

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Escola de Engenharia UFMG**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica**

Luiz Fernando Barbosa Carvalho

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS COM RESTRIÇÕES DE FLAMBAGEM**  
**APLICADA À MANUFATURA ADITIVA**

Belo Horizonte  
2020

Luiz Fernando Barbosa Carvalho

**OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS COM RESTRIÇÕES DE FLAMBAGEM  
APLICADA À MANUFATURA ADITIVA**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica.

Orientador: Dr. Ricardo Poley Martins Ferreira

Belo Horizonte  
2020

C331o

Carvalho, Luiz Fernando Barbosa.

Otimização topológica de estruturas com restrições de flambagem aplicada à manufatura aditiva [recurso eletrônico] / Luiz Fernando Barbosa. Carvalho. – 2020.

1 recurso online (80 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Ricardo Poley Martins Ferreira.

Dissertação (mestrado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 76-80.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Otimização - Teses. 3. Flambagem (Mecânica) - Teses. I. Ferreira, Ricardo Poley Martins. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

**"OTIMIZAÇÃO TOPOLÓGICA DE ESTRUTURAS COM RESTRIÇÕES DE FLAMBAGEM APLICADA À MANUFATURA ADITIVA"**

**LUIZ FERNANDO BARBOSA CARVALHO**

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, constituída pelos Professores: Dr. Ricardo Poley Martins Ferreira (orientador-Departamento de Engenharia Mecânica-UFMG), Dr. Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto (Departamento de Engenharia Mecânica-UFMG) e Dr. Helio de Assis Pegado (Departamento de Engenharia Mecânica-UFMG), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "**Mestre em Engenharia Mecânica**", na área de concentração de "**Projeto e Sistemas**".

Dissertação aprovada no dia 09 de julho de 2020.

Por:



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Poley Martins Ferreira, Professor do Magistério Superior**, em 12/07/2020, às 14:53, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Luiz Utsch de Freitas Pinto, Professor do Magistério Superior**, em 13/07/2020, às 16:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Helio de Assis Pegado, Professor do Magistério Superior**, em 14/07/2020, às 16:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **0177967** e o código CRC **0B23AA11**.

## **AGRADECIMENTOS**

Gostaria de agradecer primeiramente ao meu orientador Ricardo Poley por toda sua dedicação, ajuda e paciência na realização desse trabalho.

Agradeço também aos meus pais Luiz e Maria, assim como minha irmã Ana por todo o apoio nesse período.

## RESUMO

A medida que processos de otimização topológica abrangentes, como na inclusão de análises de estabilidade estrutural, resultam em soluções complexas, processos de manufatura aditiva são propostos como uma possibilidade na fabricação desses resultados. Desse modo, algoritmos de otimização topológica empregando métodos de densidades são aqui explorados em sua aplicação a estruturas fabricadas pelo processo de deposição de filamento fundido (FDM). Como as propriedades mecânicas de estruturas resultantes desse processo são bastante dependentes dos parâmetros de fabricação, os mesmos devem ser tratados no modelo de otimização. São aqui explorados dois parâmetros de fabricação: a orientação de impressão e a densidade de preenchimento. Observou-se que diferentes orientações de impressão podem resultar na presença de propriedades ortotrópicas nos componentes impressos. Sobre as densidades de preenchimento foi estabelecido um paralelo entre seu significado e as densidades artificiais usadas no método de densidades SIMP (*solid isotropic structure with penalization*). Com essa comparação foi proposta também uma segunda classe de soluções para o problema de otimização. Nesses problemas a função de penalização do método SIMP é substituída por um modelo das propriedades mecânicas da peça em função do parâmetro densidade de preenchimento variáveis. Nesse caso vale-se da possibilidade de fabricação de peças formadas por regiões de diferentes densidades, abordagem permissível no método FDM. Para explorar o impacto dessas propriedades o problema de otimização topológica proposto consistiu na minimização do *compliance* estrutural enquanto sujeito a restrições no volume de material e nas cargas críticas de flambagem. A estrutura foi modelada aplicando-se o método dos elementos finitos e a análise de estabilidade pelo método de flambagem linear. O problema descrito foi implementado utilizando-se a arquitetura OpenMDAO em uma forma modular. Dois diferentes estudos de caso foram desenvolvidos, uma coluna sob compressão e uma placa engastada, considerando diferentes orientações de impressão. Soluções para ambos os estudos de caso foram obtidas considerando-se penalização clássica no método SIMP e também na proposta de densidades de preenchimento variáveis. Os resultados obtidos mostraram que as propriedades distintas modeladas para as estruturas fabricadas por FDM resultaram em soluções com diferentes características em sua forma e consequentemente rigidez e estabilidade.

**Palavras-chave:** otimização topológica, flambagem linear, deposição de filamento fundido, propriedades ortotrópicas, OpenMDAO

## ABSTRACT

As more extensive topology optimization problems considering stability analysis developed resulting in complex solutions, additive manufacturing processes were identified as alternatives to fabricate those solutions. Topology optimization problems by density methods are then here explored as applied to structures fabricated by the fused deposition modeling (FDM) method. The mechanical properties of those structures are highly dependent on the method printing parameters and those are treated in the optimization process. Two main printing parameters are considered: printing orientation and infill density. Different printing orientations were found to result in orthotropic properties on the resulting structures. The infill densities were related to the artificial densities variables used in the SIMP method (solid isotropic structure with penalization). With this comparison, a second category of optimization solutions was also proposed where the penalization function used in the SIMP method was replaced by a model of the mechanical properties as a function of a variable infill density parameter. Those solution make use of the capacity of the FDM method in fabricating structures composed of regions with different densities based on the infill. In order to explore the impact of the aforementioned properties, the proposed optimization problems consisted of structural compliance minimization under material volume and buckling constraints. The structure is modeled using the finite element method and buckling analysis was carried employing linear buckling analysis. This optimization model was implemented using the OpenMDAO modular paradigm. Two different case studies were considered for optimization, a column under compression and a short clamped plate, considering different orientation for the component fabricated. Solutions for both cases were obtained using classical SIMP penalization and also the variable infill density proposition. The solutions obtained showed that the distinct mechanical properties considered resulted in structures with different characteristics in its shape and consequently stiffness and stability.

**Keywords:** topology optimization, linear buckling, fused deposition modeling, orthotropic properties, OpenMDAO

## LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 2.1 – Abordagens de otimização estrutural. . . . .	18
Figura 2.2 – Projeto estrutural utilizando um método de densidades em otimização topológica. . . . .	19
Figura 2.3 – Fluxograma descrevendo o funcionamento padrão do método SIMP. . . . .	21
Figura 2.4 – Comparando resultados do método SIMP (b) sem densidades intermediárias e (c) com densidades intermediárias presentes. . . . .	22
Figura 2.5 – Ilustrando a relação entre a rigidez efetiva e a densidade artificial para diferentes fatores de penalização $fp$ . . . . .	23
Figura 2.6 – Deformações definidas em um elemento infinitesimal de um meio contínuo. . . . .	24
Figura 2.7 – Regiões características do problema de tabuleiro em uma solução de otimização topológica. . . . .	27
Figura 2.8 – Definição do problema para avaliação de modos artificiais de flambagem. . . . .	34
Figura 2.9 – Esquema básico de funcionamento de um processo FDM. . . . .	36
Figura 2.10–Diferentes padrões de preenchimento em peças fabricadas por FDM. . . . .	37
Figura 2.11–Diferentes densidades de preenchimento comparadas em peças com padrão de preenchimento linear. . . . .	38
Figura 2.12–Componente impresso com uma densidade de preenchimento variável. . . . .	38
Figura 2.13–Orientações de impressão de uma peça por FDM. . . . .	39
Figura 3.1 – Gráfico N2 descrevendo o problema implementado . . . . .	45
Figura 4.1 – Validação do cálculo da carga crítica de flambagem ( $\lambda_1$ ) utilizando análise de flambagem linear. (a) Evolução do erro obtido; (b) Definição do problema considerado . . . . .	51
Figura 4.2 – Orientações de impressão avaliadas nas simulações. (a) Problema A; (b) Problema B e (c) Problema C . . . . .	53
Figura 4.3 – Comparando o efeito dos expoentes da lei de potência que rege a penalização . . . . .	54
Figura 4.4 – Definição do problema: Coluna sob Compressão . . . . .	55
Figura 4.5 – Soluções obtidas para a coluna sob compressão com Orientação de impressão A . . . . .	56
Figura 4.6 – Histórico de convergência da coluna sob compressão no Problema A, considerando a solução base $P_c = 1.0$ . . . . .	56
Figura 4.7 – Histórico de convergência da coluna sob compressão com orientação de impressão A, considerando $P_c = 2.5$ . . . . .	57
Figura 4.8 – Soluções obtidas para a coluna sob compressão com Orientação de impressão B . . . . .	58
Figura 4.9 – Histórico de convergência da coluna sob compressão com orientação de impressão B, considerando $P_c = 2.5$ . . . . .	59
Figura 4.10–Soluções obtidas para a coluna sob compressão com Orientação de impressão C . . . . .	60
Figura 4.11–Histórico de convergência da coluna sob compressão com orientação de impressão C, considerando $P_c = 1.5$ . . . . .	61

Figura 4.12–Resultados obtidos para o estudo de caso 1: coluna sob compressão, considerando o modelo de densidades variáveis com $fp = 1.484$ . . . . .	63
Figura 4.13–Definição do problema: Chapa engastada . . . . .	64
Figura 4.14–Soluções obtidas para a chapa engastada com orientação de impressão A . . . . .	65
Figura 4.15–Histórico de convergência da chapa engastada com orientação A para a solução base ( $P_c = 1.0$ ). . . . .	66
Figura 4.16–Histórico de convergência na otimização da chapa engastada com orientação de impressão A, considerando $P_c = 2.5$ . . . . .	66
Figura 4.17–Soluções obtidas para a chapa engastada com orientação de impressão B . . . . .	68
Figura 4.18–Histórico de convergência da chapa engastada com orientação B considerando $P_c = 1.0$ . . . . .	68
Figura 4.19–Histórico de convergência da chapa engastada com orientação B considerando $P_c = 2.0$ . . . . .	69
Figura 4.20–Soluções obtidas para a chapa engastada com orientação de impressão C . . . . .	70
Figura 4.21–Histórico de convergência da chapa engastada com orientação C considerando $P_c = 1.1$ . . . . .	70
Figura 4.22–Resultados obtidos para o estudo de caso 2: chapa engastada, considerando o modelo de densidades variáveis com $fp = 1.484$ . . . . .	71
Figura 4.23–Separação entre os autovalores de flambagem das diferentes soluções obtidas em ambos estudos de caso. . . . .	73

## LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Comparando o impacto do valor mínimo de densidade artificial nos modos de flambagem identificados. . . . .	35
Tabela 4.1 – Erro no cálculo da carga crítica de flambagem em função da discretização utilizada. . . . .	52
Tabela 4.2 – Impacto da anisotropia na carga crítica de flambagem . . . . .	58
Tabela 4.3 – Síntese dos resultados obtidos para o estudo de caso 1: Coluna sob compressão	62
Tabela 4.4 – Síntese dos resultados obtidos para o estudo de caso 1: Coluna sob compressão, considerando o modelo de densidades variáveis com $f_p = 1.484$ . . . .	64
Tabela 4.5 – Resumo dos resultados obtidos para o estudo de caso 2: chapa engastada . .	71
Tabela 4.6 – Resultados obtidos para o estudo de caso 2: chapa engastada, considerando o modelo de densidades variáveis com $f_p = 1.484$ . . . . .	72

## LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

SIMP	<i>Solid Isotropic Structure with Penalization</i>
FDM	Deposição de Filamento Fundido
PTV	Princípio dos Trabalhos Virtuais
SLA	Estereolitografia
SLS	Sinterização Seletiva a Laser
SLM	Fusão Seletiva a Laser
PLA	Ácido Polilático
ABS	Acrilonitrila Butadieno Estireno
MEF	Método dos Elementos Finitos

## LISTA DE SÍMBOLOS

$F$	Carregamento externo
$K$	Matrix de rigidez
$K_{\sigma}$	Matrix de rigidez geométrica
$n_x$	Número de elementos na direção $x$
$n_y$	Número de elementos na direção $y$
$x$	Vetor de densidades dos elementos
$u$	Deslocamentos nodais
$\lambda$	Vetor contendo as cargas de flambagem
$\lambda_1$	Menor carga crítica de flambagem
$P_c$	Restrição de flambagem na otimização
$c$	<i>Compliance</i> estrutural
$v$	Volume total
$r$	Resíduos da restrição de flambagem
$\alpha$	Parâmetro de espaçamento
$\phi$	Função <i>Level-Set</i>
$V$	Função de velocidades
$F$	Vetor global de carregamentos globais
$u$	Vetor global de deslocamentos nodais
$c$	<i>compliance</i> estrutural
$v$	volume de material
$K$	Matriz de rigidez global
$x_{min}$	Densidade mínima
$v_{max}$	Volume máximo de material
$N_e$	Número de elementos
$x_e$	Densidade de um elemento

$\mathbf{x}$	Vetor de densidades
$\mathbf{C}$	Matriz constitutiva
$\mathbf{C}_0$	Matriz constitutiva não modificada
$f_p$	Fator de penalização
$\mathbf{a}_e$	Deslocamentos dentro de um elemento
$\mathbf{N}$	Matriz de funções de forma
$\mathbf{u}_e$	Deslocamentos nodais em um elemento
$\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}$	Deformações infinitesimais
$\boldsymbol{\sigma}_e$	Vetor de tensões em um elemento
$\boldsymbol{\epsilon}_e$	Vetor de deformações em um elemento
$\nu, \nu_{xy}, \nu_{yx}$	Coefficientes de Poisson
$E, E_x, E_y, E_1, E_2, E_3$	Módulos de elasticidade direcionais
$\mathbf{b}$	Forças distribuídas no volume de um domínio
$\mathbf{t}$	Forças distribuídas na fronteira de um domínio
$\mathbf{p}_i$	Forças pontuais nos nós
$\mathbf{B}$	Matriz deslocamento-deformação
$\mathbf{k}_e$	Matriz de rigidez de um elemento
$\mathbf{u}_e$	Deslocamento nodais em um elemento
$\mathbf{f}_e$	Vetor de carregamentos em um elemento
$\tilde{\rho}$	Densidades artificiais modificadas
$\rho$	Densidades artificiais
$w$	Fator de peso em um filtro de densidades
$r_F$	Raio de filtro de densidades
$U_g$	Energia de deformação
$\mathbf{k}_{eg}$	Matriz de rigidez geométrica em um elemento
$\mathbf{G}$	Derivadas de funções de forma

$\mathbf{s}$	Matriz de tensões
$\lambda$	Autovalor de flambagem
$\mathbf{K}_g$	Matriz global de rigidez geométrica
$\mathbf{K}_{g0}$	Rigidez global geométrica inicial
$\mathbf{F}_0$	vetor global de carregamentos inicial
$\mathbf{u}_0$	Deslocamentos nodais iniciais
$\mathbf{v}$	Autovetor de flambagem
$A_t, B_t$	Coefficientes para rigidez de estrutura <i>lattice</i>
$P_c$	Restrição aplicada em carga de flambagem
$\alpha$	Parâmetro de separação entre autovalores
$\boldsymbol{\mu}, \mu$	Autovalores de flambagem no problema modificado
$\mathbf{f}_{cr}$	Carregamento crítico de flambagem
$\bar{x}_e$	densidade filtrada de um elemento
$p_e$	Termo de penalização de um elemento
$\mathbf{p}$	Vetor de termos de penalização
$\mathbf{R}_u$	Resíduo na equação de equilíbrio linear elástico
$p_{min}$	Penalização mínima
$I$	Momento de inércia de seção
$L$	Comprimento de coluna
$n_x$	Número de elementos na direção $x$
$n_y$	Número de elementos na direção $y$

## SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>15</b>
<b>2</b>	<b>REVISÃO BIBLIOGRÁFICA</b>	<b>17</b>
<b>2.1</b>	<b>Otimização Topológica</b>	<b>17</b>
2.1.1	O método SIMP	20
2.1.2	Análise pelo método dos elementos finitos aplicada à abordagem SIMP	23
2.1.3	Problemas numéricos e método de filtragem	27
<b>2.2</b>	<b>Otimização Topológica com Restrições de Flambagem</b>	<b>28</b>
2.2.1	Análise de flambagem linear	30
2.2.2	Complicações inerentes à inclusão de restrições de flambagem	32
<b>2.3</b>	<b>Manufatura Aditiva</b>	<b>35</b>
2.3.1	Propriedades Mecânicas	38
<b>3</b>	<b>METODOLOGIA</b>	<b>42</b>
<b>3.1</b>	<b>Formulação do Problema</b>	<b>42</b>
<b>3.2</b>	<b>Implementação do Modelo</b>	<b>44</b>
3.2.1	Filtro de densidades ( <i>cFilter</i> )	45
3.2.2	Penalização ( <i>cPenalization</i> )	46
3.2.3	Análise linear elástica ( <i>cStates</i> )	46
3.2.4	Flambagem linear ( <i>cBuckling</i> )	47
3.2.5	Restrições de flambagem ( <i>cBucklingConstraint</i> )	49
3.2.6	Cálculo de <i>Compliance</i> ( <i>cCompliance</i> )	49
3.2.7	Restrição de volume ( <i>cVolume</i> )	49
<b>4</b>	<b>RESULTADOS E DISCUSSÕES</b>	<b>51</b>
<b>4.1</b>	<b>Validação da análise por flambagem linear implementada</b>	<b>51</b>
<b>4.2</b>	<b>Exemplos Simulados</b>	<b>52</b>
4.2.1	Estudo de caso 1: Coluna sob compressão	54
4.2.2	Estudo de caso 2: Chapa engastada	63
4.2.3	Separação entre os autovalores e rigidez máxima a flambagem	72
4.2.4	Reprodução de resultados e código implementado	73
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>74</b>
<b>5.1</b>	<b>Trabalhos futuros</b>	<b>75</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>76</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Otimização topológica é um método numérico capaz de determinar a configuração ótima de uma estrutura dado um objetivo e restrições. Em outras palavras, essa abordagem funciona determinando a melhor distribuição de material dentro de um domínio delimitado. A vantagem central desse método consiste na flexibilidade de suas soluções visto que a forma geral das estruturas resultantes não precisa ser conhecida previamente (SIGMUND; MAUTE, 2013; CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). Um problema de otimização topológica tem diferentes formulações possíveis dentre as quais destacam-se os métodos de densidade como o SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*). Nessa classe de problemas o domínio estabelecido é discretizado em uma malha e a cada elemento dessa malha uma variável, denominada densidade artificial, é atribuída. As densidades artificiais modificam as propriedades mecânicas de cada elemento ao descrever a quantidade de material na região. Essas densidades são então usadas como as variáveis de projeto no problema de otimização descrito (BENDSØE; SIGMUND, 2004; CHUNG et al., 2019).

Diversos estudos em otimização topológica foram desenvolvidos tratando problemas de maximização da rigidez estrutural, mas não levantando considerações sobre a estabilidade da estrutura. No entanto, soluções obtidas por essa abordagem acabam sendo bastante suscetíveis a falhas por flambagem. Como descrito já em Rodrigues, Guedes e Bendsøe (1995), soluções de otimização topológica tendem a estruturas compostas por elementos esbeltos, os quais podem ser vulneráveis a ocorrência de flambagem. A introdução de restrições de estabilidade mostra-se então necessária mas traz também maior complexidade à solução do problema de otimização topológica (CLAUSEN; AAGE; SIGMUND, 2016). Tratando da aplicação do método SIMP de otimização topológica Ferrari e Sigmund (2019) fornecem uma concisa perspectiva sobre complicações inerentes à inclusão de restrições de flambagem. Destacam-se o caráter competitivo entre rigidez e estabilidade em algumas soluções. Além disso, a introdução desse tipo de restrição implica em alguns problemas numéricos na solução do problema de otimização. Dentre esses problemas destacam-se a presença de modos artificiais de flambagem (GAO et al., 2020; NEVES; RODRIGUES; GUEDES, 1995) e trocas entre os modos críticos de flambagem que podem introduzir discontinuidades e inconsistências nas sensibilidades do problema (DUNNING et al., 2016; SEYRANIAN; LUND; OLHOFF, 1994).

Conforme os métodos de otimização estrutural foram se desenvolvendo em análises mais abrangentes, soluções com formas cada vez mais complexas foram encontradas. No entanto, métodos de fabricação tradicionais não foram capazes de acompanhar as necessidades destas novas abordagens de projeto e permitir a fabricação das suas novas soluções. Contornando essa discrepância, alternativas foram encontradas no desenvolvimento de técnicas de manufatura aditiva. Neste método de fabricação, componentes são construídos a partir de sucessiva deposição de material baseando-se em um modelo digital da estrutura. Essa abordagem permite a geração de estruturas com complexidade mais elevada que aquela vista em métodos tradicionais de fabricação. Deste modo, essa crescente tecnologia pode preencher a lacuna entre otimização

topológica e suas aplicações práticas (ZEGARD; PAULINO, 2016).

A deposição de filamento fundido (FDM) é um dos processos disponíveis para manufatura aditiva bastante difundido. Nesse método, um filamento termoplástico é extrudado sobre uma mesa de impressão através de um bocal aquecido construindo a peça camada por camada (ALAIMO et al., 2017). As propriedades de uma peça fabricada por FDM dependem de uma série de parâmetros de impressão definidos. Dentre esses parâmetros destacam-se a densidade de preenchimento com que o interior da peça é construído, parâmetro que impacta diretamente a rigidez da peça (LUBOMBO; HUNEALULT, 2018), e a orientação geométrica com a qual a peça é impressa, que pode induzir propriedades mecânicas anisotrópicas (PERKOWSKI, 2016).

Relacionando otimização topológica e manufatura aditiva trabalhos como Hoglund e Smith (2015), Carvalho e Ferreira (2019) adaptaram propriedades mecânicas de peças fabricadas por deposição de filamento fundido a modelos de otimização. Nesses estudos foi demonstrada a influência de propriedades mecânicas anisotrópicas em soluções de otimização voltadas apenas à máxima rigidez estrutural. Tratando da inclusão de considerações sobre estabilidade estrutural, Clausen, Aage e Sigmund (2016) apresentam um novo método denominado abordagem de revestimento onde componentes são modelados na forma de estruturas porosas revestidas por cascas. Experimentos realizados pelos autores confirmam que soluções com essa abordagem, fabricáveis através de métodos de manufatura aditiva, produzem estruturas com maior resistência à flambagem.

Considerando o contexto introduzido, no trabalho aqui apresentado busca-se como objetivo principal explorar métodos de otimização topológica, na abordagem SIMP, com aplicação a estruturas fabricadas por FDM. Para isso, propriedades mecânicas distintas associadas à fabricação por FDM devem então ser consideradas. É avaliada a anisotropia apresentada por esse tipo de peça, e seu impacto nas soluções de otimização topológica. Em seguida, explora-se também a possibilidade do projeto de estruturas com densidade variável ao longo de seu domínio. Esse tipo de estrutura se mostra possível através do método FDM associando-se o parâmetro de fabricação densidade de preenchimento e as densidades artificiais no método SIMP. Perante a necessidade de análise de estabilidade identificada para soluções de otimização topológica, o método aplicado deve ser também capaz de considerar flambagem dessas estruturas como um limitador à otimização. Para explorar estes fatores, o problema de otimização aqui proposto consiste na minimização do *compliance* (flexibilidade) estrutural de um componente enquanto sujeito a restrições no volume de material disponível e na resistência a flambagem.

Aplicações de otimização topológica se desenvolvem, historicamente, na inclusão de novas análises e considerações como extensões a suas formulações básicas. Adotando essa lógica colaborativa e visando melhor compartilhamento dos métodos desenvolvidos, a implementação computacional do problema aqui apresentado é realizada empregando a arquitetura OpenMDAO (GRAY et al., 2019). Essa estrutura de programação é utilizada para análise e otimizações em problemas multidisciplinares utilizando um paradigma modular. Desse modo, cada elemento do processo de otimização topológica pode ser desenvolvido de maneira independente, facilitando reutilização e compartilhamento do conhecimento desenvolvido em detalhes do problema.

## 2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

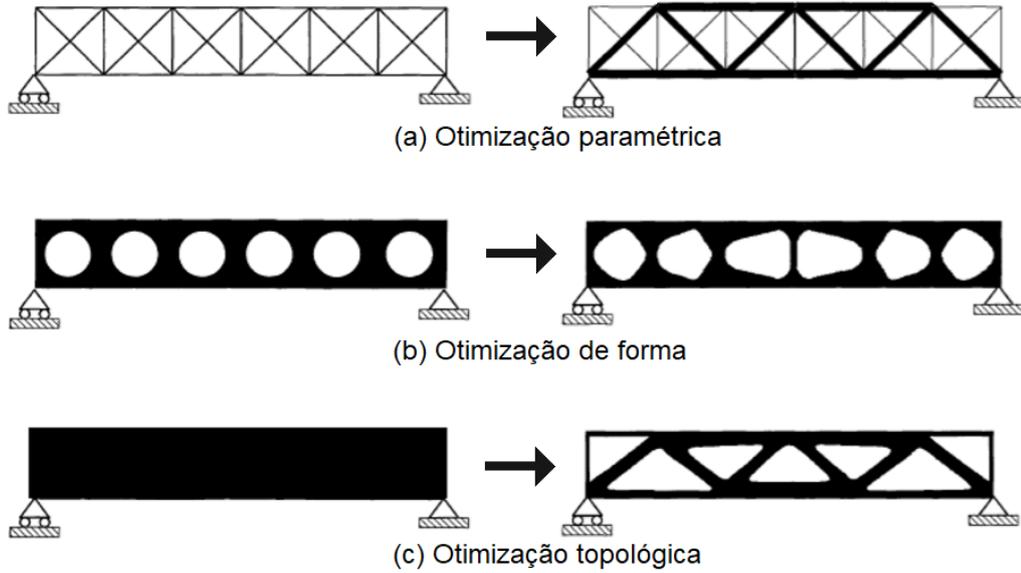
### 2.1 Otimização Topológica

Otimização estrutural pode ser definida de maneira ampla como a busca por agrupamentos de material que melhor sustentem um carregamento. Em outras palavras, nesse processo deseja-se determinar a estrutura que realiza uma tarefa específica da melhor maneira possível sob condições restritivas. Na análise de estruturas diversos tipos dessas tarefas podem ser identificadas como, por exemplo, produzir um componente com o menor peso ou a maior rigidez possíveis. Essas tarefas na otimização podem ser identificadas em um função objetivo  $f(x)$  que representa uma métrica para avaliar a tarefa específica requisitada no problema, seja encontrando seu valor máximo ou mínimo. A descrição da estrutura analisada é definida por variáveis de projeto  $x$ , que podem representar a geometria do estrutura (área de uma barra, espessura de uma placa) ou material empregado (CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

Problemas de otimização estrutural podem ser formulados com diversas abordagens, as quais normalmente diferem no modo como as variáveis de projeto escolhidas definem a geometria do problema. Essas abordagens são normalmente divididas na literatura nas três classes de problemas ilustrados na Figura 2.1: otimização paramétrica, otimização de forma e otimização topológica. Em problemas de otimização paramétrica típicos, as variáveis de projeto representam alguma característica geométrica da estrutura como a espessura de uma placa ou a área de seção transversal de algum elemento. A principal característica desse tipo de problema é que a forma e os elementos que compõem a estrutura são conhecidos a princípio e apenas suas dimensões podem ser alteradas durante a otimização. Na otimização de forma, as variáveis de projeto descrevem a forma das fronteiras de elementos da estrutura. Nesse tipo de problema a forma das fronteiras é então otimizada, no entanto a conectividade da estrutura não pode ser alterada e conseqüentemente novas fronteiras não se formam. A otimização topológica na otimização estrutural consiste na determinação da distribuição ótima de material dentro de uma região definida de uma estrutura. Possui como vantagem o fato de não serem necessárias descrições precisas da estrutura projetada anteriormente ao processo de otimização. As únicas características necessárias à definição do problema envolvem as cargas aplicadas, suportes, o volume, restrições de projeto e um domínio limite onde deve estar contida a estrutura projetada. A otimização topológica é vista como a abordagem mais flexível de otimização estrutural dado que as variáveis de projeto descrevem simultaneamente a distribuição e forma dos elementos que compõem uma estrutura (BENDSØE; SIGMUND, 2004; CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009).

O problema de otimização topológica foi concebido por Bendsøe e Kikuchi (1988) usando a abordagem de homogeneização. Desde então, essa formulação inicial do problema se diversificou em um grande número de formas possíveis para solução desse problema de otimização. Os métodos mais encontrados na literatura podem ser divididos em duas principais categorias: os métodos baseados em fronteiras e os métodos de densidade. Esses métodos se

Figura 2.1 – Abordagens de otimização estrutural.



Fonte: Adaptado de (BENDSØE; SIGMUND, 2004)

diferem pela forma como as variáveis de projeto descrevem a topologia resultante.

Dos métodos baseados em fronteira, a abordagem mais utilizada é o método *Level-Set* (CHUNG et al., 2019). Nesse caso, a fronteira  $\Gamma$  da estrutura é definida implicitamente por uma função  $\phi$  denominada função *Level-Set*. Estabelecido um valor constante  $c$ , normalmente igual a 0, a função  $\phi$  separa as regiões com material  $\Omega$  e sem material  $D$  como na Equação 2.1, onde  $i$  corresponde a um ponto no domínio (DIJK et al., 2013; WANG; WANG; GUO, 2003).

$$\begin{cases} \phi(i) > c, & i \in \Omega \quad \text{material} \\ \phi(i) = c, & i \in \Gamma \quad \text{fronteira} \\ \phi(i) < c, & i \in D \quad \text{vazio} \end{cases} \quad (2.1)$$

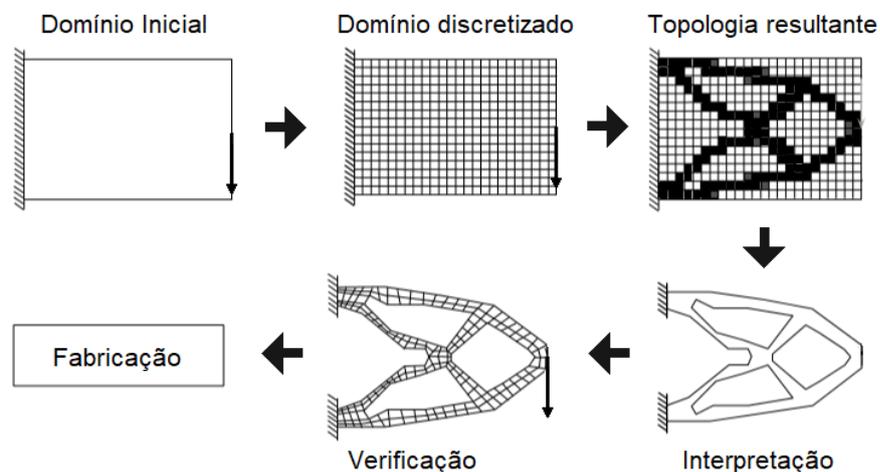
Dada a descrição da estrutura por sua fronteira, o processo de otimização consiste então em mover essa fronteira em busca da topologia ótima para o problema. Normalmente, para atualização iterativa da função *Level-Set*, opta-se pela descrição desse problema em uma forma dinâmica. Considera-se que a fronteira se desloca num tempo fictício  $t$  com campo de velocidades descrito pela Equação 2.2, do tipo Hamilton-Jacobi. Onde  $V$  é chamada função de velocidades, esse termo representa a sensibilidade da movimentação da fronteira em relação a uma função que acomoda a função objetivo e restrições em uma formulação por multiplicadores de Lagrange. A solução dessa equação diferencial para  $\phi$  representa a fronteira correspondente à solução ótima do problema (DUNNING; STANFORD; KIM, 2015; SIGMUND; MAUTE, 2013; WANG; WANG; GUO, 2003).

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\nabla \phi V \quad (2.2)$$

Nos métodos de densidade, a topologia da estrutura otimizada é representada por um campo de densidades artificiais que pode assumir valores iguais a 0, representando um vazio,

ou 1 representando uma região com material, disposto sobre uma malha. Em outras palavras, a descrição de uma solução pode ser entendida como uma renderização em preto e branco de uma imagem, onde cada "pixel" corresponde a um elemento da malha (BENDSØE; SIGMUND, 2004). Vale lembrar que a forma da malha ou o tipo de elemento utilizado são, normalmente, constantes durante a otimização. A Figura 2.2, ilustra a otimização de um componente submetido a otimização topológica por um método de densidades. Nesse caso, parte-se de um domínio inicial com cargas e fixações definidos até a fabricação da peça projetada. Como observado, a representação da solução tem resolução limitada pelo grau de refinamento da malha e requer, a nível de projeto, uma interpretação adequada e verificação dos resultados. Deste modo, a otimização topológica pode ser bem utilizada na definição de projetos em estado inicial, indicando soluções a partir de poucos parâmetros iniciais sobre problema.

Figura 2.2 – Projeto estrutural utilizando um método de densidades em otimização topológica.



Fonte: Adaptado de Silva (2003)

Na solução desse tipo de problema, a distribuição de densidades artificiais normalmente não é tratada de maneira binária. Tal tratamento discreto implicaria em dificuldades na análise de sensibilidades e elevado custo computacional visto ser um tipo de problema com um grande número de variáveis de projeto. A solução desse problemas binários é observada na literatura no uso de algoritmos genéticos e outras técnicas de otimização não baseadas no gradiente de funções. Por outro lado, uso de variáveis contínuas se mostra mais adequado já que, para essa aplicação, algoritmos de otimização baseados no gradiente permitem uma busca mais eficiente por melhores soluções para o problema. Normalmente métodos de densidade são então modelados com variáveis de projeto contínuas que modificam a rigidez dos elementos da malha através de funções de parametrização. Um eficiente método de densidade baseado nessa parametrização da rigidez é denominado SIMP (*Solid Isotropic Material with Penalization*) (BENDSØE; SIGMUND, 2004; WU, 2016).

### 2.1.1 O método SIMP

Como característico dos métodos de densidade, no SIMP discretiza-se o domínio do problema a ser avaliado em uma malha e a cada elemento dessa malha é associado uma variável denominada densidade artificial. Cada uma dessas variáveis pode assumir um valor entre 0 e 1, e é empregada de forma a modificar as propriedades mecânicas locais do material. O processo de otimização nesse caso consiste em determinar a melhor distribuição de densidades nos elementos de modo a buscar o valor ótimo de uma função objetivo sob determinadas restrições (BENDSØE; SIGMUND, 2004).

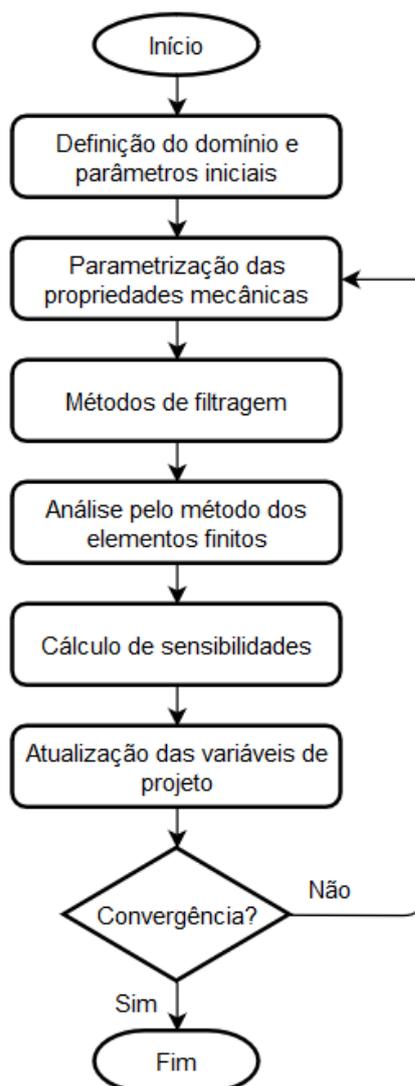
Uma vasta parcela dos estudos de base em otimização topológica de estruturas pelo método SIMP tem foco nos problemas de minimização da propriedade *compliance*. Tal propriedade é definida em Gournay, Allaire e Jouve (2008) como o trabalho realizado por uma força na deformação da estrutura ou como a energia elástica armazenada. Em outras palavras, o *compliance* pode ser entendido como uma medida de flexibilidade ou o inverso da rigidez de uma estrutura. Em um problema estrutural avaliado pelo método dos elementos finitos, essa medida pode ser calculada pelo produto do vetor global de carregamentos  $\mathbf{F}$  pelo vetor global de deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ . Normalmente, problemas de otimização desse tipo apresentam restrições aplicada no volume total de material disponível para formação da estrutura. Esse tipo de problema pode ser formulado como na Equação 2.3 onde a variável de projeto é a distribuição de densidades  $\mathbf{x}$  no domínio avaliado. Essa distribuição  $\mathbf{x}$  contém as densidades  $x_e$  de cada um dos elementos da discretização. Nesse tipo de problema, o *compliance*  $c(\mathbf{x})$  representa a função objetivo. Além disso, apresentam-se uma restrição  $v(\mathbf{x})$  limitando o volume de material despendido ao um máximo  $v_{max}$ , o volume do material é calculado como o somatório das densidades  $x_e$  de cada elemento da discretização, dado que  $N_e$  seja o total de elementos. Na relação de equilíbrio linear elástico ( $\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{F}$ ), a matriz de rigidez  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  é diretamente relacionada às densidades  $x_e$  visto que essas densidade controlam a rigidez dos elementos. Nota-se também que é necessária a limitação aos valores possíveis para as densidades artificiais. A imposição de um valor mínimo  $x_{min}$  não nulo às densidades previne singularidades na solução do problema estrutural.

A Figura 2.3 descreve sucintamente as etapas dos processo de otimização topológica pelo método SIMP. Em uma primeira etapa, o domínio estabelecido para projeto do componente é especificado, assim como o carregamento imposto, condições de contorno, valores iniciais das variáveis e demais parâmetros que controlam o processo.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar:} \quad c(\mathbf{x}) = \mathbf{u}^T \mathbf{F} \\ \text{sujeito a:} \quad \sum_{e=1}^{N_e} x_e - v_{max} \leq 0 \\ \quad \quad \quad \mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{F} \\ \quad \quad \quad 0 \leq x_{min} \leq (\mathbf{x}) \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.3)$$

A característica central do método SIMP consiste em sua abordagem para modelar as propriedades da estrutura em função das densidades artificiais dos elementos. Assumindo-se

Figura 2.3 – Fluxograma descrevendo o funcionamento padrão do método SIMP.



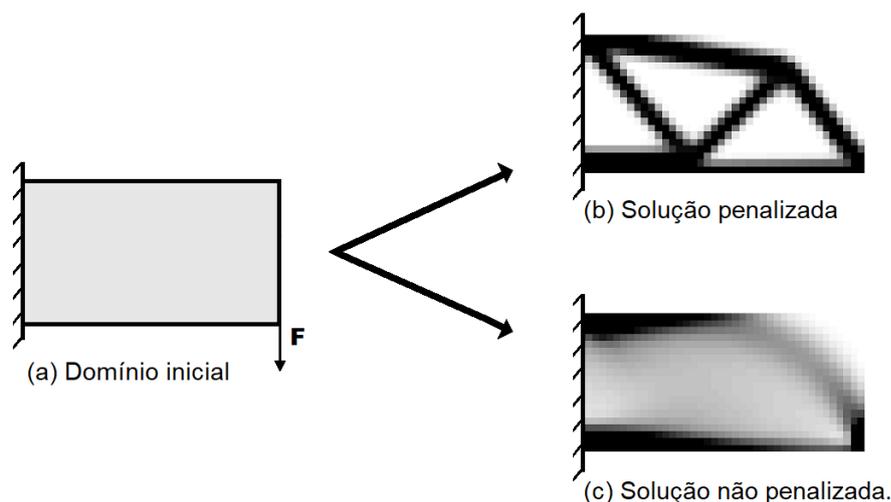
que, dentro de um elemento, as propriedades são constantes e a parametrização dessas é feita através da chamada função de penalização. Essa função tem a forma de uma lei de potência, tendo como base as densidades artificiais  $x$  e como expoente o fator de penalização  $fp$ . A matriz constitutiva  $C$  de um elemento penalizado é então obtida multiplicando a função de penalização pela matriz constitutiva  $C_0$  correspondente ao material sólido, como na Equação 2.4. Desse modo, uma densidade artificial igual a zero corresponderia a uma região sem material enquanto uma densidade igual a 1 corresponderia a um material definido pelas propriedades constitutivas contidas na matriz  $C_0$ .

$$C = x_e^{fp} C_0 \quad (2.4)$$

A escolha do fator de penalização é de integral importância visto que não apenas parametriza o comportamento mecânico do componente avaliado mas define diretamente o tipo de estruturas resultante da aplicação método SIMP. Em otimização topológica, buscam-se originalmente soluções que representem um componente descrito apenas por regiões com material

e regiões sem material. Na ideia de densidades artificiais, tal afirmação significa que apenas densidades iguais a zero ou um devem aparecer na solução, evitando-se os valores intermediários. Esse requisito na definição original dos métodos de densidade tem origem em restrições de fabricação de peças, visto que métodos de manufatura tradicionais dificilmente são capazes de reproduzir estruturas porosas com essas densidades intermediárias (também conhecidas na literatura da área como regiões cinzentas). A Figura 2.4 ilustra duas possíveis soluções de um problema de otimização definido em (a), nesse tipo de ilustração as densidades de cada elemento são mapeadas e a malha colorida em uma escala de cinza onde a cor branca indica a densidade artificial mínima (ausência de material) e a cor preta indica uma densidade igual a 1. Na Figura 2.4 (b) a solução é tal que evita as densidades intermediárias, enquanto na Figura 2.4 (c) a solução apresenta regiões significativas com densidades intermediárias.

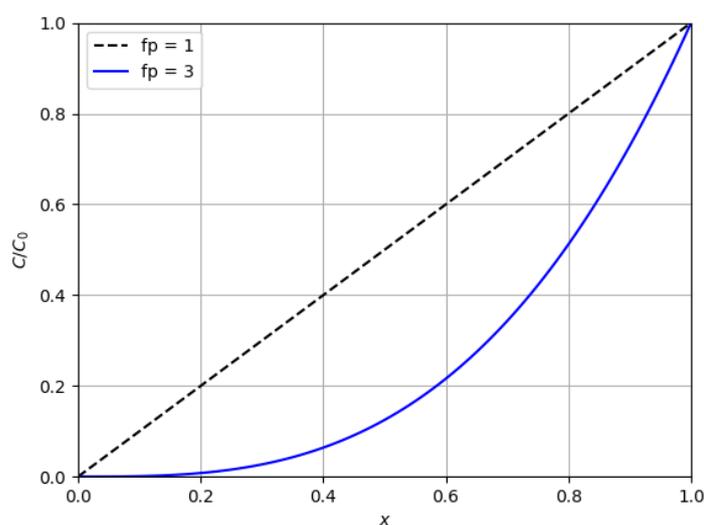
Figura 2.4 – Comparando resultados do método SIMP (b) sem densidades intermediárias e (c) com densidades intermediárias presentes.



O controle da presença das densidade intermediárias nas soluções pode ser realizado através de valores específicos para o fator de penalização  $f_p$  empregado. O uso de um fator de penalização maior que 1 faz com a rigidez efetiva de um elemento de densidade intermediária ( $0 < x < 1$ ) seja desproporcionalmente baixa em relação à densidade. Assim, este tipo de solução é evitada durante o processo de otimização visto que é percebida como um uso não eficiente de material (BENDSØE; SIGMUND, 2004; CHRISTENSEN; KLARBRING, 2009). Para ilustrar esse conceito a Figura 2.5 mostra a variação da rigidez efetiva de um elemento em função da densidade considerando uma parametrização como a do método SIMP. Duas curvas são mostradas: uma indicando uma relação linear com fator de penalização igual a um e outra com um fator de penalização igual a três. Nota-se que na região intermediária das curvas a distância entre elas é mais elevada e valores significativamente mais baixos de rigidez são encontrados para a curva com  $f_p$  igual a 3 em mesmos valores de densidade. Por outro lado, nas extremidades da curva (densidades zero e um), os valores de rigidez efetiva se aproximam. Entendendo os valores de densidade artificial como "custo" na otimização, dada a restrição de volume de

material, observa-se que os valores de densidade intermediários são visto como menos efetivos no problema de otimização com fator de penalização igual a três e assim evitados na solução. No entanto, o uso desse artifício de penalização para controle das densidades intermediárias traz outras consequências para o problema de otimização. Rozvany (2001) mostra que uso dessa forma de penalização pode resultar em topologias resultantes com características inferiores à solução de problemas não penalizados. Visto que, problemas de otimização originalmente convexos sob condições específicas tem essa propriedade quebrada pelo uso da penalização com  $fp$  maior que 1. Em outras palavras, não há mais garantia de uma solução ótima para estes casos.

Figura 2.5 – Ilustrando a relação entre a rigidez efetiva e a densidade artificial para diferentes fatores de penalização  $fp$ .



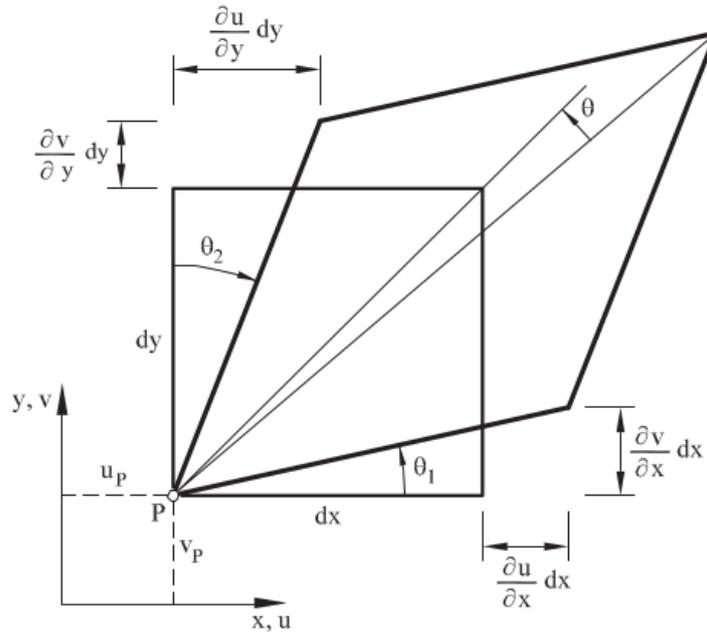
### 2.1.2 Análise pelo método dos elementos finitos aplicada à abordagem SIMP

Para avaliação da função objetivo e algumas restrições (como as restrições de tensão ou estabilidade) o método dos elementos finitos (MEF) normalmente é aplicado para solução do problema. De maneira geral, o MEF é um método de aproximação numérica para solução de equações diferenciais em problemas contínuos. Conforme definido em Zienkiewicz e Taylor (1989), essa aproximação é feita através da divisão do domínio do problema em um número de subentidades denominadas elementos finitos. Esses elementos devem ser interconectados por um número discreto de nós localizados em suas fronteiras. Na aplicação do método à análise de tensões e deformações de uma estrutura sólida, os deslocamentos definidos nesses nós são as variáveis desconhecidas do problema. Funções de aproximação montadas em uma matriz  $\mathbf{N}$  são então escolhidas para descrever os deslocamentos  $\mathbf{a}_e$  em qualquer ponto dentro de um elemento em função dos deslocamentos  $\mathbf{u}_e$  encontrados nos nós, como na Equação 2.5. As funções de aproximação utilizadas dependem do tipo de elemento finito escolhido para o problema.

$$\mathbf{a}_e(x, y) = \mathbf{N}(x, y)\mathbf{u}_e \quad (2.5)$$

Para as análises de tensões e deformações nos problemas de otimização aqui estudados é considerada a teoria linear elástica. De maneira simplificada, a hipótese de linearidade se define em duas características principais: assume-se uma relação linear entre as tensões e deformações e que apenas pequenas deformações são admissíveis na definição de um elemento infinitesimal. Simplificando o problema ao caso bidimensional, o campo de deslocamentos  $\mathbf{a}$  é descrito em cada ponto do domínio pelos deslocamentos  $u$  na direção  $x$  e  $v$  na direção  $y$ . Com as considerações mencionadas e tomando-se um elemento infinitesimal, esses deslocamentos e as deformações causadas são ilustradas na Figura 2.6.

Figura 2.6 – Deformações definidas em um elemento infinitesimal de um meio contínuo.



Com os deslocamentos definidos, as deformações derivadas na teoria elástica linear,  $\epsilon_e = [\epsilon_x \ \epsilon_y \ \gamma_{xy}]$ , são entendidas como nas Equações 2.6 a 2.8. Nesse caso,  $\epsilon_x$  e  $\epsilon_y$  são deformações normais nas direções  $x$  e  $y$  respectivamente, enquanto  $\gamma_{xy}$  corresponde à deformação cisalhante no plano  $xy$ .

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.6)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.7)$$

$$\gamma_{xy} = \theta_1 + \theta_2 = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.8)$$

Os problemas de elasticidade bidimensionais podem ser divididos em duas categorias: um estado plano de tensões ou um estado plano de deformações. A identificação do tipo de condição depende da geometria do problema e para cada uma dessas, são assumidas diferentes

características constitutivas. Em um estado plano de deformações uma das dimensões da estrutura, no caso o comprimento, é muito maior que as outras. As cargas consideradas são ortogonais ao eixo longitudinal (eixo paralelo ao comprimento). Por outro lado, um estado plano de tensões é identificado em uma estrutura onde uma de suas dimensões, a espessura, é muito menor que as outras. Nesse caso todas as cargas consideradas são contidas no plano médio da estrutura e as tensões em uma direção perpendicular a esse plano são nulas (OÑATE, 2009).

Na teoria da elasticidade as deformações  $\epsilon_e$  e as tensões  $\sigma_e$  são conectadas através da relação constitutiva identificada na Equação 2.9. Nessa equação o termo  $\mathbf{C}$  é denominado matriz constitutiva. Considerando um problema de estado plano de tensões e um material isotrópico a matriz constitutiva é dada pela Equação 2.10. Em um material isotrópico têm-se que suas propriedades mecânicas são idênticas em qualquer direção. Nesse caso o material é descrito por duas propriedades: um módulo de elasticidade  $E$  e um módulo de Poisson  $\nu$ .

$$\sigma_e = \mathbf{C}\epsilon_e \quad (2.9)$$

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \nu \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

O método SIMP foi normalmente utilizado para otimização de estruturas constituídas por materiais isotrópicos mas materiais ortotrópicos, com propriedades mecânicas distintas nas direções ortogonais, podem ser incluídos a partir de uma modificação ao modelo, como mostrado em Hoglund e Smith (2015) e Alamo e Silva (2012). Tal alteração consiste em substituir a matriz constitutiva empregada na definição de cada elemento finito por uma que modele elementos ortotrópicos elásticos. Essa matriz, derivada a partir da Lei de Hooke, é definida na Equação 2.11 considerando-se um estado plano de tensões. Onde  $E_x$  e  $E_y$  são os módulos de elasticidade nas direções ortotrópicas principais e  $\nu_{12}$  e  $\nu_{21}$  os respectivos coeficientes de Poisson.

$$\mathbf{C} = \frac{1}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{yx}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_x(1 - \nu_{xy}\nu_{yx})}{2\nu_{xy}} \end{bmatrix} \quad (2.11)$$

Definida as relações constitutivas e as funções de aproximação do modelo, devem ser então desenvolvidas as relações de equilíbrio entre a deformação em um elemento e as forças externas aplicadas ao mesmo. Uma possível abordagem é a aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV). Tal princípio declara que dada uma estrutura em equilíbrio submetida a deslocamentos virtuais arbitrários, o trabalho virtual do carregamento externo na estrutura é igual à energia virtual de deformação das tensões internas. Considerando um elemento bidimensional, a aplicação do PTV a um elemento finito leva à Equação 2.12 onde são consideradas três tipos forças externas atuantes no elemento:  $\mathbf{b}$  são forças distribuídas por unidade de volume,  $\mathbf{t}$  são forças distribuídas na fronteira do elemento e  $\mathbf{p}_i$  são forças pontuais nos nós. Nessa Equação

o termo da esquerda representa a energia interna de deformação enquanto o termo da direita representa o trabalho das forças externas compatíveis (OÑATE, 2009; LOGAN, 2007).

$$\iiint_{V_e} \delta \epsilon_e \boldsymbol{\sigma}_e dV_e = \iiint_{V_e} \delta \mathbf{a}_e^T \mathbf{b} dV_e + \iint_{S_e} \delta \mathbf{a}_e^T \mathbf{t} dS_e + \delta \mathbf{a}_e^T \mathbf{p}_i \quad (2.12)$$

Dada a relação linear entre deslocamentos  $\delta \mathbf{a}_e$  em função de deslocamentos virtuais arbitrários  $\delta \mathbf{u}_e$  fornecida pelas funções de aproximação  $\mathbf{N}$ , como em  $\delta \mathbf{a}_e = \mathbf{N} \delta \mathbf{u}_e$ , e entendendo as deformações como derivadas dos deslocamentos, Equações 2.6 a 2.8, as deformações podem ser então definidas como na Equação 2.13. Nessa equação o termo  $\mathbf{B}$ , chamada matriz de deslocamento-deformação, contém as derivadas das funções de aproximação em  $\mathbf{N}$  e depende do tipo de elemento finito utilizado.

$$\boldsymbol{\epsilon}_e(x, y) = \mathbf{B}(x, y) \mathbf{u}_e \quad (2.13)$$

A partir da definição de deformações mostrada na Equação 2.13 e da relação constitutiva na Equação 2.9, a relação do PTV pode ser reescrita como na Equação 2.14.

$$\left( \iiint_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_e \mathbf{u}_e \right) \delta \mathbf{u}_e = \left( \iiint_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV_e + \iint_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS_e + \mathbf{N}_i^T \mathbf{p}_i \right) \delta \mathbf{u}_e \quad (2.14)$$

Como os deslocamento nodais são arbitrários, a Equação 2.14 pode ser simplificada para a Equação 2.15.

$$\iiint_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_e \mathbf{u}_e = \iiint_{V_e} \mathbf{N}^T \mathbf{b} dV_e + \iint_{S_e} \mathbf{N}^T \mathbf{t} dS_e + \mathbf{N}_i^T \mathbf{p}_i \quad (2.15)$$

Notando-se que o termo  $\mathbf{u}_e$  corresponde aos deslocamentos nodais e não varia ao longo do volume do elemento, a Equação 2.15 de equilíbrio obtida mostra um sistema algébrico que pode ser resolvido para os deslocamentos nodais. O sistema pode ser escrito na forma matricial como mostrada na Equação 2.16.

$$\mathbf{k}_e \mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e \quad (2.16)$$

onde  $\mathbf{f}_e$  reúne os carregamento externos impostos ao elemento, calculados pelo lado direito da Equação 2.15 e  $\mathbf{k}_e$  é a matriz de rigidez do elemento, calculada como na Equação 2.17. A integração da matriz de rigidez como mostrada é feita ao longo do volume  $V_e$  do elemento finito considerado.

$$\mathbf{k}_e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_e \quad (2.17)$$

Definidas as matrizes de rigidez e vetores de carga de cada elementos, esses são então reunidos para construção da equação de equilíbrio geral para o problema, Equação 2.18. A matriz de rigidez global  $\mathbf{K}$  é uma matriz quadrada, simétrica e com número de linhas igual ao número de grau de liberdades do sistema analisado. Pelo método da rigidez direta, os elementos da matriz global são construídas a partir da contribuição de cada elemento à posição corresponde aos nós

que o compõe. Dessa forma, elementos com nós compartilhados tem contribuições somadas na posição correspondente a esse nó. Procedimento análogo é utilizado para montagem do vetor global de carregamento  $F$ .

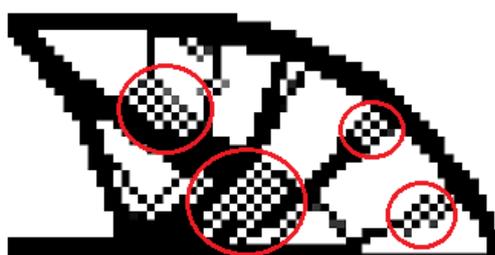
$$Ku = F \quad (2.18)$$

No sistema como montado a matriz de rigidez global é ainda singular (LOGAN, 2007). Para solução do sistema é ainda necessária a aplicação condições de contorno. Com as condições conhecidas definidas, o sistema pode finalmente ser resolvido para os deslocamentos nodais desconhecidos.

### 2.1.3 Problemas numéricos e método de filtragem

Associada à abordagem de penalização utilizada no método SIMP alguns problemas numéricos podem aparecer nos resultados desse tipo de otimização como a presença de padrões de tabuleiro, mínimos locais e dependência de malha. Os padrões de tabuleiro consistem em regiões de uma solução de otimização topológica onde as densidades dos elementos se alternam sucessivamente entre zero e um, como na Figura 2.7. Este tipo de solução exibe uma rigidez estrutural numericamente acima do esperado, porém artificial. Esse tipo de padrão aparece na verdade como resultado de uma superestimativa da rigidez obtida no modelo de elementos finitos. Deste modo, esse tipo de padrão deve de algum modo ser evitado, visto que não corresponde realmente a distribuições ótimas de densidades (DÍAZ; SIGMUND, 1995; SIGMUND; PETERSSON, 1998)

Figura 2.7 – Regiões características do problema de tabuleiro em uma solução de otimização topológica.



A dependência de malha consiste na obtenção de soluções distintas para um mesmo problema de otimização dependendo do nível de discretização da malha utilizada. Como discutido em Sigmund e Petersson (1998) estruturas cada vez mais detalhadas podem surgir com o refinamento da malha, denotando não unicidade da solução de otimização topológica.

Para evitar os problemas numéricos, padrões de tabuleiro e dependência de malha, diversos métodos foram propostos na literatura. Um tipo de solução para ambos os problemas consiste no uso de métodos de filtragem. Nesse contexto, um filtro opera modificando a densidade de cada dos elementos em função das densidades de seus elementos vizinhos. Essa modificação

pode ser feita de diversas maneiras, Svanberg e Svärd (2013) descreve filtros lineares de densidade como mostrado nas Equações 2.19 e 2.20.

$$\tilde{\rho}_i = \sum_j w_{ij} \rho_j \quad (2.19)$$

As densidades modificadas  $\tilde{\rho}$  são obtidas em função de fatores de peso  $w$  e das densidades originais  $\rho$ . Para o caso do filtro linear os fatores de peso são calculados como na equação abaixo. Na Equação 2.20,  $N_i$  representa o grupo contendo os vizinhos do elemento  $i$  contidos em uma região circular definida pelo raio do filtro  $r_F$ . Já o termo  $d(i, j)$  representa a distância entre o centroide dos elementos  $i$  e  $j$ .

$$\begin{cases} w_{ij} = \frac{r_F - d(i, j)}{\sum_{k \in N_i} (r_F - d(i, k))} & \text{se } j \in N_i \\ w_{ij} = 0 & \text{se } j \notin N_i \end{cases} \quad (2.20)$$

Nesse tipo de filtro, o parâmetro raio do filtro determina a área de atuação do mesmo e para evitar o aparecimento de padrões de tabuleiro basta que esse raio englobe os vizinhos imediatos de cada elemento. Além disso, esse parâmetro pode ser utilizado para controlar o nível de detalhamento das soluções restringindo assim a dependência de malha. Em outras palavras, pode-se de certa forma limitar o tamanho mínimo de partes da solução de otimização topológica (CARDOSO; FONSECA, 2003).

Além do filtro linear descrito, outros filtros podem ser encontrados na literatura referente a problemas de otimização topológica. Wang e Wang (2005) mostra o uso de fatores de peso controlados por distribuições Gaussianas onde a variância da distribuição é regulada pelo raio de atuação do filtro. Já Sigmund (2007) emprega uma nova classe de filtros baseados em operadores morfológicos de imagens. Esse tipo de filtro torna possível a completa eliminação de regiões com densidades intermediárias na solução.

Outro problema numérico do método SIMP é a presença de mínimos locais na solução do problema. Tal característica implica que um mesmo problema de otimização topológica pode chegar em soluções distintas dadas distribuições iniciais de densidade diferentes. Um recurso bastante empregado para se elevar a probabilidade de se encontrar uma boa solução, consiste nos métodos de continuação. Esse tipo de abordagem consiste em se modificar a função objetivo do problema gradativamente ao longo das iterações. A otimização começa empregando-se um fator de penalização igual a 1, correspondente a um problema convexo, e o mesmo é incrementado sucessivamente até se atingir o valor desejado inicialmente (SIGMUND; PETERSSON, 1998).

## 2.2 Otimização Topológica com Restrições de Flambagem

Abordagens de otimização como mostradas pela Equação 2.3, descrevendo um problema de minimização de *compliance* com restrições no volume de material, normalmente resultam em estruturas com configuração dominada por elementos resistentes a tração ou compressão. Como a carga limite de flambagem está relacionada à rigidez a flexão, essas estruturas podem ser

suscetíveis à falha por flambagem (CLAUSEN; AAGE; SIGMUND, 2016). Do mesmo modo, Neves, Rodrigues e Guedes (1995) já argumentavam que em um problema restrito a volumes máximos, a otimização topológica acaba gerando estruturas com elementos esbeltos. Neste tipo de elementos, o limite de flambagem se torna o critério mais importante para falha da estrutura. Deste modo, a implementação de restrições de flambagem na otimização se mostra essencial.

Nos últimos anos diversos estudos na implementação de restrições de flambagem em otimização topológica foram desenvolvidos, explorando problemas de otimização como mostrado na Equação 2.21. A restrição de flambagem é adicionada como complemento ao problema padrão de minimização do *compliance*. Nesse tipo de restrição adicionada o menor autovalor  $\lambda_i$  encontrado na análise de flambagem da estrutura é limitado por um valor mínimo  $P_c$ . No projeto de uma estrutura a restrição é controlada de modo que o carregamento imposto a ela não resulta em falha por flambagem. Nessa linha de pesquisa, Ferrari e Sigmund (2019) revisa características pertinentes à introdução de restrições de flambagem em problemas de otimização topológica. Nesse estudo é realizado o caráter competitivo entre as análises de rigidez e estabilidade em otimização. Além disso, são encontrados problemas inerentes a este tipo de problema como a troca de modos críticos de flambagem e a consistências na análise de sensibilidades.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{minimizar: } c = \mathbf{U}^T \mathbf{F} \\ \text{sujeito a: } \sum_{e=1}^{N_e} x_e - v_{max} \leq 0 \\ \min(\lambda_i) \geq P_c \\ \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{F} \\ 0 \leq x_{min} \leq x \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.21)$$

Gao e Ma (2015) também explora o uso de restrições de flambagem em problemas de mínimo *compliance*. Para convergência a melhores soluções, os autores propõem o uso desse tipo de otimização em duas etapas. Inicialmente, o problema de otimização seria resolvido sem restrições de flambagem. As soluções obtidas nessa etapa primeira seriam então utilizadas como solução inicial ao problema com as restrições de flambagem. Destaque é dada também ao estudo de métodos para lidar com a presença de modos artificiais de flambagem em estruturas isotrópicas. Os modos artificiais são modos de flambagem encontrados na estrutura referentes a regiões com densidade muito baixa, os quais serão discutidos de maneira mais completa posteriormente neste trabalho.

Em Clausen, Aage e Sigmund (2016) busca-se explorar a capacidade de métodos de manufatura aditiva em fabricar componentes mais complexos e resistentes à flambagem. Para tal, é proposto um novo tratamento para o problema de otimização topológica denominado abordagem de revestimento. Essa diferente abordagem visa obter soluções de otimização compostas de cascas sólidas preenchidas por estruturas porosas. Ambos resultados numéricos e experimentais obtidos neste trabalho sugerem que o uso deste tipo de componentes porosos pode resultar em grandes melhorias na rigidez a flambagem das estruturas. Ainda sobre aplicações de manufatura aditiva, Thomsen, Wang e Sigmund (2018) argumentam sobre o potencial uso de estruturas

celulares periódicas (estruturas *lattice*) em componentes submetidos a cargas compressivas. Para tal, é apresentada uma abordagem de otimização topológica para o projeto de microestruturas periódicas visando otimizar sua resistência à flambagem. O método foi empregado na otimização de estruturas bidimensionais e melhorias na resistência foram obtidas nos casos avaliados.

Normalmente, a exemplo dos artigos sobre restrições de flambagem citados anteriormente, vê-se a utilização de análise linear de flambagem em problemas de estabilidade. Na maioria das estruturas, uma análise não linear poderia fornecer resultados mais precisos sobre o comportamento em flambagem, mas a um custo computacional muito elevado em um problema de otimização. Assim, devido a simplicidade de implementação e eficiência computacional, a análise linear se mostra presente em diversos trabalhos na área (FERRARI; SIGMUND, 2019).

### 2.2.1 Análise de flambagem linear

Segundo Cook et al. (2002), flambagem é a perda de estabilidade de uma estrutura em equilíbrio sem necessariamente uma fratura prévia do material. Uma das formas de se entender o fenômeno de flambagem consiste na ideia de instabilidade por bifurcação. Na instabilidade por bifurcação presume-se que, eventualmente, há uma intensidade de carregamento específica tal que a partir desse ponto a configuração estática da estrutura pré flambagem deixa de ser uma condição de equilíbrio e uma solução alternativa, flambada, torna-se também possível. A instabilidade por bifurcação ocorre quando a estrutura converte energia de deformação de membrana em energia de deformação de flexão, sem alteração do carregamento externo.

Para avaliar a flambagem por bifurcação assume-se que o carregamento imposto sobre uma estrutura é capaz de modificar a rigidez da mesma. Dessa forma, pode-se dizer que a instabilidade nesse caso tem origem em efeitos observados em uma análise não linear da estrutura. especificamente nesse caso, trata-se de uma não linearidade geométrica dada a consideração de uma rigidez alterada pelas deformações e mudanças de geometria da estrutura em decorrência do estado de tensões a qual ela se submete. De maneira generalizada, para entender as deformações de uma estrutura dada essa condição não linear, uma possibilidade é a definição de deformações como no tensor de Green, Equações 2.22 a 2.24 (COOK et al., 2002; BORST et al., 2012). Nesse caso, é considerada uma análise bidimensional tendo como referências os deslocamentos  $u$  e  $v$  como definidos na Figura 2.6. Novamente,  $\epsilon_x$  corresponde a uma deformação normal na direção do eixo  $x$ ,  $\epsilon_y$  a uma deformação normal na direção  $y$  e  $\gamma_{xy}$  uma deformação cisalhante no plano  $xy$ .

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \quad (2.22)$$

$$\epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right] \quad (2.23)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left[ \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right] \quad (2.24)$$

Para pequenas deformações e rotações a definição das deformações de Green se simplificam à formulação clássica para pequenas deformações, como nas Equações 2.6 a 2.8. Dessa forma, as deformações nas Equações 2.22 a 2.24 podem ser visualizadas como a soma entre os termos para pequenas deformações e os termos de segunda ordem restantes. Retornando com essa ideia ao desenvolvimento das relações de equilíbrio pelo PTV na Seção 2.1.2 podemos separar a integral definindo a energia de deformação interna em duas partes. A primeira parte inclui apenas os termos de  $\epsilon$  correspondente a pequenas deformações e uma segunda incluindo apenas os termos de segunda ordem. A energia de deformação  $U_g$  associada a essa segunda parte pode ser então definida como na Equação 2.25.

$$U_g = \iiint_{V_e} \left\{ \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right] \sigma_x + \dots + \left( \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} \right) \tau_{xy} \right\} dV_e \quad (2.25)$$

Assim como na Seção 2.1.2 a equação de equilíbrio do PTV pode ser organizada em forma matricial, agora sendo incluído o termo  $U_g$ . De maneira análoga, a dedução segue como anteriormente e, nesse caso, a inclusão do novo termo de energia resulta em um termo adicional  $\mathbf{k}_{eg}$  na relação de equilíbrio do problema como mostrado na Equação 2.26. Entende-se que a rigidez do elemento agora é composta de duas partes com características distintas. A primeira depende apenas das propriedades constitutivas iniciais do material, correspondendo à matriz de rigidez  $\mathbf{k}_e$  do elemento. Já a segunda parte, denominada matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{k}_{eg}$ , é dependente do estado de tensões do elemento. A soma das duas parcelas de rigidez definem agora a relação entre  $\mathbf{u}_e$  os deslocamentos nodais e  $\mathbf{f}_e$  os carregamentos nodais em um elemento.

$$(\mathbf{k}_e + \mathbf{k}_{eg})\mathbf{u}_e = \mathbf{f}_e \quad (2.26)$$

Na definição da matriz de rigidez as derivadas das funções de forma contidas em  $\mathbf{B}$  são empregadas na definição das deformações como derivadas dos deslocamentos. De maneira similar, para definição da matriz de rigidez geométrica em função do estado de tensões, as derivadas das funções de aproximação  $\mathbf{N}$  são organizadas de maneira apropriada na matriz  $\mathbf{G}$ . Dessa forma, a matriz de rigidez geométrica de um elemento pode ser obtida como na Equação 2.27, com a integral realizada no volume  $V_e$  completo do elemento.

$$\mathbf{k}_{eg} = \int_{V_e} \mathbf{G}^T \begin{bmatrix} \mathbf{s} & 0 \\ 0 & \mathbf{s} \end{bmatrix} \mathbf{G} dV_e \quad (2.27)$$

onde  $\mathbf{s}$  contém as tensões correspondentes ao carregamento organizadas na forma indicada pela Equação 2.28, as quais são calculadas a partir dos deslocamentos nodais utilizando-se a relação constitutiva para o material. De maneira correspondente, a matriz  $\mathbf{G}$  se organiza como na Equação 2.29.

$$\mathbf{s} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

A análise por flambagem linear fornece uma das abordagens mais simples para determinar o comportamento de uma estrutura em flambagem usando o MEF. Este tipo de análise trata da flambagem associada a instabilidade de bifurcação e que assume uma pequena deformação inicial na estrutura induz uma alteração na rigidez dependente das tensões presentes. Como demonstrado em Cook et al. (2002), assume-se em uma primeira etapa um carregamento externo arbitrário  $\mathbf{F}_0$  aplicado sobre a estrutura considerada, definindo uma condição de referência. Análise linear elástica pode ser então aplicada para determinação das tensões nos elementos associadas a esse carregamento inicial. A partir dessas tensões, a matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_{g0}$  pode ser construída a partir da associação das matrizes de cada elemento definida pela Equação 2.27. Assume-se então um comportamento linear entre a rigidez geométrica e o carregamento externo como na Equação 2.30, ou seja, uma multiplicação do carregamento externo por um fator  $\lambda$  multiplica as intensidades das tensões também por  $\lambda$ , mas sem alterar a distribuição dessas tensões.

$$\mathbf{K}_g = \lambda \mathbf{K}_{g0} \quad \text{quando} \quad \mathbf{F} = \lambda \mathbf{F}_0 \quad (2.30)$$

Considera-se agora que na condição flambada deslocamentos  $\mathbf{v}$  são adicionados em relação aos deslocamento da condição de referência  $\mathbf{u}_0$ . Como no ponto de bifurcação o carregamento externo não se altera, são possíveis agora as duas condições mostradas nas Equações 2.31 e 2.32.

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_{g0}) \mathbf{u}_0 = \lambda \mathbf{F}_0 \quad (2.31)$$

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_{g0}) (\mathbf{u}_0 + \mathbf{v}) = \lambda \mathbf{F}_0 \quad (2.32)$$

Subtraindo-se a Equação 2.31 da Equação 2.32 é finalmente obtida a Equação 2.33. Essa Equação corresponde a um problema de autovalor  $\lambda$  e autovetor  $\mathbf{v}$  onde o menor autovalor indica a carga crítica de flambagem e seu correspondente autovetor a forma do modo de flambagem.

$$(\mathbf{K} + \lambda \mathbf{K}_g) \mathbf{v} = 0 \quad (2.33)$$

## 2.2.2 Complicações inerentes à inclusão de restrições de flambagem

Além dos problemas numéricos identificados para problemas de otimização com o método SIMP, a inclusão de restrições de flambagem também implica em diferentes complicações a

serem resolvidas. Dentre estas destacam-se em importância a presença dos modos artificiais de flambagem e o problema da troca de modos.

Nos métodos de otimização topológica a densidade efetiva de um elemento é limitada entre 1 e um valor mínimo pequeno o suficiente para não exercer influência sobre a rigidez da estrutura. Ou seja, regiões da solução de otimização interpretada como sem material alocado correspondem, na verdade, a regiões de baixíssima densidade. Essa limitação impede a presença de possíveis singularidades na análise pelo método dos elementos finitos sem a necessidade de modificar a malha para inserção dessas regiões sem material. Estas zonas de densidade muito pequena resultam em elementos nas matrizes de rigidez pequenos os quais não impactam de forma crítica no problema sem considerações de estabilidade, mas podem originar a presença de modos de flambagem nessas regiões. Esses modos, não correspondendo a regiões da estrutura fisicamente consideradas, são denominados modos artificiais (ou pseudo-modos) de flambagem. Em geral, esses modos apresentam autovalores muito menores que aqueles observados nos modos de flambagem relacionados à estrutura sólida (NEVES; RODRIGUES; GUEDES, 1995).

Para prevenir o aparecimento de modos artificiais encontram-se na literatura métodos baseados no uso de diferentes parametrizações em função das densidades para as matrizes de rigidez e rigidez geométrica em cada elemento. Neves, Rodrigues e Guedes (1995) propõem que elementos com densidade abaixo de um valor mínimo tenham contribuição eliminada na construção da matriz global de rigidez geométrica. Esta abordagem se mostra capaz de evitar os pseudo-modos, mas pode causar oscilações na aplicação do algoritmo de otimização visto que mudanças abruptas na função objetivo e restrições do problema podem ocorrer na remoção súbita da influência de elementos da malha. Alternativamente, um esquema de parametrização da rigidez sem esse comportamento descontínuo pode ser aplicado como mostrado nas Equações 2.34 e 2.35 (BENDSØE; SIGMUND, 2004).

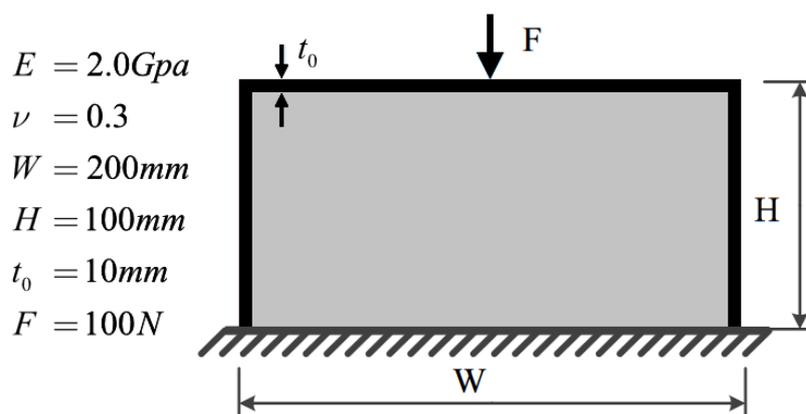
$$E_k = [x_{min} + (1 - x_{min})x^{fP}]E_0 \quad (2.34)$$

$$E_g = [x^{fP}]E_0 \quad (2.35)$$

onde  $x_{min}$  corresponde a uma densidade mínima selecionada para o problema,  $E_0$  o módulo de elasticidade de um elemento com densidade igual a 1 e  $E_k$  e  $E_g$  os módulos de elasticidade empregados na construção das matrizes de rigidez e rigidez geométrica respectivamente. A funcionalidade desse tipo de parametrização em resolver o problema dos modos artificiais é largamente dependente de uma seleção correta do valor da densidade mínima. Para investigar o impacto desse fator, Gao e Ma (2015) propõem o problema ilustrado na Figura 2.8. A estrutura mostrada consiste em uma armação externa com densidade igual a um e preenchimento interno com densidade correspondente ao valor mínimo assumido no modelo. Em uma estrutura real, a região interna de baixa densidade deveria ser ignorada e os modos de flambagem identificados deveriam corresponder apenas à região de densidade igual a um. Nesse caso correspondendo a modos reais. Para os dados indicados na Figura 2.8 foi obtido um primeiro modo de flambagem

igual 2.41 considerando a estrutura real onde a região interna é desconsiderada. Usando esse valor como base de comparação foi construída a Tabela 2.1 onde o primeiro modo de flambagem é calculado para a estrutura considerando diferentes valores de densidade mínima e uma parametrização das propriedades mecânicas segundo o método SIMP com fator de penalização igual a três.

Figura 2.8 – Definição do problema para avaliação de modos artificiais de flambagem.



Fonte: Adaptado de Gao e Ma (2015).

Nota-se que o uso de um valor muito pequeno para a densidade mínima como  $x_{min} \leq 10^{-9}$  identificam-se modos de flambagem com carga crítica abaixo do esperado correspondente à flambagem da região interior da estrutura. Ou seja, tais valores aparentam não ser o suficiente para inibir o aparecimento desses modos artificiais. Densidades mínimas pequenas dessa forma não permitem um distanciamento suficiente entre a magnitude da matriz de rigidez e a matriz de rigidez geométrica. Sendo que, sem essa separação, os pseudo-modos não são evitados. Por outro lado, o uso de uma densidade mínima muito elevada como  $x_{min} \geq 10^{-5}$  resulta em uma excessiva influência dos elementos vazios na rigidez da estrutura que não corresponde à realidade da análise. Na otimização de estruturas planas considerando método SIMP observa-se que para  $10^{-8} \leq x_{min} \leq 10^{-6}$  o número de modos artificiais presentes se reduz drasticamente e sem um impacto elevado na rigidez calculada para a estrutura (GAO; MA, 2015; GAO et al., 2020).

Usualmente, uma restrição de flambagem seria aplicada apenas à menor carga de flambagem, aquela considerada crítica. Naturalmente, o processo de otimização tende a elevar este valor ao longo das iterações. No entanto, esse incremento pode levar essa correspondente carga de flambagem a um valor acima daquelas de outros modos não restringidos. Assim, ocorre uma troca do modo de flambagem crítico avaliado na restrição. Este processo, ocorrendo sucessivamente, pode levar a um agrupamento de diversos modos de flambagem distintos a um mesmo valor de carga crítica (BOOM, 2014; DUNNING et al., 2016).

Como mencionado em Dunning et al. (2016), a troca de modos introduz descontinuidades no problema visto que o modo avaliado como crítico pode ser subitamente substituído por outro, não observado anteriormente, durante a otimização. É sugerido então que não apenas a menor carga de flambagem seja incluída no conjunto de restrições, mas sim um número maior de

Tabela 2.1 – Comparando o impacto do valor mínimo de densidade artificial nos modos de flambagem identificados.

$x_{min}$	$\lambda_1$	Erro [%]
$10^{-3}$	34.37	1323.8
$10^{-4}$	6.56	171.9
$10^{-5}$	2.73	13.3
$10^{-6}$	2.45	1.3
$10^{-7}$	2.42	0.1
$10^{-8}$	2.41	0.0
$10^{-9}$	1.98	-17.8
$10^{-10}$	1.09	-54.8

modos. Desta forma, é possível capturar informações mais completas sobre o comportamento para distintos modos de flambagem e possivelmente evitar essas descontinuidades ao usar informações mais abrangentes. Em uma análise similar, Bruyneel, Colson e Remouchamps (2007) também avaliam dificuldades na convergência de problemas de otimização regulada por flambagem linear. Neste estudo também é ressaltada a necessidade da avaliação de diversos modos de flambagem, e não apenas o primeiro, para evitar oscilações e lentidão inesperada na convergência deste tipo de problema.

O agrupamento dos autovalores de flambagem ao longo da otimização também leva a problemas na análise de sensibilidade dos mesmos. Como mostrado por Díaz e Sigmund (1995) e Seyranian, Lund e Olhoff (1994) esse agrupamento pode chegar em estruturas com autovalores com multiplicidade maior que um. Nesses casos, as sensibilidades em função de parâmetros de projetos da estrutura analisada não podem ser obtidas de maneira convencional. No entanto, Bendsøe e Sigmund (2004) mostram que é possível evitar essa multiplicidade nos autovalores ao se impor um certo espaçamento entre os mesmos na solução. Esse tipo de espaçamento pode ser obtido através do uso de modificações nas restrições do problema de otimização de modo que a segunda restrição (aplicada ao segundo menor autovalor) seja ligeiramente maior que a primeira, a terceira ligeiramente maior que a segunda e assim sucessivamente ao longo de todos os modos avaliados.

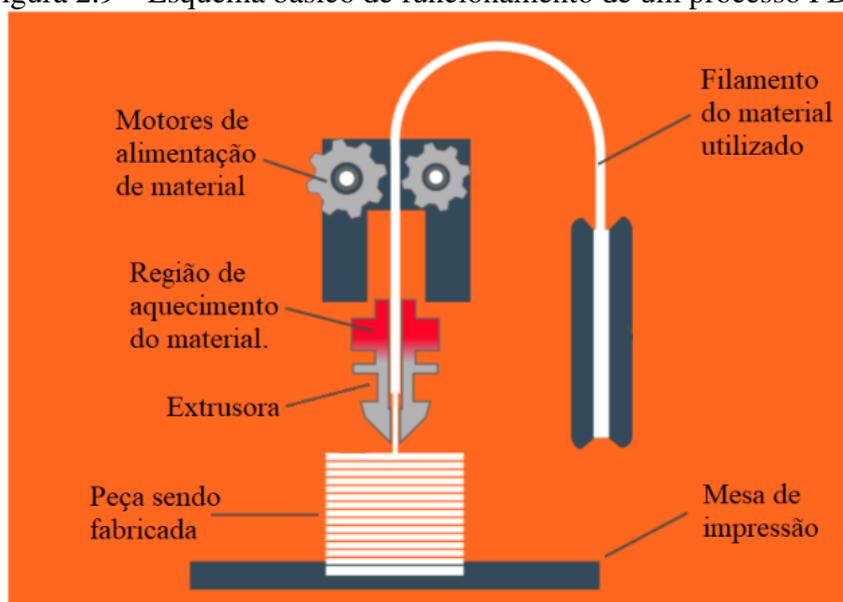
### 2.3 Manufatura Aditiva

Manufatura Aditiva, ou impressão 3D, é o nome dado ao processo de fabricação onde estruturas sólidas são construídas por processos aditivos a partir de um modelo digital. Por processos aditivos entende-se que a peça é criada a partir da composição sucessiva de camadas de material. Devido à abordagem de construção por camadas, processos de manufatura aditiva permitem a fabricação de peças mais complexas quando comparadas àquelas possíveis em processos tradicionais de fabricação. Empregando a abordagem de manufatura aditiva existem distintos processos disponíveis. Dentre esses processos destacam-se a estereolitografia (SLA), a

sinterização seletiva a laser (SLS), a fusão seletiva a laser (SLM) e a modelagem por deposição de filamento fundido (FDM). No método SLA consecutivas camadas de resina em estado líquido são curadas por luz ultravioleta formando o componente final. Nos métodos SLS e SLM material granulado é aquecido localmente por um laser formando as camadas da peça. Especificamente no método SLM os grãos de material são totalmente fundidos a cada camada (ZEGARD; PAULINO, 2016; CHUA; CHOU; WONG, 1998).

Na modelagem por deposição de filamento fundido, material termoplástico é extrudado através de um bocal ao longo da geometria que compõe a peça, camada por camada. O bocal, também chamado de extrusora, é aquecido de modo a manter o plástico a uma temperatura ligeiramente acima da correspondente à transição vítrea do material. Instantes após a extrusão, o filamento depositado se solidifica ligando-se à camada inferior. Ao completar a geometria de uma camada, a extrusora (ou a mesa de impressão) se desloca para a posição da próxima camada, a uma distância definida como espessura de camada (COSTATO, 2016). Na Figura 2.9 encontra-se ilustrado o princípio básico de funcionamento de uma processo FDM.

Figura 2.9 – Esquema básico de funcionamento de um processo FDM.



Fonte: Adaptado de Apm Designs (2020).

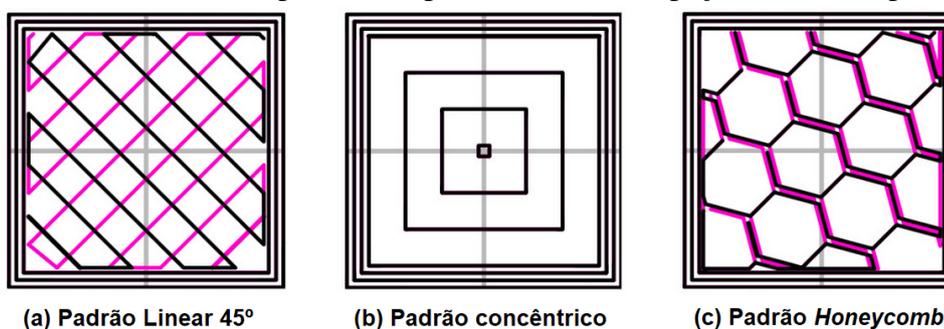
Dentre os materiais tipicamente utilizados para fabricação de peças por FDM destacam-se o PLA (Ácido Polilático) e o ABS (Acrilonitrila Butadieno Estireno). O PLA é um poliéster termoplástico e biodegradável sintetizado a partir do ácido lático proveniente de fontes naturais como milho e trigo. Quanto a suas propriedades mecânicas, apresenta elevado módulo de elasticidade quando comparado a outros termoplásticos, e uma boa capacidade de moldagem (BRITO et al., 2011). Além dos materiais comercialmente já utilizados de forma ampla em processos FDM, propostas como em Compton e Lewis (2014) introduzem novas possibilidades no uso de componentes fabricados por manufatura aditiva. No trabalho citado foi desenvolvido um material para impressão baseado em uma resina epóxi reforçado com fibras, o qual demonstrou rigidez até dez vezes superior aos termoplásticos convencionais utilizados em fabricação FDM.

O uso desse tipo de material composto, permitiria uma expansão do uso de estruturas impressas a aplicações onde elevados carregamentos impediriam o uso de termoplásticos convencionais.

Além da escolha do material adequado ao processo, a construção de peças por FDM envolve uma grande quantidade de parâmetros a serem definidos referentes ao processo de fabricação de peça. Esses parâmetros de fabricação têm grande influência não só no aspecto final da peça mas também em suas propriedades mecânicas. Dentre esses parâmetros destacam-se a espessura de camada, o padrão de preenchimento, o número de perímetros, a densidade de preenchimento e a orientação de impressão.

Como mencionado, na fabricação por FDM a peça é formada gradativamente pela deposição sucessiva de camadas. Deste modo, a espessura dessas camadas é um importante parâmetro do processo a ditar as características da peça fabricada. Uma espessura de camada menor resulta em uma qualidade melhor no acabamento do componente fabricado, mas ao custo de um aumento no tempo necessário para fabricação. Ao construir cada camada da peça seu volume interno é formado pela deposição de material em algum de padrão geométrico repetitivo. Esse padrão geométrico, denominado padrão de preenchimento, pode assumir diversas formas como linear, concêntrico, *honeycomb*, entre outros. A Figura 2.10 ilustra alguns padrões de preenchimento possíveis.

Figura 2.10 – Diferentes padrões de preenchimento em peças fabricadas por FDM.



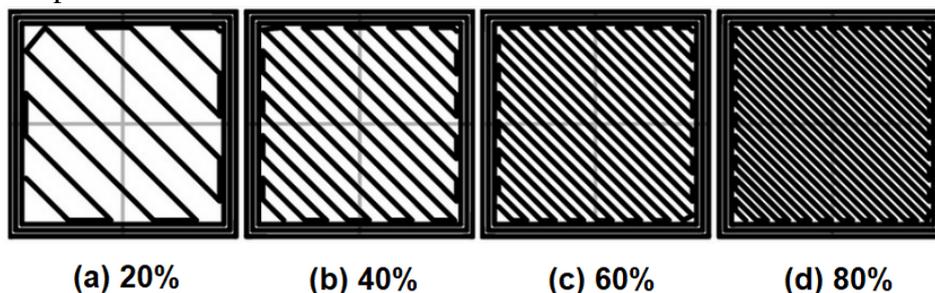
Fonte: Adaptado de Slic3r.org (2019).

Como observado também na Figura 2.10 o preenchimento que constrói o volume interior da peça é impresso envolto em um número de linhas de material depositado ao longo de todo o perímetro externo da camada. Vale ressaltar que o número de perímetros impressos a cada camada da peça eleva a rigidez da mesma.

O parâmetro densidade de preenchimento corresponde à quantidade de material depositado na construção do volume interno de uma peça. Uma densidade igual a 100% representaria uma peça totalmente sólida, onde seu padrão de preenchimento ocuparia todo o volume interno da peça, sem espaços vazios. A Figura 2.11 ilustra peças impressas com diferentes densidades de preenchimento. Normalmente, peças são impressas com uma densidade de preenchimento única em todo seu domínio. No entanto, CNC Kitchen (2020) mostra também a possibilidade de impressão de peças com densidade de preenchimento variável, como mostrado na Figura 2.12.

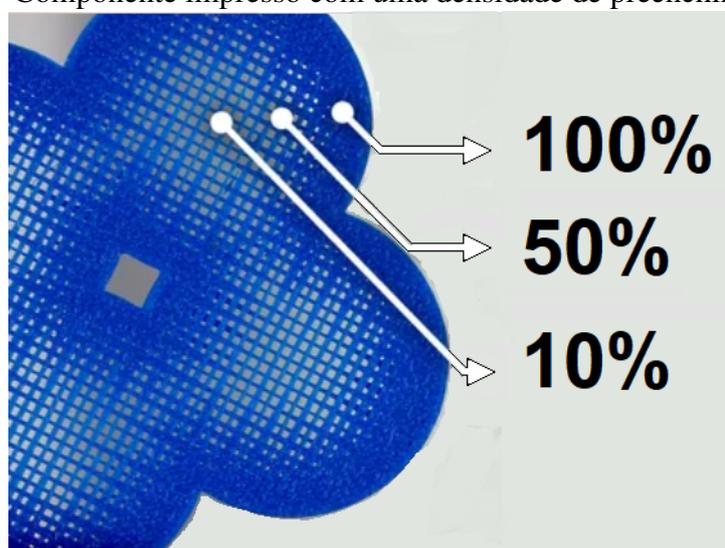
Devido à construção por camadas no método FDM a orientação, em relação à mesa de impressão, com a qual a peça é impressa pode resultar também em propriedades mecânicas

Figura 2.11 – Diferentes densidades de preenchimento comparadas em peças com padrão de preenchimento linear.



Fonte: Adaptado de Slic3r.org (2019).

Figura 2.12 – Componente impresso com uma densidade de preenchimento variável.



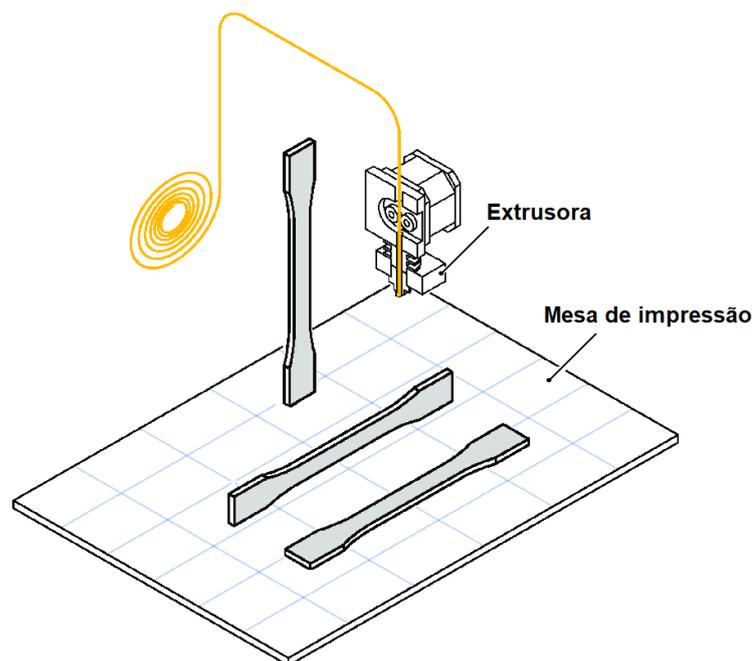
Fonte: Adaptado de CNC Kitchen (2020).

distintas. A Figura 2.13 ilustra três possíveis orientações de impressões de uma peça.

### 2.3.1 Propriedades Mecânicas

A definição de propriedades mecânicas das peças fabricadas por FDM constituem uma tarefa complexa visto que essas características devem ser tratadas como funções de um grande número de parâmetros de impressão. Dessa forma, diversos estudos experimentais são encontrados na literatura buscando descrever esse tipo de material sob diversas condições. Tymrak, Kreiger e Pearce (2014) buscam-se definir valores médios para a rigidez e tensão de ruptura dos materiais ABS e PLA quando impressos em padrões lineares com 100% de densidade de preenchimento (peças completamente sólidas). Nesses casos foram encontrados módulos de elasticidade médios de 1807 MPa para o ABS e 3368 MPa para PLA, enquanto as tensões de ruptura foram de 28.5 MPa para o ABS e 56.6 MPa para o PLA. Outros estudo como Torres J. e Gordon (2016) exploraram também a variação de outros parâmetros como a espessura de camadas, número de perímetro, densidade de preenchimento e até outros detalhes como a temperatura de deposição do material e a velocidade da impressão, notando o impacto direto de todos esses fatores nas

Figura 2.13 – Orientações de impressão de uma peça por FDM.



Fonte: Adaptado de Caminero et al. (2019).

propriedades mecânicas finais da peça. No entanto, dentre os diversos elementos com impacto nas propriedades de uma peça impressa dois parâmetros de impressão são aqui explorados em maior detalhe: a orientação de impressão e a densidade de preenchimento.

Perkowski (2016) mostra uma série de análises experimentais do comportamento mecânico de estruturas em PLA fabricadas por FDM. Em seu estudo, ensaios de compressão e tração foram realizados em amostras com diferentes orientações de impressão. Identificou-se que estruturas construídas por este método apresentam comportamento anisotrópico onde a rigidez em uma direção perpendicular ao plano da mesa de impressão atingiu valores até 5 vezes menores que a rigidez em direções paralelas ao plano da mesa de impressão. Além disso foi observada assimetria entre resistências a tensão e compressão, ou seja as resistências a carregamentos nessas duas condições foram significativamente diferentes. Considerando essas condições foi possível modelar a falha dos componentes, para a maioria das orientações consideradas, utilizando o critério de falha de Tsai-Wu normalmente aplicado à análise de materiais compósitos.

Bertoldi et al. (1998) mostram que a orientação de impressão e o padrão de preenchimento tem grande influência sobre as propriedades mecânicas de peças fabricadas por FDM utilizando o material ABS (Acrilonitrila Butadieno Estireno). Foi considerado que essas estruturas podem ser avaliadas como materiais ortotrópicos e ensaios de tração com peças impressas em diferentes orientações foram realizados. Os resultados experimentais mostraram diferenças nos módulos de elasticidade, tensões e módulos de falha obtidos para diferentes orientações. Desta forma, corroborando-se a hipótese de anisotropia das estruturas.

Em Maroti et al. (2018) testes foram realizados em componentes fabricados por diversos métodos de manufatura aditiva como FDM, SLS e Polyjet considerando diferentes orientações

de impressão. Os testes estático mostraram que, para o método SLS, a rigidez das peças não apresentou dependência significativa na orientação de impressão. No entanto, para os métodos FDM e Polyjet, características anisotrópicas foram identificadas visto que as peças apresentaram uma menor rigidez na direção perpendicular à mesa de impressão quando fabricadas. Conclusão idêntica foi também obtida por Rodríguez-Panes, Claver e Camacho (2018) onde foi observado que, considerando cargas aplicadas em direção perpendicular à do plano da mesa de impressão, as deformações se concentram na interface entre as camadas de uma peça. Na fabricação por FDM a geração da camada seguinte ocorre apenas após finalização da camada anterior, a deposição do material aquecido é então feita sobre um material já ligeiramente resfriado o que acaba enfraquecendo a ligação entre as camadas.

Casavola et al. (2016) também modela componentes fabricados por FDM considerando cada camada de material depositada como uma lâmina de propriedades ortotrópicas. Desse modo, o comportamento geral da peça pode é descrito aplicando-se a teoria clássica de laminados. Essa teoria permite a análise de um material composto por várias camadas através das constantes que definem o comportamento de cada camada e da espessura das mesmas. As propriedades mecânicas de únicas camadas de PLA e ABS ( $E_x$ ,  $E_y$ ,  $\nu_{xy}$  e  $\nu_{yx}$  no modelo constitutivo mostrado na Equação 2.11) foram obtidas experimentalmente com testes em peças com diferentes orientações de impressão. Testes realizados em componentes impressos com múltiplas camadas mostraram que a teoria clássica de laminados considerando as camadas como lâminas ortotrópicas foi capaz de modelar a rigidez dessas estruturas com erros entre -4.7% e +6.6%.

Enquanto vários estudos sobre características mecânicas de peças fabricadas por FDM se focaram em peças com densidade de preenchimento 100%, Rodríguez-Panes, Claver e Camacho (2018) comparou também a influência de variações dessa densidade de preenchimento junto a outros parâmetros de impressão. O estudo citado verificou que a densidade de preenchimento é na verdade o parâmetro com maior influência na rigidez na peça final. Lubombo e Huneault (2018) também avaliou o comportamento de peças impressas em PLA com diferentes densidades de preenchimento e também diferentes padrões de preenchimento. Foram considerados padrões de preenchimento hexagonais, triangulares e lineares e para cada um desses a rigidez e limite de resistência foram avaliados em ensaios de tração uniaxial e de flexão. Foram observados relações diretamente proporcionais entre rigidez e densidade de preenchimento como esperado para estruturas celulares.

Nesse contexto de peças com diferentes densidades de preenchimento, Fleck, Deshpande e Ashby (2010) tratam da modelagem mecânica dessas como estruturas celulares ou *lattice*. Estas estruturas são definidas como aquelas compostas por um grande número de elementos celulares uniformes. Estruturas *lattice* como as mostradas nas peças impressas com padrões de preenchimento linear são classificadas como periódicos regulares, visto um padrão único de repetição presente. Assumindo que a escala da célula de repetição seja razoavelmente menor que da estrutura completa, um padrão de repetição desse tipo pode ser interpretado como um material com propriedades homogeneizadas no domínio da estrutura analisada. Considerando um *lattice* bidimensional, a razão entre seu módulo de elasticidade  $E$  e aquele correspondente

a um elemento sólido  $E_s$  pode ser modelada em função da densidade da célula ( $\rho$ ) como na Equação 2.36. Os termos  $a_l$  e  $b_l$  são coeficientes os quais dependem da forma das células da estrutura *lattice*.

$$\frac{E}{E_s} = A_l \rho^{B_l} \quad (2.36)$$

### 3 METODOLOGIA

Propõe-se um problema de otimização topológica capaz de explorar soluções complexas fabricadas pelo processo FDM. Como observado na literatura, esse método de fabricação resulta em peças com propriedades altamente dependentes dos parâmetros de fabricação empregados. Busca-se neste trabalho explorar a influência de dois principais parâmetros nas soluções de otimização topológica: a orientação de impressão e as densidades de preenchimento.

Diferentes orientações de impressão em uma peça resultam em características mecânicas ortotrópicas. Desse modo, no tratamento dessa propriedade, consideram-se aqui estruturas bidimensionais com propriedades constitutivas como na Equação 3.1, considerando um estado plano de tensões.

$$\mathbf{C}_0 = \frac{1}{1 - \nu_{xy}\nu_{yx}} \begin{bmatrix} E_x & \nu_{yx}E_x & 0 \\ \nu_{yx}E_x & E_y & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E_x(1-\nu_{xy}\nu_{yx})}{2\nu_{xy}} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Em uma primeira análise, o problema de otimização é construído empregando-se o método SIMP de otimização topológica. Aqui a penalização é utilizada de forma a evitar a presença de valores de densidade intermediários nas soluções encontrados. Para tal, a parametrização das propriedades mecânicas como na Equação 3.2 utiliza um fator de penalização  $fp$  igual a três. Apesar das complicações introduzidas pela penalização, um fator  $fp$  igual a três é necessário para obtenção de estruturas fabricáveis por métodos convencionais.

$$\mathbf{C} = x^{fp}\mathbf{C}_0 \quad (3.2)$$

No estudo do segundo parâmetro de fabricação analisado, o efeito da densidade de preenchimento é investigado em uma classe diferente de problemas. Nota-se que em Fleck, Deshpande e Ashby (2010), pela Equação 2.36, uma aproximação do comportamento de estruturas *lattice* em função da densidade pode ser feita através de uma função de potência na mesma forma da função de penalização no método SIMP. Considerando então um padrão de preenchimento regular em uma impressão por FDM, podemos substituir a penalização clássica no modelo SIMP por uma função de potência com expoente  $fp$  que descreva a rigidez de um elemento baseado no parâmetro densidade de preenchimento. Nesse caso, a parametrização aplicada no método não visa mais apenas evitar densidades intermediárias na solução mas sim representar o comportamento real de um estrutura com diferentes densidades de preenchimento.

A seção a seguir descreve o problema de otimização elaborado. Soluções para esse são obtidas considerando diferentes orientações de impressão e ambas as formulações de penalização apresentadas.

#### 3.1 Formulação do Problema

O problema de otimização topológica formulado consiste na minimização do *compliance* de uma estrutura sujeita a restrições no volume de material disponível e nas cargas críticas de

flambagem identificadas. Tal problema pode ser descrito como na Equação 3.3.

$$\begin{cases} \text{min.:} & c = \mathbf{u}^T \mathbf{F} \\ \text{s. t.:} & \sum_{e=1}^{N_e} x_e - v_{max} \leq 0 \\ & P_c \alpha^{(1-i)} \mu_i + 1 \geq 0, \quad i \in \mathbb{Z} : i \in [1, N_\mu] \end{cases} \quad (3.3)$$

O *compliance*  $c$ , uma medida de flexibilidade e a função objetivo do problema, é calculado como o produto entre os deslocamentos  $\mathbf{u}$  e as cargas  $\mathbf{F}$  aplicadas sobre a estrutura. A primeira restrição identificada na Equação 3.3 se refere ao limite no volume de material disponível. Nesse caso, com uma malha regular, o volume total é calculado como a soma das densidade  $x_e$  de cada elemento contido no vetor de distribuição de densidade  $\mathbf{x}$ . Essa soma não deve superar um limite de volume estabelecido por  $v_{max}$ . Essa restrição é naturalmente imposta como um limite superior visto a relação diretamente proporcional entre densidade e rigidez. O segundo grupo de restrições aplicadas ao problema corresponde aos limites impostos às cargas críticas de cada um dos modos de flambagem observados.  $N_\mu$  corresponde ao número de modos de flambagem observados na otimização. Um número maior de modos, além do crítico, deve ser observado visando incluir todos aqueles mais relevantes ao comportamento da estrutura e garantir um comportamento suave na otimização. Ainda nas restrições de flambagem da Equação 3.3, o termo  $\alpha^{(1-i)}$  é empregado para introduzir pequenas folgas entre os autovalores identificados na Equação 3.6 durante a otimização e evitar a troca de modos e que esses valores possam ser coincidentes. Esse tratamento das restrições é também proposto em Ferrari e Sigmund (2019) e Bendsøe e Sigmund (2004). Nessa formulação de restrições, o termo  $P_c$  corresponde ao limite nas cargas críticas de flambagem desejado para o problema.

A análise estrutural requerida para cálculo desses deslocamentos é realizada utilizando-se o método dos elementos finitos, a partir da solução da Equação 3.4. Na construção dessa relação linear elástica, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}(\mathbf{x})$  é montada a partir das contribuições de rigidez de cada elemento da malha parametrizado pela sua respectiva densidade  $x_e$ . Para o problema aqui resolvido, o método dos elementos finitos foi formulado considerando malhas regulares compostas por elementos quadrados de quatro nós (Q4) com dois graus de liberdades por nó. Visto que soluções de otimização topológica tendem a estruturas com elementos esbeltos, esse tipo de malha seria capaz de capturar os efeitos da flambagem nesses elementos considerando o problema em duas dimensões. Essa generalização do tipo de elemento é necessária visto que, na otimização topológica, é usada uma malha constante sem informação prévia da forma da estrutura resultante.

$$\mathbf{K}(\mathbf{x})\mathbf{u} = \mathbf{F} \quad (3.4)$$

A identificação dos modos de flambagem para as estruturas analisadas é feito utilizando-se o método de flambagem linear. Aplicando esse método, as cargas críticas e modos de flambagem correspondentes são calculados através da solução do problema de autovalores descrito na

Equação 3.5

$$[\mathbf{K}(\mathbf{x}) + \lambda \mathbf{K}_g(\mathbf{x}, \mathbf{u})]\mathbf{v} = 0 \quad (3.5)$$

onde os autovalores  $\lambda$  indicam as cargas críticas para cada modo de flambagem e  $\mathbf{v}$  são os respectivos autovetores com a forma dos modos. A matriz de rigidez geométrica  $\mathbf{K}_g(\mathbf{x}, \mathbf{u})$  é construída também pela aplicação do métodos dos elementos finitos utilizando uma malha de elementos Q4. Essa matriz também depende das densidades  $\mathbf{x}$  de cada elemento e adicionalmente dos deslocamento  $\mathbf{u}$  calculados na solução da Equação 3.4 considerando  $\mathbf{F}$  como um carregamento de referência. Desse modo, cargas correspondentes aos modos de flambagem são obtidas pelo produto  $\mathbf{f}_{cr} = \lambda \mathbf{F}$ . Para um problema mais conveniente, de um ponto de vista computacional, a substituição  $\lambda = -1/\mu$  é aplicada como sugerida por Ferrari e Sigmund (2019). Como visto na restrição de flambagem na Equação 3.3, são considerados na verdade os novos autovalores  $\mu$ . Esse novos autovalores são obtidos na solução do problema descrito pela Equação 3.6.

$$[\mathbf{K}_g(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mu \mathbf{K}(\mathbf{x})]\mathbf{v} = 0 \quad (3.6)$$

São especificados nesse caso os menores valores algébricos de  $\mu$ , visto que na formulação adotada para o problema matricial os valores mais negativos de  $\mu$  correspondem aos menores valores positivos de  $\lambda$ , críticos à análise de flambagem. Seguindo a formulação padrão de Cook et al. (2002), a matriz de rigidez geométrica para cada elemento  $k_{eg}$  pode ser deduzida como na Equação 2.27 para o problema bidimensional com elementos finitos do tipo Q4 usados nesse trabalho.

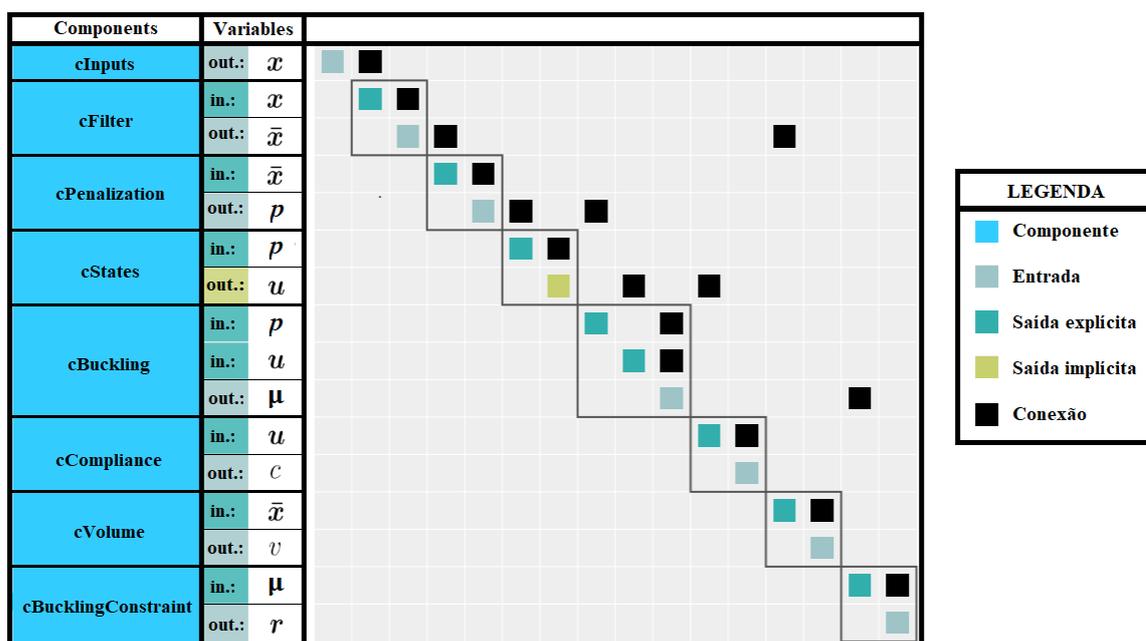
### 3.2 Implementação do Modelo

O problema descrito é implementado utilizando-se a arquitetura OpenMDAO (GRAY et al., 2019). Esse *framework* fornece ferramentas para construção de modelos multidisciplinares de forma modular. Nessa forma, o modelo de otimização é construído através da integração de vários componentes, cada um responsável pela implementação de algum aspecto do problema. Esses componentes se comunicam através da troca de variáveis próprias de entrada e saída. Como mostrado em Chung et al. (2019) ou Hendricks et al. (2019) o uso desse tipo de arquitetura facilita tanto a implementação do projeto como posteriores extensões e divulgação. Benefícios os quais se devem a principalmente dois fatores: a construção modular do programa e as facilidades oferecidas no cálculo das derivadas. Dada a definição das derivadas parciais em cada componente, os métodos disponíveis para o OpenMDAO permitem um cálculo automatizado e eficiente das derivadas globais do problema. Dessa forma, para substituição ou inclusão de novos componentes no modelo de otimização não são necessárias adaptações manuais às derivadas globais.

As relações entre os componentes do modelo podem ser facilmente visualizadas na forma de um diagrama  $N^2$ . Um diagrama  $N^2$  se apresenta na forma de matriz e é utilizado para representar de forma concisa as relações entre diversos componentes de um sistema.

Variáveis representando entradas e saídas válidas para cada elemento do sistema são enunciadas e identificadas na diagonal principal da matriz. Nos elementos fora da diagonal são marcadas dependências entre variáveis, onde o fluxo de informação é visualizado no sentido horário (SHISHKO; CHAMBERLAIN, 1995). Na Figura 3.1 observa-se o diagrama  $N^2$  que descreve o modelo implementado onde a primeira coluna mostra os componentes, a segunda coluna mostra as respectivas variáveis de entrada (in.) e saída (out.), enquanto a terceira ilustra a conectividade entre o componentes.

Figura 3.1 – Gráfico  $N^2$  descrevendo o problema implementado



Nas seções seguintes são descritos cada um dos componentes do modelo com demais detalhes de sua implementação.

### 3.2.1 Filtro de densidades (*cFilter*)

Para restrição da dependência de malha e evitar o problema de tabuleiro, um filtro linear apresentado em Svanberg e Svärd (2013) é aplicado às densidades de preenchimento. O filtro é aplicado como mostrado na Equação 3.7, onde  $\bar{x}_e$  são as densidades filtradas,  $x$  são as densidades originais e  $w$  o fator de peso calculado com base na distância entre o centro de um elemento  $e$  e seus vizinhos  $j$  dentro de uma área circular delimitada pelo raio do filtro. O cálculo, em detalhes, desses fatores de peso é mostrado na Equação 2.20

$$\bar{x}_e = \sum_j w_{ej} x_j \quad (3.7)$$

### 3.2.2 Penalização (*cPenalization*)

Esse componente calcula o termo de penalização  $p_e$  referente a cada elemento da malha baseado em suas respectivas densidade filtradas  $\bar{x}_e$ . Como definido no método SIMP, esses termos de penalização serão utilizados na parametrização das propriedades mecânicas de cada elemento.

$$p(\bar{x}_e) = \bar{x}_e^{fp} \quad (3.8)$$

### 3.2.3 Análise linear elástica (*cStates*)

O componente *cStates* calcula os deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$  através do método dos elementos finitos e resolvendo a Equação de elasticidade linear em 3.9. Na arquitetura utilizada, a modelagem dessa relação de equilíbrio na forma implícita facilita a aplicação do método adjunto na posterior construção das sensibilidades globais do problema. Na relação,  $\mathbf{R}_u$  denota o resíduo da equação implícita em função dos deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{p}$  contém as variáveis de entrada representando os termos de penalização e  $\mathbf{F}$  o vetor de carregamentos externos.

$$\mathbf{R}_u = \mathbf{K}(p)\mathbf{u} - \mathbf{F} \quad (3.9)$$

Naturalmente, a penalização aplicada em função da densidade de um elemento modela o comportamento mecânico do mesmo. No entanto, neste trabalho essa modificação não é efetuada como uma multiplicação direta mas sim aplicada como na Equação 3.10. Essa equação fornece a matriz de rigidez de um elemento  $\mathbf{k}_e$  em função da matriz de rigidez de um elemento de densidade igual a unidade (totalmente preenchido)  $\mathbf{k}_{e0}$ , do termo de penalização  $p$  e de um valor mínimo  $p_{min}$  para esse mesmo parâmetro. A definição de um valor mínimo na aplicação do termo de penalização como na Equação 3.10 garante que densidades de preenchimento iguais a zero não resultem em singularidades na solução do problema estrutural.

$$\mathbf{k}_e = [p_{min} + p_e(1 - p_{min})]\mathbf{k}_{e0} \quad (3.10)$$

Na modelagem do problema de otimização na forma proposta, têm-se a necessidade do desenvolvimento de duas derivadas parciais analíticas nesta etapa. A primeira consiste da derivada do resíduo da equação de equilíbrio  $\mathbf{R}_u$  em função dos termos de penalização de cada elemento  $\mathbf{p}$ , e é indicada pela Equação 3.11.

$$\frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{u} \quad (3.11)$$

Dado que cada parâmetro de penalização modifica apenas a rigidez de seu elemento correspondente, os termos de cada coluna da matriz de derivadas mostrada na Equação 3.11 podem ser calculados separadamente para cada um dos elementos da malha e em seguida alocados às posições corretas na matriz global. Em cada elemento, a parcela  $\partial \mathbf{k}_e / \partial p_e$  é facilmente obtida

derivando a Equação 3.10. Dessa forma, a contribuição de cada elemento  $e$  à derivada parcial  $\partial \mathbf{R}_u / \partial \mathbf{p}$  é obtida pelo produto  $(1 - p_{min}) \mathbf{k}_{e0} \mathbf{u}_e$ .

A segunda derivada parcial definida nesta etapa corresponde à derivada do resíduo da equação de equilíbrio em função dos deslocamento nodais, saída do componente. Essa derivada calculada de maneira direta corresponde a matriz de rigidez global, como mostrado na Equação 3.12.

$$\frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K} \quad (3.12)$$

Em cada iteração da otimização as duas derivadas parciais definidas são então utilizadas para definir o termo  $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{p}$ . Esta matriz é agora obtida através da solução do sistema mostrado na Equação 3.13. O qual será então usado para construção do termo adjunto no cálculo das derivadas do *compliance* e das cargas de flambagem.

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{p}} = \left( \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{u}} \right)^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}_u}{\partial \mathbf{p}} \quad (3.13)$$

#### 3.2.4 Flambagem linear (*cBuckling*)

O componente *cBuckling* resolve o problema de autovalores modificado como na Equação 3.6 para calculo das saídas  $\mu$ . Nessa implementação, o componente toma como entradas os deslocamentos  $\mathbf{u}$  e os termos de penalização  $\mathbf{p}$ , como na Equação 3.14.

$$(\mathbf{K}_g(\mathbf{u}, \mathbf{p}) - \mu \mathbf{K}(\mathbf{p})) \mathbf{v} = 0 \quad (3.14)$$

Assim como para as matrizes de rigidez, as matrizes de rigidez geométricas necessárias à construção do problema de flambagem linear descrito pela Equação 2.33 devem ser parametrizadas em função dos termos de penalização. No entanto, nesse caso a modificação é feita por uma multiplicação direta como na Equação 3.15, sem a presença de limites a um valor mínimo. O uso de diferentes parametrizações para as matrizes de rigidez  $\mathbf{k}_e$  e  $\mathbf{k}_{eg}$  aqui é utilizado como o método evitar o aparecimento de modos artificiais de flambagem. Como mostrado por Gao e Ma (2015) e Ferrari e Sigmund (2019), o uso dessas diferentes parametrizações se mostra eficiente quando a razão entre os valores máximos e mínimos dados pela Equação 3.10 é de  $10^6$ . Em outras palavras, o uso de  $p_{min}$  igual a  $1 \times 10^{-6}$ .

$$\mathbf{k}_{eg} = p \mathbf{k}_{eg0} \quad (3.15)$$

Tratando agora das sensibilidades nesse componente, observa-se que em estudos realizados por Ferrari e Sigmund (2019), Gao e Ma (2015) utilizam método adjunto na análise de sensibilidades nos autovalores de flambagem em função, diretamente, das densidades artificiais dos elementos. De modo similar, o método adjunto é aplicado indiretamente para análise de sensibilidades no modelo aqui proposto. Neste componente são derivadas apenas as sensibilidades

das cargas de flambagem em relação às duas entradas da Equação 3.14, deslocamentos nodais e termos de penalização, sem levar em conta a dependência implícita entre  $\mathbf{u}$  e  $p$ . As sensibilidades relativas a essa dependência ( $\partial\mathbf{u}/\partial p$ ), que compõem o vetor adjunto, são adquiridas do componente anterior que calcula os deslocamento nodais. Quando as derivadas totais são calculadas em função das derivadas parciais de cada componente esses termos são agregados ao modelo pela regra da cadeia. A Equação 3.16 ilustra essa relação quando associados os componentes de cálculo de flambagem e de deslocamentos nodais.

$$\frac{d\mu}{dp} = \frac{\partial\mu}{\partial p} + \frac{\partial\mu}{\partial\mathbf{u}} \frac{\partial\mathbf{u}}{\partial p} \quad (3.16)$$

Para dedução das derivadas  $\partial\mu/\partial p$  e  $\partial\mu/\partial\mathbf{u}$  toma-se primeiro a Equação 3.14 multiplicada pela transposta do autovetor  $\mathbf{v}$ , como na Equação 3.17.

$$\mathbf{v}^T (\mathbf{K}_g(\mathbf{u}, \mathbf{x}) - \mu \mathbf{K}(\mathbf{x})) \mathbf{v} = 0 \quad (3.17)$$

Primeiramente, a Equação 3.17 é derivada em relação aos termos de penalização. Ressalta-se que, como identificado anteriormente, ambas as matrizes de rigidez e de rigidez geométrica são parametrizadas em função dos termo de penalização.

$$\frac{\partial\mathbf{v}^T}{\partial p} (\mathbf{K}_g - \mu \mathbf{K}) \mathbf{v} + \mathbf{v}^T \left( \frac{\partial\mathbf{K}_g}{\partial p} - \frac{\partial\mu}{\partial p} \mathbf{K} - \mu \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial p} \right) \mathbf{v} + \mathbf{v}^T (\mathbf{K}_g - \mu \mathbf{K}) \frac{\partial\mathbf{v}^T}{\partial p} = 0 \quad (3.18)$$

Comparando-se agora as Equações 3.17 e 3.18 nota-se que o primeiro e terceiro termo que compõem a segunda Equação correspondem a valores nulos. Realizando esta simplificação e isolando o termo de interesse é obtida a Equação 3.19.

$$\frac{\partial\mu}{\partial p} = \frac{\mathbf{v}^T \left( \frac{\partial\mathbf{K}_g}{\partial p} - \mu \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial p} \right) \mathbf{v}}{\mathbf{v}^T \mathbf{K} \mathbf{v}} \quad (3.19)$$

Dado que os autovetores respeitam a condição de ortonormalidade em relação à  $\mathbf{K}$ , o denominador da Equação 3.19 corresponde a unidade. Executando essa simplificação finalmente a derivada de interesse é obtida como na Equação 3.20.

$$\frac{\partial\mu}{\partial p} = \mathbf{v}^T \left( \frac{\partial\mathbf{K}_g}{\partial p} - \mu \frac{\partial\mathbf{K}}{\partial p} \right) \mathbf{v} \quad (3.20)$$

O termo  $\partial\mathbf{K}/\partial p$  é calculado da mesma maneira como elaborado na análise de sensibilidade para o cálculo dos deslocamentos nodais. O termo  $\partial\mathbf{K}_g/\partial p$  segue a mesma lógica onde a contribuição dos elementos da malha pode ser vista de maneira independente, no entanto a parametrização descrita na Equação 3.15 é agora derivada.

Em um procedimento análogo ao realizado para obtenção das derivada  $\partial\mu/\partial p$  podemos também derivar implicitamente a Equação 3.17 para obtenção da derivada  $\partial\mu/\partial\mathbf{u}$ . No entanto,

nota-se que nesse caso apenas a matriz de rigidez geométrica é dependente dos deslocamentos nodais. Deste modo, obtém a derivada de interesse como descrita na Equação 3.21.

$$\frac{\partial \boldsymbol{\mu}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{v}^T \left( \frac{\partial \mathbf{K}_g}{\partial \mathbf{u}} \right) \mathbf{v} \quad (3.21)$$

As derivadas como definidas nas Equações 3.20 e 3.21 não garantem resultados idênticos para autovalores com multiplicidade maior que um encontrados na análise de flambagem linear. No entanto, a formulação da restrição flambagem na Equação 3.3 garante uma separação mínima entre os autovalores evitando essa multiplicidade (RODRIGUES; GUEDES; BENDSØE, 1995; FERRARI; SIGMUND, 2019).

### 3.2.5 Restrições de flambagem (*cBucklingConstraint*)

Este componente organiza as restrições de flambagem aplicadas na Equação 3.3 calculando os termos  $r_i$ , na Equação 3.22, como saídas. As entrada requeridas nesse componente são os autovalores de flambagem  $\boldsymbol{\mu}$ .

$$r_i = P_c \alpha^{(1-i)} \mu_i + 1 \quad (3.22)$$

As derivadas parciais nesse componente podem são calculadas diretamente com na Equação 3.23.

$$\frac{\partial r_i}{\partial \mu_i} = P_c \alpha^{(1-i)} \quad (3.23)$$

### 3.2.6 Cálculo de *Compliance* (*cCompliance*)

Este componente calcula o valor corrente do *compliance* estrutural  $c$  para a função objetivo do problema. Essa operação requer como variável de entrada os deslocamentos nodais  $\mathbf{u}$ .

$$c = \mathbf{F}^T \mathbf{u} \quad (3.24)$$

As derivadas parciais nesse componente são calculadas por derivação direta em função das entradas  $\mathbf{u}$  como na Equação 3.25. Ressalta-se que, novamente, a dependência dos deslocamentos em relação a parametrização aparece na construção das derivadas globais do problema recuperando-se o termo  $\partial \mathbf{u} / \partial \mathbf{p}$  do componente *cStates*.

$$\frac{\partial c}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{F}^T \quad (3.25)$$

### 3.2.7 Restrição de volume (*cVolume*)

Neste componente é construída a restrição de volume de material como mostrada na Equação 3.3. A saída aqui obtida consiste no valor  $v$  definido na Equação 3.26. A entrada

requerida nesse componente corresponde as densidades  $x_e$  de cada elemento contidas em  $\boldsymbol{x}$ .

$$v = \sum_{e=1}^{N_e} x_e - v_{max} \quad (3.26)$$

## 4 RESULTADOS E DISCUSSÕES

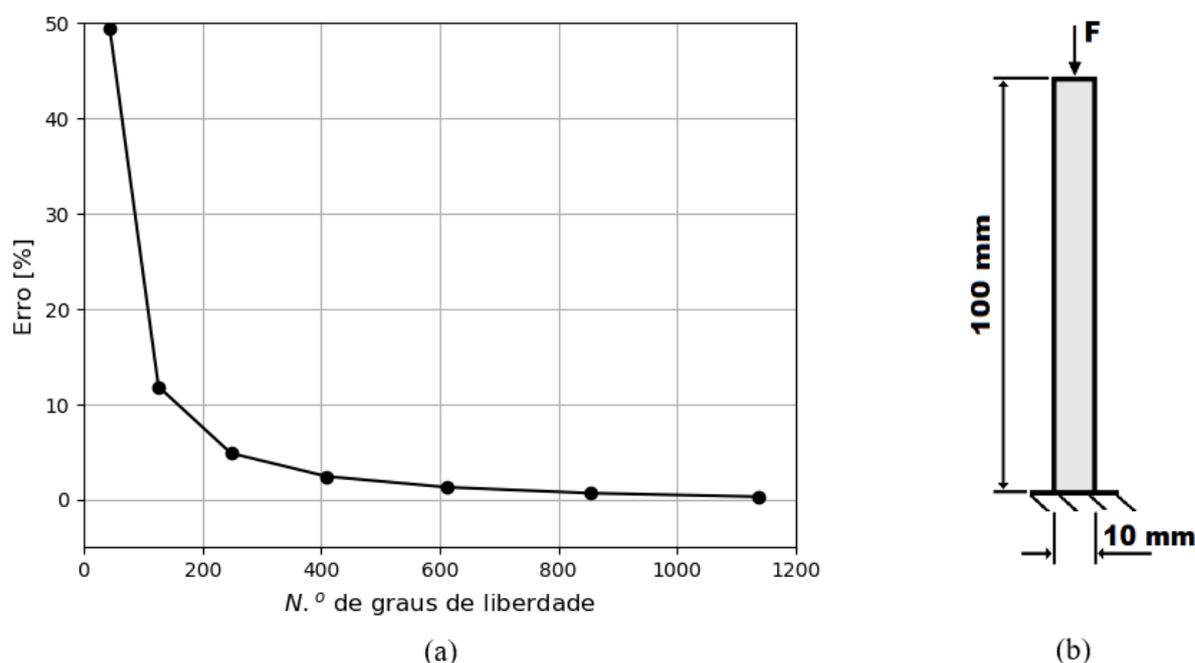
Nesta seção são analisados e discutidos resultados obtidos através da metodologia descrita na seção anterior. Em uma primeira parte, a implementação do método de flambagem linear é averiguada. Em seguida, exemplos práticos são simulados onde diversas soluções de otimização topológica são obtidas. Essas soluções contemplam não apenas o impacto direto de variações nas restrições de flambagem mas também das diferentes propriedades mecânicas inerentes aos componentes fabricados por manufatura aditiva.

### 4.1 Validação da análise por flambagem linear implementada

Para verificar a validade do método de análise de estabilidade por flambagem linear implementado, foi realizado um teste inicial considerando o problema descrito na Figura 4.1 (b). Os resultados numéricos obtidos foram comparados com as soluções analíticas através da fórmula de Euler para flambagem de colunas engastadas mostrada na Equação 4.1. Essa equação fornece a carga crítica de flambagem em função do módulo de elasticidade  $E$ , do momento de inércia da seção  $I$  e do comprimento da coluna  $L$ .

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{(2L)^2} \quad (4.1)$$

Figura 4.1 – Validação do cálculo da carga crítica de flambagem ( $\lambda_1$ ) utilizando análise de flambagem linear. (a) Evolução do erro obtido; (b) Definição do problema considerado



A Figura 4.1 (a) mostra a evolução do erro do modelo em função do número de graus de liberdade considerados na análise. Para maior detalhamento do exemplo, a Tabela 4.1 reproduz

os erros de solução observados no gráfico e especifica a discretização correspondente em função do número de elementos da malha na direção  $x$  ( $n_x$ ) e na direção  $y$  ( $n_y$ ). Os erros encontrados estão em acordo com aqueles observados para elementos finitos do tipo Q4 em outras referências da área como Ferrari e Sigmund (2019) e Boom (2014). Uma informação importante obtida a partir dessa análise de erro diz respeito à discretização necessária ao domínio para aplicação de otimização com restrições de flambagem. Observou-se que, para precisão acima de 95% no cálculo das cargas críticas, foi necessária uma discretização de ao menos 3x30 elementos. Deste modo, vê-se que para este nível de precisão durante o processo de otimização topológica torna-se necessária que partes do componente projetado críticas do ponto de vista de flambagem tenham uma largura de pelo menos 3 elementos finitos.

Tabela 4.1 – Erro no cálculo da carga crítica de flambagem em função da discretização utilizada.

Discretização ( $n_x \times n_y$ )	Erro [%]
1x10	49.4
2x20	11.9
3x30	4.9
4x40	2.5
5x50	1.3
6x60	0.7
7x70	0.3

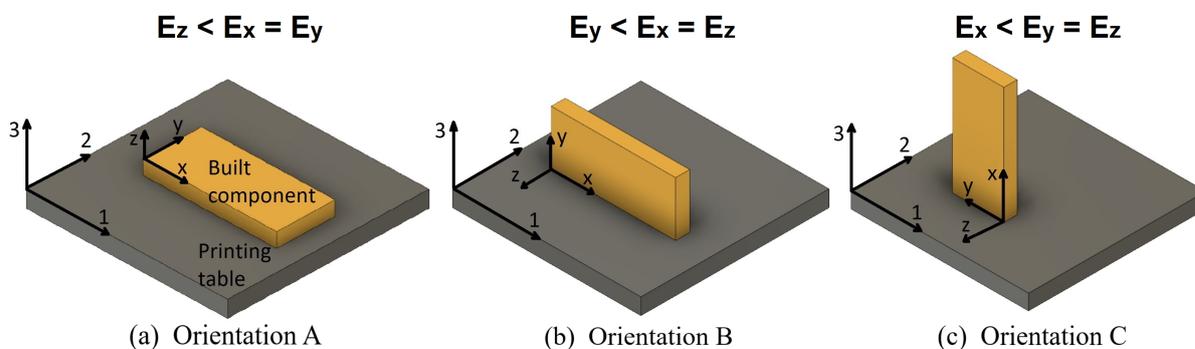
## 4.2 Exemplos Simulados

Como observado anteriormente, os parâmetros de impressão de uma peça fabricada por FDM tem grande influência sobre suas propriedades mecânicas. Neste trabalho, dois desses parâmetros foram explorados: a orientação de impressão e densidade de preenchimento. Primeiramente, foram otimizados exemplos com distintas orientações de impressão as quais modificam diretamente os módulos  $E_x$  e  $E_y$  do modelo ortotrópico bidimensional adotado. Ambos os exemplos propostos foram avaliados sob as diferentes orientações considerando uma penalização clássica pelo método SIMP. Em outras palavras, foi empregado um fator de penalização  $p$  igual a três, visando evitar soluções com densidades de preenchimento intermediárias.

Para abordar de uma forma simples a modelagem dessas distintas propriedades, três problemas diferentes foram definidos baseados em diferentes orientações de impressão de um componente. Esses problemas a serem avaliados foram nomeados A, B e C e são definidos na Figura 4.2. O problema A corresponde a um modelo bidimensional onde o componente é impresso com seu plano  $xy$  paralelo à mesa de impressão (plano 12), como na Figura 4.2 (a). Nesse caso, o componente impresso apresenta propriedades isotrópicas. Para o problema B, o plano  $xz$  do componente impresso é paralelo à mesa, como na Figura 4.2 (b). No segundo caso, o módulo de rigidez  $E_y$  é cinco vezes menor que o normal. Finalmente, no problema C, o plano  $yz$

do componente encontra-se paralelo à mesa de impressão como na Figura 4.2 (c). Nesse último caso, apenas o módulo de rigidez  $E_x$  é cinco vezes menor que o normal.

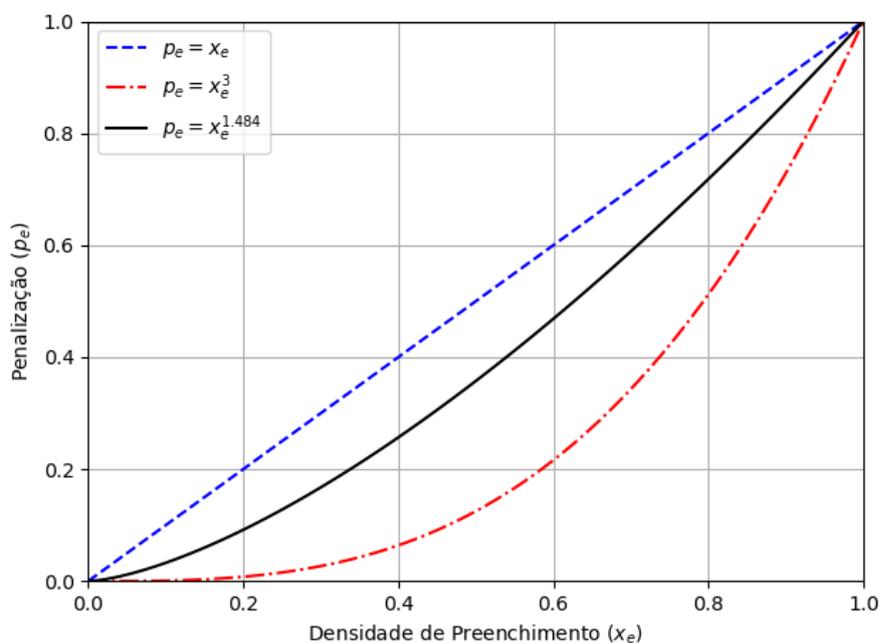
Figura 4.2 – Orientações de impressão avaliadas nas simulações. (a) Problema A; (b) Problema B e (c) Problema C



Em uma segunda etapa, também foram exploradas otimizações onde o fator de penalização clássico é substituído por um modelo capaz de aproximar a rigidez de uma peça impressa como uma função do parâmetro densidade de preenchimento, como na Equação 3.8. Para os exemplos aqui testados, o expoente  $f_p$  do modelo foi calibrado considerando-se os dados experimentais obtidos por Lubombo e Huneault (2018). No experimento citado acima foi utilizado o material PLA e os dados aqui empregados correspondem aos resultados das amostras com padrão de preenchimento linear ( $0^\circ/90^\circ$ ) com apenas um perímetro preenchido. Optou-se pelos dados com o menor número de perímetros possível de modo a diminuir a influência desse parâmetro de impressão, o qual não foi avaliado nesse trabalho. Esses dados experimentais disponíveis na referência citada correspondiam apenas a uma pequena faixa de densidades intermediárias, essa base de dados foi estendida utilizando a rigidez padrão do PLA para preenchimento 100% e normalizada em função desse valor. Utilizando-se o método dos mínimos quadrados, foi obtido o expoente para uma função de potência que modelasse o comportamento desses dados. Observou-se que a atribuição do valor de 1.484 para o expoente da função de penalização forneceu uma aproximação razoável para a relação entre rigidez e preenchimento. A Figura 4.3 mostra uma comparação entre o valor da função de penalização dados três expoentes distintos: a aproximação baseada em resultados experimentais, um expoente igual a 3 tradicionalmente utilizado no método SIMP padrão e por fim uma relação linear para a penalização. Assim como para um expoente igual a três, a penalização modelada em cima dos dados experimentais também deve reduzir a viabilidade de densidades intermediárias nas soluções de otimização. No entanto esse efeito deve ter um impacto menor, não inibindo totalmente agora uma variação contínua de densidades ao longo do domínio da solução. Nos exemplos aqui simulados são realizadas otimizações como ambas abordagens de penalização: um expoente igual a três inibindo soluções com densidades intermediárias e um expoente igual a 1.484 modelando a rigidez do componente em função de uma densidade de preenchimento variável.

Nos casos simulados nesta seção, as restrições de flambagem  $P_c$  foram normalizadas em relação ao limite de flambagem calculado para a solução de otimização topológica sem

Figura 4.3 – Comparando o efeito dos expoentes da lei de potência que rege a penalização



restrições de flambagem, denominada "solução base". Em outras palavras, um restrição  $P_c$  igual 1.5 corresponde a um limite de flambagem requerido 50% maior que aquele mostrado pela solução de mínimo *compliance* com apenas a restrição de volume aplicada. Para uma comparação justa entre soluções de diferentes orientações de impressão, todas as normalizações são feita em relação à solução base para a orientação isotrópica descrito pelo problema A. Da mesma forma, os valores de *compliance* mínimo obtidos nas diversas soluções também são normalizados em relação à solução base.

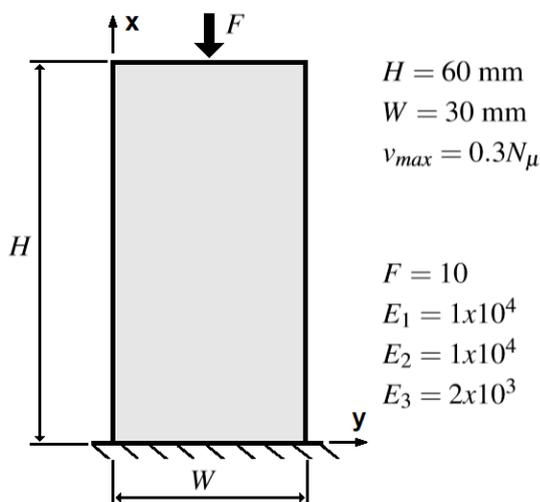
Nos experimentos numéricos aqui descritos, a infraestrutura computacional utilizada para execução do algoritmo implementado em Python 3.7.0 consistiu em um computador equipado com um processador Intel CoreI7-4720HQ 2.60 GHz, 8.00 GB em RAM disponível e um sistema operacional 64 bits Windows 10.

#### 4.2.1 Estudo de caso 1: Coluna sob compressão

O primeiro exemplo numérico otimizado consistiu em uma coluna sob compressão como mostrado na Figura 4.4. Nesse caso, foi utilizada uma altura  $H$  de 60 mm, uma largura  $W$  de 30 mm e a carga aplicada  $F$  foi de 10 N. Sobre demais parâmetros necessários ao processo de otimização, foi utilizado um raio para o filtro de densidades igual englobando dois elementos adjacentes (no caso 2 mm), uma restrição no volume de material igual a 0.3 e os cinco primeiros modos de flambagem foram observados. Em uma primeira parte, foram obtidas soluções para as orientações descritas nos problemas A, B e C considerando um fator de penalização com expoente igual a três. Para cada uma das orientação é resolvido inicialmente um problema de minimização de *compliance* sem restrições de flambagem e a solução desse é utilizada como distribuição inicial de densidades para os problemas com restrições. Tal abordagem, proposta

por Gao e Ma (2015) visa a obtenção de melhores soluções evitando mínimos locais com propriedades inferiores na otimização desse problema.

Figura 4.4 – Definição do problema: Coluna sob Compressão



Na otimização da coluna sob compressão considerando uma orientação de impressão A, foram encontradas as soluções mostradas na Figura 4.5. Além da solução base normalizada a partir da otimização sem restrições de flambagem, foram encontradas três soluções viáveis para restrições de flambagem iguais a 1.5, 2.0 e 2.5. Com o aumento de 50% na restrição de flambagem em relação à solução base, já nota-se diferenças interessantes na solução encontrada. A partir de uma altura de aproximadamente 23 mm a coluna tem sua base dividida em dois elementos, para acomodar um maior requerimento no limite de flambagem a solução encontrada busca uma distribuição do carregamento da coluna entre dois elementos. Com essa estratégia a restrição é atingida, mas ao custo de um valor mínimo da função objetivo 10% maior. Com o aumento da restrição para  $P_c = 2.0$  um comportamento similar de distribuição de carregamento acontece, mas por um comprimento ainda maior da coluna (aproximadamente em 35 mm). Neste novo caso, o custo da restrição foi um aumento no *compliance* mínimo de 15% em relação à solução base. Por fim, com uma restrição de flambagem  $P_c$  igual a 2.5, o simples recurso exibido nas soluções anteriores foi o suficiente. Nesse caso, uma estrutura horizontal aparece na solução conectando as duas bases da coluna a uma altura de aproximadamente 31 mm. Esse novo elemento estrutural reduz o comprimento de flambagem das bases possivelmente elevando a rigidez a flambagem da coluna ao nível necessário para atingir a restrição estabelecida.

O histórico de convergência correspondente à otimização da coluna sob compressão considerando uma orientação de impressão A é mostrado na Figura 4.6. É observada a evolução do *compliance*, com valores no eixo vertical da direita, e também dos autovalores, com eixo vertical à esquerda, correspondentes aos cinco primeiros modos de flambagem sobre os quais é aplicada a restrição. Nota-se que ao final da otimização apenas o primeiro modo de flambagem se encontra próximo do valor crítico, os modos seguintes tem autovalores com significativa separação. O valor encontrado para  $\lambda_5$ , por exemplo, é aproximadamente 31 vezes maior que o valor encontrado para  $\lambda_1$ .

Figura 4.5 – Soluções obtidas para a coluna sob compressão com Orientação de impressão A

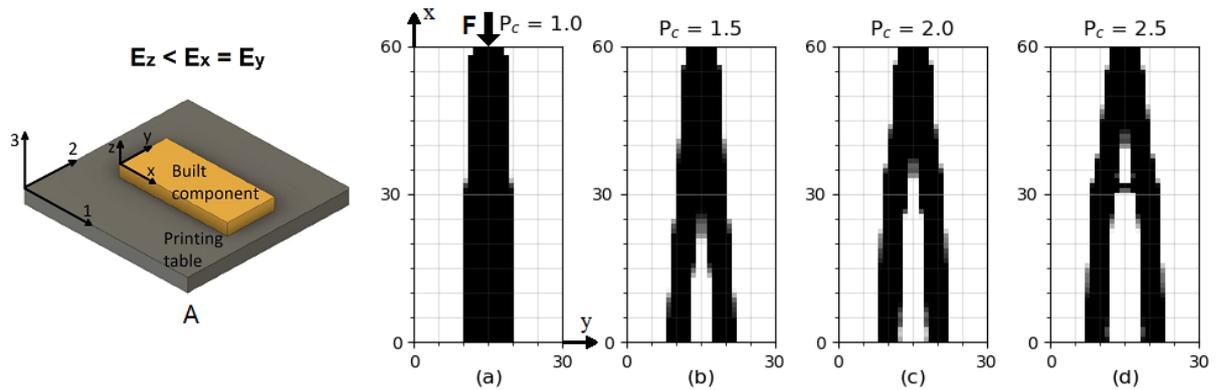
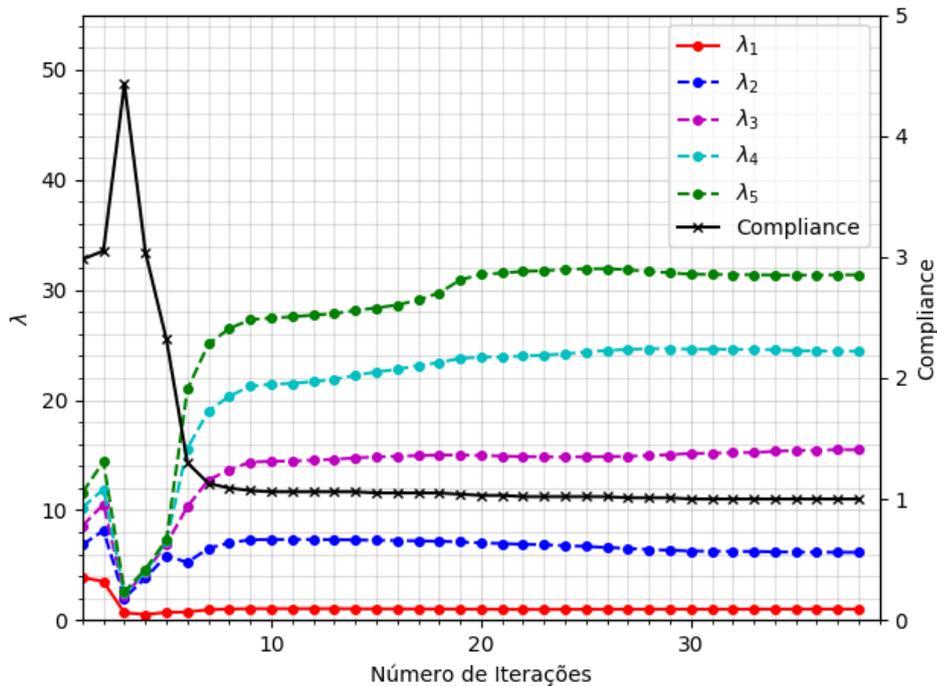


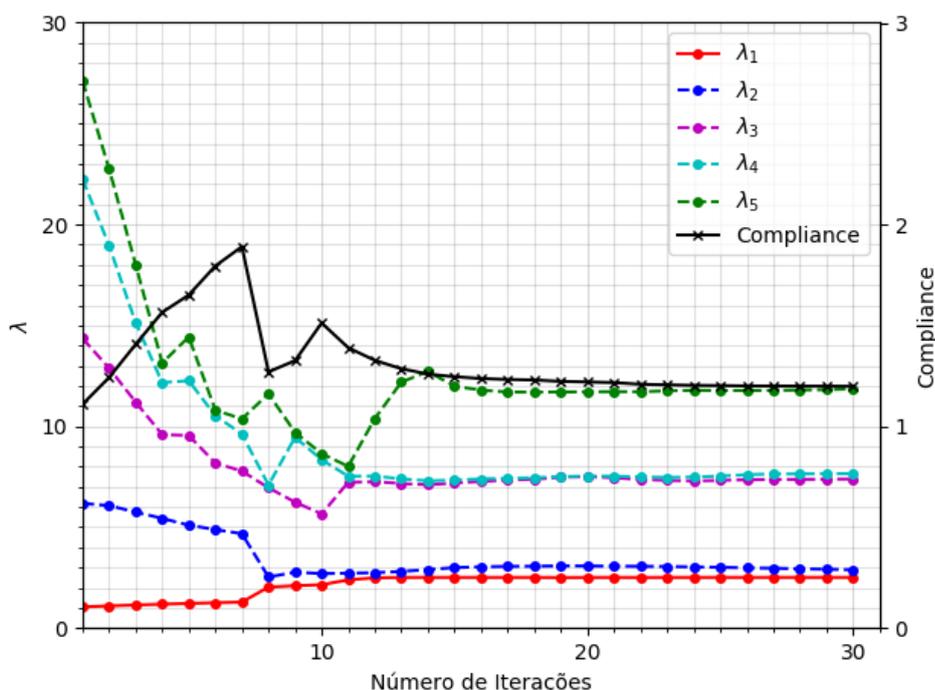
Figura 4.6 – Histórico de convergência da coluna sob compressão no Problema A, considerando a solução base  $P_c = 1.0$ .



Na Figura 4.7 observa-se o histórico de convergência da otimização com orientação A para a restrição na carga de flambagem  $P_c$  igual a 2.5. Abordando primeiro a evolução do *compliance* nota-se que seu valor sobe até a iteração número sete. Isto ocorre pois a distribuição de densidades inicial não provê uma estrutura com rigidez a flambagem o suficiente para suprir as restrições na carga crítica. Vale lembrar que a distribuição inicial de densidades utilizada na solução dos problemas com  $P_c$  acima de um, corresponde à solução do problema de minimização do *compliance* sem restrições de flambagem. Essa solução apresenta uma carga crítica de flambagem 2.5 vezes menor que a desejada na nova restrição, como visto pelo valor inicial de  $\lambda_1$  no histórico de convergência. Voltando agora a atenção para a evolução das cinco menores autovalores, solução da análise de flambagem linear, nota-se que o fenômeno de troca de modos, como esperado, relamente não ocorre na otimização deste problema. Alguns pares de autovalores

como  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  e  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  se aproximam bastante, mas sem ocorrência de interseção entre seus valores. O primeiro autovalor  $\lambda_1$  permanece, ao longo de todas as iterações, o valor crítico a ser avaliada para a carga de flambagem.

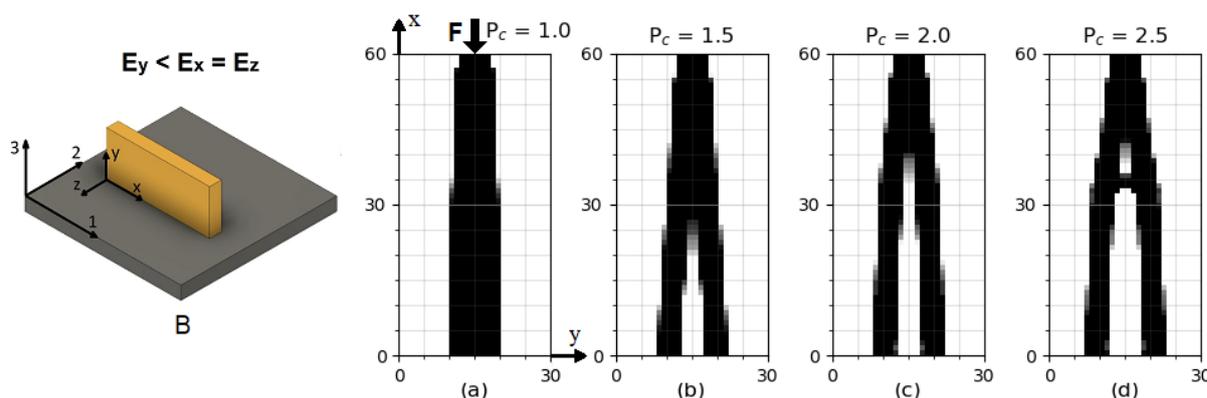
Figura 4.7 – Histórico de convergência da coluna sob compressão com orientação de impressão A, considerando  $P_c = 2.5$ .



A Figura 4.8 mostra as soluções obtidas para a otimização da coluna sob compressão conforme a orientação B. Considerando agora a anisotropia presente nessa configuração de impressão notam-se, a princípio, poucas diferenças quando comparado ao caso isotrópico. A piora nos valores mínimos de *compliance* obtidos foi de apenas, em média, 1.5% comparando-se individualmente cada uma das quatro soluções com diferentes restrições. Para as três primeiras cargas crítica de flambagem avaliadas ( $P_c = [1.0, 1.5, 2.0]$ ) a diferença verificada é muito sutil. A similaridade entre os resultados se deve a reduzida influência da rigidez transversal na resistência a flambagem de um componente sob compressão no sentido longitudinal. Como a flambagem é um fenômeno altamente associado à rigidez a flexão da estrutura. Logo, vê-se a redução muito maior dos limites de flambagem quando a rigidez do componente anisotrópico é menor da direção do carregamento. No caso em que o módulo de Young é menor na direção perpendicular a aplicação da força, o impacto no limite de flambagem não é tão grande. Para os casos com carga crítica de flambagem igual a 2.5, nota-se uma distinção maior entre as duas configurações na região central onde aparece um suporte horizontal. Esse suporte aparece em ambos os casos como resposta do processo de otimização à elevação da carga de flambagem requerida, mas para a orientação B essa estrutura apresenta uma maior largura para suprir a redução da rigidez na direção  $y$ .

Para melhor verificar a influência da redução da rigidez nas direções  $x$  e  $y$ , foram calculadas as cargas críticas de flambagem de colunas sob compressão, caso similar à Figura

Figura 4.8 – Soluções obtidas para a coluna sob compressão com Orientação de impressão B



4.4 para cinco combinações distintas de rigidez  $E_x$  e  $E_y$ . Colunas de duas dimensões distintas foram testadas: a primeira foi uma coluna esbelta com razão entre largura  $W$  e altura  $H$  de  $1 \times 10$ , enquanto a segunda possuía essa mesma razão em  $1 \times 2$ . Os resultados obtidos encontram-se na Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Impacto da anisotropia na carga crítica de flambagem

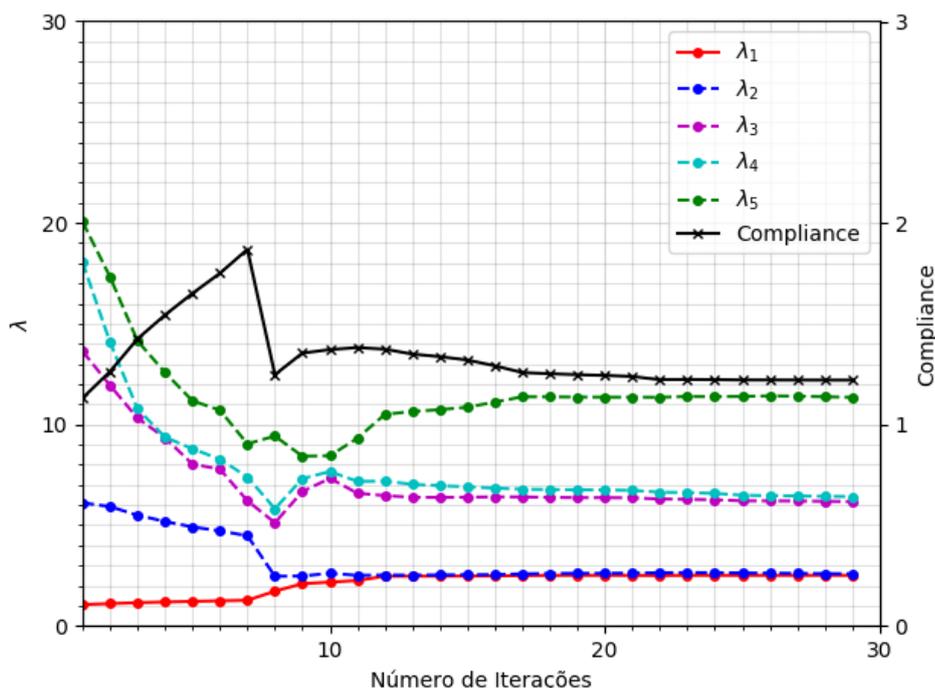
$E_x$	$E_y$	$\lambda_1$ (1x10)	$\lambda_1$ (1x2)
1.0	1.0	1.000	1.000
1.0	0.5	0.998	0.874
1.0	0.2	0.997	0.714
0.5	1.0	0.501	0.561
0.2	1.0	0.202	0.240

As informações reunidas na Tabela 4.2 corroboram as ideias discutidas sobre a influência das rigidezes paralela e transversal ao carregamento na flambagem de uma estrutura. Analisando primeiro a viga esbelta, percebe-se que seu comportamento sob flambagem se aproxima bastante da relação linear vista na Equação 4.1 considerando as alterações no módulo de elasticidade  $E_x$  paralelo ao carregamento. A influência das mudanças na rigidez transversal ao carregamento é praticamente negligenciável. Uma redução de 80% no valor de  $E_y$  resultou em uma carga crítica de flambagem apenas 0.3% menor. Observando-se agora os resultados obtidos para a coluna de dimensões  $1 \times 2$ , nota-se uma influência maior da rigidez transversal ao carregamento. Nesta coluna razoavelmente menos esbelta, uma redução de 80% na rigidez  $E_y$  implicou em uma carga crítica de flambagem aproximadamente 29% menor. Ainda assim, a influência de alterações no módulo de rigidez paralela ao carregamento se mostraram mais impactantes, como no caso da coluna esbelta. Nessa coluna mais compacta as reduções aplicadas no módulo de rigidez  $E_x$  resultaram em perdas na resistência à flambagem três vezes maior que aquela causada pelas reduções no módulo  $E_y$ .

Retornando aos resultados dos problemas de orientação A e B do Exemplo 1 notou-se que, para a restrição de flambagem igual a 2.0, o ponto de separação da coluna em dois membros

ocorre em uma posição mais alta (de  $y = 33\text{mm}$  para  $y = 35\text{mm}$ ) na solução correspondente ao Problema B. Essa separação mais alta resulta em duas colunas ligeiramente mais esbeltas compondo a base do componente. Esses membros mais esbeltos teriam uma resistência a flambagem inferior mas, como mencionado anteriormente, podem ser menos sensíveis à redução na rigidez  $E_y$  presente no Problema B.

Figura 4.9 – Histórico de convergência da coluna sob compressão com orientação de impressão B, considerando  $P_c = 2.5$ .



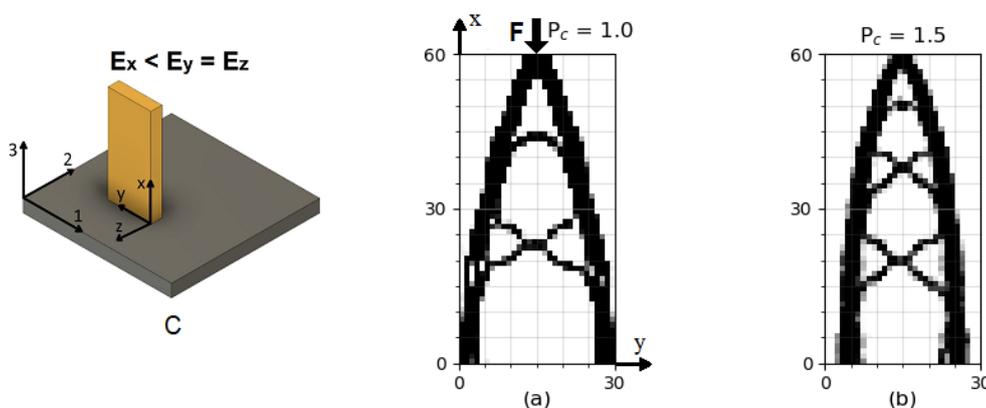
A Figura 4.9 mostra o histórico de convergência da otimização com orientação de impressão B considerando uma restrição na carga crítica de flambagem igual a 2.5. A evolução do *compliance* ocorre de maneira similar àquela observada no histórico do problema com orientação A, e essa mesma observação pode ser feita, a princípio, sobre o comportamento dos autovalores  $\lambda$ . Uma análise mais detalhada dos histórico dos autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  mostra que a separação entre eles ao final da otimização é menor que aquela observada na orientação A (13.0%), nesse novo caso a diferença entre os valores é de apenas 2.8%. Tal valor agora é bem próximo do limite imposto, de 1% entre os dois primeiros autovalores, pelo parâmetro de espaçamento  $\alpha$  utilizado na definição da restrição de flambagem do problema formulado na Equação 3.22.

Outra característica distinta observada no histórico de iteração do problema B diz respeito aos valores dos autovalores dos outros modos de flambagem, com restrição inativa ( $\lambda_2$ ,  $\lambda_3$ ,  $\lambda_4$  e  $\lambda_5$ ). Os menores autovalores  $\lambda_1$  são contidos pela restrição de flambagem e tem valor idêntico para ambos os problemas em sua soluções viáveis, no entanto os demais autovalores diferem em diferentes graus. Para o problema ortotrópico B esses demais modos de flambagem mostram carga crítica sempre abaixo das mesmas para o problema isotrópico A. Para o segundo modo

a perda é de aproximadamente 12%, para o terceiro e quarto quase 20%, para o quinto modo avaliado essa perda se limita a 5%.

A Figura 4.10 mostra os resultados obtidos para a otimização da coluna sob compressão considerando a orientação de impressão C. Como mencionado anteriormente, essa orientação de impressão resulta em estruturas ortotrópicas onde a rigidez considerada na direção  $x$  é cinco vezes menor que aquela exibida no problema A. Essa redução de rigidez paralela ao carregamento resultou diretamente em grandes perdas na resistência a flambagem, tal que para uma restrição de flambagem  $P_c$  igual 1.5 a otimização não chega a uma solução viável. Por ausência de solução viável considerou-se que mesmo após 150 iterações no processo de otimização restrições ainda não foram atingidas e ainda não houve tendência de mudança nas últimas avaliações. No caso, o problema de otimização aqui proposto possui dois tipos de restrições distintas, uma aplicada ao limite de flambagem e uma segunda limitando o volume material a ser utilizado para compor a estrutura. Vê-se que para a restrição de volume aplicada, o algoritmo implementado não encontrou distribuição de densidades capaz de gerar uma estrutura com limite de flambagem superior a 1.27, aproximadamente 15% aquém daquele requisitado pela restrição imposta. Assim, não sendo possíveis diferentes soluções para restrições de flambagem mais altas, apenas a solução para  $P_c = 1.0$  e a solução não viável com  $P_c = 1.5$  são aqui mostradas.

Figura 4.10 – Soluções obtidas para a coluna sob compressão com Orientação de impressão C

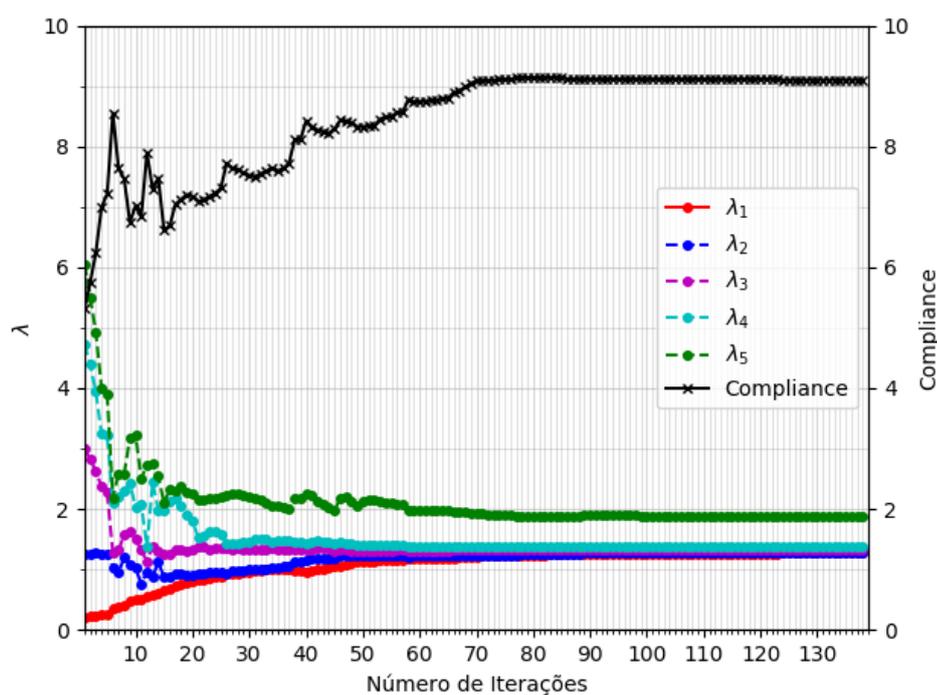


Observando primeiramente a solução apresentada na Figura 4.10 (a) já nota-se grande distinção daquelas observadas para os problemas com orientação A e B com restrição  $P_c$  igual a 1.0. Esta nova solução já mostra estratégia similar àquela vista no problema A com  $P_c$  igual a 2.5, onde a restrição de flambagem na configuração do exemplo 1 leva a soluções onde a coluna se divide em duas partes conectadas por estruturas reforçadoras. No entanto, a estrutura resultante apresenta agora uma complexidade maior, mostrando uma estrutura treliçada como elemento de união entre as colunas laterais. Na Figura 4.10 (b), com uma exigência ainda maior na restrição de flambagem, uma segunda estrutura treliçada surge unido as colunas laterais, mas não se mostra o suficiente para alcançar o limite de flambagem estipulado na restrição. Possivelmente, o limite imposto no volume de material impede o aparecimento de reforços mais robustos nessa estrutura interna sem redução excessiva na quantidade de material despendida nas colunas laterais. Desse

modo, limitando uma melhora na rigidez a flambagem da solução. Guardam-se ressalvas em relação a análise de flambagem aplicada nessas soluções visto que algumas estruturas da treliça interna são descritos por poucos elementos finitos, podendo resultar em erros acima do esperado.

Para os resultados considerando a orientação do problema C, foi analisado o histórico de convergência da solução com restrição de flambagem  $P_c$  igual a 1.5 mostrado na Figura 4.11. Nesta otimização não foi encontrada uma solução viável, visto que o requisito estabelecida pela restrição de flambagem não foi atingido. Observa-se pela evolução do *compliance* que o mesmo se eleva ao das iterações, enquanto o problema busca elevar a rigidez a flambagem do estrutura. No entanto, a parti de aproximadamente 125 iterações não se observa tendência de crescimento para o autovalor  $\lambda_1$  o qual parece se limitar a um máximo de 1.27. Enquanto isso nota-se, durante esse esforço para suprir a restrição, as quatro menores autovalores de flambagem convergem para posições muito próximas. Nesse caso, separação entre  $\lambda_1$  e  $\lambda_4$  ao final do número de iterações observado é de apenas 8.2%.

Figura 4.11 – Histórico de convergência da coluna sob compressão com orientação de impressão C, considerando  $P_c = 1.5$ .



Na Tabela 4.3 encontram-se sintetizados os resultados obtidos na otimização do estudo de caso 1 sob diversas condições. São comparados os valores mínimos de *compliance*, a separação entre os modos de flambagem medida como a razão  $\lambda_5/\lambda_1$  e o número de iterações requerido em cada processo. Para uma fácil comparação, os valores de *compliance* encontram-se normalizados em relação à solução com orientação A e  $P_c = 1.0$ . Na solução desses problemas de otimização o tempo computacional requerido foi limitado a 5000 s.

Analisamos agora as soluções com penalização  $fp = 1.484$  substituindo o modelo de penalização clássico do método SIMP onde  $fp = 3$  usado nas soluções anteriores. Enquanto no método SIMP a penalização é utilizada para evitar a presença de densidades intermediárias

Tabela 4.3 – Síntese dos resultados obtidos para o estudo de caso 1: Coluna sob compressão

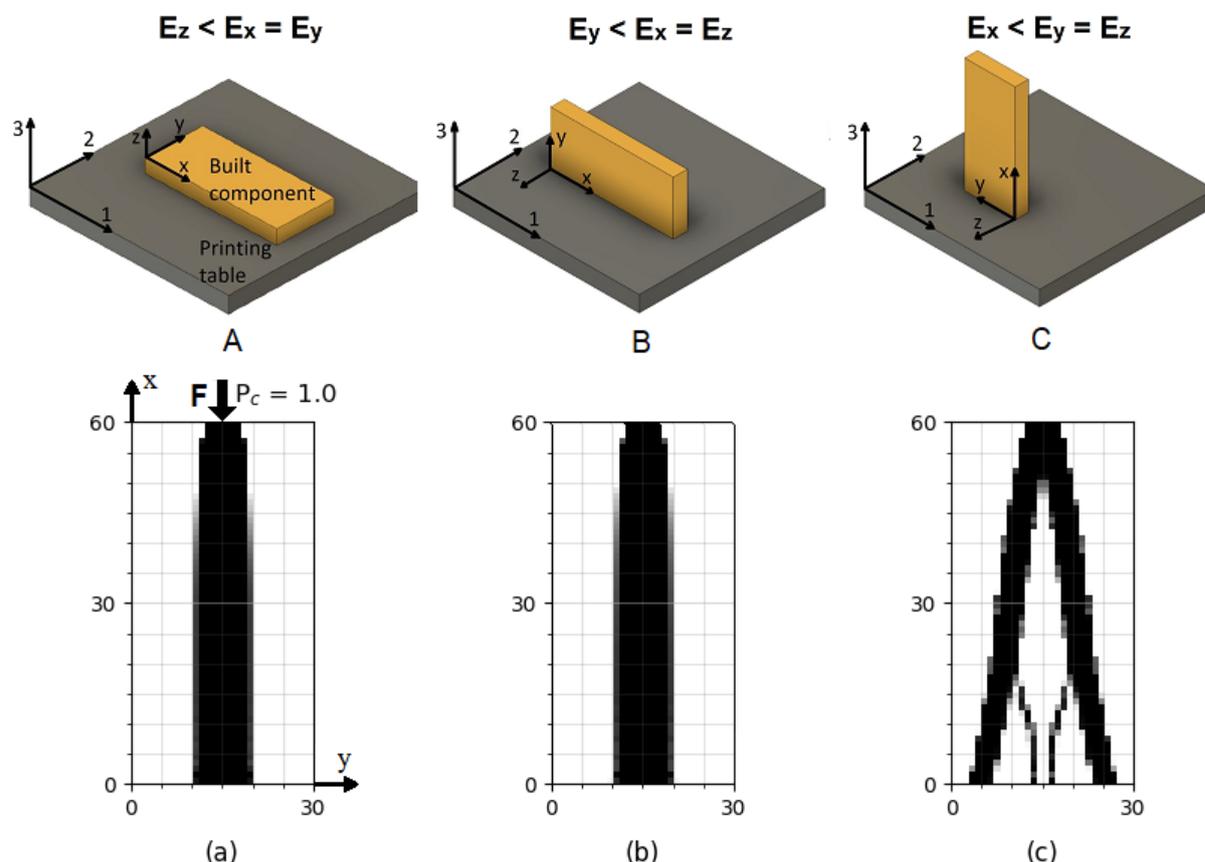
Solução	Orientação	$P_c$	$\lambda_5/\lambda_1$	<i>Compliance</i>	Nº de iterações
Fig. 4.5 (a)	A	1.00	31.39	1.00	38
Fig. 4.5 (b)	A	1.50	12.56	1.10	38
Fig. 4.5 (c)	A	2.00	6.10	1.15	94
Fig. 4.5 (d)	A	2.50	4.72	1.20	30
Fig. 4.8 (a)	B	1.00	24.48	1.01	109
Fig. 4.8 (b)	B	1.50	11.08	1.12	32
Fig. 4.8 (c)	B	2.00	5.84	1.17	22
Fig. 4.8 (d)	B	2.50	4.52	1.22	29
Fig. 4.10 (a)	C	1.00	1.76	8.35	69

na solução, agora com esse novo valor busca-se descrever o comportamento mecânico de uma estrutura fabricada por FDM. Como densidades intermediárias podem aparecer na solução, vale-se nesse caso da capacidade do processo de fabricação de produzir componentes compostos por regiões de diferentes densidades de preenchimento.

Nessas considerações foram obtidos os resultados na Figura 4.12. Novamente as três possíveis orientação de impressão foram consideradas, todas com uma restrição de flambagem  $P_c = 1.0$ . Mesmo nessa nova classe de soluções, a restrição  $P_c = 1$ . atende a mesma normalização aplicada nas soluções anteriores. Em outras palavras, esse valor corresponde à carga crítica de flambagem encontrada na solução do problema de mínimo *compliance* com orientação A e penalização  $fp = 3.0$  com restrições apenas no volume. Como discutido anteriormente o expoente  $fp = 1.484$  não elimina a presença de densidades intermediárias na solução. Apesar da grande similaridade das soluções encontrada para as orientações A e B com a solução base com  $fp = 3.0$ , notam-se agora estreitas regiões de densidade intermediária nas laterais do perímetro da coluna. Já a solução de orientação C se difere mais ao agora apresentar dois elementos de suporte próximo de sua base contendo elementos de densidade intermediária. Sobre a solução com orientação C guardam-se novamente ressalvas visto que as estruturas de suporte na base são descritas por menos elementos do que o recomendado para erros aceitáveis na análise de flambagem linear.

Comparamos agora os novos resultados obtidos com os anteriores onde foi aplicada penalização  $fp = 3$ , sob mesmas restrições de flambagem. Novamente as soluções com orientação de impressão A e B mostram soluções bem próximas também nas propriedades atingidas. Seus valores de *compliance* e  $\lambda_1$  se diferem em aproximadamente 0.1% apenas. Em ambas soluções um problema de minimização de *compliance* já resulta em estruturas capazes de suprir a restrição de flambagem aplicada com folgas, visto os valores de  $\lambda_1$  iguais a 1.40. Vale lembrar que essa restrição  $P_c = 1.0$  corresponde à carga necessária para flambagem da solução A com penalização  $fp = 3$ . Além da maior carga crítica de flambagem, observa-se para essas novas soluções uma redução no *compliance* mínimo de 9.72% e 10.61% para as soluções A e B respectivamente. Por

Figura 4.12 – Resultados obtidos para o estudo de caso 1: coluna sob compressão, considerando o modelo de densidades variáveis com  $f_p = 1.484$



outro lado, a separação entre os autovalores  $\lambda_5/\lambda_1$  se reduziu em 12.21% para a orientação A mas se elevou em 18.00% para a orientação B. Essa diferença de comportamento provavelmente pode estar relacionada à folga observada na restrição de flambagem. Como em ambos os casos essa restrição já assume um valor suficiente sem custo no valor de *compliance*, a solução do problema A pode buscar melhorias no valor da função objetivo a custo da rigidez a flambagem excedente. Resultando assim em uma menor separação do que a observada nas soluções com  $f_p = 3.0$ . Para a solução com orientação C foram obtidas mudanças mais intensas nas soluções, o *compliance* mínimo se reduziu em 40.08% e a separação entre os autovalores se elevou em 142.58%. As novas soluções mostraram assim uma maior rigidez e também estabilidade obtidas com a maior permissividade de densidades intermediárias. Visto que soluções viáveis foram encontradas em todos os casos com menores valores na função objetivo. A Tabela 4.4 resume os resultados obtidos na solução do primeiro estudo de caso considerando a nova abordagem.

#### 4.2.2 Estudo de caso 2: Chapa engastada

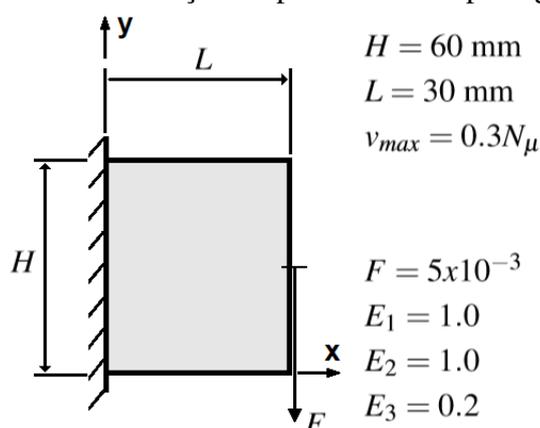
O segundo estudo de caso avaliado consiste em uma chapa engastada como mostrado na Figura 4.13. A chapa analisada possui comprimento  $L$  igual a 30 mm e altura  $H$  igual a 60 mm. Foi utilizado um filtro de densidades com raio igual a 2.0, uma restrição de volume de material

Tabela 4.4 – Síntese dos resultados obtidos para o estudo de caso 1: Coluna sob compressão, considerando o modelo de densidades variáveis com  $f_p = 1.484$

Solução	Orientação	$P_c$	$\lambda_1$	$\lambda_5/\lambda_1$	<i>Compliance</i>
Fig. 4.12 (a)	A	1.00	1.40	27.56	0.90
Fig. 4.12 (b)	B	1.00	1.40	28.89	0.90
Fig. 4.12 (c)	C	1.00	1.00	4.27	5.00

imposta em 0.3 e, novamente, os cinco primeiros modos de flambagem foram observados. Inicialmente foram obtidos resultados considerando as orientações de impressão A, B e C para um fator de penalização  $f_p$  igual a três. Assim como no estudo de caso anterior, soluções para os problemas sem restrição de flambagem são utilizadas como a distribuição inicial de densidades para os respectivos problemas com as restrições.

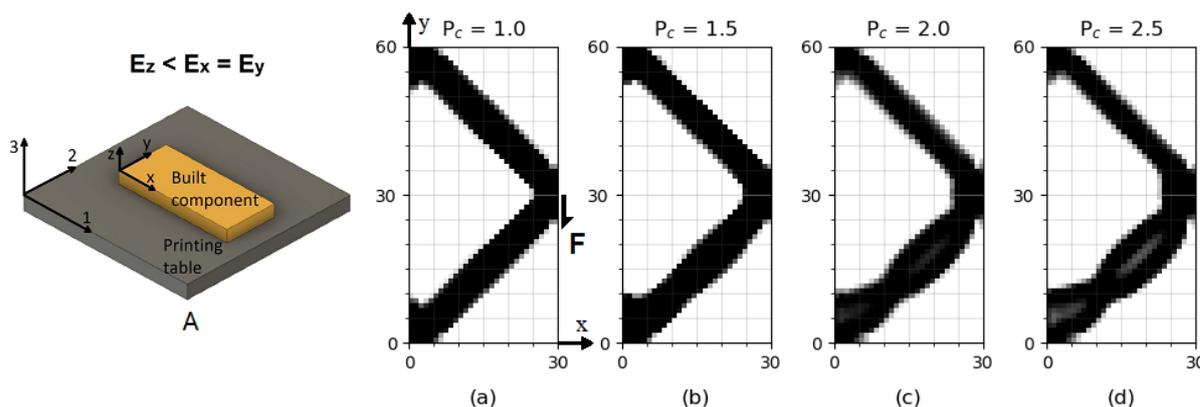
Figura 4.13 – Definição do problema: Chapa engastada



Para o problema com orientação de impressão A foram obtidas as soluções mostradas na Figura 4.14. A Figura 4.14 (a) corresponde à solução base onde o carregamento é igual ao limite de flambagem da solução de minimização de *compliance* sem restrições de flambagem. Em outras palavras, não há diferenças entre essas duas soluções com e sem restrições de estabilidade. Desse modo, esse problema de otimização leva a um componente simétrico composto de duas vigas, superior e inferior, ligando o ponto de aplicação da carga à região engastada. Nessa condição de carregamento a viga superior se encontra majoritariamente sob tração enquanto a viga inferior encontra-se sob compressão. Com a elevação da requisito de flambagem nota-se uma transição de material da viga superior para a viga inferior. Comportamento esperado visto que a viga inferior é crítica perante as restrições de estabilidade impostas nesse problema de otimização. Essa troca de material entre as vigas se intensifica à medida que a restrições de flambagem mais intensas são requeridas. Para a restrição  $P_c$  igual a 1.5 foram necessárias 81 iterações. Para essa restrição, não ocorreu aumento significativo no valor mínimo de *compliance* sendo este de apenas 2%. Para as soluções com  $P_c$  igual a 2.0 e 2.5 nota-se, além da troca de material entre as vigas, ligeiras bifurcações da viga inferior em dois componentes. Essas bifurcações não chegam

a ser completas visto a presença de regiões de densidade intermediária entre as partes. Esse tipo de característica na solução, a separação de um elemento da estrutura, também foi observado no estudo de caso anterior, para uma coluna sob compressão. Para obtenção da solução com  $P_c$  igual a 2.0 foram necessárias 23 iterações e o respectivo *compliance* mínimo se elevou em 12%. Já para a solução com  $P_c$  igual a 2.5 necessitou de 28 iterações e teve elevação do *compliance* em 19%.

Figura 4.14 – Soluções obtidas para a chapa engastada com orientação de impressão A



A Figura 4.15 mostra o histórico de convergência na otimização da solução base para chapa com orientação A. Quando comparado com o histórico do estudo de caso anterior com mesma orientação nota-se que os modos de flambagem nesse novo caso se encontram menos separados ao fim da otimização. Na solução base da coluna sob compressão, o autovalor para o quinto modo de flambagem  $\lambda_5$  é aproximadamente 31.4 vezes maior que para o primeiro modo. Por outro lado, o quinto modo de flambagem na solução base da chapa tem autovalor 3.8 vezes maior que aquele do primeiro modo. Tal agrupamento dos autovalores mesmo na solução inicial, pode indicar uma sensibilidade maior das soluções para esse novo estudo de caso a restrições mais intensas de carga de flambagem.

A Figura 4.16 mostra o histórico de convergência obtido considerando a orientação de impressão A com uma restrição de flambagem  $P_c$  igual a 2.5. Visto que a solução base é utilizada como solução inicial a esse novo problema, o histórico dessa nova otimização pode ser entendido como uma continuação daquele mostrado na Figura 4.15. Desse modo, o *compliance* nessa nova otimização já começa em um valor baixo, o qual se eleva ao longo das primeiras iterações para depois decrescer até seu valor mínimo possível. Essa elevação se deve à adequação da solução às novas restrições de flambagem impostas. Sendo assim os autovalores também se elevam, em relação aos da solução base, até que aquele correspondente ao primeiro modo de flambagem cumpra a restrição imposta. Nesse caso nota-se uma aproximação maior dos modos de flambagem, o autovalor do quinto modo de flambagem é aproximadamente 2 vezes maior que aquele do primeiro modo.

Considerando a orientação de impressão B para este estudo de caso foram obtidas as soluções na Figura 4.17. Assim como na solução anterior, o método de otimização leva ao

Figura 4.15 – Histórico de convergência da chapa engastada com orientação A para a solução base ( $P_c = 1.0$ ).

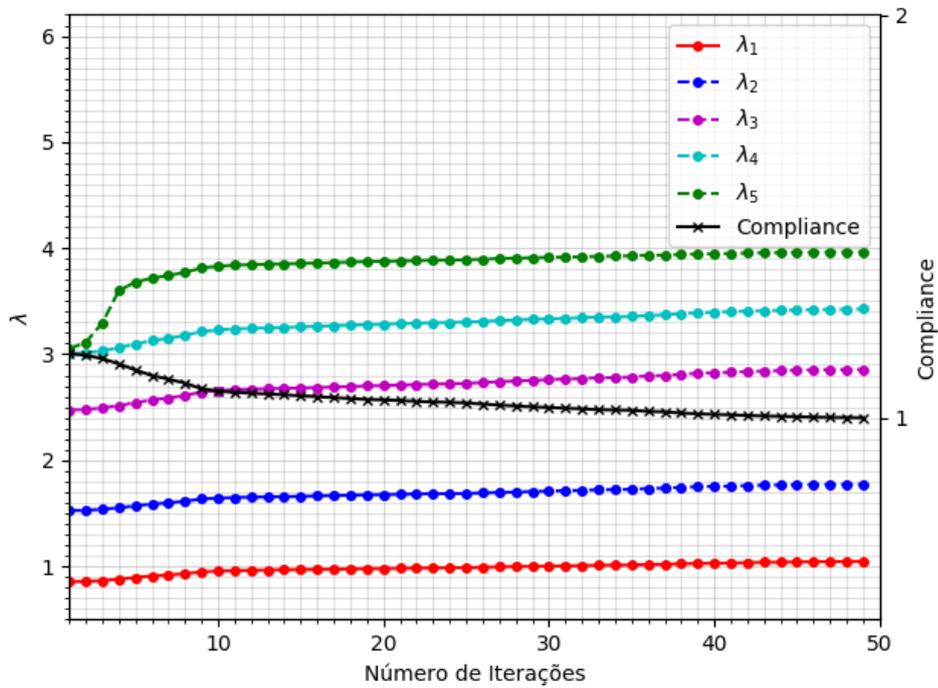
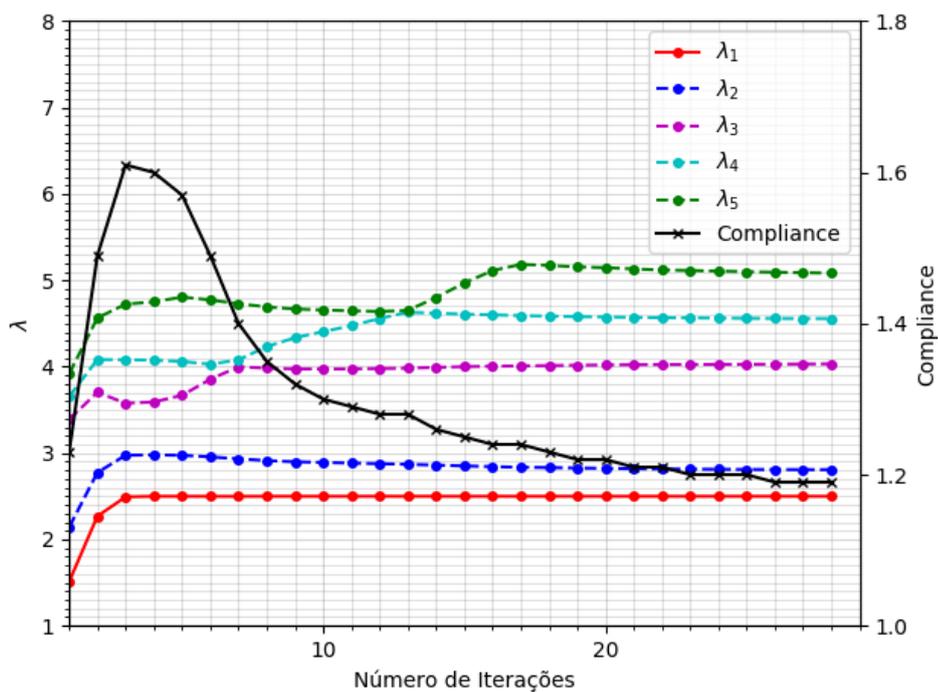


Figura 4.16 – Histórico de convergência na otimização da chapa engastada com orientação de impressão A, considerando  $P_c = 2.5$ .



material distribuído na forma geral de um componente formado por duas vigas engastadas unidas no ponto de aplicação da carga. Quando comparado à solução de orientação A, nota-se que com a perda de rigidez na direção  $y$  as novas estruturas obtidas apresentam uma separação menor entre os pontos de engaste das vigas superior e inferior. A nova orientação também implica em uma maior fragilidade do componente a flambagem de modo que não foi obtida solução viável para esse problema dada uma restrição de flambagem com  $P_c = 2.5$ . A solução com restrição  $P_c = 1.0$  necessitou de 48 iterações e apresentou um *compliance* mínimo aproximadamente 52.7% maior que aquele obtido na solução base com orientação A. Apesar da perda de rigidez, que resultou em grande impacto no valor de *compliance*, essa nova solução também é aproximadamente simétrica. Observando o limite de flambagem da solução de otimização com orientação B sem restrições de flambagem nota-se que esse pouco difere do obtido para a solução base com orientação A. Nota-se uma influência reduzida da redução de rigidez nessa solução. Deste modo, ao aplicar a restrição  $P_c = 1.0$  para esse problema, não se mostra necessária uma alteração da topologia visando elevar a rigidez a flambagem. Justificando a simetria apresentada por essa solução, mesma característica de uma solução sem restrições de flambagem.

Para a restrição  $P_c = 1.5$  nota-se agora uma quebra na simetria do componente, onde ocorre uma transição de material da viga superior para o inferior. Novamente, com a elevação da restrição se inicia a formação de uma bifurcação na viga inferior, sob compressão e crítica sob a ótica de estabilidade. Para essa restrição foram necessárias 77 iterações e o valor mínimo de *compliance* obtido subiu apenas 1.2% em relação à restrição anterior. Com a elevação da restrição de flambagem para  $P_c = 2.0$  a transição de material entre as vigas se intensifica, assim como a bifurcação da viga inferior. Nesse caso foram necessárias 90 iterações e a elevação no mínimo *compliance* foi de 8.3% em relação a solução com  $P_c = 1.0$ .

Pode-se avaliar que no segundo estudo de caso há uma sensibilidade maior da solução de otimização a elevações na restrição de flambagem, quando comparado ao primeiro estudo de caso. Visto que, na elevação da restrição de flambagem a um valor igual a 2.5 vezes o limite de flambagem da solução base, já não são obtidas soluções viáveis com a orientação de impressão B. É interessante observar que essa maior sensibilidade para esse estudo de caso não necessariamente é discernida observando apenas o comportamento da otimização para restrições baixas de flambagem. Nesse caso, para essa conclusão foi preciso observar o comportamento das soluções de otimização para valores crescentes na restrição de flambagem.

A Figura 4.18 mostra o histórico de convergência obtido para o problema com restrição de flambagem  $P_c = 1.0$ . Nesse caso ocorre um decréscimo contínuo no valor do *compliance* enquanto o menor autovalor se ajusta à restrição de flambagem imposta. Nesse caso, a separação entre o autovalor crítico e aquele correspondente ao quinto modo de flambagem foi de aproximadamente 135.9%.

A Figura 4.19 ilustra o histórico de convergência obtido quando considerada uma restrição de flambagem  $P_c = 2.0$ . Assim como observado para as soluções com orientação de impressão A, esse problema de otimização parte de uma distribuição inicial de densidades correspondente à solução do problema de minimização do *compliance* na ausência de restrições de flambagem.

Figura 4.17 – Soluções obtidas para a chapa engastada com orientação de impressão B

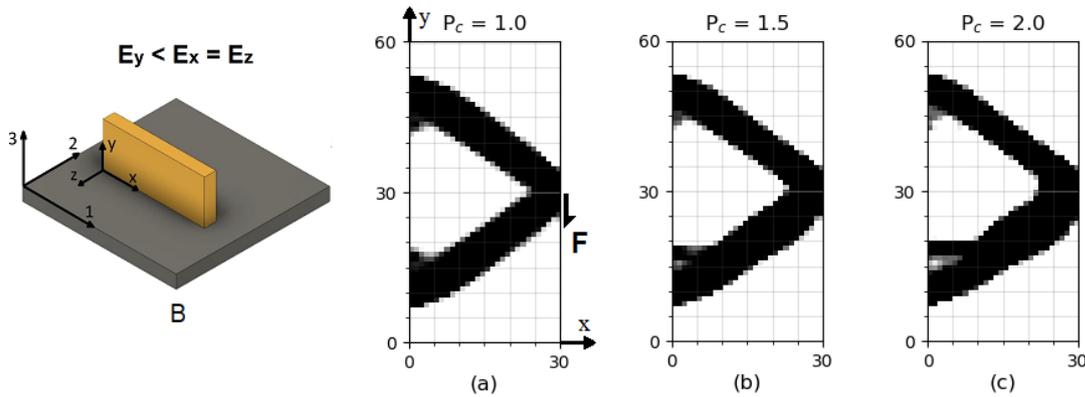
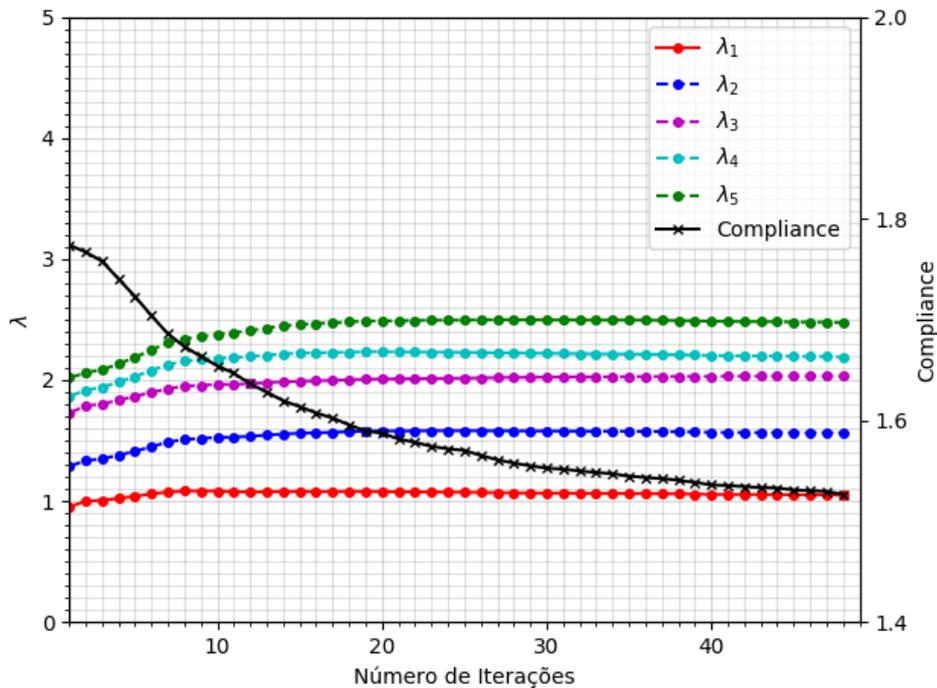


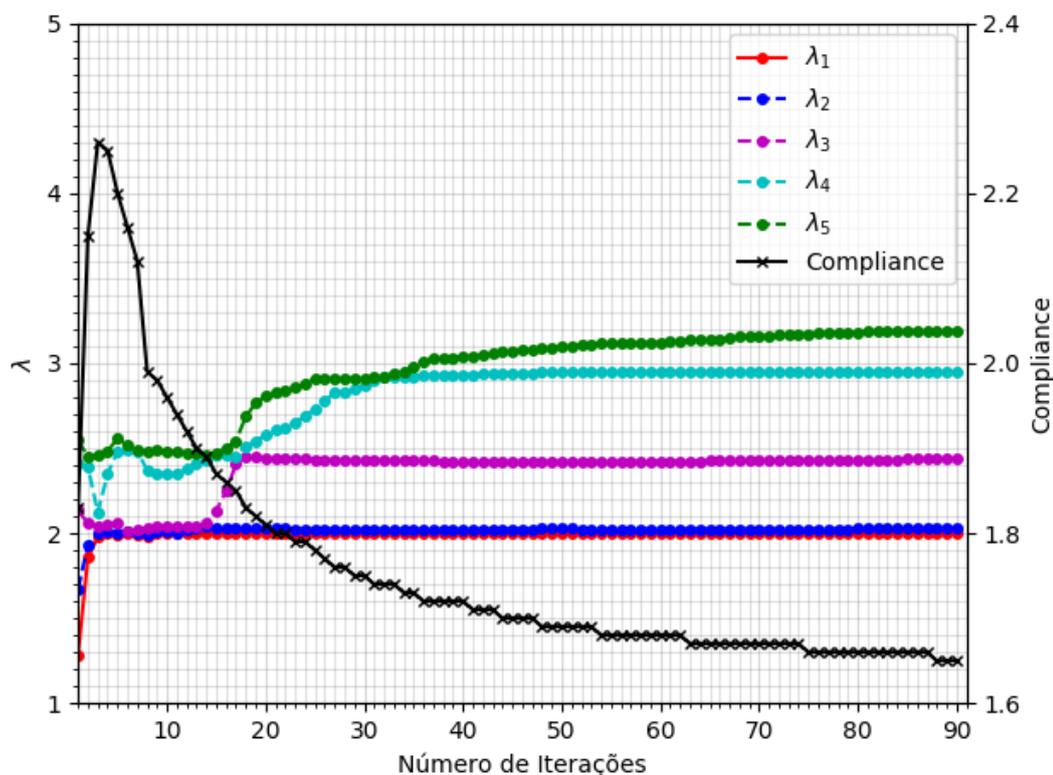
Figura 4.18 – Histórico de convergência da chapa engastada com orientação B considerando  $P_c = 1.0$



Deste modo nota-se inicialmente um aumento do valor do *compliance* enquanto os autovalores de flambagem são ajustados para, em seguida, buscar seu valor mínimo. Com a maior restrição de flambagem aplicada a este caso, observa-se uma separação menor entre os autovalores do primeiro e quinto modo de flambagem, de aproximadamente 59.6%. Além disso, os dois primeiros modos de flambagem identificados possuem autovalores quase coincidentes, com uma separação de apenas 1.5%.

O segundo estudo de caso também foi otimizado considerando uma orientação de impressão C. Os resultados obtidos encontram-se na Figura 4.20. Nesse caso, a redução de rigidez devido à anisotropia causada pela orientação de impressão ocorre na direção  $x$ . Assim como nas soluções com orientações de impressão anteriores, as topologias resultantes também se aproximam de uma composição de duas vigas engastadas unidas no ponto de aplicação da

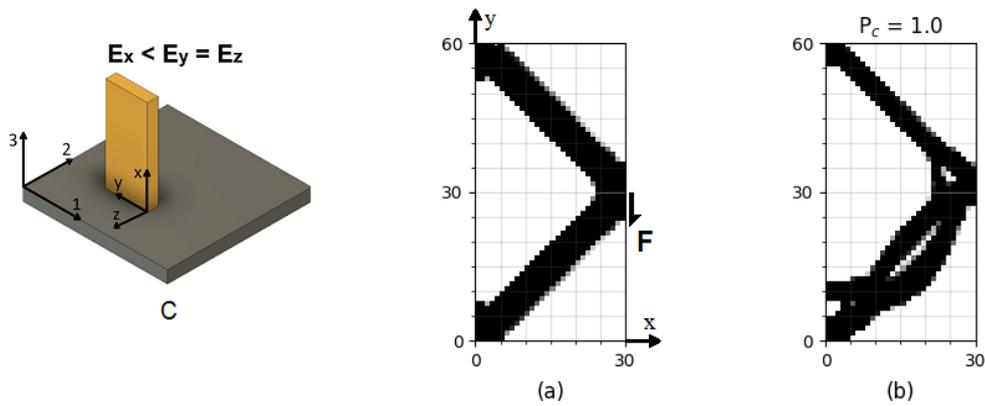
Figura 4.19 – Histórico de convergência da chapa engastada com orientação B considerando  $P_c = 2.0$



carga. A viga inferior, submetida a compressão, tem sua rigidez a flambagem bastante comprometida nessa configuração. Deste modo, foi encontrada solução factível apenas considerando uma restrição de flambagem  $P_c = 1.0$ . Assim, optou-se por exibir também a solução desse problema com orientação de impressão C na ausência de restrições de flambagem. Tornando possível observar a evolução desse tipo de solução sob a variação da carga de flambagem. Para solução desse problema foram necessárias 57 iterações e foi obtido um *compliance* mínimo aproximadamente 4 vezes maior aquele obtido para a orientação A sob iguais condições. A estrutura obtida se assemelha bastante à solução encontrada para a orientação de impressão A, com o mesma separação entre as vigas superior e inferior. Já para o problema com restrição de flambagem  $P_c = 1.0$  observou-se novamente seções da viga inferior segmentadas em duas partes. Assim como a transferência de material da viga superior para a inferior. Para essa solução foram necessárias 123 iterações e foi obtido um valor mínimo de *compliance* aproximadamente 5.3 vezes maior que aquela da solução base com orientação A e restrição de flambagem também  $P_c = 1.0$ .

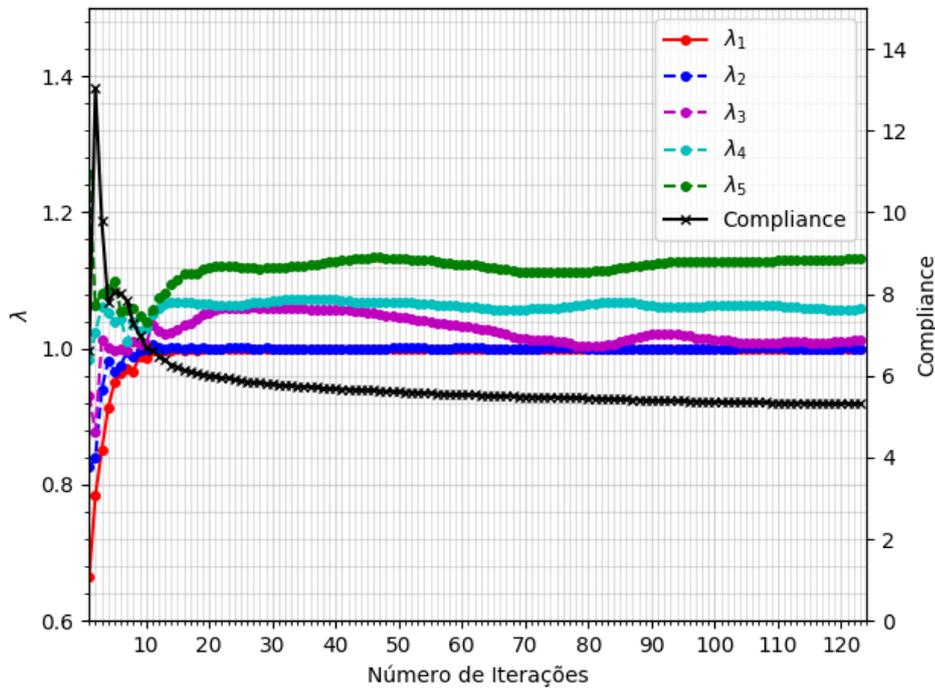
A Figura 4.21 mostra o histórico de convergência na solução do problema com orientação de impressão C e restrição de flambagem  $P_c = 1.0$ . Como visto nos casos anteriores, forçar restrições de flambagem maiores nesse tipo de otimização leva a redução da separação entre os autovalores dos modos de flambagem identificados. Nesse caso, com a rigidez à flambagem bastante comprometida, observa-se que os autovalores do primeiro, segundo e terceiro modos de flambagem se encontram muito próximos ao fim da otimização. A separação entre o primeiro e

Figura 4.20 – Soluções obtidas para a chapa engastada com orientação de impressão C



terceiro modos foi de apenas 1.2%. Além disso, a separação entre o primeiro e quinto modos foi de aproximadamente 13.2%.

Figura 4.21 – Histórico de convergência da chapa engastada com orientação C considerando  $P_c = 1.1$



A Tabela 4.5 contém os resultados obtidos no estudo de caso 2 para as três orientações consideradas. Quando comparado com o estudo de caso 1, esse novo problema avaliado se mostrou mais sensível à imposição de restrições de flambagem mais elevadas. Desta forma apenas três soluções factíveis foram obtidas para o problema com orientação de impressão B e uma para o problema com orientação C. Vale ressaltar que os dados mostrados na tabela de  $P_c$  e *compliance* são normalizados em relação à solução do problema com orientação A na ausência de restrições de flambagem.

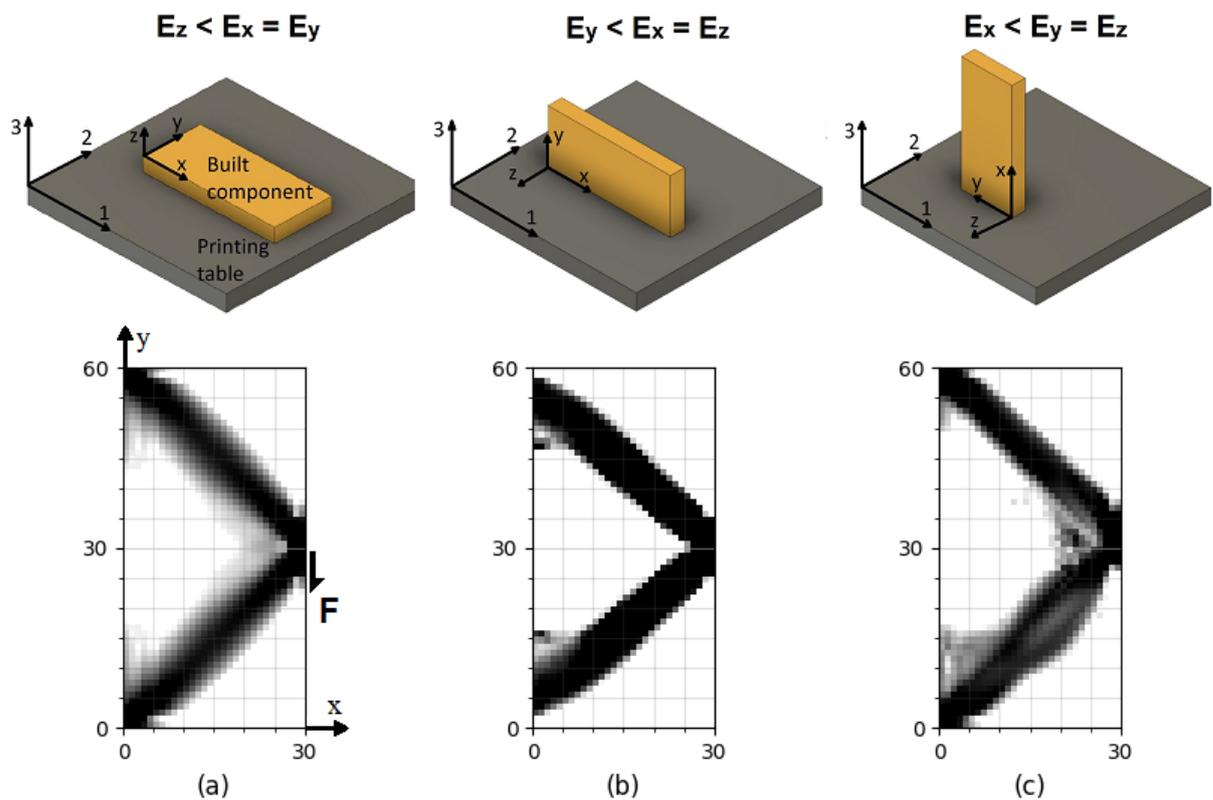
Considerando agora as soluções com penalização  $fp = 1.484$ , foram obtidos os resulta-

Tabela 4.5 – Resumo dos resultados obtidos para o estudo de caso 2: chapa engastada

Solução	Orientação	$P_c$	$\lambda_5/\lambda_1$	<i>Compliance</i>	Nº de iterações
Fig. 4.14 (a)	A	1.00	3.79	1.00	49
Fig. 4.14 (b)	A	1.50	2.85	1.02	81
Fig. 4.14 (c)	A	2.00	2.32	1.12	23
Fig. 4.14 (d)	A	2.50	2.03	1.19	28
Fig. 4.17 (a)	B	1.00	2.36	1.53	48
Fig. 4.17 (b)	B	1.50	1.93	1.55	77
Fig. 4.17 (c)	B	2.00	1.60	1.65	90
Fig. 4.20 (b)	C	1.00	1.13	5.32	123

dos na Figura 4.22. Novamente as três possíveis orientação de impressão foram consideradas, todas com uma restrição de flambagem  $P_c = 1.0$ . Mesmo nessa nova classe de soluções, a restrição  $P_c = 1$  atende a mesma normalização aplicada nas soluções anteriores. Em outras palavras, esse valor corresponde à carga crítica de flambagem encontrada na solução do problema de mínimo *compliance* com orientação A e penalização  $fp = 3.0$  com restrições apenas no volume.

Figura 4.22 – Resultados obtidos para o estudo de caso 2: chapa engastada, considerando o modelo de densidades variáveis com  $fp = 1.484$



Como discutido ao se encontrar o expoente  $fp = 1.484$  para modelo do material, esse

fator de penalização não elimina totalmente a presença de densidades intermediárias na solução. Nota-se que a forma geral das soluções se mantém mas em algumas regiões aparecem as zonas cinzentas características de densidades intermediárias. Na orientação C a transição de material observada anteriormente consegue ser parcial em cada elemento da malha. Apenas uma certa quantidade de material em cada elemento migra de regiões menos solicitadas para regiões mais solicitadas. Essa transição parcial resulta em algumas zonas de densidade intermediária.

Comparamos agora os novos resultados obtidos com os anteriores onde foi aplicada penalização  $fp = 3$ , sob mesmas restrições de flambagem. Para as orientações A e B o problema de minimização de *compliance* já resulta em estruturas capazes de suprir a restrição de flambagem aplicada com folgas, como indicado também pela simetria dessas soluções. Vale lembrar que essa restrição  $P_c = 1.0$  corresponde à carga necessária para flambagem da solução A com penalização  $fp = 3$ . Além da maior carga crítica de flambagem, observa-se para essas novas soluções uma redução no *compliance* mínimo de 7.41% e 5.50% para as soluções A e B respectivamente. Novamente, comportamentos opostos são observados na separação entre os autovalores: para orientação A a separação se reduziu em 39.46% enquanto para a orientação B se elevou em 2.67%. Comparando-se as soluções com orientação C foram obtidas mudanças mais intensas nas soluções, o *compliance* mínimo se reduziu em 27.43% e a separação entre os autovalores se elevou em 45.24%. As novas soluções mostraram assim uma maior rigidez e também estabilidade obtidas com a maior permissividade de densidades intermediárias. A Tabela 4.6 resume os resultados obtidos na solução do segundo estudo de caso considerando a nova abordagem.

Tabela 4.6 – Resultados obtidos para o estudo de caso 2: chapa engastada, considerando o modelo de densidades variáveis com  $fp = 1.484$

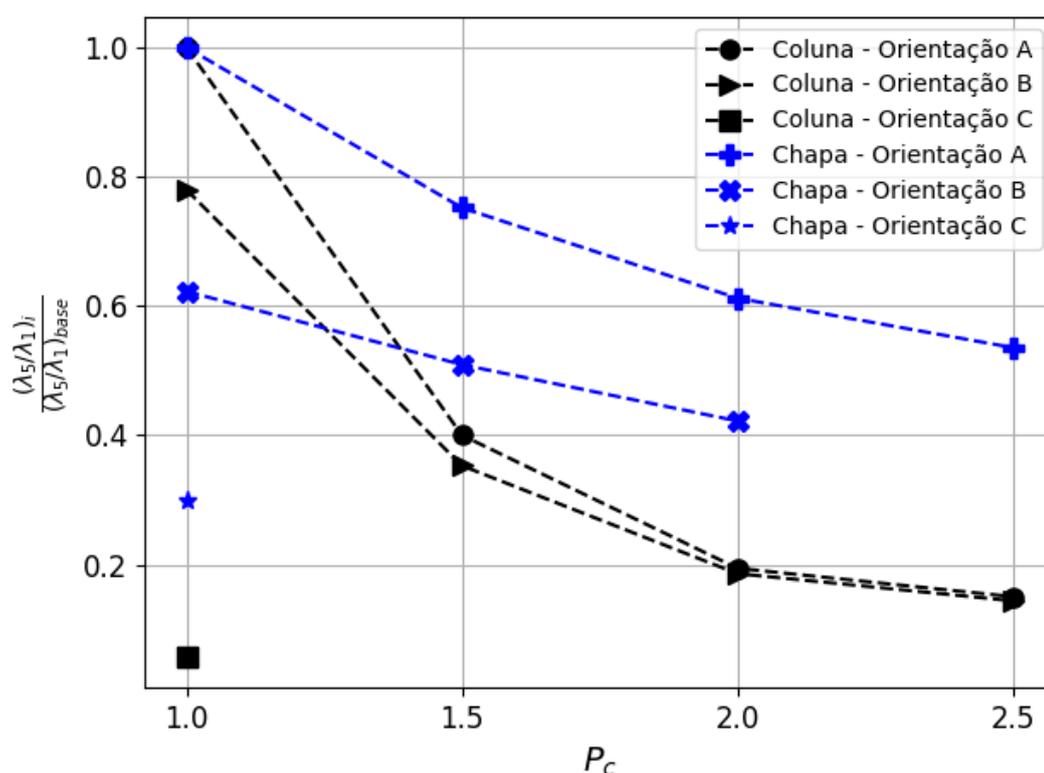
Solução	Orientação	$P_c$	$\lambda_1$	$\lambda_5/\lambda_1$	<i>Compliance</i>
Fig. 4.22 (a)	A	1.00	2.24	2.29	0.93
Fig. 4.22 (b)	B	1.00	1.10	2.42	1.45
Fig. 4.22 (c)	C	1.00	1.00	1.68	3.86

#### 4.2.3 Separação entre os autovalores e rigidez máxima a flambagem

Após a análise das soluções obtidas nota-se constantemente nos dois estudos de caso uma diminuição da separação entre os autovalores de flambagem à medida que as restrições de flambagem mais altas eram solicitadas. Para uma melhor visualização desse comportamento, a Figura 4.23 ilustra a separação entre os modos, definida pela razão  $\lambda_5/\lambda_1$ , para as soluções encontradas. Os valores obtidos para as razões de separação são normalizados em relação à solução base (orientação A e  $P_c = 1.0$ ) de cada estudo de caso. Esta normalização é feita de modo a facilitar a comparação entre as diferentes condições de carregamento de cada estudo.

Como mencionado na análise dos históricos de convergência, a separação entre os autovalores se reduz à medida que as restrições de flambagem  $P_c$  se elevam com tendência similar em ambos estudos de caso. A aproximação entre os modos aparenta tender a um limite correspondente a uma máxima rigidez a flambagem possível dado o limite de volume de material. A partir desse ponto, qualquer elevação em  $P_c$  não permitiria a obtenção de soluções viáveis ao problema de otimização. De certa forma, a separação entre os autovalores observados pode ser interpretada como uma medida de rigidez latente a flambagem dado um volume limite de material em um problema estrutural. Possivelmente possibilitando prever qualitativamente os limites de uma otimização de flambagem baseado na análise de flambagem de uma solução inicial mais simples computacionalmente. Além disso, quando comparadas soluções com diferentes orientações de impressão em um mesmo estudo de caso, nota-se uma aproximação entre as separações obtidas considerando orientação A e orientação B à medida que restrições de flambagem mais altas são impostas.

Figura 4.23 – Separação entre os autovalores de flambagem das diferentes soluções obtidas em ambos estudos de caso.



#### 4.2.4 Reprodução de resultados e código implementado

Para facilitar a reprodução dos problemas de otimização aqui reportados e futura expansão do código, o mesmo se encontra disponível no repositório <https://github.com/CarvalhoCdK/topology-optimization-MSc.git>.

## 5 CONCLUSÃO

Um problema de otimização topológica foi desenvolvido de modo a incluir propriedades mecânicas presentes em estruturas fabricadas por FDM. Estruturas as quais possuem propriedades altamente ligadas a seus parâmetros de fabricação. Tratando de sua orientação de impressão, foi identificada rigidez com comportamento ortotrópico ligada a esse parâmetro. Além disso, observou-se como o parâmetro densidade de preenchimento altera a rigidez da estrutura estabelecendo um paralelo com as densidades artificiais do método SIMP de otimização.

Para explorar as distintas propriedades identificadas, o problema de otimização topológica proposto consistiu na minimização do *compliance* estrutural enquanto sujeito a restrições no volume de material e nas cargas críticas de flambagem. Soluções foram obtidas considerando dois estudos de caso sob diferentes orientações de impressão e restrições de flambagem. Essas diferentes condições resultaram em claras diferenças nas soluções obtidas. Elevações nos valores de *compliance* mínimo obtidos foram observadas quando na imposição de restrições mais altas de flambagem, destacando o aspecto competitivo entre rigidez e estabilidade neste tipo de problema. Algumas orientações de impressão, como apresentavam redução de rigidez em direções críticas, resultaram em soluções com grande perda de rigidez a flambagem tal que para algumas condições soluções viáveis não foram encontradas.

Tratando dos problemas que analisaram o uso do parâmetro densidade de preenchimento resultados mais eficientes foram obtidos. O modelo assumido, o qual empregou um fator de penalização menor que nas condições anteriores, possibilitou a presença de regiões com densidades intermediárias nas soluções as quais podem ser possíveis de fabricar com o método FDM. No entanto, vale ressaltar que a qualidade dos resultados obtidos com essa abordagem depende bastante dos dados experimentais utilizados para alimentar o modelo de rigidez em função do preenchimento. Desse modo, no uso dessa abordagem, os modelos devem ser sempre calibrados e ajustados as condições do equipamento usado para impressão.

Além do impacto direto em rigidez e nas cargas críticas de flambagem, foi observado também o impacto dos diferentes parâmetros do problema na separação entre os autovalores dos modos de flambagem, medida pela razão  $\lambda_5/\lambda_1$ . Notou-se que a elevação das restrições de flambagem implicava numa redução desse parâmetro de separação. A tendência de aproximação dos autovalores existia até um limite, além do qual o aumento na restrição de flambagem não permitia a existência de soluções viáveis. De certa forma indicando essa separação como uma possível métrica indicativa dos limites de máxima rigidez a flambagem nos problemas. A aproximação entre os autovalores dos modos de flambagem de um problema também foram observadas como consequência da perda de rigidez nas orientações de impressão ortotrópicas.

Em resumo, o trabalho aqui apresentado forneceu uma melhor compreensão do impacto de propriedades mecânicas distintas características de componentes fabricados por FDM em soluções de otimização topológica. Além disso, a implementação aplicada para o problema com restrições de flambagem contribuiu para o desenvolvimento de métodos modulares de otimização topológica em análises multidisciplinares como a proposta pelo OpenMDAO.

## 5.1 Trabalhos futuros

Como continuação ao trabalho realizado são propostos aqui tópicos complementares:

- A realização de ensaios experimentais para verificação das propriedades mecânicas apresentadas pelas soluções. Além disso, séries de ensaios podem ser empregadas para caracterização mais aprofundada do impacto de diferentes parâmetros de impressão em peças fabricadas por FDM. Esses dados podem ser utilizados para modelos de otimização mais precisos calibrados especificamente para os equipamentos disponíveis.
- A expansão de novas análises incluídas no modelo de otimização implementado. A estrutura modular utilizada têm essa futuras expansões como um de seus objetivos. Facilitando a inclusão de novas condições como restrições de tensão, deformação ou mesmo o acoplamento de outras disciplinas como considerações sobre comportamento termodinâmico das estruturas.

## REFERÊNCIAS

ALAIMO, G. et al. Influence of meso-structure and chemical composition on fdm 3d-printed parts. **Composites Part B: Engineering**, v. 113, p. 371–380, 2017.

ALAMO, J.; SILVA, F. da. Adapting the simp model for topology optimization of biomechanical structures. In: **Proceedings of the 12th Pan-American Congress of Applied Mechanics - PACAM XII**. Port of Spain, Trinidad: PACAM, 2012.

APM DESIGNS. **FDM vs SLA: A Direct Comparison Guide**. 2020. Disponível em: <<http://apm-designs.com/>>. Acesso em: 23 abril 2020.

BENDSØE, M. P.; KIKUCHI, N. Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 71, p. 197–224, 1988. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0045-7825\(88\)90086-2](https://doi.org/10.1016/0045-7825(88)90086-2)>.

BENDSØE, M. P.; SIGMUND, O. **Topology Optimization: Theory, Methods and Applications**. 2nd edition. ed. Berlin: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2004.

BERTOLDI, M. et al. Mechanical characterization of parts processed via fused deposition. In: **Proceedings of the Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium**. Austin, USA: UT Austin, 1998.

BOOM, S. J. Van den. **Topology optimization including buckling analysis**. Dissertação (Mestrado) — Delft University of Technology, Delft, 2014.

BORST, R. de et al. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. 2nd. ed. UK: John Wiley and Sons Ltd, 2012.

BRITO, G. F. et al. Biopolímeros, polímeros biodegradáveis e polímeros verdes. **Revista Eletrônica de Materiais e Processos**, v. 6, n. 2, p. 12 –139, 2011.

BRUYNEEL, M.; COLSON, B.; REMOUCHAMPS, A. Discussion on some convergence problems in buckling optimisation. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 35, p. 181–186, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-007-0129-z>>.

CAMINERO, M. et al. Additive manufacturing of pla-based composites using fused filament fabrication: Effect of graphene nanoplatelet reinforcement on mechanical properties, dimensional accuracy and texture. **Polymers**, v. 11, p. 799, 05 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.3390/polym11050799>>.

CARDOSO, E. L.; FONSECA, J. S. O. Complexity control in the topology optimization of continuum structures. **Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering**, v. 25, p. 293–301, 2003. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1590/S1678-58782003000300012>>.

CARVALHO, L. F. B.; FERREIRA, R. P. M. A topology optimization procedure for additive manufactured components. In: **25th International Congress of Mechanical Engineering**. Uberlândia, Brasil: ABCM - Associação Brasileira de Engenharia e Ciências Mecânicas, 2019.

CASAVOLA, C. et al. Orthotropic mechanical properties of fused deposition modelling parts described by classical laminate theory. **Materials and Design**, v. 90, p. 453–458, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.matdes.2015.11.009>>.

CHRISTENSEN, P. W.; KLARBRING, A. **An Introduction to Structural Optimization**. 1st edition. ed. Dordrecht: Springer Netherlands, 2009.

CHUA, C. K.; CHOU, S. M.; WONG, T. S. A study of the state-of-the-art rapid prototyping technologies. **Int J Adv Manuf Technol**, v. 14, p. 146–152, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01322222>>.

CHUNG, H. et al. Topology optimization in openmdao. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 59, p. 1385–1400, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-019-02209-7>>.

CLAUSEN, A.; AAGE, N.; SIGMUND, O. Exploiting additive manufacturing infill in topology optimization for improved buckling load. **Engineering**, v. 2, p. 250–257, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/J.ENG.2016.02.006>>.

CNC KITCHEN. **Gradient infill for 3D prints**. 2020. Disponível em: <<https://www.cnckitchen.com/blog/gradient-infill-for-3d-prints>>. Acesso em: 8 julho 2020.

COMPTON, B. G.; LEWIS, J. A. 3d-printing of lightweight cellular composites. **Advanced Materials**, v. 26, p. 5930–5935, 2014. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/adma.201401804>>.

COOK, R. D. et al. **Concepts and Applications of Finite Element Analysis**. 4th edition. ed. Madison: John Wiley and Sons, INC., 2002.

COSTATO, L. **Mechanical characterization of 3D printed thermoplastic material: from experimental investigation to design**. Dissertação (Mestrado) — Università degli Studi di Pavia, Pavia, 2016.

DÍAZ, A.; SIGMUND, O. Checkerboard patterns in layout optimization. **Structural Optimization**, v. 10, p. 40–45, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01743693>>.

DIJK, N. P. van et al. Level-set methods for structural topology optimization: a review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p. 437–472, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-013-0912-y>>.

DUNNING, P. D. et al. Level-set topology optimization with many linear buckling constraints using an efficient and robust eigensolver. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 107, p. 1029–1053, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.5203>>.

DUNNING, P. D.; STANFORD, B. K.; KIM, H. A. Level-set topology optimization with aeroelastic constraints. In: **56th AIAA/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference**. Kissimmee, Florida: ARC, 2015.

FERRARI, F.; SIGMUND, O. Revisiting topology optimization with buckling constraints. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 59, p. 1401–1415, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-019-02253-3>>.

FLECK, N. A.; DESHPANDE, V. S.; ASHBY, M. F. Micro-architected materials: past, present and future. **Proceedings of the Royal Society A. Mathematical, Physical and Engineering Sciences**, v. 466, p. 2495–2516, 2010. Disponível em: <<https://doi.org/10.1098/rspa.2010.0215>>.

- GAO, X. et al. Improving the overall performance of continuum structures: A topology optimization model considering stiffness, strength and stability. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 359, p. 112660, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2019.112660>>.
- GAO, X.; MA, H. Topology optimization of continuum structures under buckling constraints. **Computers Structures**, v. 157, p. 142–152, 2015. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.compstruc.2015.05.020>>.
- GOURNAY, F. D.; ALLAIRE, G.; JOUVE, F. Shape and topology optimization of the robust compliance via the level set method. **SAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations**, v. 14, p. 43–70, 2008. Disponível em: <<https://doi.org/10.1051/cocv:2007048>>.
- GRAY, J. S. et al. Openmdao: An open-source framework for multidisciplinary design, analysis, and optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 59, p. 1075–1104, 2019. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-019-02211-z>>.
- HENDRICKS, E. S. et al. Propulsion system optimization for a turboelectric tiltwing urban air mobility aircraft. In: **24<sup>th</sup> International Society for Air Breathing Engines Conference**. Canberra, Australia: ISABE, 2019.
- HOGLUND, R.; SMITH, D. E. Non-isotropic material distribution topology optimization for fused deposition modeling products. In: **Proceedings of the Annual International Solid Freeform Fabrication Symposium**. Austin, USA: UT Austin, 2015.
- LOGAN, D. L. **A First Course in the Finite Element Method**. 4th. ed. Boston, US: Cengage Learning, 2007.
- LUBOMBO, C.; HUNEAULT, M. A. Effect of infill patterns on the mechanical performance of lightweight 3d-printed cellular pla parts. **Materials Today Communications**, v. 17, p. 214–228, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.mtcomm.2018.09.017>>.
- MAROTI, P. et al. Printing orientation defines anisotropic mechanical properties in additive manufacturing of upper limb prosthetics. **Materials Research Express**, IOP Publishing, v. 6, n. 3, p. 035403, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1088/2053-1591/aaf5a9>>.
- NEVES, M. M.; RODRIGUES, H.; GUEDES, J. M. Generalized topology design of structures with a buckling load criterion. **Structural Optimization**, v. 10, p. 71–78, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01743533>>.
- OÑATE, E. **Structural Analysis with the Finite Element Method**. 1st. ed. Netherlands: Springer, 2009.
- PERKOWSKI, C. **Tensile-compressive asymmetry and anisotropy of fused deposition modeling PLA under monotonic conditions**. Dissertação (Mestrado) — University of Central Flórida, Orlando, USA, 2016.
- RODRIGUES, H. C.; GUEDES, J. M.; BENDSØE, M. P. Necessary conditions for optimal design of structures with a nonsmooth eigenvalue based criterion. **Structural Optimization**, v. 9, p. 52–56, 1995. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01742645>>.
- RODRÍGUEZ-PANES, A.; CLAVER, J.; CAMACHO, A. M. The influence of manufacturing parameters on the mechanical behaviour of pla and abs pieces manufactured by fdm: a comparative analysis. **Materials (Basel)**, v. 11, p. 1333, 2018.

- ROZVANY, G. Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 21, p. 90–108, 2001. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s001580050174>>.
- SEYRANIAN, A. P.; LUND, E.; OLHOFF, N. Multiple eigenvalues in structural optimization problems. **Structural optimization**, v. 8, p. 207–227, 1994. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01742705>>.
- SHISHKO, R.; CHAMBERLAIN, R. G. **NASA Systems Engineering Handbook**. Washington, D.C.: National Aeronautics and Space Administration, 1995.
- SIGMUND, O. Morphology-based black and white filters for topology optimization. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 33, p. 401–424, 2007. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-006-0087-x>>.
- SIGMUND, O.; MAUTE, K. Topology optimization approaches: A comparative review. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 48, p. 1031–1055, 2013. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-013-0978-6>>.
- SIGMUND, O.; PETERSSON, J. Numerical instabilities in topology optimization: A survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima. **Structural Optimization**, v. 16, p. 68–75, 1998. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/BF01214002>>.
- SILVA, E. C. N. **Técnicas de otimização aplicadas no projeto de peças mecânicas**. 2003. Disponível em: <<http://sites.poli.usp.br/d/pmr5215/otimizacao.pdf>>.
- SLIC3R.ORG. **Slic3r Manual**. 2019. Disponível em: <<https://manual.slic3r.org/expert-mode/print-settings>>. Acesso em: 24 abril 2020.
- SVANBERG, K.; SVÄRD, H. Density filters for topology optimization based on the geometric and harmonic means. In: **10<sup>th</sup> World Congress on Structural and Multidisciplinary Optimization**. Orlando, Florida, USA: [s.n.], 2013.
- THOMSEN, C. R.; WANG, F.; SIGMUND, O. Buckling strength topology optimization of 2d periodic materials based on linearized bifurcation analysis. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 339, p. 115–136, 2018. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.cma.2018.04.031>>.
- TORRES J., C. M. O. A. D. Z.; GORDON, A. An approach for mechanical property optimization of fused deposition modeling with polylactic acid via design of experiments. **Rapid Prototyping Journal**, v. 22, p. 387–404, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1108/RPJ-07-2014-0083>>.
- TYMRAK, B.; KREIGER, M.; PEARCE, J. Mechanical properties of components fabricated with open-source 3-d printers under realistic environmental conditions. **Materials Design**, v. 58, p. 242–246, 06 2014.
- WANG, M. Y.; WANG, S. Bilateral ltering for structural topology optimization. **INTERNATIONAL JOURNAL FOR NUMERICAL METHODS IN ENGINEERING**, v. 63, p. 1911–1938, 2005. Disponível em: <<https://doi.org/10.1002/nme.1347>>.
- WANG, M. Y.; WANG, X.; GUO, D. A level set method for structural topology optimization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 192, p. 227–246, 2003. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(02\)00559-5](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(02)00559-5)>.

WU, J. **Topology optimization studies for light weight acoustic panels**. Dissertação (Mestrado) — University of Toronto, Toronto, Canada, 2016.

ZEGARD, T.; PAULINO, G. H. Bridging topology optimization and additive manufacturing. **Structural and Multidisciplinary Optimization**, v. 53, p. 175–192, 2016. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00158-015-1274-4>>.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. **The Finite Element Method: Basic Formulation and Linear Problems**. International. UK: McGraw-Hill Book Co., 1989.