é um campo sobre η. Observamos que cada um dos raios de h_1, isto é, cada uma das curvas $t \mapsto h_1(\varepsilon, t)$ encontra a curva γ em um ponto e podemos considerar sua reflexão em γ. Seja V_2 sua direção de reflexão, ou seja, V_2 é um campo unitário sobre γ numa vizinhança de $\gamma(s_2)$. Notamos que

$$h_2(\varepsilon, t) = \exp_{\gamma(s)} tV_2$$

é exatamente a variação associada à curva $\Gamma_2 = T \circ \Gamma_1 : (-\delta, \delta) \to \Sigma$. Assim, dado $(J_1(0), J_1'(0))$, as coordenadas do campo associado a h, estamos interessados em encontrar $(J_2(0), \tilde{J}_2'(0))$, as coordenadas do campo correspondente a $\tilde{h}$. Primeiro precisaremos de um lema

Lema 3.43. Sejam $W_1(\theta) = \cos(-\theta)\gamma'(s) + \sin(-\theta)n(s)$ e $W_2(\theta) = \cos\theta\gamma'(s) + \sin\theta n(s)$ e $h_1(\varepsilon, t) = \exp_{\gamma(s)} tW_1(\theta)$, $h_2(\varepsilon, t) = \exp_{\gamma(s)} tW_2(\theta)$. Sejam (J_1, J_1') e (J_2, J_2') coordenadas dos campos associados a h_1, h_2 respectivamente. Então:

$$\begin{bmatrix} J_2 \\ J_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2\kappa}{\sin\theta_0} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_1' \end{bmatrix}$$

onde $\theta_0 = \theta(0)$ e κ é a curvatura de γ em $s(0)$.

Demonstração. Denotamos $\theta'(0) = v_\theta$ e $s'(0) = v_s$. Assim, pela proposição 3.42 temos $J_2(0) = -\sin\theta_0 v_s$ e $J_2'(0) = \kappa v_s + v_\theta$. Também temos $J_1(0) = -\sin(-\theta_0)v_\theta = \sin\theta_0 v_\theta$ e $J_1'(0) = \kappa v_s - v_\theta$. Portanto:

$$\begin{bmatrix} J_2 \\ J_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta_0 v_\theta \\ \kappa v_s + v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2\kappa}{\sin\theta_0} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sin\theta_0 v_\theta \\ \kappa v_s - v_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2\kappa}{\sin\theta_0} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1 \\ J_1' \end{bmatrix}$$

como queríamos. ■

Agora finalmente relacionaremos $(J(0), J'(0))$ e $(\tilde{J}(0), \tilde{J}'(0))$:

Proposição 3.44. Nas condições acima

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}(0) \\ \tilde{J}'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2\kappa}{\sin\theta_0} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C_1(0,\ell) & C(0,\ell) \\ -C_{12}(0,\ell) & C_2(0,\ell) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1(0) \\ J_1'(0) \end{bmatrix}$$

onde C é a função da definição 3.30.

Demonstração. Se escrevermos $V_2 = \cos\theta\gamma'(s) + \sin\theta n(s)$ e $W = \cos(-\theta)\gamma'(s) + \sin(-\theta)n(s)$ podemos aplicar o lema anterior à variação h_2 e à variação $\tilde{h}$ dada por $\tilde{h}(\varepsilon, t) = \exp_{\alpha(s)} tW$. Isso implica que

$$\begin{bmatrix} J_2(0) \\ J_2'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2\kappa}{\sin\theta_2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \tilde{J}(0) \\ \tilde{J}'(0) \end{bmatrix}$$

onde $(\tilde{J}, \tilde{J}')$ são as coordenadas do campo associado a $\tilde{h}$. Observamos que W é a direção de chegada dos raios da variação h_1 na curva γ. Assim, segue que a componente normal do campo associado a h_1 em $t = \ell$ é a mesma do campo associado a $\tilde{h}$ em $t = 0$. Pela proposição 3.34 temos

$$\begin{bmatrix} \tilde{J}(0) \\ \tilde{J}'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_1(\ell) \\ J_1'(\ell) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_1(0,\ell) & C(0,\ell) \\ -C_{12}(0,\ell) & C_2(0,\ell) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1(0) \\ J_1'(0) \end{bmatrix}$$

Combinando essas duas equações, temos o resultado desejado. ■

Segue portanto dos resultados provados acima que a matriz da derivada da aplicação do bilhar é:

Teorema 3.45. Seja γ o bordo de uma mesa de bilhar convexa de classe $\mathscr{C}^2$ contida numa vizinhança totalmente normal e seja T a aplicação do bilhar correspondente. Digamos que $T(s_1, \theta_1) = (s_2, \theta_2)$ e que a curvatura de γ em $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$ é κ_1, κ_2 respectivamente. Então a derivada de T em (s_1, θ_1) é

$$dT = \frac{1}{\sin\theta_2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_2 & \sin\theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2k_2}{\sin\theta_2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C_1 & C \\ -C_{12} & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{bmatrix}$$

onde C é definida como em 3.30, a partir do segmento geodésico η ligando p_1 e p_2. Isto é, $t \mapsto C(s,t)$ é solução da equação diferencial $X''(t) + K(t)X(t) = 0$, onde $K : [0,\ell] \to \mathbb{R}$ é a curvatura gaussiana da superfície restrita a η. As funções C, C_1, C_2, C_{12} são avaliadas em $(0,\ell)$, sendo ℓ a distância entre $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$.

Observamos que $C = G$, $C_2 = G_1'$, $C_1 = -G_2'$ e $C_{12} = \dfrac{1 - G_1'G_2'}{G}$, assim obtemos uma fatoração para a matriz obtida no teorema 3.38. Ao escrevermos dessa forma, podemos observar mais claramente como a curvatura (da superfície) altera a aplicação do bilhar: toda a informação está contida na matriz com os coeficientes C (ou G na outra notação). Em curvatura constante, podemos resolver a equação diferencial explicitamente. Para $K = 0$, devemos ter $t \mapsto C(s,t)$ solução para $X''(t) = 0$, satisfazendo $C(s,s) = 0$ e $C_1(s,s) = 1$. Daí segue que $C(s,t) = t - s$ e portanto $C = C(0,\ell) = \ell$, $C_2 = C_2(0,\ell) = 1$, $C_1 = C_1(0,\ell) = -1$ e $C_{12} = C_{12}(0,\ell) = 0$. Nesse caso a derivada da aplicação do bilhar é

$$\begin{aligned} dT &= \frac{1}{\sin\theta_2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_2 & \sin\theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2k_2}{\sin\theta_2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & \ell \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\sin\theta_2}\begin{bmatrix} \kappa_1\ell - \sin\theta_1 & \ell \\ \kappa_1\kappa_2\ell - \kappa_1\sin\theta_2 - \kappa_2\sin\theta_1 & \kappa_2\ell - \sin\theta_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Já para curvatura $K = 1$, a EDO torna-se $X''(t) + X(t) = 0$, e assim $C(s,t) = \sin(t-s)$. Portanto, $C = \sin\ell$, $C_2 = \cos\ell$, $C_1 = -\cos\ell$ e $C_{12} = \sin\ell$ e nesse caso a derivada é a matriz

$$dT = \frac{1}{\sin\theta_2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_2 & \sin\theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2k_2}{\sin\theta_2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cos\ell & \sin\ell \\ -\sin\ell & \cos\ell \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{\sin\theta_2}\begin{bmatrix} \kappa_1\sin\ell - \sin\theta_1\cos\ell & \sin\ell \\ \kappa_1\kappa_2\sin\ell - \kappa_1\sin\theta_2\cos\ell - \kappa_2\sin\theta_1\cos\ell - \sin\theta_1\sin\theta_2\sin\ell & \kappa_2\sin\ell - \cos\ell\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

Por fim, em curvatura $K = -1$, a equação diferencial torna-se $X''(t) - X(t) = 0$, e obtemos $C(s,t) = \sinh(t-s)$. Daí $C = \sinh\ell$, $C_2 = \cosh\ell$, $C_1 = -\cosh\ell$ e $C_{12} = -\sinh\ell$. Portanto, a derivada será

$$dT = \frac{1}{\sin\theta_2}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ k_2 & \sin\theta_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2k_2}{\sin\theta_2} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \cosh\ell & \sinh\ell \\ \sinh\ell & \cosh\ell \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta_1 & 0 \\ k_1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$\frac{1}{\sin\theta_2}\begin{bmatrix} \kappa_1\sinh\ell - \sin\theta_1\cosh\ell & \sinh\ell \\ \kappa_1\kappa_2\sinh\ell - \kappa_1\sin\theta_2\cosh\ell - \kappa_2\sin\theta_1\cosh\ell + \sin\theta_1\sin\theta_2\sinh\ell & \kappa_2\sinh\ell - \cosh\ell\sin\theta_2 \end{bmatrix}$$

Para ilustrar o uso das fórmulas acima, consideramos um bilhar T numa mesa γ convexa de classe $\mathscr{C}^2$. Digamos que $T(s,\theta) = (\tilde{s},\tilde{\theta})$ e as curvaturas em $\gamma(s), \gamma(\tilde{s})$ são κ e $\tilde{\kappa}$, respectivamente. Pelo teorema, a derivada de T no ponto $x = (s,\theta)$ é dada por

$$dT_x = \frac{1}{\sin\tilde{\theta}}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \tilde{\kappa} & \sin\tilde{\theta} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2\tilde{\kappa}}{\sin\tilde{\theta}} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C_1 & C \\ -C_{12} & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\theta & 0 \\ \kappa & 1 \end{bmatrix}$$

Suponhamos que $\tilde{x} = (\tilde{s},\tilde{\theta})$ é um ponto periódico de periodo 2. Isto é, $T\tilde{x} = x$. Nesse caso vale que a derivada de T em $\tilde{x}$ é dada por

$$dT_{\tilde{x}} = \frac{1}{\sin\theta}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \kappa & \sin\theta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \dfrac{2\kappa}{\sin\theta} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\tilde{C}_1 & \tilde{C} \\ -\tilde{C}_{12} & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\sin\tilde{\theta} & 0 \\ \tilde{\kappa} & 1 \end{bmatrix}$$

Como x é um ponto fixo para T^2, podemos calcular $(dT^2)_x$ através da igualdade $(dT^2)_x = dT_x \cdot dT_{\tilde{x}}$. Observando que nessa situação devemos ter $\theta = \tilde{\theta} = \pi/2$ concluímos que

$$(dT^2)_x = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \tilde{\kappa} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2\tilde{\kappa} & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C_1 & C \\ -C_{12} & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2\kappa & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -\tilde{C}_1 & \tilde{C} \\ -\tilde{C}_{12} & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ \tilde{\kappa} & 1 \end{bmatrix}$$

Podemos relacionar as funções C e $\tilde{C}$. De fato, o raio incidente de uma órbita de período 2 coincide com o raio refletido, a menos do sentido. Assim, se $t \mapsto C(s,t)$ é uma solução da EDO $X''(t) + K(t)X(t) = 0$ segue que $t \mapsto \tilde{C}(s,t)$ é solução de $X''(t) + K(\ell - t)X(t)$. Disso concluímos que $\tilde{C}(s,t) = -C(\ell - s, \ell - t)$. Usando as simetrias de C advém

$$\begin{bmatrix} -\tilde{C}_1 & \tilde{C} \\ -\tilde{C}_{12} & \tilde{C}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_2 & C \\ -C_{12} & -C_1 \end{bmatrix}$$

Observamos que $\det(dT^2)_x = 1$. Assim, os autovalores de $(dT^2)_x$ satisfazem $\lambda^2 - \tau\lambda + 1 = 0$, onde τ é o traço de $(dT^2)_x$. Logo, x é um ponto periódico hiperbólico caso seja $\tau > 2$ e elíptico caso $\tau < 2$. Vamos calcular τ. Para isso notamos que o traço satisfaz $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$. Então devemos ter

$$
\begin{aligned}
\operatorname{tr}(dT^2)_x &= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} -C_1 & C \\ -C_{12} & C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2\kappa & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} C_2 & C \\ -C_{12} & -C_1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 2\tilde{\kappa} & -1 \end{bmatrix}\right) \\
&= \operatorname{tr}\left(\begin{bmatrix} C_1 + 2\kappa C & -C \\ C_{12} + 2\kappa C_2 & -C_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -C_2 + 2\tilde{\kappa} C & -C \\ C_{12} - 2\tilde{\kappa} C_1 & C_1 \end{bmatrix}\right) \\
&= (C_1 + 2\kappa C)(-C_2 + 2\tilde{\kappa} C) - C(C_{12} - 2\tilde{\kappa} C_1) - C(C_{12} + 2\kappa C_2) - C_1 C_2 \\
&= -2C_1C_2 - 2CC_{12} - 4\kappa C C_2 + 4\tilde{\kappa} C C_1 + 4\kappa\tilde{\kappa} C^2 \\
&= 2 + 4C(-C_{12} - \kappa C_2 + \tilde{\kappa} C_1 + \kappa\tilde{\kappa} C)
\end{aligned}
$$

Como $C > 0$ segue que x é hiperbólico caso $\delta := -C_{12} - \kappa C_2 + \tilde{\kappa} C_1 + \kappa\tilde{\kappa} C$ seja positivo, elíptico caso seja negativo e parabólico caso seja nulo. Consideraremos então o caso de bilhares em curvatura constante. Para $K = 0$, temos $\delta = \kappa\tilde{\kappa}\ell - \kappa - \tilde{\kappa}$. Portanto podemos descobrir o comportamento do ponto periódico através do sinal da expressão $\ell - \frac{1}{\kappa} - \frac{1}{\tilde{\kappa}}$. E isso pode ser interpretado geometricamente. Basta descobrir as posições relativas dos círculos centrados em $\gamma(s)$ e $\gamma(\tilde{s})$ cujo raio é o raio de curvatura. Para $K = 1$, temos $\delta = -\sin\ell - \kappa\cos\ell - \tilde{\kappa}\cos\ell + \kappa\tilde{\kappa}\sin\ell$. Por fim, para $K = -1$, obtemos $\delta = \sinh\ell - \kappa\cosh\ell - \tilde{\kappa}\cosh\ell + \kappa\tilde{\kappa}\sinh\ell$.

Capítulo 4

Curvas invariantes

Introdução

Pelo teorema de Birkhoff (teorema 3.2) sabemos que as curvas invariantes (nessa seção nos referimos apenas as não homotopicamente triviais) de um dado bilhar são gráficos. Assim duas curvas invariantes distintas definem uma faixa invariante, que pode conter outras curvas invariantes no seu interior Dizemos que a faixa é uma zona de instabilidade no caso em que não há. Duas perguntas que surgem então são: o que acontece em uma faixa e quando tais curvas invariantes existem?

Para bilhares convexos planos existem resultados que mostram como a geometria da mesa interfere na segunda questão. Lazutkin [19] mostra que se o bordo γ é suficientemente diferenciável (Douady melhora consideravelmente a diferenciabilidade necessária [10]) e com curvatura positiva, então existem curvas invariantes próximas do bordo. Na direção oposta Mather provou que se γ tem algum ponto de curvatura nula, então não existe nenhuma curva invariante. Um caso intermediário é o de Hubacher [16] onde é mostrado que se γ é $\mathscr{C}^1$ e também é $\mathscr{C}^2$ exceto num número finito de pontos onde existem os limites laterais da curvatura então existe uma vizinhança do bordo do espaço de fase livre de curvas invariantes.

Nesse capítulo provaremos que tais resultados continuam válidos para bilhares em superfícies com pequenas modificações. Mostraremos também que se a métrica possui simetria radial então o bilhar obtido no círculo geodésico é completamente integrável (isto é, todos os pontos do espaço de fase estão em uma curva invariante). Por outro lado, mostramos a existência de uma superfície e um circulo geodésico cujo bilhar não é completamente integrável. Esse último resultado difere do plano, do plano hiperbólico e da esfera, onde um bilhar é totalmente integrável se, e somente se, γ é um círculo, conforme [2] e [3]. Seguiremos as notações do capítulo 2.

4.1 Definições e Aproximação Assintótica

Começaremos essa seção com as definições básicas que trataremos nesse capítulo. Em seguida, como estamos interessados em curvas invariantes numa vizinhança do bordo, mostraremos como aproximar a aplicação do bilhar nessa vizinhança quando a curvatura é não nula. Tais estimativas tornam possível obter condições para a existência ou não de curvas invariantes.

Seja $\mathbb{A}$ o anel $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times [a, b]$. Recordamos que os bordos de $\mathbb{A}$ são os círculos $\partial\mathbb{A} = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \{a, b\}$. A notação int$\mathbb{A}$ denota o conjunto $\mathbb{A} \setminus \partial\mathbb{A}$. E se $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ é um twist, assumimos que f preserva orientação e cada um desses círculos.

Definição 4.1. Seja $f : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ uma aplicação twist. Uma curva invariante de f é uma curva contínua injetora e fechada $C \subset \mathbb{A}$, de forma que $f(C) = C$. Caso C seja conexa e homotopicamente não trivial, dizemos que C é uma **curva rotacional invariante**.

Observação 4.2. Na definição acima, pedimos que as curvas sejam sempre injetivas e fechadas, a fim de evitar situações como em curvas de Peano. Recordamos que uma injeção de um espaço fechado a um espaço Hausdorff é um homeomorfismo sobre sua imagem. Em particular, uma curva invariante rotacional é homeomorfa a um círculo. Em particular, a aplicação restrita a tal curva pode ser vista como um homeomorfismo de S^1 e portanto fica bem definido o seu número de rotação associado à curva.

Proposição 4.3. Seja $C \subset$ int $\mathbb{A}$ uma curva rotacional invariante. Então existe aberto $U \subset \mathbb{A}$ homeomorfo a $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times [a, b)$ contendo o bordo inferior de $\mathbb{A}$ e com $\partial U = C$.

Demonstração. Considere $\sim$ a indentificação dos pontos do bordo superior de $\mathbb{A}$. Assim $\mathbb{A}/\sim$ é (homeomorfo) um disco fechado contido em $\mathbb{R}^2$. Aplicando o teorema da curva de Jordan, $\mathbb{A} \setminus C$ possui duas componentes conexas. Sendo U a componente contendo o bordo inferior, segue o afirmado. ∎

Como estamos interessados em curvas invariantes próximas ao bordo do anel $\mathbb{A} = [0, L) \times [0, \pi]$ de uma aplicação de bilhar T, precisaremos entender $T(s, \theta)$ quando os valores de θ são pequenos (devido a simetria, não é necessário preocupar com o caso $\theta \to \pi$). Assim apresentamos nessa seção algumas aproximações para T válida para pequenos ângulos. Temos o seguinte lema:

Lema 4.4. Seja $\tilde{\gamma}$ curva em T_pM parametrizada pelo comprimento de arco e com $\tilde{\gamma}(s_0) = 0$. Sejam $\tilde{V}, \tilde{W}$ dois campos de vetores unitários ao longo de $\tilde{\gamma}$ e $\tilde{\alpha}$ é o ângulo entre $\tilde{V}$ e $\tilde{W}$. Sejam $V = d\exp \cdot \tilde{V}$, $W = d\exp \cdot \tilde{W}$ e α o ângulo entre V e W. Se $\dfrac{d\tilde{\alpha}}{ds}(s_0) \neq 0$ então $\tilde{\alpha}$ é função de α

(numa vizinhança de s_0) e $\dfrac{d\tilde{\alpha}}{d\alpha} = 1$.

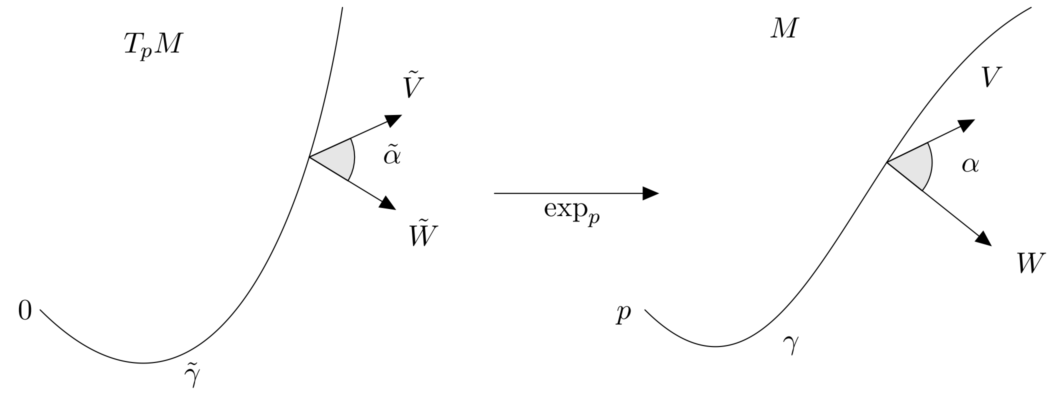


Figura 4.1: Lema 4.4

Demonstração. Seja $\tilde{X}_i$ base ortonormal em T_pM e $X_i = d\exp \cdot \tilde{X}_i$. Assim, podemos escrever

$$\tilde{V} = \sum_k V^k \tilde{X}_k \implies V = \sum_k V^k X_k$$

Sendo $\tilde{\gamma} = \gamma^1 \tilde{X}_1 + \gamma^2 \tilde{X}_2$ e tomando a derivada covariante obtemos

$$\frac{D\tilde{V}}{ds} = \sum_k \frac{dV^k}{ds} \tilde{X}_k$$

$$\frac{DV}{ds} = \sum_k \left[\frac{dV^k}{ds} + \sum_{i,j} V^k \frac{d\gamma^k}{ds} \Gamma_{ij}^k \right] X_k$$

onde Γ_{ij}^k são os símbolos de Christoffel dos campos coordenados X_i de M. Pelo lema 1.13 em s_0 temos $\Gamma_{ij}^k = 0$ e $X_i = \tilde{X}_i$. Assim $\dfrac{DV}{ds}(s_0) = \dfrac{D\tilde{V}}{ds}(s_0)$. Analogamente obtemos o mesmo para W e $\tilde{W}$. Além disso,

$$\cos\alpha = \frac{\langle V, W \rangle}{|V||W|}$$
$$\cos\tilde{\alpha} = \langle \tilde{V}, \tilde{W} \rangle$$

Derivando obtemos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}\left(|V||W|\right)\cos\alpha - |V||W|\sin\alpha\frac{d\alpha}{ds} &= \left\langle \frac{DV}{ds}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{ds} \right\rangle \\ -\sin\tilde{\alpha}\frac{d\tilde{\alpha}}{ds} &= \left\langle \frac{D\tilde{V}}{ds}, \tilde{W} \right\rangle + \left\langle \tilde{V}, \frac{D\tilde{W}}{ds} \right\rangle \end{aligned} \tag{4.1}$$

Notamos que em s_0 os vetores V e W coincidem com $\tilde{V}$ e $\tilde{W}$. Suas derivadas covariantes também coincidem, e portanto vale que

$$\left\langle \frac{DV}{ds}, V \right\rangle (s_0) = \left\langle \frac{DW}{ds}, W \right\rangle (s_0) = 0 \implies \frac{d}{ds}\left(|V||W|\right)(s_0) = 0$$

pois $\tilde{V}$ e $\tilde{W}$ são unitários. Logo, caso seja $\alpha(s_0) \neq 0$ segue da equação 4.1 que $\frac{d\alpha}{ds}(s_0) = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds}(s_0)$. Caso $\alpha(s_0) = 0$ seja $\tilde{U}$ a rotação de $\tilde{W}$ em $\pi/2$ no sentido positivo. Isto é, $\tilde{U} = \tilde{W}^{\perp}$ e $U = d\exp \cdot \tilde{U}$. Sejam $\tilde{\theta}$ e $\tilde{\beta}$ os ângulos entre $\tilde{V}, \tilde{U}$ e $\tilde{W}, \tilde{U}$. Similarmente temos θ, β. Pelo caso anterior temos $\frac{d\theta}{ds} = \frac{d\tilde{\theta}}{ds}$ e $\frac{d\beta}{ds} = \frac{d\tilde{\beta}}{ds}$ (pois $\tilde{\theta}(s_0) = \tilde{\beta}(s_0) = \frac{\pi}{2}$). Por outro lado, $\alpha + \beta = \theta$ e $\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = \tilde{\theta}$. Assim, concluímos nesse caso também que $\frac{d\alpha}{ds} = \frac{d\tilde{\alpha}}{ds}$. ■

Proposição 4.5. Seja γ uma curva fechada contida numa região totalmente normal de classe $\mathscr{C}^2$ com $\kappa > 0$ e T a aplicação do bilhar em γ. Se $T(s_1, \theta_1) = (s_2, \theta_2)$ vale que

$$\begin{cases} s_2 = s_1 + \dfrac{2\theta_1}{\kappa} + o\left(\theta_1\right) \\[2ex] \theta_2 = \theta_1 + o\left(\theta_1\right) \end{cases}$$

Demonstração. Seja $p = \gamma(s_1)$ e $\tilde{\gamma} = \exp_p^{-1} \circ \gamma$. Consideramos o segmento ligando a origem $\tilde{\gamma}(s_1)$ de T_pM ao ponto $\tilde{\gamma}(s_2)$. Notamos que o segmento é levado por $\exp_p$ no segmento geodésico conectando p e $\gamma(s_2)$. Para obtermos as aproximações assintóticas para s_2 e θ_2 usaremos os resultados análogos do plano que valem para T_pM.

Pelo lema 1.14 a curvatura de $\tilde{\gamma}$ em s_1 é $\kappa(s_1) > 0$. Por continuidade $\tilde{\gamma}$ é convexa numa vizinhança da origem. Como $d\exp_p$ é a identidade na origem (lema 1.8) temos $\theta_1 = \tilde{\theta}_1$. Pelo lema 4.4 segue também que $\theta_2 = \tilde{\theta}_2 + o(\tilde{\theta}_2)$. Assim, usando que $\tilde{\theta}_2 = \tilde{\theta}_1 + o(\tilde{\theta}_1)$ (i.e., usando o resultado análogo para bilhares planos) concluímos que

$$\theta_2 = \theta_1 + o(\theta_1) \tag{4.2}$$

Para a outra equação seja x o parâmetro comprimento de arco para $\tilde{\gamma}$. Assim temos

$$x_2 - x_1 = \int_{s_1}^{s_2} \left\|\tilde{\gamma}'(s)\right\| \, ds \tag{4.3}$$

Na equação acima $\|\tilde{\gamma}'\|$ é contínua e $\|\tilde{\gamma}'(s_1)\| = 1$ (pois $d\exp_p$ é a identidade na origem) . Logo segue que

$$x_2 - x_1 = s_2 - s_1 + o(s_2 - s_1)$$

Por outro lado, como vale (usando novamente o resultado análogo para bilhares planos)

$$x_2 - x_1 = \frac{2\tilde{\theta}_1}{\kappa} + o(\tilde{\theta}_1) = \frac{2\theta_1}{\kappa} + o(\theta_1)$$

segue que

$$s_2 = s_1 + \frac{2\theta_1}{\kappa} + o(\theta_1) \tag{4.4}$$

como queríamos. ∎

Corolário 4.6. Seja γ como na proposição anterior. Se $H(s_1, s_2)$ é o comprimento da geodésica de $\gamma(s_1)$ até $\gamma(s_2)$ (i.e., a função geradora) então vale que (fixado s_1)

$$\lim_{\theta_1 \to 0^+} \frac{H(s_1, s_2)}{\sin \theta_1} = \frac{2}{\kappa(s_1)}$$

Demonstração. De fato, basta observarmos que pela proposição 3.13 temos $H_2 = \cos \theta_2$. Portanto, por L'Hopital segue

$$\lim_{\theta_1 \to 0^+} \frac{H(s_1, s_2)}{\theta_1} = \lim_{\theta_1 \to 0^+} \cos \theta_2 \frac{\partial s_2}{\partial \theta_1}$$

Pela proposição anterior temos $\theta_2 \to 0$ e $\dfrac{\partial s_2}{\partial \theta_1} \to \dfrac{2}{\kappa(s_1)}$. Portanto segue o afirmado. ∎

Proposição 4.7. Seja γ curva convexa cuja curvatura é positiva e T a aplicação do bilhar em γ. Então T é de classe $\mathscr{C}^1$ nos bordos de $\mathbb{A} = [0, L) \times [0, \pi]$.

Demonstração. Segue diretamente do corolário anterior combinado com o teorema 3.38 e a proposição 1.19. ∎

Proposição 4.8. Se γ é uma curva convexa com curvatura positiva, então a aplicação do bilhar é um twist uniforme.

Demonstração. Basta observamos que existem os limites de $\dfrac{\partial s_2}{\partial \theta_1}$, quando θ_1 tende a 0 ou π (pela proposição acima tais limites existem, mas como omitimos detalhes da prova, faremos aqui). Pela simetria (observação 3.10) basta analisarmos quando θ_1 tende a 0. Pela proposição 1.19 e pelo teorema 3.38 temos

$$\frac{\partial s_2}{\partial \theta_1} = \frac{H + o(H^2)}{\sin \theta_2}$$

Pelo corolário acima temos $\dfrac{\partial s_2}{\partial \theta_1} \to \dfrac{2}{\kappa_1}$. Com isso segue que a aplicação do bilhar é um twist uniforme. ∎

4.2 Lazutkin & Douady

O teorema de Lazutkin-Douady para bilhares planos é

Teorema 4.9 (Lazutkin-Douady). Se γ é uma curva fechada $\mathscr{C}^k$, $k \geq 7$ com curvatura positva, então existe um conjunto de Cantor $K \subset [0, \frac{1}{2}) \setminus \mathbb{Q}$ tal que para cada $\alpha \in K$ existe uma curva rotacional C_α invariante pela aplicação do bilhar em γ com número de rotação α. A aplicação do bilhar restrita a C_α é conjugada a uma rotação.

Observação 4.10. Esse resultado foi provado inicialmente por Lazutkin [19] para $k \geq 558$. A versão acima foi adaptada de [10].

Nessa seção mostraremos que vale o mesmo resultado para bilhares em superfícies. De fato, a prova é a mesma dado que já provamos a proposição 4.5.

Teorema 4.11. Seja $\gamma \subset U$ uma curva com curvatura geodésica positiva e de classe $\mathscr{C}^7$. Então existe um conjunto de Cantor $K \subset [0, \frac{1}{2}) \setminus \mathbb{Q}$ tal que para cada $\alpha \in K$ existe uma curva rotacional C_α invariante pela aplicação do bilhar em γ com número de rotação α. A aplicação do bilhar restrita a C_α é conjugada a uma rotação.

A prova dada por Douady segue do seguinte resultado de Herman. Para enunciá-lo, usamos a seguinte notação: $\mathbb{A}_\delta$ denota o conjunto $\mathbb{S}^1 \times (-\delta, \delta)$ e $\mathbb{A}_0 = S^1 \times \{0\}$.

Teorema 4.12. Seja $T : \mathbb{A}_\delta \to \mathbb{A}_\delta$ difeomorfismo de classe $\mathscr{C}^k$ admitindo numa vizinhança de $\mathbb{A}_0$ uma representação da forma

$$T(s, \theta) = (s + \eta(s)\theta + o(\theta), \theta + o(\theta))$$

onde $\eta \in \mathbb{C}^{k-1}(S^1, \mathbb{R}_+^*)$. Supondo que T possui a propriedade de interseção, assim como seus iterados e que $k \geq 6$, então para todo $\gamma > 0$ e todo $k' < k - 4$ existe um $\varepsilon > 0$ tal que se

$$K = \left\{ a \in \mathbb{R} | \quad |a| \leq \varepsilon \text{ e } \forall \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \gamma \frac{|a|}{q^2} \right\}$$

existe uma aplicação $F : \mathbb{T}^1 \times K \to \mathbb{A}_\delta$ continua, injetiva, isotópica a imersão natural tal que

$$T \circ F = F \circ \tilde{T}$$

onde $\tilde{T} : \mathbb{S}^1 \times K \to \mathbb{S}^1 \times K$, $(0, a) \mapsto (\theta + a, a)$. As aplicações $F_a : \theta \mapsto F(\theta, a)$ são de classe $\mathscr{C}^{k'}$

e

$$\lim_{a\to 0} \|F_a - F_0\|_{\mathscr{C}^{k'}} = 0 \qquad \text{com} \qquad F_\alpha(\theta) = (\theta, 0)$$

Pela proposição 4.5 vale que

$$\begin{cases} s_1 = s_0 + \dfrac{2\theta_0}{\kappa} + o\left(\theta_0\right) \\ \theta_1 = \theta_0 + o\left(\theta_0\right) \end{cases}$$

Portanto podemos aplicar o teorema acima para a aplicação do bilhar em superfícies. Dessa forma a demonstração segue como na tese de Douady.

4.3 Mather

Nessa seção mostraremos que a hipótese de curvatura positiva é necessária para o resultado de Lazutkin Douady (teorema 4.9). Para bilhares planos temos o seguinte teorema de Mather [20].

Teorema 4.13 (Mather). Seja γ uma curva $\mathscr{C}^2$ convexa. Se a curvatura κ é nula em algum ponto de γ, então a aplicação do bilhar não possui curvas rotacionais invariantes além dos bordos.

Provaremos que esse resultado ainda vale para bilhares em superfícies, desde que a curva esteja contida numa vizinhança suficientemente pequena. Essa hipótese aparece pois, em determinada parte da nossa demonstração precisamos usar que círculos geodésicos têm curvatura positiva. Para começar, demonstraremos um resultado também de Mather para aplicações twist, que será usado na prova. Como usual, $\mathbb{A}$ denota $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times [a, b]$

Lema 4.14. Seja $T : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ twist positivo diferenciável ($\mathscr{C}^1$) preservando uma medida positiva com função geradora H. Se C é uma curva rotacional invariante, então $H_{22}(x_0, x_1) + H_{11}(x_1, x_2) \geq 0$ para todo $(x_0, y_0) \in C$, onde $(x_2, y_2) = T(x_1, y_1) = T^2(x_0, y_0)$.

Demonstração. Seja C uma curva invariante rotacional (distinta dos bordos de $\mathbb{A}$). Pelo teorema 3.2 de Birkhoff, C é gráfico de uma função de $\mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ em (a, b). Portanto, T restrita a C induz um homeomorfismo $s : \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$. Como C é Lipschitziana segue que s também é. Em particular, s é diferenciável em quase todo ponto. Assim para x- q.t.p. segue do princípio variacional (lema 3.16) que

$$H_2(s^{-1}(x), x) + H_1(x, s(x)) = 0 \implies$$

$$H_{12}(s^{-1}(x), x)\frac{ds^{-1}}{dx}(x) + H_{22}(s^{-1}(x), x) + H_{11}(x, s(x)) + H_{12}(x, s(x))\frac{ds}{dx}(x) = 0$$

Reorganizando os termos temos

$$H_{12}(s^{-1}(x),x)\frac{ds^{-1}}{dx}(x)+H_{12}(x,s(x))\frac{ds}{dx}(x)=-\left(H_{22}(s^{-1}(x),x)+H_{11}(x,s(x))\right)$$

Como o twist é positivo temos $H_{12}<0$ e s preserva orientação (logo $\dfrac{ds}{dx}\geq 0$ e $\dfrac{ds^{-1}}{dx}\geq 0$). Isso implica que $H_{22}(s^{-1}(x),x)+H_{11}(x,s(x))>0$ para x-q.t.p. . Logo, para todo x vale $H_{22}(s^{-1}(x),x)+H_{11}(x,s(x))\geq 0$. ∎

Observação 4.15. Usamos na prova acima que se f é uma função lipschitz estritamente crescente então $f'>0$ q.t.p. De fato, funções lipschitzianas satisfazem o teorema fundamental do cálculo. Isto é, são diferenciáveis q.t.p. e $\int_a^b f'=f(b)-f(a)$ considerando a integral de Lebesgue. Isso implica o fato usado. Entretanto, existem funções não lipschitzianas estritamente crescentes com derivada nula q.t.p. Tais funções são chamadas de singulares.

Agora podemos demonstrar o resultado análogo ao teorema 4.13 para superfícies. Ao contrário dos outros resultados, não conseguimos prová-lo para qualquer vizinhança totalmente normal.

Teorema 4.16. Para cada ponto de M, existe uma vizinhança $V\subset M$ totalmente normal tal que se γ uma curva $\mathscr{C}^2$ convexa contida em V e se $k=0$ em algum ponto de γ, então a aplicação do bilhar não possui curvas rotacionais invariantes além dos bordos.

Demonstração. Seja $H(s_1,s_2)=-d(\gamma(s_1),\gamma(s_2))$ a função geradora do bilhar T. Seja $p=\gamma(s)$ um ponto cuja curvatura é 0. Caso exista uma curva invariante rotacional existem s_1,s_2 tais que s_1,s,s_2 é órbita de C. Pelo princípio variacional (lema 3.16) temos que s é ponto crítico de $x\mapsto f(x)=H(s_1,x)+H(x,s_2)$. Derivando duas vezes temos

$$f''(x)=H_{22}(s_1,x)+H_{11}(x,s_2)$$

Por outro lado, temos $H(x,s_2)=-d(\gamma(x),\gamma(s_2))=-d_2(\gamma(x))$. Logo

$$H_{11}(x,s_2)=-\mathrm{Hess}(\gamma'(x),\gamma'(x))+\left\langle\nabla d_2,\frac{D\gamma'(x)}{ds}\right\rangle$$

onde Hess é a hessiana de d_2. Em s a curvatura é nula e portanto $\dfrac{D\gamma'}{ds}=0$. Além disso, Hess é não negativa. De fato, o autovetor (associado ao autovalor nulo, conforme proposição 2.19) de Hess está na direção da geodésica unindo $\gamma(s)$ e $\gamma(s_2)$. Como o ângulo de chegada $\theta_2(s,s_2)$ é não nulo, segue que $\gamma'(s)$ tem componente na direção do autovetor positivo de Hess. Logo $H_{11}(s,s_2)<0$. Similarmente temos o mesmo para $H_{22}(s_1,s)$. Pelo lema 4.14 temos uma contradição. Portanto T não tem curvas invariantes rotacionais. ∎

4.4 Hubacher

Nessa seção investigamos um resultado de Hubacher sobre o que acontece quando não temos diferenciabilidade o suficiente no bordo do bilhar. Na contramão do que ocorre no teorema de Lazutkin Douady, provamos a inexistência de curvas invariantes rotacionais perto do bordo do espaço de fase (mas ainda é possível sua existência 'longe' do bordo). Para bilhares planos, o teorema é o seguinte [16]:

Teorema 4.17. Seja γ uma curva de bilhar de classe $\mathscr{C}^2$ exceto em um número finito de pontos (ao menos um). Em tais pontos, a curva é $\mathscr{C}^1$ e existem os limites laterais da curvatura κ. E assumimos também que existe $\varepsilon > 0$ com $\kappa > \varepsilon$. Então o bordo inferior $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \{0\}$ de $\mathbb{A}$ é uma curva invariante isolada da aplicação do bilhar. Isto é, existe uma vizinhança que não possui nenhuma outra curva invariante rotacional.

Observação 4.18. Notamos que a condição $\kappa > \varepsilon > 0$ nos garante que não cairemos na situação do teorema de Mather (teorema 4.13).

A fim de provarmos esse resultado para bilhares em superfícies, precisaremos antes de alguns resultados geométricos.

Lema 4.19. Seja γ uma curva diferenciável em M passando por p. Então existe uma vizinhança de p folheada pelas geodésicas perpendiculares a γ.

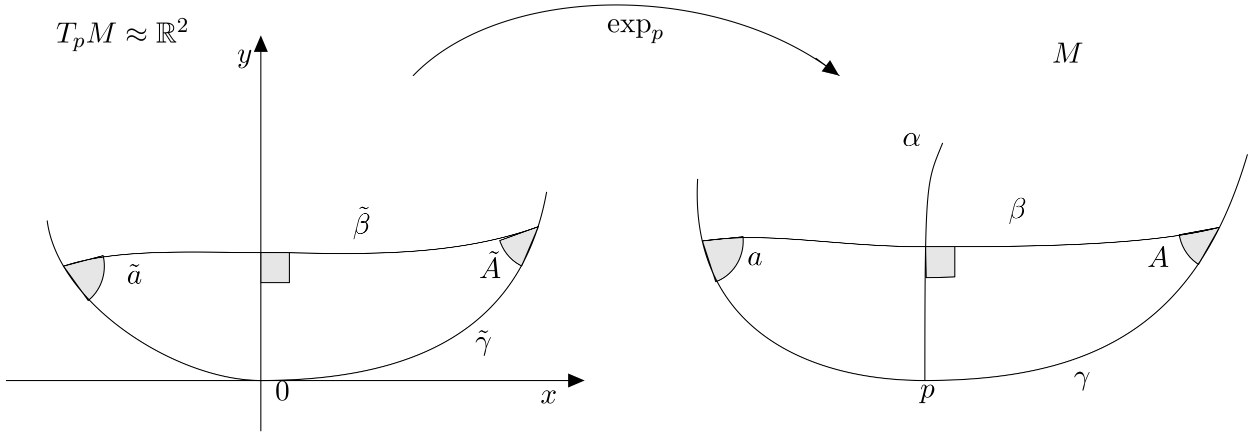
Demonstração. Seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ parametrizada por comprimento de arco s com $\gamma(0) = p$. Consideramos um campo V unitário sobre γ de forma que $\gamma'(0)$ e $V_0 = V(0)$ não são paralelos. Seja Φ_t o fluxo geodésico e $\pi : TM \to M$ projeção. Notamos que o conjunto $S = \{\Phi_t(\gamma(s), V(s)); |s| < \varepsilon, |t| < r\} \subset TM$ é subvariedade de dimensão 2.

Consideramos em TM as curvas (γ, V) e (α, α') onde α é a geodésica por p na direção de V. Essas curvas estão contidas em S. Assim, $T_{(p,V_0)}S$ é gerado por $(\gamma'(0), V'(0))$ e $(V_0, \alpha''(0))$. Como V_0 e $\gamma'(0)$ não são paralelos segue que $d\pi$ restrita a $T_{(p,V_0)}S$ tem posto 2. Portanto π restrita a S é injetiva para r e ε pequenos. Isso mostra que as geodésicas passando por γ na direção de V folheam uma vizinhança de p.

∎

Proposição 4.20. Seja $\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to U$ curva $\mathscr{C}^2$ exceto em 0 onde é $\mathscr{C}^1$ e existem os limites laterais κ^-, κ^+ da curvatura, com $\kappa^- > \kappa^+ > 0$. Seja α a geodésica perpendicular a γ em $\gamma(0) = p$. Para cada $s < 0$ seja β a geodésica perpendicular a α passando por $\gamma(s)$. Sendo a

e A os ângulos formados por β com γ então A é função de a e $A < \lambda a$ para a suficientemente pequeno e algum $\lambda < 1$.



Demonstração. Primeiramente observamos para $|s|$ pequeno o suficiente, $\gamma(s)$ está numa vizinhança dada pelo lema 4.19. Podemos supor que sua curvatura é positiva nessa vizinhança. Assim, para todo $s < 0$ próximo de 0 o suficiente existe uma única geodésica partindo de $\gamma(s)$ e perpendicular a α. E essa geodésica encontra γ em $\gamma(S)$ com $S > 0$ (pelo lema 1.14). Portanto, o problema está bem posto.

Via exponencial no ponto p levamos o problema para $\mathbb{R}^2$, obtendo as curvas $\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}$ e $\tilde{\beta}$ e os ângulos $\tilde{a}, \tilde{A}$. Suponha γ parametrizada por comprimento de arco. Provaremos que $\dfrac{d\tilde{A}}{dS}(0) = \kappa^+$ e $\dfrac{d\tilde{a}}{ds}(0) = -\kappa^-$ (observamos que são limites laterais). Digamos que $\tilde{\gamma}$ é tangente ao eixo x e $\tilde{\alpha}$ é o eixo y.

Pelo lema 4.19 temos um campo $\tilde{B}$ unitário definido numa vizinhança de $0 \in T_pM$ que é tangente a $\tilde{\beta}$. Assim, $\tilde{A}(S)$ é o ângulo entre $\tilde{B}(\tilde{\gamma}(S))$ e $\tilde{\gamma}'(S)$. Similarmente, $\tilde{a}(s)$ é o ângulo entre $\tilde{\gamma}'(s)$ e $\tilde{B}(\tilde{\gamma}(s))$. Sendo $\tilde{\psi}(x, y)$ o ângulo entre $\tilde{B}(x, y)$ e a horizontal então $\tilde{A}(S) = \tilde{\varphi}(S) - \tilde{\psi}(\tilde{\gamma}(S))$ onde $\tilde{\varphi}(S)$ é o ângulo de inclinação de $\tilde{\gamma}'(S)$ Isto é, o ângulo entre a horizontal e $\tilde{\gamma}'(S)$. Logo

$$\frac{d\tilde{A}}{dS} = \frac{d\tilde{\varphi}}{dS} - \left\langle \nabla\tilde{\psi}(\tilde{\gamma}(S)), \tilde{\gamma}'(S) \right\rangle$$

Como $\tilde{\psi}$ é nula ao longo do eixo x, para $S = 0$ temos $\nabla\tilde{\psi}(\tilde{\gamma}(0)) = \Big(0, \tilde{\psi}_y(0,0)\Big)$ Além disso, $\dfrac{d\tilde{\varphi}}{dS}(0) = \kappa^+$ e $\gamma'(0) = (1, 0)$. Portanto

$$\frac{d\tilde{A}}{dS}(0) = \kappa^+$$

De maneira similar encontramos $\dfrac{d\tilde{a}}{ds}(0) = -\kappa^-$.

Agora precisamos encontrar $\dfrac{dS}{ds}$. Para isso, seja $\tilde{\Phi}(x,y,t)$ o fluxo de $\tilde{B}$. Escrevendo $\tilde{\gamma}=(x,y)$ observamos que para cada s (negativo) existe $t(s)$ tal que $\tilde{\Phi}(x(s),y(s),t(s))$ encontra $\tilde{\gamma}$ em $\tilde{\gamma}(S)=(x(S),y(S))$. Ou seja, $t(s)$ é o comprimento de $\tilde{\beta}$ entre $\tilde{\gamma}(s)$ e $\tilde{\gamma}(S)$. Logo temos

$$\tilde{\Phi}_x\, x'(s)+\tilde{\Phi}_y y'(s)+\tilde{\Phi}_t t'(s)=(x'(S),y'(S))\frac{dS}{ds}(s)$$

Se $s=0$ temos $S=0$ e $\gamma'(0)=(1,0)$. Além disso, $\tilde{\Phi}$ ao longo do eixo x pode ser expressa por $\tilde{\Phi}(x,0,t)=(x+t,0)$. Portanto $\tilde{\Phi}_x=\tilde{\Phi}_t=(1,0)$. Então

$$\frac{dS}{ds}(0)=\lim_{s\to 0}\frac{dS}{ds}(s)=1+\lim_{s\to 0}t'(s)=1+t'(0)$$

Mostraremos agora que $t'(0)=-2$. Para isso, escrevemos $t=t_-+t_+$ onde t_- é tal que $\tilde{\Phi}(\gamma(s),t_-(s))$ está no eixo y. Ou seja:

$$\tilde{\Phi}(x(s),y(s),t_-(s))=(0,f(s))$$

para alguma função f. Derivando temos

$$\tilde{\Phi}_x\, x'(s)+\tilde{\Phi}_y y'(s)+\tilde{\Phi}_t t'_-(s)=(0,f'(s))$$

Disso segue em $s=0$ que $t'_-(0)=-1$. Similarmente obtemos $t'_+(0)=-1$. Assim $\dfrac{dS}{ds}(0)=-1$. Logo

$$\frac{d\tilde{A}}{d\tilde{a}}(0)=\frac{\kappa^+}{\kappa^-}$$

Pelo lema 4.4 concluímos que $\dfrac{dA}{da}<1$. ■

Agora podemos passar a demonstração do teorema de Hubacher para superfícies. Dados os lemas acima e os resultados do capítulo anterior, a prova é muito similar à original. Primeiro mostraremos a versão local:

Teorema 4.21. Seja γ uma curva $\mathscr{C}^2$ exceto em $\gamma(s_0)=p$, contida numa região totalmente normal e com curvatura $\kappa>\varepsilon>0$. Suponha que γ é $\mathscr{C}^1$ em p e que existam os limites laterais $\kappa^->\kappa^+$ da curvatura. Então existe uma vizinhança de $(s_0,0)\subset\mathbb{A}$ pela qual não passa nenhuma curva rotacional invariante pela aplicação do bilhar além do bordo inferior de $\mathbb{A}$.

A ideia da demonstração é a seguinte. Usaremos a proposição 4.5 para aproximar a aplicação do bilhar numa vizinhança de s_0. Entretanto, ao aproximarmos pontos (s,θ) com $s>s_0$ ou $s<s_0$ o salto na curvatura provocará um salto também entre os ângulos de saída e de chegada de certas órbitas. Intuitivamente isso diz que a órbita posterior ao ponto de descontinuidade se move com uma velocidade distinta da órbita anterior à descontinuidade. Tal fato acaba por inviabilizar a

existência de curvas rotacionais.

Mais precisamente usaremos o teorema de Birkhoff. As hipóteses do teorema juntamente com os resultados do capítulo anterior (corolário 3.21) nos permitem concluir que a aplicação do bilhar T é um twist que preserva uma medida positiva. Daí pelo teorema de Birkhoff, caso C seja uma curva rotacional invariante, C é gráfico. Logo, tomando a projeção sobre a primeira coordenada, temos um homeomorfismo de $S^1 = \mathbb{R}/L\mathbb{Z}$ que preserva orientação. Logo o levantamento é crescente. Em outras palavras, se (s_0, θ_0) e $(\overline{s}_0, \overline{\theta}_0)$ são pontos de C com $T^n(s_0, \theta_0) = (s_n, \theta_n)$, $T^n(\overline{s}_0, \overline{\theta}_0) = (\overline{s}_n, \theta_n)$ e $s_0 < \overline{\theta}_0$ então $s_n < \overline{s}_n$ para todo n.

Demonstração. Tomamos uma vizinhança W de $(s_0, 0)$ pequena o suficiente para valer a proposição 4.20 e o lema 4.19. Isto é, sendo η a geodésica perpendicular a γ em $\gamma(s_0)$ então dado $(\overline{s}_0, \overline{\theta}_0) \in W$, $\overline{s}_0 < s_0$, tal que a geodésica partindo de $\gamma(\overline{s}_0)$ com direção $\overline{\theta}_0$ é perpendicular a η então vale $\overline{\theta}_1 < \lambda\overline{\theta}_0$, onde $(\overline{s}_1, \overline{\theta}_1) = T(\overline{s}_0, \overline{\theta}_0)$ como usual.

Seja $\delta > 0$ de forma que $\dfrac{1-\delta}{1+\delta} > \lambda$ e seja m (respectivamente M) o mínimo (respectivamente máximo) de $1/\kappa$ em $W \cap \{s > s_0\}$ de forma que (reduzindo W se necessário) $(1+\delta)m > M$. Por fim seja n natural tal que

$$(n-2)m(1+\delta) - (n-1)M > 0 \Leftrightarrow n > \frac{2m(1+\delta) + M}{m(1+\delta) - M}$$

Consideramos então $V \subset W$ de forma que $(s, \theta) \in V \implies T^k(s, \theta) \in W$ para $k = 1, ..., n$. Suponhamos então que existe uma curva invariante rotacional C que passa por V. Seja $(s_0, \theta_0) \in C$ e seja $(\overline{s}_0, \overline{\theta}_0) \in C$ tal que $\overline{s}_0 < s_0$ e a geodésica por $\gamma(\overline{s}_0)$ e $\gamma(\overline{s}_1)$ é perpendicular a η. Notamos que

$$\begin{cases} \theta_0 \leq (1+\delta)\overline{\theta}_1 \\ \theta_0 \geq (1-\delta)\overline{\theta}_0 \end{cases} \implies \overline{\theta}_1 \geq \frac{1-\delta}{1+\delta}\overline{\theta}_0 > \lambda\overline{\theta}_0$$

Logo as equações acima não podem ser simultâneamente verdadeiras. Digamos então que $\theta_0 > (1+\delta)\overline{\theta}_1$. Pela proposição 4.5 temos

$$s_{n-1} = s_1 + 2\theta_0 \sum_{j=1}^{n-2} \frac{1}{\kappa(s_j)} + o(\theta_0) > s_1 + 2\theta_0(n-1)m + o(\theta_0)$$

$$\overline{s}_n = \overline{s}_1 + 2\overline{\theta}_1 \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\kappa(\overline{s}_j)} + o(\overline{\theta}_1) < s_1 + 2\overline{\theta}_1 nM + o(\overline{\theta}_1)$$

Juntando as equações acima com $\theta_0 > (1+\delta)\overline{\theta}_1$ obtemos $s_{n-1} > \overline{s}_n$ para ângulos suficientemente pequenos (reduzindo V se necessário). Mas isso contradiz o teorema de Birkhoff. Os outros casos são obtidos similarmente. ∎

Agora que já temos a versão local, o resultado global segue de maneira igual a demonstração original de Hubacher:

Teorema 4.22. Seja γ uma curva fechada contida numa região totalmente normal, de classe $\mathscr{C}^2$ exceto em um número finito de pontos (ao menos um). Suponha que em tais pontos, a curva é $\mathscr{C}^1$ e existem os limites laterais da curvatura κ. E assumimos também que existe $\varepsilon > 0$ com $\kappa > \varepsilon$. Então o bordo inferior $\mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times \{0\}$ de $\mathbb{A}$ é uma curva invariante isolada da aplicação do bilhar. Isto é, existe uma vizinhança que não possui nenhuma outra curva invariante rotacional.

4.5 Círculos Geodésicos

O bilhar no círculo no plano é bem entendido. De fato, podemos achar explicitamente sua transformação do bilhar. Se R é o raio, a transformação é dada por $T(s,\theta) = (s + 2R\theta, \theta)$ (em particular, isso mostra que no plano a expressão assintótica (porposição 4.5) corresponde a aproximar uma curva γ por seu círculo osculador). Observamos dessa expressão que as retas $\theta = \theta_0$ são curvas rotacionais invariantes. Assim, a cada ponto do espaço de fase existe uma única curva rotacional invariante que contém esse ponto. Nesse caso dizemos que a aplicação do bilhar é **completamente integrável**.

Foi provado por Bialy [2] que a recíproca é verdadeira. Se um bilhar no plano em uma curva γ é completamente integrável, então γ é uma circunferência. Tais resultados continuam válidos para curvas no plano hiperbólico e na (semi)esfera [3]. Nessa seção mostraremos que a situação não é a mesma em superfícies. Existem superfícies cujo bilhar em um círculo geodésico não é completamente integrável. A ferramenta utilizada é o potencial de Melnikov.

Começamos mostrando que se a curvatura possui algumas simetrias, então podemos concluir que a aplicação é completamente integrável. Então seja γ um círculo geodésico contido numa vizinhança totalmente normal. Suponhamos que γ é pequeno o suficiente de forma que sua curvatura é positiva. Consideramos coordenadas polares geodésicas centradas no centro de γ. Assim, sabemos da proposição 1.15 que a métrica é da forma $dr^2 + G^2 d\theta^2$. Temos então:

Teorema 4.23. Se G não depende de θ então a aplicação do bilhar T em γ é completamente integrável.

Demonstração. Seja $\eta(s) = (r(s), \theta(s))$ uma curva. Nessas coordenadas temos, conforme a proposição 1.16

$$\Gamma^r_{rr} = \Gamma^\theta_{rr} = \Gamma^r_{r\theta} = 0$$

Além disso, sendo $G = G(r)$ temos também

$$\Gamma^\theta_{\theta\theta} = 0$$

Disso segue que (proposição 1.17)

$$\frac{D\gamma'}{ds} = \left(r'' + \theta'^2\Gamma^r_{\theta\theta}\right)\frac{\partial}{\partial r} + \left(\theta'' + 2r'\theta'\Gamma^\theta_{r\theta}\right)\frac{\partial}{\partial\theta}$$

Como $\Gamma^r_{\theta\theta} = -GG'$ e $\Gamma^\theta_{r\theta} = \dfrac{G'}{G}$ segue que para ser geodésica η deve satisfazer

$$\begin{cases} r'' - GG'\theta'^2 = 0 \\ \theta'' + 2\dfrac{G'}{G}r'\theta' = 0 \end{cases}$$

Como G nao depende de θ, segue que se $(r(s), \theta(s))$ satisfazem o sistema, o mesmo vale para $(r(s), \theta(s) + \theta_0)$. Isto é, temos simetria de rotação. Se η é geodésica, sua rotação em θ_0 em torno do centro de γ também é geodésica. E temos simetria de reflexão também, pois se $(r(s), \theta(s))$ é solução, o mesmo vale para $(r(s), \theta(s))$. Usando isso na aplicação do bilhar temos o seguinte. Consideramos a parametrização $\gamma(s) = (R, s)$. Disso temos $||\gamma'(s)||^2 = \left\|\dfrac{\partial}{\partial\theta}\right\|^2 = G^2(R)$. Assim, a parametrização é proporcional ao comprimento de arco. Caso η seja uma geodésica ligando dois pontos $\gamma(s_1)$ e $\gamma(s_2)$ de γ, pela simetria de reflexão (usando aqui a unicidade das geodésicas numa vizinhança totalmente normal) segue que o ângulo de saída θ_1 é igual ao ângulo de chegada θ_2. Pela simetria de rotação, segue que $s_3 - s_2 = s_2 - s_1$. Ou seja, a aplicação do bilhar é da forma $T(s, \theta) = (s + f(\theta), \theta)$. Em particular, a aplicação é completamente integrável. ∎

Observação 4.24. A simetria de reflexão nos dá algo similar a congruência de triângulos. De fato, mostramos que o triângulo com vértices no centro e em $\gamma(s_1), \gamma(s_2)$ tem ângulos da base iguais (é um triângulo isósceles, pois dois de seus lados medem R). Com isso já poderíamos concluir que a aplicação é da forma $T(s, \theta) = (s + f(s, \theta), \theta)$ e portanto, completamente integrável.

Nossa ideia para mostrarmos a existência de círculos geodésicos cujo bilhar correspondente não é completamente integrável é perturbar a métrica de uma dada superfície. A perturbação gera uma aplicação do bilhar distinta e mostraremos que curvas invariantes ressonantes não persistem. Desenvolveremos agora a teoria necessária acerca de potencias de Melnikov aplicada a perturbações de aplicações twist (baseado em [24]). Nessa seção, diferenciável significará classe $\mathscr{C}^\infty$.

Seja $\mathbb{A} = \mathbb{R}/L\mathbb{Z} \times [a, b]$ como usual e $A = \mathbb{R} \times [a, b]$ seu recobrimento. $T : \mathbb{A} \to \mathbb{A}$ uma aplicação twist diferenciável preservando área. Trabalharemos com o levantamento de T que denotamos por $T : A \to A$ também. Digamos que T é da forma

$$T(s, \theta) = (s + w(\theta), \theta)$$

com $w' > 0$ (isto é, o twist é positivo). Observamos que T é completamente integrável, pois as retas horizontais $\theta = \theta_0$ são invariantes. Seja $\alpha \in w([a, b])$. Existe único $\theta_0 \in [a, b]$ tal que $w(\theta_0) = \alpha$. Assim, T restrita à curva $C = \{(s, \theta) \in A; \theta = \theta_0\}$ é dada por $T(s, \theta_0) = (s + \alpha, \theta_0)$. Em outras palavras, o número de rotação de C é α/L. Portanto, a cada número ρ com $w(a)/L \leq \rho \leq w(b)/L$ existe uma única curva rotacional invariante com número de rotação ρ. Dizemos que a curva é ressonante caso seu número de rotação seja racional e contido em $(w(a)/L, w(b)/L)$. Rigorosamente o número de rotação está definido módulo 1, pois ao mudarmos o levantamento é possível obter outro valor. Entretanto, estamos considerando o levantamento fixado e aceitaremos valores em $\mathbb{R}$.

Seja H função geradora (seu levantamento) de T. Fixados p, q inteiros, $\mathrm{mdc}(p, q) = 1$, definimos a ação p/q periódica $W : \mathbb{R}^q \to R$ por

$$W(s_0, ..., s_{q-1}) = H(s_0, s_1) + H(s_1, s_2) + \cdots + H(s_{q-2}, s_{q-1}) + H(s_q, s_0 + pL)$$

Pelo princípio variacional (lema 3.16), a sequencia (s_n) é uma órbita periódica com número de rotação p/q se, somente se, $(s_0, \ldots, s_{q-1}$ é ponto crítico de W. Observamos também que se C é a curva p/q-ressonante, então todos seus pontos são periódicos. Assim, W é constante ao longo de qualquer órbita de C.

Consideramos agora uma aplicação twist T_0 como acima e uma perturbação (diferenciável) T_ε. Isto é, $T_\varepsilon = T_0 + \varepsilon T_1 + O(\varepsilon^2)$. Observamos que se ε é pequeno, então T_ε também é twist. De fato, escrevendo

$$T_\varepsilon(s, \theta) = (s + w(\theta) + \varepsilon f_1(s, \theta), \theta + \varepsilon f_2(s, \theta)) + O(\varepsilon^2)$$

segue que $w'(\theta) + \varepsilon \dfrac{\partial f_1}{\partial \theta}(s, \theta) > 0$ para ε pequeno. Se H_0 e H_ε são as funções geradoras de T_0 e T_ε escrevemos também $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2)$. Seja $C_0 = \{(s, y_0(s))\}$ uma curva p/q ressonante (para T_0). Temos o seguinte resultado

Proposição 4.25. Existem curvas $C_\varepsilon = \{(s, y_\varepsilon(s))\}$ e $\tilde{C}_\varepsilon = \{(s, \tilde{y}_\varepsilon(s))\}$ tais que $y_\varepsilon, \tilde{y}_\varepsilon \mathbb{R} \to (a, b)$ são L-periódicas e

$$T_\varepsilon^q((s, y_\varepsilon(s))) = (s, \tilde{y}_\varepsilon(s))$$

Intuitivamente o que acontece é o seguinte. Dado s, sabemos que $T_0^q(s, y_0(s)) = (s + Lp, y_0(s))$. Entretanto para T_ε podemos perder a periodicidade, embora espera-se que a primeira coordenada de $T_\varepsilon^q(s, y_0(s))$ esteja próxima de $s + Lp$. Assim, usando a propriedade de twist podemos aumentar ou diminuir $y_0(s)$ a fim de aumentar ou diminuir $\pi(T_\varepsilon^q(s, y_0(s))$. Ou seja, escolhemos convenientemente $y_\varepsilon(s)$ para obter a propriedade desejada. A prova, portanto, segue diretamente do teorema da função implícita:

Demonstração. Consideramos $F(\varepsilon, s, y) = \pi(T^q\varepsilon(s, y)) - x - pL$ onde $\pi : A \to \mathbb{R}$ é a projeção na primeira coordenada. Notamos que $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ para ε pequeno, pela condição de twist. Além disso $F(0, s, y_0(s)) = 0$. Portanto, pelo teorema da função implícita existe função $y_\varepsilon(s)$ de s e ε satisfazendo:

$$F(\varepsilon, s, y_\varepsilon(s)) = 0$$

Como F é L-periódica em s, o mesmo vale para y_ε. Encontrada y_ε basta definirmos $\tilde{y}_\varepsilon$ como segunda coordenada da imagem de y_ε por T. ■

Notamos que cada ponto p/q-periódico de T_ε está próximo de C_0. Tais pontos são as interseções de C_ε e $\tilde{C}_\varepsilon$. Ou seja, a curva rotacional C_0 persiste (mais precisamente, isso significa que existe uma curva rotacional invariante por T_ε com mesmo número de rotação p/q) quando C_ε e $\tilde{C}_\varepsilon$ coincidem. Passamos então a analisar a diferença $y_\varepsilon(s) = -\tilde{y}_\varepsilon(s)$. As coisas funcionam bem pois podemos encontrar uma fórmula 'boa' para isso:

Proposição 4.26. $y_\varepsilon(s) - \tilde{y}_\varepsilon(s) = L_\varepsilon'(s)$ onde L_ε é a função

$$L_\varepsilon(s) = \sum_{k=1}^{q} H_\varepsilon(\overline{s}_{k-1}, \overline{s}_k)$$

e sendo $\overline{s}_k = \pi\left(T_\varepsilon^k(s, y_\varepsilon(s))\right)$.

Demonstração. A prova decorre do princípio variacional (lema 3.16). Derivando temos

$$L_\varepsilon'(s) = \sum_{k=1}^{q} \partial_1 H_\varepsilon(\overline{s}_{k-1}, \overline{s}_k)\frac{\partial \overline{s}_{k-1}}{\partial s} + \partial_2 H_\varepsilon(\overline{s}_{k-1}, \overline{s}_k)\frac{\partial \overline{s}_k}{\partial s}$$

Pelo princípio variacional, a soma é telescópica:

$$L_\varepsilon'(s) = \partial_1 H_\varepsilon(\overline{s}_0, \overline{s}_1)\frac{\partial \overline{s}_0}{\partial s} + \partial_2 H_\varepsilon(\overline{s}_{q-1}, \overline{s}_q)\frac{\partial \overline{s}_q}{\partial s}$$

Por outro lado, temos $\overline{s}_0 = s = \overline{s}_q$ e pela definição de função geradora (lema 3.4) $\partial_1 H_\varepsilon(\overline{s}_0, \overline{s}_1) = y_\varepsilon(s)$ e $\partial_2 H_\varepsilon(\overline{s}_{q-1}, \overline{s}_q) = -\tilde{y}_\varepsilon(s)$. Logo segue o afirmado. ■

A função L_ε é chamada de potencial (radial). Escrevendo $L_\varepsilon = L_0 + \varepsilon L_1 + O(\varepsilon^2)$, o termo L_1 é o potencial de Melnikov (radial). Assim, para que a curva C_0 persista sobre T_ε precisamos que L_ε seja constante. Em particular, se L_1 não é constante a curva não persiste (observamos que

L_0 é sempre constante, por isso passamos diretamente à análise de L_1. Podemos calcular L_1 da seguinte maneira:

Teorema 4.27. Se o potencial de Melnikov L_1 não é constante, a curva C_0 não persiste sobre a pertubação T_ε. Além disso vale que

$$L_1(s) = \sum_{k=1}^{q} H_1(s_{k-1}, s_k)$$

onde $s_k = s + kLp/q$.

Demonstração. Resta apenas provar a fórmula. Partindo da expressão de L_ε da proposição 4.26, derivando em ε obteremos (usando $H_\varepsilon = H_0 + \varepsilon H_1 + O(\varepsilon^2)$):

$$L_1(s) + O(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{q} H_1(\overline{s}_{k-1}, \overline{s}_k) + \sum_{k=1}^{q} \partial_1 H_\varepsilon(\overline{s}_{k-1}, \overline{s}_k)\frac{\partial \overline{s}_{k-1}}{\partial \varepsilon} + \sum_{k=1}^{q} \partial_2 H_\varepsilon(\overline{s}_{k-1}, \overline{s}_k)\frac{\partial \overline{s}_k}{\partial \varepsilon} + O(\varepsilon)$$

Tomando $\varepsilon = 0$ temos $\overline{s}_k = s_k$, e pelo princípio variacional o segundo e terceiro somatórios são telescópicos:

$$L_1(s) = \sum_{k=1}^{q} H_1(s_{k-1}, s_k) + \partial_1 H_0(s_0, s_1)\frac{\partial \overline{s}_0}{\partial \varepsilon} + \partial_2 H_0(s_{q-1}, s_q)\frac{\partial \overline{s}_q}{\partial \varepsilon}$$

Como $\overline{s}_0 = \pi(T_\varepsilon^0(s, y_\varepsilon(s)) = s$ e $\overline{s}_q = \pi(T_\varepsilon^q(s, y_\varepsilon(s)) = s + Lp$ temos $\dfrac{\partial \overline{s}_0}{\partial \varepsilon} = 0 = \dfrac{\partial \overline{s}_q}{\partial \varepsilon}$. Com isso encontramos a fórmula desejada. ∎

O teorema acima é o resultado que precisamos para construir perturbações do bilhar no círculo que não são completamente integráveis. Lembramos que a função geradora da aplicação do bilhar é a distância, e como faremos perturbações da métrica precisamos saber o que acontece com a distância.

Consideramos uma bola $U \subset \mathbb{R}^2$ centrada na origem e com uma métrica g_ε variando diferenciavelmente com um parâmetro ε. Digamos que g_0 é a métrica euclidiana e que $g_\varepsilon = g_0$ fora de U. Para cada ε a métrica g_ε induz uma distância d_ε. Nosso objetivo é analisar como a distância muda com o parâmetro ε. Para o que se segue, vamos considerar $x, y \in U$ pontos fixados, e $\gamma_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ alguma geodésica minimizante para a métrica g_ε tal que $\gamma_\varepsilon(0) = x$ e $\gamma_\varepsilon(1) = y$. Notamos que γ_ε tem velocidade constante, mas não necessariamente unitária. Vamos provar a seguinte fórmula (conforme [27]):

Teorema 4.28. Escrevendo $g_\varepsilon = g_0 + \varepsilon g_1 + o(\varepsilon)$ vale que:

$$\left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} d_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{g_1(\gamma_0'(s),\gamma_0'(s))}{\sqrt{g_0(\gamma_0'(s),\gamma_0'(s))}}ds$$

Para provarmos o teorema, precisaremos do seguinte lema:

Lema 4.29. Para cada ε, seja $\gamma_\varepsilon : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ uma geodésica minimizante para a métrica g_ε com extremos x, y. Então para todo $s \in [0,1]$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon(s) = \gamma_0(s) \qquad \text{e} \qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\gamma_\varepsilon'(s) = \gamma_0'(s)$$

Observação 4.30. O lema mostra que, fixado s, a aplicação $\varepsilon \mapsto \gamma_\varepsilon(s)$ é contínua e diferenciável em $\varepsilon = 0$. Não é verdade entretanto que tal aplicação seja sequer continua fora de $\varepsilon = 0$. O lema também é pode ser falso caso a geodésica minimizante γ_0 não seja única.

Demonstração. Observamos inicialmente que $\gamma_\varepsilon(s)$ é limitada (uniformemente em ε). De fato, como $g_\varepsilon = g_0$ fora de U, as geodésicas γ_ε devem estar contidas em U (pois U é convexo para g_0). Em particular $|\gamma_\varepsilon(s)|$ é menor que o raio de U. Seja $\ell_\varepsilon(\alpha)$ o comprimento de uma curva α pela métrica g_ε. Consideramos então a seguinte situação: z_n é uma sequência de pontos convergindo a z e ε_n uma sequência convergindo a 0. Então $\lim\limits_{n\to\infty}\ell_{\varepsilon_n}(\eta_n) \leq \ell_0(\eta)$ onde $\eta_n : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ é uma geodésica minimizante para g_{ε_n} com $\eta_n(0) = x, \eta_n(1) = z_n$ e $\eta(0) = x, \eta(1) = z$. De fato, seja $\tilde{\eta}_n$ a geodésica minimizante de g_0 com extremos x e y_n. Observando que η_n é geodésica minimizante, temos

$$\ell_{\varepsilon_n}(\eta_n) \leq \ell_{\varepsilon_n}(\tilde{\eta}_n) = \int_0^1 \sqrt{g_{\varepsilon_n}(\tilde{\eta}_n'(s),\tilde{\eta}_n'(s))}ds$$

Escrevendo $g_\varepsilon = g_0 + \varepsilon g_1 + o(\varepsilon)$ obteremos

$$\ell_{\varepsilon_n}(\eta_n) \leq \int_0^1 \sqrt{g_0(\tilde{\eta}_n'(s),\tilde{\eta}_n'(s))} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{g_1(\tilde{\eta}_n'(s),\tilde{\eta}_n'(s))}{\sqrt{g_0(\tilde{\eta}_n'(s),\tilde{\eta}_n'(s))}} + o(\varepsilon_n)ds \implies$$

$$\ell_{\varepsilon_n}(\eta_n) \leq \ell_0(\tilde{\eta}_n) + \frac{\varepsilon_n}{2}\int_0^1 \frac{g_1(\tilde{\eta}_n'(s),\tilde{\eta}_n'(s))}{\sqrt{g_0(\tilde{\eta}_n'(s),\tilde{\eta}_n'(s))}} + o(\varepsilon_n)ds$$

Logo, como $\tilde{\eta}_n' \to \eta'$ (de fato, cada $\tilde{\eta}_n$ é um segmento de reta), segue que $\lim\limits_{n\to\infty}\ell_{\varepsilon_n}(\eta_n) \leq \ell_0(\eta)$. Agora estamos aptos a provar o primeiro limite do lema. Por contradição, digamos que não seja $\gamma_\varepsilon \to \gamma_0$. Então existe s tal que $\gamma_\varepsilon(s)$ não tende a $\gamma_0(s)$. Mas como $\gamma_\varepsilon(s)$ é limitada, existe uma subsequência γ_{ε_n} tal que $z_n = \gamma_{\varepsilon_n}(s) \to z \neq \gamma_0(s)$. Notamos que

$$\ell_{\varepsilon_n}(\gamma_{\varepsilon_n}) = d_{\varepsilon_n}(x, z_n) + d_{\varepsilon_n}(z_n, y)$$

Porém, pelo que provamos anteriomente, concluímos ao tomarmos o limite com $n \to \infty$ que

$$d_0(x,y) = \ell_0(\gamma_0) = d_0(x,z) + d_0(z,y)$$

que é uma contradição, já que $z \notin \gamma_0$. Portanto segue que $\lim \gamma_\varepsilon(s) = \gamma_0(s)$ para todo s. Para obtermos o segundo limite, notamos que

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0} \gamma'_\varepsilon(s) &= \lim_{\varepsilon\to 0}\lim_{h\to 0} \frac{\gamma_\varepsilon(s+h) - \gamma_\varepsilon(s)}{h} = \lim_{h\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\gamma_\varepsilon(s+h) - \gamma_\varepsilon(s)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_0(s+h) - \gamma_0(s)}{h} = \gamma'_0(s)\end{aligned}$$

■

Agora provaremos o teorema 4.28:

Demonstração. A ideia consiste em majorar e minorar $d_\varepsilon(x,y)$ com cotas precisas o suficiente até ordem $o(\varepsilon)$. Para o limite superior podemos usar γ_0:

$$d_\varepsilon(x,y) = \ell_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) \le \ell_\varepsilon(\gamma_0)$$

Logo, para $\varepsilon > 0$:

$$\frac{d_\varepsilon(x,y) - d_0(x,y)}{\varepsilon} \le \int_0^1 \left(\frac{\sqrt{g_\varepsilon(\gamma'_0(s), \gamma'_0(s))} - \sqrt{g_0(\gamma'_0(s), \gamma'_0(s))}}{\varepsilon} \right) ds$$

Portanto:

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{d_\varepsilon(x,y) - d_0(x,y)}{\varepsilon} \le \int_0^1 \frac{d}{d\varepsilon}\sqrt{g_\varepsilon(\gamma'_0(s), \gamma'_0(s))}ds = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{g_1(\gamma'_0(s), \gamma'_0(s))}{\sqrt{g_0(\gamma'_0(s), \gamma'_0(s))}}ds \tag{4.5}$$

Para a cota inferior, expandimos g_ε em série e usamos o lema:

$$\begin{aligned} d_\varepsilon(x,y) = \ell_\varepsilon(\gamma_\varepsilon) &= \int_0^1 \sqrt{g_\varepsilon(\gamma'_\varepsilon(s), \gamma'_\varepsilon(s))}ds \\ &= \int_0^1 \left[\sqrt{g_0(\gamma'_\varepsilon(s), \gamma'_\varepsilon(s))} + \frac{\varepsilon}{2}\frac{g_1(\gamma'_\varepsilon(s), \gamma'_\varepsilon(s))}{\sqrt{g_0(\gamma'_\varepsilon(s), \gamma'_\varepsilon(s))}} + o(\varepsilon) \right] ds \\ &= \ell_0(\gamma_\varepsilon) + \int_0^1 \frac{\varepsilon}{2}\frac{g_1(\gamma'_\varepsilon(s), \gamma'_\varepsilon(s))}{\sqrt{g_0(\gamma'_\varepsilon(s), \gamma'_\varepsilon(s))}} + o(\varepsilon)ds \\ &\ge \ell_0(\gamma_0) + \int_0^1 \frac{\varepsilon}{2}\frac{g_1(\gamma'_\varepsilon(s), \gamma'_\varepsilon(s))}{\sqrt{g_0(\gamma'_\varepsilon(s), \gamma'_\varepsilon(s))}} + o(\varepsilon)ds \end{aligned}$$

Portanto, sendo $\varepsilon > 0$:

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{g_1(\gamma_\varepsilon'(s),\gamma_\varepsilon'(s))}{\sqrt{g_0(\gamma_\varepsilon'(s),\gamma_\varepsilon'(s))}} + \frac{o(\varepsilon)}{\varepsilon}ds \geq \frac{d_\varepsilon(x,y) - d_0(x,y)}{\varepsilon}$$

Pelo lema, temos $g_1(\gamma_\varepsilon'(s),\gamma_\varepsilon'(s)) \to g_1(\gamma_0'(s),\gamma_0'(s))$, $g_0(\gamma_\varepsilon'(s),\gamma_\varepsilon'(s)) \to g_0(\gamma_0'(s),\gamma_0'(s))$ e $\dfrac{o(\varepsilon)}{\varepsilon} \to 0$. Logo

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{d_\varepsilon(x,y) - d_0(x,y)}{\varepsilon} \geq \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{g_1(\gamma_0'(s),\gamma_0'(s))}{\sqrt{g_0(\gamma_0'(s),\gamma_0'(s))}}ds \tag{4.6}$$

Comparando as equações (4.5) e (4.5) concluímos (notamos que similarmente obtemos os outros limites laterais):

$$\frac{d}{d\varepsilon}d_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{g_1(\gamma_0'(s),\gamma_0'(s))}{\sqrt{g_0(\gamma_0'(s),\gamma_0'(s))}}ds$$

Em outros termos, temos

$$\frac{d}{d\varepsilon}d_\varepsilon(x,y) = \frac{1}{2}\int_{\gamma_0} g_1(v,v)d\tilde{s}$$

onde v denota o vetor tangente unitário e $d\tilde{s}$ é o comprimento de arco. ∎

Voltamos agora ao problema original. Seja $\mathbb{R}^2$ com métrica euclidiana g_0. E seja C a circunferência de raio 1 e centro na origem com parametrização $C(s) = (\cos s, \sin s)$. Consideramos uma família de métricas $g_\varepsilon = g_0 + \varepsilon g_1$ com a seguinte propriedade:

P1 Para cada ε a métrica g_ε é tal que C é um círculo de raio 1, centro na origem e de forma que $C(s) = (\cos s, \sin s)$ é parametrização por comprimento de arco.

Para cada ε podemos considerar a aplicação do bilhar $T_\varepsilon : X \to X$ no círculo C considerando a métrica g_ε. Tal aplicação tem função geradora dada por $-H_\varepsilon$, onde H_ε é

$$H_\varepsilon(s_1,s_2) = d_\varepsilon(C(s_1),C(s_2))$$

onde d_ε é a distância na métrica g_ε. Pelo teorema 4.28

$$H_\varepsilon(s_1,s_2) = H_0(s_1,s_2) + \varepsilon\frac{1}{2}\int_\gamma g_1(\gamma',\gamma')ds + O(\varepsilon^2)$$

onde γ é a geodésica ligando $C(s_1)$ e $C(s_2)$ (geodésica na métrica g_0, ie, apenas um segmento de reta). Ou seja, temos uma fórmula muito simples para H_1 e podemos aplicar as técnicas de potenciais de Melnikov (teorema 4.27). Fixado um número de rotação p/q o coeficiente L_1 é dado por

$$L_1(s) = \sum_{k=1}^{q} H_1\left(s, s + 2k\pi\frac{p}{q}\right)$$

Agora consideramos s qualquer e $\tilde{s}$ no intervalo $\left(s, s+\dfrac{2\pi}{q}\right)$. Digamos que g_1 é tal que L_1 tem a seguinte propriedade

P2 $L_1(s) \neq L_1(\tilde{s})$

Isso implica que L_1 é não constante. Logo, a curva ressonante com número de rotação p/q não persiste. Assim, a aplicação do bilhar T_ε não pode ser completamente integrável para ε. Resta então provar o seguinte:

Proposição 4.31. Existe g_1 satisfazendo as propriedades **P1** e **P2**.

Demonstração. Primeiro encontraremos condições para **P1**. Precisaremos fazer contas em coordenadas, então adotarei a seguinte notação. g^0_{xx}, g^0_{xy} e g^0_{yy} denotam os coeficientes da métrica g_0 nas coordenadas cartesianas. Ou seja, os coeficientes E, F, G. Nesse caso, como g_0 é a métrica usual, essas funções valem 1,0,1 respectivamente. Da mesma forma $g^\varepsilon_{xx}, g^\varepsilon_{xy}$ e g^ε_{yy} denotam os coeficientes nessas coordenadas de g_ε. Também usaremos coordenadas polares. Mais precisamente, consideramos a seguinte parametrização de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $\varphi : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ dada por

$$\varphi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

Nessas coordenadas denotamos $g^0_{rr}, g^0_{r\theta}$ e $g^0_{\theta\theta}$ os coeficientes de g_0. Ou seja, valem $1, 0$ e r^2 respectivamente. Similarmente fazemos com g_ε

Lema 4.32. Seja g uma métrica com $g_{rr} = 1$, $g_{r,\theta} = 0$ e $g_{\theta\theta} = G$. Então a circunferência $x^2 + y^2 = R^2$ é de fato um círculo de raio R. Além disso, se $G(R, \theta) = 1$ para todo θ então $C(s) = R(\cos s, \sin s)$ é uma parametrização por comprimento de arco.

Demonstração. Como g_{rr} é constante e $g_{r\theta}$ é nulo, segue que os símbolos de christoffel Γ^r_{rr} e Γ^θ_{rr} são ambos nulos. Ou seja,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial r}} \frac{\partial}{\partial r} = 0$$

Assim, as retas passando pela origem são geodésicas. Além disso, como $g_{rr} = 1$ o raio $t \mapsto (t\cos\alpha, t\sin\alpha)$ com $t \in [0, R]$ tem comprimento R. Logo C é de fato um círculo geodésico de raio R. Por outro lado, $C'(s) = \dfrac{\partial}{\partial\theta}$. Como G restrito a C vale 1, segue que $||C'(s)|| = 1$. ■

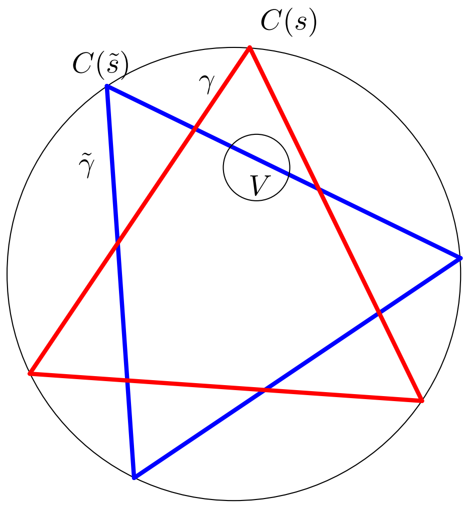
Com o lema acima, para garantirmos que g_ε tem a propriedade **P1**, basta termos em coordenadas polares que $g^\varepsilon_{rr} = 1$, $g_{r\theta} = 0$ e $g^\varepsilon_{\theta\theta} = G_\varepsilon$ para alguma função G_ε que vale 1 no círculo unitário. Ou seja, temos

$$g^{\varepsilon}_{rr} = 1 = g^{0}_{rr}$$

$$g^{\varepsilon}_{r\theta} = 0 = g^{0}_{r\theta}$$

$$g^{\varepsilon}_{\theta\theta} = G_{\varepsilon} = r^2 + \varepsilon G_1 = g^{0}_{\theta\theta} + \varepsilon G_1$$

Assim, basta escolher G_1 nula no círculo unitário. Para mostrarmos a propriedade **P2**, notamos que $L_1(s)$ é a integral de g_1 ao longo de um "polígono regular"γ (aspas pois se $p/q \neq 1/n$ a curva tem auto-interseção). E $L_1(\tilde{s})$ é a integral ao longo de um polígono distinto $\tilde{\gamma}$ (que é apenas uma rotação do polígono anterior).



Mais precisamente

$$2L_1(s) = \int_{\gamma} g_1(\gamma', \gamma')ds$$

$$2L_1(\tilde{s}) = \int_{\tilde{\gamma}} g_1(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}')ds$$

onde $\tilde{\gamma}'$ e γ' são os vetores unitários tangentes. Assim, escolhendo G_1 nula exceto numa vizinhança V (onde G_1 é positiva) cuja interseção com $\tilde{\gamma}$ é não vazia mas cuja interseção com γ é vazia concluímos que $L_1(s) = 0 \neq L_1(\tilde{s})$. ■

Como corolário, obtemos o resultado que desejávamos

Teorema 4.33. Existe um círculo geodésico em uma superfície M cuja aplicação do bilhar não é totalmente integrável.

4.6 Considerações Finais

Nesse trabalho nos concentramos no estudo de curvas invariantes rotacionais bilhares convexos em superfícies. Entretanto, acreditamos que alguns desses resultados podem ser melhorados. Na questão do twist, mostramos que se uma curva está contido em uma vizinhança totalmente normal e é convexo, então a aplicação do bilhar correspondente possui a propriedade Twist. Entretanto, existem curvas que não estão contidas em conjuntos totalmente normais cuja aplicação do Bilhar é Twist.

De fato, seja uma esfera $S \subset \mathbb{R}^3$ e γ uma circunferência contida em algum hemisfério. Tal circunferência divide S em dois conjuntos, dos quais o menor está contido em um conjunto totalmente normal. Porém o maior contém o equador e não pode estar contido em um único conjunto totalmente normal. Notamos que os fluxos do bilhar são distintos, já que um contém órbitas fechadas que não encontram o bordo (ou seja, contém círculos máximos) e o outro não. Entretanto, as aplicações do bilhar são conjugadas. Isso ocorre porque uma geodésica partindo de $p \in \gamma$ encontra γ novamente em p.

Por outro lado, o equador de uma esfera não define uma aplicação twist. De fato, na aplicação do bilhar correspondente todos os pontos tem período 2. Assim, acreditamos que é interessante analisar condições para que a aplicação do bilhar seja twist, quando Ω não está contido em um único conjunto totalmente normal.

Outro ponto que merece maiores reflexões é a generalização do Teorema de Mather que provamos:

Teorema. Se o bordo do bilhar é uma curva $\mathscr{C}^2$ convexa (estritamente) suficientemente pequena cuja curvatura geodésica se anula em algum ponto, então não existem curvas rotacionais invariantes para a aplicação do bilhar, além dos bordos.

Acreditamos que a hipótese do bordo ser uma curva suficientemente pequena pode ser removida. Isto é, basta que Ω esteja contido em uma região totalmente normal, assim como ocorre nos teoremas de Lazutkin-Douady e de Hubacher.

Acerca do teorema de Hubacher, recentemente foi mostrado por Florentin [12] sua generalização para o plano hiperbólico. Tal caso pode ser obtido como consequência do nosso resultado. De fato, no plano hiperbólico, todo conjunto é totalmente normal. Logo, nosso teorema se aplica a essa situação também.

Por fim, nesse trabalho nos restringimos a questões relacionadas a curvas invariantes. Gostaríamos também de analisar situações onde ocorrem fenômenos de hiperbolicidade, como em bilhares do tipo estádio.

Referências Bibliográficas

[1] M. Beltagy. Sufficient conditions for convexity in manifolds without focal points. *Commentationes Mathematicae Universitatis Carolinae*, 34(3):443–449, 1993.

[2] M. Bialy. Convex billiards and a theorem by e. hopf. *Mathematische Zeitschrift*, 214(1):147–154, 1993.

[3] M. Bialy. Hopf rigidity for convex billiards on the hemisphere and hyperbolic plane. *arXiv preprint arXiv:1205.3873*, 2012.

[4] G. Birkhoff. *Dynamical Systems*. American Mathematical Society, 1927.

[5] N. Chernov and R. Markarian. *Chaotic billiards*. Number 127 in Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc., 2006.

[6] M. J. Dias Carneiro, S. O. Kamphorst, and S. Pinto-de Carvalho. Elliptic islands in strictly convex billiards. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 23(03):799–812, 2003.

[7] M. J. Dias Carneiro, C. G. Ragazzo, and S. A. Zanata. *Introdução à dinâmica de aplicações do tipo twist*. Impa, 2005.

[8] M. P. do Carmo. *Geometria riemanniana*. Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 1979.

[9] M. P. Do Carmo. *Geometria diferencial de curvas e superfícies*. Sociedade Brasileira de Matemática, 2010.

[10] R. Douady. Application du théoreme des tores invariants. *These 3eme cycle, Université Paris VII*, 1982.

[11] H. L. Fetter. Numerical exploration of a hexagonal string billiard. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 241(8):830–846, 2012.

[12] D. I. Florentin, Y. Ostrover, and D. Rosen. Caustic-free regions for billiards on surfaces of constant curvature. *Journal of Geometry and Physics*, page 104305, 2021.

[13] E. Gutkin and O. Knill. Billiards that share a triangular caustic. *World Sci. Publ., River Edge, NJ*, pages 199–213, 1996.

[14] B. Halpern. Strange billiard tables. *Transactions of the American Mathematical Society*, 232:297–305, 1977.

[15] B. Hasselblatt and A. Katok. *A first course in dynamics: with a panorama of recent developments*. Cambridge University Press, 2003.

[16] A. Hubacher. Instability of the boundary in the billiard ball problem. *Communications in Mathematical Physics*, 108(3):483–488, 1987.

[17] A. Katok and B. Hasselblatt. *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, volume 54. Cambridge university press, 1997.

[18] O. Knill. On nonconvex caustics of convex billiards. *Elemente der Mathematik*, 53(3):89–106, 1998.

[19] V. F. Lazutkin. The existence of caustics for a billiard problem in a convex domain. *Izvestiya: Mathematics*, 7(1):185–214, 1973.

[20] J. N. Mather. Glancing billiards. *Ergodic theory and dynamical systems*, 2(3-4):397–403, 1982.

[21] J. Möser. On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. *Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, II*, pages 1–20, 1962.

[22] J. Moser. Stable and random motions in dynamical systems: Princeton univ. *Pr., Princeton, NJ*, 1973.

[23] D. Poet and R. Poet. Confocal conic billiards. *Physics Letters A*, 271(4):277–284, 2000.

[24] R. Ramírez-Ros. Break-up of resonant invariant curves in billiards and dual billiards associated to perturbed circular tables. *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 214(1):78–87, 2006.

[25] S. Tabachnikov. Billiards, société mathématique de france,“. *Panoramas et Syntheses*, 1, 1995.

[26] S. Tabachnikov. *Geometry and billiards*, volume 30. American Mathematical Soc., 2005.

[27] T. Tao. Flows on riemannian manifolds, 2008. Disponível em: https://terrytao.wordpress.com/2008/03/28/285g-lecture-1-ricci-flow/. Acesso em: 5 Setembro 2021.

[28] S. G. d. A. Vasconcelos. Instabilidade da fronteira no problema da bola de bilhar. Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 1997.

[29] P. Ventura. Geometria diferencial. *Coleção Matemática Universitária–SBM*, 1998.