Alexandre de Deus Malta

O SURGIMENTO DA GEOMETRIA ANALÍTICA NO SÉCULO XVII:
Debate histórico sobre questões referentes a sua descoberta

Belo Horizonte
Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Minas Gerais
2015

Alexandre de Deus Malta

O SURGIMENTO DA GEOMETRIA ANALÍTICA NO SÉCULO XVII:
Debate histórico sobre questões referentes a sua descoberta

Dissertação apresentada ao Programa de Pós Graduação em História da Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em História.

Linha de Pesquisa: Ciência e Cultura na História

Orientador: Mauro Lúcio Leitão Condé

Belo Horizonte
Faculdade de Filosofia e Ciências
Humanas da Universidade Federal de Minas Gerais
Data da defesa:

112.1
M261s
2015

Malta, Alexandre de Deus

O surgimento da geometria analítica no século XVII [manuscrito] : debate histórico sobre questões referentes á sua descoberta / Alexandre de Deus Malta. - 2015.

154 f.

Orientador: Mauro Lúcio Leitão Condé.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas.

Inclui bibliografia

1. História –Teses.2. Geometria Analítica – História – Teses. 3. Matemática – História – Séc. XVII - Teses. 4. Ciência – História – Teses. I. Condé, Mauro Lúcio Leitão. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Faculdade de Filosofia e Ciências Humanas. III. Título.

Agradecimentos

Ao professor Doutor Mauro Lúcio Leitão Condé, pelas aulas de história de ciência riquíssimas em conteúdo. Deixo aqui a minha gratidão pela orientação desta pesquisa; pelo rigor na revisão do meu texto cujas sugestões, críticas e questionamentos foram fundamentais para o meu amadurecimento intelectual.

Aos professores da pós-graduação em história da UFMG, por contribuírem para a minha formação acadêmica.

Aos membros das bancas de qualificação e defesa, pelas críticas construtivas ao texto.

Por fim, agradeço aos familiares e amigos que incentivaram meus estudos e souberam compreender meus momentos de ausência.

Resumo

O objetivo geral dessa pesquisa é a investigação dos fatores que contribuíram para que a descoberta da geometria analítica fosse atribuída a Descartes de maneira exclusiva por parte de alguns historiadores da matemática. A hipótese inicial é a de que Descartes foi um intelectual conhecido em toda a Europa, sobretudo por ter estudado no respeitado Colégio Jesuíta de La Flèche, por conta disso ele detinha um capital simbólico bem maior que o de Fermat no círculo de Mersenne. Daí de acordo com a teoria sociológica de Bordieu a ambição científica do sábio de La Flèche foi maior que a de Fermat, o que fez com que a Geometria fosse publicada em vida por Descartes ao passo que a Introdução apenas circulou entre os matemáticos do circulo de Mersenne na forma de manuscrito. A publicação póstuma da Introdução em 1679 não causou nenhum impacto nos círculos científicos da época, pois a linguagem usada por Fermat estava ultrapassada por ainda conter abreviaturas. Na Geometria Descartes tinha criado uma linguagem essencialmente simbólica que foi aceita gradativamente pelos matemáticos em função da sua conformidade aos desenvolvimentos algébricos da época da sua publicação. Além desses fatores referidos, investigamos a possibilidade de um Descartes muito mais inserido no contexto social e tecnológico da época, pois se todos os seus tratados filosóficos e científicos anteriores e posteriores ao Discurso do Método tiveram uma carga de influência de princípios mecânicos, era natural, supõe Grossmann, que Descartes também tenha aplicado os mesmos princípios mecânicos na constituição do seu instrumento para a unificação de todas as ciências, a álgebra simbólica.

Palavras-chave: história da geometria analítica, história da matemática no século XVII, Descartes, Fermat.

Abstract

The overall objective of this research is the investigation of the factors that contributed to the discovery of analytic geometry was attributed to Descartes uniquely by some historians of mathematics. The initial hypothesis is that Descartes was an intellectual known throughout Europe, especially for having studied in the respected Jesuit College of La Flèche, because of that he held a symbolic capital much higher than that of Fermat in Mersenne circle. Hence according to the sociological theory of Bourdieu scientific ambition of La Flèche wise it was higher than that of Fermat, which made the Geometry was published in life through Descartes while the Introduction only circulated among mathematicians in the circle Mersenne in manuscript form. The posthumous publication of Introduction in 1679 there was no impact in scientific circles of the time, because the language used by Fermat was overtaken by still contain abbreviations. In Geometry Descartes had created an essentially symbolic language that was gradually accepted by mathematicians in terms of conformity to algebraic developments from the time of its publication. In addition to these mentioned factors, we investigated the possibility of Descartes more inserted into the social and technological context of the time, as if all his philosophical treatises and relevant scientific and after the Discourse on Method had a load influence of mechanical principles, it was natural, Grossmann assumed that Descartes has also applied the same mechanical principles in the constitution of his instrument for the unification of all the sciences, the symbolic algebra.

Keywords: history of analytic geometry, history of mathematics in the seventeenth century, Descartes, Fermat.

Sumário

Introdução

A motivação para a escrita da dissertação que aqui apresentamos surgiu do fato de que em âmbito nacional não temos visto sequer um trabalho com enfoque historiográfico sobre a geometria analítica. Buscando mudar essa realidade apresentamos a presente dissertação cujo título *O surgimento da Geometria Analítica no século XVII: debate histórico sobre questões referentes á sua descoberta* traduz perfeitamente o seu conteúdo. Com efeito, trata-se de uma investigação que busca compreender os trâmites da descoberta da geometria analítica entre os anos de 1619 e 1637 que envolveram pesquisas dos estudiosos franceses Descartes e Fermat. A demarcação de um espaço de tempo do século XVII relacionado à descoberta da geometria analítica não significa que desconsideramos o fato de que na historiografia da matemática, segundo Eves (2011: 382-383), há certas divergências de opiniões entre os historiadores no que diz respeito à época e aos personagens responsáveis por essa descoberta. Eves afirma sem citar nomes que há certos historiadores da matemática que defendem que os gregos inventaram a geometria analítica na antiguidade mediante os trabalhos de Apolônio e Menaecmo sobre as cônicas. Ele ainda nos informa que há outros estudiosos que enfatizam os trabalhos de Nicolas Oresme sobre variações longitudinais na idade média. Neutro frente essas opiniões, Eves considera o fato de que tanto os gregos quanto Oresme desenvolveram efetivamente um sistema de coordenadas, porém o método[1] que ambos usavam no estudo geométrico de suas curvas era bastante limitado para que eles tivessem condições reais de desenvolverem uma autêntica geometria analítica, segundo seu posicionamento, essa descoberta só poderia ocorrer no século XVII:

> (...) a essência real desse campo da matemática reside na transferência de uma investigação geométrica para uma investigação algébrica correspondente. Antes de a Geometria Analítica poder desempenhar plenamente esse papel, teve de esperar o desenvolvimento do simbolismo e dos processos algébricos. Assim, parece mais correto concordar com a maioria dos historiadores que consideram as contribuições decisivas feitas no século XVII pelos matemáticos franceses René Descartes e Pierre de Fermat como a origem essencial do assunto. Sem dúvida, só depois da contribuição dada por esses dois homens à geometria analítica é que esta ganhou os contornos iniciais da forma com que estamos familiarizados. (EVES, 2011: 383)

[1] A aplicação do método sintético significava descrever as propriedades das curvas na forma retórica e isso evidentemente limitava muito a compreensão de uma relação mútua entre curvas e equações – princípio fundamental da geometria analítica – devido a uma carência de uma álgebra simbólica no sentido algorítmico. Por conta disso, tanto os gregos quanto Oresme não conseguiram alcançar o princípio fundamental da geometria analítica. Assim nem eles nem Oresme podem ser considerados inventores legítimos da geometria analítica.

Portanto é razoável admitir que Descartes e Fermat são os verdadeiros artífices da geometria analítica, na medida em que eles tiveram a disposição todo um aparato algébrico renascentista que sinalizava uma estrada real em direção a geometria euclidiana cujo itinerário contrariava a antiga rota traçada por Euclides no seu diálogo[2] com Ptolomeu I. Mas uma questão que Eves não levantou é que grande parte desses historiadores – que localizavam a invenção da geometria analítica no século XVII – não davam importância ao trabalho de Fermat e acabavam atribuindo a paternidade da nova geometria a Descartes de forma exclusiva. Tal constatação pode ser confirmada implicitamente e explicitamente em alguns livros[3] de história da matemática – e até mesmo em alguns documentários[4] sobre o assunto, influenciados muito possivelmente pelas idéias desses historiadores. Há quem se interessa por essa questão, Urbaneja (2003), por exemplo, em sua obra *Los Orígenes de la Geometría Analítica* faz uma afirmação condizente com a nossa preocupação:

> (...) Para o grande público, inclusive para o profissional das matemáticas, a geometria analítica é uma invenção de Descartes, daí a denominação que se adota ás vezes de geometria cartesiana, aludindo à forma latinizada do apelido do grande filósofo francês.

---

[2] Bicudo (2009: 41) ao se referir à citação de Proclus da *História da Geometria* de Eudemo, informa-nos que Ptolomeu I, certa vez, perguntou a Euclides "se existe algum caminho mais curto que os *Elementos* para a geometria e ele respondeu não existir atalho real na geometria".

[3] Os autores João Carvalho e Tatiana Roque em *Tópicos de História da Matemática* afirmam de forma indireta que Descartes "é considerado o pai da geometria analítica" (CARVALHO; ROQUE, 2012: 254). Por outro lado, Florian Cajori em *Uma História da Matemática* se refere a Descartes, mais diretamente, como o "criador da geometria analítica e contribuidor significativo para a moderna notação matemática" (CAJORI, 2007: 249).

[4] O documentário *Marin Mersenne: The birth of modern geometry* – produzido por Glânffrwd Thomas em 1986 com a parceria da Open University e transmitido pela BBC 2 – retrata o empenho do padre Mersenne, interpretado pelo ator John Bennett, em promover o desenvolvimento da ciência seiscentista mediante encenações dramáticas que representavam o seu objetivo de acabar com o sigilo entre os estudiosos da época – que tinham, em algumas situações, aversão a comunicação das suas idéias, tal é o caso de Roberval que não publicava seus resultados originais em função da competição a cada três anos do cargo de professor do *Collège de France*, na qual ele optava por divulgar seus resultados só nessas competições para, obviamente, vencer os seus adversários e por conseqüência garantir o seu emprego. Em suma, o presente documentário nos mostra a determinação de Mersenne em estimular os cientistas franceses a trocarem informações entre eles mediante correspondências e reuniões – realizadas no convento mínimo da anunciação. Na verdade, o reverendo considerava como missão, espalhar o conhecimento cientifico e por isso ele mesmo procurou circular as suas notáveis descobertas em diversos ramos do conhecimento entre os seus colegas cientistas – que poderiam questionar, substituir e aperfeiçoar suas descobertas – pois somente através da cooperação coletiva ele pensava que era possível alcançar a verdade. Dentre esses cientistas, Mersenne tinha uma maior preferência pelos matemáticos. Descartes é retratado no documentário como um grande amigo dele e principal figura da matemática da época em função da sua descoberta da geometria de coordenadas. Isso é verdade em função da transformação conceitual que a obra de Descartes propõe na matemática seiscentista como um todo, mas o que nos espanta é que o roteirista do documentário não menciona a *Introdução* de Fermat que propunha métodos semelhantes aos de Descartes. Mais revoltante ainda é que o documentário também aborda a invenção da geometria projetiva, mas ao contrário da descrição restritiva da geometria de coordenadas, aqui o roteirista se lembra das contribuições de Desargues e Pascal – mesmo a obra do último tendo sido conhecida publicamente só no século XIX, ao passo que a *Introdução* já era publicada logo em 1679 nas *Várias Atividades Matemáticas*, ou seja, no final do século XVII a *Introdução* já tinha tornado-se pública. De qualquer forma, a única menção de Fermat no documentário aparece numa imagem repentina que cita os principais nomes dos cientistas correspondentes de Mersenne que a nosso ver mais parece uma mensagem subliminar tendo em vista que tem que se estar bem atento para perceber em questão de segundos a menção secundária de Fermat.

> Com isso, se ignora injustamente a grande contribuição simultânea de Fermat. (URBANEJA, 2003: 7)

De fato, tudo que é considerado formulação do filósofo francês leva o indicativo cartesiano à frente como o clichê *geometria cartesiana*, mas há ainda outros clichês – não mencionados por Urbaneja – mas igualmente compreensíveis como as expressões *sistema cartesiano* ou *plano cartesiano* que são geralmente usadas nos livros acadêmicos e didáticos de matemática para representar o plano formado por dois eixos ortogonais. Todavia, tais expressões são anacrônicas já que Descartes não trabalhava com eixos ortogonais, nem ao menos com dois eixos oblíquos. Na realidade, o seu sistema de coordenadas tinha um eixo fixo apenas e um eixo variável, já que ele traçava novas curvas por movimentos mecânicos, aliás, essa é uma idéia que se distancia em muito da geometria analítica contemporânea. Mas a obra de Descartes contém o princípio fundamental da geometria analítica – mesmo que de forma acidental – e a sua participação no desenvolvimento dessa disciplina foi consideravelmente importante, no entanto, acreditamos que a glória da descoberta desse ramo da matemática deve ser repartida com Pierre de Fermat, pois "em carta dirigida ao matemático Gilles Persone de Roberval em setembro de 1636, um ano antes de Descartes publicar sua *Geometria*, Fermat mostra que já tinha idéias de geometria analítica sete anos antes, ou seja, em 1629" (SMITH, 1958: 322).

Nessa época, Fermat tinha de fato plenas condições de se apoderar das idéias fundamentais da geometria analítica, pois como membro da escola analítica de Bordéus desde 1620 ele certamente já estava habilitado para compreender a álgebra simbólica de Viéte e o próprio programa dessa escola que visava identificar e esclarecer a análise secreta[5] dos antigos. Por isso, em 1626[6] Fermat iniciou e concluiu um projeto particular de restauração dos *Lugares planos* de Apolônio com base em alguns comentários e proposições de Pappus na obra *O Tesouro da análise* (que fazia parte da sua famosa *Coleção matemática*). Fermat por sua vez tinha sido estimulado pelos discípulos de Viéte a reconstruir os *Lugares planos* mediante a substituição da análise geométrica do geômetra de Pérgamo por uma análise algébrica do mestre Viète. Daí ao iniciar seu empreendimento, ele tinha-se deparado com diversos teoremas que desafiavam a sua inteligência, de um modo especial o teorema de Apolônio acerca dos pontos indeterminados envoltos numa circunferência, e ao tentar

[5] Os geômetras gregos se baseavam numa análise geométrica em que a heurística – a via de descobrimento dos seus principais resultados – era velada de forma consciente. Assim, o método sintético apresentava uma demonstração pautada em construções geométricas especificas para cada teorema ou proposição que se queria demonstrar. Para tanto, isso dependia naturalmente da engenhosidade do geômetra grego, pois cada teorema exigia uma nova inspiração para que ele fosse demonstrado. Portanto, a análise grega era destituída de um método geral para se demonstrar teoremas. Na realidade, existia uma separação entre descobrimento e demonstração e por esse motivo, o programa da escola analitica consistiu em buscar uma ferramenta heurística que pudesse decifrar a análise secreta dos gregos e a ferramenta encontrada foi á álgebra simbólica de Viète.

[6] Para confirmar a data, ver Urbaneja (2003: 169).

demonstrá-lo através da substituição da análise geométrica do pergamiano por uma análise algébrica de seu mestre, ele acabou sendo premiado com um bônus que foi a descoberta do principio fundamental da geometria analítica que o levaria a redigir logo depois – mas especificamente em 1629[7] – o seu manuscrito *Introdução aos lugares planos ou sólidos* donde ele iria sistematizar em detalhes o seu brilhante *insight*. Lamentavelmente, Fermat nunca se preocupou em publicar os seus manuscritos, apesar dos inúmeros pedidos dos seus amigos parisienses e por conta disso as suas idéias sobre geometria analítica só puderam ser analisadas com precisão pela comunidade matemática em geral em 1679, "quatorze anos depois da morte de Fermat, quarenta e dois anos depois da publicação da *Geometria* de Descartes e cinqüenta anos depois da *Introdução* ter sido composta" (BOYER, 2004: 82), quando o seu filho Clemente Samuel de Fermat decidiu publicar todos os manuscritos do pai inclusive a *Introdução* numa obra denominada de *Várias atividades matemáticas*. Assim sendo, Descartes que era filósofo de carreira e teve um episódio da sua vida dedicado intensamente a matemática – que resultou na publicação de uma obra nessa matéria – ao escrever a sua obra filosófica mais conhecida, o *Discurso do método* donde ele usou a certeza da matemática para fundamentar o seu método cartesiano, de modo que num dos apêndices dessa obra intitulado *A Geometria* ele se propunha a resolver o problema de Pappus e na resolução desse problema ele introduziu um sistema de coordenadas incipiente e trabalhou até com certos elementos ligados a geometria analítica como reta curva e eixos. Mas, em nenhum momento ele sistematizou de forma clara o princípio fundamental da nova geometria, contudo ele acabou sendo condecorado com a paternidade da geometria analítica, pois ele tinha publicado a sua *Geometria* bem antes da *Introdução*. Daí surgiu o problema da nossa pesquisa, a saber: Quais são as razões que contribuíram para que a descoberta da geometria analítica fosse atribuída por diversos historiadores a Descartes exclusivamente?

Nossa primeira hipótese baseia-se na premissa de que Descartes foi um matemático, filósofo e escritor conhecido em toda a Europa, sobretudo por ter estudado no respeitado Colégio Jesuíta de *La Flèche*, por conta disso ele detinha com toda a certeza um capital simbólico[8] muito maior que o de Fermat no círculo de Mersenne. Daí de acordo com a teoria sociológica de Bordieu (1983: 134) a ambição científica do sábio de *La Flèche* foi maior que a de Fermat. Portanto a *Geometria* seria amplamente divulgada pelos intelectuais da universidade de Leiden que foram estimulados por Descartes para realizar tal empreendimento – o que evidencia a sua grande ambição científica –

[7] Para confirmar a data, ver Urbaneja (2003: 169).

[8] O capital simbólico é um conceito utilizado por Bordieu para explicar a estrutura hierárquica das relações de poder entre os membros de um dado campo cientifico. Em suma, consiste numa espécie de reputação cientifica "compreendida enquanto capacidade de falar e de agir legitimamente – isto é, de maneira autorizada e com autoridade – , que é sociologicamente outorgada a um agente determinado" (BOURDIEU, 1983: 1). Em outras palavras, o capital simbólico é uma medida do nível de prestigio dos membros de um campo cientifico de maneira tal que essa medida é histórica e sociologicamente condicionada conforme o brilho da trajetória intelectual de cada membro em particular.

enquanto que a *Introdução*, ao contrário da *Geometria*, foi conhecida exclusivamente pelos membros do círculo de Mersenne, mesmo assim apenas aqueles que compartilhavam uma amizade com Fermat e tinham a sorte de receber mediante cartas os seus brilhantes manuscritos já que por conta da sua irrisória ambição científica Fermat não possuía projetos para publicação de seus manuscritos. Além do mais, Fermat em sua *Introdução* usou a linguagem sincopada de Viéte que era uma linguagem de difícil compreensão, ao passo que na *Geometria* Descartes criou uma linguagem simbólica inteligível que foi aceita de forma unânime pelos matemáticos da época, a prova disso é que Boyer (2004: 82) nos relata que a publicação póstuma da *Introdução* em 1679 não causou nenhum impacto nos círculos científicos da época e o seu interesse, portanto foi meramente historiográfico[9]. Soma-se a isso a possibilidade de um Descartes muito mais inserido no contexto social e tecnológico da sua época, na medida em que se todos os seus tratados filosóficos e científicos anteriores e posteriores ao *Discurso do método* tiveram uma carga de influência dos princípios mecânicos, foi natural, supõe Grossmann, que Descartes "também tenha aplicado os mesmos princípios mecânicos no seu método, na própria estrutura e finalidades do seu instrumento cientifico [a álgebra] , e imaginou-os como modelos de máquinas" (GROSSMANN, 2009: 158, grifo nosso).

Dito isso, o objetivo geral que norteia essa pesquisa é a investigação dos fatores que contribuíram para que a descoberta da geometria analítica fosse atribuída a Descartes de maneira exclusiva por parte de alguns historiadores – tendo em mente que a presente descoberta não se constituiu em uma controvérsia de seu tempo. Para realizar tal intento, é preciso nos debruçar nas realidades vivenciadas por Descartes e Fermat no século XVII, bem como em suas pesquisas e compararmos o *status* que ambos adquiriram naquela época. Para o primeiro capítulo da nossa dissertação, pretendíamos a princípio analisar as transformações ocorridas na matemática do século XVII que propiciaram o surgimento de uma nova disciplina mediante a intervenção de métodos algébricos na geometria euclidiana. Entretanto, uma análise centralizada exclusivamente nessa época correria o risco de se comprometer em sua arbitrariedade cronológica visto que "os esquemas históricos às vezes nos enganam com divisões artificiais do progresso humano em séculos ou meio séculos demarcados com datas precisas" (BELL, 2011: 141).

> O recorte mais exato não é forçosamente o que faz uso da menor unidade de tempo se assim fosse, seria preciso então preferir não apenas o ano à década, mas também o

[9] É de se lamentar que Fermat não publicasse quase nada em vida, tal procedimento, evidentemente, foi temerário para sua notoriedade. Na realidade, Fermat se limitava a escrever cartas aos seus amigos do circulo de Mersenne, cartas estas nas quais apresentava suas descobertas matemáticas. Como a totalidade dos seus estudos só foi publicada após sua morte, por interesse de seu filho, suas idéias sobre geometria analítica acabaram não sendo discutidas com todos os matemáticos da época.

> segundo ao dia. A verdadeira exatidão consiste em se adequar, a cada vez, à natureza do fenômeno considerado. Pois cada tipo tem sua densidade de medida particular e, por assim dizer, seu decimal específico. (BLOCH, 2002: 150)

Sendo assim, estamos atentos aos posicionamentos de Bell e Bloch quanto ao fato dos processos históricos não estarem sujeitos a uma cronometragem absoluta atrelada às amarras de um relógio secular uma vez que a "(...) solidariedade das épocas tem tanta força que entre elas os vínculos de inteligibilidade são verdadeiramente de sentido duplo. A incompreensão do presente nasce fatalmente da ignorância do passado" (BLOCH, 2002: 65). Nessa perspectiva, faremos um recorte histórico mais elástico mostrando que a descoberta da geometria analítica foi fruto não só das condições favoráveis do primeiro terço do século XVII, mas também de causalidades advindas de tempos passados. Dessa forma, no capitulo um apresentaremos uma história geral da geometria analítica com base na abordagem de Carl Boyer na obra *History of Analitic Geometry* que contem relatos circunstanciados desde a antiguidade até a sua fundação no século XVII. Para nos referenciarmos metodologicamente utilizaremos as idéias do pensador Ludwik Fleck presentes na obra *Gênese e desenvolvimento de um fato científico*. Como Boyer pertence a uma tradição historiográfica internalista – na qual a construção do conhecimento tem origens privilegiadas na genialidade dos indivíduos e menos nas interações sociais entre eles – fica inviável apresentar uma história nos moldes da epistemologia fleckiana em que as comunicações coletivas a nível sincrônico são enfatizadas. No entanto, uma historia relatada a nível diacrônico como apresentada por Fleck – na qual o conhecimento evolui de forma dinâmica com marcas estilísticas próprias – tem possibilidade de ser historicizada tendo como base as idéias apresentadas por Boyer.

Para o capitulo dois, faremos uma analise geral do contexto matemático do século XVII – em especial o segundo terço desse período que compreende as descobertas simultâneas das geometrias de Descartes e Fermat. Em seguida, vamos analisar os diferentes ambientes sócio-culturais e intelectuais que Descartes vivenciou no século XVII e mostraremos que a sua principal influência matemática se deu na escola jesuíta de *La Flèche* onde ele adquiriu uma visão totalmente dirigida para o aspecto prático das matemáticas o que o levou a elaborar mais tarde um programa de reformulação da álgebra renascentista com viés prático. Também vamos analisar a trajetória intelectual de Fermat na escola analítica de Bordéus com o intuito de mostrar que a sua nova geometria é tributária aos pressupostos dessa escola que valorizavam a geometria dos antigos e a álgebra de Viéte.

No capítulo três, faremos uma análise comparativa entre as geometrias de Descartes e Fermat, enfatizando os contextos distintos das duas publicações, os aspectos analíticos característicos de cada obra, mostrando em quais desses aspectos Descartes se sobressaiu ou deixou a desejar em relação à Fermat e vice-versa. Também, faremos uma discussão mais fechada em torno das razões contemporâneas ao tempo de Descartes que o levaram a ser considerado por alguns historiadores como o inventor exclusivo da geometria analítica.

1. As origens da Geometria Analítica no pensamento de Carl Boyer

Considerações Iniciais

Neste capitulo apresentaremos uma descrição geral dos desdobramentos da matemática, a partir da antiguidade clássica, que possibilitaram a descoberta da geometria analítica no segundo terço do século XVII. Para tanto, nos serviremos da obra *History of Analitic Geometry* de Carl Boyer[10] publicada em 2004 pela Dover publications – uma reedição da primeira publicação em 1956 pela Yeshiva University. Essa obra contém ao todo nove capítulos que retratam os principais desenvolvimentos da geometria analítica desde a antiguidade até a sua definitiva formalização no século XIX, mas analisaremos apenas os três capítulos iniciais que atendem ao nosso propósito inicial.

No prefácio dessa obra Boyer enfatiza a necessidade de investigações gerais da história da geometria analítica que naquele momento – a história da geometria analítica – ainda não tinham alavancado nos Estados Unidos. Em contrapartida, na Europa já havia alguns trabalhos[11] muitos próximos dessa direção. Desse modo, antes da publicação da *History of Analitic Geometry* em 1956 não havia sequer um trabalho em solo americano que abordasse a história da geometria analítica de forma geral. Buscando ultrapassar essa tendência, Boyer decidiu reunir todos os seus artigos sobre a história da geometria analítica publicados nas edições de número seis e sete do periódico *Scripta Mathematica Studies* para então sintetizá-los em um só manuscrito que deu origem a sua *History of Analitic Geometry*.

Conforme a linha historiográfica dominante da época, o foco principal de Boyer ao longo da sua narrativa é o desenvolvimento das idéias independentemente de qualquer contextualização, embora muitas vezes essa contextualização fosse feita de forma implícita. Na realidade, Boyer (2004: xvii – xviii) estava interessado mais na matemática em si do que propriamente nos matemáticos, pois ele entendia que os detalhes bibliográficos tinham "pouca ascendência sobre o

[10] A escolha desse autor como fonte primária se resguarda no seu reconhecido prestigio no cenário acadêmico internacional. No Brasil, por exemplo, se sobressaem às inúmeras reedições da *história da matemática* de Boyer a partir de 1974, o que levou a historiadora Roque (2012: 477) a afirmar que qualquer pesquisa – em âmbito nacional – que registra um fato ou um personagem histórico da matemática cita, inevitavelmente, uma dessas edições. Outro tratado influente em nosso território nacional – que divide as honras com a *história da matemática* de Boyer – é a *introdução à história da matemática* de Howard Eves, traduzido para o português em 1995. Mas enquanto Eves escreveu o seu tratado "como um professor de matemática com interesse em historia", Boyer se dedicou "a historia da matemática de um modo mais profundo e contribuiu para a profissionalização desse campo de saber nos Estados Unidos" (ROQUE, 2012: 478).

[11] Boyer faz menção há dois artigos de Gino Loria, um escrito em italiano publicado no periódico *Memorie of the Reale Accademia dei Lincei* de 1923 e outro redigido em francês e publicado em vários volumes do jornal romeno *Mathematica* entre 1942 a 1945. Boyer (2004: vii), considera que "esses dois artigos juntos constituem talvez o relato mais extenso e confiável da história da geometria analítica".

desenvolvimento de conceitos". Pelas mesmas razões, ele também decidiu dar pouca ênfase as peculiaridades de notação.

Como já foi dito, o nosso objetivo para esse capitulo é apresentar os argumentos que Boyer sustenta para explicar os desdobramentos da matemática da antiguidade até o primeiro terço do século XVII que contribuíram de alguma forma para o surgimento da geometria analítica no segundo terço do seiscentos. Muitas das questões levantadas por esse autor serão reformuladas de acordo com as idéias epistemológicas de Fleck, retratadas na obra *Gênese e desenvolvimento de um fato cientifico*, que será a nossa referência metodológica em historia da ciência para auxiliar a nossa abordagem do pensamento de Boyer. Publicada originalmente em 1935 na língua alemã, a obra de Fleck teve diversas traduções até atingir à sua versão em português. Utilizaremos como fonte essa última versão publicada no Brasil em 2010 pela editora fabrefactum. O autor do seu prefácio admite que um dos maiores desafios para os leitores de Fleck consiste numa compreensão adequada dos fatos científicos "a partir de um *sistema de referência*, no qual múltiplas[12] *conexões passivas* e *conexões ativas* se equilibram e os fatos surgem e se desenvolvem". (CONDÉ, 2010: xiv, grifos do autor). Desse modo, os fatos científicos não têm que ser avaliados de forma isolada dos seus reais contextos, pois a construção deles não é meramente lógica ou empírica, mas obedece, além disso, a certos condicionamentos histórico-sociais. Isso implica que os fatos científicos, longe de serem frutos da genialidade de um cientista, são na realidade, o resultado de um longo processo de interações sociais mediadas pelo estilo de pensamento (sistema de referência) de uma comunidade cientifica.

> Podemos, portanto, definir o estilo de pensamento como percepção direcionada em conjunção com o processamento correspondente no plano mental e objetivo. Esse estilo é marcado por características comuns dos problemas, que interessam a um coletivo de pensamento; dos julgamentos, que considera como evidentes e dos métodos, que aplica como meios do conhecimento. É acompanhado, eventualmente, por um estilo técnico e literário do sistema do saber. (FLECK: 2010: 149)

Assim sendo, o estilo de pensamento[13] é um conjunto de teorias e práticas científicas socialmente reconhecidas que satisfazem as necessidades intelectuais de um coletivo de pensamento

---

[12] Fleck relaciona os conceitos empregados por uma comunidade cientifica – num determinado período da historia da ciência – com as *conexões ativas*. Em outras palavras, as *conexões ativas* são princípios científicos construídos histórica e sociologicamente que se assentam ao sistema de referência da ciência de uma época. Desse modo, a partir de tais princípios a comunidade deduz – diante de uma atividade cientifica corriqueira – um conjunto de outros princípios, denominados por Fleck de *conexões passivas.*

[13] Com o conceito de estilo de pensamento, Fleck propõe que não há uma realidade absoluta que dê conta de fornecer os meios necessários para alcançar a verdade a respeito de um fenômeno, pois todo ponto de vista a respeito de um

– tanto a nível esotérico (cientifico) quanto a nível exotérico (popular) – em um dado período histórico da humanidade.

> Se definirmos o “coletivo de pensamento” como a comunidade das pessoas que trocam pensamentos ou se encontram numa situação de influência recíproca de pensamentos, temos, em cada uma dessas pessoas, um portador do desenvolvimento histórico de uma área de pensamento, de um determinado estado do saber e da cultura, ou seja, de um estilo específico de pensamento. (FLECK, 2010: 82)

Os conceitos de coletivo de pensamento e estilo de pensamento trazem em suas definições, a presença de relações históricas, sociológicas e culturais que interferem, consideravelmente, no desenvolvimento da ciência. Para Fleck, esse desenvolvimento ocorre de forma gradual e continuada, mediante mutações sucessivas nos estilos de pensamento, mas sem rupturas drásticas na transição de um estilo para outro, e isso confirma o caráter evolucionário da sua epistemologia. Quanto à perspectiva de Boyer, em razão da corrente historiográfica a qual ele é vinculado – a saber, o internalismo – é natural que ele desconsidere as relações sociológicas e culturais em sua analise histórica do desenvolvimento da matemática, nas palavras desse autor:

> É freqüentemente dito que a matemática desenvolve mais efetivamente quando esta associada ao mundo das questões práticas – quando eruditos e artesãos trabalham juntos. Entretanto, para esta regra parece haver mais exceções do que exemplos para ela; e a descoberta da geometria analítica certamente parece ser uma das exceções. Por esse motivo, o background sociológico será descartado na presente exposição. (BOYER, 2004: viii)

Mesmo diante da indiferença de Boyer quanto aos aspectos externos ao desenvolvimento da matemática, o que o levou a considerar que a geometria analítica goza de certa autonomia em relação às esses aspectos, percebe-se, no entanto, que essa indiferença tem algumas exceções, pois ele admite algumas situações, mesmo não relacionadas à história da geometria analítica, em que os fatores sócio-culturais poderiam influenciar no desenvolvimento da matemática, embora ele não as relacione diretamente. Mas, em termos gerais, Boyer considera mesmo que a matemática é uma ciência teórica – de cunho hermético – e por conta disso é natural que ele não se interesse pelos

---

fenômeno deve estar necessariamente alicerçado no imaginário coletivo da época – em que esse ponto de vista veio à tona. Desse modo, a verdade não é algo relativo, subjetivo ou convencional. Na realidade, ela é uma resposta relativa às possibilidades do estilo de pensamento da época.

fatores de ordem sócio-cultural de uma dada época. Isso evidentemente não impede que façamos uma análise dos traços estilísticos da atividade matemática próprios das épocas que antecederam o surgimento da geométrica analítica, seguindo, nesse caso, as indicações do pensamento de Boyer, ainda que uma tarefa desse porte, na compreensão de um historiador (a) da matemática de orientação externalista – como, por exemplo, Roque (2012) – não seria de todo modo, tão simples assim, pois:

> O modo de argumentar a generalidade de um procedimento, de enunciar uma técnica ou uma demonstração, corresponde a normas em vigor em uma determinada época que o matemático [pesquisador em história da matemática] na maioria das vezes, não explicita porque já as interiorizou. (ROQUE, 2012: 483, grifo nosso)

Essa limitação exposta por Roque, ao avaliar a atividade historiográfica dos historiadores internalistas, não se confirma na *History of Analitic Geometry* de Boyer, pois nela as “informações factuais são apresentadas em grande medida para o que é sugestivo do desenvolvimento geral de idéias”. (BOYER, 2004: vii). Portanto, acreditamos que é perfeitamente possível, com base nas idéias de Boyer, investigar os padrões estilísticos inerentes a atividade matemática das diferentes gerações que antecederam o surgimento da geometria analítica no segundo terço do século XVII e para esse fim, usaremos a epistemologia de Fleck como suporte metodológico para encaminharmos essa investigação.

1.1. As primeiras contribuições na antiguidade

Boyer inicia a sua busca por vestígios históricos da geometria analítica nas civilizações pré-helênicas[14] do Egito e da Babilônia que praticavam uma matemática assentada na experiência. Essas civilizações tinham alcançado um corpo considerável de conhecimentos em aritmética e geometria e chegaram até mesmo a desenvolver um sistema de coordenadas com aplicações próprias na agrimensura e na astronomia. As suas práticas matemáticas eram concebidas especialmente através de mensurações de figuras geométricas e isso proporcionava o estabelecimento de relações entre números e configurações espaciais. No entanto, essas relações originavam-se da investigação empírica de casos particulares que eram ampliados mediante induções para incluir outros casos semelhantes. Na realidade, a falta[15] de uma compreensão da estrutura lógica da matemática por partes dos egípcios e dos babilônios fez com que os seus resultados não pudessem ser transformados em teoremas universais. Por essa razão mesmo que essas civilizações tenham evoluído razoavelmente em aritmética e geometria, a falta de uma preocupação com os processos gerais e dedutivos dificultava a associação desses campos num sistema formal que caracterizaria a geometria algébrica futura.

A matemática desenvolvida nesse meio cultural dominado por processos práticos adquiriria uma nova linguagem no mundo grego, mas não se sabe ao certo como esse intercâmbio de culturas – que propiciaria uma mudança de estilo de pensamento em voga na matemática – realmente aconteceu[16]. Ao que tudo indica, Tales de Mileto no século VI a.C. foi o primeiro matemático grego que substituiu a base de comparação consagrada pelos egípcios e babilônios como modelo indutivo para o modelo dedutivo. Esse novo modelo alcançava seus resultados partindo de uma série de proposições verdadeiras por si só, de maneira tal que as demais proposições eram deduzidas das

---

[14] Boyer (2004: 1) considera que todas as civilizações pré-helênicas além da Babilônia e do Egito tinham cultivado uma matemática com base na experiência cotidiana, mas o máximo que essas civilizações tinham alcançado em nível de mensuração não ultrapassava a noção de configurações retilíneas. Mesmo assim, ele destaca a importância das primeiras noções de mensuração na medida em que elas "presumivelmente estavam relacionadas com o problema do qual a geometria analitica levantou – a correlação do número com a medida geométrica" (BOYER, 2004: 1). No entanto a geometria analítica surgiria historicamente da comparação das medidas retilíneas e curvilíneas e essas noções só chegaram a ser desenvolvidas pelas civilizações egípcias e babilônias que tinham alcançado os primeiros passos nessa direção – embora um tanto limitados devido à falta do desenvolvimento de um sistema de coordenadas matematicamente formalizado e de uma álgebra simbólica, o que poderia transformar a geometria pré-helênica do circulo em uma geometria analítica.

[15] Boyer (2004: 2) entende que a imperfeição dos sistemas numéricos pré-helênicos no âmbito conceitual foi um entrave para o desenvolvimento dos métodos de cálculo e por essa razão a elaboração de uma álgebra simbólica adequada às necessidades da geometria estava comprometida devida a falta do raciocínio abstrato.

[16] Embora Boyer (2004: 4) faça uso da expressão "revolução" para caracterizar esta alteração de estados de conhecimento na história da matemática, percebe-se ao longo da sua argumentação a existência de continuidades entre as linhas de pensamento elaboradas pelas civilizações pré-helênicas e a civilização grega. Desse modo entendemos que ele não quis negar essas circulações inter coletivas de pensamento entre essas civilizações, mas sim indicar que não existe uma uniformidade nesses relatos históricos que atestam essas circulações possivelmente em virtude dos documentos da época que são verdadeiramente escassos e ainda duvidosos quanto aos laços entre a realidade e a lenda. (Cf. BOYER, 1996: 31; 2004: 3-4; 2012: 54)

anteriores mediante argumentos de ordem lógica. Logo, o modelo matemático de Tales valorizava a reflexão em contraposição a observação, e essa nova forma de fazer matemática – fundamentada na comprovação de resultados mediante investigação sistemática – foi o alicerce metodológico da qual a geometria se apoderou para dar prosseguimento ao seu desenvolvimento na seqüência histórica.

Os pitagóricos procuraram dar continuidade a esse processo dedutivo que Tales implantou na geometria, mas eles foram mais além, na medida em que estabeleceram uma sistematização ainda maior de conceitos envolvendo a matemática como um todo. Nesse sentido, as idéias pré-helênicas acerca da aritmética e, sobretudo da associação desta com a geometria repercutiram bem na escola de Pitágoras. Os babilônios e os egípcios tinham submetido os números a uma interpretação meramente instrumental ligada as mensurações espaciais e as demarcações temporais, mas os pitagóricos tinham percebido naquele empreendimento a possibilidade de enriquecê-lo logicamente. Daí, os pitagóricos provaram que os números tinham também propriedades operacionais indispensáveis para as explicações de quaisquer fenômenos imanentes à realidade física. Desse modo, eles entendiam que o número era a essência primordial do universo. Logo, a identificação do universo com a geometria foi um passo natural no desenvolvimento da idéia de proporcionalidade – implícita nos tratados pré-helênicos – que tinha levado os pitagóricos a concluir que as "relações entre segmentos de linhas de um para outro (e similarmente para áreas e volumes) são expressáveis através das razões de inteiros e, portanto o conceito de razão e proporção tornou-se básico em toda matemática grega" (BOYER, 2004: 4). Embora os egípcios e babilônios tivessem elaborado uma *pré-idéia*[17] de proporcionalidade em suas investigações empíricas, o conceito só atingiria maturidade através de uma sistematização levada a cabo pelos pitagóricos. De acordo com Fleck (2010: 61) "não existe geração espontânea dos conceitos; eles são, por assim dizer, determinados pelos seus ancestrais". Logo, a antecipação pré-helênica da idéia de proporcionalidade foi importante não apenas para a resolução dos problemas de mensuração da época, mas também para o desenvolvimento posterior do conceito na civilização grega na medida em que os pitagóricos identificaram a inconsistência da pré-idéia de proporcionalidade e a reformularam. Ainda que os pitagóricos estivessem familiarizados com a idéia de conectar a aritmética com a geometria, eles trabalhavam apenas no escopo dos números inteiros positivos e consideravam apenas a reta e o círculo como curvas possíveis, por isso o desenvolvimento de uma geometria analítica estava comprometido, devido ás limitações restritivas dos sistemas de idéias dos pitagóricos.

[17] Categoria epistemológica usada por Fleck para demonstrar a ascendência de teorias modernas em noções do passado. Para Fleck, a pré-idéia se manifesta de uma forma um tanto vaga e sem qualquer legitimação teórica, na medida em que o seu valor "não reside em seu conteúdo lógico e objetivo, mas unicamente em seu significado heurístico enquanto potencial a ser desenvolvido" (FLECK, 2010: 67). Trata-se, portanto, de um conceito em aberto, pois não há de imediato, uma legitimação própria para ele e por isso é difícil, senão impossível, validar ou negar a sua real autenticidade.

Essa situação entendida por Fleck como *fase clássica*[18] de um estilo de pensamento iria se modificar gradualmente em meados do século V a.C. mediante o surgimento de uma série de problemas[19] que contrastavam com os pressupostos epistemológicos da fase dedutiva da matemática instaurada por Tales e Pitagóras no século VI a.C.. A segunda metade do século V.a.C. é nomeada por Boyer (2004: 21) de idade heróica da civilização helênica devido ao número considerável de investigações levantadas – em oposição ao estilo de pensamento dominante – que viriam a ser fundamentais aos desdobramentos futuros da matemática, especialmente no que diz respeito a formalização do método analítico na academia platônica que é a principal conseqüência favorável a geometria analítica notada por Boyer (2004: 5). Boyer como um adepto da interpretação internalista na história da matemática não perde a oportunidade de argumentar que as contribuições matemáticas da idade heróica "não eram o resultado de problemas em ciência natural ou tecnologia, mas elas eram motivadas em vez disso por dificuldades puramente filosóficas ou teóricas" e daí ele arremata que "desenvolvimentos importantes em matemática não são necessariamente relacionados ao mundo do trabalho ou as necessidades materiais do homem" (BOYER, 2004: 6).

Ele inicia a discussão sobre a idade heróica apresentando a crítica de um representante da escola de Eléia direcionada ao sistema de idéias dos pitagóricos que deu inicio a uma *fase de complicações*[20]. Os pitagóricos acreditavam num universo composto por uma multiplicidade infinita de pontos dispostos ordenadamente e em movimento constante e isso contradizia a concepção de uma unidade permanente do universo defendida pelos filósofos de Eléia. Um dos representantes destacados da escola de Eléia foi Zenão que negava a idéia de uma multiplicidade em proporção com os números e as medidas. Através de quatro paradoxos – conhecidos como dicotomia, Aquiles, flecha e estádio – o eleata procurou partir das posições defendidas pelos pitagóricos, procurando mostrar que tais posições levariam ao absurdo, por essa razão elas seriam então refutadas. Nos dois primeiros paradoxos Zenão refutou a possibilidade de uma divisibilidade infinita do espaço-tempo e nos dois últimos ele contestou a possibilidade de uma divisibilidade finita do espaço-tempo em pontos indivisíveis. Os argumentos de Zenão expunham a fragilidade da matemática grega, sobretudo da escola de Pitágoras em tratar com os conceitos de infinito, continuidade e limite que

[18] Segundo Fleck (2010: 69-81), a fase clássica é um período na qual as investigações do coletivo de pensamento são coordenadas pelo estilo de pensamento vigente – que detém grande autoridade sobre os membros do coletivo – mediante a chamada *coerção de pensamento*. Esta coerção promove uma tendência à permanência do sistema de idéias, o que levou Fleck a caracterizar essa situação de *harmonia das ilusões*, na medida em que "qualquer contradição parece ser impensável ou inimaginável" (FLECK, 2010: 70) e mesmo diante da inovação o coletivo de pensamento "reinterpretará tudo conforme o estilo" (FLECK, 2010: 74).

[19] Os problemas levantados na idade heróica podem ser sintetizados nos paradoxos de Zenão, na descoberta de grandezas incomensuráveis, nos problemas clássicos da geometria e na discussão de métodos infinitesimais, todos esses problemas influíram na orientação matemática levada a cabo pelos discípulos de Platão em direção ao desfecho dessas questões.

[20] Segundo Fleck (2010: 50 e 71), a fase das complicações é um período em que as contradições de um estilo de pensamento vêm à tona, mas não são ainda capazes de provocar mutações no sistema de idéias do coletivo de pensamento.

no momento estavam definidos de forma bastante vaga. Eles também mostravam uma ambigüidade entre os mundos da razão e da experiência, mas a soma desses fatores pouco repercutiu nas atitudes dos pitagóricos que iriam apenas desconsiderar da matemática qualquer suposição de uma aritmética contínua, bem como de uma variável algébrica.

De qualquer forma, os pitagóricos retratavam a aritmética como a ciência que estudava as propriedades dos números inteiros positivos e como estes representavam um conjunto discreto não havia possibilidades das idéias de continuidade e variabilidade emergirem numa linha de pensamento que não encarava as frações como entes numéricos, mas antes como relações ou razões envolvendo dois números inteiros. Logo a ênfase pitagórica em torno da teoria das proporções foi um entrave para o desenvolvimento de conceitos matemáticos apropriados ao preenchimento das lacunas aritméticas entre dois números inteiros e por isso os paradoxos não tinham sido suficientes[21] para abalar ou pelo menos contestar a rigidez da harmonia das ilusões do sistema de idéias dos pitagóricos, mesmo porque todo "sistema fechado e em conformidade com o estilo não está imediatamente acessível a qualquer inovação: ele reinterpretará tudo conforme o estilo" (FLECK: 2010: 74).

Outro evento aparentemente em sincronia com as argumentações de Zenão foi á descoberta de certo impasse entre a aritmética e a geometria da parte de um discípulo de Pitágoras chamado Hipassus. Para compreendermos melhor as conseqüências dessa descoberta é necessário informar que antes da sua revelação os pitagóricos acreditavam que a aritmética regia todas as leis da geometria e mesmo das demais ciências da natureza sendo que a teoria das proporções era o principal exemplo dessa supremacia numérica. Essa teoria admitia que todas as grandezas naturais eram comensuráveis. No entanto, a diagonal de um quadrado, por exemplo, não é comensurável com o seu lado, visto que não há uma grandeza comum a estas duas anteriores que possa exprimir a razão entre elas mediante uma razão entre dois números inteiros. Esta contradição é apenas uma das possibilidades[22] apresentadas por Boyer (2004: 7) que poderiam ter levado Hipassus a concluir que os números inteiros não eram suficientes para mensurar todos os segmentos de reta. As circunstâncias reais que contornaram essa descoberta são desconhecidas, mas Hipassus foi quem abriu a caixa de Pandora e vazou as informações e por isso ele tinha sido condenado ao naufrágio pelos pitagóricos. A incomensurabilidade de linhas tinha desestruturado o estilo de pensamento da

---

[21] Embora os paradoxos não tivessem condições de abalar a estrutura teórica da escola pitagórica é razoável admitir que os discípulos de Pitágoras tivessem descartado a possibilidade de tratar as idéias de infinito, limite e continuidade de maneira lógica, mas como a suposição da multiplicidade de pontos enumeráveis na estrutura da matéria era um postulado de natureza mística, então era obvio que ele não precisava de provas. De qualquer forma a possibilidade de aceitar a existência dos números irracionais de maneira natural daqui em diante seria improvável.

[22] Boyer (2004: 7) considera que a descoberta da incomensurabilidade entre grandezas pode ter resultado também da não interrupção do equivalente geométrico do processo de determinação do maior divisor comum entre dois números inteiros, ou ainda do método por absurdo – elaborado por Aristóteles – no qual se duas grandezas são sempre comensuráveis então um número inteiro pode ser ao mesmo tempo par e impar.

filosofia pitagórica e da própria matemática grega como um todo, mas esse conflito "podia ter sido contornado pela introdução dos processos infinitos e os números irracionais, mas os paradoxos de Zenão bloquearam este caminho. Portanto os gregos eram levados por Zenão e Hipassus a abandonarem a perseguição de uma aritmetização completa da geometria (...)" (BOYER, 2004: 7).

Perante as circunstâncias, a filosofia dos pitagóricos se encontrava muito desgastada, e não era para menos, pois nunca tinha sido tão ultrajada. A inconfidência de Hipassus juntamente com os paradoxos de Zenão foram dois ventos fortes que apagaram a chama que ascendia os ideais da escola de Pitágoras tais como "tudo é número" ou ainda que "relações entre segmentos de linha de um para outro (...) são expressáveis através das razões de inteiros" (BOYER: 2004: 4). Desse modo, com a derrocada dos princípios da escola de Pitágoras o estilo de pensamento da matemática grega deu margem a diversas mutações. Houve naturalmente um desligamento da geometria com a aritmética, já que esta não dava conta de suprir as necessidades daquela em razão da sua condição discreta e assim "os dois campos eram irreconciliáveis" (BOYER: 2004: 7). A insuficiência dos números no tratamento das grandezas começou a tomar forma nos enunciados dos problemas clássicos – que seduziram os matemáticos da idade heróica – os quais exigiam a construção de linhas ao invés do cálculo de grandezas. Devido à incomensurabilidade das grandezas, os matemáticos gregos eram obrigados a criar uma válvula de escape para o seu uso no tratamento dos problemas de mensuração e a solução partiu da idéia de desvencilhá-las dos números de tal modo que daqui em diante "Comprimento, área, e volume não eram números ligados a uma configuração dada; eles eram conceitos geométricos indefinidos" (BOYER: 2004: 7-8). Mas a substituição dos cálculos numéricos por construções geométricas tinha sido gradual e por isso na época de Tales e Pitágoras a subordinação da geometria a aritmética tinha adquirido em um dado momento restrições no campo das equações quadráticas que passaram a ser resolvidas geometricamente pelo método de aplicação das áreas ao invés do método algébrico-numérico sugerido pelos babilônios. E a verdade é que após a eclosão da incomensurabilidade, esta restrição se transformou numa abordagem geral a tal ponto que a geometria atingiu uma determinada consistência por si mesma e o discreto foi substituído completamente pelo contínuo no imaginário coletivo da época. Desse modo a álgebra grega que estava até então vinculada à síntese do método de aplicação de áreas não teria daqui para frente – no âmbito da matemática grega – sequer uma chance de se libertar da hegemonia geométrica que se instalava no imaginário coletivo. Essa instalação, como já foi apontado, não foi uma ruptura antes e depois do momento em que se percebeu a existência dos incomensuráveis, mas surgiu de maneira gradual a partir da resolução geométrica das equações quadráticas pelos pitagóricos – mediante o método da aplicação das áreas. Na opinião de Boyer (2004: 9, grifos do autor) "Provavelmente uma das razões principais para os gregos não terem desenvolvido uma *geometria algébrica* é que eles estavam limitados por uma *álgebra geométrica*".

A esta altura, as condições restritivas impostas pelos paradoxos e as razões incomensuráveis tinham dificultado o desenvolvimento de uma geometria analítica, mas em contra partida a investigação coletiva dos problemas clássicos – a quadratura do circulo, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo – tinha seguido imune a esses eventos anômalos ao estilo de pensamento dominante e assim criou condições favoráveis ao desenvolvimento da geometria analítica já que “a busca por novos lugares foi o crescimento direto dessas questões” (BOYER: 2004: 9). Todos esses problemas relacionavam-se a mensuração de figuras e por isso eles tinham marcas remanescentes da época dedutiva da matemática, pois “em cada estilo de pensamento há sempre traços da descendência de muitos elementos da historia evolutiva” (FLECK, 2010: 150).

> Os gregos tinham uma fascinação peculiar pelo circulo e pela linha reta, e sobre estas duas figuras eles tinham buscado construir tudo na ciência e na matemática. A apoteose da régua e dos compassos tinha representado um enorme papel no desenvolvimento da matemática; mas favoreceu a geometria sintética à custa da análise. Felizmente, entretanto os três problemas famosos são irresolúveis sobre a restrição clássica, um fato que motivou a busca por, e a descoberta de, outras curvas. (BOYER: 2004: 11)

Os pressupostos teóricos remanescentes da época de Pitágoras e Tales impossibilitavam a resolução dos três problemas, com isso os matemáticos da idade heróica seriam – aos poucos – incentivados a burlar as regras mediante a criação de técnicas alternativas de construção geométrica que desempenharam um papel decisivo na descoberta de novas curvas. Inicialmente, houve aqueles que estavam ligados ao estilo de pensamento dos antepassados e persistiram em usar a régua não graduada e o compasso na tentativa de darem uma construção rigorosa aos problemas e por esse motivo não tiveram qualquer êxito como foi o caso de Anaxágoras – um discípulo de Tales – que tentou quadricular o círculo “enquanto estava na prisão, presumivelmente sem sucesso” (BOYER, 2004: 9). Por outro lado, Hipócrates – que foi durante algum tempo um pitagórico – tinha conseguido avanços consideráveis em quadratura de áreas curvilíneas usando as regras convencionais. Sua primeira quadratura bem-sucedida foi à da luna. Ele tinha mostrado que a área desta figura – limitada por arcos circulares – era exatamente igual à de um triângulo e para alcançar este resultado, como de outras quadraturas curvilíneas, ele tinha se servido de um teorema que comparava as áreas dos círculos com os quadrados dos seus diâmetros com o auxilio de proporções. No entanto este teorema só foi demonstrado rigorosamente pelo método de Exaustão de Eudoxo no século IV a.C.. Logo, é provável que Hipócrates não tivesse alcançado tal demonstração rigorosa com os recursos[23] disponíveis na sua época. De qualquer forma, sua investida foi importante para comunicar ao imaginário coletivo de que a quadratura do circulo era possível, mas a resolução dessa questão – tal como a da duplicação e da trissecção – só poderia mesmo ser alcançada com o abandono das ferramentas tradicionais.

Os primeiros passos nesse sentido foram dados por Hípias, o sofista que tinha recorrido a procedimentos mecânicos para introduzir uma nova curva no cenário geométrico grego – possivelmente[24] para solucionar o problema da trissecção – que ficou conhecida historicamente como quadratriz. Este nome se deve ao fato de que mais tarde Dinostratus – um discípulo de Platão – mostrou que a curva de Hipías era válida também para quadricular o circulo. Lamentavelmente, Hípias e seus contemporâneos não despertaram para descobrir outras curvas além da quadratriz, mas a idéia de lugar estava já amadurecendo no imaginário coletivo e no próximo século outras curvas tornar-se-iam conhecidas não só pelo método cinemático – recém-descoberto por Hípias – como também pelo método estereométrico que estava por vir. Dentre os problemas que despontaram no imaginário coletivo da época, Boyer (2004: 12) assegura que a duplicação do cubo "desempenhou o maior papel no desenvolvimento da geometria analítica (...)". Depois de muitas tentativas frustradas[25] por parte dos gregos, Hipócrates foi o primeiro a contribuir significativamente para a resolução do problema ao verificar que o mesmo poderia ser reduzido[26] ao das médias proporcionais. Naquela altura, porém, ele[27] não tinha métodos disponíveis para efetuar tal construção. Mas a dedicação de Hipócrates foi compensada depois por Arquitas, o amigo de

[23] A época de Hipocrates não tinha a disposição uma teoria reformulada das proporções válida para grandezas tanto comensuráveis quanto incomensuráveis e por isso a demonstração deste teorema mostrar-se-ia inválida com a descoberta da incomensurabilidade. Assim, Boyer (2004: 11) considera que Hipócrates concluiu "erroneamente, que a quadratura exata do círculo era possível".

[24] Boyer (2004: 11) não afirma diretamente que a quadratriz originou-se do problema da trissecção – pois caso contrário ela seria batizada de trissectriz ao invés de quadratriz. Na realidade o autor (2004: 12) apenas supõe que essa foi a sua origem, senão ele não teria afirmado que na historia da matemática grega as "curvas não eram buscadas e estudadas em e por si mesmas, mas apenas na medida em que elas possuíam propriedades úteis para a solução dos problemas" (BOYER, 2004: 34). Logo é provável que Hípias tenha mesmo criado a quadratriz com o objetivo de resolver "todas as questões de multiseção, incluindo a da trissecção" (BOYER: 2004: 11) que vigoravam na sua época.

[25] Segundo Boyer (2004:12) existe uma lenda segundo a qual os atenienses teriam consultado certa vez o oráculo de Apolo, em Delos, na expectativa de um socorro perante a uma praga que vinha devastando a população. O oráculo teria solicitado aos atenienses para duplicarem o altar de Apolo que possuía o formato de um cubo. Os atenienses de prontidão multiplicaram as dimensões do altar por dois, mas a peste não foi abolida. Na realidade o volume do altar havia sido multiplicado por oito, ao invés de dois. Independente das segundas intenções do oráculo, o fato é que devido a essa lenda, o problema que consistia em encontrar uma construção geométrica da aresta de um cubo cujo volume fosse o dobro de um cubo dado, ficaria conhecido depois como problema deliano.

[26] Segundo Boyer (2004: 12) Hipócrates mostrou que o problema da duplicação de um cubo de lado a é análogo ao problema da determinação de dois meios proporcionais x e y entre a e $2a$, isto é: se $a:x = x:y = y:2a$ é fácil verificar – pela nossa linguagem, não na de Hipocrates – que $x^3 = 2a^3$ donde x é o lado do cubo desejado.

[27] Em compensação, a estratégia lançada por Hipócrates tornava possível transitar de um problema complexo para outro mais simples ou em maior conformidade aos pressupostos coletivos nos quais a teoria das proporções tinha prioridade. A função dessa teoria era um pouco "equivalente ao uso moderno de equações como expressões de relações funcionais, embora muito mais restrita, e por dois milênios serviu como a ferramenta algébrica principal da geometria" (BOYER: 2004: 5). Desse modo, o raciocínio de Hipócrates é uma antecipação da análise geométrica grega – que Platão viria a formalizar mais tarde – que seria de grande inspiração para os procedimentos futuros da geometria analítica que permitiriam transformar os problemas de geometria naqueles de álgebra.

Platão, que no inicio do século IV a.C. tinha atacado o problema das médias proporcionais mediante construções que culminaram na interseção de três superfícies de revolução – o cone, o cilindro e o toro.

As contradições e os problemas de natureza matemática levantados na segunda metade do século V a.C. proporcionaram o desenvolvimento de “exceções” ao estilo de pensamento dominante que foram determinantes para alavancar a investigação coletiva de soluções – que atravessaram o século em questão – aos problemas impostos ao imaginário coletivo da época. Essas exceções ao estilo de pensamento dominante abalaram gradualmente a rigidez da harmonia das ilusões do sistema de idéias do coletivo de pensamento na medida em que as soluções – para tais exceções – contribuíram para ampliar e substituir os pressupostos epistemológicos aceitos até então. O refinamento gradual das soluções dos problemas clássicos ampliou o número de lugares conhecidos em relação à reta e o circulo e as construções mecânicas e esteriométricas surgiram como alternativa as esses “novos lugares” que não eram construídos segundo as convenções tradicionais. Essas soluções alternativas de definição de curvas encontraram inicialmente algumas dificuldades de serem implantadas na linha de pensamento que estava se desenvolvendo na academia de Platão – fundada por ele mesmo em Athenas em meados do século IV a.C..

Durante o tempo em que Platão dirigiu a academia, as investigações em matemática eram guiadas pelo seu pensamento filosófico[28] cujos princípios “não se encontravam na direção da geometria analítica” (BOYER: 2004: 13). Platão tinha dado uma ênfase especial à régua não graduada e ao compasso, vistos até então, como instrumentos aceitáveis na linha de pensamento seguida por seu amigo e instrutor Arquitas. Mas esta linha de pensamento tradicional estava sendo aos poucos descosturada pelas resoluções dos problemas clássicos que atraíram a atenção dos estudantes da academia. O próprio Platão se dedicou ao problema deliano e a sua resolução envolveu procedimentos mecânicos contrariando a sua obstinação excessiva em torno da régua e do compasso, mas ele nunca abriu mão dos seus pressupostos teóricos e essa sua empreitada deve ser considerada acidental, já que “em geral Platão condenou o uso de ideias mecânicas em geometria com a alegação de que estas tendem a materializar um assunto [a geometria] que ele pensava que pertencia ao reino das ideias eternas e incorpóreas” (BOYER: 2004: 13, grifo nosso).

Boyer acredita que as restrições de Platão para as curvas a não ser a reta e o circulo mostram que ele impediu o desenvolvimento da geometria analítica de um lado, mas favoreceu de outro, na medida em que a sua formulação do caminho das descobertas dos teoremas – hoje conhecido como

[28] Na realidade, no tempo de Platão as abordagens mecânicas e esteriométricas no estudo de curvas estavam ainda engatinhando e era natural que Platão não tivesse interesse de incorporá-las na sua filosofia, mas para a régua e o compasso que eram instrumentos consolidados no momento, embora mecânicos em essência, ele achou um subterfúgio para incorporá-los em sua filosofia – nas quais muitas idéias tinham ascendência pitagórica em virtude da sua relação amistosa com Arquitas.

método analítico – foi uma ferramenta heurística poderosa na qual a geometria analítica iria herdar não só o seu nome, como também os seus procedimentos. O método analítico não é uma invenção exclusiva de Platão, pois o procedimento faz parte da própria natureza da matemática e por isso remonta a épocas anteriores, entretanto Boyer (2004:14) assegura que Platão "deu atenção particular aos princípios e métodos da matemática, e por isso é provável que ele formalizou e apontou as limitações do procedimento analítico". A análise de Platão era um procedimento heurístico que consistia em supor válido o teorema que se quer demonstrar, e por meio de verdades já demonstradas deduzir outro teorema conhecido, de tal maneira que se a ordem deste processo puder ser invertida, o teorema proposto é demonstrado. Naturalmente, o processo inverso é a síntese que consistia em partir de uma verdade conhecida para deduzir, mediante passos sucessivos, a verdade que se quer demonstrar. Boyer (2004: 14) acredita que a ordem de passos referente ao método analítico não é a principal razão pela qual a "geometria de coordenadas agora é conhecida como geometria analitica" já que o significado da palavra análise foi relativizado conforme o decorrer dos tempos. De fato, o próprio Aristóteles depois de Platão deu um parâmetro silogístico à análise matemática e na atualidade o seu conteúdo difere não só de Aristóteles como também de Platão se encontrando ligado a técnicas simbólicas, mas na época de Platão "não havia álgebra formal; mas quando, quase dois mil anos depois, o método analítico de Platão veio a ser aplicado as formas primitivas da geometria algébrica, então a invenção da geometria analítica rapidamente veio a tona" (BOYER, 2004: 14-15).

Dos problemas discutidos na época de Platão, a incomensurabilidade de grandezas foi aquele que mais desafiou a imaginação dos gregos em razão da dificuldade perplexa de lidar com o irracional no tratamento proporcional dos objetos planos e espaciais. Na configuração estilística do momento esse problema indicava um viés geométrico para a readequação da teoria das proporções dos antigos aos pressupostos dominantes. Assim os gregos buscaram e depois conseguiram desenvolver uma teoria[29] – para lidar com o irracional a nível proporcional – que se baseava no equivalente geométrico de achar o maior divisor comum. Por volta de 375 a.C., esta teoria estava em uso na Grécia, mas a sua definição mostrou não ser aplicável aos estudos de mensuração de figuras. Essa limitação levou Eudoxo – em aproximadamente 370 a.C. – a elaborar uma definição mais geral, para as proporções que serviu de trampolim para a criação do método de Exaustão, o qual permitiu comparar grandezas geométricas de quaisquer espécies, segundo o enunciado abaixo:

[29] Segundo Boyer (2004: 16), a definição dessa teoria é a seguinte: duas medidas estão na mesma razão na hipótese delas possuírem a mesma subtração sucessiva mútua, ou seja, Boyer entende que o raciocínio é análogo ao processo de divisão sucessiva no algoritmo de Euclides para o maior fator comum de duas quantidades. Boyer conclui a sua explicação com o seguinte exemplo: se as bases de dois retângulos de mesma altura são comensuráveis ou incomensuráveis, então a razão das bases é igual à razão das áreas visto que a aplicação sucessiva das bases em um caso de subtração mútua corresponde diretamente à aplicação das áreas no outro.

> Dizemos que quatro grandezas estão na mesma razão, a primeira para a segunda e a terceira para a quarta, quando, tomando quaisquer equimúltiplos da primeira e da terceira, e tomando quaisquer equimúltiplos da segunda e da quarta, os primeiros equimúltiplos excedem, são iguais ou são menores que os últimos equimúltiplos tomados na ordem correspondente. (BOYER: 2004: 16)

A supremacia da geometria na configuração estilística do momento é confirmada no enunciado acima no qual as grandezas geométricas – envolvidas na relação proporcional – são interpretadas em si mesmas, visto que a “noção algébrica de uma variável contínua não tinha sido desenvolvida” (BOYER: 2004: 10). O método da Exaustão era conveniente para demonstrar sinteticamente muitos resultados específicos envolvendo relações proporcionais de figuras curvilíneas e retilíneas, mas não possibilitava a descoberta analítica dos procedimentos envolvidos nesses resultados. Para Boyer (2004: 17) esta ênfase ao aspecto sintético-dedutivo tornava difícil o estabelecimento de um estudo analítico geral de curvas por meio de “funções analíticas de variáveis continuas”, já que nessa linha de pensamento não era aceitável “formular o principio do método como uma proposição geral, referência que podia servir para abreviar demonstrações subsequentes”. Em todo caso, a teoria das proporções resistiu à crise instaurada pela incomensurabilidade e por quase dois mil anos a matemática foi sustentada algebricamente pela “ideia de proporcionalidade em vez da noção mais geral de função” (BOYER: 2004: 5).

A maior de todas as invenções da academia platônica foi sem dúvida a das seções cônicas que depois ficariam conhecidas como elipse, hipérbole e parábola, aquela tornar-se ia fundamental para Képler vislumbrar mais tarde as leis que regem o movimento dos planetas, enquanto esta seria importante para Galileu descobrir depois o caminho dos projéteis. A tradição[30] atribui a Menaecmo – irmão de Dinostratus e tutor de Alexandre Magno[31] – o descobrimento dessas curvas que na opinião de Boyer (2004:17) representam “a contribuição mais espetacular da época para o desenvolvimento da geometria analítica”. O termo *seções cônicas* alude á forma com que

[30] No entanto, Urbaneja (2010: 39) explica que embora a tradição – em especial Proclos e Eutócio (480 – 540 d.C.) – tenha atribuído a descoberta das seções cônicas a Menaecmo em aproximadamente 350 a.C., é possível que Arquitas de Tarento, por volta de 400 a.C., tivesse descoberto as seções cônicas antes do tutor de Alexandre magno, mediante a sua resolução tridimensional do problema deliano. Em tal caso, o instrutor de Platão obteve as médias proporcionais – propostas por Hipócrates – através de uma interseção complexa envolvendo três figuras sólidas, um cone de revolução, um cilindro de revolução e uma superfície tórica. Para Urbaneja, Arquitas pode ter estudado perfeitamente a elipse como uma seção oblíqua do cilindro. Aliás, Boyer (2004: 17) compartilha dessa mesma opinião, mas ele acredita ainda que a elipse possa ter sido descoberta em outra orientação. Nessa perspectiva, Democritus em sua geometria infinitesimal talvez tenha notado a elipse no seu estudo das seções circulares de um cone, ainda que não tenha nenhuma evidencia histórica que ele pensou assim.

[31] Conforme Bicudo (2009: 44), um dos autores da *História da Geometria* – organizada por Eudemo na antiguidade – de nome Staboeus, tinha relatado um diálogo semelhante ao de Ptolomeu I e Euclides envolvendo o imperador Alexandre Magno e o geômetra Menaecmo. Para a autora, esses diálogos são lendas que tem o objetivo de metaforizar “o fato de a geometria ter de ser aprendida sistematicamente, passo a passo, seguindo o trajeto exposto nos Elementos”.

Menaecmo resolveu o problema deliano mediante uma família de curvas descortinadas através do corte de três cones circulares retos por um plano perpendicular as suas geratrizes. Conforme a natureza do ângulo do vértice desses três cones – se agudo, reto ou obtuso – Menaecmo determinou[32] as três curvas distintas que são conhecidas hoje como *tríades menaecmianas*. Daí com o auxilio da teoria das proporções ele conseguiu deduzir que o ponto (x, y) que satisfaz o problema deliano – transformado pela análise hipocrática em problema das médias proporcionais – é a interseção das parábolas $x^2 = ay$ e $y^2 = 2ax$ que foram obtidas diretamente da proporção $a:x = x:y = y:b$ sugerida por Hipócrates. A abscissa do ponto de interseção seria a medida do lado do cubo dobrado, isto é: $x = a\sqrt[3]{2}$. Utilizamos uma interpretação anacrônica nos moldes da geometria analítica atual para ilustrar uma das duas[33] possíveis soluções que Menaecmo forneceu para o problema, mas em todas elas, sabemos que ele tinha utilizado os conhecimentos geométricos disponíveis na academia platônica para definir as propriedades das suas curvas e por esse motivo “o caminho foi dificultado pela falta de ideias algébricas e simbolismo”, o que engrandece ainda mais a sua descoberta dado que “um extraordinário grau de originalidade seria necessário para Menaecmo conceber o equivalente de tudo isso em forma geométrica (...)” (BOYER, 2004: 18). Os vestígios do seu trabalho agora perdidos mostram que realmente esse foi o seu modo de atuação, a prova disso é que Boyer nos informa que alguns historiadores como Zeithen e Colidge afirmavam que a descoberta da geometria analítica se deve a Menaecmo já que a essência desse ramo da matemática é “o estudo de lugares por meio de equações, e que isto era conhecido pelos gregos e era à base de seus estudos das seções cônicas. O descobridor original parece ter sido Menaecmo” (COLIDGE apud BOYER, 2004: 20).

Boyer rebateu com naturalidade essas afirmações infundadas de Colidge ao mostrar que os gregos, em particular Menaecmo, não poderiam ter descoberto a geometria analítica por conta de uma serie de limitações[34] impostas pelo caráter geométrico-sintético da matemática grega e, especialmente pela falta de uma álgebra simbólica que é uma ferramenta imprescindível da

[32] Para Boyer (2004: 19) há autores que sugerem que Menaecmo observou as cônicas, a principio, como lugares planos construídos de forma cinemática tal como a quadratriz de Hipias e a espiral de Arquimedes. No entanto, Boyer explica que esta origem planimétrica das cônicas é incompatível com a classificação grega dos problemas sólidos, isto é, aqueles problemas que necessitavam de cônicas para sua resolução, o que aponta, obviamente, para uma origem esteriométrica e não planimétrica das cônicas.
[33] Conforme Boyer (2004: 18) a outra solução envolvia a interseção da parábola $x^2 = ay$ com a hipérbole $xy = 2a^2$.
[34] Segundo Boyer (2004: 20) essas limitações impostas pelo caráter sintético da matemática grega, em especial da álgebra, fizeram com que “meia duzia de novas curvas em toda a sua enorme atividade matemática” fossem descobertas e ainda assim elas “não eram sistematicamente classificadas” e mais do que isso, as suas propriedades geométricas não eram definidas independentemente do contexto geométrico, de modo que esse caráter subsidiário das propriedades geométricas fez com que os gregos não pudessem transitar delas para as curvas de forma similar com que eles transitavam das curvas para essas propriedades e isso, portanto dificultou o desenvolvimento de uma geometria analítica no seu significado geral de uma conexão recíproca entre curvas e equações. Além do mais, para se desenvolver uma teoria geral de curvas os gregos teriam que dispor de uma álgebra simbólica que tivesse em condições de completar as lacunas aritméticas da teoria das proporções que no momento era impossível por conta do horror ao infinito provocado pela incomensurabilidade.

geometria analítica a qual permite “uma mútua correspondência entre curvas e equações” (BOYER, 2004: 20).

No decorrer da era helênica – especialmente na idade heróica – a matemática havia alcançado um alto grau de aperfeiçoamento que estabeleceu as bases para as investigações futuras. Na era helenística que teve início no século III a.C. a matemática alcançaria resultados estupendos em conseqüência dos desenvolvimentos anteriores. Ainda assim, não houve fatos significativos para desequilibrar o sistema de idéias do coletivo de pensamento e a geometria continuou sendo o parâmetro da matemática grega. Em pouco mais de um século despontariam no cenário intelectual de Alexandria – que tomava o lugar de Atenas devido á expansão imperial – três matemáticos que inaugurariam a idade dourada da matemática.

Esta fase inicia com Euclides, um geômetra que viveu em Alexandria e que ficou conhecido por ter coletado todo o conhecimento de seus predecessores a fim de garantir a organização da matemática em um todo. Este projeto intelectual foi executado na obra *Elementos* que reuniu todos os princípios elementares da matemática helênica apresentados de forma sistemática mediante um estilo sintético de exposição que fazia conhecer as suas vias apodíticas ao mesmo tempo em que ocultava quaisquer “sugestões para futuros desenvolvimentos em metodologia” (BOYER, 2004: 21). De acordo com Boyer (2004: 21) os *Elementos* tinham “exercido uma influência mais ampla do que qualquer outro trabalho matemático jamais excrito”, mas o seu conteúdo “não estava essencialmente na direção da geometria analitica”, uma vez que Euclides ocultava á idéia diretriz das suas investigações além de ter desenvolvido uma geometria[35] fora do âmbito da aritmética que revelava o modelo estilístico da matemática da época na qual a síntese era enfatizada à custa da análise[36]. Mas o sábio alexandrino também tinha escrito outros tratados – que se encontram agora perdidos – provavelmente na direção da geometria analítica e que foram estudados e comentados por Pappus no *Tesouro da Análise* – o sétimo livro da sua *Coleção Matemática*. Um desses tratados cobria o estudo das seções cônicas e foi uma das primeiras obras sobre o assunto. Outro tratado euclidiano estudado por Pappus foi os *Porismas* e o seu desaparecimento é o mais lamentável já que

[35] Boyer (2004: 21-22) considera que os *Elementos* não contêm apenas tópicos de geometria elementar, mas também “seções extensas sobre a aplicação da geometria para o que hoje seria conhecido como álgebra.” Desse modo, Euclides resolveu geometricamente as equações quadráticas mediante o método de aplicação das áreas cuja ascendência é possivelmente pitagórica. Merece relevo a observação de Boyer de que o traçado de um polinômio do segundo grau no plano cartesiano nada mais é de que uma extensão do método de aplicação de áreas, pois esta abordagem atual tinha surgido “através de modificações graduais de tais construções geométricas antigas”. Aqui, Boyer se aproxima bastante da visão evolucionária do desenvolvimento da ciência defendida por Fleck na qual uma idéia inicialmente vaga atua como diretriz do desenvolvimento da ciência, ainda que em tal caso o método das áreas tivesse uma legitimação conteudista – e não popular conforme a epistemologia de Fleck.

[36] Euclides – tal como Eudoxo e outros discipulos de Platão– tinha feito uso do método analitico “em conexão com a divisão de uma linha em média e extrema razão, mas tal insinuação de um ponto de vista geral era ofuscada por uma ênfase sobre construções geométricas especiais” (BOYER, 2004: 22). Assim, o alexandrino também acompanhou Eudoxo na sua abordagem geométrica da teoria das proporções.

é bem provável que este apresentava um tipo de geometria analítica primitiva[37] em que as propriedades geométricas das curvas tinham o papel das atuais equações algébricas e as construções geométricas eram equivalentes às operações da álgebra. O *Tesouro* era uma coletânea abrangendo obras não só de Euclides, mas também de Apolônio e Aristeu e o seu conteúdo era fundamental para "aqueles que, após passarem por uma formação geométrica elementar, desejassem obter habilidade para resolver problemas envolvendo curvas" (BOYER, 2004: 23). A maior parte do *Tesouro* era composta por obras de Apolônio, dentre elas se sobressai os *Lugares Planos* e as *Cônicas* que foram os pontos de partida da futura geometria analítica de Fermat.

Boyer (2004: 23) acredita que as *Cônicas* representavam a "abordagem mais próxima da antiguidade para geometria de coordenadas". Nesse tratado Apolônio reduziu as idéias de Menaecmo, Aristeu e Euclides sobre as cônicas em um sistema completo que não só sistematizou as idéias dos antigos como também as ultrapassou de forma extraordinária. Apolônio provou que de um único cone – independente da sua natureza – pode-se obter os três tipos de cônicas apenas alterando a inclinação do plano que corta o cone. Isto fez com que ele considerasse as cônicas como uma família de curvas e não mais como tríades. Ele ainda modificou as descrições prolixas dos antigos para as cônicas para nomes[38] mais concisos. Apolônio entendeu que as cônicas não deviam mais ser retratadas pelo critério construtivo e a sua mudança de terminologia representava não só um salto semântico como também um salto conceitual na medida em que as cônicas seriam descritas agora mediante igualdade de áreas e essa idéia segundo Boyer (2004:25) "usou a origem esteriométrica das curvas tanto quanto necessário para derivar uma propriedade plana fundamental para cada uma". Para estudar as propriedades das cônicas, Apolônio construiu um sistema de coordenadas com algumas linhas de referência. Ele utilizou um diâmetro conjugado com a cônica que equivalia a uma abscissa – este era medido a partir do ponto de interseção da cônica – e um diâmetro tangente a cônica que representava uma ordenada – este era representado mediante segmentos paralelos á linha tangente. Cada cônica era definida por meio de igualdade de áreas em forma de proporção que representava de forma retórica[39] o *sintoma* da curva, isto é, a relação

[37] Boyer (2004: 23) considera que os títulos dos trabalhos perdidos de Euclides por si só mostram que a "geometria antiga é comparável em aplitude de interesses com aquela do século dezessete" e daí a diferença entre as geometrias dos antigos e dos modernos esta no "método e maneira de expressão ao invés do conteúdo" e isso confirma o caráter evolucionário do desenvolvimento cientifico conforme Fleck.

[38] Por exemplo, a seção de um cone de ângulo agudo foi substituída pela elipse, já a seção de um cone de ângulo reto foi substituída pela parábola e a seção de um cone de ângulo obtuso foi substituída pela hipérbole. Todos esses novos nomes estavam fundamentados no método de aplicação das áreas dos antigos. (Cf. Urbaneja, 2003: 42-43).

[39] Apolônio utilizava uma linguagem sintética – própria da álgebra geométrica do livro II dos *Elementos* – e por isso as suas equações retóricas na visão de Boyer (2004:29) "podiam percorrer até a metade de uma página em comprimento, uma comparação desfavorável com a terminologia concisa moderna", mas no sentido mais profundo as equações retóricas e simbólicas podem ser consideradas semelhantes pois representavam igualmente propriedades especificas de uma curva, mas por outro lado os gregos não tinham desenvolvido o conceito de variável – por conta do horror ao infinito provocado pela incomensurabilidade – e em razão disso as representações antigas e modernas de curvas não são plenamente iguais em conteúdo, tanto é que em virtude da falta do conceito de variável Apolônio só conseguiu pensar

geométrica entre as abscissas e as ordenadas. As *Cônicas* representavam á abordagem mais próxima da antiguidade para a geometria de coordenadas tanto é que a idéia de *sintoma* no devir histórico incendiaria a imaginação de Fermat que as transformaria em equações simbólicas.

Entre Euclides e Apolônio se encontra Arquimedes, a quem se deve também o estudo das cônicas e a introdução de uma nova curva por meios cinemáticos. Segundo Boyer (2004: 31-32), Arquimedes não escreveu um tratado sobre as cônicas, mas muitas das suas obras envolviam o seu estudo. As suas investigações sobre cônicas concentravam-se sobre problemas de mensuração e não naqueles de lugares geométricos, por essa razão nesse assunto ele tinha contribuído mais para o desenvolvimento do cálculo integral[40] do que propriamente para a geometria analítica. Mas através da descoberta de uma nova curva de nome espiral ele deu também a sua contribuição ao desenvolvimento da geometria analítica. Arquimedes tinha definido a espiral por meios cinemáticos e a sua definição serviria de trampolim para Newton mais tarde inventar as coordenadas polares – uma abordagem diferente das coordenadas cartesianas. Arquimedes tinha usado também a espiral para resolver o problema da trissecção do ângulo e da quadratura do circulo e por isso a sua curva pode ser considerada tanto uma trisectriz quanto uma quadratriz. Outro contemporâneo de Arquimedes que deu a sua contribuição para o desenvolvimento da idéia de lugares, mas por meios estereométricos foi Perseu. Este tinha criado três curvas ovais mediante seções ou cortes de planos paralelos ao eixo de rotação de certas superfícies sólidas – construídas através da rotação de um círculo sobre seu próprio eixo. É provável que Perseu deva ter se inspirado nos tratados de cônicas de Menaecmo, Aristeu e Euclides já que Boyer o localiza entre Euclides e Apolônio. Entre Arquimedes e Apolônio surgiram mais dois matemáticos que contribuiriam também para o desenvolvimento da idéia de lugares. Eles resolveram o problema deliano através da intervenção de duas novas curvas: a conchoide de Nicomedes e a cissoide de Diocles, ambas as descobertas baseavam-se em procedimentos cinemáticos.

---

em termos de linhas e áreas que são noções da analise geométrica, ao passo que os modernos iram raciocinar em termos de números que são noções da analise algébrica. O sistema de coordenadas de Apolônio tinha algumas similaridades com o sistema cartesiano pelo fato de ter abrigado igualmente eixos coordenados que possibilitavam expressar as equações das cônicas, no entanto os eixos referenciais e as equações retóricas eram segundo Boyer (2004:29) "noções subsidiarias derivadas de uma situação geométrica dada" na forma de uma construção estereométrica que sempre tinha prioridade na investigação. Logo as equações eram sempre determinadas após a construção dos eixos coordenados que por sua vez apareciam somente depois da construção da cônica mediante seções de um sólido e daí ás equações acabavam sendo "determinadas por curvas, mas não curvas que são definidas pelas equações" (BOYER, 2004:29). Aliás, este é o principal motivo pelo qual Apolônio não inventou a geometria analítica, embora tenham chegado muito perto disso por ter determinado as equações mediante curvas, no entanto Boyer (2004:29) nos informa que em nenhum momento o pergamiano começava "com um sistema de coordenadas, duas variáveis ou incógnitas, e uma relação ou equação entre as variáveis" e em seguida, traçava "a curva correspondente à equação como o lugar geométricos dos pontos cujas coordenadas são valores das variáveis que satisfaçam a equação dada" e isso prova que Apolônio, de fato não conseguiu alcançar o principio fundamental da geometria analítica nas suas duas vertentes.

[40] Conforme Boyer (2004: 25) Arquimedes tinha optado por definir as cônicas mediante igualdade de razões ao passo que Apolônio preferiu a igualdade de áreas. A abordagem de Arquimedes combinava melhor com a teoria euclidiana das proporções que nos tempos medievais e renascentistas se mostraria conveniente para a representação de relações funcionais. Quanto á abordagem de Apolônio, ela estava mais em harmonia com a álgebra simbólica renascentista de equações e com a associação de curvas e equações da nova geometria do século XVII.

Os gregos tinham desenvolvido duas abordagens eficazes para o estudo das curvas – a esteriométrica e a cinemática – que “eram capazes de generalizações de longo alcance, no entanto apenas uma dúzia de curvas eram familiares aos antigos” (BOYER, 2004: 34), e isso mostra que eles não conseguiram explorar todas as possibilidades que essas abordagens poderiam proporcionar. A exceção das ovais de Perseu e da espiral de Arquimedes, os gregos em geral não se interessavam em estabelecer uma teoria para os lugares lineares[41] ou até mesmo ampliar a lista deles e a classificação desorganizada desses lugares – que mesclava curvas de natureza algébrica e transcendental – comprovava a falta de interesse a respeito. Daí uma teoria geral de curvas não foi cogitada, mesmo porque as “curvas não eram buscadas e estudadas em e por si mesmas, mas apenas na medida em que elas possuíam propriedades úteis para a solução dos problemas (...)’’ (BOYER, 2004: 34). Por essa razão, Boyer (2004: 34) acredita que a “falha dos matemáticos gregos em desenvolver a geometria analítica pode bem ter resultado de uma falta de uma teoria de curvas. Métodos gerais não são necessários nos casos em que problemas se referem sempre a um número limitado de curvas particulares”. A dedicação aos problemas foi o entrave no qual fulminaram as chances gregas de estabelecer as curvas numa base mais consistente. As resoluções dos problemas clássicos tinham instaurado uma época de curiosidades na matemática grega ao possibilitar a descoberta de inúmeras curvas no cenário geométrico limitante dos gregos – que cobria apenas as díades de Platão –, no entanto essa busca desenfreada pelas soluções de problemas á margem das generalizações tiveram o efeito de uma diminuição gradual da criatividade dos antigos que culminaria com o fim da idade dourada e a instalação de um período de decadência na matemática grega que segundo Boyer (2004: 34) “acrescentou pouco a história da geometria analitica”.

Com a ocupação romana de Alexandria, a geração que ornamentou a matemática – da segunda metade do século V a.C. até a primeira metade do século II a.C. – com elementos sintéticos e lógicos próprios do pensamento platônico, se encontrava em extinção e a linha geometrizada do coletivo de pensamento foi gradualmente substituída por uma linha pragmática na qual as matemáticas aplicadas e os estudos isolados de álgebra e aritmética ganhariam espaço nos próximos séculos. Segundo Boyer (2004: 35), no período compreendido entre Hipparchus (150 a.C) e Ptolomeu (150 d.C) surgiu uma idéia de coordenadas com aplicações na astronomia, engenharia e geografia, mas tal como ocorreu com a agrimensura pré-helênica a idéia[42] “parece não ter exercido qualquer influência claramente explicável sobre a ascensão posterior da geometria analítica”

[41] Lugares que não se enquadravam nas díades de Platão – lugares planos – e nas tríades de Menaecmo – lugares sólidos. Grande parte deles eram traçados de forma cinemática.
[42] Nesse trecho percebe-se a diferença metodológica de Boyer e Fleck na qual o primeiro acredita que as idéias científicas não são influenciadas por fatores externos ao conhecimento enquanto que o ultimo defendeu o contrário, mas isso não quer dizer que Boyer seja um idealista revolucionário, pois o seu discurso mostra que ele na realidade foi um idealista evolucionário mesmo fazendo uso da palavra revolução em algumas passagens da sua obra.

(BOYER: 2004: 35). Cabe-nos dizer que esse posicionamento[43] de Boyer não esta em pleno desacordo com a teoria comparada do conhecimento, pois para Fleck (2010: 66) “nem toda idéia antiga que apresenta semelhanças com uma descoberta posterior possui com ela uma relação histórica”. Houve mutações no estilo de pensamento que vigorava até então, pois daqui em diante a matemática passava a ser considerada como um meio para fins práticos e não mais como uma ciência dedutiva com fim em si mesma. Segundo Boyer (2004: 35), uma das figuras representativas da época foi Heron que ficou conhecido por sua ousadia de romper com o principio da homogeneidade euclidiana ao desconsiderar a supremacia geométrica no tratamento das equações e adicionar linhas com áreas. Para realizar tal intento, Heron religou a aritmética com a geometria ao atribuir valores numéricos as grandezas geométricas. Mas a brecha aberta entre a aritmética e a geometria não poderia ser bem aproveitada por um técnico como Herão que representava a disposição natural da época para as matemáticas aplicadas e por essa razão o coletivo de pensamento teve que esperar o surgimento de um especialista em teoria dos números para dar um tratamento final ás essas questões.

No século III d.C. a fogueira que ascendia ás brasas da matemática pura foi reascendida por um matemático de nome Diofanto (250 a.C.) que conseguiu dar uma nova fisionomia a álgebra e foi ainda o responsável pelos primeiros vultos de representações simbólicas que causaram sensíveis mutações no estilo de pensamento da época. Não é por acaso que Boyer (2004: 36) denomina o século de Diofanto de “idade de prata da matemática grega”. Diofanto escreveu a obra *Aritmética* que continha abreviações para as incógnitas e suas potências e para as operações e relações envolvendo equações. Conforme os pressupostos do coletivo de pensamento – que tinham abandonado a linguagem retórico-sintética dos antigos – os símbolos usados por Diofanto para as incógnitas representavam números e não mais segmentos de linhas. Desse modo, ele também tinha acompanhado o abandono coletivo do principio grego da homogeneidade dimensional e por esse motivo “foi fácil para ele [Diofanto] ir além das equações cúbicas e considerar potências da incógnita de expoente até seis, que ele chamou um cubo-cubo” (BOYER, 2004: 35, grifo nosso). Nesse sentido, Diofanto abandonou também o principio da tridimensionalidade que era uma possibilidade – até então não explorada pelo imaginário coletivo – provocada pela suspensão do principio da homogeneidade dimensional. A solução geométrica das equações quadráticas foi substituída por um método aritmético – semelhante aos dos babilônios primitivos – mas as questões estudadas por Diofanto tinham caráter teórico e não se relacionavam com as questões de ordem prática ligadas aos textos cuneiformes. Mesmo que de forma despretensiosa, Diofanto tinha bebido

[43] Na realidade, Boyer (2004: 52) entende que as latitudes e longitudes da astronomia e geografia são precursoras das coordenadas retangulares, não da teoria analítica de curvas e por isso ele desqualifica o pequeno papel das artes práticas na historia da Geometria Analítica – muito por conta da sua adesão a uma historiografia de tendência internalista.

das fontes da matemática babilônica já que as idéias “não são sistemas lógicos (...), mas unidades estilísticas, que se desenvolvem e regridem como tais ou transitam para outras unidades com suas provas” (FLECK, 2010: 70).

No entanto, mais do que um retorno aos métodos babilônicos, Diofanto estava dando continuidade aos valores do imaginário coletivo da época que buscavam desenvolver a matemática numa base aritmético-algébrica – donde a dedução geométrica não era admissível – e por isso ele rompeu efetivamente com as ferramentas até então conhecidas para resolver equações – o método de aplicação das áreas acompanhado do uso da régua e compasso – e isso eleva ainda mais a *Aritmética* por sua originalidade. Mas o estilo de pensamento – da época de Diofanto – não tinha rompido totalmente com todos os pressupostos epistemológicos da fase geometrizada do pensamento matemático, pois a matemática assim como todas as ciências evolui de forma evolucionária segundo Fleck e isso fica evidente nesse trecho da obra de Boyer:

> Os paradoxos de Zenão tinham deixado uma impressão profunda sobre o pensamento grego fazendo com que as idéias de mudança e variabilidade fossem relegadas a metafísica. Medidas geométricas eram estáticas e contínuas, quantidades algébricas eram constantes discretas. Os simbolos das quantidades indeterminadas na Aritmética de Diofanto representavam, portanto, números desconhecidos ao invés de variáveis no sentido da geometria analítica. (BOYER: 2004: 35)

Sendo assim, Boyer acredita que as quantidades indeterminadas das equações de Diofanto foram um empecilho para o desenvolvimento da geometria analítica já que elas representavam incógnitas ao invés de variáveis, no entanto ele ressalta a importância da notação quase-simbólica de Diofanto para o desenvolvimento da geometria analítica já que a “deficiência principal da matemática grega, foi a falta de uma álgebra simbólica independente, e o trabalho de Diofanto é um elo na corrente algébrica dos babilônios até Descartes” (BOYER, 2004: 36). A *Aritmética* teve a sua contribuição no desenvolvimento da geometria analítica, mas em termos de conteúdo estava muito aquém dos tratados lógicos da idade dourada já que a obra se resumia a uma coleção de problemas à moda dos escritos babilônicos. Na época de Diofanto a geometria clássica não tinha prerrogativa nos pressupostos epistemológicos do coletivo de pensamento.

Mas, no final do século III d.C. a matemática assumiu uma nova configuração estilística pautada em aspectos não apenas heurísticos associados ao antigo estilo, mas também em aspectos dedutivos. Nesse sentido, os estudos em geometria voltaram a ser ressaltados, mas ao contrário dos antigos tratados oriundos da fase geometrizada do pensamento matemático – em especial, a idade dourada – o caminho heurístico das investigações geométricas, levantadas nas demonstrações de teoremas e nas resoluções de problemas, era então revelado. Nesta época, se destacou a pesquisa arrojada do geômetra Pappus que propunha coletar todo o conhecimento matemático dos antigos, tal qual o seu conterrâneo Euclides tinha feito, mas de uma forma bem mais completa e coerente que abarcava praticamente todos os ramos da matemática. No entanto, Pappus não era um matemático à altura de um Apolônio ou Arquimedes, tanto que ele não se propôs a escrever um tratado original de matemática, pelo contrário, a sua obra *Coleção matemática* era um conjunto de tópicos condensados da matemática clássica com alguns suplementos envolvendo novos resultados e generalizações de teoremas existentes. Logo, Boyer (2004: 36) afirma que Pappus "não fez nenhum notável novo avanço no método, seu papel sendo apenas de um organizador e comentador" das principais obras clássicas. Quis o destino que algumas dessas obras viriam a se perder no decorrer dos tempos, e daí vem o mérito da pesquisa de Pappus, pois a coleção "é agora a principal fonte de informações relativas a estas obras perdidas" (BOYER, 2004: 36).

Esses tratados que se perderam – na sua grande maioria – estavam relacionados no *Tesouro da análise* do livro VII da *Coleção* e tinham sido compilados e comentados por Pappus de modo que a metodologia analítica era explicada com base no modelo de solução de problemas que era aplicado nesses tratados – conversão de um problema dado para outro similar cuja solução já era conhecida. O método da análise tinha sido usado pelos grandes matemáticos gregos – especialmente pelos estudantes da academia que tinham sido instruídos por Platão[44] a respeito – mas a primeira investigação sistemática desse método foi realizada por Pappus na qual Boyer (2004: 37) considera ser a "mais clara declaração na antiguidade sobre a natureza da análise". O livro VII da coleção é historicamente muito importante, pois foi através dele "que Descartes tornou-se familiarizado com o problema – o lugar para três ou quatro linhas – o que o inspirou a inventar sua geometria de coordenadas" (BOYER: 2004: 37). Pappus tinha estudado este problema afundo e mostrou que em todos os casos possíveis o lugar geométrico é sempre uma cônica. Em seguida ele percebeu que o problema poderia ser ampliado para cinco ou seis linhas e até mesmo para um número qualquer de linhas. Para seis linhas Pappus tinha constatado que o lugar geométrico é uma curva da qual os seus pontos só poderiam ser traçados desde que o sólido contido pelas distâncias de três dessas linhas estivesse em proporção com outro sólido contido pelas distâncias das outras três. Ou seja, uma curva poderia então ser determinada mediante a razão de dois sólidos. Mas ele resistiu em passar para os casos envolvendo mais do que seis linhas, pois na sua ótica não havia nada além de três dimensões – que pudesse passar pelo crivo da razão geométrica.

[44] Platão tinha instruído os seus estudantes da academia sobre a importância do conhecimento da ordem das provas e dos métodos de raciocínio em matemática, mas o próprio Platão que tanto se preocupava com essas questões metodológicas não chegou a escrever um livro especifico sobre o tema. Na verdade, ele tinha feito apenas alguns comentários isolados em algumas de suas obras filosóficas que não eram tão claros quanto as suas lições da academia. (Cf. Urbaneja, 2008: 38)

Na realidade, na época de Pappus, a geometria voltava a ser à base do pensamento matemático, e apesar da nova orientação heurística grande parte dos pressupostos da fase geometrizada do pensamento matemático eram válidos novamente. Logo, o estilo de pensamento da época, então investigada, direcionou a forma de pensar de Pappus o que fez com que as suas chances de seguir adiante no referido problema fossem refreadas pelo principio da homogeneidade. Mesmo assim, Pappus esteve próximo de descobrir a geometria analítica, já que Boyer (2004: 38) afirma que a generalização do problema das três e quatro linhas "é a observação mais geral sobre lugares em toda a geometria antiga". Mas o desinteresse de Pappus pela matemática da época de Diofanto – a qual o princípio da homogeneidade não era validado – dificultou a sua ação perante a questão em virtude do choque[45] de estilos de pensamentos distintos. Decorrido treze séculos, o problema de Pappus seria solucionado por Descarte mediante a análise algébrica de Viète e a geometria analítica seria então desvendada. Mas entre Pappus e Descartes a álgebra quase simbólica de Diofanto teria que passar por diversas transformações para se tornar uma análise algébrica nas mãos de Viète.

Pappus foi o último dos relâmpagos a iluminar o horizonte da imaginação helênica. Os matemáticos gregos que o sucederam – tanto na escola de Alexandria quanto na academia de Athenas – não conseguiram alcançar resultados expressivos, mas eles mantiveram a tradição pappusiana de comentário das principais obras gregas e a reverência ao estilo de pensamento em vigor foi levada adiante em toda a sua amplitude de pressupostos.

[45] Boyer (2004: 38) afirma que Pappus tinha conhecimento de certos matemáticos – da época de Diofanto – que tinham interpretado linhas geométricas de forma numérica, mas como o principio da homogeneidade fazia parte dos pressupostos do estilo de pensamento da sua época, a abordagem algébrica do problema, por parte de Pappus, foi descartada mesmo porque "o entendimento imediato entre os adeptos de estilos de pensamento diferentes é impossível" (FLECK, 2010: 79) e por isso mesmo que Pappus se referiu aos seus predecessores como certos matemáticos "que tinham se permitido interpretar tais coisas [as linhas geométricas de forma numérica], o que significava nada em tudo compreensível (...)'' (PAPPUS apud BOYER, 2004: 38, grifo nosso).

1.2. As contribuições na Idade Média

Com a queda do império romano no século V a liderança das pesquisas matemáticas – que até então era exercida pelos gregos em Alexandria – foi transferida para o mundo oriental. Conforme Boyer (2004: 40) a primeira fase do desenvolvimento da matemática medieval se concentrou principalmente em três civilizações orientais no período compreendido entre 524 – nascimento de Boécio – e 1250 – morte de Fibonacci. Cada uma dessas três civilizações desenvolveu uma tradição matemática especifica. Os hindus, por exemplo, praticavam uma matemática de orientação prática com um enfoque metodológico heurístico uma vez que os seus tratados concentravam-se na resolução de problemas de aritmética e álgebra especialmente, mas a geometria também era estudada, embora com certa indiferença aos aspectos gerais e lógicos dos gregos. Boyer (2004: 40) afirma que "Entre os hindus o lado computacional do assunto ofuscou os aspectos lógicos e especulativos, por isso que encontramos lá pouco material relacionado à ascensão da geometria analítica". Esta constatação de Boyer vai ao encontro do discurso de Fleck (2010:72) segundo o qual "toda descoberta é inseparavelmente intricada com o chamado erro: para se perceber uma relação, outra relação deve passar despercebida, deve ser negada ou ignorada". Na realidade, na época vigente de um estilo de pensamento os fatos são apresentados em conformidade ao sistema de idéias devido a uma forte repressão psicológica exercida pelo coletivo de pensamento. Portanto, os hindus só poderiam raciocinar em função daquilo que se enquadrava ao estilo da época, uma vez que a capacidade adquirida de lidar com a forma (*gestalt*) do método heurístico implicava na perda simultânea da "capacidade de ver aquilo que contradiz tal forma" (FLECK, 2010: 142). Depois de certo tempo, os árabes – sucessores diretos da cultura hindu – contornariam essa incapacidade através de contatos inter coletivos com os gregos do império bizâncio. Mas quais foram às descobertas[46] dos hindus nos campos da aritmética e da álgebra que compõe o pequeno material que Boyer relacionou a ascensão posterior da geometria analítica? Na aritmética eles tinham inventado símbolos específicos para representar os números de zero até nove e com isso a idéia babilônica de notação posicional foi aperfeiçoada mediante a criação de um sistema numérico decimal que admitia agora o zero como número. Os numerais hindus, conforme Boyer (2004: 41) "serviam mais para simplificar cálculos algébricos e assim tornar atrativa mais tarde a substituição de instumentos algorítmicos por construções geométricas". No campo da álgebra os hindus usaram e aperfeiçoaram a linguagem sincopada de Diofanto para efetuar os seus cálculos e isso representou "um passo dos gregos em direção a Viète" (BOYER: 2004: 41).

[46] Os hindus fizeram uso também dos irracionais e dos números negativos, mas Boyer (2004: 40) acha pouco provável que estas mutações – em relação ao estilo de pensamento dos antigos – influenciaram efetivamente a invenção da geometria analítica.

Enquanto a civilização hindu estava ligada ao imaginário prático da matemática que se ocupava de questões especificas da aritmética e álgebra, a civilização bizantina se encontrava num estado de conhecimento que preservava o estilo de pensamento dos antigos gregos – na trilha dos comentadores a partir de Pappus. As investigações matemáticas no império bizantino não extrapolaram a tendência do momento em construir comentários dos principais tratados gregos. Essa linha de orientação revelava uma tendência à persistência do sistema de idéias da tradição. Sendo assim, o respeito e a obediência aos cânones tradicionais impediram a imaginação bizantina de perceber novos fatos alheios à rigidez da harmonia das ilusões do coletivo de pensamento já que "um sistema de opinião elaborado e fechado, constituído de muitos detalhes e relações, persiste continuamente diante de tudo que o contradiga" (FLECK, 2010: 69).

Nenhum comentarista bizantino tinha acrescentado algo singular ao desenvolvimento da geometria analítica. Até mesmo os conhecidos comentários de Eutócio sobre os trabalhos de Apolônio e Arquimedes contribuíram mais para preservar o conhecimento dos antigos do que para motivar futuras discussões. De qualquer maneira, no inicio da modernidade os matemáticos mostrariam um maior interesse pelas questões de mensurações infinitesimais – levantadas por Arquimedes em seus tratados – do que aquelas de lugares geométricos – expressas nas obras de Apolônio. No entanto, Boyer (2004: 32) entende que os desenvolvimentos da geometria analítica e do cálculo estão intimamente relacionados de tal modo que os avanços em um campo influem nos avanços do outro. Nessa perspectiva, digno de menção é o comentário de Simplício acerca da Física de Aristóteles que segundo Boyer (2004: 41) "inspirou futuras discussões ligadas mais ao cálculo do que a geometria analítica" e que iriam se concentrar na segunda fase da matemática medieval a qual discutiremos mais adiante.

A civilização arábica tinha construído um império de grande extensão territorial e a soberania geopolítica frente aos povos dominados estimulou a comunicação inter coletiva entre os matemáticos mulçumanos e os coletivos de pensamento desses outros povos. Nesse fluxo inter coletivo de idéias os diferentes estilos de pensamento da matemática se interpenetraram e se influenciavam mutuamente. Conseqüentemente o estado de conhecimento da matemática árabe apresentou um estilo de pensamento heterogêneo que continha traços da "aritmética dos hindus e a geometria dos bizantinos, com elementos adicionais dos gregos, babilônios e egípcios" (BOYER: 2004: 41). Da aritmética dos hindus, os árabes incorporam os símbolos numéricos juntamente com a sua idéia de notação posicional. Da geometria bizantina, eles adotaram o método lógico de investigação, mas o interesse pela aritmética hindu fez com que eles não atentassem para as dificuldades lógicas subentendidas no conceito de numero irracional que tanto preocupava os gregos do império bizâncio. Desse modo, da aritmética hindu, os árabes também incorporaram os números irracionais, mas os números negativos foram postos de lado devido à adoção dos métodos gregos de resolução geométrica de equações. A principal contribuição matemática árabe para o desenvolvimento da geometria analítica se deu no campo da álgebra. Nesse assunto eles foram influenciados tanto pelos mesopotâmicos, como também pelos próprios hindus e até um pouco pelos gregos. O primeiro matemático notável em álgebra foi Al-Khowarizmi que realizou um estudo amplo das equações quadráticas através do método babilônio de resolução. Este método por se servir de uma álgebra retórica era uma receita de passos sem justificativa e o emprego do recurso geométrico – mediante o método de aplicação das áreas – para validar o seu processo foi visto por Boyer (2004: 41-42) como "um retrocesso do trabalho grego clássico" já que a técnica dos gregos não era usada na sua essência como "uma construção rigorosa em conformidade aos postulados especificamente declarados (tal como eram construídas as soluções pitagóricas e euclidianas) (...)".

Além disso, a álgebra de Al-Khowarizmi não tinha conseguido atingir o mesmo nível de sofisticação de linguagem dos cálculos sincopados de Diofanto – que tinham sido aperfeiçoados pelos hindus – já que o árabe se valeu de uma linguagem retórica, entretanto ele tinha "enfatizado a solução babilônica das equações determinadas ao invés da análise diofantina que é característica da aritmética superior" (BOYER, 2004: 42). Daí, Boyer entende que o titulo de pai da álgebra se deve mais a Al-Khowarizmi do que propriamente Diofanto por conta da sua investigação geral em torno das equações quadráticas. Quem deu continuação à álgebra de Al-Khowarizmi foi o matemático Omar Khayyam que estudou as equações cúbicas. Omar achava que este tipo de equação só podia ser solucionada pelo método geométrico dos antigos que envolvia interseção de cônicas. Ele então generalizou o método clássico para todos os casos de equações cúbicas que possuíam raízes positivas e ultrapassou os antigos – que não tinham resolvido todas as espécies de cúbicas. Mas o salto de Omar – em relação aos gregos – era limitado, já que todas as descobertas científicas se baseiam em dois movimentos ativos, isto é: "um determinar dirigido, voltado para um objetivo, e um abstrair em direção contrária, sendo que ambos se complementam." (FLECK: 2010: 73). Por essa razão, apesar dos árabes admitirem a existência dos irracionais, Omar não se atentou para as possibilidades algébricas de resolução das equações cúbicas – no âmbito dos números reais positivos. Todavia, no tratamento das equações lineares e quadráticas que permitiam soluções algébricas, Omar achava "necessário complementar e verificar estas por meio de construções geométricas, uma visão que faz dele um elo importante entre os gregos e a geometria de Descartes" (BOYER: 2004: 43).

Enquanto as civilizações orientais estavam garimpando os melhores tesouros da matemática clássica, a Europa latina passava por uma época obscura de escassa criação intelectual. Antes do século XII – mesmo se tomarmos em consideração os itens mais específicos da matemática pragmática dos romanos – os latinos não tinham tantas possibilidades de avançar[47] em matemática devido à falta de literatura disponível sobre o assunto que dialogasse com a produção intelectual das civilizações orientais. Mas no século XII, o problema da desigualdade entre as matemáticas do oriente e do ocidente – em termos de nivelamento de informações – foi por ora, contornado mediante a divulgação por toda a Europa latina de inúmeros manuscritos árabes e gregos que eram traduzidos para o latim. Esta avalanche de traduções não tinha repercutido bem no imaginário coletivo da época, pois os "eruditos europeus ocidentais mostravam inicialmente pouco interesse nelas, ocupados como eles estavam com questões de teologia e metafísica" (BOYER, 2004: 44). Apesar disso, no primeiro terço do século XIII surgiram inúmeras exposições dos numerais hindu-arábicos que contrastavam com os pragmáticos numerais romanos. Estas exposições foram inspiradas pelas traduções em latim dos trabalhos de álgebra árabe que tinham despertado o interesse da classe comum para com esses numerais. Os árabes – principais mentores dessas exposições – haviam juntado o que havia de melhor da aritmética hindu e da geometria bizantina e por isso a classe comum ocidental se curvou a álgebra dos árabes e isso ficou claro na produção intelectual do mercador Fibonacci – o primeiro grande matemático do mundo latino – cujos métodos se enquadravam perfeitamente ao estilo de pensamento dos matemáticos árabes. Sua obra *Liber abaci* de 1202, apesar do nome nada tem a ver com o sistema computacional dos romanos. Na realidade o *Liber abaci* é um tratado que compunha um corpo de regras algébricas e muitos problemas em álgebra donde se recomenda a utilização dos numerais hindu-arábicos mediante uma explicação das operações usais da aritmética. Essa obra[48] ainda retratou a relação de mútua correspondência entre a aritmética e a geometria, pois enfatizava que todas as propriedades da aritmética só poderiam ser demonstradas geometricamente.

Diante das novas ferramentas que a matemática ocidental dispunha em meados do século XIII, os europeus tinham plenas condições de aprimorar os conhecimentos da álgebra dos árabes e encurtar o caminho em direção à geometria analítica, mas lamentavelmente a obra de Fibonacci não teve uma boa repercussão na época – sobretudo no cenário acadêmico medieval – e a oportunidade

[47] Nesse ínterim, a única contribuição ocidental para a geometria analítica ocorreu no campo literário da astronomia. O tratado *Natural History* de Pliny apresentava subdivisões latitudinais e longitudinais que serviram de parâmetro para quem quisesse compreender a representação gráfica do movimento dos planetas – em constelações zodiacais – num sistema incipiente de coordenadas retangulares, que foi muito empregado, por sinal, entre os séculos X e XI. Boyer (2004: 43) entende que este sistema incipiente de coordenadas retangulares, aplicado as artes práticas, influenciou as futuras coordenadas retangulares da geometria analítica o que nos leva a pensar que aqui, pelo menos, ele abre mão da sua adesão a historiografia internalista para se aproximar, ainda que de forma fortuita, da orientação externalista defendida por Fleck em sua epistemologia.

[48] No geral, a produção matemática de Fibonacci consistia em um conjunto de problemas que independente da sua natureza eram resolvidos de maneira aritmética ou algébrica, mas as demonstrações das resoluções eram sempre dadas na forma geométrica. Mas Boyer assegura que a simples associação da álgebra com a geometria não representa por si só uma geometria analítica, muito embora "três e quatro séculos depois, foi à reaparição e disseminação rápida de trabalho similar que pavimentou o caminho para geometria de coordenadas" (BOYER: 2004: 44).

de florescimento da álgebra foi adiada em virtude da persistência dos sistemas de opiniões do coletivo de pensamento que se encontrava até então enraizado na filosofia e ciência aristotélica.

Desse modo, o período posterior da idade média compreendido entre 1250 e 1477 ficou marcado pelos estudos em torno da cinemática de Aristóteles que foram desenvolvidos pelos eruditos das universidades de Oxford e Paris. Foi na universidade de Oxford que surgiu às primeiras discussões em torno da quantificação das formas variáveis – como a distância e o tempo – que contrapunham com o posicionamento qualitativo de Aristóteles acerca do tema. Uma das idéias movidas por essas discussões foi lançada por Calculator – um importante escritor de Oxford – que tinha estudado afundo a "intensidade média de uma forma que representava intensidades térmicas e concluiu que se a taxa de variação durante um intervalo é uniforme, então a intensidade média é a média das primeiras e últimas intensidades" (BOYER: 2004: 45). Dada a compreensão confusa do conceito de velocidade (taxa de variação) – interpretado pelos oxfordianos de maneira qualitativa – a conclusão de Calculator é surpreendente até mesmo em razão das limitações do seu estilo de pensamento que não levava em conta a possibilidade de quantificação das formas a não ser a distancia e o tempo. Calculator ainda tinha admitido a possibilidade de solucionar alguns problemas de quantificação de formas variáveis mediante o somatório de séries infinitas que convergiam para um numero inteiro e que representavam na opinião Boyer (2004: 45) "uma relação funcional verbalmente definida que apresenta descontinuidades e cuja variável dependente aumenta indefinidamente". As soluções de Calculator por serem intuitivas não tinham condições de satisfazer os rigores da matemática grega, mas elas contribuíram de alguma forma para o desenvolvimento posterior dos conceitos de variável e função que seriam retrabalhados na modernidade. Na realidade, as argumentações prolixas que compunham as idéias discutidas e demonstradas por Calculator, necessitavam de uma síntese matemática.

Em meados do século XIV, as idéias calculatorianas foram difundidas na França e um dos homens que receberam essa influencia foi o professor da universidade de Paris chamado Nicolas Oresme. Este estabeleceu um tratamento diferenciado para a quantificação das formas que se apoiava numa interpretação gráfico- geométrica. Oresme imaginava as formas variáveis como quantidades contínuas representadas por um segmento retilíneo. Desse modo, para medir a intensidade de determinada qualidade de um objeto, ele mediu então a sua extensão, como por exemplo, a velocidade do movimento através da extensão do tempo. O modo como a velocidade varia em função do tempo era representado por um gráfico bidimensional, traçado a partir de um sistema de eixos ortogonais, donde a linha horizontal representava os instantes de tempo ou longitudes de modo que para cada instante ele traçava uma linha vertical correspondente cujo comprimento ou latitude representava a velocidade. A sucessão das latitudes representava uma reta, mas caso o objeto tivesse partido do repouso, todas as linhas verticais formavam um triangulo retângulo cuja área era igual à distância percorrida pelo objeto. Boyer (2004: 46) sustenta que a representação gráfica de Oresme associada ao uso de coordenadas na matemática é original, no entanto a idéia de coordenadas já tinha sido desenvolvida na antiguidade por Apolônio no estudo das seções cônicas quando este havia criado certas linhas de referência que eram determinadas pela curva dada previamente. Na representação gráfica de Oresme o sistema de coordenadas – diferentemente de Apolônio – era apresentado antes da composição dos pontos do gráfico que eram traçados a partir de relações funcionais expressadas verbalmente mediante proporções.

Oresme teve êxito na representação gráfica das irregularidades envolvendo grandezas físicas, a prova disso é que as suas curvas poderiam ter sido definidas por meios analíticos ao invés de expressões verbais, mas como o estilo de pensamento da sua época tinha se desenvolvido "mais por certos esforços abortivos em novas direções do que para a realização no assunto tradicional" (BOYER: 2004: 44), as possibilidades para o desenvolvimento dos conceitos de variável e função[49] foram reprimidas em razão da aura estilística dominante que não levava em conta os principais desenvolvimentos da primeira fase da matemática medieval. Ora, para Fleck (2010: 150) "em cada estilo de pensamento há sempre traços da descendência de muitos elementos da história evolutiva". Ainda assim, os traços residuais das concepções passadas não eram suficientes para o desenvolvimento de uma nova geometria naquela altura. De fato, a teoria das proporções dos antigos não foi substituída pelas equações hindu-arábicas que poderiam ter enriquecido as pré-idéias de variável e função sinalizadas por Oresme. De qualquer forma, uma possível contribuição de Oresme para geometria analítica no campo da álgebra ocorreu no próprio estudo da teoria das proporções que era um dos tópicos favoritos da matemática latina desde os tempos de Boécio. Na obra *algorismus proportionum*, Oresme usou algumas notações simbólicas ocasionais para as proporções que Boyer (2004: 52) acredita serem precursoras das notações exponenciais cartesianas. Ele ainda fez uso de uma linguagem verbal para representar um conjunto de regras envolvendo operações com expoentes fracionários que eram análogas as nossas regras atuais para expoentes. Oresme aqui poderia ter sistematizado a sua linguagem simbólica das proporções para representar as suas regras exponenciais, mas como o estilo de pensamento da época não permitia a inserção dos

[49] Boyer afirma que há alguns historiadores que equipararam o trabalho de Oresme com a geometria de Descartes. Duhem, citado por Boyer (2004: 48), afirma que Oresme "fornece a equação da linha reta, e assim antecipa Descartes na invenção da geometria analítica". Oresme tinha compreendido que o gráfico da variação da velocidade em função do tempo poderia ser representado mediante uma reta, e ele trabalhou até com outros gráficos de formas geométricas curvilíneas, entretanto Boyer (2004: 48) entende que "a facilidade que Oresme mostrou em lidar com gráficos lineares não podia ser extendida para as figuras curvilíneas", devido às deficiências em conhecimento geométrico e técnicas algébricas. Portanto, Oresme desenvolveu com certa dificuldade apenas uma vertente do principio fundamental da geometria analítica enquanto que a outra vertente que seria representar uma curva qualquer em um sistema de coordenadas mediante uma função de duas variáveis não foi desenvolvida. Na realidade, Oresme contribuiu mais para o desenvolvimento do cálculo integral do que propriamente para a geometria analítica, pois ele mostrava mais interesse no estudo da área sob a curva do que na curva plana em si mesma e pelas deficiências técnicas em álgebra e geometria ele jamais conseguiu compreender o princípio fundamental da geometria analítica.

trabalhos sincopados – de Diofanto e dos hindus – em seu sistema de idéias, o parisiense não se deu conta da importância da simplificação da linguagem matemática.

Na opinião de Boyer (2004: 53), a Europa latina no período medieval perdeu uma oportunidade de ouro para alavancar o desenvolvimento da matemática, pois se os eruditos mais importantes desse período como Oresme e outros tivessem dominado o fundo matemático oriental herdado da geometria grega e da álgebra árabe a teoria das proporções e da latitude das formas poderia ter se convertido respectivamente numa álgebra simbólica e numa geometria analítica, mas devido á postura inflexível do estilo de pensamento dos latinos que se preocupava mais com os aspectos práticos da matemática esse desenvolvimento foi adiado para a modernidade.

1.3 As contribuições no prelúdio da era moderna

No final do século XV, a condição epistemológica da matemática estava ainda delimitada pela linha de pensamento da segunda fase da matemática medieval, na qual a teoria da proporção e a composição gráfica da latitude das formas se destacavam dentre as poucas ferramentas matemáticas vivenciadas pelo imaginário coletivo. No entanto, no decorrer do século XVI, o estilo de pensamento até então vigente, sofreu mutações graduais no caminho da continuidade dos estudos orientais em álgebra que vieram a ser aperfeiçoados pelos métodos simbólicos[50] que eram publicados – logo nas duas ultimas décadas dos quatrocentos. Com efeito, em 1484, foi publicada na França a *Triparty en la science des nombres* de Chuquet e dez anos depois na Itália foi editada a *Summa de arithmetica* de Pacioli. Essas obras revelavam uma tendência[51] em direção ao emprego de símbolos no sentido de tornar as formulações algébricas mais claras e precisas. Na verdade, o uso tanto na *Triparty* quanto na *Summa* de abreviaturas mescladas com símbolos, para as quantidades desconhecidas e as potências dessas quantidades, era uma antecipação da álgebra sincopada que viria a se desenvolver gradualmente no século XVI – dirigindo-se para a linguagem simbólica e ao mesmo tempo, substituindo a linguagem retórica medieval.

Grande parte desse desenvolvimento algébrico ocorreu na Itália, esse território tinha sido também o berço do movimento renascentista, que entre os séculos XIV e XV, não repercutiu tão intensamente nas matemáticas quanto nas artes e na literatura devido à condição estilística da ciência escolástica – que não se alinhava plenamente as descobertas matemáticas tradicionais. Ainda assim, especificamente na maior parte do século XVI, o renascimento nas matemáticas tinha sido mais um reflexo da continuidade dos estudos orientais em álgebra do que um resultado do interesse e da recuperação dos tratados gregos de geometria. Naturalmente, isso não quer dizer que a geometria não tinha sido influente naquela época, pelo contrário, as traduções e referências aos tratados clássicos, como parte da tendência humanista em torno da cultura renascentista, exerceu influência em muitos matemáticos que traduziram do grego para o latim, inclusive para as línguas vernáculas, diversas tratados de geometria clássica. No entanto, o respeito excessivo do imaginário da época aos cânones tradicionais impedia o desenvolvimento de uma nova compreensão para a

[50] Nesta época, no campo da álgebra se constata de fato uma gradual substituição da linguagem retórica para a linguagem simbólica a partir das abreviaturas sincopadas das palavras e posteriormente em direção à introdução de símbolos literais.

[51] Na *Triparty* Chuquet tinha apresentado notações simbólicas para os expoentes das quantidades desconhecidas, mas a obra só foi editada por completo depois de quatro séculos e por isso Boyer não consegue determinar a extensão da sua publicidade. A *Summa* de Pacioli deu continuidade ao aprimoramento da linguagem algébrica proposto por Chuquet, mas ao contrário da *Triparty* a obra foi editada no seu tempo e teve uma boa repercussão na Itália. Boyer (2004: 54) constata que essas obras "estavam baseadas sob fontes mais iniciais, mas em certo nível anteciparam linhas futuras de desenvolvimento", e isso comprova o caráter evolucionário do desenvolvimento da álgebra.

geometria euclidiana além da sintética[52]. Em todo o caso, o interesse renascentista pela ciência clássica ampliou a perspectiva dos algebristas italianos que viriam a se interessar não só pelos problemas aplicados da álgebra, mas também para os problemas teóricos da geometria.

Na época de Pacioli, a álgebra e a geometria se relacionavam mutuamente, sobretudo na solução de problemas determinados, mas essa relação era mais unilateral (em beneficio da geometria) do que bilateral, pois as equações algébricas (resultantes dos problemas determinados) eram resolvidas à maneira geométrica e o próprio Pacioli declarou na *Summa* a impossibilidade da resolução algébrica da cúbica. Essa persistência do pensamento geométrico dos antigos no imaginário coletivo da época foi contrabalanceada por uma atmosfera algebrizada, na qual os algebristas italianos esforçavam-se por solucionar á cúbica e a quártica mediante cálculos com radicais. Na realidade, a condição estilística quinhentista fez com que “algo já conhecido” influenciasse a “maneira do conhecimento novo”, por isso “o processo do conhecimento” continuamente “amplia, renova e refresca o sentido do conhecido” (FLECK, 2010: 81). Para Boyer (2004: 57), essa nova possibilidade de resolução da cúbica e da quártica tinha impulsionado um desenvolvimento[53] da álgebra como um todo, especialmente no que diz respeito às operações, notações e conceitos, pois daqui em diante tinha “surgido uma maior confiança nas operações da álgebra, independente de qualquer significado geométrico” e isso promoveu “o desenvolvimento de uma teoria elementar de equações”. Na Itália do século XVI, as soluções algébricas da cúbica e da quártica tinham sido alcançadas mediante uma receita de passos consecutivos descritos numa linguagem sincopada sem qualquer “formalização das quantidades algébricas e as operações executadas sobre estas” (BOYER: 2004: 57). Esse tipo de abordagem dificultava a exposição dos métodos de resolução numa forma geral, mas esse problema começou a ser contornado pelo matemático italiano Bombelli que se serviu de letras[54] para designar as quantidades desconhecidas e

[52] Mas, no final do século XVI, quando os tratados de Apolônio e Arquimedes adquiriam maior visibilidade, muito em função da tradução da *Coleção* de Pappus de 1588 que os mencionava no *Tesouro da Análise*, os problemas de construção geométrica serviram de fontes de inspiração para os matemáticos, em particular os analistas, que perceberam que o simbolismo algébrico era um elemento necessário para facilitar a resolução desses problemas e de generalizar os métodos até então empregados pelos algebristas italianos. Essa tendência facilitou o aparecimento de uma geometria algébrica, o que levará fatalmente as geometrias analíticas de Descartes e Fermat. (cf. ROQUE, 2012: 269).

[53] Boyer (2004: 56) acredita que esse desenvolvimento facilitou a ascensão dos métodos analíticos, mas por outro lado, desviou a atenção da geometria de coordenadas por quase um século. Na realidade, a resolução geométrica das cúbicas ligava as equações determinadas do terceiro grau com as curvas resultantes das equações indeterminadas do segundo grau e essa relação – embora não tivesse combinado diretamente as equações indeterminadas com as curvas – foi um elemento que faltou aos matemáticos italianos para desvendar a geometria analítica, pois na antiguidade por pouco que Menaecmo não “inventou a geometria analítica quando na resolução do problema deliano ele deu a primeira solução geométrica plana de uma equação cúbica”.

[54] A representação de quantidades por letras não era uma idéia nova, pois os hindus já tinham usado tal associação, muito embora Boyer (2004: 40-41) constate que a visão corrente na história da Matemática que delega aos hindus a paternidade de tal idéia “é fundamentalmente errônea, como um estudo do simbolismo das letras de Aristóteles na *Physica*, por exemplo, mostra”. Isso comprova a validade da teoria comparativa do conhecimento de Fleck, na qual as idéias surgem de maneira vaga, como foi o caso das letras de Aristóteles em sua Física que estavam associadas a uma visão qualitativa das grandezas, e por conta disso, se levarmos em conta os desenvolvimentos matemáticos posteriores,

de abreviações para simplificar as operações e relações envolvidas no estudo da cúbica e da quártica.

Boyer (2004: 58-59) entende que os estudos em álgebra desenvolvidos na Itália estimularam o surgimento de uma teoria geral de equações que foi quase imaginada por Paolo Bonasoni na obra *Álgebra Geométrica* donde ele propôs o uso de letras não apenas para se referir as incógnitas, mas também para indicar os coeficientes de uma equação. A álgebra de Bonasoni se fundamentava exclusivamente na geometria euclidiana e por isso as equações de grau superior a dois não foram investigadas, pois o método de aplicação das áreas não dava conta de resolvê-las. Além do mais, os recursos simbólicos disponíveis no momento não foram totalmente aproveitados e a *Álgebra Geométrica* ainda não foi publicada. Logo, a influência de Bonasoni é contestada por Boyer. Embora a fonte principal da álgebra européia fosse à Itália, os matemáticos italianos – salvo Bonasoni – conseguiram poucos resultados com relação ao desenvolvimento de idéias algébricas, pois faltava uma notação conveniente para generalizar os coeficientes de uma equação. Essa falta foi suplantada pela matemática francesa aonde as idéias algébricas adquiriram um desenvolvimento considerável.

O francês Viète conseguiu atravessar a ponte que levava ao conceito algébrico de parâmetro mediante uma inovação introduzida no simbolismo algébrico da sua época. Antes de Viète os estudos em álgebra – ou logística numerosa como ele assim chamava – focavam-se em cálculos numéricos envolvendo equações particulares ao passo que a sua nova álgebra ou logística especiosa se baseava no cálculo com espécies – que abrangiam quantidades tanto numéricas quanto geométricas – e esse tipo de abordagem possibilitava analisar todas as equações particulares mediante uma só equação devido à designação das espécies por letras tais como as consoantes que representavam os coeficientes e as vogais que representavam as incógnitas que juntas formavam os termos de uma equação geral. Viète lançou mão da distinção entre parâmetro e incógnita para elaborar um sistema geral de cálculo simbólico que permitia a exposição e manipulação das espécies independentemente da sua natureza. Sua logística especiosa tratava os problemas de maneira geral invalidando os exemplos numéricos e as regras de procedimento verbais da tradição algébrica italiana. A idéia de parâmetro ou constante foi uma mutação no estilo de pensamento da matemática moderna que tornava mais ampla a noção de coeficientes de uma equação e possibilitava avanços significativos em álgebra comparáveis aos da geometria, pois agora não só os geômetras poderiam generalizar os seus raciocínios mediante diagramas, mas também os algebristas poderiam fazer o mesmo com relação às equações. Desse modo, o conceito de parâmetro foi um

o valor dessa ideia, de fato, não residiu "em seu conteúdo lógico e objetivo, mas unicamente em seu significado heurístico enquanto potencial a ser desenvolvido" (FLECK, 2010: 67).

fato que resultou[55] das idéias gerais do estilo de pensamento dos geômetras da época, o que confirma a visão fleckiana de que há “lógicas históricas próprias no destino das idéias, isto é, fenômenos gerais peculiares da história do conhecimento que se impõe ao observador da evolução das idéias.” (FLECK, 2010: 49).

A descoberta do conceito de parâmetro por parte de Viète, ainda possibilitou o desvendamento de uma teoria geral de equações que tornava possível, de agora em diante, encontrar as fórmulas ou soluções gerais das equações algébricas que expressavam as vogais em função das consoantes, ou melhor, as incógnitas em função dos parâmetros. Segundo Boyer (2004: 63), Viète ainda tinha adotado no tocante as operações os “símbolos + e –, mas ele fez pouco além disto” pois a sua linguagem não era completamente simbólica. Na realidade, Viète se servia ainda de abreviaturas descritivas para representar a igualdade, o produto e as potências das quantidades e por essa razão a sua linguagem quase-simbólica[56] ainda teria que ser reformulada mais tarde. Desde os finais dos quatrocentos até o momento, a álgebra vinha passando por muitos desenvolvimentos que proporcionaram inúmeras mutações no estilo de pensamento da matemática. Essas mutações revelavam a natureza dinâmica, contínua e evolucionária do desenvolvimento da matemática donde podemos observar matizes remanescentes de estilos anteriores como o ponto de vista geométrico que ainda continuou arraigado ao sistema de idéias do coletivo de pensamento dos modernos. Desse modo, Viète tinha usado uma terminologia geométrica que o prendeu ao principio da homogeneidade dimensional que limitou consideravelmente as suas intervenções simbólicas, especialmente no que diz respeito às potências[57] das quantidades. De acordo com o principio da homogeneidade, o produto de dois segmentos era interpretado como uma área e a soma de duas grandezas estavam vinculadas a natureza das suas dimensões, isto é, só se podiam somar segmentos de reta com segmentos de reta, áreas com áreas e volumes com volumes. Logo as constantes e as incógnitas de uma equação possuíam dimensionalidade geométrica uma vez que os problemas geométricos, estudados por Viète, eram interpretados algebricamente e as equações resultantes desses problemas teriam que ser necessariamente homogêneas em termos dessas quantidades.

Boyer destaca três contribuições de Viète para o desenvolvimento da geometria analítica. A primeira delas, segundo o autor (2004: 59-60), diz respeito aos termos “parâmetro” e “variável” que

[55] De fato, para Fleck (2010: 49) todas as conexões passivas devem ser deduzidas a partir das conexões ativas do imaginário coletivo, ainda que a autenticidade dessas primeiras conexões não possa ser interpretada como simplesmente relativista, mas antes, como uma resposta condizente às possibilidades do estilo de pensamento em voga.

[56] Para Urbaneja (2010: 65), ainda que a álgebra de Viète não fosse completamente simbólica – pelo fato dela conter ainda abreviaturas – ela esta muita mais elaborada que a álgebra dos algebristas italianos, inclusive a álgebra literal de Bombelli, já que Viéte iniciou, de forma mais consistente, o trânsito do sincopado para o simbólico por conta da distinção que fez entre parâmetros e incógnitas, os quais eram designados por letras maiúsculas, as consoantes para as medidas indeterminadas e as vogais para as medidas desconhecidas.

[57] A título de exemplo, as duas primeiras potências de uma quantidade indeterminada A eram descritas por Viète como A planum e A sólido – que mais tarde se transformariam em A^2 e A^3 por Descartes.

não foram cunhados pelo francês, mas em todo o caso, essas idéias[58] algébricas surgiriam gradualmente à medida que a convenção vogal-consoante fosse aplicada mais tarde por Descartes e Fermat nas representações gráficas de equações indeterminadas. A segunda contribuição se refere à aplicação sistemática da álgebra sincopada aos problemas geométricos. Essa contribuição, segundo Boyer (2004: 62) foi motivada pela tendência do final do século XVI em torno da recuperação dos problemas clássicos e dos desenvolvimentos notáveis em álgebra, a qual tinha impulsionado os matemáticos a "buscarem uma estrada real para a geometria através de técnicas numéricas". Desse modo, Viète tinha atacado os problemas de construção geométrica mediante equações[59] determinadas nas quais as raízes forneciam as "medidas possíveis das linhas desconhecidas iniciais". Boyer (2004: 62) constata que os gregos já tinham usado incógnitas em geometria, mais especificamente, na álgebra geométrica euclidiana e por isso as novidades nas soluções de Viète estavam na aplicação de símbolos literais seguido de regras mecânicas de cálculo, o que tornava mais simples o caminho de solução dessas equações. Esse caminho era validado por Viète através da construção geométrica das raízes. No entanto, a álgebra geométrica euclidiana não dava conta de construir as raízes das equações de grau superior a dois, e para seguir em frente, Viète teve que recorrer aos métodos antigos de Arquimedes para construir as raízes das cúbicas. O método de interseção de cônicas, por exemplo, relacionava os problemas de construção com o estudo de lugares e por conta disso Boyer (2004: 63) entende que "uma continuação neste sentido quase inevitavelmente teria levado Viète a geometria de coordenadas, justamente como fez Descartes meio século mais tarde".

Viète tinha participado de maneira efetiva na renovação do interesse pelos problemas clássicos e a sua grande contribuição nesse sentido foi mostrar que o problema da trissecção do ângulo poderia ser atacado através de equações cúbicas irredutíveis. Para tal, Viète tevê que ampliar[60] os postulados euclidianos e se servir de instrumentos semelhantes ao compasso mesolábio de Erastóstenes. A sistematização algébrica dos problemas de construção tinha limitações quanto à validação desse processo, pois as equações de grau superior a três não eram construídas por Viète e foi nesse ponto que Descartes o superou mediante a investigação de equações de grau superior que propiciavam "novas curvas para efetuar as construções, e foi por esta razão que ele [Descartes], ao

[58] Contudo, antecipações geométricas das noções de variável e parâmetro tinham se manifestado, respectivamente, na latitude medieval de formas e na *Álgebra* de Bonasoni. Nota-se, portanto, o caráter evolucionário da ciência defendido por Fleck.

[59] Essas equações eram construídas de acordo com a convenção vogal-consoante em que as vogais representavam as linhas desconhecidas e as consoantes representavam as linhas indeterminadas.

[60] Viète tinha usado o método da *neusis* para resolver a equação cúbica irredutível, no entanto esse método não era muito aceito pelos gregos, tanto que na classificação de Pappus aos problemas sólidos não constava essa possibilidade. Desse modo, Viète se viu obrigado a propor um novo axioma para a geometria euclidiana, o qual permitiu o uso de instrumentos mecânicos em construções geométricas, já que apenas dessa forma era possível solucionar todos os problemas de construção (cf. ROQUE, 2012: 299).

invés de Viéte, inventou a geometria analítica" (BOYER, 2004: 64, grifo nosso). Boyer (2004: 64) entende que a inter-relação da geometria com a álgebra no sentido de Viète não é ainda uma geometria analítica, pois faltava a idéia de coordenadas que não foi trabalhada pelo matemático francês. Na realidade, a aplicação de Viète da álgebra sincopada aos problemas geométricos não incluía aqueles de natureza indeterminada. Além disso, Viète ao aplicar a geometria à álgebra através da construção das raízes das equações algébricas – resultantes dos problemas geométricos determinados – não cogitava a representação gráfica dessas equações num sistema de coordenadas mesmo porque tal cogitação era quase que impensável em virtude da natureza particular dessas equações que continham apenas uma quantidade – nesse caso a incógnita. Na realidade, a atitude de Viète espelhava o interesse da época em torno dos problemas determinados e nessas circunstâncias o "uso de um sistema de coordenadas pode oferecer pouca vantagem" (BOYER: 2004: 64). Para Fleck (2004: 91), o ser humano, por si mesmo, não pode, de fato, discernir quanto à possibilidade ou impossibilidade dos fatos, pois o que ele sente "como impossível" nada mais é do que "uma incongruência com o estilo de pensamento habitual".

A terceira contribuição de Viète ao descobrimento da geometria analítica é resultado da avaliação crítica do imaginário coletivo da época quanto ao método de análise usado pelos gregos para resolver problemas geométricos. Ainda que o imaginário quinhentista e seiscentista tivesse recebido com entusiasmo as obras matemáticas clássicas, em particular os tratados geométricos da idade dourada discutida na seção 1.1 deste capítulo, muitos matemáticos expressaram as suas frustrações em tentar descobrir o método no qual os antigos tinham alcançado os seus brilhantes resultados[61], demonstrados rigorosamente a maneira sintética. Descartes, dentre outros, expressou a sua curiosidade frustrada diante do mistério[62] que rondava os métodos de investigação dos geômetras antigos. Ao final da regra IV, das suas *Regras para a direção do espírito*, o sábio de *La Flèche* elogiou certos matemáticos que tinha reestruturado a análise geométrica dos antigos mediante os instrumentos da álgebra. O objetivo desses matemáticos – conhecidos como analistas –

[61] Devido á natureza sintética da geometria grega, as demonstrações desses resultados estavam fundadas em construções geométricas especificas para cada teorema em particular. Essa prática revelava a engenhosidade dos geômetras antigos na busca de inspirações para os diversos teoremas em discussão naquela época.

[62] Conforme Urbaneja (2008: 40), para demonstrar um teorema, os antigos se serviam, a princípio, da análise na qual se supunha como verdadeiro o que se pretendia provar ─ a premissa do teorema ─ e ao examinar as implicações lógicas dessa premissa, eles chegavam numa conclusão que poderia ser tanto verdadeira quanto falsa. Se a conclusão fosse falsa, o teorema, naturalmente, era refutado por redução ao absurdo, mas se a conclusão fosse verdadeira, a análise não dava conta de validar o teorema. Para tanto, dever-se-ia inverter a conclusão. Como nem sempre os teoremas possuíam um recíproco válido, para vencer essa barreira, os gregos eram obrigados a acrescentar certas condições complementares, conhecidas como diorismos. Mas não era tão simples descobrir o diorismo adequado para inverter uma conclusão e realizar a síntese necessária para se demonstrar um teorema, e por conta dessa dificuldade, os gregos optaram por mascarar – na maior parte das suas obras ─ o caminho executado para se chegar da premissa a conclusão, visto que quando a síntese era alcançada, "na presença da demonstração sintética, qualquer análise era supérflua".

consistia em buscar uma ferramenta heurística que pudesse decifrar a análise[63] secreta dos gregos e a ferramenta encontrada por Viète e seus colaboradores foi à álgebra simbólica que mostrou "ser o instrumento apropriado para o caminho analítico em geometria". (BOYER: 2004: 65). Viète sistematizou essa idéia na sua arte analítica mediante uma divisão radical da antiga análise em três ramos dedicados à nova álgebra que visavam substituir a antiga definição aplicada à geometria. Ele tinha considerado três formas de análise: a zetética que servia para equacionar as propriedades das coisas exigidas em função das coisas que são dadas; a porística que era utilizada para averiguar em termos de uma equação a verdade dos teoremas e a exegética que era apropriada para comprovar a validade de uma equação. Viète naturalmente percebeu que o propósito da analise zetética era o mesmo da logística especiosa e por essa razão ele associou[64] a análise geométrica grega com a sua teoria geral de equações. Daí, com o passar do tempo, o ponto de vista analítico dos gregos – que estava ligado à ordem das idéias de uma demonstração – foi gradativamente substituído pelos analistas que "chegaram a ver a análise como um sinônimo do uso de técnicas simbólicas, ou até mesmo da própria álgebra" (BOYER, 2004: 65). Essa transposição semântica da analise geométrica dos antigos para a análise algébrica dos modernos representava uma evolução conceitual da logística especiosa de Viète e foi essa evolução que produziu uma das matrizes essenciais da geometria analítica. Na antiguidade, a análise geométrica foi empregada na geometria superior por Menaecmo e Apolônio que não estavam a par de todas as possibilidades da álgebra, pois naquela época ela estava atrelada aos procedimentos sintéticos da geometria euclidiana, contudo eles haviam utilizado o equivalente de um sistema de coordenadas. A análise algébrica, por sua vez, foi empregada por Viète na geometria, visto que ele dispunha da ferramenta algorítmica da álgebra simbólica – a qual tinha explicado por meio da análise zetética – mas Viète não se empenhou na resolução dos problemas geométricos indeterminados que poderiam revelar *insights* acerca da idéia de coordenadas. Por essa razão, nem Viète e nem os gregos inventaram a geometria analítica em

[63] Para Roque (2012: 297 - 298), as idéias de Vète na *arte analítica* tinham sido inspiradas pela *Coleção matemática* de Pappus, traduzida em 1588, e pela *Aritmética* de Diofanto, traduzida para o latim em 1575. A obra do geômetra alexandrino tinha levantado o interesse coletivo pelos problemas clássicos de construção, aos quais Viète propunha resolvê-los mediante os processos da *Aritmética* de Diofanto, pois ele supunha que o uso das quantidades desconhecidas na *Aritmética* sugeria que um método geral para praticar a análise era de conhecimento dos antigos, mas esse método teria se perdido. O objetivo da *arte analítica*, portanto, era restaurar esse método mediante a criação de uma ferramenta heurística – em que a analise dos antigos fosse identificada á álgebra – para resolver toda espécie de problema.

[64] Segundo Roque (2012: 298-299), antes da *arte analítica* de Viète, a álgebra não tinha o mesmo prestigio da geometria, pois os métodos algébricos eram fragmentados e até então não seguiam um padrão unificado tal como o método axiomático dedutivo que era aplicado na geometria. De qualquer forma, os variados métodos algébricos existentes revelavam-se de grande utilidade na resolução de problemas, mas mesmo assim eles não eram considerados exatos. Desse modo, Viète decidiu legitimar esses métodos, tomando como princípio, as técnicas empregadas por Pappus para resolver os problemas de construção da *Coleção matemática*. Os problemas de construção eram convertidos em equações, estas eram solucionadas então pela nova ferramenta analítica, que auxiliava a construção das soluções exigidas. Ao por em prática a análise algébrica para resolver qualquer tipo de problema de construção, Viète procurava "fazer da álgebra uma ciência nos moldes gregos", isto é: "uma nova álgebra com o mesmo prestígio da geometria".

razão das limitações das suas análises que não levavam em conta, numa única abordagem, as duas matrizes essenciais da geometria analítica, isto é: a idéia de coordenadas e a álgebra simbólica.

De qualquer maneira, a contribuição de Viète para o desenvolvimento da geometria analítica foi muito ressaltada por Boyer (2004: 63) na medida em que a arte analítica abriu caminho, respectivamente, para as transições da álgebra sincopada e das manipulações de proporções para a álgebra simbólica e o uso de equações. Essas mutações no estilo de pensamento da matemática moderna tinham se manifestado entre os finais do século XVI e os começos do século XVII. Nesse período, compreendido entre Viète e Descartes, os analistas publicaram alguns trabalhos na tentativa de restaurar as obras perdidas de Apolônio com base na nova análise algébrica. De todas essas tentativas, a publicação mais significativa para o desenvolvimento da geometria analítica foi a *Apollonius redivivus* de autoria do croata Marino Guethaldi, um discípulo distinguido de Viète que "herdou alguns dos manuscritos do seu mestre e continuou o interesse de Viéte em geometria algébrica" (BOYER, 2004: 66). No *Apollonius redivivus,* Guetaldi aplicou sistematicamente a análise algébrica na resolução de problemas determinados e também o método de aplicação de áreas para resolver equações algébricas. De todos os analistas, Boyer (2004: 67) considera que Guetaldi foi quem chegou mais perto da descoberta da geometria analítica depois de Fermat, pois o croata tinha estudado os problemas indeterminados de maneira algébrica, mas devido á harmonia das ilusões que girava em torno da resolução algébrica dos problemas determinados – que tinha se tornado uma prática constante do coletivo de pensamento daquela época – ele desconsiderou as possibilidades de aprofundamento nessa questão hipotética e tal como Viète "ele evitava o tratamento algébrico de problemas sobre lugares" (BOYER, 2004: 68). O estilo de pensamento da época de Guetaldi viveu a sua fase clássica na qual conforme Fleck (2004: 71) "somente se percebem fatos que se enquadram com exatidão" num determinado ponto de vista em que "qualquer contradição parece ser impensável e inimaginável". (FLECK, 2004:70).

Portanto, mesmo que Guetaldi tenha estudado os problemas indeterminados – que não se enquadravam na orientação investigativa do coletivo de pensamento – ainda assim o estilo de pensamento o coagiu a desistir da sua empreitada, pois ele concluiu que esses problemas eram vazios ou inoperantes. Logo, os estudos em geometria algébrica de Guetaldi estavam condizentes com o estilo de pensamento dominante. Os analistas não tinham sido os únicos que contribuíram para o desenvolvimento da geometria analítica no período entre Viète e Descartes, pois durante aquele tempo surgiram muitas publicações – tais como a *diversarum speculationum* de Benedetti em 1585 e a *algebra discorsiva numerale et bineare* de Cataldi em 1618 – que privilegiavam a transição das equações retóricas geométricas para as equações simbólicas algébricas. Essas publicações mostram que a circulação inter coletiva de idéias entre os analistas e os outros coletivos foi praticada em razão da própria atmosfera intelectual do período que ficou marcada por um "uso bastante expandido de símbolos, em paralelo com a coordenação da álgebra e geometria" (BOYER: 2004: 66).

No entanto, a transição do pensamento sintético para o analítico foi gradual e até a primeira metade do seiscentos, a corrente analista de pensamento, em que pese as suas realizações originais, não teve grande popularidade entre os geômetras, pois o pensamento sintético dominava os sistemas de opiniões do coletivo de pensamento que estava totalmente centralizado nos *Elementos* de Euclides que servia de referência[65] para o estudo da geometria e da própria ciência em geral. Entre Viète e Descartes houve também um desenvolvimento considerável no estudo das seções cônicas – com aplicações em diversos problemas práticos da ciência – mas esses estudos pouco influenciaram a descoberta da geometria analítica já que as cônicas e as demais curvas eram estudadas até então de forma sintética ou cinemática e por essa razão o "número de curvas conhecidas era pouco maior do que tinha sido dois mil anos antes" (BOYER, 2004: 73). Na realidade, as descobertas de novas curvas no cenário renascentista eram invenções fortuitas sem qualquer desenvolvimento abstrato dado que ainda não existia uma ferramenta própria, a serviço da geometria, para investigá-las e por isso os matemáticos não conseguiram "fazer qualquer progresso na determinação das suas equações ou propriedades" (BOYER, 2004: 73).

No entanto, no segundo terço do seiscentos, ou mais especificamente na década de 1634 a 1644, ocorreu um preenchimento das lacunas dos métodos antigos de definição de curva mediante a descoberta da geometria analítica por parte de Descartes e Fermat. Esse poderoso instrumento tinha complementado os métodos sintéticos e cinemáticos e ainda permitiu que dentro de um período de doze anos, Fermat e Descartes, de maneira totalmente independente, pudessem descobrir "mais novas curvas (ou lugares) do que tinha sido descoberto na história inteira da matemática até aquele momento" (BOYER, 2004: 72). Boyer (2004: 69) entende que a descoberta da geometria analítica se deve mais aos desenvolvimentos da álgebra do que propriamente da geometria e entre 1629 e 1631 ele localiza alguns trabalhos nessa direção – como a *Invention nouvelle en l'algèbre* de Girard (1595-1632) e a *Artis Analyticae Praxis* de Harriot (1560-1621) – que influenciaram o método cartesiano de Descartes com respeito às abreviações da linguagem da álgebra simbólica. Esses trabalhos tinham como modelo a notação de vogais e consoantes que foi praticada por Viète e outros analistas, mas quanto à notação de operações e relações – que ainda eram insuficientes – houve desenvolvimentos que ultrapassaram os limites da *arte analítica* e provocaram, portanto

[65] Boyer (2004: 72) entende que tanto a corrente analista quanto a sintética tinham contribuído a sua maneira para o desenvolvimento de uma teoria de curvas, mas em cada corrente as díades de Platão ─ cultivadas por Euclides ─ possuíam um papel destacado em relação às outras curvas e esse destaque se refletiu na ciência em geral. Boyer exemplifica a apreciação negativa de Copérnico da astronomia ptolomaica. Como o grego não usou o movimento circular uniforme para compreender a mecânica celestial, Copérnico então julgou que a teoria de Ptolomeu era fisicamente impossível.

algumas mutações[66] no estilo de pensamento da época. Se por um lado, a linguagem da *Geometria* de Descartes tinha sido nitidamente influenciada por essa tendência em torno do simbolismo da álgebra. Por outro, a *Introdução* de Fermat mostrou que a terminologia quase-simbólica de Viète e o próprio princípio da homogeneidade não tinham impedido o desenvolvimento da geometria de coordenadas. Portanto, Fermat mesmo com uma linguagem não tanto desenvolvida quanto a de Descartes, conseguiu alcançar a mesma descoberta do sábio de *La Flèche*.

[66] A *Invention* de Girard seguiu de perto essa tendência simbólica da álgebra através da divulgação da notação de índices para as potências – uma idéia experimentada antes por Chuquet e Bombelli – que possibilitou a eliminação da terminologia geométrica dos analistas e conseqüentemente do principio da homogeneidade dos gregos. Outro avanço do trabalho de Girard foi o uso de números negativos na composição e na solução das equações que seriam mais tarde de grande "significado na geometria analítica, pois Girard foi possivelmente a primeira pessoa a mostrar a utilidade geométrica assim como a algébrica dos negativos" (BOYER: 2004: 70). Para Boyer (2004:70) essa idéia já tinha sido aventada pelos babilônios na antiguidade, logo vemos mais uma vez o caráter evolucionário do desenvolvimento da matemática em que as idéias do presente são inspiradas pelas idéias do passado. Apesar de tudo, os segmentos de medida negativa não foram aproveitados pelas geometrias de Descartes e Fermat – que trabalhavam apenas naquilo que chamaríamos hoje de primeiro quadrante –, mas a idéia seria finalmente desenvolvida nos finais do século XVII. As contribuições da *Artis analyticae* concentravam-se na divulgação do sinal da igualdade de Recorde (1510-1588) – representado por = em substituição ao aequatur de Vieta – e na modificação que Harriot propunha do A cubus de Viète por AAA que foi um avanço considerável em direção ao A^3 de Descartes. Em razão do estilo de pensamento da época é natural que nem um desses trabalhos tivesse analisado os problemas indeterminados e por isso não houve qualquer aproximação da idéia de coordenadas.

Considerações Finais

Vimos neste capitulo, um panorama das mudanças conceituais que movimentaram a atividade matemática desde a antiguidade até a terça parte do século XVII – as quais contribuíram conforme o pensamento de Boyer para o surgimento da geometria analítica. Tomando como referência a epistemologia de Fleck, identificamos os estilos de pensamento que guiaram a atividade matemática das épocas associadas a essas mudanças conceituais. Na antiguidade, vimos que as civilizações pré-helênicas assentaram o pensamento matemático em métodos indutivos. Vimos ainda que os desenvolvimentos em aritmética e geometria eram muito limitados, e por conta disso a associação realizada entre esses dois campos, em mensurações de configurações espaciais, não se concretizou numa geometria analítica. No entanto, houve desenvolvimentos no campo das coordenadas com aplicações nas artes práticas e isso em longo prazo, contribuiu para o desenvolvimento das coordenadas retangulares da geometria analítica.

O método dedutivo, como vimos, caracterizou a mentalidade da civilização helênica que passou a conduzir a atividade matemática a partir do século VI a.C. Este método orientou tanto a aritmética quanto a geometria dos primeiros matemáticos gregos, mas estes dois campos, apesar de estarem relacionados na teoria das proporções, não tiveram uma maturação conceitual em relação ao conjunto de números e curvas que eram, até então, conhecidos pelos povos pré-helênicos. Desse modo, nessa linha de pensamento o desenvolvimento de uma geometria analítica também não pôde se efetuar por conta da continuidade da visão limitada dos pré-helênicos quanto aos números e as curvas. De qualquer modo, as proporções simples dos problemas de mensuração pré-helênicos, tiveram a sua importância para a sua sistematização na civilização helênica e esse processo, como vimos, foi importante para o estudo posterior das propriedades geométricas das cônicas de Apolônio.

Em meados do século V a.C., vimos uma série de questionamentos e problemas de cunho teórico e filosófico que contribuíram para abalar o sistema de idéias do coletivo de pensamento com relação à aritmética e as idéias e instrumentos associados às configurações retilíneas e curvilíneas. Mesmo assim, vimos que essas exceções ao estilo de pensamento dominante, provocadas por problemas como a incomensurabilidade e os paradoxos de Zenão, não foram elucidadas por um caminho totalmente favorável ao desenvolvimento da geometria analítica. De fato, o expediente usado pelos gregos para superar as dificuldades relativas às idéias de variabilidade e continuidade, impostas pelos paradoxos e a incomensurabilidade contra o fundamento aritmético da teoria das proporções, consistiu em uma geometrização radical do pensamento matemático. Como vimos, a aritmética perdeu então todo o seu prestígio associado à teoria das proporções que ocasionou o seu desligamento total da geometria.

Desse modo, a partir de meados do século V a.C., surgiu uma nova configuração estilística para a atividade matemática pautada exclusivamente em idéias geométricas. Nesta configuração, a matemática se desenvolveu em um estilo sintético guiado por construções geométricas ao invés de cálculos aritméticos e isso impediu o desenvolvimento de uma álgebra naquela época. A ênfase em construções geométricas, como vimos, acompanhou os enunciados dos problemas clássicos e as resoluções destes estavam ligadas a introdução de novas curvas que, por sua vez, eram construídas por novos métodos de construção geométrica. Como vimos, a aura estilística do momento tinha impedido os gregos de explorar todas as possibilidades que os métodos mecânicos e esteriométricos poderiam proporcionar em nível de teoria geral de curvas. De todo modo, uma das grandes proezas dos gregos quanto à introdução de curvas por meios esteriométricos com conseqüências históricas para a geometria analítica foi o desenvolvimento – em termos matemáticos – da idéia de coordenadas que auxiliou a determinação das propriedades geométricas das seções cônicas de Apolônio. Mas, à ênfase do coletivo de pensamento em resolução de problemas sem a preocupação com generalizações acarretou, como vimos em uma perda gradual da criatividade dos matemáticos gregos e esta tendência facilitou o despontar de uma nova configuração estilística na atividade matemática helênica com orientação heurística e não mais dedutiva.

Assim sendo, a partir do século II, a atividade matemática se baseou numa linha pragmática do pensamento na qual a aritmética e a álgebra se destacavam. Como o estudo da geometria foi descartado, naturalmente houve pouquíssimas contribuições a geometria analítica. Dessas poucas contribuições, vimos que a idéia de coordenadas aplicada a astronomia e geografia, contribuiu para o desenvolvimento posterior da idéia de coordenadas retangulares na geometria analítica, ainda que Boyer, em função do seu internalismo, reconheceu que a ligação aparente das latitudes e longitudes com as coordenadas retangulares não influiu diretamente na teoria analítica de curvas, mas conforme a epistemologia de Fleck o desenvolvimento dos conceitos ocorre de forma gradual e não repentina. Na álgebra, vimos que a única contribuição para a geometria analítica ocorreu no campo das notações das equações da *Aritmética* de Diofanto cujos termos – de tais equações – mesclavam símbolos com expressões verbais, e isso foi uma evolução em direção à linguagem algébrica essencialmente simbólica da *Geometria* de Descartes.

Na última fase estilística da atividade matemática da antiguidade, que se iniciou a partir do final do século III, vimos que os pressupostos epistemológicos da fase geometrizada do pensamento matemático voltaram a ser considerados, mas com uma ênfase tanto heurística quanto dedutiva, na qual o caminho da demonstração dos teoremas e da resolução dos problemas não era mais ocultado. Nesta perspectiva, vimos que a sistematização do método analítico dos antigos por parte de Pappus foi de grande importância para a geometria analítica que iria tomar posse de tais procedimentos. Mas a principal contribuição desta época para a geometria analítica foi o problema das três e quatro retas estudado por Pappus, que embora não o tenha resolvido para todos os casos possíveis, deixou um caminho aberto para Descartes que completou depois a resolução do geômetra alexandrino e descobriu, assim o principio fundamental da geometria analítica.

Na época medieval, vimos que entre os séculos V e XII, a atividade matemática se concentrou em três civilizações do oriente. A civilização árabe tinha herdado todo o desenvolvimento das primeiras civilizações, em especial a aritmética dos hindus e a geometria dos bizantinos, e as principais contribuições árabes ao desenvolvimento da geometria analítica ocorreram no campo da álgebra. Como vimos, os métodos gregos de resolução de cúbicas foram aprofundados e as resoluções das quadráticas eram realizadas algebricamente e validadas geometricamente, uma idéia que foi utilizada em grande parte da *Geometria* de Descartes. Os numerais hindu-arábicos, como vimos, contribuíram para o desenvolvimento posterior das técnicas algorítmicas na álgebra de Viète. Estas foram fundamentais para que o parisiense transformasse, posteriormente, a análise geométrica dos antigos em uma análise algébrica. Mas, os árabes tinham adotado uma álgebra retórica que, como vimos se desviou totalmente dos cálculos sincopados dos hindus e isso retardou naturalmente o desenvolvimento da álgebra, conseqüentemente da geometria analítica, pois os conceitos de variável e equação de uma curva só seriam formados na modernidade quando os matemáticos voltaram a se deter com questões de abreviaturas e símbolos. No ocidente vimos que antes do século XII a atividade matemática não era tão desenvolvida quanto nas civilizações do oriente. Desse modo, nesse período vimos que a única contribuição ocidental para a geometria analítica ocorreu nas artes práticas donde as coordenadas retangulares eram usadas em tratados de astronomia. Mas, no século XII vimos que passou a haver um contato do mundo ocidental com as produções matemáticas do oriente mediante os tratados árabes e gregos que eram então traduzidos. Ainda assim, vimos que essas traduções só agradaram as classes mercantis que chegaram a propor os algarismos hindu-arábicos em troca dos romanos em tratados de álgebra publicados no começo do século XIII, mas esses tratados não foram bem vistos pelo imaginário coletivo que se encontrava alinhado com a ciência e filosofia de Aristóteles.

Daí, vimos que entre meados do século XIII até os finais do século XIV a atividade cientifica se dirigiu para um estudo quantitativo do movimento. O estudo da latitude das formas, embora fosse conduzido por filósofos e não por matemáticos, apresentou algumas idéias levemente associadas á geometria analítica, como o sistema de coordenadas ortogonais, a variação de grandezas, e a relação entre funções e proporções. Como vimos, essas idéias se relacionavam claramente aos desenvolvimentos posteriores do cálculo tanto que a aura estilística do período não possibilitou a substituição da teoria das razões de Arquimedes em equações hindu-arábicas e nem da própria latitude da formas em uma geometria algébrica. Na realidade, o estudo quantitativo das variações entre as grandezas sobressaiu-se em relação a qualquer possibilidade de investigação numa das três linhas de pensamento da primeira fase da matemática medieval.

Ao longo do renascimento, vimos uma retomada dos estudos orientais em álgebra e isso acarretou desenvolvimentos graduais nesse campo tanto em nível de notações, como de operações e conceitos. Como vimos, esses desenvolvimentos foram acompanhados de uma investigação do pensamento coletivo a respeito do método usado pelos antigos para resolver problemas geométricos. Esses dois processos, como vimos, concorreram para o surgimento de uma perspectiva algébrica para o estudo da geometria euclidiana, o que levou de forma inexorável ao surgimento da geometria analítica no segundo terço do seiscentos, período a qual estudaremos no próximo capitulo.

2. A transformação da matemática na segunda metade do século XVII

Considerações Iniciais

O objetivo desse capítulo é analisar uma das principais linhas de desenvolvimento da matemática do século XVII: a intervenção de métodos algébricos na geometria. Este processo, estudado na seção 1.3, iniciou-se no renascimento com a investigação algébrica dos problemas determinados da geometria. Mas no segundo terço do seiscentos, Descartes e Fermat irão aplacar esse modelo hegemônico de resolução de problemas, e obterão assim resultados inovadores na solução algébrica de problemas indeterminados – embora apenas um deles publicará os seus resultados e por isso participará mais efetivamente na transformação estilística da matemática na segunda metade do século XVII. Assim, no decorrer desse capitulo daremos uma ênfase especial as figuras de Descartes e Fermat, na medida em que os seus respectivos tratados – a *Geometria* e a *Introdução* – concretizaram o potencial da atividade matemática seiscentista de articular as equações indeterminadas com as linhas geométricas, o que culminará na descoberta do que denominamos, atualmente, de principio fundamental da geometria analítica. Mas, para explicarmos o contexto social no qual a nova geometria despontou, será necessário levar em conta uma série de elementos que determinarão a operacionalidade da ciência moderna, em particular da matemática. Ademais, não menos importantes para também se ter em conta são os mecanismos que direcionarão a circulação de pensamento entre os matemáticos da época, como também a própria complexidade da atividade matemática em geral – marcada por um amplo espectro de concepções sobre a natureza dessa ciência. A descoberta da nova geometria será analisada aqui como um fato científico que provém da investigação coletiva de problemas indeterminados até então não muito bem vistos pelo estilo de pensamento da época. As soluções anômalas desses problemas por instrumentos analíticos, encabeçadas por Descartes e Fermat, vão acarretar não apenas na descoberta do método das coordenadas – próprio da nova geometria – mas também, com o decorrer do tempo, em mutações gradativas do estilo de pensamento vigente. Como vimos no primeiro capitulo, este processo de complicações de um estilo de pensamento é freqüente na história da matemática e ele conduz fatalmente a novas descobertas, se levarmos em conta a teoria epistemológica de Fleck, segundo o qual:

> Com vistas à sociologia do saber é importante constatar que as grandes mudanças no estilo de pensamento, ou seja, descobertas significativas, muitas vezes surgem em épocas de conturbações sociais generalizadas. Esses “tempos conturbados” apontam para o conflito das opiniões, as diferenças dos pontos de vista, as contradições, a falta de

> clareza, a impossibilidade de perceber, de maneira imediata, uma forma (*Gestalt*) ou um sentido; é esse estado que nasce um novo estilo de pensamento. (FLECK, 2010: 145)

Mas, o fato é que será a partir da publicação da *Geometria* de Descartes – o que não ocorreu com a *Introdução* de Fermat – que se concretizará efetivamente o processo de implantação do estilo de pensamento analítico que substituirá o estilo sintético e isso, naturalmente, exigirá um posicionamento da nossa parte quanto às possíveis razões da não publicação da obra de Fermat para além da nossa hipótese inicial – para o problema em pauta – do seu pequeno capital simbólico em comparação ao de Descartes, mas uma chave precisa para a compreensão dessa linha de investigação será dada na ultima parte deste capitulo, mais precisamente na segunda seção quando iremos investigar em termos epistemológicos os traços estilísticos dos coletivos que participaram da formação matemática de Descartes e Fermat. Essa investigação se embasará na epistemologia de Fleck na medida em que, para ele, os fatores sociais, históricos e psicológicos – presentes na experiência dos sujeitos nos vários coletivos aos quais eles participam – influenciam de uma maneira ou de outra, nas suas construções teóricas relativas á realidade. De fato, a "percepção da forma (*Gestalt*) imediata exige experiência numa determinada área de pensamento." (FLECK, 2010: 142) Por isso, faremos então uma analise das *Gestalts* de Descartes e Fermat e analisaremos de que maneira elas influenciaram nas construções das suas geometrias e principalmente, se o maior ou menor distanciamento dessas respectivas *Gestalts* para com a aura estilística dominante influenciou de alguma forma na divulgação de seus tratados.

2.1 A descoberta da geometria analítica por Descartes e Fermat

Ao longo do século XVII, o conhecimento matemático apresentou-se como um misto de atividades praticadas por diferentes coletivos que conservavam os seus próprios valores, métodos e objetivos acerca dessa ciência. Cada um desses coletivos tinha as suas próprias perspectivas[67] acerca da natureza da matemática que se refletiam nas suas práticas sociais – orientadas em termos culturais por um estilo de pensamento. A fragmentação da matemática seiscentista é uma conseqüência da estrutura curricular do cenário universitário da modernidade que valorizava apenas a medicina, a teologia e o direito como profissões admissíveis para os estudantes. Sem status de uma profissão a matemática favoreceu a existência de concepções diferentes acerca da sua constituição, pois não havia um comunicado universitário oficial para unificá-la em métodos e objetivos bem traçados. Desse modo, o desenvolvimento da matemática seiscentista se instalou fora[68] da universidade e as grandes descobertas que surgiram nessa época foram realizações de autodidatas, como nos informa Urbaneja:

> Tal como na Idade Média, durante o século XVI e grande parte do XVII o currículo matemático que desenvolveu as universidades não se estendeu mais além dos seis primeiros livros dos *Elementos* de Euclides, de modo que as matemáticas tinham um caráter quase que secundário. A universidade não formou nenhuma das grandes figuras matemáticas do momento. (URBANEJA, 2008: 32)

---

[67] O coletivo dos geômetras clássicos, que surgiu como um ramo do humanismo renascentista em voga na França e na Itália buscou preservar a filosofia da matemática clássica – pautada em um estilo sintético de exposição – mediante traduções, recuperações e reconstruções dos grandes tratados gregos. A tradição cossista, em voga na Itália e na Alemanha, enfatizava o desenvolvimento de métodos sofisticados de resolução de problemas com fins práticos ligados as operações comerciais. O coletivo dos matemáticos místicos visava decifrar a chave simbólica do conhecimento universal mediante o estudo da teoria dos números – que compreendia o conjunto dos números inteiros. Os artistas e artesãos ao buscarem apresentar uma reprodução da realidade tão fiel como possível, desenvolveram a perspectiva que levou a descoberta da geometria projetiva por parte de Desargues e Pascal. Os matemáticos aplicados conseguiram ultrapassar a distinção clássica entre o matemático e o mecânico e incentivaram a pesquisa em instrumentos matemáticos – inspirados em conceitos geométricos de Arquimedes, Heron e Ptolomeu que eram reinterpretados aritmeticamente – com vistas à satisfação das necessidades sociais do momento. Conforme explica Urbaneja os analistas possuíam vários princípios em comum com quase todas as tradições matemática descritas anteriormente: "compartilhavam com os geômetras clássicos sua profunda admiração para com as fontes gregas, contribuindo inclusive para a sua restauração (tal é o caso de Fermat); sentiam como os místicos a necessidade de criarem uma arte simbólica de raciocínio que pudesse unificar e decifrar toda a matemática; utilizavam a álgebra como um poderoso instrumento algorítmico para resolver problemas; assimilaram as tendências da matemática aplicada em ordem a considerar o legado clássico grego como o princípio de seus desenvolvimentos, mas sem se deixarem midiatizar por nenhum cânone estereotipado de filosofia das matemáticas; e desenvolveram um potente instrumental científico, donde o importante era a resolução dos problemas e a abertura de novas vias de descobrimento" (URBANEJA, 2008: 32).

[68] De fato, não havia um programa completo de educação matemática nas universidades que abarcasse todas as grandes descobertas matemáticas do período – que surgiam fora da academia. Nos currículos universitários os conteúdos matemáticos não se estendiam para além de tópicos como Geometria Plana, Cálculo Elemental, Contabilidade e Geometria Esférica aplicada a Astronomia e a Geografia. (Cf. Mateos, 2005: 24)

Soma-se a isso o fato de não existir periódicos especializados até o último terço do seiscentos, o que denota o quanto peculiar era a organização do mundo cientifico naquela época. Essas características na conjuntura científica do século XVII, em especial a falta de periódicos especializados até 1665 – ano de fundação do periódico mais antigo voltado para o campo da ciência, o célebre *Le Journal des Savants*[69] – fizeram com "que a forma principal de comunicação das investigações entre os matemáticos fosse à correspondência através de cartas." (URBANEJA, 2008: 33) O padre Mersenne (1588-1648) foi o grande agente dessas circulações postais na França. Ele mantinha contato com grande parte dos autodidatas da época mediante correspondências e reuniões[70] numa busca insaciável de socializar resultados, teoremas e teorias que chegavam até as suas mãos. Os trabalhos de Descartes (1596-1650) e Fermat (1601-1665) referentes à geometria analítica tornaram-se públicos graças ao esforço de Mersenne em espalhar as suas idéias ao coletivo parisiense a qual ele fundara. Conforme Urbaneja (2008: 34), Descartes foi um grande amigo de Mersenne desde 1606, quando o conheceu no colégio jesuíta de *La Flèche*, enquanto que Fermat, segundo o mesmo autor (2008: 46-51), apenas conheceu o reverendo em 1636, quando era um jurista do parlamento de Tolouse e compartilhava a paixão pelas matemáticas com o seu colega de profissão Carcavi. Ao se surpreender com a genialidade de Fermat referente às matemáticas, Carcavi decidiu informar a Mersenne acerca dos resultados importantes de seu colega. A aceitação de Fermat foi imediata, e, em 1636, ele trocou uma série de cartas com o reverendo e com os membros do circulo parisiense, e assombrou o ambiente intelectual da época com uma série de problemas. Mesmo as mentes mais capazes do circulo de Mersenne como Blaise Pascal, seu pai Etiène Pascal e o professor Roberval não conseguiram resolver os desafios de Fermat. Este se negou a publicar seus métodos de resolução, apesar dos inúmeros pedidos – cobertos de promessas de apoio incondicional na publicidade dos resultados – o que levou Urbaneja a conjecturar, em razão do desleixo de Fermat para com seus papéis, "que alguns deles foram publicados por algum matemático, algumas vezes com a aprovação de Fermat e outras sem seu consentimento" (URBANEJA, 2008: 33). Urbaneja (2008: 33) considera que a baixa freqüência de publicações matemáticas da época alinhada à indisposição dos editores para com a literatura matemática – muito por conta do pequeno prestígio que ela detinha em termos acadêmicos – influiu de maneira decisiva na escolha de Fermat em não publicar seus resultados naquele momento. Mas, esse seria um hábito que ele carregaria por toda a sua vida.

[69] Este periódico foi fundado em Paris no dia cinco de janeiro de 1665 visando à divulgação de informações concernentes as investigações, descobertas, experiências e discussões cientificas candentes do momento. (Cf. Urbaneja, 2008: 33)

[70] No pequeno convento dos frades mínimos de Paris, Mersenne promovia encontros com a elite intelectual da época, na sua maioria composta por autodidatas liderados por Etiêne Pascal que dirigia essas reuniões – concentradas na discussão de questões científicas emergentes da época. (Cf. Urbaneja, 2008: 34)

Em 1637, Fermat anuncia, e envia, ao padre Mersenne, um manuscrito intitulado *Introdução aos Lugares Planos e Sólidos* – fruto das suas pesquisas em Bordéus a partir de 1629 que estavam conectadas a sua reconstrução dos *Lugares Planos* de Apolônio – em que ele apresenta uma teoria geral sobre lugares geométricos que não desenrola os seus desafios anteriores, mas apresenta a sua visão crítica acerca do estilo de pensamento da matemática da época. Nesse pequeno opúsculo ele comprova que todas as cônicas estudadas por Menaecmo e Apolônio na antiguidade, poderiam ser descritas de uma forma mais simplificada que envolveria equações indeterminadas estudadas em sua gênese por Diofanto. Aproximadamente ao mesmo tempo, Descartes organizava para serem editadas as provas de granel do seu *Discurso do método*, que compreendia três apêndices, dentre os quais se encontrava a obra *A Geometria*. Ambos os tratados, *Introdução* e *Geometria* haviam apresentado o princípio fundamental da geometria analítica – a constatação de uma relação mútua entre equações indeterminadas e curvas – e as técnicas apresentadas pelos autores para tratar problemas geométricos à maneira algébrica eram semelhantes.

Portanto, Descartes e Fermat foram os precursores da geometria analítica, e em razão disso não se discutirá aqui a prioridade da sua descoberta, mas a inter-relação de circunstâncias que motivaram a mesma, pois "mais importante para o historiador é a questão da simultaneidade, já que ela revela a existência de um contexto de problemas e ferramentas comuns." (ROQUE, 2012: 332). No início do século XVII, a matemática – em especial a geometria – estava ainda impregnada à metodologia euclidiana que se apoiava num estilo sintético de exposição, que submetia os problemas a um verdadeiro esboço excessivo de figuras, exigindo em cada situação, uma nova inspiração para o encontro das soluções. Tal dificuldade no tratamento das soluções dos problemas não agradava a esses pensadores.

No *Discurso do método* de 1637, Descartes atesta que o método sintético estava "tão ligado à consideração das figuras que não pode propiciar a compreensão sem cansar muito a imaginação" (DESCARTES, 2000: 49). Ademais, em 1628 – ano provável de redação das *Regras para a direção do espírito* – o sábio de *La Fléche* já constatava, particularmente na Regra IV, que a rigidez desse método apresentava "verdades estéreis demonstradas com um sutil rigor lógico" (Idem, 1999: 26), que ofuscava as vias inventivas das soluções que se fossem reveladas teriam "exaurido completamente a admiração" (Ibidem, 1999: 26).

> Para Descartes, as demonstrações matemáticas não tinham somente o papel de convencer e estabelecer uma certeza; deviam, sobretudo, esclarecer a natureza do problema e propor métodos de invenção direta que permitissem resolvê-lo. Por isso ele rejeitava a demonstração por absurdo. (ROQUE, 2012: 318)

Sendo assim, era preciso descobrir um método[71] que pudesse assegurar não só a rigorosa demonstração dos resultados, como também o descobrimento dos mesmos. Assim, tinha sugerido Fermat no preâmbulo da *Introdução*:

> Que os antigos haviam tratado amplamente sobre os lugares não se pode duvidar; o sabemos por Pappus, que na introdução do livro VII, testemunha que Apolônio havia escrito sobre os lugares planos e Aristeu sobre os lugares sólidos, mas se não nos enganamos, a investigação sobre os lugares não o resultava nada fácil, o que conjecturamos com base no fato de que para um grande número de lugares fracassaram em estabelecer o problema de maneira geral. Submetemos, portanto, essa teoria a uma análise que é própria e particular, e que abre o caminho geral para investigação dos lugares. (FERMAT, 1891/1912: 85)

De acordo com Katz (2010: 542), o pano de fundo da *Introdução* de Fermat e da *Geometria* de Descartes era o interesse mútuo em "redescobrir as técnicas gregas perdidas da análise" e como tinham "estudado os trabalhos de Viète e via neles a chave para compreensão da análise dos gregos" (KATZ, 2010: 549), Descartes e Fermat decidiram aplicar a mecânica algorítmica da álgebra simbólica de Viète aos problemas geométricos de Apolônio e Pappus que envolviam equações indeterminadas, obtendo, assim, resultados satisfatórios expressos num sistema incipiente de coordenadas. Dessa forma, a *Arte analítica*[72] de Viète foi à ferramenta usada por Descartes e Fermat na recriação da via inventiva da análise geométrica dos gregos, propiciando a descoberta da geometria analítica mediante a conseqüente resolução dos problemas geométricos por meio da

[71] Na realidade, a *Geometria* de Descartes foi publicada com o objetivo de aplicar o seu novo método nas Matemáticas, isto é, a álgebra dos modernos e a análise geométrica dos antigos, a primeira tinha evoluído da sua antiga linguagem retórica e se encontrava agora numa forma sincopada que mesclava aspectos simbólicos com aspectos retóricos, no entanto ela estava ainda atrelada "a determinadas regras e cifras que se fez dela uma arte confusa e obscura que atrapalha o espírito, em vez de uma ciência que o cultiva." (DESCARTES, 2000: 49) A análise geométrica por sua vez, estava "tão ligada á consideração das figuras que não pode propiciar a compreensão sem cansar muito a imaginação" (Idem, 2000: 49). Portanto, era necessário reconstruir as matemáticas, tanto a álgebra dos modernos quanto a análise geométrica dos antigos mediante um novo método que "tomaria de empréstimo o melhor da análise geométrica e da álgebra, e corrigiria todos os defeitos de uma pela outra." (Ibidem, 2000: 51) Desse modo, ao associar a álgebra dos modernos com a geometria dos antigos, mediante um programa de reformulação da notação sincopada e da metodologia sintética aplicado em sua *Geometria,* Descartes dá inicio a criação de uma ferramenta ancorada em sua álgebra simbólica que soluciona impecavelmente os problemas geométricos dos antigos, dentre eles o problema de Pappus – donde ele estabelece um sistema de coordenadas incipiente – e especialmente o problema da normal a uma curva, no qual ele estabelece, ainda que de forma indireta, o princípio fundamental da geometria analítica, segundo o qual: "(...) no que diz respeito a todas as outras propriedades que se podem atribuir às linhas curvas, elas só dependem das grandezas dos ângulos que fazem com algumas outras linhas." (DESCARTES, 2010: 521-522) Conforme explica Boyer (2004: 94) esta afirmação de Descartes dá a entender que "as propriedades são determinadas pela equação de uma curva".

[72] A expressão *Arte analítica* faz referência à obra *Introdução à arte analítica* escrita por Viète na Renascença em que ele propõe os conceitos revolucionários de parâmetro e incógnita que abriram caminho para o estudo sistemático das equações polinomiais.

síntese algébrica. Portanto, ao que tudo indica, a geometria analítica foi descoberta de maneira independente, tanto por Descartes, que publicou a sua *Geometria* em 1637, como por Fermat, em escritos precedentes, mas não publicados. Isso nos leva a deduzir que os dois pensadores possuem méritos especiais, o primeiro com relação à ordem da publicação, o segundo a do tempo. Embora a *Introdução* e a *Geometria* tivessem como fundamento as idéias da *Arte analítica*, Boyer (2004: 74) considera que as geometrias de Fermat e Descartes deram continuidade às idéias viètianas em direções um pouco diferentes. Assim, Fermat tinha conservado a linguagem sincopada do seu mestre, mas ele decidiu empregá-la em uma nova conexão que foi o estudo de lugares geométricos. Descartes, por seu turno, seguiu o caminho da *Arte analítica* que era a construção geométrica das raízes das equações algébricas, mas ele deu seguimento a esse caminho com o auxilio do simbolismo algébrico moderno divulgado em tratados de álgebra posteriores a *Arte analítica* – como vimos no final da seção 1.3.

De fato, na virada do século XVI para o XVII, os avanços consecutivos em álgebra criaram condições favoráveis para a intervenção do pensamento analítico na constituição das matemáticas, em particular na geometria. Mesmo assim, o pensamento sintético ainda conservava, até então, a sua condição epistemológica privilegiada no imaginário coletivo da época. Dessa forma, os principais tratados geométricos publicados no século XVII davam particular importância às construções geométricas na medida em que elas eram indispensáveis na validação das soluções algébricas – dos problemas determinados – alcançadas por meio de equações. Em compensação, esses mesmos tratados, mostravam que o método analítico era tão eficiente quanto o sintético para resolver os problemas clássicos da geometria. Além do mais, as restaurações dos tratados perdidos[73] da geometria grega em termos da linguagem algébrica, realizadas pelos matemáticos seiscentistas, muitos dos quais eram discípulos de Viète, revelavam ao imaginário coletivo a possibilidade de aplicar o método analítico na solução dos problemas indeterminados[74].

> No inicio do século XVII, a aplicação da álgebra a problemas geométricos tinha se tornado uma pratica habitual, mas investigavam-se, sobretudo problemas que levavam a equações determinadas. As solução de equações de grau 3 e 4 popularizaram-se e os

[73] Estes tratados perdidos foram descritos por Pappus no livro VII, chamado de *Tesouro da análise* que fez parte da sua *Coleção matemática* que foi traduzida para o latim em 1588.

[74] Os problemas indeterminados haviam sido estudados não apenas nos tratados dos geômetras gregos comentados por Pappus no *Tesouro da análise*, mas também na *Aritmética* do algebrista egípcio (helenizado) Diofanto, que foi traduzida para o latim em 1575. Mas o fato é que os problemas indeterminados de vertente geométrica – como o problema de Pappus estudado por Descartes e o próprio problema de Apolônio estudado por Fermat – permitiram “exprimir lugares geométricos por meio da álgebra” o que fará intervir “equações indeterminadas com duas quantidades desconhecidas variáveis” e por isso embora “essas equações eram análogas a alguns exemplos estudados por Diofanto” na *Aritmética* a diferença é que elas exprimem tanto na *Geometria* de Descartes quanto na *Introdução* de Fermat “soluções para problemas de lugares geométricos” (ROQUE, 2012: 333) ao passo que na *Aritmética* de Diofanto elas são estudadas em termos aritméticos e por isso representavam soluções de problemas algébricos.

problemas indeterminados, que apareciam na *Aritmética* de Diofanto [bem como no livro VII da *Coleção matemática* de Pappus], começaram a despertar interesse. (ROQUE, 2012: 332, grifo nosso)

Duas personalidades que compreenderam melhor essas possibilidades foram Descartes (embora este não se considerasse discípulo de Viète) e Fermat (discípulo assumido de Viète), que de forma praticamente simultânea e independente, decidiram implantar o método analítico na solução dos problemas indeterminados – que até então não atraíam muito a atenção do imaginário coletivo – o que acarretou, por volta da terceira década do seiscentos, na descoberta daquilo "que hoje é denominado geometria analítica e que consiste no estudo da geometria por meio de equações" (GARBI, 2010: 63).

Descartes e Fermat tinham de fato, condições de desenvolver uma nova geometria porque o clima do momento estava indicando esta direção. Duas mentes privilegiadas, guiadas pelo interesse particular na solução analítica de um dado problema indeterminado – Descartes resolveu o problema de Pappus e Fermat o de Apolônio – puderam então assimilar os resultados apresentados e desenvolver os seus estudos naquele momento. No entanto, as inovações em tais estudos, face ao conhecimento matemático empregado na época, não podem ser superestimadas na medida em que o processo de conhecimento não é apenas fruto de uma mente talentosa, mas antes "o resultado de uma atividade social, uma vez que o respectivo estado do saber ultrapassa os limites dados a um indivíduo" (FLECK, 2010: 81-82). Nesse sentido, as geometrias de Descartes e Fermat devem ser analisadas como um resultado em meio às possibilidades[75] da atividade matemática da época.

[75] De fato, quando o germe de uma ciência esta no ar, ele pode ser alcançado por um ou mais criadores. Conforme explica Urbaneja (2008: 34) no século XVII "muitos matemáticos se planejavam a resolver os mesmos problemas" e essa atmosfera heurística produziu "diversos casos de descobrimentos independentes e simultâneos de métodos e técnicas parecidos" que somado ao "conhecimento fragmentário" que cada matemático tinha do trabalho do outro, "provocou numerosas disputas, reclamações de prioridade, e acusações de plágios" entre eles. Este não foi o caso da geometria analítica de Descartes e Fermat, que embora tenha sido descoberta, por eles, de maneira independente e simultânea, Boyer (2004: 101) explica que "a ausência de qualquer controvérsia prioritária" envolvendo os métodos analíticos na geometria – diferentemente do episódio envolvendo os métodos infinitesimais nas geometrias de Leibniz e Newton – "era, muito provavelmente, devido à diferença em objetivo" envolvendo a *Introdução* e a *Geometria*. Portanto, na *Introdução* Fermat enfatizava "o estudo algébrico dos lugares" enquanto que na *Geometria* Descartes "estava interessado principalmente com a construção dos problemas em geometria através da solução geométrica de equações." (BOYER, 2004: 83) Se na *Geometria* observamos que as curvas são construídas por movimentos mecânicos – que de certa forma condicionavam a correspondência de uma curva com uma determinada equação – na *Introdução* vemos um esboço de curvas dadas, previamente, por equações indeterminadas. Além disso, Boyer (2004: 103) atesta que Fermat não compreendeu plenamente – talvez por conta da sua modéstia – o valor do seu método como instrumento útil a serviço da matemática de seu tempo, enquanto que Descartes tinha compreendido perfeitamente o valor do seu método, mas ele, ao contrário de Fermat, era um péssimo expositor. De fato, "Descartes escreveu a *Geometria* não para explicar, mas para gabar sobre o poder do seu método." (BOYER, 2004: 103) Tudo isso somado aos diferentes estilos de pensamento de cada pensador fizeram com que um não compreendesse bem o valor da obra do outro, especialmente Fermat que em razão da incompreensão do valor do seu próprio método, por conseqüência, a sua compreensão do valor da *Geometria* ficou comprometida. Desse modo, o jutista de Tolouse insinuou que "os métodos de Descartes eram quase os mesmos daqueles de Viéte, salvo para uma mudança sem importância em notação." (BOYER, 2004: 100) Na

A um só tempo, Descartes e Fermat lançaram assim as sementes para uma série de mutações graduais no estilo de pensamento da matemática seiscentista cujos pressupostos apoiavam-se, até então, nos *Elementos* de Euclides. Dessa forma, suas novas geometrias opuseram-se ao modelo de excelência da atividade matemática da época que era o método sintético esboçado nos *Elementos*, tal método – usado na demonstração de teoremas e na solução de problemas – era uma manifestação de certeza, rigor e racionalidade, características primordiais da obra magna de Euclides. Na antiguidade, Euclides supostamente teria declarado a Ptolomeu I que não havia nenhum caminho real para a geometria além dos *Elementos*. A confiança do geômetra alexandrino no poderio do seu método era absoluta, e isso refletia nos princípios do estilo de pensamento dos matemáticos seiscentistas, mas esse método caiu por terra com a descoberta da nova geometria. A nova geometria desconstruiu, portanto, muito dos princípios do coletivo de pensamento da modernidade, sendo que o principal deles, o método sintético – que se baseava em construções geométricas – foi substituído pelo método analítico – que se baseava em relações envolvendo grandezas algébricas. No entanto, a teoria axiomática, bem como o método da análise e síntese[76] que faziam parte do imaginário coletivo da época, não foram completamente abandonados pelos artífices da nova geometria, e isto confirma o caráter evolucionário da ciência defendido por Fleck:

> Nunca um fato é completamente independente de outros: ou se manifestam como um conjunto mais ou menos coeso do sinal particular, ou como sistema de conhecimento que obedece a leis próprias. Por isso, cada fato repercute retroativamente em outros, e cada mudança, cada descoberta, exerce um efeito em um campo que, na verdade, não tem limites: um saber desenvolvido, elaborado na forma de um sistema harmonioso, possui a caracteristica de cada fato novo alterar todos os anteriores, por menor que seja essa alteração. Nesse caso, cada descoberta é, na verdade, a recriação do mundo inteiro de um coletivo de pensamento. (FLECK, 2010: 153)

Para Fleck, as transformações estilísticas na ciência – motivadas pelas suas grandes descobertas – se assentam em um processo dinâmico e contínuo. Assim sendo, a geometria dos seiscentos se desenvolveu mediante sucessivas mutações – e não rupturas ou revoluções drásticas – no estilo de

realidade, a simplicidade de Fermat e a falta de compromisso com a didática da parte de Descartes contribuíram efetivamente para uma ausência de controvérsia quanto aos métodos da nova geometria.

[76] Esse método, no entanto, foi retratado de forma diferente na *Introdução* por Fermat e na *Geometria* por Descartes. De fato, na *Introdução*, Fermat tinha o hábito de "finalizar sua análise, deixando para o leitor a tarefa de completá-la por uma síntese" (MAHONEY: 1994: 85), pois, para ele, era fácil remontar da análise para a síntese. Conforme Urbaneja (2003: 107), na *Geometria* Descartes, por outro lado, se propõe a resolver problemas geométricos mediante a aplicação de "todo um protocolo de atuação" no qual ele pressupõe "o problema resolvido e considera a relação entre as linhas, o que o leva a formulação de equações, isto é, o estudo analítico se complementa com a síntese algébrica" que por sua vez, "leva a construção da solução", uma preocupação metodológica que praticamente inexistia em Fermat.

pensamento da época que desestruturaram a harmonia das ilusões do sistema de opiniões do coletivo de pensamento, dessa forma princípios basilares como a homogeneidade dimensional euclidiana, as construções platônicas com régua e compasso, a incomensurabilidade pitagórica, a limitação tridimensional e tantos outros foram abalados[77], com o transcorrer do tempo, pelo pensamento analítico de Descartes e Fermat.

O surgimento da nova geometria comprova que os conceitos e as técnicas de Euclides – compartilhados até então pelo coletivo de pensamento seiscentista – não eram rígidos e as suas transformações executadas por Descartes e Fermat mostram também que não há necessariamente um acúmulo de conhecimento no desenvolvimento das matemáticas, mas sim uma substituição de pressupostos como defendia Fleck. Essas substituições, evidentemente, não foram repentinas, mas graduais, afinal de contas, a influência da tradição dominava os sistemas de opiniões dos círculos científicos da modernidade.

> Quando uma concepção penetra suficientemente num coletivo de pensamento, quando invade até a vida cotidiana e as expressões verbais, quando se tornou literalmente um ponto de vista, qualquer contradição parece ser impensável e inimaginável. (FLECK, 2010: 70)

Desse modo, tanto Descartes quanto Fermat tiveram dificuldades para que suas idéias fossem assimiladas pelo coletivo de pensamento. O jurista de Toulouse não publicou a sua *Introdução* que continha os princípios da nova geometria, este opúsculo foi apenas enviado na forma de manuscrito aos geômetras parisienses do círculo postal de Mersenne em 1637. Mas o tratado foi repudiado já que trazia proposições algébricas sem a demonstração sintética e isso violava os princípios do estilo de pensamento dominante. Fermat tentou se desculpar com Mersenne alegando que "seus resultados podiam despertar algum interesse ainda que não tivesse tido tempo de escrever as demonstrações" (ROQUE, 2012: 335), mas suas alegações não foram suficientes para suavizar a harmonia das ilusões que dominava o imaginário coletivo parisiense. Na realidade, Fermat não redigiu suas

[77] Em razão da especificidade dos estilos de cada pensador bem como do conteúdo e do propósito de suas obras, tais princípios foram abandonados, por eles, de maneira bem particular. Como era de se esperar de um discípulo de Viète, Fermat admirava no mais alto grau as fontes da matemática clássica, tanto que a sua *Introdução* foi uma sublimação decorrente da restauração dos *Lugares planos* de Apolônio, e por isso ele seguiu à risca – pelo menos num primeiro momento na redação da *Introdução* que antecedeu o seu amadurecimento posterior – os princípios da homogeneidade dimensional e da tridimensionalidade e abandonou-os posteriormente em trabalhos ligados a geometria infinitesimal. Descartes, por outro lado, com a redação da *Geometria* pretendia executar uma reforma das matemáticas – mediante o método cartesiano tratado teoricamente no *Discurso* – que perpassava pelo aprimoramento da álgebra dos modernos e da geometria dos antigos e por conta disso, era natural que ele criticasse quase todos os princípios da matemática clássica, contrariando o seu compatriota Fermat que comungava com boa parte deles na *Introdução*, além da própria adesão fermatiana a linguagem sincopada da *Arte analítica* que não combinava com a linguagem simbólica proposta pelo método cartesiano.

demonstrações no estilo sintético por conta da sua rejeição para com ele, ao se desculpar com Mersenne, ele queria encobrir suas intenções, pois sabia que eram inapropriadas para o estilo de pensamento da época e ainda que ele tenha prometido ao reverendo apresentar as demonstrações em um momento posterior, na realidade ele "nunca[78] chegou a fazer isso". (ROQUE, 2012: 335) Por isso, a sua promessa – que não viria a ser cumprida – não foi suficiente para reprimir o repúdio imediato da *Introdução*[79] pela comunidade parisiense a qual se mostrava ainda tributária ao estilo euclidiano de demonstração. Portanto, o estilo de pensamento vigente ao orientar a maneira de pensar e atuar dos geômetras parisienses mediante a chamada coerção de pensamento promoveu uma tendência à permanência de seus sistemas de opiniões, revelando uma harmonia das ilusões que os impediu de perceber as contribuições significativas de Fermat para o avanço da geometria euclidiana. Fleck (2010: 50) denomina este acontecimento de fase das complicações na qual as incoerências existem, mas não são suficientes para desestruturar a harmonia das ilusões do estilo de pensamento em voga. Se Fermat tivesse perseverado com suas idéias ao publicar as suas descobertas, certamente ele teria conseguido vencer a harmonia das ilusões do sistema de opiniões dos geômetras parisienses.

Diferentemente de Fermat que não quis optar pela publicação da sua *Introdução*, Descartes decidiu publicar a sua *Geometria*, conforme Katz (2010: 556) inicialmente, a obra não foi bem compreendida pelos coletivos matemáticos europeus – em razão de algumas declarações elípticas[80] que confirmavam a falta de comprometimento com a didática da parte de Descartes – e por conta

---

[78] A rejeição de Fermat em estabelecer provas sintéticas aos seus resultados não pode ser explicada em razão da sua formação analítica em Bordéus, pois Viéte fazia "questão de deixar claro, na *Introdução à arte analítica*, que suas demonstrações algébricas podiam ser revertidas com o fim de obter um argumento sintético (...)." (ROQUE, 2012: 335). De fato, havia membros da escola analítica de Bordéus – participantes do circulo de Mersenne – que repudiaram ainda assim a atitude autônoma de Fermat. Na realidade, Fermat queria se livrar da dificuldade imposta pelo rigor euclidiano em defesa da flexibilidade da demonstração analítica. Tal preocupação não poderia existir em seus colegas de Bordéus que compartilhavam em grande medida, com o estilo de pensamento da atividade matemática da época, enquanto que Fermat estava mesmo questionando um ponto específico desse estilo de pensamento.

[79] Além da *Introdução*, Fermat tinha enviado a Mersenne em 1637 mais dois trabalhos redigidos na abordagem proporcional típica dos discípulos de Viète, são eles: a tradução aos *Lugares geométricos planos* de Apolônio e o *Método para determinar máximos e mínimos e tangentes a linhas curvas*. Mas em razão desses trabalhos terem sido redigidos antes da *Introdução* eles não enfatizavam o uso exclusivo dos métodos analíticos tal como na *Introdução* e no apêndice que a acompanhava denominado de *Solução de problemas sólidos por lugares geométricos* – donde Fermat procurava solucionar mediante interseções de lugares, interpretados a maneira algébrica, as equações cúbicas e quárticas resultantes dos problemas sólidos.

[80] Conforme Boyer (2004: 92), Descartes possuía um conhecimento profundo da idéia de transformação de coordenadas – usada com certa atenção especial por parte de Fermat na *Introdução* – tanto que em 1638 o sábio de *La Fléche* apresentou a Roberval a curva equivalente a $\frac{y^2}{x^2} = \frac{1-x}{1+3x}$ na expectativa de ser capaz de ridicularizá-lo pelo seu desconhecimento até então da presente curva como uma folium rotacionada mediante um angulo de 45°. Mas a explicação dada a esse procedimento na *Geometria* não era tão didática na medida em que na presente obra ele "inclui apenas a observação que por uma escolha adequada da origem e eixos uma forma mais simples da equação é obtida, e que o tipo – isto é, o grau – da equação será o mesmo para qualquer outra escolha." (BOYER, 2004: 92) Essa falta de comprometimento com a didática da parte de Descartes levou os primeiros leitores da *Geometria* a julgá-la como um "trabalho difícil para compreender" (BOYER, 2004: 93) o que proporcionou as condições para uma série de trabalhos posteriores de edições comentadas da *Geometria* – que visavam à inserção de explicações adicionais para tornar essas passagens elípticas da presente obra compreensíveis.

disso ele encorajou os seus amigos da universidade de Leiden a traduzir a *Geometria* do francês para o latim e acrescentar comentários para clarificar as suas idéias, depois de duas versões publicadas em latim em 1649 e em 1659 por Van Schooten, a obra de Descartes finalmente alcançou a notoriedade que ele desejava. A insistência de Descartes em divulgar as suas idéias que contrapunham ao estilo de pensamento dominante foi fundamental para subverter gradativamente a rigidez da harmonia das ilusões do coletivo de pensamento, de modo que, doravante um novo estilo de pensamento surgiu valorizando agora a flexibilidade das relações algébricas em oposição à complexidade das construções geométricas euclidianas.

> Foi a partir da publicidade obtida em torno da obra de Descartes que essa nova geometria tornou-se conhecida, obscurecendo o papel de Viète. Mesmo que a qualidade matemática dos métodos de Fermat seja equiparável à apresentada por Descartes, o uso da terminologia e da notação de Viète fez diminuir sua popularidade. (ROQUE, 2012: 336)

Como se pode depreender, a *Introdução* não teve notoriedade como a *Geometria*, pois mesmo que os métodos de Fermat fossem idênticos aos de Descartes, sua insistência na abordagem analítica de Viète, assim como o emprego da sua terminologia que era retrógrada em relação à de Descartes, o prejudicaram ainda mais em sua fama.

Mas será que a notação é de fato mais importante que as idéias matemáticas? Fermat valorizava as idéias matemáticas e não se preocupava com as notações, aliás, a *Introdução* foi o único tratado que ele escreveu na linguagem sincopada de Viète enquanto que os demais tratados ele usou a antiga abordagem proporcional de Apolônio. A inovação notacional de Descartes – que propunha o abandono da forma homogênea de expressão juntamente com os resquicios de abreviações descritivas presentes na linguagem algebrica dos discipulos de Viète – foi criticada naturalmente por Fermat.

> Eu designei as quantidades desconhecidas por vogais, como fez Viète, pois não vejo a razão de Descartes fazer uma mudança em algo que é sem importância e que é puramente uma matéria de convenção. (FERMAT apud BOYER, 2004: 85)

Boyer (2004: 85) entende que para Fermat, a notação era uma questão puramente convencional e a expressão de uma idéia matemática bem elaborada não estava sujeita a sua linguagem, mas a seu conteúdo. Fermat, porém não compreendeu o lucro operacional – em termos mecânicos e algorítmicos – que se ganhava em utilizar uma linguagem puramente simbólica que proporcionava simplificação, generalidade e flexibilidade ao encadeamento das idéias matemáticas. Nesse aspecto, Descartes o superou, e a aceitabilidade da notação cartesiana por parte da comunidade matemática foi um fator fundamental para o crescimento do capital simbólico do sábio de *La Flèche*. Descartes, de fato tinha muito prestígio no círculo de Mersenne em virtude de ter estudado na Escola de *La Flèche*, por isso suas aspirações científicas eram mais ousadas que as de Fermat, isso confirma a tese de Bourdieu quanto às ambições científicas dos pesquisadores no interior de um campo científico serem condizentes aos seus capitais de reconhecimento:

> (...) as aspirações – o que chamamos muitas vezes de "ambições científicas" são tanto mais altas quanto o capital de reconhecimento é elevado: a posse do capital que o sistema escolar confere, sob a forma de um título raro, desde o começo da carreira científica, implica e supõe – através de mediações complexas – a busca de objetivos elevados, socialmente desejados e garantidos por esse título. (BOURDIEU, 1983: 134)

Assim, Descartes decidiu publicar suas descobertas em virtude do seu alto grau de legitimidade no circulo de Mersenne. Mas e quanto a Fermat? Qual foi o motivo que fez com que ele não publicasse as suas descobertas? Seu desprendimento científico estaria relacionado apenas ao seu razoável capital simbólico em comparação ao de Descartes? Somamos essas perguntas ao questionamento de Urbaneja acerca do reconhecimento injusto da posteridade para com as grandes descobertas de Fermat em vários ramos da matemática.

> Toda pessoa de cultura cientifica aprendeu que Newton e Leibniz inventaram o Cálculo Infinitesimal, Descartes a Geometria Analitica e Pascal o Cálculo de Probabilidades. Fermat é o ascendente direto de todos esses descobrimentos. Então porque Fermat não ocupa na história dessas disciplinas o lugar que lhe corresponde? (URBANEJA, 2008: 19)

O historiador Bell ao se posicionar sobre a obscuridade que caracterizou as descobertas de Fermat referentes aos ramos supracitados resolve taxar o francês de amador, um rótulo depreciativo que justifica, pelo menos em parte o questionamento de Urbaneja do porque que "Fermat não ocupa na história dessas disciplinas o lugar que lhe corresponde?"

> Se todas essas aquisições de primeira categoria não são suficientes para colocar Fermat na frente de seus contemporâneos em Matemática pura, podemos perguntar: O que ele fez mais? As criações de Fermat se manifestavam espontaneamente, pois o seu dote

> para as matematicas foi adquirido durante a sua vida embrionária. Ele era também, no sentido estrito da palavra, no que diz respeito às matematicas, um amador. Sem dúvida é um dos maiores amadores na história da ciência, e talvez seja o primeiro. (BELL, 1986: 57, tradução nossa)

Essa expressão "talvez seja o primeiro" coloca em xeque o titulo que Bell (1986: 56) atribui a Fermat de "O Príncipe dos Amadores" na abertura do capitulo quatro da sua obra *Men of Mathematics*. De fato, enquanto Descartes foi considerado por Bell (1986: 56) como "um dos grandes matemáticos de todas as épocas" o amador Fermat é visto, por ele (1986: 56), como um dos muitos "patos" que não "podem ser cisnes" dando a enteder que Fermat foi realmente um dos grandes matemáticos amadores, no entanto ele não tinha condições de alcançar o estatus de um matemático do calibre de Descartes – como se o sábio de *La Flèche* fosse verdadeiramente um matemático profissional.

Na realidade, a maioria das pessoas da época de Fermat que se dedicavam ao estudo da matemática geralmente não tinha qualquer ligação profissional com essa disciplina, pois como vimos na abertura desse capitulo, a atividade matematica do seiscentos carecia de um estatus de profissão na maior[81] parte daquele século, tal como nos informa Urbaneja:

> (...) na época de Fermat não há uma disciplina profissional das matemáticas. As pessoas dedicadas ao cultivo das matemáticas, ou não tinham uma dedicação profissional à docência das matemáticas ou sua atividade docente era raramente eventual. Por exemplo, Viète era jurista como Fermat, Descartes também havia estudado leis, mas a sua atividade principal era a milícia e a filosofia, Êtienne Pascal – que era também matemático como seu filho Blaise Pascal – era arrecadador de impostos, (...). Só Roberval tinha como atividade primordial a docência. (URBANEJA, 2008: 29)

Como quase todos os praticantes das matemáticas da época de Fermat eram autodidatas, o título de "Príncipe dos Amadores" que Bell (1986: 56) atribuiu a Fermat soa depreciativo, por conta do qualificativo "amador" que conforme Urbaneja (2008: 29) insinua que a "sua profissão de jurista não está muito próxima da criação cientifica" Na realidade, Urbaneja entende que ao situar "o

[81] O desenvolvimento gradual do estudo das matemáticas na universidade possibilitou os meios para que essa disciplina se erguesse profissionalmente. Em 1619 foi criada a cátedra professoral das matemáticas na Universidade de Oxford a qual ficou conhecida como cátedra saliviana – ocupada a partir de 1649 por Wallis –, quatorze anos depois na França, mais especificamente no Collège Royal, a cátedra de retórica de P. Ramus foi transformada em cátedra das matemáticas – que foi ocupada durante um bom tempo por Roverval – e em 1664 foi criada na Universidade de Cambridge a cátedra lucasiana – ocupada a principio por Barrow até o ano de 1669, no qual ele renuncia a favor do seu amigo e discipulo Newton. (Cf. URBANEJA, 2008: 33)

personagem em sua época tal qualificativo resulta desnecessário, pois o seu caso era geral" (URNANEJA, 2008: 29), além disso, tal qualificativo evidencia um anacronismo da parte de Bell, pois conforme explica Mahoney:

> A profissão de Fermat, no sentido estrito da palavra, era lei. Ele perseguiu a Matemática como um hobby. Mas ele também se ocupou da matematica em uma época quando a matemática não era uma profissão, em uma época quando os termos *amador* e *profissional* não podiam ser significativamente aplicados às matemáticas. (MAHONEY, 1994: 1, grifos do autor)

Dessa forma, acreditamos que o titulo de "Príncipe dos Amadores" atribuido por Bell (1986: 56) a Fermat não passa de uma alcunha[82] anacrônica que contribuiu de alguma forma para que a

[82] A prova disso é que a própria finalidade de Bell – na abertura do capitulo quatro da sua obra *Men of Mathematics* – de "justificar a afirmação, frequente feita e raras vezes discutida, de que o maior matemático do século XVII foi o contemporãneo de Descartes, Fermat" não foi concretizada de uma forma totalmente convincente. De fato, Bell (1986: 56) se serve de uma retórica estratégica para se safar do juizo de que Fermat foi um matemático superior a Newton já que para avaliar a grandeza da produção matemática do pensador francês em relação aos seus contemporâneos é natural: "(...) deixarmos a parte Newton (1642-1727). Mas podemos afirmar que Fermat foi ao menos igual a Newton como matemático puro, mas de qualquer forma, quase um terço da vida de Newton corresponde ao século XVIII, enquanto que toda vida de Fermat se desenvolveu no século XVII". (BELL, 1986: 56). A justificativa de Bell não condiz com a produção matemática de Newton, pelo menos a que deu origem ao cálculo infitesimal pois em 1666 o inglês publicou o seu célebre *Tratado sobre fluxos* que apresentava o teorema fundamental do cálculo. A indisposição de Bell para com Fermat pode ser comprovada ainda no capitulo cinco de *Men of Mathematics*, no qual o autor discute os feitos cientificos de Newton. Na sua discussão Bell (1986: 93) destaca uma das frases famosas do ilustre matemático inglês segundo o qual "Se eu fui mais longe que os outros foi porque me apoiei em ombros de gigantes". Entre os três maiores gigantes considerados por Bell (1986: 93), destacam-se Kepler, Galileu e Descartes. De Kepler Newton herdou as suas três leis do movimento planetário, de Galileu as duas primeiras leis do movimento e de Descartes a geometria analítica. Estranha-nos essa menção de Descartes e de sua geometria analítica já que segundo Roque (2012: 364) Newton construiu a sua teoria sobre o cálculo infinitesimal na linguagem sintética, contrapondo a linguagem analítica de Leibniz – que foi discipulo de Huygens, que aprendeu matemática de Van Shooten, que por sua vez foi doutrinado matematicamente por Descartes. Na realidade, o que Newton poderia ter assimilado de Descartes em termos geométricos, considerando o seu tratado *Geometria* só poderia ser mesmo o método de tangentes de Descartes, no entanto tal método era extremamente difícil e impraticável quanto as curvas transcedentes. Na realidade o método de Fermat sobre tangentes – se formos considerar a sua versão final depois da reformulação proporcionada pelas críticas de Descartes – era mais simples e praticável que aquele de Descartes, além de ser válido para curvas tanto algébricas quanto trancedentes, por conta disso Roque (2012: 341) explica que "Fermat será mais citado quando os trabalhos sobre o Cálculo Infinitesimal de Leibniz e Newton começarem, na segunda metade do seculo XVII, a lidar com curvas mais gerais, incluindo as que serão ditas transcedentes" Na realidade, a grande verdade é que a geometria analítica de Fermat, conforme explica Urbaneja (2008: 24), teve um papel muito mais decisivo que aquela de Descartes no que respeita ao aperfeiçoamento das técnicas do cálculo infinitesimal, especialmente com relação ao próprio cálculo diferencial de Fermat de extremos e tangentes que produziu a "transformação analítica da geometria sintética infinitesimal de Arquimedes no algoritmo infinitesimal da análise matemática de Newton e Leibniz." (URBANEJA, 2008: 24) Mas longe de querermos depreciar as opiniões de Bell a respeito de Fermat, pois se fosse assim não o teriamos lido e compartilhado de suas idéias nessa pesquisa, deixemos aqui uma opinião crítica de uma historiadora contemporânea a respeito da importancia da carreira literária de Bell para a história da história da matemática apesar das suas incorências e anacronismos em relação a Fermat. Segundo Roque (2012: 478) "Eric Temple Bell foi um matemático atuante entre os anos 1920 e 1940. Em 1937, escreveu *Men of Mathematics* e em 1940, *The development of mathematics*. Esse autor privilegiava detalhes sobre os matemáticos, o que poderia fornecer, de seu ponto de vista, uma perspectiva mais interessante sobre a história da disciplina. Seus relatos, no entanto, continham diversos erros e interpretações duvidosas".

obscuridade dos feitos de Fermat – em geometria analítica, cálculo infinitesimal e probabilidades – crescesse ainda mais entre os historiadores.

Quanto às hipóteses que respondem a inércia cientifica de Fermat, Urbaneja (2008: 19) sustenta que elas vão desde a mais precisa exatidão historiográfica até o sarcasmo. Nesse segundo sentido, ele nos apresenta um fragmento de um discurso proferido pelo professor de matemática Roger Paintandre numa inauguração de uma exposição sobre Fermat realizada no Liceu Pierre Fermat de Tolouse em 22 de junho de 1957 no qual o presente professor – que lecionava nesse liceu – se posiciona acerca do “esquecimento em que caiu a figura de Fermat” (URBANEJA, 2008: 21).

> Fermat não é reconhecido por parte do grande público com um renome de um Pascal, um Galileu ou um Newton (...). É óbvio que ele não teve a precocidade de redescobrir Euclides aos quinze anos de idade, (...). Nem teve a felicidade de ser perseguido pela inquisição, apenas participou na Fronda, mas não comungou em excesso com o jansenismo. E nunca sonhou em receber uma maça na cabeça enquanto contemplava a lua. Falta imperdoável! Mas, para além dessas anedotas mais ou menos infundadas, Fermat foi um dos grandes gênios da França e um dos matemáticos mais extraordinários de todos os tempos. (PAINTANDRE apud URBANEJA, 2008: 21)

Além dessas ironias, há outras hipóteses historiográficas que ridicularizam Fermat ao justificarem a sua inércia como um produto da sua natureza psicológica, vista como uma “pessoa pacata, modesta, despreocupada com a fama e que pesquisava somente para sua satisfação interior” (GARBI, 2010: 70).

Na realidade, conforme Urbaneja (2008: 21), Fermat era um entusiasta das matemáticas e por isso ele a praticava não apenas para satisfazer a si próprio, mas também os seus amigos do círculo postal de Mersenne. Logo, era perfeitamente natural que Fermat não quisesse publicar as suas descobertas já que para isso ele teria que converter um entusiasmo em compromisso e fazendo assim ele comprometeria suas ocupações jurídicas, conforme explica Katz:

> Fermat sempre considerou a matemática como um passa tempo, um refúgio das disputas contínuas com as quais tinha que lidar como jurista. Recusou-se por isso a publicar qualquer uma das suas descobertas, porque fazê-lo obrigá-lo-ia a completar todos os pormenores e a sujeitar-se a possíveis controvérsias noutra arena. (KATZ, 2010: 543)

Conforme Urbaneja (2008: 21) os manuscritos de Fermat apresentavam apenas uma parte de suas descobertas as quais ele decidiu não publicar, de maneira tal que a parte mais reservada das suas investigações situavam-se nas margens de seus livros – donde ele comentava com originalidade o conteúdo das obras clássicas da matemática grega – bem como em cartas remetidas aos seus admiradores nas quais ele expressava "uma inteligência poderosamente sintética, donde inventa, explica, demonstra, debate com intenso entusiasmo e se serve de contundentes argumentos na defesa de suas idéias matemáticas." (URBANEJA, 2008: 21) No entanto, Urbaneja (2008: 29), como tantos outros historiadores da matemática (MAHONEY, 1994: 1; GARBI, 2010: 68), comunga com o título de "Príncipe dos Amadores" atribuído a Fermat por Bell – mesmo constatando em parte a insignificância do qualificativo amador com respeito à Fermat. E por isso, embora o historiador espanhol defenda a honra de Fermat como matemático, ele alfineta despercebidamente a sua capacidade ao afirmar que o francês "deu o impulso inicial que é imprescindível para que toda doutrina científica comece a prosperar, no entanto não conseguiu elaborar uma teoria em um corpo de doutrina coerente e acabado, organizado em uma obra fechada e definitiva como, por exemplo, fez Descartes na *Geometria* de 1637 (...)." (URBANEJA, 2008: 19) Na realidade, Descartes também foi um matemático amador[83], e a sua formação profissional era jurídica tal qual a de Fermat, mas a constatação supracitada de Urbaneja entra em contradição com a recusa de Descartes de praticar a sua profissão de advogado. A prova disso é que a economia da linguagem e a síntese do pensamento (que eram regras básicas do trivium pitagórico das universidades jurídicas) não foram bem exercitadas pelo sábio de *La Flèche* – pelo menos em sua investida nas matemáticas – já que as obras matemáticas de Fermat, conforme Boyer (1996: 239), eram muito mais concisas e didáticas que as de Descartes[84].

Na próxima seção vamos estudar os estilos de pensamento dos coletivos aos quais Fermat e Descartes são tributários nas invenções das suas geometrias e a partir daí iremos comparar a formação desses dois pensadores e assim teremos condições de deduzir mais precisamente, em termos epistemológicos, porque Descartes decidiu publicar a sua obra e Fermat não. Embora esse

[83] Na realidade, tanto Descartes como Fermat eram matemáticos amplamente autodidatas, ainda que tivessem os seus respectivos tutores. O termo anacrônico "amador" é usado aqui em referência a Descartes apenas como uma estratégia de exposição para contrabalançar o peso do termo em relação à Fermat.

[84] Conforme Boyer (2004: 103), Descartes era um péssimo expositor e por conta disso a sua geometria não foi redigida "na forma ordenada e sistemática que se esperava em uma introdução de métodos originais", além de tudo, ele nem sequer se propôs a "investigar os detalhes para tornar a sua linha de argumentação clara". Dessa forma, Boyer considera que "Descartes escreveu a *Geometria* não para explicar, mas para gabar sobre o poder do seu método" (BOYER, 2004: 103). De fato, Descartes tinha certo orgulho da sua exposição, ainda que ele tivesse consciência da sua falta de compromisso com a didática, justificada no seguinte trecho da *Geometria*: "E espero que meus pósteros saibam agradecer-me não apenas pelas coisas que aqui expliquei, mas também por aquelas que voluntariamente omiti, a fim de lhes deixar o prazer de inventá-las" (DESCARTES, 2010: 573). Para Boyer (2004: 104) a justificativa de Descartes para a inadequação didática da sua exposição tem duas possíveis explicações: ou "era um sarcasmo ou então o autor indelicadamente subestimou as habilidades de seus leitores para tirar proveito do que ele tinha escrito". Levando-se em conta que Descartes era um gênio vaidoso a primeira hipótese é plausível, na medida em que "resolver problemas sobre os quais os mais brilhantes geômetras gregos haviam se debruçado era motivo de glória para o espírito vaidoso que caracterizava este que é considerado o pai da geometria analítica" (CARVALHO; ROQUE, 2012: 254). Quanto a segunda hipótese, devemos considerar que em função da sua inteligência extraordinária, o sábio de *La Flèche* "não podia avaliar a dificuldade que outros teriam para compreender suas novas e profundas idéias" (BOYER, 1996: 236).

questionamento não represente o problema propriamente dito dessa pesquisa, acreditamos que a sua exploração – a nível epistemológico – ajudará na investigação do presente problema, qual seja, o de investigar as razões que contribuíram para que a descoberta da geometria analítica fosse atribuída por diversos historiadores a Descartes exclusivamente. Um posicionamento epistemológico sobre a razão da não publicação da *Introdução* e da publicação da *Geometria* contribuirá, juntamente com as nossas outras hipóteses, para a investigação do problema em pauta.

2.2 As trajetórias intelectuais de Descartes e Fermat

Para iniciarmos uma investigação de novas razões, para além das já discutidas na seção anterior, que contribuíram para que Descartes publicasse a *Geometria* e Fermat não publicasse a *Introdução*, temos que ter em mente que as razões estudadas até agora, não foram suficientes para solucionarmos efetivamente a presente questão. Isso naturalmente, não significa que a nossa investigação foi em vão, já que ela esta enquadrada dentro da seqüência proposta por Mahoney para a compreensão de um matemático do século XVII:

> Dois passos (...) são importantes para compreender um matemático do século XVII. Primeiro, nós devemos tentar determinar qual tipo de homem ele era e por que ele se ocupou com a matemática. Segundo, nós devemos localizar a categoria ou escola da matemática dentro da qual ele escolheu operar e a extensão a qual ele empregou os seus métodos e perseguiu seus objetivos. (MAHONEY, 1994: 22)

Diante disso, ainda resta uma investigação das escolas matemáticas que atravessaram as trajetórias intelectuais de Descartes e Fermat e contribuíram assim para a formação dos seus estilos de pensamento. Para tanto, estaremos levando em consideração a epistemologia de Fleck, mas antes de tudo, permita-nos apresentar certas reflexões de Mahoney a respeito do contexto da matemática do século XVII:

> A matemática do século XVII dependia fortemente sobre personalidades individuais e suas indiosincrasias. A matemática produzida por homens tais como Fermat era em grande medida uma questão de escolha pessoal. Suas motivações particulares em ocupar-se com a matemática determinavam quais das muitas abordagens válidas eles aceitariam para o assunto. Se uma escola particular dava aos seus trabalhos uma direção, eles as seguiam por escolha pessoal. (MAHONEY, 1994: 22)

Em função do caráter fragmentário da matemática do século XVII, Mahoney considera que os matemáticos seiscentistas atuavam como agentes livres, na medida em que eles poderiam escolher, dentro das muitas abordagens matemáticas existentes, o perfil da atividade matemática que eles iriam praticar. Esta escolha, no entanto, com base na epistemologia de Fleck, não poderia ser realizada de forma consciente, mas inconsciente na medida em que:

> (...) aquilo que pensa no homem não é ele, mas sua comunidade social. A origem do seu pensamento não esta nele, mas no meio social onde vive, na atmosfera social na qual respira, e ele não tem como pensar de outra maneira a não ser daquela que resulta necessariamente das influências do meio social que se concentram no seu cérebro. (FLECK, 2004: 90)

Assim, podemos dizer que os matemáticos seiscentistas não poderiam ser agentes livres, como defende Mahoney, mas sim agentes sociais. Por isso, estas escolhas por uma ou outra escola matemática, por parte deles, eram na realidade influenciadas pela atmosfera social, mais especificamente, pelos cenários institucionais, a nível primário e secundário, que com toda a certeza tinham uma grande parcela nessas escolhas. No caso de Fermat, não se sabe ao certo grande parte dos detalhes de sua vida, tanto particular quanto educacional de maneira que certos relatos biográficos existentes são imprecisos, e quando muito não inspiram confiança por haver certas presunções. Por isso, a história de Fermat "não chega até nós como uma curva contínua, como um matemático podia descrevê-la, mas como uma série de pontos descontínuos" (BOUTIN, 2009: 13). Além do mais, para agravar a situação, Fermat não compôs um diário – tal como Descartes fez nas duas primeiras partes do *Discurso* – retratando as suas experiências privadas da juventude, em especial as de caráter educacional a nível primário e secundário que se revelariam úteis para determinar os seus interesses. De qualquer forma há informações confiáveis da sua vida inicial colhidas pelos especialistas que indicam que ele nasceu em uma família abastada[85] que buscava elevar o posto dos seus filhos na sociedade, o que implica necessariamente que ele teve uma educação primária e secundária de excelente qualidade[86].

---

[85] Pierre de Fermat nasceu em 20 de Agosto de 1601, na pequena cidade de Beaumont-de-Lomagne no sudoeste da França. Filho de Dominique Fermat, próspero comerciante de peles e segundo cônsul de Beaumont-de-Lomagne, e Claire de Long, que provinha de uma família de magistrados. Seus pais tiveram mais três crianças além de Pierre, sendo um filho e outras duas filhas. Os Fermat´s não faziam parte da grande nobreza, mas Pierre e seus irmãos usufruíram desde cedo de uma condição financeira favorável devido aos negócios lucrativos do pai – que era um burguês. Portanto, era natural que os seus pais buscassem aumentar a condição social dos seus filhos, não só através do acúmulo de riquezas, mas também por oferecer a eles uma educação que visasse uma perspectiva de ascensão social, por isso a escolha de Pierre por uma carreira jurídica "parece natural e típica de seu tempo; representou o caminho mais comum de mobilidade social ascendente e de transformação de poder financeiro em poder político" (MAHONEY, 1994: 15).

[86] Antes de realizar o sonho dos pais de tornar-se um magistrado, Pierre concluiu a sua educação primária e secundária no monastério fransciscano de GrandSelve em Beamount. Há poucas informações da passagem de Fermat por Beamount, mas é provável que a educação que o jovem Pierre recebeu lá "era bastante primorosa e que o monastério deveria ter sido uma escola brilhante já que ele dominava o grego, o latim e a maioria dos idiomas europeus de importância naquela época. Além disso, foi um grande amante da literatura e um poeta ocasional" (JOVER, 2007: 12). O entusiasmo, que estava por vir, para as matemáticas no espírito de Fermat foi precedido por certo tempo até a sua partida para Bordéus no final dos anos 1620. De fato, tal entusiasmo parece não ter ocorrido prematuramente, já que entre o curso da educação primária e secundária em Beamount e o inicio dos estudos universitários em Tolouse, "não há qualquer registro de que o jovem Fermat mostrasse algum talento especial para a matemática" (SINGH, 2008: 55). Como já observamos na seção 2.1, no decorrer do seiscentos, as matemáticas não eram estudadas com profundidade nas universidades devido à condição social que elas ostentavam naquela época, e por isso, ao ingressar em Tolouse, Fermat deveria ter assimilado "a matemática das faculdades das artes que, em Tolouse ainda nos anos de 1620, provavelmente não estendeu muito além dos primeiros seis livros dos *Elementos* de Euclides e alguma aritmética. Mas não existia

Segundo Mahoney (1994: 48), após finalizar sua educação primária e secundária em sua terra natal, evidências indiretas[87] sugerem, que Fermat frequentou a universidade de Tolouse por um tempo, dando uma pausa nesses estudos para realmente "se dedicar a matemática, sua área de interesse" (MAHONEY, 1994: 48) e com esse propósito em mente, ele decidiu passar vários anos em Bordéus a estudar a referida ciência com os antigos estudantes de Viète "que durante os últimos anos da década de 1620 estiveram envolvidos na edição e publicação da obra do seu professor" (KATZ, 2010: 542). Seja como for, não há informações disponíveis da educação matemática[88] de Fermat, a nível primário e secundário em Beamount. Soma-se a isso a sua suposta[89] passagem, em um curto espaço de tempo, pela universidade de Tolouse que porventura, possa não ter sido o suficiente, em termos didáticos, para que o seu professor de matemática o instruísse nos seis primeiros livros dos *Elementos* de Euclides e em alguma aritmética – a base do currículo matemático[90] das universidades seiscentistas – por conta disso é difícil determinar com precisão se ele viajou para Bordéus com algum objetivo matemático em mente. Mesmo assim, é certo com respeito a tempo e conteúdo matemático que a trajetória de Fermat no universo da matemática iniciou e se consolidou em sua passagem por Bordéus "onde ele encontrou os trabalhos e a influência de François Viète" (MAHONEY, 1994: 48).

matemáticos ou cientistas de renome em Tolouse no momento para estimular o seu interesse ou guiar o seu treinamento inicial" (MAHONEY, 1994: 48).

[87] Conforme Mahoney (1994: 48), o que se conhece dos próprios relatos de Fermat são poucas reminiscências – ligadas as suas atividades matemáticas com os discípulos de Viète em Bordéus – que ele permitiu-se em sua correspondência, com os circulo parisiense a partir de 1636, indicando que em algum momento durante os anos finais da década de 1620, ele passou em Bordéus antes de mover para Orléans, onde ele recebeu seu grau em leis em algum momento antes de 1631, o que o qualificou para retornar a Tolouse para exercer a sua profissão jurídica. Para Mahoney (1994: 48) o motivo da viagem de Fermat para Bordéus não pode ser claramente determinado. Talvez ele pudesse ter agido assim para incentivar os seus estudos legais, que tinham sido interrompidos na universidade de Tolouse, pois em Bordéus, "sua família tinha amigos que estavam envolvidos no trabalho jurídico" (MAHONEY, 1994: 48). Boutin (2009: 21) imagina que a resistência de Fermat em concluir o curso em leis no tempo padrão da Universidade de Tolouse não era por falta de dinheiro devido à prosperidade dos Fermat´s, nem mesmo por falta de estímulo, pois os seus pais o teriam estimulado a todo tempo para concluir o seu curso – e por conseqüência usufruir do status social que a profissão o ofereceria. Assim, Fermat buscava muito mais do que uma posição respeitável na sociedade, de sorte que o seu interesse pela matemática pode tê-lo conduzido a descobrir: "muito mais do que ele podia já ter aprendido na universidade, e para isso, ele teria que descobrir alguém que dominasse o assunto bem o suficiente para ensiná-lo a respeito" (BOUTIN, 2009: 21).

[88] Conforme Boutin (2009: 15) no monastério fransciscano de GrandSelve em Beamount, Fermat estudou um repertório de línguas, além do francês nativo, aprendeu a falar e escrever em espanhol, grego e latim. Ele também estudou literatura, história, filosofia e retórica dos discursos antigos.

[89] Ao contrário de Mahoney e outros historiadores, Boutin não crava que Fermat interrompeu o seu estudo em leis em Tolouse antes de ir a Bordéus em busca do seu interesse em matemática. Para Boutin, depois que Fermat finalizou a sua educação primária e secundária em Beamount, "é desconhecido se ele freqüentou ou não a Universidade de Tolouse, e se ele realmente frequentou, saiu sem um diploma." (BOUTIN, 2009: 20). Mesmo assim, é provável que Fermat tenha mesmo passado por lá, visto que a riqueza da sua família teria proporcionado tal passagem possível quer por simples pressão moral quer por convenção social, de qualquer forma "um descanso em seus estudos legais [em Tolouse] faria pelo menos parte da maneira em explicar porque ele [Fermat] os completou por volta de seis ou sete anos depois do que era habitual na época" (MAHONEY, 1994: 48, grifo nosso).

[90] Conforme Mahoney (1994: 48), "o conteúdo preciso do currículo cientifico nas escolas e universidades francesas durante o século XVII é uma lacuna crítica na erudição histórica".

Fermat formou-se então na escola analítica de Bordéus, aonde estudou matemática com os dicípulos de Viète, mediante uma imersão profunda nos trabalhos do influente escritor parisiense, como também dos principais matemáticos da antiguidade, tais como Diofanto, Apolônio, Arquimedes e Pappus, o que criou as condições para que o futuro jurista de Tolouse se entusiasmasse com a matemática, e empregasse, portanto a sua formação humanista e o domínio das línguas clássicas – adquiridos na sua educação primária e secundária em Beamount – para interpretar, comentar, recuperar e traduzir os trabalhos dos mais exímios matemáticos gregos, especialmente os de Apolônio que viriam a estimular a sua capacidade criativa de imaginar uma nova estrada real para a geometria de Euclides. Dessa forma, a experiência na escola analítica seria fundamental para que Fermat tivesse subsídios teóricos para elaborar a sua nova geometria.

> A percepção da forma (Gestaltsehen) imediata exige experiência (Erfahrensein) numa determinada área do pensamento: somente após muitas vivências, talvez após uma formação prévia, adquiri-se a capacidade de perceber, de maneira imediata, um sentido, uma forma e uma unidade fechada. (FLECK, 2004: 142)

Fermat se tornou um especialista ao longo dos anos em que estudou na escola analítica de Viète, inicialmente ele teve um treinamento[91] prévio que permitiu que ele desenvolvesse uma capacidade de percepção direcionada para o estilo de pensamento dos analistas. Este estilo valorizava a análise geométrica dos antigos e a linguagem algébrica de Viète. Dessa forma, a *Introdução* de Fermat foi nada mais nada menos do que uma paráfrase algébrica da análise geométrica de Apolônio. Teria sido fácil essa paráfrase algébrica? Em que medida uma forma de expressão geométrica pode ser parafraseada algebricamente? Antes de adentrarmos nos meandros dessa paráfrase, precisamos compreender o programa de pesquisa da escola analítica para daí termos condições de analisar em que extensão Fermat o aplicou ao parafrasear Apolônio na elaboração da sua *Introdução*.

Conforme Mahoney (1994: 40) o programa da escola analítica consistia em duas etapas: a primeira era reconstruir tanto quanto possível o conteúdo dos tratados perdidos da análise geométrica clássica, mencionados e comentados por Pappus no livro VII da *Coleção matemática*. A segunda etapa consistia em traduzir o conteúdo geométrico do campo da análise dentro da

[91] Fleck afirma que é apenas através da "experiência que se participa do estilo de pensamento, e é somente ela que possibilita a percepção da (...) configuração (Gestalt) determinante" (FLECK, 2010: 146). Com isso, o verdadeiro significado da experiência de um individuo num determinado estilo de pensamento, deve ser compreendido como o desenvolvimento da capacidade de reconhecimento de uma forma, o que configura uma coerção de pensamento que faz com que "a disposição para a percepção direcionada se intensifica e toma forma" (FLECK, 2010: 30). Desse modo, Fleck acredita que "a percepção da forma é uma questão que pertence marcadamente ao estilo de pensamento" (FLECK, 2010: 142).

linguagem da arte analítica. A princípio os analistas só praticavam traduções de tratados – depois de recuperados – que incluíam problemas determinados, isto é: aqueles que podiam ser interpretados em equações determinadas com uma só incógnita. Para esses tratados, tais como a *Seção da razão* de Apolônio, os analistas já tinham um modelo disponível para tradução que se fundamentava, em certas passagens dos livros II e VI dos *Elementos* de Euclides, aos quais "Ramus e Viète tinham primeiramente discernido traços de álgebra aplicados a geometria que serviram de impulso para o desenvolvimento da álgebra como a arte da análise" (MAHONEY, 1994: 40).

Mas para os tratados analíticos envolvendo problemas indeterminados – cuja solução geométrica não era pontual – não havia um modelo sintático disponível para interpretar e converter uma construção geométrica não pontual em uma equação algébrica com duas incógnitas. Além disso, a lei da homogeneidade dimensional de Viéte dificultava a manipulação algébrica dos problemas indeterminados, pois na interpretação viètiana dessa lei "a dimensão estava diretamente ligada ao grau da equação" resultante de um problema geométrico, e como a solução dos problemas indeterminados não era pontual, o que implicava que a equação resultante não seria determinada por uma só incógnita, Fermat verificou que "a dimensão de um problema não se encontrava em seu grau, mas no número de incógnitas necessárias para analisar ele" (MAHONEY, 1994: 42). Dessa forma, uma solução pontual corresponde a uma equação determinada em uma incógnita independentemente do índice da potência da incógnita, da mesma forma, uma solução bi-dimensional corresponde a uma equação indeterminada de duas incógnitas seja qual for o índice das potências das incógnitas envolvidas. Com isso, Fermat fez uma pequena adaptação na "primeira e perpétua lei das equações e proporções" (MAHONEY, 1994: 41) de Viète, mas ele ainda a tinha como um princípio – referente aos sistemas de opiniões dos analistas. Dessa forma, Fermat freqüentemente operava "como se todas as operações combinatórias envolvendo medidas geométricas acarretassem produtos homogêneos" (MAHONEY, 1994: 42). Ele contornou levemente o problema da homogeneidade dimensional para estabelecer as condições de aplicar a análise algébrica de Viète aos tratados geométricos envolvendo problemas indeterminados, e com isso criou um modelo sintático para a análise algébrica desses problemas que até então não existia[92].

[92] Como vimos na seção 1.3, o analista Guetaldi tinha tentado incidentalmente aplicar a álgebra simbólica de Viète a muitos problemas indeterminados em seu tratado *A Resolução e a composição matemática* publicado postumamente em 1630, mas em consonância com o estilo de pensamento da época, o qual estava voltado para resolução de problemas determinados, ele permitiu que à harmonia das ilusões do coletivo de pensamento fizesse com que ele designasse os problemas indeterminados como "vazios ou inoperantes" e com isso ele se "esquivou do tratamento algébrico sobre os problemas sobre curvas e lugares" (BOYER, 2004: 68). De fato, para Fleck "o fechamento orgânico de cada comunidade de pensamento" proporciona "uma limitação dos problemas admitidos dentro do estilo de pensamento: muitos problemas são constantemente ignorados ou rejeitados por serem considerados sem importância ou sem sentido" (FLECK, 2010: 156). Dessa forma, Guetaldi chegou muito perto de ter alcançado a descoberta da nova geometria, mas este acontecimento crucial para a mutação do estilo de pensamento da matemática seiscentista só veio a ocorrer mais tarde com Descartes e Fermat "que descobriram que as equações indeterminadas estão longe da *esterilidade e futilidade*, pois quando aplicadas as curvas tais como as cônicas, elas serviam como uma ponte mais efetiva entre a álgebra e a geometria do que a geometria algébrica de Viète (...) e Guetaldi" (BOYER, 2004: 68, grifos do autor). De

No entanto, tal modelo inovador, que deu origem a nova geometria, continha marcas do sistema de idéias da escola analítica, o que confirma o caráter evolucionário da epistemologia de Fleck, explicado numa de suas múltiplas definições de estilo pensamento ao longo da sua obra magna:

> O estilo de pensamento não é apenas esse ou aquele matiz dos conceitos e essa ou aquela maneira de combiná-los. Ele é uma coerção definida de pensamento e mais: a totalidade das disposições mentais, a disposição para uma e não para outra maneira de perceber e agir. Evidencia-se a dependência do fato cientifico em relação ao estilo de pensamento. (FLECK, 2004: 110)

Fermat absorveu praticamente todos os pressupostos referentes ao sistema de idéias dos analistas, em suma, as técnicas da análise de Viète juntamente com o seu simbolismo algébrico, conforme explica Urbaneja:

> Através de seus contatos em Bordéus com a escola dos analistas, dirigida pelos discípulos de Viète, Fermat se abasteceu de seu simbolismo algébrico – ao qual permaneceu fiel durante toda sua carreira, utilizando as letras vogais para designar as incógnitas e as consoantes para os parâmetros – e especialmente da analise geométrica dos antigos, convertida em analise algébrica por ação da álgebra simbólica da arte analítica de Viète. (URBANEJA, 2003: 75)

Tais pressupostos serviram de sustento para as suas primeiras investigações matemáticas em Bordéus, que conduziriam a sua longa carreira matemática que esteve sempre vinculada, apenas[93] a

---

acordo com a epistemologia de Fleck há três etapas imprescindíveis para que uma descoberta caótica e desestilizada – tal e o caso da geometria analítica – se converta num fato cientifico, nas suas próprias palavras: “Assim nasce o fato: primeiro um sinal de resistência no pensamento inicial caótico, depois uma certa coerção de pensamento e, finalmente, uma forma (Gestalt) a ser percebida de maneira imediata” (FLECK, 2004: 144). A *Geometria* de Descartes, em razão de ter sido publicada, conseguiu cumprir toda a sequencia trinomial supracitada para a consumação de um fato cientifico, ao passo que a *Introdução* de Fermat estacionou na primeira etapa desta sequencia, pois ela não foi publicada o que dificultou a sua posse por parte “dos poderes sociais que formam conceitos e criam hábitos de pensamento” de forma coercitiva, mas para tanto é necessário que a descoberta caótica e desestilizada circule no coletivo de pensamento para que seja “socialmente fortalecida” e assim se transforme num “sistema fechado e harmonioso” característico de um novo estilo de pensamento. Contudo, não é nossa intenção afirmar que a *Introdução* não participou da transformação estilística da matemática seiscentista, pois na verdade ela teve a sua participação, mesmo que numa extensão pouco apreciável, mediante a sua circulação em forma de manuscrito aos membros do circulo parisiense. Mas, foi a *Geometria* de Descartes, que por ter sido publicada e republicada muitas vezes, conseguiu provocar gradativamente em seus leitores, ou melhor, no imaginário coletivo, após um sinal de resistência, a requerida “coerção de pensamento” que redundou numa disposição psicológica para “a percepção da forma (Ghestalten) desenvolvida, reprodutível e conforme a um estilo” (FLECK, 2010: 144).

[93] Das seis escolas matemáticas existentes no século XVII, Fermat esteve vinculado a apenas uma delas, a escola analítica dos discípulos de Viète. De fato, Fermat não poderia ter feito parte, por exemplo, da escola cosista, pois nunca fez referência em seus trabalhos “a grande *Álgebra* de Clávius ou qualquer dos tratados cossistas sobre Álgebra” (MAHONEY, 1994: 26), e não era para menos, pois esses tratados faziam parte da logística numérica, combatida pela

escola matemática dos analistas. De acordo com Fleck, quanto mais um indivíduo se aprofunda num determinado campo do saber, isto é: num coletivo de pensamento, “a tradição, a educação e o hábito” adquiridos conferem a ele “uma disposição para um sentir e agir de acordo com um estilo, isto é, um sentir e agir direcionados e restritos” (FLECK, 2010: 133). Dessa forma, Fermat esteve tão vinculado[94] ao estilo de pensamento da escola analítica que seus contemporâneos “viam nele um sucessor de Viète[95] tanto em estilo de exposição como em padrão de pensamento” visto que tudo

---

arte analítica de Viéte mediante a logística especiosa. Fermat também não poderia ter feito parte da escola classista, pois os membros dessa escola, conhecidos como geômetras, “colocavam maior ênfase no estilo da apresentação do que sobre a novidade dos resultados” (MAHONEY, 1994: 4), exatamente o contrário da lógica dos analistas, por isso Fermat, quando se referia aos seus amigos do círculo parisiense, os chamavam de geômetras – título que há perdurado bastante para designar os matemáticos na França – “mas ele preferia ser chamado analista, como sentindo-se arraigado familiarmente na escola dos analistas de Viéte” (URBANEJA, 2008: 30). Fermat também não poderia ter pertencido á escola matemática dos artistas e artesãos, nem mesmo a aquela dos matemáticos aplicados, já que ele “não trabalhou em trigonometria ou perspectiva, e salvo por alguns esforços triviais na área dos quadrados mágicos, aparentemente não tinha interesse nos aspectos místicos da matemática” (MAHONEY, 1994: 27) o que comprova que ele também não fez parte da escola matemática dos místicos. Enfim, todas essas considerações acima, podem ser confirmadas pelas leituras seletivas de Fermat que gravitavam em torno de manuais clássicos da matemática grega, de cunho mais teórico do que prático, donde os nomes de “Apolônio, Pappus e Diofanto dominavam a atenção de Fermat, embora não no sentido da tradição neoclássica” (MAHONEY, 1994: 27), pois ele buscava, conforme os pressupostos da escola analítica, reinterpretar a análise geométrica grega com base na álgebra simbólica de Viéte.

[94] A prova disso é que o estilo de pensamento dos analistas anulou a habilidade de Fermat de enxergar outras formas de expressão matemática, por isso que ele não compreendeu a reforma lingüística cartesiana uma vez que ela se contrapunha a linguagem sincopada ou quase simbólica dos analistas. De fato, tomando como base a epistemologia de Fleck (2010: 91), o que um indivíduo sente como impossível nada mais é do que “uma incongruência com o seu estilo de pensamento habitual”. Em outros termos, se por um lado “o estilo de pensamento assim formado” possibilita “uma percepção da forma (Gestaltsehen) abrangente e a percepção de muitos fatos aplicáveis” por outro, impossibilita “uma percepção da forma diferente e a percepção de outros fatos” (FLECK, 2003: 143). O estilo de pensamento dos analistas também impediu Fermat de perceber a incoerência do principio da tridimensionalidade – uma conseqüência do principio euclidiano da homogeneidade dimensional – de modo que, em razão disso, ele não trabalhou com lugares de ordem superior na sua *Introdução*. Dessa forma, Fermat só foi conseguir se libertar do principio da tridimensionalidade em tratados posteriores relacionada à geometria analítica, mas com aplicação ao cálculo infinitesimal, de modo que nessa altura do campeonato ele já tinha uma comunicação intercoletiva com o pensamento de Descartes através da leitura da *Geometria*, e da própria polêmica em que os dois se envolveram referente ao método de tangentes de Fermat e o método matemático de refração – envolvendo lentes no formato de seções cônicas – formulado na *Dióptrica* de Descartes.

[95] Em 1664, Chapelain escreveu uma carta a Huygens sobre Fermat, segundo o qual: “Eu não penso que você gostaria de negligenciar tal homem importante, que representa para nós um segundo Viète” (MAHONEY, 1994: 68). Nessa correspondência, Chapelain queixa-se da atitude do jovem holandês – discípulo de Frans van Shooten, que tinha sido doutrinado matematicamente por Descartes – por não ter respondido uma carta de Fermat na qual o Jurista de Tolouse propunha problemas de cunho matemático teórico para Huygens analisar. Na realidade, Fermat era um matemático puro com pouco interesse em aplicações, vinculado unicamente a escola analítica, enquanto que Hyugens foi um matemático físico – como Descartes que pertenceu também à escola dos matemáticos aplicados – cujo interesse era “trazer a análise matemática para afetar os problemas da Mecânica” (MAHONEY, 1994: 68). Para além dos distintos interesses nos quais se apoiavam os seus coletivos de pensamento, havia ainda uma leve desavença lingüística. Conforme Mahoney (1994: 69) o vinculo de Huygens com a análise algébrica cartesiana, fez com que ele, numa carta dirigida a Leibniz em 1691, opinasse a respeito dos trabalhos analíticos de Fermat como obscuros, difíceis de ler e com demonstrações incompletas, pois Fermat se negava a completar os seus resultados analíticos com a prova sintética. Na segunda metade do seiscentos, quando a análise algébrica cartesiana estava em uso efetivo, à insistência de Fermat pela linguagem de Viète, dificultou o andamento das suas relações com Huygens, e o interesse do matemático francês em despertar no jovem prodígio holandês o interesse pela teoria dos números foi frustrado em razão das diferenças de estilos de pensamento. Conforme Fleck, quando dois estilos de pensamento estão tão distantes um do outro, “já não há nenhuma possibilidade de entendimento. As palavras não podem ser traduzidas, os conceitos não tem nada em comum (...) e já não há nem motivos em comum” (FLECK, 2010: 195). De qualquer forma, Huygens, no principio, em razão da pressão de Mersenne em fazê-lo conhecer os trabalhos matemáticos de Fermat, chegou a apreciar “a importância do método de máximo e mínimo de Fermat e até defendeu a prioridade do autor sobre falsos pretendentes” (MAHONEY, 1994: 67). Mas um ano depois, quando Fermat morreu, “ele expressou seu pesar, e disse que esperava pela publicação dos

que ele “fez em matemática carregava a marca de Viéte” e, por isso o escritor parisiense o imbuiu, de fato, em uma “nova tradição matemática e um programa de pesquisa que determinava os tipos de problemas que Fermat escolheu para investigar e a maneira em que ele os tratou” (MAHONEY, 1994: 26).

Fiel à tradição dos analistas, a pesquisa geométrica de Fermat estava interligada a restauração de quatro obras contidas no *Tesouro da análise*, dentre elas os *Lugares planos* de Apolônio, os *Lugares sólidos* de Aristeu, além dos *Lugares em superfícies* e os *Porismas* de Euclides. Dessas obras, Fermat obteve um bônus[96] mediante a restauração dos *Lugares planos* de Apolônio, de sorte que seu objetivo primordial ao finalizar a reconstrução dessa obra, conforme os pressupostos da escola analítica, “era exprimir os problemas geométricos [de lugares] de Apolônio na linguagem algébrica proposta por Viète” (ROQUE, 2012: 333, grifo nosso).

> A geometria analítica de Fermat atingiu sua forma final por volta de 1635, mas esse bacharel em direito já estudava o assunto desde os tempos em que esteve em Bordéus, antes de voltar para Tolouse. (ROQUE, 2012: 333)

Embora Roque (2012: 333) entenda que a *Introdução* foi composta por Fermat ao longo de 1635, Boyer (2004: 74) por outro lado, acredita que o referido tratado foi provavelmente composto antes de 1629. De fato, antes desse ano Fermat tinha composto também outro tratado, denominado *Método para determinar máximos e mínimos*, no qual ele fez uma descoberta que retratava curvas – expressas num sistema de coordenadas – mediante equações algébricas, o que pressupõe que o principio fundamental da geometria analítica estava patente.

> Antes de 1629 ele [Fermat] parece ter descoberto um tratamento analítico de máximo e mínimo, e um pouco ao mesmo tempo, ele aplicou a análise de Viète aos problemas de lugares, assim inventando a nova geometria. (BOYER, 2004: 74, grifo nosso)

Apesar desse desencontro de informações, tudo indica que na pior das hipóteses o princípio fundamental da geometria analítica, foi um bônus adquirido por Fermat durante e não após a

trabalhos do matemático, muito provavelmente por conta da reputação de Fermat do que por qualquer valor dos trabalhos em si mesmos” (MAHONEY, 1994: 69)

[96] O bônus obtido por Fermat corresponde a dois *insights*: um deles é a descoberta de formas de relacionar equações indeterminadas a linhas geométricas, e o outro é a visualização geométrica para esta relação a partir de “um sistema de eixos ao longo dos quais os comprimentos são medidos” (KATZ, 2010: 543). Esses dois *insights* – primordiais para o desenvolvimento da geometria analitica – surgiram em decorrencia do tratamento de Fermat para o caso mais simples, o de dois pontos, do teorema II.5 do *Lugares planos* que lida com um numero indeterminado de pontos envoltos numa circuferencia. O enunciado desse teorema é o seguinte: “Se, a partir de um conjunto de pontos determinados, forem desenhadas linhas retas até um ponto, e se a soma dos quadrados das linhas for igual a uma determinada área, o ponto encontra-se numa circuferencia determinada” (KATZ, 2010: 543).

restauração completa dos *Lugares planos*. Seja como for, Boyer (2004: 74) acredita que Fermat dá poucos indícios[97] na *Introdução* de como a transição da *Arte analítica* de Viéte para o princípio fundamental da geometria analítica ocorreu. O referido trabalho, embora conciso – contendo cerca de vinte páginas – não deixa dúvida sobre o propósito do autor, que abre a discussão dizendo que para um grande número de lugares, em especial os planos e os sólidos, os geômetras antigos tinham fracassado em estabelecer os seus problemas de maneira geral e dessa forma, sua teoria visava reparar essa falta de generalidade nos resultados clássicos, mediante uma análise algébrica "que é própria e particular, e que abre o caminho geral para investigação dos lugares" (FERMAT, 1891/1912: 85). O resultado da investigação que Fermat tinha como alvo principal na *Introdução* foi notável conforme explica Mahoney:

> Através do sistema da *Introdução*, Fermat é capaz de condensar os 147 teoremas [dos *Lugares planos*] de Apolônio, já reduzidos em 16 por Pappus [na *Coleção matemática*] em um único teorema que alternadamente também inclui todos aqueles teoremas que Aristeu, precisava para os cinco livros de seus lugares sólidos. Aquele Teorema é evidentemente, o teorema demonstrado pela *Introdução*. (MAHONEY, 1994: 96, grifo nosso)

Tal teorema[98] nada mais é que um caso particular daquilo que chamamos atualmente de princípio fundamental da geometria analítica, na abertura da *Introdução* encontramos a profética afirmação – que Fermat considerava como um axioma da sua nova geometria:

> Quando numa equação final duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva. (FERMAT, 1891/1912: 85, tradução nossa)

Segundo Boyer (2004: 75), esta afirmação representa um dos princípios mais importantes da história da matemática, que estabelece não só a geometria analítica, como também a ideia útil de variável algébrica. Tal ideia foi fundamental para Fermat dar significado às equações algébricas de

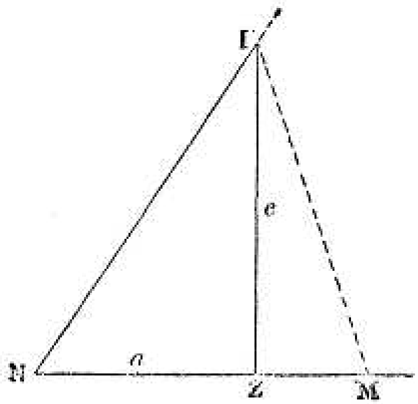
---

[97] Urbaneja entende que apesar dessa ausência de indícios, pode-se conjecturar que a motivação essencial de Fermat, com a redação da *Introdução*, era "encontrar novos métodos mais simples, mais operativos, mais resolutivos, mais heurísticos e, sobretudo mais gerais" (URBANEJA, 2003: 76).

[98] O referido teorema é o seguinte: "As equações podem ser facilmente estabelecidas se nós tomamos as duas quantidades desconhecidas com um ângulo determinado, que assumimos geralmente ser reto, e se darmos a posição e o extremo de um delas; de modo que nenhuma das quantidades desconhecidas exceda o quadrado, o lugar é plano ou sólido" (FERMAT, 1891/1912: 86, tradução nossa). Fermat demonstrou esse teorema mediante um tratamento particular para cada um dos casos possíveis. E ao contrário de Descartes que na *Geometria* justificou o uso de segmentos de linhas no campo da álgebra, na *Introdução* "Fermat assume que os segmentos de linhas são variáveis algébricas como parte da álgebra vietiana que ele emprega" (MAHONEY, 1994: 80).

duas incógnitas, que até então “tinham sido rejeitadas da geometria” (BOYER, 2004: 75). Para tanto, ele se serviu de um sistema uniaxial formado a partir de um ponto fixo ao longo de um eixo dado, que representava os valores sucessivos de uma das incógnitas. Os segmentos correspondentes, representando a outra incógnita, eram determinados através da equação dada e levantados como ordenadas, que formavam um ângulo, de valor não fixado, com o eixo. Na seção 1.2, vimos que nos grandes clássicos da antiguidade, em especial, nas *Cônicas* de Apolônio, certas linhas – os diâmetros e as tangentes – associadas com uma curva dada, representavam um papel equivalente de coordenadas e as propriedades geométricas da curva, associadas com essas linhas, eram apresentadas como proporções – o *sintoma* da curva – mediante procedimentos de álgebra retórica. Para Boyer (2004: 75), a idéia genial[99] de Fermat consistiu em inverter essa situação, isto é: a partir de uma equação algébrica de duas incógnitas, o sucessor de Viète, mostrou como tal equação satisfaz, por si só, um lugar geométrico de pontos definidos em um sistema de coordenadas,

[99] Explicaremos agora, em linguagem moderna, como Fermat procedeu em sua primeira explicação de que existe uma correspondência entre equações indeterminadas e curvas no plano, no caso específico da equação do primeiro grau que satisfaz uma linha reta:



Com efeito, seja NM uma linha reta dada com um ponto N fixo. Que NZ seja igual à incógnita a, e ZI (a linha desenhada para formar o ângulo NZI), a outra incógnita e. Considere ainda os segmentos NB e BT iguais respectivamente a b e d, duas constantes. Ora, se d multiplicado por a é igual à b multiplicado por d, ou melhor, d x a = b x e, então o segmento NI representa uma reta. Para compreender esse resultado, note que d x a = b x e implica que $\frac{b}{d} = \frac{a}{e}$ donde a razão $\frac{b}{d}$ é conhecida, já que só envolve constantes. Portanto, a razão $\frac{a}{e}$ entre as incógnitas, também será calculada, bem como o triângulo NZI. Logo, NI é uma reta. (Cf. FERMAT, 1891/1912: 86). Note que o lugar geométrico em questão é uma semi-reta, ao invés de uma reta, pois Fermat só trabalhava com o que “hoje chamamos de primeiro quadrante” (BOYER, 2004: 76). Ademais, ele utilizava, como já frisamos anteriormente, somente um eixo coordenado, por isso seu sistema, é de “ordenadas ao invés de coordenadas” (BOYER, 2004: 76). Sendo assim, o gráfico da reta é pensado não como sendo constituído por pontos orientados com respeito a dois eixos, mas como sendo gerado pelo deslocamento do extremo I do segmento ZI conforme Z se desloca ao longo de um determinado eixo. As coordenadas NZ e ZI são soluções geométricas da equação indeterminada d x a = b x e. Em seguida, Fermat passou a estudar as equações quadráticas, para cada caso mostrou que o lugar geométrico dos pontos que satisfazem a equação era uma circunferência ou uma das três seções cônicas. Logo depois, Fermat tinha classificado a forma geral da equação quadrática em duas variáveis em sete casos dados por formas canônicas. Partindo das proposições das *Cônicas* de Apolônio, ele conseguiu demonstrar que cada caso específico derivado da forma $ax^2 + by^2 + cxy + dx + ey + f = 0$ (em linguagem moderna) correspondia a uma classe de cônicas, ou melhor: Linha reta representada por $dx = ey$, linhas retas determinadas por $ax^2 \pm cxy = by$, circunferência representada por $f - x^2 = y^2$, parábola determinada por $ax^2 = ey$, hipérbole representada por $f + ax^2 = by^2$, hipérbole eqüilátera determinada por $cxy = f$, e Elipse representada por $f - ax^2 = by^2$. Sendo assim, Fermat determinou o lugar geométrico correspondente a qualquer equação quadrática em duas variáveis, demonstrando que tinha que ser necessariamente uma linha reta, uma circunferência ou uma das três seções cônicas.

previamente estabelecido. Conforme Urbaneja (2008: 24) ao vincular os trabalhos matemáticos de Apolônio e Viète, Fermat estabelece a sua nova geometria – a base de parafrasear algebricamente a análise geométrica de Apolônio – de forma a converter o *sintoma* das curvas das *Cônicas* do geômetra de Pérgamo na *equação característica da curva* da sua *Introdução*.

Com a sua nova geometria, Fermat estabeleceu uma investigação plena dos lugares planos e sólidos, em conformidade ao título do seu manuscrito – *Introdução aos lugares geométricos planos e sólidos.* Tal título é um reflexo do espírito geométrico grego[100] que dominava o sistema de opiniões do estilo de pensamento da escola analítica – ainda que de uma forma investigativa neoclássica – pois tal como os gregos, Fermat optou por não investigar sistematicamente os lugares lineares. De fato, devido ao seu estilo de pensamento, Fermat não trabalhou com lugares de ordem superior em sua *Introdução*, mas ele tinha ciência da possibilidade infinita do número de curvas, visto que declarou no preâmbulo do presente manuscrito: "(...) as espécies de curvas são em número infinito, círculo parábola, hipérbole, elipse, etc" (FERMAT, 1891/1912: 85, tradução nossa). No fim da *Introdução*, Fermat observou que seu novo método podia resolver qualquer problema geométrico, como exemplo, fez uma simples menção a uma variante genérica do famoso problema de Pappus:

> Se quaisquer números de retas são dados em posição, e se traçam retas desde um mesmo ponto e com ângulos fornecidos as retas dadas, e se a soma dos quadrados de todas as retas traçadas for igual a uma determinada área, então o ponto encontrar-se-à num lugar sólido determinado. (FERMAT, 1891/1912: 95, tradução nossa)

Fermat não abordou o problema acima, mas deixou a sua resolução para o passa tempo de seus leitores. Mas, ainda que não seja de nosso intento, comparar, por agora, as geometrias analíticas de Fermat e Dercartes, é mister afirmar que o problema de Pappus desempenhou uma função importante em ambas as obras, pois enquanto a *Introdução* finaliza com uma alusão ao problema como sendo um exemplo aplicável ao novo método, a *Geometria* gravita em torno do mesmo, já que Descartes continuará aonde Pappus parou e solucionará definitivamente a questão. A *Introdução* de Fermat, portanto, não foi apenas uma paráfrase algébrica do que os antigos conheciam acerca dos lugares planos e sólidos, "mais do que simplesmente uma restauração do

[100] Para um estudante contemporâneo, a referência aos lugares planos e sólidos que aparece no título do manuscrito de Fermat pode parecer ambígua. Poder-se-à questionar: em que sentido Fermat esta dizendo? Naturalmente, as expressões *lugares planos* e *lugares sólidos* tinham para Fermat o mesmo sentido atribuído a elas pelos gregos. De fato, na antiguidade as curvas eram classificadas segundo um critério que determinava as retas e os círculos como lugares planos, as cônicas como lugares sólidos e o restante das curvas como lugares lineares. Como no século XVII, ainda não tinha se desenvolvido a geometria analítica espacial, embora Fermat e Descartes tivessem consciência da possibilidade, a ambiguidade é apenas ilusória.

passado; ela era uma nova e moderna abordagem para os problemas antigos" (BOUTIN, 2009: 31). Dessa forma, ao se reportar ao problema de Pappus, Fermat pretendeu mostrar o potencial da sua nova geometria, como um método algébrico de resolução dos problemas indeterminados, por essa razão ele afirmou:

> Se esta descoberta tivesse precedido a nossa restituição dos dois livros dos lugares planos, as construções dos teoremas dos lugares teriam sido muito mais elegantes; mas, não desprezaremos esta pesquisa, mesmo que ela se revele precoce e insuficientemente madura. Na ciência em geral, há certo interesse em ofuscar da posteridade os trabalhos informativos ao nosso intelecto; o trabalho incipiente começa sendo simples e se fortalece e expande com novas descobertas. É também relevante para a pesquisa poder contemplar plenamente os progressos ofuscados do intelecto e o desenvolvimento espontâneo da arte. (FERMAT, 1891/1912: 96, tradução nossa)

Estas foram às últimas palavras de Fermat no desfecho da sua *Introdução*, percebe-se a preocupação do autor em apontar os aspectos fundamentais no encadeamento da descoberta de uma ciência. Desse modo, a restituição dos *Lugares planos* mediante o emprego do estilo sintético, teria sua importância na elaboração da *Introdução*[101] que se serviria não apenas da *Arte analítica*, mas também dos teoremas contidos nos *Lugares planos*, pois foi "a versão algébrica dos teoremas de

[101] A *Introdução* continha ainda um apêndice denominado de *Solução de problemas sólidos por lugares geométricos* donde Fermat procurava solucionar mediante construções geométricas as equações cúbicas e quárticas resultantes desses problemas. Com efeito, para determinar o valor da incógnita nas equações cúbicas do tipo $x^3 + ax^2 = ab^2$, Fermat as transformava em duas equações indeterminadas, após igualar cada termo da equação cúbica ao monômio axy, isto é: $x^3 + ax^2 = axy$ e $ab^2 = axy$, mediante transformação algébrica ele concluía que $x^3 + ax^2 = axy$ era equivalente a equação da parábola $x^2 + ax = ay$, da mesma forma que $ab^2 = axy$ poderia ser facilmente transformada na equação da hipérbole $b^2 = xy$. Fermat então resolvia as equações cúbicas através da resolução dos sistemas de equações da parábola e da hipérbole. Por raciocínio análogo, ele resolvia as equações quárticas transformando-as num sistema de equações da parábola e da circunferência. Portanto, foi assim que Fermat deduziu um método apurado para resolver equações cúbicas e quárticas por meio da interseção de lugares cônicos, se utilizando dos princípios da *Introdução* acerca de que toda equação quadrática é semelhante a um lugar cônico e que todas as construções geométricas dos antigos poderiam ser substituídas com facilidade por meras operações algébricas. Em suma, a *Introdução* foi uma obra representativa do desvio estilístico que conduziu os rumos da nova geometria – baseados no método algebricamente analítico – em relação à matemática seiscentista – baseada até então no método sintético dos gregos. Como membro da escola analítica, a geometria grega foi sem sombra de dúvida a fonte de formação e inspiração de Fermat, mas ele decidiu abandonar o seu método sintético por que o considerava desnecessário confrontado com a análise algébrica. Desse modo, sua *Introdução* permitiu a supressão da rigidez do método sintético ao apresentar o descobrimento como se estivesse acompanhado da demonstração, pois a análise algébrica tinha essas duas funções. Nessa perspectiva, à ideia analítica algébrica da investigação dos problemas geométricos tinha maior importância do que o conhecimento demonstrativo e axiomático da síntese geométrica. Com um enfoque heurístico, fundamentado na álgebra simbólica de Viète, Fermat rompeu com o dualismo euclidiano descobrimento-demonstração e utilizou métodos uniformes para demonstrar o seu principal objetivo da *Introdução* que era a ligação recíproca entre as equações indeterminadas e os lugares geométricos. Tais métodos recorriam à mecânica algorítmica da álgebra simbólica de Viète que auxiliou Fermat na incrementação heurística da sua análise algébrica. Embora quando publicada em 1679 nas *Várias Atividades Matemáticas*, a *Introdução* tenha-se mostrado ultrapassada devido à utilização da linguagem de Viète no momento em que a álgebra simbólica de Descartes já tinha vingado, Fermat contribuiu sobremaneira para o desenvolvimento da matemática de seu tempo.

lugares geométricos de Apolônio que forneceu os começos da geometria analítica de Fermat" (KATZ, 2010: 543).

Permita-nos, analisar daqui para frente, à trajetória intelectual de Descartes no universo das matemáticas cujas primeiras experiências se deram em sua formação primária e secundária no colégio jesuíta de *La Flèche*, tido entre os finais do século XVI e inicio do XVII, como uma das melhores instituições educacionais de toda a Europa. Na passagem de Descartes por lá, provavelmente entre a páscoa de 1607 e o mês de setembro de 1615, ele usufruiu de uma formação não só em humanidades clássicas, como Fermat em Beamount, mas também em matemáticas. E ao contrário da tradição dos analistas de Bordéus, o enfoque do ensino da matemática dos jesuítas, possuiu um embasamento totalmente prático que se pautava no quadrivium pitagórico da tradição medieval, acrescido de "noções de mecânica, óptica, acústica, topografia, perspectiva, hidráulica e balística, segundo o quadro geral da matemática prática renascentista, e com uma orientação em direção à engenharia civil e militar, de interesse para os jovens nobres que ocupariam cargos na administração e no exército" (URBANEJA, 2003: 86).

Segundo Sasaki (2003: 17) o currículo[102] de *La Flèche* tinha uma estrutura escolástica com pequenas reformas humanistas – que ocorriam de maneira geral, nas instituições de ensino francesas da segunda metade do século XVI e o inicio do XVII – o que representava, por assim dizer, uma transição gradual da educação medieval para a educação renascentista. Dividido em dois módulos, o primeiro deles, conhecido como currículo humanístico, visava dar uma formação humanista aos estudantes ao longo de cinco anos de estudo, os três primeiros eram devotados ao estudo das gramáticas do latim e do grego. No quarto ano, os estudantes estudavam literatura e no quinto, retórica. O segundo módulo, conhecido como currículo filosófico, teve três anos de duração, distribuídos em estudos de lógica, filosofia natural, metafísica e moral conforme as fontes de Aristóteles e de seus comentadores renascentistas. A matemática era estudada no segundo ano do currículo filosófico ao lado da filosofia natural, mas o professor dedicava apenas "uma hora diária de aula" (SASAKI, 2003: 18) para ensinar os *Elementos* de Euclides e os problemas matemáticos

[102] Transcorrido certo tempo após o término da sua formação, Descartes criticou, em sua autobiografia no *Discurso*, o currículo escolar de *La Flèche*, mas ele tinha real consciência do capital cultural da sua alma mater. De fato, numa carta escrita a Debeaune em 1638, um ano após a publicação do *Discurso*, Descartes declarou que: "não há lugar no mundo onde, em minha opinião, a Filosofia é ensinada melhor do que em *La Flèche*" (SASAKI, 2003: 19). Na realidade, sua frustração demonstrada anos mais tarde com o colégio de *La Flèche* era devida ao conteúdo das disciplinas ensinadas lá, mas não com a metodologia de ensino dos jesuítas ou mesmo com os seus próprios professores. Em suas reflexões posteriores no *Discurso* de 1637, tudo que constava no currículo dos jesuítas foi posto em discussão: as línguas clássicas, "necessárias ao entendimento dos bons livros" que se apresentavam como "fábulas" e "histórias", a eloqüência e a poesia, consideradas "dons do espírito, mais do que frutos do estudo", a teologia, "cujas verdades reveladas" estavam "além de nossa inteligência", a filosofia, enxertada de tantas opiniões "acerca de um mesmo assunto, sem que possa haver mais de uma que seja verdadeira, achava quase como falso tudo quanto era apenas provável" e até mesmo as próprias matemáticas que apesar da certeza e à evidência de suas razões não era possível "perceber sua verdadeira aplicação, e, julgando que só serviam as artes mecânicas, espantava-me de que, sendo seus fundamentos tão seguros e sólidos, não se houvesse construído sobre eles nada de mais elevado" (DESCARTES, 2000: 39-40).

mais difíceis. Os professores jesuítas tinham um espectro amplo de referência bibliográfica para preparar suas aulas de matemática. Dentro desse espectro, no documento *Um método para promover as disciplinas matemáticas na sociedade de Jesus* redigido por Clavius provavelmente em 1582, a "filosofia natural sem as diciplinas matemáticas" é caracterizada como "insatisfatória e incompleta" (CLAVIUS apud SASAKI, 2003: 26) o que comprova a ênfase prática da educação matemática na sociedade de Jesus.

O jesuíta alemão Cristóvão Clavius, professor de matemática no colégio jesuíta de Roma – a mais prestigiosa instituição docente dos jesuítas na época de Descartes – foi o principal mentor do currículo matemático[103] de todos os colégios jesuítas da Europa. Conhecido pelos seus contemporâneos como "O novo Euclides" (URBANEJA, 2003: 86), Clavius dirigiu seminários a fim de "treinar estudantes que se tornariam futuros professores de matemática nos colégios jesuítas" (SASAKI, 2003: 25). Detentor de uma visão pragmática da matemática, Clavius foi um exímio escritor e tradutor de manuais científicos, os quais tratavam não apenas de conhecimentos teóricos da matemática clássica, mas também de conhecimentos úteis para a sociedade que se resguardavam na matemática dos gregos. Por isso, dentre seus livros publicados encontramos alguns títulos simbólicos como *Aritmética Prática* de 1583, *Geometria Prática* de 1604, e em particular a *Álgebra* de 1608, esse último manual embora não tivesse o adjetivo prático, foi um tratado redigido dentro "da tradição[104] da algebra cossista que tinha florescido na Itália e Alemanha durante o fim da idade

[103] O currículo matemático dos colégios jesuítas foi desenvolvido entre 1586 e 1599 e fez parte dos *Estudos de Sistemas*, "um manual prático em método educacional e direção colegial" que reservava apenas um espaço breve para orientar os professores de matemática da ordem jesuíta quanto aos assuntos que deveriam ser obrigatoriamente focalizados em suas aulas. Dentre as versões que serviram para formular a versão final do *Estudo de Sistemas* de 1599, encontramos já na versão de 1586, a tendência de considerar a matemática como um assunto útil para as demais ciências: "Elas [as disciplinas matemáticas] oferecem e explicam aos poetas a trajetória e o cenário das estrelas; aos historiadores as formas e as distâncias dos lugares; aos estudantes dos *Analíticos Posteriores* exemplos de demonstrações sólidas; aos estadistas as artes admiráveis para conduzir bem os serviços políticos e militares; aos físicos as formas e diferenças dos movimentos celestiais, como as luzes, as cores, os corpos transparentes, e os sons; aos metafísicos o número de esferas e anjos; aos teólogos as partes notáveis do criador divino; aos tribunais de justiça e a comunidade eclesiástica os cálculos precisos das épocas" (CLAVIUS apud SASAKI, 2003: 23-24, grifo nosso). Essa tendência tinha sido reconhecida na idade média, particularmente nas universidades de Oxford e Paris, e enfatizada com mais vigor no Renascimento não só nas instituições de nível superior, mas também nas instituições de nível primário e secundário pertencentes à ordem dos jesuítas. Conforme explica Sasaki: "na França, especialmente depois do estabelecimento da cátedra real de matemática por François I em 1532, cujo primeiro ocupante foi Oronce Fine, e pelo proselitismo de tais pedagogos como Peter Ramus, a utilidade da matemática tinha sido gradativamente reconhecida. Uma tendência similar podia ser testemunhada na Inglaterra também" (SASAKI, 2003: 32). Dessa forma, nos colégios jesuítas, a ênfase em torno da utilidade da matemática foi um reflexo da atmosfera social da época.

[104] Sasaki entende que embora a *Álgebra* de Clavius seja considerada um tratado vinculado a tradição cossista, já que a linguagem empregada no referido tratado seguiu a risca os simbolos cóssicos de Michael Stifel em sua *Aritmética integra* de 1544, tal vínculo de Clavius a essa tradição não pode ser considerado no sentido estreito, isto é: "aquele da arte prática que dirigia-se principalmente as necessidades dos mercados comerciais" (SASAKI, 2003: 76). Ocorre que no Renascimento a matemática passou por diversas mutações em seu estilo de pensamento, e uma delas foi que a álgebra deixou de ser uma arte mercantil para alcançar o status de um ramo da matemática pura. Um dos articuladores dessa idéia foi o matemático Regiomontanus que num discurso – sobre o astrônomo árabe do século nono, al-Fargghani – proferido na Universidade de Pádua em 1464, "tentou elevar o status da álgebra ao nível das disciplinas matemáticas clássicas como a aritmética e a geometria" (SASAKI, 2003: 75-76), após perceber certas conexões entre a recém descoberta Aritmética de Diofantus e arte da álgebra árabe. Na realidade, tal conexão já tinha sido percebida pelos próprios árabes, pois no século nono o matemático árabe Qusta ibn Luga tinha intitulado a sua tradução árabe da

média e o rensacimento" (SASAKI, 2003: 74). Dentre os livros redigidos e traduzidos por Clavius no âmbito das matemáticas aplicadas, destaca-se a "sua versão comentada da *Sphera* de Sacrobosco de 1591, um compêndio de trigonometria e astronomia aplamente utilizado e muito elogiado por Kepler" (URBANEJA, 2003: 87). De qualquer forma, o trabalho literário mais conhecido de Clavius fez parte do dominio da matemática pura, que foi a sua própria versão comentada e traduzida dos *Elementos* de Euclides publicada em 1574, "que teve reedições em 1589, 1591, 1603, 1607, 1612 e 1674, o que dá a idéia de seu valor" (URBANEJA, 2003: 87). Para suas edições dos *Elementos*, Clavius tinha composto um prefácio intitulado *Prolegômenos as disciplinas matemáticas* no qual ele conservou a perspectiva filosófica neoplatônica da matemática advogada por Proclus em seu *Comentários do primeiro livro dos Elementos de Euclides*, traduzido[105] por Barozzi em 1560. Neste prefácio, Clavius confere um estatuto epistemológico privilegiado a matemática que se justificava em função da certeza exteriorizada em suas realizações, ao passo que que nas outras ciências, especialmente a filosofia, havia muitas discordâncias em relação a um mesmo tópico.

Além de ser influenciado pela escola matemática dos cossitas, Clavius "tinha sido influenciado pela tendência em estudos matemáticos entre alguns humanistas renascentistas" (SASAKI, 2003: 2), tais como Barozzi, Comandino e Maurolico que desenvolviam "um meritório trabalho de recuperação, reconstrução e divulgação do legado clássico, mas mantendo inacerciveis os métodos e o estilo dos grandes tratados da antiguidade grega" (URBANEJA, 2008: 30). Dessa forma, Clavius "foi chamado de restaurador da matemática" (SASAKI, 2003: 49), um titulo que confirma, por si só, a sua participação na referida escola matemática dos geometras clássicos. Na realidade, ele foi

---

Aritmética em *Arte da álgebra*. Quem sistematizou essa idéia no papel foi o cossista italiano Bombelli, ao escrever a sua Algebra em 1592, que além de propor uma reforma no simbolismo algébrico – ainda distante das idéias simbólicas contemporâneas dos analistas – incorporou muitos problemas determinados da Aritmética de Diofanto a fim de resolvê-los mediante equações algébricas em uma incógnita. Dessa forma, a Algebra de Clavius, ainda que tenha sido publicada no inicio do século XVII, foi um produto da recepção social da Aritmética de Diofanto nos fins do século XV e durante o século XVI, na qual muitos matemáticos humanistas, tais como Regiomontanus e Bombelli, se esforçaram para elevar o status da álgebra ao mesmo nível das disciplinas matemáticas clássicas. Dessa forma, Clavius superestimou a álgebra como uma disciplina teórica respeitável, que atravessava tanto a aritmética quanto a geometria, e até mesmo outros campos da matemática. Para tanto, ele se serviu de técnicas bastante sofisticadas para resolver os problemas aritméticos e geométricos – muitos deles tomados emprestados da Aritmética de Diofanto – mas conforme as diretrizes do seu estilo de pensamento, os problemas abordados na Algebra eram resolvidos de maneira tal que "todos os números [envolvidos nas resoluções] salvo as incógnitas eram expressos mediante símbolos cóssicos, ou seja, os coeficientes e as constantes eram sempre representados por números concretos. Esta era uma diferença significativa entre os algebristas de Diofanto através de Bombelli [cossistas] e os analistas modernos que seguiam François Viète" (SASAKI, 2003: 79).

[105] Barozzi foi um amigo contemporâneo de Clavius que tinha participado intensamente nos debates em torno da certeza da matemática na Universidade de Pádua nos finais do século XVI. Tais debates, que constituíram o pano de fundo sobre o qual Clavius reagiu com a redação dos *Prolegômenos*, foram travados entre os seguidores de Barozzi, que advogavam a primazia das demonstrações matemáticas frente às demonstrações lógicas, e os seguidores de Picolomini que advogavam exatamente o oposto, ou seja, a primazia das demonstrações lógicas frente às demonstrações matemáticas. Nos *Prolegômenos*, Clavius tinha se posicionado favoravelmente a perspectiva de seu amigo Barozzi, a propósito, tal perspectiva, que elevava o status da matemática frente ás outras ciências veio a ser uma marca da educação matemática dos jesuítas esboçada nos *Estudos de sistemas* de 1599. (Cf. Sasaki, 2003: 50-63).

um verdadeiro erudito, embora não tenha sido necessariamente um matemático original, conforme "a avaliação do seu contemporâneo Viète" (SASAKI, 2003: 49).

Segundo Sasaki (2003: 2), o que Descartes se sentiu atraído no colégio jesuita de *La Flèche* e depois tentou reformar foi exatamente o pensamento matemático incorporado no programa educacional da sociedade de Jesus. De um modo geral, Urbaneja (2003: 86) considera difícil conhecer com prescisão quais foram as matemáticas adotadas e ensinadas em *La Flèche*, o que revela um certo mistério com relação a formação matemática primária e secundária do filósofo francês, "que confessa que sentiu-se cativado pela parte do curso de Filosofia referente as matemáticas" (URBANEJA, 2003: 86). Para Sasaki (2003: 2), o mesmo pode ser dito com respeito aos manuais de matemática utilizados em *La Flèche*. Seja como for, o certo é que dentre o conjunto dos manuais matemáticos redigidos por Clavius, "Descartes tornou-se familiar com pelo menos dois deles, quer como manuais de um curso regular, como leitura extracurricular, quer como leitura imediatamente após a sua graduação" (SASAKI, 2003: 2). Tais manuais seriam seguramente os *Elementos* de Euclides, traduzidos e comentados pelo jesuita alemão em diversas versões, e a *Álgebra* de 1608. Sabemos que Descartes, ao contrário de Fermat, não gostava de revelar suas fontes matemáticas. Ele tinha um péssimo habito de quase sempre insistir "sobre a novidade das suas próprias idéias ao invés de reconhecer o seu débito para com outros matemáticos" (SASAKI, 2003: 45). No entanto, em 1646, quando tinha a idade madura de 50 anos, o sábio de *La Flèche* decidiu romper com o seu velho hábito, e numa conversa em particular com o então professor de matemática da universidade de Amsterdã, Jon Pell, ele revelou os seus estudos[106] de outros matemáticos, os quais confirmam a sua leitura dos trabalhos referidos de Euclides e Clavius. Dessa forma, esses dois manuais "constituíram o pano de fundo fundamental que formou a base intelectual

[106] Segundo Sasaki (2003: 45-48) tais estudos foram descritos em uma carta de Jonh Pell a Charles Cavendish, datada de 12 de março de 1646 na qual o então professor da Universidade de Amsterdã faz referência a um comentário de Descartes de Diofanto e Arquimedes, no qual o sábio de *La Flèche* tinha reverenciado especialmente o segundo por ter encontrado traços de álgebra, ou melhor análise, em seus trabalhos. Pell afirma também a Cavendish que Descartes não possuía a sua própria cópia dos *Elementos* de Euclides e ainda faz alusão a um elogio que o filósofo fez a Euclides e Apolônio que soava "irônico e não parece ter sido sem reserva" (SASAKI, 2003: 46-47) tal como com Arquimedes. Mais impressionante dessa carta é a declaração de Descartes com respeito a suas fontes em álgebra: "Ele diz que ele não tinha outro instrutor para Álgebra a não ser a leitura da Álgebra de Clavius a mais de trinta anos atrás" (PELL apud SASAKI, 2003: 47). Nessa passagem, Descartes tinha se referido à *Álgebra* de Clavius publicada em Roma em 1608. Sasaki acredita que se a declaração de Descartes é verídica, então ele leu antes de 1616 – ou melhor, durante o seu período formativo em *La Flèche*, mais prescisamente no ano letivo de 1613-1614 no qual ele estudou matemática como parte do currículo filosófico – o tratado de Clavius sobre álgebra, muito "embora seja duvidoso que a *Álgebra* de Clavius fosse o único tratado de álgebra examinado por Descartes" (SASAKI, 2003: 47). Há uma evidência de que Descartes foi não só um mero leitor, mas que conhecia profundamente os *Elementos* de Euclides traduzidos e comentados por Clavius, o que contraria as suas referidas afirmações ao matemático Jon Pell. Tal evidência encontra-se numa carta, datada de 13 de Novembro de 1629, enviada de Amsterdã por Derscartes a Mersenne, na qual o filósofo francês faz referência á curva quadratriz ao responder uma questão proposta pelo reverendo, e comprova com isso o seu conhecimento da edição de Clavius dos *Elementos*, pois nessa carta Descartes justifica para Mersenne o nome da referida curva na medida em que ela "é útil para quadricular o círculo e ainda para dividir o ângulo em quaisquer partes iguais (...) e para muitos outros usos que você pode ver nos *Elementos* de Euclides anotados por Clavius" (DESCARTES apud SASAKI, 2003: 47).

e o sustento técnico de Descartes, e o seu próprio alvo principal" (SASAKI, 2003: 3) quando ele começa a sua trajetória de questionamento e reforma do pensamento matemático tradicional no seu período pós *La Flèche* – mais precisamente de 1618 em diante, pois quando abandonou *La Flèche* em 1615, Descartes partiu para Poitiers para graduar-se em leis em 1617.

A partir de 1618, Descartes optou por uma vida nômade, dedicada ao conhecimento do mundo, ao viajar por vários paises europeus através de expedições militares nas quais ele participava como um soldado recruta – como manifestou mais tarde na sua autobiografia no *Discurso*[107]. Na sua estadia na Holanda entre 1618 e 1619, Descartes, estava a serviço do exército de Mauricio de Nassau, quando conheceu por acaso, no outono de 1618, na cidade de Breda, o erudito Isaac Beeckman – graduado na universidade de Leiden e versado em várias ramos do conhecimento, especialmente em matemática e física – e uma proximidade entre os seus estilos de pensamento havia de estabelecer "uma frutífera amizade, mantida sobretudo de forma epistolar, plena de gratidão recíproca" (URBANEJA, 2003: 88) como mostra uma carta de Descartes a Beeckman datada de 23 de Abril de 1619: "Você é verdadeiramente o único homem que despertou-me da indolência, chamou-me de volta para a erudição que tinha quase desaparecido da minha memória, e melhorou o meu espírito que andava ocioso e sem um rumo certo" (SASAKI: 2003: 95). Devido aos elogios entre ambas às partes, expressados na ampla correspondência trocada entre os dois, há uma unanimidade entre os historiadores de que eles tinham muitas afinidades no campo das matemáticas. De fato, dentre os manuais matemáticos que Beeckman provavelmente estudou em Leiden, entre 1604 e 1610, sob a orientação do seu professor Snel, consta-se a autoria de Ramus em quase todos eles o que confirma que a utilidade da matemática tinha sido enfatizada gradativamente não só nas instituições de ensino francesas e inglesas ao longo do século XVI, mas também na "recém-nascida república holandesa no principio do século XVII" (SASAKI, 2003: 95). Na descrição de Sasaki dos manuais matemáticos, conferidos por Snel a Beeckman em Leiden a titulo de orientação, percebemos que – como Descartes em *La Flèche* – ele deve ter estudado um tipo de mistura de matemática vulgar e matemática aplicada nas quais os seguintes autores eram enfatizados: "Ramus, Euclides e Heron em geometria; Ramus, Boetius, e Euclides em aritmética; Ramus, Clavius, e outros em aritmética prática; Ptolomeu e Copérnico em astronomia, Heron, Comandino e Pappus em mecânica, e vários autores em astrologia, óptica, música, e outras matemáticas mistas" (SASAKI, 2003: 95).

[107] "(...) graças a Deus não me sentia de maneira alguma numa condição que me obrigasse a converter a ciência num oficio, para o alivio da minha alma; e se bem que não desprezasse a glória como um cínico, fazia, contudo muita pouca questão daquela que eu só podia esperar obter com falsos títulos. (...) abandonei totalmente o estudo das letras. E, decidindo-me a não mais procurar outra ciência além daquela que poderia encontrar em mim mesmo, ou então no grande livro do mundo, aproveitei o resto da minha juventude para viajar, para ver cortes e exércitos (...) para fazer variadas experiências, para por a mim mesmo á prova e (...) para refletir a respeito das coisas que se me apresentavam" (DESCARTES, 2000: 41-42).

Para Sasaki (2003: 96), graças ao *Diário* de Beeckman – uma autobiografia que cobriu os anos de 1604 a 1634, descoberta por Cornelis de Waard em 1905 na biblioteca provincial de Zeeland – podemos conhecer em alguma extensão até que ponto esta tarefa dirigida a Beeckman por seu professor Snel foi executada. Diante dos tópicos abordados nesse *Diário*[108], Sasaki (2003: 96) considera que os interesses de Beeckman parecem ter centralizado não só em matemática pura, mas principalmente em matemática prática e filosofia natural experimental, o que confirma a fidelidade com os autores aconselhados pelo seu professor, o principal deles era, com toda a certeza, Clavius, que no inicio do seiscentos "era admirado na Holanda" (SASAKI, 2003: 96). Beeckman se formou praticamente na mesma atmosfera intelectual de Descartes, com isso a relação entre eles não foi de mestre para discípulo, mas sim "um tipo de colaboração" (SASAKI, 2003: 96) que provém da semelhança de seus estilos de pensamento, mesmo porque "o entendimento imediato entre os adeptos de estilos de pensamento diferentes é impossível" (FLECK, 2010: 79).

Sasaki aponta que embora Beeckman tenha esclarecido Descartes em alguns assuntos, ele não o influenciou unilateralmente, no sentido de uma instrução que visasse implantar "uma semente de um saber inteiramente novo", mas ao invés disso, Beeckman tinha "reorientado ou oferecido um estimulo puro ao talento, já existente no jovem francês, para a matemática e a filosofia natural desenvolvidos na escola de *La Flèche* e que estavam adormecidos no inicio do encontro" (SASAKI, 2003: 96-97). Segundo Sasaki (2003: 99), salvo para duas discussões particulares entre Beeckman e Descartes sobre dois problemas geométricos, uma de cunho teórico e a outra de cunho filosófico, quase todos os tópicos de discussões de 1618, entre eles, registrados no *Diário* de Beeckman versavam sobre a teoria matemática da música e a formulação matemática da lei de queda livre. Sasaki entende que como para o primeiro tópico Descartes criou[109] suas próprias idéias em uma

---

[108] Em seu *Diário*, Beeckman, menciona alguns trabalhos de Euclides e Ramus – grandes expoentes da aritmética e da geometria de Leiden – mas o que surpreende Sasaki é a citação da *Álgebra* e da *Geometria prática* de Clávius, além do fato de Beeckman ter "escrito equações algébricas em símbolos cóssicos" (SASAKI, 2003: 96). Isso implica que Beeckman foi um adepto da escola cossista e talvez da escola dos matemáticos aplicados, essa última estava em voga na Holanda, e um de seus objetivos era a criação de instrumentos matemáticos para satisfazer as necessidades sociais, aliás, "Clavius tinha enfatizado alguns instrumentos matemáticos, por exemplo, os compassos ordinários e o quadrante em sua *Geometria prática*" (SASAKI, 2003: 105). Não há evidências de que Beeckman, nem mesmo Clavius tivessem criado novos instrumentos matemáticos, tais como os compassos proporcionais ou os setores, a fim de suprir necessidades sociais. Por isso Sasaki não situa Beeckman e Clavius como membros da escola dos matemáticos aplicados. De qualquer forma, é inegável que em função da ênfase dada pelos dois à utilidade da matemática como fundamento para estudar a natureza – especialmente no caso de Clavius que enfatizou essa utilidade para todos os campos possíveis do conhecimento, enquanto que Beeckman se restringiu a filosofia natural – podemos conjecturar que eles compartilharam em alguma extensão alguns pressupostos da escola dos matemáticos aplicados, até mesmo em razão da importância que a pedagogia de Ramus tinha como orientadora do currículo das instituições de ensino as quais eles tinham estudado.

[109] Na realidade, Descartes não foi totalmente original em suas idéias matemáticas elaboradas no *Compêndio da música*, pois "um dos temas abordados entre as discussões entre Beeckman e Descartes foi à análise dos intervalos musicais" (BLAS, 2003: 35). De fato, segundo Blas (2003: 35) Descartes tinha poucos conhecimentos nesse campo limitados as contribuições teóricas da escola pitagórica e um tratado de Zarlino, denominado *Instituições harmônicas*, escrito na segunda metade do século XVI, na qual o autor buscou aumentar, sem justificativa cientifica, os intervalos de consonância dos pitagóricos. No *Compêndio da música* Descartes propõe uma justificativa geométrica baseada em proporções entre segmentos, para sustentar o aumento zarliniano dos intervalos de consonância pitagóricos, mas

monografia intitulada *Compêndio da música* – apresentada a Beeckman no inicio de 1619 – então "os dois jovens eruditos trocavam visões sobre o segundo assunto" (SASAKI, 2003: 99). Uma idéia em comum, decorrente da semelhança entre seus estilos de pensamento era que a matemática era uma ferramenta valiosa no estudo da filosofia natural, como informava a versão parcial dos *Estudos de Sistemas* de 1586, escrita por Clavius, o famoso jesuíta que teve grande ascendência na formação matemática desses dois jovens eruditos, principalmente na de Descartes. Entretanto, no seu *Diário* Beeckman relatou que Descartes tinha confessado a ele, que jamais encontrou alguém, além do próprio Beeckman, "que estava habituado a estudar na maneira em que [Beeckman] estava contente em fazer, ligando, de forma precisa, física e matemática" (SASAKI, 2003: 99, grifo nosso). Isso implica que Descartes viu Beeckman muito além de Clavius, assim o erudito holandês estimulou a capacidade criativa potencial[110] do sábio de *La Flèche* para expressar o seu "próprio programa para reorganizar a disciplina inteira da matemática" (SASAKI, 2003: 99).

Dessa forma, numa carta de despedida datada de 26 de março de 1619, Descartes revelou a Beeckman o que ele tinha estudado e obtido como um fruto da sua pesquisa enquanto viveu na Holanda. Naquele curso de dois anos, Descartes tinha conseguido inventar novos compassos a fim de resolver, com demonstrações seguras, quatro questões matemáticas – que o levaram a redigir suas soluções num manuscrito intitulado *Pensamentos privados*[111] – uma sobre a divisão de um

---

levando-se em conta que Beeckman "tinha interesse em aprofundar os aspectos científicos da acústica e da harmonia, pondo a serviço da explicação do observado sua filosofia corpuscular" (BLAS, 2003: 35), é natural pensar, como faz Sasaki, que Beckman não influenciou as idéias de Descartes no *Compêndio da música*, já que não há "nem na obra de Zarlino nem na de Descartes, nenhuma justificativa cientifica do porque dessas novas consonâncias, baseadas na superposição do movimento vibratório de ondas sonoras" (BLAS, 2003: 36). No entanto, evidências históricas confirmam o contrário, pois Lewis afirma que após dez anos de convivência com Beeckman, Descartes, dirá a respeito do erudito holandês, numa carta a Mersenne, que foi por acaso e não por escolha que ele o conheceu, essa afirmação maldosa de Descartes é decorrente de "uma violenta ruptura em 1630, porque Beeckman se apresentara a Mersenne como o inspirador do texto sobre música que Descartes lhe tinha dado" (RODIS-LEWIS, 1996: 42).

[110] De fato, o potencial criativo de Descartes foi reconhecido por Beeckman que admitiu em seu *Diário* "jamais ter falado com alguém com tamanha erudição" (SASAKI, 2003: 99).

[111] Segundo Sasaki (2003: 109) esse manuscrito é uma coleção de anotações, muitas delas incompletas – com passagens de teor tanto matemático quanto não matemático – que foram redigidas por Descartes muito provavelmente entre 1619 e 1621. Nos *Pensamentos privados*, podemos encontrar muitas informações do pensamento matemático de Descartes desse período, especialmente em sua parte inicial na qual há uma introdução referente a um livro, tencionado naquele período por Descartes, intitulado *Tesouro matemático*. Naquela introdução, Descartes visou à criação de uma nova ciência, isto é, um método verdadeiro de resolução de todas as dificuldades na ciência da matemática, o que implica que "seu procedimento tencionado para resolver os problemas matemáticos não era o procedimento comum, que era visto nos *Elementos* de Euclides ou nos manuais comuns de álgebra cossista, mas aquele de seus compassos e/ou sua álgebra reformada" (SASAKI, 2003: 111). Com a redação dos *Pensamentos privados*, o plano ambicioso acalentado por Descartes em 1619 – de reforma do pensamento matemático tradicional – consistiu em um trabalho diferente daqueles realizados até então por certas pessoas que "gabavam-se que elas estavam em posse das descobertas milagrosas de todas as ciências" (SASAKI, 2003: 111). Essas pessoas com toda a certeza devem ter sido os escritores da ordem rosa cruz da Alemanha, tanto que Descartes tinha dedicado o *Tesouro matemático* as pessoas eruditas de todo mundo, em especial aos irmãos da ordem rosa cruz. Daí, com a ascensão desse movimento místico em toda a Alemanha por volta de 1619 em razão da deflagração da guerra dos trinta anos, é provável que Descartes "deve ter ouvido um rumor sobre os irmãos da ordem rosa cruz, e esse boato deve ter lembrado ele do defensor do lulismo que ele tinha encontrado num bar em Dordrecht" (SASAKI, 2003: 111). Dessa forma, Sasaki entende que a dedicatória, feita por Descartes na introdução do *Tesouro Matemático*, aos irmãos da ordem rosa cruz possui um tom irônico, mas é inegável que o seu pensamento matemático foi influenciado por essas idéias exteriores à matemática em si mesma, provenientes da escola dos matemáticos místicos – uma categoria que certamente não se enquadrava naquelas umas ou duas das seis categorias da

ângulo em quaisquer partes iguais e as outras se referiam a três classes de equações cúbicas. Naquela ocasião, Descartes manifestou a Beeckman que ainda não tinha terminado a discussão desses temas, em especial, as equações cúbicas as quais ele se dispôs a lutar mais tarde para ampliar as suas demonstrações particulares. Nessa carta referida acima, Descartes tinha dito a Beeckman que através da sua arte dos novos compassos: "quatro vezes[112] mais problemas difíceis serão capazes de ser resolvidos do que pela álgebra comum" (SASAKI, 2003: 100), o que indica que na primavera de 1619 ele começava a esclarecer-se dos limites[113] do pensamento matemático de Clavius. Para Fleck (2010: 163), "a percepção da forma (Gestaltsehen) de acordo com uma determinada atmosfera, e sua inversão inesperada para uma percepção diferente da forma" faz com que "não se entende mais, como a configuração (Gestalt) anterior era possível e como aquilo que a contradizia podia ficar despercebido" (FLECK, 2010: 163). De fato, o jesuíta alemão tinha mencionado em sua *Álgebra* as "tentativas de Cardano, Tartalia, Bombelli, e Viète para resolver equações cúbicas, mas não apresentou seu próprio método para resolvê-las. Descartes, por sua vez, tentou resolver equações cúbicas assim como dividir um ângulo em quaisquer partes iguais por inventar seus próprios compassos bastante sofisticados" (SASAKI, 2003: 101).

> E certamente para dizer a você abertamente o que eu estou planejando, eu quero expor, não a *Ars brevis* de Lulio, mas uma ciência inteiramente nova, pela qual todos os problemas que podem ser apresentados, sobre qualquer tipo de quantidade, contínua ou discreta, podem ser geralmente resolvidos. No entanto, cada problema, será resolvido conforme sua própria natureza, como, por exemplo, na aritmética algumas questões são resolvidas por números racionais, outras por números irracionais, e outras finalmente

---

matemática existentes nos séculos XVI e XVII que "constituíam o que nós podíamos chamar de uma [verdadeira] escola da matemática" (MAHONEY, 1994: 2). Dessa forma, o que Descartes estava acalentando por volta de 1619 "não deve ter sido um trabalho como aqueles por certas pessoas que apoiavam a arte lulliana ou o misticismo dos rosacruzes, mas um livro sobre uma *ciência inteiramente nova* com fundamentos sólidos" (SASAKI, 2003: 111, grifos do autor) e não superficiais.

[112] Para Sasaki (2003: 101), essa expressão "quatro vezes" é enigmática. Dessa forma, se com a expressão "álgebra comum", Descartes quis se referir à álgebra de manipular equações quadráticas, então a expressão "quatro vezes" pode ter sido derivada dos dois números de equações cúbicas e quadráticas, dezesseis possibilidades de equações cúbicas, 16 = 4x4 e quatro possibilidades de equações quadráticas, ainda que Descartes tenha reduzido as dezesseis possibilidades de cúbicas em treze casos e as quatro possibilidades de quadráticas em três casos. De qualquer forma, como os compassos usados na álgebra comum serviam apenas para tratar os três casos possíveis de equações quadráticas, denominadas por Descartes de equações comuns as quais ele as escreveu "em símbolos cossicos idênticos com aqueles da *Álgebra* de Clavius" (SASAKI, 2003: 101), então com os seus compassos recém-inventados, Descartes quis ir além da álgebra claviana ao tratar os treze casos possíveis de equações cúbicas que no âmbito geral, talvez pudessem representar o quádruplo das possibilidades dos compassos da *Álgebra* de Clavius limitados as equações quadráticas.

[113] Para Sasaki (2003: 101) a evidência mais forte dessa constatação de Descartes, diz respeito ao problema referido por ele, na carta de 26 de março a Beeckman, sobre a extração de raízes compostas de várias denominações, o qual "tem sido comumente interpretado ser a extração de raízes de quantidades na forma $a + \sqrt{b} + \sqrt{c}$... Ele provavelmente adquiriu uma sugestão para esse problema do capítulo 28: *Sobre a extração de raízes de binômios e apótemas, com os quais, aliás, Euclides tinha discutido a respeito de outros segmentos irracionais* no livro 10 da *Álgebra* de Clavius" (SASAKI, 2003: 101).

> podem ser imaginadas, mas não resolvidas. Assim também, eu espero mostrar por quantidades contínuas que alguns problemas podem ser resolvidos por linhas retas e círculos apenas, outros apenas por linhas curvas, que, entretanto, resultam de um único movimento e podem, portanto ser desenhadas com novos tipos de compassos, que não são menos exatos e geométricos, eu penso, do que os compassos comuns usados para desenhar círculos, e finalmente outros problemas que não podem ser resolvidos mais do que por linhas curvas geradas por movimentos diversos não subordinados um ao outro, essas curvas são certamente apenas imaginárias tais como a bem conhecida quadratriz. (...) eu espero poder demonstrar quais problemas se resolvem de uma ou outra maneira e quais não podem ser resolvidos por outra, assim que quase nada restará ser descoberto em geometria. É, evidentemente, uma tarefa infinita, não para um homem apenas, incrivelmente ambicioso, mas eu tenho visto alguma luz através do caos da escuridão dessa ciência, por meio da qual eu penso que qualquer escuridão densa pode ser dissipada. (SASAKI, 2003: 102)

Optamos por reproduzir alguns trechos dessa carta de 26 de março de 1619 de Descartes a Beeckman, pois neles encontramos alguns princípios que seriam desenvolvidos pelo Descartes maduro na *Geometria* de 1637, e que na sua juventude já faziam parte da essência do seu projeto de criação de uma ciência inteiramente nova, ou seja, uma disciplina algébrica capaz de servir de fundamento para os principais ramos da matemática pura, a aritmética e a geometria. Dessa forma, na primavera de 1619, Descartes estava de posse de um projeto de uma ciência inteiramente nova "pela qual todos os problemas que podem ser apresentados sobre qualquer tipo de quantidade, contínua ou discreta, podem ser geralmente resolvidos" mediante a intervenção de novos compassos[114]. Os detalhes técnicos desse projeto foram retratados no manuscrito *Pensamentos privados* no qual Descartes "não apenas tentou atacar equações cúbicas com a ajuda do seu compasso mesolábio e dividir um ângulo em qualquer número de partes iguais por inventar um aparato mecânico, mas também mostrou seu interesse em instrumentos mecânicos em geral" (SASAKI, 2003: 125).

Os compassos recém-inventados por Descartes nos *Pensamentos privados* a fim de unificar a aritmética e a geometria – além de tantos outros instrumentos mecânicos mencionados por ele no presente tratado que tinham finalidades práticas – foi um reflexo da atmosfera social, entre os finais do século XVI e inicio do XVII. Conforme Fleck, o estado do saber não apenas intermedia a relação

[114] Conforme Sasaki (2003: 103) esses compassos foram inventados por Descartes tanto para construir a enésima potência de uma variável qualquer – o que confirma a relação dos mesmos para com o seu projeto de reforma da álgebra – como também para desenhar a categoria crucial de linhas curvas permitidas por Descartes na *Geometria* de 1637, isto é: aquelas que resultavam de um único movimento contínuo.

entre sujeito e objeto, como também influencia essa relação, portanto “algo já conhecido influencia a maneira do conhecimento novo; o processo de conhecimento amplia, renova e refresca o sentido do conhecido” (FLECK, 2010: 81). Dessa forma, tomando como base a epistemologia de Fleck, a ação cognitiva de Descartes que deu origem aos seus novos compassos – válidos para a unificação das disciplinas matemáticas fundamentais – não poderia ser fundada na sua própria razão, desenvolvida nos *Pensamentos privados* para explicar a construção destes compassos. Na realidade, esta ação cognitiva não era um acidente, mas um fruto de toda uma atmosfera social, “uma vez que o respectivo estado do saber ultrapassa os limites dados a um indivíduo” (FLECK, 2010: 82).

De fato, naquele período “diferentes tipos de compassos geométricos eram (...) inventados e vendidos por muitos criadores de instrumentos” (SASAKI, 2003: 104). Tal é o caso dos compassos ou setores de Galileu, que tiveram um amplo impacto social através dos inúmeros modelos que eram disseminados e aperfeiçoados por muitos matemáticos, tais como Bramer – que foi até mencionado por Descartes nos *Pensamentos privados* – e Faulhaber. Galileu tinha elaborado vários compassos matemáticos a fim de simplificar os cálculos aritméticos e geométricos com vistas a “buscar uma aproximação mecânica para os problemas matemáticos práticos” (SASAKI, 2003: 105). Ainda que os objetivos dos compassos de Descartes não tivessem um fundo prático, como os de Galileu, na medida em que o jovem francês buscava “oferecer aos seus compassos fundamentos teóricos mediante considerações algébricas exatas” (SASAKI, 2003: 105), há uma semelhança entre Galileu e Descartes. Com efeito, ambos se serviram de compassos para a unificação das duas disciplinas matemáticas fundamentais – a aritmética e a geometria cujos problemas eram tratados sistematicamente mediante a ciência da álgebra. De qualquer forma, Sasaki (2003: 104) entende que os compassos de Descartes não eram idênticos, em termos de formato, com os setores de Galileu, mesmo assim é inegável “que o jovem matemático francês foi influenciado por alguns praticantes matemáticos que respeitavam em grande medida os compassos matemáticos, como aqueles de Galileu” (SASAKI, 2003: 104).

Tais praticantes faziam parte, como já referimos antes, da escola dos matemáticos aplicados, a qual Clavius e Beeckman tiveram certa influência – ainda que não fossem inventores de instrumentos mecânicos. Para Sasaki (2003: 101) o projeto de Descartes para criar uma nova disciplina matemática foi tão ambicioso a ponto de não ser exagerado dizer que ele governou a sua carreira matemática inteira. Por isso, em razão da sua declaração a Beeckman de que sua tarefa era infinita e “não para um homem apenas, incrivelmente ambicioso” é improvável que o jovem francês, por si mesmo, descobrisse que a matemática que ele aprendeu em *La Flèche* faltava algo, a não ser que através das suas comunicações intercoletivas com Beeckman a partir do Outono de 1618, ele recebesse alguma intimação nesse sentido o que veio a estimular a sua separação gradativa “do mundo matemático do Euclides do século XVI” (SASAKI, 2003: 93). No entanto, esta separação foi provocada não só através dos contatos intersubjetivos e epistolares com Beeckman, mas também com outras atmosferas intelectuais, dentre as quais a escola dos matemáticos aplicados, e até mesmo a escola dos matemáticos místicos na medida em que antes de conhecer Beeckman, Descartes estava "consciente através dos contatos com a literatura rosacruciana alemã, de que os aspectos algébricos, em especial o simbolismo que apontava a converte-se na linguagem universal que permitiria o conhecimento e o domínio global da realidade, encontravam com a tradição hermética e cabalística da arte luliana em intima relação com a idéia de saber universal" (URBANEJA, 2003: 89). Dessa forma, outra motivação que estimulou Descartes a reformar o pensamento matemático tradicional "parece ter chegado da história geral das idéias fora do escopo da matemática em si mesmo" (SASAKI, 2003: 105) o que confirma a visão fleckiana de que o conhecimento surge a partir de fatores não objetivos, mesmo quando este conhecimento integra o domínio das ciências exatas[115]:

> Nas ciências exatas, assim como na arte e na vida, não existe outra fidelidade à natureza senão a fidelidade à cultura. (FLECK, 2010: 76)

[115] Como vimos na seção 1.1, a pré-idéia consistia numa categoria social e cultural usada por Fleck para explicar o desenvolvimento histórico da ciência em estágios evolucionários, demarcados por um estilo de pensamento que regulava a atividade cientifica de uma dada época. No entanto, na monografia ele não deu sequer um exemplo de uma pré-idéia desenvolvida evolutivamente no curso histórico da matemática, mas apenas exemplos relacionados, mais especificamente, à medicina, biologia, química, física, fonética e psicologia. Dessa forma, um filósofo da ciência, adepto da epistemologia de Popper, que se dispusesse a ler a monografia de Fleck, e passasse a absorver as suas idéias parcialmente – mediante uma leitura apressada e mal feita – poderia pensar que o filósofo polonês tivesse excluído a matemática da sua epistemologia quando afirmou que "pelo menos três quartos, talvez a totalidade, do conteúdo das ciências são condicionados e podem ser explicados pela história do pensamento, pela psicologia e pela sociologia do pensamento" (FLECK, 2010: 62). Tal interpretação conjectural, mas possível seria totalmente errônea para um recém-aprendiz da teoria de Fleck que ainda pensasse que a matemática não é uma ciência, mas uma mera ferramenta cientifica por não satisfazer o pressuposto popperiano da falseabilidade, e com isso tirasse a conclusão precipitada que os um quarto do conhecimento cientifico, referidos por Fleck, tivesse relação com as disciplinas matemáticas. Na realidade, entendemos que quando Fleck se refere a este um quarto do conhecimento que é impossibilitado de ser explicável, simultaneamente, pela história, pela sociologia e pela psicologia, ele não está aludindo a uma ou outra área do conhecimento em específico, mas sim explicando que nem sempre é possível "encontrar (...) uma protoideia para cada descoberta cientifica" de qualquer área do conhecimento cientifico já que "nem sempre uma idéia antiga que apresenta semelhanças com uma descoberta posterior possui com ela uma relação histórica" (FLECK, 2010: 66). De fato, certas idéias apesar de serem buscadas intensamente ao longo da história, elas, "permaneciam sem provas científicas e acabavam sendo abandonadas" (FLECK, 2010: 66). Portanto, é inegável que certas descobertas matemáticas, são seguramente influenciadas pela cultura e dessa forma são explicáveis sociologicamente, historicamente e psicologicamente, tal é o caso do projeto de uma matemática universal de Descartes que foi influenciado socialmente tanto pela cultura popular (através da tradição hermética e cabalística da arte luliana), como também pela cultura erudita (através dos manuais dos matemáticos do século dezesseis tais como Clavius, Barozzi e especialmente Rommen que defendiam o ideal da matemática universal baseados no *Comentário sobre o primeiro livro dos Elementos de Euclides* do filósofo neoplatônico Proclus) e essa ideia sofreu diversas mutações ao longo da história, por exemplo, no século dezoito Leibniz tentou estender a matemática universal de Descartes para uma espécie de lógica da imaginação a qual compreendia "dois componentes: um é a álgebra do finito e outro é a ciência transcendente do infinito" (SASAKI, 2003: 403). A matemática universal ainda foi retrabalhada posteriormente sendo "colocada em uma posição similar para estabelecer a teoria de Georg Cantor, ou um sistema totalmente formalizado de lógica e aritmética por David Hilbert no fim do século dezenove e inicio do século vinte no sentido que ambos admitiam o papel de primeira matemática sobre o domínio inteiro das disciplinas matemáticas" (SASAKI, 2003: 7).

Segundo Urbaneja (2003: 89) o interesse de Descartes pela filosofia dos rosa cruzes impeliu-o a abandonar a Holanda em maio de 1619 a caminho da Alemanha e assim dar continuidade aos seus estudos herméticos da juventude, iniciados na escola de *La Flèche*, pelo seu professor de matemática, o padre François, "que se interessava não só pelos aspectos teóricos das matemáticas, senão também pelas artes mecânicas, as máquinas, a óptica, a magia e a astrologia, tendo uma indubitável ascendência sobre o hermetismo original do pensamento juvenil de Descartes" (URBANEJA, 2003: 86). Ao chegar à Alemanha na primavera de 1619, Descartes ingressa como soldado nas tropas do Duque da Baviera, e no outono desse mesmo ano, quando se encontrava recolhido em alguns dos refúgios militares, talvez em Ulm – onde vivia o matemático alemão Faulhaber – a sua idéia de criação de uma nova disciplina matemática "é suposta ter tido um novo estágio com o seu conhecimento de uma alta cultura matemática do *Rechenmeister* alemão" (SASAKI, 2003: 3).

Dessa forma, ao entrar em contato com os *Rechenmeister* (cossistas alemães), quer através de manuais, redigidos por membros dessa categoria matemática, quer através de comunicações intersubjetivas com Falhauber em Ulm ou mesmo com outros cossistas que cercavam essa cidade, Descartes se deparou, de certa maneira, com "estudos matemáticos bastante sofisticados" em álgebra que fizeram com que ele "esboçasse algumas partes dos *Pensamentos privados* e dos *Elementos sólidos*", donde podemos testemunhar "elementos diferentes do que ele tinha adquirido quando ele encontrou com Beeckman" (SASAKI, 2003: 150).

Tomando como base a epistemologia de Fleck, segundo o qual: "quando existem relações intercoletivas, estas apresentam traços comuns, independentemente das particularidades dos respectivos coletivos" (FLECK, 2012: 160), é natural pensarmos que Descartes, por ter estudado a *Álgebra* de Clavius – que tinha sido escrita na linguagem cóssica do *Rechenmeister* Michael Stifel – compartilhava por esse motivo de uma linguagem análoga, ou no mínimo semelhante à linguagem da álgebra dos cossistas alemães[116].

> (...) qualquer tráfego intercoletivo de pensamento traz consigo um deslocamento ou uma alteração dos valores de pensamento. (...) Essa alteração do estilo de pensamento – isto é, a alteração na disposição à percepção direcionada – oferece novas possibilidades de descobertas e cria fatos novos. (FLECK, 2012: 161-162)

[116] Um dos grandes expoentes da escola matemática dos cossistas alemães foi Johannes Faulhaber – um escritor de muitos livros sobre matemática prática – a quem é admitido ter recebido uma visita de Descartes em Ulm e discutido com ele alguns problemas matemáticos. Faulhaber era membro da ordem rosa cruz e por isso pertenceu também á escola dos matemáticos místicos, outra escola matemática a qual esse erudito alemão tinha vínculos – que poderiam ter facilitado os seus contatos intercoletivos com Descartes em razão dos seus estilos pensamentos semelhantes – era a escola dos matemáticos aplicados, pois as "versões aperfeiçoadas dos modelos [de compassos] de Galileu tinham-se espalhado muito rapidamente por toda a Europa através das mãos do *Rechenmeister* alemão Johannes Faulhaber em Ulm" (SASAKI, 2003: 104, grifo nosso).

Dessa forma, o simples contato com a atmosfera intelectual dos *Rechenmeister* alemães fez com que Descartes passasse a produzir resultados matemáticos originais, tais como "um novo desafio para resolver equações cúbicas e uma nova tentativa para estender o teorema de Pitágoras tanto nos *Pensamentos privados* como nos *Elementos sólidos* considerados em sua amplitude" (SASAKI, 2003: 151).

Enfim, em 10 de novembro de 1619[117] – primeiro aniversário do encontro com Beeckman – quando se encontrava recolhido em um dos "quartéis de inverno dos exércitos de Maximiliano da Baviera, Descartes enfebrecido sofre alucinações" (URBANEJA, 2003: 91) que consistem em três sonhos que lhe produzem uma profunda sublimação no espírito, pois neles, "lhe foi revelada a chave mágica que lhe abria o acesso ao tesouro da natureza e que o colocava numa situação de possuir os verdadeiros fundamentos de todas as ciências" (BAILLET apud URBANEJA, 2003: 91). A complexa trajetória desses sonhos foi descrita em 1620 num manuscrito em latim intitulado *Olympica* o qual se encontra perdido, mas o seu conteúdo foi estudado e analisado por Baillet, em sua biografia sobre Descartes. Conforme Urbaneja (2003: 94), em razão da importância que a *Geometria* de Descartes tem na história da matemática, muitos historiadores tem conjecturado que em 10 de Novembro de 1619, Descartes em meio as suas experiências visionárias, constatou a união

[117] Para Sasaki (2003: 149), 1619 foi um ano importante por conta da transformação que houve no pensamento de Descartes, tanto em termos matemáticos como filosóficos, mas toda essa oscilação em sua carreira intelectual é às vezes conectada com os seus sonhos, supostamente proféticos, ocorridos nos finais do outono desse mesmo ano. Daí, como tem sido admitido, atualmente pelos historiadores, que o local onde Descartes teve aqueles sonhos foi o ducado de Nuremberg ao invés de Ulm, o suposto encontro de Descartes com Faulhaber, registrado por um de seus primeiros biógrafos, Lipstorp pode ser questionado, em função da descoberta por um jesuíta, vivendo na época em Nuremberg, de uma cópia de um tratado *Da Sabedoria* de Pierre Charron, com dedicatória a René Descartes, datado do fim de 1619. Seja como for, Sasaki (2003: 150) acredita que se levarmos em conta que Descartes permaneceu em Nuremberg dos finais de Outono de 1619 até o fim do mesmo ano, é natural "que mais tarde ele também visitasse Ulm, cerca de 100 km de Nuremberg" (SASAKI, 2003: 150). Segundo Sasaki (2003: 150) tal conjectura é uma conseqüência do fato de Ulm ter sido um celeiro de matemáticos originais desde os fins da idade média. Soma-se a isso, o fato de que os *Pensamentos privados* e *Os elementos sólidos* – manuscritos aos quais Descartes estava redigindo naquele ano – terem sido profundamente influenciados por outros escritos de matemáticos, ao redor de Ulm, que tinham laços com a escola cossista alemã. Nos *Pensamentos privados*, por exemplo, Descartes, ao especificar alguns tipos de instrumentos matemáticos que estavam sendo inventados e usados no inicio do seiscentos, referiu-se a *Aritmética Filosófica* do nurembergiano Roth, esta por sua vez "tinha sido escrita para responder o *Prazer da Aritmética cubicossica*, publicada em 1604 por Faulhaber" (SASAKI, 2003: 150) Segundo Sasaki (2003: 124), o interesse de Descartes pela monografia de Roth se deve ao fato de que o matemático de Nuremberg "discutiu as equações cúbicas a maneira de Cardano (Parte I), ou talvez porque ele calculou números poligonais e piramidais após o exemplo do matemático ulmense Johannes Faulhaber" (SASAKI, 2003: 124). Mas, há outros escritos sobre números figurados, não mencionados por Descartes nos *Elementos Sólidos*, que provavelmente também influenciaram sua imersão nesse assunto tais como os "*Números Figurados* de 1614 [provavelmente escrito por Johannes Remmelin, um discípulo de Faulhaber em Ulm] e a *Aritmética Milagrosa* de Faulhaber de 1622" que "eram publicados sob a influência da monografia de Roth" (SASAKI, 2003: 150, grifo nosso). Mesmo que Descartes não tivesse mencionado os manuais de Faulhaber em seus manuscritos, Sasaki (2003: 150-151) aponta mais duas possíveis conexões entre os dois, uma delas foi à tentativa de Descartes em estender o teorema de Pitágoras para outras dimensões que tinha sido também realizada por Faulhaber em sua *Aritmética Milagrosa*. Outra provável conexão pode ser observada nos *Pensamentos Privados*, donde o jovem francês faz menção aos irmãos rosacruzes em seu livro planejado *Tesouro Matemático*. Daí, como Faulhaber tinha escrito um livro relacionado à ordem rosa cruz, talvez ele tivesse sido um alvo daquela menção dedicatória.

da álgebra com a geometria em um só corpo de doutrina: a geometria analítica e com isso ele se sentiu predestinado a construir um novo sistema filosófico que dava muita importância a matemática pura e a matematização da física. Em 10 de novembro de 1620, aniversário do encontro com Beeckman e dos sonhos, "Descartes volta a ter uma visão que o ilumina, escrevendo na margem do manuscrito *Olympica* (...): Tenho começado a entender os fundamentos de uma descoberta digna de admiração" (URBANEJA, 2003: 94) Qual foi o entendimento que Descartes começou a obter, quanto à sua descoberta ligada aos sonhos dos finais de outono de 1619, que tanto o encheu de entusiasmo naquele momento? Teria sido mesmo a geometria analítica como aponta grande parte dos historiadores? Para Sasaki, desde os contatos interpessoais e epistolares de Descartes com Beeckman entre 1618 e 1619 até meados de 1620, o sábio de *La Flèche* concentrou os seus esforços "em construir sua propria álgebra para servir como um fundamento para análise matematica" (SASAKI, 2003: 3). Dessa forma, esses sonhos certamente levaram o jovem francês a sentir-se predestinado a ampliar o seu projeto de uma ciência inteiramente nova – pautado até então em uma disciplina algébrica que abasteceria os principais ramos da matemática pura – para todos os ramos do conhecimento em geral, e não somente a aritmética e a geometria. Com isso, o projeto de uma ciência inteiramente nova – esboçado de forma preliminar por Descartes na sua carta a Beeckman de 26 de março de 1619 – seria aprimorado mais tarde em termos retrospectivos[118] e

[118] Em sua avaliação da retrospectiva de Descartes na regra IV das *Regras para a direção do espírito* de 1628, Sasaki explica que em *La Fléche* o jovem francês tinha estudado "um tipo de mistura de matemática vulgar e matemática verdadeira" (SASAKI, 2003: 90). A matemática vulgar se caracterizava pela geomeria e aritmética, a primeira delas apresentava "demonstrações superficiais" que aguçavam "os olhos e a imaginação" mas não "o entendimento" (DESCARTES, 1999: 24) e em tal descrição Descartes estava se referindo, segundo Sasaki (2003: 90), a uma das muitas edições dos *Elementos* de Euclides traduzidas e comentadas por Clavius, na qual o "Euclides de Clavius ensinava quase nada ao leitor sobre como suas proposições tinham sido descobertas, negligenciando o método de descobrir e resolver verdades matemáticas, isto é, a análise." (SASAKI, 2003: 90). Em outras plavras, não só Euclides tinha aversão ao metódo analitico, como também Clavius que no seus comentários dos *Elementos* não ousou complementar as análises de Euclides, dessa forma no que diz respeito a analise geométrica Clavius não influenciou, de forma tão incisiva o método cartesiano. A outra disciplina matemática ensinada em *La Flèche* que Descartes veio a criticar na sua autobiografia na regra IV, foi a aritmética, mas quanto a esta, "não se sabe ao certo o que Descartes quiz dizer prescisamente por Aritmética" (SASAKI, 2003: 90), a não ser que ela estava carregada por "meros numeros" que estavam "envolvidos numa desordem" (DESCARTES, 1999: 24) e nada mais. Dessa forma, a crítica de Descartes a negliegência dos antigos em revelar o método da descoberta dos seus resultados era apenas uma vertente da sua opinião sobre a matemática ensinada em *La Flèche*, particularmente a geometria e a aritmética. Na realidade, em *La Flèche* Descartes aprendeu também, ainda que de forma sutil mediante a *Álgebra* de Clavius, "alguns traços dessa verdadeira matemática" que "ainda aparecem em Pappus e Diofanto" (DESCARTES, 1999: 25) os quais apresentavam, em seus tratados, "não apenas resultados matemáticos válidos, mas também como eles eram descobertos" (SASAKI, 2003: 91). Como Descartes discutiu o conceito de matemática verdadeira? Teria mesmo a *Álgebra* de Clavius apresentado alguns traços desse conceito? Para Sasaki , a matemática verdadeira na visão de Descartes, além de ser uma "ciência normativa para o método geral" (SASAKI, 2003: 91) – tratada na regra IV e ajustada posteriormente no *Discurso* – revelou-se também como uma ciência a qual se pode aprender o método analitico. Segundo Sasaki (2003: 92), na regra IV Descartes tinha antecipado duas das disciplinas que figurariam no seu método geral: a álgebra dos modernos e a análise geométrica dos antigos que se associariam posteriormente no *Discurso* com a Lógica. Por isso, ao se reportar as essas duas disciplinas na regra IV, ele tinha dito que elas eram "os frutos expontâneos dos principios naturais de seu método" (DESCARTES, 1999: 22) Na realidade, Descartes, tinha descoberto um principio para o qual ele pensava provir a matemática verdadeira da álgebra de seus contemporâneos, os quais tinha se esforçado para restaurar o método da análise geométrica dos antigos mediante procedimentos algébricos, mas o fato é que a referência de Descartes aos seus contemporâneos é geral, e por conta disso, ele poderia estar se referindo tanto aos analistas da escola de Viéte que restauravam tratados geometricos descritos por Pappus na *Coleção* em linguaguem algébrica, como também aos

metodológicos[119] na regra IV das *Regras para a direção do espírito* de 1628. A nova disciplina algébrica – retratada em termos técnicos nos *Pensamentos privados* mediante o auxilio dos compassos – foi repensada como uma matemática universal que justificava metodologicamente "tudo quanto se pode procurar referente à ordem e à medida, sem as aplicar a uma matéria especial" (DESCARTES, 1999: 27). Em outros termos, todas as ciências devem ser disciplinadas por um único método, mas ao contrário da matemática grega, isto é: "do método sintético ou da geometria dos antigos, que era um procedimento de resolução (dedução) de problemas, dado que apresentava apenas o resultado das questões, a matemática universal é um *método de análise* (de demonstração), de invenção e de descoberta, que se aplica não só as matemáticas (como a álgebra dos modernos), mas a todos os objetos do conhecimento" (CHITOLINA, 2013: 60, grifos do autor).

Assim, o que Descartes almejou a partir do outono de 1620, foi uma reforma no projeto inteiro do saber e a criação de um método natural – fundamentado nos estudos matemáticos – para encontrar a verdade em todas as ciências. Foi nas *Regras,* cuja redação provavelmente aconteceu por volta de 1628, que o método natural foi formulado pela primeira vez com precisão e rigor[120],

---

proprios cossistas ao tomarem emprestado os problemas heurísticos da *Aritmética* de Diofanto em seus tratados de álgebra. Essa ultima hipótese, deve ser levada em conta não só porquê Descartes tinha identificado a matemática verdadeira com a àlgebra dos contemporâneos nas *Regras*, mas em razão da sua conversa com Jonh Pell na qual ele deixou transparecer que foi a *Álgebra* de Clavius que o ajudou a "encontrar o método verdadeiro na matemática e no fim de todas as ciências" (SASAKI, 2003: 93). Embora Clavius tenha extraído muitos problemas matemáticos – de caráter heurístico – da *Aritimética* de Diofanto no escopo da sua *Álgebra* e ainda tenha definido "a natureza da àlgebra como consistindo em uma técnica de resolução de problemas aplicáveis a aritmética e a geometria" (SASAKI, 2003: 93), é improvável que Descartes tivesse chegado a conclusão que a disciplina modelo para o seu método geral fosse a análise algébrica, com base apenas na *Álgebra* de Clavius. Na realidade a identificação da álgebra com a análise – que representava uma ferramenta para descobrir teoremas ou resolver problemas – foi o produto de toda uma atmosfera social, a qual Descartes foi submetido gradativamente a medida em que ele avançava o seu programa de 1619 de reforma das matemáticas em meio a guerra dos trinta anos que assolava muitos dos paises aos quais ele morou. A *Álgebra* de Clavius foi um produto da tradição cossista da àlgebra, a qual Descartes se dissociou dessa tradição em meio a composição das *Regras,* provavelmente em 1628, de modo que mais tarde na *Geometria* de 1637, ele reformulou definitivamente a sua perspectiva simbólica da linguagem da álgebra – esboçada prematuramente nas Regras – mediante a mecânica da análise algébrica, e por conta disso há uma enigma na história da matemática que consiste em desvendar como Descartes desenvolveu essas idéias referentes a análise algébrica. Não restam dúvidas de que Descartes foi influenciado muito mais pelos analistas do que pelos cossistas – embora os últimos tivessem certa influência mesmo que numa forma muito pouco apreciável. Com efeito, na opinião de Urbaneja (2003: 87), Descartes estava de fato "ciente dos desenvolvimentos da álgebra dos matemáticos italianos, Tartaglia, Cardano e Ferrari, e ainda que confessa que desconhecia a obra de Viète antes de escrever o *Discurso do método*, sua confissão é inconcebível, já que (...) há uma manifesta ilação entre a obra de Viète e a *Geometria*" (URBANEJA, 2003: 87).

[119] Na regra IV Descartes nos informa que ao elaborar o seu método natural a análise geométrica dos antigos e álgebra dos modernos representavam um papel crucial. Nas suas próprias palavras, ele observa "que os antigos geômetras utilizaram uma espécie de análise que estendiam a solução de todos os problemas, se bem que dela tenham privado a posteridade. E agora floresce um gênero de aritmética, a que chamam álgebra, que permite fazer com os números o que os antigos faziam com as figuras. Essas duas coisas nada mais são senão frutos espontâneos dos princípios naturais de nosso método" (DESCARTES, 1999: 21-22). Dessa forma, Sasaki (2003: 180) não tem dúvidas de que foi "a análise algébrica, por excelência, que representou o papel central quando ele [Descartes] inventou o seu método natural. Em outras palavras, a disciplina modelo para seu método, foi entre outras coisas, a álgebra representando o papel da análise, isto é, uma ferramenta para descobrir teoremas ou resolver problemas" (SASAKI, 2003: 180, grifo nosso).

[120] Para Sasaki, embora haja informações importantes a respeito do processo de formação do método cartesiano numa declaração autobiográfica na parte dois do *Discurso do método* de 1637, as *Regras para a direção do espírito* de 1628 oferecem às vezes mais informação sobre como tal método foi formado e ainda sobre o que ele consistiu, muito "embora as regras para seu método como declaradas nas *Regras* devem ser admitidas ter sido geralmente imaturas" (SASAKI, 2003: 177). De fato, todas as regras para o método cartesiano que compunham as *Regras* foram sintetizadas

mas a sua primeira manifestação pública ocorreu no outono de 1627 quando Descartes o expôs a um público seleto – sob a ocasião oportuna de uma reunião entre intelectuais no palácio de Paris – e o sucesso daquela exposição certamente o motivou a redigir as *Regras.*

De qualquer forma, entre o período de 1619 e 1628, Descartes redigiu o manuscrito *Álgebra*[121], que foi não só um aperfeiçoamento do projeto iniciado nos *Pensamentos privados* para reformar o

---

em apenas quatro regras no *Discurso* de 1637, o que comprova que para se ter um conhecimento abrangente do percurso de Descartes em direção ao seu método natural, é absolutamente necessário a leitura das *Regras*. Sasaki ressalta que no fim da regra XII, Descartes afirma que as *Regras* inicialmente foram tencionadas consistir de três partes: parte I sobre a teoria do conhecimento em geral (Regras I-XII), parte II sobre a matemática (Regras XIII-XXI), e parte III sobre a filosofia natural. Dessas três partes, apenas a primeira foi redigida integralmente, enquanto que a segunda foi redigida em partes, e depois abandonada, a terceira jamais foi redigida. Na primeira parte das *Regras* Descartes afirma, especificamente, na regra II que a certeza é o critério apropriado para fundamentar todos os conhecimentos, em suas próprias palavras, um conhecimento é seguro se e somente se "os seus objetos com os quais devemos nos ocupar são aqueles que nossos espíritos parecem ser suficientes para conhecer de uma maneira certa e indubitável" (DESCARTES, 1999: 5). Mostrando estar inteirado com os debates em torno da certeza da dialética ou da matemática realizados na Universidade de Pádua nos finais do século XV, no decorrer da sua explicação da regra II, Descartes se posiciona a favor da certeza da matemática e desdenha da dialética, o que comprova que ele examinou realmente a edição dos *Elementos* de Euclides, traduzida e comentada por Clavius, especialmente a sua parte introdutória, ou seja, os *prolegomenos* na qual o jesuíta alemão se posiciona a favor da corrente dos seguidores de Barozzi. Dessa forma, ao ser influenciado de alguma forma pelo panorama sócio-histórico daqueles debates, Descartes sustenta que todas as ciências deveriam ser reorganizadas a fim de alcançarem a certeza da matemática, por isso na regra III ele se propõe a analisar a natureza do raciocínio matemático aplicado pelos geômetras antigos nas demonstrações dos teoremas. Estes últimos costumavam partir da constatação clara e evidente dos fragmentos de um ente geométrico, formulavam em seguida uma descrição precisa, em termos teóricos, de sua totalidade, indo da constatação intuitiva de elementos simples à inferência dedutiva de combinações complexas. Assim, Descartes considera a demonstração sintética dos geômetras antigos – na qual a intuição e a dedução estão integradas – como uma forma de "treinar o nosso espírito ou mais apuradamente a nossa inteligência com a perspectiva de forma juízos verdadeiros" (SASAKI, 2003: 179). Mas as operações intelectuais da mente humana não são necessárias, por si mesmas, para a busca da verdade, pois precisamos saber como usá-las corretamente, e para isso é necessário o estabelecimento de um método que possa regulá-las a fim de se poder alcançar de fato um conhecimento seguro, por isso na regra IV Descartes determina que "o método é necessário para a busca da verdade" (DESCARTES, 1999: 19). Mas o que Descartes vê como mais importante na descrição do seu método na regra IV, não é a demonstração da verdade das coisas – o método sintético – mas sim o "método para descobrir a verdade das coisas. No domínio da matemática isto equivale ao método da análise sendo usado como uma ferramenta para descobrir teoremas e para resolver problemas. É o método da análise que ele tenta reformular em uma maneira muito mais generalizada" (SASAKI, 2003: 182). Na segunda parte das *Regras,* Descartes discorre a respeito do método analítico como usado na matemática. A base principal da sua discussão quanto ao método, que chamamos atualmente de cartesiano, é a análise algébrica que funciona como "um paradigma incomparável para o método [cartesiano] torna-se mais claro na parte II das *Regras*, a qual se inicia na regra XIII e as regras que a seguem que tratam a matemática mais diretamente do que no livro I" (SASAKI, 2003: 182, grifo nosso). Segundo Sasaki (2003: 182-185), nas regras XIII e XIV Descartes apresenta os passos necessários para compreender e resolver um problema em analogia à análise algébrica, mas a sua descrição da análise agébrica é um tanto complicada. Inicialmente, as medidas conhecidas e desconhecidas de um dado problema – seja matemático ou físico – eram relacionadas na linguaguem da teoria das proporções, e após isso, elas tinham que ser convertidas em equações algébricas, para que assim as medidas desconhecidas fossem determinadas. Na descrição posterior da análise algebrica na *Geometria* de 1637, a linguaguem da teoria de proporção será substituida por aquela da teoria de equações. Dessa forma Sasaki afirma que as *Regras* "tomam um passo definitivo na história do método analitico" (SASAKI, 2003: 186). A complexidade da definição da analise algébrica nas *Regras* é uma herança da natureza da àlgebra da extensão tal como discutida na velha *Álgebra*. Ao retomar o conceito de extensão para abarcar as medidas geométricas – interpredadas em termos de relações proporcionais nos problemas físicos e matemáticos – Descartes obrigatoriamente tem que pensar em tais caracteristicas como dimensão, unidade e forma, as quais não resolvem o problema da dimensionalidade geométrica quando consideradas em conjunto numa tentativa mal sucedida de unificação da aritmetica com a geometria. Isso naturalmente faz com que a sua álgebra das *Regras* juntamente com a sua velha *Álgebra* sejam ultrapassadas pela àlgebra mais simples do segmento de linhas da *Geometria*, "justamente como o método das *Regras* vai ser superado e reformulado em uma maneira mais ordenada pelo *Discurso do método*." (SASAKI, 2003: 189).

[121] Segundo Sasaki (2003: 159) Descartes visitou Beeckman em outubro de 1628 na cidade de Dordrecht, e naquele reencontro – após noves de interrupção de comunicação entre os dois – ele confessou ao seu velho amigo que o seu programa de reforma do conhecimento matemático estava concluído e sintetizado no seu manuscrito *Álgebra*, o qual ele

pensamento matemático tradicional, "mas também uma formulação preliminar para a parte matemática das *Regras para a direção do espírito*" (SASAKI, 2003: 166). Dessa forma, a *Álgebra*, cujo conteúdo e tempo de redação são incertos[122], constituiu "o primeiro fruto de uma ciência inteiramente nova" (SASAKI, 2003: 166) abordada não mais sob a perspectiva dos compassos – que se revelaram serem ferramentas algébricas imaturas – mas em sua própria forma escrita, centralizada exclusivamente na linguagem cóssica, o que comprova a influência sobre Descartes dos matemáticos Clavius, Beeckman, e Faulhaber que pertenciam à escola matemática dos cossistas.

> No momento em que compôs sua antiga *álgebra* e as *Regras para a direção do espírito*, Descartes tinha estabelecido seu programa básico da análise algébrica [que seria

---

prometeu enviá-lo mais tarde de Paris. As discussões referentes aquele encontro foram registradas por Beeckman em seu *Diário* – tal como aconteceu em 1618 para 1619 – e elas versavam não só sobre os princípios da sua *Álgebra*, mas também sobre filosofia natural, mais especificamente música e óptica. Segundo Sasaki (2003: 161), Beeckman estava impressionado com o Descartes maduro de trinta e três anos de idade que vinha fazendo progressos com respeito a sua idéia prematura de uma ciência inteiramente nova retratada na carta de 26 de março de 1619. Beeckman tinha visto o matemático francês como um "daqueles eruditos ideais que mantinha idéias originais até que elas estivessem completamente desenvolvidas" (SASAKI, 2003: 161). Descartes afirmou a Beeckman que entre os anos de 1618 e 1628, ele tinha alcançado um conhecimento perfeito de geometria que abarcaria a totalidade do conhecimento humano de tal modo que ele tinha "nada mais para descobrir quanto ao conhecimento aritmético e geométrico". Essas idéias matemáticas de Descartes foram registradas por Beeckman numa passagem do seu *Diário* intitulada "Um certo exemplar da *Álgebra* de Derscartes". Essa passagem é a única fonte confiável que temos do manuscrito *Álgebra* de Descartes, "considerado concluído em 1628, e que se encontra agora perdido, mas é exatamente em torno desse manuscrito que o jovem Descartes concentrou seus esforços matemáticos até a metade de 1620, e que funcionou como um modelo para a matemática em suas *Regras para a direção do espírito*, deixada incompleta e publicada postumamente em 1701" (SASAKI, 2003: 3). O núcleo central do projeto matemático de Descartes tinha se cristalizado antes de 1623 o mais tardar, na medida em que a partir desse ano, conforme a sua carta endereçada a Mersenne, datada de 31 de março de 1638, o filósofo francês confessou o seguinte ao reverendo: "Você sabe que faz mais do que quinze anos desde que eu tinha declarado que desconsideraria a geometria e nunca voltaria a resolver qualquer problema ao menos que a pedido de um amigo" (SASAKI, 2003: 3). Como não há evidências que contradizem a referida confissão auto-biográfica de Descartes, não é possível na opinião de Sasaki (2003: 3) determinar prescisamente quando o sábio de *La Flèche* escreveu sua *Álgebra*, mas é perfeitamente seguro considerar que o núcleo central do seu projeto estava formulado antes de 1623.

[122] Segundo Sasaki (2003: 173), o *Diário* de Beeckman – que registrou o conteúdo das suas discussões com Descartes entre oito de outubro de 1628 e primeiro de fevereiro de 1629 – pode ser dividido em quatro partes na qual a primeira, refere-se às regras algébricas básicas aplicáveis as quantidades aritméticas e geométricas, a segunda: a teoria matemática da refração através de lentes com formas de seções cônicas, a terceira: o método para descobrir duas médias proporcionais por meio de uma parábola, e a quarta: o método geral para resolver as equações cúbicas e quárticas por meio de uma parábola. Segundo Sasaki (2003: 173-174), no inventário de Estocolmo esta registrado que o conteúdo da *Álgebra* de Descartes, composta de 155 páginas em oitavo, era exclusivamente algébrico. Isso implica que apenas a primeira parte do *Diário* – intitulada *Um certo exemplar da Álgebra de Derscartes* –fez parte do referido manuscrito, mas há uma carta de Descartes a Mersenne de 1638 indicando que sua *Álgebra* tinha uma parte que ele pensava ter sido quase totalmente substituída pelos últimos dois livros da *Geometria* de 1637. Embora isso não seja o suficiente para determinar precisamente o conteúdo da *Álgebra*, fica claro que o referido manuscrito continha "alguns argumentos matemáticos para além do que Beeckman extraiu na primeira parte do seu Diário" (SASAKI, 2003: 174). Se esses argumentos matemáticos eram geométricos, a segunda e terceira parte do *Diário* de Beeckman, cuja data de composição varia entre 1619 e 1628, indicam que a *Álgebra* foi redigida nesse espaço de tempo, mas se a descrição do inventário de Estocolmo é verídica, então muito provavelmente Descartes redigiu a sua *Álgebra* entre 1619 e 1623, já que a partir de 1623 – ano em que ele retornou a Paris após as sua peregrinação pela Europa – "seu interesse principal (...) parece ter mudado da matemática para a filosofia natural, especialmente óptica" (SASAKI, 2003: 176).

aperfeiçoado na *Geometria* de 1637], que mesmo que imaturo, pode ser comparado[123] com aquele de François Viète. (SASAKI, 2003: 205, grifo nosso)

Nas *Regras* Descartes conseguiu aprimorar, ainda que de forma imatura, a perspectiva da linguagem algébrica[124] aplicada na *Àlgebra*, mediante a discussão da análise algébrica, mas isso não foi o suficiente para ele atingir o seu fim pretendido de reforma do pensamento matemático tradicional por conta do problema da dimensinalidade geometrica – que ainda não tinha sido resolvido de uma maneira matematicamente persuasiva. Talvez seja esse um dos motivos[125] do

[123] A análise algébrica, desenvolvida nas *Regras* e aperfeiçoada na *Geometria*, teria sido mesmo um fruto de uma realização original? Ou será que Descartes foi realmente influenciado pelos analistas liderados por Viète? A segunda hipótese vem sendo defendida pela maioria dos historiadores, pela razão que os próprios discípulos de Viéte – tais como Fermat e, sobretudo Beagrand que foi um grande inimigo do filósofo francês – acusaram Descartes de ter redigido a *Geometria* em 1637 usufruindo indevidamente de idéias essenciais da *Arte analitica* de Viète. Mas Descartes negou publicamente aquelas acusações de plágio que vieram logo após a publicação da *Geometria* em 1637. Seja como for, é conhecido que Descartes teve contato com os trabalhos de Viète, "incluindo a introdução à arte analítica um pouco antes de três de maio de 1632" (SASAKI, 2003: 4). Por isso, embora haja similaridades entre a matemática de Viète e a de Descartes, a acusação de Plagio que Beagrand desferiu contra a *Geometria* de Descartes pode ter um possível "caminho que conduz a uma solução sem supor que Descartes disse uma falsidade ou que ele não foi influenciado em tudo pela matemática de Viète" (SASAKI, 2003: 4). A possível solução proposta por Sasaki, embora seja uma conjectura, aparece como conseqüência das suas análises dos trabalhos matemáticos de Romen, um possível intermediário de Descartes que no século XVI foi um dos principais matemáticos a discutir a idéia de matemática universal – idéia esta que foi internalizada por Descartes na regra IV. Segundo Sasaki (2003: 5) Roomnen foi amigo intimo de Clávius e durante um período rival e depois amigo de Viète. Durante esses anos de rivalidade Rommen trocou problemas matemáticos difíceis com Viète, e isso fez com ele ficasse impressionado com o talento do matemático francês para resolver problemas e assim começasse então "a aceitar o estilo da matemática do seu rival, isto é, a álgebra simbólica" (SASAKI, 2003: 5). Após aceitar a matemática analitíca de Viète, Rommen decidiu escrever e publicar em 1609 o *Triunfo a analise matemática*, tratado no qual ele mescla a sua idéia de matemática universal com a arte do cálculo de Viète. Assim, por ter usado a idéia da matemática universal nas *Regras*, Sasaki entende que Descartes possa ter tomado "uma sugestão ainda que ela possa ter sido muito leve, por entrar em contato com algum trabalho de Van Romen antes do estabelecimento da sua própria álgebra reformada, talvez antes de 26 de março de 1619" (SASAKI, 2003: 5). Assim, é razoável pensar que Descartes talvez tenha realmente aprendido ou assimilado não só a idéia da matemática universal de Van Romeen, mas também a sua própria matemática analítica. De qualquer forma há provas que Descartes tinha conhecimento de certos trabalhos de Viète pouco antes do inicio de 1632 e ele inclusive tinha confessado a Mersenne, numa carta de dezembro de 1637 que diante da sugestão de que "o que ele escreveu possa ser sacado facilmente de Viète, a realidade é que meu tratado é precisamente difícil de compreender porque eu busquei introduzir nada do já conhecido por Viète ou por outro (...). Começo as regras da minha álgebra com o que Viète escreve ao final de seu livro *Sobre a alteração das equações* (...). Isto é, que começo onde ele abandonou" (URBANEJA, 2003: 96).

[124] Na segunda parte das *Regras*, mais especificamente na regra XVI, Descartes conseguiu aprimorar a linguagem aplicada na *Àlgebra* para uma linguaguem mais sofisticada. Para tanto, na regra XIV ele lançou mão da noção de extensão para delimitar as objetos geométricos manipulados pela análise algébrica – a arte da descoberta que constituiu a base do seu método. Após introduzir na regra XV as figuras fundamentais – superfícies retangulares e linhas retas – que representavam as quantidas discretas e contínuas, Descartes "desenvolve sua álgebra simbólica na regra XVI, que funciona como o organon para a análise algébrica" (SASAKI, 2003: 188). Segundo Sasaki (2003: 188), na àlgebra da *Regras*, as figuras eram representadas por simbolos consisos tais como a, b e c, que figuravam como medidas desconhecidas. As dimensões das figuras também eram representadas por simbolos exponenciais igualmente conscisos, tais como $2a^3$ em que o expoente três figurava como o número de dimensões da medida desconhecida a multiplicada por dois.

[125] Outro motivo aparente foi que a suposição epistemológica de Descartes das *Regras* – de que a matemática pura serve como ideal de certeza do conhecimento – vai ser questionada em seus escritos filosoficos posteriores. De fato, no *Discurso* de 1637 o Descartes maduro não propõe a reforma da filosofia mediante uma matemática universal autônoma, pois ao "examinar as táticas que os céticos usaram para atacar a certeza supostamente genuína da matemática, ele foi obrigado a admitir que as declarações matemáticas – ainda aquelas que são chamadas axiomas – não podem ser demonstradas no sentido mais rigoroso" (SASAKI, 2003: 8). Dessa forma, Descartes se aplicou ao máximo para conseguir descobrir a primeira verdade, o famoso "Cogito, ergo sum." Com esta chave, considerada "irrefutável até

abandono da redação das *Regras* e da não publicação da *Álgebra.* Naturalmente, tanto na *Àlgebra* quanto nas *Regras* "existiam certas insuficiências matemáticas na tentativa de Descartes em reduzir medidas geométricas multidimensionais para linhas unidimensionais" (SASAKI, 2003: 202). Dessa forma, para que o problema da dimensionalidade geométrica – abordado de forma imatura na *Álgebra* e nas *Regras* – fosse desvendado, Descartes teve que repensar as suas idéias matemáticas e para isso ele desenvolveu mais tarde a "idéia engenhosa que pode apropriadamente ser chamada *álgebra dos segmentos de linhas*". Foi apenas por meio dessa noção conceitualmente crucial que Descartes "podê realizar com sucesso o programa de 1619 de *uma ciência inteiramente nova* no sentido literal das palavras" (SASAKI, 2003: 202, grifos do autor). Para tanto, dois eventos importantes teriam ainda de ocorrer na carreira matemática de Descartes: a resolução[126] do

para o cético mais intransigente" (SASAKI, 2003: 8), Descartes tem certo êxito na reconsideração das suas posições filosóficas das *Regras*, e com isso ele consegue restabelecer a autoridade tanto da matemática como da física matemática, apesar disso Sasaki (2003:8) considera altamente questionável se as suas realizações filosóficas, a partir da terceira década do seiscentos, foram realmente bem sucedidas.

[126] A persistência do passado sobre o presente é um tema muito enfatizado por Fleck (2010: 80-81) em sua investigação do desenvolvimento das idéias cientificas no decorrer da história. Perguntamos então: teria sido a resolução do problema de Pappus por parte de Descartes um *insight* acidental proveniente de uma mente brilhante ou essa resolução teve influências históricas que despertaram a sua genialidade? Sasaki (2003: 213) informa-nos que Pappus tinha feito um uso recorrente de razões compostas às quais Apolônio e Euclides não abordavam, e por conta disso o principal matemático alexandrino da época de prata da matemática grega – que floresceu na primeira metade do século IV a.C. – foi "permanecendo historicamente numa posição mais reservada para Descartes do que os dois predecessores que tentaram, sem muito sucesso, uma solução para o problema do lugar" (SASAKI, 2003: 214). Por isso mesmo que na regra IV das *Regras*, Descartes fez reverência à Pappus e Diofanto, por ter encontrado traços da matemática verdadeira em seus trabalhos, esses traços certamente eram as razões compostas, interpretadas geometricamente por Pappus e aritmeticamente por Diofanto conforme os respectivos estilos de pensamento da atividade matemática da época de cada um, analisados detalhadamente na seção 1.1 do nosso trabalho. Vale ressaltarmos também que na carta de Jon Pell a Charles Cavendish de março de 1646, o matemático inglês, então professor público da Universidade de Amsterdã, tinha relatado que no seu diálogo com Descartes, o filosófo francês tinha feito um elogio contido a Euclides e Apolônio. Certamente, uma das razões desse elogio se deveu ao fato de que eles não usaram razões compostas na mesma intensidade de Pappus e Diofanto, Com isso, mesmo que naquele diálogo Descartes tenha elogiado com mais ênfase, Arquimedes e Diofanto – especialmente o primeiro – por ter encontrado traços de álgebra em seus trabalhos, é inegável que Pappus deva ter sido um alvo daquele diálogo e foi por isso elogiado também por Descartes, e o mais provável é que Pell não tenha se lembrado ou não quis comentar o seu elogio na redação da sua carta a Cavendish, pois, caso contrário, não conseguiríamos compreender porque Descartes elogiou Pappus na regra IV. Outra circunstância histórica que influenciou a resolução do problema de Pappus por parte de Descartes, foi que na sua época "a noção de razão composta tinha tendido a ser geralmente interpretada em uma maneira aritmética" (SASAKI, 2003: 214). Dessa forma, Sasaki (2003: 214) ressalta que embora a proposição 23 do livro VI dos *Elementos* e a proposição 5 do livro VIII tratavam da definição de razões – a primeira em termos geométricos e a segunda em termos aritméticos – nenhuma dessas definições foram formuladas ou compreendidas por Euclides em termos de composição explicitamente, e assim o geômetra alexandrino pensava que nenhuma delas pudessem ser representadas como uma multiplicação, no entanto "os escoliastas posteriores estavam inclinados a interpretar a composição como uma multiplicação, e no caso dos números como uma multiplicação de frações numéricas" (SASAKI, 2003: 214). Como vimos na seção 1.3, essa tendência foi reforçada na idade média através da noção de denominador, submersa ao estudo das razões e proporções, um dos tópicos prediletos desde os tempos de Boécio, na qual a "composição de duas razões foi compreendida simplesmente como uma operação aritmética de multiplicar duas frações e a razão simples como uma fração" (SASAKI, 2003: 214). Como frisa Sasaki (2003: 214), na aritmética o problema da dimensionalidade não ocorre na medida em que os números podem ser multiplicados quantas vezes os matemáticos queiram e, por isso seria totalmente natural que o sábio de *La Fléche*, que vinha se empenhando desde a sua juventude para unificar a aritmetica com a geometria, estivesse propenso a entender o conceito de razão composta em termos aritmeticos e dessa forma criasse a condição essencial para a resolução geral do problema de Pappus. No entanto, tal condição, despertada pela genealidade de Descartes, foi o produto de todo um desenvolvimento histórico, o que confirma a validade da epistemologia de Fleck, segundo o qual: "Alguma coisa resta de qualquer proposição: a solução ou o problema, mesmo se for apenas como problema da racionalidade do problema. Cada formulação de um problema já contém em si a metade de sua solução. Qualquer

problema chamado de Pappus que lhe fora proposto[127] por Golius em 1631 e a composição posterior da *Geometria* em 1637 – estimulada pela resolução desse problema que constituiu o núcleo do presente tratado.

---

verificação futura sempre voltará apenas aos trilhos mentais existentes: nunca o futuro se livra totalmente do passado" (FLECK, 2010: 80-81).

[127] Segundo Sasaki (2003: 206-207), no fim de 1631, quando as atenções de Descartes voltavam-se não mais para a matemática, mas para a filosofia natural, ele foi desafiado pelo matemático holandês Jacobus Golius a resolver um problema matemático contido na *Coleção* de Pappus. Após atacar o problema por cerca de cinco ou seis semanas, ele teve êxito em sua solução e relatou o fruto do seu estudo ao desafiante. Naquela ocasião, Descartes teve a oportunidade de aplicar o método da analise algébrica a um problema geométrico de caráter indeterminado e o sucesso do seu empreendimento o fez acreditar "que seu método matemático podia ultrapassar o método antigo" (SASAKI, 2003: 206). Segundo Sasaki (2003: 207), Golius tomou o problema chamado de Pappus do livro VII, *Domínio da análise*, da *Coleção matemática* de Pappus. Foi em um comentário sobre as *Cônicas* de Apolônio – um dos tratados analíticos analisados por Pappus no livro VII da *Coleção* – que o geômetra alexandrino mencionou um problema de lugar que nem Euclides nem Apolônio – dois grandes expoentes da idade dourada da matemática grega – nem qualquer outro matemático grego tinham sido capazes de resolver completamente. O problema consiste em determinar um lugar de um ponto tal que se os segmentos de linhas são desenhados do ponto para encontrar três ou quatro linhas dadas em ângulos dados, o produto de dois desses segmentos será proporcional ao produto dos outros dois, se existem quatro linhas, ou ao quadrado do terceiro, se existem três linhas. Pappus sugeriu que Apolônio resolveu parcialmente o problema de lugar para o caso de três ou quatro linhas no livro III das *Cônicas*. Dessa forma, o geômetra de Pérgamo tinha fracassado em seus esforços para solucionar o referido problema em termos gerais, e isso fez com que Pappus viesse a atacar o problema para todos os casos possíveis demonstrando que em todos eles o lugar exigido consistia numa seção cônica. Pappus então continuou a considerar o mesmo problema para casos que extrapolavam quatro linhas. Assim, ele resolveu o problema equivalente para o caso do lugar quando cinco ou seis linhas são dadas, construindo para cinco linhas, uma razão entre um retângulo contido por duas linhas, e para seis linhas, uma razão entre um sólido por três linhas. Tais figuras admitiam uma interpretação geométrica conforme o principio da dimensionalidade geométrica que vigorava no estilo de pensamento da época de Pappus. O sucesso da empreitada de Pappus despertou o seu interesse para generalizar o problema para casos que excedem o número de seis linhas, mas em tais casos uma dificuldade ocorre, pois em suas próprias palavras: "não existe figura com mais de três dimensões" (PAPPUS apud SASAKI, 2003: 208). Mas ele tenta superar esta dificuldade ao empregar "a noção de razões compostas que podia ser interpretada como aquela do produto de razões sob a influência de seus predecessores [tais como Diofanto] os quais admitiam potências de mais do que três dimensões em casos aritméticos" (SASAKI, 2003: 213, grifo nosso). Assim, Pappus conseguiu formular – sem perspectiva de solução – o problema de lugar, com respeito a mais de seis linhas, por meio do conceito de razões compostas. Tendo como base os símbolos usados por H.J.M. Bos em seu artigo *Sobre a representação das curvas na Geometria de Descartes*, publicado em 1981 na edição número 24 da revista *Arquivo para História das Ciências Exatas*, Sasaki (2003: 209) elucida o problema de Pappus ao considerar as linhas (L_1, L_2...) em posição dada num plano, os comprimentos (d_1, d_2...) de linhas retas traçadas de um ponto P para encontrar as referidas linhas ($L_1, L_2\ldots$) em ângulos fixados ($Q_1, Q_2, \ldots$) e com isso, com a condição de que α seja a medida de um segmento dado, e $\alpha : \beta$, uma razão dada, o problema de Pappus para três linhas é descobrir pontos tais que ($d_1 . d_2$): (d_3^2) = $\alpha : \beta$, analogamente para quatro linhas ($d_1 . d_2$) : ($d_3 . d_4$) = $\alpha : \beta$, para cinco linhas, $(d_1 . d_2 . d_3) : (d_4 . d_5 . a) = \alpha : \beta$, e por fim para seis linhas, $(d_1 . d_2 . d_3) : (d_4 . d_5 . d_6) = \alpha : \beta$. Para Sasaki (2003: 209), essas formulações do problema de Pappus não são anacrônicas já que todos os símbolos nas expressões acima podem ser interpretados geometricamente. Segundo Sasaki (2003: 210) Descarte citou no livro I da *Geometria* a formulação literal do referido problema da edição da *Coleção* de 1588, traduzida do grego para o latim por Commandino, e após introduzir a explicação de Pappus para o referido problema, a qual apresentava sua tentativa para resolvê-lo até seis linhas, ele interrompe a citação e comenta que a "dúvida que os antigos tinham em empregar os termos de aritmética em geometria, provinha do fato de que eles não viam claramente o suficiente á relação entre as duas disciplinas, o que causava muita obscuridade e confusão na forma como eles se expressavam" (DESCARTES apud SASAKI, 2003: 210). Portanto, para Pappus, as expressões como $d_1 . d_2 . d_3 . d_n$ (n≥ 4) não eram permissíveis – pelo estilo de pensamento da sua época – já que elas não admitiam interpretação geométrica, "mas para Descartes que tinha estado esforçando-se para unificar aritmética e geometria com a ajuda de sua álgebra reformada desde 1619, as expressões como $d_1 . d_2 . d_3 . d_n$ (n≥ 4) simplesmente indicavam um segmento de linha unidimensional." (SASAKI, 2003: 211). Dessa forma, foi através dos procedimentos da álgebra dos segmentos de linhas – que permitiam relacionar quaisquer dos cálculos aritméticos com operações geométricas – que Descartes derrubou um dos pressupostos do sistema de idéias do estilo de pensamento da sua época, a dimensionalidade das medidas geométricas e com isso ao invés de apenas formular o problema de lugar, na sua forma geral, tal como Pappus o tinha feito mediante razões compostas, mas ele vai além do geômetra alexandrino, e soluciona o referido problema de uma forma "metodicamente muito coerente" de forma a "dar significado geométrico as expressões como $d_1 . d_2 . d_3 . d_n$ (n ≥ 4)" (SASAKI, 2003: 211). Com isso, Sasaki (2003: 213) explica que a formulação de Pappus por meio de razões compostas que representa o problema de lugar

Assim, os principios daquilo que atualmente chamamos de geometria analitica surgiram no espirito de Descartes apenas em 1631, quando ele resolveu o problema de Pappus e desvendou assim um sistema incipiente de coordenadas que foi retratado especificamente nos primeiros dois livros da *Geometria* de 1637 que comportam a resolução desse problema para vários casos. A *Geometria* era composta ao todo de três livros: o primeiro[128] deles trata dos problemas que podem ser construídos sem usar mais do que círculos e linhas retas, o segundo[129] trata da natureza das curvas, e o terceiro[130] descreve a construção dos problemas sólidos ou mais que sólidos.

$(d_1 : d_{n+1}).(d_2 : d_{n+2}) \ldots (d_n : a)\ [o\ \ (d_n : d_{2n})] = \alpha : \beta$
pode ser traduzida em uma perspectiva algébrica teoricamente justificável, isto é:
$(d_1 . d_2 . \ldots\ d_n) : (d_{n+1} . d_{n+2} \ldots a)\ \ [o\ \ (d_1 . d_2 . \ldots\ d_n) : (d_{n+1} . d_{n+2} \ldots . d_{2n})] = \alpha : \beta$
Segundo Sasaki (2003: 214), a referida formulação de Pappus – baseada no conceito de razão composta para se adequar aos casos quando $n \geq 4$ os quais não permitiam interpretação geométrica – certamente contribuiu para que Descartes resolvesse facilmente o problema de Pappus, no sentido de que tal formulação pode levar diretamente à segunda, baseada na álgebra, a qual resolve definitivamente o problema da dimensionalidade geométrica.

[128] No primeiro livro Descartes apresenta a sua álgebra do segmento de linhas, cujos procedimentos permitem " estabelecer que as operações aritméticas elementais entre segmentos produzem sempre um novo segmento" (URBANEJA, 2003: 99). Assim, Descartes mostra, a base de construir um segmento unitário, como as operações aritméticas de multiplicação, divisão e extração de raiz quadrada são construídas geometricamente com régua e compasso, mas a adição e subtração são descartadas por terem sido já tratadas na regra XVIII das *Regras*. Esta interpretação geométrico-algébrica das operações aritméticas marca uma mutação no estilo de pensamento da matemática seiscentista, pois "por uma parte, rompe com a limitação pitagórica que a incomensurabilidade havia imposto a geometria grega (a impossibilidade de assinalar números as figuras geométricas perante o fantasma do incomensurável), e por outra, permite romper com o problema da homogeneidade dimensional, que havia sido sem dúvida até então, outra das grandes limitações da aplicação da álgebra a geometria" (URBANEJA, 2003: 99). De fato, para os geômetras da antiguidade até a época de Descartes, a variável representava o comprimento de um segmento, com isso "o produto de dois segmentos era um retângulo, e o produto de três segmentos um paralelepípedo, portanto o produto de mais de três segmentos não tinha sentido" (URBANEJA, 2003: 99). Depois de apresentar uma tradução geométrica para as operações algébricas, Descartes apresenta uma nova simbologia que representa um avanço da sua notação simbólica iniciada na regra XVI das *Regras*, "donde no lugar de designar por A,B e C, as incógnitas, ele utiliza as letras minúsculas x,y e z" (URBANEJA, 2003: 99). Enfim, Descartes (2012: 492-493) apresenta as potências a^2 ou a , a^3 ou a , como representando um comprimento de um segmento, e isso vale para quaisquer outras potências tais como a^4, a^5e tantas outras. Para a raiz quadrada de $a^2 + b^2$ e a raiz cúbica de $a^3 - b^2 + a^2$, ele as descreve respecticamente como $\sqrt{a^2 + b^2}$ e $\sqrt{C.a^3 - b^2 + a^2}$ donde C é um simbolo que marca a raiz cúbica. Ele ainda explica que a^3tem tantas dimensoões quanto a ou b^3 e para tirar a raiz cúbica de $a - b$, "é necessário pensar que a quantidade a é dividida uma vez pela unidade e que a outra quantidade b é multiplicada duas vezes pela mesma unidade." (DESCARTES, 2010: 493). Dessa forma, Boyer explica que se a unidade não entra numa equação, as linhas deveriam ser da mesma dismensão. Em outras palavras, Descartes meramente substituiu homogeneidade em pensamento por homogeneidade em forma. Esta idéia de Descartes, de certa forma enganosa, forneceu grande liberdade operacional para técnica algébrica, e "facilitou a associação implicita do conjunto do números reais com os pontos de uma linha, mas não modificou seriamente o desenvolvimento da geometria analitica" (BOYER, 2004: 84). No livro I Descartes também revelou como se chegua as equações para se resolver problemas, e ao contrário da descrição da análise algébrica das *Regras* que era um tanto confusa, na *Geometria* Descartes descreve o método analítico de uma maneira que "a linguaguem da teoria de proporções recua para o segundo plano e aquela da teoria das equações fica em situação de evidência" (SASAKI, 2003: 186). Descartes ainda estudou as diferentes possibilidades de equações do segundo grau e as resolvêu geometricamente. Por fim, ele aplicou o seu método da análise algébrica na resolução do problema de Pappus para três e quatro linhas. Boyer (2004: 87) considera que no problema de Pappus, resolvido na metade do livro I, o método das coordenadas está, de certa forma, patente, mas o príncípio fundamental daquilo que conhecemos atualmente como geometria analitica – a noção de que as equações indeterminadas em duas incógnitas correspondem a lugares geométricos – só será declarado mesmo de uma forma mais ou menos explícita no livro II mediante a resolução do problema da tangente a uma curva.

[129] Urbaneja explica que no segundo livro, Descartes acompanha os autores clássicos ao dividir os problemas em planos, sólidos e lineares, os quais se resolvem respectivamente com equações do 2° grau, de 3° e de 4° ou maior grau, e demonstra que os primeiros problemas se resolvem com retas e circunferências, os sólidos mediante seções cônicas e o restante com linhas mais complicadas "chamadas pelos antigos de curvas mecânicas, ainda que o mais correto fosse chamá-las de geométricas" (URBANEJA, 2003: 100). Assim, Descartes pretende reorganizar o estudo de curvas da

Com a composição da *Geometria* em 1637, o programa de reforma do pensamento matemático tradicional, que alentou o espiríto de Descartes desde a primavera de 1619, estava concretizado. De fato, foi através da álgebra do segmento de linhas, fundamentada no livro I da *Geometria*, que Descartes conseguiu "relacionar quaisquer dos cálculos aritméticos com operações geométricas" (SASAKI, 2003: 213). Os procedimentos da álgebra dos segmentos de linhas fizeram com que Descartes pudesse referendar não só o problema de Pappus, mas todos os problemas da geometria: quer sejam determinados quer sejam indeterminados, na abertura da *Geometria*, ele declarou que: "todos os problemas da geometria podem ser facilmente reduzidos a tais termos, não sendo necessário depois senão conhecer o comprimento de algumas linhas retas para construí-los" (DESCARTES, 2010: 491). Para Boyer (1996: 231-232), embora a *Geometria* seja considerada por muitos o primeiro ensaio sobre o que se conhece atualmente por geometria analítica, o objetivo fundamental da *Geometria* de Descartes era muito diferente dos textos modernos. Com isso, essa afirmação de abertura da *Geometria*, indica que o objetivo primordial de Descartes era construir problemas geométricos ao invés de reduzir simplesmente a geometria à álgebra. Embora a *Geometria* venha sendo frequentemente interpretada como uma aplicação da álgebra a geometria, Boyer acredita que ela deveria ser compreendida como a tradução de operações algébricas em linguagem geométrica, já que nas duas primeiras seções do livro I da *Geometria*, Descartes "mostra

geometria clássica, "que segundo ele era um caos completo, seqüela da limitação platônica da régua e do compasso", pois os antigos não eram "capazes de distinguir as diversas classes de curvas, pois não sabiam decifrar a natureza das mesmas" (URBANEJA, 2003: 100). Com isso, Descartes estabelece quais curvas podem ser admitidas em geometria, e ao perceber que não faria sentido algum excluir curvas construídas por outras máquinas tão precisas, quanto a régua e o compasso, ele diz: "Mas é bastante claro, parece-me, que, tomando-se por geometria o que é preciso e exato, e por mecânico o que não o é, e, considerando-se a geometria como ciência que ensina geralmente a conhecer as medidas de todos os corpos, dela não se devem excluir tanto as linhas mais compostas quanto as mais simples, contato que se possa imaginá-las descritas por um movimento continuo, ou por vários que se entressigam, e cujos últimos estejam inteiramente regulados pelos que os precedem. Pois por este meio sempre se pode ter um conhecimento exato de sua medida" (DESCARTES, 2010: 506). Dessa forma, Descartes define uma curva geométrica como aquela que pode ser obtida por algum movimento contínuo gerado por alguma máquina, e ao mesmo tempo aquela que pode ser expressa por uma equação algébrica. Certas curvas geradas por construções pontuais também eram admitidas como geométricas, desde que "não é necessário nada supor para" traça-las senão que "duas ou várias linhas possam ser movidas uma pela outra, e que suas interseções indiquem outras mais" (DESCARTES, 2010: 506). Mas certas curvas geradas por construções pontuais não são consideradas geométricas, pois não podem ser representadas por equações algébricas, tal é o caso da quadratriz e a espiral "que não pertencem senão as mecânicas, e não estão no número daquelas que penso aqui ser admitidas, pois que a imaginamos descritas por dois movimentos separados, não tendo entre si qualquer relação que se possa exatamente medir" (DESCARTES, 2010: 506). Em seguida, Descartes apresenta diversas soluções particulares para o Problema de Pappus em suas múltiplas abordagens possíveis, até o caso geral, mas ele não mostrou interesse pela forma das curvas soluções do referido problema, pois "estava obcecado com a questão dos meios necessários para construir geometricamente as ordenadas correspondentes as abscissas dadas" (BOYER, 2012: 240). Por fim, Descartes aplica seu método analítico para determinar, mediante equações algébricas, os elementos geométricos mais notáveis das curvas, tais como diâmetros, eixos, centros e em particular, as normais e tangentes: "linhas cuja consideração e utilidade derivam dos problemas da reflexão da luz sobre as superfícies curvas, e que literalmente é considerado por Descartes como o mais importante problema geométrico que pode ser concebido" (URBANEJA, 2003: 100).

[130] Segundo Urbaneja (2003: 101) o terceiro livro esta dedicado aos problemas sólidos ou mais que sólidos, os quais conduzem Descartes ao estudo da resolução de equações, bem como as discussões de suas raízes e também as relações entre os seus coeficientes. Assim, Descartes mostra que uma equação pode ter tantas raízes como dimensões tem o grau, e fornece logo sua famosa regra de sinais. Por fim, Descartes trata de dois problemas clássicos, a trissecção do ângulo e a duplicação do cubo, que são problemas do 3° grau, e prescreve que quaisquer problemas de 3° grau podem ser reduzidos a esses dois problemas clássicos.

que as cinco operações aritméticas correspondem a construções simples com régua e compasso, justificando assim a introdução de termos aritméticos em geometria" (BOYER, 1996: 232). Embora Boyer entenda que a *Geometria* consiste muito mais de uma aplicação geométrica na álgebra do que propriamente uma aplicação algébrica na geometria, as noções fundamentais do pensamento matemático de Descartes "podem ser caracterizadas como algébricas em vez de puramente geométricas" (SASAKI, 2003: 221).

De fato, foi à sua álgebra do segmento de linhas de 1637 que o possibilitou atacar o problema da dimensionalidade geométrica – que desde 1619 dificultou a realização concreta do seu programa de unificação das disciplinas matemáticas fundamentais – e ainda que sua tentativa para atacar o referido problema foi realizada basicamente dentro do domino da geometria, "nós não deveríamos desconsiderar o fato que ele resolveu com sucesso a dificuldade [que o problema da dimensionalidade geométrica impunha para a unificação dos dois campos principais da matemática pura] por introduzir a unidade[131], que corresponde a uma noção aritmética, dentro de uma discussão geométrica" (SASAKI, 2003: 214, grifo nosso). Mais do que isso, foi através de noções algébricas – mais especificamente dos procedimentos da análise algébrica – que Descartes resolveu em 1631 o problema de Pappus para além de cinco e seis linhas, e para tal ele elaborou, naquele mesmo ano, um critério algébrico para classificação das curvas necessárias para a resolução do referido problema – que seria retomado no livro II da *Geometria*. Tal critério se baseava "principalmente nas propriedades das curvas, ou para ser preciso, as equações algébricas que as curvas satisfazem" (SASAKI, 2003: 221). Ao contrário dos geômetras antigos que classificavam as linhas curvas em termos de sua gênese, Descartes as classificava em termos de suas propriedades, o que mostra que em 1631 o princípio fundamental da geometria analítica já era do seu conhecimento.

Por tudo que foi dito, podemos supor que mediante o ensino da Escola Jesuíta de *La Flèche* Descartes adquiriu uma visão totalmente dirigida para o aspecto prático das matemáticas, a qual ele jamais abandonou ao longo da sua carreira matemática, tanto que mais tarde na sua autobiografia do *Discurso* de 1637 (Cf. Descartes, 2000: 39-40), e numa própria carta dirigida a Plempius, datada de 3 de Outubro de 1637, ele "afirma ter encontrado na matemática a certeza e a evidência de suas demonstrações, porém que lhe espantava não ver nelas uma utilidade maior que aquela da aplicação

---

[131] Segundo Sasaki (2003: 214-215), na regra XVIII das *Regras*, Descartes tinha já reconhecido a importância da unidade pelo menos na proporção aritmética ao afirmar que "se é dito que a unidade está na grandeza fornecida, a ou 5, como b ou 7, grandeza também fornecida, está naquela que é procurada, ou seja, ab ou 35, então a e b estão no segundo grau, e seu produto ab, no terceiro" (DESCARTES apud SASAKI, 2003: 214-215). Assim, o que Descartes realizou na *Geometria* foi nada mais nada menos do que uma tradução engenhosa dessa relação em uma linguagem geométrica. Sasaki (2003: 215) acredita que a unidade representou um papel crucial para a resolução da dificuldade, que o problema da dimensionalidade geométrica impunha para a unificação das disciplinas matemáticas fundamentais. Com isso, a matemática inteiramente nova de Descartes, tinha na unidade uma base "não apenas técnica, mas também profundamente conceitual: dito de outra maneira, o pensamento maduro de Descartes na *Geometria* acarretou mudanças drásticas de tais conceitos fundamentais, como números e medidas, por reorganizar as disciplinas matemáticas tradicionais" (SASAKI, 2003: 215).

técnica (agrimensura, cartografia, fortificações, construção civil)" (CHITOLINA, 2013: 60). Por isso, se Descartes conseguiu desenvolver o método universal através das matemáticas, é porque nelas "se percebe a necessidade de *ordem* (disposição em série) e de *medida* (proporção) no pensamento, ou seja, tais critérios podem ser aplicados a todas as ciências" (CHITOLINA, 2013: 60, grifos do autor).

Assim, Descartes valorizou ao longo da sua carreira matemática – consumada na *Geometria* de 1637, um dos três apêndices do *Discurso* – mais á álgebra do que a geometria, já que a álgebra era a ferramenta matemática essencial no ideal renascentista de matematização da natureza que se traduziu em explicar os fenômenos naturais mediante leis matemáticas. Mas como se formatou esse ideal renascentista de matematização da natureza? E sob quais aspectos os trabalhos de Descartes foram influenciados por esse ideal? Quanto ao conteúdo da *Geometria,* julgamos que a obra não pode ser compreendida *per se*, já que faz parte de um projeto filosófico que pretendia fundamentar a ciência em bases racionais que Descartes tentou instaurar no seu *Discurso* de 1637. Nessa obra filosófica a qual a *Geometria* figurava como um dos apêndices, Descartes procurou defender o "novo modelo de ciência inaugurado por Copérnico, Kepler e Galileu contra a concepção escolástica de inspiração aristotélica em vigor ao final da idade média" (MARCONDES, 2005: 162). Conforme Marcondes, a ciência antiga tinha assumido idéias infundadas relativas à natureza do universo como a concepção finita do cosmo, o sistema geocêntrico e tantas outras noções que foram desmascaradas pela matematicidade dos métodos dos astrônomos e físicos da modernidade que inspiraram Descartes a cruzar os seus caminhos de forma que ele confere também a matemática uma representatividade que suplanta as demais ciências, nessa perspectiva a matemática será o fundamento de todas as ciências e do próprio pensamento cartesiano que se abrigava na matriz mecânica da época.

> Descartes procurava um método geral de pensamento capaz de facilitar as descobertas e *encontrar a verdade nas ciências*. Dado que as únicas ciências naturais conhecidas com algum grau de coerência sistemática eram a astronomia e a mecânica e que a chave da compreensão da mecânica e da astronomia era a matemática, esta ciência tornou-se o mais importante meio de compreender o universo. (...) Deste modo, a filosofia mecanicista deste período chegou a uma conclusão semelhante à dos platônicos, mas por razões diferentes. Tanto os platônicos, ao acreditarem na harmonia do universo, como os cartesianos, ao acreditarem num método geral baseado na razão, encontraram na matemática a rainha das ciências. (STRUIK, 1987: 162-165, grifos do autor)

Segundo Urbaneja (2003: 127) na escala de valores de Descartes, as matemáticas que tinham mais importância eram a aritmética e a álgebra, pois estas seriam as matemáticas das medições e por isso poderiam ser empregadas em todas as áreas científicas, até mesmo na geometria.

> Descartes parte da geometria grega para construir algo completamente novo, que se converterá numa matemática universal, que, em particular, apartará a geometria do eixo central da matemática destronando-a de forma definitiva de sua categoria de rainha, de modo que a matemática algebrizada de Descartes deslocará e ocupará o lugar da matemática geometrizada dos gregos. Assim, Descartes em sua geometria analítica converte á álgebra em rainha das matemáticas, até que no século XIX Gauss afirma que é a aritmética que deve ocupar o trono das matemáticas. (URBANEJA, 2003: 127)

Enfim, ao contrário de Fermat que era um profundo aficionado da geometria dos gregos, e talvez por causa disso o magistrado de Toulouse só conseguiu enxergar a insuficiência do método sintético euclidiano, o sábio de *La Flèche* criticou quase todos os pressupostos epistemológicos dos antigos – que vigoravam no estilo de pensamento da sua época – e por essa razão ele não fez parte, como fez Fermat, do movimento renascentista de reconstrução dos tratados perdidos dos principais geômetras da antiguidade. Esse fato impressionante mostra que Descartes de fato não admirava a matemática geometrizada dos gregos, pois levando-se em conta o fato dele ter estudado numa entidade jesuíta, supõe-se que ele tinha plenas condições de participar desse movimento contemporâneo uma vez que ele dominava amplamente o latim e o grego tanto na escrita quanto na fala. Dessa forma, Descartes tinha uma visão de uma reforma quase que completa no estilo de pensamento da matemática seiscentista, enquanto que Fermat queria apenas uma reforma modesta nesse estilo de pensamento. Se Descartes queria renunciar a matemática geometrizada dos antigos em prol de uma matemática algebrizada, Fermat queria apenas dar uma melhor forma a matemática geometrizada dos gregos, tal como nos explica Urbaneja:

> Fermat se considera como um exegeta da geometria grega, a qual absorve, no sentido cultural da palavra, aplicando-a a álgebra para enriquecê-la e torná-la mais inteligível, mas reconhecendo na geometria o eixo fixo da matemática. (URBANEJA, 2003: 126)

Portanto, podemos concluir que Descartes publicou a sua obra *Geometria* não somente por causa do seu elevado capital simbólico em comparação a Fermat, mas também por causa do anseio veemente de alcançar o seu objetivo de romper com a tradição antiga, é natural que quando se tem idéias mais novidadeiras, a ambição científica de publicar essas idéias é altíssima, muito menos quando elas fazem parte de um projeto ainda maior com fulcro filosófico. Embora Fermat conseguisse sistematizar tudo aquilo que Descartes não fez em poucas páginas, isto é, o principal fundamental da geometria analítica e suas implicações imediatas – explicadas sistematicamente conforme a teoria axiomática euclidiana – deve ser dito que seu opúsculo tinha pouca coisa a acrescentar ao estilo de pensamento da matemática seiscentista e se Fermat não publicou a sua teoria foi porque temia que seu trabalho não fosse aceito pelos matemáticos europeus em virtude das suas demonstrações algébricas que fugiam do padrão convencionado pelo estilo de pensamento hodierno ao qual ele compartilhava em grande medida. Portanto o ostracismo de Fermat pode ser interpretado como um passo para trás.

Considerações Finais

No decorrer desse capitulo procuramos analisar umas das grandes transformações ocorridas na atividade matemática do século XVII: a implantação de métodos algébricos na geometria. Como vimos, as figuras de Descartes e Fermat estavam no centro dessas transformações, na medida em que as suas respectivas obras, a *Geometria* e a *Introdução*, concretizaram de forma bastante enfática – ainda que com abordagens levemente distintas – o potencial da atividade matemática seiscentista de estabelecer conexões entre cálculos algébricos simbólicos e problemas indeterminados, entre equações indeterminadas e linhas geométricas, o que deu origem ao método das coordenadas, uma das bases da nova geometria. Com o intuito de compreendermos melhor o processo de gestação da nova geometria, na época em pauta, procuramos investigar uma série de elementos que atravessaram o contexto social da atividade matemática seiscentista, a saber: o caráter não profissional da atividade matemática; a representatividade secundária das matemáticas nos currículos acadêmicos, os quais se configuravam, sobretudo através do trivíum pitagórico para formar os profissionais de direito, medicina, e teologia; a negligência dos currículos das universidades para com a literatura matemática alheia aos *Elementos*; além do caráter fragmentário da atividade matemática externa as universidades, dentre outros elementos.

Como vimos, havia seis escolas matemáticas bem representativas no século XVII, e cada qual possuía os seus próprios valores, métodos e concepções acerca da matemática, os quais eram determinados culturalmente por um estilo de pensamento próprio que orientava as práticas sociais dos seus membros. Vimos também que esses membros, muitas vezes pertenciam a mais de uma dessas seis escolas matemáticas, embora cada uma delas distinguia-se uma da outra em termos estilísticos, mas muitas delas possuíam estilos de pensamento semelhantes o que facilitava a comunicação inter coletiva entre os matemáticos, as quais se davam, na maioria das situações, através de cartas em virtude da própria operacionalidade da ciência moderna como um todo, na qual os periódicos científicos especializados só vieram a luz apenas no ultimo terço do seiscentos. Vimos ainda que na França – um país que na época estava produzindo um celeiro de geômetras originais, tais como Descartes, Fermat, Roberval, Desargues, Blaise Pascal e tantos outros – a comunicação cientifica foi facilitada muito por conta da abnegação intelectual do padre parisiense Marin Mersenne, "que considerava que era seu dever cristão espalhar o conhecimento cientifico" (ROONEY, 2009: 137), e com isso ele foi o grande agente das circulações postais na França, e em toda a Europa "atuando como um canalizador de conhecimento e como um pioneiro das redes sociais" (ROONEY, 2009: 137). Dessa forma, vimos que Mersenne foi o grande divulgador dos trabalhos inovadores de Descartes e Fermat relativos à nova geometria, mas tanto um como o outro tiveram as suas dificuldades especificas para introduzir os seus trabalhos ao circulo parisiense, na medida em que ambas as propostas dos trabalhos visavam derrubar muitos dos pressupostos epistemológicos do sistema de opiniões do estilo de pensamento vigente – especialmente a proposta do trabalho de Descartes.

A linha de pesquisa utilizada para compreensão desse processo de questionamento e transformação do estilo de pensamento vigente foi à epistemologia de Fleck, retratada em sua monografia *Gênese e desenvolvimento de um fato científico*. As categorias de Fleck, presentes em sua teoria epistemológica, muito nos auxiliaram na compreensão do desenvolvimento gradativo da nova geometria como um fato científico. Como vimos, embora a *Introdução* e a *Geometria* contivessem argumentos significativos – elaborados a sua maneira tanto por Fermat como por Descartes **–** que visavam persuadir o imaginário coletivo do círculo parisiense a se abster do método sintético de exposição dos antigos e assimilar as vantagens do método analítico que estavam sendo costuradas brilhantemente nas duas obras, apenas um dos opositores da configuração estilística dominante decidiu publicar o seu trabalho. Este opositor, como vimos, foi Descartes que em razão do seu elevado capital simbólico adquirido na época em que estudou em *La Flèche,* não teve receios em publicar o seu trabalho, pois ele tinha muito prestigio entre os participantes do circulo de Mersenne. Por isso que mesmo diante das criticas dirigidas pelos matemáticos as passagens de teor elíptico da *Geometria*, Descartes não refreou a sua ambição cientifica e permaneceu lutando a todo custo para alcançar a notoriedade que ele tanto aspirava como um escritor. Para tanto, vimos que ele persuadiu os matemáticos da universidade de Leiden para traduzir o seu trabalho do francês para o latim e acrescentar comentários para clarificar as suas idéias, e após duas versões publicadas na língua latina em 1649 e em 1659 por Van Shooten, Descartes alcançou finalmente o seu objetivo. Nesse sentido parecem-nos interessantes algumas declarações de Fleck a respeito do fortalecimento social de uma teoria quando esta é publicada, segue as suas palavras:

> (...) uma proposição uma vez publicada, pertence aos poderes sociais que formam conceitos e criam hábitos de pensamento, junto com todas as outras proposições; ela determina o que *não pode ser pensado de outra maneira*. Mesmo quando combatida, as pessoas crescem com a problemática levantada por tal posição, que, circulando na sociedade, acaba sendo socialmente fortalecida. Ela se transforma numa realidade evidente, que, por sua vez, gera novos atos de reconhecimento. Assim surge um sistema fechado e harmonioso, dentro do qual a origem lógica de determinados elementos não pode mais ser encontrada. (FLECK, 2010: 80, grifos do autor)

Dessa forma, vimos que a persistência de Descartes em publicar o seu trabalho inovador numa forma matematicamente inteligível foi fundamental para que “a problemática levantada por tal posição” anômala ao estilo de pensamento dominante, circulasse gradualmente no imaginário coletivo seiscentista, “sendo socialmente fortalecida” até o ponto em que se convertesse “numa realidade evidente” e assim surgisse um “sistema fechado e harmonioso” valorizando a flexibilidade das relações algébricas em contraposição à complexidade das construções geométricas euclidianas. Em seguida, questionamos o porquê da não publicação da *Introdução* por parte de Fermat que não devia quase nada em termos matemáticos à *Geometria* de Descartes, e com isso buscamos uma explicação pautada em fatores – alheios à inferioridade do capital simbólico de Fermat em relação ao de Descartes – os quais no final das contas não foram suficientes para uma solução historicamente persuasiva para o nosso questionamento, pois as respostas que encontramos baseavam-se em argumentos históricos desgastados e que podem ser considerados ultrapassados quando comparados com a erudição da historiografia da ciência contemporânea. Dessa forma, tomando como base a obra magna de Fleck, buscamos então encontrar uma resposta epistemológica para o nosso questionamento e para tanto decidimos localizar os coletivos de pensamento aos quais Descartes e Fermat foram disciplinados matematicamente e assim tentamos verificar em que medida os seus trabalhos, referentes à nova geometria, foram tributários aos sistemas de opiniões desses coletivos. Para Fleck, não existem descobrimentos acidentais na história da ciência, pois ele entende que qualquer descoberta científica inovadora é fruto das instancias sociais a qual o indivíduo – que a descobre está envolvido – por isso o papel do indivíduo é pouco significativo quando comparado com as comunidades de pensamento as quais ele pertence:

> Não se pretende dizer que o individuo não teria importância como fator do conhecimento. Sua fisiologia sensorial e sua psicologia certamente são muito importantes, mas somente o estudo da comunidade de pensamento confere estabilidade à teoria do conhecimento. (FLECK, 2010: 88)

Dessa forma, fizemos então uma análise geral das carreiras matemáticas de Descartes e Fermat e identificamos os seus estilos de pensamento próprios dos coletivos matemáticos aos quais eles participavam, e com isso verificamos se a maior ou menor proximidade dos seus respectivos estilos para com a atmosfera estilística dominante inibiu de alguma forma a propagação dos seus trabalhos. Como vimos, Fermat participou apenas da escola analítica, e esta participação girava em torno do meio esotérico dessa escola, o que de certa forma acarretava compromissos e adesões ao sistema de idéias com um mínimo de questionamento:

> A tendência geral do trabalho de conhecimento é, portanto: um máximo de coerção de pensamento (Denkzwang) com um mínimo de pensamento baseado na própria vontade. (FLECK, 2010: 144)

Dessa forma, vimos que Fermat questionava na *Introdução* apenas o método sintético dos antigos, mas por outro lado compartilhava em grande medida com todos os pressupostos epistemológicos do coletivo de pensamento da matemática seiscentista, o que confirma a visão epistemológica fleckiana de que os iniciados num determinado estilo de pensamento tendem a seguir inconscientemente os pressupostos da sua comunidade de pensamento, mediante a chamada harmonia das ilusões que atravanca o desenvolvimento do pensamento critico para com a ordem estilística dominante. Por isso, vimos que a *Introdução* tinha pouca coisa a acrescentar ao estilo de pensamento da matemática seiscentista e por conta disso Fermat não quis publicar a sua teoria, mesmo porque ele temia que seu trabalho não fosse aceito pelos matemáticos europeus em virtude das suas demonstrações algébricas que fugiam do padrão convencionado pelo estilo de pensamento hodierno ao qual ele compartilhava em grande extensão. Vimos que Descartes, através das suas sucessivas viagens em meio à guerra dos trintas anos, entrou em contato com diferentes coletivos matemáticos de estilos afins, o que favoreceu as condições para que ele enriquecesse ainda mais a sua cultura matemática da juventude adquirida em *La Flèche*, que estava pautada não só em matemáticas puras – tal era o caso da formação matemática de Fermat em Bordéus – mas também em matemáticas mistas.

> Sobre o indivíduo que pertence a várias comunidades de pensamento e que atua como veículo do tráfego intercoletivo de pensamento, há de se dizer que (...) quando os estilos de pensamento são muito diferentes, também podem preservar seu caráter fechado no mesmo individuo, mas, quando se trata de estilos de pensamento afins, essa separação se torna difícil: os atritos dos estilos de pensamento tornam a vizinhança impossível e condenam a pessoa à improdutividade ou à criação de um estilo peculiar limítrofe. (FLECK, 2010: 144).

Portanto, em razão de ter circulado intercoletivamente por praticamente todas as comunidades matemáticas existentes no século XVII, Descartes adquiriu um estilo de pensamento, próprio, original e limítrofe a muitas dessas escolas. Dessa forma, a *Geometria* de Descartes portava uma originalidade e uma riqueza estilística[132] provenientes das muitas escolas matemáticas as quais ele

[132] Como relatamos ao longo desse capitulo, Descartes teve certas influências da escola matemática dos analistas, mas ele não compartilhava com todos os pressupostos dessa escola, por isso que ele rechaçou a linguagem sincopada de

trafegou – com o intuito incansável de lapidar o seu projeto de reforma das disciplinas matemáticas fundamentais. Mais do que isso, vimos também que a *Geometria*, foi um dos apêndices do *Discurso do método*, um tratado filosófico que propunha uma reforma geral do sistema de saber, que perpassava não só pelas matemáticas, mas também pela metafísica, ou melhor, em todas as ciências em geral, de sorte que a operacionalidade dessa reforma se dava pela aplicação das quatro regras do método universal cujo modelo paradigmático não era propriamente uma nova geometria, mas uma álgebra reformada que tinha como alvo abastecer todas as esferas do conhecimento humano, sobretudo a própria geometria. Enfim, com todos esses antecedentes históricos na gestação do seu monumental tratado filosófico e matemático, Descartes estava plenamente convencido da abrangência e da originalidade do seu trabalho, por isso ele não economizou esforços para publicar a *Geometria*.

Viète "e em conseqüência não participou, como fez Fermat, no movimento contemporâneo de restauração dos trabalhos perdidos de Apolônio" (URBANEJA, 2003: 127). Quanto ao seu percurso na atmosfera dos matemáticos aplicados, Sasaki (2003: 125-126), aponta que ao contrário de Galileu, Faulhaber, Brammer, e outros – membros dessa tradição matemática – que visavam fabricar instrumentos matemáticos úteis para propósitos práticos, Descartes visava se servir dos seus compassos recém-inventados para construir nos *Pensamentos Privados* uma matemática teórica em si mesma. Com respeito à escola dos matemáticos místicos, Sasaki (2003: 126) nos informa que Descartes tinha criticado muitas vezes os fundamentos dessa escola os quais estavam baseados na arte da memória. Com efeito, numa carta dirigida à Beeckman datada de 26 de março de 1619, Descartes afirmou ao erudito holandês que estava a construir uma nova ciência não como a arte luliana, mas com fundamentos matemáticos sólidos. Nos *Pensamentos Privados,* uma postura similar é defendida quando ele avalia criticamente o livro *A arte da memória* de Lambert Schenkel, e a objeção dirigida a Shenkel "parece ter sido similar a sua atitude em direção ao ancião de Dordrecht que estava orgulhoso de sua arte que originou de Ramon Lull" (SASAKI, 2003: 126). A mesma postura critica quanto à arte da memória foi defendida por Descartes numa carta dirigida a Beeckman datada de 29 de abril de 1619, mas nessa carta Descartes estava já demonstrando certo interesse em saber se tal arte continha realmente uma chave útil, o que mostra que nesse momento ele já estava tendendo "para estabelecer sua avaliação bastante construtiva da arte da memória" (SASAKI, 2003: 127). Ainda nesta carta, ele revelou a Beeckman a chave secreta da arte da memória. O seu critério estava baseado num ordenamento correto da arte o qual seria aquele em "que as imagens deveriam ser formadas dependentes uma sobre as outras" (DESCARTES apud SASAKI, 2003: 127). De acordo com Sasaki (2003: 127), o referido critério de formação das imagens possivelmente foi costurado idealisticamente no seu projeto de criação de uma nova disciplina matemática mediante a unificação da aritmética e geometria. Mas nos *Pensamentos Privados*, os princípios de unificação eram ainda os compassos matemáticos que constituíam em ferramentas algébricas imaturas. De qualquer forma, mais tarde nas *Regras para a direção da mente*, em especial na regra XIV, Descartes elaborou uma nova ciência – dando continuidade ao se projeto de uma ciência inteiramente nova iniciado nos *Pensamentos Privados* – na qual os "problemas podem ser expressos muito distintamente de nossa imaginação por meio de símbolos que eram facilmente memorizados" (SASAKI, 2003: 127). Dessa forma, Descartes foi influenciado também pela escola dos matemáticos místicos, ainda que de uma forma limítrofe, o que evidencia um estilo de pensamento, compartilhado com esta tradição, de uma forma um tanto original. Tal particularidade estilística foi constatada também por Sasaki ao notar que os frutos matemáticos de Descartes, enquanto esteve na Alemanha, "eram diferentes daqueles realizados pelos praticantes matemáticos alemães" (SASAKI, 2003: 151). Dessa forma, Sasaki comenta a opinião de Schneider, biografo de Faulhaber, que no fim da sua biografia tinha destacado que "o estilo de Descartes tinha uma originalidade radical às vezes vista apenas em matemáticos amadores e contrastou ao estilo esotérico dos *Rechenmeister* profissionais alemães" (SASAKI, 2003: 151). Sasaki (2003: 151) ressalta que a matemática dos cossistas alemães estava matizada por um tipo de esoterismo peculiar da matemática renascentista, ao passo que Descartes apresentava uma consciência anti-renascentista na qual esse tipo de esoterismo era rechaçado. Dessa forma a diferença de estilos da matemática entre Descartes e os cossistas alemães podia ser explicada pelo fato de que Descartes "estava profundamente interessado em filosofia assim como em matemática" (SASAKI, 2003: 151). Dessa forma, Descartes foi influenciado inegavelmente pelos cossistas alemães, especialmente em seu tratado da juventude *Elementos sólidos,* no qual "os números poliédricos eram calculados, e certas fórmulas a respeito de sólidos regulares e semi regulares eram apresentadas sistematicamente pela primeira vez" (SASAKI, 2003: 145) num tratamento algébrico e livre do misticismo dos *Rechenmeister* alemães tais como Faulhaber, e foi nesse sentido que Descartes ultrapassou essa tradição matemática na qual ele trafegou.

3. As diferenças fundamentais entre as geometrias de Descartes e Fermat

Considerações Iniciais

Neste capítulo final, particularmente na primeira seção, pretendemos fazer uma análise histórica comparativa entre a *Geometria* de Descartes e a *Introdução* de Fermat. A princípio, buscaremos mostrar a principal semelhança entre os dois trabalhos com os quais os autores se serviram para contestar o pressuposto primordial do coletivo de pensamento, o que abriu caminho para uma mutação do estilo de pensamento vigente. Ao longo deste capítulo, nos serviremos de alguns fragmentos de alguns manuais de história da matemática, nos quais buscaremos uma base para a comparação das idéias fundamentais de cada obra, como também dos contextos distintos das duas publicações. E em meio às essas comparações entraremos na discussão propriamente dita do problema da nossa pesquisa que consiste em investigar as razões que fizeram com que alguns historiadores da matemática atribuíssem exclusivamente a Descartes a paternidade da geometria analítica. Para tanto, apresentaremos algumas das nossas hipóteses ao longo do texto, mas não de uma forma linear como se estivéssemos respondendo um questionário rigorosamente. À medida que iremos apresentar os aspectos característicos de cada obra, especificando as diferenças de abordagem próprias de cada autor – decorrentes dos seus distintos estilos de pensamento – e a repercussão dos seus trabalhos no coletivo de pensamento, as duas primeiras hipóteses que apresentamos na introdução dessa dissertação se confirmarão naturalmente. A epistemologia de Fleck, que abasteceu o desenvolvimento dessa dissertação até aqui, nos auxiliará mais uma vez a esclarecer algumas idéias do texto. A comparação entre os dois trabalhos como já frisamos, se dará conforme o ponto de vista dos historiadores da matemática que selecionamos, portanto não pretendemos citar trechos dos trabalhos que pretendemos comparar, pois essa primeira seção não aspira à originalidade de uma análise comparativa do ponto de vista estritamente matemático entre os dois trabalhos, pelo contrário tal análise que pretendemos realizar não passa de uma glosa de textos inter-relacionados de certos historiadores da matemática, ou seja, uma comparação a nível fundamentalmente histórico conforme o título da primeira seção deste capítulo.

Na segunda seção, faremos uma análise das transformações sociais e tecnológicas em que passava a sociedade na época de Descartes e tentaremos compreender em que medida ele se apoderou dessas transformações para poder as aplicar em todos os seus tratados redigidos, especialmente a *Geometria*. Esta é a nossa proposta para confirmarmos a nossa última hipótese para o problema da nossa investigação.

3.1. Um estudo histórico comparativo entre a Introdução e a Geometria

O surgimento daquilo que atualmente chamamos de geometria analítica, se estabeleceu na Europa do século XVII mediante dois cidadãos franceses que, apesar dos seus estilos de pensamento distintos para com a matemática, são dois expoentes incontestáveis da transformação estilística da matemática da época. A *Introdução* de Fermat e a *Geometria* de Descartes são duas obras representativas desta transformação estilística conduzida pelas diretrizes da nova geometria fundamentadas no método algebricamente analítico que substitui o método geometricamente sintético da tradição do coletivo de pensamento.

Detentores de um conhecimento refinado dos manuais matemáticos da Grécia clássica, a matemática dos antigos foi à fonte de formação e inspiração de Descartes e, sobretudo de Fermat, mas eles decidiram abandonar os seus métodos compartilhados até então pelo estilo de pensamento vigente, especialmente o método sintético – considerado insuficiente quando comparado com a análise algébrica. Desse modo, na *Introdução,* por exemplo, Fermat sentenciou a extinção do método sintético ao apresentar o descobrimento como se estivesse acompanhado da demonstração, pois, para ele, a análise algébrica tinha essas duas funções. Na *Geometria*, Descartes por sua parte, achava necessário complementar à análise algébrica – decorrente da resolução de seus problemas de construção – com a síntese geométrica. Seja como for, tanto para um como para o outro, a ideia diretriz da investigação dos problemas geométricos, mediante a análise algébrica, tinha muito mais relevância do que o conhecimento demonstrativo da síntese geométrica. Com um enfoque heurístico, fundamentado na álgebra simbólica de Viète, conservada fielmente por Fermat e aperfeiçoada muito provavelmente por Descartes, a grande intuição que estes dois compatriotas tiveram "foi a de verificar que a aplicação da álgebra como um instrumento algoritmo por excelência, incrementaria ainda mais a capacidade heurística da análise" (UBANEJA, 2003: 125).

Dessa forma, Descartes e Fermat romperam com a hegemonia da estratégia de exposição dos tratados antigos, inclusa na falsa dualidade de descobrimento-demonstração, e utilizaram assim, ao longo dos seus tratados, métodos semelhantes, os quais remodelavam em termos algébricos os procedimentos solapados pelos antigos para alcançar os seus brilhantes resultados, e assim desenvolveram – cada qual a sua maneira – as idéias da nova geometria. De acordo com Mahoney (1994: 75) o objetivo primordial de Descartes na *Geometria* foi exemplificar o seu novo modelo de filosofar fundamentado nos procedimentos analíticos da álgebra simbólica reformada, tanto que a *Geometria* se transforma no livro III num tratado de teoria de equações, e com isso Descartes reconstrói o caminho imaturo das últimas dez *Regras para a direção do espírito* que apresentavam a técnica de criação de equações algébricas como um procedimento derivado da teoria das proporções. Em linha oposta a Descartes, o objetivo de Fermat era essencialmente matemático, por isso sua *Introdução* apresentava em detalhe sistemático – tal como a exposição axiomática de Euclides nos *Elementos* – uma técnica geral de resolver problemas de lugares, que ele pretendeu usar em mais pesquisas matemáticas.

> Para Fermat, o sistema da *Introdução* era parte de um método único e geral, já claro em seu próprio espírito[133] desde sua estadia em Bordéus, que formou a base da técnica de determinar máximos e mínimos e de tratar a teoria dos números analiticamente. (MAHONEY, 1994: 75)

Dessa forma, em oito de junho de 1637 quando o livreiro Ian Maire publicou anonimamente em Leiden, o magnífico tratado filosófico intitulado de *Discurso do método para guiar corretamente a nossa razão e buscar a verdade nas ciências*, cujo um dos apêndices era a *Geometria*, a *Introdução* de Fermat permaneceu desconhecida, ainda que concluída, ao que tudo indica, conforme Boyer (2004: 74), antes de 1629 e com isso ela seguiu circulando em forma de manuscrito até a sua

---

[133] Mahoney, aqui se contradiz com a sua afirmação anterior de que "Fermat carecia de elementos necessários para o seu sistema até o final de 1635, enquanto as *Regras para a direção do espírito* sugere que Descartes tinha já colocado os fundamentos da *Geometria* no final dos anos 1620" (MAHONEY, 1994: 72-73). Entedemos que a álgebra simbólica não pode ser considerada por si só o fundamento da geometria analítica, mas sim o principio fundamental da geometria analítica, na qual Boyer (2004: 74) garante que antes de 1629 Fermat, em meio à descoberta de um tratamento analítico para determinar máximo e mínimo de curvas dadas num sistema de coordenadas, logo depois disso "aplicou a analise de Viète aos problemas de lugares, assim inventando a nova geometria" (BOYER, 2004: 74). Dessa forma, fica claro que Fermat alcançou o principio fundamental da nova geometria – ainda que com ferramentas limitadas tais como a homogeneidade e a notação sincopada – antes de 1629, aliás, o próprio Mahoney sugere isso, mesmo que com certa má vontade, ao afirmar que "o sistema da *Introdução* era parte de um método único e geral, já claro em seu próprio espírito desde sua estadia em Bordéus, que formou a base da técnica de determinar máximos e mínimos" (MAHONEY, 1994: 75). Ora, tal método único e geral só pode ser a constatação de que as equações indeterminadas correspondem mutuamente com as curvas geométricas quando traçadas num sistema de coordenadas. Tomando como base a trajetória histórica do problema de Pappus descrita por Sasaki (2003) e estudada na seção 2.2, Descartes só poderia ter consciência do principio fundamental da geometria analítica após a sua resolução do problema de Pappus no inverno de 1631-1632, na qual ele se serviu de uma classificação própria de diversas curvas mediante as sua propriedades algébricas correspondentes para resolver o referido problema, o que pressupõe, para nós, que o principio fundamental da geometria analítica já estava patente para Descartes nesse período. Mas esta discussão de prioridade é obsoleta, mesmo assim não concordamos com Mahoney ao afirmar que "com alguma justiça a geometria analítica carrega o epônimo cartesiano" já que ela foi publicada enquanto que a *Introdução* circulou em forma de manuscrito. Seja como for, o próprio Mahoney afirma que o *Discurso* com os seus três ensaios não era publicado na França até o inicio de 1638, quando Descartes já estava de posse do manuscrito da *Introdução* alguns meses antes da publicação do seu trabalho filosófico em solo francês, conforme fica demonstrado numa carta de Descartes a Mersenne datada de 25 de janeiro de 1638, na qual o filósofo faz referência ao reverendo sobre a sua leitura da *Introdução.* Isso comprova que a *Introdução* – junto com outros trabalhos de Fermat sobre máximos e mínimos e sua aplicação a tangentes que acompanharam a sua correspondência com Mersenne – foram conhecidos pelos matemáticos franceses – dentre eles Descartes –antes da publicação da *Geometria*. Na opinião de Urbaneja (2003: 131) a reputação de Fermat no campo da geometria analítica se deve mais aos seus trabalhos sobre máximos e mínimos e sua aplicação a tangentes (que impressionaram inclusive Descartes) do que a sua *Introdução* que foi completamente eclipsada pela publicação da *Geometria* de Descartes. Dessa forma, enquanto alguns aspectos dos trabalhos sobre máximos e mínimos e as tangentes foram incorporados em algumas publicações de outros matemáticos, a *Introdução* não apareceu impressa até a publicação das *Várias atividades matemáticas* em 1679, muito tempo após a publicação da *Geometria*, de modo que a *Introdução* quando publicada, continha uma notação já ultrapassada e por isso seu valor é apenas histórico para verificar – a data da sua composição e de seu conteúdo – bem como da independência da geometria analítica de Fermat em relação à de Descartes. Dessa forma Urbaneja (2003: 131) ao contrário de Mahoney, compreende o epônimo cartesiano que acompanha o substantivo geometria como injusto.

publicação póstuma, por parte de Clement Samuel de Fermat, nas *Várias atividades matemáticas* de 1679. Por isso que Descarte é geralmente prestigiado por certos historiadores como o único criador da geometria analítica, "em razão dos trabalhos de Fermat sobre geometria analítica não terem sido publicados em vida pelo autor" (URBANEJA, 2003: 129). Dessa forma, para além dessas razões já referidas, cabe-nos investigar daqui para frente outras razões que contribuíram para que a criação da geometria analítica fosse atribuída por diversos historiadores a Descartes exclusivamente, este, a propósito, é o problema da nossa investigação.

Ao que parece, a geometria analítica foi desenvolvida simultaneamente, tanto por Descartes, que publicou a sua *Geometria* em 1637, como por Fermat, em escritos precedentes, mas não publicados. Esta tensão foi questionada por Dantizig, após rebater uma metáfora ultrapassada do historiador francês Chasles que tinha caracterizado a conquista de Descartes como "*Proles sine matre creata*", que significa "Crianças não nascidas de uma mãe" (DANTZIG, 1970: 169). Uma metáfora injusta, levando-se em conta todo o desenvolvimento histórico que precedeu tal conquista, por essa razão Dantizig considera que:

> (...) de maneira alguma a geometria cartesiana foi uma criança sem mãe. Com o risco de parecer estar brincando, direi que não apenas a concepção cartesiana tinha mãe – a geometria dos gregos – como também tinha um irmão gêmeo. Na verdade, até mesmo um estudo superficial da *Geometria* de Descartes e da *Introdução* de Fermat mostra que temos diante de nós um desses fenômenos gêmeos tão comuns na história da matemática. (...) Como justificar um fenômeno tão estranho? É como se a experiência acumulada da raça às vezes atinja uma etapa em que seja imperativo um desfecho e é simplesmente uma questão de acaso caber a único homem, a dois homens ou a uma multidão de homens canalizarem a rica corrente. (DANTZIG, 1970: 171-172)

Na epistemologia de Fleck, as ciências se desenvolvem gradualmente mediante estágios evolucionários demarcados por um estilo de pensamento. Tomando como a base a sua perspectiva epistemológica, diríamos que a canalização da corrente histórica da geometria analítica, como descrita acima por Dantzig, foi um desfecho necessário e sem volta na história das idéias matemáticas. Nesse sentido, parece-nos interessante a afirmação de Fleck, de que as ideias se desenvolvem "não por meio da abstração, digamos do universal ao particular, mas, por meio da diferenciação (especialização), do universal ao particular" (FLECK, 2010: 69). Assim, a crítica histórica de Dantzig a metáfora anacrônica de Chasles é tão oportuna quanto a sua afirmação de que a descoberta da geometria analítica confirma o fato de que dois cientistas, ou uma multidão deles trabalhando em conjunto, podem formular ao mesmo tempo uma mesma teoria como um resultado de um desfecho histórico imperativo. No entanto, é o nome de Descartes que vingou na historiografia em detrimento de Fermat, conforme atesta Bell:

> No caso de Fermat, ou a segurança de sua vida, ou a excessiva modéstia fizeram com que a publicação de suas obras tivessem pouca importância para ele, e como resultado, seu soberbo talento era desconhecido por sua própria geração. Foi Descartes e não Fermat o geômetra que os outros [matemáticos] seguiram. (BELL, 1985: 152, tradução e grifo nosso)

Bell entende que pelo fato da *Introdução* ter sido publicada só em 1679, quase cinquenta anos depois da publicação da *Geometria*, as idéias de Fermat tornaram-se então desconhecidas por sua própria geração em razão da sua inércia, e isso fez com que Descartes acabasse sendo recompensado pelas idéias da sua obra. Por isso, o prestígio alcançado pela *Geometria* frente à *Introdução* não se justificou por critérios de primazia ou originalidade, mas sim em relação à desigual publicidade alcançada naquela época pela *Geometria* em comparação com a *Introdução*, nas palavras de Boyer:

> Por cerca de dois séculos após 1637, a geometria analítica foi geralmente considerada como a invenção de um só homem, mas agora, é bastante claro que, anos antes do aparecimento da *Geometria*, Fermat tinha usado essencialmente os mesmos métodos de Descartes. No entanto, o seu trabalho foi divulgado em grande parte através de correspondências na forma de manuscrito até a sua publicação póstuma em 1679. Nesse interím, a *Geometria* de Descartes já tinha sido difundida mediante as edições latinas de Van Schooten. Se a influência cartesiana não tivesse predominado, muito provavelmente certos aspectos da geometria analítica teriam sido desenvolvidos mais rapidamente, já que o método de Fermat era similar ao de Descartes, mas seu objetivo estava mais próximo do pensamento moderno. (BOYER, 2004: 101, tradução nossa)

Para Boyer, a comunidade científica relegou Fermat ao esquecimento por dois séculos, apesar de seu trabalho ter uma superioridade matemática[134] – pelo menos a nível prospectivo conforme o

[134] Conforme Boyer (1996: 239), a exposição de Fermat na *Introdução*, era mais clara e didática do que a da *Geometria* de Descartes. Com isso, sua geometria analítica estava mais próxima da nossa concepção atual de geometria analítica, não só devido ao "fato de serem as ordenadas usualmente tomadas perpendicularmente ao eixo das abcissas" (BOYER, 1996: 239) senão porque "Fermat dava ênfase" na representação gráfica "de soluções de equações indeterminadas, ao invés da construção das soluções algébricas determinadas" (BOYER, 1996: 238) que caracterizava o trabalho de Descartes. Nesse sentido, a *Geometria* de Descartes pode ser considerada muito mais que uma aplicação da álgebra a geometria, mas também a tradução das operações algébricas para o domínio geométrico, e com isso as curvas

desenvolvimento histórico da geometria analítica – em comparação á obra de Descartes. Na realidade, o grande gargalo de Fermat foi a sua rejeição em publicar as suas descobertas (a qual tentamos investigar as múltiplas razões possíveis nas duas seções do capitulo dois), além da sua notação sincopada, visto que “quando a *Introdução* de Fermat foi impressa, existiam já outras publicações em que a álgebra [simbólica de Descartes] era aplicada aos resultados de Apolônio” (STRUIK, 1987: 166-167, grifo nosso). Desse modo, é compreensível que durante aquele tempo compreendido entre as publicações da *Geometria* e da *Introdução* as idéias de Descartes tinham atingido notoriedade dado que suas notações começavam a ser utilizadas pelos matemáticos do período, daí a publicação póstuma da *Introdução* foi desvalorizada pela comunidade científica em razão da sua notação *démodé*.

> Desconhecedores da data inicial da composição, os leitores da *Introdução* erraram o seu significado como uma evidência da invenção independente de Fermat da geometria analitica. O assunto continou a ser atribuido unicamente a Descartes e permaneceu para a pesquisa histórica posterior estabecer as afirmações legitimas de seu rival. Embora o assunto ainda seja conhecido como geometria cartesiana, o que para mim é uma infelicidade em razão das implicações da singularidade da sua invenção, por outro lado, o título, de certa forma, faz justiça ao fato que foi predominantemente sob a influência de Descartes que o novo ramo da matemática criou raizes. (BOYER, 2004: 82, tradução nossa)

Dessa forma, podemos atestar a validade da epistemologia de Fleck na qual às descobertas cientificas “só tem durabilidade quando exercem um efeito sugestivo, isto é, quando surgem num momento social favorável” (FLECK, 2010: 88). Dessa forma, mesmo que Femat tenha desenvolvido na *Introdução* métodos semelhantes aos aplicados por Descartes na *Geometria*, devemos ponderar que seu tratado quando publicado em 1679, não alcançou uma divulgação nos moldes do coletivo de pensamento tal como a *Geometria* – que tinha aprimorado e incorporado á linguagem simbólica de alguns tratados posteriores a *Arte analítica* como vimos no fim da seção 1.3 – por isso a *Introdução* não provocou o devido efeito sugestivo indispensável para o acolhimento

---

geométricas ocupam um papel subsidiário diante das equações algébricas. Dessa forma, conforme Urbaneja, Descartes estuda equações por meio de curvas, em outros termos, ele partia de uma curva – associada a um lugar geométrico – da qual determinava a equação do lugar, isto é: “resolve problemas geométricos através da construção da solução geométrica de equações” (URBANEJA, 2003: 128). Fermat, por outro lado, estuda curvas definidas por equações, ou melhor: “Fermat inversamente parte de uma equação algébrica para determinar em seguida às propriedades geométricas da curva correspondente” (URBANEJA, 2003: 128). Dessa forma, a visões de Descartes e Fermat se complementam e estabelecem entre si o nexo entre álgebra e geometria em sentidos opostos.

social de uma descoberta cientifica conforme a epistemologia de Fleck. Por outro lado, se nos for permitido supor, por absurdo, que se as idéias cartesianas não tivessem sido acolhidas socialmente, provavelmente, certas concepções da geometria analítica teriam sido desenvolvidas mais rapidamente, na medida em que as idéias da *Introdução* estavam mais próximas da nossa realidade atual. Mas, é preciso ressaltar que a trajetória de Descartes no campo das matemáticas não foi tão triunfal como se imagina, uma vez que a reputação da *Geometria* foi muito mais um produto da astúcia cartesiana do que de uma razoabilidade *par excellence* intrínseca a sua obra como garantiu o historiador Katz:

> A obra de Descartes (...) demonstrava-se muito difícil de ler. Foi publicada em francês, em lugar do usual latim, e tinha tantas falhas em argumentos e equações complicadas que poucos matemáticos conseguiam entendê-la totalmente. (...) Mas alguns anos após a publicação da *Geometria*, Descartes mudou um pouco de idéia. Encorajou outros matemáticos a traduzir a obra para o latim e a publicar comentários para explicar a sua intenção. Foi apenas depois da publicação da versão em latim por van Shooten, um professor na escola de engenharia de Leiden, primeiro em 1649 com comentários do próprio van Shooten e de Florimond Debeaune (...) e depois com comentários e acrescentos ainda mais extensos em 1659-1661, que a obra de Descartes alcançou o reconhecimento que ele desejava. (KATZ, 2010: 556)

Para Katz, a intervenção dos intelectuais da universidade de Leiden na *Geometria* de Descartes foi à condição crucial para a popularidade da sua obra que só foi alcançada por volta de 1649, cerca de dezessete anos depois da sua primeira publicação como terceiro apêndice do *Discurso* em 1637. Portanto, a admissão dos trabalhos de Descartes se deram de maneira lenta na medida em que Van Shooten e outros matemáticos europeus procuravam compensar as deficiências da sua exposição, o que confirma mais uma vez a validade da epistemologia de Fleck, segundo o qual: “o portador do saber é um coletivo bem organizado, que supera de longe a capacidade de um indivíduo” (FLECK, 2010: 85).

> Os pensamentos circulam de individuo a individuo, sempre com alguma modificação, pois outros indivíduos fazem outras associações. A rigor, o receptor nunca entende um pensamento da maneira como o emissor quer que seja entendido. Após uma série dessas peregrinações, não sobra praticamente nada do conteúdo original. De quem é o pensamento que continua circulando? Nada mais é do que um pensamento coletivo, um pensamento que não pertence a nenhum indivíduo. (FLECK, 2010: 85)

Dessa forma, em face dos refinamentos conceituais e dos próprios comentários realizados pelos matemáticos da universidade de Leiden no escopo da *Geometria*, é incontestável que a *Geometria* de Descartes foi o produto de um trabalho coletivo e não apenas individual. Para convencer os matemáticos da universidade de Leiden a realizarem tais acréscimos em seu trabalho, acreditamos que Descartes muito provavelmente deve ter argumentado a favor da originalidade do conteúdo do tratado – o qual se baseava num método algébrico inovador que propiciou a resolução persuasiva do famoso problema de Pappus[135] – mas, para muito, além disso, ele também deve ter usufruído de certa forma do seu próprio capital simbólico de longa data adquirido na sua formação primária e secundária no renomado colégio jesuíta de *La Flèche* – o qual tinha formado um dos principais[136] matemáticos dos séculos XVII e XVIII. Dessa forma, Descartes tinha real discernimento do status de ter estudado em *La Flèche*, tanto que lutou a todo custo para conseguir convencer os matemáticos holandeses a reconstruir as partes elípticas do seu trabalho. Tal ambição cientifica em ser reconhecido como um escritor famoso no campo da matemática – demonstrada pelo desejo de ver o seu trabalho publicado numa forma inteligível – foi uma consequência do seu elevado capital simbólico, como vimos na seção 2.1 através da argumentação sociológica persuasiva de Bordieu que serviu como uma base para reforçar uma das hipóteses do problema dessa investigação. De qualquer forma, o trabalho de Descartes mesmo através das muitas lapidações e refinamentos conceituais e interpretativos, não deixou de apresentar inconsistências de natureza matemática, o que pode ser comprovado nas citações seguintes extraídas de dois autores clássicos da história da matemática:

[135] Segundo Sasaki (2003: 206), o problema de Pappus foi um desafio dirigido por Golius em 1631 aos matemáticos famosos do circulo de Mersenne, tais como Descartes e Mydorge. Seria natural que Descartes, que superava os outros matemáticos do circulo parisiense, tanto a nível intelectual, estilístico e especialmente simbólico resolvesse o problema proposto. O brilhante documentário: Marin Mersenne: The birth of modern geometry produzido por Glânffrwd Thomas, nos mostra numa encenação dramática – protagonizada pelo ator John Bennett ao interpretar Mersenne escrevendo uma carta em 1635 para Peiresc – a consideração que o reverendo tinha pelos matemáticos, especialmente Descartes por conta do seu elevado capital simbólico. Seguem as palavras, proferidas em pensamento pelo ator John Bennett, escritas naquela carta e as demais palavras dirigidas verbalmente para o espectador as quais grifamos: “Fui assegurado que o Monsieur Gassendi chegará ao início de Junho. Fico muito satisfeito. Verá a mais nobre academia do mundo, recém-formada nesta cidade. Sem dúvida a mais nobre devido aos seus matemáticos. Entre os frequentradores estão Etienne Pascal, Mydorge, Hardy, Roberval, Desargues, Abbé-Chambon, entre outros. *Meu bom amigo René Descartes não comparecerá. Ele não participa de grupos devido aos seus ideais. Mas vamos continuar a nos corresponder*” (THOMAS, 1986: tradução nossa, grifo nosso).

[136] Descartes estudou em *La Flèche* num momento histórico favorável da educação matemática da Sociedade de Jesus. Entre a segunda metade do século XVI e o primeiro terço do século XVII houve uma eclosão de novas cátedras de matemática com dedicação exclusiva que começavam a despontar nos colégios jesuítas da Europa. Por conta da recente valorização dos estudos matemáticos pela Sociedade de Jesus, entre 1607 e 1615, Descartes recebeu uma educação matemática primorosa em *La Flèche*. Naquela época efervescente da educação matemática jesuíta “não seria surpreendente que a Sociedade de Jesus produzisse muitos matemáticos excelentes nos séculos dezessete e dezoito tais como Clavius, Ricci, Paul Gudin, Gregoire de Saint Vicent, Joannes Ciermans, Francesco Grimaldi, Jacques de Billy, Athanasius Kirsher, e Girolamo Saccheri” (SASAKI, 2003: 43).

> Na *Geometria* de Descartes não há um desenvolvimento sistemático do método analítico, que pode ser construído a partir de proposições isoladas que aparecem em diferentes partes do tratado. Nos 32 desenhos que ilustram o texto os eixos coordenados não são, em hora alguma, explicitamente estabelecidos. (CAJORI, 2010: 245)

Ainda, a respeito da obra de Descartes, vejamos o que afirmou Boyer:

> Praticamente toda a *Geometria* está dedicada a uma completa aplicação da álgebra à geometria e da geometria à álgebra; mas há pouco no tratado que se assemelha ao que hoje se considera como geometria analítica. Não há nada de sistemático sobre coordenadas retangulares, pois ordenadas obliquas são geralmente assumidas (...). Além disso, em toda a obra não há uma única curva nova traçada diretamente a partir da sua equação, e (...) o principio fundamental da geometria analítica – a descoberta de que equações indeterminadas em duas incógnitas correspondem a lugares – só aparece no segundo livro, e mesmo então só incidentalmente. (BOYER, 1996: 235)

Para Venturi, o clichê *sistema cartesiano* é anacrônico visto que à *Geometria* "não contém eixos perpendiculares, eixos oblíquos, e nem tão pouco a equação de uma reta. Por mérito o *sistema cartesiano* deveria denominar-se *sistema fermatiano*" (VENTURI, 1949: 18). Mas, acreditamos que tal designação seria anacrônica da mesma forma, pois "Fermat e Descartes desenvolveram uma geometria de ordenadas[137] mais que uma geometria de coordenadas" (URBANEJA, 2007: 221). Dessa forma talvez a designação mais precisa – tal qual aconteceu no desenvolvimento do sistema de coordenadas das grandezas complexas conhecido hoje como *sistema argand-gauss* – seria *sistema cartesiano-fermatiano* o que faria jus as contribuições desses dois matemáticos franceses no desenvolvimento gradativo daquilo que chamamos atualmente de sistema de coordenadas, assim:

---

[137] De acordo com Boyer (2004: 76), Descartes e Fermat não usaram o termo sistema de coordenadas ou mesmo a ideia de dois eixos. Seja como for o sistema de ordenadas de Fermat, como vimos na seção 2.2, baseava-se numa linha horizontal (depois conhecida como abscissa) com um ponto determinado (depois conhecido como origem) sobre ela, no qual eram traçados os sucessivos segmentos de linhas (depois conhecidos como ordenadas), que faziam um ângulo fixo com a linha horizontal. Esses sucessivos segmentos de linha representavam os valores de E em função dos valores de A. Nesse sistema incipiente de coordenadas, "Fermat indicava que comumente este ângulo era tomado como ângulo reto" (BOYER, 2004: 76). Com isso, o sistema incipiente de coordenadas de Fermat, por ter sido construído geralmente através de linhas perpendiculares, superou o sistema de Descartes, que no mais das vezes, se abasteceu geralmente de ângulos oblíquos. No entanto, Boyer (2004: 76) argumenta que Fermat tinha restringido suas operações naquilo que geralmente chamamos de primeiro quadrante, e nesse aspecto Descartes foi um pouco mais longe do que Fermat, já que mesmo que ele tenha trabalhado também com o primeiro quadrante, "ele ocasionalmente fez uso de ordenadas negativas, mas não de abscissas negativas" (BOYER, 2004: 86). Enfim, mais justo seria se a posteridade tivesse considerado a contribuição de ambos e nomeado o que chamamos atualmente de *sistema cartesiano* de sistema *cartesiano-fermatiano*.

> (...) o nome de geometria cartesiana em que se denomina às vezes a geometria analítica não faz justiça a ambos fundadores, inclusive entre os profissionais das matemáticas se desconhece, às vezes, a copaternidade de Fermat, mas foi através da forma cartesiana que este magnífico instrumento prevaleceu e criou raízes na matemática. (URBANEJA, 2003: 131)

Apesar do predomínio da *Geometria* no imaginário coletivo contemporâneo em detrimento da *Introdução*, é indiscutível que tanto Descartes, como Fermat são os patriarcas da geometria analítica visto que ambos conseguiram alcançar o princípio fundamental da geometria analítica em seus trabalhos. Tal princípio afirma que a relação entre as coordenadas dos pontos de uma curva estabelece uma correspondência entre as propriedades algébricas da expressão $f(x, y) = 0$ e as propriedades geométricas da curva associada e vice-versa. Uma vertente desse princípio é encontrada no livro II da *Geometria* expressada da seguinte maneira:

> (...) no que diz respeito a todas as outras propriedades que se podem atribuir às linhas curvas, elas só dependem das grandezas dos ângulos que fazem com algumas outras linhas. (DESCARTES, 2010: 521-522)

Um aspecto inverso do enunciado de Descartes foi expresso por Fermat no inicio da sua *Introdução*, de uma forma bem mais clara:

> Quando numa equação final duas quantidades desconhecidas são encontradas, temos um lugar geométrico, a extremidade de uma delas descrevendo uma linha, reta ou curva. (FERMAT, 1891/1912: 86)

A clareza nas palavras de Fermat é evidente, mas conforme Urbaneja (2007: 222) os seus propósitos eram bem diferentes de Descartes. Este último pretendia reconstruir a geometria clássica, mediante a criação de um método analítico-sintético de resolução para os antigos e novos problemas que ultrapassou definitivamente aquela tradição, ao passo que Fermat, mais afinado com a geometria dos antigos, considerou seu trabalho como uma mera paráfrase algébrica dos *Lugares planos* de Apolônio. Daí fica explicado o fato de Descartes pronunciar o princípio fundamental da geometria analítica de uma forma acidental, tendo em vista que ele estava muito mais interessado na *Geometria* em resolver problemas mediante o seu método inovador, enquanto que Fermat, que expôs tal principio mais claramente na *Introdução*, se pautou principalmente em redigir as suas idéias na forma axiomática de exposição dos *Elementos*, o que pressupõe um certo rigor e preocupação com o leitor, algo que inexistiu nos tratados matemáticos (não nos filosóficos) de Descartes como vimos na seção 2.1.

> É paradoxal observar que foi em grande medida através de Descartes que o mundo aprendeu que equações em duas quantidades incógnitas representam curvas planas, e ainda nem ele nem seus sucessores imediatos mostraram muito interesse neste principio básico. As coordenadas não eram usadas por Descartes (...) para representar as propriedades das figuras (...). Elas eram apenas uma ajuda na solução de problemas de geometria. Seu interesse não era com o lugar dos pontos satisfazendo uma equação dada, mas na construtibilidade desses pontos. Na *Geometria* não há uma única curva traçada diretamente através da sua equação. (BOYER, 2004: 86)

Urbaneja (2007: 222) sustenta que mesmo que o princípio fundamental da geometria analítica esteja mais claro em Fermat, a potência dos métodos algébricos corresponde a Descartes. Mais que isso, Fermat estuda apenas um repertório comum de curvas definidas por equações indeterminadas, tal é o caso dos lugares planos (retas) que representavam equações lineares e os lugares sólidos (cônicas) que representavam as equações quadráticas, ao passo que Descartes sugeriu classes de novas curvas geradas por simples movimentos mecânicos.

Portanto, ambos os autores tiveram as suas contribuições para o desenvolvimento da geometria analítica como uma disciplina própria da matemática. Na *Introdução*, como vimos na seção 2.2, Fermat estava consciente da condição restrita do seu trabalho no âmbito das curvas, mas por uma falta de discernimento sobre o tema decorrente da aura estilística geométrica que pairava na escola analítica ele afirmou na abertura do referido tratado, meio que indecisamente, que o número de curvas era infinito, porém ao longo da sua exposição ele optou – tal como os geômetras gregos – por não investigar sistematicamente os lugares lineares, pois acreditava erroneamente[138] que estes eram redutíveis aos lugares planos e sólidos. Descartes, por outro lado, tinha pouca admiração pelos métodos da geometria dos gregos, e por isso na *Geometria* ele estudou com mais ênfase as curvas de grau superior (lugares lineares) – desde que elas fossem geradas por um movimento contínuo ou por vários movimentos sucessivos, cada um sendo completamente

[138] Devido às condições restritivas impostas pelo seu estilo de pensamento, Fermat não trabalhou com lugares de ordem superior em sua *Introdução*. Com isso, ele só conseguiu se libertar dessas restrições em tratados posteriores relacionados à geometria analítica, mas com aplicação direta a geometria infinitesimal donde ele deduziu diversas curvas de ordem superior e mostrou portanto toda a potência do método analítico da *Introdução* na resolução de problemas de cunho infinitesimal aplicados a tais curvas, as quais se destacam as parábolas generalizadas $y = x^n$, as hipérboles generalizadas $x^n y^m = k$, e a famosa curva $b^3 = x^2 y + b^2 y$, chamada depois de feiticeira de Agnesi, um nome que foge ao padrão encontradiço, devido a um imbróglio linguístico envolvendo os matemáticos Guido Grandi e Maria Gaetana Agnesi no século XVIII. A feiticeira de Agnesi foi uma curva essencial no desenvolvimento da teoria analítica das quantidades finitas e infinitesimais do século XVIII. Para maiores detalhes, ver Eves (1992: 48-49).

determinado pelo outro – pois para ele, algumas dessas curvas possuíam uma conexão algébrica quando construídas com outros instrumentos tão precisos quanto à régua e o compasso. Dessa forma, Descartes ampliou o domínio das curvas admitidas na geometria "e concebeu que o futuro estava no estudo destas curvas [de grau superior] e não tem inconveniente em fixar um mesmo sistema de coordenadas para o estudo simultâneo de diversas curvas" (URBANEJA, 2003: 129, grifo nosso). Na *Introdução* Fermat não só definiu as equações das retas e das cônicas como também as classificou mediante rotações de eixos e demonstrou inclusive "que uma equação indeterminada do segundo grau em duas incognitas é uma cônica, questão que Descartes menciona na resolução do problema de Pappus, mas deixa sua demonstração em certa obscuridade" (URBANEJA, 2003: 129).

Embora Fermat tenha compreendido o modo de construir as curvas mediante equações indeterminadas – uma idéia mais próxima da concepção atual da geometria analítica – deve ser dito que ele não a "compreendeu plenamente, ou era muito modesto para enfatizar, o valor do seu [novo] método como uma ferramenta para matemáticos profissionais" (BOYER, 2004: 103, grifo nosso). Em outras palavras, ele não valorizou a supremacia da sua técnica, tão pouco chegou a explicá-la como um procedimento que pudesse dominar a matemática por inteiro, isto é: um método novo e geral de resolver todos os problemas, como fez Descartes na *Geometria*. Com efeito, podemos constatar tal fato numa carta escrita por Descartes a Mersenne em março de 1636, em que ele anuncia pela primeira vez que seu volume planejado de 1637 – que ficaria conhecido depois como *Discurso do método* – incluiria a *Geometria* e que ele tinha inicialmente intitulado tal volume de: *Projeto de uma ciência universal que pode elevar nossa natureza ao seu mais alto grau de perfeição. Ademais, a Dióptrica, os Meteoros e a Geometria, donde as mais curiosas matérias que o autor pôde eleger, para dar prova da ciência universal que o autor propõe, são explicadas de tal maneira, que ainda aqueles que não tenham estudado possam entendê-las*[139]. De acordo com Sasaki, nesta mesma carta ele escreveu ao reverendo o propósito de ter escrito a *Geometria:* "Na *Geometria*, eu tento dar uma maneira geral de resolver todos os problemas que nunca tinham ainda

[139] Tal comprometimento com a didática que inseriu até mesmo os incautos nesse projeto inovador de reforma do saber, através de um método universal, não se confirmou na *Geometria*, já que ela diferenciava-se completamente dos "outros dois ensaios [Dioptrica e Méteoros] e da introdução aos três ensaios" (SASAKI, 2003: 227). De fato numa carta dirigida a Plempius em três de outubro de 1637 Descartes manifesta que: "a *Geometria* terá um pequeno numero de leitores, pois devem ser pessoas que não somente estão a par de tudo que se sabe em geometria e álgebra, senão que devem ser também esforçados, engenhosos e talentosos" (URBANEJA, 2003: 97). Além do mais, numa carta a Mersenne que provavelmente data dos finais de 1637, Descartes declara estranhamente que foi por meio da *Geometria*, e não dos outros dois ensaios que acompanhavam o volume de 1637, que ele pensava que ele teve maior êxito em provar a superioridade do método universal. Nas suas próprias palavras: "Eu tenho simplesmente tentado persuadir o leitor através da Dióptrica e dos Meteoros que meu método é melhor do que o comum, mas eu afirmo que eu tenho provado isso através da minha *Geometria*" (SASAKI, 2003: 227). Segundo Blas, o método universal desenvolvido por Descartes para descobrir a verdade em todas as ciências foi uma inspiração decorrente da "forma de raciocinar própria da geometria" dos antigos e este método, por sua vez, foi aplicado na própria geometria clássica, ou melhor, nos problemas geométricos que eram resolvidos pelo método algébrico da análise e síntese de Descartes, o que garantiu, portanto "um mútuo e eficaz reforço" (BLAS, 2001: 10).

sido resolvidos" (SASAKI, 2003: 226). O projeto de construção de uma ciência universal que pudesse reformar as disciplinas matemáticas fundamentais remonta a primavera de 1619 quando Descartes começou a acalentar tal projeto que veio a se concretizar gradualmente no transcorrer da sua ampla trajetória intelectual – intercalada por diversas escolas matemáticas – a qual se materializou de forma definitiva na álgebra reformada da *Geometria* de 1637, que apresentava uma linguagem consistente em termos simbólicos e bastante próxima da nossa linguagem atual. Além disso, a *Geometria* propôs um método inovador, baseado nos procedimentos da álgebra dos segmentos de linhas interligados[140] a análise algébrica os quais permitiam "reorganizar e resolver os problemas clássicos algebricamente" (SASAKI, 2003: 228). Tal é o caso do complexo problema de Pappus, dentre outros, que Descartes solucionou não só na sua forma comum – que Fermat sequer resolveu na sua *Introdução* oferecendo apenas um exemplo de aplicação do seu método para os leitores – como nas suas múltiplas formas possíveis.

Quanto ao nosso matemático Fermat, sabemos que o que ele realizou na *Introdução* foi nada mais do que uma mera compilação algébrica, em termos da linguagem de Viète, dos trabalhos de Apolônio retratados na forma axiomática de exposição. Com isso, sua vinculação aos preceitos da escola analítica, tais como a homogeneidade e a linguagem sincopada, limitou consideravelmente o seu trabalho tanto que ele não questionou na redação da *Introdução* nenhum desses preceitos compartilhados pelos analistas, a não ser o método sintético. A notação algébrica não é puramente convencional como pensava Fermat. Na realidade, ela tem uma profunda repercussão conceitual. A linguagem simbólica de Descartes – a qual Fermat tinha desvalorizado – trouxe simplificação, generalidade e flexibilidade, mas essas coisas evidentemente não eram dadas de antemão: eram descobertas concomitantemente à invenção da notação simbólica. A invenção da notação puramente simbólica trouxe clareza conceitual e não seria inesperado se seu inventor (Descartes) se surpreendesse com os ganhos teóricos da sua invenção. Sem dúvida, á álgebra cartesiana, ou melhor, a ciência inteiramente nova – retratada definitivamente na *Geometria* – foi o cálice do qual Descartes se inebriou para executar com sucesso a sua reforma do projeto inteiro do saber que perpassava não só pelas matemáticas, mas pela filosofia e as demais ciências como um todo. Dessa forma, historicamente falando, o sábio de *La Flèche* ficou conhecido não só como um dos criadores da álgebra simbólica, mas também como um pensador que tentou estabelecer uma filosofia singular que conferia importância particular a álgebra e a matematicação da natureza. Foi através dessas

[140] Esta interligação se manifesta na abertura da *Geometria* na qual Descartes declara que "todos os problemas da geometria podem ser facilmente reduzidos a tais termos, não sendo necessário depois senão conhecer o comprimento de algumas linhas retas para construí-los" (DESCARTES, 2010: 491). Para Sasaki (2003: 228) este tipo de declaração aponta para o estabelecimento de um a nova disciplina paradigmática conhecida atualmente como geometria analítica, em outros termos a geometria se serve da análise algébrica como ferramenta. A álgebra do segmento de linhas, por permitir representar o comprimento de certas linhas retas, é o elemento primordial que permite resolver os problemas mediante a abordagem analítica. As palavras "reduzir" e "construir" apontam na visão de Sasaki, para o método dualístico da análise e síntese que são completamente mobilizados nos primeiros dois livros da *Geometria*.

idéias que o nosso filósofo-matemático assentou sua álgebra reformada acima dos interesses escolásticos de forma a instituí-la como fundamento primordial de um novo projeto de saber que visava derrubar o projeto medievalista que vigorava até então. Com isso, a álgebra cartesiana fez parte de uma reflexão filosófica que organizou, sintetizou e relacionou as metodologias e conhecimentos obtidos pelas diversas ciências que compunham o saber humano. No devir histórico, tanto os métodos algébricos de Descartes como o principio fundamental da geometria analítica de Fermat, se mostraram mutuamente satisfatórios para o desenvolvimento da matemática e das demais ciências em geral.

3.2. As vantagens da álgebra de Descartes sobre á de Fermat

Em meio as suas viagens decorrentes do seu status social como um soldado militar, Descartes trafegou por muitos coletivos de pensamento, o que facilitou a sua abertura para outras perspectivas estilísticas de abordagem do conhecimento matemático e com isso ele aperfeiçoava cada vez mais o seu projeto de uma ciência inteiramente nova – tanto em termos teóricos, práticos e filosóficos – que ao ser concluído mediante a sua álgebra reformada na *Geometria* de 1637, tornou-se um paradigma para novas descobertas na ciência moderna e contemporânea.

> O papel central que Descartes representou em formar a tradição da matemática européia moderna pode ser bem compreendido dos fatos que o estilo da matemática contemporânea é basicamente algébrico e que o grau de matematização de uma ciência é tomado ser uma marca do grau a que tem tornado uma ciência verdadeira. (SASAKI, 2003: 1)

Como justificar o papel que a álgebra cartesiana representou para a modernidade e a contemporaneidade tendo em vista que Descartes encerrou as suas relações mais estreitas com a matemática após o ano de 1623[141]? Qual foi o verdadeiro envolvimento do sábio de *La Flèche* com a matemática durante a sua longa carreira intelectual? Qual era sua perspectiva geral em relação a este ramo do saber? Conforme Grossmann (2009: 159-160) Descartes não tinha tanta afeição pela matemática por conta do seu caráter abstrato, tanto que no decorrer da sua vasta carreira intelectual seus feitos em matemática tinham um valor pouco significativo quando comparados aos da filosofia. Tal insatisfação de Descartes com a matemática pode ser comprovada numa carta dirigida a Mersenne em 15 de abril de 1630, na qual ele escreveu: "Eu estou tão cansado das matemáticas e no momento penso tão pouco sobre elas" (GROSSMANN, 2009: 160). Por outro lado, Sasaki, nos informa que Descartes se registrou na universidade de Leiden em 27 de junho de 1630, tendo assinado o seu nome como: "René du Perron Descartes, estudante da matemática, 33 anos de idade" (SASAKI, 2003: 206). Ou seja, ao se inscrever na universidade de Leiden Descartes "deixou uma indicação [por escrito] que ele considerava-se ser um estudante da matemática" (SASAKI, 2003: 206, grifo nosso). Embora neste ano ele tivesse admitido numa carta a Mersenne – datada de 15 de abril de 1630 – que estava cansado das matemáticas, "ele nunca completamente perdeu interesse em

[141] Tomando como base a carta de Descartes a Mersenne datada de 31 de março de 1638, Descartes tinha realizado os seus estudos matemáticos com mais dedicação e intensidade antes de 1623. Naquela carta o sábio de *La Flèche* tinha dito a Mersenne: "Você sabe que faz mais do que 15 anos que tem já se passado desde que eu declarei que desconsideraria a geometria e nunca trataria de resolver qualquer problema a menos que fosse a pedido de algum amigo" (SASAKI, 2003: 3).

resolver problemas matemáticos, especialmente se fosse um pedido sincero por parte de seus amigos” (SASAKI, 2003: 206) tal seria o caso do desafio de Golius em 1631 que motivou a sua resolução magistral do complexo problema de Pappus mediante seu método algébrico inovador. No entanto, entre as redações da velha *Álgebra* e das *Regras* – que muito provavelmente não se estenderam para além de 1628 – Sasaki (2003: 205) afirma que o interesse principal de Descartes tinha mudado da matemática pura para filosofia natural e metafísica. De fato, durante os anos de 1630 na Holanda, Descartes redigiu dois tratados[142] mais voltados para a filosofia natural, por isso ao se registrar na universidade de Leiden em 1630, era natural que ele tencionasse estudar não só matemática com o professor Jacobus Golius, “mas também a astronomia com Martinus Hortensius” (SASAKI, 2003: 206). Dessa forma, após a publicação da *Geometria*, um dos apêndices do *Discurso* de 1637, Grossman nos informa que em 12 de setembro de 1638, Descartes tinha escrito uma carta a Mersenne com o intuito de dar um basta em seus estudos matemáticos: “Não espere alguma coisa mais de mim em geometria, pois você sabe que por um longo tempo eu tenho estado relutante em continuar a prática dela” (GROSSMANN, 2009: 160). Nesses quinze anos de estudos matemáticos com uma dedicação moderada, Descartes foi gradativamente tomando a consciência da inutilidade do estudo da geometria abstrata, cujos problemas exercitavam apenas a mente ao passo que ele preferia estudar problemas com fins práticos, isto é: “cultivar outro tipo de geometria que ataca o problema de explicar os fenômenos da natureza” (DESCARTES apud GROSSMANN, 2009: 160).

A preferência de Descartes em relação ao estudo da geometria estava em conformidade com a sua perspectiva geral sobre a matemática, particularmente da álgebra que não podia ser vista “como uma ciência separada” que “perde-se em problemas abstratos de seu campo especifico” (GROSSMANN, 2009: 160). Nesse sentido, Grossmann aponta as diferenças da perspectiva algébrica cartesiana para aquela dos discípulos de Viète, para Descartes á álgebra não pode ser:

> (...) uma ciência tradicional particular com um objeto fixo, limitado, separado (...) mas um método geral de investigação, que graças ao seu caráter geral, torna-se aplicável sempre a novos objetos e problemas, que nem Viète nem seus discípulos, tinham sempre considerado. Em suma, a matemática universal de Descartes é uma extensão dos métodos geométricos para todos os problemas da mecânica, física, biologia e psico-fisiologia, e como um método geral, a álgebra constitui o núcleo da ciência universal e é

[142] Tais tratados eram *O mundo* ou *Tratado da luz*, “a primeira tentativa de construir um universo físico inteiro sobre fundamentos mecânicos” (MAHONEY apud SASAKI, 2003: 205) e a *Dióptrica*, um dos três ensaios do volume de 1637, “que tinha explorado a teoria das seções cônicas que foi extraída em parte no *Diário* de Beeckman em 1628-1629” (SASAKI, 2003: 205).

> a grande descoberta de Descartes a qual ele aponta com orgulho especial. (GROSSMANN, 2009: 161)

Embora Fermat fosse um matemático de talento maciço, ele estava limitado aos pressupostos da escola analítica fundados na geometria abstrata dos gregos. Descartes, por sua vez, tinha uma cultura matemática mais alargada do que a de Fermat, e dentre os coletivos de pensamento que ele circulou talvez o mais significativo fosse à escola dos matemáticos aplicados o qual abriu a sua mente inquietante para a importância da matemática como uma ferramenta de aplicação aos problemas sociais candentes da época mediante o emprego de instrumentos mecânicos, para muito além da régua não graduada e o compasso, que interviam favoravelmente nas necessidades tecnológicas que a sociedade impunha. Por essa razão, vemos um grande diferencial de Descartes em relação à Fermat, pois o primeiro estava muito mais inserido no contexto social e tecnológico da época enquanto que o segundo permaneceu arraigado à escola dos analistas cujos objetivos eram essencialmente teóricos do ponto de vista do matemático puro. Dessa forma, o uso de instrumentos matemáticos por parte de Descartes na *Geometria*, em especial o compasso mesolábio – que visava ampliar o território de curvas permitidas em geometria – mostra, de acordo com a interpretação de Sasaki (2003: 219), que ele condenou o uso de instrumentos matemáticos muito menos que os antigos, daí percebemos um dos traços da vinculação do sábio de *La Flèche* com a escola dos matemáticos aplicados – conforme a análise descritiva apresentada na primeira nota explicativa da seção 2.1. Sasaki aponta que tal atitude quanto ao uso de instrumentos, muito provavelmente foi um reflexo "da sua inclinação geral com respeito aos aspectos práticos e utilitários do conhecimento" (SASAKI, 2003: 219). Portanto, se considerarmos o interesse do Descartes juvenil nos *Pensamentos Privados* por instrumentos mecânicos que estivessem a serviço da sociedade e da própria matemática, temos um indicativo de que a *Geometria* do Descartes maduro – produto da sua longa trajetória intelectual em busca de uma ciência universal – juntamente com os outros apêndices que acompanhavam o volume filosófico de 1637 ecoavam com toda a certeza as preocupações práticas da escola dos matemáticos aplicados.

Na realidade, tais preocupações dominavam a atmosfera social[143] da época como um todo, uma das grandes influências sobre Descartes, dentre tantas outras, foi Galileu a quem daremos mais

[143] Conforme explica Grossmann no seu brilhante artigo *Descartes and the Social Origins of the Mechanistic Concept of the World*, tudo começou com os avanços da indústria – sobretudo na Inglaterra e nos países europeus de maior porte econômico – impulsionados pela invenção de máquinas proficientes, que à medida que eram postas para trabalhar, reduziam drasticamente o papel dos artesãos especialistas que quando comparado com a velocidade destas máquinas, apresentavam um nível muito inferior de produtividade. Dessa forma, a especialidade no campo industrial foi perdendo espaço e pensadores ingleses como Bacon, Thomas More, como tantos outros, tiveram a inspiração de transportar essas evoluções da indústria para o campo intelectual. A ideia central desses pensadores, que pairava no imaginário coletivo, consistiu em que a ciência deveria estar fundamentada na criação de um método sistemático para direcionar as suas atividades, pois dessa forma tanto um incauto quanto um letrado poderiam trabalhar intelectualmente a favor do avanço

ênfase por se tratar de um membro de destaque da escola dos matemáticos aplicados. De acordo com Grossmann (2009: 157), bem antes da publicação do *Discurso do método*, Galileu, tinha mostrado em seu *Tratado sobre mecânica* – primeiramente publicado em Paris em 1634 traduzido do italiano por Mersenne – que mediante a análise das máquinas ele conseguiu elaborar conceitos e princípios mecânicos infalíveis para a explicação da física e do universo. Vimos na seção 2.2 que Descartes e Galileu tinha algumas divergências dentro da abordagem que submeteram as suas álgebras dos compassos, mas o seus estilos de pensamento eram semelhantes em certos aspectos. Grossmann dá a entender, que a circulação destas idéias referidas de Galileu – provavelmente mediante a publicação traduzida e comentada por Mersenne do seu *Tratado sobre mecânica* – impactou Descartes, de alguma forma, o que acarretou mudanças em seu pensamento epistemológico:

> (...) a simples comunicação de um saber não é, de maneira alguma, comparável ao deslocamento de um corpo rígido no espaço euclidiano: nunca acontece sem transformação, mas sempre com uma modificação de acordo com determinado estilo; no caso intracoletivo, com o fortalecimento; no caso intercoletivo, com uma mudança fundamental. (FLECK, 2009: 161)

Dessa forma, ao entrar em contato com o pensamento de Galileu, seja através desse manual do engenheiro italiano – traduzido por Mersenne em 1634 – como sugere Grossmann, seja através de comunicações com membros da escola dos matemáticos aplicados, no próprio colégio de La Fléche e/ou após a sua saída do colégio, Descartes se defrontou, muito provavelmente, com estudos bem aparelhados em mecânica, o que fizeram com que ele esboçasse o seu *Tratado sobre mecânica ou uma explicação dos motores com a ajuda dos quais uma carga muita pesada pode ser erguida com uma força pequena* – repassado a Huygens numa carta datada de cinco de outubro de 1637 – em que Grossmann observa os mesmos princípios mecânicos de Galileu sendo estudados e derivados das seis maquinas mais simples: "a roldana, o plano inclinado, a cunha, o torno mecânico, o parafuso e a alavanca" e ainda uma redução de "todas as máquinas, incluindo as máquinas mais complicadas, para o plano inclinado como a forma mecânica básica mais elementar" (GROSSMANN, 2009: 158). Levando em conta que os estilos de pensamento de Descartes e

---

gradual da humanidade, bastando que eles apenas aplicassem as regras desse método, da mesma forma que as máquinas abriram espaço não só para o especialista, mas para o alejado, a mulher e qualquer outro que podia operar as máquinas com comandos simples sem muita necessidade de formação técnica. Essas ideias terão profunda repercussão no pensamento filosófico de Descartes, em especial no *Discurso* de 1637 quando ele apresenta a ideia de uma ciência universal cujo método de funcionamento baseava nas propriedades algorítmicas da sua álgebra simbólica que quando aplicada na resolução dos problemas de qualquer campo do conhecimento, a velocidade da descoberta dos resultados era comparada com a operacionalidade de uma máquina industrial.

Galileu eram distintos, mesmo que tivessem certas semelhanças, o primeiro era apenas um engenheiro especialista, o segundo era um erudito em muitos campos do saber, tal circulação de pensamento se deu na esfera intercoletiva, e por isso com base na epistemologia de Fleck a tal mudança fundamental, que pode apresentar-se em três sentidos distintos "de pequena mudança matizada, passando por mudança completa de sentido, até a aniquilação de qualquer sentido" (FLECK, 2010: 161), ocorreu no pensamento de Descartes, digamos que no segundo sentido, donde ele passa a apresentar – lentamente de forma gradativa e não repentina ou acidental – certa disposição em dar uma interpreção mecânica para todos os fenômenos da natureza, incluindo os fenômenos físicos, orgânicos e psíquicos. Com isso, todos os trabalhos de Descartes possuíam uma carga de princípios mecânicos, e daí Grossmann (2009: 158) considera que Descartes também aplicou os mesmos princípios mecânicos na elaboração das regras de manipulação da sua álgebra simbólica: o instrumento científico primordial na consitutição do seu método universal. Dessa forma, esta foi à marca principal da álgebra cartesiana, que pode ser explicada – como enfatizamos na última hipótese para o problema da nossa investigação – em razão da sua afinidade com as tendências gerais da sua época.

Para compreender as reais vantagens do método universal de Descartes, Grossmann (2009: 176) investigou os debates matemáticos travados entre ele e seus oponentes no círculo de Mersenne, e verificou que aquilo que estava realmente em jogo era um confronto de técnicas de resolução de problemas. Dessa forma, mesmo que os rivais de Descartes fossem capazes de resolver os problemas envolvidos nesses debates, eles se serviam de "uma técnica matemática atrasada, lenta e artesã, enquanto que Descartes usou uma técnica rápida, superior, comparável à ação e velocidade de uma máquina" (GROSSMANN, 2009: 176). Com o objetivo de explicar o fundo da supremacia técnica de Descartes sobre seus oponentes, Grossmann considera tanto o impacto positivo das máquinas na produção industrial, como também a predisposição dos cientistas "em usar métodos e invenções, ou meios auxiliares especiais para ganhar à produção intelectual as mesmas vantagens que as máquinas garantiam no campo da produção industrial" (GROSSMANN, 2009: 177) e chama a atenção para a participação de Descartes no contexto social e tecnológico da época, como um construtor de máquinas de vasta experiência. O projeto de construção de uma máquina que pudesse polir e cortar espelhos, com perfeição acurada, remonta ao ano de 1629 quando Descartes começou a alimentar[144] tal projeto que veio a se materializar gradativamente no decorrer da sua vasta

[144] A primeira experiência bem-sucedida quanto à invenção de máquinas para polimento de espelhos remonta ao ano de 1629, quando numa correspondência com Ferrier, um construtor de instrumentos científicos, Descartes descreve que a sua invenção estava destinada "não só para cortar espelhos, mas também para cortar chapas de ferro ou aço" e que a duração dos cortes dos espelhos efetuados por sua máquina não passavam de "um quarto de uma hora, enquanto que anteriormente um longo tempo era exigido" (GROSSMANN, 2009: 178). Conforme as discussões epistolares entre Descartes e Ferrier, analisadas por Grossmann (2009: 178), este trabalho preliminar de Descartes não era suficiente para cortar espelhos precisamente no formato hiperbólico, e já naquela época ele já compartilhava com Ferrier as

experiência como um construtor de máquinas, repleta de percalços e conquistas, a qual se concretizou definitivamente na *Dióptrica* de 1637 – um dos três apêndices que acompanhavam o *Discurso* – donde Descartes discutiu os detalhes técnicos da construção de uma máquina que possibilitava o desenho "de hipérboles em uma braçada tal qual se desenha círculos com um compasso" (DESCARTES apud GROSSMANN, 2009: 178).

> A máquina de cortar espelhos de Descartes (...) executava rapidamente e com precisão o trabalho que anteriormente era realizado, com muita dificuldade, pelas mãos [dos artesãos especializados que raramente obtinham um resultado satisfatório], e por conta da simplicidade da sua operação, não exigiu qualquer esforço ou treinamento por parte de seus operários; a máquina cartesiana trabalhava automaticamente e por conta disso era acessível a todos. (GROSSMANN, 2009: 178, grifo nosso)

Grossmann (2009: 179) se surpreende ao verificar que as propriedades das máquinas de Descartes eram idênticas às que ele reiteradamente insistiu com seus adversários como sendo as vantagens do seu método algébrico[145]. Seja como for, os adversários de Descartes, mesmo não usufruindo da sua álgebra simbólica, conseguiam mesmo assim resolver todos os problemas propostos a eles por Descartes, mas o filósofo "criticou o atraso dos seus métodos em comparação com a facilidade e rapidez com a qual as soluções dos problemas podiam ser descobertas com a ajuda da sua análise algébrica assim como a facilidade com a qual esta análise podia ser manipulada por alguém, incluindo aqueles que não eram especialmente treinados" (GROSSMANN, 2009: 180).

---

dificuldades de executar tal empreitada com as mãos. Foi numa série de cartas trocadas com Hyugens entre 1635 e 1636, também analisadas por Grossmann (2009: 177), que Descartes foi finalmente levado a perceber a possibilidade de construir uma máquina para tal fim. A princípio, Descartes e Huygens buscavam fincar um desenho de uma hipérbole num espelho para então executar a construção de uma lente hiperbólica, mas as suas tentativas raramente davam certo, até que Descartes em 13 de julho de 1636 relatou a Huygens, que as suas lentes – as quais tinham sido enviadas por Huygens a Descartes numa segunda tentativa do físico-matemático holandês de recorte conforme o desenho de uma hipérbole – estavam defeituosas, a ponto de ele verificar muitas irregularidades infinitamente pequenas na sua superfície de maneira que ele avaliou ainda as lentes de Huygens como grossas demais para terem sido cortadas corretamente conforme o desenho de uma hipérbole. Com isso, Descartes suspeitou que as lentes não foram construídas sobre um torno mecânico, pois a superfície delas não eram regulares, tão pouco apresentavam um formato circular, o que o levou a se convencer de que não era mesmo possível construir um espelho no formato hiperbólico sem o uso de máquinas, tendo a partir daí decidido realizar tal propósito.

[145] Grossmann sustenta que o método algébrico de Descartes estava inserido num contexto ainda mais amplo do que aquele das máquinas e para nos explicar esta questão ele considera as tendências do desenvolvimento industrial que começavam a se manifestar na época de Descartes, a saber: a divisão entre trabalho intelectual e trabalho prático, que surgiu inicialmente na Arquitetura e se alastrou para outros ramos industriais. A título de exemplo, ele comenta sobre o trabalho intelectual dos arquitetos que esboçavam os planos das catedrais medievais com o auxilio da mecânica e dos cálculos teóricos da matemática, e contrasta com o trabalho prático das "pessoas encarregadas com a execução das construções" (GROSSMANN, 2009: 178, grifo nosso). Descartes faz menção a esses processos de trabalho e suas respectivas repercussões em sua analise algébrica, numa carta enviada a Mersenne em 31 de março de 1638: "Mas o que os confunde [os oponentes de Descartes] é que eu construir minhas regras como os arquitetos que constroem edifícios, apenas prescrevendo o que deve ser feito e deixando o trabalho manual para os carpinteiros e pedreiros" (GROSSMANN, 2009: 178, grifo nosso).

Dessa forma, as vantagens da álgebra cartesiana podem ser explicadas em função da sua base mecânica sólida fundada em regras fixas que podiam ser mecanicamente aplicadas pelos outros, em conformidade aos mecanismos operacionais das máquinas, que vigoravam na época de Descartes, conforme explica Grossmann:

> (...) as vantagens da álgebra cartesiana em relação ao (...) procedimento [de cunho artesão aplicado pelos seus oponentes] devem ser compreendidas sobre o modelo das máquinas em sua relação ao trabalho manual. Mediante a automatização do procedimento algébrico, isto é, pela aplicabilidade mecânica de algumas regras fixas, o trabalho intelectual estava a ser reduzido para um mínimo necessário, e assim o procedimento integral simplificado e acelerado, e tornado acessível a todos. Podia também ser aplicada a todos os ramos da ciência, assim a universalidade do método estava assegurada, e não estava amarrada a qualquer campo especifico. (GROSSMANN, 2009: 181, grifo nosso)

No século XVI e no inicio do XVII a técnica tinha êxito nos esforços envidados pelos matemáticos aplicados para construir com perfeição todo tipo de máquina para vários propósitos e fins. Dessa forma, não apenas as grandes máquinas – que revolucionaram a produção industrial – influenciaram o pensamento matemático de Descartes, mas também as invenções menores, por exemplo, os instrumentos matemáticos ou mecânicos usados pelos matemáticos aplicados em seu trabalho profissional. Nos *Pensamentos privados*, por exemplo, o jovem Descartes faz referência a alguns desses instrumentos:

> Eu vi um instrumento sutil para transferir todas as imagens: consiste em uma base com um compasso de duas cabeças. (...) Outro [instrumento] é também para pintar todos os relógios, que eu posso inventar para mim mesmo. O terceiro é para medir ângulos sólidos. O quarto é de prata para medir planos e imagens. O outro mais maravilhoso instrumento é para transferir imagens. Outro é afixado para uma tíbia de um orador para medir momentos. Outro é para desenvolver artilharia de guerras. (SASAKI, 2003: 124)

Naturalmente, o caráter mecânico da álgebra cartesiana – assentado por Descartes no modelo das máquinas – é uma construção histórica inerente às próprias regras da álgebra construídas gradualmente desde a idade média, como vimos na seção 1.2, quando os algarismos hindu-arábicos, aliados a notação posicional babilônica, permitiam a simplificação dos cálculos algébricos sincopados de Diofanto e o desenvolvimento de regras para estes as quais impulsionaram a substituição posterior de construções geométricas por instrumentos mecânicos. De acordo com Grossmann (2009: 182), foi no século XVI e no inicio do XVII que esse longo processo histórico se materializou de forma substancial em razão dos avanços da economia monetária capitalista o que fez com que a prática do cálculo – antes confinada ao clero e aos mercadores na época medieval – fosse cultivada em todas as classes sociais. Com isso, a necessidade de efetuar cálculos com números grandes tinha aumentado e nesse aspecto as considerações trigonométricas tinham um papel fundamental. A invenção dos logaritmos por Napier em 1614 e a invenção da régua de cálculo por Delamain em 1630 estavam ligadas de maneira profunda, na opinião de Grossmann (2009: 182-183), com os esforços dos matemáticos seiscentistas de inventar instrumentos matemáticos ou mecânicos que facilitavam e aceleravam os cálculos com números grandes.

> A reforma da álgebra por Descartes e sua tendência fundamental em direção à automatização, simplificação e aceleração dos procedimentos matemáticos, estavam assim em completo acordo com as aspirações da sua época. Entretanto, enquanto os (...) inovadores (tais como Napier e Delamain) empenharam-se em simplificar e acelerar operações matemáticas por meios mecânicos externos. Descartes tentou realizar o mesmo objetivo por simplificar e automatizar o processo intelectual relevante em si mesmo para assim tornar as operações algébricas acessíveis a todas as pessoas inteligentes, bem como para o homem comum. (GROSSMANN, 2009: 183)

Nessa passagem, Grossmann desconsidera alguns elementos importantes, que atravessaram a ampla carreira matemática de Descartes, analisada historicamente por Sasaki desde o ingresso do então adolescente de La Haye no colégio jesuíta de *La Flèche* em 1607. Como vimos na seção 2.2, quatro anos após o término da sua formação primária e secundária em *La Flèche* o jovem francês redigiu provavelmente entre 1619 e 1621 os *Pensamentos privados*, um reflexo dos seus contatos com a escola dos matemáticos aplicados a qual Napier e Delamain fizeram parte. No tratado referido Descartes explicou os detalhes técnicos para a construção de compassos a fim de simplificar os cálculos matemáticos. É importante frisar que tais compassos foram "inventados para construir a enésima potência x^n para uma quantidade arbitrariamente dada x e, portanto, tinham uma relação íntima com o plano de Descartes para reformar a álgebra" (SASAKI, 2003: 103). Dessa forma a reforma da álgebra por parte de Descartes foi fruto de uma ampla trajetória intelectual que remonta a primavera de 1619, cujo clímax só foi atingido em 1637 com a definitiva reforma da álgebra na *Geometria*.

Por se tratar de um historiador da ciência, de orientação marxista, Grossmann, ao analisar a carreira intelectual de Descartes, dá mais ênfase aos aspectos sincrônicos ligados a revolução cientifica do que os diacrônicos ligados as escolas matemáticas seiscentistas, e por isso ele desconsidera fatos importantes que influenciaram o pensamento matemático de Descartes, especialmente quanto ao último aspecto. Fleck sustenta que a “experiência especificamente científica decorre de condições particulares, histórica e socialmente dadas” (FLECK, 2003: 92). Por fazer parte da escola dos matemáticos aplicados era natural que Descartes, buscasse a reforma da álgebra inicialmente conforme as condições particulares, determinadas pelo estilo de pensamento desta tradição matemática, esse fato é desconsiderado – ou no mínimo analisado superficialmente – por Grossmann em função do seu recorte temporal que não circunscreveu a carreira intelectual de Descartes por inteiro[146]. As influências de natureza cultural, que repercutiram positivamente no pensamento de Descartes, são rejeitadas por Grossmann, pois ele foca apenas nas influências[147] sociais vinculadas aos avanços tecnológicos da revolução cientifica. Sasaki, por outro lado, não despreza as influências decorrentes das ideias exteriores a matemática que impactaram o pensamento de Descartes, mesmo assim ele não aborda a revolução cientifica num âmbito geral. A corrente historiográfica de cada um dos autores influenciou obviamente as suas leituras particulares sobre o pensamento matemático de Descartes. Isso pode ser constatado, em ultima análise, através do levantamento das diferentes opiniões desses autores sobre os trabalhos de Lúlio e os de Descartes quando cotejados entre si.

Para Grossmann, embora os trabalhos de Lúlio tivessem títulos promissores ligados a uma perspectiva holística da ciência, eles não foram redigidos para formular um método universal para o conhecimento e tão pouco, tinham a intenção de revelar as chaves para as outras ciências. Dessa forma a proposta de Lúlio era exatamente o oposto do que Descartes propunha em seu projeto de reforma do saber, de forma que só há uma semelhança entre seus trabalhos, qual seja a que ambos foram redigidos “não para os poucos instruídos, mas para a massa das pessoas” (GROSSMANN, 2009: 174). Grossmann (2009: 174-175) explica que na *Ars generalis*, Lúlio se propôs a defender a fé cristã contra o islamismo, especialmente contra a filosofia influente de Averroes, tendo como público alvo as massas populares – residentes na Espanha, nas ilhas baleares e no norte da África –

---

[146] Grossmann tinha certo conhecimento da carreira matemática de Descartes, mas ele não analisa profundamente as suas realizações com instrumentos mecânicos antes de 1628, tendo apenas afirmado nas conclusões do seu brilhante artigo que por toda a sua carreira matemática, Descartes tinha demonstrado um forte interesse em máquinas e problemas tecnológicos, uma consequência da sua formação em *La Flèche* donde tinha recebido treinamento técnico como oficial de artilharia e entre outros assuntos relacionados com a aplicação das maquinas. Grossmann ressalta também que através das anotações que Descartes “escreveu em sua juventude, *Pensamentos privados*, 1619” nós sabemos que, “ao receber o relatório de uma invenção engenhosa ele se perguntou se sem ler nada sobre o assunto, ele também não poderia inventar algo parecido; que, em sua juventude, ele experimentou com pequeno autômatos construídos por ele” (GROSSMANN, 2009: 217). Mas ao longo do seu artigo Grossmann não aprofunda nesse manuscrito da juventude de Descartes, o qual Sasaki mostrou ser muito importante para compreensão da dinâmica histórica das relações entre as diferentes ideias desenvolvidas por Descartes para reforma da álgebra no decurso da sua ampla trajetória intelectual.

[147] A prova disso é que ao criticar os historiadores da matemática que “geralmente apresentavam razões lógicas e internas para os avanços da síntese da álgebra e geometria” Grossmann ressalta que as razões desses historiadores estavam “totalmente além das considerações sociais e tecnológicas” (GROSSMANN, 2003: 185).

que não tinham discernimento de noções abstratas para se defenderem dos ataques religiosos dos seguidores do islamismo. Lúlio então tinha criado um instrumento[148] de defesa cristã para estes ataques o qual se baseava numa seção prática, inclusa na *Ars generalis*, que dava sugestões para responder um número de questões metafísicas ligadas às estas noções abstratas. Como o interesse de Lúlio estava concentrado na natureza metafísica das questões que ele tratava, Grossman observa que as ideias do monge espanhol "estavam em contraste nítido com as aspirações de Descartes, que não escreveu um catecismo com respostas prontas, mas em vez disso, esperava dar a cada pessoa inteligente, mesmo que não fosse educada, um método para descobrir verdades cientificas de forma independente" (GROSSMANN, 2009: 176).

De fato, ao longo da sua argumentação[149] Grossmann enfatiza apenas as diferenças entre as concepções do monge espanhol e as do filósofo-matemático francês. Dessa forma, mesmo quando Grossmann se depara com similaridades claras entre os projetos de Lúlio e os de Descartes, ele não comenta estas similaridades em razão da sua associação a uma escola marxista de se fazer história da ciência, na qual apenas os instrumentos simbólicos ligados á revolução cientifica e que detinham caráter tecnológico e, sobretudo material são enfatizados. Fleck observa justamente que "uma atribuição especifica de valores e uma intolerância característica" constituem "traços comuns de qualquer comunidade fechada" (FLECK, 2010: 156). Dessa forma, seria improvável que um instrumento técnico destinado a explicar elementos metafísicos sem um rigor racional fosse considerado seriamente por Grossmann em razão da sua tradição historiográfica. Seja como for, dentre estas similaridades descartadas por ele, mencionaremos aqui apenas a exposição de Lúlio na *Ars generalis* a qual se pautava numa "ajuda mnemotécnica para as pessoas" de sorte que mediante tal "construção técnica Lúlio tentou relatar as questões concretas que eram respondidas para (...) as noções abstratas, e assim simbolizar o conteúdo dessas noções" (GROSSMANN, 2009: 175). Como Grossmann (2009: 221) considera que "toda construção técnica é também uma construção intelectual" seria de esperar que ele fizesse uma analogia entre a álgebra universal fundada no modelo das máquinas e a seção prática de Lúlio que se configurou como uma construção técnica. Além disso, os símbolos usados por Lúlio para formular as perguntas baseadas nas noções abstratas poderiam ser igualmente comparados com o simbolismo de Descartes nas *Regras*. Como veremos adiante, Sasaki analisou as relações entre os pensamentos de Lúlio e Descartes de uma forma mais

[148] Segundo Grossmann (2009: 175) o instrumento criado por Lúlio tinha a virtude de facilitar associação de noções abstratas difíceis de reter – para as massas populares – a outras mais simples mediante perguntas concretas formuladas em termos simbólicos ligados as estas noções. Para tanto, Lúlio se serviu de seis círculos concêntricos demarcados por seis regiões internas que eram então preenchidas cada uma com nove letras do alfabeto. Daí, a partir da rotação de um dos círculos em relação aos demais, era possível fornecer permutações entre as perguntas formuladas simbolicamente e certas proposições ou respostas, o que auxiliava as massas populares a manipular várias noções abstratas, tais como justiça, glória, eternidade e tantas outras.

[149] Tal argumentação foi desenvolvida num apêndice do seu artigo – com cerca de pouco mais de duas paginas – intitulado *On Raymond Lully*, o que por si só já mostra certa depreciação de Grossmann para com os trabalhos de Lúlio.

ampla, tanto a nível histórico devido a sua descrição precisa da carreira matemática de Descartes, como também a nível social ao estudar as repercussões da arte luliana no cenário intelectual do século XVI. Dessa forma, Grossmann fracassou em analisar a questão com todos os pormenores, e por conta disso ele descartou estas duas similaridades explicadas acima, que foram prontamente consideradas[150] por Sasaki de forma concludente.

Segundo Sasaki (2003: 105) na parte introdutória da carta de 26 de março de 1619, Descartes disse a Beeckman, que ele estava planejando a criação de uma ciência inteiramente nova que divergia da *Ars brevis* de Lúlio, mas no decorrer da carta ele não justifica a sua opinião contrária à arte luliana. Foi apenas após pouco mais de um mês, quando Descartes escreveu outra carta a Beeckman, em 29 de Abril de 1619, que ele justificou a sua opinião sobre o lulianismo. Sasaki (2003: 105) relata que nesta carta, o jovem francês faz referência a um encontro tido com um homem velho, á exatos três dias, com quem ele pode discutir sobre a *Ars parva* de Lúlio – cujo conteúdo era idêntico ao da *Ars brevis*. O tal homen velho se gabava de poder discorrer sobre qualquer assunto durante horas seguidas, mas ao ser interrogado por Descartes sobre os fundamentos lógicos da sua arte, ele tinha respondido “que nem nos manuais de Lúlio, nem nos de Agrippa, estavam reveladas as chaves para alcançar os segredos daquela arte” (SASAKI, 2003: 105). Mas, Descartes queria a todo custo conhecer mais profundamente a arte luliana, pois ele pressentiu que talvez ela pudesse conter algo de engenhoso. Com esse pressentimento em mente, o jovem francês “perguntou a Beckman em Middelburg se alguém possuía uma cópia do comentário de Agrippa da *Ars brevis* de Lúlio” (SASAKI, 2003: 105). Segundo Sasaki (2003: 105-106) a resposta de Beeckman veio numa carta datada de 6 de maio de 1619 na qual ele explicou ao jovem francês que as tais chaves necessárias para a compreensão da arte luliana não foram apresentadas por Agripa em seu comentário da *Ars brevis* de Lúlio, e assim a esperança de Descartes de encontrar estas chaves foi frustrada[151].

Sasaki (2003: 107) considera que Descartes estava, de certa forma, envolvido por uma vontade de compreender os fundamentos da arte luliana, mesmo que tivesse uma opinião contrária para com ela, defendida durante toda a sua carreira. Dessa forma, os contatos de Descartes com a arte luliana o influenciaram provavelmente em dois aspectos. O primeiro deles diz respeito à importância do simbolismo[152] para a reforma da álgebra nas *Regras*. O segundo aspecto diz respeito ao fato que a

[150] Como veremos, a primeira similaridade foi abordada por Sasaki dentro de uma perspectiva menos técnica e mais pansofista em razão da sua adesão a uma corrente historiográfica de cunho social, pautada em kunh e não em Marx.
[151] De qualquer forma, Beeckman tinha explicado para o jovem francês que a ideia essencial da arte luliana “é dividir sucessivamente tudo que existe em entidades elementares e combina-las com letras do alfabeto que estão localizadas em figuras geométricas, tais como vários círculos concêntricos. Combinando memórias com os símbolos das letras por imaginação, nós podemos ser capazes de falar durante horas praticamente infinitas” (SASAKI, 2003: 106).
[152] A própria *Álgebra* de Clavius a qual Descartes foi instruído no colégio de *Lá Fléche,* apresentava símbolos cóssicos, os quais foram tomados emprestados por Clavius da obra de Michael Stifel, um *Rechenmeister* alemão que atribuía uma

arte luliana pode ter sido significativa como um símbolo pansofista para a unificação das disciplinas matemáticas fundamentais, e por fim de todos os ramos do conhecimento em geral. Segundo Sasaki (2003: 108), no imaginário coletivo do século XVI a arte luliana tinha uma representação significativa como um ideal simbólico de unificação de todas as ciências. Dessa forma, mesmo que Descartes tivesse acalentado na primavera de 1619 a criação de uma ciência inteiramente nova totalmente diferente da arte luliana, havia uma similaridade entre os dois projetos em relação ao caráter de ciência das ciências, de modo que "foi á intenção de Descartes que este caráter deveria contribuir para unificação planejada da aritmética e a geometria por meio dos seus compassos recém-inventados e sua álgebra reformada" (SASAKI, 2003: 108).

Dessa forma, ao circular intercoleticamente pela atmosfera intelectual dos matemáticos místicos mediante a arte luliana, Descartes se viu influenciado em transportar as idéias pseudocientíficas de Lúlio para um tratamento mais rigoroso. Como vimos na seção 2.2, a evolução do seu pensamento quanto à possibilidade de uma ciência das ciências se concretizou de forma mais nítida nas *Regras*, em que a álgebra passou a incorporar tanto um simbolismo inovador como também se tornou uma referência para a criação de um método natural de reforma do sistema geral do saber. Tomando em consideração a monografia de Sasaki à universalidade do método cartesiano pode também ser questionada, não em potência, mas pelo menos em ato, permita-nos apresentar algumas reflexões de Grossmann a respeito:

> A vantagem adicional do procedimento algébrico é que ele não esta amarrado a um campo especifico especial, mas é aplicável geralmente aos mais variados campos e problemas. Em sua disputa com Fermat sobre tangentes, Descartes tinha reprovado Fermat, pois a *sua pretensa regra não é universal, como parece para ele (...) pois não pode ser aplicada a este exemplo*[153] *nem aos outros exemplos mais difíceis; enquanto*

importância particular ao simbolismo algébrico, tanto que "durante certo tempo Stifel se preocupou com a palavra cálculo, por meio da qual ele tentou interpretar a bíblia de maneira cabalística" (SASAKI, 2003: 107).

[153] O exemplo a qual descartes faz menção é a curva $x^3 + y^3 = axy$, conhecida atualmente como folium de Descartes. Com esta curva Descartes quis oferecer um exemplo segundo o qual o método de tangentes de Fermat não se aplicava. Mas antes de explicarmos como Fermat reverteu á situação, vale lembrar que como vimos na seção 2.1 Fermat tinha uma forma muito peculiar de comunicar seus descobrimentos aos matemáticos parisienses mediante problemas, aos quais ele desafiava as mentes mais capazes do circulo de Mersenne, e depois de certo tempo quando Fermat percebia que eles não encontravam respostas para seus desafios, ele enviava as resoluções por correspondência, mas sem revelar os métodos das mesmas. Segundo Urbaneja (2008: 80), diante da pressão dos matemáticos parisienses para Fermat apresentar as suas soluções dos problemas relativos a extremos, Fermat decidiu apresentar o *Método para determinar máximos e mínimos*, mas a sua apresentação é pouco clara, em parte devido a sua vontade de não publicar o método que é apresentado na forma de algoritmo, sem qualquer justificação teórica. Por isso na segunda parte desse tratado Fermat descreve um único exemplo de aplicação do método de máximo e mínimo ao traçado de tangentes a linhas curvas, a tangente a parábola que provoca uma discussão violenta com Descartes, que critica a falta de generalidade no método. Urbaneja (2008: 81) explica que entre 1636 e 1638 muitos matemáticos manifestaram sua opinião sobre o trabalho, em razão da falta de generalidade, mas foi Descartes que aproveitou a oportunidade para atacar Fermat, que já tinha criticado sua Dióptrica, e assim aproveitando a sua técnica recém-criada técnica para determinar tangentes a linhas curvas esboçada no livro II da *Geometria*, Descartes provocou uma grande polêmica com Fermat, "que teve a feliz

minha regra estende-se geralmente a todos aqueles problemas que podem cair dentro do escrutínio da geometria, isto é, a totalidade dos fenômenos naturais. (GROSSMANN, 2009: 184, grifos do autor)

Será que Descartes foi feliz quando caracterizou o seu método de tangentes de universal? Sua álgebra também poderia ter sido caracterizada igualmente de universal como fez Grossmann? Para Sasaki, a álgebra do segmento de linhas foi à base a partir da qual Descartes estabeleceu na *Geometria*, a sua matemática analítica que "pode ser caracterizada como a análise algébrica das quantidades finitas" (SASAKI, 2003: 230). Dessa forma, embora Descartes aspirasse à criação de uma ciência universal que pudesse resolver todos os "problemas que podem cair dentro do escrutínio da geometria" e da natureza em geral, sua tentativa não foi bem-sucedida, pelo menos no que se refere ao âmbito infinitesimal da geometria, pois mesmo usufruindo de uma álgebra essencialmente simbólica – que intensificava ainda mais o caráter mecânico da análise algébrica de Viète, o que dispensava o trabalho intelectual e reduzia os cálculos – é certo que a *Geometria* não continha um método de tangentes aplicável a todas as curvas[154], em razão das limitações finitas da sua análise algébrica. Já frisamos ao longo desse trabalho o posicionamento de Fleck, quanto à natureza das descobertas científicas: todas elas são desenvolvidas de forma que a corrida coletiva ao ouro do conhecimento jamais consome as suas reservas. Em outras palavras, "toda descoberta é inseparavelmente intricada com o chamado erro" na medida em que o estilo de pensamento

consequência de ir obrigando a este, progressivamente com mais intensidade, a buscar a prova de validez do seu método – mais que busca-la, que já possuía de suas investigações nos anos de 1628-1629, a divulgá-la – de modo que a medida que vai proporcionando a justificação do algoritmo, vai revisando os fundamentos de seu método a luz dos novos horizontes que abre seu próprio desenvolvimento da geometria analítica – a *Introdução aos lugares planos e sólidos* – e a leitura da *Geometria* de Descartes." (URBANEJA, 2008: 82). Estes esforços teriam como fruto uma sequência de trabalhos, dentre os quais ressaltamos o *Método de máximos e mínimos explicado ao senhor Descartes* de 1638, donde Fermat determina a tangente a folium de Descartes, a *Investigação analítica e* a *Doutrina das tangentes*, ambos redigidos por volta de 1640 em que Fermat revela seus fundamentos para determinar máximos e mínimos e tangentes na *Investigação* enquanto que na *Doutrina* Fermat determina as tangentes às curvas clássicas tais como a cisoide, conchoide, quadratriz – curvas as quais Descartes tinha excluído da Geometria –, "assim como a tangente da curva mais famosa do momento, a cicloide, donde se aprecia a potência do seu método. Trata também um problema de inflexão, e pela nova visão de antigos e modernos conceitos, assim como pela constante evolução da adigualdade [um conceito finito tomado de Diofanto e usado na sua primeira memória, o *Método para determinar máximos e mínimos*] em direção ao *aproximadamente igual*, abre as portas para a retificação e a quadratura" (URBANEJA, 2003: 109, grifo nosso).

[154] Em especial os lugares lineares que não podiam ser construídos por um movimento contínuo os quais Descartes os tinha excluído da geometria. Segundo Sasaki (2003: 230) no fim do livro II, Descartes mostra como desenhar as tangentes e normais a uma curva pelo método dos coeficientes indeterminados. O método basicamente funciona da seguinte forma: primeiramente determina-se a normal, em seguida, por um ponto (x, y) da curva estudada, traça-se um circulo que tem seu centro no ponto de concurso da normal com o eixo das abscissas. Daí basta estabelecer a condição que a curva seja interceptada pelo circulo em dois pontos coincidentes (x, y). Após apresentar o método das tangentes, Descartes introduz as ovais que são curvas uteis no estudo da óptica. Para calcular as tangentes de tais curvas, Descartes elabora um método inverso de tangentes no qual as propriedades dessas curvas não são determinadas. A própria designação do método, suscita que as propriedades das tangentes eram supostas como dadas, e em seguida a curva era então obtida geometricamente. Sasaki considera que o estudo das ovais é um dos primeiros exemplos do método inverso de tangentes, embora o estudo de tais curvas "é primitivo e fundamentalmente finitista, como seu método de tangentes, o qual não envolve algum procedimento infinitesimal" (SASAKI, 2003: 233).

estabelece o máximo e o mínimo que uma descoberta pode prescrever, ou melhor: “para se perceber uma relação, uma outra relação deve passar despercebida, deve ser negada ou ignorada” (FLECK, 2010: 72). Dessa forma, o sistema de idéias de um coletivo de pensamento determina invariavelmente às possibilidades perceptivas do individuo:

> (...) a tendência à persistência do sistema de opiniões, que se apresentam como totalidades fechadas, pertence inevitavelmente à fisiologia do conhecimento. O processo de conhecimento se desenvolve somente nesta e em nenhuma outra sequência: somente uma teoria clássica com suas conexões plausíveis (a saber: enraizadas na época), fechadas (a saber: restritas) e propagáveis (a saber: conforme ao estilo) possui um poder promovedor. (FLECK, 2009: 72)

Dessa forma, mesmo que Descartes ousasse a criação de um método universal que resolvesse todos os problemas da matemática e das demais ciências como um todo, pode ser dito que tal método não vingou na geometria infinitesimal em razão das condições do estilo de pensamento da matemática da época, ainda amarradas a uma perspectiva algébrica finita, mas não queremos com isso desmerecer o mérito de Descartes até porque estas razões lógicas para a exatidão do método cartesiano só aparecem mais claramente quando analisadas sob a ótica histórica retrospectiva, pois para os contemporâneos de Descartes, tais como Debeaune, Mydorge, Desargues e outros que o defenderam na sua disputa com Fermat com relação ao método de tangentes, estas incoerências lógicas que contrariam o método de Descartes eram desconhecidas. Como descrevemos na nota explicativa cento e cinquenta e cinco desta dissertação até mesmo as primeiras tentativas de Fermat de elaborar um método universal para calcular tangentes eram inconsistentes, por isso foi apenas através das discussões com seus oponentes do circulo de Mersenne que fizeram com que ele reformulasse gradativamente o seu método com uma base sólida em direção ao infinitesimal. Fermat nunca abandonou a linguagem sincopada de Viète e mesmo assim alcançou voos mais altos do que Descartes no âmbito infinitesimal, assim é natural perguntarmos: Quais seriam as relações entre as idéias e as notações na matemática? A simplificação das notações algébricas repercute positivamente no avanço das ideias como quis demonstrar Descartes na *Geometria*? Ou o progresso das idéias é mais importante do que as notações como defendeu Fermat? Fermat tinha percebido que “as questões de notação eram relativamente sem importância quando comparadas com as idéias” e por conta disso ele se opôs equivocadamente as mudanças conceituais de Descartes pois não percebeu “as vantagens práticas que poderiam ser ganhas em facilidade mecânica por abondonar a maneira homogênea de expressão e por tornar a álgebra minuciosamente simbólica” (BOYER, 2004: 85). Seja como for, a opinião de Fermat tem certo sentido na medida em que dentro do âmbito fechado dos preceitos epistemológicos da escola analítica, ele conseguiu desenvolver gradualmente um método para o cálculo da tangente mais consistente que o de Descartes, esse fato de certa forma não contraria a potência dos métodos algébricos de Descartes, mas apenas confirma o posicionamento epistemológico de Fleck, quanto às limitações presentes em quaisquer descobertas cientificas. E a verdade é que no âmbito da matemática, a simplificação das notações algébricas repercute muito mais positivamente na maturação das ideias do que o contrário, como pensava Fermat, e mesmo que o jurista de Tolouse tivesse publicado seus trabalhos relacionados à geometria analítica no momento oportuno, eles não seriam capazes de derrubar o efeito sugestivo das notações essencialmente simbólicas de Descartes que tinham acompanhado os desenvolvimentos do coletivo de pensamento a respeito.

Considerações Finais

Ao longo da primeira seção desse capítulo, vimos que a *Geometria* e a *Introdução* tiveram uma participação importante na mutação do estilo de pensamento da matemática seiscentista, apesar das diferenças de estilos dos seus autores em relação à matemática, mas as semelhanças dos métodos das suas geometrias fez parte da contestação do estilo de pensamento vigente. A *Geometria* por ter sido publicada, em vida do autor, teve uma repercussão mais ativa no imaginário coletivo da época o que fez com que alguns historiadores da matemática atribuíssem a paternidade da geometria analítica a Descartes exclusivamente. Daí surgiu o problema da nossa investigação que consistiu em investigar as razões que esses historiadores poderiam ter tomado, para além desta razão óbvia referida, para sustentarem tal opinião favorável a Descartes. Para discutirmos as nossas hipóteses fizemos uma comparação histórica entre os dois trabalhos tanto a nível técnico quanto a nível contextual, tomando como base alguns trechos de alguns historiadores da matemática que selecionamos para comentar as suas ideias a respeito. Como vimos, Descartes detinha um grande capital simbólico na época e por isso ao contrário de Fermat, ele não hesitou em publicar a sua *Geometria*, e mesmo com as repercussões negativas da sua primeira publicação em razão das dificuldades encontradas pelos matemáticos para compreender o texto, ele permaneceu firme no seu propósito de ser reconhecido como um escritor da literatura matemática. Com isso, vimos que Descartes usufruiu, de certa forma, do seu capital simbólico para convencer os matemáticos da universidade de Leiden a comentar e reconstruir as partes elípticas da *Geometria*, como consequência algumas publicações latinas, organizadas por matemáticos holandeses, vieram à tona a partir de 1649 a fim de aprimorar cada vez mais a obra de Descartes. Embora Fermat tenha contribuído mais decisivamente para a ideia contemporânea de que se tem da geometria analítica, sua exposição na *Introdução* foi rigorosamente conforme os pressupostos da escola analítica de Bordéus, o que limitou consideravelmente a sua capacidade de questionamento dos conceitos geométricos gregos que governava muitos dos pressupostos desta escola. Questionando apenas o método sintético e aceitando cegamente os outros pressupostos da escola analítica, Fermat abriu mão de propor mudanças conceituais drásticas para matemática seiscentista.

> Descartes foi diferente de outros matemáticos contemporâneos que como seu rival Pierre de Fermat, continuaram na tradição algebricamente analítica. Fermat podia ser julgado ter sido superior a Descartes em sua competência técnica para resolver problemas matemáticos. Descartes, por outro lado, sem dúvida ultrapassou Fermat em sua habilidade para trazer mudança revolucionária nas noções fundamentais da matemática como um todo. Fermat não escreveu sua própria *Geometria*, tendo

> simplesmente produzido memórias matemáticas esplêndidas. Descartes publicou um manual *Geometria*, que com suas duas edições latinas tornou-se o paradigma de seu pensamento matemático genuinamente original. Com isso, sua matemática adquiriu a precondição crucial para sua aceitação institucional, assim como intelectual. (SASAKI, 2003: 5-6)

Dessa forma, mesmo que a *Introdução* de Fermat tenha uma série de qualidades distintivas que suplantam a *Geometria* de Descartes, tais como: a exposição sistemática e didática que contrapunham com a exposição não sistemática e elíptica de Descartes; a declaração do princípio fundamental da geometria analítica de uma forma muito mais clara e consciente do que Descartes na *Geometria*; a perspectiva geométrica mais próxima da geometria analítica contemporânea; o uso de eixos perpendiculares em oposição aos eixos oblíquos de Descartes, a ênfase na representação gráfica das soluções das equações indeterminadas ao invés da construção das soluções algébricas determinadas que caracterizava o trabalho de Descartes; é inegável que os métodos algébricos de Descartes, continham um repertório de elementos favoráveis, que de certa foram trouxeram mudanças conceituais drásticas à matemática seiscentista o que justifica o sucesso da *Geometria* frente a *Introdução*. Como vimos, Descartes implantou um simbolismo unificado para a linguagem da álgebra, que se tornou um paradigma para a matemática contemporânea tal como nos informa Boyer:

> Descartes ia mais longe que qualquer um de seus predecessores em sua linguagem simbólica (...). A álgebra formal vinha progredindo desde a renascença e encontrou o seu auge na *Geometria* de Descartes, o texto matemático mais antigo que um estudante de hoje possa seguir sem encontrar dificuldade com a notação. Quase que o único símbolo arcaico no livro é o uso de $\propto$ em vez de $=$ para a igualdade. O uso de letras do começo do alfabeto para parâmetros e das do fim como incógnitas, a adaptação da notação exponencial a estas, e o uso dos símbolos germânicos $+$ e $-$ [além da adoção do atual símbolo $\sqrt{}$ para as raízes], tudo isso fez com que a notação de Descartes se assemelhasse à nossa, pois naturalmente tiramos a nossa da dele. (BOYER, 1996: 232, grifo nosso)

No que respeita à notação de Fermat, Eves declarou o seguinte:

> Fermat usou a notação de Viète para escrever seu trabalho que, assim tinha uma aparência arcaica em termos de simbolismo quando comparado ao de Descartes. (EVES, 1995: 389)

Desse modo, vimos que Fermat usava uma linguagem sincopada similar á de Viète que mesclava aspectos simbólicos com aspectos retóricos, este tipo de notação arcaica, para o coletivo de pensamento em 1679, ano da publicação da *Introdução*, evidentemente influenciou a derrocada de Fermat na historiografia. Como vimos, a notação de Descartes foi à fórmula oportuna para o êxito da sua *Geometria*, pois estava em consonância com os desenvolvimentos algébricos da época o que facilitou o seu efeito sugestivo imprescindível para a recepção social de uma descoberta cientifica conforme a epistemologia fleckiana. Além do mais, vimos que Fermat não compreendeu o valor do seu método como um instrumento poderoso a serviço da matemática seiscentista, também não chegou a interpretá-lo como um procedimento que pudesse governar completamente a matemática. De fato, o próprio título do seu tratado por si só demonstra que Fermat estava apenas interessado na resolução de problemas planos e sólidos, ao contrário do seu rival que propunha um método geral para resolver todos os problemas da matemática possíveis. Dessa forma, vimos que Descartes tornou-se consciente da universalidade do seu método, mas esta estava subordinada a fusão da álgebra com a geometria. Assim, ele elaborou um procedimento analítico-sintético que permitiu utilizar o melhor da álgebra e da geometria para a resolução dos mais variados problemas, dentre eles o famoso problema de Pappus que Fermat apenas mencionou como um exemplo de aplicação do seu método, tendo não se aventurado a resolvê-lo. Como vimos, Descartes formulou uma analise algébrica com a finalidade de resolver os problemas geométricos mediante a tradução dos enunciados, referente aos mesmos, em uma equação algébrica que, após ser simplificada, era solucionada geometricamente. No entanto, vimos que a operacionalidade do seu método analítico estava interligada aos procedimentos da álgebra do segmento de linhas, os quais permitiram Descartes introduzir um segmento unitário que o levou a interpretar os parâmetros e as incógnitas independentemente dos seus graus de uma forma diferenciada da tradição grega, “pois em vez de considerar x^2 e x^3, por exemplo, como uma área e um volume, ele (...) os interpretava como segmentos” (BOYER, 1996: 232). Dessa forma, Descartes abandonou o principio da homogeneidade o que proporcionou a sua abordagem na *Geometria* de problemas de ordem superior (lineares), bem como o estudo de curvas desta natureza, o que Fermat deixou a desejar na *Introdução* em razão da sua afinidade com a geometria dos antigos. Com o amparo da sua álgebra simbólica, que trouxe simplificação, generalidade e flexibilidade as idéias matemáticas, vimos que Descartes ambicionou a matematização de todos os problemas das ciências. Esta ambição, que fez parte do seu método filosófico, fundamentado nos procedimentos analíticos da álgebra simbólica, não consistiu em simplesmente reinterpretar algebricamente o método analítico dos geômetras antigos como fez Fermat na *Introdução*, mas simplesmente submeter o conteúdo de todas as ciências à álgebra. Seja como for, tanto a *Introdução* de Fermat como a *Geometria* de Descartes tiveram as suas contribuições para o desenvolvimento da matemática e das demais ciências.

Na segunda seção procuramos justificar o papel significativo que a álgebra cartesiana representou para a modernidade e a contemporaneidade haja vista que após 1623 Descarte tinha encerrado as suas relações mais estreitas com a matemática. Inicialmente, buscamos investigar a perspectiva geral de Descartes em relação à matemática, como também em que medida o sábio de *La Fléche* tinha se envolvido com o estudo deste ramo do conhecimento. Vimos que ao longo da sua carreira, Descartes tinha alimentado uma atitude, de certa forma, desdenhosa para com a matemática, mas tal postura não contrariava a importância que ele concedeu á álgebra como uma disciplina fundamental para a reforma das disciplinas matemáticas fundamentais, já que a insatisfação de Descartes estava relacionada com aquela matemática abstrata concebida como uma ciência isolada dos demais ramos do saber. Tal era o caso da álgebra de Viéte que foi concebida para resolver unicamente os problemas abstratos das matemáticas. Nesse sentido, a *Geometria* de 1637 apresentava uma álgebra reformada não só em termos teóricos como também em termos práticos e filosóficos, pois para Descartes a álgebra era muito mais que uma ciência particular, mas um método geral de investigação aplicável aos problemas não só das matemáticas, mas também das demais ciências.

Como vimos, ao contrário de Fermat, Descartes tinha uma cultura matemática muito abrangente em razão do seu envolvimento simultâneo com várias tradições matemáticas. A escola dos matemáticos aplicados tinha sido à tradição matemática mais expressiva da qual Descartes tinha sido influenciado, pois o estilo de pensamento desta tradição repercutiu, de certa maneira, os anseios da filosofia mecânica em voga na época, donde os cientistas visavam interpretar matematicamente os fenômenos naturais mediante o auxilio de instrumentos mecânicos associados ao desenvolvimento tecnológico da sociedade que tinha sido impulsionados pela revolução industrial. Vimos que Descartes foi fortemente influenciado por essa atmosfera social a tal ponto dele ter redigido todos os seus trabalhos, sejam eles filosóficos ou científicos, em conformidade com os princípios mecânicos. Assim, procuramos discutir de modo enfático à tese de Grossmann de que Descartes tinha construído o seu método universal acompanhando atentamente os desenvolvimentos do projeto mecanicista dos cientistas contemporâneos, de forma a conferir á sua álgebra as mesmas vantagens que as máquinas possibilitavam a produção industrial. Como vimos, a reforma da álgebra por Descartes na *Geometria* de 1637, não foi uma descoberta acidental, mas uma construção gradual que remonta a primavera de 1619, e que ao ser concluída no referido tratado , repercutiu bem os ideais do imaginário coletivo da época.

Como membro da escola dos matemáticos aplicados, vimos que Descartes tinha sido um exímio construtor de máquinas, especialmente de máquinas que pudessem polir e cortar espelhos na forma hiperbólica – uma das suas brilhantes invenções mecânicas de utilidade social que tinha sido detalhada em termos técnicos na *Dióptrica* de 1637. Como vimos, as propriedades das máquinas cartesianas serviam como modelo para as regras algorítmicas que Descartes tinha formulado para a sua análise algébrica. Dessa forma, o próprio Descartes tinha alertado os seus oponentes no circulo de Mersenne acerca do fundo social e tecnológico que legitimava a supremacia da sua álgebra frente as demais técnicas de resolução de problemas em discussão naqueles debates. Nesse sentido, a técnica algébrica de Descartes detinha uma grande vantagem sobre as demais, pois através dela os problemas podiam ser solucionados rapidamente por qualquer um em virtude da aplicação mecânica de algumas regras fixas. Em outros termos, enquantos as técnicas dos adversários de Descartes estavam restrita aos especialistas por conta da falta de facilidade nos procedimentos de resolução envolvidos o que exigiu pré-requisitos para aplicá-las, a técnica de Descartes, pelo contrário, estava acessível a todos em virtude da automatização do procedimento algébrico que facilitava, simplificava e acelerava os cálculos. Vimos então que Descartes se sobressaiu em grande parte desses debates, salvo no debate com Fermat em relação à técnica para o calculo de tangentes, donde Descartes, ainda que com uma ferramente mais apurada do que Fermat, não conseguiu com isso ultrapassar a barreira da geometria infinitesimal o que apenas comprova a suposição fleckiana de que todas as descobertas cientificas são limitadas em algum nível. Como vimos, esta excessão não contraria a potência dos métodos algébricos de Descartes na medida em que a simplicação das notações repercute muito mais positivamente na maturação das ideias matemáticas do que o contrário tanto que é apenas através de uma álgebra essencialmente simbólica que é possível intensificar as vantagens práticas em facilidade mecânica dos procedimentos algébricos de cálculo.

Conclusão

Nossa dissertação se propôs a investigar os fatores relativos e alheios á atividade matemática do século XVII que contribuíram para que a descoberta da geometria analítica fosse atribuída, por diversos historiadores, a Descartes, exclusivamente. Para atingir com mais rigor o presente objetivo, procuramos nos orientar segundo os estudos da historiografia do século XX os quais nos advertiram acerca da impossibilidade de compreensão dos fatos de uma época específica sem a consideração dos seus antecedentes históricos causais, na medida em que os fatos do presente estão subordinados as ocorrências do passado. Diante disso, fomos obrigados a alterar o nosso recorte temporal, traçado até então num espaço de tempo do século XVII, para um período mais abrangente o que favoreceu a compreensão do significado da descoberta da geometria analítica como um resultado não só das tendências naturais da atividade matemática da terça parte do século XVII, como também de outros desdobramentos matemáticos provenientes de épocas remotas.

O capitulo um dessa dissertação apresentou um levantamento histórico das transformações conceituais, que fomentaram a atividade matemática desde a antiguidade até o primeiro terço do século XVII, e que contribuíram conforme o pensamento de Boyer, retratado na obra *History of Analitic Geometry*, para o surgimento da geometria analítica. Tomando como base a epistemologia de Fleck, retratada na obra *Gênese e desenvolvimento de um fato cientifico,* identificamos os estilos de pensamento que conduziram a atividade matemática das épocas associadas a essas transformações conceituais. Em razão da abordagem de Boyer pautada na historia das ideias – sem tanta atenção dirigida exclusivamente para os fatores exteriores a atividade matemática – nosso levantamento histórico apresentou limitações de ordem social e cultural para a descrição dos desdobramentos da matemática, a partir da antiguidade, que possibilitaram a descoberta da geometria analítica no segundo terço do século XVII. Mas o próprio Fleck, na sua obra magna apontou a dificuldade para se descrever com fidelidade a história do desenvolvimento de qualquer conhecimento, nas suas próprias palavras:

> É difícil, quando não impossível, descrever corretamente a história de um domínio do saber. Ele consiste em numerosas linhas de desenvolvimento das ideias que se cruzam e se influenciam mutuamente e que, primeiro, teriam que ser apresentadas como linhas contínuas e, segundo, em suas respectivas conexões. Em terceiro lugar, teríamos que desenhar ao mesmo tempo e separadamente o vetor principal do desenvolvimento, que é uma linha média idealizada. É como se quiséssemos reproduzir por escrito uma conversa agitada em sua sequência natural, onde várias pessoas falam desordenadamente ao mesmo tempo, sendo que, apesar disso, cristaliza-se uma ideia

> comum. Temos que interromper constantemente a continuidade temporal da linha descrita das ideias para introduzir outras linhas; temos que deter o desenvolvimento, para isolar as interligações; e, ainda, temos que deixar muita coisa de lado para obter as linhas principais. Um esquema mais ou menos artificial entra então no lugar da apresentação da vivacidade de efeitos mútuos. (FLECK, 2010: 55-56)

Embora Boyer tenha pertencido a uma tradição historiográfica que enfatizou a construção do conhecimento mais como um fruto da genialidade do que propriamente das interações sociais, o que inviabilizou, de entrada, o nosso levantamento histórico pretendido conforme os ditames da epistemologia fleckiana donde as comunicações coletivas a nível sincrônico são enfatizadas, percebemos, no entanto, que uma historia descrita a nível diacrônico como exposta por Fleck – cujo conhecimento evolui continuamente com estilos de pensamento consecutivos – poderia ser perfeitamente relatada tendo como base as idéias apresentadas por Boyer, mesmo por que Fleck deixou transparecer, no trecho supracitado, uma gama de abordagens possíveis para descrição da história de qualquer domínio do saber.

O capitulo dois dessa dissertação expôs uma das grandes mudanças ocorridas na atividade matemática do século XVII que consistiu na intervenção de métodos algébricos na geometria. Vimos que foi a partir da *Introdução* de Fermat e da *Geometria* de Descartes que tais métodos interviram fundamentalmente no desenvolvimento da geometria para além da estrada real restrita de Euclides no seu diálogo lendário com Ptolomeu I. Dessa forma, os trabalhos de Descartes e Fermat tiveram êxito em concretizar o potencial da atividade matemática seiscentista de estabelecer relações mútuas entre equações indeterminadas e linhas geométricas, o que favoreceu o surgimento do método das coordenadas, um dos fundamentos da geometria analítica. Com o objetivo de explicar o contexto da atividade matemática do século XVII, analisamos uma série de fatores de ordem sociocultural que influíram de certa maneira no processo de gestação e propagação da geometria analítica no século XVII tais como: a fragmentação da atividade matemática realizada fora das universidades, à circulação de pensamento entre os matemáticos da época através de cartas, dentre outros. Vimos então que foi a partir da publicação da *Geometria* de Descartes que gradativamente se iniciou o processo de instauração de um novo estilo de pensamento – no qual o método analítico passou a se destacar perante o método sintético da tradição – e isso, nos obrigou a darmos um posicionamento quanto às possíveis razões da não publicação da *Introdução* por parte de Fermat. Para tanto, buscamos uma justificativa baseada em argumentos de historiadores clássicos da matemática os quais por fim não se mostraram completamente persuasivos, pois as razões que encontramos podiam ser consideradas, de certa forma, desgastadas e ultrapassadas perante as possibilidades de articulação epistemológica patentes na erudição da historiografia da ciência contemporânea. Dessa forma, tomando como base a obra magna de Fleck, buscamos então investigar os estilos de pensamento dos coletivos aos quais Fermat e Descartes foram tributários nas invenções das suas geometrias e a partir de então nos propomos a comparar a formação desses dois pensadores de forma a termos reais condições de deduzirmos em termos epistemológicos, porque Descartes decidiu publicar a sua obra e Fermat não. Embora esse questionamento não tenha representado o problema propriamente dito dessa pesquisa, vimos que a sua exploração, a nível epistemológico, ajudou de certa forma na investigação do nosso problema, pois no final da investigação vimos que o rompimento brusco de Descartes com a aura estilística dominante, a qual Fermat compartilhava em grande medida, provavelmente contribuiu para que o sábio de *La Flèche* publicasse sem temor a *Geometria* e Fermat, ao contrário, receasse em publicar a *Introdução* o que de certa forma, levou alguns historiadores da matemática a atribuírem a paternidade da geometria analítica a Descartes de forma exclusiva.

No capitulo três examinamos detalhadamente a problemática da nossa pesquisa que consistiu em tentar compreender outras razões – à exceção da publicação da *Geometria* em tempo oportuno – que levaram esses historiadores a sustentarem tal opinião favorável a Descartes. Para discutirmos as nossas hipóteses fizemos um estudo histórico comparativo entre a *Introdução* e a *Geometria*, tomando como base alguns manuais clássicos da historia da matemática que selecionamos. Ao confrontarmos os dois trabalhos em termos técnicos e contextuais as duas primeiras hipóteses que estabelecemos na introdução dessa dissertação se confirmaram naturalmente. Vimos então que a publicação da *Geometria* em tempo hábil estava interligada a uma série de circunstâncias que explicam a grandeza do capital simbólico de Descartes. Como vimos, foi á formação educacional no colégio jesuíta de *La Flèche* que proporcionou esse elevado poder simbólico de Descartes, o que justifica a sua ambição cientifica em ser reconhecido como um escritor de renome da literatura matemática. Dessa forma, mesmo diante das impressões negativas dos primeiros leitores da *Geometria* em razão das suas passagens de teor elíptico, Descartes não se abalou e convenceu, desde logo, os matemáticos da universidade de Leiden a comentar e reconstruir tais passagens. Com isso, algumas publicações da *Geometria* em latim, organizadas por matemáticos holandeses, surgiram a partir de 1649 a fim de aprimorar cada vez mais o texto de Descartes o que abriu as portas para a sua glória na historiografia da matemática. Como vimos, embora a *Introdução* de Fermat tenha acumulado uma série de elementos técnicos que a aproximam mais da geometria analítica contemporânea do que a *Geometria* de Descartes, a álgebra cartesiana propunha mudanças conceituais drásticas à matemática moderna o que justifica, de certa forma, o triunfo da *Geometria* frente á *Introdução*. Dentre essas mudanças articuladas por Descartes na *Geometria*, a simplificação da linguagem algébrica para um patamar mais simbólico – em consonância com os desenvolvimentos algébricos da época – foi fundamental para a recepção social gradativa do seu trabalho no coletivo de pensamento. Vimos que a publicação póstuma da *Introdução* em 1679 não causou nenhum impacto no coletivo de pensamento em razão da sua notação complexa e distanciada dos desenvolvimentos algébricos da época. Na realidade, Fermat foi fortemente influenciado pelo sistema de ideias da escola analítica, o que limitou a sua capacidade de questionamento de muitos dos conceitos geométricos gregos que governavam o estilo de pensamento não só desta escola, mas da própria atividade matemática da época. Tendo aceitado a maioria dos pressupostos epistemológicos da escola analítica, salvo quanto ao método sintético, era praticamente impossível que Fermat viesse a propor na *Introdução* mudanças conceituais drásticas para matemática seiscentista tal como fez Descartes na *Geometria*.

Como vimos, Descartes tinha sido influenciado por praticamente todas as escolas matemáticas do século XVII, o que fez com que o sábio de *La Flèche* tivesse muitos recursos técnicos para questionar a aura estilística dominante, patentes na analise algébrica da *Geometria* de 1637 que tinha servido de substrato não só para uma reforma geral nas matemáticas elementares, como também na metafísica e nas ciências de modo geral. Das escolas matemáticas que Descartes trafegou, sem dúvida a escola dos matemáticos aplicados foi a mais requintada em razão do seu estilo de pensamento peculiar que apresentava até certo nível, traços comuns com a filosofia mecânica em voga na época. Assim, vimos que os matemáticos aplicados visavam interpretar matematicamente os fenômenos naturais, muitas vezes com o auxilio de pequenos instrumentos inventados para tal fim, o que sugere que o desenvolvimento da arte da técnica não estava restrito apenas as grandes máquinas da revolução industrial. Como vimos, Descartes foi fortemente influenciado pelo espírito técnico do século XVII, o que levou Grossmann a sustentar que o método universal foi construído com base nos discursos, de teor mecânico, dos cientistas contemporâneos que propunham a criação de um método rigoroso que pudesse regular o fazer cientifico de modo a conferir para a atividade cientifica as mesmas vantagens que as máquinas possibilitavam na produção industrial. Dessa forma, como todos os tratados de Descartes, anteriores e posteriores ao volume filosófico de 1637, traziam marcas estilísticas do espírito mecânico do imaginário coletivo, era natural que a álgebra simbólica, o núcleo do seu projeto de uma ciência universal, também fosse impactada mecanicamente. Nesse sentido, como membro da escola dos matemáticos aplicados, vimos que Descartes tinha sido um exímio construtor de máquinas, e foi através do impacto da filosofia mecânica da época, que ele tinha transportado às propriedades vantajosas das suas máquinas para as regras algorítmicas da sua análise algébrica. Por isso, a álgebra cartesiana detinha uma grande vantagem sobre as demais técnicas de resolução de problemas em discussão no circulo de Mersenne, pois ela se mostrou acessível a qualquer um que quisesse solucionar rapidamente um dado problema através da aplicação mecânica de algumas regras pré-fixadas por Descartes. Dessa forma, vimos que Descartes se sobressaiu em grande parte das controvérsias em que ele se envolveu com os matemáticos do circulo de Mersenne, salvo na famosa controvérsia com Fermat relativa á técnica para o calculo de tangentes, donde a explicação para o êxito de Fermat não se justifica, de forma alguma, em razão da sua álgebra que era um tanto inferior a de Descartes, mas sim em função do próprio pensamento geométrico de Fermat que era mais apurado do que o de Descartes em razão do seu vínculo restrito com a escola dos analistas. Como vimos, este revés de Descartes não contraria a potência dos seus métodos algébricos, pois é apenas através de uma álgebra essencialmente simbólica que se consegue automatizar os procedimentos algébricos por meio de processos mecânicos que facilitam, simplificam e aceleram os cálculos.

Referências Bibliográficas

BELL, Eric. T. **Historia de las Matemáticas**. Ciudad de México: Fondo de Cultura Económica, 1985.

____________. **The mens of mathematics: The lives and achievements of the greats mathematicians from Zeno to Poincaré**. New York: Touchstone Books, 1986.

BICUDO, Irineu. **Introdução**. In: Euclides: **Os Elementos**. São Paulo: Editora UNESP, 2009.

BLAS, Ángel C. **Descartes: Geometría y método**. Madrid: Nivola libros y ediciones, 2001.

BLOCH, Marc. **Apologia da História, ou, O Oficio de Historiador**. Rio de Janeiro: Zahar, 2002.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2.ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 1996.

_____________. **História da Matemática**. 3.ed. São Paulo: Ed. Edgard Blucher, 2012.

_____________. **History of Analytic Geometry**. New York: Dover Publications, 2004.

BOURDIEU, Pierre. **O campo científico.** In: ORTIZ, Renato. **Pierre Bourdieu: sociologia.** São Paulo: Ática, p. 122-155, 1983.

BOUTIN, Chad. **Profiles in Mathematics: Pierre de Fermat**. Greensboro: Morgan Reynolds Publishing, 2009.

CAJORI, Florian. **Uma História da Matemática**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda, 2007.

CHITOLINA, Claudinei L. **Razão e método em Descartes: a unidade da ciência**. Jundiaí: Paco Editorial, 2013.

DANTZIG, Tobias. **Numéro: A Linguagem da Ciência**. Rio de Janeiro: Zahar Editores, 1970.

DESCARTES, René. **Discurso do Método**. In: DESCARTES, René. **Os Pensadores**. São Paulo: Nova Cultural, 2000.

________________. **Regras para a Orientação do Espírito**. São Paulo: Martins Fontes, 1999.

________________. **A Geometria**. In: DESCARTES, René. **Obras Escolhidas**. São Paulo: Perspectiva, 2010.

EVES, Howard. **Introdução á História da Matemática**. Campinas: Editora da Unicamp, 1995.

_____________. **Tópicos de História da Matemática para uso em sala de aula: Geometria**. São Paulo: Atual Editora, 1992.

FERMAT, Pierre. **Lieux Plans Et Solides**. In: FERMAT, Pierre. **Œuvres de Fermat**. V. III. Tradução: Charles Henry e Paul Tannery. Paris: Gauthier Villars, 1891/1912.

FLECK, Ludwik. **Gênese e desenvolvimento de um fato científico**. Belo Horizonte: Fabrefactum, 2010.

GARBI, Gilberto G. **O Romance das Equações Algébricas**. São Paulo: Editora Livraria da Física, 2010.

GROSSMANN, Henryk. **Descartes and the Social Origins of the Mechanistic Concept of the World**. In: FREUDENTHAL, Gideon; MCLAUGHLIN, Peter. **The Social and Economic Roots of the Scientific Revolution**. Boston: Springer Science+Business Media, 2009.

JOVER, Blas T. **Fermat: El mago de los números**. Tres Cantos: Nivola libros y ediciones, 2007.

KATZ, Victor J. **História da Matemática**. Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian, 2010.

MAHONEY, Michael S. **The Mathematical Career of Pierre Fermat**. Princeton: Princeton University Press, 1994.

MARCONDES, Danilo. **Iniciação à História da Filosofia: Dos pré-socráticos a Wittgenstein**. Rio de Janeiro: Zahar, 2005.

MATEOS, Ángel R. **El reto de Fermat**. Tres Cantos: Nivola libros y ediciones, 2005.

RODIS-LEWIS, Geneviève. **Descartes: uma biografia**. Rio de Janeiro: Record, 1996.

ROONEY, Anne. **Historia de las Matemáticas**. Barcelona: Ediciones Oniro, 2009.

ROQUE, Tatiana. **História da Matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas**. Rio de Janeiro: Zahar, 2012.

ROQUE, Tatiana. CARCALHO, João B. P. **Tópicos de História da Matemática**. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

SASAKI, Chikara. **Descartes's mathematical thought**. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2003.

SINGH, Simon. **O Último Teorema de Fermat**. Rio de Janeiro: Record, 2008.

SMITH, David E. **History of Mathematics**. V. II. New York: Dover Publications, 1958.

STRUIK, Dirk J. **História Concisa das Matemáticas**. Lisboa: Ed. Gradiva, 1987.

THOMAS, Glânffrwd. **Marin Mersenne: The birth of modern geometry**. Documentário produzido em 1986 com a parceria da Open University e transmitido pela BBC2. Disponível em: <https://www.youtube.com/watch?v=BV5Fl1w9UWM> Acesso em: 06 out. 2014.

URBANEJA, Pedro M. G. **Los orígenes de la Geometria Analítica**, Tenerife: Fundación Canaria Orotava de Historia de la Ciencia, 2003.

______________________ **Fermat y los orígenes del Cálculo Diferencial**, Tres Cantos: Nivola libros y ediciones, 2008.

______________________ Raíces históricas y trancedencia de la Geometria Analítica. **Sigma**. Donostia-San Sebastián, n.30, p.205-236, Maio. 2007.

VENTURI, Jacir. **Álgebra Vetorial e Geometria Analitica**. Curitiba: Editora Unificado, 1949.