

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

AS COTAS DE LIEB-ROBINSON
E SUAS APLICAÇÕES

Carlos Humberto de Souza

Belo Horizonte - MG
2019

Carlos Humberto de Souza

**AS COTAS DE LIEB-ROBINSON
E SUAS APLICAÇÕES**

Versão Final da dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas - ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Raphael Campos Drumond

Belo Horizonte - MG
2019

© 2019, Carlos Humberto de Souza.
Todos os direitos reservados

Souza, Carlos Humberto de.

S729c As cotas de Lieb-Robinson e suas Aplicações / Carlos
Humberto de Souza. – 2019.
84 f. il.

Orientador: Raphael Campos Drumond.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas
Gerais Instituto de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática.

Referências: f.72-73.

1. Matemática – Teses. 2. Sistemas quânticos – Teses. 3.
Física matemática – Teses. I. Drumond, Raphael Campos.
II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências
Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEX



FOLHA DE APROVAÇÃO

As cotas de Lieb-Robinson e suas aplicações

CARLOS HUMBERTO DE SOUZA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:



Prof. Raphael Campos Drumond
UFMG



Prof. Gastão de Almeida Braga
UFMG



Prof. Marcelo de Oliveira Terra Cunha
UNICAMP

Belo Horizonte, 25 de fevereiro de 2019.

RESUMO

Neste trabalho, apresentamos as cotas de Lieb-Robinson em sistemas quânticos de muitos corpos. Entre outras coisas, essas cotas limitam a velocidade de grupo para a propagação de informação em redes de spins. Apresentamos também suas aplicações mais relevantes. Em especial, apresentamos o teorema do decaimento exponencial de correlações para hamiltonianos com gap espectral.

Palavras-chave: Cotas de Lieb-Robinson, Sistemas Quânticos de Muitos Corpos, Física Matemática.

ABSTRACT

In this work, we present Lieb-Robinson bounds in many body quantum systems. Among other things, these bounds limit the speed of group for the propagation of information in spins lattices. We also present its most relevant applications. In particular, we present the exponential decay correlation theorem for Hamiltonians with spectral gap.

Keywords: Lieb-Robinson Bounds, Many Body quantum Systems, Mathematical Physics.

Agradecimentos

A minha mãe Ivone pelo apoio e amor incondicional, as minhas irmãs Dani e Mica por todo carinho, a minha vó e meu tio Tico por todo cuidado. Em resumo, a toda minha família por ser minha base.

Ao meu orientador Raphael, pela paciência imensurável, por todo apoio e disponibilidade nesses anos de trabalho.

Ao programa de Pós-Graduação da Matemática, pela oportunidade.

A todos os professores que tive o prazer de ter aula até esse exato momento.

Aos bibliotecários, funcionários de limpeza e funcionários administrativos, sem os quais nem este ou qualquer outro trabalho seria possível.

A todos os amigos de infância, que apesar de a distância contribuíram em todo meu trajeto. A todos os amigos da física e da matemática que sempre me ouviram e aconselharam, compartilhando comigo os bons e maus momentos dessa trajetória.

Por fim, a Capes pelo auxílio financeiro.

Sumário

Introdução	8
1 As Cotas de Lieb-Robinson	10
1.1 Interações de curto alcance	10
1.1.1 Modelo e resultados	10
1.1.2 Demonstração do Teorema 1.1	16
1.2 Interações de Longo Alcance	28
1.2.1 Modelo e resultados	28
1.2.2 Demonstração do Teorema 1.2	32
2 Aplicações	44
2.1 Suporte Aproximado	44
2.2 Propagação de Correlações	47
2.3 Decaimento de Correlações	51
2.3.1 Modelos e Resultados	51
2.3.2 Demonstração do Teorema 2.2	55
Referências Bibliográficas	71
Apêndice A	73
Apêndice B	75

Introdução

É de conhecimento geral que em um sistema relativístico a informação não pode se propagar mais rápido que a luz. Já em um sistema quântico não relativístico tal limitação não existe. Por exemplo, correlações podem, a princípio, propagar arbitrariamente rápido. Entretanto, em 1972 Lieb e Robinson provaram em [1], para o caso de sistemas quânticos de muitos corpos que possuem interações de curto alcance, que existe uma cota para a influência de perturbações em sistemas distantes. Com essa cota, mostra-se que existe uma velocidade constante máxima para a propagação efetiva de informação. Essa velocidade é chamada de *velocidade de Lieb-Robinson*. Refinamentos futuros dos resultados em [1] são coletivamente chamados de cotas de Lieb-Robinson. Na **Seção 1.1**, veremos como encontrar essas cotas e como obter a velocidade máxima de propagação de informação a partir delas.

Uma das primeiras aplicações das cotas de Lieb-Robinson foi feita em 1976 por Robinson em [2]. Neste trabalho ele mostrou que a dinâmica, em um sistema quântico de spins está bem definida no limite termodinâmico (generalizações desse resultado foram feitas por Nachtergaele e Sims em [3] e [4]). Entretanto, essas cotas ficaram fora de enfoque por algumas décadas, até que em 2004 Hastings mostrou em [5] o teorema do clustering exponencial. Tal teorema nos diz que um gap espectral acima do estado fundamental implica no decaimento exponencial de correlações no estado fundamental. Esse resultado foi generalizado em [6] e [7], para o caso do espectro ter um certo número de baixas energias, indo a zero com o crescimento da rede, com um gap do resto do espectro. Veremos na **Seção 2.3** a demonstração desse resultado, e também a aplicação deste ao modelo de Ising com um campo transversal.

Uma outra aplicação das cotas de Lieb-Robinson se dá na estimativa do suporte efetivo da evolução temporal de operadores. Mostraremos na **Seção 2.1**, usando as cotas e a medida de Haar, que o suporte efetivo da evolução de um operador cresce com uma velocidade menor que a velocidade de Lieb-Robinson. Usando essa ferramenta fazemos, na **Seção 2.2**, uma

estimativa para a evolução de correlações ao longo do tempo de um estado do tipo produto. Mostra-se facilmente que não existe correlação inicial para estados do tipo produto, entretanto, correlações podem ser criadas ao longo do tempo. O que mostramos na **Seção 2.2** é que essas correlações para um instante de tempo fixo, decaem exponencialmente com a distância.

Entre as aplicações das cotas de Lieb-Robinson não abordadas no texto, uma das mais relevantes é a lei de área em sistemas unidimensionais com gap espectral. Hastings obteve esse resultado em [8]. Esse mesmo resultado pode ser obtido com uma abordagem combinatorial, usando o lema da detectabilidade, tal como feito em [9].

Devido a esse grande número de aplicações, era de interesse procurar generalizações das cotas de Lieb-Robinson para interações de longo alcance. Isso foi inicialmente feito por Hastings em [7]. Nesse ele tratou o caso de sistemas com dimensão espacial D e interações decaindo algebricamente com a distância $(1/r^\alpha)$, sendo $\alpha > D$. O resultado encontrado foi que a influência de uma perturbação local, a uma distância r , é limitada por uma função da ordem de $e^{\mu t}/r^\alpha$. Com isso, encontramos um limite superior para a velocidade efetiva de informação da ordem de $e^{\frac{\mu}{\alpha}t}$, e portanto cresce exponencialmente com o tempo. Entretanto, em [10], mostrou-se que é possível obter uma cota melhor para a influência de perturbações locais. De forma que, é encontrada uma nova cota superior para a velocidade efetiva de informação da ordem de $t^{1+\kappa}$, $\kappa > 0$. Em [11], é feita uma extensão dos resultados encontrados em [10] para uma classe mais geral de sistemas quânticos de muitos corpos. Veremos na **Seção 1.2**, como é obtido esse resultado.

Capítulo 1

As Cotas de Lieb-Robinson

Nesse capítulo veremos duas versões, apresentadas em [11], das cotas de Lieb-Robinson. A primeira se restringe ao caso de interações de curto alcance e a segunda é a generalização para o caso de interações de longo alcance com decaimento algébrico.

1.1 Interações de curto alcance

1.1.1 Modelo e resultados

Vamos considerar um sistema quântico de spins definido sobre um conjunto de vértices Ω equipado com uma métrica $d : \Omega \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Na maioria dos casos Ω é um grafo e a métrica é dada pela distância no grafo, isto é, $d(x, y)$ é igual ao comprimento do menor caminho ligando x a y pelas arestas do grafo. Definimos o diâmetro de um subconjunto Z de Ω como $\text{diam}(Z) = \sup\{d(x, y) | x, y \in Z\}$ e a distância entre dois conjuntos $X, Y \subset \Omega$ como $d(X, Y) = \inf\{d(x, y) | x \in X, y \in Y\}$. Denotamos por $|X|$ a cardinalidade do conjunto X .

Associamos a cada ponto $x \in \Omega$ um espaço de Hilbert \mathcal{H}_x de dimensão finita. Dado $\Lambda \subset \Omega$ finito, então o espaço de configurações associado a Λ é dada pelo produto tensorial $\mathcal{H}_\Lambda = \otimes_{x \in \Lambda} \mathcal{H}_x$ e a álgebra de operadores agindo em Λ é dada por $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda) \cong \otimes_{x \in \Lambda} \mathcal{L}(\mathcal{H}_x)$ (em [12] vemos a definição do produto tensorial e suas principais propriedades). Assumiremos, no decorrer desse texto, que Λ é sempre um subconjunto finito de Ω .

Definição 1.1. Dado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$, denotamos por $\|A\|$ a norma usual de operadores:

$$\|A\| = \sup_{\substack{v \in \mathcal{H}_\Lambda \\ |v|=1}} |\langle Av, Av \rangle|^{\frac{1}{2}}.$$

Se A é um operador normal, é fácil mostrar que $\|A\|$ é igual ao maior de seus autovalores em módulo.

Definição 1.2. Definimos o suporte de um operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ não nulo, como

$$\text{supp}(A) = \inf\{X \subset \Lambda \mid A = A_X \otimes I_{\Lambda \setminus X}\}$$

sendo que o ínfimo é tomado considerando a relação de ordem definida pela inclusão de conjuntos. Portanto, o suporte de A é o menor subconjunto X de Λ tal que A atua trivialmente em $\Lambda \setminus X$ e não-trivialmente em X .

Observação 1.1. Dados $A, B \in \mathcal{H}_\Lambda$ com suporte em $X, Y \subset \Lambda$ respectivamente, se $X \cap Y = \emptyset$ então $[A, B] = 0$. Com efeito, seja $\Lambda' = \Lambda \setminus (X \cup Y)$ então $X \cap \Lambda' = \emptyset = Y \cap \Lambda'$, $\Lambda \setminus X = Y \cup \Lambda'$ e $\Lambda \setminus Y = X \cup \Lambda'$. Se $\Lambda' \neq \emptyset$, então

$$A = A_X \otimes I_{\Lambda \setminus X} = A_X \otimes I_{Y \cup \Lambda'} = A_X \otimes I_Y \otimes I_{\Lambda'}$$

e, de maneira análoga,

$$B = I_X \otimes B_Y \otimes I_{\Lambda'}.$$

Sendo assim,

$$AB = (A_X \otimes I_Y \otimes I_{\Lambda'})(I_X \otimes B_Y \otimes I_{\Lambda'}) = A_X \otimes B_Y \otimes I_{\Lambda'},$$

enquanto que,

$$BA = (I_X \otimes B_Y \otimes I_{\Lambda'})(A_X \otimes I_Y \otimes I_{\Lambda'}) = A_X \otimes B_Y \otimes I_{\Lambda'} = AB.$$

Se $\Lambda' = \emptyset$ então $X \cup Y = \Lambda$, portanto $A = A_X \otimes I_Y$ e $B = I_X \otimes B_Y$. Com isso, $AB = (A_X \otimes I_Y)(I_X \otimes B_Y) = A_X \otimes B_Y = BA$. Dessa forma, operadores com suportes disjuntos comutam.

Precisamos ainda definir uma dinâmica no sistema, ou em outras palavras, a evolução temporal. Será conveniente trabalhar com a representação de Heisenberg, onde os estados são fixados e os observáveis evoluem no tempo. A cada subconjunto finito X de Λ temos associado um operador auto-adjunto $h_X \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com suporte em X , sendo que h_X descreve a energia de interação entre os elementos de X . Chamamos esse operador de *interação local*. A energia devida a todas as interações em Λ é dada pelo *Hamiltoniano local*

$$H_\Lambda = \sum_{X \subset \Lambda} h_X. \quad (1.1)$$

A evolução temporal local de um operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ pelo operador H_Λ é dada por

$$A_\Lambda(t) = e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda},$$

para $t \in \mathbb{R}$. A exponencial de um operador $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ é definida por

$$e^O = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(O)^n}{n!},$$

e tal série converge em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ para todo operador O . Portanto,

$$e^{it\mathcal{H}_\Lambda} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it\mathcal{H}_\Lambda)^n}{n!}. \quad (1.2)$$

Vamos assumir as seguintes condições para os hamiltonianos locais.

Suposição 1.1. *Existe $R > 0$ tal que as interações têm alcance máximo R , ou seja, $h_X = 0$ se $\text{diam}(X) > R$.*

Suposição 1.2.

$$\mathcal{C}_0 = \sup_{x \in \Omega} \sum_{y \in \Omega} \sum_{Z \ni x, y} \|h_Z\| < \infty. \quad (1.3)$$

A **Suposição 1.2** impõe um vínculo entre a estrutura espacial da rede e as interações. Como exemplo, consideramos dois grafos, o primeiro sendo o \mathbb{Z}^D e o segundo uma árvore infinita Γ , onde o número de ramos aumenta em 1 para cada nível.

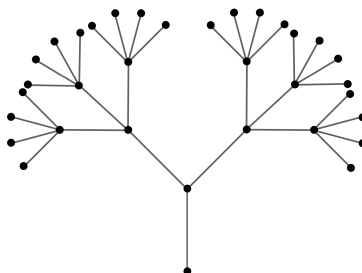


Figura 1.1: Grafo Árvore

Tomamos como métrica a distância usual em cada grafo. Suponhamos que em ambos os grafos só se tem interações entre primeiros vizinhos e que todas essas interações tenham a mesma intensidade, ou seja,

$$\|h_Z\| = \begin{cases} h & \text{se } \text{diam}(Z) = 1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Sendo assim, para $x \in \mathbb{Z}^D$, vale que

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^D} \sum_{Z \ni x, y} \|h_Z\| = \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^D \\ d(x, y) = 1}} \|h_{\{x, y\}}\| = h \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^D \\ d(x, y) = 1}} 1 = 2Dh,$$

logo,

$$\mathcal{C}_0 = \sup_{x \in \mathbb{Z}^D} 2Dh = 2Dh.$$

Por outro lado, para $x \in \Gamma$, supondo que x esteja em um nível n de Γ , vale que

$$\sum_{y \in \Gamma} \sum_{Z \ni x, y} \|h_Z\| = \sum_{\substack{y \in \Gamma \\ d(x, y) = 1}} \|h_{\{x, y\}}\| = (n + 1)h.$$

Portanto,

$$\mathcal{C}_0 = \sup_{x \in \Gamma} \sum_{y \in \Gamma} \sum_{Z \ni x, y} \|h_Z\| = \sup_{n \in \mathbb{N}} (n + 1)h = \infty.$$

Concluimos com isso que, apesar de termos as mesmas condições de interações em ambos os grafos, apenas o grafo \mathbb{Z}^D satisfaz a **Suposição 1.2**.

Vamos ver agora uma exemplo físico mais concreto, onde as suposições são verdadeiras. Voltaremos a esse exemplo na **Seção 2.3**.

Exemplo 1.1 (Modelo de Ising). *No modelo de Ising com campo transversal e condições de fronteira periódicas, podemos tomar $\Omega = \mathbb{Z}_N$, $\mathcal{H}_i = \mathbb{C}^2$ para todo $i \in \mathbb{Z}_N$ e $d(i, j) = \min_{n \in \mathbb{Z}} |i - j + nN|$ como a métrica em \mathbb{Z}_N . As interações locais são definidas como se segue.*

$$h_X = \begin{cases} -\frac{g}{2} \sigma_i^x & \text{se } X = \{i\}, \\ -\frac{1}{4} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z & \text{se } X = \{i, i+1\} \text{ e } i < N, \\ -\frac{1}{4} \sigma_N^z \sigma_1^z & \text{se } X = \{1, N\}, \\ 0 & \text{caso contrário,} \end{cases}$$

onde $\sigma_i^z = \sigma^z \otimes I_{\mathbb{Z}_N/i}$ e $\sigma_i^x = \sigma^x \otimes I_{\mathbb{Z}_N/i}$ sendo que σ_z, σ_x são as matrizes de Pauli na direção z e x respectivamente. Especificamente

$$\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Além de σ^z, σ^x o conjunto das matrizes de Pauli também contém σ^y definida por

$$\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

Todas essas matrizes são autoadjuntas e unitárias. Elas também satisfazem a seguintes propriedades, $\sigma^x \sigma^y = i\sigma^z$, $\sigma^y \sigma^z = i\sigma^x$ e $\sigma^z \sigma^x = i\sigma^y$. O fator g pode ser interpretado como a aplicação de um campo magnético sobre o sistema. Sendo assim,

$$H_\Omega = -\frac{1}{4} \sum_{i=1}^{N-1} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z - \frac{1}{4} \sigma_N^z \sigma_1^z - \frac{g}{2} \sum_{i=1}^N \sigma_i^x.$$

Temos que o alcance máximo das interações é $R = 1$. Além disso, dado $i \in \mathbb{Z}_N$ note que $\sum_{j \in \mathbb{Z}_N} \sum_{X \ni i, j} \|h_X\| = \|\frac{g}{2} \sigma_i^x\| + \|\frac{1}{4} \sigma_{i-1}^z \sigma_i^z\| + \|\frac{1}{4} \sigma_i^z \sigma_{i+1}^z\| \leq \frac{|g|+1}{2}$. Portanto, as duas suposições acima são satisfeitas.

Definido tudo isso, podemos então enunciar as cotas de Lieb-Robinson para interações de curto alcance.

Teorema 1.1. *Sejam $X, Y \subset \Lambda$, A, B operadores com suporte em X, Y respectivamente. Então, se $r = d(X, Y) > 0$,*

$$\|[A_\Lambda(t), B]\| \leq 2\|A\|\|B\|\|X|(e^{\mu|t|} - 1)e^{-r/R} \quad (1.4)$$

$$\leq 2\|A\|\|B\|\|X|e^{(\mu|t|-r/R)}, \quad (1.5)$$

para qualquer $t \in \mathbb{R}$, onde μ é uma constante positiva.

Observação 1.2. *A equação (1.4) é útil para algumas aplicações, tal como a serem vistas no Capítulo 2, enquanto que a equação (1.5) é útil para a interpretação física do teorema tal como vai ser vista a seguir.*

Como foi discutido na introdução, a partir das cotas de Lieb-Robinson é possível obter uma velocidade máxima para a propagação efetiva da informação. A seguir faremos essa ligação.

Seja $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ um operador auto-adjunto com suporte em um subconjunto X de Λ . Seja $\psi_0 \in \mathcal{H}_\Lambda$, com $\langle \psi_0, \psi_0 \rangle = 1$, o estado inicial do sistema. A aplicação de uma perturbação em um sítio y de Λ , com $d(X, \{y\}) > 0$, pode ser visto como a aplicação de uma unitária $U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com suporte em $\{y\}$ sobre o estado do sistema. Consideraremos as duas seguintes situações:

1. Deixamos o sistema evoluir até um tempo t e fazemos uma medição em X representada pelo operador A . Seu valor esperado é dado então por $\langle A \rangle_{t,1} = \langle \psi_0, A_\Lambda(t) \psi_0 \rangle$.
2. Aplicamos em ψ_0 a transformação unitária U e deixamos o sistema evoluir, a partir daí, até um tempo t . Depois fazemos uma medição em X representada pelo operador A . Seu valor esperado é dado então por $\langle A \rangle_{t,2} = \langle \psi_0, (U^\dagger A_\Lambda(t) U) \psi_0 \rangle$.

Podemos usar a cota de Lieb-Robinson para estimar a interferência da aplicação unitária U na medição de A . Mostraremos que

$$|\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| \leq \|[A_\Lambda(t), U]\|. \quad (1.6)$$

Aplicando então o **Teorema 1.1**,

$$|\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| \leq 2\|A\|X|e^{\frac{1}{R}(\mu R t - r)}.$$

Seja $v_\Phi := (\mu R)/\alpha$, onde $0 < \alpha < 1$. Se $r \geq v_\Phi t$, e com isso $t \leq r/v_\Phi$, temos

$$|\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| \leq 2\|A\|X|e^{-\frac{r}{R}(1-\alpha)} \quad (1.7)$$

Ou seja, para um tempo t fixado, uma perturbação a uma distância maior que $v_\Phi t$ tem uma interferência na medição de A decrescendo exponencialmente. Concluimos, em vista disso, que a velocidade de propagação efetiva de informação é limitada por $v_\Phi = (\mu R)/\alpha$. O fator de α tem o papel de controlar o erro associado, quanto mais próximo de zero estiver α , maior será o valor de r e portanto menor o erro, porém maior será o valor de v_Φ .

Demonstração da Desigualdade (1.6): Para um operador $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ e vetores $\phi_0, \varphi_0 \in \mathcal{H}_\Lambda$, com $\langle \phi_0, \phi_0 \rangle = 1 = \langle \varphi_0, \varphi_0 \rangle$, segue da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned} |\langle \phi_0, O\varphi_0 \rangle|^2 &\leq \langle \phi_0, \phi_0 \rangle \langle O\varphi_0, O\varphi_0 \rangle \\ &= \langle O\varphi_0, O\varphi_0 \rangle. \end{aligned}$$

Com isso,

$$|\langle \phi_0, O\varphi_0 \rangle| \leq (\langle O\varphi_0, O\varphi_0 \rangle)^{\frac{1}{2}}.$$

Lembrando da definição da norma de um operador, $\|O\| = \sup_{|\phi|=1} (\langle O\phi, O\phi \rangle)^{\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned} |\langle \phi_0, O\varphi_0 \rangle| &\leq (\langle O\varphi_0, O\varphi_0 \rangle)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \|O\|. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} |\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| &= |\langle \psi_0, (U^\dagger A_\Lambda(t)U - A_\Lambda(t))\psi_0 \rangle| \\ &\leq \|U^\dagger A_\Lambda(t)U - A_\Lambda(t)\|. \end{aligned}$$

Como U é uma transformação unitária, $U^\dagger U = I$, portanto

$$\begin{aligned} |\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| &\leq \|U^\dagger A_\Lambda(t)U - A_\Lambda(t)\| \\ &= \|U^\dagger (A_\Lambda(t)U - U A_\Lambda(t))\| \\ &= \|U^\dagger [A_\Lambda(t), U]\|. \end{aligned}$$

Usando o fato que $\|O_1 O_2\| \leq \|O_1\| \|O_2\|$ para todo $O_1, O_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$, temos que $\|U^\dagger[A_\Lambda(t), U]\| \leq \|U^\dagger\| \| [A_\Lambda(t), U] \| = \| [A_\Lambda(t), U] \|$. Conseqüentemente,

$$|\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| \leq \| [A_\Lambda(t), U] \|.$$

1.1.2 Demonstração do Teorema 1.1

As somas nessa demonstração (com exceção das somas sobre os naturais) serão sempre sobre subconjuntos de Λ . Deixarei isso implícito para não sobrecarregar a notação.

Para $t = 0$, $A_\Lambda(0) = A$. Como $d(X, Y) > 0$, temos que $X \cap Y = \emptyset$, com isso A e B possuem suportes disjuntos. Conseqüentemente, pela **Observação 1.1**, $[A_\Lambda(0), B] = [A, B] = 0$, logo o resultado é trivial para $t = 0$. Vamos assumir $t > 0$, uma vez que valores de t negativos são tratados da mesma maneira.

Vamos começar com um esboço da demonstração. Nas seções seguintes serão detalhados os passos usados no esboço da prova.

Esboço da demonstração

Fazendo algumas manipulações algébricas, chegamos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[A_\Lambda(t), B] &= i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} [h_{Z_1, \Lambda}(t), [A_\Lambda(t), B]] \\ &\quad - i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} [A_\Lambda(t), [h_{Z_1, \Lambda}(t), B]]. \end{aligned} \quad (1.9)$$

onde $h_{Z_1, \Lambda}(t) = e^{itH_\Lambda} h_{Z_1} e^{-itH_\Lambda}$. Observe que (1.9) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem, na variável $[A_\Lambda(t), B]$, do tipo

$$y' = O(t)y + b(t),$$

onde as soluções da parte homogênea, $y' = O(t)y$, preservam a norma de y . Vale que (para mais detalhes veja o **Apêndice A**):

$$\|y(t)\| \leq \|y(0)\| + \int_0^t \|b(s)\| ds.$$

É fácil mostrar que as soluções da parte homogênea de (1.9) são do tipo $U^\dagger(t)[A_\Lambda(t), B]U(t)$, sendo $U(t)$ uma transformação unitária. Portanto, a solução preserva norma, e com isso

$$\| [A_\Lambda(t), B] \| \leq \| [A, B] \| + 2\|A\| \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \int_0^t \| [h_{Z_1, \Lambda}(s_1), B] \| ds_1. \quad (1.10)$$

Definindo

$$C_B(Z, t) = \sup_{\substack{O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda) \\ \text{supp}(O) = Z}} \frac{\|[O_\Lambda(t), B]\|}{\|O\|},$$

então de (1.10) segue que

$$C_B(X, t) \leq C_B(X, 0) + 2 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \|h_{Z_1}\| \int_0^t C_B(Z_1, s_1) ds_1. \quad (1.11)$$

Iterando a equação acima, chegamos que

$$C_B(X, t) \leq 2\|B\| \sum_{n=1}^k \frac{(2t)^n}{n!} a_n + 2^{k+1} b_k, \quad (1.12)$$

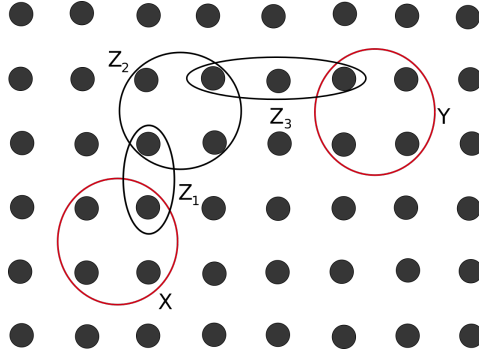
para todo $k \in \mathbb{N}$, onde

$$2^{n+1} b_n \rightarrow 0 \text{ se } n \rightarrow \infty \quad (1.13)$$

e

$$a_n = \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{\substack{Z_n \cap Z_{n-1} \neq \emptyset \\ Z_n \cap Y \neq \emptyset}} \prod_{i=1}^n \|h_{Z_i}\|.$$

Dessa forma, a_n é a soma sobre todos os “caminhos”, quer dizer, a lista de conjuntos Z_1, \dots, Z_n , com interseções mútuas, conectando X a Y , com n passos tendo peso dado pelas interações, $\prod_{i=1}^n \|h_{Z_i}\|$, ao longo desse “caminho”.



Pelo fato das interações serem de curto alcance, grande parte dos “caminhos” terá peso 0. Como já vimos, a **Suposição 1.2** nos fornece a ligação entre a estrutura espacial da rede e as suas interações. Com essa suposição, mostra-se que

$$a_n \leq C_0^n |X|. \quad (1.14)$$

O fato das interações serem de curto alcance implica que

$$a_n = 0 \text{ se } nR \leq d(X, Y). \quad (1.15)$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
C_B(X, t) &\leq 2\|B\|X \sum_{n \geq d(X, Y)/R}^{\infty} \frac{(2t\mathcal{C}_0)^n}{n!} \\
&\leq 2\|B\|X \sum_{n \geq d(X, Y)/R}^{\infty} \frac{(2\mathcal{C}_0 t)^n}{n!} e^{n-d(X, Y)/R} \\
&\leq 2\|B\|X \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2e\mathcal{C}_0 t)^n}{n!} e^{-d(X, Y)/R} \\
&= 2\|B\|X (e^{\mu t} - 1) e^{-d(X, Y)/R},
\end{aligned}$$

onde $\mu = 2e\mathcal{C}_0$. Logo,

$$\begin{aligned}
\|[A_\Lambda(t), B]\| &\leq \|A\|C_B(X, t) \\
&\leq 2\|A\|\|B\|X (e^{\mu t} - 1) e^{-d(X, Y)/R} \\
&\leq 2\|A\|\|B\|X e^{(\mu t - d(X, Y)/R)}.
\end{aligned}$$

Justificativa da Equação (1.9)

É fácil mostrar, partir de (1.2), que

$$\frac{d}{dt} e^{itH_\Lambda} = ie^{itH_\Lambda} H_\Lambda = iH_\Lambda e^{itH_\Lambda}.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(A_\Lambda(t)) &= \frac{d}{dt}(e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda}) \\
&= \frac{d}{dt}(e^{itH_\Lambda}) A e^{-itH_\Lambda} + e^{itH_\Lambda} A \frac{d}{dt}(e^{-itH_\Lambda}) \\
&= ie^{itH_\Lambda} H_\Lambda A e^{-itH_\Lambda} - ie^{itH_\Lambda} A H_\Lambda e^{-itH_\Lambda} \\
&= ie^{itH_\Lambda} [H_\Lambda, A] e^{-itH_\Lambda}.
\end{aligned}$$

Lembrando que, por (1.1), $H_\Lambda = \sum_{Z_1 \subset \Lambda} h_{Z_1}$, temos

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}(A_\Lambda(t)) &= ie^{itH_\Lambda} [H_\Lambda, A] e^{-itH_\Lambda} \\
&= ie^{itH_\Lambda} \left[\sum_{Z_1 \subset \Lambda} h_{Z_1}, A \right] e^{-itH_\Lambda} \\
&= i \sum_{Z_1} e^{itH_\Lambda} [h_{Z_1}, A] e^{-itH_\Lambda}.
\end{aligned}$$

Mas, se $Z_1 \cap X = \emptyset$ então h_{Z_1} e A possuem suportes disjuntos e consequentemente $[h_{Z_1}, A] = 0$. Assim sendo,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_\Lambda(t)) &= i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} e^{itH_\Lambda} [h_{Z_1}, A] e^{-itH_\Lambda} \\ &= i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} (e^{iH_\Lambda} h_{Z_1} A e^{-itH_\Lambda} - e^{itH_\Lambda} A h_{Z_1} e^{-itH_\Lambda}). \end{aligned}$$

É fácil verificar que se O é um operador auto-adjunto, então e^{iO} é unitário e $(e^{iO})^\dagger = e^{-iO}$. Sendo assim, $e^{itH_\Lambda} e^{-itH_\Lambda} = I_\Lambda$, e portanto

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(A_\Lambda(t)) &= i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} (e^{iH_\Lambda} h_{Z_1} I_\Lambda A e^{-itH_\Lambda} - e^{itH_\Lambda} A I_\Lambda h_{Z_1} e^{-itH_\Lambda}) \\ &= i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} ((e^{itH_\Lambda} h_{Z_1} e^{-itH_\Lambda})(e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda})) \\ &\quad - i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} ((e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda})(e^{itH_\Lambda} h_{Z_1} e^{-itH_\Lambda})) \\ &= i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} h_{Z_1, \Lambda}(t) A_\Lambda(t) - i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} A_\Lambda(t) h_{Z_1, \Lambda}(t) \\ &= i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} [h_{Z_1, \Lambda}(t), A_\Lambda(t)], \end{aligned}$$

onde $h_{Z_1, \Lambda}(t) = e^{itH_\Lambda} h_{Z_1} e^{-itH_\Lambda}$. Desta forma, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}[A_\Lambda(t), B] &= \left[\frac{d}{dt}(A_\Lambda(t)), B \right] \\ &= \left[i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} [h_{Z_1, \Lambda}(t), A_\Lambda(t)], B \right] \\ &= i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} [[h_{Z_1, \Lambda}(t), A_\Lambda(t)], B] \\ &= -i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} [B, [h_{Z_1, \Lambda}(t), A_\Lambda(t)]]. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Na última igualdade usamos que $[O_1, O_2] = -[O_2, O_1]$. Uma propriedade de grande utilidade dos comutadores é a identidade de Jacobi, a saber

$$[A, [B, C]] + [B, [C, A]] + [C, [A, B]] = 0,$$

sendo A, B, C operadores agindo em um espaço vetorial qualquer. Usando esta identidade em (1.16), temos

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[A_\Lambda(t), B] \\ &= i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} [h_{Z_1, \Lambda}(t), [A_\Lambda(t), B]] + i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} [A_\Lambda(t), [B, h_{Z_1, \Lambda}(t)]] \\ &= i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} [h_{Z_1, \Lambda}(t), [A_\Lambda(t), B]] - i \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} [A_\Lambda(t), [h_{Z_1, \Lambda}(t), B]]. \end{aligned}$$

Justificativa da Equação (1.11)

Dividindo ambos os lados de (1.10) por $\|A\|$ temos

$$\frac{\|[A_\Lambda(t), B]\|}{\|A\|} \leq \frac{\|[A, B]\|}{\|A\|} + 2 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \int_0^t \|[h_{Z_1, \Lambda}(s_1), B]\| ds_1. \quad (1.17)$$

Definimos

$$C_B(Z, t) = \sup_{\substack{O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda) \\ \text{supp}(O) = Z}} \frac{\|[O_\Lambda(t), B]\|}{\|O\|}, \quad (1.18)$$

para $Z \subset \Lambda$. Note que (1.17) vale para todo $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com $\text{supp}(A) = X$, desta forma podemos tomar o supremo, em ambos os lados de (1.17), sobre todos os $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com $\text{supp}(O) = X$. Fazendo isso, temos

$$C_B(X, t) \leq C_B(X, 0) + 2 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \int_0^t \|[h_{Z_1, \Lambda}(s_1), B]\| ds_1.$$

Mas,

$$\begin{aligned} \|[h_{Z_1, \Lambda}(s_1), B]\| &= \|h_{Z_1}\| \frac{\|[h_{Z_1, \Lambda}(s_1), B]\|}{\|h_{Z_1}\|} \\ &\leq \|h_{Z_1}\| \sup_{\substack{O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda) \\ \text{supp}(O) = Z_1}} \frac{\|[O_\Lambda(s_1), B]\|}{\|O\|} \\ &= \|h_{Z_1}\| C_B(Z_1, s_1). \end{aligned}$$

Com isso,

$$C_B(X, t) \leq C_B(X, 0) + 2 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \|h_{Z_1}\| \int_0^t C_B(Z_1, s_1) ds_1.$$

Justificativa da Equação (1.12)

Até agora, X foi tratado como um subconjunto qualquer de Λ e da mesma forma t um número real positivo qualquer, portanto podemos usar (1.11) trocando X por Z_1 e t por s_1

$$C_B(Z_1, s_1) \leq C_B(Z_1, 0) + 2 \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \|h_{Z_2}\| \int_0^{s_1} C_B(Z_2, s_2) ds_2. \quad (1.19)$$

Entretanto, observe que $d(X, Y) > 0$, logo vale que $[O, B] = 0$ para todo $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com $\text{supp}(O) = X$, conseqüentemente $C_B(X, 0) = 0$. Sendo assim, (1.11) se reduz a

$$C_B(X, t) \leq 2 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \|h_{Z_1}\| \int_0^t C_B(Z_1, s_1) ds_1. \quad (1.20)$$

Desta forma, substituindo (1.19) em (1.20), obtemos

$$C_B(X, t) \leq 2t \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \|h_{Z_1}\| C_B(Z_1, 0) + 2 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \|h_{Z_1}\| \left(2 \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \|h_{Z_2}\| \int_0^t \int_0^{s_1} C_B(Z_2, s_2) ds_2 ds_1 \right).$$

Mas, se $Z_1 \cap Y = \emptyset$ $C_B(Z_1, 0) = 0$, desse modo

$$\sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \|h_{Z_1}\| C_B(Z_1, 0) = \sum_{\substack{Z_1 \cap X \neq \emptyset \\ Z_1 \cap Y \neq \emptyset}} \|h_{Z_1}\| C_B(Z_1, 0).$$

Com isso,

$$C_B(X, t) \leq 2t \sum_{\substack{Z_1 \cap X \neq \emptyset \\ Z_1 \cap Y \neq \emptyset}} \|h_{Z_1}\| C_B(Z_1, 0) + 4 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \|h_{Z_1}\| \|h_{Z_2}\| \int_0^t \int_0^{s_1} C_B(Z_2, s_2) ds_2 ds_1. \quad (1.21)$$

Dado $O_1, O_2 \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$, usando desigualdade triangular e o fato que

$$\|O_1 O_2\| \leq \|O_1\| \|O_2\|, \quad (1.22)$$

temos

$$\|[O_1, O_2]\| \leq \|O_1 O_2\| + \|O_2 O_1\| \leq \|O_1\| \|O_2\| + \|O_2\| \|O_1\| = 2\|O_1\| \|O_2\| \quad (1.23)$$

Aplicando (1.23) na definição de $C_B(Z_1, t)$, (1.18), para $t = 0$

$$C_B(Z_1, 0) = \sup_{\substack{O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda) \\ \text{supp}(O) = Z_1}} \frac{\|[O, B]\|}{\|O\|} \leq 2\|B\|. \quad (1.24)$$

Usando (1.24) em (1.21), temos

$$C_B(X, t) \leq 2\|B\| (2t) \sum_{\substack{Z_1 \cap X \neq \emptyset \\ Z_1 \cap Y \neq \emptyset}} \|h_{Z_1}\| + 4 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \|h_{Z_1}\| \|h_{Z_2}\| \int_0^t \int_0^{s_1} C_B(Z_2, s_2) ds_2 ds_1. \quad (1.25)$$

Vamos mostrar, por indução, que

$$C_B(X, t) \leq 2\|B\| \sum_{n=1}^k \frac{(2t)^n}{n!} a_n + 2^{k+1} b_k \quad (1.26)$$

para todo $k \in \mathbb{N}$, onde

$$a_n = \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{\substack{Z_n \cap Z_{n-1} \neq \emptyset \\ Z_n \cap Y \neq \emptyset}} \prod_{i=1}^n \|h_{Z_i}\| \quad (1.27)$$

e

$$b_n = \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{Z_{n+1} \cap Z_n \neq \emptyset} \left(\prod_{i=1}^{n+1} \|h_{Z_i}\| \right. \\ \left. \times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_n} C_B(Z_{n+1}, s_{n+1}) ds_{n+1} \cdots ds_1 \right). \quad (1.28)$$

Já vimos em (1.25) que a base da indução é verdadeira. Suponhamos que o resultado é válido para $k = m$. Usando (1.11) para $C_B(Z_{m+1}, s_{m+1})$, temos

$$\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} C_B(Z_{m+1}, s_{m+1}) ds_{m+1} \cdots ds_1 \\ \leq \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} C_B(Z_{m+1}, 0) ds_{m+1} \cdots ds_1 \\ + 2 \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} \sum_{Z_{m+2} \cap Z_{m+1} \neq \emptyset} \|h_{Z_{m+2}}\| \int_0^{s_{m+1}} C_B(Z_{m+2}, s_{m+2}) ds_{m+1} \cdots ds_1 \\ = \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} C_B(Z_{m+1}, 0) ds_{m+1} \cdots ds_1 \\ + 2 \sum_{Z_{m+2} \cap Z_{m+1} \neq \emptyset} \|h_{Z_{m+2}}\| \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{m+1}} C_B(Z_{m+2}, s_{m+2}) ds_{m+1} \cdots ds_1. \quad (1.29)$$

Dessa forma,

$$b_m = \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{Z_{m+1} \cap Z_m \neq \emptyset} \prod_{i=1}^{m+1} (\|h_{Z_i}\| \\ \times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} C_B(Z_{m+1}, s_{m+1}) ds_{m+1} \cdots ds_1) \\ \leq \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{Z_{m+1} \cap Z_m \neq \emptyset} \prod_{i=1}^{m+1} (\|h_{Z_i}\| \\ \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} C_B(Z_{m+1}, 0) ds_{m+1} \cdots ds_1) \\ + 2 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{Z_{m+2} \cap Z_{m+1} \neq \emptyset} \prod_{i=1}^{m+2} (\|h_{Z_i}\| \\ \times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{m+1}} C_B(Z_{m+2}, s_{m+2}) ds_{m+1} \cdots ds_1).$$

Lembrando que, $C_B(Z_{m+1}, 0) = 0$ se $Z_{m+1} \cap Y = \emptyset$, temos então

$$\begin{aligned}
 b_m &\leq \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{\substack{Z_{m+1} \cap Z_m \neq \emptyset \\ Z_{m+1} \cap Y \neq \emptyset}} \prod_{i=1}^{m+1} (\|h_{Z_i}\| \\
 &\times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} C_B(Z_{m+1}, 0) ds_{m+1} \cdots ds_1) \\
 &+ 2 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{Z_{m+2} \cap Z_{m+1} \neq \emptyset} \prod_{i=1}^{m+2} (\|h_{Z_i}\| \\
 &\times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{m+1}} C_B(Z_{m+2}, s_{m+2}) ds_{m+1} \cdots ds_1). \quad (1.30)
 \end{aligned}$$

Por (1.24), $C_B(Z_{m+1}, 0) \leq 2\|B\|$, portanto

$$\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} C_B(Z_{m+1}, 0) ds_{m+1} \cdots ds_1 \leq 2\|B\| \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} ds_{m+1} \cdots ds_1.$$

Porém, é fácil mostrar por indução que

$$\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} ds_{m+1} \cdots ds_1 = \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}.$$

Desta forma,

$$\int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_m} C_B(Z_{m+1}, 0) ds_{m+1} \cdots ds_1 \leq 2\|B\| \frac{t^{m+1}}{(m+1)!}. \quad (1.31)$$

Aplicando (1.31) em (1.30), temos

$$\begin{aligned}
 b_m &\leq 2\|B\| \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{\substack{Z_{m+1} \cap Z_m \neq \emptyset \\ Z_{m+1} \cap Y \neq \emptyset}} \prod_{i=1}^{m+1} \|h_{Z_i}\| \\
 &+ 2 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{Z_{m+2} \cap Z_{m+1} \neq \emptyset} \prod_{i=1}^{m+2} (\|h_{Z_i}\| \\
 &\times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{m+1}} C_B(Z_{m+2}, s_{m+2}) ds_{m+1} \cdots ds_1).
 \end{aligned}$$

Note que

$$2\|B\| \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{\substack{Z_{m+1} \cap Z_m \neq \emptyset \\ Z_{m+1} \cap Y \neq \emptyset}} \prod_{i=1}^{m+1} \|h_{Z_i}\| = 2\|B\| \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} a_{m+1},$$

e

$$2b_{m+1} = 2 \sum_{Z_1 \cap X \neq \emptyset} \sum_{Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset} \cdots \sum_{Z_{m+2} \cap Z_{m+1} \neq \emptyset} \prod_{i=1}^{m+2} (\|h_{Z_i}\|) \\ \times \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_{m+1}} C_B(Z_{m+2}, s_{m+2}) ds_{m+1} \cdots ds_1$$

Desta maneira,

$$b_m \leq 2 \|B\| \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} a_{m+1} + 2b_{m+1}. \quad (1.32)$$

Usando (1.32) na hipótese de indução, temos

$$C_B(X, t) \leq 2 \|B\| \sum_{n=1}^m \frac{(2t)^n}{n!} a_n + 2^{m+1} b_m \\ \leq 2 \|B\| \sum_{n=1}^m \frac{(2t)^n}{n!} a_n + 2^{m+1} 2 \|B\| \frac{t^{m+1}}{(m+1)!} a_{m+1} + 2^{m+2} b_{m+1} \\ = 2 \|B\| \sum_{n=1}^{m+1} \frac{(2t)^n}{n!} a_n + 2^{m+2} b_{m+1}.$$

Logo, por indução, (1.12) vale para todo $k \in \mathbb{N}$.

Justificativa da Equação (1.14)

Seja

$$I_n = \{(Z_1, \dots, Z_n) \in \mathcal{P}(\Lambda)^n \mid Z_1 \cap X \neq \emptyset, Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset, \dots, Z_n \cap Z_{n-1} \neq \emptyset\}$$

$$J_n = \bigcup_{x \in X, w_1 \in \Lambda, \dots, w_{n-1} \in \Lambda} \{(Z_1, \dots, Z_n) \in \mathcal{P}(\Lambda)^n \mid Z_1 \supset \{x, w_1\}, Z_2 \supset \{w_2, w_1\}, \dots, \\ Z_{n-1} \supset \{w_{n-1}, w_{n-2}\}, Z_n \supset \{w_{n-1}\}\}$$

Onde $\mathcal{P}(\Lambda)$ é o conjunto das partes de Λ e $\mathcal{P}(\Lambda)^n$ é o produto cartesiano de n parcelas de $\mathcal{P}(\Lambda)$. Vamos mostrar, por indução, que $I_n \subset J_n$ para todo $n \geq 2$:

- Para $n = 2$, $I_2 = \{(Z_1, Z_2) \in \mathcal{P}(\Lambda)^2 \mid Z_1 \cap X \neq \emptyset, Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset\}$, logo dado $(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) \in I_2$ então existem x e w_1 em $X \cap \tilde{Z}_1$ e $\tilde{Z}_1 \cap \tilde{Z}_2$ respectivamente. Com isso, $(\tilde{Z}_1, \tilde{Z}_2) \in \{(Z_1, Z_2) \in \mathcal{P}(\Lambda)^2 \mid Z_1 \supset \{x, w_1\}, Z_2 \supset \{w_1\}\} \in J_2$, consequentemente a base da indução é válida, $I_2 \subset J_2$.

- Suponhamos agora que o resultado vale para $n = m$, ou seja, $I_m \subset J_m$. Seja então $(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{m+1}) \in I_{m+1} \Rightarrow (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_m) \in I_m \subset J_m$ portanto, existe $x \in X$ e existem $w_1, \dots, w_{m-1} \in \Lambda$ tal que $\{w_1, x\} \subset \tilde{Z}_1, \{w_1, w_2\} \subset \tilde{Z}_2, \dots, \{w_{m-1}\} \subset \tilde{Z}_m$. Mas como $(\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{m+1}) \in I_{m+1} \Rightarrow \tilde{Z}_{m+1} \cap \tilde{Z}_m \neq \emptyset \Rightarrow \exists w_m \in \tilde{Z}_{m+1} \cap \tilde{Z}_m \Rightarrow (\tilde{Z}_1, \dots, \tilde{Z}_{m+1}) \in J_{m+1} \Rightarrow I_{m+1} \subset J_{m+1}$. Concluindo assim o argumento de indução.

Seja agora

$$I'_n = \{(Z_1, \dots, Z_n) \in \mathcal{P}(\Lambda)^n \mid Z_1 \cap X \neq \emptyset, Z_2 \cap Z_1 \neq \emptyset, \dots, \\ Z_n \cap Z_{n-1} \neq \emptyset, Z_n \cap Y \neq \emptyset\}.$$

Temos então $I'_n \subset I_n \subset J_n$. Seja

$$J'_n = \bigcup_{x \in X, w_1 \in \Lambda, \dots, w_{n-1} \in \Lambda, y \in Y} \{(Z_1, \dots, Z_n) \in \mathcal{P}(\Lambda)^n \mid Z_1 \supset \{w_1, x\}, Z_2 \supset \{w_2, w_1\}, \dots, \\ Z_n \supset \{y, w_{n-1}\}\}.$$

Dado $(Z'_1, \dots, Z'_n) \in I'_n \subset J_n$, $\exists \{w'_1, \dots, w'_{n-1}\} \subset \Lambda$ tal que $Z'_1 \supset \{w'_1\}, Z'_2 \supset \{w'_2, w'_1\}, \dots, Z'_n \supset \{w'_n\}$. Como $(Z'_1, \dots, Z'_n) \in I'_n$ temos que $Z'_1 \cap X \neq \emptyset$ e $Z'_n \cap Y \neq \emptyset$. Logo, existem x', y' em X, Y , respectivamente, tal que $x' \in Z'_1, y' \in Z'_n$. Portanto, temos que $Z'_1 \supset \{w'_1, x'\}, Z'_2 \supset \{w'_2, w'_1\}, \dots, Z'_n \supset \{y', w'_{n-1}\}$. Com isso, $(Z'_1, \dots, Z'_n) \in J'_n$, e vale $I'_n \subset J'_n$.

Voltando a definição de a_n , (1.27), observamos que

$$a_n = \sum_{I'_n} \prod_{i=1}^n \|h_{Z_i}\| \leq \sum_{J'_n} \prod_{i=1}^n \|h_{Z_i}\| \\ \leq \sum_{x \in X, w_1 \in \Lambda, \dots, w_{n-1} \in \Lambda, y \in Y} \sum_{Z_1 \supset \{x, w_1\}} \dots \sum_{Z_n \supset \{y, w_{n-1}\}} \prod_{i=1}^n \|h_{Z_i}\| \\ \leq \sum_{x \in X} \sum_{w_1 \in \Lambda} \sum_{Z_1 \supset \{w_1, x\}} \dots \sum_{y \in Y} \sum_{Z_n \supset \{y, w_{n-1}\}} \prod_{i=1}^n \|h_{Z_i}\|.$$

Usando a **Suposição 1.2**, temos

$$a_n \leq \sum_{x \in X} \sum_{w_1 \in \Lambda} \sum_{Z_1 \supset \{w_1, x\}} \dots \left(\sum_{y \in Y} \sum_{Z_n \supset \{y, w_{n-1}\}} \|h_{Z_n}\| \right) \prod_{i=1}^{n-1} \|h_{Z_i}\| \\ \leq C_0 \sum_{x \in X} \sum_{w_1 \in \Lambda} \sum_{Z_1 \supset \{w_1, x\}} \dots \sum_{w_{n-1} \in \Lambda} \sum_{Z_{n-1} \supset \{w_{n-1}, w_{n-2}\}} \prod_{i=1}^{n-1} \|h_{Z_i}\|.$$

Repetindo o processo indutivamente, temos

$$a_n \leq C_0^n \sum_{x \in X} 1 = C_0^n |X|. \quad (1.33)$$

Justificativa da Equação (1.13)

Voltando a definição de b_n , (1.28), e usando que $C_B(Z_{n+1}, s_{n+1}) \leq 2\|B\|$, temos

$$\begin{aligned}
 b_n &= \sum_{I_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} \|h_{Z_i}\| \int_0^t \int_0^{s_1} \cdots \int_0^{s_n} C_B(Z_{n+1}, s_{n+1}) ds_{n+1} \cdots ds_1 \\
 &\leq \frac{2t^{n+1}}{(n+1)!} \|B\| \sum_{I_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} \|h_{Z_i}\| \\
 &\leq \frac{2t^{n+1}}{(n+1)!} \|B\| \sum_{J_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} \|h_{Z_i}\| \\
 &= \frac{2t^{n+1}}{(n+1)!} \|B\| \sum_{w_1 \in \Lambda} \sum_{Z_1 \supset \{w_1\}} \cdots \sum_{Z_n \supset \{w_{n-1}, w_n\}} \sum_{Z_{n+1} \supset \{w_n\}} \prod_{i=1}^{n+1} \|h_{Z_i}\|.
 \end{aligned}$$

Usando que $\{Z_{n+1} \subset \Lambda | w_n \in Z_{n+1}\}$ é subconjunto de $\cup_{y \in \Omega} \{Z_{n+1} \subset \Lambda | y, w_n \in Z_{n+1}\}$, temos

$$\begin{aligned}
 b_n &\leq \frac{2t^{n+1}}{(n+1)!} \|B\| \sum_{w_1 \in \Lambda} \sum_{Z_1 \supset \{w_1\}} \cdots \sum_{Z_n \supset \{w_{n-1}, w_n\}} \sum_{y \in \Omega} \sum_{Z_{n+1} \supset \{w_n, y\}} \prod_{i=1}^{n+1} \|h_{Z_i}\| \\
 &= \frac{2t^{n+1}}{(n+1)!} \|B\| \sum_{w_1 \in \Lambda} \sum_{Z_1 \supset \{w_1\}} \cdots \sum_{Z_n \supset \{w_{n-1}, w_n\}} \left(\sum_{y \in \Omega} \sum_{Z_{n+1} \supset \{w_n, y\}} \|h_{Z_{n+1}}\| \right) \prod_{i=1}^n \|h_{Z_i}\| \\
 &\leq \frac{2t^{n+1}}{(n+1)!} \|B\| \mathcal{C}_0 \sum_{w_1 \in \Lambda} \sum_{Z_1 \supset \{w_1\}} \cdots \sum_{Z_n \supset \{w_{n-1}, w_n\}} \prod_{i=1}^n \|h_{Z_i}\|.
 \end{aligned}$$

Repetindo o processo indutivamente, tal como é feito para a_n , temos

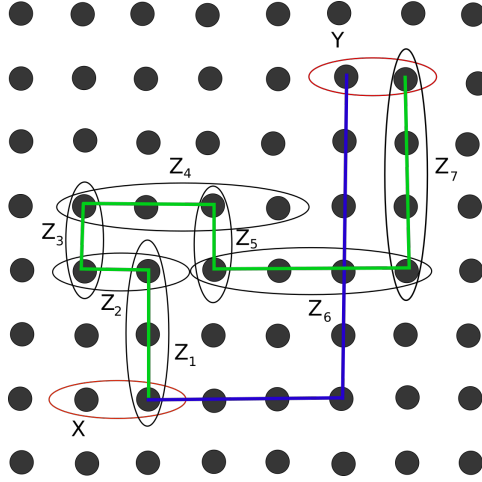
$$b_n \leq \frac{2t^{n+1}}{(n+1)!} \|B\| \mathcal{C}_0^n.$$

Portanto,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{n+1} b_n \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+2} t^{n+1}}{(n+1)!} \|B\| \mathcal{C}_0^n = 0.$$

Justificativa da Equação (1.15)

Seja $(Z'_1, \dots, Z'_n) \in I'_n$ qualquer e seja $\tilde{R} = \max_{i \in \{1, \dots, n\}} \text{diam}(Z'_i)$. Como podemos encontrar um caminho entre X e Y passando por Z'_1, \dots, Z'_n então $d(X, Y) \leq n\tilde{R}$.



Se $d(X, Y) > nR$, então $n\tilde{R} > nR$, com isso $\tilde{R} > R$ e portanto $\exists Z'_i$ tal que $\text{diam}(Z'_i) > R$, por conseguinte $h_{Z'_i} = 0$. Com isso, $\prod_{i=1}^n \|h_{Z'_i}\| = 0$. Como (Z'_1, \dots, Z'_n) é um elemento qualquer de I'_n , vale que $a_n = \sum_{I'_n} \prod_{i=1}^n \|h_{Z'_i}\| = 0$.

Observação 1.3. Note que, por (1.23), vale que

$$\|[A_\Lambda(t), B]\| \leq 2\|A_\Lambda(t)\|\|B\| = 2\|e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda}\|\|B\|.$$

Entretanto, dado um operador O e uma transformação unitária U , então $\|U^\dagger O U\| = \|O\|$. Com efeito,

$$\begin{aligned} \|U^\dagger O U\| &= \sup_{|v|=1} (\langle U^\dagger O U v, U^\dagger O U v \rangle) \\ &= \sup_{|v|=1} (\langle O U v, U U^\dagger O U v \rangle) \\ &= \sup_{|v|=1} (\langle O U v, O U v \rangle). \end{aligned}$$

Como toda transformação unitária é uma bijeção quando restrita ao conjunto dos vetores unitários de $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$, segue que

$$\begin{aligned} \|U^\dagger O U\| &= \sup_{|v|=1} (\langle O U v, O U v \rangle) \\ &= \sup_{|v|=1} (\langle O v, O v \rangle) = \|O\|. \end{aligned} \tag{1.34}$$

Com isso,

$$\|[A_\Lambda(t), B]\| \leq 2\|A\|\|B\|.$$

Essa é uma cota uniforme que independe do tempo e da distância dos suportes. Comparando essa cota com a cota de Lieb-Robinson, $\|[A_\Lambda(t), B]\| \leq$

$2\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu|t|-r/R}$, observe que a cota exponencial só é melhor que a uniforme para valores pequenos do tempo em comparação a distância entre os suportes. Quanto maior a distância, maior o intervalo de tempo em que a cota de Lieb-Robinson tem utilidade. Encontramos abaixo esse parâmetro de comparação entre o tempo e a distância.

$$\begin{aligned} 2\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu|t|-r/R} &\leq 2\|A\|\|B\| \\ \Leftrightarrow e^{\mu|t|-r/R} &\leq \frac{1}{|X|} \\ \Leftrightarrow \mu|t| - r/R &\leq \ln \frac{1}{|X|} \\ \Leftrightarrow |t| &\leq \frac{r}{\mu R} + \frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{|X|} \end{aligned}$$

Seja $c_1 = \frac{1}{\mu R}$ e $c_2 = \frac{1}{\mu} \ln \frac{1}{|X|}$, portanto a cota de Lieb-Robinson só será melhor que a cota uniforme se $|t| \leq c_1 r + c_2$.

1.2 Interações de Longo Alcance

1.2.1 Modelo e resultados

O resultado anterior foi obtido para interações de curto alcance. É possível, no entanto, obter uma nova cota para o caso de interações de longo alcance que decaem algebricamente com a distância.

Para obter esses novos resultados é necessário fazer uma suposição extra sobre o conjunto de sítios Ω . Suponhamos que existam duas constantes positivas C e D , de forma que

$$|B_r(x)| = |\{y \in \Omega | d(x, y) \leq r\}| \leq C(1+r)^D, \quad r \geq 0, x \in \Omega \quad (1.35)$$

onde $B_r(x)$ é uma bola de raio r centrada em $x \in \Omega$. Portanto, $|B_r(x)|$ pode ser visto como o volume dessa bola, o valor de D é análogo à dimensão espacial de Ω . Definimos, por questão de praticidade, $g(r) := C(1+r)^D$.

Trocaremos a **Suposição 1.1** pela **Suposição 1.3** a seguir e manteremos a **Suposição 1.2**.

Suposição 1.3. *Existe uma função decrescente $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ tal que*

$$\sup_{x \in \Omega} \sum_{\substack{Z \ni x \\ \text{diam}(Z) \geq R}} \|h_Z\| \leq f(R), \quad R \geq 0. \quad (1.36)$$

Temos, como próximo exemplo, um sistema para o qual as suposições acima são verdadeiras. Vamos usar esse exemplo para obter uma interpretação física da nova cota de Lieb-Robinson.

Exemplo 1.2. *Seja $\Omega = \mathbb{Z}^D$, equipado com a métrica usual, $d(x, y) = \sum_{i=1}^D |x_i - y_i|$. Suponhamos que só temos interações entre dois corpos, ou seja:*

$$h_X = \begin{cases} h_{\{x,y\}} & \text{se } X = \{x, y\}, x \neq y \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.37)$$

Suponhamos também que essas interações decaem com a distância por uma lei de potência de ordem maior que $2D$, isto é,

$$\|h_{\{x,y\}}\| \leq \frac{C_1}{[1 + d(x, y)]^{\alpha+D}} \quad (1.38)$$

sendo $\alpha > D$ e $C_1 > 0$ constantes que independem do par $\{x, y\}$. Fixamos um elemento x de \mathbb{Z}^D e seja $a_x(n)$ o círculo de raio n centrado em x , $a_x(n) = \{y \in \mathbb{Z}^D | d(x, y) = n\}$. Note que,

$$\{y \in \mathbb{Z}^D | d(x, y) \geq R\} = \bigcup_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R}} a_x(n).$$

Portanto,

$$\sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^D \\ d(x,y) \geq R}} \|h_{\{x,y\}}\| = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R}} \sum_{y \in a_x(n)} \|h_{\{x,y\}}\|.$$

Usando (1.38),

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^D \\ d(x,y) \geq R}} \|h_{\{x,y\}}\| &\leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R}} \sum_{y \in a_x(n)} \frac{C_1}{[1 + n]^{\alpha+D}} \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R}} \frac{C_1}{[1 + n]^{\alpha+D}} |a_x(n)|. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Estamos interessados em encontrar uma cota para $|a_x(n)|$. Pela definição, $a_x(n) = \{y \in \mathbb{Z}^D | \sum_{i=1}^D |x_i - y_i| = n\}$, logo dado $y' \in a_x(n)$, para cada uma de suas coordenadas vale que $|x_j - y'_j| \leq \sum_{i=1}^D |x_i - y'_i| = n$ e com isso $-n + x_j \leq y'_j \leq n + x_j$. Lembrando que x está fixado, temos portanto que y'_j é um inteiro no intervalo $[-n + x_j, n + x_j]$ e com isso y'_j pode assumir no máximo $(2n + 1)$ valores distintos.

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_{i-n} & & \dots & & x_{i-2} & & x_{i-1} & & x_i & & x_{i+1} & & x_{i+2} & & \dots & & x_{i+n} \\ | & & & & | & & | & & | & & | & & | & & & & | \end{array}$$

Isso vale para todas as demais coordenadas, entretanto a equação $\sum_{i=1}^D |x_i - y'_i| = n$ gera um vínculo, de forma que se as $(D-1)$ primeiras coordenadas já forem escolhidas, então a última coordenada satisfaz a igualdade $|x_D - y'_D| = n - \sum_{i=1}^{D-1} |x_i - y'_i|$ e portanto $y'_D = x_D - n + \sum_{i=1}^{D-1} |x_i - y'_i|$ ou $y'_D = -x_D + n - \sum_{i=1}^{D-1} |x_i - y'_i|$. Sendo assim, y'_D pode assumir no máximo dois valores distintos. Enfim, dado $y' \in a_x(n)$, suas $(D-1)$ primeiras coordenadas possuem no máximo $(2n+1)$ valores distintos, enquanto que a última coordenada só pode assumir 2 valores distintos. Logo,

$$|a_x(n)| \leq 2(2n+1)^{D-1} \leq 2(3n)^{D-1} < 3^D n^{D-1}. \quad (1.40)$$

Voltando a (1.39),

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^D \\ d(x,y) \geq R}} \|h_{\{x,y\}}\| &\leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R}} \frac{C_1}{[1+n]^{\alpha+D}} |a_x(n)| < \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R}} \frac{3^D C_1 n^{D-1}}{[1+n]^{\alpha+D}} \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R}} \frac{3^D C_1 n^{D-1}}{[1+n]^{\alpha+1} [1+n]^{D-1}} < \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R}} \frac{3^D C_1 n^{D-1}}{[1+n]^{\alpha+1} n^{D-1}} \\ &= \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R}} \frac{3^D C_1}{[1+n]^{\alpha+1}} = \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R+1}} \frac{3^D C_1}{n^{\alpha+1}}. \end{aligned}$$

Seja $k(x) = \frac{3^D C_1}{x^{\alpha+1}}$. Logo, para $x \in [n-1, n]$ temos que $\frac{3^D C_1}{n^{\alpha+1}} = k(n) \leq k(x)$. Desse modo:

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}^D \\ d(x,y) \geq R}} \|h_{\{x,y\}}\| &< \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R+1}} \frac{3^D C_1}{n^{\alpha+1}} \leq \sum_{\substack{n \in \mathbb{N} \\ n \geq R+1}} \int_{n-1}^n k(x) dx = \int_R^\infty k(x) dx \\ &= \frac{-3^D(\alpha+1)C_1}{x^\alpha} \Bigg|_R^\infty = \frac{C_2}{R^\alpha}, \end{aligned}$$

onde $C_2 = 3^D(\alpha+1)C_1$. Assim sendo, $f(R) = \frac{C_2}{R^\alpha}$ satisfaz a **Suposição 1.3**.

Vamos agora enunciar a versão das cotas de Lieb-Robinson com essas novas suposições.

Teorema 1.2. *Sejam $X, Y \subset \Lambda$, A, B operadores com suporte em X, Y respectivamente, sendo $r = d(X, Y) > 0$, e $R \geq 1$. Então,*

$$\begin{aligned} \|[A_\Lambda(t), B]\| &\leq 2\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu t - r/R} + 4t\|A\|\|B\|\|X\|g(r)f(R) \\ &\quad + 2C_1\|A\|\|B\|\|X\|^2 t R(r \vee R)^D f(R) e^{\mu t - r/R}. \end{aligned} \quad (1.41)$$

Para $t \geq 0$, onde $r \vee R = \max\{r, R\}$, μ e \mathcal{C}_1 são constantes positivas independentes dos outros parâmetros.

Antes de demonstrar o teorema vamos aplicá-lo para obter uma velocidade máxima efetiva para informação, tal como foi feito na seção anterior. Entretanto, vamos nos restringir ao caso do **Exemplo 1.2**. Para esse caso, o fator $(r \vee R)^D$ no terceiro termo de (1.41) pode ser otimizado por $(r \vee R)^{D-1}$, (veremos como isso pode ser feito no fim da demonstração do teorema). Lembrando que $g(r) = C(1+r)^D$ e $f(R) = \frac{C_2}{R^\alpha}$, temos

$$\begin{aligned} \|[A_\Lambda(t), B]\| &\leq 2\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu t - r/R} + 4t\|A\|\|B\|\|X\|C(1+r)^D \frac{C_2}{R^\alpha} \\ &\quad + 2\mathcal{C}_1\|A\|\|B\|\|X\|^2 t R (r \vee R)^{D-1} \frac{C_2}{R^\alpha} e^{\mu t - r/R}. \end{aligned} \quad (1.42)$$

Como $r > 0$, para o caso de \mathbb{Z}^D isto implica $r \geq 1$. Escolhemos o valor de R por $R = r^\beta$, onde $\beta := \frac{D+1}{\alpha+1}$. Como $\alpha > D$, vale que $0 < \beta < 1$, e portanto $r \geq R$. Com isso, segue que $(r \vee R)^{D-1} = r^{D-1}$ e que $\frac{r}{R} = r^{1-\beta} = r^{\frac{\alpha-D}{\alpha+1}} = r^\eta$, onde $\eta := \frac{\alpha-D}{\alpha+1}$. Substituindo tudo isso em (1.42), temos:

$$\begin{aligned} \|[A_\Lambda(t), B]\| &\leq 2\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu t - r^\eta} + 4t\|A\|\|B\|\|X\|C C_2 \frac{(1+r)^D}{r^{\alpha\beta}} \\ &\quad + 2\mathcal{C}_1 C_2\|A\|\|B\|\|X\|^2 t \frac{r^{\beta+D-1}}{r^{\alpha\beta}} e^{\mu t - r^\eta}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Como $1 \leq r \Rightarrow (1+r) \leq 2r \Rightarrow (1+r)^D \leq 2^D r^D$. Portanto, $(1+r)^D r^{-\alpha\beta} \leq 2^D r^{D-\alpha\beta}$, mas $D-\alpha\beta = D - \frac{D\alpha+\alpha}{\alpha+1} = \frac{D-\alpha}{\alpha+1} = -\eta$, sendo assim $(1+r)^D r^{-\alpha\beta} \leq 2^D r^{-\eta}$. Por outro lado, $r^{\beta+D-1-\alpha\beta} = r^{-2\eta}$. Logo, substituindo em (1.43) e definindo $\mathcal{C}_3 = 2^D C C_2$ e $\mathcal{C}_4 = 2\mathcal{C}_1 C_2$, temos

$$\begin{aligned} \|[A_\Lambda(t), B]\| &\leq 2\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu t - r^\eta} + \mathcal{C}_3\|A\|\|B\|\|X\|t r^{-\eta} \\ &\quad + \mathcal{C}_4\|A\|\|B\|\|X\|^2 t r^{-2\eta} e^{\mu t - r^\eta}. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Por (1.6), temos que uma estimativa da interferência de uma aplicação unitária U na medição de A se dá por:

$$|\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| \leq \|[A_\Lambda(t), U]\|. \quad (1.45)$$

Sendo assim, usando (1.44) em (1.45) e substituindo B pela transformação unitária U , temos

$$\begin{aligned} |\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| &\leq 2\|A\|\|X\|e^{\mu t - r^\eta} + \mathcal{C}_3\|A\|\|X\|t r^{-\eta} \\ &\quad + 2\mathcal{C}_1\|A\|\|X\|^2 t r^{-2\eta} e^{\mu t - r^\eta}. \end{aligned} \quad (1.46)$$

Definimos uma cota superior da distância de propagação, em um instante t , por $r_\Phi(t) = (\lambda\mu t)^{\frac{1}{\eta}}$ com um parâmetro $\lambda > 1$. Substituindo $r_\Phi(t)$ em (1.46), temos:

$$\begin{aligned} |\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| &\leq 2\|A\| \|X\| e^{-(\lambda-1)\mu t} + \mathcal{C}_3 \|A\| \|X\| \frac{1}{\lambda\mu} \\ &\quad + 2\mathcal{C}_1 \|A\| \|X\|^2 \frac{1}{(\lambda\mu)^2 t} e^{-(\lambda-1)\mu t}. \end{aligned}$$

Para t grande,

$$|\langle A \rangle_{t,2} - \langle A \rangle_{t,1}| \sim \mathcal{C}_3 \|A\| \|B\| \|X\| \frac{1}{\lambda\mu}.$$

Sendo assim, para λ grande, o lado direito da equação acima fica muito pequeno. Dessa maneira, uma cota superior para distância de propagação efetiva é dada por

$$r_\Phi(t) = (\lambda\mu t)^{\frac{1}{\eta}} = (\lambda\mu)^{\frac{1}{\eta}} t^{\frac{1}{\eta}} = (\lambda\mu)^{\frac{1}{\eta}} t^{(1+\kappa)},$$

onde $\kappa = \frac{1}{\eta} - 1 = \frac{D+1}{\alpha-D} > 0$. Por isto, um limite superior para a velocidade máxima de informação efetiva é dado por

$$v_\Phi(t) = \frac{d}{dt} r_\Phi(t) = \frac{(\lambda\mu)^{\frac{1}{\eta}}}{\eta} t^\kappa.$$

No caso da seção anterior, $v_\Phi = (\mu R)/\alpha$, sendo que o fator de α controlava o erro associado. No caso atual, o fator de λ que cumpre o papel de controlar o erro.

Observe que a velocidade máxima encontrada não é mais constante, crescendo algebricamente com tempo.

1.2.2 Demonstração do Teorema 1.2

A estratégia para demonstrar o teorema é a decomposição do Hamiltoniano em uma parte de curto alcance e uma de longo alcance, a saber:

$$H_\Lambda = H_\Lambda^{(<R)} + H_\Lambda^{(\geq R)} \quad (1.47)$$

com

$$H_\Lambda^{(<R)} = \sum_{Z \subset \Lambda} h_Z^{(<R)},$$

e

$$H_\Lambda^{(\geq R)} = \sum_{Z \subset \Lambda} h_Z^{(\geq R)},$$

onde as interações locais, $h_Z^{(<R)}$ e $h_Z^{(\geq R)}$, são dados por

$$h_Z^{(<R)} = \begin{cases} h_Z, & \text{se } \text{diam}(Z) < R, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e $h_Z^{(\geq R)} = h_Z - h_Z^{(<R)}$. O Hamiltoniano $H_\Lambda^{(<R)}$ é a parte de curto alcance com interações de alcance máximo R , portanto essa parte do hamiltoniano já foi tratado na seção anterior. Já $H_\Lambda^{(\geq R)}$ é a parte de longo alcance.

A evolução temporal de um operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ pelo Hamiltoniano de curto alcance é dado por

$$\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A) = e^{itH_\Lambda^{(<R)}} A e^{-itH_\Lambda^{(<R)}}.$$

Introduzimos agora o seguinte operador

$$\mathcal{U}_\Lambda^R(t) = e^{itH_\Lambda^{(<R)}} e^{-itH_\Lambda}.$$

Observe que $(\mathcal{U}_\Lambda^R(t))^\dagger = (e^{itH_\Lambda^{(<R)}} e^{-itH_\Lambda})^\dagger = e^{itH_\Lambda} e^{-itH_\Lambda^{(<R)}}$. Com isso,

$$(\mathcal{U}_\Lambda^R(t))^\dagger \mathcal{U}_\Lambda^R(t) = e^{itH_\Lambda} e^{-itH_\Lambda^{(<R)}} e^{itH_\Lambda^{(<R)}} e^{-itH_\Lambda} = I.$$

Ou seja, $\mathcal{U}_\Lambda^R(t)$ é um operador unitário. Dados $A, B \in \mathcal{H}_\Lambda$, temos

$$\begin{aligned} A_\Lambda(t) &= e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda} = e^{itH_\Lambda} (e^{-itH_\Lambda^{(<R)}} e^{itH_\Lambda^{(<R)}}) A (e^{-itH_\Lambda^{(<R)}} e^{itH_\Lambda^{(<R)}}) e^{-itH_\Lambda} \\ &= (e^{itH_\Lambda} e^{-itH_\Lambda^{(<R)}}) (e^{itH_\Lambda^{(<R)}} A e^{-itH_\Lambda^{(<R)}}) (e^{itH_\Lambda^{(<R)}} e^{-itH_\Lambda}) \\ &= \mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger \tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A) \mathcal{U}_\Lambda^R(t). \end{aligned}$$

Desta forma,

$$\begin{aligned} [A_\Lambda(t), B] &= [\mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger \tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A) \mathcal{U}_\Lambda^R(t), B] \\ &= \mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger \tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A) \mathcal{U}_\Lambda^R(t) B - B \mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger \tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A) \mathcal{U}_\Lambda^R(t) \\ &= \mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger \left(\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A) \mathcal{U}_\Lambda^R(t) B \mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger - \mathcal{U}_\Lambda^R(t) B \mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger \tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A) \right) \mathcal{U}_\Lambda^R(t) \\ &= \mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \mathcal{U}_\Lambda^R(t) B \mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger] \mathcal{U}_\Lambda^R(t). \end{aligned}$$

Sendo assim,

$$\|[A_\Lambda(t), B]\| = \|\mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \mathcal{U}_\Lambda^R(t) B \mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger] \mathcal{U}_\Lambda^R(t)\|.$$

Usando (1.34), temos que

$$\|[A_\Lambda(t), B]\| = \|\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \mathcal{U}_\Lambda^R(t) B \mathcal{U}_\Lambda^R(t)^\dagger\|. \quad (1.48)$$

Definimos o alargamento de um conjunto X como.

Definição 1.3. Dado $X \subset \Lambda$ e $r \geq 0$, definimos o r -alargamento do conjunto X como

$$X_r = \{x \in \Lambda \mid d(X, \{x\}) < r\}.$$

Lema 1.1. Seja $X \subset \Lambda$, $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com suporte em X e $r > 0$. Então,

$$\begin{aligned} \|[A_\Lambda(t), B]\| &\leq \|[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), B]\| + 2\|B\| \sum_{Z \cap X_r \neq \emptyset} \int_0^t \|[\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| ds \\ &\quad + 2\|B\| \sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \int_0^t \|[\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| ds \end{aligned} \quad (1.49)$$

para qualquer $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ e para qualquer $t \geq 0$.

Demonstração. Introduzimos a seguinte função $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$, onde $f(t, s) = [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger]$. Sendo assim, por (1.48), temos

$$\|[A_\Lambda(t), B]\| = \|f(t, t)\|.$$

Diferenciando f com respeito a s , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{df(t, s)}{ds} &= \frac{d}{ds}(\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A) \mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger) - \frac{d}{ds}(\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger \tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A)) \\ &= \tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A) \frac{d}{ds}(\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger) - \frac{d}{ds}(\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger) \tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A) \\ &= \left[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \frac{d}{ds}[\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger] \right]. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Porém, vale que

$$\frac{d}{ds}(\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger) = \frac{d}{ds}(\mathcal{U}_\Lambda^R(s)) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger + \mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \frac{d}{ds}(\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger). \quad (1.51)$$

Fazendo as derivadas separadamente,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(\mathcal{U}_\Lambda^R(s)) &= \frac{d}{ds}(e^{isH_\Lambda^{(<R)}} e^{-isH_\Lambda}) \\ &= \frac{d}{ds}(e^{isH_\Lambda^{(<R)}}) e^{-isH_\Lambda} + e^{isH_\Lambda^{(<R)}} \frac{d}{ds}(e^{-isH_\Lambda}), \end{aligned}$$

como,

$$\frac{d}{ds}(e^{isH_\Lambda^{(<R)}}) = ie^{isH_\Lambda^{(<R)}} H^{(<R)} = iH^{(<R)} e^{isH_\Lambda^{(<R)}}$$

e

$$\frac{d}{ds}(e^{-isH_\Lambda}) = -ie^{-isH_\Lambda} H_\Lambda = -iH_\Lambda e^{-isH_\Lambda},$$

vale então,

$$\frac{d}{ds} (\mathcal{U}_\Lambda^R(s)) = ie^{isH_\Lambda^{(<R)}} H_\Lambda^{(<R)} e^{-isH_\Lambda} - ie^{isH_\Lambda^{(<R)}} H_\Lambda e^{-isH_\Lambda}.$$

Mas, por (1.47), $H_\Lambda = H_\Lambda^{(<R)} + H_\Lambda^{(\geq R)}$. Com isso,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\mathcal{U}_\Lambda^R(s)) &= ie^{isH_\Lambda^{(<R)}} H_\Lambda^{(<R)} e^{-isH_\Lambda} - ie^{isH_\Lambda^{(<R)}} (H_\Lambda^{(<R)} + H_\Lambda^{(\geq R)}) e^{-isH_\Lambda} \\ &= -ie^{isH_\Lambda^{(<R)}} H_\Lambda^{(\geq R)} e^{-isH_\Lambda} \\ &= -ie^{isH_\Lambda^{(<R)}} H_\Lambda^{(\geq R)} \left(e^{-isH_\Lambda^{(<R)}} e^{isH_\Lambda^{(<R)}} \right) e^{-isH_\Lambda} \\ &= -i \left(e^{isH_\Lambda^{(<R)}} H_\Lambda^{(\geq R)} e^{-isH_\Lambda^{(<R)}} \right) \left(e^{isH_\Lambda^{(<R)}} e^{-isH_\Lambda} \right) \\ &= -i\tau_{s,\Lambda}^{(<R)} (H_\Lambda^{(\geq R)}) \mathcal{U}_\Lambda^R(s). \end{aligned} \quad (1.52)$$

Com cálculos análogos, temos que

$$\frac{d}{ds} (\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger) = i\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger \tau_{s,\Lambda}^{(<R)} (H_\Lambda^{(\geq R)}) \quad (1.53)$$

Substituindo (1.52) e (1.53) em (1.51), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} (\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger) &= -i\tau_{s,\Lambda}^{(<R)} (H_\Lambda^{(\geq R)}) \mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger \\ &\quad + i\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger \tau_{s,\Lambda}^{(<R)} (H_\Lambda^{(\geq R)}) \\ &= -i[\tau_{s,\Lambda}^{(<R)} (H_\Lambda^{(\geq R)}), \mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger] \end{aligned}$$

Portanto, voltando a (1.50), temos

$$\begin{aligned} \frac{df(t,s)}{ds} &= \left[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \frac{d}{ds} [\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger] \right] \\ &= -i \left[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), [\tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)}), \mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger] \right]. \end{aligned}$$

Usando a identidade de Jacobi

$$\begin{aligned} \frac{df(t,s)}{ds} &= i \left[\tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)}), [\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger, \tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A)] \right] \\ &\quad + i \left[\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger, [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right] \\ &= -i \left[\tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)}), [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger] \right] \\ &\quad + i \left[\mathcal{U}_\Lambda^R(s) B \mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger, [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right]. \end{aligned}$$

Mas, $f(t, s) = [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \mathcal{U}_\Lambda^R(s)B\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger]$, com isso

$$\begin{aligned} \frac{df(t, s)}{ds} &= -i \left[\tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)}), f(t, s) \right] \\ &\quad + i \left[\mathcal{U}_\Lambda^R(s)B\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger, [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right]. \end{aligned}$$

Portanto, pelo **Corolário A.1**, temos que

$$\|f(t, t)\| \leq \|f(t, 0)\| + \int_0^t \left\| \left[\mathcal{U}_\Lambda^R(s)B\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger, [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right] \right\| ds.$$

Substituindo o valor de f ,

$$\begin{aligned} \|[A_\Lambda(t), B]\| &\leq \|[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), B]\| \\ &\quad + \int_0^t \left\| \left[\mathcal{U}_\Lambda^R(s)B\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger, [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right] \right\| ds. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Por (1.23),

$$\begin{aligned} &\left\| \left[\mathcal{U}_\Lambda^R(s)B\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger, [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right] \right\| \\ &\leq 2\|\mathcal{U}_\Lambda^R(s)B\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger\| \left\| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right\|, \end{aligned}$$

enquanto que, por (1.34)

$$\|\mathcal{U}_\Lambda^R(s)B\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger\| = \|B\|.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} &\left\| \left[\mathcal{U}_\Lambda^R(s)B\mathcal{U}_\Lambda^R(s)^\dagger, [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right] \right\| \\ &\leq 2\|B\| \left\| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right\|. \end{aligned}$$

Logo, voltando a (1.54)

$$\|[A_\Lambda(t), B]\| \leq \|[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), B]\| + 2\|B\| \int_0^t \left\| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right\| ds.$$

Lembramos que, por definição, $H^{(\geq R)} = \sum_{Z \in \Lambda} h_Z^{(\geq R)}$. Usando a linearidade da evolução temporal e do comutador, temos

$$\begin{aligned} \left\| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_\Lambda^{(\geq R)})] \right\| &= \left\| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}\left(\sum_{Z \in \Lambda} h_Z^{(\geq R)}\right)] \right\| \\ &= \left\| \sum_{Z \in \Lambda} [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(h_Z^{(\geq R)})] \right\|. \end{aligned}$$

Usando a desigualdade triangular,

$$\|[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_{\Lambda}^{(\geq R)})]\| \leq \sum_{Z \in \Lambda} \|[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(h_Z^{(\geq R)})]\|.$$

Desta maneira,

$$\begin{aligned} \| [A_{\Lambda}(t), B] \| &\leq \| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), B] \| + 2\|B\| \int_0^t \| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(H_{\Lambda}^{(\geq R)})] \| ds \\ &\leq \| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), B] \| + 2\|B\| \sum_{Z \in \Lambda} \int_0^t \| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(h_Z^{(\geq R)})] \| ds. \end{aligned} \tag{1.55}$$

Observe agora que,

$$\begin{aligned} [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(h_Z^{(\geq R)})] &= \left[e^{itH_{\Lambda}^{(<R)}} A e^{-itH_{\Lambda}^{(<R)}}, e^{isH_{\Lambda}^{(<R)}} h^{(\geq R)} e^{-isH_{\Lambda}^{(<R)}} \right] \\ &= \left(e^{itH_{\Lambda}^{(<R)}} A e^{-itH_{\Lambda}^{(<R)}} \right) \left(e^{isH_{\Lambda}^{(<R)}} h^{(\geq R)} e^{-isH_{\Lambda}^{(<R)}} \right) \\ &\quad - \left(e^{isH_{\Lambda}^{(<R)}} h^{(\geq R)} e^{-isH_{\Lambda}^{(<R)}} \right) \left(e^{itH_{\Lambda}^{(<R)}} A e^{-itH_{\Lambda}^{(<R)}} \right). \end{aligned}$$

Uma das propriedades básicas da exponencial de um operador é o fato que, se O_1, O_2 são dois operadores que comutam, então

$$e^{O_1} e^{O_2} = e^{O_1+O_2} = e^{O_2} e^{O_1}. \tag{1.56}$$

Portanto $e^{-itH_{\Lambda}^{(<R)}} e^{isH_{\Lambda}^{(<R)}} = e^{-i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}} e^{-isH_{\Lambda}^{(<R)}} e^{itH_{\Lambda}^{(<R)}} = e^{i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}}$. Com isso,

$$\begin{aligned} \left[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(h_Z^{(\geq R)}) \right] &= \left(e^{itH_{\Lambda}^{(<R)}} A e^{-i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}} h^{(\geq R)} e^{-isH_{\Lambda}^{(<R)}} \right) \\ &\quad - \left(e^{isH_{\Lambda}^{(<R)}} h^{(\geq R)} e^{i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}} A e^{-itH_{\Lambda}^{(<R)}} \right) \\ &= e^{isH_{\Lambda}^{(<R)}} \left(e^{i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}} A e^{-i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}} h^{(\geq R)} \right) e^{-isH_{\Lambda}^{(<R)}} \\ &\quad - e^{isH_{\Lambda}^{(<R)}} \left(h^{(\geq R)} e^{i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}} A e^{-i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}} \right) e^{-isH_{\Lambda}^{(<R)}} \\ &= e^{isH_{\Lambda}^{(<R)}} \left[e^{i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}} A e^{-i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}}, h^{(\geq R)} \right] e^{-isH_{\Lambda}^{(<R)}}. \end{aligned}$$

Lembrando que $\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A) = e^{i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}} A e^{-i(t-s)H_{\Lambda}^{(<R)}}$, então

$$\begin{aligned} \| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), \tau_{s,\Lambda}^{(<R)}(h_Z^{(\geq R)})] \| &= \left\| e^{isH_{\Lambda}^{(<R)}} [\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A), h^{(\geq R)}] e^{-isH_{\Lambda}^{(<R)}} \right\| \\ &= \| [\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A), h^{(\geq R)}] \|, \end{aligned}$$

onde a última igualdade segue de (1.34). Substituindo em (1.55)

$$\| [A_\Lambda(t), B] \| \leq \| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), B] \| + 2\|B\| \sum_{Z \in \Lambda} \int_0^t \| [\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}] \| ds.$$

Dividindo a soma entre conjuntos que tem interseção com X_r e os que não tem, temos

$$\begin{aligned} \| [A_\Lambda(t), B] \| &\leq \| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), B] \| + 2\|B\| \sum_{Z \cap X_r \neq \emptyset} \int_0^t \| [\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}] \| ds \\ &\quad + 2\|B\| \sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \int_0^t \| [\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}] \| ds. \end{aligned}$$

□

Usaremos esse lema para demonstrar o **Teorema 1.2**. Observe primeiro que pelo **Teorema 1.1**, temos

$$\| [\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), B] \| \leq 2\|A\| \|B\| e^{\mu t - r/R}. \quad (1.57)$$

Para cotar para o segundo termo de (1.49), note inicialmente que por (1.23) e por (1.34)

$$\begin{aligned} \| [\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}] \| &\leq 2\| \tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A) \| \| h_Z^{(\geq R)} \| \\ &= 2\|A\| \| h_Z^{(\geq R)} \|. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \sum_{Z \cap X_r \neq \emptyset} \int_0^t \| [\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}] \| ds &\leq \sum_{Z \cap X_r \neq \emptyset} \int_0^t 2\|A\| \| h_Z^{(\geq R)} \| ds \\ &= 2\|A\| \sum_{Z \cap X_r \neq \emptyset} \| h_Z^{(\geq R)} \| \int_0^t ds \\ &= 2t\|A\| \sum_{Z \cap X_r \neq \emptyset} \| h_Z^{(\geq R)} \|. \end{aligned} \quad (1.58)$$

Entretanto, $\{Z \subset \Lambda : Z \cap X_r \neq \emptyset\} \subset \bigcup_{x \in X_r} \{Z \subset \Lambda : x \in Z\}$, com isso

$$\sum_{Z \cap X_r \neq \emptyset} \| h_Z^{(\geq R)} \| \leq \sum_{x \in X_r} \sum_{Z \ni x} \| h_Z^{(\geq R)} \|.$$

Mas, como

$$h_Z^{(\geq R)} = \begin{cases} h_Z & \text{se } \text{diam}(Z) \geq R, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

então

$$\sum_{Z \ni x} \|h_Z^{(\geq R)}\| = \sum_{\substack{Z \ni x \\ \text{diam}(Z) \geq R}} \|h_Z\| \leq f(R). \quad (1.59)$$

Onde a última desigualdade segue da **Suposição 1.3**. Substituindo então em (1.58), temos

$$\begin{aligned} \sum_{Z \cap X_r \neq \emptyset} \int_0^t \|[\tau_{t-s, \Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| ds &\leq 2t \|A\| \sum_{x \in X_r} \sum_{Z \ni x} \|h_Z^{(\geq R)}\| \\ &\leq 2t \|A\| f(R) \sum_{x \in X_r} 1 \\ &= 2t \|A\| f(R) |X_r|. \end{aligned}$$

Lembrando que $X_r = \{x \in \Lambda : d(X, \{x\}) \leq r\}$, temos $X_r \subset \bigcup_{x \in X} \{y \in \Lambda : d(x, y) \leq r\} = \bigcup_{x \in X} B_r(x)$, logo $|X_r| \leq |\bigcup_{x \in X} B_r(x)| \leq \sum_{x \in X} |B_r(x)|$. Por suposição, $|B_r(x)| \leq g(r)$, com isso $\sum_{x \in X} |B_r(x)| \leq \sum_{x \in X} g(r) = |X|g(r)$. Deste modo:

$$\sum_{Z \cap X_r \neq \emptyset} \int_0^t \|[\tau_{t-s, \Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| ds \leq 2t \|A\| |X| f(R) g(r).$$

Enfim,

$$2\|B\| \sum_{\substack{Z \in \Lambda \\ Z \cap X_r \neq \emptyset}} \int_0^t \|[\tau_{t-s, \Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| ds \leq 4t \|A\| \|B\| |X| f(R) g(r). \quad (1.60)$$

Ou seja, o segundo termo de (1.49) pode ser cotado pelo segundo termo de (1.41).

O terceiro termo do lado direito de (1.49) pode ser estimado da maneira que se segue.

Lema 1.2. *Seja A um operador com suporte em X , onde $X \subset \Lambda$. Então*

$$\sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|[\tau_{t-s, \Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| \leq \mathcal{C}_1 \|A\| |X|^2 (r \vee R)^D R f(R) e^{\mu t - r/R} \quad (1.61)$$

para $t \geq 0$, $r > 0$ e $R > 1$, onde \mathcal{C}_1 é uma constante positiva.

Demonstração. Pelo **Teorema 1.1**, temos que

$$\sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|[\tau_{t, \Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| \leq 2\|A\| |X| \sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|h_Z^{(\geq R)}\| e^{\mu t - d(X, Z)/R}.$$

Como $X_r = \{x \in \Lambda | d(x, X) \leq r\}$, então se $Z \cap X_r = \emptyset$ implica que $d(X, Z) > r$. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \{Z \subset \Lambda : Z \cap X_r = \emptyset\} &= \{Z \subset \Lambda : d(X, Z) > r\} \\ &= \bigcup_{k=0}^{\infty} \{Z \subset \Lambda : r + k < d(X, Z) \leq r + k + 1\}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
 & \sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| \leq 2\|A\|\|X\| \sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|h_Z^{(\geq R)}\| e^{\mu t - d(X,Z)/R} \\
 & = 2\|A\|\|X\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{Z: \\ r+k < d(X,Z) \leq r+k+1}} \|h_Z^{(\geq R)}\| e^{\mu t - d(X,Z)/R} \\
 & \leq 2\|A\|\|X\| \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\substack{Z: \\ r+k < d(X,Z) \leq r+k+1}} \|h_Z^{(\geq R)}\| e^{\mu t - (r+k)/R} \\
 & = 2\|A\|\|X\| \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mu t - (r+k)/R} \sum_{\substack{Z: \\ r+k < d(X,Z) \leq r+k+1}} \|h_Z^{(\geq R)}\| \\
 & \leq 2\|A\|\|X\| \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mu t - (r+k)/R} \sum_{\substack{w \in \Lambda: \\ r+k < d(X,w) \leq r+k+1}} \sum_{Z \ni w} \|h_Z^{(\geq R)}\|.
 \end{aligned}$$

De (1.59), vale que $\sum_{Z \ni w} \|h_Z^{(\geq R)}\| \leq f(R)$. Portanto

$$\begin{aligned}
 & \sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| \\
 & \leq 2\|A\|\|X\| f(R) \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mu t - (r+k)/R} \sum_{\substack{w \in \Lambda: \\ r+k < d(X,w) \leq r+k+1}} 1 \\
 & \leq 2\|A\|\|X\| f(R) \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mu t - (r+k)/R} \sum_{x \in X} \sum_{\substack{w \in \Lambda: \\ r+k < d(x,w) \leq r+k+1}} 1 \quad (1.62) \\
 & \leq 2\|A\|\|X\| f(R) \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mu t - (r+k)/R} \sum_{x \in X} \sum_{\substack{w \in \Lambda: \\ 0 < d(x,w) \leq r+k+1}} 1.
 \end{aligned}$$

Mas, lembramos que pela suposição sobre o conjunto de sítios, $|\{w \in \Omega \mid d(x, w) \leq r+k+1\}| \leq g(r+k+1)$ para todo $x \in \Omega$. Com isso,

$$\sum_{x \in X} \sum_{\substack{w: \\ 0 < d(x,w) \leq r+k+1}} 1 \leq \sum_{x \in X} g(r+k+1) = |X|g(r+k+1).$$

Sendo assim,

$$\sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| \leq 2\|A\|\|X\|^2 f(R) \sum_{k=0}^{\infty} g(r+k+1) e^{\mu t - (r+k)/R}. \quad (1.63)$$

Lembrando que, por definição, $g(y) = C(1+y)^D$ e conseqüentemente é uma função crescente. Desta forma, para $x \in [k, k+1]$, vale que $g(r+k+1) \leq g(r+x+1)$ enquanto que $e^{-(r+k)/R} \leq e^{-(r+x-1)/R}$, e obtemos:

$$\begin{aligned} g(r+k+1)e^{-(r+k)/R} &\leq g(r+x+1)e^{-(r+x-1)/R} = e^{1/R}g(r+x+1)e^{-x/R} \\ &\leq eg(r+x+1)e^{-(r+x)/R} \end{aligned}$$

para todo $x \in [k, k+1]$, onde a última desigualdade segue do fato que $R \geq 1$, por conseguinte $e^{1/R} \leq e$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} g(r+k+1)e^{-(r+k)/R} &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} g(r+k+1)e^{-(r+k)/R} dx \\ &\leq e \sum_{k=0}^{\infty} \int_k^{k+1} g(r+x+1)e^{-(r+x)/R} dx \\ &= e \int_0^{\infty} g(r+x+1)e^{-(r+x)/R} dx \\ &= e \int_0^{\infty} C(2+r+x)^D e^{-(r+x)/R} dx. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $y = 2+r+x$, temos

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} g(r+k+1)e^{-(r+k)/R} &\leq e \int_{2+r}^{\infty} C y^D e^{-(y-2)/R} dy \\ &= e^3 C \int_{2+r}^{\infty} y^D e^{-y/R} dy \\ &= e^3 C R^D \int_{2+r}^{\infty} (y/R)^D e^{-y/R} dy. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $w = y/R$, temos que

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} g(r+k+1)e^{-(r+k)/R} &\leq e^3 C R^{D+1} \int_{(2+r)/R}^{\infty} w^D e^{-w} dw \\ &\leq e^3 R^{D+1} \int_{r/R}^{\infty} w^D e^{-w} dw. \end{aligned}$$

Mas observe que, usando o método de integração por partes $[D]$ -vezes temos

$$\begin{aligned} \int_{r/R}^{\infty} w^D e^{-w} dw &= \sum_{i=0}^{\lfloor D \rfloor - 1} \left(\prod_{j=0}^i (D-j) \right) \left(\frac{r}{R} \right)^{D-i} e^{-\frac{r}{R}} \\ &\quad + \left(\prod_{j=0}^{\lfloor D \rfloor} (D-j) \right) \int_{r/R}^{\infty} w^{D-\lfloor D \rfloor} e^{-w} dw. \end{aligned}$$

Mostra-se que $\int_{r/R}^{\infty} w^{D-[D]} e^{-w} dw \leq 2 \left(\frac{r}{R} + 1 \right) e^{-\frac{r}{R}}$. Com isso,

$$\begin{aligned} \int_{r/R}^{\infty} w^D e^{-w} dw &\leq \sum_{i=0}^{[D]-1} \left(\prod_{j=0}^i (D-j) \right) \left(\frac{r}{R} \right)^{D-i} e^{-\frac{r}{R}} + 2 \left(\prod_{j=0}^{[D]} (D-j) \right) \left(\frac{r}{R} + 1 \right) e^{-\frac{r}{R}} \\ &\leq 2 \left(\prod_{j=0}^{[D]} (D-j) \right) \left(\sum_{i=0}^{[D]-1} \left(\frac{r}{R} \right)^{D-i} + \left(\frac{r}{R} + 1 \right) \right) e^{-\frac{r}{R}} \\ &\leq 2 \left(\prod_{j=0}^{[D]} (D-j) \right) \left(\sum_{i=0}^{[D]-1} \left(\frac{r}{R} + 1 \right)^{D-i} + \left(\frac{r}{R} + 1 \right) \right) e^{-\frac{r}{R}}. \end{aligned}$$

Mas, observe que $\left(\frac{r}{R} + 1 \right)^x$ é crescente no expoente x , portanto

$$\sum_{i=0}^{[D]-1} \left(\frac{r}{R} + 1 \right)^{D-i} + \left(\frac{r}{R} + 1 \right) \leq ([D] + 1) \left(\frac{r}{R} + 1 \right)^D.$$

Sendo assim,

$$\int_{r/R}^{\infty} w^D e^{-w} dw \leq 2([D] + 1) \left(\prod_{j=0}^{[D]} (D-j) \right) \left(\frac{r}{R} + 1 \right)^D e^{-\frac{r}{R}}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} g(r+k+1) e^{-(r+k)/R} &\leq 2e^3 C([D] + 1) \left(\prod_{j=0}^{[D]} (D-j) \right) R^{D+1} \left(\frac{r}{R} + 1 \right)^D e^{-\frac{r}{R}} \\ &= 2e^3 C([D] + 1) \left(\prod_{j=0}^{[D]} (D-j) \right) R(r+R)^D e^{-\frac{r}{R}}. \end{aligned}$$

Seja $(r \vee R) = \max\{r, R\}$, com isso $(r+R)^D \leq (2(r \vee R))^D = 2^D (r \vee R)^D$. Portanto,

$$\sum_{k=0}^{\infty} g(r+k+1) e^{-(r+k)/R} \leq 2^{D+1} e^3 C([D] + 1) \left(\prod_{j=0}^{[D]} (D-j) \right) R(r+R)^D e^{-\frac{r}{R}}.$$

Logo, voltando a (1.63),

$$\begin{aligned} \sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}\| &\leq 2\|A\| \|X\|^2 f(R) e^{\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} g(k+1) e^{-(r+k)/R} \\ &\leq 2^{D+2} \|A\| \|X\|^2 f(R) e^3 C([D] + 1) \left(\prod_{j=0}^{[D]} (D-j) \right) R(r+R)^D e^{\mu t - \frac{r}{R}} \\ &= \mathcal{C}_1 \|A\| \|X\|^2 f(R) R(r+R)^D e^{\mu t - \frac{r}{R}}. \end{aligned}$$

onde $\mathcal{C}_1 = 2^{D+2}e^3C(\lfloor D \rfloor + 1) \left(\prod_{j=0}^{\lfloor D \rfloor} (D - j) \right)$.

Para o caso de $\Lambda = \mathbb{Z}^D$, a demonstração é a mesma até a equação (1.62):

$$\sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| \leq 2\|A\| \|X\| f(R) \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mu t - (r+k)/R} \sum_{x \in X} \sum_{\substack{w \in \Omega: \\ r+k < d(x,w) \leq r+k+1}} 1.$$

De (1.40), temos que $|\{w \in \Omega : r+k < d(x,w) \leq r+k+1\}| \leq 3^D (r+k+1)^{D-1}$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|[\tau_{t,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| &\leq 2\|A\| \|X\| f(R) \sum_{k=0}^{\infty} e^{\mu t - (r+k)/R} \sum_{x \in X} 3^D (r+k+1)^{D-1} \\ &\leq 2(3^D) \|A\| \|X\|^2 f(R) e^{\mu t} \sum_{k=0}^{\infty} (r+k+1)^{D-1} e^{-(r+k)/R}. \end{aligned}$$

Repetindo os mesmos passos, teremos como resultado a mesma cota anterior, tendo como única diferença $(r \vee R)^{D-1}$ no lugar de $(r \vee R)^D$ e a constante associada. \square

Voltando a demonstração do **Teorema 1.2**, enfim temos

$$\begin{aligned} &2\|B\| \int_0^t \sum_{Z \cap X_r = \emptyset} \|[\tau_{t-s,\Lambda}^{(<R)}(A), h_Z^{(\geq R)}]\| ds \\ &\leq 2\mathcal{C}_1 \|A\| \|B\| \|X\|^2 R (r \vee R)^D f(R) \int_0^t e^{\mu(t-s) - r/R} ds \\ &\leq 2\mathcal{C}_1 \|A\| \|B\| \|X\|^2 R (r \vee R)^D f(R) \int_0^t e^{\mu t - r/R} ds \\ &\leq 2\mathcal{C}_1 \|A\| \|B\| \|X\|^2 t R (r \vee R)^D f(R) e^{\mu t - r/R}. \end{aligned} \tag{1.64}$$

Juntando então (1.57), (1.60), (1.64) e o **Lema 1.1**, concluímos a demonstração do **Teorema 1.2**.

Capítulo 2

Aplicações

Vamos obter nesse capítulo aplicações para as cotas de Lieb-Robinson assumindo o caso de interações de curto alcance. Portanto, trataremos das redes em que vale a **Suposição 1.1** e a **Suposição 1.2** da **Seção 1.1**, tendo então como validade o **Teorema 1.1**.

2.1 Suporte Aproximado

Uma aplicação da cota se dá na estimativa do suporte efetivo da evolução de operadores. Vimos na **Seção 1.1.1** que existe uma velocidade efetiva máxima para a propagação de informação, v_Φ . É esperado então que o suporte da evolução temporal de um operador cresça efetivamente com uma velocidade menor que v_Φ . O crescimento desse suporte se dá no sentido do alargamento de um conjunto, **Definição 1.3**. Sendo assim, dado um operador $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com suporte em um conjunto $X \subset \Lambda$, vamos mostrar que existe um operador com suporte em $X_{v_\Phi t}$ que aproxima o operador $A_\Lambda(t)$.

Para definir tal operador usaremos a noção de traço parcial, tal como visto abaixo.

Definição 2.1. *Seja $Z \subset \Lambda$ e $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$, tal que $O = A \otimes B$, com $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_Z)$ e $B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{\Lambda \setminus Z})$. O traço parcial de O sobre Z^C é*

$$\text{Tr}_{Z^C}(O) = \text{Tr}(B)A.$$

Por linearidade, o traço parcial é definido para todo $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$.

Definição 2.2. *Para $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ e $Z \subset \Lambda$, $\Upsilon_Z(O)$ é definido por*

$$\Upsilon_Z(O) = \frac{1}{\text{Tr}(I_{Z^C})} \text{Tr}_{Z^C}(O) \otimes I_{Z^C}.$$

Pela definição, o suporte de $\Upsilon_Z(O)$ é subconjunto de Z e observe que se $O = O' \otimes I_{Z^c}$, então $\Upsilon_Z(O) = O$.

Vamos mostrar que $\Upsilon_{X_{v_{\Phi^t}}}(A_\Lambda(t))$ aproxima $A_\Lambda(t)$. Para isso precisaremos do conceito de medida de Haar.

Definição 2.3. *Sejam*

$$\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda) = \{U \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda) | UU^\dagger = I\}$$

o grupo das transformações unitárias em \mathcal{H}_Λ e \mathcal{A} a σ -álgebra de Borel nesse espaço topológico. A medida de Haar é definido como a medida $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo

1. $\mu(\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)) = 1$,
2. $\mu(U\mathcal{A}) = \mu(\mathcal{A}U) = \mu(\mathcal{A})$ para todo $\mathcal{A} \in \mathcal{A}$ e $U \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)$, onde $U\mathcal{A} = \{UO | O \in \mathcal{A}\}$ e $\mathcal{A}U = \{OU | O \in \mathcal{A}\}$.

Para uma construção completa da medida de Haar veja [13]. Temos então as seguintes proposições.

Proposição 2.1. *Se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$, então*

$$\int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} UAU^\dagger d\mu(U) = \frac{\text{Tr}(A)}{\text{Tr}(I_{\mathcal{H}_\Lambda})} I_{\mathcal{H}_\Lambda}.$$

Demonstração. Observe inicialmente que para $U_0 \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)$

$$\begin{aligned} U_0 \left(\int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} UAU^\dagger d\mu(U) \right) U_0^\dagger &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} U_0(UAU^\dagger)U_0^\dagger d\mu(U) \\ &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} (U_0U)A(U^\dagger U_0^\dagger) d\mu(U) \\ &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} (U_0U)A(U_0U)^\dagger d\mu(U) \\ &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} UAU^\dagger d\mu(U). \end{aligned}$$

A última igualdade segue do fato que, por definição, μ é invariante sobre transformações unitárias e que $U_0\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda) = \mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)$. Como o resultado vale para todo $U_0 \in \mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)$, temos que $\int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} UAU^\dagger d\mu(U) = cI_{\mathcal{H}_\Lambda}$ para algum $c \in \mathbb{R}$. Observe agora que

$$\begin{aligned} \text{Tr} \left(\int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} UAU^\dagger d\mu(U) \right) &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} \text{Tr}(UAU^\dagger) d\mu(U) \\ &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} \text{Tr}(U^\dagger UA) d\mu(U) \\ &= \text{Tr}(A) \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_\Lambda)} d\mu(U) = \text{Tr}(A). \end{aligned}$$

Portanto, $\text{Tr}(cI_{\mathcal{H}_\Lambda}) = \text{Tr}(A)$, logo

$$c = \frac{\text{Tr}(A)}{\text{Tr}(I_{\mathcal{H}_\Lambda})},$$

e com isso o resultado segue. \square

Proposição 2.2. *Se $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ e $Z \subset \Lambda$, então*

$$\int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_Z^c)} (I_Z \otimes U)A(I_Z \otimes U^\dagger)d\mu(U) = \Upsilon_Z(A) \quad (2.1)$$

Demonstração. Consideramos primeiro o caso em que $A = O \otimes P$, onde $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_Z)$ e $P \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_{Z^c})$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_{Z^c})} (I_Z \otimes U)(O \otimes P)(I_Z \otimes U^\dagger)d\mu(U) &= O \otimes \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_{Z^c})} UPU^\dagger d\mu(U) \\ &= O \otimes \frac{\text{Tr}(P)}{\text{Tr}(I_{Z^c})} I_{Z^c} \\ &= \frac{1}{\text{Tr}(I_{Z^c})} \text{Tr}_{Z^c}(O \otimes P) \otimes I_{Z^c} \\ &= \Upsilon_Z(A). \end{aligned}$$

Para o caso geral, basta observar que o lado esquerdo e direito de (2.1) são lineares em A , e que podemos tomar uma base para $\mathcal{L}(\mathcal{H}_Z \otimes \mathcal{H}_{Z^c})$ da forma $\{O_i \otimes P_j\}_{i,j}$. \square

Observe que, até agora, obtivemos resultados gerais de teoria da medida e álgebra linear, já na proposição abaixo vamos usar as cotas de Lieb-Robinson.

Proposição 2.3. *Dado $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$, t não nulo e $r > 0$, temos que*

$$\|A_\Lambda(t) - \Upsilon_{X_r}(A_\Lambda(t))\| \leq 2\|A\| |X| e^{\frac{1}{R}(\mu R|t| - r)}. \quad (2.2)$$

Demonstração. Segue da proposição anterior que

$$\begin{aligned}
 \|A_\Lambda(t) - \Upsilon_{X_r}(A_\Lambda(t))\| &= \left\| A_\Lambda(t) - \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_{X_r^C}^C)} (I_{X_r} \otimes U) A_\Lambda(t) (I_{X_r} \otimes U^\dagger) d\mu(U) \right\| \\
 &= \left\| \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_{X_r^C}^C)} [A_\Lambda(t) - (I_{X_r} \otimes U) A_\Lambda(t) (I_{X_r} \otimes U^\dagger)] d\mu(U) \right\| \\
 &\leq \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_{X_r^C}^C)} \|A_\Lambda(t) - (I_{X_r} \otimes U) A_\Lambda(t) (I_{X_r} \otimes U^\dagger)\| d\mu(U) \\
 &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_{X_r^C}^C)} \|[A_\Lambda(t)(I_{X_r} \otimes U) - (I_{X_r} \otimes U)A_\Lambda(t)](I_{X_r} \otimes U^\dagger)\| d\mu(U) \\
 &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_{X_r^C}^C)} \|[A_\Lambda(t), (I_{X_r} \otimes U)](I_{X_r} \otimes U^\dagger)\| d\mu(U) \\
 &= \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_{X_r^C}^C)} \|[A_\Lambda(t), (I_{X_r} \otimes U)]\| d\mu(U).
 \end{aligned}$$

Observe que $(I_{X_r} \otimes U)$ tem suporte em X_r^C , como $d(X, X_r^C) \geq r$. Usando as cotas de Lieb-Robinson, temos

$$\begin{aligned}
 \|A_\Lambda(t) - \Upsilon_{X_r}(A_\Lambda(t))\| &\leq \int_{\mathcal{U}(\mathcal{H}_{X_r^C}^C)} \|[A_\Lambda(t), (I_{X_r} \otimes U)]\| d\mu(U) \\
 &\leq 2\|A\|\|X\|e^{\frac{1}{R}(\mu R|t|-r)}.
 \end{aligned} \tag{2.3}$$

□

Escolhendo $r = v_\Phi|t| = (\mu R|t|)/\alpha$, temos que

$$\|A_\Lambda(t) - \Upsilon_{X_{v_\Phi|t|}}(A_\Lambda(t))\| \leq 2\|A\|\|X\|e^{-\frac{r}{R}(1-\alpha)}.$$

Por consequência, o módulo da diferença entre os dois operadores é exponencialmente pequena, sendo tão pequena quanto se queira desde que o valor α tenda a zero. Porém, diminuindo α , aumenta-se o tamanho do suporte de $\Upsilon_{X_{v_\Phi|t|}}(A_\Lambda(t))$.

2.2 Propagação de Correlações

A capacidade de aproximar a evolução por um operador com suporte fixado possibilita-nos estabelecer uma cota, sob a condição do estado inicial ser do tipo produto, para a evolução de correlações entre sistemas distantes.

Sejam $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com suporte em $X, Y \subset \Lambda$ respectivamente, onde $r = d(X, Y) > 0$ e seja $\psi = \otimes_{x \in \Lambda} \psi_x$ o estado inicial do sistema, com $|\psi_x| = 1$ para todo $x \in \Lambda$.

Observação 2.1. Note que, pelo fato de X e Y serem disjuntos, vale então

$$A = A_X \otimes I_Y \otimes I_{\Lambda'}$$

e

$$B = I_X \otimes B_Y \otimes I_{\Lambda'},$$

onde $\Lambda' = \Lambda \setminus (X \cup Y)$. Denotando $\psi_X = \otimes_{x \in X} \psi_x$, $\psi_Y = \otimes_{x \in Y} \psi_x$ e $\psi_{\Lambda'} = \otimes_{x \in \Lambda'} \psi_x$, temos $\psi = \psi_X \otimes \psi_Y \otimes \psi_{\Lambda'}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \langle \psi, AB\psi \rangle &= \langle (\psi_X \otimes \psi_Y \otimes \psi_{\Lambda'}), ((A_X \psi_X) \otimes (B_Y \psi_Y) \otimes \psi_{\Lambda'}) \rangle \\ &= \langle \psi_X, A_X \psi_X \rangle \langle \psi_Y, B_Y \psi_Y \rangle \langle \psi_{\Lambda'}, \psi_{\Lambda'} \rangle \\ &= \langle \psi_X, A_X \psi_X \rangle \langle \psi_Y, B_Y \psi_Y \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} \langle \psi, A\psi \rangle &= \langle (\psi_X \otimes \psi_Y \otimes \psi_{\Lambda'}), ((A_X \psi_X) \otimes \psi_Y \otimes \psi_{\Lambda'}) \rangle \\ &= \langle \psi_X, A_X \psi_X \rangle \end{aligned}$$

e de maneira análoga,

$$\langle \psi, B\psi \rangle = \langle \psi_Y, B_Y \psi_Y \rangle.$$

Com isso,

$$\langle \psi, A\psi \rangle \langle \psi, B\psi \rangle = \langle \psi_X, A_X \psi_X \rangle \langle \psi_Y, B_Y \psi_Y \rangle = \langle \psi, AB\psi \rangle.$$

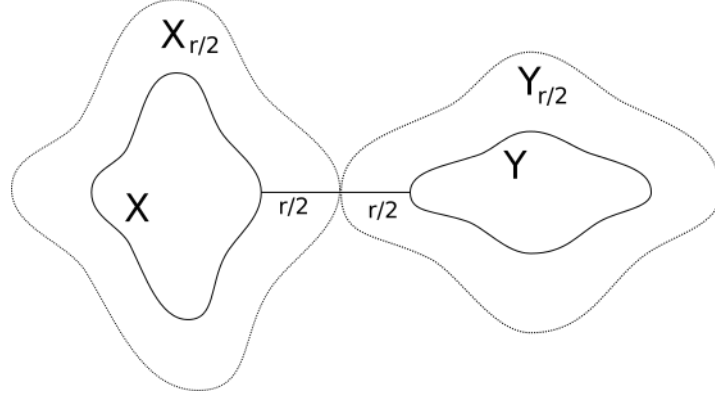
Lembrando que $\langle \psi, O\psi \rangle$ é o valor esperado do operador O , temos que

$$\langle \psi, AB\psi \rangle - \langle \psi, A\psi \rangle \langle \psi, B\psi \rangle$$

é a covariância (ou correlação) entre os observáveis representados por A e B .

Portanto, concluímos que não existe correlação inicial entre sistemas distantes. A priori, correlações podem ser criadas ao decorrer do tempo. Entretanto, o **Teorema 2.1** nos garante que essas correlações serão exponencialmente pequenas para intervalos de tempo curtos comparado com a distância entre os sistemas.

Para chegar em tal resultado faremos uma aproximação de $A_\Lambda(t)$ e $B_\Lambda(t)$ por operadores de suporte limitado. Observe que o $\frac{r}{2}$ -alargamento de X é disjunto ao $\frac{r}{2}$ -alargamento de Y .


 Figura 2.1: $r/2$ alargamento

Com isso, $\Upsilon_{X_{\frac{r}{2}}}(A_\Lambda(t))$ e $\Upsilon_{X_{\frac{r}{2}}}(B_\Lambda(t))$ possuem suporte disjuntos e portanto comutam. Definimos os operadores $E_A(t)$ e $E_B(t)$ pelas igualdades:

$$A_\Lambda(t) = \Upsilon_{X_{\frac{r}{2}}}(A_\Lambda(t)) + E_A(t), \quad (2.4)$$

$$B_\Lambda(t) = \Upsilon_{Y_{\frac{r}{2}}}(B_\Lambda(t)) + E_B(t). \quad (2.5)$$

Por (2.3), temos que

$$\|E_A(t)\| \leq 2\|A\|\|X\|e^{\frac{1}{R}(\mu R|t|-r/2)}, \quad (2.6)$$

$$\|E_B(t)\| \leq 2\|B\|\|Y\|e^{\frac{1}{R}(\mu R|t|-r/2)}. \quad (2.7)$$

Teorema 2.1. *Sejam $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com suporte em $X, Y \subset \Lambda$, onde $d = d(X, Y) > 0$, e seja $\psi = \otimes_{x \in \Lambda} \psi_x$, com $|\psi_x| = 1$ para todo $x \in \Lambda$, então*

$$|\langle \psi, A_\Lambda(t)B_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, B_\Lambda(t)\psi \rangle| \leq 12\|A\|\|B\|\|X\|\|Y\|e^{\frac{1}{R}(\mu R|t|-r/2)}.$$

Demonstração. Iremos denotar, por questão de praticidade, $\Upsilon_{X_{\frac{r}{2}}}(A_\Lambda(t))$ por $\tilde{A}_\Lambda(t)$ e $\Upsilon_{Y_{\frac{r}{2}}}(B_\Lambda(t))$ por $\tilde{B}_\Lambda(t)$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} & \langle \psi, A_\Lambda(t)B_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, B_\Lambda(t)\psi \rangle \\ &= \langle \psi, \tilde{A}_\Lambda(t)\tilde{B}_\Lambda(t)\psi \rangle + \langle \psi, \tilde{A}_\Lambda(t)E_B(t)\psi \rangle \\ &+ \langle \psi, E_A(t)\tilde{B}_\Lambda(t)\psi \rangle + \langle \psi, E_A(t)E_B(t)\psi \rangle \\ &- \langle \psi, \tilde{A}_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, \tilde{B}_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, \tilde{A}_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, E_B(t)\psi \rangle \\ &- \langle \psi, E_A(t)\psi \rangle \langle \psi, \tilde{B}_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, E_A(t)\psi \rangle \langle \psi, E_B(t)\psi \rangle. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como $\tilde{A}_\Lambda(t)$ e $\tilde{B}_\Lambda(t)$ possuem suportes disjuntos, segue da **Observação 2.1** que

$$\begin{aligned} \langle \psi, \tilde{A}_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, \tilde{B}_\Lambda(t)\psi \rangle &= \left\langle \psi_{X_{r/2}}, (\tilde{A}_\Lambda(t))_{X_{r/2}} \psi_{X_{r/2}} \right\rangle \left\langle \psi_{Y_{r/2}}, (\tilde{B}_\Lambda(t))_{Y_{r/2}} \psi_{Y_{r/2}} \right\rangle \\ &= \langle \psi, \tilde{A}_\Lambda(t)\tilde{B}_\Lambda(t)\psi \rangle. \end{aligned}$$

Cancelando os dois termos em (2.8), temos

$$\begin{aligned} &\langle \psi, A_\Lambda(t)B_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle \\ &= \langle \psi, \tilde{A}_\Lambda(t)E_B(t)\psi \rangle + \langle \psi, E_A(t)\tilde{B}_\Lambda(t)\psi \rangle \\ &+ \langle \psi, E_A(t)E_B(t)\psi \rangle - \langle \psi, \tilde{A}_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, E_B(t)\psi \rangle \\ &- \langle \psi, E_A(t)\psi \rangle \langle \psi, \tilde{B}_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, E_A(t)\psi \rangle \langle \psi, E_B(t)\psi \rangle. \end{aligned}$$

Usando desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} &|\langle \psi, A_\Lambda(t)B_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle| \\ &\leq |\langle \psi, \tilde{A}_\Lambda(t)E_B(t)\psi \rangle| + |\langle \psi, E_A(t)\tilde{B}_\Lambda(t)\psi \rangle| \\ &+ |\langle \psi, E_A(t)E_B(t)\psi \rangle| + |\langle \psi, \tilde{A}_\Lambda(t)\psi \rangle| |\langle \psi, E_B(t)\psi \rangle| \\ &+ |\langle \psi, E_A(t)\psi \rangle| |\langle \psi, \tilde{B}_\Lambda(t)\psi \rangle| + |\langle \psi, E_A(t)\psi \rangle| |\langle \psi, E_B(t)\psi \rangle|. \end{aligned}$$

Usando (1.8), temos

$$\begin{aligned} &|\langle \psi, A_\Lambda(t)B_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle| \\ &\leq \|\tilde{A}_\Lambda(t)E_B(t)\| + \|E_A(t)\tilde{B}_\Lambda(t)\| + \|E_A(t)E_B(t)\| \\ &+ \|\tilde{A}_\Lambda(t)\| \|E_B(t)\| + \|E_A(t)\| \|\tilde{B}_\Lambda(t)\| + \|E_A(t)\| \|E_B(t)\|. \end{aligned}$$

Usando (1.22), temos

$$\begin{aligned} &|\langle \psi, A_\Lambda(t)B_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle| \\ &\leq \|\tilde{A}_\Lambda(t)\| \|E_B(t)\| + \|E_A(t)\| \|\tilde{B}_\Lambda(t)\| + \|E_A(t)\| \|E_B(t)\| \\ &+ \|\tilde{A}_\Lambda(t)\| \|E_B(t)\| + \|E_A(t)\| \|\tilde{B}_\Lambda(t)\| + \|E_A(t)\| \|E_B(t)\| \\ &= 2\|\tilde{A}_\Lambda(t)\| \|E_B(t)\| + 2\|E_A(t)\| \|\tilde{B}_\Lambda(t)\| + 2\|E_A(t)\| \|E_B(t)\|. \end{aligned}$$

É fácil ver que $\|\tilde{A}_\Lambda(t)\| \leq \|A_\Lambda(t)\| = \|A\|$, analogamente $\|\tilde{B}_\Lambda(t)\| \leq \|B\|$. Usando também (2.6) e (2.7), temos

$$\begin{aligned} &|\langle \psi, A_\Lambda(t)B_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle| \\ &\leq 4\|A\| \|B\| \left(|Y| e^{\frac{1}{R}(\mu R|t|-r/2)} + |X| e^{\frac{1}{R}(\mu R|t|-r/2)} + |X| |Y| e^{\frac{2}{R}(\mu R|t|-r/2)} \right) \\ &\leq 4\|A\| \|B\| |X| |Y| \left(2e^{\frac{1}{R}(\mu R|t|-r/2)} + e^{\frac{2}{R}(\mu R|t|-r/2)} \right). \end{aligned}$$

Como $|t| \leq r/(2\mu R)$, vale que $e^{\frac{2}{R}(\mu R|t|-r/2)} \leq e^{\frac{1}{R}(\mu R|t|-r/2)}$, portanto

$$|\langle \psi, A_\Lambda(t)B_\Lambda(t)\psi \rangle - \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle \langle \psi, A_\Lambda(t)\psi \rangle| \leq 12\|A\|\|B\|\|X\| |Y| e^{\frac{1}{R}(\mu R|t|-r/2)}.$$

□

2.3 Decaimento de Correlações

Um dos problemas básicos estudados em mecânica quântica de muitos corpos consiste de encontrar as propriedades do estado fundamental de um dado Hamiltoniano. A particularidade que estudaremos nesse capítulo é a correlação entre observáveis de sítios distintos.

Em teoria quântica relativística já é conhecido que a existência de um gap de energia implica em decaimento exponencial de correlações. Em [14], Fredenhagen prova um teorema de decaimento de correlações aplicável a qualquer teoria estritamente local. A localidade estrita, isto é, o fato de observáveis separados no espaço comutarem, é a condição essencial do teorema. Já vimos que modelos quânticos de muitos corpos não são estritamente locais, porém possuem uma velocidade finita de propagação da informação a menos de correções exponencialmente pequenas. Usando essas cotas, Hastings em [6] obteve o decaimento exponencial de correlações para Hamiltonianos com gap.

Nesse capítulo, veremos uma versão um pouco mais geral do teorema de decaimento de correlações, também obtida por Hastings em [7]. Antes da demonstração do resultado veremos, com mais detalhes, sua aplicação ao modelo de Ising com campo transversal, tal como é visto em [15].

2.3.1 Modelos e Resultados

Teremos, para essa seção, a condição adicional da existência de um gap uniforme tal como a **Definição 2.4**.

Definição 2.4. *Dizemos que existe um gap uniforme acima do setor fundamental se o espectro $\sigma(H_\Lambda)$ do Hamiltoniano H_Λ satisfaz as seguintes condições:*

1. *O estado fundamental do Hamiltoniano H_Λ é quase-degenerado no sentido que existem q autovalores $E_{0,1}, \dots, E_{0,q}$, na parte inferior do espectro de H_Λ , tal que*

$$\Delta\varepsilon := \max_{\mu,\nu} \{|E_{0,\mu} - E_{0,\nu}|\} \rightarrow 0 \quad \text{se} \quad |\Lambda| \rightarrow \infty.$$

Chamaremos de *setor fundamental* esse conjunto de autoenergias. É necessário ainda que a quantidade de elementos no setor fundamental seja limitada por um natural Q , para todo Λ .

2. A distância entre o resto do espectro, $\sigma(H_\Lambda) \setminus \{E_{0,1}, \dots, E_{0,q}\}$, e a maior autoenergia do setor fundamental é maior que uma constante positiva ΔE que independe do tamanho do conjunto Λ . Dizemos que existe um *gap espectral* ΔE acima do setor fundamental.

O próximo teorema fornece uma estimativa para o decaimento das correlações espaciais em sistemas com gap espectral.

Teorema 2.2. *Sejam $X, Y \subset \Lambda$, $A, B \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ com suporte em X, Y respectivamente e $r = d(X, Y)$. Assumimos que existe um gap espectral uniforme $\Delta E > 0$ acima do setor fundamental. Seja Φ um vetor normalizado no autoespaço do setor fundamental e seja P_0 a projeção nesse subespaço. Então, a seguinte cota é válida:*

$$\left| \langle \Phi, AB\Phi \rangle - \frac{1}{2} (\langle \Phi, AP_0B\Phi \rangle + \langle \Phi, BP_0A\Phi \rangle) \right| \leq \|A\| \|B\| (C_1(r)e^{-\lambda r} + C_2\sqrt{r}\Delta\varepsilon),$$

onde $C_1 \leq K\frac{1}{\sqrt{r}}$, sendo K, λ e C_2 constantes positivas que independem de A, B e Λ .

Observação 2.2. *Se $|\Lambda| \rightarrow \infty$, então pela hipótese do gap uniforme, $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$. Portanto, temos essencialmente um decaimento exponencial com a distância r entre os operadores.*

Para o caso onde o setor fundamental se reduz a apenas um autovalor, temos que $P_0 = \Phi_0\Phi_0^*$, onde Φ_0 é o estado fundamental e Φ_0^* é o funcional linear dual a Φ_0 , ou seja, $\Phi_0\Phi_0^*(\psi) = \langle \Phi_0, \psi \rangle \Phi_0$. Com isso

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0, AP_0B\Phi_0 \rangle &= \langle \Phi_0, A(\Phi_0\Phi_0^*)B\Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, (\Phi_0^*(B\Phi_0))A\Phi_0 \rangle \\ &= \langle \Phi_0, A\Phi_0 \rangle (\Phi_0^*(B\Phi_0)) = \langle \Phi_0, A\Phi_0 \rangle \langle \Phi_0, B\Phi_0 \rangle. \end{aligned}$$

Com contas análogas vale que $\langle \Phi_0, BP_0A\Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, A\Phi_0 \rangle \langle \Phi_0, B\Phi_0 \rangle$. Sendo assim, o teorema anterior se reduz a

$$|\langle \Phi_0, AB\Phi_0 \rangle - \langle \Phi_0, A\Phi_0 \rangle \langle \Phi_0, B\Phi_0 \rangle| \leq \|A\| \|B\| (C_1(r)e^{-\lambda r} + C_2\sqrt{r}\Delta\varepsilon). \quad (2.9)$$

Antes de esboçar a prova desse teorema vamos discutir uma de suas aplicações. Consideramos o modelo de Ising com campo transversal, **Exemplo 1.1.** Em [16] é feita a diagonalização analítica de seu Hamiltoniano fornecendo uma discussão completa de seu estado fundamental no caso de

um sistema finito. Entre os resultados obtidos concluiu-se que na fase paramagnética, $|g| > 1$, o sistema possui um único estado fundamental com um gap para o resto do espectro. Portanto, por (2.9), a correlação entre dois operadores quaisquer decai exponencialmente com a distância entre eles.

Por outro lado, a fase ferromagnética, $|g| < 1$, possui dois elementos no setor fundamental. Para $g = 0$, o sistema possui uma degenerescência exata no estado fundamental, correspondendo ao estado onde todos os spins estão apontando para a cima (o estado que é autovetor de σ_i^z com autovalor 1 para todo $i \in \{1, \dots, N\}$) e ao estado onde todos os spins estão apontando para a baixo (o estado que é autovetor de σ_i^z com autovalor -1 para todo $i \in \{1, \dots, N\}$). Para $|g| > 0$, porém com $|g| < 1$, surge uma pequena diferença (da ordem de $\frac{e^{-N/\xi}}{\sqrt{N}}$, onde $\xi \sim \frac{1}{|\ln(|g|)|}$) entre as duas mais baixas autoenergias, enquanto que continua havendo um gap para o resto do espectro.

Tal sistema possui uma simetria rotacional com respeito ao eixo x . Para ver isso, observe que o hamiltoniano comuta com o operador $U = \prod_{j=1}^N \sigma_j^x$. Com efeito, pela **Observação 1.1**, vale que $\sigma_k^\alpha \sigma_j^\beta = \sigma_j^\beta \sigma_k^\alpha$ se $k \neq j$ para qualquer $\alpha, \beta \in \{x, y, z\}$. Portanto, o produto $\prod_{j=1}^N \sigma_j^x$ pode ser feito em qualquer ordenação desejada. Como os operadores σ_j^x são auto-adjuntos e unitários, vale que U é unitária e auto-adjunta. Observe agora que

$$\begin{aligned} U \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z &= \left(\prod_{j=1}^N \sigma_j^x \right) \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k+1}}^N \sigma_j^x \right) (\sigma_k^x \sigma_k^z) (\sigma_{k+1}^x \sigma_{k+1}^z) \\ &= \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k+1}}^N \sigma_j^x \right) (i \sigma_k^y) (i \sigma_{k+1}^y) = - \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k+1}}^N \sigma_j^x \right) \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y \end{aligned}$$

onde usamos que $(\sigma_k^x \sigma_k^z) = i \sigma_k^y$. Por outro lado,

$$\begin{aligned} \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z U &= \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z \left(\prod_{j=1}^N \sigma_j^x \right) = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k+1}}^N \sigma_j^x \right) (\sigma_k^x \sigma_k^z) (\sigma_{k+1}^x \sigma_{k+1}^z) \\ &= - \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k, k+1}}^N \sigma_j^x \right) \sigma_k^y \sigma_{k+1}^y = U \sigma_k^z \sigma_{k+1}^z. \end{aligned}$$

De maneira análoga,

$$U \sigma_N^z \sigma_1^z = - \left(\prod_{j=2}^{N-1} \sigma_j^x \right) \sigma_N^y \sigma_1^y = \sigma_N^z \sigma_1^z U.$$

No entanto,

$$U\sigma_k^x = \left(\prod_{j=1}^N \sigma_j^x \right) \sigma_k^x = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \sigma_j^x \right) (\sigma_k^x)^2 = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \sigma_j^x \right) = (\sigma_k^x)^2 \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \sigma_j^x \right) = \sigma_k^x U,$$

onde usamos que $(\sigma_k^x)^2 = I$. Logo, vale que $UH = HU$, ou seja, H e U comutam. Portanto, existe uma base ortonormal de autovetores em comum a ambos operadores.

Já vimos que H possui duas baixas energias com um gap para o resto do espectro. Seja então Φ_0 autovetor na base em comum a H e U , sendo que Φ_0 tem associado a menor autoenergia de H , e analogamente Φ_1 o autovetor na base comum, associado a segunda menor energia de H . Como Φ_0 é autovetor de U , vale que $U\Phi_0 = (\pm 1)\Phi_0$. Consideramos agora um operador local tal como σ_k^z , vamos analisar a ação desse operador no setor fundamental. Aplicando o **Teorema 2.2**, temos que

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Phi_0, \sigma_k^z \sigma_l^z \Phi_0 \rangle - \frac{1}{2} [\langle \Phi_0, \sigma_k^z P_0 \sigma_l^z \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0, \sigma_l^z P_0 \sigma_k^z \Phi_0 \rangle] \right| \\ &= \left| \langle \Phi_0, \sigma_k^z \sigma_l^z \Phi_0 \rangle - \langle \Phi_0, \sigma_k^z \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0, \sigma_l^z \Phi_0 \rangle \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2} [\langle \Phi_0, \sigma_k^z \Phi_1 \rangle \langle \Phi_1, \sigma_l^z \Phi_0 \rangle + \langle \Phi_0, \sigma_l^z \Phi_1 \rangle \langle \Phi_1, \sigma_k^z \Phi_0 \rangle] \right| \\ & \leq C_1 (|k-l|) e^{-\lambda|k-l|} + C_2 \sqrt{|k-l|} \Delta \varepsilon. \end{aligned}$$

Observe agora que

$$\begin{aligned} \langle \Phi_0, \sigma_k^z \Phi_0 \rangle &= (\pm 1)(\pm 1) \langle \Phi_0, \sigma_k^z \Phi_0 \rangle = \langle \pm \Phi_0, \sigma_k^z (\pm \Phi_0) \rangle = \langle U\Phi_0, \sigma_k^z U\Phi_0 \rangle \\ &= \langle \Phi_0, U^\dagger \sigma_k^z U\Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, U\sigma_k^z U\Phi_0 \rangle. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} U\sigma_k^z U &= \left(\prod_{j=1}^N \sigma_j^x \right) \sigma_k^z \left(\prod_{j=1}^N \sigma_j^x \right) = \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \sigma_j^x \right) \sigma_k^x \sigma_k^z \sigma_k^x \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N \sigma_j^x \right) \\ &= \sigma_k^x \sigma_k^z \sigma_k^x \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^N (\sigma_j^x)^2 \right) = \sigma_k^x \sigma_k^z \sigma_k^x = \sigma_k^x (i\sigma_k^y) = -\sigma_k^z. \end{aligned}$$

Com isso,

$$\langle \Phi_0, \sigma_k^z \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, -\sigma_k^z \Phi_0 \rangle = -\langle \Phi_0, \sigma_k^z \Phi_0 \rangle,$$

logo, $\langle \Phi_0, \sigma_k^z \Phi_0 \rangle = 0$. De maneira completamente análoga, mostra-se que $\langle \Phi_1, \sigma_k^z \Phi_1 \rangle = 0$. Já para os termos cruzados, temos que

$$\langle \Phi_0, \sigma_k^z \Phi_1 \rangle = m = \langle \Phi_1, \sigma_k^z \Phi_0 \rangle,$$

onde m é o “parâmetro de ordem”. Em [15] mostra-se que esse parâmetro satisfaz $0 < m < 1$, para $0 < |g| < 1$. Ou seja,

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Phi_0, \sigma_k^z \sigma_l^z \Phi_0 \rangle - \langle \Phi_0, \sigma_k^z \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0, \sigma_l^z \Phi_0 \rangle - m^2 \right| \\ & \leq \left(C_1 (|k-l|) e^{-\lambda|k-l|} + C_2 \sqrt{|k-l|} \Delta \varepsilon \right) \end{aligned}$$

Com isso, $\left| \langle \Phi_0, \sigma_k^z \sigma_l^z \Phi_0 \rangle - \langle \Phi_0, \sigma_k^z \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0, \sigma_l^z \Phi_0 \rangle \right|$ se aproxima de m^2 tomando $d(k, l)$ e $|\Lambda|$ grandes o suficiente. Temos portanto correlações de longo alcance espacial para os operadores σ_i^z, σ_j^z .

2.3.2 Demonstração do Teorema 2.2

Caso simples

Antes de demonstrar o **Teorema 2.2** com detalhes, vamos dar um esboço da demonstração para o caso em que o setor fundamental é composto de apenas um elemento, ou seja, o Hamiltoniano tem um gap entre o estado fundamental para o resto do espectro. Seja $\{\Phi_n\}_{n=0}^l$ uma base ortonormal de autovetores do Hamiltoniano com autoenergias $\{E_n\}_{n=0}^l$, onde Φ_0 é estado de menor energia. Dado um operador $O \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$, denotaremos $\langle \Phi_n, O \Phi_m \rangle$ por $O_{n,m}$. Sendo assim,

$$\langle \Phi_0, AB \Phi_0 \rangle - \langle \Phi_0, A \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0, B \Phi_0 \rangle = \sum_{n=0}^l A_{0,n} B_{n,0} - A_{0,0} B_{0,0} = \sum_{n=1}^l A_{0,n} B_{n,0}. \quad (2.10)$$

Por outro lado, temos que

$$\langle \Phi_0, [A_\Lambda(t), B] \Phi_0 \rangle = \langle \Phi_0, A_\Lambda(t) B \Phi_0 \rangle - \langle \Phi_0, B A_\Lambda(t) \Phi_0 \rangle \quad (2.11)$$

$$= \sum_{n=1}^l A_{0,n} B_{n,0} e^{-i(E_n - E_0)t} - \sum_{n=1}^l B_{0,n} A_{n,0} e^{-i(E_0 - E_n)t}. \quad (2.12)$$

Definimos o seguinte filtro,

$$\mathcal{F}_\alpha(f(t)) = \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{f(t) e^{-\alpha t^2}}{t + i\epsilon} dt,$$

onde α é um parametro positivo a ser escolhido a posteriori. Mostra-se que

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha(e^{-iEt}) &= 1 + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\Delta E^2}{\alpha}}\right) \text{ se } E \geq \Delta E, \\ \mathcal{F}_\alpha(e^{-iEt}) &= \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\Delta E^2}{\alpha}}\right) \text{ se } E \leq -\Delta E.\end{aligned}$$

Aplicando o filtro em ambos os lados de (2.11) e lembrando que pela suposição do gap espectral, $E_n - E_0 \geq \Delta E$ para todo $n \in \{1, \dots, l\}$, obtemos

$$\mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi_0, [A_\Lambda(t), B] \Phi_0 \rangle) = \sum_{n=1}^l A_{0,n} B_{n,0} + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\Delta E^2}{\alpha}}\right).$$

Aplicando (2.10),

$$\langle \Phi_0, AB\Phi_0 \rangle - \langle \Phi_0, A\Phi_0 \rangle \langle \Phi_0, B\Phi_0 \rangle = \mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi_0, [A_\Lambda(t), B] \Phi_0 \rangle) + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\Delta E^2}{\alpha}}\right). \quad (2.13)$$

Para estimar $\mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi_0, [A_\Lambda(t), B] \Phi_0 \rangle)$, separamos a integral em dois intervalos e cotamos $\langle \Phi_0, [A_\Lambda(t), B] \Phi_0 \rangle$ por $\|[A_\Lambda(t), B]\|$

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi_0, [A_\Lambda(t), B] \Phi_0 \rangle) &\leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^{cr} \frac{\|[A_\Lambda(t), B]\| e^{-\alpha t^2}}{t + i\epsilon} dt \\ &\quad + \lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{cr}^{\infty} \frac{\|[A_\Lambda(t), B]\| e^{-\alpha t^2}}{t + i\epsilon} dt.\end{aligned}$$

sendo c uma constante positiva. Para a primeira integral, estimamos $\|[A_\Lambda(t), B]\|$ usando as cotas de Lieb-Robinson, **Teorema 1.1**. Com isso, obtemos que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_0^{cr} \frac{\|[A_\Lambda(t), B]\| e^{-\alpha t^2}}{t + i\epsilon} dt = \mathcal{O}(e^{-r}).$$

Já para a segunda integral, cotamos $\|[A_\Lambda(t), B]\|$ por $2\|A\|\|B\|$ e usamos o decaimento da função $e^{-\alpha t^2}$ para garantir que

$$\lim_{\epsilon \downarrow 0} \int_{cr}^{\infty} \frac{\|[A_\Lambda(t), B]\| e^{-\alpha t^2}}{t + i\epsilon} dt = \mathcal{O}\left(\frac{e^{-\alpha r^2}}{\sqrt{r}}\right). \quad (2.14)$$

Voltando a (2.13), temos

$$\langle \Phi_0, AB\Phi_0 \rangle - \langle \Phi_0, A\Phi_0 \rangle \langle \Phi_0, B\Phi_0 \rangle = \mathcal{O}(e^{-r}) + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-\alpha r^2}}{\sqrt{r}}\right) + \mathcal{O}\left(e^{-\frac{\Delta E}{\alpha}}\right).$$

Escolhendo $\alpha = \frac{\Delta E}{r}$, obtemos

$$\langle \Phi_0, AB\Phi_0 \rangle - \langle \Phi_0, A\Phi_0 \rangle \langle \Phi_0, B\Phi_0 \rangle = \mathcal{O}(e^{-r}) + \mathcal{O}\left(\frac{e^{-r\Delta E}}{\sqrt{r}}\right) + \mathcal{O}(e^{-r}),$$

concluindo assim o Teorema.

Caso geral

As principais ferramentas usadas na demonstração serão o **Lema 2.1** a seguir e o **Teorema 1.1** visto no **Capítulo 1**. A cota da função de correlação estática pode ser obtida através da função de correlação dependente do tempo.

Note que, $I = (I - P_0) + P_0$. Com isso, o comutador pode ser expresso como:

$$\begin{aligned} [A_\Lambda(t), B] &= A_\Lambda(t)B - BA_\Lambda(t) = A_\Lambda(t)IB - BIA_\Lambda(t) \\ &= A_\Lambda(t)(I - P_0)B + A_\Lambda(t)P_0B \\ &\quad - B(I - P_0)A_\Lambda(t) - BP_0A_\Lambda(t). \end{aligned}$$

Portanto, usando a linearidade do produto interno, para Φ no setor fundamental,

$$\begin{aligned} \langle \Phi, [A_\Lambda(t), B]\Phi \rangle &= \langle \Phi, A_\Lambda(t)(I - P_0)B\Phi \rangle - \langle \Phi, B(I - P_0)A_\Lambda(t)\Phi \rangle \\ &\quad + \langle \Phi, A_\Lambda(t)P_0B\Phi \rangle - \langle \Phi, BP_0A_\Lambda(t)\Phi \rangle. \end{aligned} \quad (2.15)$$

Seja $\{\Phi_{0,\nu} | \nu = 1, \dots, q\}$ uma base ortonormal de autovetores de H_Λ para o autoespaço do setor fundamental tendo $E_{0,\nu}$ como as autoenergias associadas. Seja Φ_n os autoestados excitados com autoenergia E_n . Como Φ pertence ao autoespaço do setor fundamental, existe $\{a_\nu \in \mathbb{C} | \nu = 1, \dots, q\}$ tal que $\Phi = \sum_{\nu=1}^q a_\nu \Phi_{0,\nu}$. Sendo assim, temos

$$\begin{aligned} \langle \Phi, A_\Lambda(t)(I - P_0)B\Phi \rangle &= \left\langle \sum_{\nu=1}^q a_\nu \Phi_{0,\nu}, e^{itH_\Lambda} A e^{-itH_\Lambda} (I - P_0)B\Phi \right\rangle \\ &= \sum_{\nu=1}^q a_\nu^* \langle e^{-itH_\Lambda} \Phi_{0,\nu}, A e^{-itH_\Lambda} (I - P_0)B\Phi \rangle. \end{aligned}$$

Lembrando que P_0 é a projeção no autoespaço do setor fundamental portanto, $P_0 = \sum_{\nu=1}^q \Phi_{0,\nu} \Phi_{0,\nu}^*$. Usando que os autovetores de H_Λ formam uma base ortonormal de \mathcal{H}_Λ , vale então que $I = \sum_{\nu=1}^q \Phi_{0,\nu} \Phi_{0,\nu}^* + \sum_n \Phi_n \Phi_n^*$ e $(I - P_0) = \sum_n \Phi_n \Phi_n^*$. Sendo assim,

$$\langle \Phi, A_\Lambda(t)(I - P_0)B\Phi \rangle = \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle e^{-itH_\Lambda} \Phi_{0,\nu}, A e^{-itH_\Lambda} \Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle.$$

Lembrando também que, por definição, se O é um operador em $\mathcal{L}(\mathcal{H}_\Lambda)$ então $e^O = \sum_{i=0}^{\infty} O^i / (i!)$. Se ψ é um autovetor de O com autovalor λ , então

$$e^O \psi = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{O^i(\psi)}{i!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \psi = e^\lambda \psi. \quad (2.16)$$

Com isso, obtemos que

$$\langle \Phi, A_\Lambda(t)(I - P_0)B\Phi \rangle = \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle e^{-it(E_n - E_{0,\nu})}. \quad (2.17)$$

De maneira análoga, vale que

$$\langle \Phi, B(I - P_0)A_\Lambda(t)\Phi \rangle = \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu \langle \Phi, B\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, A\Phi_{0,\nu} \rangle e^{it(E_n - E_{0,\nu})}, \quad (2.18)$$

$$\langle \Phi, A_\Lambda(t)P_0B\Phi \rangle = \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_{0,\mu} \rangle \langle \Phi_{0,\mu}, B\Phi \rangle e^{-it(E_{0,\mu} - E_{0,\nu})} \quad (2.19)$$

e

$$\langle \Phi, BP_0A_\Lambda(t)\Phi \rangle = \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu \langle \Phi, B\Phi_{\mu,0} \rangle \langle \Phi_{\mu,0}, A\Phi_{0,\nu} \rangle e^{it(E_{0,\mu} - E_{0,\nu})}. \quad (2.20)$$

Usaremos o lema a seguir para estimar a contribuição das exponenciais complexas encontradas em cada termo. Definimos primeiro o seguinte filtro.

Definição 2.5. Dado $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, definimos

$$\mathcal{F}_\alpha(f(t)) = \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{f(t)e^{-\alpha t^2}}{t + i\epsilon} dt.$$

Observe que o filtro é linear, devido a lineariedade da integral.

Lema 2.1. Seja $E \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$. Então

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha(e^{-iEt}) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{E}{\sqrt{4\alpha}}} e^{-\omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{E}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega. \end{aligned}$$

Pelo lema anterior vemos que o filtro está bem definido para a função exponencial complexa, que será o exemplo a ser tratado no texto. A demonstração desse lema é feita no **Apêndice B**. Aplicando o filtro em (2.15), temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi, [A_\Lambda(t), B]\Phi \rangle) &= \mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi, A_\Lambda(t)(I - P_0)B\Phi \rangle) \\ &\quad - \mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi, B(I - P_0)A_\Lambda(t)\Phi \rangle) + \mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi, A_\Lambda(t)P_0B\Phi \rangle) \\ &\quad - \mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi, BP_0A_\Lambda(t)\Phi \rangle), \end{aligned} \quad (2.21)$$

para α um parametro positivo a ser determinado a posteriori, usando (2.17) e o Lema 2.1, temos que

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha (\langle \Phi, A_\Lambda(t)(I - P_0)B\Phi \rangle) &= \\ &= \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle \mathcal{F}_\alpha (e^{-it(E_n - E_{0,\nu})}) \\ &= \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}} e^{-\omega^2} d\omega. \end{aligned}$$

Mas

$$1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}} e^{-\omega^2} d\omega + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega,$$

portanto

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha (\langle \Phi, A_\Lambda(t)(I - P_0)B\Phi \rangle) &= \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega. \end{aligned}$$

Mas de (2.17), para o caso de $t = 0$, temos que

$$\langle \Phi, A(I - P_0)B\Phi \rangle = \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle.$$

Consequentemente,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha (\langle \Phi, A_\Lambda(t)(I - P_0)B\Phi \rangle) &= \langle \Phi, A(I - P_0)B\Phi \rangle \\ &\quad - \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega. \end{aligned} \quad (2.22)$$

Agora, de (2.18), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha (\langle \Phi, B(I - P_0)A_\Lambda(t)\Phi \rangle) &= \\ &= \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu \langle \Phi, B\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, A\Phi_{0,\nu} \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Enquanto que, de (2.19), temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_\alpha (\langle \Phi, A_\Lambda(t)P_0B\Phi \rangle) &= \\ &= \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_{0,\mu} \rangle \langle \Phi_{0,\mu}, B\Phi \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\nu} - E_{0,\mu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Por fim, de (2.20), temos

$$\begin{aligned} & \mathcal{F}_\alpha (\langle \Phi, BP_0 A_\Lambda(t) \Phi \rangle) \\ &= \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu \langle \Phi, B\Phi_{\mu,0} \rangle \langle \Phi_{\mu,0}, A\Phi_{0,\nu} \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\mu}-E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega. \end{aligned} \quad (2.25)$$

Portanto, juntando (2.22), (2.23), (2.24), (2.25) com (2.21), segue que

$$\begin{aligned} & \langle \Phi, A(I - P_0)B\Phi \rangle \\ &= \mathcal{F}_\alpha (\langle \Phi, [A_\Lambda(t), B]\Phi \rangle) \\ &+ \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n-E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \\ &+ \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu \langle \Phi, B\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, A\Phi_{0,\nu} \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n-E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \\ &- \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_{0,\mu} \rangle \langle \Phi_{0,\mu}, B\Phi \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\nu}-E_{0,\mu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \\ &+ \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu \langle \Phi, B\Phi_{\mu,0} \rangle \langle \Phi_{\mu,0}, A\Phi_{0,\nu} \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\mu}-E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega. \end{aligned} \quad (2.26)$$

De (2.19), para o caso $t = 0$, temos que

$$\langle \Phi, AP_0 B\Phi \rangle = \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_{0,\mu} \rangle \langle \Phi_{0,\mu}, B\Phi \rangle,$$

e de (2.20), também para o caso de $t = 0$, vale que

$$\langle \Phi, BP_0 A\Phi \rangle = \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu \langle \Phi, B\Phi_{\mu,0} \rangle \langle \Phi_{\mu,0}, A\Phi_{0,\nu} \rangle.$$

Sendo assim, somando $\frac{1}{2}(\langle \Phi, AP_0 B\Phi \rangle - \langle \Phi, BP_0 A\Phi \rangle)$ em ambos os lados de

(2.26) e agrupando com os termos da direita, obtemos

$$\begin{aligned}
& \langle \Phi, A(I - P_0)B\Phi \rangle + \frac{1}{2}(\langle \Phi, AP_0B\Phi \rangle - \langle \Phi, BP_0A\Phi \rangle) \\
&= \mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi, [A_\Lambda(t), B]\Phi \rangle) \\
&+ \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \\
&+ \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu \langle \Phi, B\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, A\Phi_{0,\nu} \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \\
&+ \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_{0,\mu} \rangle \langle \Phi_{0,\mu}, B\Phi \rangle \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\nu} - E_{0,\mu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right) \\
&+ \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu \langle \Phi, B\Phi_{\mu,0} \rangle \langle \Phi_{\mu,0}, A\Phi_{0,\nu} \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\mu} - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega - \frac{1}{2} \right).
\end{aligned}$$

Sendo assim, usando desigualdade triangular, temos

$$\begin{aligned}
& \left| \langle \Phi, AB\Phi \rangle - \frac{1}{2}(\langle \Phi, AP_0B\Phi \rangle + \langle \Phi, BP_0A\Phi \rangle) \right| \\
&\leq |\mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi, [A_\Lambda(t), B]\Phi \rangle)| \\
&+ \left| \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right| \\
&+ \left| \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu \langle \Phi, B\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, A\Phi_{0,\nu} \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right| \\
&+ \left| \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_{0,\mu} \rangle \langle \Phi_{0,\mu}, B\Phi \rangle \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\nu} - E_{0,\mu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right) \right| \\
&+ \left| \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu \langle \Phi, B\Phi_{\mu,0} \rangle \langle \Phi_{\mu,0}, A\Phi_{0,\nu} \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\mu} - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega - \frac{1}{2} \right) \right|.
\end{aligned}$$

Sejam então,

$$\begin{aligned}
J_1 &= |\mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi, [A_\Lambda(t), B]\Phi \rangle)|, \\
J_2 &= \left| \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, B\Phi \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right|, \\
J_3 &= \left| \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu \langle \Phi, B\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, A\Phi_{0,\nu} \rangle \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right|, \\
J_4 &= \left| \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu^* \langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_{0,\mu} \rangle \langle \Phi_{0,\mu}, B\Phi \rangle \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\nu} - E_{0,\mu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right) \right|
\end{aligned}$$

e

$$J_5 = \left| \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q a_\nu \langle \Phi, B\Phi_{\mu,0} \rangle \langle \Phi_{\mu,0}, A\Phi_{0,\nu} \rangle \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\mu}-E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega - \frac{1}{2} \right) \right|,$$

de forma que,

$$\left| \langle \Phi, AB\Phi \rangle - \frac{1}{2} (\langle \Phi, AP_0B\Phi \rangle + \langle \Phi, BP_0A\Phi \rangle) \right| \leq J_1 + J_2 + J_3 + J_4 + J_5. \quad (2.27)$$

Vamos estimar os J 's separadamente, começando por J_4 e J_5 . Usando desigualdade triangular, temos que

$$\begin{aligned} J_4 &\leq \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q |a_\nu^*| |\langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_{0,\mu} \rangle| |\langle \Phi_{0,\mu}, B\Phi \rangle| \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\nu}-E_{0,\mu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right| \\ &\leq \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q |\langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_{0,\mu} \rangle| |\langle \Phi_{0,\mu}, B\Phi \rangle| \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\nu}-E_{0,\mu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right|. \end{aligned}$$

Sendo que na última desigualdade usamos que $|a_\nu^*| \leq 1$ para todo ν , que decorre do fato que a_ν são as coordenadas do vetor normalizado Φ com respeito ao conjunto ortonormal $\{\Phi_{0,\nu}\}_{\nu=1}^q$. Por (1.8), vale que $|\langle \Phi_{0,\nu}, A\Phi_{0,\mu} \rangle| \leq \|A\|$ e $|\langle \Phi_{0,\mu}, B\Phi \rangle| \leq \|B\|$, portanto

$$J_4 \leq \|A\| \|B\| \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\nu}-E_{0,\mu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right|. \quad (2.28)$$

Como

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^0 e^{-\omega^2} d\omega = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \frac{1}{2},$$

temos que,

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\nu}-E_{0,\mu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right| &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{|E_{0,\nu}-E_{0,\mu}|}{\sqrt{4\alpha}}} e^{-\omega^2} d\omega \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{|E_{0,\nu}-E_{0,\mu}|}{\sqrt{4\alpha}}} d\omega \\ &= \frac{|E_{0,\nu} - E_{0,\mu}|}{\sqrt{4\pi\alpha}}. \end{aligned}$$

Lembrando que estamos sobre a condição de um gap uniforme, portanto $|E_{0,\mu} - E_{0,\nu}| \leq \Delta\varepsilon$, onde $\Delta\varepsilon \rightarrow 0$ se $|\Lambda| \rightarrow \infty$. Com isso,

$$\left| \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_{0,\nu}-E_{0,\mu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right| \leq \frac{\Delta\varepsilon}{\sqrt{4\pi\alpha}}.$$

Vontando então a (2.28):

$$\begin{aligned}
 J_4 &\leq \frac{\Delta\varepsilon\|A\|\|B\|}{\sqrt{4\pi\alpha}} \sum_{\nu=1}^q \sum_{\mu=1}^q 1 \\
 &= \frac{\Delta\varepsilon\|A\|\|B\|}{\sqrt{4\pi\alpha}} q^2 \\
 &\leq \frac{\Delta\varepsilon\|A\|\|B\|}{\sqrt{4\pi\alpha}} Q^2.
 \end{aligned} \tag{2.29}$$

A última desigualdade segue do fato que q é limitado por Q , independente do tamanho de Λ . Com contas análogas, temos que

$$J_5 \leq \frac{\Delta\varepsilon\|A\|\|B\|}{\sqrt{4\pi\alpha}} Q^2. \tag{2.30}$$

Vamos estimar agora J_2 e J_3 . Vamos denotar, por questão de praticidade, $\gamma_{n,\nu} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{E_n - E_{0,\nu}}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega$. Observe que $\gamma_{n,\nu} > 0$ para todo n e para todo ν . Substituindo na definição de J_3 , obtemos

$$\begin{aligned}
 J_3 &= \left| \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu \langle \Phi, B\Phi_n \rangle \langle \Phi_n, A\Phi_{0,\nu} \rangle \gamma_{n,\nu} \right| \\
 &= \left| \sum_{\nu=1}^q \sum_n a_\nu \langle \Phi, B(\gamma_{n,\nu} \Phi_n \Phi_n^*) A\Phi_{0,\nu} \rangle \right| \\
 &= \left| \sum_{\nu=1}^q a_\nu \left\langle \Phi, B\left(\sum_n \gamma_{n,\nu} \Phi_n \Phi_n^*\right) A\Phi_{0,\nu} \right\rangle \right|.
 \end{aligned}$$

Definindo $M_\nu = (\sum_n \gamma_{n,\nu} \Phi_n \Phi_n^*)$, temos

$$J_3 = \left| \sum_{\nu=1}^q a_\nu \langle \Phi, BM_\nu A\Phi_{0,\nu} \rangle \right|.$$

Usando desigualdade triangular e o fato que $|a_\nu| \leq 1$ para todo ν , temos

$$\begin{aligned}
 J_3 &\leq \sum_{\nu=1}^q |a_\nu| |\langle \Phi, BM_\nu A\Phi_{0,\nu} \rangle| \\
 &\leq \sum_{\nu=1}^q |\langle \Phi, BM_\nu A\Phi_{0,\nu} \rangle|.
 \end{aligned}$$

Por (1.8), $|\langle \Phi, BM_\nu A\Phi_{0,\nu} \rangle| \leq \|BM_\nu A\|$. Por (1.22), $\|BM_\nu A\| \leq \|B\| \|M_\nu\| \|A\|$, logo

$$J_3 \leq \|A\| \|B\| \sum_{\nu=1}^q \|M_\nu\|,$$

mas é fácil ver que todos os M_ν são auto-adjuntos, tendo como autovalores o conjunto $\{\gamma_{n,\nu}\}_n \cup \{0\}$. Portanto, $\|M_\nu\| = \max_n(\gamma_{n,\nu})$, com isso

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \|A\| \|B\| \sum_{\nu=1}^q \max_n(\gamma_{n,\nu}) \\ &= \frac{\|A\| \|B\|}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=1}^q \max_n \left(\int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \right). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Vamos estimar as integrais. Observe que elas são basicamente a função erro complementar, definida por:

$$\operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{\infty} e^{-t^2} dt \quad \text{para } x \geq 0. \quad (2.32)$$

Em [17], mostra-se que vale a seguinte desigualdade para essa função,

$$\operatorname{erfc}(x) \leq e^{-x^2}. \quad (2.33)$$

Como o sistema possui um gap uniforme, temos que $E_n - E_{0,\nu} \geq \Delta E$, portanto

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \leq \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{\Delta E}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left(\frac{\Delta E}{\sqrt{4\alpha}} \right).$$

Com isso,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\frac{(E_n - E_{0,\nu})}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega \leq e^{-\frac{(\Delta E)^2}{4\alpha}},$$

substituindo então em (2.31),

$$\begin{aligned} J_3 &\leq \frac{\|A\| \|B\|}{\sqrt{\pi}} \sum_{\nu=1}^q \max_n \left(e^{-\frac{(\Delta E)^2}{4\alpha}} \right) \\ &= \frac{\|A\| \|B\|}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\Delta E)^2}{4\alpha}} \sum_{\nu=1}^q 1 \\ &= \frac{\|A\| \|B\|}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\Delta E)^2}{4\alpha}} q \\ &\leq \frac{\|A\| \|B\| Q}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\Delta E)^2}{4\alpha}}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

De maneira análoga, vale que

$$J_2 \leq \frac{\|A\| \|B\| Q}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\Delta E)^2}{4\alpha}}. \quad (2.35)$$

Por fim, para estimar J_1 , observe que

$$J_1 = \mathcal{F}_\alpha(\langle \Phi, [A_\Lambda(t), B]\Phi \rangle) \leq \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1}{|t + i\epsilon|} |\langle \Phi, [A_\Lambda(t), B]\Phi \rangle| e^{-\alpha t^2} dt.$$

Segue de (1.8), que

$$|\langle \Phi, [A_\Lambda(t), B]\Phi \rangle| \leq \|[A_\Lambda(t), B]\|.$$

Com isso,

$$J_1 \leq \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{1}{|t + i\epsilon|} \|[A_\Lambda(t), B]\| e^{-\alpha t^2} dt. \quad (2.36)$$

Lembramos que, pelo **Teorema 1.1**, para $|t| > 0$ vale $\|[A_\Lambda(t), B]\| \leq 2\|A\|\|B\|\|X|(e^{\mu|t|} - 1)e^{-r/R}$. Entretanto, lembramos que, pela **Observação 1.3**, essa cota só é boa para $|t| \leq c_1 r + c_2$, onde c_1, c_2 são constantes que independem de t e r . Para $|t| > c_1 r + c_2$, a cota uniforme, $\|[A_\Lambda(t), B]\| \leq 2\|A\|\|B\|$, é uma cota melhor. Portanto, dividiremos a integral de (2.36) em duas partes e usaremos as cotas que são boas correspondentes a cada intervalo. A rigor, vamos usar a cota de Lieb-Robinson apenas para o intervalo $|t| \leq \frac{c_1 r}{2} = c'_1 r$ para manter ainda o decaimento exponencial. Temos então:

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-c'_1 r}^{c'_1 r} \frac{1}{|t + i\epsilon|} \|[A_\Lambda(t), B]\| e^{-\alpha t^2} dt \\ &\quad + \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=c'_1 r}^T \frac{1}{|t + i\epsilon|} \|[A_\Lambda(t), B]\| e^{-\alpha t^2} dt \\ &\leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\|A\| \|B\| \|X\| e^{-r/R}}{\pi} \int_{-c'_1 r}^{c'_1 r} \frac{(e^{\mu|t|} - 1)e^{-\alpha t^2}}{|t + i\epsilon|} dt \\ &\quad + \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\|A\| \|B\|}{\pi} \int_{|t|=c'_1 r}^T \frac{e^{-\alpha t^2}}{|t + i\epsilon|} dt. \end{aligned}$$

Usando que $|t + i\epsilon| = \sqrt{t^2 + \epsilon^2}$, temos

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\|A\| \|B\| \|X\| e^{-r/R}}{\pi} \int_{-c'_1 r}^{c'_1 r} \frac{(e^{\mu|t|} - 1)e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt \\ &\quad + \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\|A\| \|B\|}{\pi} \int_{|t|=c'_1 r}^T \frac{e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt. \end{aligned}$$

Mas como as duas funções a serem integradas são funções pares, temos que

$$\begin{aligned} J_1 &\leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\| \|B\| \|X\| e^{-r/R}}{\pi} \int_0^{c'_1 r} \frac{(e^{\mu t} - 1)e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt \\ &\quad + \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\| \|B\|}{\pi} \int_{t=c'_1 r}^T \frac{e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt. \quad (2.37) \end{aligned}$$

Vamos estimar as duas integrais separadamente. Para primeira integral observe que $(e^{\mu t} - 1) \leq \frac{t}{t'}(e^{\mu t'} - 1)$ para $0 \leq t < t'$. Com efeito, seja $f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(t) = \frac{e^{\mu t} - 1}{t}$. Derivando f , temos

$$f'(t) = \frac{\mu t e^{\mu t} - (e^{\mu t} - 1)}{t^2} = \frac{e^{\mu t}(\mu t - 1) + 1}{t^2}.$$

Mas note que

$$(e^{\mu t}(\mu t - 1) + 1)' = \mu e^{\mu t}(\mu t - 1) + \mu e^{\mu t} = \mu^2 t e^{\mu t} \geq 0$$

para todo $t \geq 0$. No entanto, $(e^{\mu t}(\mu t - 1) + 1)(0) = -1 + 1 = 0$, com isso, $(e^{\mu t}(\mu t - 1) + 1) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Portanto, $f'(t) \geq 0$ para todo $t \geq 0$. Consequentemente, f é crescente. Se $0 < t \leq t'$ temos que $\frac{e^{\mu t} - 1}{t} \leq \frac{e^{\mu t'} - 1}{t'}$, logo $e^{\mu t} - 1 \leq \frac{t}{t'}(e^{\mu t'} - 1)$.

Enfim,

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{-r/R}}{\pi} \int_0^{c_1 r} \frac{(e^{\mu t} - 1)e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt \\ & \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{-r/R}}{\pi} \int_0^{c_1 r} \frac{t(e^{\mu c_1 r} - 1)e^{-\alpha t^2}}{c_1 r \sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt \\ & = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{-r/R}(e^{\mu c_1 r} - 1)}{\pi c_1 r} \int_0^{c_1 r} \frac{te^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt \\ & \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu c_1 r - r/R}}{\pi c_1 r} \int_0^{c_1 r} \frac{te^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt \\ & \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu c_1 r - r/R}}{\pi c_1 r} \int_0^{c_1 r} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt, \end{aligned}$$

onde usamos que $e^{\mu c_1 r} - 1 < e^{\mu c_1 r}$ e $e^{-\alpha t^2} \leq 1$. Fazendo a mudança de variável $u = t^2 + \epsilon^2$, temos

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{-r/R}}{\pi} \int_0^{c_1 r} \frac{(e^{\mu t} - 1)e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt \\ & \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu c_1 r - r/R}}{\pi c_1 r} \int_{\epsilon^2}^{(c_1 r)^2 + \epsilon^2} \frac{du}{\sqrt{u}} \\ & = \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu c_1 r - r/R}}{\pi c_1 r} (\sqrt{(c_1 r)^2 + \epsilon^2} - \epsilon) \\ & = \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{\mu c_1 r - r/R}}{\pi}. \end{aligned}$$

Lembrando que $c'_1 = c_1/2 = 1/(2\mu R)$, então $\mu c'_1 r - r/R = -r/(2R)$, e obtemos finalmente:

$$\begin{aligned} & \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{-r/R}}{\pi} \int_0^{c'_1 r} \frac{(e^{\mu t} - 1)e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt \\ & \leq \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{-r/(2R)}}{\pi}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para a segunda integral de (2.37), vamos usar a cota da função erro complementar.

$$\begin{aligned} & \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|}{\pi} \int_{c'_1 r}^T \frac{e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt \\ & \leq \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|}{\pi} \int_{c'_1 r}^T \frac{e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{(c'_1 r)^2 + \epsilon^2}} dt \\ & = \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|}{\sqrt{((c'_1 r)^2 + \epsilon^2)}\pi} \int_{c'_1 r}^T e^{-\alpha t^2} dt \\ & = \frac{2\|A\|\|B\|}{\pi c'_1 r} \int_{c'_1 r}^{\infty} e^{-\alpha t^2} dt. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $u = \sqrt{\alpha}t$ e substituindo o valor de c'_1 , temos

$$\lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{2\|A\|\|B\|}{\pi} \int_{c'_1 r}^T \frac{e^{-\alpha t^2}}{\sqrt{t^2 + \epsilon^2}} dt \leq \frac{4\mu R\|A\|\|B\|}{\sqrt{\alpha\pi}r} e^{-\frac{\alpha r^2}{4\mu^2 R^2}}. \quad (2.39)$$

Enfim, aplicando (2.38) e (2.39) em (2.37), obtemos

$$J_1 \leq \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{-r/(2R)}}{\pi} + \frac{4\mu R\|A\|\|B\|}{\sqrt{\alpha\pi}r} e^{-\frac{\alpha r^2}{4\mu^2 R^2}}. \quad (2.40)$$

Substituindo (2.29), (2.30), (2.34), (2.35) e (2.40) em (2.27), temos

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Phi, AB\Phi \rangle - \frac{1}{2}(\langle \Phi, AP_0 B\Phi \rangle + \langle \Phi, BP_0 A\Phi \rangle) \right| \leq \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{-r/(2R)}}{\pi} \\ & + \frac{4\mu R\|A\|\|B\|}{\sqrt{\alpha\pi}r} e^{-\frac{\alpha r^2}{4\mu^2 R^2}} + \frac{2\|A\|\|B\|Q}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(\Delta E)^2}{4\alpha}} + \frac{2\Delta\epsilon\|A\|\|B\|}{\sqrt{4\pi\alpha}} Q^2. \end{aligned}$$

Escolhendo $\alpha = \frac{\mu R \Delta E}{r}$, temos

$$\begin{aligned} & \left| \langle \Phi, AB\Phi \rangle - \frac{1}{2}(\langle \Phi, AP_0 B\Phi \rangle + \langle \Phi, BP_0 A\Phi \rangle) \right| \leq \frac{2\|A\|\|B\|\|X\|e^{-r/(2R)}}{\pi} \\ & + \frac{4\sqrt{\mu R}\|A\|\|B\|}{\sqrt{\pi}r} e^{-\frac{r\Delta E}{4\mu R}} + \frac{2\|A\|\|B\|Q}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r\Delta E}{4\mu R}} + \frac{\sqrt{r}\Delta\epsilon\|A\|\|B\|}{\sqrt{\pi\mu R\Delta E}} Q^2. \end{aligned}$$

Sejam

$$C_1(r) = 3 \max \left\{ \frac{2|X|}{\pi}, \frac{4\sqrt{\mu R}}{\sqrt{\pi r}}, \frac{2Q}{\sqrt{\pi}} \right\},$$

$$C_2 = \frac{Q}{\sqrt{\pi \mu R \Delta E}}$$

e

$$\lambda = \min \left\{ \frac{1}{2R}, \frac{\Delta E}{4\mu R} \right\}.$$

Temos então,

$$\left| \langle \Phi, AB\Phi \rangle - \frac{1}{2} (\langle \Phi, AP_0B\Phi \rangle + \langle \Phi, BP_0A\Phi \rangle) \right| \leq \|A\| \|B\| (C_1(r)e^{-\lambda r} + C_2\sqrt{r}\Delta\varepsilon),$$

concluindo assim a demonstração do teorema.

Conclusão

Na **Seção 1.1** vimos as cotas de Lieb-Robinson para interações de curto alcance, **Teorema 1.1**. Tal resultado nos fornece uma cota para a norma de $[A_\Lambda(t), B]$ com a condição de A e B terem suporte em subsistemas distantes. A demonstração desse teorema foi feita em dois passos, o primeiro passo consistiu de um esboço da demonstração, contendo as principais ideias e resultados. No passo seguinte, retornamos a cada um dos resultados, os justificando com mais detalhes. O resultado do teorema, por si só, não é fácil de interpretar, entretanto, vimos também na **Seção 1.1**, que através dele é possível obter uma cota para a interferência de perturbações em sistemas distantes. A partir daí, obtemos um valor máximo para a velocidade efetiva de propagação de informação, v_Φ , denominada de velocidade de Lieb-Robinson. Essa velocidade é constante no tempo e foi escolhida a menos de um parâmetro α entre 0 e 1, onde esse parâmetro cumpre o papel de controlar o erro associado.

Na **Seção 1.2** vimos a generalização das cotas de Lieb-Robinson para o caso de interações de longo alcance, **Teorema 1.2**. A estratégia para demonstrar foi separar o Hamiltoniano em duas partes, uma apenas com interações de curto alcance e outra com interações de longo alcance. A partir do **Lema 1.1**, conseguimos uma cota para $[A_\Lambda(t), B]$ composta de três parcelas. Tratamos cada uma dessas parcelas separadamente, sendo que a primeira bastou uma aplicação direta do **Teorema 1.1**. Obtemos, novamente, uma interpretação do resultado a partir da interferência de perturbações. Entretanto, a velocidade de Lieb-Robinson obtida não foi mais constante, nesse caso ela tem um crescimento algébrico com o tempo.

No **Capítulo 2** obtemos algumas aplicações das cotas de curto alcance. Na **Seção 2.1** vimos que é possível aproximar a evolução de um operador A , com suporte em X , por um operador com suporte no $v_\Phi t$ -alargamento de X . Para demonstrar tal resultado, usamos as cotas de Lieb-Robinson e a medida de Haar. Mostramos na **Seção 2.2**, usando diretamente o resultado obtido na seção anterior, que correlações ao longo do tempo, para um estado do tipo produto, decaem exponencialmente com a distância.

Por fim, na **Seção 2.3** vimos que sob a condição de um gap uniforme e da validade das cotas de Lieb-Robinson, o sistema possui um decaimento exponencial de correlações no estado fundamental, **Teorema 2.2**. Aplicamos esse resultado para o modelo de Ising com um campo transversal, concluindo com isso que esse sistema possui correlações de longo alcance espacial para os operadores σ_i^z, σ_j^z . Apesar de ser um resultado estático, usamos também as cotas de Lieb-Robinson para demonstrá-lo. Antes de demonstrar o **Teorema 2.2**, fizemos um esboço, com poucos detalhes, da demonstração do sub caso onde o gap espectral está acima do estado fundamental. Por fim, demos uma demonstração detalhada do caso geral.

Referências Bibliográficas

- [1] Elliott H. Lieb and Derek W. Robinson. The finite group velocity of quantum spin systems. *Comm. Math. Phys.*, 28(3):251–257, 1972.
- [2] Derek W. Robinson. Properties of propagation of quantum spin systems. *The Journal of the Australian Mathematical Society. Series B. Applied Mathematics*, 19(4):387–399, 1976.
- [3] Bruno Nachtergaele, Yoshiko Ogata, and Robert Sims. Propagation of correlations in quantum lattice systems. *Journal of Statistical Physics*, 124(1):1–13, Jul 2006.
- [4] Bruno Nachtergaele and Robert Sims. Lieb-robinson bounds and the exponential clustering theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 265(1):119–130, Jul 2006.
- [5] M. B. Hastings. Lieb-schultz-mattis in higher dimensions. *Physical Review B*, 69(10), mar 2004.
- [6] M. B. Hastings. Locality in quantum and markov dynamics on lattices and networks. *Phys. Rev. Lett.*, 93:140402, Sep 2004.
- [7] Matthew B. Hastings and Tohru Koma. Spectral gap and exponential decay of correlations. *Communications in Mathematical Physics*, 265(3):781–804, Aug 2006.
- [8] M B Hastings. An area law for one-dimensional quantum systems. *Journal of Statistical Mechanics: Theory and Experiment*, 2007(08):P08024–P08024, aug 2007.
- [9] Dorit Aharonov, Itai Arad, Umesh Vazirani, and Zeph Landau. The detectability lemma and its applications to quantum hamiltonian complexity. *New Journal of Physics*, 13(11):113043, nov 2011.

- [10] Michael Foss-Feig, Zhe-Xuan Gong, Charles W. Clark, and Alexey V. Gorshkov. Nearly linear light cones in long-range interacting quantum systems. *Physical Review Letters*, 114(15), apr 2015.
- [11] Takuro Matsuta, Tohru Koma, and Shu Nakamura. Improving the lieb–robinson bound for long-range interactions. *Annales Henri Poincaré*, 18(2):519–528, Feb 2017.
- [12] B. Amaral; A. T. Baraviera; M. O. T. Cunha. *Mecânica quântica para matemáticos em formação*. IMPA, 2011.
- [13] Jonathan. Gleason. *Existence and Uniqueness of Haar Measure*. University of Chicago, 2010.
- [14] K. Fredenhagen. A remark on the cluster theorem. *Communications in Mathematical Physics*, 97(3):461–463, Sep 1985.
- [15] Matthew B Hastings. Locality in quantum systems. In *Quantum Theory from Small to Large Scales*, pages 171–212. Oxford University Press, may 2012.
- [16] Bogdan Damski and Marek M Rams. Exact results for fidelity susceptibility of the quantum ising model: the interplay between parity, system size, and magnetic field. *Journal of Physics A: Mathematical and Theoretical*, 47(2):025303, dec 2013.
- [17] M. Chiani, D. Dardari, and M. K. Simon. New exponential bounds and approximations for the computation of error probability in fading channels. *IEEE Transactions on Wireless Communications*, 2(4):840–845, July 2003.

Apêndice A

Seja V um espaço vetorial normado de dimensão finita. Sejam $O : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ contínua, e $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$, sendo que para todo $x_0 \in V$, vale que $\gamma(t)x_0$ é solução do PVI

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = O(t)y(t) \\ y(0) = x_0. \end{cases}$$

Ou seja, para todo $x \in V$ vale que

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma(t)x = O(t)\gamma(t)x \\ \gamma(0)x = x. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

A existência da função γ é assegurada pelo Teorema da existência e unicidade para solução de edo's. É fácil ver ainda que para t fixado, $\gamma(t)$ é de fato linear.

Suponhamos que O preserva norma, ou seja, $|\gamma(t)x| = |x|$ para todo $t \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in V$. Com isso, para t fixado, $\gamma(t)x = 0$ se, e somente se, $x = 0$. Portanto, $\gamma(t)$ tem núcleo formado apenas pelo vetor nulo. Consequentemente, existe o operador inverso a $\gamma(t)$, que vamos denotar por $\gamma(t)^{-1}$.

Lema A.1. *Seja V um espaço de Banach e $O : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{L}(V)$ uma função que preserva a norma. Para qualquer função $b : \mathbb{R} \rightarrow V$, a solução de*

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}y(t) = O(t)y(t) + b(t) \\ y(0) = x_0, \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

é dado por $z(t) = \gamma(t) \left(y_0 + \int_0^t (\gamma(s)^{-1})b(s)ds \right)$.

Demonstração. Seja $w(t) = \left(y_0 + \int_0^t (\gamma(s)^{-1})b(s)ds \right)$, logo $\gamma(0)w(0) = w(0) = y_0$ e $\gamma(t)w(t) = z(t)$. Definimos a aplicação linear $\mathcal{B} : \mathcal{L}(V) \times V \rightarrow V$, onde $\mathcal{B}(A, v) = Av$. Portanto, $z(t) = \mathcal{B}(\gamma(t), w(t))$. Sendo assim,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z(t) &= \frac{d}{dt}\mathcal{B}(\gamma(t), w(t)) = \mathcal{B}\left(\frac{d}{dt}\gamma(t), w(t)\right) + \mathcal{B}\left(\gamma(t), \frac{d}{dt}w(t)\right) \\ &= \left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)w(t) + \gamma(t)\left(\frac{d}{dt}w(t)\right). \end{aligned}$$

De (A.1), temos que

$$\left(\frac{d}{dt}\gamma(t)\right)w(t) = O(t)\gamma(t)w(t).$$

Já da definição de $w(t)$, vale que

$$\frac{d}{dt}w(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t (\gamma(s)^{-1})b(s)ds = (\gamma(t)^{-1})b(t),$$

onde, na última igualdade usamos o Teorema Fundamental do Cálculo. Com isso, temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}z(t) &= O(t)\gamma(t)w(t) + \gamma(t) \left((\gamma(t)^{-1})b(t) \right) \\ &= O(t)z(t) + b(t). \end{aligned}$$

Portanto, $z(t)$ é solução de (A.2). □

Corolário A.1. *A solução de (A.2) satisfaz,*

$$|y(t)| \leq |y(0)| + \int_0^t |b(s)|ds.$$

Demonstração. Pelo lema anterior,

$$z(t) = \gamma(t) \left(y_0 + \int_0^t (\gamma(s)^{-1})b(s)ds \right)$$

é solução de (A.2). Logo,

$$|z(t)| = \left| \gamma(t) \left(y_0 + \int_0^t (\gamma(s)^{-1})b(s)ds \right) \right| = |y_0| + \left| \int_0^t (\gamma(s)^{-1})b(s)ds \right|.$$

Usando desigualdade triangular,

$$\begin{aligned} |z(t)| &\leq |y_0| + \left| \int_0^t (\gamma(s)^{-1})b(s)ds \right| \\ &\leq |y_0| + \int_0^t |(\gamma(s)^{-1})b(s)|ds \\ &= |y_0| + \int_0^t |b(s)|ds. \end{aligned}$$

□

Apêndice B

Lema B.1. *Seja $E \in \mathbb{R}$ e $\alpha > 0$. Então*

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-iEt} e^{-\alpha t^2}}{t + i\epsilon} dt &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{E}{\sqrt{4\alpha}}} e^{-\omega^2} d\omega \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{E}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega^2} d\omega. \end{aligned}$$

Demonstração. Seja

$$I_E(T) = \frac{i}{2\pi} \int_{-T}^T \frac{e^{-iEt} e^{-\alpha t^2}}{t + i\epsilon} dt.$$

Usando a transformada de Fourier, temos que

$$e^{-iEt} e^{-\alpha t^2} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} e^{i\omega t} d\omega.$$

Substituindo na equação de $I_E(T)$, temos

$$I_E(T) = \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-T}^T \frac{1}{t + i\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} e^{i\omega t} d\omega dt.$$

Pelo teorema de Fubini, temos que:

$$I_E(T) = \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt d\omega.$$

Vamos usar o teorema do Resíduo para estimar a integral $\int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt$, sendo $T > \epsilon$. Dividimos nos casos de $w \geq 0$ e $w < 0$:

1. Para $w \geq 0$ sejam $f : \mathbb{C} \setminus \{i\epsilon\} \rightarrow \mathbb{C}$ com $f(z) = \frac{e^{i\omega z}}{z + i\epsilon}$ e γ o caminho ilustrado na Figura B.1.

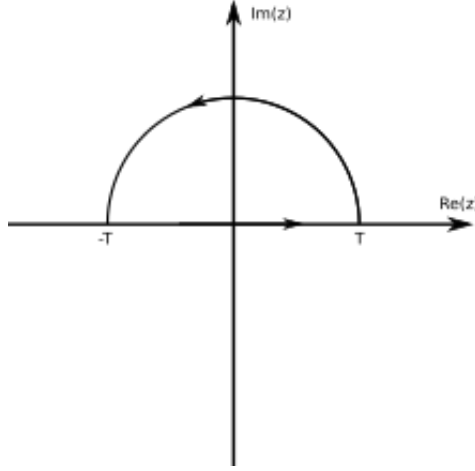


Figura B.1: Primeira integral de caminho

Sejam $\gamma_1 : [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}$ com $\gamma_1(t) = t$ e $\gamma_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ com $\gamma_2(\theta) = Te^{i\theta}$. Temos que $\int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f$. Como γ_1 e γ_2 são diferenciáveis, vale que

$$\int_{\gamma_1} f = \int_{-T}^T f(\gamma_1'(t))\gamma_1'(t)dt = \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt$$

enquanto que

$$\int_{\gamma_2} f = \int_0^{\pi} f(\gamma_2'(\theta))\gamma_2'(\theta)d\theta = \int_0^{\pi} \frac{e^{i\omega Te^{i\theta}}}{Te^{i\theta} + i\epsilon} (iT e^{i\theta}) d\theta.$$

Como f é holomorfa no interior do caminho γ , e como γ é uma curva fechada e homotópica a zero, pelo Teorema de Cauchy, vale que $\int_{\gamma} f = 0$. Portanto,

$$0 = \int_{\gamma} f = \int_{\gamma_1} f + \int_{\gamma_2} f = \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt + iT \int_0^{\pi} \frac{e^{i\omega Te^{i\theta}} e^{i\theta}}{Te^{i\theta} + i\epsilon} d\theta.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt \right| &= \left| -iT \int_0^{\pi} \frac{e^{i\omega Te^{i\theta}} e^{i\theta}}{Te^{i\theta} + i\epsilon} d\theta \right| \\ &= T \left| \int_0^{\pi} \frac{e^{i\omega Te^{i\theta}} e^{i\theta}}{Te^{i\theta} + i\epsilon} d\theta \right| \\ &\leq T \int_0^{\pi} \frac{|e^{i\omega Te^{i\theta}}|}{|Te^{i\theta} + i\epsilon|} d\theta \end{aligned} \tag{B.1}$$

onde usamos também que $|e^{ix}| = 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Entretanto, temos

$$|Te^{i\theta} + i\epsilon| \geq ||Te^{i\theta}| - |i\epsilon|| = |T - \epsilon| = T - \epsilon, \quad (\text{B.2})$$

onde a última igualdade segue do fato que estamos supondo $T > \epsilon$. Com isso,

$$\left| \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt \right| \leq \frac{T}{T - \epsilon} \int_0^\pi |e^{i\omega T e^{i\theta}}| d\theta.$$

Usando a identidade de Euler, $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$, temos que

$$|e^{i\omega T e^{i\theta}}| = |e^{i\omega T (\cos \theta + i \sin \theta)}| = |e^{i\omega T \cos \theta}| |e^{-\omega T \sin \theta}| = e^{-\omega T \sin \theta},$$

Logo,

$$\left| \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt \right| \leq \frac{T}{T - \epsilon} \int_0^\pi e^{-\omega T \sin \theta} d\theta.$$

Observe pelo gráfico de $\sin(\theta)$ que se $\theta \in [0, \pi/2]$ então $\sin(\theta) \geq \frac{2\theta}{\pi}$, e se $\theta \in [\pi/2, \pi]$ então $\sin(\theta) \geq 2 - \frac{2\theta}{\pi}$. Portanto, $e^{-\omega T \sin \theta} \leq e^{\frac{2\omega T \theta}{\pi}}$ se $\theta \in [0, \pi/2]$ e $e^{-\omega T \sin \theta} \leq e^{2\omega T - \frac{2\omega T \theta}{\pi}}$ se $\theta \in [\pi/2, \pi]$. Logo,

$$\begin{aligned} \left| \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt \right| &\leq \frac{T}{T - \epsilon} \int_0^\pi e^{-\omega T \sin \theta} d\theta \\ &= \frac{T}{T - \epsilon} \left(\int_0^{\pi/2} e^{-\omega T \sin \theta} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{-\omega T \sin \theta} d\theta \right) \\ &\leq \frac{T}{T - \epsilon} \left(\int_0^{\pi/2} e^{-\frac{2\omega T \theta}{\pi}} d\theta + \int_{\pi/2}^\pi e^{\frac{2\omega T \theta}{\pi}} e^{-2\omega T} d\theta \right) \\ &= \frac{T}{T - \epsilon} \left(\frac{-\pi}{2\omega T} (e^{-\omega T} - 1) + \frac{\pi}{2\omega T} e^{-2\omega T} (e^{2\omega T} - e^{\omega T}) \right) \\ &= \frac{\pi}{2\omega(T - \epsilon)} \left(-(e^{-\omega T} - 1) + (1 - e^{-\omega T}) \right) \\ &= \frac{\pi}{\omega(T - \epsilon)} (1 - e^{-\omega T}). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

2. Para $\omega < 0$, tomamos a mesma f anterior e φ o caminho ilustrado na Figura B.2.

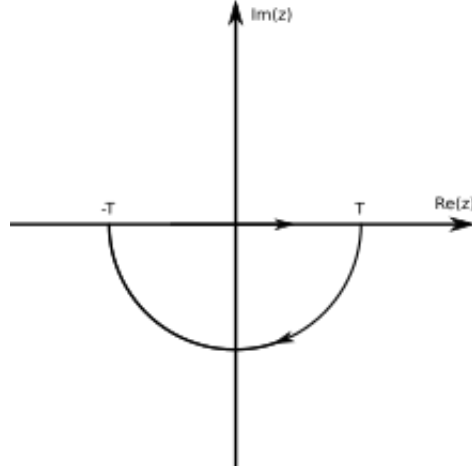


Figura B.2: Segunda integral de caminho

Observe que f tem uma singularidade do tipo polo, de grau 1, em $-i\epsilon$. Usando o teorema do Resíduo, temos que

$$\int_{\varphi} f = 2\pi i \operatorname{Res}(f, -i\epsilon) = -2\pi i \left((z + i\epsilon) \frac{e^{i\omega z}}{z + i\epsilon} \right) (-i\epsilon) = -2\pi i e^{\omega\epsilon}.$$

Por outro lado, sejam $\varphi_1 : [-T, T] \rightarrow \mathbb{C}$ com $\varphi_1(t) = t$ e $\varphi_2 : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{C}$ com $\varphi_2(\theta) = Te^{-i\theta}$, temos que $\int_{\varphi} f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f$. Como φ_1 e φ_2 são diferenciáveis, vale que

$$\int_{\varphi_1} f = \int_{-T}^T f(\varphi_1(t)) \varphi_1'(t) dt = \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt$$

e

$$\int_{\varphi_2} f = \int_0^{\pi} f(\varphi_2(\theta)) \varphi_2'(\theta) d\theta = \int_0^{\pi} \frac{e^{i\omega T e^{-i\theta}}}{T e^{-i\theta} + i\epsilon} (-iT e^{-i\theta}) d\theta$$

Sendo assim,

$$-2\pi i e^{\omega\epsilon} = \int_{\varphi} f = \int_{\varphi_1} f + \int_{\varphi_2} f = \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt - iT \int_0^{\pi} \frac{e^{i\omega T e^{-i\theta}} e^{-i\theta}}{T e^{-i\theta} + i\epsilon} d\theta$$

Consequentemente,

$$\int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t + i\epsilon} dt = -2\pi i e^{\omega\epsilon} + iT \int_0^{\pi} \frac{e^{i\omega T e^{-i\theta}} e^{-i\theta}}{T e^{-i\theta} + i\epsilon} d\theta. \quad (\text{B.4})$$

Logo,

$$\left| \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt \right| = \left| -2\pi i e^{\omega\epsilon} + iT \int_0^\pi \frac{e^{i\omega T e^{-i\theta}} e^{-i\theta}}{T e^{-i\theta} + i\epsilon} d\theta \right|.$$

$$\leq 2\pi e^{\omega\epsilon} + \left| iT \int_0^\pi \frac{e^{i\omega T e^{-i\theta}} e^{-i\theta}}{T e^{-i\theta} + i\epsilon} d\theta \right| \quad (\text{B.5})$$

$$\leq 2\pi e^{\omega\epsilon} + \frac{\pi}{|\omega|(T-\epsilon)} (1 - e^{-|\omega|T}), \quad (\text{B.6})$$

onde, a integral do segundo termo de (B.5) é estimada de forma similar ao caso $\omega > 0$. Juntando (B.3) e (B.6) temos

$$\left| \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt \right| \leq \begin{cases} \frac{\pi}{\omega(T-\epsilon)} (1 - e^{-\omega T}) & \text{se } \omega \geq 0, \\ 2\pi e^{-|\omega|\epsilon} + \frac{\pi}{|\omega|(T-\epsilon)} (1 - e^{-|\omega|T}) & \text{se } \omega < 0. \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Dividiremos então $I_E(\epsilon)$ em três partes,

$$I_E(\epsilon) = I_E^-(\epsilon) + I_E^0(\epsilon) + I_E^+(\epsilon) \quad (\text{B.8})$$

onde

$$I_E^-(\epsilon) = \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt d\omega,$$

$$I_E^0(\epsilon) = \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt d\omega$$

e

$$I_E^+(\epsilon) = \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\Delta\omega}^{\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt d\omega,$$

sendo $\Delta\omega = bT^{-1/2}$, em que b é uma constante positiva. Vamos mostrar que $\lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E^0(\epsilon) = 0 = \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E^+(\epsilon)$.

Observe inicialmente que

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_E^0(\epsilon)| &= \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \left| \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt d\omega \right| \\ &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} |e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)}| \left| \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt \right| d\omega. \end{aligned}$$

Por hipótese, $\alpha > 0$, com isso $-(\omega+E)^2/(4\alpha) < 0$ e vale, $e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \leq 1$. Sendo assim,

$$\lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_E^0(\epsilon)| \leq \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\Delta\omega}^{\Delta\omega} \left| \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt \right| d\omega.$$

Separando a integral nos intervalos $[\Delta\omega, 0]$ e $[0, \Delta\omega]$, e usando (B.7), temos

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_E^0(\epsilon)| &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\Delta\omega}^0 \left(2\pi e^{-|\omega|\epsilon} + \frac{\pi}{|\omega|(T-\epsilon)} (1 - e^{-|\omega|T}) \right) d\omega \\ &+ \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{\Delta\omega} \frac{\pi}{\omega(T-\epsilon)} (1 - e^{-\omega T}) d\omega. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\omega' = -\omega$, verificasse que o último termo dessa expressão é igual ao segundo termo entre parêntesis, logo:

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_E^0(\epsilon)| &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\Delta\omega}^0 e^{-|\omega|\epsilon} d\omega \\ &+ \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{\Delta\omega} \frac{1 - e^{-\omega T}}{\omega} d\omega. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Vamos tratar as duas integrais separadamente. Como $-|\omega|\epsilon < 0$, segue que $e^{-|\omega|\epsilon} < e^0 = 1$, portanto

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\Delta\omega}^0 e^{-|\omega|\epsilon} d\omega &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\Delta\omega}^0 d\omega \\ &= \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \Delta\omega. \end{aligned}$$

Lembrando que $\Delta\omega = bT^{-\frac{1}{2}}$, temos

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\Delta\omega}^0 e^{-|\omega|\epsilon} d\omega &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} bT^{-\frac{1}{2}} \\ &= 0. \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Por outro lado, definindo $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ com $g(x) = \frac{1 - e^{-ax}}{x}$, sendo $a > 0$, temos que

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-ax}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} a e^{-ax} = a, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-ax}}{x} = 0. \end{aligned}$$

Somando ao fato que $g(x)$ é continua em seu domínio, temos pelo teorema de Weierstrass que $g(x)$ é limitada, portanto existe $M > 0$ tal que $|g(x)| \leq M$

para todo $x \in \mathbb{R}^+$. Por conseguinte, $\frac{1-e^{-\omega T}}{\omega} \leq M$ para todo $\omega \in \mathbb{R}^+$. Logo,

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{\Delta\omega} \frac{1-e^{-\omega T}}{\omega} d\omega &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_0^{\Delta\omega} M d\omega \\
 &= \lim_{T \uparrow \infty} \frac{M\Delta\omega}{2\pi T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
 &= \lim_{T \uparrow \infty} \frac{MbT^{-\frac{1}{2}}}{2\pi T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
 &= \lim_{T \uparrow \infty} \frac{Mb}{2\pi T^{\frac{3}{2}}} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \\
 &= 0.
 \end{aligned} \tag{B.11}$$

Substituindo (B.10) e (B.11) em (B.9), temos

$$\lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_E^0(\epsilon)| \leq 0, \tag{B.12}$$

e portanto, $\lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E^0(\epsilon) = 0$.

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_E^+(\epsilon)| &= \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left| \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\Delta\omega}^{\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt d\omega \right| \\
 &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\Delta\omega}^{\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \left| \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt \right| d\omega.
 \end{aligned}$$

Como ω é sempre positivo no intervalo de integração, usando (B.7), temos

$$\begin{aligned}
 \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_E^+(\epsilon)| &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\Delta\omega}^{\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \frac{\pi}{\omega(T-\epsilon)} (1-e^{-\omega T}) d\omega \\
 &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\Delta\omega}^{\infty} \frac{e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)}}{\omega} d\omega,
 \end{aligned}$$

onde na última desigualdade usamos que $(1-e^{-\omega T}) < 1$. Dentro do intervalo de integração o menor valor que ω assume é $\Delta\omega$, portanto $\frac{e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)}}{\omega} \leq \frac{e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)}}{\Delta\omega}$ para todo $\omega \in [\Delta\omega, \infty)$. Com isso,

$$\lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_E^+(\epsilon)| \leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{4\pi \Delta\omega T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\Delta\omega}^{\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} d\omega.$$

Mas como $e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)}$ é sempre positivo para todo valor real de ω , temos

que

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_E^+(\epsilon)| &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{4\pi\Delta\omega T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{\Delta\omega}^{\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} d\omega \\ &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{4\pi\Delta\omega T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} d\omega \\ &\leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{2\Delta\omega T}. \end{aligned}$$

Usando que $\Delta\omega = bT^{-\frac{1}{2}}$, temos

$$\lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} |I_E^+(\epsilon)| \leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{2bT^{\frac{1}{2}}} = 0.$$

Portanto, $\lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E^+(\epsilon) = 0$. Voltando então a (B.8),

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E(\epsilon) &= \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E^-(\epsilon) + \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E^0(\epsilon) + \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E^+(\epsilon) \\ &= \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E^-(\epsilon). \end{aligned}$$

Usando (B.4), temos que

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E(\epsilon) &= \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E^-(\epsilon) \\ &= \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_{-T}^T \frac{e^{i\omega t}}{t+i\epsilon} dt d\omega \\ &= \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} (-2\pi i e^{\omega\epsilon}) d\omega \\ &\quad - \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_0^\pi \frac{e^{i\omega T e^{-i\theta}}}{T e^{-i\theta} + i\epsilon} (-i T e^{-i\theta}) d\theta d\omega. \quad (\text{B.13}) \end{aligned}$$

Mas, a partir do que se segue a (B.1) e (B.5), temos que

$$\left| \int_0^\pi \frac{e^{i\omega T e^{-i\theta}}}{T e^{-i\theta} + i\epsilon} (-i T e^{-i\theta}) d\theta \right| \leq \frac{\pi}{|\omega|(T-\epsilon)} (1 - e^{-|\omega|T}).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left| \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_0^\pi \frac{e^{i\omega T e^{-i\theta}}}{T e^{-i\theta} + i\epsilon} (-i T e^{-i\theta}) d\theta d\omega \right| \\ \leq \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{1}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \frac{\pi}{|\omega|(T-\epsilon)} (1 - e^{-|\omega|T}) d\omega \\ = \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{4\pi T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} \frac{e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} (1 - e^{-|\omega|T})}{|\omega|} d\omega. \end{aligned}$$

Usando que $(1 - e^{-|\omega|T}) < 1$ e que $|\omega| \geq \Delta\omega$ para todo ω no intervalo de integração, temos que

$$\begin{aligned} & \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \left| \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_0^\pi \frac{e^{i\omega T e^{-i\theta}}}{T e^{-i\theta} + i\epsilon} (-iT e^{-i\theta}) d\theta d\omega \right| \\ & \leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{4\pi \Delta\omega T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} d\omega \\ & \leq \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{4\pi \Delta\omega T} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} d\omega \\ & \leq 0. \end{aligned}$$

Enfim,

$$\lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} \int_0^\pi \frac{e^{i\omega T e^{-i\theta}}}{T e^{-i\theta} + i\epsilon} (-iT e^{-i\theta}) d\theta d\omega = 0.$$

Voltando então a (B.13),

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E(\epsilon) &= \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_{\bar{E}}(\epsilon) \\ &= \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} \frac{i}{4\pi^2} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-\Delta\omega} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} (-2\pi i e^{\omega\epsilon}) d\omega \\ &= \lim_{T \uparrow \infty} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^{-bT^{-1/2}} e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \int_{-\infty}^0 e^{-(\omega+E)^2/(4\alpha)} d\omega. \end{aligned}$$

Fazendo a mudança de variável $\omega' = \frac{\omega+E}{\sqrt{4\alpha}}$, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{T \uparrow \infty} \lim_{\epsilon \downarrow 0} I_E(\epsilon) &= \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} \sqrt{4\alpha} \int_{-\infty}^{\frac{E}{\sqrt{4\alpha}}} e^{-\omega'^2} d\omega' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{E}{\sqrt{4\alpha}}} e^{-\omega'^2} d\omega' \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\frac{E}{\sqrt{4\alpha}}}^{\infty} e^{-\omega'^2} d\omega'. \end{aligned}$$

□