

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-graduação em Matemática

Vinícius Lara Lima

**CURVAS RACIONAIS COM SINGULARIDADES HIPERELÍTICAS**

Belo Horizonte  
2020

Vinícius Lara Lima

## **CURVAS RACIONAIS COM SINGULARIDADES HIPERELÍTICAS**

**Versão final**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Renato Vidal da Silva Martins

Coorientador: Prof. Ethan Guy Cotterill

Belo Horizonte

2022

© 2020, Vinícius Lara Lima.  
Todos os direitos reservados

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa  
CRB 6ª Região nº 1510

Lima, Vinícius Lara.

L732c Curvas racionais com singularidades hiperelíticas / Vinícius  
Lara Lima. — Belo Horizonte, 2020.  
69 f. il.; 29 cm.

Tese(doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais –  
Departamento de Matemática.

Orientador: Renato Vidal da Silva Martins.

Coorientador: Ethan Guy Cotteril.

1. Matemática - Teses 2. Curvas algébricas .3. Curvas  
racionais singulares. 4. Curvas hiperelíticas. I. Orientador.  
II. Coorientador. III. Título.

CDU 51 (043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Curvas Racionais com Singularidades Hiperelíticas*

VINÍCIUS LARA LIMA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Renato Vidal da Silva Martins  
UFMG

Prof. Ethan Cotterill  
UFF

Prof. André Luis Contiero  
UFMG

Prof. Letterio Gatto  
Politecnico di Torino

Profa. Lia Feital Fusaro  
UFV

Prof. Marcelo Escudeiro Hernandes  
UEM

Belo Horizonte, 31 de julho de 2020.

À minha família.

# Agradecimentos

Gostaria de agradecer especialmente aos Professores Renato Vidal Martins, meu orientador, e Ethan Guy Cotterill, cuja efetiva participação intelectual agregou robustez e requinte a esta produção científica.

Ademais, agradeço aos colegas do Departamento de Matemática da UFMG, pelo apoio e companheirismo, e também aos meus familiares e amigos, por serem a motivação de todo o meu empenho.

# Resumo

Neste trabalho, estudamos curvas racionais singulares no espaço projetivo, deduzindo condições de suas parametrizações e semigrupos de valores associados a suas singularidades. Aqui, focamos em curvas racionais com cúspides cujos semigrupos são do tipo *hiperelítico*. Provamos que a variedade de (parametrizações de) curvas racionais de grau fixo  $d$  suficientemente grande em  $\mathbb{P}^n$  com uma única cúspide hiperelítica de gênero  $g$  é sempre de codimensão pelo menos  $(n - 1)g$  dentro do espaço de aplicações holomorfas  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  de grau  $d$ ; e quando  $g$  é pequeno, esse limite é exato e o espaço correspondente é formado por estratificações unirracional indexadas por *perfis de ramificação* fixos. Também fornecemos evidências para uma generalização conjectural desse fato no caso em que as curvas racionais tem cúspide cujo semigrupo de valores associado  $S$  é arbitrário, e fornecemos evidências para essa conjectura sempre que  $S$  for semigrupo  $\gamma$ -*hiperelítico* de peso mínimo ou peso máximo.

Finalmente, obtivemos limites superiores sobre a gonalidade das curvas racionais com cúspides hiperelíticas, bem como descrições qualitativas de seus modelos canônicos.

**Palavras-chave:** Curvas Racionais Singulares, Curvas Hiperelíticas, Curvas  $\gamma$ -hiperelíticas, Gonalidade.

# Abstract

In this work we study singular rational curves in projective space, deducing conditions on their parameterizations from the value semigroups of their singularities. Here we focus on rational curves with cusps whose semigroups are of *hyperelliptic* type. We prove that the variety of (parameterizations of) rational curves of sufficiently large fixed degree  $d$  in  $\mathbb{P}^n$  with a single hyperelliptic cusp of delta-invariant  $g$  is always of codimension at least  $(n-1)g$  inside the space of degree- $d$  holomorphic maps  $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ ; and that when  $g$  is small, this bound is exact and the corresponding space of maps is paved by unirational strata indexed by fixed *ramification profiles*. We also provide evidence for a conjectural generalization of this picture for rational curves with cusps of arbitrary value semigroup  $S$ , and provide evidence for this conjecture whenever  $S$  is a  $\gamma$ -*hyperelliptic* semigroup of either minimal or maximal weight.

Finally, we obtain upper bounds on the gonality of rational curves with hyperelliptic cusps, as well as qualitative descriptions of their canonical models.

**Keywords:** Singular Rational Curves, Hyperelliptic Curves,  $\gamma$ -Hyperelliptic Curves, Gonality.

# Lista de Figuras

1.1	Caminho de Dyck para o semigrupo $S = \{0, 3, 6, 9, 12, \rightarrow\}$ . . . . .	25
2.1	Caminho de Dick com $b_P$ e $r_P$ , quando $g = 7$ e $n = 4$ . . . . .	38
2.2	Caminho de Dick com $b_P$ e $r_P$ , para $S_{\gamma,g}$ , com $g = 11$ , $\gamma = 2$ e $n = 4$ . . . . .	53
2.3	Caminho de Dick com $b_P$ e $r_P$ quando $S_{g,\gamma}$ , com $g = 11$ , $\gamma = 2$ , e $n = 4$ (bis). . . . .	54

# Sumário

<b>Lista de Figuras</b>	<b>9</b>
<b>Sumário</b>	<b>10</b>
<b>Introdução</b>	<b>11</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>15</b>
1.1 Sistemas Lineares, Gonalidade e Modelos Canônicos . . . . .	15
1.2 Semigrupo de Valores . . . . .	17
1.3 Scrolls . . . . .	18
1.4 Contagem de dimensões para Curvas Racionais Singulares . . . . .	20
1.5 Pontos de Peso Maximal . . . . .	22
1.6 Curvas de Peso Maximal . . . . .	28
<b>2 Contando condições impostas por semigrupos associados a cúspides</b>	<b>30</b>
2.1 Condições impostas por cúspides hiperelíticas . . . . .	30
2.2 Curvas racionais com singularidades $\gamma$ -hiperelíticas de peso maximal . . . . .	44
2.3 Curvas racionais com semigrupo arbitrário . . . . .	53
2.4 Curvas racionais com singularidades $\gamma$ -hiperelíticas de peso minimal . . . . .	58
<b>3 Gonalidade de curvas com singularidades hiperelíticas</b>	<b>67</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>72</b>
<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>72</b>

# Introdução

O estudo de curvas racionais carrega um universo interessante e rico de possibilidades e aplicabilidades. Em particular, curvas racionais são ferramentas essenciais para classificar variedades algébricas complexas. As curvas racionais de grau fixo  $d$  em  $\mathbb{P}^n$  são parametrizadas por um subconjunto aberto na Grassmanniana  $\mathbb{G}(d, n)$ ; e as curvas racionais singulares surgem de interseções especiais de centros de projeção de curvas racionais normais, de dimensão  $(d - n - 1)$ , com elementos de suas bandeiras osculadoras. Em geral, uma singularidade não é determinada exclusivamente pelos *dados de ramificação* codificados por essas interseções. Um dos objetivos deste trabalho é esclarecer as condições *além da ramificação* que são determinadas por uma singularidade unirramificada e, no processo, produzir uma descrição relativamente explícita dos espaços de parâmetros associados a essas curvas.

Quando o espaço ambiente é  $\mathbb{P}^2$ , a célebre prova de Joe Harris [16] da irreduzibilidade da variedade Severi  $M_{d,g}^2$ , de curvas planas de grau fixo  $d$  e gênero  $g$ , indica que toda curva indexada por um ponto de  $M_{d,g}^2$  está no fecho da subvariedade irreduzível de  $M_{d,g}^2$  que parametriza curvas racionais *g-nodais*. No entanto, a irreduzibilidade falha de uma maneira particularmente simples quando substituímos  $M_{d,g}^2$  por  $M_{d,g}^n$ , a "variedade de Severi" de morfismos de graus  $d$   $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  e gênero aritmético  $g$ . De fato, como vimos em [10], é fácil construir exemplos de variedades de Severi  $M_{d,g}^n$  com componentes de dimensão estritamente maior que a da variedade *g-nodal* quando  $n \geq 8$ . Cada um dos componentes excedentes produzidos em [10] parametriza curvas racionais unicuspidais para as quais o semigrupo de valor correspondente é de um tipo específico, que é denominado  $\gamma^*$ -hiperelítico por analogia com os semigrupos hiperelíticos  $\gamma$  de Fernando Torres [42].

Neste trabalho, nós investigamos de perto as curvas racionais unicuspidais nas quais o semigrupo de valores  $S$  é  $\gamma$ -hiperelítico. O caso mais simples é quando  $\gamma = 0$ , onde as curvas têm cúspide também *hiperelítica*, o que significa que  $2 \in S$ . Mostramos que quando  $d \gg g$ ,

uma cúspide hiperelítica de gênero  $g$  impõe pelo menos  $(n - 1)g$  condições independentes sobre curvas racionais de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n$ ; além disso, nossa expectativa é que esse limite inferior seja consistente. Este resultado deve ser comparado com a codimensão de referência  $(n - 2)g$  de curvas racionais de grau  $d$  e com  $g$  nós simples. Nossa análise está baseada em uma implementação sistemática de um esquema de contagem de condições associadas a cúspides, conforme descrito em [10], para o qual também fornecemos uma interpretação gráfica usando o caminho Dyck do semigrupo de valores correspondente. Para ser mais preciso, nossa estratégia é fixar o *perfil de ramificação* local, fazendo uma mudança linear de base, se necessário, para que as funções de parametrização de nossas curvas racionais sejam ordenadas de acordo com suas ordens de anulamento na pré-imagem da cúspide. Podemos então escrever explicitamente aquelas condições além da ramificação que caracterizam a cúspide, e o resultado disso é um mapa racional dominante explícito que vai de um espaço afim até cada parte da estratificação dada por um perfil de ramificação fixado; em particular, cada uma dessas partes é unirracional.

Generalizando o cálculo de codimensão para além do caso hiperelítico, também apresentamos um limite superior explícito para a dimensão de  $M_{d,g;S_\gamma}^n$ , espaço de curvas racionais unicuspidais de grau fixo  $d \gg g$  com uma cúspide  $\gamma$ -hiperelítica de gênero  $g$ , e de *peso máximo*, dentro do espaço  $M_d^n$  de todas as curvas racionais de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n$ . Fernando Torres mostrou que, quando  $g \gg \gamma$ , essas cúspides são precisamente aquelas com semigrupo de valor  $S_\gamma = 2\langle 2, 2\gamma + 1 \rangle + \langle 2g - 4\gamma + 1 \rangle$ . Conjecturamos que nosso limite calcula a codimensão *exata* de  $M_{d,g;S_\gamma}^n$  em  $M_d^n$  e fornecemos algumas informações computacionais e também de ordem qualitativa que evidenciam isso. Motivados por nossos resultados para cúspides  $\gamma$ -hiperelíticas de peso maximal, também fornecemos uma fórmula combinatória conjectural para a codimensão da variedade  $M_{d,g;S}^n$  de curvas racionais com cúspides cujo semigrupo associado  $S$  é de tipo *arbitrário*. A existência dessa fórmula combinatória, embora conjectural, alinha-se com o mantra básico (que tomamos emprestado do estudo de jacobianos compactados de cúspides) que a topologia de  $M_{d,g;S}^n$  é controlada pelo próprio  $S$ . É também de utilidade prática. De fato, aproveitamos essa fórmula para obter muitos novos exemplos de variedades Severi inesperadamente grandes, associadas a semigrupos de valores  $S$   $\gamma$ -hiperelíticos e de peso *minimal*.

O segundo tema deste artigo é o da *gonalidade* de curvas racionais com cúspides hiperelíticas. Mostramos que a gonalidade de uma curva (possivelmente singular) tem limite superior dado por seu gênero aritmético  $g$ . Também obtivemos uma caracterização completa

da estratificação, via gonalidade, do espaço das curvas racionais com cúspides hiperelíticas de gênero 4. Mostramos, em particular, que todas essas curvas são no máximo trigonais.

Seguiremos o seguinte roteiro. Em todo o Capítulo 1, apresentamos as ferramentas básicas necessárias para o entendimento dos nossos resultados e citamos as principais referências. No Capítulo 2, Seção 2.1 provamos o Teorema 2.1.1, que estabelece uma cota inferior para a codimensão da variedade de curvas racionais com cúspides hiperelíticas dadas pelas funções de parametrização  $f = (f_i)_{i=0}^n : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Este Teorema diz que a variedade das curvas com cúspide hiperelítica de gênero  $g$  é pelo menos  $(n - 1)g$ ; para prová-lo, explicitamos um grupo de polinômios nas funções  $f_i$  que impõem condições algebricamente independentes nos coeficientes destas funções de parametrização. Esses polinômios são produzidos em razão da estrutura aritmética do semigrupo de valores associado  $S = \langle 2, 2g + 1 \rangle$ . A partir da análise acima, apresentamos o Teorema 2.1.6 que demonstra ser exatamente  $(n - 1)g$  a codimensão para o espaço dessas curvas, sempre que  $g \leq 7$ , e para cada perfil de ramificação, a parte da estratificação correspondente é unirracional. Fizemos a prova deste Teorema usando argumentos computacionais e, para mostrar o resultado geral, isto é, para todo  $g$ , seria suficiente certificar que a rotina explicitada na Tabela 2.1 persiste.

Já na Seção 2.2 focamos nas curvas racionais com cúspides  $\gamma$ -hiperelíticas de peso maximal, o que generaliza o caso considerado na Seção 2.1. O Teorema 2.2.4 apresenta, como já afirmamos, um limite inferior para a codimensão da variedade de de curvas racionais com gênero  $g$  e cúspide  $\gamma$ -hiperelítica de peso maximal, sempre que  $g \gg \gamma$ . Novamente usaremos a estrutura do semigrupo associado  $S_\gamma$  para, da mesma maneira que fizemos na Seção anterior, encontrar condições independentes sobre os coeficientes das funções de parametrização  $f_i$ .

Apresentamos a Conjectura 2.3.1, agora na Seção 2.3, onde fornecemos uma fórmula geral para o cálculo da codimensão da variedade  $M_{d,g;S}^n$  de curvas com cúspides do tipo  $\gamma$ -hiperelítica, a depender, além de  $S_\gamma$ , do seu *perfil de ramificação*. O Exemplo 2.2.6 nos apresentava evidências para isso; confira em especial a Tabela 2.2.

Em seguida, na Seção 2.4, estudamos as curvas racionais unicuspidais com semigrupos de valores  $S$   $\gamma$ -hiperelíticos de peso minimal. Isso inclui, em particular, os exemplos hiperelíticos  $\gamma^*$  estudados em [10]. No Teorema 2.4.1, apresentamos a precisão da cota  $(n - 2)g$  quando  $n$  é no máximo igual a 7, a menos de dezesseis casos explícitos cujas variedades de Severi tem componentes excessivas, casos esses cuja verificação da quantidade de condições algebricamente independentes geradas pelos semigrupos correspondentes foi atestada pelo Software Macaulay2. Finalmente, assumindo a validade de Conjectura 2.3.1, no Teorema 2.4.2 produzimos infinitas

novas famílias de variedades Severi inesperadamente grandes; o resultado é que teríamos variedades Severi inesperadamente grandes em todas as dimensões ambiente maiores ou iguais que 6 com gênero maiores ou iguais que 21.

Por último, no Capítulo 3, estudamos a gonalidade de curvas racionais com cúspides hiperelíticas com gênero pequeno. O Teorema 3.0.1, que se baseia em resultados anteriores de [11], é um resultado geral e estabelece que a gonalidade de uma curva projetiva arbitrária é sempre superiormente limitada por seu gênero aritmético. Com base no teorema 3.0.1, no Teorema 3.0.2, fornecemos uma classificação completa de curvas racionais com cúspides hiperelíticas do gênero 4, que é o menor caso não tratado em [11].

# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1 Sistemas Lineares, Gonalidade e Modelos Canônicos

Para esta seção (mas não para o restante), uma *curva* é um esquema unidimensional integral e completo sobre um corpo algebricamente fechado. Seja  $C$  uma curva de gênero (aritmético)  $g$  com feixe estrutural  $\mathcal{O}_C$ , ou simplesmente  $\mathcal{O}$  e  $k(C)$  o corpo das funções racionais. Seja  $\pi : \bar{C} \rightarrow C$  seja o mapa de normalização, defina  $\bar{\mathcal{O}} := \pi_*(\mathcal{O}_{\bar{C}})$  e chame  $\mathcal{C} := \mathcal{H}om(\bar{\mathcal{O}}, \mathcal{O})$ , o condutor de  $\bar{\mathcal{O}}$  em  $\mathcal{O}$ . Vamos também denotar por  $\omega_C$ , ou simplesmente  $\omega$ , o feixe dualizante de  $C$ . Um ponto  $P \in C$  é chamado de *Gorenstein* se  $\omega_P$  for um  $\mathcal{O}_P$ -módulo livre. Diz-se que a curva é *Gorenstein* se todos os seus pontos forem assim, ou equivalentemente,  $\omega$  é invertível. Dizemos que  $C$  é *hiperelítica* se houver um morfismo  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$  de grau 2.

### Sistemas Lineares e Gonalidade

Um *Sistema Linear de Dimensão  $r$  em  $C$*  é um conjunto da forma

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathcal{F}, V) := \{x^{-1}\mathcal{F} \mid x \in V \setminus 0\}$$

onde  $\mathcal{F}$  é um feixe coerente de ideais fracionários sobre  $C$  e  $V$  é um subespaço vetorial de  $H^0(\mathcal{F})$  de dimensão  $r + 1$ . O feixe acima é dado por

$$(x^{-1}\mathcal{F})(U) := x^{-1}(\mathcal{F}(U))$$

para qualquer conjunto aberto  $U$  em  $C$ , no qual faz sentido, pois  $x^{-1} \in k(C)$  e  $\mathcal{F}(U) \subset k(C)$ . Em outras palavras, nós estamos usando a linguagem de feixes para nos aproximar

de "divisores por produto" de [39]. Isto é, sistemas lineares são geralmente definidos por

$$\{D + \operatorname{div}(x) \mid x \in V \subset L(D)\}$$

para um divisor de Weil  $D$ . Por outro lado, aqui, "divisores" são "feixes de ideais fracionários" então o "produto" desempenha o papel de "soma" e a "inclusão" o papel de "desigualdade" (veja [39] para maiores detalhes). Assim como  $x \in L(D)$  se somente se  $0 \leq D + \operatorname{div}(x)$ , similarmente,  $x \in H^0(\mathcal{F})$  se somente se  $x\mathcal{O}_P \subset \mathcal{F}(U)$  se somente se  $\mathcal{O}_P \subset x^{-1}\mathcal{F}(U)$  para qualquer conjunto aberto  $U$ . Então o feixe estrutural  $\mathcal{O}$  é como o 0 e  $x^{-1}\mathcal{O}$  é como o  $\operatorname{div}(x)$  na comparação com a teoria de divisores. Esta aproximação acontece para ser usada especialmente quando descrevemos sistemas lineares com pontos de base não-removível, os quais nós definiremos abaixo. O *grau* de um sistema linear é o inteiro:

$$d := \operatorname{deg} \mathcal{F} := \chi(\mathcal{F}) - \chi(\mathcal{O}).$$

Observe que, em particular, se  $\mathcal{O} \subset \mathcal{F}$  então

$$\operatorname{deg} \mathcal{F} = \sum_{P \in C} \dim(\mathcal{F}_P/\mathcal{O}_P).$$

A notação  $g_d^r$  significa "sistema linear de grau  $d$  e dimensão  $r$ ". O sistema linear é dito ser *completo* se  $V = H^0(\mathcal{F})$ , neste caso simplesmente escrevemos  $\mathcal{L} = |\mathcal{F}|$ . A *gonality* de  $C$  é o menor  $d$  para o qual existe um  $g_d^1$  em  $C$ , ou equivalentemente, o menor  $d$  para o qual existe um feixe livre de torção  $\mathcal{F}$  de posto 1 em  $C$  com grau  $d$  e  $h^0(\mathcal{F}) \geq 2$ . Um ponto  $P \in C$  é chamado um *ponto de base de  $\mathcal{L}$*  se  $x\mathcal{O}_P \subsetneq \mathcal{F}_P$  para todo  $x \in V$ . Um ponto de base é chamado de *removível* se ele não é um ponto de base de  $\mathcal{L}(\mathcal{O}\langle V \rangle, V)$ , onde  $\mathcal{O}\langle V \rangle$  é o subfeixe do feixe constante de funções racionais gerado por seções em  $V \subset k(C)$ . Então observe que  $P$  é um ponto de base não-removível de  $\mathcal{L}$  se somente se  $\mathcal{F}_P$  não é um  $\mathcal{O}_P$ -module livre; em particular,  $P$  é singular se for ponto de base não-removível.

## O Modelo Canônico

Dado qualquer esquema integral  $A$ , qualquer aplicação  $\varphi : A \rightarrow C$  e um feixe  $\mathcal{G}$  em  $C$ , definimos

$$\mathcal{O}_A \mathcal{G} := \varphi^* \mathcal{G} / \operatorname{Torsion}(\varphi^* \mathcal{G}).$$

Dado qualquer feixe coerente  $\mathcal{F}$  em  $C$  definimos  $\mathcal{F}^n := \operatorname{Sym}^n \mathcal{F} / \operatorname{Torsion}(\operatorname{Sym}^n \mathcal{F})$ . Se  $\mathcal{F}$  é invertível então  $\mathcal{F}^n = \mathcal{F}^{\otimes n}$ .

Tome  $\widehat{C} := \text{Proj}(\oplus \omega^n)$  o blowup de  $C$  ao longo de  $\omega$ . Se  $\widehat{\pi} : \widehat{C} \rightarrow C$  é a projeção natural,  $\widehat{\mathcal{O}} = \widehat{\pi}_*(\mathcal{O}_{\widehat{C}})$  e  $\widehat{\mathcal{O}}\omega := \widehat{\pi}_*(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega)$ . Em [36, p188 top] Rosenlicht mostrou que o sistema linear  $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega, H^0(\omega))$  é livre de ponto de base. Ele considerou então o morfismo  $\kappa : \overline{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  induzido por ele o denotou por  $C' := \kappa(C)$  o *modelo canônico* de  $C$ . Ele também provou em [36, Thm 17] que, se  $C$  é não-hiperelítica, a aplicação  $\pi : \overline{C} \rightarrow C$  se fatora através da aplicação  $\pi' : C' \rightarrow C$ . Então  $\mathcal{O}' := \pi'_*(\mathcal{O}_{C'})$  neste caso. Em [29, Dfn 4.9] o autor faz outra caracterização para de  $C'$ , como a imagem do morfismo  $\widehat{\kappa} : \widehat{C} \rightarrow \mathbb{P}^{g-1}$  definido pelo sistema linear  $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\widehat{C}}\omega, H^0(\omega))$ . Pelo Teorema de Rosenlicht, como  $\omega$  é gerado por seções globais, temos que  $\widehat{\kappa} : \widehat{C} \rightarrow C'$  é um isomorfismo se  $C$  é não-hiperelítico.

Agora considere  $\overline{\mathcal{O}}\omega := \pi_*(\mathcal{O}_{\overline{C}}\omega)$  e tome  $\lambda \in H^0(\omega)$  tal que  $(\overline{\mathcal{O}}\omega)_P = \overline{\mathcal{O}}_P\lambda$  para todo ponto singular  $P \in C$ . Tal diferencial existe porque  $H^0(\omega)$  gera  $\overline{\mathcal{O}}\omega$ , como provado em [36, p 188 top], e porque são finitos os pontos singulares de  $C$  e  $k$  é infinito, pois é algebricamente fechado. Seja

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_\lambda := \omega/\lambda. \quad (1.1)$$

E assim, temos

$$\mathcal{C}_P \subset \mathcal{O}_P \subset \mathcal{W}_P \subset \widehat{\mathcal{O}}_P = \mathcal{O}'_P \subset \overline{\mathcal{O}}_P$$

para todo ponto singular  $P \in C$ .

**Definição 1.1.1.** *Seja  $P \in C$  um ponto. Defina*

$$\eta_P := \dim(\mathcal{W}_P/\mathcal{O}_P)$$

e também

$$\eta := \sum_{P \in C} \eta_P$$

Seguindo [4] chame  $P$  Kunz se  $\eta_P = 1$  e dizemos que  $C$  é Kunz se todos seus pontos não-Gorenstein o forem. Note que Kunz é o tipo de singularidade não-Gorenstein mais simples possível pois, se  $\eta_P = 1$  segue que  $\dim(\widehat{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) = 2$  que é a menor possível (ver [4, Prps. 20, 21, 28]).

## 1.2 Semigrupo de Valores

Agora, nós vamos estabelecer algumas notações sobre valorizações. Dado um ponto unirramificado  $P \in C$  e qualquer função  $x \in k(C)^*$ , denotamos

$$v_P(x) := v_{\overline{P}}(x) \in \mathbb{Z}$$

onde  $\bar{P}$  é o ponto de  $\bar{C}$  sobre  $P$ . O *semigrupo de valores* de  $P$  é

$$S = S_P := v_P(\mathcal{O}_P).$$

O conjunto de *lacunas* de  $S$  é

$$G := \mathbb{N} \setminus S = \{\ell_1, \dots, \ell_g\}$$

que determina o invariante

$$\delta := \#(G)$$

o qual concorda com o grau da singularidade de  $P$ , isto é,

$$\delta = \dim(\bar{\mathcal{O}}_P/\mathcal{O}_P) \tag{1.2}$$

O *peso* de  $S$  é

$$W_S = \sum_{i=1}^g (\ell_i - i)$$

e seu *condutor* é  $c := \ell_g + 1$ . Também definimos o conjunto

$$K := \{a \in \mathbb{Z} \mid \ell_g - a \notin S\} \tag{1.3}$$

cuja importância ficará evidente mais tarde.

## 1.3 Scrolls

Um *scroll racional normal*  $S := S_{m_1, \dots, m_d} \subset \mathbb{P}^N$  com  $m_1 \leq \dots \leq m_d$ , é uma variedade projetiva de dimensão  $d$  na qual, depois de uma escolha adequada de coordenadas, é o conjunto de pontos  $(x_0 : \dots : x_N) \subset \mathbb{P}^N$  tal que o posto de

$$\left( \begin{array}{cccc|cccc|ccc} x_0 & x_1 & \dots & x_{m_1-1} & x_{m_1+1} & \dots & x_{m_1+m_2} & \dots & \dots & x_{N-1} \\ x_1 & x_2 & \dots & x_{m_1} & x_{m_1+2} & \dots & x_{m_1+m_2+1} & \dots & \dots & x_N \end{array} \right) \tag{1.4}$$

é menor que 2. Então, em particular,

$$N = e + d - 1 \tag{1.5}$$

onde  $e := m_1 + \dots + m_d$

Note que  $S$  é a união disjunta de  $(d-1)$ -planos determinados por uma escolha (parametrizada) de um ponto em cada uma das  $d$  curvas normais racionais de grau  $m_d$  em espaços complementares

em  $\mathbb{P}^N$ . Vamos nos referir a qualquer um desses  $(d-1)$ -planos como uma *fibra*. Então  $S$  é suave se  $m_i > 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, d\}$ . A partir dessa descrição geométrica pode-se ver que

$$\deg(S) = e \tag{1.6}$$

O scroll  $S$  pode ser naturalmente visto como a imagem de um fibrado projetivo. De fato, tomando  $\mathcal{E} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(m_d)$ , obtêm-se um morfismo birracional

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow S \subset \mathbb{P}^N$$

definido por  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{E})}(1)$ . O morfismo é tal que qualquer fibra de  $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}^1$  é levada a uma fibra de  $S$ . Ele é um isomorfismo se  $S$  é suave. Pode-se verificar, for exemplo, em [15] para mais detalhes.

Neste caso, pode-se descrever o grupo de Picard do scroll como

$$\text{Pic}(S) = \mathbb{Z}H \oplus \mathbb{Z}F$$

onde  $F$  é classe das fibras, e  $H$  a classe hiperplana.

Pode-se ainda computar seu anel de Chow como

$$A(S) = \frac{\mathbb{Z}[H, F]}{(F^2, H^{d+1}, H^d F, H^d - eH^{d-1}F)} \tag{1.7}$$

De (1.6) nós temos as relações

$$H^d = e \quad e \quad H^{d-1}F = 1 \tag{1.8}$$

A classe canônica em  $S$  é dada por

$$K_S = -dH + (e-2)F \tag{1.9}$$

Por [35, Lem. 3.1, Cor. 3.2], nós também temos as fórmulas

$$h^0(\mathcal{O}_S(aH + bF)) = \begin{cases} (b+1) \binom{a+d-1}{d-1} + e \binom{a+d-1}{d} & \text{se } a \geq 0 \text{ e } b \geq -am_1 \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{1.10}$$

e

$$h^i(\mathcal{O}_S(aH + bF)) = 0 \quad \text{se } i \geq 1, a \geq 0 \text{ e } b \geq -(am_1 + 1) \tag{1.11}$$

nas quais são importantes na análise dos divisores efetivos em  $S$ .

## 1.4 Contagem de dimensões para Curvas Racionais Singulares

Curvas racionais são ferramentas essenciais para classificar variedades algébricas. Estabelecer limites para as dimensões famílias de curvas racionais mergulhadas que admitem singularidades de um tipo particular surgem naturalmente nesse contexto; veja, por exemplo [24] e [13], onde tais limites são usados para inferir informações sobre espaços de parâmetros de curvas racionais mergulhadas em hipersuperfícies gerais.

Para nossos propósitos, será mais útil ver uma curva racional como um morfismo. Dada a escolha da dimensão do ambiente  $n$  e grau  $d \geq n$ , tal curva é a imagem de uma  $(n+1)$ -tupla de funções holomorfas  $f = (f_0 : \dots : f_n)$  com  $f_i \in H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$ . Explicitamente, podemos escrever

$$f_i = a_{i,0}s^d + a_{i,1}ts^{d-1} + \dots + a_{i,d-1}t^{d-1}s + a_{i,d}t^d \quad (1.12)$$

onde  $t, s$  são coordenadas homogêneas em  $\mathbb{P}^1$ , e  $a_{i,j}$  são coeficientes complexos para todo  $i = 0, \dots, n$  e  $j = 0, \dots, d$ . Se não houver confusão, nós podemos abusar da notação e escrever qualquer curva racional  $C = f(\mathbb{P}^1)$  como

$$C = (a_{00} + a_{01}t + \dots + a_{0d}t^d : \dots : a_{n0} + a_{n1}t + \dots + a_{nd}t^d) \subset \mathbb{P}^n.$$

Como qualquer morfismo  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  de grau  $d$  é dado por uma série linear  $\mathcal{L}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d), V)$  onde  $V$  é um subespaço vetorial de dimensão  $(n+1)$  de um espaço vetorial de seções globais  $H^0(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(d))$  de dimensão  $(d+1)$ , o espaço de parâmetros natural para curvas racionais é então a Grassmanniana  $\mathbb{G}(n, d)$ .

A interpretação de curvas racionais como pontos de uma Grassmanniana é o ponto de partida para a prova [23] de Griffiths e Harris do *Brill-Noether theorem* para curvas genéricas de gênero  $g \geq 2$ . Nesse trabalho, os autores mostram que as dimensões dos espaços das séries lineares de curvas racionais com  $g$  cúspides são (genericamente) as esperadas. Eisenbud e Harris subsequentemente retrabalharam (e reprovaram) o resultado de Brill-Noether usando curvas racionais com  $g$  cúspides [15]. A percepção era de que as estimativas de dimensão para curvas racionais cuspidais, ao contrário das nodais, eram mais favoráveis na Grassmanniana.

Uma noção chave em relação a cúspides é a de *ramificação*, ou inflexão, de uma curva no espaço. Em cada ponto  $\bar{P} \in \mathbb{P}^1$ , o morfismo  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  é determinado por seções globais  $(\sigma_0, \dots, \sigma_n)$  com ordens de anulamento  $a_0 < \dots < a_n$  em  $\bar{P}$ . Genericamente, temos

$(a_0, a_1, \dots, a_n) = (0, 1, \dots, n)$ , e o desvio

$$\alpha = (a_0, a_1, \dots, a_n) - (0, 1, \dots, n) \quad (1.13)$$

determina a variedade de Schubert  $\Sigma_\alpha \subset \mathbb{G}(n, d)$  de codimensão  $|\alpha|$  associada a certas condições de incidência com respeito a uma *bandeira osculadora* de uma curva racional normal em  $\mathbb{P}^d$  (e canonicamente especificado por (1.13)). Um fato fundamental é que  $m$  variedades de Schubert  $\Sigma_{\alpha_i}$ , para  $1 \leq i \leq m$ , obtidas pela ramificação em  $m$  pontos distintos  $\bar{P}_i \in \mathbb{P}^1$  interseccionam-se transversalmente; isto é, suas codimensões são aditivas.

A fim de obter estimativas sobre a dimensão de curvas racionais com grau e dimensão ambiente fixos e com singularidades de gênero pré-definido, vamos introduzir algumas notações seguindo [10]. Denote por  $M_d^n$  o espaço dos morfismos  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Este é um espaço de *frames* de  $\mathbb{G}(n, d)$ . Além disso, denote por  $M_{d,g}^n \subset M_d^n$  a subvariedade de morfismos cujas imagens têm um gênero aritmético  $g > 0$ . Essas curvas são necessariamente singulares. Claramente,  $M_{d,g}^n$  contém todas as curvas com  $g$  nós simples ou  $g$  cúspides simples.

Em [10], os autores fornecem uma conjectura heurística sobre a codimensão deste último espaço dentro do primeiro. Mais precisamente, exigir que um morfismo  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  leve pontos distintos  $\bar{P}_1, \bar{P}_2 \in \mathbb{P}^1$  na mesma imagem  $P \in \mathbb{P}^n$  impõe  $2n$  condições lineares nos coeficientes de  $f$ . Permitir que as pré-imagens e a imagem variem rendem  $(n - 2)$  condições lineares. Uma vez que um nó simples tem gênero aritmético 1, pode parecer razoável esperar, de forma geral, que as singularidades de gênero aritmético  $g$  imponham pelo menos  $(n - 2)g$  condições nos morfismos  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ . Em outras palavras, esperamos que  $\text{cod}(M_{d,g}^n, M_d^n) \geq (n - 2)g$ , quando  $d$  é suficientemente grande em relação a  $g$ .

Cúspides formam, naturalmente, uma classe distinta simples de singularidades. Portanto faz sentido questionar sobre como estimar as dimensões no caso de curvas racionais com singularidades unirramificadas no pior dos casos. Então seja  $\mathcal{V} \subset M_{d,g}^n$  a subvariedade de curvas racionais cujos pontos singulares são todos cúspides. Em [10] encontra-se uma análise em condições suficientes para valer a desigualdade

$$\text{cod}(\mathcal{V}, M_d^n) \geq (n - 2)g. \quad (1.14)$$

Condições nas quais explicitaremos aqui. Primeiro relembremos que o gênero aritmético de uma curva racional é dado pela fórmula

$$g = \sum_{P \in C} \dim(\bar{\mathcal{O}}_P / \mathcal{O}_P). \quad (1.15)$$

Seja  $P \in C := f(\mathbb{P}^1) \subset \mathbb{P}^n$  um ponto unirramificado e  $S$  seu semigrupo de valores. Denote por  $m_i$  o  $i$ -ésimo inteiro positivo em  $S$  (ordenado do menor para o maior) e  $a_0 < a_1 < \dots < a_n$  as ordens de anulamento das seções  $f$  em  $f^{-1}(P)$ . Então  $a_0 = 0$ , e claramente

$$(a_1, \dots, a_n) \geq (m_1, \dots, m_n),$$

então vemos que  $C$  é ramificado em  $P$  para ordem no mínimo

$$R_S^n := \sum_{i=1}^n (m_i - i).$$

Como a codimensão da variedade de Schubert associada à ramificação em pontos distintos de  $\mathbb{P}^1$  é aditiva, a fim de obter (1.14), basta provar que

$$R_S^n - 1 \geq (n - 2)g \quad (1.16)$$

onde o -1 do lado esquerdo surge da variação da pré-imagem de  $P$  ao longo de  $\mathbb{P}^1$  e, sem perda de generalidade, por (1.2) e (1.15), assume-se que  $S$  tem  $g$  lacunas. Agora seja  $k_n$  o maior inteiro tal que  $\ell_{k_n} < m_n$  e considere

$$W_S^n := \sum_{i=1}^{k_n} (\ell_i - i).$$

Pode-se deduzir facilmente através de *Caminho de Dyck de Young Tableau* em [6] que

$$W_S^n + R_S^n = nk_n \quad \text{and} \quad W_S^n \leq W_S - (g - k_n)n$$

e então de (1.16) temos

$$W_S^n \leq 2g - 1 - (g - k_n)n$$

no qual segue se  $W_S \leq 2g - 1$ . Caso contrário, pode-se procurar por condições além da ramificação para obter (1.14) como feito em [10].

## 1.5 Pontos de Peso Maximal

Um resultado clássico estabelece que todo semigrupo numérico  $S$  com  $g$  lacunas tem peso  $W_S \leq g(g - 1)/2$ , com igualdade se e somente se  $2 \in S$ . Isso leva facilmente ao fato (bem conhecido) de que as curvas hiperelíticas são precisamente aquelas que admitem pontos (com semigrupos de Weierstrass) de peso máximo. Em um influente artigo, T. Kato [25]

estendeu o resultado clássico, obtendo um limite superior para o peso de um ponto arbitrário de uma curva não-hiperelítica e identificando todas as curvas não-hiperelíticas que admitem pontos de peso submáximo. Nesta seção, seguimos [11] para explorar a medida em que uma história análoga se sustenta no contexto de curvas racionais com um único ponto singular não-ramificado.

É prática padrão deixar que o peso de um ponto não-singular  $P$  de uma curva integral e projetiva  $C$  denote o peso do semigrupo

$$S_{C,P} = \{n \in \mathbb{N} \mid h^0(\mathcal{O}_C((n-1)P)) < h^0(\mathcal{O}_C(nP))\}. \quad (1.17)$$

No entanto, quando  $P$  é singular, existem outras escolhas aparentemente mais naturais de pesos disponíveis. Em vez de ajustar (1.17) ao lidar com ordens de funções meromorfas, optamos por definir o peso em termos de ordens de diferenciais; acontece que esta versão alternativa concorda com  $W_{S_P}$  precisamente quando a singularidade é Gorenstein.

Concretamente, suponha que  $\bar{P}$  é a pre-imagem de uma singularidade unirramificada  $P$ , e tome

$$H^0(\omega_C) = \langle \lambda_1, \dots, \lambda_g \rangle$$

denotando a base do espaço de seções globais do feixe dualizante da curva singular  $C$ . Denote por  $k_i := |v_{\bar{P}}(\lambda_i)|$  a ordem de  $\lambda_i$  no ponto  $\bar{P}$  cuja imagem é  $P$ . Agora reordene  $\lambda_i$  de forma que

$$0 < k_1 < \dots < k_{g-1}$$

e conseqüentemente define-se

$$w(P) := \sum_{i=1}^{g-1} (k_i - i). \quad (1.18)$$

A última definição carece de um pouco de explicação. A motivação para essa definição é basicamente a seguinte. Em [25], Kato definiu o peso de um ponto em uma curva (suave)  $C$ , usando seções globais do feixe dualizante; classicamente, estes eram referidos como *diferenciais de primeiro tipo* (ver, por exemplo, [36]), e eles também são chamados *diferenciais regulares* em [39]. Quando  $C$  não é específico, essas seções são precisamente os diferenciais meromorfos sem polos. Se  $C$  é singular, eles podem admitir polos ao longo de singularidades ramificadas. Desse ponto de vista, uma situação extrema é aquela em que todos os diferenciais regulares de  $C$  têm polos ao longo das ramificações de uma singularidade  $P$ . E, de fato, isso acontece precisamente quando  $C$  é racional,  $P$  é a única singularidade

de  $C$  e  $P$  é unirramificado, que é o caso com o qual lidaremos aqui. Portanto, é bastante natural usar ordens de polo (em vez dos próprios valores) de diferenciais ao definir o peso de  $P$ ; e, ao fazer isso, estendemos a definição original de Kato.

Para nossos propósitos, também será útil introduzir uma ligeira generalização da noção usual de peso na teoria de semigrupos baseada em ordens de polo. Ou seja, para *qualquer* subconjunto  $T$  dos números naturais com complemento de cardinalidade  $g$

$$\mathbb{N} \setminus T = \{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_g\}$$

consideramos o *peso*  $W_T$  de  $T$  como

$$W_T := \sum_{i=1}^g \ell_i - \frac{g(g+1)}{2}. \quad (1.19)$$

De acordo com [39, Thm. 2.8], o peso de um ponto  $P$  pode então ser explicitamente computado de seu semigrupo  $S$ . De fato, temos que

$$w(P) = W_K \quad (1.20)$$

onde  $K$  é definido em (1.3) e o lado direito da igualdade é computado como em (1.19) pois  $K$  pode não ser um semigrupo, em geral. Ao contrário, ele é um semigrupo se e somente se  $K = S$ , neste caso  $S$  é simétrico. Isto acontece se e somente se o ponto  $P$  é Gorenstein.

**Exemplo 1.5.1.** Um fato interessante sobre as formas de calcular o peso de um subconjunto  $T$  de  $\mathbb{N}$  está implícito em (1.20). Ou seja, o lado direito dessa igualdade, baseado em (1.19), fornece a versão padrão: segue-se de 0 para o condutor, atribuindo a cada lacuna o número de inteiros positivos em  $T$  deixados para atrás; esses números de números perdidos são somados. O lado esquerdo, baseado em (1.18), fornece uma alternativa: um avanço do condutor para 0, atribuindo a cada inteiro positivo em  $T$  o número de lacunas deixadas para trás. É fácil verificar se ambos os procedimentos produzem o mesmo valor. Por exemplo, considere o conjunto (que não é semigrupo)  $T = \{0, 1, 3, 4, 6, 7, 9, 10, 12, \rightarrow\}$ . Prosseguindo de 0 para o condutor 12, e atribuindo a cada lacuna os números de elementos positivos de  $T$  deixados para trás, obtemos:

$$W_T = 1 + 3 + 5 + 7 = 16. \quad (1.21)$$

Da mesma forma, se retrocedermos de 12 para 0 e atribuímos a cada número inteiro positivo em  $T$  o número de lacunas atrás, calculamos:

$$W_T = 1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 = 16. \tag{1.22}$$

Agora considere a curva monomial  $C := (1 : t^3 : t^{13} : t^{14}) \subset \mathbb{P}^3$ . Esta é uma curva racional de gênero 8 com uma singularidade única suportada em  $P = (1 : 0 : 0 : 0)$ , que é unirramificada. O semigrupo de  $P$  é  $S = \{0, 3, 6, 9, 12, \rightarrow\}$  e, portanto, podemos usar nossa definição de  $K$  e usar no lugar de  $T$  acima. Então o peso de  $P$  corresponde a (1.21) usando a igualdade (1.20). Por outro lado, calcula-se

$$H^0(\omega_C) = \langle dt/t^2, dt/t^3, dt/t^5, dt/t^6, dt/t^8, dt/t^9, dt/t^{11}, dt/t^{12} \rangle$$

e deste ponto de vista, o peso de  $P$  corresponde a (1.22) usando a definição (1.18). Como no caso dos semigrupos, pode-se associar a qualquer conjunto numérico com complemento finito, uma *Young tableau* a partir do qual se pode ler o peso por meio da quantidade total de quadrados acima do *Caminho de Dyck* (ver Figura 1.1 abaixo). Nesse caso, as duas maneiras de calcular o peso descritas anteriormente correspondem, respectivamente, à soma das colunas e à soma das linhas.

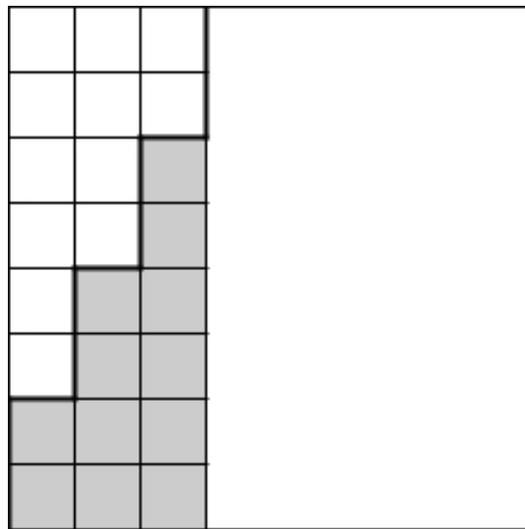


Figura 1.1: Caminho de Dyck para o semigrupo  $S = \{0, 3, 6, 9, 12, \rightarrow\}$

Considerando o semigrupo  $S = \{0, 3, 6, 9, 12, \rightarrow\}$  então o peso de  $S$  é igual a 12. A tabela acima (quadrado de lado igual a  $g$ ) mostra que o número de quadrados menores (de

lado igual a 1) acima do caminho de Dyck (representado pela linha mais escura da seguinte maneira: um passo na vertical, de baixo para cima, para cada natural que não pertence a  $S$  e um passo na horizontal, da esquerda para direita, para cada natural que pertence a  $S$ , sendo o último passo correspondente ao último natural que não pertence a  $S$ ), coincide com o peso e com número de quadrados menores abaixo do caminho de Dyck.

## Maximalidade

Em seguida, caracterizamos pontos de peso máximo e submáximo. Para fazer isso, estabelecemos o seguinte:

**Convenção 1.5.2.** Durante todo o restante desta seção, uma *curva*  $C$  é um esquema unidimensional racional integral e projetivo de gênero aritmético  $g$ , com um único ponto singular  $P$ , que é unirramificado com semigrupo  $S$ .

Com isso em mente, tomamos a seguinte definição baseada em [41, 42].

**Definição 1.5.3.** Um ponto  $P \in C$  é dito  $\gamma$ -hiperelítico se o seu semigrupo:

- (i)  $S$  tem  $\gamma$  números pares no intervalo  $[2, 4\gamma]$
- (ii)  $4\gamma + 2 \in S$ .

Dizemos que  $P$  é *hiperelítico* se ele é 0-hiperelítico, isto é,  $2 \in S$ . De forma similar, dizemos que  $P$  é *bielítico* se ele é 1-hiperelítico, isto é, 4 e 6 são os primeiros inteiros positivos de  $S$ .

Um fato a ser observado é que todo semigrupo numérico é  $\gamma$ -hiperelítico para um único valor de  $\gamma$ , isto é, semigrupos numéricos são naturalmente estratificados de acordo com seu grau de hipereliticidade.

Esses conceitos fornecem os seguintes resultados de caracterização:

**Teorema 1.5.4.** *As afirmações seguintes são equivalentes:*

- (i)  $w(P)$  é máximo em  $(C, P)$ , curva de gênero  $g$ ;
- (ii)  $w(P) = g(g + 1)/2$ ;
- (iii)  $P$  é hiperelítico.

*Demonstração.* Veja [11, Thm. 1.2]

□

**Teorema 1.5.5.** *Seja  $C$  uma curva de gênero  $g \geq 11$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $w(P)$  é submáximo em  $(C, P)$ , curva de gênero  $g$ ;
- (ii)  $w(P) = (g^2 - 5g + 10)/2$ ;
- (iii)  $P$  é bielítico.

*Demonstração.* Veja [11, Thm. 1.4] □

Os teoremas 1.5.4 e 1.5.5 são inspirados pela caracterização assintótica *weight-based* de Torres [42, Thm. 3.6] para *semigrupos  $\gamma$ -hiperelíticos*. Torres mostra que sempre que  $g \gg \gamma$ ,  $S$  é  $\gamma$ -hiperelítico se e somente se o peso  $W_S$  satisfaz

$$\binom{g - 2\gamma}{2} \leq W_S \leq \binom{g - 2\gamma}{2} + 2\gamma^2. \quad (1.23)$$

Assim o teorema 1.5.5 refina o resultado de Torres quando  $\gamma = 1$ , no sentido de que o uso do peso modificado  $W_K$  no lugar de  $W_S$  permite substituir a desigualdade (1.23) por uma igualdade (em que o limite superior em (1.23) permanece). É natural se perguntar se obtemos caracterizações quantitativamente exatas usando  $W_K$  no lugar de  $W_S$  quando  $\gamma \geq 2$ . Infelizmente, esse não é o caso. Ou seja, as apresentações mínimas

$$S_1 = \langle 4, 10, 2g - 3, 2g - 1 \rangle, g \geq 7; \text{ e } S_2 = \langle 6, 8, 10, 2g - 3, 2g - 1, 2g + 1 \rangle, g \geq 8$$

definem infinitas famílias distintas de semigrupos 2-hiperelíticos, para os quais os conjuntos correspondentes  $K_1$  and  $K_2$  satisfazem

$$W_{K_1} = \binom{g - 4}{2} + 6 \text{ e } W_{K_2} = \binom{g - 4}{2} + 4,$$

respectivamente. Ainda assim, parece provável que o uso de pesos modificados junto com a árvore de semigrupos (como nas provas dos teoremas 1.5.4 e 1.5.5) deva produzir uma desigualdade que melhore sobre (1.23) para valores gerais de  $\gamma$ .

Finalmente, observe que a hipótese  $g \geq 11$  (que já aparece como uma hipótese neste caso particular) é necessária (e ótima); por exemplo,  $S = \langle 3, 11 \rangle$  é um semigrupo não-bielítico de gênero 10 com  $W_S = W_K = 30$ , enquanto  $(g^2 - 5g + 10)/2 = 30$ .

## 1.6 Curvas de Peso Maximal

Uma curva projetiva e integral  $C$  é dita ser *hiperelítica* sempre que existir um morfismo de grau 2,  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$ . Perceba que esta definição se aplica independentemente de  $C$  ser uma curva singular ou não-singular. Contudo, a definição acima *não* é, no caso geral, equivalente estipular que a curva carrega um  $g_2^1$ . Ao contrário, como será explicitado no Teorema 1.6.2, para a equivalência entre essas duas caracterizações acontecer, nós devemos exigir que  $g_2^1$  seja livre de pontos de base. Curvas que carregam um  $g_2^1$  com um ponto de base não-removível, caracterizado em [29, Teoremas 3.4, 5.10] como racional nearly normal. Mais geralmente, temos o seguinte: existe um morfismo  $C \rightarrow \mathbb{P}^1$  de grau  $k$  se e somente se  $C$  carrega um  $g_k^1$  livre de ponto de base (veja [11, Lem. 2.1]).

Também temos um limite para a gonalidade de uma curva integral e projetiva em termos do gênero, a saber:

$$\text{gon}(C) \leq g + 1$$

e se esse limite é atingido,  $C$  é Gorenstein, e sua normalização é então  $\mathbb{P}^1$ , isto é,  $C$  is racional, ou é uma curva elítica (veja [11, Thm 2.2], baseado em [8, Thm 3.(i)]).

Para o restante do texto, uma *curva*  $C$ , como na seção anterior, será novamente uma curva racional com um único ponto singular  $P$  que é unirramificada. Denotamos  $\bar{P} \in \bar{C} = \mathbb{P}^1$  como a pré-imagem de  $P$  no mapa de normalização. Nós estabelecemos o seguinte.

**Convenção 1.6.1.** Escrevemos  $K(C) = \mathcal{C}(t)$  e  $\mathbb{P}^1 = \mathcal{C} \cup \{\infty\}$  de modo que  $t$  é a função identidade em distância finita, e  $\bar{P} = 0$ . Em particular,  $t$  é um parâmetro local em  $\bar{P}$ . Então escrevemos  $C = \{P\} \cup (\mathbb{P}^1 \setminus \{0\})$ , isto é, nós identificamos os pontos regulares de  $C$  com suas pré-imagens no mapa de normalização.

Dada a equivalência clássica entre curvas hiperelíticas (lisas) e curvas com semigrupos de Weierstrass hiperelíticos, é natural imaginar se essa caracterização também se estende ao nosso cenário. Isso não é verdade em geral, como veremos. Começamos por caracterizar (globalmente) curvas racionais singulares hiperelíticas.

**Teorema 1.6.2.** *Seja  $C$  uma curva de gênero  $g$ . Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (i)  $C$  é hiperelítica;
- (ii)  $C$  carrega um  $g_2^1$  livre de ponto de base;
- (iii)  $t^2/h \in \mathcal{O}_P$  para algum  $h \in \mathcal{C}[t]$  com  $h(0) \neq 0$  e  $\deg(h) \leq 2$ ;

(iv)  $C$  é Gorenstein e isomorfo à uma curva de grau  $2g + 1$  em  $\mathbb{P}^{g+1}$  está contida em um cone  $S_{0,g}$ ;

(v)  $C$  é Gorenstein e  $\text{gon}(C) = 2$ .

Aqui  $t$  é um parâmetro local não homogêneo para a normalização de  $C$ , centrado na pré-imagem  $\bar{P}$  de um ponto único singular  $P \in C$ , como na Convenção 1.6.1.

*Demonstração.* [11, Thm. 3.1] □

Observe que se  $C$  é qualquer curva de gênero  $g = 1$ , então  $\mathcal{O}_P = \mathbb{C} \oplus t^2 \overline{\mathcal{O}}_P$ ; em particular,  $t^2 \in \mathcal{O}_P$  e então  $C$  é hiperelítica. Similarmente, se  $g = 2$  e  $S$  é hiperelítica, então  $\mathcal{O}_P = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}(t^2 + at^3) \oplus t^4 \overline{\mathcal{O}}_P$  para algum  $a \in \mathbb{C}$ ; assim  $t^2/(1 - at) \in \mathcal{O}_P$ , e portanto  $C$  é hiperelítica. Em seguida, vamos caracterizar o conjunto de curvas não-hiperelíticas de gênero 3 com semigrupos hiperelíticos  $S$ . Para isso, primeiro recordamos que qualquer curva com  $2 \in S$  é Gorenstein, pois pontos não-Gorenstein somente ocorrem com multiplicidade três ou mais. Portanto, toda vez que  $2 \in S$ , o teorema anterior estabelece que  $\text{gon}(C) = 2$  é equivalente a  $C$  ser hiperelítica.

**Proposição 1.6.3.** *Toda curva não hiperelítica  $C$  de gênero 3 com  $2 \in S$  é isomorfa a uma curva plana com funções de parametrização (não-homogêneas)  $f_i : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $0 \leq i \leq 2$  da forma*

$$f_0 = 1 - 2at + bt^2 + ct^3 + dt^4, \quad f_1 = t^2 - at^3, \quad \text{and} \quad f_2 = t^4 \quad (1.24)$$

para  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ , tais que  $ac \neq 0$ . Além disso,  $C$  é trigonal.

*Demonstração.* Veja [11, Prp. 3.2] □

## Capítulo 2

# Contando condições impostas por semigrupos associados a cúspides

Neste capítulo vamos apresentar resultados que estabelecem limites para a dimensão de algumas subvariedades de  $M_{d,g}^n$  que parametrizam curvas racionais unicuspidais. Passando pelas curvas nas quais suas cúspides são hiperelíticas e  $\gamma$ -hiperelíticas de peso maximal, apresentaremos conjectura que propõe o cálculo exato, a depender do *perfil de ramificação* associado à singularidade, da codimensão dessa subvariedade em  $M_{d,g}^n$ . Por fim, utilizando-se do mesmo método de contagem, mostraremos o que acontece quando as cúspides são  $\gamma$ -hiperelíticas de peso minimal, a saber, encontra-se uma infinidade de exemplos onde as codimensões das subvariedades são inesperadamente pequenas.

### 2.1 Condições impostas por cúspides hiperelíticas

Nesta seção, provamos o seguinte resultado, que envolve curvas racionais unicuspidais, quando essas cúspides são hiperelíticas.

**Teorema 2.1.1.** *Dado um vetor  $\mathbf{k} := (k_0, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^{n+1}$ , seja  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}} \subset M_{d,g}^n$  a subvariedade que parametriza curvas racionais  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  com uma única cúspide  $P$  na qual  $k_0 < k_1 < \dots < k_n$  são as ordens de anulamento das seções de  $f$  em  $f^{-1}(P)$  e tal que  $(k_0, k_1) = (0, 2)$ . Suponha ainda que  $d = \deg(f) \geq \max(n, 2g - 2)$ ; então*

$$\text{cod}(\mathcal{V}_{\mathbf{k}}, M_d^n) \geq (n - 1)g + \sum_{i=1}^n \left( \frac{k_i}{2} - i \right).$$

Em particular, a variedade  $\mathcal{V}$  de curvas racionais com uma única singularidade cuspidal e hiperelítica tem codimensão igual a, no mínimo,  $(n-1)g$  em  $M_d^n$ .

**Observação 2.1.2.** A condição  $d \geq n$  é imposta pelo fato de que nossas curvas são não degeneradas. Apesar de não estar tão evidente, precisamos da hipótese de que  $d \geq 2g-2$  para podermos concluir nossa análise sobre as condições além da ramificação. Contudo essa hipótese inclui os casos relevantes  $d = 2g-2$  e  $n = g-1$ .

*Demonstração.* Seja  $C$  a imagem do morfismo  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$ , que corresponde a um ponto na variedade  $\mathcal{V}$ . Então  $C$  tem ramificação em  $P$  na ordem de

$$r_P = \sum_{i=1}^n (k_i - i).$$

Então

$$\text{cod}(\mathcal{V}_{\mathbf{k}}, M_d^n) = r_P + b_P - 1$$

onde  $b_P$  denota o número de condições além da ramificação e o  $-1$ , alocado do lado direito da equação, decorre da variação da pré-imagem do ponto  $P$  ao longo de  $\mathbb{P}^1$ .

Precisamos, portanto, mostrar que a cada  $i \geq 2$ , a função  $f_i$  produz um total de  $g$  condições (de ramificação e além da ramificação). Em particular, como  $k_i \geq 2i$ , é suficiente demonstrar que cada  $f_i$  produz no mínimo  $g - \frac{k_i}{2}$  condições além da ramificação.

Além disso, nós devemos supor que  $k_i < 2g$ ,  $i = 1, \dots, n$ , pois quando  $k_i \geq 2g$  para algum  $i$ , cada um dos  $f_j$ 's com  $j \geq i$  produz pelo menos  $g$  condições de ramificação.

Sem perda de generalidade, nós podemos assumir que  $f^{-1}(P) = (0 : 1) \in \mathbb{P}^1$  e que a cúspide suportada em  $P$  é parametrizada por séries de potência,  $(f_1, \dots, f_n)$ , na variável  $t$ , onde

$$\begin{aligned} f_1 &= t^2 + a_{1,3}t^3 + a_{1,4}t^4 + \dots \\ f_2 &= t^{k_2} + a_{2,k_2+1}t^{k_2+1} + a_{2,k_2+2}t^{k_2+2} + \dots \\ &\vdots \\ f_n &= t^{k_n} + a_{n,k_n+1}t^{k_n+1} + a_{n,k_n+2}t^{k_n+2} + \dots \end{aligned} \tag{2.1}$$

para coeficientes complexos adequados  $a_{i,j}$ . Perceba que cada série de potências  $f_i$  (2.1) equivale ao quociente entre a  $i$ -ésima e a 0-ésima função *global* na parametrização da curva que introduzimos previamente (1.12, seção 1.4).

Definimos, de forma recursiva,

$$F_i := f_i - f_1^{\frac{k_i}{2}}, F_{i,1}^* := F_i, \text{ e } F_{i,j}^* := F_{i,j-1}^* - ([t^{k_i+2(j-1)}]F_{i,j-1}^*)f_1^{\frac{k_i}{2}+j-1}$$

para todo  $2 \leq i \leq n$  e  $2 \leq j \leq g - k_i/2$ . O número ímpar  $k_i + 2j - 1$  é uma lacuna do semigrupo de valores da cúspide hiperelítica, então o coeficiente de  $[t^{k_i+2j-1}]F_{i,j}^*$  deve ser anulado. Seja  $C_{i,j}$  a notação para o polinômio (nos coeficientes de  $f_i$  e  $f_1$ ) associados com a condição de anulamento  $[t^{k_i+2j-1}]F_{i,j}^* = 0$ . Esses coeficientes de  $f_i$  que aparecem em  $C_{i,j}$  percorrem de  $a_{i,k_i+1}$  a  $a_{i,k_i+2j-1}$ ; e  $C_{i,j}$  é linear na variável  $a_{i,k_i+2j-1}$ . Segue que as equações  $C_{i,j} = 0$  são algebricamente independentes; e para todo  $i \geq 2$ , existem  $g - \frac{k_i}{2}$  condições além da ramificação independentes. Ou seja, temos que

$$\begin{aligned}
\text{cod}(\mathcal{V}_{\mathbf{k}}, M_d^n) &= r_P + b_P - 1 \\
&\geq \sum_{i=1}^n (k_i - i) + \sum_{i=2}^n \left( g - \frac{k_i}{2} \right) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^n (k_i - i) + \sum_{i=2}^n g - \sum_{i=2}^n \left( \frac{k_i}{2} \right) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^n (k_i - i) + (n-1)g - \left( \sum_{i=2}^n \left( \frac{k_i}{2} \right) + 1 - 1 \right) - 1 \\
&= \sum_{i=1}^n (k_i - i) + (n-1)g - \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{k_i}{2} \right) - 1 \right) - 1 \\
&= (n-1)g + \sum_{i=1}^n (k_i - i) - \sum_{i=1}^n \left( \frac{k_i}{2} \right) \\
&= (n-1)g + \sum_{i=1}^n \left( \frac{k_i}{2} - i \right)
\end{aligned}$$

como queríamos.  $\square$

**Exemplo 2.1.3.** No Teorema 2.1.1, mostramos que  $b_P \geq \sum_{i=2}^n (g - i)$  sempre que  $k_i = 2i$ ,  $0 \leq i \leq n$ . Neste exemplo vamos lidar com o caso em que  $n = 4$  e  $g = 7$ , para mostrar que nosso limite inferior  $b_P$  é atingido. Ele também serve para motivar a prova do próximo resultado. Nesse sentido, consideramos uma parametrização definida, localmente, por séries de potência

$$\begin{aligned}
f_1 &= t^2 + a_{1,3}t^3 + a_{1,4}t^4 + \cdots \\
f_2 &= t^4 + a_{2,5}t^5 + a_{2,6}t^6 + \cdots \\
f_3 &= t^6 + a_{3,7}t^7 + a_{3,8}t^8 + \cdots \\
f_4 &= t^8 + a_{4,9}t^9 + a_{4,10}t^{10} + \cdots
\end{aligned}$$

Observe que qualquer  $F \in \mathcal{O}_P$ , apto a produzir condições, se decompõe como a soma de monômios nas funções de parametrização  $f_i$ . Além disso, como nos importa apenas as lacunas do semigrupo de valores associado, podemos assumir que  $F$  tem  $t$ -valorização estritamente menor que  $2g = 14$ . Em outras palavras, tal  $F$  pode ser escrito como

$$F = G + H$$

onde

$$G := \sum_{i=2}^4 \alpha_{(i)} f_i + \sum_{j=2}^6 \alpha_{(1^j)} f_1^j \text{ e}$$

$$\begin{aligned} H := & \alpha_{(2,1)} f_1 f_2 + \alpha_{(2,1^2)} f_1^2 f_2 + \alpha_{(3,1)} f_1 f_3 + \alpha_{(2^2)} f_2^2 + \alpha_{(3,1^2)} f_1^2 f_3 + \alpha_{(2,1^3)} f_1^3 f_2 + \alpha_{(2^2,1)} f_1 f_2^2 + \alpha_{(4,1)} f_1 f_4 \\ & + \alpha_{(3,2)} f_2 f_3 + \alpha_{(2,1^4)} f_1^4 f_2 + \alpha_{(3,1^3)} f_1^3 f_3 + \alpha_{(4,1^2)} f_1^2 f_4 + \alpha_{(2^2,1^2)} f_1^2 f_2^2 + \alpha_{(3,2,1)} f_1 f_2 f_3 + \alpha_{(2^3)} f_2^3 \\ & + \alpha_{(2,4)} f_2 f_4 + \alpha_{(3^2)} f_3^2 \end{aligned}$$

para coeficientes complexos  $\alpha_{(\lambda)}$ . Vamos mostrar inicialmente que os polinômios do tipo  $G$  contribuem com, no máximo 12 condições independentes; com isso, nosso limite inferior para  $b_P$  será atingido o que nos indica que os polinômios do tipo  $H$  não contribuem com condições adicionais. O fato de os  $H$ 's não contribuírem com condições adicionais será abordado a seguir, no Lema 2.1.4. De fato, nós podemos reescrever  $G$  como

$$G := (\alpha_{(2)} + \alpha_{(1^2)})t^4 + (\alpha_{(2)}a_{2,5} + 2\alpha_{(1^2)}a_{1,3})t^5 + (\alpha_{(2)}a_{2,6} + 2\alpha_{(1^2)}a_{1,4} + \alpha_{(1^2)}a_{1,3}^2)t^6 + \dots \quad (2.2)$$

$$+ (\alpha_{(3)} + \alpha_{(1^3)})t^6 + (\alpha_{(3)}a_{3,7} + 3\alpha_{(1^3)}a_{1,3})t^7 + \dots \quad (2.3)$$

$$+ (\alpha_{(4)} + \alpha_{(1^4)})t^8 + (\alpha_{(4)}a_{4,9} + 4\alpha_{(1^4)}a_{1,3})t^9 + \dots \quad (2.4)$$

$$+ \alpha_{(1^5)}t^{10} + 5\alpha_{(1^5)}a_{1,3}t^{11} + \dots \quad (2.5)$$

$$+ \alpha_{(1^6)}t^{12} + 6\alpha_{(1^6)}a_{1,3}t^{13} + \dots \quad (2.6)$$

Em particular, para garantir que a ordem de anulamento de  $G$  em  $P$  seja estritamente maior que 4 nós devemos tomar

$$\alpha_{(1^2)} = -\alpha_{(2)}. \quad (2.7)$$

Por outro lado, observe que 5 não pertence ao semigrupo de valores hiperelítico  $S$  de  $P$ ; então  $\alpha_{(2)}(a_{2,5} - 2a_{1,3}) = 0$  é uma condição necessária toda vez que (2.7) valer. Como resultado obtemos que  $G_1 := a_{2,5} - 2a_{1,3} = 0$  é (a menos de um múltiplo escalar) a única condição imposta pelo fato de 5 ser uma lacuna em  $S$ . De forma análoga, nós vemos que, ao impor ordens de anulamento cada vez mais altas em  $P$ , o coeficiente de cada monômio  $t^k$  em cada uma das linhas acima (2.2), (2.3), (2.4) e (2.5) é forçado a ter forma linear nas variáveis  $\alpha_{(j)}$ . Iremos denotar esses coeficientes por  $\ell_{1,k}(\alpha_{(2)})$ ,  $\ell_{2,k}(\alpha_{(3)}, \alpha_{(4)})$ ,  $\ell_{3,k}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)})$ , e

$\ell_{4,k}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)})$ , respectivamente. Por exemplo, depois de impor em  $G$  o anulamento nos coeficientes dos termos de ordem até 5, como no primeiro passo acima, o  $t^6$ -coeficiente na linha (2.2) é  $\ell_{1,6}(\alpha_{(2)}) := (a_{2,6} - 2a_{1,4} + a_{1,3}^2)\alpha_{(2)}$ . No segundo passo, tomamos  $\alpha_{(13)} = -\alpha_{(3)} - \ell_{1,6}(\alpha_{(2)})$  para eliminar o termo de ordem 6. Isto, por sua vez, fará com que o termo de grau 7 seja necessariamente anulado, já que 7 é lacuna, isto é,

$$\alpha_{(3)}a_{3,7} + 3a_{1,3}(-\alpha_{(3)} - \ell_{1,6}(\alpha_{(2)})) + \ell_{1,7}(\alpha_{(2)}) = 0$$

expressão que pode ser reescrita como

$$\alpha_{(2)}G_2 + \alpha_{(3)}G_3 = 0 \tag{2.8}$$

onde  $G_2$  e  $G_3$  são polinômios nos coeficientes das funções de parametrização  $f_i$ . O lado esquerdo de (2.8) descreve aquelas condições produzidas por  $G$  como o resultado do anulamento do termo de ordem 7; existem no máximo 2 tais condições algebricamente independentes. Então o polinômio do tipo  $G$  produz no máximo 2 condições independentes no passo 2. Similarmente, no passo 3, tomamos

$$\alpha_{(14)} = -\alpha_{(4)} - \ell_{1,8}(\alpha_{(2)}) - \ell_{2,8}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)})$$

a fim de eliminar o termo de ordem 8. O anulamento do termo de ordem 9 é portanto forçado e como resultado temos a seguinte relação

$$\alpha_{(4)}a_{4,9} + 4a_{1,3}(-\alpha_{(4)} - \ell_{1,8}(\alpha_{(2)}) - \ell_{2,8}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)})) + \ell_{1,9}(\alpha_{(2)}) + \ell_{2,9}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}) = \alpha_{(2)}G_4 + \alpha_{(3)}G_5 + \alpha_{(4)}G_6 = 0$$

onde os  $G_i$ 's são polinômios nos coeficientes de  $f_i$ . Então o polinômio do tipo  $G$  produz no máximo 3 condições independentes no passo 3. No passo 4, nós tomamos

$$\alpha_{(15)} = -\ell_{3,10}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)}) - \ell_{2,10}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}) - \ell_{1,8}(\alpha_{(2)})$$

para eliminar o termo de grau 10. O anulamento do termo de grau 11 é então forçado, e isso significa

$$\begin{aligned} 5a_{1,3}(-\ell_{3,10}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)}) - \ell_{2,10}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}) - \ell_{1,8}(\alpha_{(2)})) + \ell_{3,11}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)}) + \ell_{2,11}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}) + \ell_{1,11}(\alpha_{(2)}) \\ = \alpha_{(2)}G_7 + \alpha_{(3)}G_8 + \alpha_{(4)}G_9 = 0 \end{aligned}$$

onde os  $G_i$ 's são polinômios nos coeficientes de  $f_i$ . Então o polinômio do tipo  $G$  produz no máximo 3 condições independentes no passo 4. Para finalizar, no passo 5, nós tomamos

$$\alpha_{(16)} = -\ell_{4,12}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)}) - \ell_{3,12}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)}) - \ell_{2,12}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}) - \ell_{1,12}(\alpha_{(2)})$$

com objetivo de eliminar o termo de grau 12. O anulamento do termo de grau 13 é então forçado, o que significa

$$\begin{aligned} & 6a_{1,3}(-\ell_{4,12}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)}) - \ell_{3,12}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)}) - \ell_{2,12}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}) - \ell_{1,12}(\alpha_{(2)})) \\ & + \ell_{4,13}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)}) + \ell_{3,13}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(4)}) + \ell_{2,13}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}) + \ell_{1,13}(\alpha_{(2)}) \\ & = \alpha_{(2)}G_{10} + \alpha_{(3)}G_{11} + \alpha_{(4)}G_{12} = 0 \end{aligned}$$

onde os  $G_i$ 's são polinômios nos coeficientes de  $f_i$ . Então o polinômio do tipo  $G$  produz no máximo 3 condições independentes no passo 5. Somando todos os passos (i.e., passando por todas as lacunas), nós deduzimos que o polinômio do tipo  $G$  contribui com, no máximo, 12 condições independentes.

Explicitamente, as substituições efetuadas para eliminar os termos de grau par, são:

$$\begin{aligned} \alpha_{(1^3)} &= -((-a_{1,3}^2 - 2a_{1,4} + a_{2,6})\alpha_{(2)} + \alpha_{(3)}) \\ \alpha_{(1^4)} &= -((3a_{1,3}^4 + 9a_{1,3}^2a_{1,4} - 3a_{1,3}^2a_{2,6} \\ & + 5a_{1,4}^2 - 2a_{1,3}a_{1,5} - 3a_{1,4}a_{2,6} - 2a_{1,6} + a_{2,8})\alpha_{(2)} \\ & + (-3a_{1,3}^2 - 3a_{1,4} + a_{3,8})\alpha_{(3)} + \alpha_{(4)}) \\ \alpha_{(1^5)} &= -((-18a_{1,3}^6 - 63a_{1,3}^4a_{1,4} + 18a_{1,3}^4a_{2,6} \\ & - 57a_{1,3}^2a_{1,4}^2 + 18a_{1,3}^3a_{1,5} + 27a_{1,3}^2a_{1,4}a_{2,6} - 14a_{1,4}^3 \\ & + 20a_{1,3}a_{1,4}a_{1,5} + 15a_{1,3}^2a_{1,6} + 9a_{1,4}^2a_{2,6} - 6a_{1,3}a_{1,5}a_{2,6} \\ & - 6a_{1,3}^2a_{2,8} - a_{1,5}^2 + 12a_{1,4}a_{1,6} - 2a_{1,3}a_{1,7} - 3a_{1,6}a_{2,6} \\ & - 4a_{1,4}a_{2,8} - 2a_{1,8} + a_{2,10})\alpha_{(2)} \\ & + (18a_{1,3}^4 + 27a_{1,3}^2a_{1,4} - 6a_{1,3}^2a_{3,8} + 9a_{1,4}^2 - 6a_{1,3}a_{1,5} \\ & - 4a_{1,4}a_{3,8} - 3a_{1,6} + a_{3,10})\alpha_{(3)} + (-6a_{1,3}^2 - 4a_{1,4} + a_{4,10})\alpha_{(4)}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_{(16)} = & -((177a_{1,3}^8 + 675a_{1,3}^6a_{1,4} - 177a_{1,3}^6a_{2,6} + 754a_{1,3}^4a_{1,4}^2 \\
& - 214a_{1,3}^5a_{1,5} - 321a_{1,3}^4a_{1,4}a_{2,6} + 312a_{1,3}^2a_{1,4}^3 - 368a_{1,3}^3a_{1,4}a_{1,5} \\
& - 157a_{1,3}^4a_{1,6} - 171a_{1,3}^2a_{1,4}^2a_{2,6} + 96a_{1,3}^3a_{1,5}a_{2,6} + 59a_{1,3}^4a_{2,8} \\
& + 42a_{1,4}^4 - 136a_{1,3}a_{1,4}^2a_{1,5} + 37a_{1,3}^2a_5^2 - 195a_{1,3}^2a_{1,4}a_{1,6} \\
& + 26a_{1,3}^3a_{1,7} - 28a_{1,4}^3a_{2,6} + 60a_{1,3}a_{1,4}a_{1,5}a_{2,6} + 39a_{1,3}^2a_{1,6}a_{2,6} \\
& + 58a_{1,3}^2a_{1,4}a_{2,8} + 11a_{1,4}a_{1,5}^2 - 56a_{1,4}^2a_{1,6} + 32a_{1,3}a_{1,5}a_{1,6} \\
& + 22a_{1,3}a_{1,4}a_{1,7} + 23a_{1,3}^2a_{1,8} - 3a_{1,5}^2a_{2,6} + 21a_{1,4}a_{1,6}a_{2,6} \\
& - 6a_{1,3}a_{1,7}a_{2,6} + 14a_{1,4}^2a_{2,8} - 12a_{1,3}a_{1,5}a_{2,8} - 10a_{1,3}^2a_{2,10} \\
& + 7a_{1,6}^2 - 2a_{1,5}a_{1,7} + 14a_{1,4}a_{1,8} - 2a_{1,3}a_{1,9} - 3a_{1,8}a_{2,6} - 4a_{1,6}a_{2,8} \\
& - 5a_{1,4}a_{2,10} - 2a_{1,10} + a_{2,12})\alpha_{(2)} \\
& + (-177a_{1,3}^6 - 321a_{1,3}^4a_{1,4} + 59a_{1,3}^4a_{3,8} - 171a_{1,3}^2a_{1,4}^2 + 96a_{1,3}^3a_{1,5} \\
& + 58a_{1,3}^2a_{1,4}a_{3,8} - 28a_{1,4}^3 + 60a_{1,3}a_{1,4}a_{1,5} + 39a_{1,3}^2a_{1,6} \\
& + 14a_{1,4}^2a_{3,8} - 12a_{1,3}a_{1,5}a_{3,8} - 10a_{1,3}^2a_{3,10} - 3a_{1,5}^2 \\
& + 21a_{1,4}a_{1,6} - 6a_{1,3}a_{1,7} - 4a_{1,6}a_{3,8} - 5a_{1,4}a_{3,10} - 3a_{1,8} + a_{3,12})\alpha_{(3)} \\
& + (59a_{1,3}^4 + 58a_{1,3}^2a_{1,4} - 10a_{1,3}^2a_{4,10} + 14a_{1,4}^2 - 12a_{1,3}a_{1,5} \\
& - 5a_{1,4}a_{4,10} - 4a_{1,6} + a_{4,12})\alpha_{(4)}
\end{aligned}$$

Explicitamente, as condições além da ramificação são:

$$G_1 := a_{2,5} - 2a_{1,3} = 0$$

$$G_2 := a_{3,7} - 3a_{1,3} = 0$$

$$G_3 := -a_{2,7} - 3a_{1,3}^3 - 4a_{1,3}a_{1,4} + 3a_{1,3}a_{2,5} + 2a_{1,5} = 0$$

$$G_4 := a_{4,9} - 4a_{1,3} = 0$$

$$G_5 := a_{3,9} + 11a_{1,3}^3 + 6a_{1,3}a_{1,4} - 4a_{1,3}a_{3,8} - 3a_{1,5} = 0$$

$$\begin{aligned}
G_6 := & a_{2,9} - 11a_{1,3}^5 - 28a_{1,3}^3a_{1,4} + 11a_{1,3}^3a_{2,6} - 8a_{1,3}a_{1,4}^2 + 11a_{1,3}^2a_{1,5} + 6a_{1,3}a_{1,4}a_{2,6} \\
& + 4a_{1,4}a_{1,5} + 6a_{1,3}a_{1,6} - 3a_{1,5}a_{2,6} - 4a_{1,3}a_{2,8} - 2a_{1,7} = 0
\end{aligned}$$

$$G_7 := a_{4,11} + 26a_{1,3}^3 + 8a_{1,3}a_{1,4} - 5a_{1,3}a_{4,10} - 4a_{1,5} = 0$$

$$G_8 := a_{3,11} - 78a_{1,3}^5 - 87a_{1,3}^3a_{1,4} + 26a_{1,3}^3a_{3,8} - 12a_{1,3}a_{1,4}^2 + 39a_{1,3}^2a_{1,5} = 0$$

$$\begin{aligned}
G_9 &:= a_{2,11} + 78a_{1,3}^7 + 243a_{1,3}^5 a_{1,4} - 78a_{1,3}^5 a_{2,6} + 160a_{1,3}^3 a_{1,4}^2 \\
&\quad - 91a_{1,3}^4 a_{1,5} - 87a_{1,3}^3 a_{1,4} a_{2,6} + 16a_{1,3} a_{1,4}^3 - 100a_{1,3}^2 a_{1,4} a_{1,5} \\
&\quad - 61a_{1,3}^3 a_{1,6} - 12a_{1,3} a_{1,4}^2 a_{2,6} + 39a_{1,3}^2 a_{1,5} a_{2,6} + 26a_{1,3}^3 a_{2,8} \\
&\quad - 8a_{1,4}^2 a_{1,5} + 13a_{1,3} a_{1,5}^2 - 24a_{1,3} a_{1,4} a_{1,6} + 13a_{1,3}^2 a_{1,7} \\
&\quad + 6a_{1,4} a_{1,5} a_{2,6} + 9a_{1,3} a_{1,6} a_{2,6} + 8a_{1,3} a_{1,4} a_{2,8} + 6a_{1,5} a_{1,6} + 4a_{1,4} a_{1,7} \\
&\quad + 8a_{1,3} a_{1,8} - 3a_{1,7} a_{2,6} - 4a_{1,5} a_{2,8} - 5a_{1,3} a_{2,10} - 2a_{1,9} = 0 \\
G_{10} &:= a_{4,13} - 294a_{1,3}^5 - 192a_{1,3}^3 a_{1,4} + 50a_{1,3}^3 a_{4,10} - 16a_{1,3} a_{1,4}^2 + 90a_{1,3}^2 a_{1,5} \\
&\quad + 10a_{1,3} a_{1,4} a_{4,10} + 8a_{1,4} a_{1,5} + 12a_{1,3} a_{1,6} - 5a_{1,5} a_{4,10} - 6a_{1,3} a_{4,12} - 4a_{1,7} = 0 \\
G_{11} &:= a_{3,13} + 882a_{1,3}^7 + 1308a_{1,3}^5 a_{1,4} - 294a_{1,3}^5 a_{3,8} + 444a_{1,3}^3 a_{1,4}^2 \\
&\quad - 570a_{1,3}^4 a_{1,5} - 192a_{1,3}^3 a_{1,4} a_{3,8} + 24a_{1,3} a_{1,4}^3 - 303a_{1,3}^2 a_{1,4} a_{1,5} \\
&\quad - 168a_{1,3}^3 a_{1,6} - 16a_{1,3} a_{1,4}^2 a_{3,8} - 90a_{1,3}^2 a_{1,5} a_{3,8} + 50a_{1,3}^3 a_{3,10} \\
&\quad - 12a_{1,4}^2 a_{1,5} + 45a_{1,3} a_{1,5}^2 - 36a_{1,3} a_{1,4} a_{1,6} + 45a_{1,3}^2 a_{1,7} \\
&\quad + 8a_{1,4} a_{1,5} a_{3,8} + 12a_{1,3} a_{1,6} a_{3,8} + 10a_{1,3} a_{1,4} a_{3,10} + 9a_{1,5} a_{1,6} + 6a_{1,4} a_{1,7} \\
&\quad + 12a_{1,3} a_{1,8} - 4a_{1,7} a_{3,8} + 5a_{1,5} a_{3,10} - 6a_{1,3} a_{3,12} - 3a_{1,9} = 0 \\
G_{12} &:= a_{2,13} - 882a_{1,3}^9 - 3072a_{1,3}^7 a_{1,4} + 882a_{1,3}^7 a_{2,6} - 2766a_{1,3}^5 a_{1,4}^2 \\
&\quad + 1158a_{1,3}^6 a_{1,5} + 1308a_{1,3}^5 a_{1,4} a_{2,6} - 720a_{1,3}^3 a_{1,4}^3 \\
&\quad + 1827a_{1,3}^4 a_{1,4} a_{1,5} + 756a_{1,3}^5 a_{1,6} + 444a_{1,3}^3 a_{1,4}^2 a_{2,6} \\
&\quad - 570a_{1,3}^4 a_{1,5} a_{2,6} - 294a_{1,3}^5 a_{2,8} - 32a_{1,3} a_{1,4}^4 - 560a_{1,3}^2 a_{1,4}^2 a_{1,5} \\
&\quad - 275a_{1,3}^3 a_{1,5}^2 + 656a_{1,3}^3 a_{1,4} a_{1,6} - 145a_{1,3}^4 a_{1,7} - 24a_{1,3} a_{1,4}^3 a_{2,6} \\
&\quad - 303a_{1,3}^2 a_{1,4} a_{1,5} a_{2,6} - 168a_{1,3}^3 a_{1,6} a_{2,6} - 192a_{1,3}^3 a_{1,4} a_{2,8} \\
&\quad + 16a_{1,4}^3 a_{1,5} - 116a_{1,3} a_{1,4} a_{1,5}^2 + 72a_{1,3} a_{1,4}^2 a_{1,6} \\
&\quad - 213a_{1,3}^2 a_{1,5} a_{1,6} - 116a_{1,3}^2 a_{1,4} a_{1,7} - 112a_{1,3}^3 a_{1,8} \\
&\quad - 12a_{1,4}^2 a_{1,5} a_{2,6} - 45a_{1,3} a_{1,5}^2 a_{2,6} + 36a_{1,3} a_{1,4} a_{1,6} a_{2,6} \\
&\quad - 45a_{1,3}^2 a_{1,7} a_{2,6} - 16a_{1,3} a_{1,4}^2 a_{2,8} + 90a_{1,3}^2 a_{1,5} a_{2,8} + 50a_{1,3}^3 a_{2,10} \\
&\quad + 5a_{1,5}^3 - 24a_{1,4} a_{1,5} a_{1,6} - 18a_{1,3} a_{1,6}^2 - 8a_{1,4}^2 a_{1,7} + 30a_{1,3} a_{1,5} a_{1,7} \\
&\quad - 32a_{1,3} a_{1,4} a_{1,8} + 15a_{1,3}^2 a_{1,9} + 9a_{1,5} a_{1,6} a_{2,6} + 6a_{1,4} a_{1,7} a_{2,6} \\
&\quad + 12a_{1,3} a_{1,8} a_{2,6} + 8a_{1,4} a_{1,5} a_{2,8} + 12a_{1,3} a_{1,6} a_{2,8} + 10a_{1,3} a_{1,4} a_{2,10} + 6a_{1,6} a_{1,7} \\
&\quad + 8a_{1,5} a_{1,8} + 4a_{1,4} a_{1,9} + 10a_{1,3} a_{1,10} - 3a_{1,9} a_{2,6} - 4a_{1,7} a_{2,8} - 5a_{1,5} a_{2,10} \\
&\quad - 6a_{1,3} a_{2,12} - 2a_{1,11} = 0
\end{aligned}$$

Na Figura 2.1, apresentamos uma representação gráfica das condições impostas pelo polinômio do tipo  $G$ , isto é, pelos polinômios  $F_i = F_{i,1}^*$  e seus sucessores indutivamente calculados  $F_{i,j}^*$ ,

$j \geq 2$ . Graficamente, os índices das condições tem o seguinte significado: o índice  $i$  especifica a coluna, enquanto o índice  $j$  indica o número de degraus caminhados para cima no caminho de Dyck, que codifica o semigrupo. Esta interpretação gráfica generaliza naturalmente o caso de cúspides  $\gamma$ -hiperelíticas, como veremos em breve.

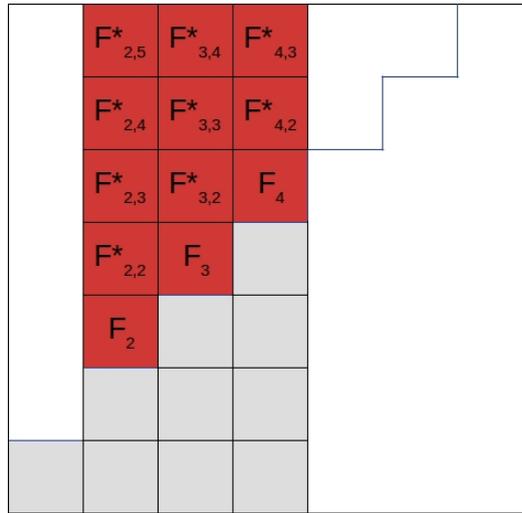


Figura 2.1: Caminho de Dick com  $b_P$  e  $r_P$ , quando  $g = 7$  e  $n = 4$

Condições que contribuem com  $b_P$  e  $r_P$  para curvas racionais com cúspide hiperelítica quando  $g = 7$  e  $n = 4$ .

**Lema 2.1.4.** *Os polinômios da forma*

$$G = \sum_{i=2}^n \alpha_{(i)} f_i + \sum_{j=k_2/2}^{g-1} \alpha_{(1^j)} f_1^j$$

*impõem exatamente  $\sum_{i=2}^n (g - \frac{k_i}{2})$  condições além da ramificação independentes.*

*Demonstração.* No caso geral, quando as funções de parametrização  $f_i$  tem ordens pares e arbitrárias de  $P$ -anulamento, escrevemos:

$$\begin{aligned} f_1 &= t^2 + a_{1,3}t^3 + a_{1,4}t^4 + \dots \\ f_2 &= t^{k_2} + a_{2,k_2+1}t^{k_2+1} + a_{2,k_2+2}t^{k_2+2} + \dots \\ f_3 &= t^{k_3} + a_{3,k_3+1}t^{k_3+1} + a_{3,k_3+2}t^{k_3+2} + \dots \\ &\vdots \\ f_n &= t^{k_n} + a_{n,k_n+1}t^{k_n+1} + a_{n+1,k_n+2}t^{k_n+2} + \dots \end{aligned}$$

e tomamos  $l_i := k_i/2$ ,  $d_i := l_{i+1} - l_i - 1$  para todo  $2 \leq i \leq n-1$ , e  $d_n := g - l_n - 1$ .

Consequentemente, temos

$$G = (\alpha_{(2)} + \alpha_{(1^2)})t^{2l_2} + (\alpha_{(2)}a_{2,2l_2+1} + \alpha_{(1^2)}l_2a_{1,3})t^{2l_2+1} + \dots \quad (2.9)$$

$$+ \alpha_{(1^2+1)}t^{2(l_2+1)} + \alpha_{(1^2+1)}(l_2+1)a_{1,3}t^{2(l_2+1)+1} + \dots \quad (2.10)$$

⋮

$$+ \alpha_{(1^2+d_2)}t^{2(l_2+d_2)} + \alpha_{(1^2+d_2)}(l_2+d_2)a_{1,3}t^{2(l_2+d_2)+1} + \dots \quad (2.11)$$

$$+ (\alpha_{(3)} + \alpha_{(1^3)})t^{2l_3} + (\alpha_{(3)}a_{3,2l_3+1} + \alpha_{(1^3)}l_3a_{1,3})t^{2l_3+1} + \dots \quad (2.12)$$

$$+ \alpha_{(1^3+1)}t^{2(l_3+1)} + \alpha_{(1^3+1)}(l_3+1)a_{1,3}t^{2(l_3+1)+1} + \dots$$

⋮

$$+ \alpha_{(1^3+d_3)}t^{2(l_3+d_3)} + \alpha_{(1^3+d_3)}(l_3+d_3)a_{1,3}t^{2(l_3+d_3)+1} + \dots$$

⋮

⋮

$$+ (\alpha_{(n)} + \alpha_{(1^n)})t^{2l_n} + (\alpha_{(n)}a_{n,2l_n+1} + \alpha_{(1^n)}l_n a_{1,3})t^{2l_n+1} + \dots$$

$$+ \alpha_{(1^n+1)}t^{2(l_n+1)} + \alpha_{(1^n+1)}(l_n+1)a_{1,3}t^{2(l_n+1)+1} + \dots$$

⋮

$$+ \alpha_{(1^n+d_n)}t^{2(l_n+d_n)} + \alpha_{(1^n+d_n)}(l_n+d_n)a_{1,3}t^{2(l_n+d_n)+1} + \dots$$

As lacunas do semigrupo  $S$  de  $P$  determinam condições além da ramificação, pois as ordens de  $P$ -anulamento equivalentes a essas lacunas não são permitidas para elementos  $\mathcal{O}_P$ . Nosso método consiste em forçar o anulamento de termos de ordens sucessivas e cada vez mais altas; os passos deste processo estão indexados pelas lacunas de  $S$ . No primeiro passo, começamos com a lacuna  $2l_2 + 1$ , que é a primeira lacuna que aparece como um expoente na expansão de  $G$  que assumimos acima, com coeficientes genéricos. Desta maneira, tomamos

$$\alpha_{(1^2)} = -\alpha_{(2)} \quad (2.13)$$

com o objetivo de eliminar o termo de grau  $2l_2$ . O termo de grau  $2l_2 + 1$  agora precisa ser anulado, o que força a igualdade

$$\alpha_{(2)}G_1 = 0$$

onde  $G_1 = a_{2,2l_2+1} - l_2a_{1,3}$ . Em particular,  $G_1 = 0$  é a única condição imposta pela lacuna  $2l_2 + 1$ . Além disso, o coeficiente de cada monômio  $t^k$  que aparece na linha (2.9) é transformado em um polinômio linear  $\varphi_{1,k}(\alpha_{(2)})$  na variável  $\alpha_{(2)}$ .

Similarmente, no segundo passo, indexado pela lacuna  $2(l_2 + 1) + 1$ , nós tomamos

$$\alpha_{(1'2+1)} = -\varphi_{1,2(l_2+1)}(\alpha_{(2)}) \quad (2.14)$$

a fim de eliminar o termo de grau  $2(l_2 + 1)$ . O anulamento do termo de grau  $2(l_2 + 1) + 1$  agora impõe a igualdade

$$\alpha_{(1'2+1)}(l_2 + 1)a_{1,3} + \varphi_{1,2(l_2+1)+1}(\alpha_{(2)}) = (-\varphi_{1,2(l_2+1)}(\alpha_{(2)}))(l_2 + 1)a_{1,3} + \varphi_{1,2(l_2+1)+1}(\alpha_{(2)}) = 0$$

que, por sua vez, implica

$$\alpha_{(2)}G_2 = 0$$

onde  $G_2$  é um polinômio nos coeficientes das funções de parametrização da curva. Portanto nós obtemos 1 condição adicional, a saber,  $G_2 = 0$ . Além disso, em razão da igualdade (2.14), verifica-se que qualquer coeficiente de monômio  $t^k$  contido na linha (2.10) é escrito como uma forma linear  $\varphi_{2,k}(\alpha_{(2)})$  de  $\alpha_{(2)}$ .

De forma geral, cada passo dentre os  $(d_2 + 1)$ -ésimos primeiros (indexados por lacunas  $2(l_2 + d_2) + 1$ ) produzem uma condição adicional independente; e os coeficientes dos termos de potências  $t^k$  em cada uma dessas linhas, incluindo (2.11), são transformadas em formas lineares do tipo  $\varphi_{1,k}(\alpha_{(2)}), \dots, \varphi_{d_2+1,k}(\alpha_{(2)})$ .

No  $(d_2 + 2)$ -ésimo passo, tomamos

$$\alpha_{(1'3)} = -\alpha_{(3)} - \sum_{i=1}^{d_2+1} \varphi_{i,2l_3}(\alpha_{(2)}) \quad (2.15)$$

para eliminar o termo de grau  $2l_3$ . Com isso, o coeficiente do termo seguinte, de grau  $2l_3 + 1$ , também deve ser anulado, ou seja,

$$(\alpha_{(3)}a_{3,2l_3+1} + \alpha_{(1'3)}l_3a_{1,3}) + \sum_{i=1}^{d_2+1} \varphi_{i,2l_3+1}(\alpha_{(2)}) = 0$$

pois esta ordem corresponde a uma lacuna. Agora, com a aplicação de 2.15, obtemos

$$\alpha_{(2)}G_{d_2+2} + \alpha_{(3)}G_{d_2+3} = 0$$

onde  $G_{d_2+2}$  e  $G_{d_2+3}$  são polinômios nos coeficientes das funções de parametrização da curva. Assim, obtemos mais duas condições adicionais, a saber,  $G_{d_2+2} = 0$  e  $G_{d_2+3} = 0$ . Podemos verificar, além disso, que todo coeficiente de um monômio  $t^k$  na linha (2.12) é transformado em uma forma linear  $\varphi_{l_3,k}(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)})$ : De fato, qualquer desses coeficientes dependem, *a priori*, de  $\alpha_{(3)}$  e  $\alpha_{(1'3)}$ , mas na relação (2.15),  $\alpha_{(1'3)}$  depende linearmente de  $\alpha_{(2)}$  e  $\alpha_{(3)}$ .

Ao prosseguir com tal procedimento teremos no máximo  $\sum_{i=2}^n (i-1)(d_i+1)$  condições, correspondentes aos  $G_i$ 's produzidos em cada passo. Neste caso, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^n (i-1)(d_i+1) &= \sum_{i=2}^{n-1} (i-1)(l_{i+1}-l_i) + (n-1)(g-l_n) \\ &= \sum_{i=2}^{n-1} (i-1) \left( \frac{k_{i+1}-k_i}{2} \right) + (n-1) \left( g - \frac{k_n}{2} \right) \\ &= \sum_{i=2}^n \left( g - \frac{k_i}{2} \right). \end{aligned}$$

Portanto, polinômios do tipo  $G$  impõem no máximo  $\sum_{i=2}^n (g - \frac{k_i}{2})$  condições além da ramificação algebricamente independentes e o Teorema 2.1.1 mostra que, de fato, eles impõem *exatamente* este número de condições algebricamente independentes.  $\square$

**Exemplo 2.1.5.** Continuando o Exemplo 2.1.3, mostraremos que quando  $n = 4$ ,  $g = 7$  e  $k_i = 2i$ ,  $1 \leq i \leq 4$ , o polinômio do tipo  $H$  não produz condições independentes adicionais, e portanto  $\text{cod}(\mathcal{V}, M_d^n) = (n-1)g = 21$ .

De fato, note que qualquer  $F$  em  $\mathcal{O}_P$  pertence a  $\mathcal{C}[[f_1, f_2, f_3, f_4]]$ . Assumindo que  $\text{ord}_P(F) \geq 4$ , podemos escrever

$$\begin{aligned} F &:= \alpha_{(2)}f_2 + \alpha_{(1^2)}f_1^2 \\ &+ \alpha_{(3)}f_3 + \alpha_{(1^3)}f_1^3 + \alpha_{(2,1)}f_1f_2 \\ &+ \alpha_{(4)}f_4 + \alpha_{(1^4)}f_1^4 + \alpha_{(2,1^2)}f_1^2f_2 + \alpha_{(3,1)}f_1f_3 + \alpha_{(2^2)}f_2^2 \\ &+ \alpha_{(1^5)}f_1^5 + \alpha_{(3,1^2)}f_1^2f_3 + \alpha_{(2,1^3)}f_1^3f_2 + \alpha_{(2^2,1)}f_1f_2^2 + \alpha_{(4,1)}f_1f_4 + \alpha_{(3,2)}f_2f_3 \\ &+ \alpha_{(1^6)}f_1^6 + \alpha_{(2,1^4)}f_1^4f_2 + \alpha_{(3,1^3)}f_1^3f_3 + \alpha_{(4,1^2)}f_1^2f_4 + \alpha_{(2^2,1^2)}f_1^2f_2^2 + \alpha_{(3,2,1)}f_1f_2f_3 + \alpha_{(2^3)}f_2^3 \\ &+ \alpha_{(4,2)}f_2f_4 + \alpha_{(3^2)}f_3^2 \end{aligned}$$

onde  $\alpha_\lambda$  são coeficientes complexos e cada uma das linhas acima correspondem às componentes homogêneas (ponderadas) de  $F$  de valorização 4, 6, 8, 10 e 12, respectivamente.

Reescrevemos agora  $F$  agrupando os termos de mesma valorização. A parte inicial da expansão é portanto lida da seguinte maneira

$$F = (\alpha_{(2)} + \alpha_{(1^2)})t^4 + (\alpha_{2,5}\alpha_{(2)} + 2\alpha_{1,3}\alpha_{(1^2)})t^5 + O(t^6).$$

Segue que  $\text{ord}_P(F) > 4$  se somente se

$$\phi_1(\alpha_{(2)}, \alpha_{(1^2)}) := \alpha_{(2)} + \alpha_{(1^2)} = 0. \quad (2.16)$$

Vamos usar (2.16) e, para isso, escrevemos  $\alpha_{(1^2)} = \ell_1(\alpha_{(2)}) := -\alpha_{(2)}$ ; como 5 é uma lacuna, segue que  $\psi_1 := \alpha_{(2)}G_1 = 0$  para todo  $\alpha_{(2)} \in \mathbb{C}$ , isto é, que

$$G_1 = 0 \tag{2.17}$$

onde  $G_1 := a_{2,5} - 2a_{1,3}$ ; a menos de multiplicação por constante, esta é a única condição imposta pelo fato de que  $5 \notin S$ .

A fim de captar a essência do método, iremos agora deixar de explicitar os polinômios para simplesmente mencionar quais são os  $\alpha_\lambda$ 's envolvidos em cada passo.

No segundo passo, aplicamos (2.16) e escrevemos

$$F = (G_1\alpha_{(2)})t^5 + \phi_2(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(1^3)}, \alpha_{(2,1)})t^6 + \psi_2(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(2,1)})t^7 + O(t^8)$$

Impomos agora

$$\phi_2(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(1^3)}, \alpha_{(2,1)}) = 0 \tag{2.18}$$

Ou seja,  $\alpha_{(1^3)} = \ell_2(\alpha_{(2)}, \alpha_{(3)}, \alpha_{(2,1)})$ . O que nos permite reescrever  $\psi_2$  da seguinte maneira

$$\psi_2 = \alpha_{(2)}G_2 + \alpha_{(3)}G_3 + \alpha_{(2,1)}G_1.$$

O resultado disso é que, neste segundo passo, o polinômio do tipo  $G$  é responsável por *todas* as condições impostas para os coeficientes das funções de parametrização  $f_i$ . De fato,  $G_1 = 0$  é a condição decorrente do primeiro passo e que ressurge junto a  $\alpha_{(2,1)}$ , originariamente coeficiente do polinômio do tipo  $H$ . As novas condições impostas no segundo passo são, portanto,  $G_2 = 0$  e  $G_3 = 0$ .

De forma geral, no passo  $s$  de nosso processo, escrevemos

$$F = \psi_{s-1}t^{2s+1} + \phi_s t^{2s+2} + \psi_{s+1}t^{2s+3} + O(t^{2s+4})$$

e tomamos  $\phi_s = 0$ , o que nos permite reescrever  $\psi_s$  como uma combinação linear de polinômios nos coeficientes das funções de parametrização  $f_i$ .

A partir da decomposição  $F = G + H$ , chamaremos as condições produzidas pelo polinômio  $G$  (resp.,  $H$ ), a medida que avançamos no procedimento, de  $G$ -*polinômios* (resp.,  $H$ -*polinômios*). A tabela 2.1 a seguir nos dá uma precisa descrição de cada um desses conjuntos de polinômios nos coeficientes de  $f_i$ ; como resultado, observe que os  $H$ -polinômios estão *contidos* no conjunto de  $G$ -polinômios.

Tabela 2.1: Como as condições aparecem

Ordem	G-polinômios			H-polinômios		
	$\alpha_{(2)}$	$\alpha_{(3)}$	$\alpha_{(4)}$	$\alpha_{(2,1)}$	$\alpha_{(3,1)}$	$\alpha_{(4,1)}$
5	$G_1$					
7	$G_2$	$G_3$		$G_1$		
9	$G_4$	$G_5$	$G_6$	$G_2$	$G_3$	
11	$G_7$	$G_8$	$G_9$	$G_4$	$G_5$	$G_6$
13	$G_{10}$	$G_{11}$	$G_{12}$	$G_7$	$G_8$	$G_9$

De forma mais precisa, as condições impostas pelo polinômio do tipo  $G$  (no qual tem  $\alpha_{(2)}$ ,  $\alpha_{(3)}$ ,  $\alpha_{(6)}$  como múltiplos escalares) são sistematicamente reproduzidas (num passo posterior) pelo polinômio do tipo  $H$  (no qual tem  $\alpha_{(2,1)}$ ,  $\alpha_{(3,1)}$ ,  $\alpha_{(4,1)}$  como múltiplos escalares).

A repetição desse processo para outros exemplos onde os valores de  $g$  e  $n$  foram tomados arbitrariamente indica que o padrão persiste, entretanto ainda nos desafia o alcance de uma prova geral para este fato.

**Teorema 2.1.6.** *Seja  $\mathcal{V}$  a variedade de curvas racionais com uma única singularidade que é uma cúspide hiperelítica. Então*

$$\text{cod}(\mathcal{V}, M_d^n) = (n - 1)g.$$

sempre que  $g \leq 7$ . Nesse caso cada parte da estratificação  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}} \subset \mathcal{V}$  indexada por  $\mathbf{k}$ , é unirracional de codimensão  $(n - 1)g + \sum_{i=2}^n \left(\frac{k_i}{2} - i\right)$ .

*Demonstração.* Com o auxílio de computador comprovamos que o descrito na tabela acima é válido para todos os valores de  $n$  entre 3 e  $g - 1$ , sempre que  $4 \leq g \leq 7$ . Os comandos utilizados podem ser verificados em [1, ver Arquivo de Contas, subseção 1.2].

Isso significa que, por sua vez, a álgebra de condições impostas pela cúspide hiperelítica é gerada pelos coeficientes  $C_{i,j}$  dos polinômios  $F_{i,j}^*$  introduzidos na prova do Teorema 2.1.1. A unirracionalidade de  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}$  segue do fato que cada  $C_{i,j}$  é linear nas variáveis  $a_{i,k_i+2j-1} = [k_i + 2j - 1]f_i$  da parametrização de  $f$  com perfil de ramificação  $\mathbf{k}$ .

□

**Observação 2.1.7.** A área do retângulo determinado pelas colunas 2 até a coluna  $n$  do nosso diagrama de Dyck (das condições relativas a  $b_P$  e  $r_P$ ) é exatamente  $(n - 1)g$  e, em nossa interpretação gráfica, todos os quadrados correspondentes são destacados; conforme Figura 2.1.

## 2.2 Curvas racionais com singularidades $\gamma$ -hiperelíticas de peso maximal

Nesta seção, usamos como modelo a prova do Teorema 2.1.1 e estabelecemos um limite inferior para o número de condições impostas sobre as curvas racionais por uma cúspide  $\gamma$ -hiperelítica de gênero  $g$ , cujo semigrupo associado é de peso maximal, sempre que  $g \gg \gamma$ . Fernando Torres provou [42] que o único semigrupo numérico com esta propriedade é  $S_{g,\gamma} = \langle 4, 4\gamma + 2, 2g - 4\gamma + 1 \rangle$ .

Antes de enunciar nosso próximo Teorema definimos:

**Definição 2.2.1.** Dado um conjunto sequencial de números naturais  $k_1, \dots, k_n$ , uma *decomposição* de  $s \in \mathbb{N}$  com respeito a  $k_1, \dots, k_n$  é uma equação

$$s = m_1 k_1 + \dots + m_n k_n \quad (2.19)$$

onde  $m_j$ , com  $j \in \{1, \dots, n\}$ , são inteiros não-negativos. Denotaremos a *partição associada* a esta decomposição por  $(k_1^{m_1}, \dots, k_n^{m_n})$  (vamos suprimir a entrada  $k_i^{m_i}$  sempre que  $m_i = 0$ ). Uma decomposição como definida em (2.19) é dita *reduzível* quando alguma sub soma própria do lado direito de (2.19) se decompõe com respeito a  $k_1, \dots, k_n$ ; Caso contrário, dizemos que é *irreduzível*.

**Definição 2.2.2.** Dado um elemento  $s$  de um semigrupo numérico  $S$ , tomamos

$$\rho(s) := \#\{r > s \mid r \notin S\}.$$

**Exemplo 2.2.3.** Seja  $S = \{0, 4, 8, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 24, \rightarrow\}$  e tome  $k_1 = 4, k_2 = 8, k_3 = 12$ . Então  $20 = 2 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 1 \cdot 12$  é uma decomposição reduzível, já que  $12 = 3 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 12$ . Contudo,  $20 = 5 \cdot 4 + 0 \cdot 8 + 0 \cdot 12$  é uma decomposição irreduzível com partição associada  $(4^5)$ . Temos também que  $\rho(16) = 3$ , ao passo que  $\rho(20) = 1$ .

As definições e notações acima nos acompanharão por todo o restante deste capítulo.

**Teorema 2.2.4.** Seja  $\mathcal{V}_{S_{g,\gamma}} := M_{d,g;S_{g,\gamma}}^n \subset M_{d,g}^n$  a subvariedade de curvas racionais com uma única singularidade  $P$  que é cuspidal e  $\gamma$ -hiperelítica com semigrupo de valores  $S_{g,\gamma}$ ,  $\gamma > 0$ . Assumimos como antes que  $n \leq 2g$ ,  $d \geq \max(2g - 2, n)$  e, além disso, que  $g \geq 4\gamma + 2$ . Então

$$\begin{aligned} \text{cod}(\mathcal{V}_{S_{g,\gamma}}, M_d^n) &\geq (n - 1)g - \delta_{n \leq \gamma}(2\gamma + n - j^{**} - 3) - \delta_{\gamma+1 \leq n \leq 3\gamma+1}(3\gamma - j^{**} - 2) \\ &\quad - \delta_{3\gamma+2 \leq n \leq 3\gamma+2+g+j^{**}}(6\gamma - n) + \delta_{n \geq 3\gamma+3+g+j^{**}}(g - 3\gamma + 2 + j^{**}) \end{aligned}$$

onde  $\delta$  é o delta de Dirac e  $j^{**}$  é o único inteiro não negativo para o qual  $g \in (6\gamma - 2j^{**} - 1, 6\gamma - 2j^{**} + 1]$  ou então  $j^{**} = -1$ .

**Observação 2.2.5.** A hipótese  $g \geq 4\gamma + 2$  é feita para garantir que  $8\gamma + 4 \leq 2g$ , que por sua vez tem o objetivo de simplificar nosso método. Observe que  $2g - 4\gamma + 1 > 4\gamma + 2$ , isto é  $g \geq 4\gamma + 1$ , é automático, pois supomos  $S_{g,\gamma}$   $\gamma$ -hiperelítico.

*Demonstração.* Aqui, a análise necessária para produzir um limite inferior para a codimensão é mais delicada do que no caso em que  $\gamma = 0$  em razão da estrutura do semigrupo associado  $S_{g,\gamma}$ . Vamos trabalhar localmente, numa vizinhança de uma cúspide  $\gamma$ -hiperelítica  $P$  de uma curva  $[C] \in \mathcal{V}_{S_{g,\gamma}}$  com  $P$ -ordem de anulamento igual ao vetor  $\mathbf{k} = (k_0, \dots, k_n)$ ; ou seja,  $[C]$  pertence a  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}} := M_{d,g;S_{g,\gamma},\mathbf{k}}^n$ . Sem perda de generalidade, assumimos  $k_0 = 0$ ,  $k_1 = 4$ , e que  $k_{j^*} = 4\gamma + 2$  para algum inteiro positivo  $j^* \leq \gamma + 1$ . A partir daqui vamos nos referir ao lugar geométrico de  $f$  como  $(f_1(t), \dots, f_n(t))$ , onde  $f_i = t^{k_i} + \sum_{\ell \geq k_i+1} a_{i,\ell} t^\ell$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , e para o parâmetro local  $t$  centrado em  $P$ . A estrutura aritmética de  $S_{g,\gamma}$  interage com a parametrização  $f$  associada a  $C$  da maneira que exporemos a seguir.

Vamos separar a demonstração analisando os casos a seguir.

**Caso 1:**  $\mathbf{k}$  é formado apenas por entradas pares.

Como no caso em que  $\gamma = 0$ , temos

$$\text{cod}(\mathcal{V}_{\mathbf{k}}, M_d^n) = r_P + b_P - 1$$

onde  $r_P = \sum_{i=1}^n (k_i - i)$  é a ramificação de  $f$ , e  $b_P$  é o número de condições além da ramificação impostas por  $S_{g,\gamma}$  em  $f$ . As condições além da ramificação são induzidas por polinômios nos  $f_i$ 's indexadas por decomposições irredutíveis dos elementos de  $s \in S_{g,\gamma}$  com relação a  $k_1, \dots, k_n$ .

**Subcaso 1.1:**  $s \leq 4\gamma$ . Observe que  $s$  é um múltiplo de 4 neste caso. Quando  $s \notin \{k_2, \dots, k_{j^*-1}\}$ ,  $s$  admite uma única decomposição irredutível com respeito a  $k_1, \dots, k_n$ , cuja partição associada é  $(4^{s/4})$ ;  $s$  portanto não contribui para o computo da codimensão de  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}$ .

Agora tome  $s = k_j$  para algum  $j \in [2, j^* - 1]$ . Então  $s$  contribui (pelo menos) com  $\rho(s)$  condições independentes para  $b_P$ . Para ficar mais claro, começamos da mesma maneira que no caso  $\gamma = 0$  tomando  $F_j := f_j - f_1^{\frac{k_j}{4}}$ . Então  $v_t(F_j)$  é no mínimo  $k_j + 1$ , que pertence a  $\mathbb{N} \setminus S_{g,\gamma}$ , ou seja, ordem igual a um gap. Pelo mesmo motivo, temos

$$[t^{k_j+1}]F_j = [t^{k_j+2}]F_j = \dots = [t^{k_j^*-1}]F_j = 0 \quad (2.20)$$

onde  $k_j^*$  é o menor elemento de  $S_{g,\gamma}$  que é estritamente maior que  $k_j$ . A independência linear das condições de anulamento (2.20) é clara. Por outro lado, uma vez que as condições (2.20) são impostas, temos  $v_t(F_j) = k_j^*$ , pois os coeficientes remanescentes de  $F_j$  são genéricos. Se  $k_j < 4\gamma$ , nós agora iteramos este procedimento, tomando  $F_j^* := F_j - [t^{k_j^*}]F_j \cdot f_1^{\frac{k_j^*}{4}}$ . Substituindo  $F_j$  por  $F_j^*$  e  $k_j$  por  $k_j^*$  produz-se um conjunto de condições de anulamento análogas a (2.20). Por outro lado, se  $k_j = 4\gamma$ , então  $k_j^* = k_{j^*} = 4\gamma + 2$ , e nós tomamos  $F_j^* := F_j - [t^{4\gamma+2}]F_j \cdot f_{j^*}$ , cujo coeficiente líder deve ser anulado. Então iteramos fazendo a substituição  $F_j$  por  $F_j^*$  e subtraindo um múltiplo escalar de um monômio dado por potências de  $f_1$  e  $f_{j^*}$  com valorização igual a do novo  $F_j$  (após anulamento do termo correspondente ao gap). Nosso procedimento continua da mesma maneira até que todos os gaps de  $S_{g,\gamma}$  maiores que  $k_j$  e menores que  $2g - 4\gamma$  sejam alcançados, obtendo assim condições algebricamente independentes; de fato, a parte *linear* da condição imposta por dado gap  $q \in \mathbb{N}_{>k_j} \setminus S_{g,\gamma}$  é precisamente  $a_{j,q} - \frac{k_j}{4}a_{1,q+4-k_j}$ , ou seja, novas variáveis aparecem *linearmente* nos coeficientes que devem ser anulados em cada passo.

Nosso processo de iteração pode ser interpretado graficamente usando o caminho de Dyck  $\mathcal{P}$  associado a  $S_{g,\gamma}$  nas  $g \times g$  caixas adjacentes. Existe um passo horizontal em  $\mathcal{P}$  correspondente a  $k_j$ ; então  $k_j$  fica associado a uma coluna no diagrama de Dyck, e  $\rho(k_j)$  corresponde a distância vertical até o topo de tal coluna. Em particular, temos  $\rho(k_j) = g - \frac{3}{4}k_j$ ; isso indica que a contribuição de  $s = k_j$  para  $r_P + b_P$  deve ser  $g + (\frac{1}{4}k_j - j)$ . E também que esta contribuição é no mínimo igual a  $g$ , com igualdade se somente se  $k_j = 4j$ .

Embora esta seja uma aproximação útil, ela não está totalmente correta, pois  $2g - 4\gamma + 1 \in S_{g,\gamma}$  não pode ser escrito como uma combinação linear positiva de  $k_1, \dots, k_n$ . A consequência disso é que não é possível continuar subindo na coluna de Dyck indexada por  $k_j$  simplesmente adicionando monômios em  $f_1, \dots, f_n$  a  $F_j, F_j^*$  em cada estágio, pois nenhum *monômio* em  $f_1, \dots, f_n$  tem valorização igual a  $2g - 4\gamma + 1$ . Ao contrário, para continuar subindo na coluna indexada por  $k_j$ , pós  $2g - 4\gamma + 1$ , seria necessário sobrepor outras colunas e suas construções polinomiais indutivas. Vamos retomar a este assunto oportunamente.

**Subcaso 1.2:**  $4\gamma + 2 \leq s$  e  $s \neq 8\gamma + 4$ . Neste caso, novamente  $s$  admite 2 ou 1 decomposições irredutíveis distintas com respeito a  $k_1, \dots, k_n$ , dependendo se  $s$  pertence ou não a  $\{k_{j^*+1}, \dots, k_n\}$ . Se  $s \notin \{k_{j^*+1}, \dots, k_n\}$ , então  $s$  não contribui com o computo da codimensão de  $\mathcal{V}_k$ ; então, sem perda de generalidade, podemos assumir  $s = k_j$  para algum  $j \in [j^* + 1, n]$ . Portanto  $s$  tem decomposições irredutíveis com partições associadas  $(k_j)$  e  $(4^{\frac{k_j}{4}})$  (respect.,  $(4\gamma + 2, 4^{\frac{k_j - (4\gamma + 2)}{4}})$ ) dependendo se  $k_j$  é ou não divisível por 4. Assim,

definimos  $F_j := f_j - f_1^{\frac{k_j}{4}}$  (respect.,  $F_j := f_j - f_{j^*} f_1^{\frac{k_j - (4\gamma + 2)}{4}}$ ). Nós agora vamos caminhar indutivamente para cima na coluna do diagrama de Dyck que é indexada por  $k_j$  seguindo o mesmo procedimento indutivo do Subcaso 1.1. Para uma primeira aproximação, é útil imaginar que todo gap de  $S_{g,\gamma}$  estritamente maior que  $k_j$  impõe uma condição que depende linearmente de uma variável antes invisível, e que existem  $\rho(k_j)$  destas condições. O valor preciso de  $\rho(k_j)$  depende de quão grande  $k_j$  é relativamente a  $2g - 4\gamma + 1$ ; escrevendo  $k_j = 4\gamma + 2\ell$  para algum  $\ell \geq 0$ , temos

$$\rho(k_j) = (g - 3\gamma - \ell)\delta_{\ell \leq g - 4\gamma} + \sum_{i=0}^{\gamma-1} (g - 3\gamma - \ell - m)\delta_{g - 4\gamma + m \leq \ell \leq g - 4\gamma + m + 1}.$$

Se  $k_j$  é divisível por 4, a parte linear da condição indexada por  $q \in \mathbb{N}_{>k_j} \setminus S_{g,\gamma}$  é  $a_{j,q} - \frac{k_j}{4}a_{1,q+4-k_j}$  como no Subcaso 1.1 acima; caso contrário, a parte linear indexada por  $q \in \mathbb{N}_{>k_j} \setminus S_{g,\gamma}$  é  $a_{j,q} - \frac{k_j - (4\gamma + 2)}{4}a_{1,q+4-k_j} - a_{j^*,4\gamma+2+q-k_j}$ . A contribuição agregada  $\rho(k_j) + k_j - j$  de  $s = k_j$  para  $r_P + b_P$  é

$$(g + \gamma + \ell - j)\delta_{\ell \leq g - 4\gamma} + \sum_{i=0}^{\gamma-1} (g + \gamma + \ell - m - j)\delta_{g - 4\gamma + m \leq \ell \leq g - 4\gamma + m + 1} \geq g$$

cuja igualdade vale se somente se  $j = \gamma + \ell - m^*$ , onde  $m^*$  ou é o único inteiro para o qual  $\ell \in [g - 4\gamma + m^*, g - 4\gamma + m^* + 1]$  ou então  $m^* = 0$ .

Contudo, assim como no Subcaso 1.1, o argumento usado acima precisa ser ajustado pois  $2g - 4\gamma + 1$  não pode ser escrito como uma combinação linear positiva de  $k_1, \dots, k_n$ , assim o procedimento iterativo pelo qual subimos na coluna indexada por  $k_j$  precisa ser acertada para explicar as condições induzidas por gaps maiores que  $2g - 4\gamma + 1$ . Iremos implementar esse ajuste de maneira a unificar as demandas de todos os subcasos seguindo nossa análise preliminar do Subcaso 1.3.

**Subcaso 1.3:**  $s = 8\gamma + 4$ . Neste subcaso,  $s$  admite 3 ou 2 decomposições irredutíveis distintas com respeito a  $k_1, \dots, k_n$ , dependendo de quando  $s$  pertence ou não a  $\{k_{j^*+1}, \dots, k_n\}$ . As partições associadas são  $(4^{2\gamma+1})$ ,  $(4\gamma + 2)^2$ , e possivelmente  $(8\gamma + 4)$ , se  $k_j = 8\gamma + 4$  para algum  $j$ . Assim, nós tomamos  $G := f_{j^*}^2 - f_1^{2\gamma+1}$ ; e se  $k_j = 8\gamma + 4$ , nós ainda tomamos  $F_j := f_j - f_1^{2\gamma+1}$ . Assim como fizemos antes, nós indutivamente subimos a coluna do diagrama de Dyck indexada por  $s$ , perturbando  $G$  e  $F_j$  por monômios em  $f_1, \dots, f_n$  em cada passo. As valorizações dos polinômios resultantes continuam crescendo até atingirem  $2g - 4\gamma$ , estágio no qual nenhuma iteração adicional é possível, já que não temos monômios em  $f_1, \dots, f_n$  cuja valorização é igual a  $2g - 4\gamma + 1$ . No entanto, como heurística, é útil ignorar

provisoriamente essa obstrução e corrigir a contagem posteriormente; nesta idealização, cada (versão indutivamente perturbada de)  $G$  e  $F_j$  (quando  $s = k_j$ ) irá contribuir  $\rho(8\gamma + 4)$  condições algebricamente independentes, com partes lineares da forma  $2a_{j^*,q-4\gamma-2} - (2\gamma + 1)a_{1,q-8\gamma}$  e  $a_{j,q} - (2\gamma + 1)a_{1,q-8\gamma}$  para todo  $q \in \mathbb{N}_{>8\gamma+4} \setminus S_{g,\gamma}$ , respectivamente. O valor de  $\rho(8\gamma + 4)$  depende de quão grande  $g$  é relativamente a  $\gamma$ ; a saber,

$$\rho(8\gamma + 4) = \delta_{g \geq 6\gamma+2}(g - 5\gamma - 2) + \sum_{j=0}^{\gamma-1} (g - 5\gamma - 1 + j) \delta_{6\gamma-2j-1 < g \leq 6\gamma-2j+1}.$$

Nesta idealização, quando  $s \notin \{k_{j^*+1}, \dots, k_n\}$ ,  $s$  contribui  $g - 5\gamma - 1 + j^{**}$  com a soma  $r_P + b_P$ . Quando  $s = k_j$  para algum  $j$ ,  $s$  contribui

$$2(g - 5\gamma - 1 + j^{**}) + (8\gamma + 4 - j) = 2g - 2\gamma + 2 + 2j^{**} - j \geq 2g - 5\gamma - 1 + j^{**}$$

com  $r_P + b_P$ , cuja igualdade é atingida se somente se  $j = 3\gamma + 3 + j^{**}$ .

**Condições além de  $2g - 4\gamma + 1$ .** Em razão do gerador minimal  $2g - 4\gamma + 1$  de  $S_{g,\gamma}$  não pertencer a  $\mathbf{k}$ , nenhum monômio nas funções de parametrização  $f_i, i = 1, \dots, n$  tem  $t$ -valorização  $2g - 4\gamma + 1$ . Para continuar subindo a coluna de Dyck indexada por um dado elemento  $s \in S_{g,\gamma}$  "além de"  $2g - 4\gamma + 1$ , perturbamos o polinômio  $F^s$ , construído indutivamente, de valorização  $2g - 4\gamma$  por (qualquer) um dos polinômios  $F^{s'}$ , também construídos indutivamente, com valorização  $2g - 4\gamma$  de uma coluna indexada por um elemento distinto  $s' \in S_{g,\gamma}$ . De forma mais precisa, Nós substituímos  $F^s$  por  $F^s - F^{s'}$  e então continuamos nosso processo iterativo exatamente como antes, aumentando a valorização de nosso polinômio ao adicionar múltiplos escalares de monômios nas funções de parametrização  $f_1, \dots, f_n$  em cada passo. Quando fazemos isso para toda coluna indexada por algum  $s \in S_{g,\gamma}$  que admite no mínimo duas decomposições irredutíveis, o efeito imediato é que o limite inferior da codimensão que havíamos idealizado anteriormente diminui por  $\rho(2g - 4\gamma + 1) = \gamma$ ; cf. Teorema 2.3.4 e sua prova abaixo.

**Minimizando o número total de condições.** O resultado básico da análise acima é que quando todas as entradas de  $\mathbf{k}$  são pares, o número de condições é minimizado quando os elementos  $k_j$  determinam, na extensão máxima possível, uma sequência de elementos consecutivos em  $S_{g,\gamma}$ . Existe uma ressalva, a saber,  $8\gamma + 4$ , que é o mínimo múltiplo comum de 4 e  $4\gamma + 2$ , distingue-se dentre os elementos de  $S_{g,\gamma}$  como o único elegível para admitir três decomposições irredutíveis distintas. Isso implica que para valores grandes de  $n$ , o vetor de valorizações  $\mathbf{k}$  associado ao número mínimo de condições omitirá  $8\gamma + 4$ .

**Caso 2:**  $\mathbf{k}$  contém entradas ímpares. Nossa análise das condições impostas por elementos  $s \in S_{g,\gamma}$  é idêntica ao Caso 1 sempre que  $s$  é par ou estritamente menor que a valorização ímpar mínima  $k_{\hat{j}}$ . Observe que  $k_{\hat{j}} \geq 2g - 4\gamma + 1$  e, claro,  $2g - 4\gamma + 1 > 4\gamma + 2$  pois  $g \geq 4\gamma + 2$ . O elemento  $s = k_{\hat{j}}$  contribui com  $k_{\hat{j}} - \hat{j}$  condições de ramificação algebricamente independentes para a soma  $r_P + b_P$ . Note ainda que  $k_{\hat{j}} - \hat{j} \geq g - \gamma$ , com igualdade se somente se  $k_{\hat{j}} = 2g - 4\gamma + 1$  e  $\mathbf{k}$  inclui todos os elementos positivos de  $S_{g,\gamma}$  menores ou iguais a  $2g - 4\gamma + 1$ . Por outro lado, sempre que  $s > k_{\hat{j}}$  e  $s$  é ímpar,  $s$  admite 2 ou 1 decomposições irredutíveis com relação a  $k_1, \dots, k_n$ , dependendo se  $s = k_j$  para algum  $j$  ou não. Mais uma vez, nós vamos supor, sem perda de generalidade, que  $s = k_j$ ; então  $s$  contribui com  $\rho(k_j) + k_j - j$  condições algebricamente independentes para a soma  $r_P + b_P$ . Pelo mesmo argumento de antes, o número total de condições decorrentes da parametrização é minimizado quando as entradas  $k_j$  determinam uma sequência consecutiva de elementos em  $S_{g,\gamma}$ , com a ressalva de que o único elemento apto a admitir 3 decomposições irredutíveis,  $s = 8\gamma + 4$ , aqui também deve ser ignorado. Dado uma valorização ímpar  $k_j = 2g - 4\gamma + 1 + 4\ell$ , onde  $\ell \in [0, \gamma - 1]$ , temos  $\rho(k_j) = \gamma - \ell$  e portanto

$$\rho(k_j) + k_j - j = 2g - 3\gamma + 1 + 3\ell - j \geq g$$

com igualdade se somente se  $j = g - 3\gamma + 1 + 3\ell$ , o que significa precisamente que  $\mathbf{k}$  inclui todos os elementos positivos de  $S_{g,\gamma}$  menores ou iguais que  $2g - 4\gamma + 1 + 4\ell$ .

**Agregando as condições de minimização da codimensão.** Quando  $n \leq 3\gamma + 1$ , toda entrada  $k_j$  de  $\mathbf{k}$  é estritamente menor que  $8\gamma + 4$ . Nesse sentido, vemos que  $\text{cod}(\mathcal{V}_{S_{g,\gamma}}, M_d^n)$  é, pelo menos,

$$(n-2)g + 3 + (4\gamma + 2 - n) + (g - 5\gamma - 1 + j^{**}) - \gamma - 1 = (n-1)g - (2\gamma + n - 3 - j^{**}) \text{ se } n \leq 4\gamma; \text{ e}$$

$$(n-2)g + 3 + (4\gamma + 2 - (\gamma + 1)) + (g - 5\gamma - 1 + j^{**}) - \gamma - 1 = (n-1)g - (3\gamma - 2 - j^{**}) \text{ se } \gamma + 1 \leq n \leq 3\gamma + 1.$$

De maneira similar, se  $n \geq 3\gamma + 2$ ,  $\text{cod}(\mathcal{V}_{S_{g,\gamma}}, M_d^n)$  é limitado pelo mínimo de

$$(n-2)g + 3 + (4\gamma + 2 - (\gamma + 1)) + (g - 5\gamma - 1 + j^{**}) + (n - 3\gamma - 2 - j^{**}) - \gamma - 1 = (n-1)g - (6\gamma - n) \\ \text{e } (n-2)g + 3 + (4\gamma + 2 - (\gamma + 1)) + (2g - 5\gamma - 1 + j^{**}) - \gamma - 1 = ng - (3\gamma - 2 - j^{**}).$$

Aqui o termo de correção  $(n - 3\gamma - 2 - j^{**})$  surge na primeira das duas estimativas anteriores, porque o  $(3\gamma + 3 + j^{**})$ -ésimo elemento positivo de  $S_{g,\gamma}$ , a saber,  $8\gamma + 4$ , está sendo ignorado. Assim concluímos que  $(n-1)g - (6\gamma - n) \leq ng - (3\gamma - 2 - j^{**})$  se somente se  $n \leq g + 3\gamma + 2 + j^{**}$ .

□

**Exemplo 2.2.6.** Vamos tomar  $\gamma = 2$ ,  $n = 4$ ,  $g = 11$  com semigrupo de valores de peso maximal. Qualquer  $F$  em  $\mathcal{O}_P$  pertence a  $\mathbb{C}[[f_2, f_4, f_5, f_6]]$ . Onde

$$\begin{aligned} f_2 &= t^4 + a_{2,5}t^5 + a_{2,6}t^6 + \dots \\ f_4 &= t^8 + a_{4,9}t^9 + a_{4,10}t^{10} + \dots \\ f_5 &= t^{10} + a_{5,11}t^{11} + a_{5,12}t^{12} + \dots \\ f_6 &= t^{12} + a_{6,13}t^{13} + a_{6,14}t^{14} + \dots \end{aligned}$$

Assumindo que  $\text{ord}_P(F) \geq 4$ , escrevemos

$$\begin{aligned} F &:= \alpha_{(4)}f_4 + \alpha_{(2^2)}f_2^2 \\ &+ \alpha_{(5)}f_5 \\ &+ \alpha_{(6)}f_6 + \alpha_{(4,2)}f_2f_4 + \alpha_{(2^3)}f_2^3 \\ &+ \alpha_{(5,2)}f_5f_2 \\ &+ \alpha_{(2^4)}f_2^4 + \alpha_{(4,2^2)}f_2^2f_4 + \alpha_{(4^2)}f_4^2 + \alpha_{(6,2)}f_2f_6 \\ &+ \alpha_{(5,2^2)}f_2^2f_5 + \alpha_{(5,4)}f_4f_5 \\ &+ \alpha_{(2^5)}f_2^5 + \alpha_{(4,2^3)}f_2^3f_4 + \alpha_{(6,4)}f_4f_6 + \alpha_{(5^2)}f_5^2 + \alpha_{(6,2^2)}f_2^2f_6 + \alpha_{(4^2,2)}f_2f_4^2; \end{aligned}$$

onde os  $\alpha_\lambda$  são coeficientes complexos e as linhas do diagrama acima correspondem às componentes homogêneas (ponderadas) de  $F$  com valorização  $2i < 2g$ .

Agora, vamos reescrever  $F$ , reagrupando os termos de mesma valorização. A parte inicial da expressão é lida como

$$F = (\alpha_{(4)} + \alpha_{(2^2)})t^8 + (a_{4,9}\alpha_{(4)} + 2a_{2,5}\alpha_{(2^2)})t^9 + O(t^{10})$$

com isso,  $\text{ord}_P(F) > 8$  se somente se

$$\phi_1(\alpha_{(4)}, \alpha_{(2^2)}) := \alpha_{(4)} + \alpha_{(2^2)} = 0. \quad (2.21)$$

Usando (2.21), podemos escrever  $\alpha_{(2^2)} = \ell_1(\alpha_{(4)}) := -\alpha_{(4)}$ ; como 9 é uma lacuna, segue que  $\psi_1 := G_1\alpha_{(4)} = 0$  para todo  $\alpha_{(4)} \in \mathbb{C}$ , ou seja

$$G_1 = 0 \quad (2.22)$$

onde  $G_1 := a_{4,9} - 2a_{2,5}$ ; a menos de multiplicação por constante, esta é a única condição imposta pelo fato de que  $9 \notin S$ . A fim de melhor expressar este método, não iremos explicitar todos os polinômios mas simplesmente mencionar quais os  $\alpha_\lambda$ 's estão presentes em cada passo.

No segundo passo, após aplicar (2.21), escrevemos

$$F = \psi_1(\alpha_{(4)})t^9 + \phi_2(\alpha_{(4)}, \alpha_{(5)})t^{10} + \psi_2(\alpha_{(4)}, \alpha_{(5)})t^{11} + O(t^{12}).$$

E agora impomos

$$\phi_2(\alpha_{(4)}, \alpha_{(5)}) = (a_{4,10} - a_{2,5}^2 - 2a_{2,6})\alpha_{(4)} + \alpha_{(5)} = 0 \quad (2.23)$$

o que nos permite escrever  $\alpha_{(5)} = \ell_2(\alpha_{(4)}) = -(a_{4,10} - a_{2,5}^2 - 2a_{2,6})\alpha_{(4)}$ , fato que implica a possibilidade de reescrever  $\psi_2$  como  $\psi_2 = G_2\alpha_{(4)}$  para todo  $\alpha_{(4)} \in \mathbb{C}$ , isto é, temos que

$$G_2 = 0 \quad (2.24)$$

onde  $G_2 := a_{4,11} + a_{2,5}^2 a_{5,11} - 2a_{2,5} a_{2,6} + 2a_{2,6} a_{5,11} - a_{4,10} a_{5,11} - 2a_{2,7}$ ; e esta é, a menos de multiplicação por constante, a única condição imposta em razão de  $11 \notin S$ .

No terceiro passo, ao aplicar (2.23), podemos escrever

$$F = \psi_1 t^9 + \psi_2 t^{11} + \phi_3(\alpha_{(4)}, \alpha_{(6)}, \alpha_{(2^3)}, \alpha_{(4,2)})t^{12} + \psi_3(\alpha_{(4)}, \alpha_{(6)}, \alpha_{(2^3)}, \alpha_{(4,2)})t^{13} + O(t^{14})$$

Novamente, impomos

$$\begin{aligned} \phi_3(\alpha_{(4)}, \alpha_{(6)}, \alpha_{(2^3)}, \alpha_{(4,2)}) &= (a_{2,5}^2 a_{5,12} - a_{2,6}^2 - 2a_{2,5} a_{2,7} + 2a_{2,6} a_{5,12} - 2a_{2,8} - a_{4,10} a_{5,12} + a_{4,12})\alpha_{(4)} \\ &+ \alpha_{(6)} + \alpha_{(2^3)} + \alpha_{(4,2)} = 0 \end{aligned}$$

o que nos permite escrever

$$\begin{aligned} \alpha_{(2^3)} = \ell_3(\alpha_{(4)}, \alpha_{(6)}, \alpha_{(4,2)}) &= (a_{2,5}^2 a_{5,12} - a_{2,6}^2 - 2a_{2,5} a_{2,7} + 2a_{2,6} a_{5,12} - 2a_{2,8} - a_{4,10} a_{5,12} + a_{4,12})\alpha_{(4)} \\ &+ \alpha_{(6)} + \alpha_{(4,2)} \end{aligned}$$

e, portanto  $\psi_3$  pode ser lida da seguinte maneira:

$$\psi_3 = G_3\alpha_{(4)} + G_4\alpha_{(6)} + G_1\alpha_{(4,2)}.$$

Pelo fato de que  $13 \notin S$ , temos agora duas novas condições  $G_3 = 0$  e  $G_4 = 0$ . Observe que são apenas essas duas as novas condições, já que  $G_1 = 0$  foi obtida no primeiro passo.

Em geral, no passo  $s$  do nosso processo, quando  $s > 3$ , escrevemos

$$F = \psi_{s-1} t^{4s-3} + \phi_s t^{4s-2} + \psi_s t^{4s-1} + \phi_{s+1} t^{4s} + \psi_{s+1} t^{4s+1} + O(t^{4s+2})$$

então tomamos  $\phi_s = \psi_s = \phi_{s+1} = 0$ , o que nos permite reescrever  $\psi_{s+1}$  como uma combinação linear de polinômios nos coeficientes das funções  $f_i$ . Ou seja, ao dar continuidade ao processo, impondo o anulamento dos coeficientes dos termos cuja ordem pertencem ao semigrupo, podemos construir, como no exemplo 2.1.5, a tabela 2.2 a seguir.

Tabela 2.2: Como as condições aparecem

Ordem	G-polinômios			H-polinômios			
	$\alpha_{(4)}$	$\alpha_{(6)}$	$\alpha_{(5^2)}$	$\alpha_{(4,2)}$	$\alpha_{(6,2)}$	$\alpha_{(4^2)}$	$\alpha_{(5,4)}$
9	$G_1$						
11	$G_2$						
13	$G_3$	$G_4$		$G_1$			
17	$G_5$			$G_3$	$G_4$		
21	$G_6 + c_1 G_7$		$G_7$	$G_5$		$c_2 G_7$	$c_3 G_7$

onde  $c_i$ 's são polinômios nos coeficientes de  $f_i$ .

Aqui, consideramos

$$F = G + H$$

onde

$$G = \alpha_{(4)}f_4 + \alpha_{(2^2)}f_2^2 + \alpha_{(5)}f_5 + \alpha_{(6)}f_6 + \alpha_{(2^3)}f_2^3 + \alpha_{(2,5)}f_5f_2 + \alpha_{(2^4)}f_2^4 + \alpha_{(2^5)}f_2^5 + \alpha_{(5^2)}f_5^2.$$

As condições além da ramificação ainda podem ser dispostas na tabela de Dyck como na Figura 2.2 abaixo.

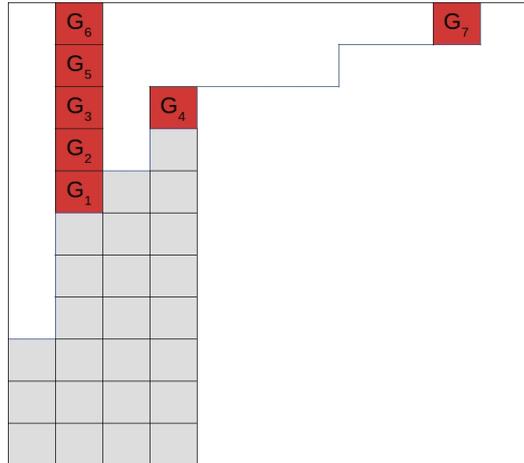


Figura 2.2: Caminho de Dick com  $b_P$  e  $r_P$ , para  $S_{\gamma,g}$ , com  $g = 11$ ,  $\gamma = 2$  e  $n = 4$ .

Acima, vemos a tabela de Dick com as condições que contribuem com  $b_P$  e  $r_P$  para curvas racionais com cúspide 2-hiperelítica quando  $g = 11$  e  $n = 4$ .

## 2.3 Curvas racionais com semigrupo arbitrário

Assim como no caso hiperelítico, a álgebra gerada pelos  $G$ -polinômios neste exemplo é precisamente aquela gerada pelos polinômios  $F$  e  $F^*$  distintos pelo processo indutivo do Teorema 2.2.4; veja a Figura 2.3 para a representação gráfica. Na medida em que todo semigrupo numérico  $S$  é  $\gamma$ -hiperelítico para algum  $\gamma$ , é natural especular que um fenômeno análogo a este persista para  $S$  arbitrário.

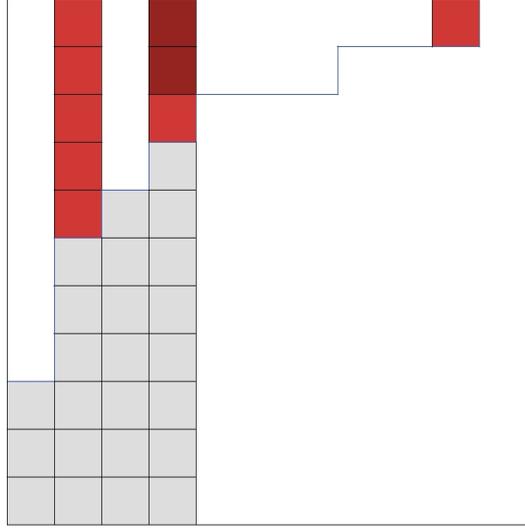


Figura 2.3: Caminho de Dick com  $b_P$  e  $r_P$  quando  $S_{g,\gamma}$ , com  $g = 11$ ,  $\gamma = 2$ , e  $n = 4$  (bis).

Na figura acima, temos as condições que contribuem para  $b_P$  e  $r_P$  quando  $S_{g,\gamma}$  com  $g = 11$ ,  $\gamma = 2$ , e  $n = 4$ . As caixas mais escuras não contribuem, elas correspondem a correção aferida pelo fato de que  $2g - 4\gamma + 1 \notin \text{Span}(\mathbf{k})$ . Neste caso  $\gamma^{**} = 1$ .

Para refinar nossas contas, vamos precisar de um dispositivo adicional, o qual corrigirá possíveis redundâncias "syzygéticas" entre os polinômios  $F$  e  $F^*$  que levaria a uma contagem excessiva. Assim, considere  $s_1 < \dots < s_p$  a notação para os elementos não nulos de  $S$  estritamente menores que o condutor, e seja  $\{(k_n^{m_{j,n}}, \dots, k_1^{m_{j,1}}) : j = 1, \dots, \psi(s_i)\}$  o conjunto de partições associadas às decomposições irredutíveis de  $s_i$ ,  $i = 1, \dots, p$ . Para cada  $s_i$ , seja  $v_{s_i,j} := (m_{j,n}, \dots, m_{j,1})$  o vetor formado por expoentes da  $j$ -ésima partição associada,  $j = 1, \dots, \psi(s_i)$ . Seja  $V = V(E)$  o matróide vetorial sobre

$$E := \{v_{s_1,2} - v_{s_1,1}, \dots, v_{s_1,\psi(s_1)} - v_{s_1,1}; \dots \dots ; v_{s_p,2} - v_{s_p,1}, \dots, v_{s_p,\psi(s_p)} - v_{s_p,1}\}.$$

Denote ainda os circuitos de  $V$  por  $C_1, \dots, C_q$  e, para cada  $i = 1, \dots, q$ , seja  $s(i)$  o maior elemento do semigrupo dentre  $s_1, \dots, s_p$  para o qual  $v_{s(i),j} - v_{s(i),1} \in C_i$  para algum  $j$ . O Defeito Syzygético de  $f$  com relação a  $\mathbf{k}$  é

$$D(\mathbf{k}) := \sum_{i=1}^q \rho(s(i)).$$

Finalmente, dado  $s \in S$ , tome  $\rho(s) := \#\{r > s : r \notin S\}$  e  $\psi(s)$  o número de decomposições irredutíveis com relação a  $(k_1, \dots, k_n)$ , definimos  $\varphi(s) := \max(\psi(s) - 1, 0)$ .

Vamos sempre assumir o vetor  $\mathbf{k} = (0, k_1, \dots, k_n)$  como o *perfil de ramificação* que é formado pelas valorizações das funções de parametrização associadas à singularidade cuspidal, como fixado anteriormente.

**Conjectura 2.3.1.** *Dado um vetor  $\mathbf{k} = (0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^{n+1}$ , seja  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}} \subset M_{d,g;\mathbf{S}}^n$  a subvariedade das parametrizações  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  com uma única singularidade cuspidal e semigrupo  $\mathbf{S}$  e perfil de ramificação  $\mathbf{k}$ . Tome  $\{s_i^*\}_{i=1}^{\ell}$  como o conjunto de geradores minimais de  $\mathbf{S}$  estritamente menores que o condutor que não figuram dentre as entradas de  $\mathbf{k}$ ; tome  $m = \min(\ell, \sum_{s \in \mathbf{S}} \varphi(s))$ ; e suponha  $d = \deg(f) \geq \max(n, 2g - 2)$ . Então*

$$\text{cod}(\mathcal{V}_{\mathbf{k}}, M_d^n) = \sum_{i=1}^n (k_i - i) + \sum_{s \in \mathbf{S} \cap [2g]} \varphi(s) \rho(s) - \sum_{i=1}^m \rho(s_i^*) - D(\mathbf{k}) - 1. \quad (2.25)$$

**Observação 2.3.2.** Em uma linguagem completamente equivalente a combinatorial acima, que envolve matróides vetoriais e seus circuitos, podemos rephrasing nossa conjectura da maneira que segue.

Primeiro denotaremos por  $M(s_i)$  a matriz  $\psi(s_i) \times n$  onde cada linha é um vetor dado pela subtração de vetores  $v_{s_i,j} - v_{s_i,1}$ , com  $j = 1, \dots, \psi(s_i)$ , como descrito acima. Considere ainda a matriz  $A(s_i) = ([M(s_1)] \dots [M(s_i)])$ . Por fim, denote por  $\phi(s_i) = \text{rank} A(s_i) - \text{rank} A(s_{i-1})$ . Então temos:

**Conjectura 2.3.1 (Bis)** *Dado um vetor  $\mathbf{k} = (0, k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}_{\geq 0}^{n+1}$ , seja  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}} \subset M_{d,g;\mathbf{S}}^n$  a subvariedade das parametrizações  $f : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^n$  com uma única singularidade cuspidal e semigrupo  $\mathbf{S}$  e perfil de ramificação  $\mathbf{k}$ . Tome  $\{s_i^*\}_{i=1}^{\ell}$  como o conjunto de geradores minimais de  $\mathbf{S}$  estritamente menores que o condutor que não figuram dentre as entradas de  $\mathbf{k}$ ; tome  $m = \min(\ell, \sum_{s \in \mathbf{S}} \varphi(s))$ ; e suponha  $d = \deg(f) \geq \max(n, 2g - 2)$ . Então*

$$\text{cod}(\mathcal{V}_{\mathbf{k}}, M_d^n) = \sum_{i=1}^n (k_i - i) + \sum_{s \in \mathbf{S} \cap [2g]} \phi(s) \rho(s) - \sum_{i=1}^m \rho(s_i^*) - 1. \quad (2.26)$$

Em termos operacionais e computacionais, essa segunda linguagem é mais eficaz. Contudo, para fins didáticos, utilizaremos a linguagem combinatorial nas demonstrações dos resultados que seguem.

**Observação 2.3.3.** Certificar que  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}$  não é vazio em geral é delicado, na medida em que equivale a afirmar que o semigrupo de valores de uma parametrização *geral* com perfil de ramificação  $\mathbf{k}$  contém todos elementos do semigrupo de valores associado  $\mathbf{S}$ . Por outro lado, sempre que  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}$  não é vazio, verificar que a codimensão sobre  $M_d^n$  é *pelo menos* o valor descrito no lado direito da desigualdade (2.25) é relativamente simples.

**Teorema 2.3.4.** *Considerando as notações e hipóteses da Conjectura 2.3.1, temos*

$$\text{cod}(\mathcal{V}_{\mathbf{k}}, M_d^n) \geq \sum_{i=1}^n (k_i - i) + \sum_{s \in S \cap [2g]} \varphi(s) \rho(s) - \sum_{i=1}^m \rho(s_i^*) - D(\mathbf{k}) - 1 \quad (2.27)$$

sempre que  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}$  é não vazio.

*Demonstração.* O argumento a ser usado é semelhante ao utilizado para provar o Teorema 2.2.4. Vamos iniciar trabalhando o caso especial em que todo gerador minimal pertence a  $\mathbf{k}$ .

Desta forma, denote por  $f$  a parametrização "universal" de  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}$ , representado pelas funções de parametrização  $f_i = t^{k_i} + a_{i,k_{i+1}} t^{k_i+1} + O(t^{k_i+2})$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Dado  $s \in S$ , primeiro assumimos que  $s+1 \in \mathbb{N} \setminus S$ . Considerando quaisquer duas partições  $(k_n^{m_n}, \dots, k_1^{m_1})$  e  $(k_n^{m'_n}, \dots, k_1^{m'_1})$  associadas a distintas decomposições irredutíveis de  $s$ , o binômio  $F := \prod_{i=1}^n f_i^{m_i} - \prod_{i=1}^n f_i^{m'_i}$  impõe uma condição não trivial nos coeficientes de  $f$ , a saber

$$\text{lc}(F) = \sum_i (m_i - m'_i) a_{i,k_{i+1}} = 0 \quad (2.28)$$

onde  $\text{lc}(F)$  denota o coeficiente líder de  $F$  (neste texto consideramos como coeficiente líder de  $F$  o coeficiente do termo de menor grau).

De maneira similar, se  $s+1 \in S$ , escolhida uma decomposição irredutível  $(k_n^{m''_n}, \dots, k_1^{m''_1})$  de  $s+1$ , tomamos

$$F^{(1)} := F - \text{lc}(F) \prod_{i=1}^n f_i^{m''_i} = F - \sum_i (m_i - m'_i) a_{i,k_{i+1}} \prod_{i=1}^n f_i^{m''_i}.$$

O ponto crucial é que

$$\text{lc}(F^{(1)}) = \sum_i (m_i - m'_i) a_{i,k_{i+2}} + Q_1$$

onde o termo quadrático  $Q_1$  não é linear nos coeficientes da parametrização  $a_{i,j}$ , e será irrelevante para nossos propósitos. De fato, se  $s+2 \in \mathbb{N} \setminus S$ , obtemos uma condição, a saber,  $\text{lc}(F^{(1)}) = 0$ , cuja *parte linear* identifica-se como (2.28) e envolve variáveis ainda não vistas, a saber,  $a_{i,k_{i+2}}$ ; caso contrário, escolhemos uma decomposição irredutível  $(k_n^{m'''_n}, \dots, k_1^{m'''_1})$  de  $s+2$ , e tomamos  $F^{(2)} := F^{(1)} - \text{lc}(F^{(1)}) \prod_{i=1}^n f_i^{m'''_i}$ .

Continuando o método, indutivamente subimos pela coluna indexada por  $s$  no diagrama de Dyck associado ao par  $(S, f)$ , *gravando* as partes lineares das condições associadas a cada um dos elementos de  $\mathbb{N} \setminus S$  estritamente maiores do que  $s$ .

Observe que estas partes lineares dependem unicamente do par de decomposições irredutíveis de  $s$  destacadas previamente. Além disso, se estas partes são linearmente

independentes, as condições associadas a elas, mesmo que não lineares, são algebricamente independentes. Para levar essa lógica ainda mais adiante, denote por  $\{(k_n^{m_{i,n}}, \dots, k_1^{m_{i,1}}) : i = 1, \dots, \psi(s)\}$  o conjunto de partições associadas às decomposições irredutíveis de  $s$ , e denote por  $v_{s,j} := (m_{j,1}, \dots, m_{j,n})$  o  $j$ -ésimo vetor de expoentes, com  $j = 1, \dots, \psi(s)$ . Vamos agora fixar a escolha do vetor de expoentes  $v_{s,1}$  como referência. Cada uma das diferenças  $v_{s,j} - v_{s,1}$ ,  $j \neq 1$  indexa um par de decomposições irredutíveis de  $s$ , e é associada a  $\rho(s)$  condições encontradas ao longo de nosso caminho indutivo subindo a coluna indexada por  $s$  do diagrama de Dyck. Denote por  $V(s)$  o conjunto gerado pelos vetores  $v_{s,j} - v_{s,1}$ ,  $2 \leq j \leq \psi(s)$ .

Agora sejam  $s_1 < \dots < s_p$  os elementos positivos de  $S$  estritamente menores que o condutor e tome  $V_S := \sum_{i=1}^p V(s_i)$ . O conjunto de circuitos do matróide vetorial  $V$  descrito para o enunciado da Conjectura 2.3.1 está vinculado ao conjunto minimal de dependências lineares entre os elementos de  $V_S$ . Como resultado, ao final do nosso processo indutivo, soma-se  $\rho(s(i))$  redundantes expressões (lineares nos coeficientes das funções de parametrização) relativas ao elemento maximal  $s(i)$  vinculado ao circuito  $C_i$ . Portanto, o número total de expressões linearmente independentes é precisamente dado por  $\sum_{s \in S} \varphi(s)\rho(s) - D(\mathbf{k})$ .

Para modificar o argumento acima considerando a existência de geradores minimais  $s_i^*$  que não figura entre as entradas de  $\mathbf{k}$ , procederemos da seguinte maneira: Fixe um elemento não nulo  $s \in S$  tal que  $\varphi(s) > 0$ . Fixe uma decomposição irredutível de referência e a denote por  $v_{s,1}$  como fizemos acima; denote por  $s^{(1)}$  o maior elemento em  $S$  que pertence a  $\text{Span}(\mathbf{k})$  que ainda é menor que  $s_1^*$ ; e denote por  $F_{v_{s,j}}^{s^{(1)}}$ ,  $j = 2, \dots, \psi(s)$  o polinômio com  $t$ -valorização  $s^{(1)}$  construído indutivamente no processo de "caminhada" no diagrama de Dyck e associado à decomposição de  $s$  vinculada ao vetor  $v_{s,j}$ . Se  $\varphi(s) = 1$ , existe um único processo indutivo, vinculado ao vetor  $v_{s,2}$ , e terminamos aqui. Caso contrário, para  $j = 3, \dots, \psi(s)$  tomamos  $G_{v_{s,j}} := F_{v_{s,j}}^{s^{(1)}} - F_{v_{s,2}}^{s^{(1)}}$ . Agora ficamos com  $\varphi(s) - 1$  processos indutivos de caminhada a serem considerados na coluna  $s$ , nos quais as condições associadas são as partes lineares dos coeficientes de  $G_{v_{s,j}}$ ,  $j = 3, \dots, \psi(s)$  de termos com  $t$ -valorização maior que  $s^{(1)}$ . Para cada um destes processos, continuamos a subir pela coluna indexada por  $s$ , perturbando por monômios nas funções  $f_1, \dots, f_n$  em cada passo até que se complete a coluna, ou então produzimos polinômios  $G_{v_{s,j}}^{s^{(2)}}$  com  $t$ -valorização igual ao maior elemento  $s^{(2)} \in S$  que pertence a  $\text{Span}(\mathbf{k} \sqcup s_1^*)$  e que ainda é menor que  $s_2^*$ . Se  $\varphi(s) = 2$ , nosso processo indutivo termina. Caso contrário, para  $j = 4, \dots, \psi(s)$  tomamos  $H_{v_{s,j}} := G_{v_{s,j}} - F_{v_{s,3}}^{s^{(1)}}$  e continuamos o processo de subida. Por fim concluímos nosso resultado usando a indução no número de geradores

minimais de  $S$  que não pertencem a  $\mathbf{k}$ .  $\square$

**Exemplo 2.3.5.** Um caso instrutivo é o de  $S = \langle 8, 10, 12, 25, 29 \rangle$  e  $\mathbf{k} = (8, 10, 12)$ . Existem precisamente dois elementos diferentes de zero de  $S \cap [2g]$  para os quais  $\varphi > 0$  e  $\rho > 0$ , quais sejam,  $s = 20$  e  $s = 24$ . O Teorema 2.3.4 prevê que a coluna indexada por  $s = 20$  (respect.,  $s = 24$ ) contribui com  $4 - 2 = 2$  (respect.  $2 - 1 = 1$ ) condições além da ramificação, onde as correções surgem dos geradores mínimos 25 e 29 que não pertencem a  $\mathbf{k}$ . O software Macaulay2 confirma a validade da Conjectura 2.3.1 nesse caso (ver [1] - *Example 3.9*), ou seja, que as condições algébricas produzidas por nosso procedimento iterativo e enumeradas pelo Teorema 2.3.4 são alcançadas.

**Observação 2.3.6.** Em todos os casos que trabalhamos, os vetores de expoentes  $v_{s,j}$ ,  $j = 1, \dots, s$  são linearmente independentes e, portanto,  $\dim V(s) = \varphi(s)$ . Parece provável que essa seja uma característica geral de conjuntos de partições irredutíveis com tamanho fixo. Em nosso contexto, isso implica que as dependências syzygéticas ocorrem apenas entre condições associadas a colunas distintas no diagrama Dyck.

## 2.4 Curvas racionais com singularidades $\gamma$ -hiperelíticas de peso minimal

Um resultado imediato do Teorema 2.2.4 é que a codimensão da variedade de Severi  $M_{d,g,S}^n$  nunca é *inesperadamente pequena*, isto é, estritamente menor que  $(n - 2)g$ , sempre que  $S = S_{g,\gamma}$  é  $\gamma$ -hiperelítico de peso maximal. Por outro lado, em [10, Thm 2.3] pode-se verificar a existência de uma classe infinita e particular de espaços  $M_{d,g,S}^n$  de codimensão inesperadamente pequena; os semigrupos associados  $S$  são semigrupos  $\gamma$ -hiperelíticos de peso *minimal*, e os espaços projetivos ambientes das parametrizações subjacentes são de dimensão  $n \geq 8$ .

Precisamente, dizer que  $S$  é um semigrupo  $\gamma$ -hiperelítico de peso minimal, para algum  $\gamma \geq 0$ , significa que o caminho de Dyck  $\mathcal{P}$  é uma escada cujos degraus são de alturas e comprimentos unitários, ou equivalentemente, que  $S = S_{g,\gamma}^*$ , onde

$$S_{g,\gamma}^* := \langle 2\gamma + 2, 2\gamma + 4, \dots, 2g - 2\gamma, \rightarrow \rangle.$$

O resultado apresentado em [10, Teorema 2.3] estabelece que quando  $g = 3\gamma + 4$  e  $n = \gamma + 1$ , a subvariedade genérica (com semigrupo associado de peso minimal)  $\mathcal{V}_{(2\gamma+2, 2\gamma+4, \dots, 2\gamma+2n)} \subset$

$M_{d,g;S_{g,\gamma}^*}^n$  é inesperadamente grande sempre que  $n \geq 8$ . É natural perguntar se ao fixar  $S = S_{g,\gamma}^*$  deixando variar apenas o gênero  $g$  e a dimensão do espaço ambiente  $n$  encontraremos outros exemplos  $\mathcal{V}_{(2\gamma+2, 2\gamma+4, \dots, 2\gamma+2n)}$  com tamanhos excedentes quando  $n$  pertence ao intervalo crítico [3, 7].

Por outro lado, se  $n \leq \gamma$ , então  $\mathcal{V}_{(2\gamma+2, 2\gamma+4, \dots, 2\gamma+2n)}$  é vazio; de fato, nenhum valor  $s \in [2\gamma + 2n + 2, 4\gamma + 2]$  pode ser realizado por um polinômio em  $f_i$ ,  $i = 1, \dots, n$  se o vetor de valorização é  $(2\gamma + 2, 2\gamma + 4, \dots, 2\gamma + 2n)$ . Nosso resultado final lida com os demais casos, nos quais  $n \in [3, 7]$  e  $\gamma \leq n - 1$ .

**Teorema 2.4.1.** *Considere que  $n \leq 2g$ ,  $d \geq \max(2g-2, n)$ , e  $3 \leq n \leq 7$ . Então  $\mathcal{V}_{(2\gamma+2, 2\gamma+4, \dots, 2\gamma+2n)}$  é vazio, ou então*

$$\text{cod}(\mathcal{V}_{(2\gamma+2, 2\gamma+4, \dots, 2\gamma+2n)}, M_d^n) \geq (n-2)g$$

com as seguintes dezesseis exceções, cujos casos as variedades de Severi tem uma componente excessiva:

- $n \in \{6, 7\}$ ,  $\gamma = 5$ , e  $g \in \{21, 22, 23, 24\}$ ; ou
- $n = 7$ ,  $\gamma = 6$ , e  $g \in \{23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30\}$ .

*Demonstração.* Em razão do Teorema 2.1.1 e da discussão acima, assumimos que  $\gamma \in [1, n-1]$ . Temos

$$r_P = \sum_{j=2\gamma+1}^{2\gamma+n} j = 2n\gamma + \binom{n+1}{2} \quad (2.29)$$

enquanto

$$\rho(2\gamma + 2k) = g - 2\gamma - k \quad (2.30)$$

para todo  $k = 1, \dots, g-2\gamma$ . Observe também que o conjunto de geradores minimais inferiores ao condutor e que não pertencem a  $\mathbf{k}$  é vazio (isto é  $\nexists s_i^*$ );  $\rho(s) = 0$  sempre que  $s \geq 2g - 2\gamma$  (pois  $2g - 2\gamma$  é condutor); e para todo  $k = 0, \dots, g - 2\gamma - 1$  temos

$$\psi(2\gamma + 2k) = \psi_{n,\gamma}(\gamma + k; \gamma + 1, \gamma + 2, \dots, \gamma + n)$$

onde  $\psi_{n,\gamma}(t; \gamma + 1, \gamma + 2, \dots, \gamma + n)$  denota o número de decomposições irredutíveis de  $t$  com respeito a  $\gamma + 1, \gamma + 2, \dots, \gamma + n$ . Agora seja  $\tilde{\psi}_{n,\gamma}(t) := \max(\psi(t; \gamma + 1, \gamma + 2, \dots, \gamma + n) - 1, 0)$ . Aplicando o Teorema 2.3.4 em conjunto com (2.29) e (2.30), precisamos mostrar, de maneira reduzida, que

$$(n-2)g \leq 2n\gamma + \binom{n+1}{2} - 1 + \sum_{k=1}^{g-2\gamma-1} (g-2\gamma-k)\tilde{\psi}_{n,\gamma}(\gamma+k) - D(\mathbf{k}). \quad (2.31)$$

Nossa estratégia básica, fora dos dezesseis casos excepcionais, será encontrar  $j$  valores desses  $t$  para os quais os valores associados  $\tilde{\psi}_{n,\gamma}(t)$  somem no mínimo  $(n - 2 + j)$  (e maior que isso nos casos em que o defeito syzygético é diferente de zero).

*Caso:  $n = 3$ .* A estimativa (2.31) segue toda vez que  $g < 6\gamma + 6$ ; de fato, note que a parcela  $2n\gamma + \binom{n+1}{2} - 1$  equivale a  $6\gamma + 5$  neste caso.

Sem perda de generalidade, assumimos que  $g \geq 6\gamma + 6$ . Observe que  $\tilde{\psi}_{3,\gamma}(2\gamma + 4) \geq 1$ ; De fato,  $2\gamma + 4$  tem decomposições irredutíveis com partições associadas  $(\gamma + 3, \gamma + 1)$  e  $(\gamma + 2)^2$  (note que  $2\gamma + 4$  é o primeiro elemento do semigrupo que admite duas decomposições irredutíveis).

Ou seja, quando  $k = \gamma + 4$ , devemos somar a  $6\gamma + 5$  pelo menos  $(g - 2\gamma - (\gamma + 4)) = g - 3\gamma - 4$ . Portanto o lado direito de (2.31) contabiliza, pelo menos,  $g + 3\gamma + 1$  e a estimativa (2.31) segue imediatamente.

*Caso:  $n = 4$ .* Agora, assumimos  $g \geq 4\gamma + 5$  sem perda de generalidade. A estimativa (2.31) segue do fato que  $\tilde{\psi}_{4,\gamma}(2\gamma + 4) \geq 1$ ,  $\tilde{\psi}_{5,\gamma}(2\gamma + 5) \geq 1$ , e que não existe dependência syzygética entre as decomposições irredutíveis de  $2\gamma + 4$  e  $2\gamma + 5$  com partições associadas  $(\gamma + 2)^2$ ,  $(\gamma + 3, \gamma + 1)$  e  $(\gamma + 3, \gamma + 2)$ ,  $(\gamma + 4, \gamma + 1)$ , respectivamente.

*Caso:  $n = 5$ .* Assumimos  $g \geq \frac{10}{3}\gamma + \frac{14}{3}$  sem perda de generalidade. Podemos agora admitir que o lado direito de (2.31) é no mínimo

$$\kappa_5(g, \gamma) := 10\gamma + 14 + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{4}{3}\gamma + \frac{11}{3} \rceil} (g - 2\gamma - k)\tilde{\psi}_{5,\gamma}(\gamma + k) - D(\mathbf{k}).$$

Obter a medida de  $3g$  condições agora depende dos valores possíveis de  $\gamma$ .

- Quando  $\gamma = 1$ , computamos  $\kappa_5(g, 1) \geq 3g + 6$  usando o fato de que  $\tilde{\psi}_{5,1}(k + 1) \geq 1$  quando  $k = 3, 4, 5$ , e também que não existe dependências syzygéticas dentre as decomposições irredutíveis de 4,5 e 6 com partições associadas  $(2^2)$ ,  $(4)$ ;  $(3, 2)$ ,  $(5)$ ; e  $(2^3)$ ,  $(6)$ , respectivamente.
- Quando  $\gamma = 2$ , computamos  $\kappa_5(g, 2) = 3g + 7$  usando o fato de que  $\tilde{\psi}_{5,2}(k + 2) = 1$  quando  $k = 4, 5, 6$ , e também que não existe dependências syzygéticas dentre as decomposições irredutíveis de 6,7, e 8 com partições associadas  $(3^2)$ ,  $(6)$ ;  $(4, 3)$ ,  $(7)$ ; e  $(4^2)$ ,  $(5, 3)$ , respectivamente.

- Quando  $\gamma = 3$ , computamos  $\kappa_5(g, 3) = 3g + 6$  usando o fato que  $\tilde{\psi}_{5,3}(k+3) = 1$  quando  $k = 5, 7, 8$ , e também que não existe dependências syzygéticas dentre as decomposições irredutíveis de 8, 10, e 11 com partições associadas  $(4^2), (8)$ ;  $(5^2), (6, 4)$ ; e  $(6, 5), (7, 4)$ , respectivamente.
- Quando  $\gamma = 4$ , computamos  $\kappa_5(g, 4) = 2g + 21$  usando o fato que  $\tilde{\psi}_{5,4}(k+4) = 1$  quando  $k = 8, 9$ ; em particular, obtemos a estimativa esperada toda vez que  $g \leq 21$ . Agora, vamos analisar  $g \geq 22$ . Observe que  $\tilde{\psi}_{5,4}(14) \geq 1$ , e que não existe dependência syzygética entre as decomposições irredutíveis de 12, 13, e 14 com partições associadas  $(6^2), (7, 5)$ ;  $(8, 5), (7, 6)$ ; e  $(9, 5), (8, 6)$ , respectivamente. Segue que o lado direito da desigualdade (2.31) é, no mínimo  $\kappa(g, 4) + (g - 2\gamma - 10) = 3g + 3$ .

*Caso:*  $n = 6$ . Devemos assumir  $g \geq 3\gamma + 5$ ; o lado direito da desigualdade (2.31) é portanto, no mínimo

$$\kappa_6(g, \gamma) := 12\gamma + 20 + \sum_{k=1}^{\gamma+4} (g - 2\gamma - k) \tilde{\psi}_{6,\gamma}(\gamma + k) - D(\mathbf{k}).$$

- Quando  $\gamma = 1$ , computamos  $\kappa_6(g, 1) = 4g + 7$  usando o fato que  $\tilde{\psi}_{6,1}(k+1) = 1$  para  $k = 3, 4$ ,  $\tilde{\psi}_{6,1}(6) = 2$ , e que a correspondente coleção de decomposições irredutíveis (nas quais as partições associadas são  $(2^2), (4)$ ;  $(3, 2), (5)$ ; e  $(4, 2), (3^2), (6)$ ) não tem defeito syzygético.
- Quando  $\gamma = 2$ , computamos  $\kappa_6(g, 2) = 4g + 7$  usando o fato que  $\tilde{\psi}_{6,2}(k+2) = 1$  para  $k = 4, 5$ ,  $\tilde{\psi}_{6,2}(8) = 2$ , e que a correspondente coleção de decomposições irredutíveis (com partições associadas  $(3^2), (6)$ ;  $(4, 3), (7)$ ; e  $(4^2), (5, 3), (8)$ ) não tem defeito syzygético.
- Quando  $\gamma = 3$ , computamos  $\kappa_6(g, 3) = 3g + 20$  usando o fato que  $\tilde{\psi}_{6,3}(k+3) = 1$  para  $k = 5, 6, 7$ , e também que as decomposições irredutíveis (com partições associadas  $(4^2), (8)$ ;  $(5, 4), (9)$ ; e  $(5^2), (6, 4)$ ) não tem defeito syzygético. Então, produzimos no mínimo  $4g$  condições sempre que  $g \leq 20$ . Assumindo  $g \geq 21$ ; deduzimos que o lado direito da desigualdade (2.31) é no mínimo  $4g + 6$  do fato que  $\tilde{\psi}_{6,3}(11) = 1$ , e que as decomposições irredutíveis com partições associadas  $(7, 4), (6, 5)$  são independentes das outras já listadas.
- Quando  $\gamma = 4$ , usamos o fato que  $\tilde{\psi}_{6,4}(k+4) = 1$  para  $k = 6, 8$  e que as correspondentes decomposições irredutíveis são independentes para computar  $\kappa_6(g, 4) = 2g + 38$ , que é estritamente menor que  $4g$  se somente se  $g \geq 20$ . Assumindo  $g \geq 20$ ; usando o fato

que  $\tilde{\psi}_{6,4}(13) = 1$  e  $\tilde{\psi}_{6,4}(14) = 2$  e também que a coleção de decomposições irredutíveis com partições associadas  $(5^2), (10); (6^2), (7, 5); (7, 6), (8, 5);$  e  $(7^2), (9, 5), (8, 6)$  não tem defeito syzygético, deduzimos que o lado direito de (2.31) é no mínimo  $\kappa_6(g, 4) + 2g - 35 = 4g + 3$ .

- Quando  $\gamma = 5$ , usamos o fato que  $\tilde{\psi}_{6,5}(9) = 1$  para computar  $\kappa_6(g, 5) = g + 61$ , que é estritamente menor que  $4g$  se somente se  $g \geq 21$ . Agora assumimos  $g \geq 25$ ; iremos retornar aos casos (excepcionais)  $g = 21, 22, 23, 24$  logo adiante. Para certificar a desigualdade (2.31), usamos o fato de que  $\tilde{\psi}_{6,5}(15) = 1$ , contabilizado pelas decomposições irredutíveis com partições associadas  $(8, 7), (9, 6); \tilde{\psi}_{6,5}(16) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis correspondentes a  $(10, 6), (9, 7), (8^2); \tilde{\psi}_{6,5}(17) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis correspondentes a  $(9, 8), (10, 7), (11, 6); \tilde{\psi}_{6,5}(18) = 3$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis correspondentes a  $(9^2), (10, 8), (11, 7), (6^3);$  e  $\tilde{\psi}_{6,5}(19) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis correspondentes a  $(10, 9), (11, 8), (7, 6^2)$ . Contudo, aqui nós temos que o defeito syzygético não é zero; ao contrário, existem cinco dependências lineares não triviais nas quais, juntas, equivalem a uma correção de  $5g - 113$ . E segue que o lado direito da desigualdade (2.31) é no mínimo  $6g - 49$ , que é maior que  $4g$ , pois  $g \geq 25$ .

Finalmente, se  $g = 21$ , as únicas decomposições irredutíveis a serem acrescentadas são aquelas correspondentes às partições de 15 como acima; até aqui, o defeito syzygético é zero e o lado direito de (2.31) torna-se igual a  $2g + 41 = 83$ . Similarmente, se  $g = 22$ ,  $g = 23$ , ou  $g = 24$ , nós também adicionamos parcelas relativas às decomposições de 16, 17 e 18, e consideramos que o número de dependências lineares syzygéticas é um, dois ou quatro, respectivamente, então o lado direito de (2.31) torna-se igual a  $3g + 20 = 86$ ,  $4g - 2 = 90$ , ou  $5g - 25 = 95$ , respectivamente. Os cálculos com Macaulay2 [1] certificam que essas são as codimensões reais dos espaços correspondentes  $\mathcal{V}_{\mathbf{k}}$ .

*Caso:*  $n = 7$ . Vamos assumir  $g \geq \frac{14}{5}\gamma + \frac{27}{5}$ ; o lado direito de (2.31) é então, no mínimo

$$\kappa_7(g, \gamma) := 14\gamma + 27 + \sum_{k=1}^{\lceil \frac{4}{5}\gamma + \frac{27}{5} \rceil} (g - 2\gamma - k)\tilde{\psi}_{7,\gamma}(\gamma + k) - D(\mathbf{k}).$$

- Quando  $\gamma = 1$ , computamos  $\kappa_7(g, 1) = 4g + 16$  usando o fato que  $\tilde{\psi}_{7,1}(k + 1) = 1$  para  $k = 3, 4, 6$  e  $\tilde{\psi}_{7,1}(6) = 2$ , e que as correspondentes decomposições irredutíveis com partições associadas  $(2^2), (4); (3, 2), (5); (2^2, 3), (7);$  e  $(3^2), (2^3), (6)$  são independentes,

isto é, não tem defeito syzygético. Em particular, segue que o lado direito de (2.31) é no mínimo  $5g + 8$ .

- Quando  $\gamma = 2$ , devemos contar como no caso  $\gamma = 1$ . É fácil verificar que  $\tilde{\psi}_{7,2}(k+2) = 1$  para  $k = 4, 5$  e  $\tilde{\psi}_{7,2}(8) = 2$ , e que a coleção correspondente de decomposições irredutíveis com partições associadas  $(3^2), (6)$ ;  $(4, 3), (7)$ ; e  $(4^2), (5, 3), (8)$  são independentes. Segue que  $\kappa_7(g, 2) = 4g + 18$ , que é no mínimo  $5g$  quando  $g \leq 18$ . Por outro lado, se  $g \geq 19$  usamos  $\tilde{\psi}_{7,2}(7) = 2$  e o fato de que as correspondentes decomposições irredutíveis com partições  $(3^3), (5, 4), (9)$  são independentes das outras para concluir que o lado direito de (2.31) é, pelo menos  $5g + 7$ .
- Quando  $\gamma = 3$ , computamos  $\kappa_7(g, 3) = 4g + 20$  usando o fato que  $\tilde{\psi}_{7,3}(k+3) = 1$  para  $k = 5, 6$ ,  $\tilde{\psi}_{7,3}(10) = 2$ , e que as correspondentes decomposições irredutíveis indexadas por  $(4^2), (8)$ ;  $(5, 4), (9)$ ; e  $(6, 4), (5^2), (10)$  são independentes. Em particular, obtemos pelo menos  $5g$  condições sempre que  $g \leq 20$ . Se  $g \geq 21$ , Usamos  $\tilde{\psi}_{7,3}(8) = 1$  e o fato de que as decomposições irredutíveis indexadas por  $(7, 4), (6, 5)$  são independentes das outras já listadas para concluir que o lado direito de (2.31) é, pelo menos,  $5g + 6$ .
- Quando  $\gamma = 4$ , computamos  $\kappa_7(g, 4) = 3g + 38$  usando o fato de que  $\tilde{\psi}_{7,4}(k+4) = 1$  para  $k = 6, 7, 8$  e que as decomposições irredutíveis indexadas por  $(5^2), (10)$ ;  $(6, 5), (11)$ ; e  $(7, 5), (6^2)$  são independentes. Consequentemente, obtemos pelo menos  $5g$  condições toda vez que  $g \leq 19$ . Se  $g \geq 20$ , existem condições adicionais vindas das decomposições irredutíveis indexadas por  $(7, 6), (8, 5)$ ; e  $(7^2), (8, 6), (9, 5)$  e contabilizadas por  $\tilde{\psi}_{7,4}(13) = 1$  e  $\tilde{\psi}_{7,4}(14) = 2$ , respectivamente. Estes últimos no entanto não são independentes dos outros; ao contrário, existe uma relação de dependência linear que produz um defeito syzygético de  $g - 2\gamma - 10 = g - 18$ . Segue que o lado direito de (2.31) é, pelo menos,  $5g + 3$ .
- Quando  $\gamma = 5$ , computamos  $\kappa_7(g, 5) = 2g + 61$  usando o fato que  $\tilde{\psi}_{7,5}(k+5) = 1$  para  $k = 7, 9$  e que as decomposições irredutíveis indexadas por  $(6^2), (12)$  e  $(7^2), (8, 6)$  são independentes. Consequentemente, obtemos pelo menos  $5g$  condições sempre que  $g \leq 20$ . Assumindo  $g \geq 25$ . Para verificar a desigualdade (2.31), usamos o fato que  $\tilde{\psi}_{7,5}(15) = 1$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(9, 6), (8, 7)$ ;  $\tilde{\psi}_{7,5}(16) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(10, 6), (9, 7), (8^2)$ ;  $\tilde{\psi}_{7,5}(17) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(11, 6), (10, 7), (9, 8)$ ;  $\tilde{\psi}_{7,5}(18) = 3$  contabilizado pelas decomposições

irredutíveis indexadas por  $(6^3), (11, 7), (10, 8), (9^2)$ ; e  $\tilde{\psi}_{7,5}(19) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(7, 6^2), (11, 8), (10, 9)$ . Pelo mesmo cálculo realizado anteriormente quando  $n = 6$  e  $\gamma = 5$ , o defeito syzygético associado é  $5g - 113$ . Segue que o lado direito de (2.31) é no mínimo  $7g - 49$ , que é maior que  $5g$ , pois  $g \geq 25$ . De forma similar, se  $g = 21$ , o lado direito de (2.31) torna-se igual a  $3g + 41 = 104$ ; enquanto se  $g = 22$ ,  $g = 23$ , ou  $g = 24$ , torna-se igual a  $4g + 20 = 108$ ,  $5g - 2 = 113$ , ou  $6g - 25 = 119$ , respectivamente.

- Finalmente, quando  $\gamma = 6$ , usamos o fato que  $\tilde{\psi}_{7,6}(16) = 1$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis de 16, indexadas por  $(9, 7), (8^2)$  para computar  $\kappa_7(g, 6) = g + 89$ , no qual é pelo menos igual a  $5g$  sempre que  $g \leq 22$ . Agora, vamos considerar  $g \geq 29$ . Para verificar a desigualdade (2.31), usamos o fato que  $\tilde{\psi}_{7,6}(17) = 1$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(10, 7), (9, 8)$ ;  $\tilde{\psi}_{7,6}(18) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(11, 7), (10, 8), (9^2)$ ;  $\tilde{\psi}_{7,6}(19) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(12, 7), (11, 8), (10, 9)$ ;  $\tilde{\psi}_{7,6}(20) = 3$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(13, 7), (12, 8), (11, 9), (10^2)$ ;  $\tilde{\psi}_{7,6}(21) = 3$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(7^3), (13, 8), (12, 9), (11, 10)$ ;  $\tilde{\psi}_{7,6}(22) = 3$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(8, 7^2), (13, 9), (12, 10), (11^2)$ ; e  $\tilde{\psi}_{7,6}(23) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(8^2, 7), (13, 10), (12, 11)$ . Além disso, é fácil verificar que para todo inteiro  $k \in [11, 15]$ , existe exatamente uma decomposição irredutível de  $k + 6$  contabilizada por  $\tilde{\psi}_{7,6}(k + 6)$  que é independente das decomposições irredutíveis contadas por  $\tilde{\psi}_{7,6}(10), \tilde{\psi}_{7,6}(11), \dots, \tilde{\psi}_{7,6}(k + 5)$ . Segue que o lado direito de (2.31) é, pelo menos

$$\kappa_7(g, 6) + \sum_{k=11}^{15} (g - 12 - k) = 6g - 36$$

que é maior que  $5g$  precisamente quando  $g \geq 36$ . Além disso, pode-se checar explicitamente que não existe decomposição irredutível de  $k + 6$  contabilizada por  $\tilde{\psi}_{7,6}(k + 6)$  independente das decomposições irredutíveis contadas por  $\tilde{\psi}_{7,6}(10), \tilde{\psi}_{7,6}(11), \dots, \tilde{\psi}_{7,6}(k + 5)$  para os inteiros  $k \in [16, 22]$ , então a Conjectura 2.3.1 prevê que a codimensão  $\mathcal{V}_{(14,16,\dots,26)}$  é precisamente  $(6g - 36)$  para todo  $g \in [29, 35]$ . Similarmente, o lado direito de (2.31) é precisamente 112 quando  $g = 23$ ; 114 quando  $g = 24$ ; 117 quando  $g = 25$ ; 121 quando  $g = 26$ ; 126 quando  $g = 27$ ; e 133 quando  $g = 28$ . Macaulay2 [1] verifica as codimensões dos correspondentes espaços  $\mathcal{V}_k$  sempre que  $g \leq 27$ .

O trabalho realizado até aqui nos indica que é possível o aprimoramento destas contas a partir de uma metodologia mais sofisticada.

□

Para finalizar esta seção, vamos mostrar como modificar a construção de [10, Thm 2.3] para obter uma nova família de variedades de Severi de codimensão inesperadamente pequena, assumindo a validade da Conjectura 2.3.1.

**Teorema 2.4.2.** *Seja  $\mathcal{V}_{(2\gamma+2, 2\gamma+4, \dots, 2\gamma+2n)}$  a notação para (parte genérica da estratificação de uma) variedade de Severi com semigrupo de valores associado  $\mathbb{S}_{g,\gamma}^*$  como acima. Agora assumimos que  $n = \gamma + 1$ ,  $d \geq 2g - 2$ , e que  $g = 3\gamma + 6$  (respect.,  $g = 3\gamma + 8$ ) para algum inteiro  $\gamma \geq 5$ . Assumindo a validade da Conjectura 2.3.1, então  $\mathcal{V}_{(2\gamma+2, 2\gamma+4, \dots, 2\gamma+2n)}$  é de codimensão  $\frac{5}{2}\gamma^2 + \frac{7}{2}\gamma + 3$  (respect.,  $\frac{5}{2}\gamma^2 + \frac{7}{2}\gamma + 10$ ) em  $M_d^n$ . Em particular,  $\mathcal{V}_{(2\gamma+2, 2\gamma+4, \dots, 2\gamma+2n)}$  é de codimensão estritamente menor que  $(n - 2)g$  em  $M_d^n$ .*

*Demonstração.* Assumindo que a Conjectura 2.3.1 vale, o lado direito de (2.31) computa a codimensão de  $\mathcal{V} = \mathcal{V}_{(2\gamma+2, 2\gamma+4, \dots, 2\gamma+2n)}$  em  $M_d^n$ .

*Caso:  $g = 3\gamma + 6$ .* O lado direito de (2.31) é igual a

$$\frac{5}{2}\gamma^2 + \frac{7}{2}\gamma + \sum_{k=1}^{\gamma+5} (\gamma + 6 - k) \tilde{\psi}_{\gamma+1,\gamma}(\gamma + k) - D(\mathbf{k}).$$

A conclusão desejada para este caso segue imediatamente do fato que  $\tilde{\psi}_{\gamma+1,\gamma}(\gamma + k) = 0$  para  $k \leq \gamma + 3$ , enquanto  $\tilde{\psi}_{\gamma+1,\gamma}(\gamma + k) = 1$  para  $k = \gamma + 4, \gamma + 5$ . O fato que  $D(\mathbf{k}) = 0$ , em particular, é claro.

*Caso:  $g = 3\gamma + 8$ .* Desta vez, o lado direito de (2.31) é igual a

$$\frac{5}{2}\gamma^2 + \frac{7}{2}\gamma + \sum_{k=1}^{\gamma+7} (\gamma + 8 - k) \tilde{\psi}_{\gamma+1,\gamma}(\gamma + k) - D(\mathbf{k}).$$

Usamos o fato que  $\tilde{\psi}_{\gamma+1,\gamma}(k) = 0$  para  $k \leq \gamma + 3$ , enquanto  $\tilde{\psi}_{\gamma+1,\gamma}(2\gamma + 4) = 1$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $((\gamma+2)^2), ((\gamma+3), (\gamma+1))$ ;  $\tilde{\psi}_{\gamma+1,\gamma}(2\gamma+5) = 1$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $((\gamma+3), (\gamma+2)), ((\gamma+4), (\gamma+1))$ ;  $\tilde{\psi}_{\gamma+1,\gamma}(2\gamma+6) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(\gamma+5, \gamma+1), (\gamma+4, \gamma+2), ((\gamma+3)^2)$ ; e  $\tilde{\psi}_{\gamma+1,\gamma}(2\gamma+7) = 2$  contabilizado pelas decomposições irredutíveis indexadas por  $(\gamma+6, \gamma+1), (\gamma+5, \gamma+2), ((\gamma+3)^2)$ . As duas dependências

lineares encontradas representam, juntas,  $D(\mathbf{k}) = \sum_{k=\gamma+6}^{\gamma+7} (g - 2\gamma - k) = 3$ , e a conclusão esperada segue.  $\square$

A consequência do Teorema 2.4.2, tomado em conjunto com [10, Thm 2.3], é que esperamos que existam variedades de Severi inesperadamente grandes em todos os gêneros  $g \geq 21$  e em todas as dimensões  $n \geq 6$  dos espaços projetivos de destino.

## Capítulo 3

# Gonalidade de curvas com singularidades hiperelíticas

Neste capítulo, uma *curva* é um esquema projetivo, integral e uni-dimensional sobre um corpo algebricamente fechado. Devemos lembrar que todas as definições e notações usadas nesta seção estão explicitadas na seção 1.1.

O seguinte resultado é novo, e refina [11, Teorema 2.2].

**Teorema 3.0.1.** *Seja  $C$  uma curva projetiva e integral de gênero  $g \geq 2$  sobre um corpo algebricamente fechado, e seja  $\bar{g}$  o gênero de sua normalização. Então*

$$\text{gon}(C) \leq g$$

*valendo a igualdade quando  $C$  é também Gorenstein com  $\bar{g} \leq 3$  ou Kunz, com um único ponto não-Gorenstein e tal que  $\bar{g} \leq 1$ .*

*Demonstração.* Da demonstração de [8, Teorema 3.(i)], temos

$$\text{gon}(C) \leq g + 1 - \lfloor \bar{g}/2 \rfloor - \eta.$$

Agora  $C$  é não-Gorenstein se e somente se  $\eta \geq 1$ . Então, se  $C$  é não-Gorenstein, o resultado segue do fato de que uma curva com uma singularidade não-Gorenstein é caracterizada precisamente pela igualdade  $\eta = 1$ . Por outro lado, se  $C$  é Gorenstein então  $\text{gon}(C) \leq g + 1$  e se  $\bar{g} \geq 4$  então  $\text{gon}(C) \leq g - 1$ . Logo, é suficiente mostrar que se  $C$  é Gorenstein então  $\text{gon}(C) \leq g$ . De fato, se  $C$  é Gorenstein e hiperelítica, então  $\text{gon}(C) = 2$  e a afirmação segue. Por outro lado, por [27, Teorema. 2.2], qualquer sistema que computa

a gonalidade de  $C$ , digamos, gonalidade  $d$ , induz uma inclusão  $C' \subset S \subset \mathbb{P}^{g-1}$  onde  $S$  é um scroll de dimensão no máximo  $d - 1$ . Em particular, temos  $d - 1 \leq g - 1$ . Portanto  $\text{gon}(C) = d \leq g$ .  $\square$

Para o resto desta seção, consideraremos exclusivamente curvas  $C$  com normalização racional e que possui um único ponto singular  $P$  no qual é unirramificado. Seja  $\bar{P} \in \bar{C} = \mathbb{P}^1$  a pré-imagem de  $P$  via aplicação de normalização.

Invocamos aqui todas as notações da convenção 1.6.1 e sugerimos a comparação do resultado abaixo com os resultados elencados na seção 1.6, em particular com a Proposição 1.6.3 para curvas de gênero 4.

Agora considere  $\mathcal{V}_{g,1}$  a subvariedade de  $M_{n,d}$  composta de curvas racionais de gênero  $g$  com uma única singularidade que é uma cúspide hiperelítica. Iremos mostrar agora como  $\mathcal{V}_{g,1}$  é estratificada de acordo com a gonalidade. Para tanto, seja  $\mathcal{V}_{g,1}^i$  a subvariedade de curvas racionais cuspidais com gênero  $g$  e gonalidade  $i$ . Observe que o seguinte resultado é uma versão mais refinada da Proposição 1.6.3.

**Teorema 3.0.2.** *Toda curva racional de gênero 4 com uma cúspide hiperelítica é isomorfa a uma curva em  $\mathbb{P}^3$  com parametrização*

$$C = (1 + 3at + (2b - 3a^3)t^3 + ct^5 : t^2 + 2at^3 + bt^5 : t^4 + at^5 : t^6).$$

Além disso, ao identificar cada curva  $C$  com sua tripla associada  $(a, b, c) \in \mathbb{A}^3$ , a subvariedade de curvas hiperelíticas em  $M_{n,d}$  corresponde a

$$\mathcal{V}_{4,1}^2 = \{(a, -a^3, 3a^5) \mid a \neq 0\}.$$

Por fim, toda curva racional não-hiperelítica de gênero 4 com uma cúspide hiperelítica  $C$  é trigonal, e sua gonalidade é computada por um sistema linear livre de pontos de base.

*Demonstração.* Seja  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\omega_C, H^0(\omega_C))$  o sistema linear canônico em  $C$ . Observe que  $C$  é Gorenstein, pois  $2 \in S$ . Se  $C$  é também não-hiperelítico, então  $\mathcal{L}$  define um mergulho  $\varphi : C \hookrightarrow \mathbb{P}^{g-1} = \mathbb{P}^3$  e  $C' := \varphi(C)$  é o *modelo canônico* de  $C$  primeiro descrito por Rosenlicht em [36] e investigado mais recentemente por Kleiman e Martins em [29]. Seja  $\pi : \bar{C} \rightarrow C$  a aplicação de normalização; então  $\varphi \circ \pi : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3$  é uma parametrização do modelo canônico, a qual denotamos por  $C' = (f_0 : f_1 : f_2 : f_3)$ .

Pela teoria geral (veja, por exemplo, [39, Teorema 2.8, Cor. 2.9]), existe uma base de  $H^0(\omega_C)$  na qual os geradores se anulam com ordens  $\{0, 2, 4, 6\}$  em  $P$ . De maneira mais

precisa,  $\omega_C$  pode ser mergulhada no feixe de constantes de funções racionais de tal forma que  $H^0(\omega_C) = \langle 1, x, y, z \rangle$  onde  $x := f_1/f_0$ ,  $y := f_2/f_0$  e  $z := f_3/f_0$  são coordenadas afins para uma vizinhança do ponto singular  $P = (1 : 0 : 0 : 0)$ . Agora, como  $\deg \varphi \circ \pi = \deg(\omega_C) = 2g - 2 = 6$ , afirmamos que, podemos substituir os  $f_i$ 's,  $0 \leq i \leq 3$ , após a combinações lineares entre eles, pela seguinte sequência de funções

$$(f_0 : f_1 : f_2 : f_3) = (1 + a_1t + a_2t^3 + ct^5 : t^2 + a_3t^3 + bt^5 : t^4 + at^5 : t^6).$$

De fato, além de poder assumir que as seções possuem ordem de anulamento  $\{0, 2, 4, 6\}$  em  $P$ , podemos trocar  $f_i$ ,  $i = 0, 1, 2$  por  $f_i - \alpha_i f_3$  para uma escolha apropriada de  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  para garantir que  $f_3$  seja a única destas seções que tem termo de grau 6. Também podemos escolher apropriadamente  $\beta_i \in \mathbb{C}$ , a fim de eliminar termos grau 4, substituindo  $f_i$  por  $f_i - \beta_i f_2$  para  $i = 0, 1$ ; a mesma estratégia pode ser usada para eliminar o termo de grau 2 de  $f_0$ .

Afirmamos ainda que  $a_3 = 2a$  e  $a_1 = 3a$ . De fato, seja  $F_{21} := (f_1/f_0)^2 - f_2/f_0$ ; sua expansão em séries é dada por

$$F_{21} = (t^4 + 2(a_3 - a_1)t^5 + \dots) - (t^4 + (a - a_1)t^5 + \dots) = (2a_3 - a - a_1)t^5 + O(t^6).$$

Pelo fato de que  $5 \notin S$  o anulamento do coeficiente de  $t^5$ , ou seja,

$$2a_3 - a - a_1 = 0 \tag{3.1}$$

Tome agora  $F_{31} := (f_1/f_0)^3 - (f_3/f_0)$ ; sua expansão é

$$F_{31} = (t^6 + 3(a_3 - a_1)t^7 + \dots) - (t^6 - a_1t^7 + \dots) = (3a_3 - 2a_1)t^7 + O(t^8)$$

e, como  $7 \notin S$ , temos

$$3a_3 - 2a_1 = 0. \tag{3.2}$$

Nossa afirmação segue, portanto, de (3.1) e (3.2).

Agora considere  $F_{22} = F_{21} - (a^2)(f_1/f_0)^3$ ; expandindo, encontramos que

$$F_{22} = (a^2t^6 + (-6a^3 + 2b - a_2)t^7 + \dots) - (a^2)(t^6 - 3at^7 + \dots) = (-3a^3 + 2b - a_2)t^7 + O(t^8)$$

O fato de que  $7 \notin S$  agora força  $-3a^3 + 2b - a_2 = 0$ , e então

$$C = (1 + 3at + (2b - 3a^3)t^3 + ct^5 : t^2 + 2at^3 + bt^5 : t^4 + at^5 : t^6)$$

como desejado.

Agora, de acordo com [11, Teorema. 3.1],  $C$  carrega um  $g_2^1$  livre de pontos de base se e somente se  $t^2/h(t) \in \mathcal{O}_P$ , onde  $h(t) \in k[t]$ ,  $h(0) \neq 0$  e  $\deg(h) \leq 2$ . Portanto, nós começamos por supor que  $h = t^2 + r_1t + r_2$ , onde  $r_2 \neq 0$ . O fato de que  $t^2/h \in \mathcal{O}_P$  implica que

$$t^2/(t^2 + r_1t + r_2) = \alpha_0 + \alpha_1f_1/f_0 + \alpha_2f_2/f_0 + \alpha_3f_3/f_0 + O(t^8)$$

onde  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  para todo  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Não é difícil verificar que isso será possível se somente se  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = r_2^{-1}$ ,  $\alpha_3 = 3a^2/r_2^2 + 1/r_2^3 + c/(ar_2)$  e  $r_1 = ar_2$ , e também que

$$b = -a^3, c = 3a^5 \text{ and } a \neq 0. \quad (3.3)$$

Agora, supondo  $h = t + r$ , onde  $r \neq 0$ . O fato de que  $t^2/h \in \mathcal{O}_P$  implica que

$$t^2/(t + r) = \alpha_0 + \alpha_1f_1/f_0 + \alpha_2f_2/f_0 + \alpha_3f_3/f_0$$

onde  $\alpha_i \in \mathbb{C}$  para todo  $i \in \{0, 1, 2, 3\}$ . Da mesma forma, não é difícil verificar que isso é possível se somente se  $\alpha_0 = 0$ ,  $\alpha_1 = r^{-1}$ ,  $\alpha_2 = -2a^3$ ,  $\alpha_3 = 3a^5$ ,  $r = a^{-1}$  e que as condições (3.3) permanecem. Diante disso, temos a caracterização da subvariedade de curvas hiperelíticas enunciada.

Finalmente, de acordo com [11, Lema 2.4],  $C$  é trigonal e tem sua gonalidade computada por um  $g_3^1$  livre de ponto de base se somente se existem escalares  $d_3, e_1, e_2, e_3 \in k$  tais que

$$f(t) := \frac{t^2 + d_3t^3}{1 + e_1t + e_2t^2 + e_3t^3} \in \mathcal{O}_P \quad (3.4)$$

onde  $e_3 \neq 0$  toda vez que  $d_3 = 0$  (tal exigência serve para garantir que  $C$  seja hiperelítica). Agora, a relação de pertinência (3.4) segue se e somente se existem escalares  $c_1, c_2, c_3 \in k$  tais que

$$f(t) = \frac{c_1(t^2 + 2at^3 + bt^5) + c_2(t^4 + at^5) + c_3t^6 + t^8h(t)}{1 + 3at + (2b - 3a^3)t^3 + ct^5} \quad (3.5)$$

onde  $h(t)$  é uma unidade em  $\overline{\mathcal{O}}_P$ .

Tomando  $c_1 = 1$  e comparando (3.4) com (3.5) chegamos na seguinte equação matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 3a & -2a & -1 & 0 \\ 0 & -c_2 & -2a & -1 \\ -3a^3 + 2b & -ac_2 - b & -c_2 & -2a \\ 0 & -c_3 & -ac_2 - b & -c_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_3 \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -a \\ c_2 \\ 3a^3 + ac_2 - b \\ c_3 \\ -c \end{pmatrix}.$$

Após efetuar o processo de eliminação de Gauss-Jordan, analisando última linha da matriz resultante, nós temos que

$$\begin{aligned} &3a^6c_2 + 2a^4c_2^2 - 3a^4c_3 + 5a^3bc_2 - 2a^2c_2^3 + a^3c - a^2b^2 \\ &+ 2a^2c_2c_3 + 5abc_2^2 - c_2^4 - 5abc_3 + 2c_2^2c_3 + bc - c_3^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

A equação (3.6) mostra que, para qualquer escolha de  $c_2$  (e qualquer escolha fixada para  $(a, b, c)$ ), existem duas possibilidades de escolhas (soluções) para  $c_3$ . Por outro lado, ao substituirmos  $c_3$  por umas dessas possibilidades, obteremos uma nova equação matricial, mas agora com matriz associada de ordem  $4 \times 4$ . Tal matriz terá determinante diferente de zero se somente se

$$a^3 + b \neq 0. \quad (3.7)$$

Assim, podemos escolher qualquer  $c_2$  que satisfaça (3.7) e depois encontrar  $c_3$  que resolva a equação (3.6). Isso nos permitirá resolver nossa equação matricial toda vez que  $(a, b) \neq (0, 0)$ ; além disso, a existência de uma solução no caso especial  $a = b = 0$  é imediata.

Garantimos assim a existência de um  $g_3^1$  livre de ponto de base.

□

# Referências Bibliográficas

- [1] E. Cotterill, R. V. Martins and V. L. Lima. *Rational Curves With Hyperelliptic Singularities* (axiliary file, 2020). Available in: <https://sites.google.com/view/singular-rational-curves>. Access in: May 4, 2020.
- [2] E. Arbarello, M. Cornalba, P. A. Griffiths, and J. Harris, “Geometry of Algebraic Curves”, Springer, 1985.
- [3] V. Barucci, M. D’Anna, and R. Fröberg, *Analytically unramified one-dimensional semi local rings and their value semigroups*, J. Pure Appl. Alg. **147** (2000), 215–254.
- [4] V. Barucci, and R. Fröberg, *One-dimensional almost Gorenstein rings*, J. Algebra **188** (1997), no. 2, 418–442.
- [5] E. Ballico, and L. Gatto, *Weierstrass Points on Singular Curves*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino **55** (1997), no. 2
- [6] M. Bras-Amorós and A. de Mier, *Representation of numerical semigroups by Dyck paths*, Semigroup Forum **75** (2007), no. 3, 676–681.
- [7] M. Bras-Amorós and S. Bulygin, *Towards a better understanding of the semigroup tree*, Semigroup Forum **79** (2009), no. 3, 561–574.
- [8] A. Contiero, L. Feital, and R.V. Martins, *Max Noether’s theorem for integral curves*, [arXiv:1403.4167](https://arxiv.org/abs/1403.4167).
- [9] A. Contiero and K.-O. Stöhr, *Upper bounds for the dimension of moduli spaces of curves with symmetric Weierstrass semigroups*, J. London Math. Soc. **88** (2013), 580–598.
- [10] E. Cotterill, L. Feital, and R. V. Martins, *Singular Rational Curves in  $\mathbb{P}^n$  via Semigroups*, arXiv:1511.08515
- [11] E. Cotterill, L. Feital, and R. V. Martins, *Singular Rational Curves with Points of Nearly-Maximal Weight*, Journal of Pure and Applied Algebra **222** (2018) 3448-3469

- [12] M. Coppens, *Free linear systems on integral Gorenstein curves*, J. Alg. **145** (1992), 209-218.
- [13] E. Cotterill, *Rational curves of degree 16 on a general heptic fourfold*, J. Pure Appl. Alg. **218** (2014), 121–129.
- [14] D. Cox, A. Kustin, C. Polini, and B. Ulrich, *A study of singularities on rational curves via syzygies*, Mem. Amer. Math. Soc. **222** (2013), no. 1045.
- [15] D. Eisenbud and J. Harris, *Divisors on general curves and cuspidal rational curves*, Invent. Math. **74** (1983), 371–418.
- [16] J. Harris, *On the Severi problem*, Invent. Math. **84** (1986), 445–461.
- [17] D. Eisenbud, J. Koh, and M. Stillman, *Determinantal equations for curves of high degree*, Amer. J. Math. **110** (1988), no. 3, 513-539.
- [18] J. Fernández de Bobadilla, I. Luengo, A. Melle-Hernández, and A. Némethi, *On rational cuspidal plane curves, open surfaces, and local singularities*, pp.411–442 in “Singularity theory”, World Sci. Publ., 2007.
- [19] L. Feital, *Gonalidade e o teorema de Max Noether para curvas não-Gorenstein*, Univ. Federal de Minas Gerais Ph.D. thesis, 2013; viewable at [www.mat.ufmg.br/intranet-atual/pgmat/TesesDissertacoes/uploaded/Tese47.pdf](http://www.mat.ufmg.br/intranet-atual/pgmat/TesesDissertacoes/uploaded/Tese47.pdf).
- [20] L. Feital and R.V. Martins, *Gonality of non-Gorenstein curves of genus five*, Bull. Braz. Math. Soc. **45** (2014), no. 4, 649–670.
- [21] H. Flenner and M. Zaidenberg, *Rational cuspidal plane curves of type  $(d, d - 3)$* , Math. Nachr. **210** (2000), 93–110.
- [22] A. Garcia and R.F. Lax, *Weierstrass weight of Gorenstein singularities with one or two branches*, Manuscripta Math. **81** (1993), 361–378.
- [23] P.A. Griffiths and J. Harris, *On the variety of special linear systems on a general algebraic curve*, Duke Math. J. **47** (1980), no. 1, 233–272.
- [24] T. Johnsen and S. Kleiman, *Rational curves of degree at most 9 on a general quintic threefold*, Comm. Alg. **24** (1996), no. 8, 2721–2753.
- [25] T. Kato, *Non-hyperelliptic Weierstrass points of maximal weight*, Math. Ann. **239** (1979), 141–147.
- [26] M. Koras and K. Palka, *The Coolidge–Nagata conjecture*, [arXiv:1502.07149](https://arxiv.org/abs/1502.07149).

- [27] D. Lara, R. V. Martins, J. Souza **On Gonality, Scrolls, and Canonical Models of Curves**, ArXiv:1803.10899
- [28] R.V. Martins, *On trigonal non-Gorenstein Curves with zero Maroni invariant*, J. Alg. **275** (2004), 453-470.
- [29] S. Kleiman and R.V. Martins, *The canonical model of a singular curve*, Geom. Dedicata **139** (2009), 139–166.
- [30] R.V. Martins, *On trigonal non-Gorenstein curves with zero Maroni invariant*, J. Alg. **275** (2004), 453-470.
- [31] T. Karoline Moe, *Rational cuspidal curves*, Univ. Oslo master’s thesis, 2008; [arXiv:1511.02691](#).
- [32] S. Y. Orevkov, *On rational cuspidal curves I. Sharp estimate for degree via multiplicities*, Math. Ann. **324** (2002), no. 4, 657–673.
- [33] J. Piontkowski, *On the number of cusps of rational cuspidal plane curves*, Exp. Math. **16** (2007), no. 2, 251–255.
- [34] R. Rosa and K.-O. Stöhr, *Trigonal Gorenstein curves*, J. Pure Appl. Alg. **174** (2002), 187-205.
- [35] R. M. Miró-Roig, *The representation type of rational normal scrolls*, Rend. Circ. Mat. Palermo 62 (2012), 153–164.
- [36] M. Rosenlicht, *Equivalence relations on algebraic curves*, Ann. Math. **56** (1952), 169–191.
- [37] F.-O. Schreyer, *Syzygies of canonical curves and special linear systems*, Math. Ann., **275** (1986), 105-137
- [38] K.-O. Stöhr, *Hyperelliptic Gorenstein curves*, J. Pure Appl. Alg. **135** (1999), 93–105.
- [39] K.-O. Stöhr, *On the poles of regular differentials of singular curves*, Bull. Braz. Math. Soc. **24** (1993), 105–135.
- [40] K. Tono, *On the number of cusps of cuspidal plane curves*, Math. Nachr. **278** (2005), no. 1-2, 216–221.
- [41] F. Torres, *Weierstrass points and double coverings of curves with application: symmetric numerical semigroups which cannot be realized as Weierstrass semigroups*, Manuscripta Math. **83** (1994), 39–58.

- [42] F. Torres, *On  $\gamma$ -hyperelliptic numerical semigroups*, Semigroup Forum **55** (1997), 364–379.
- [43] A. Zhai, *Fibonacci-like growth of the number of semigroups of given genus*, Semigroup Forum **86** (2013), no. 3, 634–662.