

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Matheus Barros Castro

PERCOLAÇÃO ORIENTADA EM DUAS DIMENSÕES

Belo Horizonte
2019

Matheus Barros Castro

PERCOLAÇÃO ORIENTADA CRÍTICA EM DUAS DIMENSÕES

Versão final

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.
Orientador: Roger William Câmara Silva

Belo Horizonte
2019

Castro, Matheus Barros.

C355p

Percolação orientada crítica em duas dimensões
[manuscrito] / Matheus Barros Castro. – 2019.
46 f. il.

Orientador: Roger William Câmara Silva.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.45.

1. Matemática – Teses. 2. Probabilidades – Teses. 3. Percolação – Teses. I. Silva, Roger William Câmara II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

Percolação orientada crítica em duas dimensões

MATHEUS BARROS CASTRO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Roger William Câmara Silva
DEST-UFMG

Prof. Paulo Cupertino de Lima
UFMG

Prof. Rémy de Paiva Sanchis
UFMG

Belo Horizonte, 19 de fevereiro de 2020.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais Paulo e Lúcia e ao meu irmão Gustavo por me apoiarem em todas as ocasiões, sendo meu eterno porto seguro. Gostaria de agradecer ao meu orientador Roger e à professora Rosângela por acreditarem em mim serem responsáveis diretos pelo pesquisador que hoje sou.

Às Olimpíadas brasileiras de matemática das escolas públicas (OBMEP), o Instituto nacional de matemática pura e aplicada (IMPA) e ao conselho nacional de desenvolvimento científico e tecnológico (CNPq) deixo o meu mais sincero apreço. Foi através dos programas fomentados por estas instituições e incentivo contínuo que me apaixonei pela matemática, o que me trouxe até aqui.

Agradeço ao professor Augusto Teixeira por me receber prontamente em sua sala todas as vezes que eu precisava de ajuda, aos amigos que foram forçados a me ouvir falar sobre percolação (mesmo sem ter nenhum interesse no assunto) e em especial para Otávio que me assistiu inúmeras vezes durante a escrita deste trabalho.

Por fim, agradeço à CNPq pelo apoio financeiro.

Resumo

Iremos investigar o processo de percolação orientada crítico em \mathbb{Z}^2 através de resultados similares à tecnologia de Russo Seymour Welsh. O objetivo deste trabalho é detalhar os argumentos feitos em *The box-crossing property for critical two-dimensional oriented percolation* [3] para controlar propriedades de alcance do modelo crítico. Primeiramente provaremos resultados similares à tecnologia de Russo Seymour Welsh para percolação orientada em \mathbb{Z}^2 . Em seguida encontraremos proporções de caixas que garantem cruzamentos com probabilidades não triviais. Por fim, iremos utilizar os teoremas provados para cotar superiormente e inferiormente a probabilidade do *cluster* da origem atravessar uma distância n e a largura típica do *cluster* da origem na altura n , condicionado ao evento que o *cluster* atingiu este patamar.

Palavras-chave: Percolação crítica. Percolação orientada. Probabilidades de cruzamento.

Abstract

We'll investigate the critical oriented percolation process in \mathbb{Z}^2 through results similar to the Russo-Seymour-Welsh. The objective of this work is to detail the arguments made in *The box-crossing property for critical two-dimensional oriented percolation* [3] to bound connection properties of the critical model. Primarily we'll prove results similar to the technology of Russo-Seymour-Welsh for oriented percolation in \mathbb{Z}^2 . Then we'll find box proportions that guarantee crossings with non-trivial probabilities. Finally, we'll use the theorems shown to bound from above and below the probability that the cluster of the origin extends beyond distance n and the typical width of the cluster on height n , conditioned on the event that the cluster has reached this level.

Keywords: Critical percolation. Oriented percolation. Crossing probabilities.

Lista de Figuras

1.1	Grafo orientado \mathbb{L}	14
1.2	Realização do evento $O(l)$	16
2.1	Cruzamentos de probabilidades representadas por $H_p(m, n)$ e $V_p(m, n)$ respectivamente	19
2.2	Em vermelho o patamar l_n . No conjunto dos pontos de l_n conectados a um vértice à esquerda da origem, o maior deles determina R_n	19
2.3	Os cruzamentos de caixa comparados no Teorema 2.1. Dizemos que os cruzamentos à esquerda são “difíceis” porque necessitam cruzar 3 caixas de dimensões $m \times n$ no sentido do cruzamento. Os cruzamentos à direita são ditos “fáceis” porque o fator $\alpha < 1$ multiplica a dimensão no sentido do cruzamento, de forma que os cruzamentos são mais fáceis que cruzamentos de caixas de dimensões $m \times \varepsilon n$)	20
2.4	Caixas B_r e B , onde Γ representa o maior cruzamento esquerda-direita da caixa B_r e o caminho em cinza representa a realização do evento J_γ	21
2.5	As possíveis realizações do evento $E \cap C_l$, na esquerda o caso em que os cruzamentos dos eventos C_l e E se intersectam, gerando o cruzamento esquerda-direita em B' e à direita o caso em que eles não se intersectam, o que também força o cruzamento esquerda-direita em B'	23
2.6	Representação do evento $G(k, l)$	23
2.7	Evento F_0 dado pela interseção do evento $G(k, l)$ com o sua reflexão, em vermelho o eixo de reflexão	24
2.8	Em contorno preto a caixa $B_{(0,0)}$, com padrão pontilhado a caixa $B_{(0,0)}^+$ e em cinza a caixa $B_{(0,0)}^-$. Os cruzamentos pretos indicam o evento em que o elo renormalizado $(x, x + (1, 1))$ é considerado aberto. Em azul o evento em que o elo renormalizado $(x, x + (-1, 1))$ é considerado aberto.	30
3.1	O cruzamento em preto indica o evento E . Em vermelho os caminhos presentes na demonstração da parte iv do Teorema 3.3. As linhas pontilhadas em azul denotam os bloqueios que realizam o evento F do Lema 3.6	35
3.2	Os eventos F e F' respectivamente	36
3.3	Regiões dos eventos E_{r^k} . Em cada retângulo 3×2 o evento E_n não envolve a caixa central inferior. Desta forma a escolha de $w_{rn} > 3w_n$ garante que os eventos $(E_{r^k})_{1 \leq k \leq K}$ dependem de conjuntos disjuntos de elos.	44

Sumário

Introdução	10
1 Conceitos iniciais	12
1.1 Percolação Bernoulli em \mathbb{Z}^d	12
1.2 O modelo de percolação orientada em \mathbb{Z}^2	14
1.3 Ferramentas básicas	15
2 Probabilidades de cruzamento de caixa	18
2.1 O resultado do tipo Russo-Seymour-Welsh(RSW)	19
2.2 A propriedade de cruzamento de caixa	28
3 Cotas superiores e inferiores para o crescimento do Cluster da Origem	33
Referências Bibliográficas	45
Apendice A - Resultado intermediário	46

Introdução

O modelo de percolação foi introduzido em 1957 (ver [2]) para modelar o fluxo de um fluido através de meio poroso. Tal modelagem consiste em definir um grafo que represente o meio poroso e atribuir aos elos (ou vértices) variáveis aleatórias que reflitam a porosidade do meio, atribuindo a característica de “aberto” ou “fechado” aos elos para indicar a passagem, ou não, do fluido. Neste contexto, o conjunto de vértices conectados à um ponto por elos abertos pode ser entendido como o conjunto de regiões molhadas pelo fluido derramado sobre tal ponto.

O modelo é indexado por um parâmetro p que indica o quão poroso é o meio. Valores próximos de 1 estão associados a meios muito porosos, em que o fluido escorre com grande facilidade, e meios com p próximo de 0 indicam meios pouco porosos.

Uma dos principais motivos para se estudar modelos de percolação é sua característica de criticalidade. Com iremos especificar no Capítulo 1, existe um valor $0 \leq p_c \leq 1$ chamado de ponto crítico que caracteriza duas fases do modelo, uma fase subcrítica quando $p < p_c$ e uma supercrítica com $p > p_c$. Na fase subcrítica o conjunto dos vértices conectados à origem por elos abertos (chamado de aglomerado da origem) é finito quase certamente. Na fase supercrítica a probabilidade deste aglomerado ser infinito passa a ser positiva.

No modelo que iremos estudar usamos o grafo \mathbb{L} em que os vértices serão o subconjunto dos pontos de \mathbb{Z}^2 cuja soma das coordenadas é par, e cada vértice terá um par de elos orientados conectando v a $v + (1, 1)$ e v a $v + (-1, 1)$ (Figura 1.1). Atribuiremos a cada elo e uma variável aleatória Bernoulli X_e de parâmetro p tomando valores no conjunto $\{0, 1\}$. Chamaremos o elo de aberto se $X_e = 1$ e fechado caso $X_e = 0$.

O modelo para $p < p_c$ e $p > p_c$ é bem estudado (Ver [4]), porém quando indexado por $p = p_c$ muitas de suas características ainda são desconhecidas. O estudo do modelo quando p tende a p_c também possui diversas questões em aberto.

Diferente de modelos de percolação não orientados, no modelo que estamos estudando o aglomerado da origem possui uma geometria confinada num cone. Um aglomerado de altura n possui largura de no máximo $2n$, porém dada uma largura n não existe limitação para a altura. Desta forma vê-se que o aglomerado “cresce” de forma diferente vertical e horizontalmente. A fim de estudar as dimensões do aglomerado da origem no modelo crítico ($p = p_c$), introduzimos as seguintes quantidades: chamando $l_n := \mathbb{Z} \times \{n\}$, definimos

$$R_n = \sup\{x : (x, n) \in \mathbb{L}, \exists y \leq 0 \text{ tal que } (y, 0) \rightarrow (x, n)\},$$

onde $(y, 0) \rightarrow (x, n)$ significa que o vértice $(y, 0)$ está conectado ao vértice (x, n) por um caminho de elos abertos (mais detalhes no Capítulo 1).

A variável aleatória R_n traz a ideia do que seria a “largura” do aglomerado da origem em l_n . Entender como se comportam os valores de $E(R_n | \{0 \rightarrow l_n\})$ e $P(0 \rightarrow l_n)$ nos trará, respectivamente, uma compreensão de qual o tamanho do aglomerado da origem horizontal e verticalmente, no modelo indexado por $p = p_c$.

Neste trabalho iremos detalhar o que foi feito em [3] para demonstrar, para o modelo crítico ($p = p_c$), cotas superiores e inferiores para $P(0 \rightarrow l_n)$ e $E(R_n|0 \rightarrow l_n)$. A construção dos argumentos foi feita em três partes.

Inicialmente construímos argumentos similares à tecnologia de Russo-Seymour-Welsh, de percolação não orientada em \mathbb{Z}^2 , para permitir cotar probabilidades de cruzamentos de caixas “difíceis” por cruzamentos “fáceis”. Utilizando estes primeiros resultados, encontramos quais dimensões uma caixa precisa ter para garantir probabilidades não triviais de cruzamento, e com isto montamos uma sequência de valores determinísticos $\{w_n\}_{n \geq 0}$. Por fim, mostramos que as quantidades w_n possuem mesma ordem de grandeza $P(0 \rightarrow l_n)$ e $E(R_n|0 \rightarrow l_n)$ e então, obtendo cotas para w_n , conseguimos cotas para as dimensões do aglomerado da origem.

No primeiro capítulo iremos introduzir conceitos básicos de percolação e o modelo orientado em que iremos trabalhar. No segundo capítulo provaremos resultados similares à tecnologia de Russo-Seymour-Welsh para relacionar probabilidades de cruzamentos de caixas “difíceis” com “fáceis”, e encontraremos escalas que garantirão probabilidades não triviais para tais cruzamentos. No terceiro capítulo iremos utilizar os resultados demonstrados no capítulo anterior para encontrar as cotas superiores e inferiores propostas.

Capítulo 1

Conceitos iniciais

O modelo de percolação surgiu em [2], onde se propôs modelar quais regiões de um meio permeável ficam molhadas ao entrar em contato com um fluido, onde a dinâmica do escoamento é definida pelo meio, e não pelo fluido. Para responder a questão, um grafo foi construído para representar o meio, associando aos seus elos variáveis aleatórias que indicavam a passagem ou não do fluido.

Sob um ponto de vista teórico, percolação consiste no estudo de grafos aleatórios, onde se assume uma distribuição de probabilidade para os vértices ou arestas do grafo a fim de obter subgrafos que modelem comportamentos reais. A ideia da percolação se aplica para quaisquer grafos, mas para fins de compreensão dos conceitos mais básicos e ferramentas utilizadas neste estudo, iremos começar com um dos modelos mais clássicos, a percolação bernoulli de elos em \mathbb{Z}^d .

1.1 Percolação Bernoulli em \mathbb{Z}^d

Seja $G = (V, E)$ o grafo com conjunto de vértices V e de elos E . Tomaremos $V = \mathbb{Z}^d$ e $E = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d : \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1\}$, isto é, a rede quadriculada na qual existe um elo ligando vértices adjacentes da rede. Abusamos um pouco da notação chamando o grafo G de \mathbb{Z}^d , e dizemos que estamos fazendo “percolação em \mathbb{Z}^d ”.

Definimos o modelo de percolação através da seguinte construção: para cada elo $e \in E$ associamos uma variável aleatória bernoulli $\omega(e)$ tomando valores em $\{0, 1\}$, cuja medida de probabilidade denotaremos por μ_e , tal que $\mu_e(\{1\}) = p$, $\mu_e(\{0\}) = 1 - p$. Tomaremos o espaço amostral $\Omega = \prod_{e \in E} \{0, 1\}$, cujos elementos $\omega = (\omega(e) : e \in E)$ são chamados de configurações. Chamaremos um elo $e \in E$ de aberto caso $\omega(e) = 1$ e de fechado caso $\omega(e) = 0$.

Fixada uma enumeração dos elos do grafo G , definimos para um conjunto de índices finito I e conjuntos $\{A_i\}_{i \in I}$, o conjunto cilíndrico

$$C(\Omega, I, \{A_i\}_{i \in I}) = \{\omega \in \Omega : \omega(e_i) \in A_i, \forall i \in I\}.$$

Tomamos então a sigma álgebra \mathcal{F} gerada por todos os conjuntos cilíndricos em Ω .

Por fim, tomamos a medida produto de probabilidade

$$P_p = \prod_{e \in E} \mu_e,$$

definindo assim um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$ indexado pelo parâmetro p .

Dizemos que dois vértices $x, y \in V$ estão conectados por caminhos abertos se existe um conjunto de vértices $x = v_0, v_1, \dots, v_n = y$ e elos **abertos** $e_1 = (v_0, v_1), e_2 = (v_1, v_2), \dots, e_n = (v_{n-1}, v_n)$, de forma que seja possível “sair do vértice x e chegar ao vértice y passando apenas por elos abertos”. Denotamos esta relação por $x \leftrightarrow y$. Note que, neste caso $x \leftrightarrow y$ implica $y \leftrightarrow x$. No caso orientado isto não será verdade.

Definimos o aglomerado do vértice $x \in V$ como o conjunto

$$C(x) := \{y \in V : y \leftrightarrow x\}.$$

Denotaremos como C o aglomerado da origem.

O tamanho do aglomerado C , denotado por $|C|$, é o número de vértices em C , um dos principais objetos de interesse no estudo da percolação. Na ocorrência do evento $\{|C| = \infty\}$ dizemos que houve **percolação**. Denotamos a probabilidade deste evento por

$$\theta(p) = P_p(|C| = \infty) = P_p(0 \leftrightarrow \infty).$$

É claro que $\theta(0) = 0$ e $\theta(1) = 1$. Um simples argumento de acoplamento (Ver Cap. 2 de [8]) nos permite demonstrar que a função $\theta(p)$ é não decrescente em p . Vemos então que existe um certo valor crítico p_c , função de d , tal que

$$\begin{cases} \theta(p) = 0 & p < p_c; \\ \theta(p) > 0 & p > p_c; \end{cases}$$

Este valor $p_c(d)$ é chamado de ponto crítico, formalmente definido por

$$p_c(d) = \sup\{p : \theta(p) = 0\}.$$

Para $d = 1$, se tomarmos $p < 1$ temos que a probabilidade de um elo estar fechado é positiva. Utilizando Borel-Cantelli, vemos que existem infinitos elos fechados quase certamente. Como um elo fechado à esquerda e à direita da origem é o suficiente para que o aglomerado da origem seja finito, concluímos que $\theta(p) = 0$ e com isso tem-se que $p_c(1) = 1$. Para $d \geq 2$ temos um ponto crítico não trivial, isto é, $0 < p_c(d) < 1$ (ver Cap. 1.4 de [8]).

O modelo então possui uma fase subcrítica para $p < p_c$ e uma fase supercrítica com $p > p_c$. Na fase subcrítica o aglomerado da origem é finito quase certamente. Na fase supercrítica a probabilidade do aglomerado ser infinito é positiva. Outras quantidades de interesse também possuem esse comportamento crítico, como o tamanho médio do aglomerado

$$\chi(p) = E_p(|C|) = \infty \cdot \theta(p) + \sum_{n=1}^{\infty} n P_p(|C| = n),$$

sendo $\chi(p) = \infty$ para $p > p_c$ e $\chi(p) < \infty$ para $p < p_c$ (Este último é devido ao decaimento exponencial do tamanho do aglomerado na fase subcrítica, que pode ser visto em [8]). Essas quantidades apresentam a mudança no mesmo ponto crítico, com isto costuma-se dizer que o modelo possui uma única transição de fase.

Sabe-se que $p_c(1) = 1$ e que $0 < p_c(d) < 1$ para $d \geq 2$. Kesten demonstrou que $p_c(d)$ é assintoticamente igual a $(2d)^{-1}$ para $d \rightarrow \infty$ (Ver [12]). Não se sabe entretanto, qual é o comportamento da função de percolação $\theta(p)$ no ponto crítico. Para $d = 2$, Harris mostrou que $\theta(\frac{1}{2}) = 0$ (Ver [9]) e mais tarde Kesten mostrou que $p_c(2) = \frac{1}{2}$ (Ver [11]). Foi possível provar que $\theta(p_c) = 0$ para $d \geq 11$ (ver [7]). Para demais valores de d ainda não foi obtida uma demonstração, embora acredite-se que $\theta(p_c) = 0 \forall d \geq 2$.

1.2 O modelo de percolação orientada em \mathbb{Z}^2

Definimos agora o processo de percolação orientada em \mathbb{Z}^2 . Sob muitos aspectos este modelo é entendido como a versão em tempo discreto do processo de contato. A relação entre os modelos vem da representação gráfica proposta por Harris em [10] e adaptações diretas dos argumentos ou métodos de renormalização como feito em [5]. Por conta disto, grande parte dos resultados da área são adaptações do modelo de partículas interagentes. Tomaremos uma nova rede adaptada para representar o grafo, similar à \mathbb{Z}^2 utilizada no caso não orientado, rotacionada e escalada de forma adequada.

Seja $\mathbb{L} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2 : x_1 + x_2 \text{ é par}\}$. Cada vértice $x \in \mathbb{L}$ está conectado aos vértices $x + (-1, 1)$ e $x + (1, 1)$ por dois elos **orientados** (Figura 1.1). Fixado $p \in [0, 1]$, definimos um elo aberto com probabilidade p e fechado com probabilidade $1 - p$ da mesma forma que o caso não orientado da Seção 1.1. Dizemos que na configuração ω existe um caminho aberto do vértice $x \in \mathbb{L}$ ao vértice $y \in \mathbb{L}$ se existe um conjunto de vértices $x = x_1, x_2, \dots, x_n = y$ e um conjunto de elos abertos $e_1 = (x_1, x_2), e_2 = (x_2, x_3), \dots, e_{n-1} = (x_{n-1}, x_n)$ na configuração ω . Denotamos este evento por $\{x \rightarrow y\}$. Note que, diferente do caso não orientado, o evento $x \rightarrow y$ não implica que $y \rightarrow x$ uma vez que os elos são orientados.

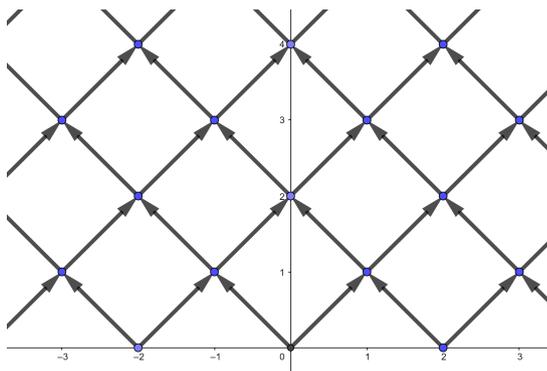


Figura 1.1: Grafo orientado \mathbb{L}

Uma descrição detalhada do processo de percolação orientada em \mathbb{Z}^2 pode ser encontrado em [4]. Além de resultados clássicos, como decaimento exponencial na fase subcrítica, encontra-se neste artigo uma construção do ponto crítico baseada na quantidade

$$r_n = \sup\{x : (x, n) \in \mathbb{L}, (0, 0) \rightarrow (x, n)\},$$

que representa o ponto mais à direita do aglomerado da origem na altura n . Através de argumentos que envolvem subaditividade encontra-se que, em configurações em que ocorre percolação, existe

$$\alpha(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_n}{n}.$$

O valor de $\alpha(p)$ indica a abertura do “cone” formado pelo aglomerado da origem. Durrett mostrou (Ver [4]) que através deste α , pode-se caracterizar o ponto crítico do modelo em questão como

$$p_c = \inf\{p : \alpha(p) > 0\}. \quad (1.1)$$

Sabemos bem como se comporta o aglomerado da origem nas fases sub e supercrítica do modelo. Para $p = p_c$, Durrett e Griffeath [5] mostraram que $\alpha(p_c) = 0$ e Bezuidenhout e Durrett [1] demonstraram que $P_{p_c}(0 \rightarrow \infty) = 0$. Para compreender as características

do aglomerado da origem no modelo crítico, é necessário ainda responder como se comportam quantidades como r_n em p_c e $P_{p_c}(0 \rightarrow \mathbb{Z} \times \{n\})$ que indicam respectivamente o comprimento horizontal e vertical do aglomerado.

No capítulo seguinte iremos detalhar as construções feitas em [3] para demonstrar o comportamento das quantidades $P(0 \rightarrow \mathbb{Z} \times \{n\})$ e $E(R_n)$ (definida mais adiante) em $p = p_c$, que estão relacionadas com o tamanho do aglomerado na vertical e horizontal respectivamente. O método desenvolvido se baseia em resultados similares aos da teoria de Russo-Seymour-Welsh para percolação não orientada em \mathbb{Z}^2 . A partir de raciocínios envolvendo cruzamentos de caixa os autores foram capazes de definir quantidades w_n que possuem ordens de grandeza comparáveis às variáveis em estudo, permitindo a obtenção de cotas inferiores e superiores melhores do que as presentes anteriormente na literatura. A fim de estudar estas propriedades para o modelo orientado, iremos enunciar algumas ferramentas de comum utilização no estudo de percolação.

1.3 Ferramentas básicas

Inicialmente introduzimos o conceito de eventos crescentes dentro do contexto de percolação.

Sejam $\omega, \omega' \in \Omega$ duas configurações, definimos a relação de ordem parcial (\succ) tal que $\omega' \succ \omega$ se, e somente se, $\omega'(e) \geq \omega(e)$, $\forall e \in E$ (em outras palavras, $\omega' \succ \omega$ se todo elo fechado em ω' também está fechado em ω).

Definição 1.3.1. *Dizemos que $A \in \mathcal{F}$ é um **evento crescente** se*

$$\omega \in A \implies \omega' \in A \quad \forall \omega' \succ \omega.$$

Dizemos também que uma variável aleatória N é crescente se $N(\omega) \leq N(\omega')$ para todo $\omega \prec \omega'$.

Declaramos uma variável aleatória X como decrescente se $-X$ é crescente, um evento A é dito decrescente caso seu complemento seja crescente.

Lema 1.1 (A desigualdade FKG). *Valem as seguintes afirmações:*

- Se X e Y são variáveis aleatórias crescentes (ou decrescentes) tais que $E_p(X^2) < \infty$ e $E_p(Y^2) < \infty$, então

$$E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y).$$

Em particular, se A e B são eventos crescentes (ou decrescentes) então

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B).$$

Pode-se interpretar este teorema da seguinte forma: para um evento crescente, quanto mais elos abertos, maior a probabilidade do evento ocorrer, logo a realização de um evento crescente contribui para a realização de outros.

Lema 1.2 (Truque da raiz). *Sejam A_1, \dots, A_N eventos crescentes. Então*

$$\max\{P_p(A_n) : 1 \leq n \leq N\} \geq 1 - (1 - P_p(A_1 \cup \dots \cup A_N))^{1/N}.$$

Demonstração. Primeiro usando FKG cotamos inferiormente a probabilidade de nenhum dos A_n ocorrer

$$P_p \left(\bigcap_{n=1}^N A_n^c \right) \geq \prod_{n=1}^N P_p(A_n^c) = \prod_{n=1}^N (1 - P_p(A_n)) \geq (1 - \max_{1 \leq n \leq N} \{P_p(A_n)\})^N.$$

Reescrevendo essa probabilidade usando as leis de De Morgan, obtemos

$$P_p \left(\bigcap_{n=1}^N A_n^c \right) = P_p \left(\left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right)^c \right) = 1 - P_p \left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right)$$

Combinando as duas expressões obtemos

$$\begin{aligned} 1 - P_p \left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right) &\geq (1 - \max_{1 \leq n \leq N} \{P_p(A_n)\})^N \\ \implies \max_{1 \leq n \leq N} \{P_p(A_n)\} &\geq 1 - \left(1 - P_p \left(\bigcup_{n=1}^N A_n \right) \right)^{\frac{1}{N}} \end{aligned}$$

□

Russo, Seymour e Welsh desenvolveram uma tecnologia para o estudo de probabilidades em percolação envolvidas com o cruzamento de caixas (retângulos) na rede não orientada \mathbb{Z}^2 , tal como a detalhada na Seção 1.1.

Chamamos de cruzamento da esquerda para a direita (respectivamente de cima para baixo) de um retângulo B um caminho formado por elos abertos conectando um vértice do lado esquerdo da caixa com um do lado direito (do lado de cima ao lado de baixo) não utilizando elos que conectem dois vértices da fronteira ∂B da caixa.

Seja $B(kl, l) = [-l, (2k - 1)l] \times [-l, l]$ uma caixa de tamanho $2kl$ por $2l$. Abreviamos $B(l, l) = B(l)$. Denotaremos o evento “Existe um cruzamento da esquerda para a direita na caixa $B(kl, l)$ ” por $LR(kl, l)$ e da mesma forma $LR(l, l) = LR(l)$.

Denotamos o anel $B(3l) \setminus B(l)$ por $A(l)$ e seja $O(l)$ o evento em que existe um circuito aberto no anel $A(l)$ contendo a origem em seu interior, identificado na Figura 1.2.

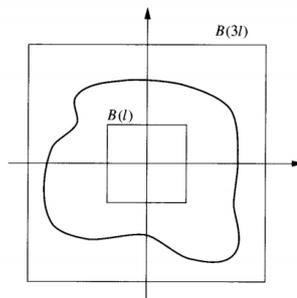


Figura 1.2: Realização do evento $O(l)$

O teorema de Russo-Seymour-Welsh (RSW) nos dá uma cota inferior para a probabilidade do evento $LR(\frac{3}{2}l, l)$ em termos da probabilidade de cruzamento de caixas quadradas $LR(l)$.

Teorema 1.3 (Teorema RSW). *No modelo de percolação não orientado em \mathbb{Z}^2 , se $P_p(LR(l)) = \tau$, então*

$$P_p\left(LR\left(\frac{3}{2}l, l\right)\right) \geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^3, \quad (1.2)$$

A partir do teorema 1.3 outros resultados de comparação de cruzamentos de caixas são formados, tais como os do lema 1.4.

Lema 1.4. *No modelo de percolação não orientado em \mathbb{Z}^2 , se $P_p(LR(l)) = \tau$ então*

$$P_p(O(l)) \geq \left\{ \tau (1 - \sqrt{1 - \tau})^4 \right\}^{12}. \quad (1.3)$$

$$P_p(LR(2l, l)) \geq P_p(LR(l)) P_p\left(LR\left(\frac{3}{2}l, l\right)\right)^2, \quad (1.4)$$

$$P_p(LR(3l, l)) \geq P_p(LR(l)) P_p(LR(2l, l))^2, \quad (1.5)$$

$$P_p(O(l)) \geq P_p(LR(3l, l))^4. \quad (1.6)$$

Isto define a tecnologia de RSW, permitindo a comparação entre as probabilidades de cruzamentos entre caixas específicas em termos das probabilidades de caixas simétricas.

Todos os resultados apresentados nesta seção podem ser encontrados em detalhes no livro [8].

A desigualdade FKG e o truque da raiz são válidos para quaisquer grafos, porém a tecnologia de RSW está fortemente ancorada na estrutura isotrópica da percolação Bernoulli em \mathbb{Z}^2 . Em [3] foi desenvolvido um conjunto de argumentos similares envolvendo cruzamentos de caixa no caso orientado, que estudaremos em detalhes no Capítulo 2.

Capítulo 2

Probabilidades de cruzamento de caixa

Neste capítulo estudaremos argumentos que relacionam cruzamentos de caixas. Na primeira seção obteremos as ferramentas no estilo de Russo-Seymour-Welsh para demonstrar os resultados da seção seguinte. O principal resultado que encontraremos nos fornecerá proporções que garantem a ocorrência de cruzamentos com probabilidade não trivial. Tais escalas serão cruciais para controlar $P(0 \rightarrow l_n)$ e $E(R_n)$.

Os argumentos aqui apresentados são traduções dos feitos em [3], com a adição de alguns detalhes para melhor compreensão e mudanças de algumas constantes que garantem a validade dos argumentos. Na Seção 2.1, as principais alterações estão nas linhas que resultam na Expressão (2.5) do Lema 2.3, os valores das constantes utilizadas na demonstração do Teorema 2.1 e na afirmação feita ao demonstrar o Lema 2.4. Na Seção 2.2 as alterações são alguns detalhes adicionados na demonstração do Lema 2.6.

Inicialmente iremos definir algumas notações que serão frequentemente utilizadas neste capítulo.

Notação:

- $H_p(m, n) :=$ Probabilidade de existir um caminho de elos abertos contido na caixa $[0, m] \times [0, n]$ e que ligue $\{0\} \times [0, n]$ a $\{m\} \times [0, n]$.(Figura 2.1)
- $V_p(m, n) :=$ Probabilidade de existir um caminho de elos abertos contido na caixa $[0, m] \times [0, n]$ e que ligue $[0, m] \times \{0\}$ a $[0, m] \times \{n\}$.(Figura 2.1)
- $R_n := \max\{x \in \mathbb{Z} : \exists y \leq 0 \text{ tal que } (y, 0) \rightarrow (x, n)\}$.(Figura 2.2)
- $l_n := \mathbb{Z} \times \{n\}$.(Figura 2.2)

Chamamos os valores de H_p e V_p de probabilidades de cruzamento horizontal e vertical de caixa. Ao tratar o caso $p = p_c$ omitiremos o índice p . Tomando $\lceil x \rceil$ como o menor inteiro maior que x , adotaremos a seguinte convenção, caso m ou n não sejam valores inteiros

$$H_p(m, n) = H_p(\lceil m \rceil, \lceil n \rceil) \quad \text{e} \quad V_p(m, n) = V_p(\lceil m \rceil, \lceil n \rceil).$$

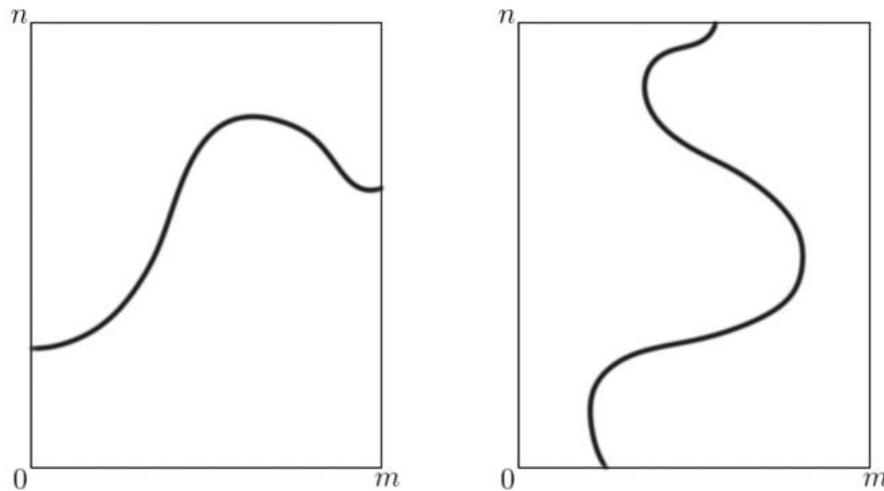


Figura 2.1: Cruzamentos de probabilidades representadas por $H_p(m, n)$ e $V_p(m, n)$ respectivamente

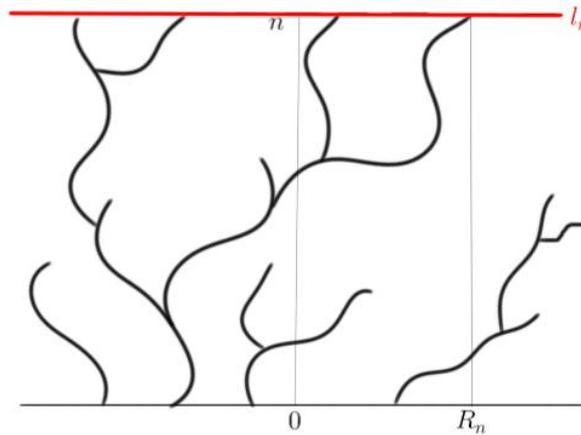


Figura 2.2: Em vermelho o patamar l_n . No conjunto dos pontos de l_n conectados a um vértice à esquerda da origem, o maior deles determina R_n

2.1 O resultado do tipo Russo-Seymour-Welsh (RSW)

Começamos enunciando o resultado do tipo RSW que será uma das principais ferramentas para obter os resultados desejados.

Teorema 2.1 (Resultado do tipo RSW). *Para cada $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$ existe $\varepsilon \in (0, 1)$ e um homeomorfismo crescente $g_0 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que para todo $m, n \geq 1$, temos*

$$\min\{V_p(m, 3n), H_p(3m, n)\} \geq g_0(\min\{V_p(m, \alpha\varepsilon n), H_p(\alpha m, \varepsilon n)\}).$$

O teorema pode ser compreendido da seguinte forma: imagine que tem-se inicialmente uma caixa padrão de dimensões $m \times n$. A probabilidade de cruzar 3 caixas empilhadas no sentido “difícil”, isto é, no sentido do empilhamento, é maior que cruzar uma nova caixa de dimensão $m \times \varepsilon n$ reescalada por α no sentido do cruzamento. Isto é, o teorema diz que existe uma nova escala $m \times \varepsilon n$ que garante que a probabilidade do cruzamento difícil, à esquerda da desigualdade, é maior que o cruzamento fácil, à direita da desigualdade. (Ver Figura 2.3).

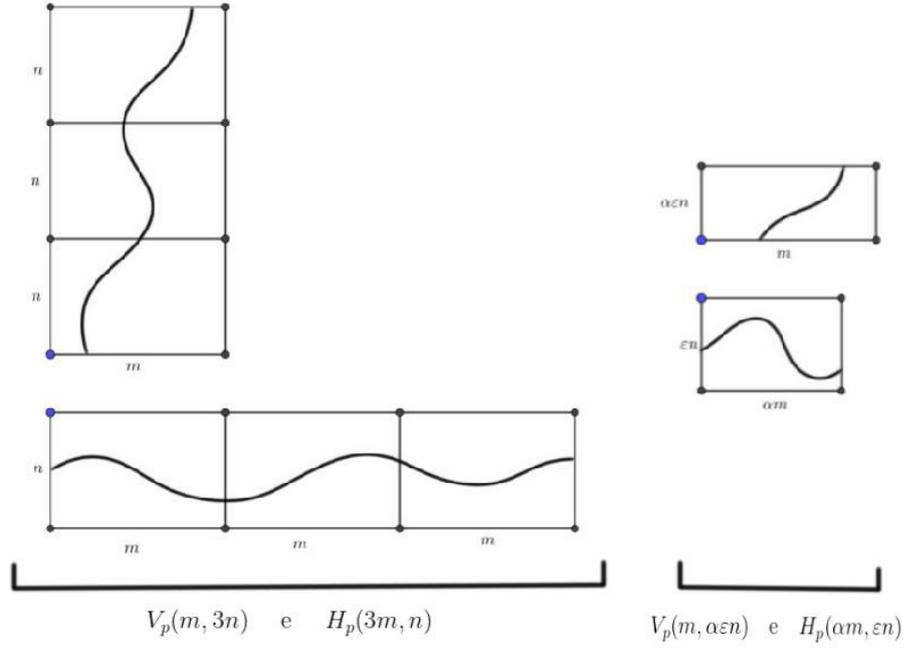


Figura 2.3: Os cruzamentos de caixa comparados no Teorema 2.1. Dizemos que os cruzamentos à esquerda são “difíceis” porque necessitam cruzar 3 caixas de dimensões $m \times n$ no sentido do cruzamento. Os cruzamentos à direita são ditos “fáceis” porque o fator $\alpha < 1$ multiplica a dimensão no sentido do cruzamento, de forma que os cruzamentos são mais fáceis que cruzamentos de caixas de dimensões $m \times \epsilon n$)

A existência do fator ϵ é uma espécie de preço pago na altura da caixa para garantir a comparação entre as caixas. Isto é um fator necessário por estarmos trabalhando em percolação **orientada** (o resultado original de RSW na percolação não orientada não precisa deste tipo de ajuste). De fato, uma vez que os elos são orientados, é impossível por exemplo cruzar horizontalmente uma caixa de dimensões $2n \times n$ pois qualquer caminho que avança n vértices na horizontal também o faz na vertical.

Para demonstrar o teorema precisaremos passar por alguns lemas que enunciaremos e demonstraremos em sequência.

Lema 2.2. *Para todo $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$, existe um homeomorfismo crescente $g_1 : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que para todo $k, l \geq 1$,*

$$H_p(k, l) \geq g_1(\min\{V_p(k, l), H_p(\alpha k, l/2)\}).$$

Demonstração. Assuma que $k/2, l/2$ e αk sejam inteiros. Introduzimos as caixas

$$B = [-k/2, k/2] \times [0, l] \text{ e } B_r = [0, \alpha k] \times [l/2, l],$$

ilustradas na Figura 2.4.

Seja E o evento em que existe um caminho de elos abertos contido em $B \cup B_r$ saindo da base de B e terminando na borda direita de B_r . Vamos inicialmente mostrar que

$$P_p[E] \geq H_p(\alpha k, l/2) \left(1 - \sqrt{1 - V_p(k, l)}\right). \quad (2.1)$$

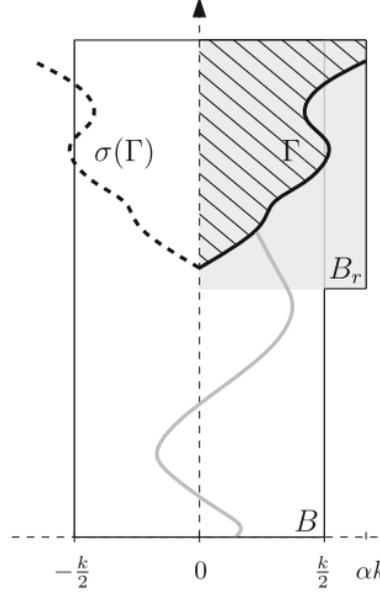


Figura 2.4: Caixas B_r e B , onde Γ representa o maior cruzamento esquerda-direita da caixa B_r e o caminho em cinza representa a realização do evento J_γ

Seja ω uma configuração contendo um cruzamento da esquerda para a direita em B_r . Defina Γ como o cruzamento da esquerda para a direita “mais superior”, isto é, no conjunto dos elos acima do caminho Γ não existe um cruzamento da esquerda para a direita em B_r . Caso não haja tal cruzamento, tome $\Gamma = \emptyset$. Como a caixa B_r é cruzada da esquerda para a direita com probabilidade $H_p(\alpha k, l/2)$ e existe um caminho horizontal em B_r se, e somente se, existe um “mais superior” Γ , temos

$$H_p(\alpha k, l/2) = P_p(\exists \Gamma \neq \emptyset) = P_p\left(\bigcup_{\gamma \neq \emptyset} \{\Gamma = \gamma\}\right) = \sum_{\gamma \neq \emptyset} P_p(\Gamma = \gamma), \quad (2.2)$$

onde o somatório é tomado sobre todos os possíveis caminhos, γ , da esquerda para a direita em B_r . Fixe um caminho γ . Introduza a simetria ortogonal $\sigma : \mathbb{L} \rightarrow \mathbb{L}$, com respeito ao eixo y , isto é, para qualquer subgrafo dado por vértices $\{(x_i, y_i), i \in I\} \subset \mathbb{L}$ indexados por um conjunto de índices I ,

$$\sigma(\{(x_i, y_i), i \in I\}) = \{(-x_i, y_i), i \in I\},$$

com os elos refletidos de forma equivalente.

Defina S_γ o conjunto dos vértices em B que são atingíveis a partir de um vértice da base da caixa B por um caminho de elos orientados abertos que não cruzam $\gamma \cup \sigma(\gamma)$. Seja J_γ o evento em que existe um caminho em S_γ conectando a parte de baixo da caixa B a γ dentro de S_γ . É evidente que $J_\gamma \cup J_{\sigma(\gamma)} \supseteq \{\text{Existe cruzamento vertical em } B\}$ pois todo cruzamento vertical em B atinge γ ou $\sigma(\gamma)$, além disso, por simetria temos que $P_p(J_\gamma) = P_p(J_{\sigma(\gamma)})$, assim, utilizando o truque da raiz quadrada obtemos

$$P_p(J_\gamma) \geq 1 - (1 - P_p(J_\gamma \cup J_{\sigma(\gamma)}))^{1/2} \geq 1 - (1 - V_p(k, l))^{1/2}. \quad (2.3)$$

Agora, se $\{\Gamma = \gamma\}$ e J_γ ocorrem, então o evento E ocorre. Portanto, somando sobre

todos os possíveis caminhos γ , obtemos

$$\begin{aligned} P_p(E) &\geq \sum_{\gamma \neq \emptyset} P_p(\{\Gamma = \gamma\} \cap J_\gamma) \\ &= \sum_{\gamma \neq \emptyset} P_p(\Gamma = \gamma)P_p(J_\gamma). \end{aligned} \quad (2.4)$$

Na segunda linha, utilizamos que o evento $\{\Gamma = \gamma\}$ depende dos elos com vértices em $B \setminus S_\gamma$ enquanto J_γ depende dos elos em S_γ , portanto estes eventos são independentes. Finalmente obtemos (2.1) combinando (2.4) com (2.2) e (2.3), isto é

$$\begin{aligned} P_p(E) &\stackrel{(2.4)}{\geq} \sum_{\gamma \neq \emptyset} P_p(\Gamma = \gamma)P_p(J_\gamma) \stackrel{(2.3)}{\geq} \sum_{\gamma \neq \emptyset} P_p(\Gamma = \gamma) \left(1 - \sqrt{1 - V_p(k, l)}\right) \\ &\stackrel{(2.2)}{=} H_p(\alpha k, \frac{l}{2}) \left(1 - \sqrt{1 - V_p(k, l)}\right). \end{aligned}$$

Agora concluiremos a demonstração do lema. Considere as caixas

$$B_l = [k/2 - \alpha k, k/2] \times [0, l/2] \quad \text{e} \quad B' = [k/2 - \alpha k, \alpha k] \times [0, l].$$

Seja C_l o evento em que a caixa B_l é cruzada da esquerda para a direita. No evento $E \cap C_l$, precisa existir um caminho da esquerda para a direita na caixa B' . De fato, precisa ocorrer um dos casos abaixo (ilustrado na Figura 2.5).

- Um cruzamento da esquerda para a direita em B_l intersecta um cruzamento da base de B até a lateral direita de B_r , assim criando um caminho da esquerda para a direita em B' .
- Nenhum cruzamento da esquerda para a direita em B_l intersecta um cruzamento da base de B ao lado direito de B_r , neste caso qualquer um dos cruzamentos esquerda-direita em B_l contém um cruzamento esquerda-direita em B' .

Uma vez que $2\alpha - \frac{1}{2} > 1$, temos que a largura da caixa B' é $|\alpha k - k/2 + \alpha k| = k \cdot |2\alpha - 1/2| > k$, logo, pela transitividade do grafo, deduzimos que

$$\begin{aligned} H_p(k, l) &\geq P_p(B' \text{ é cruzada da esquerda para a direita}) \\ &\geq P_p(E \cap C_l) \\ &\stackrel{\text{(FKG)}}{\geq} P_p(C_l)P_p(E) \\ &\stackrel{(2.1)}{\geq} H_p(\alpha k, l/2)^2 \left(1 - \sqrt{1 - V_p(k, l)}\right). \end{aligned}$$

Fazendo então $g_1 = x^2(1 - \sqrt{1 - x})$ terminamos a prova para os casos em que k e l são dois inteiros pares.

Para expandir a demonstração para valores arbitrários de k e l repetimos a demonstração com $B = [-\lceil k/2 \rceil, \lceil k/2 \rceil] \times [0, \lceil l \rceil]$ e $B_r = [0, \lceil \alpha k \rceil] \times [\lceil l \rceil - \lceil l/2 \rceil, \lceil l \rceil]$. Note que, com a escolha de $\alpha \in (\frac{3}{4}, 1)$, garantimos que, mesmo com αk e $k/2$ não inteiros, a desigualdade $2\lceil \alpha k \rceil - \lceil k/2 \rceil \geq k$ é verdadeira. Desta forma conseguimos comparar a probabilidade $H_p(k, l)$ com o cruzamento da caixa B' , permitindo assim concluir a demonstração da mesma forma.

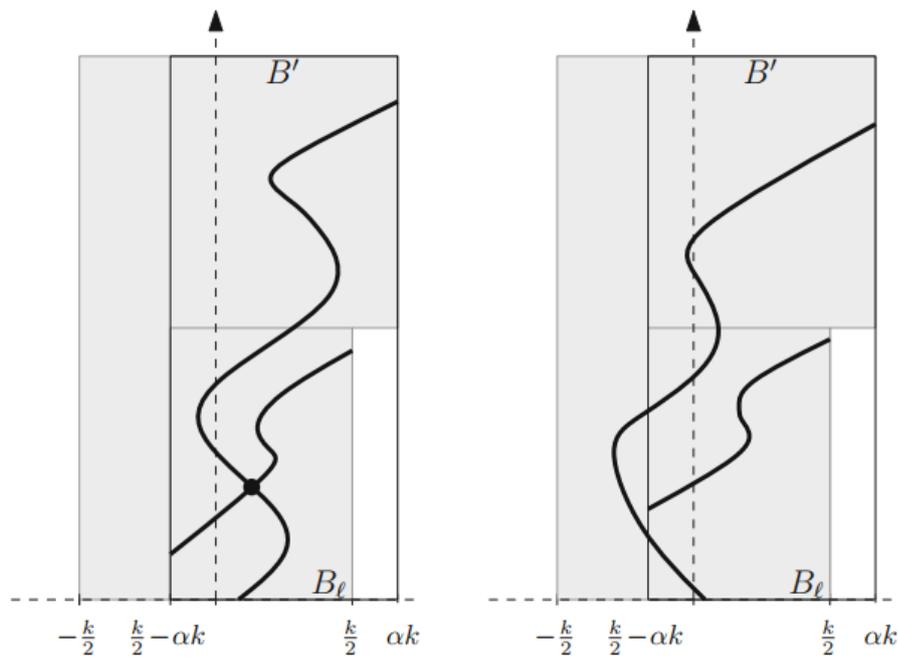


Figura 2.5: As possíveis realizações do evento $E \cap C_l$, na esquerda o caso em que os cruzamentos dos eventos C_l e E se intersectam, gerando o cruzamento esquerda-direita em B' e à direita o caso em que eles não se intersectam, o que também força o cruzamento esquerda-direita em B'

□

Lema 2.3. *Seja $G(k, l)$ é o evento em que $\{0\} \times [0, l]$ está conectado a $\{k\} \times [2l, 3l]$ ou $[0, k] \times \{3l\}$ (Figura 2.6). Para todo inteiro $C > 0$ e inteiros $k, l \geq 1$, temos*

$$V_p(k, Cl) \geq P_p(G(k, l))^{2C}.$$

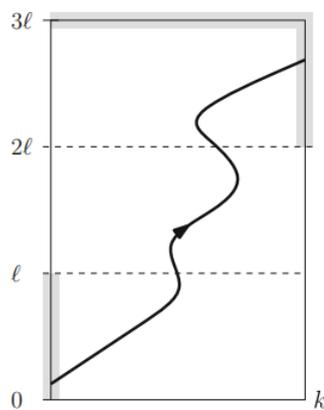


Figura 2.6: Representação do evento $G(k, l)$

Demonstração. Para todo inteiro $i \geq 0$, seja F_i o evento em que $\{0\} \times [il, (i+1)l]$ está conectado a $\{0\} \times [(i+2)l, (i+3)l]$ dentro da faixa $[0, k] \times \mathbb{Z}$. Primeiro, por invariância translacional temos que a probabilidade de F_i é igual à probabilidade de F_0 .

Observe que o modelo possui simetria com respeito às reflexões verticais, no sentido que a probabilidade de existir um caminho ligando $\{k\} \times [0, l]$ ou $[0, k] \times \{0\}$ a $\{0\} \times [2l, 3l]$ (a reflexão vertical do evento $G(k, l)$ com respeito ao centro da caixa $[0, k] \times [0, 3l]$) tem a mesma probabilidade do evento $G(k, l)$.

Além disso, o evento F_0 ocorre sempre que $G(k, l)$ ocorre junto com sua versão simétrica (Figura 2.7). Portanto, pela desigualdade FKG, nós temos que para todo $i \geq 0$,

$$P_p(F_i) = P_p(F_0) \geq P_p(G(k, l))^2.$$

Finalmente, se os eventos F_i ocorrem para $0 \leq i < C$, a caixa $[0, k] \times [l, l + Cl]$ é cruzada verticalmente, logo o lema segue da desigualdade FKG. \square

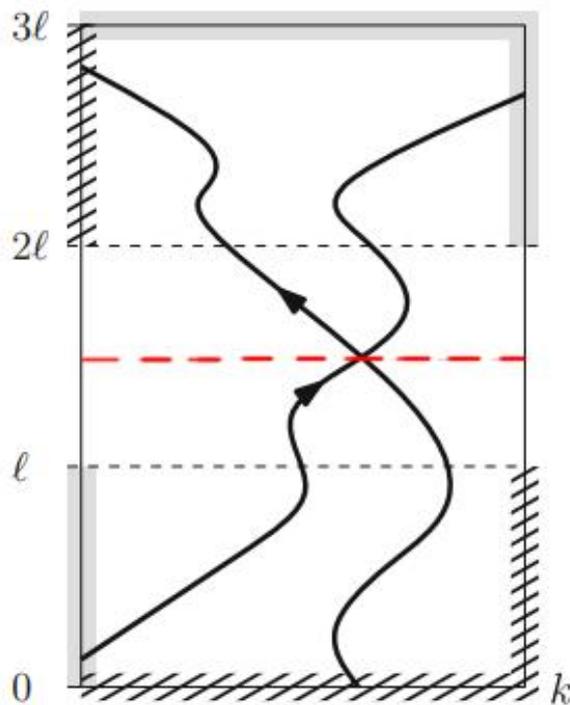


Figura 2.7: Evento F_0 dado pela interseção do evento $G(k, l)$ com o sua reflexão, em vermelho o eixo de reflexão

A seguir faremos a demonstração do Teorema 2.1

Demonstração do Teorema 2.1. Sem perda de generalidade, podemos assumir que αm é um inteiro. Nós começamos demonstrando a cota inferior para $H_p(3m, n)$ assumindo a cota inferior para $V_p(m, 3n)$. Para $k \geq m$ e $l \leq 3n$, o Lema 2.2 implica que

$$H_p(k, l) \geq g_1(\min\{V_p(k, l), H_p(\alpha k, l/2)\}) \geq g_1(\min\{V_p(m, 3n), H_p(\alpha k, l/2)\})$$

Observe que, como g_1 é um homeomorfismo não decrescente, temos que $g_1(\min\{a, b\}) = \min\{g_1(a), g_1(b)\}$. Observe também que a função encontrada g_1 no Lema 2.2 é $g_1(x) =$

$x^2(1 - \sqrt{1 - x})$ de forma que $g_1(x) \leq x \forall x \in [0, 1]$. Com base nestas afirmações, iterando a afirmação acima s vezes, para todo s tal que $\alpha^{(s-1)}k \geq m$, obtemos

$$\begin{aligned}
H_p(k, l) &\geq g_1(\min\{V_p(k, l), H_p(\alpha k, l/2)\}) \\
&= \min\{g_1(V_p(k, l)), g_1(H_p(\alpha k, l/2))\} \\
&\geq \min\{g_1(V_p(k, l)), g_1(g_1(\min\{V_p(\alpha k, l/2), H_p(\alpha^2 k, l/2^2)\}))\} \\
&= \min\left\{g_1(V_p(k, l)), \min\left\{g_1^{(2)}(V_p(\alpha k, l/2)), g_1^{(2)}(H_p(\alpha^2 k, l/2^2))\right\}\right\} \\
&= \min\left\{g_1(V_p(k, l)), g_1^{(2)}(V_p(\alpha k, l/2)), g_1^{(2)}(H_p(\alpha^2 k, l/2^2))\right\} \\
&\vdots \\
&\geq \min\left\{g_1(V_p(k, l)), g_1^{(2)}(V_p(\alpha k, l/2)), g_1^{(3)}(V_p(\alpha^2 k, l/2^2)), \right. \\
&\quad \left. \dots, g_1^{(s)}(V_p(\alpha^{(s-1)}k, l/2^{(s-1)})), g_1^{(s)}(H_p(\alpha^s k, l/2^s))\right\}.
\end{aligned}$$

Observe que $\alpha^t k \geq m \forall t \leq s$, logo $V_p(\alpha^t k, l/2^t) \geq V_p(m, 3n)$, $\forall t \leq s$, além disto, utilizando-se do fato de que $g_1(x) < x \forall x \in [0, 1]$, obtém-se

$$\begin{aligned}
H_p(k, l) &\geq \min\left\{g_1(V_p(k, l)), g_1^{(2)}(V_p(\alpha k, l/2)), g_1^{(3)}(V_p(\alpha^2 k, l/2^2)), \right. \\
&\quad \left. \dots, g_1^{(s)}(V_p(\alpha^{(s-1)}k, l/2^{(s-1)})), g_1^{(s)}(H_p(\alpha^s k, l/2^s))\right\} \\
&\geq \min\left\{g_1(V_p(m, 3n)), g_1^{(2)}(V_p(m, 3n)), g_1^{(3)}(V_p(m, 3n)), \right. \\
&\quad \left. \dots, g_1^{(s)}(V_p(m, 3n)), g_1^{(s)}(H_p(\alpha^s k, l/2^s))\right\} \\
&= \min\left\{g_1^{(s)}(V_p(m, 3n)), g_1^{(s)}(H_p(\alpha^s k, l/2^s))\right\} \\
&= g_1^{(s)}(\min\{V_p(m, 3n), H_p(\alpha^s k, l/2^s)\}). \tag{2.5}
\end{aligned}$$

Por fim, fazendo $k = \alpha^{(1-s)}m$ e $l = n$ obtemos

$$H_p(\alpha^{(1-s)}m, n) \geq g_1^{(s)}(\min\{V_p(m, 3n), H_p(\alpha m, n/2^s)\}).$$

Fixando $s = s(\alpha)$ tal que $\alpha^{1-s} \geq 3$ e fazendo $\varepsilon = \varepsilon(\alpha) = 2^{-s}$ a desigualdade acima fornece a desigualdade desejada. Note que este é o único ponto em que a constante ε é utilizada: ela garante que a altura dos retângulos obtidos via iteração do Lema 2.2 são sempre menores que n (e desta forma, menores que $3n$).

Vamos agora demonstrar a cota inferior para $V_p(m, 3n)$. Seja $l = \alpha\varepsilon n/12$ e seja g_2 um homeomorfismo definido da seguinte forma:

$$g_*(x) = 1 - (1 - x)^{1/16}, g_{\#}(x) = 1 - (1 - x)^{1/2} \text{ e } g_2(x) = g_{\#} \circ g_*(x).$$

Iremos assumir sem perda de generalidade que l é um número inteiro. Nós dividiremos a demonstração em dois casos.

Caso 1. $H_p(\alpha m, 2l) < g_2(H_p(\alpha m, \varepsilon n))$

Para cada $i = 0, \dots, 15$, seja A_i o evento em que existe um caminho aberto de $\{0\} \times [il, (i+1)l]$ a $\{\alpha m\} \times [0, 16l]$ dentro da faixa $[0, \alpha m] \times \mathbb{Z}$.

Seja B_i o evento em que há um caminho aberto de $\{0\} \times [0, l]$ a $\alpha m \times [0, (16-i)l]$. Observe que, por invariância translacional tem-se que $P_p(A_i) = P_p(B_i)$. Note entretanto que

esta probabilidade é igual apenas porque estamos trabalhando no modelo de percolação **orientada**. No caso não orientado esta afirmação não é verdadeira.

Observe que $B_i \subseteq A_0$, desta forma para todo i , $P_p(A_0) \geq P_p(A_i)$, o truque da raiz implica que existe algum i tal que,

$$P_p(A_0) \geq 1 - \left(1 - P_p\left(\bigcup_{i=0}^{15} A_i\right)\right)^{1/16} = 1 - (1 - H_p(\alpha m, 16l))^{1/16} \quad (2.6)$$

$$\stackrel{16l \geq \varepsilon n}{\geq} 1 - (1 - H_p(\alpha m, \varepsilon n))^{1/16} = g_*(H_p(\alpha m, \varepsilon n)).$$

Agora, se A_0 ocorre, então ou $[0, \alpha m] \times [0, 2l]$ é cruzado horizontalmente, ou o evento $G(\alpha m, l)$ ocorre. Como uma consequência, mais uma aplicação do truque da raiz, juntamente com (2.6) nos traz

$$\begin{aligned} \max\{H_p(\alpha m, 2l), P_p(G(\alpha m, l))\} &\geq 1 - (1 - P(A_0))^{1/2} \\ &\geq 1 - (1 - g_*(H_p(\alpha m, \varepsilon n)))^{1/2} \\ &= g_2(H_p(\alpha m, \varepsilon n)). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Graças à hipótese em $H_p(\alpha m, \varepsilon n)$ vale que

$$P_p(G(\alpha m, l)) \geq g_2(H_p(\alpha m, \varepsilon n)).$$

Assim o Lema 2.3 aplicado a $k = \alpha m, l$ e $C > 36/\alpha\varepsilon$ (pois com $C \geq 36/\alpha\varepsilon$ temos $Cl \geq \frac{36}{\alpha\varepsilon} \frac{\alpha\varepsilon n}{12} \geq 3n$) implica que

$$\begin{aligned} V_p(m, 3n) &\geq V_p(\alpha m, Cl) \geq P_p(G(\alpha m, l))^{2C} \geq g_2(H_p(\alpha m, \varepsilon n))^{2C} \\ &= g_3(H_p(\alpha m, \varepsilon n)). \end{aligned}$$

Caso 2. $H_p(\alpha m, 2l) \geq g_2(H_p(\alpha m, \varepsilon n))$

Neste caso, o Lema 2.2 implica que

$$\begin{aligned} H_p(m, 4l) &\geq g_1(\min\{V_p(m, 4l), H_p(\alpha m, 2l)\}) \\ &\geq g_1(\min\{V_p(m, \alpha\varepsilon n), g_2(H_p(\alpha m, \varepsilon n))\}). \end{aligned} \quad (2.8)$$

Como $G(m, 4l)$ ocorre tão logo existe um caminho da esquerda para a direita cruzando $[0, m] \times [0, 4l]$ e um cruzamento vertical de $[0, m] \times [0, 12l]$, a desigualdade FKG implica imediatamente que

$$P_p(G(m, 4l)) \geq H_p(m, 4l)V_p(m, 12l) \quad (2.9)$$

Como $12l = \alpha\varepsilon n$, (2.8) e (2.9) podem ser combinadas para obter

$$\begin{aligned} P_p(G(m, 4l)) &\geq g_1(\min\{V_p(m, \alpha\varepsilon n), g_2(H_p(\alpha m, \varepsilon n))\}) \cdot V_p(m, \alpha\varepsilon n) \\ &= g_4(\min\{V_p(m, \alpha\varepsilon n), H_p(\alpha m, \varepsilon n)\}). \end{aligned}$$

Lema 2.3 aplicado a $k = m, l$ e $C > 9/\alpha\varepsilon$ (pois se $C > \frac{9}{\alpha\varepsilon}$ tem-se que $4Cl \geq 4 \frac{9}{\alpha\varepsilon} \frac{\alpha\varepsilon n}{12} \geq 3n$) nos dá

$$\begin{aligned} V_p(m, 3n) &\geq V(m, 4Cl) \geq P_p(G(m, 4l))^{2C} \geq g_4(\min\{V_p(m, \alpha\varepsilon n), H_p(\alpha m, \varepsilon n)\})^{2C} \\ &= g_5(\min\{V_p(m, \alpha\varepsilon n), H_p(\alpha m, \varepsilon n)\}), \end{aligned} \quad (2.10)$$

assim concluindo a prova para este caso. \square

Com este teorema obtemos a principal ferramenta para a comparação de probabilidades de cruzamento de caixa. Enunciaremos em seguida mais um lema que será útil para a demonstração dos principais resultados da próxima seção.

Lema 2.4. *Para todo $\Delta > \delta > 1$, existe $C > 0$ tal que para todo $n, m \geq 1$, temos*

$$\max\{V_p(\Delta m, n), H_p(m, \Delta n)\} \leq g_6(\max\{V_p(\delta m, n), H_p(m, \delta n)\}),$$

onde $g_6(x) = 1 - (1 - x)^C$ para todo $x \in [0, 1]$.

Demonstração. Vamos apresentar a demonstração para a cota superior para $V_p(\Delta m, n)$, a demonstração para $H_p(m, \Delta n)$ pode ser adaptada facilmente trocando as dimensões das caixas adequadamente. Seja $\varepsilon < \min\{1, (\delta - 1)\}$ e um inteiro $K > \Delta/\varepsilon$. Podemos assumir sem perda de generalidade que εm e δm são dois inteiros.

Defina as duas coleções de caixas

$$\mathcal{F} = \{[k\varepsilon m, (k\varepsilon + \delta)m] \times [0, n], 0 \leq k < K\}.$$

$$\mathcal{E} = \{[k\varepsilon m, (k\varepsilon + 1)m] \times [0, n], 0 \leq k < K\}.$$

Afirmamos que para $[0, \Delta m] \times [0, n]$ ser cruzada verticalmente, então alguma das caixas de \mathcal{F} precisa ser cruzada verticalmente, ou uma das caixas de \mathcal{E} precisa ser cruzada horizontalmente (independente do sentido do cruzamento).

Denotemos $\mathcal{F}(k) = [k\varepsilon m, (k\varepsilon + \delta)m] \times [0, n]$ e $\mathcal{E}(k) = [k\varepsilon m, (k\varepsilon + 1)m] \times [0, n]$. Note inicialmente que todas as caixas $\mathcal{F}(\cdot)$ têm tamanho $\delta m \times n$ e todas as caixas $\mathcal{E}(\cdot)$ têm tamanho $m \times n$. Além disso vale que $\mathcal{F}(k) = k\varepsilon m + \mathcal{F}(0)$, $\mathcal{E}(k) = k\varepsilon m + \mathcal{E}(0)$ e $\mathcal{E}(k) \subset \mathcal{F}(k) \forall k$.

Note ainda que a escolha do valor de K faz com que $\mathcal{F}(K - 1) = [K\varepsilon m - \varepsilon m, K\varepsilon m + (\delta - \varepsilon)m] \times [0, n]$. Agora, como $\varepsilon < (\delta - 1)$ temos que $(\delta - \varepsilon) > 1$ e $K\varepsilon m \geq \Delta m$. Logo o conjunto \mathcal{F} recobre toda a caixa $[0, \Delta m] \times [0, n]$.

Suponha então que ocorre um cruzamento vertical em $[0, \Delta m] \times [0, n]$ (denotaremos este caminho como γ e iremos supor sem perda de generalidade que este caminho só possui um vértice em $[0, m] \times \{0\}$ e um vértice em $[0, m] \times \{n\}$. De fato se um cruzamento vertical γ' possuir mais destes vértices, podemos tomar um caminho γ contido em γ' que possua a propriedade que queremos). Caso o cruzamento esteja inteiramente contido em algum $\mathcal{F}(k)$ já ocorreu o que queríamos. Suponha então que o cruzamento γ não está contido em nenhum $\mathcal{F}(k)$.

Como $\mathcal{E}(k) \subset \mathcal{F}(k) \forall k$ temos que γ não está contido em nenhum $\mathcal{E}(k)$ também. Existe então um certo j tal que o caminho γ começa numa caixa $\mathcal{E}(j)$ e termina numa caixa $\mathcal{E}(j + 1)$ ou $\mathcal{E}(j - 1)$. Vamos começar tratando o caso em que o caminho termina em $\mathcal{E}(j + 1)$.

Seja $a = \gamma \cap \mathbb{Z} \times \{0\}$ o “ponto do qual parte o caminho γ ” e $b = \gamma \cap \mathbb{Z} \times \{n\}$ o “ponto do qual termina o caminho γ ” (Pela nossa suposição estes pontos de fato estão bem definidos). Tomemos $k' = \max\{k \in \mathbb{Z} : k\varepsilon m < a\}$ de forma que $\mathcal{E}(k')$ é caixa contendo a com a face esquerda mais próxima de a . Como $\varepsilon < 1$ e cada caixa \mathcal{E} tem largura m , a caixa $\mathcal{E}(k' + 1)$ começa antes do final da caixa $\mathcal{E}(k')$. Para evitar que o caminho γ cruze $\mathcal{E}(k' + 1)$ e não esteja contido em $\mathcal{E}(k')$, precisamos que

$$k'\varepsilon m + m < b < k'\varepsilon m + \varepsilon m + m < k'\varepsilon m + \delta m.$$

Mas então γ está contido em $\mathcal{F}(k')$ o que é absurdo por hipótese.

Para tratar o caso em que o caminho parte para a esquerda, definimos $k'' = \min\{k \in \mathbb{Z} : k''\varepsilon m + m > a\}$, fazendo com que $\mathcal{E}(k'')$ é a caixa contendo k'' cujo face da direita é a mais próxima de k'' . Novamente devido ao tamanho das caixas \mathcal{E} e o fato de que $\varepsilon < 1$ temos que a caixa $\mathcal{E}(k'' - 1)$ termina antes do início de $\mathcal{E}(k'')$.

Para o caminho não estar contido em $\mathcal{E}(k'')$ e não cruzar $\mathcal{E}(k'' - 1)$ precisamos que o ponto b satisfaça

$$k''\varepsilon m - \varepsilon m < b < k''\varepsilon m.$$

Mas como $a < k''\varepsilon m + m = k''\varepsilon m - \varepsilon m + \varepsilon m < (k'' - 1)\varepsilon m + \delta m$, temos que o caminho γ está completamente contido em $\mathcal{F}(k'' - 1)$, o que é absurdo por hipótese. Logo, ou alguma caixa de \mathcal{F} é cruzada verticalmente ou alguma caixa de \mathcal{E} é cruzada horizontalmente.

Com base nisto, o evento em que $[0, \Delta m] \times [0, n]$ é cruzado verticalmente está contido na união de $3K$ eventos de probabilidade menor ou igual a $V_p(\delta m, n)$ e $H_p(m, n) \leq H_p(m, \delta n)$. O truque da raiz quadrada implica que

$$V_p(\Delta m, n) \leq 1 - (1 - x)^{3K},$$

onde $x := \max\{V_p(\delta m, n), H_p(m, \delta n)\}$. A demonstração segue fazendo $C = 3K$. \square

2.2 A propriedade de cruzamento de caixa

Munidos dos resultados da seção anterior, podemos começar a construir os argumentos para compreender o comportamento do aglomerado da origem no ponto crítico.

Teorema 2.5 (Propriedade de cruzamento de caixa). *Existe uma sequência de inteiros $(w_n)_{n \geq 1}$ e uma constante $c_1 > 0$ tal que*

$$c_1 \leq H_{p_c}(3w_n, n) \leq H_{p_c}(w_n, 3n) \leq 1 - c_1,$$

$$c_1 \leq V_{p_c}(w_n, 3n) \leq V_{p_c}(3w_n, n) \leq 1 - c_1.$$

O Teorema 2.5 nos dá escalas w_n que garantem o cruzamento das caixas descritas com probabilidades distantes de 0 e 1. O ganho com esta propriedade é que, com a garantia que estes eventos ocorrem com probabilidades não triviais, conseguimos cotar superiormente e inferiormente $P(0 \rightarrow l_n)$ e $E(R_n | 0 \rightarrow l_n)$ por funções de w_n . De fato, iremos mostrar no capítulo seguinte que a esperança e variância de (R_n) e $(R_n | \{0 \rightarrow l_n\})$ possuem a mesma ordem de grandeza que $(w_n)_{n \geq 1}$, gerando as cotas superiores e inferiores obtidas em [3].

Para demonstrar o Teorema 2.5 faremos uso do seguinte lema:

Lema 2.6 (Critério de tamanho finito para $p < p_c$ e $p > p_c$). *Existe um $\eta > 0$ tal que para todo $p \in (0, 1)$ e $m, n \geq 1$,*

- Se $\max\{V_p(2m, n), H_p(m, 2n)\} < \eta$, então $p < p_c$ e existe um $c > 0$ tal que para todo $N \geq 1$,

$$P_p(0 \rightarrow l_N) \leq \exp(-cN).$$

- Se $\min\{V_p(m, 2n), H_p(2m, n)\} > 1 - \eta$, então $p > p_c$ e existe um $c > 0$ tal que para todo $N \geq 1$,

$$P_p(0 \rightarrow l_N, 0 \not\rightarrow \infty) \leq \exp(-cN).$$

Demonstração. **A seguir iremos demonstrar o primeiro item do lema:**

Primeiramente introduzimos as escalas $m_k = 2^k m$ e $n_k = 2^k n$ para $k \geq 0$ e fazemos

$$u_k = \max\{H_p(m_k, 2n_k), V_p(2m_k, n_k)\}.$$

Um cruzamento vertical da caixa $[0, 4m_k] \times [0, 2n_k]$ precisa conter um cruzamento vertical das caixas $[0, 4m_k] \times [0, n_k]$ e $[0, 4m_k] \times [n_k, 2n_k]$. Utilizando o Lema 2.4 e a cota superior $g_6(x) = 1 - (1-x)^C \leq Cx$ para $C \geq 1$, proveniente da desigualdade generalizada de Bernoulli, temos que

$$\begin{aligned} V_p(2m_{k+1}, n_{k+1}) &\leq (V_p(2m_{k+1}, n_k))^2 \stackrel{\text{Lema 2.4 com } \Delta=2, \delta=1}{\leq} (g_6(\max\{V_p(2m_k, n_k), H_p(2m_k, n_k)\}))^2 \\ &\leq (g_6(\max\{V_p(2m_k, n_k), H_p(m_k, 2n_k)\}))^2 \leq (Cu_k)^2. \end{aligned}$$

Repetindo o procedimento para $H_p(m_{k+1}, 2n_{k+1})$, obtemos que

$$u_{k+1} \leq (Cu_k)^2.$$

Iterando a desigualdade obtemos que $u_k \leq (Cu_{k-1})^2 \leq (C(Cu_{k-2}))^2 \leq \dots \leq C^{\sum_{i=1}^k 2^i} u_0^{2^k}$. Fazendo $\eta \leq \frac{1}{eC^2}$ pequeno o suficiente, quando $u_0 < \eta$ temos que para todo k vale

$$u_k \leq C^{\sum_{i=1}^k 2^i} u_0^{2^k} \leq C^{\sum_{i=1}^k 2^i} \left(\frac{1}{eC^2}\right)^{2^k} = C^{\frac{2^{k+1}-2}{2-1}-2^{k+1}} e^{-2^k} = C^{-2} \exp(-2^k).$$

Para concluir, fixamos $N \geq 1$ e fazemos K ser o inteiro único tal que $n_K \leq N < 2n_K$. Para o evento $\{0 \rightarrow l_N\}$ ocorrer, obrigatoriamente ou a caixa $[-m_K, m_K] \times [0, n_K]$ é cruzada verticalmente ou uma das caixas $[0, m_K] \times [0, 2n_K]$ ou $[-m_K, 0] \times [0, 2n_K]$ é cruzada horizontalmente. Assim deduzimos que

$$P_p(0 \rightarrow l_N) \leq 3u_k \leq \exp(-cN),$$

para uma constante $c > 0$ adequada. Com isto obtemos o decaimento exponencial e consequentemente estamos na fase subcrítica.

O fato que $p < p_c$ segue por continuidade, uma vez que a condição

$$\max\{V_p(2m, n), H_p(m, 2n)\} < \eta$$

é satisfeita para algum $p' > p$, portanto $p < p' \leq p_c$.

Agora mostraremos a segunda parte do lema:

Considere um processo de percolação dependente definido numa rede renormalizada. Dados $m, n \geq 1$, associe a cada vértice $x = (i, j) \in \mathbb{L}$ as caixas

$$\begin{aligned} B_x &:= [0, m] \times [0, 2n] + (im, jn), \\ B_x^+ &:= [0, 2m] \times [0, n] + (im, (j+1)n), \\ B_x^- &:= [0, 2m] \times [0, n] + ((i-1)m, (j+1)n). \end{aligned}$$

Dizemos que um elo $(x, x + (1, 1))$ está aberto se B_x é cruzada verticalmente e B_x^+ é cruzada da esquerda para a direita. Analogamente, dizemos que $(x, x + (-1, 1))$ está

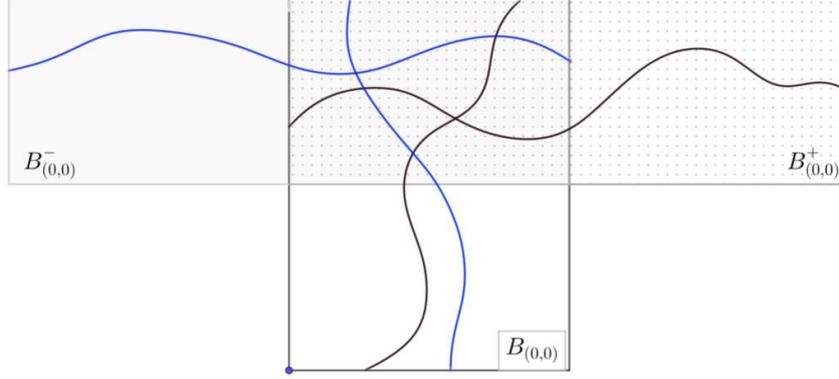


Figura 2.8: Em contorno preto a caixa $B_{(0,0)}$, com padrão pontilhado a caixa $B_{(0,0)}^+$ e em cinza a caixa $B_{(0,0)}^-$. Os cruzamentos pretos indicam o evento em que o elo renormalizado $(x, x + (1, 1))$ é considerado aberto. Em azul o evento em que o elo renormalizado $(x, x + (-1, 1))$ é considerado aberto.

aberto se B_x é cruzada verticalmente e B_x^- é cruzada da direita para a esquerda (Figura 2.8). Denotamos a medida de percolação induzida por $P_p^{m,n}$.

Note que, embora o processo de percolação renormalizado não seja independente (uma vez que o cruzamento horizontal nas caixas B_x^+ e B_x^- influenciam no cruzamento vertical das caixas $B_{x+(1,1)}$ e $B_{x+(-1,1)}$), ele é 1-dependente, isto é, se a distância entre dois elos renormalizados é maior que 1, então eles são independentes entre si.

Uma vez que nosso modelo possui dependência finita, podemos utilizar o resultado de Liggett, Schonmann e Stacey (Ver [13]), que afirma que existe uma função não decrescente $\pi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ satisfazendo $\pi(\delta) \rightarrow 1$ quando $\delta \rightarrow 1$ de forma que vale que, se $Y = \{Y_x : x \in S\}$ é uma família de variáveis aleatórias k -dependente satisfazendo $P_p(Y = 1) \geq \delta, \forall x \in S$, então Y domina estocasticamente uma família de v.a.'s bernoulli $Z = \{Z_x : x \in S\}$ independentes de parâmetro $\pi(\delta)$, isto é, $E_p(f(Y)) \geq E_p(f(Z))$ para toda função mensurável, crescente limitada $f : \{0, 1\}^S \rightarrow \mathbb{R}$.

Utilizaremos este teorema considerando a família Y como as variáveis aleatórias que indicam se o elo renormalizado (x, y) está aberto. Pelo teorema, se a probabilidade de um elo renormalizado for grande o suficiente, então o processo renormalizado domina estocasticamente um processo de percolação independente supercrítico. Considerando uma função f a indicadora de um evento crescente, como por exemplo o evento em que ocorre percolação, a dominação estocástica indica que, se a rede independente é supercrítica, então a rede renormalizada também é.

Desta forma concluímos que existe um $\varepsilon > 0$ tal que se

$$P_p^{m,n}(((0, 0), (1, 1)) \text{ é aberto}) > 1 - \varepsilon,$$

então o processo de percolação renormalizado domina um processo de percolação bernoulli independente Z supercrítico. Isto implica que a probabilidade de percolação em Z é positiva, e portanto o mesmo vale na rede renormalizada devido à dominação estocástica. Assim como o evento de percolação na rede renormalizada implica no mesmo ocorrendo na rede original, conclui-se que o processo original está na fase supercrítica, isto é $p > p_c$.

O resultado de que $P_p(0 \rightarrow l_N, 0 \not\rightarrow \infty) \leq \exp(-cN)$ é verdadeiro sempre que $p > p_c$, demonstrado no Capítulo 12 de [4]. \square

Agora podemos demonstrar o Teorema 2.5 de forma simples a seguir. A partir daqui tomaremos sempre $p = p_c$ e então iremos omitir o índice p das expressões.

Demonstração. Seja η a constante do Lema 2.6. Fixe duas constantes α, α' com $\frac{3}{4} < \alpha' < \alpha < 1$. Então utilizamos o Teorema 2.1 para obter $\varepsilon = \varepsilon(\alpha')$. Atente ao fato de que estamos utilizando α' para definir o valor de ε , assim o resultado do Teorema 2.1 vale tanto para α' quanto para α pois $V(m, \alpha'\varepsilon n) > V(m, \alpha\varepsilon n)$ e $H(\alpha'm, \varepsilon n) > H(\alpha m, \varepsilon n)$.

Seja $n \geq 1$ grande o suficiente. Defina os valores w_n como

$$w_n := \inf\{m \geq 0 : H(\alpha m, \varepsilon n) \leq V(m, \alpha\varepsilon n)\}. \quad (2.11)$$

Note que ao escolhermos w_n desta forma, estamos utilizando o valor que faz as probabilidades do Teorema 2.1 serem mais próximas, algo similar ao que seria uma caixa quadrada no modelo de percolação não orientado. Observe também que w_n diverge com n e desta forma valores grandes de n implicam o mesmo para w_n .

Introduza a seguinte notação:

$$\begin{aligned} H_- &:= H(\alpha(w_n - 1), \varepsilon n) & H_+ &:= H(\alpha w_n, \varepsilon n) \\ V_- &:= V(w_n - 1, \alpha\varepsilon n) & V_+ &:= V(w_n, \alpha\varepsilon n). \end{aligned}$$

A definição de w_n implica que $H_+ \leq V_+$ e $H_- > V_-$.

Vamos demonstrar a cota inferior primeiro. Utilizando monotonicidade e o Lema 2.4 aplicado a $\Delta = 2/\alpha$ e um certo $\delta \in (1, 1/\alpha)$, obtemos

$$\begin{aligned} \max\{V(2w_n, \varepsilon n), H(w_n, 2\varepsilon n)\} &\leq \max\{V(2w_n, \alpha\varepsilon n), H(\alpha w_n, 2\varepsilon n)\} \\ &\leq g_6(\max\{V(\delta\alpha w_n, \alpha\varepsilon n), H(\alpha w_n, \delta\alpha\varepsilon n)\}). \end{aligned}$$

Como $\delta\alpha \in (\alpha, 1)$ temos que $H(\alpha w_n, \delta\alpha\varepsilon n) \leq H(\alpha w_n, \varepsilon n) = H_+$. Além disso, note que para w_n grande o suficiente vale que $\alpha\delta w_n \leq w_n - 1$, assim $V(\delta\alpha w_n, \alpha\varepsilon n) \leq V(w_n - 1, \alpha\varepsilon n) = V_-$. Com isso obtemos

$$\max\{V(2w_n, \varepsilon n), H(w_n, 2\varepsilon n)\} \leq g_6(\max\{V_-, H_+\}).$$

O primeiro item do Lema 2.6 implica que $\max\{V(2w_n, \varepsilon n), H(w_n, 2\varepsilon n)\} > \eta$, pois estamos no ponto crítico, o que implica que $\max\{V_-, H_+\} \geq g_6^{-1}(\eta)$.

Isto nos dá que, ou $H_- \geq V_- \geq g_6^{-1}(\eta)$ ou $V_+ \geq H_+ \geq g_6^{-1}(\eta)$. Utilizando o Teorema 2.1 (com α'), temos que

$$\min\{V(w_n, 3n), H(3w_n, n)\} \geq g_0(\min\{V(w_n, \alpha'\varepsilon n), H(\alpha'w_n, \varepsilon n)\}).$$

Caso valha $V_+ \geq H_+ \geq g_6^{-1}(\eta)$, observe que

$$\begin{aligned} g_0(\min\{V(w_n, \alpha'\varepsilon n), H(\alpha'w_n, \varepsilon n)\}) &\geq g_0(\min\{V(w_n, \alpha\varepsilon n), H(\alpha w_n, \varepsilon n)\}) \\ &= g_0(\min\{V_+, H_+\}) = g_0(H_+) \geq g_0(g_6^{-1}(\eta)). \end{aligned}$$

Caso estejamos na segunda possibilidade, observe que para w_n grande o suficiente $\alpha'w_n < \alpha(w_n - 1)$, pois $(\alpha - \alpha')w_n$ cresce com n . Assim

$$g_0(\min\{V(w_n, \alpha'\varepsilon n), H(\alpha'w_n, \varepsilon n)\}) \geq g_0(\min\{V(w_n - 1, \alpha\varepsilon n), H(w_n - 1, \varepsilon n)\})$$

$$= g_0(\min\{V_-, H_-\}) = g_0(V_-) \geq g_0(g_6^{-1}(\eta)).$$

Demonstração da cota superior. Utilizaremos novamente o Teorema 2.1 com $\alpha' \in (\frac{3}{4}, \alpha)$ e a mesma argumentação anterior para concluir que

$$\begin{aligned} \min\{V(w_n, 3n), H(3w_n, n)\} &\geq g_0(\min\{V(w_n, \alpha'\varepsilon n), H(\alpha'w_n, \varepsilon n)\}) \\ &\geq g_0(\min\{V_+, H_-\}). \end{aligned}$$

Como estamos trabalhando com $p = p_c$, a segunda parte do Lema 2.6 garante que $\min\{V_-, H_+\} \leq g_0^{-1}(1 - \eta)$. Isto nos dá que, ou $H_+ \leq V_+ \leq g_0^{-1}(1 - \eta)$ ou $V_- < H_- \leq g_0^{-1}(1 - \eta)$.

Caso valha que $H_+ \leq V_+ \leq g_0^{-1}(1 - \eta)$, utilizando o Lema 2.4 com $\delta = \frac{1}{\alpha}$ e $\Delta = \frac{3}{\alpha\varepsilon}$ e monotonicidade temos

$$\begin{aligned} \max\{V(3w_n, n), H(w_n, 3n)\} &\leq g_6(\max\{V(\varepsilon w_n, n), H(w_n, \varepsilon n)\}) \\ &\leq g_6(\max\{V(w_n, \alpha\varepsilon n), H(\alpha w_n, \varepsilon n)\}) \\ &= g_6(\max\{V_+, H_+\}) = g_6(V_+) \leq g_6(g_0^{-1}(1 - \eta)). \end{aligned}$$

Caso valha que $V_- < H_- \leq g_0^{-1}(1 - \eta)$, fazemos a mesma utilização do Lema 2.4 e observamos que, para w_n suficientemente grande, vale que $\varepsilon w_n \leq w_n - 1$. Assim

$$\begin{aligned} \max\{V(3w_n, n), H(w_n, 3n)\} &\leq g_6(\max\{V(\varepsilon w_n, n), H(w_n, \varepsilon n)\}) \\ &\leq g_6(\max\{V(w_n - 1, \alpha\varepsilon n), H(\alpha(w_n - 1), \varepsilon n)\}) \\ &= g_6(\max\{V_-, H_-\}) = g_6(H_-) \leq g_6(g_0^{-1}(1 - \eta)). \end{aligned}$$

Com isto mostramos que, para valores de n suficientemente grandes, as probabilidades $V(3w_n, n), V(w_n, 3n), H(3w_n, n), H(w_n, 3n)$ são limitadas por cima e por baixo, garantindo assim que existe uma constante c adequada que satisfaz o teorema.

Note que demonstramos as cotas do teorema apenas para n grande ($n > N(\alpha')$). Como a quantidade de valores não contempladas pela demonstração é finita, basta escolher a constante c de forma que seja válida a cota do teorema para $n \leq N(\alpha')$. \square

Capítulo 3

Cotas superiores e inferiores para o crescimento do Cluster da Origem

No capítulo anterior construímos as ferramentas necessárias para trabalhar com percolação orientada através de relações entre caixas. Iremos utilizar estas técnicas para construir cotas superiores e inferiores para o tamanho do aglomerado da origem, conforme feito em [3]. As cotas em questão estão apresentadas nos dois teoremas a seguir.

Teorema 3.1. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \geq 1$,*

$$\frac{\varepsilon}{n^{1/2-\varepsilon}} \leq P_{p_c}(0 \rightarrow l_n) \leq \frac{1}{n^\varepsilon}.$$

Teorema 3.2. *Existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \geq 1$,*

$$\varepsilon n^{2/5} \leq E_{p_c}(R_n | 0 \rightarrow l_n) \leq n^{1-\varepsilon}.$$

Em estudos sobre o processo de contato, Durrett, Schonmann e Tanaka [6] demonstraram que $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n} P_{p_c}(0 \rightarrow l_n) = \infty$. Além disso, em [1] encontramos que $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{p_c}(0 \rightarrow l_n) = 0$. Com isso já possuíamos a cota

$$\frac{1}{n^{1/2}} \leq P_{p_c}(0 \rightarrow l_n),$$

e sabíamos que esta probabilidade decaía para 0 de alguma forma. O ganho do Teorema 3.1 é no termo n^ε , melhorando a cota inferior e dando uma noção da forma do decaimento da probabilidade $P_{p_c}(0 \rightarrow l_n)$.

Em [6] também foi demonstrado que $E_{p_c}(R_n | 0 \rightarrow l_n) \geq \varepsilon n^{1/4}$, para todo n e que, para infinitos valores de n , vale a cota $E_{p_c}(R_n | 0 \rightarrow l_n) \geq \varepsilon n^{2/5}$. O ganho do Teorema 3.2 é na garantia da cota inferior para todo n e na cota superior. Destaca-se principalmente o significado qualitativo da cota superior $n^{1-\varepsilon}$. De fato, na percolação orientada como foi construída vale que $R_n \leq n$ trivialmente. A existência do valor ε na cota garante que, no modelo crítico, a largura de uma componente decai com seu comprimento, isto é, componentes longas são em geral finas.

O primeiro resultado que iremos apresentar mostra que as constantes $(w_n)_{n \geq 1}$ encontradas no Teorema 2.5 possuem a mesma ordem de grandeza da esperança e variância de

R_n e $R_n|0 \rightarrow l_n$. Estas relações constituem a maior parte do esforço para demonstrar os Teoremas 3.1 e 3.2.

Aqui adicionamos o Lema 3.4 para justificar os argumentos utilizados originalmente para a demonstração dos itens (ii) e (iv) do Teorema 3.3, e o resultado intermediário 3.7 em anexo para justificar parte da demonstração do lema 3.6.

Denotamos aqui $x^+ = \max\{x, 0\}$ e novamente iremos considerar sempre que $p = p_c$, e então otimizaremos o índice p das notações.

Teorema 3.3. *Existem constantes $c_3, c_4, c_5, c_6 > 0$ tais que para todo $n \geq 1$, temos*

- (i) $c_3 w_n \leq E(R_n^+) \leq \frac{1}{c_3} w_n$,
- (ii) $c_4 w_n \leq \sqrt{\text{Var}(R_n)} \leq \frac{1}{c_4} w_n$,
- (iii) $c_5 w_n \leq E(R_n|0 \rightarrow l_n) \leq \frac{1}{c_5} w_n$,
- (iv) $c_6 w_n \leq \sqrt{\text{Var}(R_n|0 \rightarrow l_n)} \leq \frac{1}{c_6} w_n$.

Antes de demonstrar este teorema, mostraremos um lema que será útil para obter duas das cotas inferiores propostas.

Lema 3.4. *Seja $\{X_n\}_{n \geq 1}$ um conjunto de variáveis aleatórias e $\{w_n\}_{n \geq 1}$ uma sequência de constantes positivas. Se existem valores c_1, c_2, t_1, t_2 não negativos, com $c_1 > c_2$, tais que para todo $n \geq 1$*

- $P(X_n \geq c_1 w_n) \geq t_1$
- $P(X_n \leq c_2 w_n) \geq t_2$,

então existe uma constante c_3 tal que

$$\sqrt{\text{Var}(X_n)} \geq c_3 w_n \quad \forall n \geq 1.$$

Prova do lema. Inicialmente, fixe um valor $n \geq 1$. Iremos dividir a demonstração em dois casos.

Caso 1: $E(X_n) < \frac{(c_1 + c_2)w_n}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_n) &= \int_{\{X_n \geq c_1 w_n\}} (X_n - E(X_n))^2 dP + \int_{\{X_n < c_1 w_n\}} (X_n - E(X_n))^2 dP \\ &\geq \int_{\{X_n \geq c_1 w_n\}} (X_n - E(X_n))^2 dP \geq \int_{\{X_n \geq c_1 w_n\}} (c_1 w_n - E(X_n))^2 dP \\ &\geq (c_1 w_n - E(X_n))^2 P(X_n \geq c_1 w_n) \geq (c_1 w_n - E(X_n))^2 t_1 \\ &\geq \left(c_1 - \frac{(c_1 + c_2)}{2} \right)^2 w_n^2 t_1. \end{aligned}$$

Caso 2: $E(X_n) \geq \frac{(c_1+c_2)w_n}{2}$

$$\begin{aligned} \text{Var}(X_n) &= \int_{\{X_n \geq c_2 w_n\}} (X_n - E(X_n))^2 dP + \int_{\{X_n < c_2 w_n\}} (X_n - E(X_n))^2 dP \\ &\geq \int_{\{X_n < c_2 w_n\}} (X_n - E(X_n))^2 dP \geq \int_{\{X_n < c_2 w_n\}} (c_2 w_n - E(X_n))^2 dP \\ &\geq (c_2 w_n - E(X_n))^2 P(X_n < c_2 w_n) \geq (c_2 w_n - E(X_n))^2 t_2 \\ &\geq \left(c_2 - \frac{(c_1 + c_2)}{2} \right)^2 w_n^2 t_2. \end{aligned}$$

Desta forma temos que $\sqrt{\text{Var}(X_n)} \geq \min \left\{ w_n |c_1 - \frac{(c_1+c_2)}{2}| \sqrt{t_1}, w_n |c_2 - \frac{(c_1+c_2)}{2}| \sqrt{t_2} \right\}$. Note que o resultado é válido para todo $n \geq 1$.

Assim, tomando $c_3 = \frac{c_1-c_2}{2} | \min \{ \sqrt{t_1}, \sqrt{t_2} \}$ obtemos o resultado desejado. \square

Partimos agora para a demonstração do Teorema 3.3.

Demonstração do Teorema 3.3. Seja $B = [-\frac{1}{2}w_n, \frac{5}{2}w_n] \times [0, n]$ e defina E o evento em que existe um caminho aberto de $[-\frac{1}{2}w_n, 0] \times \{0\}$ a $[2w_n, \frac{5}{2}w_n] \times \{n\}$ dentro de B (Figura 3.1). O evento E ocorre se existe

- Um cruzamento vertical de $[-\frac{1}{2}w_n, 0] \times \{0\}$ ao topo de B (E_1),
- Um cruzamento vertical da base de B para $[2w_n, \frac{5}{2}w_n] \times \{n\}$ (E_2),
- Um cruzamento da esquerda para a direita em B (E_3).

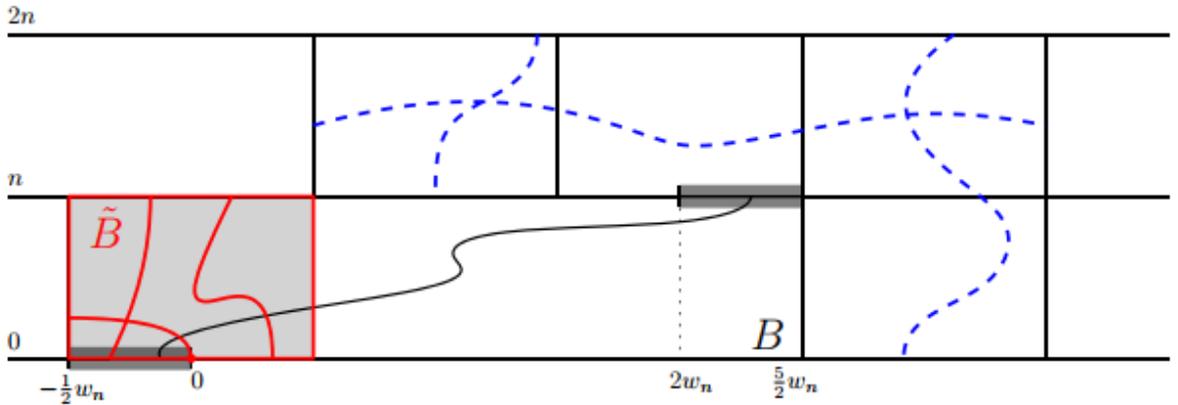


Figura 3.1: O cruzamento em preto indica o evento E . Em vermelho os caminhos presentes na demonstração da parte **iv** do Teorema 3.3. As linhas pontilhadas em azul denotam os bloqueios que realizam o evento F do Lema 3.6

Observe que, por simetria, os dois primeiros cruzamentos (E_1 e E_2) possuem a mesma probabilidade. Para cotar a probabilidade do evento E_1 (e E_2) consideramos um cruzamento vertical na caixa $[-\frac{1}{2}w_n, \frac{1}{2}w_n] \times [0, n]$. Chamaremos de F o evento em que existe um caminho de $[-\frac{1}{2}w_n, 0] \times \{0\}$ a $[-\frac{1}{2}w_n, \frac{1}{2}w_n] \times \{n\}$ dentro desta caixa e F' o evento em que existe um caminho de $[0, \frac{1}{2}w_n] \times \{0\}$ a $[-\frac{1}{2}w_n, \frac{1}{2}w_n] \times \{n\}$ dentro da caixa (Figura 3.2).

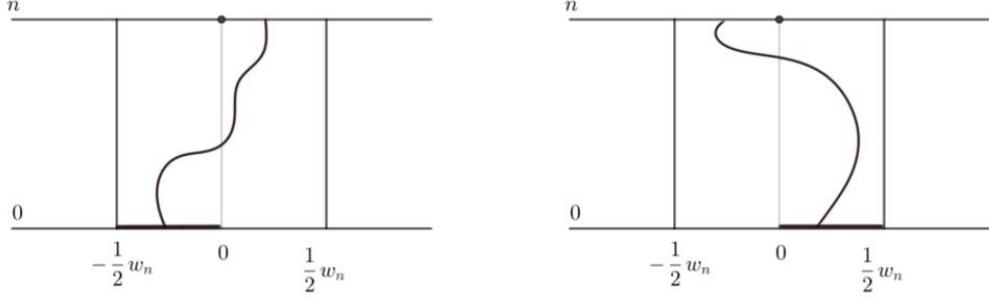


Figura 3.2: Os eventos F e F' respectivamente

Observe que a probabilidade de F é a mesma de F' e que $F \cup F'$ é o evento em que há um cruzamento vertical da caixa $[-\frac{1}{2}w_n, \frac{1}{2}w_n] \times [0, n]$. Utilizando o fato de que o evento $F \subset E_1$ e então o truque da raiz com F e F' , obtemos que

$$\begin{aligned} P(E_1) &\geq P(F) \geq 1 - (1 - P(F \cup F'))^{\frac{1}{2}} \\ &\geq 1 - (1 - V(w_n, n))^{\frac{1}{2}} \geq 1 - (1 - V(w_n, 3n))^{\frac{1}{2}} \\ &\geq 1 - (1 - c_1)^{\frac{1}{2}} \geq \frac{c_1}{2}. \end{aligned}$$

Aqui a constante c_1 vem da propriedade de cruzamento de caixa e a última afirmação é uma aplicação direta da desigualdade de Bernoulli.

A desigualdade FKG implica que

$$P(E) \geq \prod_{i=1}^3 P(E_i) \geq \frac{1}{4} c_1^3. \quad (3.1)$$

Agora começaremos a provar as implicações do teorema.

(i) Cota inferior Utilizando a desigualdade de Markov e observando que, na ocorrência do evento E vale que $R_n^+ \geq 2w_n$, tem-se que

$$E(R_n^+) \geq 2w_n P(R_n^+ \geq 2w_n) \geq 2w_n P(E) \geq 2w_n \frac{1}{4} c_1^3.$$

(i) Cota superior Vamos utilizar o evento $\{R_n \geq kw_n\}$. Observe que para que este evento ocorra, é necessário que haja um cruzamento horizontal da caixa $[0, kw_n] \times [0, n]$, e isto implica que k caixas de dimensões $[0, w_n] \times [0, n]$ precisam ser cruzadas na horizontal. Assim, tem-se que

$$P(R_n \geq kw_n) \leq H(kw_n, n) \leq H(w_n, n)^k \leq H(w_n, 3n)^k \leq (1 - c_1)^k. \quad (3.2)$$

Observando que para toda variável aleatória $X : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ vale que

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{[0, \infty)} P(X > t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[k, k+1)} P(X > t) dt \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \int_{[k, k+1)} P(X > k) dt \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k) \int_{[k, k+1)} 1 dt = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k). \end{aligned} \quad (3.3)$$

Utilizando então a linearidade da esperança, vale que

$$E(R_n^+) = w_n E\left(\frac{R_n^+}{w_n}\right) \leq w_n \left[\sum_{k=0}^{\infty} P\left(\frac{R_n^+}{w_n} \geq k\right) \right] = w_n \left[\sum_{k=0}^{\infty} P(R_n \geq kw_n) \right].$$

Usando agora a expressão (3.2) obtemos

$$E(R_n^+) \leq w_n \sum_{k=0}^{\infty} P(R_n \geq kw_n) \leq w_n \sum_{k=0}^{\infty} (1 - c_1)^k = \frac{w_n}{c_1}.$$

E assim obtemos as cotas inferior e superior propostas.

(ii) Cota inferior

Já temos que $P(R_n \geq 2w_n) \geq P(E) \geq \frac{c_1^3}{4}$. Uma vez que $R_n \leq w_n$ no evento em que $[0, w_n] \times [0, n]$ não é cruzado da esquerda para a direita, deduzimos que $P(R_n < w_n) \geq 1 - H(w_n, n) \geq 1 - H(3w_n, n) \geq c_1$.

Fazendo uso do Lema 3.4 encontramos que $\sqrt{\text{Var}(R_n)} \geq c_4 w_n$.

(ii) Cota Superior

Para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$P(|R_n| > kw_n) \leq 2(1 - c_1)^k.$$

Para $R_n \geq 0$ já temos o resultado em (3.2). Para $R_n \leq 0$, observe que $R_n \leq -kw_n$ implica que o retângulo $[-kw_n, 0] \times [0, n]$ não é cruzado verticalmente. Em particular, k retângulos disjuntos de tamanho w_n por n não são cruzados verticalmente. Utilizando independência e a propriedade de cruzamento de caixa temos que

$$P(R_n \leq -kw_n) \leq 1 - V(kw_n, n) \leq (1 - V(w_n, n))^k \leq (1 - c_1)^k.$$

Sendo assim, retiramos a cota superior através do seguinte cálculo

$$\begin{aligned} \text{Var}(R_n) &= E(R_n^2) - E^2(R_n) \leq E(R_n^2) = \int R_n^2 dP = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{\{(k-1)w_n \leq R_n \leq kw_n\}} R_n^2 dP \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (kw_n)^2 P((k-1)w_n \leq R_n \leq kw_n) \leq w_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 P(R_n \leq kw_n) \\ &\leq w_n^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2 2(1 - c_1)^k \leq \left(w_n \frac{1}{c_4}\right)^2. \end{aligned}$$

Aqui a constante c_4 é escolhida de forma a satisfazer tanto a cota inferior quanto a superior. Observe que garantimos a existência da constante pois a série apresentada na última desigualdade é claramente convergente, fato verificável via teste da razão.

(iii) Cota Inferior

Utilizamos o mesmo raciocínio utilizado para obter a cota inferior de (i). Iremos utilizar o fato de que a distribuição do aglomerado da origem é invariante pela reflexão σ com respeito ao eixo vertical $x = 0$.

Seja F a interseção entre o evento E e sua imagem pela reflexão σ . A desigualdade FKG junto com (3.1) implicam que o evento F ocorre com probabilidade maior que $\frac{c_1^6}{16}$.

Agora, se 0 está conectado a l_n e F ocorre, então R_n precisa ser maior que $2w_n$, portanto

$$E(R_n \mathbb{1}_{F \cap \{0 \rightarrow l_n\}}) \geq 2w_n P(F \cap \{0 \rightarrow l_n\}) \stackrel{FKG}{\geq} w_n \frac{c_1^6}{8} P(0 \rightarrow l_n).$$

Definimos L_n como o ponto mais a esquerda de l_n conectado a 0 . Note que, no evento em que $\{0 \rightarrow l_n\}$, R_n tem a mesma distribuição de $-L_n$, uma vez que, para toda configuração em que $L_n = -t$, sua reflexão com respeito ao eixo $x = 0$ equivale a uma configuração com $R_n = t$, e como a distribuição do aglomerado da origem é invariante pela reflexão σ , ambas as configurações têm a mesma probabilidade.

Utilizando invariância de F por reflexão, vale que

$$E(R_n \mathbb{1}_{F^c \cap \{0 \rightarrow l_n\}}) = \frac{1}{2} E(R_n \mathbb{1}_{F^c \cap \{0 \rightarrow l_n\}}) - \frac{1}{2} E(L_n \mathbb{1}_{F^c \cap \{0 \rightarrow l_n\}}) \geq 0,$$

onde a última desigualdade vem do fato de que, por definição, $R_n \geq L_n$ quase certamente.

Somando ambas as equações anteriores e dividindo por $P(0 \rightarrow l_n)$ temos:

$$E(R_n | 0 \rightarrow l_n) = \frac{E(R_n \mathbb{1}_{\{0 \rightarrow l_n\}})}{P(0 \rightarrow l_n)} = \frac{E(R_n \mathbb{1}_{F \cap \{0 \rightarrow l_n\}}) + E(R_n \mathbb{1}_{F^c \cap \{0 \rightarrow l_n\}})}{P(0 \rightarrow l_n)} \geq \frac{c_1^6}{8} w_n.$$

(iii) Cota Superior

Para a cota superior, utilizamos novamente uma dominação exponencial. A diferença é que aqui nós temos que cuidar do condicionamento. Seja $k \geq 1$. Se ocorre $(R_n \geq kw_n, 0 \rightarrow l_n)$, então precisa existir um caminho aberto de 0 até a fronteira de ∂B da caixa $B = [-w_n, w_n] \times [0, n]$, e um cruzamento da esquerda para a direita de $[w_n, kw_n] \times [0, n]$ (o que novamente implica o cruzamento de $(k-1)$ caixas de dimensões $w_n \times n$). Assim, utilizando independência e a propriedade de cruzamento de caixa, obtemos

$$\begin{aligned} P(R_n \geq kw_n, 0 \rightarrow l_n) &\leq H(w_n, n)^{k-1} P(0 \rightarrow \partial B) \leq H(w_n, 3n)^{k-1} P(0 \rightarrow \partial B) \\ &\leq (1 - c_1)^{k-1} P(0 \rightarrow \partial B). \end{aligned} \tag{3.4}$$

Para concluir a demonstração, precisamos comparar a probabilidade de um caminho aberto de 0 a ∂B com a probabilidade de um caminho aberto de 0 a l_n . Utilizamos a seguinte observação: se 0 é conectado a ∂B e os dois retângulos $[-w_n, 0] \times [0, n]$ e $[0, w_n] \times [0, n]$ são cruzados verticalmente, então 0 está conectado a l_n . A desigualdade FKG e a propriedade de cruzamento de caixa implicam que

$$P(0 \rightarrow l_n) \stackrel{FKG}{\geq} V(w_n, n)^2 P(0 \rightarrow \partial B) \geq V(w_n, 3n)^2 P(0 \rightarrow \partial B) \geq c_1^2 P(0 \rightarrow \partial B).$$

Combinando o resultado com a expressão (3.4) e dividindo por $P(0 \rightarrow l_n)$ temos

$$P(R_n \geq kw_n | 0 \rightarrow l_n) \leq \frac{(1 - c_1)^{k-1}}{c_1^2}. \quad (3.5)$$

Utilizando este fato (e o mesmo para $-R_n^-$), junto com a expressão (3.3), equivalente ao feito para a cota superior de **(i)**, temos que

$$\begin{aligned} E(R_n^+ | 0 \rightarrow l_n) &\leq w_n \sum_{k=1}^{\infty} P(R_n \geq kw_n | 0 \rightarrow l_n) \\ &\leq w_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 - c_1)^{k-1}}{c_1^2} \leq \frac{w_n}{c_5'} \end{aligned}$$

o que, unindo com o mesmo resultado para $E(R_n^-)$ nos dá que $E(R_n | 0 \rightarrow l_n) \leq \frac{w_n}{c_5}$.

(iv) Cota Inferior

Sabemos que o evento $\{R_n \geq 2w_n | 0 \rightarrow l_n\}$ ocorre com probabilidade maior que uma constante (vide evento E definido anteriormente), basta então mostrar que $P(R_n \leq \frac{3}{2}w_n | 0 \rightarrow l_n) \geq c$ e então utilizar o Lema 3.4.

Para observar isto, seja $\tilde{B} = [-\frac{1}{2}w_n, \frac{1}{2}w_n] \times [0, n]$ (Figura 3.1) e o considere evento em que

- (i) $[0, \frac{1}{2}w_n] \times \{0\}$ e $[-\frac{1}{2}w_n, 0] \times \{0\}$ são ambas conectadas a l_n por caminhos em \tilde{B} , e 0 é conectado à fronteira de \tilde{B} ,
- (ii) $[\frac{1}{2}w_n, \frac{3}{2}w_n] \times [0, n]$ não é cruzada da esquerda para a direita.

Chamaremos os dois primeiros cruzamentos de A_1 e A_2 respectivamente, observe que ambos possuem a mesma probabilidade. Utilizando a cota da probabilidade da união pela soma das probabilidades, vemos que

$$2P(A_1) = P(A_1) + P(A_2) \geq P(A_1 \cup A_2) = V(w_n, n) \geq V(w_n, 3n) \geq c_1$$

Logo $P(A_i) \geq \frac{c_1}{2}$, $i = 1, 2$. Utilizando em seguida a desigualdade FKG, temos que

$$P((i) \text{ ocorre}) \geq \frac{c_1^2}{4} P(0 \rightarrow \partial B) \geq \frac{c_1^2}{4} P(0 \rightarrow l_n).$$

Uma vez que o evento em (ii) não depende de nenhum elo de \tilde{B} , a propriedade de cruzamento de caixa implica que

$$P(R_n \leq \frac{3}{2}w_n | 0 \rightarrow l_n) \geq \frac{P((i) \text{ ocorre})P((ii) \text{ ocorre})}{P(0 \rightarrow l_n)} \geq \frac{1}{4}c_1^3.$$

(iv) Cota Superior

Para a cota superior, utilizamos a seguinte dominação exponencial. Lembre que L_n é o ponto mais à esquerda em l_n conectado a 0 por um caminho aberto. Usando o fato

que $R_n \geq L_n$ quase certamente e o fato de que $-L_n$ tem a mesma distribuição de R_n (condicionado na existência de um caminho de 0 a l_n), obtemos que, para todo $k \geq 1$,

$$\begin{aligned} P(|R_n| \geq kw_n | 0 \rightarrow l_n) &\leq P(R_n \geq kw_n | 0 \rightarrow l_n) + P(-L_n \leq -kw_n | 0 \rightarrow l_n) \\ &\leq 2P(R_n \geq kw_n | 0 \rightarrow l_n) \stackrel{3.5}{\leq} \frac{2(1 - c_1)^{k-1}}{c_1^2}. \end{aligned}$$

Pelo mesmo raciocínio utilizado na demonstração da cota superior de (ii) obtemos o resultado desejado. \square

Para obter as cotas propostas nos Teoremas 3.1 e 3.2 iremos precisar ainda de dois lemas, enunciados e demonstrados a seguir:

Lema 3.5. *Existe uma constante $c_7 > 0$ tal que para todo $n \geq 1$,*

$$w_n \geq c_7 n^{\frac{2}{5}}.$$

Demonstração. O ponto de partida é dado pelo resultado proveniente do processo de contato, obtido em [6] que afirma que existe uma constante $c_8 \geq 0$ tal que

$$\text{Var}(R_n) \geq c_8 n P(0 \rightarrow l_n).$$

A demonstração do resultado é facilmente adaptado para percolação orientada, bastando redefinir os eventos da demonstração sob a ótica da percolação.

Para $x \in \{0, \dots, w_n\}$, defina $E(x)$ como o evento em que existe um cruzamento vertical em $B(w_n, 2n)$ que passa pelo ponto (x, n) . Note que a nossa escolha de rede implica que o evento $E(x)$ é vazio quando x tem uma paridade diferente da de n . No evento $E(x)$, existe um caminho aberto saindo de l_0 e terminando em (x, n) , e um caminho partindo de (x, n) e terminando em l_{2n} . Logo por independência e simetria,

$$P(E(x)) \leq P(0 \rightarrow l_n)^2.$$

Além disso, a propriedade de cruzamento de caixa e a cota superior da probabilidade da união pela soma das probabilidades implicam que

$$c_1 \leq V(w_n, 2n) \leq \sum_{0 \leq x \leq w_n} P(E(x)).$$

A combinação das duas equações acima nos dá

$$P(0 \rightarrow l_n) \geq \sqrt{\frac{c_1}{w_n}}. \quad (3.6)$$

Inserindo a cota inferior para a variância de R_n obtida via item (ii) do Teorema 3.3 vale que

$$\left(\frac{w_n}{c_4}\right)^2 \geq \text{Var}(R_n) \geq c_8 n P(0 \rightarrow l_n) \geq c_8 n \frac{\sqrt{c_1}}{\sqrt{w_n}},$$

o que conclui a prova. \square

Lema 3.6. *Existe uma constante $\varepsilon > 0$ tal que para todo $n \geq 1$,*

$$E(R_n^+) \leq n^{1-\varepsilon}.$$

Observe que esta proposição, combinada com a Proposição (i) do Teorema 3.3, implica imediatamente que

$$c_3 w_n \leq n^{1-\varepsilon}. \quad (3.7)$$

Para a demonstração deste lema, será necessária a utilização do resultado intermediário 3.7, no Apêndice 3.

Demonstração do Lema 3.6. O passo principal é demonstrar que existe uma constante $c_9 > 0$ tal que para todo $n \geq 1$,

$$E(R_{2n}^+) \leq (2 - c_9)E(R_n^+). \quad (3.8)$$

Para comparar $E(R_n^+)$ com $E(R_{2n}^+)$, será conveniente introduzir as seguintes variáveis. Para $0 \leq m \leq n$, defina

$$R_{m,n}^+ := \max\{0, \sup\{x \geq 0 \text{ tal que } (-\infty, R_m^+] \times \{m\} \rightarrow (x + R_m^+, n)\}\}.$$

Note que $R_{0,n}^+ = R_n^+$ para todo $n \geq 0$. Antes de prosseguir, vamos mencionar outras propriedades destas variáveis aleatórias que seguem da definição. Primeiro, invariância por translação e independência implicam que

$$E(R_{m,n}^+) = E(R_{n-m}^+). \quad (3.9)$$

Além disso, para toda configuração de percolação ω , nós temos a seguinte propriedade de subaditividade.

$$R_{0,n}^+(\omega) \leq R_{0,m}^+(\omega) + R_{m,n}^+(\omega). \quad (3.10)$$

Note que (3.9) e (3.10) já implicam que para todo n ,

$$E(R_{2n}^+) \leq E(R_{0,n}^+) + E(R_{n,2n}^+) = 2E(R_n^+).$$

Logo, para provar (3.8), precisamos mostrar que a desigualdade acima não é a melhor possível. Fazemos isso construindo um evento no qual R_{2n}^+ é menor que $R_{0,n}^+ + R_{n,2n}^+$.

Fixe $n \geq 1$. Relembre a definição do evento E e seja F (em azul na Figura 3.1) o evento em que

- $[\frac{1}{2}w_n, \frac{3}{2}w_n] \times [n, 2n]$ e $[\frac{5}{2}w_n, \frac{7}{2}w_n] \times [0, 2n]$ não são cruzados da esquerda para a direita,
- $[\frac{1}{2}w_n, \frac{7}{2}w_n] \times [n, 2n]$ não é cruzado verticalmente.

A propriedade de cruzamento de caixa e a desigualdade FKG implicam que $P(F) \geq c_1^3$. Uma vez que E e F dependem de um conjunto diferente de elos, independência e o Teorema 3.3 nos dão

$$P(E \cap F) \geq \frac{1}{4}c_1^6.$$

Agora observe que, quando o evento $E \cap F$ ocorre, nós temos $R_n^+ \geq 2w_n$, $R_{n,2n}^+ = 0$ e $R_{2n}^+ \leq \frac{3}{2}w_n$. Logo,

$$\mathbb{1}_{E \cap F} R_{2n}^+ \leq \mathbb{1}_{E \cap F} (R_n^+ + R_{n,2n}^+ - \frac{1}{2}w_n).$$

No evento $(E \cap F)^c$, a cota superior trivial obtida por (3.10) nos dá

$$\mathbb{1}_{(E \cap F)^c} R_{2n}^+ \leq \mathbb{1}_{(E \cap F)^c} (R_n^+ + R_{n,2n}^+).$$

Somando as duas equações acima e tomando o valor esperado, encontramos

$$E(R_{2n}^+) \leq 2E(R_n^+) - \frac{1}{2}w_n P(E \cap F) \leq (2 - \frac{1}{8}c_1^6 c_3)E(R_n^+),$$

onde utilizamos a cota $w_n \geq c_3 E(R_n^+)$ dada pelo item (i) do Teorema 3.3. Observe que $c_9 \leq \frac{1}{8}$. Com isto temos que, iterando a expressão (3.8) obtemos que, para $n = 2^k$

$$E(R_n^+) \leq (2 - c_9)^k E(R_1^+),$$

e assim $(2 - c_9)^k E(R_1^+) = (2^{1-\varepsilon'})^k E(R_1^+) = n^{1-\varepsilon'} E(R_1^+) = n^{1-\varepsilon}$ para uma escolha adequada de ε . Provamos então o teorema para todo n da forma $n = 2^k$.

Observe agora que, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe um t adequado de forma que podemos escrever $n = \sum_{i=0}^t x_i 2^i$ com $x_i \in \{0, 1\}$. Supondo $2^t \leq n < 2^{t+1}$, usando as Expressões (3.9) e (3.10), podemos escrever

$$\begin{aligned} E(R_n^+) &\leq \sum_{i=0}^t x_i E(R_{2^i}^+) = \sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}} x_i E(R_{2^i}^+) + \sum_{i=\frac{t}{2}}^t x_i E(R_{2^i}^+) \\ &\leq \sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}} (x_i 2^i)^{1-\varepsilon} + \sum_{i=\frac{t}{2}}^t (x_i 2^i)^{1-\varepsilon} \end{aligned} \quad (3.11)$$

Note que a soma das parcelas do primeiro somatório não excedem \sqrt{n} pois

$$\sum_{i=0}^{\frac{t-1}{2}} 2^i < 2^{\frac{t}{2}} < \sqrt{n}.$$

Com esta cota, utilizamos o Lema 3.7 repetidamente no somatório restante para obter

$$\begin{aligned} E(R_n^+) &\leq \sqrt{n} + \sum_{i=\frac{t}{2}}^t (x_i 2^i)^{1-\varepsilon} \leq \sqrt{n} + (2^\varepsilon)^{\frac{t}{2}} \left(\sum_{i=\frac{t}{2}}^t x_i 2^i \right)^{1-\varepsilon} \\ &\leq \sqrt{n} + (2^t)^{\frac{\varepsilon}{2}} (n)^{1-\varepsilon} \leq \sqrt{n} + n^{\frac{\varepsilon}{2}} n^{1-\varepsilon} \\ &\leq \sqrt{n} + n^{1-\frac{\varepsilon}{2}}. \end{aligned}$$

Como ε é um número próximo de 0, o valor $n^{1-\frac{\varepsilon}{2}}$ é próximo de n . Desta forma, como \sqrt{n} é bem menor que n , a partir de um certo n_0 (que só depende de ε) vale que $\sqrt{n} + n^{1-\frac{\varepsilon}{2}} < n$. Logo, existe um $\varphi(\varepsilon)$ tal que $E(R_n^+) \leq n^{1-\varphi(\varepsilon)}$ para todo $n \geq n_0$.

Para $n < n_0$, temos pela Expressão (3.11) que $E(R_n^+) \leq n^{1-\delta(\varepsilon, n)}$ para algum delta dependendo de ε e de n . Tomando então $\varepsilon' = \min\{\delta(\varepsilon, n), n < n_0\}, \varphi(\varepsilon)\}$ temos que $E(R_n^+) \leq n^{1-\varepsilon'}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. \square

Partimos agora para a demonstração dos teoremas principais. Inicialmente iremos demonstrar o Teorema 3.2, que segue imediatamente dos dois lemas demonstrados anteriormente.

Demonstração do Teorema 3.2. Pelo Teorema 3.3, é suficiente conseguir cotas superiores e inferiores similares para w_n . A aplicação dos Lemas 3.5 e 3.6 nos dá então que

$$c_5 \cdot c_7 n^{\frac{2}{5}} \stackrel{(3.5)}{\leq} c_5 w_n \stackrel{(3.3)}{\leq} E(R_n | 0 \rightarrow l_n) \stackrel{(3.3)}{\leq} \frac{1}{c_5} w_n \stackrel{(3.6)}{\leq} \frac{n^{1-\varepsilon}}{c_3}.$$

Logo existe uma escolha adequada de ε' que satisfaz o teorema. \square

Para demonstrar o Teorema 3.1 iremos precisar de construções mais complexas.

Demonstração do Teorema 3.1. Segue das Expressões (3.6) e (3.7) que

$$P(0 \rightarrow l_n) \geq \frac{c_1}{\sqrt{w_n}} \geq \frac{c_1 \sqrt{c_3}}{\sqrt{n^{1-\varepsilon}}} \geq \frac{1}{n^{\frac{(1-\varepsilon')}{2}}} \geq \frac{\varepsilon'/2}{n^{1/2-\varepsilon'/2}} = \frac{\eta}{n^{1/2-\eta}}.$$

Para obter a cota superior utilizaremos a propriedade de cruzamento de caixa e a desigualdade FKG em eventos E_n definidos da seguinte forma: sejam $F_1(n)$, $F_2(n)$ e $F_3(n)$ os eventos

- $F_1(n)$: $[\frac{1}{2}w_n, \frac{3}{2}w_n] \times [0, 2n]$ é cruzado da esquerda para a direita,
- $F_2(n)$: $[-\frac{3}{2}w_n, -\frac{1}{2}w_n] \times [0, 2n]$ é cruzado da direita para a esquerda,
- $F_3(n)$: $[-\frac{3}{2}w_n, \frac{3}{2}w_n] \times [0, 2n]$ é cruzada verticalmente.

Definimos $E_n = F_1^c(n) \cap F_2^c(n) \cap F_3^c(n)$.

Os eventos E_n satisfazem então que

$$\begin{aligned} P(E_n) &\geq (1 - H(w_n), 2n)^2 (1 - V(3w_n, 2n)) \\ &\geq (1 - H(w_n, 3n))^2 (1 - V(3w_n, n)) \geq c_1^3. \end{aligned}$$

Seja $r \geq 2$ um inteiro grande o suficiente que fixaremos mais tarde e faça $K = \lfloor \log_r(n/2) \rfloor$. Para que o evento $\{0 \rightarrow l_n\}$ ocorra, nenhum dos eventos E_{r^k} , $1 \leq k \leq K$ pode ocorrer. Imagine por um momento que $w_{r^k} \geq 3w_n$ para cada n , fazendo com que os eventos E_{r^k} , $1 \leq k \leq K$ dependam de conjuntos disjuntos de elos (ver Figura 3.3). Isso implica que

$$P(0 \rightarrow l_n) \leq P\left(\bigcap_{k=1}^K E_{r^k}^c\right) = \prod_{k=1}^K (1 - P(E_{r^k})) \leq (1 - c_1^3)^K.$$

Como $K \geq 1$, neste raciocínio precisamos de $n \geq 2r$. Desta forma, podemos encontrar c_{10} tal que $(1 - c_1^3)^K \leq n^{-c_{10}}$ fazendo

$$\begin{aligned} (1 - c_1^3)^K \leq n^{-c_{10}} &\iff K \log_r(1 - c_1^3) \leq -c_{10} \log_r(n) \\ &\iff c_{10} \leq -\frac{K}{\log_r(n)} \log_r(1 - c_1^3). \end{aligned}$$

Como $-K = -\lfloor \log_r(n/2) \rfloor \geq -\log_r(n/2) = (-\log_r(n) + \log_r(2))$, temos que

$$\begin{aligned} -\frac{K}{\log_r(n)} \log_r(1 - c_1^3) &\geq \frac{(-\log_r(n) + \log_r(2))}{\log_r(n)} \log_r(1 - c_1^3) \\ &= -\log_r(1 - c_1^3) + \frac{\log_r(2)}{\log_r(n)} \log_r(1 - c_1^3) \\ &\geq -\log_r(1 - c_1^3) + \frac{\log_r(2)}{\log_r(2r)} \log_r(1 - c_1^3) \\ &= -\log_r(1 - c_1^3) \left(1 - \frac{\log_r(2)}{\log_r(2r)}\right) \end{aligned}$$

Então, tomando $c_{10} < -\log_r(1 - c_1^3) \left(1 - \frac{\log_r(2)}{\log_r(2r)}\right)$ conseguimos o resultado para $n \geq 2r$. Para $n < 2r$, temos que $P(0 \rightarrow l_n)$ é um polinômio em p e conseqüentemente conseguimos escrever $P(0 \rightarrow l_n) \leq n^{-c(n)}$ para algum $c(n) > 0$ adequado. Tomando então $\varepsilon = \min\{c(n), n < 2r\}, c_{10}\}$ encontramos que $P(0 \rightarrow l_n) \leq n^{-\varepsilon}$ para todo $n \geq 1$.

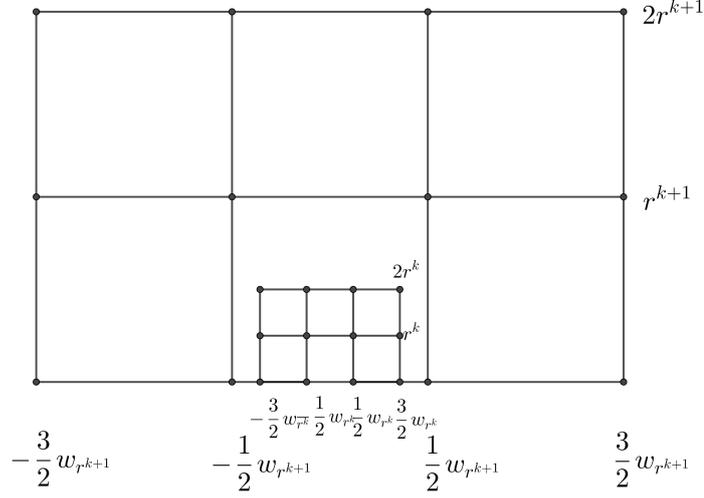


Figura 3.3: Regiões dos eventos E_{r^k} . Em cada retângulo 3×2 o evento E_n não envolve a caixa central inferior. Desta forma a escolha de $w_{rn} > 3w_n$ garante que os eventos $(E_{r^k})_{1 \leq k \leq K}$ dependem de conjuntos disjuntos de elos.

Para concluir a demonstração basta mostrar que $w_{rn} \geq 3w_n$, ou equivalentemente, pela definição de w_n (Expressão (2.11)),

$$H(\alpha 3w_n, \varepsilon rn) \geq V(3w_n, \alpha \varepsilon rn).$$

Por outro lado, dado que $r \geq \frac{1}{\varepsilon}$, monotonicidade e a propriedade de cruzamento de caixa implicam que

$$H(\alpha 3w_n, \varepsilon rn) \geq H(3w_n, n) \geq c_1.$$

Agora, se a caixa $[0, 3w_n] \times [0, \alpha \varepsilon rn]$ é cruzada verticalmente, então $s = \lfloor r\alpha\varepsilon \rfloor$ caixas disjuntas de largura $3w_n$ e altura n precisam ser cruzadas verticalmente. Portanto,

$$V(3w_n, \alpha \varepsilon rn) \leq V(3w_n, n)^s \leq (1 - c_1)^s.$$

Tomando r grande o suficiente, podemos garantir que $(1 - c_1)^s \leq c_1$, e portanto $w_{rn} \geq 3w_n$ para todo $n \geq 1$. \square

Referências Bibliográficas

- [1] C. Bezuidenhout and G. Grimmett. The critical contact process dies out. *Ann. Probab.*, 18(4):1462–1482, 10 1990.
- [2] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes: I. crystals and mazes. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 53(3):629–641, 1957.
- [3] H. Duminil-Copin, V. Tassion, and A. Teixeira. The box-crossing property for critical two-dimensional oriented percolation. *Probability Theory and Related Fields*, 171(3-4):685–708, Jun 2017.
- [4] R. Durrett. Oriented percolation in two dimensions. *Ann. Probab.*, 12(4):999–1040, 11 1984.
- [5] R. Durrett and D. Griffeath. Supercritical contact processes on z . *Ann. Probab.*, 11(1):1–15, 02 1983.
- [6] R. Durrett, R. H. Schonmann, and N. I. Tanaka. The contact process on a finite set. iii: The critical case. *Ann. Probab.*, 17(4):1303–1321, 10 1989.
- [7] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Mean-field behavior for nearest-neighbor percolation in $d > 10$. *Electron. J. Probab.*, 22:65 pp., 2017.
- [8] G. Grimmett. *Percolation*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer Berlin Heidelberg, 2013.
- [9] T. E. Harris. A lower bound for the critical probability in a certain percolation process. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 56(1):13–20, 1960.
- [10] T. E. Harris. Contact interactions on a lattice. *Ann. Probab.*, 2(6):969–988, 12 1974.
- [11] H. Kesten. The critical probability of bond percolation on the square lattice equals $\frac{1}{2}$. *Comm. Math. Phys.*, 74(1):41–59, 1980.
- [12] H. Kesten. Asymptotics in high dimensions for percolation. 1990.
- [13] T. M. Liggett, R. H. Schonmann, and A. M. Stacey. Domination by product measures. *Ann. Probab.*, 25(1):71–95, 01 1997.

Apêndice A - Resultado intermediário

Lema 3.7 (Resultado intermediário). *Seja $0 < \varepsilon < 1$. Para todo $a, b \geq 0$ vale que*

$$a^{1-\varepsilon} + b^{1-\varepsilon} \leq 2^\varepsilon (a + b)^{1-\varepsilon}$$

Demonstração. O resultado é trivial para a ou b iguais a 0. Suponha então, sem perda de generalidade $a \geq b$. Escrevemos $b = ax$ para algum $0 < x \leq 1$. Precisamos determinar a constante C tal que

$$\begin{aligned} a^{1-\varepsilon} + b^{1-\varepsilon} &\leq C(a + b)^{1-\varepsilon} \\ a^{1-\varepsilon}(1 + x^{1-\varepsilon}) &\leq Ca^{1-\varepsilon}(1 + x)^{1-\varepsilon} \\ C &\geq \frac{a^{1-\varepsilon}(1 + x^{1-\varepsilon})}{a^{1-\varepsilon}(1 + x)^{1-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Tomando $C \geq \max_{x \in (0,1]} \left\{ \frac{1+x^{1-\varepsilon}}{(1+x)^{1-\varepsilon}} \right\}$ garantimos que a desigualdade vale para todo x . Observe que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\frac{1 + x^{1-\varepsilon}}{(1 + x)^{1-\varepsilon}} \right) &= \frac{1}{(1 + x)^{2-2\varepsilon}} \left(\frac{(1 - \varepsilon)(1 + x)^{1-\varepsilon}}{x^\varepsilon} - \frac{(1 - \varepsilon)(1 + x^{1-\varepsilon})}{(1 + x)^\varepsilon} \right) \\ &= \frac{(1 - \varepsilon)}{(1 + x)^{2-2\varepsilon}} \left(\frac{(1 + x) - (1 + x^{1-\varepsilon})x^\varepsilon}{x^\varepsilon(1 + x)^\varepsilon} \right) \\ &= \frac{(1 - \varepsilon)}{(1 + x)^{2-2\varepsilon}} \left(\frac{1 + x - x^\varepsilon - x}{x^\varepsilon(1 + x)^\varepsilon} \right) \\ &= \frac{(1 - \varepsilon)}{(1 + x)^{2-2\varepsilon}} \left(\frac{1 - x^\varepsilon}{x^\varepsilon(1 + x)^\varepsilon} \right) \geq 0, \quad \forall x \in (0, 1]. \end{aligned}$$

Logo essa função é crescente no intervalo $(0, 1]$ e portanto, assume seu máximo em $x = 1$

$$\max_{x \in (0,1]} \left\{ \frac{1 + x^{1-\varepsilon}}{(1 + x)^{1-\varepsilon}} \right\} = \frac{1 + 1^{1-\varepsilon}}{(1 + 1)^{1-\varepsilon}} = \frac{2}{2^{1-\varepsilon}} = 2^\varepsilon.$$

O resultado então segue tomando $C = 2^\varepsilon$. □