



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Adjunções entre categorias de álgebras e extensões de quociente bifinito

Fernando dos Reis Naves

Belo Horizonte, MG - Brasil

2022

Fernando dos Reis Naves

Adjunções entre categorias de álgebras e extensões de quociente bifinito

Tese apresentada ao corpo docente da Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: John William MacQuarrie

Belo Horizonte, MG - Brasil

2022

Naves, Fernando dos Reis.

N323a Adjunções entre categorias de álgebras e extensões de quociente bifinito [manuscrito] / Fernando dos Reis Naves – 2022.
103 f. il.

Orientador: John William MacQuarrie.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.101-103

1. Matemática – Teses. 2. Álgebra pseudocompacta – Teses. 3. Dimensão de representação – Teses. I. MacQuarrie, John William. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51 (043)

FOLHA DE APROVAÇÃO

*Adjunções entre Categorias de Álgebras e Extensões de
Quociente Bifinito*

FERNANDO DOS REIS NAVES

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

John MacQuarrie

Prof. John William MacQuarrie
UFMG



Prof. Edson Ribeiro Alvares
UFPR

Edson Alvares

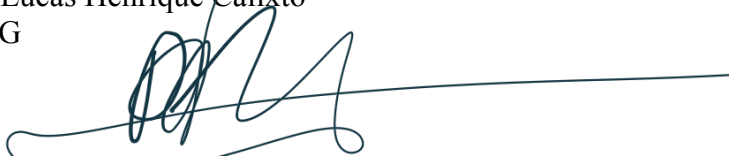
Prof. Eduardo do Nascimento Marcos
USP

Kay

Prof. Kostiantyn Iusenko
USP



Prof. Lucas Henrique Calixto
UFMG



Prof. Viktor Bekkert
UFMG

Belo Horizonte, 01 de agosto de 2022.

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: <http://www.mat.ufmg.br/pgmat>

Agradecimentos

Gostaria de agradecer, primeiramente, ao meu orientador, professor John Mac-Quarrie. Ao longo destes últimos anos, o seu apoio e incentivo foram fundamentais para a conclusão deste trabalho. Agradeço pelos ensinamentos e pelas “perguntas idiotas” e, principalmente, por ter tornado esta jornada prazerosa e leve.

Agradeço ao Lucas pela amizade e pela escuta durante esses últimos anos. Agradeço à Carol e ao Ricardo pela amizade e pelas partidas do Flamengo. Ao Rafa e Leo pelos anos de companheirismo e pelos inúmeros debates sobre Shyamalan e Cronenberg. Ao Ricardo e Samuel pelas conversas e pelo intercâmbio de ideias. Aos amigos de sempre (Nóbregas, frugais fatais e maiados de Uberlândia).

Agradeço à Adriana, minha primeira orientadora, pelas inúmeras conversas em sua sala e, principalmente, por ter despertado em mim uma agitação matemática, sem ela não teria sido possível chegar até aqui.

Agradeço aos membros da banca, pela disponibilidade e pelas valiosas sugestões.

Agradeço à pós graduação em matemática da UFMG por me permitir fazer o doutorado com eles e à CAPES pela bolsa de estudo do doutorado.

Por fim, gostaria de agradecer especialmente aos meus pais, Silvio e Neurivânia, pela dedicação, pela compreensão e pelo amor incondicional.

*“Que fazem, que são
as coisas não testadas como coisas,
minerais não descobertos — e algum dia
o serão?”*

Carlos Drummond de Andrade

Resumo

O objetivo deste trabalho se divide em dois: o estudo de uma correspondência entre aljivas e álgebras através de adjunções e o estudo da conjectura da dimensão finitística de álgebras de dimensão finita por meio de extensões satisfazendo uma condição homológica.

Nossa abordagem para o primeiro problema é definir uma correspondência entre a categoria das álgebras pseudocompactas básicas e sua subcategoria plena formada por álgebras A tais que $J^n(A) = 0$. Por meio de uma relação de equivalência nos morfismos da primeira, estudaremos os adjuntos a $A \mapsto A/J^n(A)$ à esquerda para cada inteiro positivo n . Por exemplo, quando restringimos a $n = 2$, provaremos que o funtor que associa a cada álgebra a álgebra tensorial completa é o adjunto a F_2 à esquerda. Para o segundo problema, dados pares de álgebras de dimensão finita $B \subseteq A$, controlaremos a dimensão finitística da menor B pela da maior A através de uma condição homológica envolvendo A e B . O principal resultado envolvendo dimensão finitística desta tese é o seguinte: Seja $B \subseteq A$ uma extensão tal que A/B é B -bimódulo de dimensão projetiva finita. Então a dimensão finitística de B é finita sempre que a dimensão finitística de A é finita. Além disso, se a dimensão global de A é finita, então a dimensão global de B também é finita.

Palavras-chave: Álgebra pseudocompacta, adjunção, levantamentos da projeção, conjectura da dimensão finitística, extensões de quociente bifinito.

Abstract

The objective of this work is divided in two: the study of the correspondence between quivers and algebras via adjunctions and the study of the finitistic dimension conjecture for finite-dimensional algebras, via extensions satisfying homological properties.

Our approach to the first problem is to define a correspondence between the category of basic pseudocompact algebras and its full subcategory formed by algebras A such that $J^n(A) = 0$. Through an equivalence relation on the morphisms of the first, we will study the left adjoints to $A \mapsto A/J^n(A)$ for each positive integer n . For example, when we restrict to $n = 2$, we will prove that the functor that associates each algebra with the complete tensor algebra is left adjoint to F_2 . For the second problem, given finite-dimensional algebras $B \subseteq A$, we will control the finitistic dimension of B in terms of that of A , via a homological condition involving A and B . The main result involving finitistic dimension of this thesis is the following: Let $B \subseteq A$ be an extension such that A/B is B -bimodule of finite projective dimension. Then the finitistic dimension of B is finite whenever the finitistic dimension of A is finite. Furthermore, if the global dimension of A is finite, then the global dimension of B is also finite.

Keywords: Pseudocompact algebra, adjunction, splittings of the canonical projection, finitistic dimension conjecture, bifinite quotient extensions.

Sumário

1	Introdução	8
I	Adjunções entre categorias de álgebras	14
2	Preliminares	15
2.1	Aljavas e álgebras de caminhos	15
2.2	Limites Inversos	18
2.3	Álgebras pseudocompactas e o radical de Jacobson	20
2.4	Módulos pseudocompactos	22
2.5	Álgebra tensorial completa e álgebra de caminhos completa	24
2.6	Álgebras pseudocompactas básicas	26
3	O Teorema do levantamento	29
3.1	Levantamentos da projeção de A em $A/J(A)$	29
3.2	Teorema do levantamento	32
3.3	O diagrama comutativo para pares de levantamentos	39
4	A categoria das álgebras pseudocompactas básicas e adjunções	43
4.1	O funtor projeção da n -ésima potência do radical de Jacobson	43
4.2	A relação de congruência em PAlg	46
4.3	A adjunção para o caso n igual a 2	50
4.3.1	O funtor álgebra tensorial completa	52
4.3.2	O par de adjunção para o caso n igual a 2	57
4.4	Álgebras n -admissíveis e a adjunção para uma subclasse de PAlg	62
4.4.1	Álgebras n -admissíveis	62
4.4.2	A adjunção para o caso n -admissível	64
4.5	Álgebras homogêneas e uma generalização do caso n igual a 3	65
4.5.1	Álgebras homogêneas	65
4.5.2	Morfismos quadráticos	68
4.5.3	Functor quadrático	71
4.5.4	A adjunção para o caso n igual a 3	77
4.6	Apontamentos sobre o caso geral	83
II	Extensões de quociente bifinito	88
5	Conjectura da dimensão finitística e as extensões de quociente bifinito	89
5.1	Preliminares	91
5.2	Funtores de Torção	93
5.3	Dimensão finitística para extensões de quociente bifinito	95

Referências 101

1 Introdução

Transportar problemas com estruturas complexas para estruturas mais simples é, por excelência, parte da natureza humana. Então nada mais natural do que a ideia de representar objetos matemáticos complexos - anéis, grupos, álgebras de Lie, entre outros - por objetos mais simples - espaços vetoriais e transformações lineares entre eles. O campo de representações de álgebras é o estudo e a classificação de álgebras através das suas respectivas categorias de módulos. A teoria de representações de álgebras carrega um universo instigante e rico de caminhos a serem explorados.

P. Gabriel introduz representações de aljavas (grafos orientados) como uma ferramenta para estudar módulos sobre certas álgebras. A ideia é que cada álgebra A de dimensão finita pode ser associada a uma aljava com relações e que cada módulo sobre A pode ser visto como uma família de k -espaços vetoriais indexada pelos vértices da aljava e uma família de transformações lineares indexada pelas flechas da aljava sujeitas as relações da aljava. Esta construção permitiu uma abordagem combinatória para a teoria de representações de álgebras.

Dada uma álgebra A de dimensão finita tal que $A/J(A)$ é um produto de cópias de k , a construção de Gabriel da aljava associada a A é feita do seguinte modo:

- os vértices estão em correspondência biunívoca com um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos $\{e_1, \dots, e_n\}$ de A ;
- o número de flechas entre dois vértices i e j é igual a

$$\dim_k e_j J(A) / J^2(A) e_i.$$

Não é difícil ver que a aljava construída acima independe da escolha do conjunto completo.

A álgebra de caminhos de uma aljava Q pode ser definida por uma propriedade universal similar à propriedade universal de objetos livres. Ou seja, seria natural imaginá-la como adjunto a esquerda de algum funtor. O problema de dar um tratamento functorial no relacionamento entre álgebras e aljavas vem da dependência de escolha da base do k -espaço $J(A)/J^2(A)$. Um outro problema deriva do fato de que a álgebra de caminhos de uma aljava finita com ciclos ou laços não é de dimensão finita.

Em (IUSENKO; MACQUARRIE; QUIRINO, 2020) e (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020), os autores resolvem ambos os problemas apontados anteriormente. O segundo problema é resolvido trocando a classe de álgebras de dimensão finita pela classe de álgebra pseudocompactas. O primeiro é resolvido deslocando o estudo de aljavas para a noção equivalente de pares (Σ, M) , onde Σ é uma álgebra pseudocompacta isomorfa a

um produto de cópias de k e M é um Σ -módulo pseudocompacto. Os autores explicitam functorialmente a construção dada por Gabriel da aljava associada a uma álgebra dada. Eles provam que o funtor

$$T[[-]] : (\Sigma, U) \mapsto T[[\Sigma, U]],$$

que associa cada par (Σ, U) a sua álgebra tensorial completa, é adjunto a

$$G : A \mapsto (A/J(A), J(A)/J^2(A))$$

à esquerda. A adjunção só é possível graças a uma relação de equivalência \sim definida nos homomorfismos de álgebras, a saber, dois homomorfismos de álgebras $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ são iguais módulo \sim se, e somente se,

$$(\varphi - \psi)(a) \in J(B) \quad \forall a \in A \quad \text{e} \quad (\varphi - \psi)(r) \in J^2(B) \quad \forall r \in J(A).$$

Neste trabalho, também estudaremos o relacionamento entre álgebras e aljavas através de adjunções. Definiremos nos objetos das álgebras pseudocompactas, para cada inteiro positivo n , o funtor

$$F_n : A \mapsto A/J^n(A),$$

onde a categoria do contra-domínio é a subcategoria plena das álgebras pseudocompactas cujos objetos são álgebras A tais que $J^n(A) = 0$. E buscaremos entender quais informações contidas em $A/J^n(A)$ são essenciais nas construções dos respectivos adjuntos.

Um caso particular bastante interessante é quando $n = 2$. Todas as informações necessárias na construção da aljava associada a uma álgebra A dada por Gabriel está contida em $A/J^2(A)$, então, nada mais natural entender relacionamento entre álgebras e aljavas fazendo o uso do funtor

$$F_2 : A \mapsto A/J^2(A).$$

Provaremos que o adjunto à esquerda do funtor F_2 se comporta como a álgebra de caminhos nos objetos. Porém, como aconteceu em (IUSENKO; MACQUARRIE; QUIRINO, 2020), a adjunção só é possível graças ao uso de uma relação de equivalência \sim_2 nos morfismos do domínio de F_2 , a saber, dois morfismos $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ são iguais módulo \sim_2 se, e somente se,

$$(\varphi - \psi)(a) \in J^2(B) \quad \forall a \in A.$$

Observamos que a relação \sim_2 é estritamente mais fina do que a relação \sim em (IUSENKO; MACQUARRIE; QUIRINO, 2020), isto é, se $\varphi \sim_2 \beta$, então $\varphi \sim \psi$; de fato, para cada $a \in A$, segue-se que

$$(\varphi - \psi)(a) \in J^2(B) \subseteq J(A) \quad \forall a \in A \quad \text{e} \quad (\varphi - \psi)(r) \in J^2(B) \quad \forall r \in A.$$

Ou seja, o sentido da adjunção provada em (IUSENKO; MACQUARRIE; QUIRINO, 2020) é mantido porém ela é realizada por uma relação de equivalência mais fina do que a utilizada pelos autores.

Então é intuitivo se perguntar se há outras informações além da aljava de Gabriel que possam ser ilustradas por intermédio dos respectivos adjuntos de cada funtor F_n , $n \geq 3$. Em outras palavras, além das informações contidas em $A/J^2(A)$, há relações essenciais em $J^2(A)/J^n(A)$ que são explicitadas por meio de adjunções? De modo que nossa conversa inicial entre “álgebras e aljavas” é ampliado para “álgebras e aljavas com relações”. Restringindo-se às relações contidas em $J^{n-1}(A)/J^n(A)$, daremos, para todo n , uma descrição deste relacionamento.

A construção de cada funtor adjunto a F_n à esquerda nos morfismos envolve manipulações elementares com os levantamentos da projeção canônica $A \rightarrow A/J(A)$ de uma álgebra A dada, isto é, homomorfismos de álgebras $s : A/J(A) \rightarrow A$ tais que $\pi s = \text{id}$. Isto só foi possível graças ao seguinte resultado, que é novo até para o caso de álgebras de dimensão finita.

Teorema A (Teorema do levantamento). *Sejam A uma álgebra pseudocompacta e B uma álgebra de dimensão finita e seja $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Se s_A é um levantamento da projeção $\pi_A : A \rightarrow A/J(A)$, então existe um levantamento s_B da projeção $\pi_B : B \rightarrow B/J(B)$ tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{J(A)} & \xrightarrow{\varphi_1} & \frac{B}{J(B)} \\ s_A \downarrow & & \downarrow s_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

comuta, onde φ_1 é definido por $\varphi_1(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$.

Como já dissemos, há um vasto campo a ser estudado em teoria de representações de álgebras. A segunda parte deste trabalho terá como foco o estudo da conjectura da dimensão finitística.

Uma das estratégias muito utilizadas na literatura é a transferência de informações de uma álgebra a outra álgebra sobre certas condições. Por exemplo, estratégia muito aplicada em problemas envolvendo propriedades homológicas - dimensão projetiva, dimensão global e dimensão finitística. Dentre as conjecturas envolvendo propriedades homológicas, a mais famosa entre elas é a Conjectura da Dimensão Finitística. Dada uma álgebra A , definimos

$$\text{fin.dim}(A) := \sup\{\text{pd}({}_A M) : M \in A\text{-mod}, \text{pd}({}_A M) < \infty\},$$

onde $\text{pd}({}_A M)$ é a dimensão projetiva do A -módulo à esquerda M . A conjectura da dimensão finitística afirma que $\text{fin.dim}(A) < \infty$ sempre que A é uma álgebra de dimensão finita.

Desde que foi apresentada em 1960 por Bass no artigo “Finitistic dimension and a homological generalization of semi-primary rings” (BASS, 1960), muitos progressos foram feitos nos últimos 62 anos, porém ela encontra-se em aberto.

Valendo-se dessa estratégia de transferir informações de uma álgebra a outra, Xi, nos artigos (XI, 2004; XI, 2006), introduz um novo modo de atacar a conjectura: comparar a dimensão finitística de uma álgebra de dimensão finita A com alguma subálgebra B de modo que o radical de Jacobson de B satisfaça algumas condições. Mais precisamente, ele prova que a conjectura da dimensão finitística é equivalente a

- (*) Para cada par $B \subseteq A$ de k -álgebras de dimensão finita tal que $J(B)$ é um ideal à esquerda de A ; se $\text{fin.dim}(A) < \infty$, então $\text{fin.dim}(B) < \infty$.

Caminhando na direção da conjectura de Han (veja (HAN, 2006)), Cibils, Lanzilotta, Marcos e Solotar, nos artigos (CIBILS; LANZILOTTA; MARCOS E. N.; SOLOTAR, 2020; CIBILS; LANZILOTTA; MARCOS E. N.; SOLOTAR, 2021; CIBILS; LANZILOTTA; MARCOS E. N.; SOLOTAR, 2022), trabalham com extensões de álgebras que preservam a veracidade da conjectura.. Para isto, os autores definem extensões limitadas. Uma extensão de álgebras de dimensão finita $B \subseteq A$ é **limitada** se:

- (i) A/B é um B -módulo projetivo à direita ou à esquerda;
- (ii) A/B é um B -bimódulo de dimensão projetiva finita;
- (iii) existe um inteiro positivo n tal que $A/B^{\otimes n} = 0$.

Nosso interesse neste trabalho é comparar a dimensão finitística de extensões $B \subseteq A$ satisfazendo condições homológicas. Inspirados na definição de extensões limitadas, em particular, no segundo item da definição, trabalharemos com extensões $B \subseteq A$ apeladas de extensões de quociente bifinito. Uma extensão $B \subseteq A$ é **de quociente bifinito** se a dimensão projetiva do B -bimódulo A/B é finita. Com esta definição em mãos, conseguimos enunciar um dos principais resultados deste trabalho que generaliza (IUSENKO; MACQUARRIE, 2021, Proposition 6.6):

Teorema B. *Seja $B \subseteq A$ uma extensão de quociente bifinito. Se a dimensão finitística de A é finita, então a dimensão finitística de B é finita.*

O que nos leva a seguinte pergunta:

Questão 1. *Toda álgebra B de dimensão finita pode ser incluída em uma álgebra de dimensão finita A com $\text{fin.dim}(A) < \infty$ de modo que a extensão $B \subseteq A$ seja uma extensão de quociente bifinito?*

Caso a pergunta acima seja respondida de modo positivo, então, a conjectura da dimensão finitística estará provada.

A dimensão global de uma álgebra A , denotada por $\text{gl.dim}(A)$, é definida como sendo

$$\text{gl.dim}(A) := \sup\{\text{pd}({}_A M) : M \in A\text{-mod}\}.$$

Quando consideremos extensões de quociente bifinito, mostraremos o seguinte resultado que generaliza (CIBILS; LANZILOTTA; MARCOS E. N.; SOLOTAR, 2022, Theorem 4.2).

Proposição C. *Seja $B \subseteq A$ uma extensão de quociente bifinito. Se $\text{gl.dim}A < \infty$, então $\text{gl.dim}(B) < \infty$.*

Esta tese está organizada como se segue:

No Capítulo 2, apresentamos as definições de álgebras pseudocompactas e alguns resultados que serão utilizados ao longo da tese, principalmente nos Capítulos 2 e 3.

No Capítulo 3, inicia-se nosso estudo sobre levantamentos da projeção canônica $A \rightarrow A/J(A)$. Na primeira seção, exibiremos a correspondência biunívoca entre levantamentos da projeção canônica e o conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de uma álgebra A apresentadas em (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020). Finalizamos a seção com uma aplicação relacionando os levantamentos via um elemento do radical de Jacobson: dados dois levantamentos $s, s' : A/J(A) \rightarrow A$ da projeção canônica $\pi : A \rightarrow A/J(A)$, então $r = \sum_{i=1}^n s(\bar{e}_i)(1 - s'(\bar{e}_i)) \in J(A)$, onde $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A , é tal que

$$s(\bar{a}) = (1 - r)s'(\bar{a})(1 - r)^{-1} \quad \forall \bar{a} \in A/J(A).$$

Na segunda seção, provaremos o Teorema do levantamento. Na última seção, exibiremos uma consequência não imediata do Teorema do levantamento na qual cada homomorfismo de álgebras $\varphi : A \rightarrow B$ induz um homomorfismo $\psi : k[[Q_A]] \rightarrow k[[Q_B]]$ satisfazendo um diagrama comutativo.

Iniciaremos no Capítulo 4 o estudo das adjunções. As duas primeiras seções são uma apresentação do problema. Exibiremos na terceira seção o adjunto à esquerda do functor F_2 . Na quarta seção, adaptaremos a adjunção da terceira seção para cada functor F_n . Na quinta seção, daremos uma generalização do caso $F_3 : A \rightarrow A/J^3(A)$. O capítulo é encerrado adaptando o problema da quinta seção para o caso geral.

No Capítulo 5, trataremos da conjectura da dimensão finitística para álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado. Introduziremos nas duas primeiras seções definições e resultados utilizados na demonstração do Teorema B. Na terceira

e última seção, provaremos o Teorema B e a Proposição C e apresentaremos algumas consequências e exemplos.

Parte I

Adjunções entre categorias de álgebras

2 Preliminares

Neste capítulo, introduziremos a linguagem de álgebras pseudocompactas, que será utilizada sistematicamente nos capítulos seguintes, precisamente, nos Capítulos 3 e 4. Para isto, introduziremos a noção de limites inversos de espaços topológicos. Em seguida, trataremos dos conceitos e propriedades das álgebras e módulos pseudocompactos. Antes, recapitularemos as noções de aljavas e álgebras de caminhos usuais. Assumiremos o conhecimento do leitor sobre conceitos bem estabelecidos na literatura dentro da teoria de álgebras e módulos de dimensão finita bem como conceitos geralmente utilizados da teoria de categoria e funtores. Em todo texto, caso não se faça menção contrária, estamos supondo que o corpo k é algebricamente fechado e as k -álgebras são associativas com unidade.

Sugerimos ao leitor as referências ([AUSLANDER; REITEN; O.SMALO, 1997](#)), ([ASSEM, 1997](#)), ([ASSEM; SIMSON; SKOWRONSKI, 2006](#)) e ([AWODEY, 2006](#)) para um estudo mais detalhado sobre os assuntos.

2.1 Aljavas e álgebras de caminhos

Recomendamos a leitura do Capítulo 2 do livro ([ASSEM; SIMSON; SKOWRONSKI, 2006](#)) para maiores detalhes.

Uma **aljava** Q é definida por um par de conjuntos Q_0 e Q_1 e duas aplicações $s, t : Q_1 \rightarrow Q_0$. Os elementos em Q_0 são chamados de **vértices** e os elementos em Q_1 são chamados de **flechas**. Dada uma flecha α , chamamos o elemento $s(\alpha)$ de **vértice inicial** de α e o elemento $t(\alpha)$ de **vértice final** de α e escrevemos $\alpha : s(\alpha) \rightarrow t(\alpha)$. Uma aljava Q é chamada de **finita** se os conjuntos Q_0 e Q_1 são finitos.

Exemplo 2.1.1. O diagrama $1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3 \xleftarrow{\gamma} 4 \xrightarrow{X} 1$ representa uma aljava com $Q_0 = \{1, 2, 3, 4\}$, $Q_1 = \{\alpha, \beta, \gamma, X\}$, $t(\alpha) = 1$, $s(\alpha) = t(\beta) = 2$, $s(\beta) = t(\gamma) = 3$ e $s(\gamma) = s(X) = t(X) = 4$.

Um **caminho** p em Q de comprimento $n > 0$ é uma sequência de flechas $p = \alpha_1 \dots \alpha_n$ tal que $s(\alpha_i) = t(\alpha_{i+1})$ para cada $i = 1, \dots, n-1$. Um caminho de comprimento nulo é um caminho sem flechas associado a um vértice $i \in Q_0$, que será indicado com a notação e_i . Os vértices inicial e final de um caminho e_i de comprimento nulo coincidem, $s(e_i) = t(e_i) = i$. O vértice inicial de um caminho $p = \alpha_1 \dots \alpha_n$ de comprimento $n > 0$ é definido por $s(\alpha_n)$; o vértice final, definido por $t(\alpha_1)$. Dizemos que um caminho p de comprimento $n > 0$ é um **ciclo orientado** quando $s(p) = t(p)$.

Exemplo 2.1.2. Voltando à aljava do exemplo anterior, o caminho $\alpha\beta\gamma$ é um caminho de comprimento 3 com vértice inicial igual a 4 e vértice final igual a 1. O caminho $p = XXXX = X^4$ é um ciclo orientado de comprimento 4.

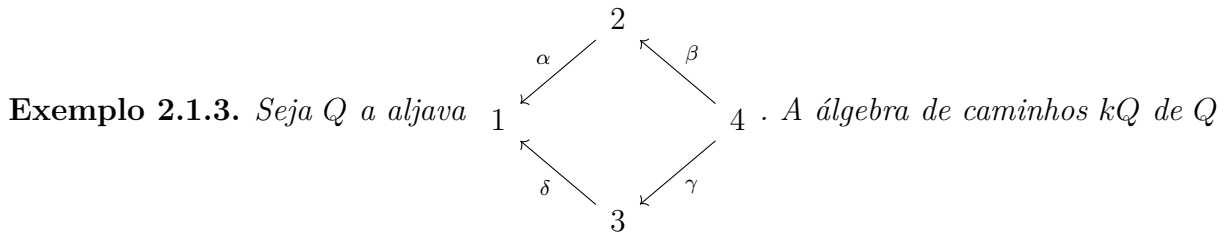
Dizemos que uma aljava Q é **acíclica** quando Q não possui ciclos orientados. A aljava do Exemplo 1 não é acíclica.

Sejam k um corpo e Q uma aljava finita. Denote por kQ o k -espaço vetorial tendo como base o conjunto de todos os caminhos de Q . Dados dois caminhos $p = \alpha_1 \dots \alpha_n$ e $q = \beta_1 \dots \beta_m$ em Q , definimos o produto de p e q como sendo a concatenação pq definida do seguinte modo:

$$pq = \begin{cases} 0 & \text{se } t(\beta_1) \neq s(\alpha_n) \\ \alpha_1 \dots \alpha_n \beta_1 \dots \beta_m & \text{se } t(\beta_1) = s(\alpha_n). \end{cases}$$

Estendendo o produto por linearidade temos a k -álgebra kQ chamada de **álgebra de caminhos de Q** .

Seja Q uma aljava finita. A identidade de kQ é o somatório de todos os caminhos estacionários, isto é, $\sum_{i \in Q_0} e_i$.



é dada pela base $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \alpha\beta, \delta\gamma\}$. Logo a dimensão de KQ como k -espaço vetorial é igual a 10.

Seja Q uma aljava finita. Chamaremos o ideal bilateral da álgebra de caminhos kQ gerado pelas flechas de **ideal de flechas de Q** e indicaremos com a notação J_Q . Dizemos que um ideal I de kQ é **admissível** quando existe um inteiro positivo n maior do que ou igual a 2 tal que

$$J_Q^n \subseteq I \subseteq J_Q^2.$$

Uma álgebra de caminhos kQ tem dimensão finita se, e somente se, Q é uma aljava finita acíclica. Além disso, sempre que Q é uma aljava finita acíclica, J_Q coincide com o radical de Jacobson de kQ , $J(kQ)$.

Cada ideal admissível I de uma álgebra de caminhos kQ de uma aljava finita Q é gerado por um conjunto finito de relações. Chamaremos o par (Q, I) de **aljavas com relações**. Dada uma aljava com relações (Q, I) , então a álgebra quociente kQ/I é chamada de **álgebra de caminhos com relações** de (Q, I) . Uma álgebra de caminhos com relações kQ/I tem dimensão finita e, além disso, $J(kQ/I) = J_Q/I$.

Definição 2.1.4. Dizemos que uma álgebra de dimensão finita A é **básica** se $A/J(A)$ é isomorfa a um produto de cópias de k .

Teorema 2.1.5 (Teorema de Gabriel). *Seja A uma álgebra básica de dimensão finita. Então existe um aljava com relações (Q_A, I) tal que*

$$A \cong \frac{kQ_A}{I}.$$

Demonstração. A prova pode ser encontra em (ASSEM; SIMSON; SKOWRONSKI, 2006, Theorem 3.7). □

A aljava Q_A é chamada de **aljava ordinária de A** .

Dada uma álgebra básica de dimensão finita A , podemos construir a aljava ordinária Q_A de A do seguinte modo: os vértices de Q_A estão em correspondência biunívoca com o conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de $A/J(A)$; as flechas $\alpha : j \rightarrow i$ de Q_A estão em correspondência biunívoca com uma base do k -espaço $e_i J(A)/J^2(A)e_j$.

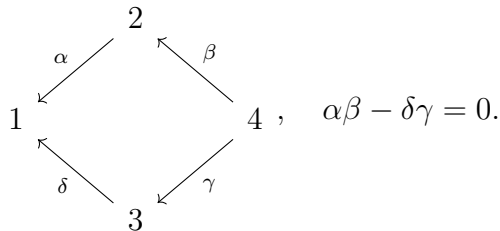
Observação 2.1.6. *A aljava ordinária Q_A de A independe das escolhas das bases de cada k -espaço vetorial $e_i J(A)/J^2(A)e_j$.*

Exemplo 2.1.7. (i) *A álgebra $k[X]/\langle X^n \rangle$ é isomorfa a álgebra de caminhos com relações kQ/I dada pelo par (Q, I) , onde $Q : 1 \curvearrowright x$ e $I = \langle X^n \rangle$.*

(ii) *Seja $T_n(k)$ a álgebra de matrizes triangulares superiores de ordem n . Então $T_n(k)$ é isomorfo a álgebra de caminhos kQ dada pela aljava*

$$Q : 1 \xleftarrow{\alpha_1} 2 \xleftarrow{\alpha_2} 3 \xleftarrow{\alpha_3} \dots \xleftarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xleftarrow{\alpha_{n-1}} n .$$

(iii) *Seja kQ/I a álgebra de caminhos com relações dada por*



Os caminhos $\alpha\beta$ e $\delta\gamma$ são iguais módulo I , portanto, $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}, \overline{e_4}, \overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\delta}, \overline{\gamma}, \overline{\alpha\beta}\}$ é uma base para kQ/I .

2.2 Limites Inversos

Recomendamos o livro (RIBES; ZALESSKII, 2000) para maiores detalhes sobre este tópico.

Definição 2.2.1. Um **conjunto direcionado** é um conjunto parcialmente ordenado (I, \geq) com a propriedade adicional que para todos $i_1, i_2 \in I$, existe $i_3 \in I$ de modo que $i_3 \geq i_1$ e $i_3 \geq i_2$.

Definição 2.2.2. Seja $\{X_i, \varphi_{ij} : X_j \rightarrow X_i\}$ uma família de espaços topológicos indexada por um conjunto ordenado I e homomorfismos contínuos $\varphi_{i,j} : X_j \rightarrow X_i$, sempre que $j \geq i$, com as seguintes propriedades:

1. φ_{ii} é o morfismo identidade;
2. $\varphi_{ik} = \varphi_{ij}\varphi_{jk}$ para todo $k \geq j \geq i$.

Diremos, então, que o par $\{X_i, \varphi_{ij} : X_i \rightarrow X_j\}$ é um **sistema inverso de espaços topológicos** sobre I .

O diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} X_k & \xrightarrow{\varphi_{ik}} & X_i \\ & \searrow \varphi_{jk} & \nearrow \varphi_{ij} \\ & X_j & \end{array}$$

ilustra a segunda condição da definição anterior.

Definição 2.2.3. Sejam $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ um sistema inverso de espaços topológicos e Y um espaço topológico. Dizemos que um conjunto de mapas contínuos $\{\psi_i : Y \rightarrow X_i\}$ é **compatível** quando $\varphi_{ij}\psi_j = \psi_i$ sempre que $j \geq i$.

A compatibilidade, para cada $j \geq i$, pode ser vista através do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\psi_i} & X_i \\ & \searrow \psi_j & \nearrow \varphi_{ij} \\ & X_j & \end{array}$$

Definição 2.2.4. Sejam $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ um sistema inverso e $\{X, \psi_i\}$ um conjunto compatível. Dizemos que o sistema compatível $\{X, \psi_i\}$ é um **limite inverso** do sistema inverso $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ se satisfaz a seguinte propriedade universal :

se $\{Y, \delta_i\}$ é um outro conjunto compatível, então existe um único homomorfismo contínuo $\delta : Y \rightarrow X$ tal que $\psi_i\delta = \delta_i$ para cada $i \in I$.

A propriedade universal é dada pelo seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} Y & \overset{\delta}{\dashrightarrow} & X \\ & \searrow \delta_i & \swarrow \psi_i \\ & & X_i. \end{array}$$

Por abuso de notação, muitas vezes nos referimos ao limite inverso simplesmente por X , sem menção aos mapas. O limite inverso de um sistema inverso $\{X_i, \varphi_{ij}\}$, quando existe, é único a menos de isomorfismo. Denotamos por $X = \varprojlim X_i$ o limite inverso do sistema inverso $\{X_i, \varphi_{ij}\}$.

Proposição 2.2.5. *Seja $\{X_i, \varphi_{ij}\}$ um sistema inverso de espaços topológicos e seja $Y = \prod_{i \in I} X_i$ o produto cartesiano dos espaços topológicos X_i com a topologia produto. Defina*

$$X = \left\{ x \in Y : \varphi_{ij}\pi_j(x) = \pi_i(x) \text{ para todos } i, j \text{ com } j \geq i \right\},$$

onde $\pi_i : Y \rightarrow X_i$ é a projeção canônica. Então $\{X, \varphi_i = \pi_i|_X\}$ é o limite inverso do sistema inverso $\{X_i, \varphi_{ij}\}$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (RIBES; ZALESSKII, 2000, Proposition 1.1.1). □

A proposição anterior nos possibilita expressar os elementos do limite inverso como um vetor (x_i) de elementos dos objetos no sistema inverso. Em certos momentos adotaremos a linguagem vetorial para expressar elementos do limite inverso. Além disso, segue-se também da proposição que a topologia do limite inverso é a topologia do subespaço herdada da topologia produto em Y . As pré-imagens de cada um dos X_i formam uma base de abertos do espaço X .

Exemplo 2.2.6. (RIBES; ZALESSKII, 2000) *Seja $\{\frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}, \pi_{n,m} : \mathbb{Z}/p^m\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}\}$ o sistema inverso indexado pelo conjunto ordenado dos números naturais \mathbb{N} , onde $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ é o espaço topológico munido com a topologia discreta e $\pi_{n,m}$ é a projeção canônica sempre que $m \geq n$. O limite inverso do sistema inverso $\{\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}, \pi_{n,m}\}$ é dado por*

$$\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z} = \left\{ (x_n + p^n\mathbb{Z}) : x_n \in \mathbb{Z}, x_n \equiv x_m \pmod{p^m} \text{ se } n \geq m \right\} \cong \mathbb{Z}_p.$$

Definição 2.2.7. *Dados dois sistemas inversos $\{X_i, \varphi_{i,j}\}$ e $\{Y_i, \delta_{i,j}\}$ indexados pelo mesmo conjunto ordenado I , um mapa de sistemas inversos $\Theta : \{X_i, \varphi_{i,j}\} \rightarrow \{Y_i, \delta_{i,j}\}$ consiste de um conjunto de mapas contínuos $\{\theta_i : X_i \rightarrow Y_i\}$ tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} X_j & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & X_i \\ \theta_j \downarrow & & \downarrow \theta_i \\ Y_k & \xrightarrow{\delta_{i,j}} & Y_i \end{array}$$

comuta sempre que $j \geq i$. Os mapas θ_i são chamados de componentes de Θ .

A definição acima nos permite ver os sistemas inversos indexados por I como uma categoria, onde os objetos são os sistemas inversos e os morfismos são os mapas de sistemas inversos. Cada mapa de sistemas inversos $\Theta : \{X_i, \varphi_{i,j}\} \rightarrow \{Y_i, \delta_{i,j}\}$ induz um mapa contínuo $\varprojlim \Theta : \varprojlim X_i \rightarrow \varprojlim Y_i$ definido por $\varprojlim \Theta((x_i)) = (\theta_i(x_i))$.

Proposição 2.2.8. *A operação \varprojlim age como um funtor entre as categorias dos sistemas inversos indexados por I e a categoria dos espaços topológicos.*

Se todas as componentes de Θ são injetivas, então o mapa $\varprojlim \Theta$ também é injetivo. O mesmo não ocorre com mapas sobrejetivos. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 2.2.9. *Sejam $\{\mathbb{Z}, 1\}$ e $\{\frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}, \pi_{n,m}\}$ sistemas inversos indexados por \mathbb{N} . Considere, para cada n , a projeção $\pi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$, então*

$$\Theta = \left\{ \pi_n : \mathbb{Z} \rightarrow \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}} \right\}$$

é um mapa de sistemas inversos. A imagem de \mathbb{Z} em $\varprojlim \frac{\mathbb{Z}}{p^n\mathbb{Z}}$ por $\varprojlim \Theta$ é o conjunto

$$\left\{ (x_n + p^n\mathbb{Z}) : x_n \equiv x \pmod{p^n} \text{ para todo } n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z} \right\},$$

Por outro lado, $(1 + p\mathbb{Z}, 1 + p + p^2\mathbb{Z}, \dots, \sum_{i=0}^{n-1} p^i + p^n\mathbb{Z}, \dots)$ é um elemento de $\varprojlim \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ que não pertence a imagem de \mathbb{Z} por $\varprojlim \theta_n$. Logo $\varprojlim \theta_n$ não é sobrejetivo.

Proposição 2.2.10. *Seja $\{X_i, \varphi_{i,j}\}$ um sistema inverso. Se cada um dos mapas $\varphi_{i,j}$ é injetivo então cada um dos mapas $\varphi_i : \varprojlim X_i \rightarrow X_i$ também é injetivo para todo i . Além disso, se o sistema consiste de espaços topológicos Hausdorff compactos não-vazios, os mapas φ_i são sobrejetivos sempre que os mapas $\varphi_{i,j}$ são sobrejetivos.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (RIBES; ZALESSKII, 2000, Proposition 1.1.10) □

2.3 Álgebras pseudocompactas e o radical de Jacobson

k será sempre tratado como um corpo munido com a topologia discreta. Nesta seção trataremos de fixar definições e algumas propriedades das álgebras pseudocompactas. Estamos supondo sempre que os anéis estão sobre um corpo k , assim, ao escrevermos álgebras A , está subentendido k -álgebra A .

Definição 2.3.1. *Uma álgebra pseudocompacta é o limite inverso de um sistema inverso $\{A_i, \varphi_{i,j}\}$ formado por álgebras associativas unitais de dimensão finita munidas com a topologia discreta.*

Proposição 2.3.2. *Cada álgebra pseudocompacta é Hausdorff.*

Demonstração. Como o produto de espaços Hausdorff é também um espaço Hausdorff e como cada subespaço de um espaço Hausdorff é também Hausdorff, segue-se a afirmação. \square

Proposição 2.3.3. *Seja $A = \varprojlim A_i$ uma álgebra pseudocompacta e seja $\{\varphi_i : A \rightarrow A_i\}$ o sistema compatível. Então $\{\ker\varphi_i\}$ é um sistema fundamental de vizinhanças abertas de 0.*

Demonstração. A prova é análoga à prova em (RIBES; ZALESSKII, 2000, Lemma 2.1.1) trocando grupos por álgebras. \square

Pela proposição anterior, o fecho do ideal nulo 0 em A é dado por

$$\bar{0} = \left\{ a \in A : 0 \in a + \ker\varphi_i, \forall i \right\}.$$

Se $a \in \bar{0}$ então $0 \in a + \ker\varphi_i$ para todo i , logo $a \in \bigcap_i \ker\varphi_i$. Por outro lado, dado $a \in \bigcap_i \ker\varphi_i$, segue-se que $0 = a - a \in a + \ker\varphi_i$ para todo i , portanto, $a \in \bar{0}$. Ou seja,

$$\bar{0} = \bigcap_i \ker\varphi_i.$$

Sabemos que cada subconjunto finito é compacto e que cada subconjunto compacto de um espaço Hausdorff é fechado, portanto,

$$0 = \bar{0} = \bigcap_i \ker\varphi_i.$$

Proposição 2.3.4. *Uma álgebra A é pseudocompacta se, e somente se, A é uma álgebra topológica Hausdorff unital associativa possuindo um sistema de vizinhanças de 0 formado por ideais abertos I com codimensão cofinita, $\dim_k A/I < \infty$, que se intersectam em 0 e tal que $A = \varprojlim A/I$.*

Exemplo 2.3.5. *Cada álgebra discreta de dimensão finita é uma álgebra pseudocompacta.*

Exemplo 2.3.6. *A álgebra $k[[X]] = \left\{ \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i : a_i \in k \forall i \in \mathbb{N} \right\}$ das séries de potências na variável X é o limite inverso do sistema $\left\{ \frac{k[X]}{\langle X^n \rangle}, \pi_{n,m} : \frac{k[X]}{\langle X^m \rangle} \rightarrow \frac{k[X]}{\langle X^n \rangle} \right\}$ indexado por \mathbb{N} , portanto, $k[[X]]$ é uma álgebra pseudocompacta.*

Definição 2.3.7. *O radical de Jacobson de uma álgebra pseudocompacta A é a interseção de todos os ideais à esquerda fechados maximais de A . Usaremos a notação $J(A)$ para indicar o ideal de Jacobson de uma álgebra A .*

Lema 2.3.8. *Seja A uma álgebra pseudocompacta. Escreva $A = \varprojlim \{A/I, \pi_{i,j}\}$ como um limite inverso de quocientes de dimensão finita A/I . Então*

$$J(A) = \varprojlim J(A/I).$$

Demonstração. A prova encontra-se em (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020, Lemma 2.3). \square

Lema 2.3.9. *Sejam A e B álgebras pseudocompactas e seja $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras sobrejetivo contínuo. Então $\varphi(J(A)) = J(B)$.*

Demonstração. A prova encontra-se em (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020, Corollary 2.4). \square

Definição 2.3.10. *Um ideal fechado I de A é **pronilpotente** se $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I^n = 0$.*

Exemplo 2.3.11. *A definição do ideal de Jacobson de uma álgebra de dimensão finita coincide com a versão pseudocompacta do radical de Jacobson.*

Exemplo 2.3.12. *Seja $k[[X]]$ a álgebra pseudocompacta das séries de potências na variável X . O radical de Jacobson de $k[[X]]$ é o ideal fechado gerado por X , $\langle X \rangle$. De fato, pelo Lema 2.3.8,*

$$\begin{aligned} J(k[[X]]) &= \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} J(k[[X]]/\langle X^n \rangle) \\ &= \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} \langle X \rangle \langle X^n \rangle \\ &= \left\{ (\lambda_1 \bar{X}, \lambda_1 \bar{X} + \lambda_2 \bar{X}^2, \dots, \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \bar{X}^i, \dots) : \lambda_i \in k \right\} \\ &= \langle X \rangle. \end{aligned}$$

O **fecho topológico** de um espaço topológico X , denotado por \bar{X} , é a interseção de todos os fechados que contêm X .

Definição 2.3.13. *Para cada inteiro positivo n , definimos*

$$J^n(A) = \overline{J^{n-1}(A)J(A)}.$$

Exemplo 2.3.14. *No exemplo anterior, $J^n(k[[X]]) = \langle X^n \rangle$.*

2.4 Módulos pseudocompactos

Definição 2.4.1. *Sejam A e B álgebras pseudocompactas. Um A -módulo (respectivamente, A - B -bimódulo) pseudocompacto M é um A -módulo (respectivamente, A - B -bimódulo) topológico possuindo um sistema de vizinhanças de 0 formado por submódulos (respectivamente, subbimódulos) abertos N de codimensão finita que se intersectam em 0 e tal que $M = \varprojlim M/N$.*

Denotaremos por $A\text{-PC}$ a categoria dos A -módulos pseudocompactos à esquerda. A categoria dos A -módulos pseudocompactos é uma categoria abeliana com limites inversos exatos (BRUMER, 1966).

Lema 2.4.2. *Cada objeto M em $A\text{-PC}$ é um quociente de um objeto livre. Isto é, a categoria $A\text{-PC}$ possui suficientes projetivos.*

Demonstração. Brumer provou em (BRUMER, 1966, Lemma 1.6). \square

Lema 2.4.3. *Sejam A uma álgebra pseudocompacta e M, N A -módulos pseudocompactos. Então*

- (i) *A imagem de M por um homomorfismo contínuo $f : M \rightarrow N$ é um submódulo fechado de N .*
- (ii) *Cada submódulo gerado por um conjunto finito de elementos de M é fechado.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020, Lemma 2.2). \square

Sejam M um A -módulo pseudocompacto à direita e N um A -módulo pseudocompacto à esquerda. Definiremos a noção de produto tensorial completo de M e N . Para maiores detalhes sobre o tema, sugerimos ao leitor a leitura do artigo (BRUMER, 1966).

Seja X um k -bimódulo pseudocompacto. Um A -bihomomorfismo $\gamma : M \times N \rightarrow X$ é um mapa contínuo k -linear em cada entrada satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\gamma(ma, n) = \gamma(m, an)$$

para cada $m \in M$, $n \in N$ e $a \in A$.

Definição 2.4.4. *O produto tensorial completo de M e N é um k -espaços vetorial $M \widehat{\otimes}_A N$ e um A -bihomomorfismo $\gamma : M \times N \rightarrow M \widehat{\otimes}_A N$ gozando da seguinte propriedade universal: dado um outro A -bihomomorfismo $\theta : M \times N \rightarrow X$, existe um único homomorfismo de k -espaços vetoriais $f : M \widehat{\otimes}_A N \rightarrow X$ tal que $f\gamma = \theta$.*

O diagrama

$$\begin{array}{ccc} M \times N & \xrightarrow{\theta} & X \\ \gamma \downarrow & \nearrow f & \\ M \widehat{\otimes}_A N & & \end{array}$$

ilustra a propriedade universal do produto tensorial completo.

Escreveremos $m \widehat{\otimes}_A n$ a imagem de (m, n) por γ . Quando M é um B - A -bimódulo, o produto tensorial completo $M \widehat{\otimes}_A N$ possui uma estrutura natural de B -módulo com a multiplicação dada por $b(m \widehat{\otimes}_A n) = bm \widehat{\otimes}_A n$ para cada $b \in B$, $m \widehat{\otimes}_A n \in M \widehat{\otimes}_A N$.

Proposição 2.4.5. *Sejam $M = \varprojlim_i M/M_i$ e $N = \varprojlim_j N/N_j$ as expressões de M e N como limites inversos de A -módulos de dimensão finita respectivamente. Então*

$$M\widehat{\otimes}_A N \cong \varprojlim_{i,j} M/M_i \otimes_A N/N_j.$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (RIBES; ZALESSKII, 2000, Lemma 5.5.1). \square

Observação 2.4.6. *Observe que o produto tensorial completo $M\widehat{\otimes}_A N$ é o completamento topológico do produto tensorial abstrato $M \otimes_A N$*

Proposição 2.4.7. *Se M e N são A -módulos finitamente gerados, então o mapa natural $M \otimes_A N \rightarrow M\widehat{\otimes}_A N$ é um isomorfismo.*

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (MACQUARRIE; SYMONDS; ZALESSKII, 2020, Proposition 2.2) \square

Proposição 2.4.8. *Sejam A uma álgebra pseudocompacta e M, M_1 e M_2 A -módulos pseudocompactos à direita e N, N_1 e N_2 A -módulos pseudocompactos à esquerda. Então:*

- (i) $M\widehat{\otimes}_A -$ e $-\widehat{\otimes}_A N$ são exatos à direita;
- (ii) $M\widehat{\otimes}_A(N_1 \oplus N_2) \cong (M\widehat{\otimes}_A N_1) \oplus (M\widehat{\otimes}_A N_2)$;
- (iii) $(M_1 \oplus M_2)\widehat{\otimes}_A N \cong (M_1\widehat{\otimes}_A N) \oplus (M_2\widehat{\otimes}_A N)$;
- (iv) $A\widehat{\otimes}_A N \cong N$ e $M\widehat{\otimes}_A A \cong M$.

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (RIBES; ZALESSKII, 2000, Proposition 5.5.3). \square

2.5 Álgebra tensorial completa e álgebra de caminhos completa

Definição 2.5.1. *Sejam A uma álgebra pseudocompacta e M um A -bimódulo pseudocompacto. A **álgebra tensorial completa** $T[[A, M]]$ é definida como sendo*

$$T[[A, M]] = \prod_n M^{\widehat{\otimes} n},$$

onde $M^{\widehat{\otimes} 0} = A$, $M^{\widehat{\otimes} 1} = M$ e $M^{\widehat{\otimes} i} = M\widehat{\otimes}_A M^{\widehat{\otimes} i-1}$ para cada $i > 1$.

O produto de $m = m_1\widehat{\otimes}_A \dots \widehat{\otimes}_A m_s \in M^{\widehat{\otimes} s}$ por $n = n_1\widehat{\otimes}_A \dots \widehat{\otimes}_A n_r \in M^{\widehat{\otimes} r}$ é dado pela concatenação de m e n , isto é,

$$m_1\widehat{\otimes}_A \dots \widehat{\otimes}_A m_s \widehat{\otimes}_A n_1\widehat{\otimes}_A \dots \widehat{\otimes}_A n_r \in M^{\widehat{\otimes} s+r}.$$

A multiplicação é induzida da bilinearidade natural do produto de m por n .

Exemplo 2.5.2. *Suponha que as dimensões de A e M sejam finitas e que $M^{\widehat{\otimes} n} = 0$ a partir de um certo inteiro positivo n , então a definição da álgebra tensorial completa $T[[A, M]]$ coincide com a álgebra tensorial clássica $T(A, M)$.*

Exemplo 2.5.3. *É possível enxergar a álgebra $k[[X]]$ das séries de potências na variável X como a álgebra tensorial completa $T[[k, k]]$, onde k é visto como k -bimódulo da maneira óbvia.*

Observação 2.5.4. *Peter Gabriel provou em (GABRIEL, 1973) que cada álgebra tensorial completa é pseudocompacta.*

Da Definição 2.5.1 de álgebra tensorial completa, podemos utilizar a linguagem vetorial para descrever os elementos de $T[[A, M]]$, isto é, dado um $x \in T[[A, M]]$, podemos reescrevê-lo como

$$x = (a_0, m_1, \dots, m_n, \dots),$$

onde $a_0 \in A$ e $m_i \in M^{\widehat{\otimes} i}$ para todo $i \geq 1$.

Lema 2.5.5. *Sejam Σ uma álgebra semissimples de dimensão finita e M um Σ -bimódulo de dimensão finita. Então*

$$J(T[[\Sigma, M]]) = \prod_{n=1}^{\infty} M^{\widehat{\otimes} n}.$$

Demonstração. Veja (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020, Lemma 2.12). □

Lema 2.5.6. *Sejam A e B álgebras pseudocompactas e M um A -bimódulo pseudocompacto. Se*

$$\varphi_0 : A \rightarrow B$$

é um homomorfismo de álgebras contínuo e

$$\varphi_1 : M \rightarrow B$$

é um homomorfismo de A -bimódulos contínuo, onde a estrutura de B como A -bimódulo é induzida de φ_0 , então existe um único homomorfismo de álgebras contínuo

$$\varphi : T[[A, M]] \rightarrow B$$

tal que $\varphi|_A = \varphi_0$ e $\varphi|_M = \varphi_1$.

Definição 2.5.7. *Seja Q uma aljava finita. A álgebra de caminhos completa de Q é a álgebra*

$$k[[Q]] = \prod_n kQ_n,$$

onde kQ_n é o espaço vetorial com base formada por caminhos de Q de comprimento n . A topologia de cada kQ_n é dada pela topologia discreta e a topologia de $k[[Q]]$ é dada pela

topologia produto. A multiplicação em $k[[Q]]$ é uma extensão da multiplicação em kQ , ou seja, se $\rho = (\rho_n)_{n \geq 0}, \gamma = (\gamma_n)_{n \geq 0} \in k[[Q]]$, então

$$\rho\gamma = \left(\sum_{i=0}^n \rho_i \gamma_{n-i} \right)_{n \geq 0}.$$

Assim os elementos de $k[[Q]]$ são combinações k -lineares, infinitas ou finitas, de elementos de uma base de caminhos de kQ .

Exemplo 2.5.8. Considere a aljava $Q : 1 \curvearrowright x$. A álgebra de caminhos kQ é a álgebra de polinômios na variável X , e a álgebra de caminhos completa $k[[Q]]$ é a álgebra das séries de potências na variável X .

Exemplo 2.5.9. Se Q é uma aljava acíclica, então $Q_n = 0$ para todo n suficientemente grande, portanto, $kQ = k[[Q]]$.

O ideal de flechas completo $J_{[[Q]]}$ é o ideal fechado $\prod_{n \geq 1} kQ_n$.

Exemplo 2.5.10. Considere a aljava $Q : 1 \curvearrowright x$. O ideal de flechas completo $J_{[[Q]]}$ coincide com o radical de Jacobson de $k[[Q]]$. O mesmo não ocorre para o ideal de flechas J_Q de kQ . Lembre-se que $J(kQ) = 0$.

Observação 2.5.11. Seja Q uma aljava finita. Então a álgebra de caminhos completa é isomorfa a álgebra tensorial completa

$$T[[kQ_0, kQ_1]],$$

onde kQ_1 é tratado como kQ_0 -bimódulo do modo óbvio ($e_i \alpha = \alpha$, $\alpha e_j = \alpha$ e $e_l \alpha = \alpha e_{l'} = 0$ para todo $l \neq i$ e $l' \neq j$ sempre que $\alpha : j \rightarrow i$).

Proposição 2.5.12. Seja Q uma aljava finita. A álgebra de caminhos completa $k[[Q]]$ é completa com respeito a topologia $J_{[[Q]]}$ -ádica, isto é,

$$k[[Q]] = \varprojlim_{n \in \mathbb{N}} k[[Q]]/J_{[[Q]]}^n.$$

Demonstração. A prova encontra-se em (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020, Proposition 2.7); □

2.6 Álgebras pseudocompactas básicas

Definição 2.6.1. Dizemos que uma álgebra pseudocompacta A é **básica** se o quociente $A/J(A)$ é isomorfo ao produto direto de cópias de k .

Exemplo 2.6.2. As álgebras pseudocompactas básicas de dimensão finitas são as álgebras básicas no sentido clássico.

Exemplo 2.6.3. A álgebra pseudocompacta $k[[X]]$ é básica.

Proposição 2.6.4. Sejam A e B álgebras pseudocompactas básicas tais que $A/J(A)$ e $B/J(B)$ são álgebras de dimensão finita. Se $f : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras contínuo então $f(J(A)) \subseteq J(B)$.

Demonstração. Veja (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020, Lemma 3.8). \square

Corolário 2.6.5. Sejam A e B álgebras pseudocompactas básicas tais que $A/J(A)$ e $B/J(B)$ são álgebras de dimensão finita. Se $f : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras contínuo, então $f(J^n(A)) \subseteq J^n(B)$ para todo inteiro positivo n .

Demonstração. Utilizando indução sobre n , tem-se

$$\begin{aligned} \varphi(J^n(A)) &\subseteq \overline{\varphi(J^{n-1}(A)J(A))} \\ &\subseteq \overline{\varphi(J^{n-1}(A)J(A))} \\ &\subseteq \overline{\varphi(J^{n-1}(A))\varphi(J(A))} \\ &\subseteq \overline{J^{n-1}(B)J(B)} \\ &= J^n(B). \end{aligned}$$

Lembrando que a passagem da primeira linha para segunda nas continências se dá pelo fato de que a imagem do fecho está contido no fecho da imagem. \square

Observe que a proposição anterior não é válida para toda álgebra. Seja

$$T_2(k) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} : \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in k \right\}$$

a subálgebra da álgebra de matrizes $\mathbb{M}_2(k)$. A inclusão de $T_2(k)$ em $\mathbb{M}_2(k)$ não leva radical em radical:

$$J(T_2(k)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda \\ 0 & 0 \end{pmatrix} : \lambda \in k \right\} \not\subseteq J(\mathbb{M}_2(k)) = 0.$$

Seja A uma álgebra pseudocompacta básica tal que $A/J^2(A)$ é uma álgebra de dimensão finita. A aljava ordinária Q_A de A é a aljava ordinária $Q_{A/J^2(A)}$.

Definição 2.6.6. Seja A uma álgebra pseudocompacta básica tal que $A/J^2(A)$ é uma álgebra de dimensão finita. Um ideal fechado I é chamado de **ideal de relação** se $I \subseteq J^2(k[[Q_A]])$. Além disso, um ideal de relação I é **admissível** se existe um inteiro positivo maior do que ou igual a 2 tal que $J^n(k[[Q_A]]) \subseteq I$.

Proposição 2.6.7. Seja A uma álgebra pseudocompacta A tal que $A/J^2(A)$ é uma álgebra de dimensão finita. Então existe um ideal de relação I tal que

$$A \cong k[[Q_A]]/I.$$

O ideal I é admissível se, e somente se, A é uma álgebra de dimensão finita.

Demonstração. Veja (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020, Proposition 5.9) □

Definição 2.6.8. *Uma álgebra pseudocompacta A diz-se **hereditária** quando cada submódulo fechado de um A -módulo pseudocompacto projetivo é projetivo.*

Proposição 2.6.9. *Uma álgebra pseudocompacta básica A com $A/J^2(A)$ de dimensão finita é hereditária se, e somente se, A é isomorfa a $k[[Q_A]]$.*

Demonstração. A prova encontra-se em (CHIN, 2002, Theorem 1). □

3 O Teorema do levantamento

Sejam A uma álgebra pseudocompacta com $\dim_k A/J^2(A) < \infty$ e B uma álgebra de dimensão finita e seja $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo contínuo. Neste capítulo buscaremos entender como se comporta a imagem de um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A por φ . Provaremos que existe um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de B de modo que a imagem de cada elemento do conjunto completo de A seja uma combinação de elementos do conjunto completo de B . Este resultado será essencial nas construções das adjunções do próximo capítulo.

No decorrer do capítulo adotaremos a linguagem de levantamentos da projeção canônica $\pi : A \rightarrow A/J(A)$ e veremos que existe uma correspondência biunívoca com os conjuntos completos de idempotentes ortogonais primitivos de A . Utilizaremos fortemente as versões pseudocompactas do Teorema de Malcev e Wedderburn ao longo deste capítulo. Recomendamos ao leitor as leituras dos artigos ([ECKSTEIN, 1969](#), Theorem 17) e ([CURTIS, 1954](#), Theorem 1) para maiores detalhes das versões pseudocompactas dos resultados.

Neste capítulo, todas as álgebras são básicas. Além disso, consideraremos sempre álgebras A tais que $\dim_k A/J^2(A) < \infty$, isto é, álgebras cujas aljavas ordinárias Q_A são aljavas finitas. Para maiores detalhes, recomendamos ([IUSENKO; MACQUARRIE, 2020](#), Chapter 4, §3).

3.1 Levantamentos da projeção de A em $A/J(A)$

Definição 3.1.1. *Seja A uma álgebra pseudocompacta básica. Um **levantamento da projeção canônica** $\pi_A : A \rightarrow A/J(A)$ é um homomorfismo de álgebras contínuo*

$$s : A/J(A) \rightarrow A$$

tal que $\pi_A s = \text{id}_{A/J(A)}$.

Observação 3.1.2. *Por simplicidade de escrita, diremos muitas vezes que $s : A/J(A) \rightarrow A$ é um levantamento no lugar de levantamento da projeção $\pi_A : A \rightarrow A/J(A)$.*

Exemplo 3.1.3. *Seja kQ a álgebra de caminhos da aljava $Q : 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$. Um exemplo de levantamento da projeção $\pi : kQ \rightarrow kQ/J(kQ)$ é o homomorfismo de álgebras $s : kQ/J(kQ) \rightarrow kQ$ definido por*

$$s(\bar{e}_1) = e_1 \quad s(\bar{e}_2) = e_2 \quad s(\bar{e}_3) = e_3.$$

De fato, $\pi s(\bar{e}_i) = \pi(e_i) = \bar{e}_i$ para cada $i = 1, 2, 3$. Um outro exemplo de levantamento da projeção π é o levantamento $s' : kQ/J(kQ) \rightarrow kQ$ definido por

$$s'(\bar{e}_1) = e_1 + \alpha\beta \quad s'(\bar{e}_2) = e_2 - \beta \quad s'(\bar{e}_3) = e_3 + \beta - \alpha\beta.$$

Exemplo 3.1.4. O homomorfismo $s : k[[X]]/\langle X \rangle \rightarrow k[[X]]$ definido por $s(\bar{1}) = 1$ é o único levantamento da projeção $\pi : k[[X]] \rightarrow k[[X]]/\langle X \rangle$.

Seja A uma álgebra pseudocompacta. Denote por \mathcal{S}_A o conjunto de todos os levantamentos da projeção $\pi : A \rightarrow A/J(A)$. A generalização dada por Curtis do Teorema de Wedderburn assegura que o conjunto \mathcal{S}_A é não-vazio:

Teorema 3.1.5 (Teorema de Wedderburn). *Seja A uma álgebra pseudocompacta. Existe uma subálgebra fechada Σ de A tal que*

$$A \cong \Sigma \oplus J(A)$$

como k -espaço vetorial.

Demonstração. Segue-se diretamente de (CURTIS, 1954, Theorem 1). □

Seja \mathcal{P} o único conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de $A/J(A)$. A imagem de \mathcal{P} por um levantamento s da projeção $A \rightarrow A/J(A)$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A . Denote por \mathcal{P}_A o conjunto de todos os conjuntos completos de idempotentes ortogonais primitivos de A . A imagem de \mathcal{P} por um mapa em \mathcal{S}_A nos dá um mapa

$$\Gamma : \mathcal{S}_A \rightarrow \mathcal{P}_A.$$

Lema 3.1.6. *O mapa Γ é uma bijeção.*

Demonstração. A prova encontra-se em (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020, Lemma 4.1). □

Teorema 3.1.7 (Teorema de Malcev). *Seja A uma álgebra pseudocompacta e sejam s_1 e s_2 dois levantamentos da projeção $\pi : A \rightarrow A/J(A)$. Então existe $r \in J(A)$ tal que*

$$s_2(\bar{a}) = (1 - r)s_1(\bar{a})(1 - r)^{-1}.$$

para todo $\bar{a} \in A/J(A)$.

Demonstração. Eckstein provou o resultado em (ECKSTEIN, 1969, Theorem 17). □

Observação 3.1.8. *Dados dois levantamentos s_1 e s_2 da projeção $\pi : A \rightarrow A/J(A)$, então*

$$(s_1 - s_2)(\bar{a}) \in J(A)$$

para todo $\bar{a} \in A/J(A)$, pois $\pi(s_1 - s_2) = 0$.

Definição 3.1.9. Seja $\mathcal{P} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ o único conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de $A/J(A)$. Dados dois levantamentos s_1 e s_2 da projeção $\pi : A \rightarrow A/J(A)$, defina

$$r = \sum_{i=1}^n s_2(\bar{e}_i) (1 - s_1(\bar{e}_i)).$$

Observação 3.1.10. O elemento mudança de levantamento r definido anteriormente é um elemento de $J(A)$. Basta notar que

$$\pi(s_2(\bar{e}_i) - s_2(\bar{e}_i)s_1(\bar{e}_i)) = \bar{e}_i - \bar{e}_i^2 = \bar{0},$$

para cada $i = 1, \dots, n$.

Exemplo 3.1.11. Seja kQ a álgebra de caminho da aljava $Q : 1 \xleftarrow{\alpha} 2$. Dados dois levantamentos $s_1, s_2 : kQ/J(kQ) \rightarrow kQ$ definidos por

$$s_1 : \bar{e}_1 \mapsto e_1 + \lambda_1\alpha \quad \bar{e}_2 \mapsto e_2 - \lambda_1\alpha$$

e

$$s_2 : \bar{e}_1 \mapsto e_1 + \lambda_2\alpha \quad \bar{e}_2 \mapsto e_2 - \lambda_2\alpha$$

respectivamente, onde $\lambda_1, \lambda_2 \in k$, então

$$\begin{aligned} r &= s_2(\bar{e}_1)s_1(\bar{e}_2) + s_2(\bar{e}_2)s_1(\bar{e}_1) \\ &= (e_1 + \lambda_2\alpha)(e_2 - \lambda_1\alpha) + (e_2 - \lambda_2\alpha)(e_1 + \lambda_1\alpha) \\ &= (\lambda_2 - \lambda_1)\alpha. \end{aligned}$$

Dados dois levantamentos s_1, s_2 da projeção $\pi : A \rightarrow A/J(A)$, a proposição abaixo prova que o elemento definido em 3.1.9 é uma caracterização explícita do elemento $r \in J(A)$ do Teorema de Malcev. A fórmula explícita do elemento r é um resultado novo.

Proposição 3.1.12. Seja A uma álgebra pseudocompacta com dimensão de $A/J^2(A)$ finita e seja $\mathcal{P} = \{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ o único conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de $A/J(A)$. Dados dois levantamentos s_1 e s_2 da projeção $\pi : A \rightarrow A/J(A)$, seja $r \in J(A)$ definido em 3.1.9. Então

$$s_2(\bar{a}) = (1 - r)s_1(\bar{a})(1 - r)^{-1}.$$

para todo $\bar{a} \in A/J(A)$.

Demonstração. Como $1 - r = \sum_{i=1}^n s_2(\bar{e}_i)s_1(\bar{e}_i)$, segue-se, para cada $i = 1, \dots, n$, que

$$\begin{aligned} (1 - r)s_1(\bar{e}_i) &= \left(\sum_{j=1}^n s_2(\bar{e}_j)s_1(\bar{e}_j) \right) s_1(\bar{e}_i) \\ &= s_2(\bar{e}_i)s_1(\bar{e}_i) \\ &= s_2(\bar{e}_i) \left(\sum_{i=j}^n s_2(\bar{e}_j)s_1(\bar{e}_j) \right) \\ &= s_2(\bar{e}_i)(1 - r). \end{aligned}$$

Logo

$$s_2(\bar{a}) = (1 - r)s_1(\bar{a})(1 - r)^{-1}$$

para todo $\bar{a} \in A/J(A)$. □

Exemplo 3.1.13. *Seja kQ a álgebra de caminhos de $Q : 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$. Considere os levantamentos $s_1, s_2 : kQ/J(kQ) \rightarrow kQ$ definidos por*

$$s_1 : \bar{e}_1 \mapsto e_1 + \alpha + \alpha\beta \quad \bar{e}_2 \mapsto e_2 - \alpha + \beta - \alpha\beta \quad \bar{e}_3 \mapsto e_3 - \beta$$

e

$$s_2 : \bar{e}_1 \mapsto e_1 + \alpha\beta \quad \bar{e}_2 \mapsto e_2 - \beta \quad \bar{e}_3 \mapsto e_3 + \beta - \alpha\beta,$$

respectivamente. Então

$$\begin{aligned} r &= s_2(\bar{e}_1)(s_1(\bar{e}_2) + s_1(\bar{e}_3)) + s_2(\bar{e}_2)(s_1(\bar{e}_1) + s_1(\bar{e}_3)) + s_2(\bar{e}_3)(s_1(\bar{e}_1) + s_1(\bar{e}_2)) \\ &= (e_1 + \alpha\beta)(e_2 + e_3 - \alpha - \alpha\beta) + (e_2 - \beta)(e_1 + e_3 + \alpha - \beta + \alpha\beta) + \\ &\quad + (e_3 + \beta - \alpha\beta)(e_1 + e_2 + \beta) \\ &= -\alpha - 2\beta. \end{aligned}$$

O inverso multiplicativo de $1 - r = 1 + \alpha + 2\beta$ é $1 - \alpha - 2\beta + 2\alpha\beta$, logo

$$\text{Im}s_2 = (1 + \alpha + 2\beta)\text{Im}s_1(1 - \alpha - 2\beta + 2\alpha\beta).$$

3.2 Teorema do levantamento

Sejam A e B álgebras pseudocompactas. Dado um homomorfismo de álgebras contínuo $\varphi : A \rightarrow B$, então, pela Proposição 2.6.4, sabemos que

$$\varphi(J(A)) \subseteq J(B),$$

portanto, podemos definir, através do mapa induzido pelos quocientes, o homomorfismo de álgebras contínuo

$$\varphi_1 : \frac{A}{J(A)} \rightarrow \frac{B}{J(B)}$$

pondo $\varphi_1(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$.

O mapa $\varphi_1 : A/J(A) \rightarrow B/J(B)$ é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ \frac{A}{J(A)} & \xrightarrow{\varphi_1} & \frac{B}{J(B)} \end{array}$$

comuta, onde $\pi_A : A \rightarrow A/J(A)$ e $\pi_B : B \rightarrow B/J(B)$ são as projeções canônicas.

Sejam $\{\overline{e}_1, \dots, \overline{e}_n\}$ e $\{\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_m\}$ os únicos conjuntos completos de idempotentes ortogonais primitivos de $A/J(A)$ e $B/J(B)$ respectivamente. Para cada $i = 1, \dots, n$, tem-se:

$$\varphi_1(\overline{e}_i) = \sum_{j=1}^m \lambda_j^i \overline{f}_j,$$

onde cada λ_j^i pertence a k .

Lema 3.2.1. *Fixada a notação acima. Para cada $i = 1, \dots, n$, tem-se $\lambda_j^i = 1$ ou 0 para todo $j = 1, \dots, m$.*

Demonstração. Suponha que $\lambda_j^i \neq 0$. Como \overline{e}_i é um elemento idempotente e $\{\overline{f}_1, \dots, \overline{f}_m\}$ é um conjunto formado por elementos idempotentes e dois a dois ortogonais, temos

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^m \lambda_j^i \overline{f}_j &= \varphi_1(\overline{e}_i) \\ &= \varphi_1((\overline{e}_i)^2) \\ &= \varphi_1(\overline{e}_i)^2 \\ &= \sum_{j=1}^m (\lambda_j^i)^2 \overline{f}_j. \end{aligned}$$

Ao multiplicarmos ambos os lados por \overline{f}_j , obtemos que

$$\lambda_j^i \overline{f}_j = (\lambda_j^i)^2 \overline{f}_j.$$

Logo $\lambda_j^i = 1$ ou $\lambda_j^i = 0$. □

Na notação anterior, para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, defina

$$\mathcal{L}_i = \{j : \lambda_j^i = 1\} \subseteq \{1, \dots, m\}.$$

Lema 3.2.2. *Na mesma notação:*

- (i) dados $i_1, i_2 \in \{1, \dots, n\}$ distintos, então $\mathcal{L}_{i_1} \cap \mathcal{L}_{i_2} = \emptyset$;
- (ii) para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, existe $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $j \in \mathcal{L}_i$.

Demonstração. (i) Se existe $j \in \mathcal{L}_{i_1} \cap \mathcal{L}_{i_2}$, então $\lambda_j^{i_1} = \lambda_j^{i_2} = 1$. Das igualdades

$$\overline{f}_j \varphi_1(\overline{e}_{i_1}) = \overline{f}_j = \overline{f}_j \varphi_1(\overline{e}_{i_2}),$$

segue-se que

$$\begin{aligned} \overline{f}_j &= \overline{f}_j \varphi_1(\overline{e}_{i_2}) \\ &= (\overline{f}_j \varphi_1(\overline{e}_{i_1})) \varphi_1(\overline{e}_{i_2}) \\ &= \overline{f}_j \varphi_1(\overline{e}_{i_1} \overline{e}_{i_2}) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Mas isso contradiz o fato de que \overline{f}_j é um idempotente não-nulo de $B/J(B)$.

(ii) Se, para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, $j \notin \mathcal{L}_i$ então $\overline{f_j} \varphi_1(\overline{e_i}) = 0$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$.

Multiplicando ambos os membros da igualdade $1 = \sum_{i=1}^n \varphi_1(\overline{e_i})$ por $\overline{f_j}$, obtemos $\overline{f_j} = 0$, uma contradição.

□

Observação 3.2.3. *Combinando as duas afirmações do lema anterior tem-se: para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, existe único $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $j \in \mathcal{L}_i$. Além disso, $\bigcup_{i=1}^n \mathcal{L}_i = \{1, \dots, m\}$.*

Teorema 3.2.4 (Teorema do levantamento). *Sejam A uma álgebra pseudocompacta e B uma álgebra de dimensão finita e seja $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras. Se s_A é um levantamento da projeção $A \rightarrow A/J(A)$, então existe um levantamento s_B da projeção $B \rightarrow B/J(B)$ tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{J(A)} & \xrightarrow{\varphi_1} & \frac{B}{J(B)} \\ s_A \downarrow & & \downarrow s_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

comuta.

Demonstração. A álgebra B é uma álgebra de dimensão finita, logo $J^l(B) = 0$ para algum inteiro positivo l . Usaremos indução sobre l . Quando se supõe $l = 1$, o único levantamento da projeção $\pi_B : B \rightarrow B/J(B)$ é a identidade porque $B/J(B) = B$. Por definição, o homomorfismo de álgebras $\varphi_1 : A/J(A) \rightarrow B$ é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \text{id}_B \\ \frac{A}{J(A)} & \xrightarrow{\varphi_1} & B, \end{array}$$

comuta. Então, para todo levantamento $s_A : A/J(A) \rightarrow A$ da projeção $\pi : A \rightarrow A/J(A)$, as igualdades

$$\begin{aligned} \varphi s_A &= \text{id}_B \varphi s_A \\ &= \varphi_1 \pi s_A \\ &= \varphi_1 \text{id}_{A/J(A)} \\ &= \varphi_1, \end{aligned}$$

resultam que o teorema é verdadeiro para o caso $l = 1$.

Suponhamo-lo, por indução, válido para l , isto é, válido para álgebras B tais que $J^l(B) = 0$ e seja B com $J^{l+1}(B) = 0$. Seja s_A um levantamento da projeção $A \rightarrow A/J(A)$. Sabemos, pela hipótese de indução, que existe um levantamento $s' : B/J(B) \rightarrow B/J^l(B)$ da projeção $\pi_{l,1} : B/J^l(B) \rightarrow B/J(B)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{J(A)} & \xrightarrow{\varphi_1} & \frac{B}{J(B)} \\ s_A \downarrow & & \downarrow s' \\ A & \xrightarrow{\pi_l \varphi} & \frac{B}{J^l(B)} \end{array}$$

comuta, onde $\pi_l : B \rightarrow B/J^n(B)$ é a projeção canônica.

Se s'_B é um levantamento qualquer da projeção $\pi_B : B \rightarrow B/J(B)$, então $\pi_n s'_B$ é um levantamento da projeção $\pi_{n,1} : B/J^l(B) \rightarrow B/J(B)$. Pelo Teorema 3.1.7, existe $r \in J(B)$ tal que, para cada $\bar{b} \in B/J(B)$,

$$s'(\bar{b}) = (\overline{1-r})\pi_l s'_B(\bar{b})(\overline{1-r})^{-1}.$$

Assim, para cada $b \in B$, segue-se das igualdades

$$\begin{aligned} s'(\bar{b}) &= (\overline{1-r})\pi_l s'_B(\bar{b})(\overline{1-r})^{-1} \\ &= (\pi_l(1-r))(\pi_l s'_B(\bar{b}))(\pi_l((1-r)^{-1})) \\ &= \pi_l((1-r)s'_B(\bar{b})(1-r)^{-1}) \end{aligned}$$

que

$$s' = \pi_l((1-r)s'_B(1-r)^{-1}),$$

logo

$$\pi_l \varphi s_A = s' \varphi_1 = \pi_l((1-r)s'_B(1-r)^{-1})\varphi_1.$$

Portanto a diferença de φs_A por $(1-r)s'_B(1-r)^{-1}\varphi_1$ nos elementos de $A/J(A)$ é um elemento de $J^l(B)$, isto é,

$$(\varphi s_A - (1-r)s'_B(1-r)^{-1}\varphi_1)(\bar{a}) \in J^l(B),$$

para cada $a \in A$.

Sejam $\{\bar{e}_1, \dots, \bar{e}_n\}$ e $\{\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_m\}$ os conjuntos completos de idempotentes primitivos ortogonais de $A/J(A)$ e $B/J(B)$ respectivamente. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, seja $r_i \in J^l(B)$ tal que

$$\varphi s_A(\bar{e}_i) = (1-r)s'_B(\varphi_1(\bar{e}_i))(1-r)^{-1} + r_i. \quad (3.1)$$

Defina $s''_B = (1-r)s'_B(1-r)^{-1}$.

Pelo Lema 3.2.2, para cada $j \in \{1, \dots, m\}$, existe um único $i \in \{1, \dots, n\}$ tal que $j \in \mathcal{L}_i$. Defina o mapa $s_B : B/J(B) \rightarrow B$ pondo, para cada $j \in \mathcal{L}_i$,

$$s_B(\bar{f}_j) = s''_B(\bar{f}_j) + r_i s''_B(\bar{f}_j) + s''_B(\bar{f}_j) r_i. \quad (3.2)$$

Provaremos que s_B é um levantamento da projeção $\pi_B : B \rightarrow B/J(B)$ tal que $\varphi s_A = s_B \varphi_1$.

Para cada idempotente primitivo $\overline{f_j}$ de $B/J(B)$, tem-se

$$\begin{aligned}
 \pi_B s_B(\overline{f_j}) &= \pi_B(s_B''(\overline{f_j}) + r_i s_B''(\overline{f_j}) + s_B''(\overline{f_j}) r_i) \\
 &= \pi_B s_B''(\overline{f_j}) + \pi_B(r_i s_B''(\overline{f_j})) + \pi_B(s_B''(\overline{f_j}) r_i) \\
 &= \pi_B s_B''(\overline{f_j}) \\
 &= \overline{f_j} \\
 &= \text{id}(\overline{f_j}).
 \end{aligned}$$

Isto mostra que s_B é um levantamento da projeção $\pi_B : B \rightarrow B/J(B)$.

Para cada $i = 1, \dots, n$, a expressão

$$r_i = s_B''\varphi_1(\overline{e_i})r_i + r_i s_B''\varphi_1(\overline{e_i}) \quad (3.3)$$

é uma consequência direta das igualdades

$$\begin{aligned}
 s_B''\varphi_1(\overline{e_i}) + r_i &= \varphi s_A(\overline{e_i}) && \text{por 3.1} \\
 &= \varphi(s_A(\overline{e_i})^2) \\
 &= \varphi s_A(\overline{e_i})\varphi s_A(\overline{e_i}) \\
 &= (s_B''\varphi_1(\overline{e_i}) + r_i)(s_B''\varphi_1(\overline{e_i}) + r_i) && \text{por 3.1} \\
 &= s_B''\varphi_1(\overline{e_i}) + s_B''\varphi_1(\overline{e_i})r_i + r_i s_B''\varphi_1(\overline{e_i}) \quad \text{por } r_i^2 \in J^{l+1}(B) = 0.
 \end{aligned}$$

Portanto, para cada $i = 1, \dots, n$,

$$\begin{aligned}
 \varphi s_A(\overline{e_i}) &= s_B''\varphi_1(\overline{e_i}) + r_i && \text{por 3.1} \\
 &= s_B''\varphi_1(\overline{e_i}) + s_B''\varphi_1(\overline{e_i})r_i + r_i s_B''\varphi_1(\overline{e_i}) && \text{por 3.3} \\
 &= s_B''\left(\sum_{j \in \mathcal{L}_i} \overline{f_j}\right) + r_i s_B''\left(\sum_{j \in \mathcal{L}_i} \overline{f_j}\right) + s_B''\left(\sum_{j \in \mathcal{L}_i} \overline{f_j}\right)r_i \quad \text{por } \varphi_1(e_i) = \sum_{j \in \mathcal{L}_i} \overline{f_j} \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{L}_i} s_B''(\overline{f_j}) + r_i s_B''(\overline{f_j}) + s_B''(\overline{f_j})r_i \\
 &= \sum_{j \in \mathcal{L}_i} s_B(\overline{f_j}) && \text{por 3.2} \\
 &= s_B\left(\sum_{j \in \mathcal{L}_i} \overline{f_j}\right) \\
 &= s_B\varphi_1(\overline{e_i}) \quad \text{por } \varphi_1(e_i) = \sum_{j \in \mathcal{L}_i} \overline{f_j}.
 \end{aligned}$$

Provando que $\varphi s_A = s_B\varphi_1$. Segue-se de $\varphi s_A = s_B\varphi_1$ que $s_B(\overline{1}) = 1$. Resta apenas mostrar que $s_B(\overline{bb'}) = s_B(\overline{b})s_B(\overline{b'})$ para todo $b, b' \in B$ para concluirmos a prova.

Notemos, para cada $\overline{f_{j_1}}, \overline{f_{j_2}} \in B/J(B)$, $j_1, j_2 \in \mathcal{L}_i$, que a multiplicação de $s_B(\overline{f_{j_1}})$ por $s_B(\overline{f_{j_2}})$ é igual a

$$s_B''(\overline{f_{j_1}})s_B''(\overline{f_{j_2}}) + s_B''(\overline{f_{j_1}})s_B''(\overline{f_{j_2}})r_i + r_i s_B''(\overline{f_{j_1}})s_B''(\overline{f_{j_2}}) + 2s_B''(\overline{f_{j_1}})r_i s_B''(\overline{f_{j_2}})$$

porque $r_i^2 \in J^{l+1}(B) = 0$. Provaremos que $s_B''(\overline{f_{j_1}})r_i s_B''(\overline{f_{j_2}}) = 0$.

Multiplicando à esquerda a igualdade 3.3 por $s_B''(\overline{f_{j_1}})$, com $j_1 \in \mathcal{L}_i$, obtemos

$$\begin{aligned} s_B''(\overline{f_{j_1}})r_i &= s_B''(\overline{f_{j_1}})\left(s_B''\varphi_1(\overline{e_i})r_i + r_i s_B''\varphi_1(\overline{e_i})\right) \\ &= s_B''(\overline{f_{j_1}})\left[s_B''\left(\sum_{j \in \mathcal{L}_i} \overline{f_j}\right)r_i + r_i s_B''\left(\sum_{j \in \mathcal{L}_i} \overline{f_j}\right)\right] \\ &= s_B''(\overline{f_{j_1}})r_i + s_B''(\overline{f_{j_1}})r_i s_B''\left(\sum_{j \in \mathcal{L}_i} \overline{f_j}\right). \end{aligned}$$

Do mesmo modo, ao multiplicarmos à direita as igualdades acima por $s_B''(\overline{f_{j_2}})$, com $j_2 \in \mathcal{L}_i$, obtemos

$$s_B''(\overline{f_{j_1}})r_i s_B''(\overline{f_{j_2}}) = s_B''(\overline{f_{j_1}})r_i s_B''(\overline{f_{j_2}}) + s_B''(\overline{f_{j_1}})r_i s_B''(\overline{f_{j_2}}).$$

Segue-se daí que

$$s_B''(\overline{f_{j_1}})r_i s_B''(\overline{f_{j_2}}) = 0.$$

Logo, para cada $j_1, j_2 \in \mathcal{L}_i$,

$$s_B(\overline{f_{j_1}})s_B(\overline{f_{j_2}}) = \begin{cases} s_B(\overline{f_{j_1}}) & \text{se } j_1 = j_2; \\ 0 & \text{se } j_1 \neq j_2. \end{cases}$$

De modo análogo, para cada $j_1 \in \mathcal{L}_{i_1}$ e $j_2 \in \mathcal{L}_{i_2}$, i_1 e i_2 distintos, prova-se que

$$s_B(\overline{f_{j_1}})s_B(\overline{f_{j_2}}) = 0.$$

Portanto $s_B(\overline{bb'}) = s_B(\overline{b})s_B(\overline{b'})$ para todo $b, b' \in B$. O que conclui a demonstração do teorema. \square

Observação 3.2.5. *Sejam A, B e $\varphi : A \rightarrow B$ como nas hipóteses do teorema anterior. Cabe então perguntar o seguinte: dado um levantamento s_B da projeção $\pi_B : B \rightarrow B/J(B)$, será que sempre existe um levantamento s_A da projeção $\pi_A : A \rightarrow A/J(A)$ de modo que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{J(A)} & \xrightarrow{\varphi_1} & \frac{B}{J(B)} \\ s_A \downarrow & & \downarrow s_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

comuta? A resposta é negativa. Com efeito, considere a álgebra $A = kQ$ dada pela aljava $Q : 1 \xleftarrow{\alpha} 2$. Defina $\varphi : kQ \rightarrow kQ$ pondo

$$\varphi(e_i) = e_i \quad \varphi(\alpha) = 0.$$

Dado um levantamento $s : kQ/J(kQ) \rightarrow kQ$ da projeção $\pi : kQ \rightarrow kQ/J(kQ)$, então s tem a forma

$$s(\overline{e_1}) = e_1 + \lambda\alpha \quad s = e_2 - \lambda\alpha,$$

onde $\lambda \in k$. Fixe $s_1 : e_1 \mapsto e_1 + \alpha, e_2 \mapsto e_2 - \alpha$, então, para todo levantamento s , temos

$$\begin{aligned} \varphi s(\bar{e}_1) &= \varphi(e_1 + \lambda\alpha) \\ &= e_1 \\ &\neq e_1 + \alpha \\ &= s_1(\bar{e}_1) \\ &= s_1(\varphi_1(\bar{e}_1)). \end{aligned}$$

Isto é, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{kQ}{J(kQ)} & \xrightarrow{\varphi_1} & \frac{kQ}{J(kQ)} \\ s \downarrow & & \downarrow s_1 \\ kQ & \xrightarrow{\varphi} & kQ \end{array}$$

não comuta para todo levantamento s .

Observação 3.2.6. Também não é verdade que existe um único levantamento s_B satisfazendo o Teorema 3.2.4. Seja kQ a álgebra de caminhos dada pela aljava $Q : 1 \xleftarrow{\alpha} 2$. Considere o homomorfismo de álgebras $\varphi : k \rightarrow kQ$ definido por $\varphi(\lambda) = \lambda$. Evidentemente, para todo levantamento $s : kQ/J(kQ) \rightarrow kQ$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} k & \xrightarrow{\varphi_1} & \frac{kQ}{J(kQ)} \\ 1 \downarrow & & \downarrow s \\ k & \xrightarrow{\varphi} & kQ \end{array}$$

comuta, onde φ_1 é definido por $\varphi_1(\lambda) = \bar{\lambda}$.

Corolário 3.2.7. Sejam A, B e $\varphi : A \rightarrow B$ como nas hipóteses do Teorema 3.2.4. Se $\varphi_1 : A/J(A) \rightarrow B/J(B)$ é um homomorfismo sobrejetivo, então, para cada levantamento $s_A : A/J(A) \rightarrow A$, existe único levantamento $s_B : B/J(B) \rightarrow B$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{J(A)} & \xrightarrow{\varphi_1} & \frac{B}{J(B)} \\ s_A \downarrow & & \downarrow s_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

comuta.

Demonstração. Se s e s' são dois levantamentos da projeção $\pi : B \rightarrow B/J(B)$ que satisfazem o diagrama do Teorema 3.2.4, então $s\varphi_1 = s'\varphi_1$, mas φ_1 é um epimorfismo, logo $s = s'$. \square

3.3 O diagrama comutativo para pares de levantamentos

Para cada álgebra A com $A/J^2(A)$ de dimensão finita, temos a decomposição

$$A = \Sigma \oplus J(A),$$

onde Σ é uma subálgebra de A isomorfa a $A/J(A)$. Isto é,

$$A = \text{Im}s \oplus J(A),$$

onde s é um levantamento da projeção $\pi_A : A \rightarrow A/J(A)$.

A álgebra $A/J(A)$ é um produto de cópias de k , portanto, semissimples. Logo cada $A/J(A)$ -bimódulo é um bimódulo projetivo. Como $J(A)$ é um $A/J(A)$ -bimódulo via s e a projeção $\pi_A : J(A) \rightarrow J(A)/J^2(A)$ é um homomorfismo de $A/J(A)$ -bimódulos sobrejetivo, segue-se que existe um homomorfismo de $A/J(A)$ -bimódulos contínuo

$$t : J(A)/J^2(A) \rightarrow J(A)$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & & \frac{J(A)}{J^2(A)} \\ & \swarrow t & \downarrow 1 \\ J(A) & \xrightarrow{\pi} & \frac{J(A)}{J^2(A)} \end{array}$$

comuta. O homomorfismo de $A/J(A)$ -bimódulos $t : J(A)/J^2(A) \rightarrow J(A)$ é chamado de **levantamento da projeção** $\pi_A : J(A) \rightarrow J(A)/J^2(A)$.

Definição 3.3.1. O par (s, t) é chamado de **par de levantamentos**.

Sejam A uma álgebra e (s, t) um par de levantamentos. Pela propriedade universal da álgebra tensorial completa, o par (s, t) induz um homomorfismo de álgebras sobrejetivo contínuo (veja (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020, Proposition 5.9)),

$$\varphi_A : T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] \longrightarrow A .$$

Chamaremos o homomorfismo φ_A de **homomorfismo de apresentação de A induzido pelo par de levantamentos (s, t)** .

Observação 3.3.2. Cada homomorfismo apresentação é um homomorfismo sobrejetivo.

Exemplo 3.3.3. Seja Σ uma álgebra pseudocompacta semissimples e U um Σ -bimódulo pseudocompacto. O par de levantamentos (s_Q, t_Q) de $T[[\Sigma, U]]$ definido por

$$s_Q : \frac{T[[\Sigma, U]]}{J(T[[\Sigma, U]])} \rightarrow T[[\Sigma, U]] \quad t_Q : \frac{J(T[[\Sigma, U]])}{J^2(T[[\Sigma, U]])} \rightarrow J(T[[\Sigma, U]])$$

$$(a, 0, \dots) \mapsto (a, 0, \dots) \quad (0, u, \dots) \mapsto (0, u, \dots)$$

tem como homomorfismo de apresentação a identidade de $T[[\Sigma, U]]$. Chamaremos o par (s_Q, t_Q) de **par de levantamentos canônico de $T[[\Sigma, U]]$** .

Exemplo 3.3.4. *Sejam $A = k[[X]]$ a álgebra das séries de potências na variável X e (s, t) o par de levantamentos definido por*

$$s : \frac{k[[X]]}{J(k[[X]])} \rightarrow k[[X]], \quad t : \frac{J(k[[X]])}{J^2(k[[X]])} \rightarrow J(k[[X]])$$

$$\bar{1} \mapsto 1, \quad \bar{X} \mapsto X - 15X^3 - 13X^{10}.$$

Então o homomorfismo de apresentação induzido pelo par (s, t) é o homomorfismo de álgebras $\varphi : k[[X]] \rightarrow k[[X]]$ dado por

$$\varphi(X) = X - 15X^3 - 13X^{10}.$$

Proposição 3.3.5. *Sejam A uma álgebra pseudocompacta e B uma álgebra de dimensão finita e seja $\varphi : A \rightarrow B$ um homomorfismo de álgebras contínuo. Se φ_A e φ_B são homomorfismos de apresentações de A e B induzidos pelos pares (s_A, t_A) e (s_B, t_B) respectivamente, então existe um homomorfismo $\psi : T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] \rightarrow T\left[\left[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}\right]\right]$ tal que o diagrama*

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] & \xrightarrow{\psi} & T\left[\left[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}\right]\right] \\ \varphi_A \downarrow & & \downarrow \varphi_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

comuta.

Demonstração. Construiremos um homomorfismo de álgebras $\psi_0 : A/J(A) \rightarrow T\left[\left[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}\right]\right]$ e um homomorfismo de $A/J(A)$ -bimódulos $\psi_1 : J(A)/J^2(A) \rightarrow T\left[\left[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}\right]\right]$ de modo que o homomorfismo induzido pelos mapas ψ_0 e ψ_1 através da propriedade universal da álgebra tensorial completa satisfaça o diagrama acima.

Pelo Teorema 3.2.4, existe um levantamento $s'_B : B/J(B) \rightarrow B$ da projeção $B \rightarrow B/J(B)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{J(A)} & \xrightarrow{\varphi_1} & \frac{B}{J(B)} \\ s_A \downarrow & & \downarrow s'_B \\ A & \xrightarrow{\varphi} & B \end{array}$$

comuta. Segue-se então do Teorema de Malcev que existe $r \in J(B)$ tal que

$$s'_B = (1 + r)s_B(1 + r)^{-1}.$$

O homomorfismo de álgebras φ_B é sobrejetivo, logo existe $x \in J\left(T\left[\left[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}\right]\right]\right)$ tal que $\varphi_B(x) = r$. Defina

$$\psi_0 : A/J(A) \longrightarrow T\left[\left[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}\right]\right]$$

pondo $\psi_0(\bar{a}) = (1 + x)(\overline{\varphi(a)}, 0, 0, \dots)(1 + x)^{-1}$.

Tratando $T[[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}]]$ e B como $A/J(A)$ -bimódulos através de ψ_0 e φ_{s_A} respectivamente, afirmamos que φ_B é um homomorfismo de $A/J(A)$ -bimódulos. Com efeito, dados $\bar{a} \in A/J(A)$ e $y \in T[[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}]]$,

$$\begin{aligned}
 \varphi_B(\bar{a} \cdot y) &= \varphi_B(\psi_0(\bar{a})y) \\
 &= \varphi_B(\psi_0(\bar{a}))\varphi_B(y) \\
 &= \varphi_B((1+x)(\overline{\varphi(a)}, 0, 0, \dots)(1+x)^{-1})\varphi_B(y) \\
 &= (1+\varphi_B(x))s_B(\overline{\varphi(a)})(1+\varphi_B(x))^{-1}\varphi_B(y) \\
 &= (1+r)s_B(\varphi_1(\bar{a}))(1+r)^{-1}\varphi_B(y) \\
 &= s'_B(\varphi_1(\bar{a}))\varphi_B(y) \\
 &= \varphi_{s_A}(\bar{a})\varphi_B(y) \\
 &= \bar{a} \cdot \varphi_B(y).
 \end{aligned}$$

Analogamente, $\varphi_B(y * \bar{a}) = \varphi_B(y) * \bar{a}$. Além disso, φ_B é um homomorfismo de $A/J(A)$ -bimódulos sobrejetivo, logo existe um homomorfismo de $A/J(A)$ -bimódulos

$$\psi_1 : J(A)/J^2(A) \longrightarrow T[[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}]]$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 & & \frac{J(A)}{J^2(A)} \\
 & & \downarrow t_A \\
 & & J(A) \\
 & \swarrow \psi_1 & \downarrow \iota \\
 & & A \\
 & & \downarrow \varphi \\
 T[[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}]] & \xrightarrow{\varphi_B} & B
 \end{array}$$

comuta. Defina

$$\psi : T[[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}]] \longrightarrow T[[\frac{B}{J(B)}, \frac{J(B)}{J^2(B)}]]$$

como sendo o homomorfismo de álgebras induzido pelos mapas ψ_0 e ψ_1 através da propriedade universal da álgebra tensorial completa.

Provaremos que ψ é o homomorfismo procurado, isto é, $\varphi\varphi_A = \varphi_B\psi$. Para isto, é suficiente provar a igualdade nos elementos de $T[[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}]]$ da forma $a_0 = (\bar{a}, 0, \dots)$ e $x_1 = (0, \bar{x}, 0, \dots)$. O resultado segue-se então das igualdades abaixo :

$$\begin{aligned}
\varphi_B\psi((\bar{a}, 0, \dots)) &= \varphi_B\psi_0(\bar{a}) \\
&= \varphi_B((1-x)(\varphi_1(\bar{a}), 0, \dots)(1-x)^{-1}) \\
&= (1-\varphi_B(x))\varphi_B((\varphi_1(\bar{a}), 0, \dots))(1-\varphi_B(x))^{-1} \\
&= (1-r)s_B(\varphi_1(\bar{a}))(1-r)^{-1} \\
&= s'_{\Sigma_2}(\varphi_1(\bar{a})) \\
&= \varphi s_A(\bar{a}) \\
&= \varphi\varphi_A((\bar{a}, 0, \dots)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_B\psi((0, \bar{x}, 0, \dots)) &= \varphi_B\psi_1(\bar{x}) \\
&= \varphi t_A(\bar{x}) \\
&= \varphi t_A(\bar{x}) \\
&= \varphi\varphi_A(0, \bar{x}, 0, \dots).
\end{aligned}$$

□

4 A categoria das álgebras pseudocompactas básicas e adjunções

Denotamos por \mathbf{PAlg} a categoria cujos objetos são álgebras pseudocompactas básicas A tais que $\dim_{\mathbb{k}} A/J^2(A) < \infty$; e cujos morfismos são homomorfismos de álgebras contínuos. Para cada inteiro positivo n , a subcategoria plena de \mathbf{PAlg} cujos objetos são álgebras A tais que $J^n(A) = 0$ será denotada por \mathbf{PAlg}^n .

Observação 4.0.1. *Os objetos de \mathbf{PAlg}^n são álgebras de dimensão finita (IUSENKO; MACQUARRIE, 2020, Proposição 5.9).*

Observação 4.0.2. *Temos a seguinte cadeia de subcategorias plenas*

$$\mathbf{PAlg}^1 \subseteq \mathbf{PAlg}^2 \subseteq \dots \subseteq \mathbf{PAlg}^n \subseteq \dots$$

Estudaremos, para cada inteiro positivo n , o relacionamento entre as categorias

$$\mathbf{PAlg} \begin{array}{c} \xrightarrow{\quad} \\ \xleftarrow{\quad} \end{array} \mathbf{PAlg}^n$$

através de um par de funtores e provaremos que, sob uma relação de equivalência nos morfismos de \mathbf{PAlg} , tal par forma uma adjunção.

Evitando mal-entendidos, de agora em diante, as álgebras pseudocompactas consideradas ao longo deste capítulo serão sempre álgebras pseudocompactas básicas com aljava ordinária finita, isto é, álgebras pseudocompactas básicas A tais que a dimensão de $A/J^2(A)$ é finita.

4.1 O funtor projeção da n -ésima potência do radical de Jacobson

Dadas duas álgebras pseudocompactas $A, B \in \mathbf{PAlg}$ e dado um homomorfismo de álgebras contínuo $\varphi : A \rightarrow B$, então, pelo Corolário 2.6.5, $\varphi(J^n(A)) \subseteq J^n(B)$. Assim, podemos definir o mapa de álgebras $\varphi_n : \frac{A}{J^n(A)} \rightarrow \frac{B}{J^n(B)}$ pondo $\varphi_n(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$. Isto é, $\varphi_n : \frac{A}{J^n(A)} \rightarrow \frac{B}{J^n(B)}$ é um homomorfismo de álgebras tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\varphi} & B \\ \pi_A \downarrow & & \downarrow \pi_B \\ \frac{A}{J^n(A)} & \xrightarrow{\varphi_n} & \frac{B}{J^n(B)}, \end{array}$$

comuta, onde π_A e π_B são as respectivas projeções canônicas.

Definição 4.1.1. *Seja n um inteiro positivo. Para cada $A \in \mathbf{PAlg}$ e $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{PAlg}}(A, B)$, defina:*

$$(i) \quad F_n(A) = \frac{A}{J^n(A)};$$

$$(ii) \quad F_n(\varphi) = \varphi_n.$$

Desta maneira, para cada inteiro positivo n , $F_n : \mathbf{PAlg} \rightarrow \mathbf{PAlg}^n$ é um funtor covariante. Chamaremos o funtor F_n de **funtor projeção da n -ésima potência do radical de Jacobson**.

Como já foi dito antes, buscaremos compreender o relacionamento entre as categorias

$$\mathbf{PAlg} \rightleftarrows \mathbf{PAlg}^n$$

através de pares de adjunções. Lembramos que o funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ é adjunto a $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ à esquerda se existir um isomorfismo

$$\text{Hom}_{\mathcal{C}}(GD, C) \cong \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, FC)$$

natural em $C \in \mathcal{C}$ e $D \in \mathcal{D}$. Equivalentemente, existem transformações naturais

$$\eta : \text{id}_{\mathcal{D}} \rightarrow FG, \quad \varepsilon : GF \rightarrow \text{id}_{\mathcal{C}}$$

chamadas de unidade e counidade respectivamente satisfazendo as equações

$$F\varepsilon \circ \eta F = \text{id}_F;$$

$$\varepsilon G \circ G\eta = \text{id}_G.$$

As equações acima são chamadas de **equações da counidade-unidade**. Estruturas matemáticas envolvendo mapas com propriedades universais são de grande interesse entre os matemáticos. Adjunções desempenham um papel central na caracterização de tais mapas com propriedades universais: um funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ é um adjunto à esquerda se para cada objeto C em \mathcal{C} existe um único homomorfismo de G em C . Em outras palavras, para cada objeto C e cada morfismo $f : GD \rightarrow C$, existe um único homomorfismo $g : D \rightarrow FC$ tal que $\varepsilon_C \circ Gg = f$. Em diagramas,

$$\begin{array}{ccc} GD & & \\ \downarrow Gf & \searrow f & \\ GFC & \xrightarrow{\varepsilon_C} & C. \end{array}$$

De maneira análoga, para cada objeto $D \in \mathcal{D}$ e cada morfismo $g : D \rightarrow FC$, existe um único homomorfismo $f : GD \rightarrow C$ tal que $Ff \circ \eta_D = g$.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\eta_D} & FGD \\ & \searrow g & \downarrow Ff \\ & & FC. \end{array}$$

Para cada inteiro positivo n , temos o par óbvio de adjunção dado por (F_n, \mathcal{I}_n) , onde $\mathcal{I}_n : \mathbf{PAlg}^n \hookrightarrow \mathbf{PAlg}$ é o funtor inclusão:

Observação 4.1.2. *O funtor $\mathcal{I}_n : \mathbf{PAlg}^n \hookrightarrow \mathbf{PAlg}$ é adjunto a $F_n : \mathbf{PAlg} \rightarrow \mathbf{PAlg}^n$ à direita. De fato, seja*

$$\eta : \text{Id}_{\mathbf{PAlg}} \rightarrow \mathcal{I}_n F_n$$

a transformação natural cuja componente em $A \in \mathbf{PAlg}$ é dada pela projeção canônica $\pi_A : A \rightarrow \frac{A}{J(A)}$ e seja

$$\varepsilon : F_n \mathcal{I}_n \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{PAlg}^n}$$

a transformação natural cuja componente em $B \in \mathbf{PAlg}^n$ é dada pela identidade id_B .

Para cada $A \in \mathbf{PAlg}$, tem-se

$$\begin{aligned} (\varepsilon F_n \circ F_n \eta)_A &= \varepsilon_{F_n A} \circ F_n \eta_A \\ &= \text{id}_{A/J^n(A)} \circ F_n \pi_A \\ &= \text{id}_{A/J^n(A)} \circ \text{id}_{A/J^n(A)} \\ &= \text{id}_{A/J^n(A)}. \end{aligned}$$

De modo análogo, para $B \in \mathbf{PAlg}^n$,

$$\begin{aligned} (\mathcal{I}_n \varepsilon \circ \eta \mathcal{I}_n)_B &= \varepsilon_B \circ \eta_B \\ &= \text{id}_B \circ \text{id}_B \\ &= \text{id}_B. \end{aligned}$$

Logo as transformações η e ε satisfazem as equações da counidade-unidade. A naturalidade de ambas é imediata.

Resta verificar se F_n tem adjunto à esquerda. Sabemos, pela teoria de Representações, veja, por exemplo, (AWODEY, 2006), que cada funtor com adjunto à esquerda preserva limites pequenos. Um exemplo de limites pequenos são equalizadores. Supondo que exista um adjunto a F_n à esquerda, então, teríamos que F_n preserva limites pequenos, em particular, equalizadores. Mas este não é o caso. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 4.1.3. *Sejam*

$$\begin{array}{ccc} \varphi : k[[X]] & \rightarrow & k[[X]] \\ X & \mapsto & X + X^n \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \text{id} : k[[X]] & \rightarrow & k[[X]] \\ X & \mapsto & X, \end{array}$$

dois homomorfismos de álgebras pseudocompactas. É fácil se convencer que o equalizador dos homomorfismos φ e id é a inclusão $k \hookrightarrow k[[X]]$. Por outro lado, a imagem dos homomorfismos de álgebras φ e id por F_n coincidem, portanto, o equalizador de $F_n\varphi$ e $F_n\text{id}$ é a identidade $\text{id} : k[[X]]/\langle X^n \rangle \rightarrow k[[X]]/\langle X^n \rangle$. Este exemplo prova que não existe adjunto a F_n à esquerda para cada inteiro positivo n .

A discussão acima sugere que estamos pegando uma classe muito grande de morfismos em \mathbf{PAlg} . Na próxima seção, trabalharemos com um “quociente esperto” de \mathbf{PAlg} de modo que não tenhamos morfismos excedentes.

4.2 A relação de congruência em \mathbf{PAlg}

Sugerimos ao leitor a referência (LANE, 1971, Chapter 2, §8) para maiores detalhes sobre Categorias Quocientes.

Dadas duas categorias quaisquer \mathcal{C} e \mathcal{D} e um functor $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ entre elas, para cada par de objetos X, Y de \mathcal{C} , é possível definir uma relação de equivalência $\sim_{F, X, Y}$ no conjunto $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y)$ dada por:

$$\varphi \sim_{F, X, Y} \psi \iff F\varphi = F\psi.$$

Indicaremos pelo símbolo \sim_F a relação de congruência dada por $\sim_{F, X, Y}$ em cada par de objetos X, Y de \mathcal{C} . A relação de congruência \sim_F é chamada de **relação de congruência induzida por F** .

Seja \mathcal{C}_F a categoria quociente de \mathcal{C} por \sim_F , isto é, a categoria com os mesmos objetos de \mathcal{C} e cujos morfismos são as classes de equivalência em \mathcal{C} . Isto é,

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}_F}(X, Y) = \text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) / \sim_{F, X, Y}.$$

Denotaremos por $[\varphi]_F$ a classe do morfismo φ .

Existe um functor quociente natural $\Pi_F : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}_F$ que associa a cada morfismo sua respectiva classe. Além disso, o functor F se fatora pelo functor quociente Π_F de maneira única:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ \Pi_F \downarrow & \nearrow \bar{F} & \\ \mathcal{C}_F & & \end{array}$$

A construção pode ser entendida como o “primeiro Teorema do isomorfismo” para categorias.

Voltando ao functor $F_n : \mathbf{PAlg} \rightarrow \mathbf{PAlg}^n$. Denotaremos por \sim_n a relação de congruência induzida por F_n . A classe de cada morfismos φ será indicada por $[\varphi]_n$. Pela definição de \sim_n , dados dois morfismos $\psi, \varphi : A \rightarrow B$, $[\varphi]_n = [\psi]_n$ se, e somente se, $\varphi_n = \psi_n$.

Podemos dar uma caracterização da relação de congruência \sim_n em termos dos elementos de A :

Lema 4.2.1. *Sejam $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ dois morfismos em \mathbf{PAlg} . Então $\varphi \sim_n \psi$ se, e somente se, $(\varphi - \psi)(a) \in J^n(B)$ para cada $a \in A$.*

Demonstração. Dados dois homomorfismos de álgebras contínuos $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ tais que $\varphi \sim_n \psi$, então $\varphi_n = \psi_n$. Logo, para cada $a \in A$, $\overline{\varphi(a)} = \overline{\psi(a)}$. Isto é, a diferença de φ por ψ em cada elemento de A é um elemento de $J^n(B)$. \square

Escreveremos

$$(\varphi - \psi)(A) \subseteq J^n(B)$$

para indicar que $(\varphi - \psi)(a) \in J^n(B)$ para cada $a \in A$.

Observação 4.2.2. *Se n, m são inteiros positivos com $n > m$, então a relação de congruência \sim_n é mais fina do que a relação \sim_m . Basta observarmos que, para cada par de morfismos $\psi, \varphi : A \rightarrow B$,*

$$(\varphi - \psi)(A) \subseteq J^n(B) \subseteq J^m(B).$$

A categoria quociente de \mathbf{PAlg} por \sim_n é denotada por \mathbf{PAlg}_n . Não tendo perigo de confusão, o único funtor $\mathbf{PAlg}_n \rightarrow \mathbf{PAlg}^n$ induzido pelo funtor quociente $\Pi_n \mathbf{PAlg} \rightarrow \mathbf{PAlg}^n$ também será indicado por F_n . Isto é,

$$\begin{aligned} F_n : \mathbf{PAlg}_n &\rightarrow \mathbf{PAlg}^n \\ A &\mapsto \frac{A}{J^n(A)} \\ [\varphi]_n &\mapsto \varphi_n. \end{aligned}$$

Como estamos interessados no estudo de adjunções, de agora em diante, trabalharemos com os funtores $F_n : \mathbf{PAlg}_n \rightarrow \mathbf{PAlg}^n$ induzidos pelos respectivos funtores quocientes Π_n .

Exemplo 4.2.3. *Voltando ao Exemplo 4.1.3, temos $(\varphi - \text{id})(k[[X]]) \subseteq J^n(k[[X]])$, logo $\varphi \sim_n \text{id}$. Portanto o equalizador de $[\varphi]_n$ e $[\text{id}]_n$ é a identidade $[\text{id}]_n : k[[X]] \rightarrow k[[X]]$. Assim, a imagem do equalizador de $[\text{id}]_n$ e $[\varphi]_n$ por F_n é exatamente o equalizador de $F_n \text{id}$ e $F_n \varphi$.*

Observação 4.2.4. *Seja B álgebra pseudocompacta com $J^n(B) = 0$. Então*

$$\text{Hom}_{\mathbf{PAlg}_n}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbf{PAlg}}(A, B)$$

para toda álgebra pseudocompacta A .

Lema 4.2.5. *Seja $\varphi : A \rightarrow B$ um morfismo em \mathbf{PAlg} . Se $\varphi_n : A/J^n(A) \rightarrow B/J^n(B)$ é um monomorfismo em \mathbf{PAlg}^n então $[\varphi]_n$ é um monomorfismo em \mathbf{PAlg}_n .*

Demonstração. Dados dois morfismos $[\psi]_n, [\delta]_n : A' \rightarrow A$ tais que $[\varphi\psi]_n = [\varphi\delta]_n$, então $\varphi_n\psi_n = \varphi_n\delta_n$. Como φ_n é um monomorfismo, segue-se que $\psi_n = \delta_n$, logo $[\psi]_n = [\delta]_n$. \square

Lema 4.2.6. *Seja $\varphi : A \rightarrow B$ um morfismo em \mathbf{PAlg} . Se $\varphi_n : A/J^n(A) \rightarrow B/J^n(B)$ é um epimorfismo em \mathbf{PAlg}^n , então $[\varphi]_n$ é um epimorfismo em \mathbf{PAlg}_n .*

Demonstração. Dados dois morfismos $[\psi]_n, [\delta]_n : B \rightarrow A'$ tais que $[\psi\varphi]_n = [\delta\varphi]_n$, então $\psi_n\varphi_n = \delta_n\varphi_n$. Como φ_n é um epimorfismo, segue-se que $\psi_n = \delta_n$, logo $[\psi]_n = [\delta]_n$. \square

Lema 4.2.7. *Se $\varphi : A \rightarrow B$ é um homomorfismo de álgebras sobrejetivo em \mathbf{PAlg} , então $[\varphi]_n$ é um epimorfismo.*

Demonstração. É uma consequência direta do Lema 4.2.6 porque φ_n é um homomorfismo de álgebra sobrejetivo sempre que φ é um homomorfismo sobrejetivo. \square

Observação 4.2.8. *De maneira análoga à Observação 4.1.2 se vê que $\Pi_n\mathcal{I}_n : \mathbf{PAlg}^n \rightarrow \mathbf{PAlg}_n$ é adjunto a $F_n : \mathbf{PAlg}_n \rightarrow \mathbf{PAlg}^n$ à direita.*

Proposição 4.2.9. *O funtor $\Pi_1\mathcal{I}_1 : \mathbf{PAlg}^1 \rightarrow \mathbf{PAlg}_1$ é adjunto a $F_1 : \mathbf{PAlg}_1 \rightarrow \mathbf{PAlg}^1$ à esquerda.*

Demonstração. Defina, para cada objeto A em \mathbf{PAlg}_1 ,

$$\varepsilon : \Pi_1\mathcal{I}_1 \circ F_1 \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{PAlg}_1}$$

pondo $\varepsilon_A = [s_A] : A/J(A) \rightarrow A$, onde $s_A : A/J(A) \rightarrow A$ é um levantamento da projeção $\pi_A : A \rightarrow A/J(A)$. A transformação ε é bem-definida. Com efeito, dado um outro levantamento s'_A da projeção π_A , como $\pi_A s_A = \text{id}_{A/J(A)} = \pi_A s'_A$, segue-se que

$$(s_A - s'_A)(A/J(A)) \subseteq J(A),$$

logo $[s_A]_1 = [s'_A]_1$.

Vejamos que ε é uma transformação natural. Dado um morfismo $[\varphi]_1 : A \rightarrow B$, provaremos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \frac{A}{J(A)} & \xrightarrow{[\varphi]_1} & \frac{B}{J(B)} \\ [s_A]_1 \downarrow & & \downarrow [s_B]_1 \\ A & \xrightarrow{[\varphi]_1} & B \end{array}$$

comuta. Segue-se de $\varphi_1\pi_A = \pi_B\varphi$ que

$$\begin{aligned} \pi_B s_B \varphi_1 &= \varphi_1 \\ &= \varphi_1 \pi_A s_A \\ &= \pi_B \varphi s_A, \end{aligned}$$

logo $[\varphi s_A]_1 = [s_B \varphi_1]_1$. Portanto ε é uma transformação natural.

Defina, para cada Σ em \mathbf{PAlg}^1 ,

$$\eta : \text{Id}_{\mathbf{PAlg}^1} \rightarrow F_1 \circ \Pi_1 \mathcal{I}_1$$

pondo $\eta_\Sigma = \text{id}_\Sigma$. É imediato que η é uma transformação natural.

Confirmaremos que η e ε satisfazem as equações da counidade-unidade. Para cada $\Sigma \in \mathbf{PAlg}^1$, a identidade é o único levantamento da projeção $\pi : \Sigma \rightarrow \Sigma$, portanto, $\varepsilon_\Sigma = [\text{id}_\Sigma]_1$. Logo

$$\begin{aligned} (\varepsilon \Pi_1 \mathcal{I}_1 \circ \Pi_1 \mathcal{I}_1 \eta)_\Sigma &= \varepsilon_\Sigma \circ \Pi_1 \mathcal{I}_1 \eta_\Sigma \\ &= [\text{id}_\Sigma]_1 \circ \Pi_1 \mathcal{I}_1 1_\Sigma \\ &= [\text{id}_\Sigma]_1 [\text{id}_\Sigma]_1 \\ &= [\text{id}_\Sigma]_1. \end{aligned}$$

Para cada $A \in \mathbf{PAlg}_1$, tem-se $F_1[s_A]_1 = \text{id}_{A/J(A)}$. Logo

$$\begin{aligned} (F_1 \varepsilon \circ \eta F_1)_A &= F_1[s_A]_1 \circ \eta_{F_1 A} \\ &= \text{id}_{A/J(A)} \text{id}_{A/J(A)} \\ &= \text{id}_{A/J(A)}. \end{aligned}$$

Isto é, $\Pi_1 \mathcal{I}_1$ é adjunto a F_1 à esquerda. □

Observação 4.2.10. *Se $n \geq 2$ então $\Pi_n \mathcal{I}_n$ não é adjunto a F_n à esquerda. Com efeito, se $\Pi_n \mathcal{I}_n$ fosse adjunto a F_n à esquerda, teríamos, para cada par de objetos $A \in \mathbf{PAlg}_1$ e $\Sigma \in \mathbf{PAlg}^1$, uma bijeção natural entre*

$$\text{Hom}_{\mathbf{PAlg}_n}(\Sigma, A) \cong \text{Hom}_{\mathbf{PAlg}^n}(\Sigma, A/J^n(A)).$$

Porém isto não é verdade quando tomamos $A = k[[X]]$ e $\Sigma = k[[X]]/\langle X^n \rangle$. De fato, é fácil ver que $\varphi : k[[X]]/\langle X^n \rangle \rightarrow k[[X]]$ definido por $\varphi(\bar{X}) = 0$ é o único homomorfismo entre Σ e A , portanto, $\text{Hom}_{\mathbf{PAlg}_n}(\Sigma, A)$ é um conjunto finito com um único elemento. Por outro lado, $\text{Hom}_{\mathbf{PAlg}^n}(\Sigma, A/J^n(A))$ é o conjunto formado por todos os homomorfismos $\varphi : k[[X]]/\langle X^n \rangle \rightarrow k[[X]]/\langle X^n \rangle$ da forma

$$\varphi : \bar{X} \mapsto \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i \bar{X}^i,$$

onde cada $\lambda_i \in k$. Logo $\text{Hom}_{\mathbf{PAlg}^n}(\Sigma, A/J^n(A))$ é um conjunto infinito.

A boa notícia é que a relação de congruência nos permitiu encontrar o adjunto no caso $n = 1$. É natural pensar que, quando $n > 1$, a estrutura do funtor adjunto, caso exista, seja “mais complexa” do que a estrutura do funtor $\Pi_n \mathcal{I}_n$. Nas próximas seções, concentraremos nossos interesses nos respectivos adjuntos à esquerda de cada um dos funtores F_n . Para isto, estudaremos casos isolados.

4.3 A adjunção para o caso n igual a 2

Um caso que merece atenção especial é o caso $n = 2$. Isto é, o funtor

$$\begin{aligned} F_2 : \mathbf{PAlg}_2 &\rightarrow \mathbf{PAlg}^2 \\ A &\mapsto \frac{A}{J^2(A)} \\ [\varphi]_2 &\mapsto \varphi_2. \end{aligned}$$

Lembremos que dois homomorfismos de álgebras $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ são iguais módulo \sim_2 se, e somente se, $(\varphi - \psi)(A) \subseteq J^2(B)$.

Exemplo 4.3.1. *Seja kQ a álgebra de caminhos dada pela aljava $Q : 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$. Os homomorfismos de álgebras $\varphi, \psi : kQ \rightarrow kQ$ definidos por*

$$\varphi : e_1 \mapsto e_1 - \alpha, e_2 \mapsto e_2 + \alpha, e_3 \mapsto e_3, \alpha \mapsto \alpha \text{ e } \beta \mapsto \beta + \alpha\beta$$

e

$$\psi : e_1 \mapsto e_1 - \alpha + \alpha\beta, e_2 \mapsto e_2 + \alpha, e_3 \mapsto e_3 - \alpha\beta, \alpha \mapsto \alpha \text{ e } \beta \mapsto \beta + \alpha\beta$$

respectivamente são iguais módulo \sim_2 . Além disso, a imagem da classe $[\varphi]_2$ pelo funtor F_2 é o homomorfismo de álgebras $\varphi_2 : kQ/J^2(kQ) \rightarrow kQ/J^2(kQ)$ definido por

$$\varphi_2 : \bar{e}_1 \mapsto \bar{e}_1 - \bar{\alpha}, \bar{e}_2 \mapsto \bar{e}_2 + \bar{\alpha}, \bar{e}_3 \mapsto \bar{e}_3, \bar{\alpha} \mapsto \bar{\alpha} \text{ e } \bar{\beta} \mapsto \bar{\beta}.$$

A construção da aljava ordinária de uma álgebra A é extremamente importante na teoria de representações. Os vértices da aljava ordinária estão em correspondência biunívoca com o número de elementos de um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A e as flechas entre dois vértices i e j estão em correspondência com a dimensão do k -espaço vetorial $e_i J(A)/J^2(A)e_j$, onde e_i, e_j são idempotentes primitivos de A . Isto é, todas as informações necessárias para a construção da aljava ordinária de uma álgebra A estão necessariamente contidas em $A/J^2(A)$. Então podemos interpretar a imagem dos objetos pelo funtor F_2 como um “banco de dados” de aljavas ordinárias.

Então é intuitivo pensar que o adjunto à esquerda do funtor F_2 associe à álgebra Σ com $J^2(\Sigma) = 0$ sua respectiva álgebra tensorial completa

$$T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right].$$

Em 2020, os autores Iusenko, MacQuarrie e Quirino encontraram um par de adjunção similar ao que estamos procurando ([IUSENKO; MACQUARRIE; QUIRINO, 2020](#)):

Seja $\mathbf{ParPAlg}$ a categoria definida do seguinte modo:

- (i) os objetos são pares (Σ, U) , onde Σ é uma álgebra pseudocompacta semissimples e U é um Σ -bimódulo pseudocompacto;

- (ii) os morfismos são pares $(\varphi, \gamma) : (\Sigma_1, U_1) \rightarrow (\Sigma_2, U_2)$, onde φ é um homomorfismo de álgebras contínuo e γ é um homomorfismo de Σ_1 -bimódulos com U_2 sendo tratado como Σ_1 -bimódulo via φ .

Através de uma relação de congruência \sim_0 nos morfismos de **PAIg** definida por

$$\varphi \sim_0 \psi \iff (\varphi - \psi)(A) \subseteq J(B) \text{ e } (\varphi - \psi)(J(A)) \subseteq J^2(B),$$

os autores provam que o funtor

$$\begin{aligned} k[[-]] : \mathbf{ParAlg} &\rightarrow \mathbf{PAIg}_{\sim_0} \\ (\Sigma, U) &\mapsto T[[\Sigma, U]] \\ (\varphi, \gamma) &\mapsto [\psi]_0, \end{aligned}$$

onde ψ é o homomorfismo induzido pelo par (φ, γ) através da propriedade universal da álgebra tensorial, é adjunto a

$$\begin{aligned} F : \mathbf{PAIg}_{\sim_0} &\rightarrow \mathbf{ParAlg} \\ A &\mapsto \left(\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)} \right) \\ [\varphi]_0 &\mapsto (\varphi_1, \varphi_2) \end{aligned}$$

à esquerda.

O funtor F definido pelos autores carrega as informações das aljavas ordinárias da álgebra A : os vértices correspondem a $A/J(A)$; e as flechas, a $J(A)/J^2(A)$. E o adjunto à esquerda é exatamente o funtor associando ao par (Σ, U) a álgebra tensorial completa $T[[\Sigma, U]]$.

Não é difícil se convencer de que a relação \sim_2 é mais fina do que \sim_0 . Basta observar que se dois morfismos $\varphi, \psi : A \rightarrow B$ são iguais módulo \sim_2 então

$$(\varphi - \psi)(A) \subseteq J^2(A) \subseteq J(A) \quad \text{e} \quad (\varphi - \psi)(J(A)) \subseteq J^2(B),$$

isto é, $\varphi \sim_0 \psi$. Ou seja, \sim_2 é uma relação “colando menos morfismos”. Veja os exemplos abaixo:

Exemplo 4.3.2. *Seja kQ a álgebra de caminhos da aljava $Q : 1 \xleftarrow{\alpha} 2$. Considere $\varphi : kQ \rightarrow kQ$ o homomorfismo definido por*

$$\varphi(e_1) = e_1 + 15\alpha \quad \varphi(e_2) = e_2 - 15\alpha \quad \varphi(\alpha) = \alpha.$$

Então $\varphi \sim_0 \text{id}$ porém $\varphi \not\sim_2 \text{id}$ pois $(\varphi - \text{id})(e_1) = 15\alpha \notin J^2(kQ)$.

Exemplo 4.3.3. *Para quaisquer dois levantamentos $s, s' : A/J(A) \rightarrow A$ da projeção $\pi_A : A \rightarrow A/J(A)$, tem-se $(s - s')(A/J(A)) \subseteq J(A)$. Portanto $s \sim_0 s'$. Mas o mesmo não ocorre com a relação de congruência \sim_2 :*

Seja Q a aljava do Exemplo 4.3.2 e sejam $s, s' : kQ/J(kQ) \rightarrow kQ$ dois levantamentos da projeção $\pi : kQ \rightarrow kQ/J(kQ)$ definidos por

$$s : \bar{e}_1 \mapsto e_1 + 15\alpha \quad \bar{e}_2 \mapsto e_2 - 15\alpha$$

e

$$s' : \bar{e}_1 \mapsto e_1 + 3\alpha \quad \bar{e}_2 \mapsto e_2 - 3\alpha$$

respectivamente. Temos

$$(s - s')(\bar{e}_1) = 12\alpha \notin J^2(kQ),$$

logo $s \approx_2 s'$.

Se provarmos que o adjunto à esquerda do funtor F_2 associa a cada objeto de \mathbf{PAlg}^2 a respectiva álgebra tensorial completa, encontraremos um par de adjunção preservando o mesmo sentido do par encontrado em (IUSENKO; MACQUARRIE; QUIRINO, 2020), porém com uma relação de congruência estritamente mais fina do que a utilizada pelos autores. O Teorema do Levantamento provado no capítulo anterior será fundamental na construção do adjunto à esquerda de F_2 .

4.3.1 O funtor álgebra tensorial completa

Nesta seção, construiremos o adjunto a F_2 à esquerda. Para isso, será necessário deslocar o problema para categorias com mais estruturas.

Para cada objeto Σ de \mathbf{PAlg}^2 , defina

$$T[[\Sigma]] = T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)]].$$

Observe que $J^2(\Sigma) = 0$, por isso escrevemos simplesmente $J(\Sigma)$ em vez de $J(\Sigma)/J^2(\Sigma)$.

Para cada homomorfismo de álgebras contínuo $\varphi : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ em \mathbf{PAlg}^2 , definiremos um morfismo

$$T[[\varphi]] : T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, J(\Sigma_1)]] \longrightarrow T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, J(\Sigma_2)]] .$$

em \mathbf{PAlg}_2 .

Um modo seria transferir a construção dada pelos autores Iusenko, MacQuarrie e Quirino para o nosso caso. O grande problema aqui é que os levantamentos de uma projeção $\pi : A \rightarrow A/J(A)$ não estão necessariamente na mesma classe como acontece no caso dos autores. Deslocaremos o problema para um ambiente onde é possível manipular os levantamentos.

Definição 4.3.4. A categoria \mathbf{PASp} é a categoria cujos objetos são triplas (A, s_A, t_A) , onde A é uma álgebra em \mathbf{PAlg} e (s_A, t_A) é um par de levantamentos, e cujos morfismos entre dois objetos (A, s_A, t_A) e (B, s_B, t_B) são todos os homomorfismos de álgebras contínuos $\varphi : A \rightarrow B$.

Uma vantagem de se trabalhar com a categoria acima é o acesso à estrutura interna das álgebras através dos pares de levantamentos (s, t) . Além disso, para cada par de objetos $(A, s_A, t_A), (B, s_B, t_B) \in \mathbf{PASp}$,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PASp}}((A, s_A, t_A), (B, s_B, t_B)) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{PAlg}}(A, B).$$

Observação 4.3.5. *Lembre-se que s_A é um levantamento da projeção $\pi_A : A \rightarrow A/J(A)$ e t_A é um levantamento da projeção $\pi_A : J(A) \rightarrow J(A)/J^2(A)$, onde $J(A)$ é tratado como $A/J(A)$ -bimódulo através de s_A .*

Definição 4.3.6. *A subcategoria plena de \mathbf{PASp} cujos objetos são triplas (A, s, t) tais que $A \in \mathbf{PAlg}^2$ será denotada por \mathbf{PASp}^2 .*

Observação 4.3.7. *O levantamento t da tripla $(\Sigma, s, t) \in \mathbf{PASp}^2$ é sempre o homomorfismo identidade id_Σ .*

Dados dois morfismos $\varphi, \psi : (A, s_A, t_A) \rightarrow (B, s_B, t_B) \in \mathbf{PASp}$, diremos que $\varphi \sim_{2,sp} \psi$ se, e somente se,

$$(\varphi - \psi)(A) \subseteq J^2(B).$$

A relação de congruência $\psi_{2,sp}$ nos morfismos de \mathbf{PASp} expressa o mesmo sentido da relação \sim_2 nos morfismos de \mathbf{PAlg} , por essa razão indicaremos $\sim_{2,sp}$ simplesmente por \sim_2 .

Definição 4.3.8. *A categoria \mathbf{PASp}_2 é o quociente da categoria \mathbf{PASp} por \sim_2 .*

Sejam

$$\begin{array}{ccc} U_2 : \mathbf{PASp}_2 & \rightarrow & \mathbf{PAlg}_2 \\ (A, s_A, t_A) & \mapsto & A \quad \text{e} \\ [\varphi]_2 & \mapsto & [\varphi]_2 \end{array} \quad \begin{array}{ccc} U^2 : \mathbf{PASp}^2 & \rightarrow & \mathbf{PAlg}^2 \\ (\Sigma, s_\Sigma, t_\Sigma) & \mapsto & \Sigma \\ \psi & \mapsto & \psi \end{array}$$

os funtores esquecimentos de \mathbf{PAlg}_2 e \mathbf{PAlg}^2 respectivamente.

Observemos que pelo modo como foi definido as categorias \mathbf{PASp}_2 e \mathbf{PASp}^2 , os funtores U_2 e U^2 nascem plenos, fiéis e densos. Logo as categorias \mathbf{PASp}_2 e \mathbf{PASp}^2 são equivalentes a \mathbf{PAlg}_2 e \mathbf{PAlg}^2 respectivamente.

Seja $H_2 : \mathbf{PAlg}_2 \rightarrow \mathbf{PASp}_2$ um functor quase-inverso de U_2 , isto é, $H_2 U_2 \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{PASp}_2}$ e $U_2 H_2 \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{PAlg}_2}$ e seja $H^2 : \mathbf{PAlg}^2 \rightarrow \mathbf{PASp}^2$ um functor quase-inverso de U^2 , isto é, $H^2 U^2 \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{PASp}^2}$ e $U^2 H^2 \cong \mathrm{Id}_{\mathbf{PAlg}^2}$. Então o functor

$$\begin{array}{ccc} F'_2 : \mathbf{PASp}_2 & \rightarrow & \mathbf{PASp}^2 \\ (A, s_A, t_A) & \mapsto & \left(\frac{A}{J^2(A)}, \pi_2 s_A, \pi_2 t_A \right) \\ [\varphi]_2 & \mapsto & \varphi_2, \end{array}$$

onde $\pi_2 : A \rightarrow A/J^2(A)$ é a projeção canônica, é tal que

$$F_2 = U^2 \circ F'_2 \circ H_2.$$

Definição 4.3.9. Para cada $(\Sigma, s, t) \in \mathbf{PASp}^2$ e $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbf{PASp}^2}((\Sigma_1, s_1, t_1), (\Sigma_2, s_2, t_2))$, defina:

1. $T^{sp}[(\Sigma, s, t)] := (T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}], J(\Sigma)), s_Q, t_Q)$, onde (s_Q, t_Q) é o par de levantamentos canônico; (veja o Exemplo 3.3.3)
2. $T^{sp}[[\varphi]] := [\psi]_2$, onde $\psi : T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}], J(\Sigma_1)] \rightarrow T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}], J(\Sigma_2)]$ é um homomorfismo de álgebras construído seguindo os passos da prova da Proposição 3.3.5.

Observação 4.3.10. A construção do homomorfismo ψ da Proposição 3.3.5 depende de escolhas, logo $T^{sp}[[\varphi]]$ correria o perigo de não ser bem-definido, porém qualquer outro homomorfismo ψ' construído seguindo os mesmos passos da Proposição 3.3.5 é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}], J(\Sigma_1)] & \xrightarrow{\psi'} & T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}], J(\Sigma_2)] \\ \varphi_1 \downarrow & & \downarrow \varphi_2 \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2 \end{array}$$

comuta, onde φ_1 e φ_2 são os homomorfismos de apresentação induzidos pelos pares de levantamentos (s_1, t_1) e (s_2, t_2) respectivamente. Logo

$$\text{Im}(\psi - \psi') \subseteq \ker \varphi_2 \subseteq J^2(T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}], J(\Sigma_2)]).$$

Isto mostra que $[\psi]_2 = [\psi']_2$.

Proposição 4.3.11. $T^{sp}[-] : \mathbf{PASp}^2 \rightarrow \mathbf{PASp}_2$ é um funtor.

Demonstração. Dados dois morfismos $\varphi : (\Sigma_1, s_1, t_1) \rightarrow (\Sigma_2, s_2, t_2)$ e $\delta : (\Sigma_2, s_2, t_2) \rightarrow (\Sigma_3, s_3, t_3)$, então, pela Proposição 3.3.5, existem

$$\psi : T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}], J(\Sigma_1)] \rightarrow T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}], J(\Sigma_2)] \quad \text{e} \quad \gamma : T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}], J(\Sigma_2)] \rightarrow T[[\frac{\Sigma_3}{J(\Sigma_3)}], J(\Sigma_3)]$$

tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}], J(\Sigma_1)] & \xrightarrow{\psi} & T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}], J(\Sigma_2)] & \xrightarrow{\gamma} & T[[\frac{\Sigma_3}{J(\Sigma_3)}], J(\Sigma_3)] \\ \varphi_{\Sigma_1} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\Sigma_2} & & \downarrow \varphi_{\Sigma_3} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2 & \xrightarrow{\delta} & \Sigma_3 \end{array}$$

comutam respectivamente. Logo o homomorfismo de álgebras $\gamma\psi$ é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}], J(\Sigma_1)] & \xrightarrow{\gamma\psi} & T[[\frac{\Sigma_3}{J(\Sigma_3)}], J(\Sigma_3)] \\ \varphi_{\Sigma_1} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\Sigma_3} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\delta\varphi} & \Sigma_3 \end{array}$$

comuta. Portanto

$$T^{sp}[[\delta\varphi]] = T^{sp}[[\delta]]T^{sp}[[\varphi]].$$

A igualdade $T^{sp}[[\text{id}]] = [\text{id}]_2$ é uma consequência direta do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right] & \xrightarrow{\text{id}} & T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right] \\ \varphi_\Sigma \downarrow & & \downarrow \varphi_\Sigma \\ \Sigma & \xrightarrow{\text{id}} & \Sigma. \end{array}$$

□

Defina $T[[-]]: \mathbf{PAlg}^2 \rightarrow \mathbf{PAlg}_2$ como sendo a composição

$$U_2 \circ T^{sp}[[-]] \circ H^2.$$

Observação 4.3.12. *Sejam H^2 e G^2 dois funtores quase-inversos de U^2 . Os funtores $U_2 \circ T^{sp}[[-]] \circ H^2$ e $U_2 \circ T^{sp}[[-]] \circ G^2$ não são iguais; são, porém, iguais a menos de um isomorfismo natural.*

Exemplo 4.3.13. *Seja kQ/I a álgebra de caminhos dada por*

$$Q: 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3, \quad \alpha\beta = 0.$$

Considere o homomorfismo de álgebras $\varphi: kQ/I \rightarrow kQ/I$ definido por

$$\bar{e}_1 \mapsto \bar{e}_1 + \bar{\alpha}, \quad \bar{e}_2 \mapsto \bar{e}_2 - \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad \bar{e}_3 \mapsto \bar{e}_3 - \bar{\beta}, \quad \bar{\alpha} \mapsto \bar{\alpha} \text{ e } \bar{\beta} \mapsto \bar{\beta}.$$

Sejam $s, s': kQ/J(kQ) \rightarrow kQ/I$ dois levantamentos da projeção $\pi: kQ/I \rightarrow kQ/J(kQ)$ definidos por

$$s: \bar{e}_1 \mapsto \bar{e}_1, \quad \bar{e}_2 \mapsto \bar{e}_2 \text{ e } \bar{e}_3 \mapsto \bar{e}_3$$

e

$$s': \bar{e}_1 \mapsto \bar{e}_1 - \bar{\alpha}, \quad \bar{e}_2 \mapsto \bar{e}_2 + \bar{\alpha} - \bar{\beta} \text{ e } \bar{e}_3 \mapsto \bar{e}_3 + \bar{\beta}$$

respectivamente. Mostraremos que as imagens dos morfismos $\varphi_1 = \varphi: (kQ, s, \text{id}) \rightarrow (kQ, s, \text{id})$ e $\varphi_2 = \varphi: (kQ, s', \text{id}) \rightarrow (kQ, s', \text{id})$ por $T^{sp}[[-]]$ não coincidem.

Vê-se facilmente que a projeção $\pi: kQ \rightarrow kQ/I$ é o homomorfismo de apresentação induzido pelo par de levantamentos (s, id) . Portanto o homomorfismo $\psi: kQ \rightarrow kQ$ definido por

$$\psi: e_1 \mapsto e_1 + \alpha + \alpha\beta, \quad e_2 \mapsto e_2 - \alpha + \beta - \alpha\beta, \quad e_3 \mapsto e_3 - \beta, \quad \alpha \mapsto \alpha + \alpha\beta, \quad \beta \mapsto \beta - \alpha\beta$$

é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\psi} & kQ \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ kQ/I & \xrightarrow{\varphi} & kQ/I \end{array}$$

comuta. Logo $T^{sp}[[\varphi_1]] = [\psi]_2 : (kQ, s_Q, t_Q) \rightarrow (kQ, s_Q, t_Q)$.

Por outro lado, o homomorfismo $\varphi' : kQ \rightarrow kQ/I$ definido por

$$\varphi' : e_1 \mapsto \bar{e}_1 + \bar{\alpha} \bar{e}_2 \mapsto \bar{e}_2 - \bar{\alpha} + \bar{\beta}, \quad e_3 \mapsto \bar{e}_3 - \bar{\beta}, \quad \alpha \mapsto \bar{\alpha}, \quad \beta \mapsto \bar{\beta}.$$

é o homomorfismo de apresentação induzido pelo par de levantamentos (s', id) . Então o homomorfismo $\psi' : kQ \rightarrow kQ$ definido por

$$\psi : e_1 \mapsto e_1 - \alpha + \alpha\beta, \quad e_2 \mapsto e_2 + \alpha - \beta - \alpha\beta, \quad e_3 \mapsto e_3 + \beta, \quad \alpha \mapsto \alpha + \alpha\beta, \quad \beta \mapsto \beta - \alpha\beta$$

é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\psi'} & kQ \\ \varphi' \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ kQ/I & \xrightarrow{\varphi} & kQ/I \end{array}$$

comuta. Logo $T^{sp}[[\varphi_2]] = [\psi']_2$.

A imagem de e_1 pela diferença $(\psi - \psi')$ é $2\alpha \notin J^2(kQ)$, ou seja, $[\psi]_2 \neq [\psi']_2$. Portanto a definição de $T^{sp}[[\varphi_2]]$ nos morfismos depende das escolhas de levantamentos do domínio e contra-domínio de cada morfismo.

Lema 4.3.14. Se $T^{sp}[[\varphi_2]]$ é adjunto a F'_2 à esquerda, então $T[[\varphi_2]] = U_2 \circ T^{sp}[[\varphi_2]] \circ H^2$ é adjunto a $F_2 = U_2 \circ F'_2 \circ H_2$ à esquerda.

Demonstração. Por hipótese $T^{sp}[[\varphi_2]]$ é adjunto a F'_2 à esquerda, logo, para cada par de objetos $H_2A \in \mathbf{PASp}_2$ e $H^2\Sigma \in \mathbf{PASp}^2$, existe um bijeção natural

$$\Psi_{H_2A, H^2\Sigma} : \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2}(T^{sp}[[H^2\Sigma]], H_2A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PASp}^2}(H^2\Sigma, F'_2H_2A).$$

Além disso, para cada par de objetos $A \in \mathbf{PAlg}$ e $(B, s, t) \in \mathbf{PASp}^2$, a bijeção

$$\Gamma_{A, (B, s, t)} : \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2}(U_2(B, s, t), A) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2}((B, s, t), H_2A)$$

definida por

$$\Gamma_{A, (B, s, t)}[\varphi]_2 = [\varphi]_2$$

é uma componente de uma transformação binatural Γ . Do mesmo modo, a bijeção

$$\Theta_{\Sigma', (\Sigma, s, t)} : \text{Hom}_{\mathbf{PASp}^2}(H^2\Sigma', (\Sigma, s, t)) \longrightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PAlg}^2}(\Sigma', U^2(\Sigma, s, t))$$

definida por

$$\Theta_{\Sigma', (\Sigma, s, t)}\varphi = \varphi$$

é uma componente de uma transformação binatural Θ . Portanto

$$\begin{aligned} \text{Hom}_{\mathbf{PAlg}_2}(T[[\Sigma]], A) &= \text{Hom}_{\mathbf{PAlg}_2}(U_2 T^{sp}[[H^2 \Sigma]], A) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{PASP}_2}(T^{sp}[[H^2 \Sigma]], H_2 A) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{PASP}^2}(H^2(\Sigma), F'_2 H_2 A) \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbf{PAlg}^2}(\Sigma, U^2 F'_2 H^2 A) \\ &= \text{Hom}_{\mathbf{PAlg}^2}(\Sigma, F_2 A). \end{aligned}$$

Isto mostra que $T[[-]]$ é adjunto a F_2 à esquerda. \square

4.3.2 O par de adjunção para o caso n igual a 2

Provaremos que o funtor $T^{sp}[[-]]$ é adjunto a F'_2 à esquerda, logo, pela proposição anterior, teremos a adjunção desejada para o caso $n = 2$.

Definiremos, para cada $(A, s, t) \in \mathbf{PASP}_2$ e $(\Sigma, s', t') \in \mathbf{PASP}^2$, uma bijeção natural

$$\Psi_{(A,s,t),(\Sigma,s',t')} : \text{Hom}_{\mathbf{PASP}_2}(T^{sp}[[\Sigma]], (A, s, t)) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PASP}^2}((\Sigma, s', t'), F'_2(A, s, t)).$$

Dado um morfismo

$$[\varphi]_2 : \left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right], s_Q, t_Q \right] \right) \longrightarrow (A, s, t) \in \mathbf{PASP}_2$$

pela propriedade universal do quociente, podemos definir

$$\Psi_{(A,s,t),(\Sigma,s',t')}([\varphi]_2)$$

como sendo o único homomorfismo de álgebras

$$\psi : \Sigma \rightarrow A/J^2(A)$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right] & \xrightarrow{\pi\varphi} & A/J^2(A) \\ \varphi_\Sigma \downarrow & \nearrow \psi & \\ \Sigma & & \end{array}$$

comuta, onde $\pi : A \rightarrow A/J^2(A)$ e φ_Σ é o morfismo de apresentação induzido pelo par (s', t') .

Lema 4.3.15. *O mapa $\Psi_{(A,s,t),(\Sigma,s',t')}$ é bem-definido.*

Demonstração. Dado um outro representante $\varphi' : T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right] \rightarrow A$ da classe $[\varphi]_2$, então $\pi\varphi = \pi\varphi'$, logo as imagens dos dois representantes pelo mapa $\Psi_{(A,s,t),(\Sigma,s',t')}$ coincidem. \square

Observação 4.3.16. Indicaremos $\Psi_{(A,s,t),(\Sigma,s',t')}$ simplesmente por $\Psi_{A,\Sigma}$ quando não houver perigo de confusão.

Lema 4.3.17. Fixado $(\Sigma, s', t') \in \mathbf{PASp}^2$, o mapa

$$\Psi_{A,\Sigma} : \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2} \left(T^{sp}[[\Sigma, s', t']], (A, s, t) \right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PASp}^2} \left((\Sigma, s', t'), F'_2(A, s, t) \right)$$

é a componente em $(A, s, t) \in \mathbf{PASp}_2$ de uma transformação natural

$$\Psi_{-, \Sigma} : \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2} \left(T^{sp}[[\Sigma, s', t']], - \right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PASp}^2} \left((\Sigma, s', t'), F'_2 - \right).$$

Demonstração. Dado um morfismo $[\gamma]_2 : (A_1, s_1, t_1) \rightarrow (A_2, s_2, t_2)$, provaremos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2} \left(T^{sp}[[\Sigma, s', t']], (A_1, s_1, t_1) \right) & \xrightarrow{\Psi_{A_1, \Sigma}} & \text{Hom}_{\mathbf{PASp}^2} \left((\Sigma, s', t'), F'_2(A_1, s_1, t_1) \right) \\ \downarrow [\gamma] \circ - & & \downarrow \gamma_2 \circ - \\ \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2} \left(T^{sp}[[\Sigma, s', t']], (A_2, s_2, t_2) \right) & \xrightarrow{\Psi_{A_2, \Sigma}} & \text{Hom}_{\mathbf{PASp}^2} \left((\Sigma, s', t'), F'_2(A_2, s_2, t_2) \right) \end{array}$$

comuta.

Fixado um morfismo $[\varphi]_2 : T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)]] \rightarrow A$, dos diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)]] & \xrightarrow{\varphi} & A_1 & \xrightarrow{\gamma} & A_2 & & T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)]] & \xrightarrow{\varphi} & A_1 \\ \varphi_\Sigma \downarrow & & & & \downarrow \pi_2 & & \varphi_\Sigma \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\ \Sigma & \xrightarrow{\Psi_{A_2, \Sigma}([\gamma\varphi]_2)} & \frac{A_2}{J^2(A_2)} & & & & \Sigma & \xrightarrow{\Psi_{A_1, \Sigma}([\varphi]_2)} & \frac{A_1}{J^2(A_1)} \\ & & & & & & & & \\ & & A_1 & \xrightarrow{\gamma} & A_2 & & & & \\ & & \pi_2 \downarrow & & \downarrow \pi_2 & & & & \\ & & \frac{A_1}{J^2(A_1)} & \xrightarrow{\gamma_2} & \frac{A_2}{J^2(A_2)} & & & & \end{array}$$

tem-se

$$\begin{aligned} \Psi_{B, \Sigma}([\gamma\varphi]_2) \circ \varphi_\Sigma &= \pi_2 \circ \gamma \circ \varphi \\ &= \gamma_2 \pi_2 \circ \varphi \\ &= \gamma_2 \circ \Psi_{A, \Sigma}([\varphi]_2) \circ \varphi_\Sigma. \end{aligned}$$

Como φ_Σ é sobrejetivo, segue-se que

$$\left(\Psi_{B, \Sigma} \circ (\gamma \circ -) \right) ([\varphi]_2) = \left((\gamma_2 \circ -) \circ \Psi_{A, \Sigma} \right) ([\varphi]_2).$$

□

Lema 4.3.18. Fixado $A = (A, s, t) \in \mathbf{PASp}_2$, o mapa

$$\Psi_{A, \Sigma} : \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2} \left(T^{sp}[[\Sigma, s', t']], (A, s, t) \right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PASp}^2} \left((\Sigma, s', t'), F'_2(A, s, t) \right)$$

é a componente em $(\Sigma, s', t') \in \mathbf{PASp}^2$ de uma transformação natural

$$\Psi_{-, A} : \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2} \left(T^{sp}[[-]], (A, s, t) \right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{PASp}^2} \left(-, F'_2(A, s, t) \right).$$

Demonstração. Dado um morfismo $\gamma : (\Sigma_1, s'_1, t'_1) \rightarrow (\Sigma_2, s'_2, t'_2)$, provaremos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2} \left(T^{sp}[(\Sigma_2, s'_2, t'_2)], (A, s, t) \right) & \xrightarrow{\Psi_{A, \Sigma_2}} & \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2} \left((\Sigma_2, s'_2, t'_2), F'_2(A, s, t) \right) \\ \downarrow -\circ T^{sp}[[\gamma]] & & \downarrow -\circ \gamma \\ \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2} \left(T^{sp}[(\Sigma_1, s'_1, t'_1)], (A, s, t) \right) & \xrightarrow{\Psi_{A, \Sigma_1}} & \text{Hom}_{\mathbf{PASp}_2} \left((\Sigma_1, s'_1, t'_1), F'_2(A, s, t) \right) \end{array}$$

comuta.

Fixado um morfismo $[\varphi]_2 : T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, J(\Sigma_2)]] \rightarrow A$, seja γ' algum representante da classe $T[[\gamma]]'$. Então dos diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, J(\Sigma_1)]] & \xrightarrow{\gamma'} & T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, J(\Sigma_2)]] & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \varphi_{\Sigma_1} \downarrow & & & & \downarrow \pi_2 \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\Psi_{A, \Sigma_1}([\varphi\gamma']_2)} & & & \frac{A}{J^2(A)} \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, J(\Sigma_1)]] & \xrightarrow{\gamma'} & T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, J(\Sigma_2)]] & \xrightarrow{\varphi} & A \\ \varphi_{\Sigma_1} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\Sigma_2} & & \downarrow \pi_2 \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\gamma} & \Sigma_2 & \xrightarrow{\Psi_{A, \Sigma_2}([\varphi]_2)} & \frac{A}{J^2(A)}, \end{array}$$

conclui-se que

$$\begin{aligned} \Psi_{A, \Sigma_1}([\varphi\gamma']_2) \circ \varphi_{\Sigma_1} &= \pi_2 \circ \varphi \circ \gamma' \\ &= \Psi_{A, \Sigma_2}([\varphi]_2) \circ \varphi_{\Sigma_2} \circ \gamma' \\ &= \Psi_{A, \Sigma_2}([\varphi]_2) \circ \gamma \circ \varphi_{\Sigma_1}. \end{aligned}$$

Como φ_{Σ_1} é sobrejetivo, segue-se que

$$\left(\Psi_{A, \Sigma_1} \circ (-\circ T^{sp}[[\gamma]]) \right) ([\varphi]_2) = \left((-\circ \gamma) \circ \Psi_{A, \Sigma_2} \right) ([\varphi]_2).$$

□

Lema 4.3.19. *O mapa $\Psi_{A, \Sigma}$ é uma bijeção para cada $A = (A, s, t) \in \mathbf{PASp}_2$ e $\Sigma = (\Sigma, s', t') \in \mathbf{PASp}^2$.*

Demonstração. Sejam $[\varphi]_2, [\varphi']_2 : T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)]] \rightarrow A$ dois morfismos distintos em \mathbf{PASp}_2 . As imagens de ambos os mapas pela projeção canônica $\pi : A \rightarrow A/J^2(A)$ não coincidem, portanto, $\Psi_{A, \Sigma}([\varphi']_2) \neq \Psi_{A, \Sigma}([\varphi]_2)$.

Seja $\varphi : \Sigma \rightarrow A/J^2(A)$ um homomorfismo em \mathbf{PASp}^2 . Provaremos que

$$\Psi_{A, \Sigma}([\varphi_A]_2 T^{sp}[[\varphi]]) = \varphi,$$

onde $\varphi_A : T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] \rightarrow A$ é o homomorfismo de apresentação induzido pelo par (s_A, t_A) .

Para qualquer representante ψ da classe $T^{sp}[[\varphi]]$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right] & \xrightarrow{\psi} & T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] \\ \varphi_\Sigma \downarrow & & \downarrow \varphi_{A/J^2(A)} \\ \Sigma & \xrightarrow{\varphi} & \frac{A}{J^2(A)} \end{array}$$

comuta, onde $\varphi_{A/J^2(A)} : T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] \rightarrow A/J^2(A)$ é o homomorfismo de apresentação induzido pelo par $(\pi s_A, 1)$.

Da definição de $\Psi_{A,\Sigma}$ tem-se

$$\Psi_{A,\Sigma}\left([\varphi_A]_2 T[[\varphi]]'\right) \circ \varphi_\Sigma = \pi \varphi_A \psi,$$

onde $\pi : A \rightarrow A/J^2(A)$. Além disso, $\pi \varphi_A = \varphi_{A/J^2(A)}$, portanto,

$$\begin{aligned} \Psi_{A,\Sigma}\left([\varphi_A]_2 T[[\varphi]]'\right) \circ \varphi_\Sigma &= \pi \circ \varphi_A \circ \psi \\ &= \varphi_{A/J^2(A)} \circ \psi \\ &= \varphi \circ \varphi_\Sigma. \end{aligned}$$

Da sobrejetividade do morfismo φ_Σ segue-se que $\Psi_{A,\Sigma}$ é uma bijeção. \square

Como consequência imediata dos lemas anteriores:

Teorema 4.3.20. *O funtor $T^{sp}[[-]] : \mathbf{PASp}^2 \rightarrow \mathbf{PASp}_2$ é adjunto a $F'_2 : \mathbf{PASp}_2 \rightarrow \mathbf{PASp}^2$ à esquerda.*

Pelo Lema 4.3.14 e o teorema anterior temos:

Corolário 4.3.21. *O funtor $T[[-]] : \mathbf{PAlg}^2 \rightarrow \mathbf{PAlg}_2$ é adjunto a $F_2 : \mathbf{PAlg}_2 \rightarrow \mathbf{PAlg}^2$ à esquerda.*

Observação 4.3.22. *Seja $[id]_2 : T^{sp}[[H^2\Sigma]] \rightarrow T^{sp}[[H^2\Sigma]]$. Por definição,*

$$\Psi_{T^{sp}[[H^2\Sigma]], H^2\Sigma}\left([id]_2\right)$$

é o único homomorfismo ψ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right] & \xrightarrow{\pi} & \frac{T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right]}{J^2\left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right]\right)} \\ \varphi_\Sigma \downarrow & \nearrow \psi & \\ \Sigma & & \end{array}$$

comuta, onde φ_Σ é o homomorfismo de apresentação induzido do par (s, id) associada a $H^2\Sigma = (\Sigma, s, \text{id})$. Como o núcleo do homomorfismo π é igual a $\ker\varphi_\Sigma = J^2\left(T\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right)$, segue-se que existe único

$$\varphi_{\Sigma,1} : \frac{T\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]}{J^2\left(T\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right)} \longrightarrow \Sigma$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right] & \xrightarrow{\varphi_\Sigma} & \Sigma \\ \pi \downarrow & \nearrow \varphi_{\Sigma,1} & \\ \frac{T\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]}{J^2\left(T\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right]\right)} & & \end{array}$$

comuta. Logo

$$\Psi_{T[[H^2\Sigma]], H^2\Sigma}[\text{id}]_2 = \varphi_{\Sigma,1}^{-1}.$$

Portanto a unidade $\eta : \text{Id}_{\mathbf{PAlg}^2} \rightarrow F_2T[-]$ na componente Σ é dada por $\varphi_{\Sigma,1}^{-1}$.

Observação 4.3.23. Dado um objeto $A \in \mathbf{PAlg}$, queremos definir a counidade. Pela prova do Lema 4.3.19, sabemos que

$$\Psi_{H_2A, H^2\Sigma}\left([\varphi_A]_2 T^{sp}[[\varphi]]\right) = \varphi,$$

onde cada representante ψ da classe $T^{sp}[[\varphi]]$ é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, J(\Sigma)\right] & \xrightarrow{\psi} & T\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right] \\ \varphi_\Sigma \downarrow & & \downarrow \varphi_{A/J^2(A)} \\ \Sigma & \xrightarrow{\varphi} & \frac{A}{J^2(A)} \end{array}$$

comuta. Então o morfismo $[\varphi_A]_2 \circ T^{sp}[[\text{id}]]$ é tal que

$$\Psi_{H_2A, H^2F_2A}\left([\varphi_A]_2 \circ T^{sp}[[\text{id}]]\right) = \text{id} : H^2F_2A \rightarrow F'_2H_2A.$$

Portanto a counidade $\varepsilon : T[-]F_2 \rightarrow \text{Id}_{\mathbf{PAlg}_2}$ na componente A é dada pelo morfismo $[\varphi_A]_2 \circ T^{sp}[[\text{id}]]$.

Observação 4.3.24. Ressaltamos que o morfismo $T^{sp}[[\text{id}]]$ na observação anterior não é necessariamente a identidade de $T\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]$ em \mathbf{PASp}^2 uma vez que a $\text{id} : H^2F_2A \rightarrow F'_2H_2A$ não é necessariamente a identidade em \mathbf{PASp}^2 visto que os objetos H^2F_2A e F'_2H_2A podem ser distintos. Veja o exemplo abaixo:

Exemplo 4.3.25. Seja kQ a álgebra de caminhos dada pela aljava $Q : 1 \xleftarrow{\alpha} 2 \xleftarrow{\beta} 3$. Suponhamos que a imagem de kQ por H_2 seja (kQ, s, t) , onde (s, t) é um par de levantamentos definido por

$$s : \bar{e}_1 \mapsto e_1 + \alpha, \quad \bar{e}_2 \mapsto e_2 - \alpha \text{ e } \bar{e}_3 \mapsto e_3$$

e

$$t : \bar{\alpha} \mapsto \alpha, \bar{\beta} \mapsto \beta - \alpha\beta.$$

Então $F'_2 H_2 kQ = (kQ/J^2(kQ), \pi s, \text{id})$, onde $\pi : kQ \rightarrow kQ/J^2(kQ)$. Suponhamos também que a imagem de $kQ/J^2(kQ)$ por H^2 seja $(kQ/J^2(kQ), s', \text{id})$, onde $s' : kQ/J(kQ) \rightarrow kQ/J^2(kQ)$ é o levantamento dado por

$$s' : \bar{e}_1 \mapsto \bar{e}_1 - \bar{\alpha}, \bar{e}_2 \mapsto e_2 + \alpha - \bar{\beta} \text{ e } \bar{e}_3 \mapsto e_3 + \bar{\beta}.$$

Definamos o homomorfismo $\psi : kQ \rightarrow kQ$ pondo $\psi(e_1) = e_1 + 2\alpha + 2\alpha\beta$, $\psi(e_2) = e_2 - 2\alpha + \beta - 2\alpha\beta$, $\psi(e_3) = e_3 - \beta$, $\psi(\alpha) = \alpha + \alpha\beta$ e $\psi(\beta) = \beta - 2\alpha\beta$. É fácil verificar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} kQ & \xrightarrow{\psi} & kQ \\ \pi\varphi \downarrow & & \downarrow \varphi' \\ \frac{kQ}{J^2(kQ)} & \xrightarrow{\text{id}} & \frac{kQ}{J^2(kQ)} \end{array}$$

comuta, onde $\pi\varphi$ e φ' são os homomorfismos de apresentação induzidos dos pares $(\pi s, \text{id})$ e (s', id) respectivamente. Logo $T^{sp}[[\text{id}]] = [\psi]_2 \neq [\text{id}]_2$. O mapa de álgebras $\varphi\psi : kQ \rightarrow kQ$ é um representante da classe da counidade na componente kQ .

4.4 Álgebras n -admissíveis e a adjunção para uma subclasse de **PAIg**

Nesta seção, encontraremos subcategorias de **PAIg** e **PAIg** ^{n} de modo que o adjunto a F_n à esquerda será uma adaptação da adjunção $(T[[-]], F_2)$, com as devidas alterações. Por simplicidade, trabalharemos com as categorias cujos pares de levantamentos são destacados. A passagem da adjunção entre as categorias onde os pares de levantamentos são destacados para as categorias onde os pares de levantamentos são omitidos ocorre de modo similar à passagem da adjunção de (T^{sp}, F'_2) para (T, F_2) .

4.4.1 Álgebras n -admissíveis

De agora em diante, o inteiro positivo n sempre será maior do que ou igual a 2.

Definição 4.4.1. Dizemos que uma álgebra pseudocompacta A é n -**admissível** se existir um homomorfismo de apresentação $\varphi_A : T[[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}]] \rightarrow A$ tal que

$$\ker\varphi_A \subseteq J^n\left(T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right]\right).$$

Exemplo 4.4.2. Cada álgebra pseudocompacta $A \in \mathbf{PAIg}$ é 2-admissível.

Exemplo 4.4.3. Álgebras pseudocompactas hereditárias são n -admissíveis para todo inteiro positivo n .

Exemplo 4.4.4. A álgebra pseudocompacta $k[[X]]/\langle X^n \rangle$ é i -admissível para todo i entre 2 e n .

Exemplo 4.4.5. Cada álgebra pseudocompacta n -admissível é também i -admissível para todo i entre 2 e n .

Observação 4.4.6. A definição de n -admissível independe do par de levantamentos, isto é, qualquer par de levantamentos (s, t) de uma álgebra pseudocompacta n -admissível A é tal que

$$\ker \varphi_A \subseteq J^n \left(T \left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)} \right] \right] \right).$$

Veja ([IUSENKO; MACQUARRIE; QUIRINO, 2020](#), Proposition 6.5).

Definição 4.4.7. Denote por $\mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}$ a subcategoria plena de \mathbf{PASp} cujos objetos são triplas (A, s, t) tais que A é n -admissível.

Definição 4.4.8. Denote por $\mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}^n$ a subcategoria plena de $\mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}$ formada por objetos (A, s, t) tais que $J^n(A) = 0$.

Observação 4.4.9. Os objetos de $\mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}^n$ são triplas (Σ, s, t) tais que

$$\Sigma \cong \frac{T \left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)} \right] \right]}{J^n \left(T \left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)} \right] \right) \right)}.$$

Exemplo 4.4.10. Seja A a álgebra dada pela seguinte aljava com relações:

$$1 \xleftarrow{\alpha_1} 2 \xleftarrow{\alpha_2} 3 \xleftarrow{\quad} \dots \xleftarrow{\quad} n-1 \xleftarrow{\alpha_{n-1}} n, \quad \alpha_1 \dots \alpha_{n-1} = 0.$$

Então $A = kQ/J^n(kQ)$ é uma álgebra n -admissível.

Dados dois morfismos $\varphi, \psi : (A, s, t) \rightarrow (B, s', t')$, então $\varphi \sim_n \psi$ se, e somente se, $(\varphi - \psi)(A) \subseteq J^n(B)$. A categoria quociente

$$\mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp} / \sim_n$$

será indicado com a notação $\mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}_n$.

Seja $F'_n : \mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}_n \rightarrow \mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}^n$ o funtor definido por

$$\begin{aligned} F'_n : (A, s, t) &\mapsto \left(\frac{A}{J^n(A)}, \pi s, \pi t \right) \\ [\varphi]_n &\mapsto \varphi_n, \end{aligned}$$

onde $\pi_A : A \rightarrow A/J^n(A)$ é a projeção canônica e $\varphi_n : A/J^n(A) \rightarrow B/J^n(B)$ é o homomorfismo de álgebras definido por $\varphi_n(\bar{a}) = \overline{\varphi(a)}$.

Definição 4.4.11. Para cada $(\Sigma, s, t) \in \mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}^n$ e $\varphi : (\Sigma_1, s_1, t_1) \rightarrow (\Sigma_2, s_2, t_2) \in \mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}^n$,

1. $T^n[[\Sigma, s, t]] := \left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right], s_Q, t_Q \right)$, onde (s_Q, t_Q) é o par de levantamentos canônico;
2. $T^n[[\varphi]] := [\psi]_n$, onde $\psi : T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] \rightarrow T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right]$ é um homomorfismo de álgebras construído seguindo os passos da prova da Proposição 3.3.5.

De modo semelhante à observação 4.3.10, a boa-definição de $T^n[[\varphi]]$ segue-se do fato de que, dados dois morfismos ψ e ψ' construídos seguindo os passos da Proposição 3.3.5,

$$\text{Im}(\psi' - \psi) \subseteq \ker \varphi_{\Sigma_2} = J^n\left(T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right]\right),$$

onde φ_{Σ_2} é o morfismo de representação induzido pelo par (s_2, t_2) . Replicando a prova do Lema 4.3.11, prova-se que $T^n[[-]]$ é um funtor.

Observação 4.4.12. Quando $n = 2$, então $\text{Ad}^2\text{PASp}_2 = \text{PASp}_2$ e $\text{Ad}^2\text{PASp}^2 = \text{PASp}^2$. Temos também $T^2[[-]] = T^{sp}[[-]]$.

4.4.2 A adjunção para o caso n -admissível

Provaremos, para cada inteiro positivo $n \geq 3$, que $T^n[[-]]$ é adjunto a F'_n à esquerda. Maiores detalhes das demonstrações serão omitidas porque são exatamente as mesmas provas da adjunção $(T[[-]], F_2)$, tomando o devido cuidado de trocar n por 2 nas respectivas provas.

Fixados os objetos $(A, s, t) \in \text{Ad}^n\text{PASp}_n$ e $(\Sigma, s', t') \in \text{Ad}^n\text{PASp}^n$, definiremos, para cada morfismo $[\varphi] : T^n[[\Sigma, s', t']] \rightarrow (A, s, t) \in \text{Ad}^n\text{PASp}_n$, um morfismo

$$\Psi_{(A,s,t),(\Sigma,s',t')} : (\Sigma, s', t') \rightarrow F'_n(A, s, t).$$

O núcleo do homomorfismo de apresentação $\varphi_{\Sigma} : T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] \rightarrow \Sigma$ induzido pelo par (s', t') pode ser escrito como

$$\ker \varphi_{\Sigma} = J^n\left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]\right).$$

Logo existe único $\psi : \Sigma \rightarrow A/J^n(A)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] & \xrightarrow{\varphi} & A & \xrightarrow{\pi_n} & \frac{A}{J^n(A)} \\ \varphi_{\Sigma} \downarrow & & & \nearrow \psi & \\ \Sigma & & & & \end{array}$$

comuta. Defina

$$\Psi_{A,\Sigma} : \text{Hom}_{\text{Ad}^n\text{PASp}_n}\left(T^n[[\Sigma, s', t']], (A, s, t)\right) \rightarrow \text{Hom}_{\text{Ad}^n\text{PASp}^n}\left((\Sigma, s', t'), F'_n(A, s, t)\right)$$

pondo

$$\Psi_{A,\Sigma}([\varphi]_n) = \psi.$$

Lema 4.4.13. *O mapa $\Psi_{A,\Sigma}$ é bem-definido.*

Demonstração. Dado um outro representante φ' da classe $[\varphi]_n$, então

$$\pi_n \varphi = \pi_n \varphi'.$$

Portanto,

$$\Psi_{A,\Sigma}([\varphi]_n) = \Psi_{A,\Sigma}([\varphi']_n).$$

□

Lema 4.4.14. *O mapa $\Psi_{-,-}$ é natural em cada componente.*

Demonstração. Adaptando os diagramas das provas dos Lemas 4.3.17 e 4.3.18 para o contexto atual conclui-se a prova. □

Lema 4.4.15. *O mapa $\Psi_{A,\Sigma}$ é uma bijeção.*

Demonstração. A injetividade é imediata. Para provar a sobrejetividade de $\Psi_{(A,s,t),(\Sigma,s',t')}$ basta ver que

$$\Psi_{A,\Sigma}([\varphi_A]_n T^n[[\varphi]]) = \varphi,$$

para todo $\varphi : (\Sigma, s', t') \rightarrow F'_n A$. Isto é feito de modo análogo ao Lema 4.3.19. □

Como consequência direta dos lemas anteriores tem-se o resultado:

Teorema 4.4.16. *O funtor $T^n[[-]] : \mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}^n \rightarrow \mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}_n$ é adjunto a $F'_n : \mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}_n \rightarrow \mathbf{Ad}^n \mathbf{PASp}^n$ à esquerda para cada inteiro positivo $n \geq 3$.*

4.5 Álgebras homogêneas e uma generalização do caso n igual a 3

Nesta seção, estenderemos o par de adjunção $(T^3[[-]], F'_3)$ para uma classe maior de objetos. De modo que, quando restrita aos objetos 3-admissíveis, o novo par de adjunção seja exatamente o par original.

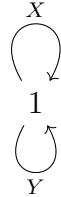
4.5.1 Álgebras homogêneas

Definição 4.5.1. *Dizemos que uma álgebra pseudocompacta A é **graduada** se A pode escrever-se como produto de subespaços fechados $\prod_{i=0}^{\infty} A_i$ de tal modo que $a_i a_j \in A_{i+j}$ sempre que $a_i \in A_i, a_j \in A_j$.*

O subespaço fechado A_n é chamado de **componente homogênea de grau n** ; e cada elemento de A_n é chamado de **elemento homogêneo de grau n** .

Exemplo 4.5.2. A álgebra tensorial completa $T[[\Sigma, U]]$ é uma álgebra pseudocompacta graduada. Σ é a componente homogênea de grau 0; U , a componente homogênea de grau 1; e assim por diante.

Definição 4.5.3. Dizemos que um ideal fechado I de uma álgebra pseudocompacta graduada A é **homogêneo** se existe um conjunto gerador do ideal I formado por elementos homogêneos.

Exemplo 4.5.4. Seja $k[[Q]]$ a álgebra de caminhos da aljava Q : . Se a graduação de $k[[Q]]$ é dada pela graduação do Exemplo 4.5.2, então o ideal

$$I = \langle XY - YX, X^7, Y^9 - X^6Y^3 + X^5Y^4 \rangle$$

é um ideal homogêneo de $k[[Q]]$ gerado por elementos homogêneos de grau 2, 7 e 9.

Definição 4.5.5. Dizemos que uma álgebra pseudocompacta básica A é **homogênea** se existe um homomorfismo de apresentação $\varphi_A : T[[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}]] \rightarrow A$ tal que $\ker \varphi_A$ é um ideal homogêneo.

Exemplo 4.5.6. Seja $k[[Q]]$ a álgebra de caminhos completa do Exemplo 4.5.4. Então

$$\frac{k[[Q]]}{\langle XY - YX, X^7, Y^9 - X^6Y^3 + X^5Y^4 \rangle} \cong \frac{k[[X, Y]]}{\langle X^7, Y^9 - X^6Y^3 + X^5Y^4 \rangle}$$

é homogênea.

Exemplo 4.5.7. Sejam Σ uma álgebra pseudocompacta semissimples e U um Σ -bimódulo pseudocompacto. Então

$$\frac{T[[\Sigma, U]]}{J^n(T[[\Sigma, U]])}$$

é uma álgebra pseudocompacta homogênea para todo inteiro positivo n .

Observação 4.5.8. Cada álgebra pseudocompacta Σ em \mathbf{PAlg}^3 é uma álgebra homogênea. Com efeito, o núcleo de qualquer homomorfismo de apresentação φ_Σ de Σ é tal que

$$J^3\left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]\right) \subseteq \ker \varphi_\Sigma \subseteq J^2\left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]\right).$$

Isto é, o conjunto gerador de $\ker \varphi_\Sigma$ é uma combinação de elementos homogêneos de grau 2 com todos os elementos homogêneos de grau 3.

Seja Σ uma álgebra pseudocompacta com $J^3(\Sigma) = 0$. Dado um par de apresentação (s, t) , defina o seguinte ideal de $T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]$

$$I_\Sigma := \left\langle x \in T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] : x \in \ker \varphi_\Sigma \cap \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)} \hat{\otimes} \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)} \right\rangle,$$

onde

$$\varphi_\Sigma : T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] \longrightarrow \Sigma$$

é o homomorfismo de apresentação induzido pelo par (s, t) .

Observação 4.5.9. *O ideal I_Σ independe da escolha de (s, t) . Basta ver que para qualquer outro homomorfismo de apresentação φ'_Σ induzido de um par de levantamentos (s', t') , tem-se*

$$(\varphi_\Sigma - \varphi'_\Sigma) \left(\frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)} \widehat{\otimes} \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)} \right) \subseteq J^3(\Sigma) = 0.$$

Chamaremos o ideal I_Σ de **ideal quadrático de Σ** .

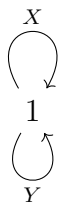
Definição 4.5.10. *Para cada álgebra pseudocompacta Σ com $J^3(\Sigma) = 0$, definimos a **álgebra pseudocompacta quadrática de Σ** como sendo a álgebra pseudocompacta homogênea*

$$Q[[\Sigma]] = \frac{T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]}{I_\Sigma}.$$

Exemplo 4.5.11. *Seja $A = k[[X]]/\langle X^2 \rangle$ então $Q[[A]] = A$. Mais geralmente, se A é o quociente da álgebra tensorial completa $T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right]$ por um ideal homogêneo gerado por elementos de grau 2, então $Q[[A]] = A$.*

Exemplo 4.5.12. *A álgebra pseudocompacta quadrática de $k[[X, Y]]/\langle X^2, XY^2, Y^3 \rangle$ é a álgebra pseudocompacta*

$$Q[[\Sigma]] = \frac{k[[Q]]}{\langle XY - YX, X^2 \rangle} \cong \frac{k[[X, Y]]}{\langle X^2 \rangle},$$

onde $Q :$  .

Exemplo 4.5.13. *Para cada álgebra pseudocompacta 3-admissível Σ ,*

$$\Sigma \cong \frac{T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]}{J^3\left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]\right)}.$$

Logo $I_\Sigma = 0$, portanto,

$$Q[[\Sigma]] = T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]$$

é a álgebra quadrática de Σ .

4.5.2 Morfismos quadráticos

Sejam (Σ_1, s_1, t_1) e (Σ_2, s_2, t_2) dois objetos de \mathbf{PASp}^3 . Dizemos que um morfismo $\varphi : (\Sigma_1, s_1, t_1) \rightarrow (\Sigma_2, s_2, t_2)$ é um morfismo **quadrático** se existe um homomorfismo de álgebras contínuo

$$\psi : T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] \longrightarrow T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right]$$

gozando das seguintes propriedades:

1. o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] & \xrightarrow{\psi} & T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right] \\ \varphi_{\Sigma_1} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\Sigma_2} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2 \end{array}$$

comuta, onde φ_{Σ_i} é o morfismo de representação induzido pelo par (s_i, t_i) , $i = 1, 2$;

2. $\psi(I_{\Sigma_1}) \subseteq I_{\Sigma_2}$, onde I_{Σ_i} é o ideal quadrático de Σ_i , $i = 1, 2$.

Observação 4.5.14. *Dados dois morfismos quadráticos $\varphi_1 : (\Sigma_1, s_1, t_1) \rightarrow (\Sigma_2, s_2, t_2)$ e $\varphi_2 : (\Sigma_2, s_2, t_2) \rightarrow (\Sigma_3, s_3, t_3)$, então existem ψ_1 e ψ_2 associados a φ_1 e φ_2 respectivamente gozando das Propriedades 1 e 2. Portanto a composição $\varphi_2\varphi_1$ é também um morfismo quadrático porque $\psi_2\psi_1$ é um homomorfismo de álgebras contínuo tal que*

1. o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] & \xrightarrow{\psi_1} & T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right] & \xrightarrow{\psi_2} & T\left[\left[\frac{\Sigma_3}{J(\Sigma_3)}, \frac{J(\Sigma_3)}{J^2(\Sigma_3)}\right]\right] \\ \varphi_{\Sigma_1} \downarrow & & \varphi_{\Sigma_2} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\Sigma_3} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\varphi_1} & \Sigma_2 & \xrightarrow{\varphi_2} & \Sigma_3 \end{array}$$

comuta;

2. $\psi_2\psi_1(I_{\Sigma_1}) \subseteq \psi_2(I_{\Sigma_2}) \subseteq I_{\Sigma_3}$.

Observação 4.5.15. *O morfismo identidade $\text{id} : (\Sigma, s, t) \rightarrow (\Sigma, s, t)$ é um morfismo quadrático:*

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] & \xrightarrow{\text{id}} & T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] \\ \varphi_{\Sigma} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\Sigma} \\ \Sigma & \xrightarrow{\text{id}} & \Sigma. \end{array}$$

As observações anteriores asseguram a definição da categoria abaixo:

Definição 4.5.16. *Denotamos por \mathbf{QPASp}^3 a subcategoria de \mathbf{PASp}^3 com os mesmos objetos e cujos morfismos são morfismos quadráticos.*

Exemplo 4.5.17. Seja $(k[[X]]/\langle X^2 \rangle, s : \bar{1} \mapsto \bar{1}, t : \bar{X} \mapsto \bar{X})$ um objeto de \mathbf{PASp}^3 . Cada homomorfismo de álgebras $\varphi : (k[[X]]/\langle X^2 \rangle, s, t) \rightarrow (k[[X]]/\langle X^2 \rangle, s, t)$ tem a forma $\varphi(\bar{X}) = \lambda \bar{X}$, $\lambda \in k$. Portanto, definindo

$$\psi : k[[X]] \longrightarrow k[[X]]$$

pondo $\psi(X) = \lambda X$, tem-se:

1. o diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} k[[X]] & \xrightarrow{\psi} & k[[X]] \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \frac{k[[X]]}{\langle X^2 \rangle} & \xrightarrow{\varphi} & \frac{k[[X]]}{\langle X^2 \rangle}, \end{array}$$

onde a projeção canônica $\pi : k[[X]] \rightarrow k[[X]]/\langle X^2 \rangle$ é o morfismo de representação induzido pelo par (s, t) ;

$$2. \psi\left(\frac{I_{k[[X]]}}{\langle X^2 \rangle}\right) = \psi(\langle X^2 \rangle) = \langle X^2 \rangle = \frac{I_{k[[X]]}}{\langle X^2 \rangle}.$$

Isto mostra que cada morfismo $\varphi : (k[[X]]/\langle X^2 \rangle, s, t) \rightarrow (k[[X]]/\langle X^2 \rangle, s, t)$ é quadrático.

Exemplo 4.5.18. Seja $\varphi : k[[X]]/\langle X^2 \rangle \rightarrow k[[X]]/\langle X^3 \rangle$ um homomorfismo de álgebra. Para quaisquer pares de levantamentos (s, t) e (s', t') de $k[[X]]/\langle X^2 \rangle$ e $k[[X]]/\langle X^3 \rangle$, $\varphi : (k[[X]]/\langle X^2 \rangle, s, t) \rightarrow (k[[X]]/\langle X^3 \rangle, s', t')$ é um homomorfismo quadrático se, e somente se, $\varphi(X) = 0$. Com efeito, cada homomorfismo de álgebras $\varphi : k[[X]]/\langle X^2 \rangle \rightarrow k[[X]]/\langle X^3 \rangle$ tem a forma

$$\bar{X} \mapsto \lambda \bar{X}^2,$$

onde $\lambda \in k$. Seja $\varphi(\bar{X}) \neq 0$ um morfismo quadrático, então, pela Propriedade 2 de morfismo quadrático, existe um homomorfismo de álgebras $\psi : k[[X]] \rightarrow k[[X]]$ mapeando $I_{k[[X]]/\langle X^2 \rangle} = \langle X^2 \rangle$ em $I_{k[[X]]/\langle X^2 \rangle} = 0$. Logo ψ é o homomorfismo definido por $\psi(X) = 0$, mas isto contradiz a Propriedade 1 dos morfismos quadráticos

$$\varphi_{k[[X]]/\langle X^3 \rangle}(X) \neq 0 = \varphi_{k[[X]]/\langle X^2 \rangle}\psi(X),$$

onde $\varphi_{k[[X]]/\langle X^3 \rangle}$ e $\varphi_{k[[X]]/\langle X^2 \rangle}$ são os homomorfismos de apresentações induzidos pelos pares (s, t) e (s', t') .

Observação 4.5.19. Cada morfismo $\varphi : (\Sigma_1, s_1, t_1) \rightarrow (\Sigma_2, s_2, t_2)$ é um morfismo quadrático sempre que Σ_1 é uma álgebra pseudocompacta 3-admissível. Como foi observado no Exemplo 4.5.13, $I_{\Sigma_1} = 0$, logo nossa única preocupação é encontrar um morfismo gozando da Propriedade 1. Isto se dá pela Proposição 3.3.5.

Proposição 4.5.20. *Sejam (s_i, t_i) e (s'_i, t'_i) dois pares de levantamentos da álgebra $\Sigma_i \in \mathbf{QPASp}^3$, $i = 1, 2$. Então existe um isomorfismo entre os morfismos quadráticos partindo de (Σ_1, s_1, t_1) e chegando em (Σ_2, s_2, t_2) e os morfismos quadráticos partindo de (Σ_1, s'_1, t'_1) e chegando em (Σ_2, s'_2, t'_2) . Isto é,*

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{QPASp}^3}\left((\Sigma_1, s_1, t_1), (\Sigma_2, s_2, t_2)\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{QPASp}^3}\left((\Sigma_1, s'_1, t'_1), (\Sigma_2, s'_2, t'_2)\right).$$

Demonstração. Sejam φ_{Σ_i} e φ'_{Σ_i} os homomorfismos de apresentações induzidos dos pares de levantamentos (s_i, t_i) e (s'_i, t'_i) respectivamente com $i = 1, 2$. Como $\ker\varphi_{\Sigma_i} = \ker\varphi'_{\Sigma_i} = I_{\Sigma_i} + J^3\left(T\left[\left[\frac{\Sigma_i}{J(\Sigma_i)}, \frac{J(\Sigma_i)}{J^2(\Sigma_i)}\right]\right]\right)$, então, pela propriedade universal do quociente, existem,

$$\theta_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_i \quad \theta'_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_i$$

tais que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma_i}{J(\Sigma_i)}, \frac{J(\Sigma_i)}{J^2(\Sigma_i)}\right]\right] & \xrightarrow{\varphi'_{\Sigma_i}} & \Sigma_i \\ \varphi_{\Sigma_i} \downarrow & \nearrow \theta_{\Sigma_i} & \\ \Sigma_i & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma_i}{J(\Sigma_i)}, \frac{J(\Sigma_i)}{J^2(\Sigma_i)}\right]\right] & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma_i}} & \Sigma_i \\ \varphi'_{\Sigma_i} \downarrow & \nearrow \theta'_{\Sigma_i} & \\ \Sigma_i & & \end{array}$$

comutam respectivamente para $i = 1, 2$. Defina

$$\Omega : \mathrm{Hom}_{\mathbf{QPASp}^3}\left((\Sigma_1, s_1, t_1), (\Sigma_2, s_2, t_2)\right) \rightarrow \mathrm{Hom}_{\mathbf{QPASp}^3}\left((\Sigma_1, s'_1, t'_1), (\Sigma_2, s'_2, t'_2)\right)$$

pondo

$$\Omega(\varphi) = \theta_{\Sigma_2} \varphi \theta'_{\Sigma_1}.$$

Vejamos, primeiramente, que $\Omega(\varphi) : (\Sigma_1, s'_1, t'_1) \rightarrow (\Sigma_2, s'_2, t'_2)$ é um homomorfismo quadrático sempre que $\varphi : (\Sigma_1, s_1, t_1) \rightarrow (\Sigma_2, s_2, t_2)$ é um morfismo quadrático. Por definição, existe um homomorfismo de álgebras contínuo

$$\psi : T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] \rightarrow T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right]$$

tal que:

1. o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] & \xrightarrow{\psi} & T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right] \\ \varphi_{\Sigma_1} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\Sigma_2} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2 \end{array}$$

comuta;

2. $\psi(I_{\Sigma_1}) \subseteq I_{\Sigma_2}$.

Logo ψ é também um morfismo satisfazendo

$$\begin{aligned}\Omega(\varphi)\varphi'_{\Sigma_1} &= \theta_{\Sigma_2}\varphi\theta'_{\Sigma_1}\varphi'_{\Sigma_1} \\ &= \theta_{\Sigma_2}\varphi\varphi_{\Sigma_1} \\ &= \theta_{\Sigma_2}\varphi_{\Sigma_2}\psi \\ &= \varphi'_{\Sigma_2}\psi.\end{aligned}$$

Assim, $\Omega(\varphi)$ é também um morfismo quadrático.

Defina

$$\Omega^{-1} : \text{Hom}_{\mathbf{QPASp}^3}\left((\Sigma_1, s'_1, t'_1), (\Sigma_2, s'_2, t'_2)\right) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{QPASp}^3}\left((\Sigma_1, s_1, t_1), (\Sigma_2, s_2, t_2)\right)$$

pondo

$$\Omega^{-1}(\varphi) = \theta'_{\Sigma_2}\varphi\theta_{\Sigma_1}.$$

Como θ_{Σ_i} e θ'_{Σ_i} são inversas uma da outra, basta ver que $\theta_{\Sigma_i}\theta'_{\Sigma_i}\varphi'_{\Sigma_i} = \varphi'_{\Sigma_i}$ e $\theta'_{\Sigma_i}\theta_{\Sigma_i}\varphi_{\Sigma_i} = \varphi_{\Sigma_i}$, segue-se que Ω e Ω^{-1} são inversas uma da outra. \square

Seja $H : \mathbf{PAlg}^3 \rightarrow \mathbf{PASp}^3$ um funtor quase-inverso do funtor esquecimento

$$\begin{aligned}U : \mathbf{PASp}^3 &\rightarrow \mathbf{PAlg}^3 \\ (\Sigma, s, t) &\mapsto \Sigma \\ \varphi &\mapsto \varphi.\end{aligned}$$

Defina $\mathbf{Q}_H\mathbf{PAlg}^3$ a subcategoria de \mathbf{PAlg}^3 com os mesmos objetos e cujos morfismos entre os objetos Σ_1 e Σ_2 são todos os morfismos quadráticos entre $H\Sigma_1$ e $H\Sigma_2$. Pela proposição anterior, se G é um outro funtor quase-isomorfo ao funtor esquecimento U , então as categorias $\mathbf{Q}_G\mathbf{PAlg}^3$ e $\mathbf{Q}_H\mathbf{PAlg}^3$ são equivalentes. Além disso, o funtor

$$\begin{aligned}H' : \mathbf{Q}_H\mathbf{PAlg}^3 &\rightarrow \mathbf{QPASp}^3 \\ \Sigma &\mapsto H\Sigma \\ \varphi &\mapsto H\varphi\end{aligned}$$

é um funtor pleno, fiel e denso, portanto, as categorias $\mathbf{Q}_H\mathbf{PAlg}^3$ e \mathbf{QPASp}^3 são equivalentes.

Para melhor compreensão, continuaremos trabalhando com as categorias onde os pares de levantamentos são destacados.

4.5.3 Funtor quadrático

Definição 4.5.21. *Seja A uma álgebra pseudocompacta em \mathbf{PAlg} . Um par de levantamentos (s, t) é chamado de **quadrático** se o ideal quadrático $I_{\frac{A}{J^3(A)}}$ está contido no núcleo do homomorfismo de apresentação φ_A induzido pelo par (s, t) .*

Exemplo 4.5.22. *Seja A a álgebra dada pela aljava com relações:*

$$Q : \begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & \delta \swarrow & & \nwarrow \gamma & \\ 1 & \xleftarrow{\alpha} & 2 & \xleftarrow{\beta} & 3 \end{array}, \quad \alpha\beta - \alpha\delta\gamma = 0.$$

Observe que

$$\frac{A}{J^3(A)} \cong \frac{kQ}{\langle \alpha\beta, \alpha\delta\gamma \rangle},$$

portanto o ideal quadrático de $A/J^3(A)$ é o ideal

$$I_{\frac{A}{J^3(A)}} = \langle \alpha\beta \rangle.$$

Considere os pares de levantamentos (s, t) e (s, t') definidos por

$$\begin{array}{l} s : \frac{kQ}{J(kQ)} \rightarrow A \\ \quad \bar{e}_i \mapsto \bar{e}_i, \\ \\ t : \frac{J(kQ)}{J^2(kQ)} \rightarrow A \quad t' : \frac{J(kQ)}{J^2(kQ)} \rightarrow A \\ \quad \bar{\alpha} \mapsto \bar{\alpha} \quad \bar{\alpha} \mapsto \bar{\alpha} \\ \quad \bar{\beta} \mapsto \bar{\beta} \quad \bar{\beta} \mapsto \overline{\beta - \delta\gamma} \\ \quad \bar{\gamma} \mapsto \bar{\gamma} \quad \bar{\gamma} \mapsto \bar{\gamma} \\ \quad \bar{\delta} \mapsto \bar{\delta}, \quad \bar{\delta} \mapsto \bar{\delta}. \end{array}$$

Os homomorfismos de apresentações $\varphi, \varphi' : kQ_A \rightarrow A$ induzidos pelos pares (s, t) e (s, t') respectivamente são definidos por

$$\begin{array}{l} \varphi : e_i \mapsto \bar{e}_i \quad \varphi' : e_i \mapsto \bar{e}_i \\ \alpha \mapsto \bar{\alpha} \quad \alpha \mapsto \bar{\alpha} \\ \beta \mapsto \bar{\beta} \quad \beta \mapsto \overline{\beta - \delta\gamma} \\ \gamma \mapsto \bar{\gamma} \quad \gamma \mapsto \bar{\gamma} \\ \delta \mapsto \bar{\delta} \quad \delta \mapsto \bar{\delta}. \end{array}$$

Como

$$\varphi(\alpha\beta) = \overline{\alpha\beta} \neq 0,$$

segue-se que (s, t) não é um par de levantamentos quadrático. Por outro lado,

$$\varphi'(\alpha\beta) = \overline{\alpha\beta - \alpha\delta\gamma} = 0,$$

logo (s, t') é um par de levantamentos quadrático.

Seja **QPASp** a subcategoria de **PASp** definida do seguinte modo:

- (i) os objetos são triplas (A, s, t) tais que (s, t) é um par de levantamentos quadrático;

(ii) os morfismos entre os objetos (A_1, s_1, t_1) e (A_2, s_2, t_2) são todos os morfismos $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ tais que $\varphi_3 : (\frac{A_1}{J^3(A_1)}, \pi_1 s_1, \pi_1 t_1) \rightarrow (\frac{A_2}{J^3(A_2)}, \pi_2 s_2, \pi_2 t_2)$ é um morfismo quadrático, onde $\pi_i : A_i \rightarrow A_i/J^3(A_i)$ com $i = 1, 2$.

Defina

$$F'_3 : \mathbf{QPASp} \rightarrow \mathbf{QPASp}^3$$

pondo, nos objetos,

$$F'_3(A, s, t) = (\frac{A}{J^3(A)}, \pi s, \pi t)$$

e, nos morfismos,

$$F'_3(\varphi) = \varphi_3.$$

Observação 4.5.23. $F'_3(\varphi)$ é um morfismo quadrático pelo modo que a categoria \mathbf{QPASp} foi construída.

Seja \sim_3 a relação de equivalência induzida pelo funtor F'_3 . Portanto, podemos considerar o funtor

$$F_3 : \mathbf{QPASp}_3 \rightarrow \mathbf{QPASp}^3,$$

induzido pelo quociente por \sim_3 , onde

$$\mathbf{QPASp}_3 = \mathbf{QPASp} / \sim_3.$$

Seja $T^3[[-]]$ o funtor definido em 4.4.11. Então

$$T^3[[k[[X]]/\langle X^2 \rangle, \pi_2 s_Q, \pi_2 t_Q]] = (k[[X]], s_Q, t_Q),$$

onde (s_Q, t_Q) é o par de levantamentos canônico de $k[[X]]$. Dado um morfismo

$$\varphi : (k[[X]], s_Q, t_Q) \rightarrow (k[[X]]/\langle X^3 \rangle, \pi_3 s_Q, \pi_3 t_Q),$$

então φ tem a forma $\varphi(X) = \lambda_1 \bar{X} + \lambda_2 \bar{X}^2$, portanto,

$$\varphi_3 : k[[X]]/\langle X^3 \rangle \rightarrow k[[X]]/\langle X^3 \rangle$$

é definido por $\varphi_3(\bar{X}) = \lambda_1 \bar{X} + \lambda_2 \bar{X}^2$. É fácil ver que o morfismo $\psi : k[[X]] \rightarrow k[[X]]$ mapeando X em $\lambda_1 X + \lambda_2 X^2$ é tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} k[[X]] & \xrightarrow{\psi} & k[[X]] \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \frac{k[[X]]}{\langle X^3 \rangle} & \xrightarrow{\varphi_3} & \frac{k[[X]]}{\langle X^3 \rangle}, \end{array}$$

onde a projeção π é o homomorfismo de apresentação induzido pelo par de levantamentos $(\pi_3 s_Q, \pi_3 t_Q)$. Logo $\varphi_3 : (k[[X]]/\langle X^3 \rangle, \pi_3 s_Q, \pi_3 t_Q) \rightarrow (k[[X]]/\langle X^3 \rangle, \pi_3 s_Q, \pi_3 t_Q)$ é um morfismo quadrático, portanto, $\varphi : (k[[X]], s_Q, t_Q) \rightarrow (k[[X]]/\langle X^3 \rangle, \pi_3 s_Q, \pi_3 t_Q)$ é um morfismo quadrático. Ou seja,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{PASp}_3} \left((k[[X]], s_Q, t_Q), \left(\frac{k[[X]]}{\langle X^3 \rangle}, \pi_3 s_Q, \pi_3 t_Q \right) \right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{PAlg}_3} \left(k[[X]], \frac{k[[X]]}{\langle X^3 \rangle} \right).$$

Por outro lado, pelo Exemplo 4.5.18,

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{QPASp}^3} \left(\left(\frac{k[[X]]}{\langle X^2 \rangle}, \pi_2 s_Q, \pi_2 t_Q \right), \left(\frac{k[[X]]}{\langle X^3 \rangle}, \pi_3 s_Q, \pi_3 t_Q \right) \right)$$

é um conjunto com um único morfismo. Portanto não existe um isomorfismo entre

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{QPASp}^3} \left(T^3 \left[\left(\frac{k[[X]]}{\langle X^2 \rangle}, \pi_2 s_Q, \pi_2 t_Q \right) \right], \left(\frac{k[[X]]}{\langle X^3 \rangle}, \pi_3 s_Q, \pi_3 t_Q \right) \right)$$

e

$$\mathrm{Hom}_{\mathbf{QPASp}^3} \left(\left(\frac{k[[X]]}{\langle X^2 \rangle}, \pi s_Q, \pi t_Q \right), F_3' \left(\frac{k[[X]]}{\langle X^3 \rangle}, \pi_3 s_Q, \pi_3 t_Q \right) \right).$$

Este exemplo mostra que o adjunto à esquerda de F_3 , caso exista, não é a álgebra tensorial completa $T[[-]]$. Ou seja, caso exista, o funtor

$$\mathbf{QPASp}^3 \rightarrow \mathbf{QPASp}_3$$

será um refinamento da adjunção $(T^3[[-]], F_3)$, porque, restrito aos objetos 3-admissíveis, o novo adjunto se comportará como o adjunto provada na seção anterior. Mostraremos que a álgebra pseudocompacta quadrática $Q[[\Sigma]]$ de Σ é o refinamento procurado.

Dado um objeto $(\Sigma, s, t) \in \mathbf{QPASp}^3$, defina

$$Q^{sp}[[\Sigma, s, t]] = \left(Q[[\Sigma]], \pi_{I_\Sigma} s_Q, \pi'_{I_\Sigma} t_Q \right),$$

onde $Q[[\Sigma]]$ é a álgebra pseudocompacta quadrática de Σ definida em 4.5.10, (s_Q, t_Q) é o par de levantamentos canônico de $T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}]]$ e $\pi_{I_\Sigma} : T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}]] \rightarrow Q[[\Sigma]]$ é a projeção canônica.

Observação 4.5.24. *Seja*

$$Q[[\Sigma]] = \frac{T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}]]}{I_\Sigma}$$

a álgebra pseudocompacta quadrática de Σ . Então $Q[[\Sigma]]/J^3(Q[[\Sigma]])$ é isomorfo a

$$\frac{T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}]]}{I_\Sigma + J^3(T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}]])}.$$

Logo I_Σ é também o ideal fechado quadrático de $Q[[\Sigma]]/J^3(Q[[\Sigma]])$. Como o homomorfismo de apresentação induzido pelo par $(\pi_{I_\Sigma} s_Q, \pi_{I_\Sigma} t_Q)$ é a projeção

$$\pi_{I_\Sigma} : T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] \longrightarrow Q[[\Sigma]],$$

segue-se que $(\pi_{I_\Sigma} s_Q, \pi_{I_\Sigma} t_Q)$ é um par de levantamentos quadrático. Logo $Q^{sp}[[\Sigma, s, t]]$ é um objeto em \mathbf{QPASp}_3 .

Exemplo 4.5.25. Seja (Σ, s, t) um objeto em \mathbf{QPASp}^3 . Se Σ é uma álgebra pseudocompacta 3-admissível, então

$$Q^{sp}[[\Sigma, s, t]] = T^3[[\Sigma, s, t]] = \left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right], s_Q, t_Q\right),$$

onde $T^3[-]$ é o funtor definido em 4.4.11.

Dado um morfismo quadrático $\varphi : (\Sigma_1, s_1, t_1) \rightarrow (\Sigma_2, s_2, t_2)$, por definição, existe um homomorfismo de álgebras contínuo

$$\psi : T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] \longrightarrow T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right]$$

tal que $\psi(I_{\Sigma_1}) \subseteq I_{\Sigma_2}$ e $\varphi\varphi_{\Sigma_1} = \varphi_{\Sigma_2}\psi$, onde φ_{Σ_i} é o homomorfismo de apresentação induzido pelo par (s_i, t_i) para $i = 1, 2$. Logo existe um único homomorfismo de álgebras contínuo

$$\bar{\psi} : Q[[\Sigma_1]] \rightarrow Q[[\Sigma_2]]$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] & \xrightarrow{\psi} & T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right] \\ \pi_{I_{\Sigma_1}} \downarrow & & \downarrow \pi_{I_{\Sigma_2}} \\ Q[[\Sigma_1]] & \xrightarrow{\bar{\psi}} & Q[[\Sigma_2]] \end{array}$$

comuta.

Lema 4.5.26. Seja $\bar{\psi} : Q[[\Sigma_1]] \rightarrow Q[[\Sigma_2]]$ o morfismo definido acima. Então o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q[[\Sigma_1]] & \xrightarrow{\bar{\psi}} & Q[[\Sigma_2]] \\ \bar{\varphi}_{\Sigma_1} \downarrow & & \downarrow \bar{\varphi}_{\Sigma_2} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2 \end{array}$$

comuta.

Demonstração. Sabemos que os diagramas

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] & \xrightarrow{\psi} & T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right] & T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] & \xrightarrow{\psi} & T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right] \\ \varphi_{\Sigma_1} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\Sigma_2} & \pi_{I_{\Sigma_1}} \downarrow & & \downarrow \pi_{I_{\Sigma_2}} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2 & Q[[\Sigma_1]] & \xrightarrow{\bar{\psi}} & Q[[\Sigma_2]], \end{array}$$

comutam. Para $i = 1, 2$, tem-se $\overline{\varphi}_{\Sigma_i} \pi_{I_{\Sigma_i}} = \varphi_{\Sigma_i}$, logo

$$\begin{aligned} \overline{\varphi}_{\Sigma_2} \circ \overline{\psi} \circ \pi_{I_{\Sigma_1}} &= \overline{\varphi}_{\Sigma_2} \circ \pi_{I_{\Sigma_2}} \circ \psi \\ &= \varphi_{\Sigma_2} \circ \psi \\ &= \varphi \circ \varphi_{\Sigma_1} \\ &= \varphi \circ \overline{\varphi}_{\Sigma_1} \circ \pi_{I_{\Sigma_1}}. \end{aligned}$$

Portanto $\varphi \overline{\varphi}_{\Sigma_1} = \overline{\varphi}_{\Sigma_2} \overline{\psi}$. \square

Observação 4.5.27. O morfismo $\overline{\psi} : Q^{sp}[[\Sigma_1, s_1, t_1]] \rightarrow Q^{sp}[[\Sigma_2, s_2, t_2]]$ é um morfismo em \mathbf{QPASp} , isto é,

$$\overline{\psi}_3 : \left(\frac{Q[[\Sigma_1]]}{J^3(Q[[\Sigma_1]])}, \pi_3 \pi_{I_{\Sigma}} s_{Q_1}, \pi'_3 \pi'_{I_{\Sigma}} t_{Q_1} \right) \rightarrow \left(\frac{Q[[\Sigma_2]]}{J^3(Q[[\Sigma_2]])}, \pi_3 \pi_{I_{\Sigma_2}} s_{Q_2}, \pi'_3 \pi'_{I_{\Sigma_2}} t_{Q_2} \right)$$

é um morfismo quadrático. Basta observar que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] & \xrightarrow{\psi} & T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right] \\ \pi_{\Sigma_1} \downarrow & & \downarrow \pi_{\Sigma_2} \\ Q[[\Sigma_1]] & \xrightarrow{\overline{\psi}} & Q[[\Sigma_2]] \\ \pi_3 \downarrow & & \downarrow \pi_3 \\ \frac{Q[[\Sigma_1]]}{J^3(Q[[\Sigma_1]])} & \xrightarrow{\overline{\psi}_3} & \frac{Q[[\Sigma_2]]}{J^3(Q[[\Sigma_2]])}. \end{array}$$

comuta e que $\pi_3 \pi_{I_{\Sigma_i}}$ é o homomorfismo de apresentação induzido do par $(\pi_3 \pi_{I_{\Sigma}} s_{Q_i}, \pi'_3 \pi'_{I_{\Sigma}} t_{Q_i})$.

Defina

$$Q^{sp}[[\varphi]] = [\overline{\psi}]_3,$$

onde $[\overline{\psi}]_3$ é a classe do morfismo $\overline{\psi}$ módulo \sim_3 . Provaremos que

$$Q^{sp}[[-]] : \mathbf{QPASp}^3 \rightarrow \mathbf{QPASp}_3$$

é um funtor.

Dado um par de levantamentos (s, t) da álgebra pseudocompacta Σ com $J^3(\Sigma) = 0$, então, o núcleo do homomorfismo de apresentação

$$\varphi_{\Sigma} : T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] \longrightarrow \Sigma$$

é dado por $J^3\left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]\right) + I_{\Sigma}$. Logo existe único

$$\overline{\varphi}_{\Sigma} : Q[[\Sigma]] \rightarrow \Sigma$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma}} & \Sigma \\ \pi_{I_{\Sigma}} \downarrow & \nearrow \overline{\varphi}_{\Sigma} & \\ Q[[\Sigma]] & & \end{array}$$

comuta.

Observação 4.5.28. $\ker \bar{\varphi}_\Sigma = J^3(Q[[\Sigma]])$.

Lema 4.5.29. *O mapa $Q^{sp}[[\varphi]]$ é bem-definido.*

Demonstração. Seja $\psi' : T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}]] \rightarrow T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}]]$ um outro homomorfismo gozando das Propriedades 1 e 2 dos morfismos quadráticos e seja $\bar{\psi}' : Q[[\Sigma_1]] \rightarrow Q[[\Sigma_2]]$ o homomorfismo induzido por ψ' . Então, pelo Lema 4.5.26,

$$\text{Im}(\bar{\psi} - \bar{\psi}') \subseteq \ker \bar{\varphi}_{\Sigma_2} = J^3(Q[[\Sigma_2]]),$$

isto é, $[\bar{\psi}]_3 = [\bar{\psi}']_3$. □

De modo análogo à prova da Proposição 4.3.11 da Seção 2, com o diagrama comutativo do Lema 4.5.26, tem-se:

Proposição 4.5.30. *O mapa $Q^{sp}[[-]] : \mathbf{QPASp}^3 \rightarrow \mathbf{QPASp}_3$ é um funtor.*

Chamaremos o funtor $Q^{sp}[[-]] : \mathbf{QPASp}^3 \rightarrow \mathbf{QPASp}_3$ de **funtor quadrático**. Provaremos que o funtor quadrático é adjunto à esquerda do funtor F_3 .

4.5.4 A adjunção para o caso n igual a 3

Provaremos que o par de funtores $(Q^{sp}[[-]], F_3)$ é uma adjunção. Construiremos transformações naturais

$$\epsilon : Q^{sp}[[F_3 -]] \rightarrow \text{id}_{\mathbf{QPASp}_3}$$

e

$$\eta : \text{id}_{\mathbf{QPASp}^3} \rightarrow F_3 Q^{sp}[[-]]$$

satisfazendo as equações da unidade-counidade:

$$\text{id}_{F_3} = F_3 \epsilon \circ \eta_{F_3}, \quad \text{id}_{Q^{sp}[[-]]} = \epsilon Q^{sp}[[-]] \circ Q[[\eta]].$$

Dado um objeto $(A, s, t) \in \mathbf{QPASp}_3$, como o par de levantamentos (s, t) é quadrático, isto é, $I_A \subseteq \ker \varphi_A$, onde I_A é o ideal fechado quadrático de $A/J^3(A)$ e φ_A é o homomorfismo de apresentação induzido pelo (s, t) , segue-se que existe

$$\bar{\varphi}_A : Q[[F_3 A]] \rightarrow A$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T[[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}]] & \xrightarrow{\varphi_A} & A \\ \pi_{I_A} \downarrow & \nearrow \bar{\varphi}_A & \\ Q[[F_3 A]] & & \end{array}$$

comuta. Defina, para cada objeto $(A, s, t) \in \mathbf{QPASp}_3$,

$$\varepsilon_A := [\overline{\varphi}_A]_3 : (Q[[F_3A]], \pi_{I_A}s_Q, \pi_{I_A}t_Q) \rightarrow (A, s, t),$$

onde o subíndice A de ε indica a tripla (A, s, t) .

Proposição 4.5.31. *O morfismo $\overline{\varphi}_A : (Q[[F_3A]], \pi_{I_A}s_Q, \pi_{I_A}t_Q) \longrightarrow (A, s, t)$ é um morfismo em \mathbf{QPASp} .*

Demonstração. Precisamos mostrar que o morfismo

$$\overline{\varphi}_{A_3} : \left(\frac{Q[[F_3A]]}{J^3(Q[[F_3A]])}, \pi_3\pi_{I_A}s_Q, \pi_3\pi_{I_A}t_Q \right) \longrightarrow \left(\frac{A}{J^3(A)}, \pi'_3s, \pi'_3t \right)$$

é um morfismo quadrático, onde π_3 e π'_3 são as projeções canônicas. Pela definição de $\overline{\varphi}_{A_3}$, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q[[F_3A]] & \xrightarrow{\overline{\varphi}_A} & A \\ \pi_3 \downarrow & & \downarrow \pi'_3 \\ \frac{Q[[F_3A]]}{J^3(Q[[F_3A]])} & \xrightarrow{\overline{\varphi}_{A_3}} & \frac{A}{J^3(A)} \end{array}$$

comuta. Os pares de levantamentos $(\pi_3\pi_{I_A}s_Q, \pi_3\pi_{I_A}t_Q)$ e (π'_3s, π'_3t) induzem os homomorfismos de apresentações

$$\pi : T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] \longrightarrow \frac{Q[[F_3A]]}{J^3(Q[[F_3A]])} \quad \pi'_3\varphi_A : T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] \rightarrow \frac{A}{J^3(A)}$$

respectivamente. Então a identidade id de $T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right]$ é o homomorfismo de álgebras contínuo gozando das Propriedades 1 e 2 dos morfismos quadráticos. De fato, das igualdades

$$\begin{aligned} \pi'_3\varphi_A \text{id} &= \pi'_3\varphi_A \\ &= \pi'_3\overline{\varphi}_A\pi_{I_A} \\ &= \overline{\varphi}_{A_3}\pi_3\pi_{I_A} \\ &= \overline{\varphi}_{A_3}\pi, \end{aligned}$$

segue-se que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] & \xrightarrow{\text{id}} & T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi'_3\varphi_A \\ \frac{Q[[A]]}{J^3(Q[[A]])} & \xrightarrow{\overline{\varphi}_{A_3}} & \frac{A}{J^3(A)} \end{array}$$

comuta. Logo $\overline{\varphi}_{A_3}$ goza da Propriedade 1. A Propriedade 2 resulta diretamente do ideal quadrático de $Q[[F_3A]]/J^3(Q[[F_3A]])$ ser I_A . \square

Proposição 4.5.32. *O mapa ϵ_A é a componente natural em (A, s_A, t_A) de uma transformação natural $\epsilon : Q^{sp}[[F_3-]] \rightarrow \text{id}_{\mathbf{QPASp}_3}$.*

Demonstração. Dado um morfismo $[\varphi]_3 : (A, s_A, t_A) \rightarrow (B, s_B, t_B)$ em \mathbf{QPASp}_3 , provaremos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q[[F_3A]] & \xrightarrow{Q^{sp}[[F_3\varphi]]} & Q[[F_3B]] \\ [\varphi_A]_3 \downarrow & & \downarrow [\varphi_B]_3 \\ A & \xrightarrow{[\varphi]_3} & B \end{array}$$

comuta.

Seja $\bar{\psi}$ um representante da classe $Q[[F_3\varphi]]$. Pela Proposição 4.5.26, o diagrama

$$\begin{array}{ccc} Q[[F_3A]] & \xrightarrow{\bar{\psi}} & Q[[F_3B]] \\ \pi_A \varphi_A \downarrow & & \downarrow \pi_B \varphi_B \\ \frac{A}{J^3(A)} & \xrightarrow{F_3\varphi} & \frac{B}{J^3(B)} \end{array}$$

comuta, onde $\pi_A : A \rightarrow A/J^3(A)$ e $\pi_B : B \rightarrow B/J^3(B)$ são as projeções. Então

$$\begin{aligned} \pi_B \overline{\varphi_B \bar{\psi}} &= \overline{\pi_B \varphi_B \bar{\psi}} \\ &= \overline{F_3\varphi \pi_A \varphi_A} \\ &= \overline{F_3\varphi \pi_A \overline{\varphi_A}} \\ &= \overline{\pi_B \varphi \overline{\varphi_A}}. \end{aligned}$$

Logo $\text{Im}(\overline{\varphi_B \bar{\psi}} - \overline{\varphi \varphi_A}) \subseteq J^3(B)$, portanto, $[\overline{\varphi_B \bar{\psi}}]_3 = [\overline{\varphi \varphi_A}]_3$, concluindo o resultado. \square

Dado um objeto (Σ, s, t) em \mathbf{QPASp}^3 , como

$$\Sigma \cong \frac{Q[[\Sigma]]}{J^3(Q[[\Sigma]])},$$

existe um único isomorfismo de álgebras contínuo

$$\varphi_{\Sigma,1} : \frac{Q[[\Sigma]]}{J^3(Q[[\Sigma]])} \rightarrow \Sigma$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma}} & \Sigma \\ \pi \downarrow & \nearrow \varphi_{\Sigma,1} & \\ \frac{Q[[\Sigma]]}{J^3(Q[[\Sigma]])} & & \end{array}$$

comuta. Defina

$$\eta_{\Sigma} := \varphi_{\Sigma,1}^{-1} : \left(\Sigma, s, t\right) \longrightarrow \left(\frac{Q[[\Sigma]]}{J^3(Q[[\Sigma]])}, \pi_{I_{\Sigma}} s_Q, \pi_{I_{\Sigma}} t_Q\right),$$

onde o subíndice Σ de η indica a tripla (Σ, s, t) .

Do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc}
 T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] & \xrightarrow{\text{id}} & T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] \\
 \varphi_{\Sigma} \downarrow & & \downarrow \pi \\
 \Sigma & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma,1}^{-1}} & \frac{Q[[\Sigma]]}{J^3(Q[[\Sigma]])}
 \end{array}$$

tem-se o seguinte resultado:

Proposição 4.5.33. *O morfismo $\varphi_{\Sigma,1}^{-1} : (\Sigma, s_{\Sigma}, t_{\Sigma}) \rightarrow (\frac{Q[[\Sigma]]}{J^3(Q[[\Sigma]])}, s_{Q_{\Sigma}}, t_{Q_{\Sigma}})$ é um morfismo quadrático.*

Proposição 4.5.34. *O mapa η_{Σ} é a componente em $(\Sigma, s_{\Sigma}, t_{\Sigma})$ de uma transformação natural $\eta : 1_{\mathbf{QPASp}^3} \rightarrow F_3Q^{sp}[[-]]$.*

Demonstração. Dado um morfismo $\varphi : (\Sigma_1, s_{\Sigma_1}, t_{\Sigma_1}) \rightarrow (\Sigma_2, s_{\Sigma_2}, t_{\Sigma_2})$ em \mathbf{QPASp}^3 , provaremos que o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
 \Sigma_1 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2 \\
 \eta_{\Sigma_1} \downarrow & & \downarrow \eta_{\Sigma_2} \\
 \frac{Q[[\Sigma_1]]}{J^3(Q[[\Sigma_1]])} & \xrightarrow{F_3Q^{sp}[[\varphi]]} & \frac{Q[[\Sigma_2]]}{J^3(Q[[\Sigma_2]])}
 \end{array}$$

comuta. Seja $\bar{\psi}$ um representante da classe $Q^{sp}[[\varphi]]$. Dos diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc}
 Q[[\Sigma_1]] & \xrightarrow{\bar{\psi}} & Q[[\Sigma_2]] \\
 \overline{\varphi_{\Sigma_1}} \downarrow & & \downarrow \overline{\varphi_{\Sigma_2}} \\
 \Sigma_1 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 Q[[\Sigma_1]] & \xrightarrow{\bar{\psi}} & Q[[\Sigma_2]] \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \pi_2 \\
 \frac{Q[[\Sigma_1]]}{J^3(Q[[\Sigma_1]])} & \xrightarrow{F_3\bar{\psi}} & \frac{Q[[\Sigma_2]]}{J^3(Q[[\Sigma_2]])}
 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
 Q[[\Sigma_i]] & \xrightarrow{\pi_i} & \frac{Q[[\Sigma_i]]}{J^3(Q[[\Sigma_i]])} \\
 \overline{\varphi_{\Sigma_i}} \downarrow & \nearrow \varphi_{\Sigma_i,1}^{-1} & \\
 \Sigma_i & &
 \end{array}$$

conclui-se que

$$\begin{aligned}
 \eta_{\Sigma_2} \circ \varphi \overline{\varphi_{\Sigma_1}} &= \varphi_{\Sigma_2,1}^{-1} \varphi \overline{\varphi_{\Sigma_1}} \\
 &= \varphi_{\Sigma_2,1}^{-1} \overline{\varphi_{\Sigma_2}} \bar{\psi} \\
 &= \pi_2 \bar{\psi} \\
 &= F_3 \bar{\psi} \circ \pi_1 \\
 &= F_3 \bar{\psi} \circ \varphi_{\Sigma_1,1}^{-1} \overline{\varphi_{\Sigma_1}} \\
 &= F_3 \bar{\psi} \circ \eta_{\Sigma_1} \overline{\varphi_{\Sigma_1}}.
 \end{aligned}$$

Logo $\eta_{\Sigma_2} \varphi = F_3 \bar{\psi} \circ \eta_{\Sigma_1}$. □

Teorema 4.5.35. *O funtor $Q^{sp}[[-]] : \mathbf{QPASp}^3 \rightarrow \mathbf{QPASp}_3$ é adjunto a $F_3 : \mathbf{QPASp}_3 \rightarrow \mathbf{QPASp}^3$ à esquerda.*

Demonstração. Iremos provar que as equações da counidade-unidade são satisfeitas. Isto é, para cada $A = (A, s_A, t_A) \in \mathbf{QPASp}_3$,

$$\mathrm{id}_{F_3A} = F_3\varepsilon_A \circ \eta_{F_3A},$$

e, para cada $\Sigma = (\Sigma, s_\Sigma, t_\Sigma) \in \mathbf{QPASp}^3$,

$$\mathrm{id}_{Q^{sp}[[\Sigma]]} = \varepsilon_{Q^{sp}[[\Sigma]]} \circ Q^{sp}[[\eta_\Sigma]].$$

Decorre diretamente do diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] & \xrightarrow{\mathrm{id}} & T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] \\ \varphi_\Sigma \downarrow & & \downarrow \pi \\ \Sigma^{-1} & \xrightarrow{\varphi_{\Sigma,1}} & \frac{Q[[\Sigma]]}{J^3(Q[[\Sigma]])} \end{array}$$

que $Q[[\eta_\Sigma]] = [\mathrm{id}]_3$. Como o homomorfismo de apresentação induzido pelo par de levantamentos $(s_{Q_\Sigma}, t_{Q_\Sigma})$ é a projeção de $T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]$ em $Q[[\Sigma]]$, segue-se que $\varepsilon_{Q[[\Sigma]]}$ é também a identidade. Provando a veracidade da segunda igualdade da equação da counidade-unidade.

Mostraremos agora que a primeira equação da counidade-unidade é verdadeira. Pelos diagramas comutativos

$$\begin{array}{ccc} Q[[F_3A]] & \xrightarrow{\bar{\varphi}_A} & A \\ \pi' \downarrow & & \downarrow \pi_3 \\ \frac{Q[[F_3A]]}{J^3(Q[[F_3A]])} & \xrightarrow{F_3\bar{\varphi}_A} & \frac{A}{J^3(A)} \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] & \xrightarrow{\pi_3\varphi_A} & \frac{A}{J^3(A)} \\ \pi \downarrow & \nearrow \varphi_{\frac{A}{J^3(A)},1} & \\ \frac{Q[[F_3A]]}{J^3(Q[[F_3A]])} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] & \xrightarrow{\pi} & \frac{Q[[F_3A]]}{J^3(Q[[F_3A]])} \\ \pi'' \downarrow & \nearrow \pi' & \\ Q[[F_3A]] & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{A}{J(A)}, \frac{J(A)}{J^2(A)}\right]\right] & \xrightarrow{\varphi_A} & A \\ \pi'' \downarrow & \nearrow \bar{\varphi}_A & \\ Q[[F_3A]] & & \end{array}$$

tem-se

$$\begin{aligned} F_3\bar{\varphi}_A \circ \varphi_{\frac{A}{J^3(A)},1}^{-1} \circ \pi_3\varphi_A &= F_3\bar{\varphi}_A \circ \pi \\ &= F_3\bar{\varphi}_3 \circ \pi' \circ \pi'' \\ &= \pi_3\bar{\varphi}_A\pi'' \\ &= \pi_3\varphi_A. \end{aligned}$$

Logo $F_3\bar{\varphi}_A \circ \varphi_{A/J^3(A),1}^{-1} = \mathrm{id}_{A/J^3(A)}$. Isto conclui a demonstração. \square

Observação 4.5.36. Quando restringimos às subcategorias $\mathbf{Ad}^3\mathbf{PASp}^3$ e $\mathbf{Ad}^3\mathbf{PASp}_3$, definidas em 4.4.7 e 4.4.8 respectivamente, de \mathbf{QPASp}^3 e \mathbf{QPASp}_3 respectivamente, temos exatamente o par de adjunção $(T^3[-], F_3)$ da seção anterior.

Exemplo 4.5.37. A componente natural da counidade ε no objeto $(k[[X]]/\langle X^2 \rangle, \pi_2 s_Q, \pi_2 t_Q)$ é a classe módulo \sim_3 da identidade

$$\text{id} : k[[X]]/\langle X^2 \rangle \rightarrow k[[X]]/\langle X^2 \rangle.$$

Exemplo 4.5.38. Seja A a álgebra dada pela aljava com relações:

$$Q : \begin{array}{ccccc} & & 4 & & \\ & \delta \swarrow & & \nwarrow \gamma & \\ 1 & \xleftarrow{\alpha} & 2 & \xleftarrow{\beta} & 3 \end{array}, \quad \alpha\beta - \alpha\delta\gamma = 0.$$

Considere o par de levantamentos quadrático (s, t) , onde $s : kQ/J(kQ) \rightarrow A$ é o levantamento definido por $s(\bar{e}_i) = \bar{e}_i$ e $t : J(kQ)/J^2(kQ) \rightarrow A$ é o levantamento definido por

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &\mapsto \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} &\mapsto \overline{\beta - \delta\gamma} \\ \bar{\gamma} &\mapsto \bar{\gamma} \\ \bar{\delta} &\mapsto \bar{\delta}. \end{aligned}$$

Então a componente natural da counidade ε no objeto (A, s, t) é a classe módulo \sim_3 do homomorfismo de álgebras

$$\varepsilon_A : \frac{kQ}{\langle \alpha\beta \rangle} \longrightarrow A$$

definido por

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &\rightarrow \bar{e}_i \\ \bar{\alpha} &\mapsto \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} &\mapsto \overline{\beta - \delta\gamma} \\ \bar{\gamma} &\mapsto \bar{\gamma} \\ \bar{\delta} &\mapsto \bar{\delta}. \end{aligned}$$

Exemplo 4.5.39. Seja A a álgebra dada pela seguinte aljava com relações:

$$Q : \begin{array}{c} \overset{X}{\curvearrowright} \\ 1 \\ \underset{Y}{\curvearrowleft} \end{array} \quad XY - YX = X^3Y^2 + X^2Y^3 + Y^6 = 0.$$

Se $t : J(A)/J^2(A) \rightarrow J(A)$ é o levantamento definido por $t(\bar{X}) = \bar{X} - \overline{XY^2}$ e $t(\bar{Y}) = \bar{Y}$, então a componente natural da counidade ε em $(A, \bar{1} \mapsto \bar{1}, t)$ é a classe módulo \sim_3 do homomorfismo

$$\varepsilon_A : \frac{k[[Q]]}{\langle XY - YX \rangle} \longrightarrow A$$

definido por $\varepsilon_A(\bar{X}) = \bar{X} - \overline{XY^2}$ e $\varepsilon_A(\bar{Y}) = \bar{Y}$.

Definição 4.5.40. Dizemos que uma álgebra pseudocompacta A é **quase-quadrática** quando existe um par de levantamentos quadrático (s, t) de A .

Corolário 4.5.41. Seja A uma álgebra pseudocompacta quase-quadrática com o par de levantamentos (s, t) . Dado um morfismo quadrático $[\theta]_3 : Q^{sp}[[\Sigma]] \rightarrow (A, s, t)$, onde Σ é uma álgebra pseudocompacta com $J^3(\Sigma) = 0$, então existe um único homomorfismo de álgebras $\xi : \Sigma \rightarrow A/J^3(A)$ tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} A & & \\ \varepsilon_A \uparrow & \swarrow [\theta]_3 & \\ Q[[F_3 A]] & \xleftarrow{Q^{sp}[[\xi]]} & Q[[\Sigma]] \end{array}$$

comuta, onde ε_A é a componente natural da counidade ε em (A, s, t) .

Exemplo 4.5.42. Segue abaixo uma lista de álgebras pseudocompactas quase-quadráticas:

- (i) álgebras A com $J^3(A) = 0$;
- (ii) álgebras 3-admissíveis;
- (iii) álgebras homogêneas.

4.6 Apontamentos sobre o caso geral

De maneira análoga à Seção 4.4, daremos uma ideia de como a adjunção $(Q^{sp}[[-]], F_3)$ da seção anterior pode ser adaptada para qualquer inteiro $n \geq 4$. Já que os argumentos são análogos aos argumentos da seção anterior, omitiremos as provas.

Seja $\mathbf{Ad}^{n-1}\mathbf{PASp}^n$ a subcategoria plena de \mathbf{PASp}^n cujos objetos são triplas (Σ, s, t) tais que Σ é uma álgebra $(n-1)$ -admissível, ou seja,

$$J^n\left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]\right) \subseteq \ker\varphi_\Sigma \subseteq J^{n-1}\left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]\right),$$

onde φ_Σ é o homomorfismo de apresentação induzido pelo par de levantamentos (s, t) .

Observação 4.6.1. Quando $n = 3$, tem-se

$$J^3\left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]\right) \subseteq \ker\varphi_\Sigma \subseteq J^2\left(T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]\right).$$

Mas isto é válido para todos os objetos (Σ, s, t) em \mathbf{PASp}^3 . Logo $\mathbf{Ad}^2\mathbf{PASp}^3 = \mathbf{PASp}^3$.

Seja (Σ, s, t) um objeto em $\mathbf{Ad}^{n-1}\mathbf{PASp}^n$. Defina o seguinte ideal de $T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right]$

$$I_{\Sigma, n-1} := \left\langle x \in T\left[\left[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}\right]\right] : x \in \ker\varphi_\Sigma \cap \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}^{\widehat{\otimes}_{n-1}} \right\rangle,$$

onde $\varphi_\Sigma : T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}]] \rightarrow \Sigma$ é o homomorfismo de apresentação induzido pelo par de levantamentos (s, t) .

Observação 4.6.2. *O ideal $I_{\Sigma, n-1}$ definido acima independe de escolha de par de levantamentos (s, t) . De fato, seja (s', t') outro par de levantamentos e seja φ'_Σ o homomorfismo de apresentação induzido pelo par (s', t') . Então*

$$(\varphi_\Sigma - \varphi'_\Sigma) \left(\frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)} \widehat{\otimes}^{n-1} \right) \subseteq J^n(\Sigma) = 0.$$

Observação 4.6.3. *Se $n = 3$, então o ideal $I_{\Sigma, 2}$ é o ideal quadrático de Σ .*

O ideal $I_{\Sigma, n-1}$ de $T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}]]$ é chamado de **ideal $(n-1)$ -ádico de Σ** . Para cada álgebra pseudocompacta $(n-1)$ -admissível Σ com $J^n(A) = 0$, podemos associar a álgebra pseudocompacta homogênea

$$Q^n[[\Sigma]] = \frac{T[[\frac{\Sigma}{J(\Sigma)}, \frac{J(\Sigma)}{J^2(\Sigma)}]]}{I_{\Sigma, n-1}}.$$

Chamaremos a álgebra pseudocompacta $Q^n[[\Sigma]]$ de **álgebra pseudocompacta $(n-1)$ -ádica de Σ** .

Sejam (Σ_1, s_1, t_1) e (Σ_2, s_2, t_2) dois objetos de $\mathbf{Ad}^{n-1}\mathbf{PASp}^n$. Dizemos que um morfismo $\varphi : (\Sigma_1, s_1, t_1) \rightarrow (\Sigma_2, s_2, t_2)$ é um morfismo **$(n-1)$ -ádico** quando existe um homomorfismo de álgebras contínuo

$$\psi : T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}]] \longrightarrow T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}]]$$

gozando das seguintes propriedades:

1. o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T[[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}]] & \xrightarrow{\psi} & T[[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}]] \\ \varphi_{\Sigma_1} \downarrow & & \downarrow \varphi_{\Sigma_2} \\ \Sigma_1 & \xrightarrow{\varphi} & \Sigma_2 \end{array}$$

comuta, onde φ_{Σ_i} é o morfismo de representação induzido pelo par (s_i, t_i) , $i = 1, 2$;

2. $\psi(I_{\Sigma_1, n-1}) \subseteq I_{\Sigma_2, n-1}$, onde I_{Σ_i} é o ideal $(n-1)$ -ádico de Σ_i , $i = 1, 2$.

De modo análogo às Observações 4.5.26 e 4.5.15, prova-se que a composição de dois morfismos $(n-1)$ -ádicos é também um morfismo $(n-1)$ -ádico e a identidade $\text{id} : (\Sigma, s, t) \rightarrow (\Sigma, s, t)$ é sempre um morfismo $(n-1)$ -ádico. Logo podemos definir a seguinte subcategoria de $\mathbf{Ad}^{n-1}\mathbf{PASp}^n$:

Definição 4.6.4. *Denotamos por $\mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}^n$ a subcategoria de $\mathbf{Ad}^{n-1}\mathbf{PASp}^n$ com os mesmos objetos e cujos morfismos são morfismos $(n-1)$ -ádicos.*

Seja $\mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}$ a subcategoria de $\mathbf{Ad}^{n-1}\mathbf{PASp}$ definida do seguinte modo:

- (i) os objetos são triplas (A, s, t) tais que A é uma álgebra pseudocompacta $(n-1)$ -admissível e (s, t) é um par de levantamentos tal que $I_{A/J^n(A), n-1}$ está contido no núcleo do homomorfismo de apresentação φ_A induzido pelo par (s, t) ;
- (ii) os morfismos entre os objetos (A_1, s_1, t_1) e (A_2, s_2, t_2) são todos os morfismos $\varphi : A_1 \rightarrow A_2$ tais que $\varphi_n : (\frac{A_1}{J^n(A_1)}, \pi_1 s_1, \pi_1 t_1) \rightarrow (\frac{A_2}{J^n(A_2)}, \pi_2 s_2, \pi_2 t_2)$ é um morfismo $(n-1)$ -ádico, onde $\pi_i : A_i \rightarrow A_i/J^n(A_i)$ com $i = 1, 2$.

Defina

$$F'_n : \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp} \rightarrow \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}^n$$

pondo, nos objetos,

$$F'_n(A, s, t) = (\frac{A}{J^n(A)}, \pi_n s, \pi_n t)$$

e, nos morfismos,

$$F'_n(\varphi) = \varphi_n.$$

Seja \sim_n a relação de equivalência induzida pelo funtor F'_n . Portanto, podemos considerar o funtor

$$F_n : \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}_n \rightarrow \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}^n,$$

induzido pelo quociente por \sim_n , onde

$$\mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}_n = \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp} / \sim_n.$$

Dado um morfismo $n-1$ -ádico $\varphi : (\Sigma_1, s_1, t_1) \rightarrow (\Sigma_2, s_2, t_2)$, por definição, existe um homomorfismo de álgebras contínuo

$$\psi : T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] \longrightarrow T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right]$$

tal que $\psi(I_{\Sigma_1, n-1}) \subseteq I_{\Sigma_2, n-1}$ e $\varphi\varphi_{\Sigma_1} = \varphi_{\Sigma_2}\psi$, onde φ_{Σ_i} é o homomorfismo de apresentação induzido pelo par (s_i, t_i) para $i = 1, 2$. Logo existe um único homomorfismo de álgebras contínuo

$$\bar{\psi} : Q^n[[\Sigma_1]] \rightarrow Q^n[[\Sigma_2]]$$

tal que o diagrama

$$\begin{array}{ccc} T\left[\left[\frac{\Sigma_1}{J(\Sigma_1)}, \frac{J(\Sigma_1)}{J^2(\Sigma_1)}\right]\right] & \xrightarrow{\psi} & T\left[\left[\frac{\Sigma_2}{J(\Sigma_2)}, \frac{J(\Sigma_2)}{J^2(\Sigma_2)}\right]\right] \\ \pi_{I_{\Sigma_1, n-1}} \downarrow & & \downarrow \pi_{I_{\Sigma_2, n-1}} \\ Q^n[[\Sigma_1]] & \xrightarrow{\bar{\psi}} & Q^n[[\Sigma_2]] \end{array}$$

comuta.

Defina

$$Q^{n,sp}[-] : \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}^n \rightarrow \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}_n$$

pondo, nos objetos,

$$Q^{n,sp}[(\Sigma, s, t)] := (Q^n[[\Sigma]], \pi_{I_{\Sigma, n-1}} s_Q, \pi_{I_{\Sigma, n-1}} t_Q)$$

e, nos morfismos,

$$Q^{n,sp}[[\varphi]] := \bar{\psi}.$$

De maneira análoga à Seção 4.5.3, tem-se:

Proposição 4.6.5. *O mapa $Q^{n,sp}[-] : \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}^n \rightarrow \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}_n$ é um funtor.*

Podemos então enunciar o

Teorema 4.6.6. *O funtor $Q^{n,sp}[-] : \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}^n \rightarrow \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}_n$ é adjunto a $F_n : \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}_n \rightarrow \mathbf{Q}^{n-1}\mathbf{PASp}^n$ à esquerda.*

Demonstração. Similar ao que foi feito na Seção 4.5.4. □

Exemplo 4.6.7. *Fixemos $n = 4$. Seja A a álgebra dada pela seguinte aljava com relações:*

$$Q : \begin{array}{ccccccc} & & & & 5 & & \\ & & & \delta & / & \eta & \\ & & & & & & \\ 1 & \xleftarrow{\alpha} & 2 & \xleftarrow{\beta} & 3 & \xleftarrow{\gamma} & 4 \\ & & & & & & \end{array}, \quad \alpha\beta\gamma - \alpha\beta\delta\eta = 0.$$

Considere o par de levantamentos (s, t) , onde $s : kQ/J(kQ) \rightarrow A$ é o levantamento definido por $s(\bar{e}_i) = \bar{e}_i$ e $t : J(kQ)/J^2(kQ) \rightarrow A$ é o levantamento definido por

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &\mapsto \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} &\mapsto \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} &\mapsto \overline{\gamma - \delta\eta} \\ \bar{\delta} &\mapsto \bar{\delta} \\ \bar{\eta} &\mapsto \bar{\eta}, \end{aligned}$$

segue-se de

$$\frac{A}{J^4(A)} \cong \frac{kQ}{\langle \alpha\beta\gamma, \alpha\beta\delta\eta \rangle}$$

que $I_{A/J^4(A)} = \langle \alpha\beta\gamma \rangle$. Como o homomorfismo de apresentação $\psi : kQ \rightarrow A$ induzido pelo par (s, t) é definido por

$$\begin{aligned} e_i &\rightarrow \bar{e}_i \\ \alpha &\mapsto \bar{\alpha} \\ \beta &\mapsto \bar{\beta} \\ \gamma &\mapsto \overline{\gamma - \delta\eta} \\ \delta &\mapsto \bar{\delta} \\ \eta &\mapsto \bar{\eta}, \end{aligned}$$

temos $I_{A/J^4(A)} \subseteq \ker \psi$. Logo (A, s, t) é um objeto em $\mathbf{Q}^3\mathbf{PASp}_4$. Então

$$Q^{4,sp}[(A, s, t)] = \left(\frac{kQ}{\langle \alpha\beta\gamma \rangle}, s : \frac{kQ}{J(kQ)} \rightarrow \frac{kQ}{\langle \alpha\beta\gamma \rangle}, t : \frac{J(kQ)}{J^2(kQ)} \rightarrow \frac{J(kQ)}{\langle \alpha\beta\gamma \rangle} \right),$$

onde s é definido por $s(\bar{e}_i) = \bar{e}_i$ e t é definido por $t(\bar{x}) = \bar{x}$.

De modo semelhante à seção anterior, mostra-se que a componente natural da counidade em (A, s, t) é o morfismo $[\psi']_4 : kQ/\langle \alpha\beta\gamma \rangle \rightarrow A$, onde ψ' é definido por

$$\begin{aligned} \bar{e}_i &\rightarrow \bar{e}_i \\ \bar{\alpha} &\mapsto \bar{\alpha} \\ \bar{\beta} &\mapsto \bar{\beta} \\ \bar{\gamma} &\mapsto \overline{\gamma - \delta\eta} \\ \bar{\delta} &\mapsto \bar{\delta} \\ \bar{\eta} &\mapsto \bar{\eta}. \end{aligned}$$

Parte II

Extensões de quociente bifinito

5 Conjectura da dimensão finitística e as extensões de quociente bifinito

Na teoria de representações de álgebras de dimensão finita, há várias conjecturas conectadas entre si conhecidas como “conjecturas homológicas”. A mais forte entre elas é a Conjectura da Dimensão Finitística. Trata-se de um invariante homológico conhecido como dimensão finitística. Dada uma álgebra de Artin A , definimos

$$\text{gl.dim}(A) = \sup\{\text{pd}_A M : M \in A\text{-mod}\}.$$

$$\text{fin.dim}(A) = \sup\{\text{pd}_A M : M \in A\text{-mod}, \text{pd}_A M < \infty\}.$$

Publicada originalmente por Bass em 1960 como um “problema”, (BASS, 1960), em pouco tempo, restrita às álgebras de dimensão finita, ela foi promovida ao status de conjectura:

Conjectura 1. (Conjectura da Dimensão Finitística) *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Então $\text{findim}(A) < \infty$.*

A conjectura da dimensão finitística é um dos muitos problemas homológicos em aberto. A conjectura da dimensão finitística está conectada com a solução de outras conjecturas homológicas ainda não resolvidas. Por exemplo,

Conjectura 2. (Conjetura de Nakayama Forte) *Se X é um módulo não-nulo sobre uma k -álgebra A de dimensão finita, então existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $\text{Ext}^n(X, A) \neq 0$.*

Conjectura 3. (Conjetura de Nakayama Generalizada) *Se S é um módulo simples sobre uma k -álgebra A de dimensão finita, então existe um inteiro $n \geq 0$ tal que $\text{Ext}^n(S, A) \neq 0$.*

Conjectura 4. (Conjectura da Simetria de Gorenstein) *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. A dimensão injetiva de A como A -módulo à esquerda é finita se, e somente se, a dimensão projetiva de $D(A_A)$ é finita.*

Conjectura 5. (Conjectura de Auslander–Reiten) *Seja A uma k -álgebra de dimensão finita. Se M é um gerador em $A\text{-Mod}$ tal que $\text{Ext}^n(M, M) = 0$ para todo inteiro positivo n , então M é projetivo.*

Todas as conjecturas acima seriam verdadeiras se a conjectura da dimensão finitística fosse verdadeira (AUSLANDER; REITEN, 1975; YAGAMATA, 1996). Ao longo das últimas seis décadas, foi desenvolvido uma variedade de artigos na literatura provando

a conjectura para algumas classes especiais de álgebras de Artin, porém a conjectura encontra-se longe de ser resolvida para caso geral.

Segue-se a lista de alguns casos especiais onde é válida a conjectura:

- (i) álgebras monomiais (GREEN; KIRKMAN; KUZMANOVICH, 1991);
- (ii) álgebras A com $J^3(A) = 0$ (GREEN; ZIMMERMANN-HUISGEN, 1991);
- (iii) álgebras com dimensão de representação menor do que ou igual a 3 (IGUSA; TODOROV, 2005);
- (iv) álgebras A tais que $A/J^i(A)$ é de representação finita e $J^{2i+1}(A) = 0$ (WANG, 1994).

Ainda não há um método efetivo para identificar as álgebras de dimensão finitística finita. O que se tem são algumas técnicas que permitem concluir a finitude da dimensão finitística para alguns casos gerais ou mesmo casos concretos. Por exemplo, nos artigos publicados em 2004 e 2006, (XI, 2004), (XI, 2006), respectivamente, Xi encontrou uma caracterização equivalente para a conjectura da dimensão finitística envolvendo extensões $B \subseteq A$:

- (1) A dimensão finitística de toda k -álgebra de dimensão finita é finita;
- (2) Para cada extensão $B \subseteq A$ de k -álgebras de dimensão finita tal que $J(B)$ é um ideal à esquerda de A , se A tem dimensão finitística finita então B também tem dimensão finitística finita.

Os artigos (XI, 2004; XI, 2006; XI, 2008; XI; XU, 2013; WANG; XI, 2017) caminham na direção da caracterização (2), isto é, encontrar extensões $B \subseteq A$ com propriedades suficientemente boas envolvendo o radical de Jacobson de B de modo que seja possível controlar a dimensão finitística de B pela dimensão finitística de A . Segue uma lista de alguns resultados relevantes nessa direção:

- (i) (XI, 2006, Theorem 3.7) Seja $B \subseteq A$ uma extensão tal que $J(B)$ é um ideal à esquerda de A e $J(B)A = J(A)$. Se $\text{gl.dim}(A) \leq 4$, então $\text{fin.dim}(B) < \infty$.
- (ii) (XI, 2006, Theorem 4.2) Seja $B \subseteq A$ uma extensão tal que $J(B)$ é um ideal à esquerda de A . Se a dimensão de representação de A for menor do que ou igual a 3, então $\text{fin.dim}(B) < \infty$.
- (iii) (XI; XU, 2013, Corollary 1.4) Seja $B \subseteq A$ uma extensão tal que $J(B)$ é um ideal à esquerda de A . Se a dimensão projetiva de A como B -módulo à direita é finita e $\text{fin.dim}(A) < \infty$, então $\text{fin.dim}(B) < \infty$.

(iv) (WANG; XI, 2017, Corollary 3.8) Seja $B \subseteq A$ uma extensão tal que $J^2(B) = J^2(A)$. Se $\text{gl.dim}(A) \leq 2$, então $\text{fin.dim}(B) < \infty$.

Uma outra caracterização equivalente à conjectura da dimensão finitística foi dada por Xi e Xu em 2013 envolvendo a dimensão global relativa (XI; XU, 2013, Proposition 2.9).

Em 2017, Marcos e Green mostraram que é suficiente provar a conjectura da dimensão finitística para álgebras conexas por caminhos, isto é, álgebras kQ/I , onde Q é um aljava tal que, para cada par de vértices $i, j \in Q_0$, existem caminhos $p : i \rightarrow j$ e $q : j \rightarrow i$ (GREEN; MARCOS, 2017, Theorem 6.1).

Neste capítulo, trataremos de extensões de quociente bifinito, isto é, extensões $B \subseteq A$ tais que a dimensão de A/B como B -bimódulo é finita. Iusenko e MacQuarrie, em 2021, provaram que, dada uma extensão $B \subseteq A$ de quociente bifinito, se A/B é um B -módulo à direita projetivo e $\text{fin.dim}(A) < \infty$, então $\text{fin.dim}(B) < \infty$ (IUSENKO; MACQUARRIE, 2021, Proposition 6.6). Provaremos que o resultado continua verdadeiro retirando a hipótese “ A/B é um B -módulo à direita projetivo”. Isto nos permite dar uma outra caracterização equivalente à conjectura da dimensão finitística:

(2'') Para cada álgebra B de dimensão finita, existe uma extensão de quociente bifinito $B \subseteq A$ com $\text{fin.dim}(A) < \infty$.

Para outras abordagens para o problema da conjectura da dimensão finitística, recomendamos ao leitor as leituras dos artigos (WEI, 2009), (WEI, 2011), (GUO, 2019). Para uma imersão na historiografia da conjectura nas últimas décadas, recomendamos a leitura do artigo (ZIMMERMANN-HUISGEN, 2014).

5.1 Preliminares

Seja A uma álgebra de Artin. Denotaremos por $A\text{-mod}$ a categoria de todos os A -módulos à esquerda finitamente gerados. A **dimensão projetiva** de um A -módulo M é o menor inteiro positivo n tal que existe uma resolução projetiva

$$P_* : 0 \rightarrow P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

Se não existir resolução projetiva de comprimento finito, diremos que a dimensão projetiva de M é infinita. Indicaremos por $\text{pd}({}_A M)$ a dimensão projetiva do A -módulo M .

Seja

$$P_* : \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

uma resolução projetiva minimal de M . A n -ésima-sizígia de M , denotada por $\Omega_A^n(M)$, é o núcleo do homomorfismo φ_{n-1} quando n é um inteiro positivo; e, quando $n = 0$, $\Omega_A^0(M) = M$ (veja, por exemplo, (ZIMMERMANN-HUISGEN, 1991)).

Lema 5.1.1. *Seja $\{M_i\}_{i \in I}$ uma família de A -módulos. Então*

$$\text{pd}\left(\bigoplus_{i \in I} M_i\right) = \sup\{\text{pd}({}_A M_i) : i \in I\}.$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (ASSEM, 1997, Chapitre X, Corollaire 1.3) □

Lema 5.1.2. *Seja $0 \rightarrow L \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow 0$ uma sequência exata de A -módulos à esquerda. Então*

- (i) $\text{pd}({}_A N) \leq \sup\{\text{pd}({}_A L) + 1, \text{pd}({}_A M)\};$
- (ii) $\text{pd}({}_A M) \leq \sup\{\text{pd}({}_A L), \text{pd}({}_A N)\};$
- (iii) $\text{pd}({}_A L) \leq \sup\{\text{pd}({}_A M), \text{pd}({}_A N) - 1\}.$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (ASSEM, 1997, Chapitre X, Corollaire 1.4). □

A **dimensão global de uma álgebra** A , denotada por $\text{gl.dim}(A)$, é definida por

$$\text{gl.dim}(A) = \sup\{\text{pd}({}_A M) : M \in A\text{-mod}\}.$$

A **dimensão finitística de uma álgebra** A , denotada por $\text{fin.dim}(A)$, é definida por

$$\text{fin.dim}(A) = \sup\{\text{pd}({}_A M) : M \in A\text{-mod}, \text{pd}({}_A M) < \infty\}.$$

Observação 5.1.3. *Observamos que $\text{fin.dim}(A) \leq \text{gl.dim}(A)$. Além disso, ambas coincidem quando $\text{gl.dim}(A)$ é finita.*

Exemplo 5.1.4. *Seja $A = k[X]/\langle X^2 \rangle$. Cada A -módulo é da forma $[\oplus A] \oplus [\oplus A/J(A)]$, veja, por exemplo, (ZIMMERMANN-HUISGEN, 2014). Como*

$$\dots \rightarrow A \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\varphi} \dots \xrightarrow{\varphi} A \xrightarrow{\pi} A/J(A)$$

é uma resolução projetiva minimal do A -módulo $A/J(A)$, onde $\varphi : A \rightarrow A$ é o homomorfismo de A -módulos definido por $\varphi(\bar{f}) = \bar{f}x$, segue-se que

$$0 = \text{fin.dim}(A) \leq \text{gl.dim}(A) = \infty.$$

5.2 Funtores de Torção

Recomendamos a leitura dos Capítulos IX e X do livro (ASSEM, 1997) para maiores detalhes sobre este tópico.

Sejam m um inteiro positivo. Dada uma resolução projetiva

$$P_* : \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} M \rightarrow 0$$

do A -módulo à direita M e dado um A -módulo à esquerda N , denote por $P_* \otimes_A N$ a sequência induzida

$$\cdots \rightarrow P_n \otimes_A N \xrightarrow{\varphi_n \otimes_A 1_N} P_{n-1} \otimes_A N \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \otimes_A N \xrightarrow{\varphi_0 \otimes_A 1_N} M \otimes_A N \rightarrow 0.$$

Definimos $\text{Tor}_m^A(M, N)$ como sendo

$$\text{Tor}_m^A(M, N) = \ker(\varphi_m \otimes_A 1_N) / \text{Im}(\varphi_{m+1} \otimes_A 1_N).$$

Observação 5.2.1. *A definição de $\text{Tor}_m^A(M, N)$ não depende, a menos de isomorfismo, da escolha da resolução projetiva de M . Veja, por exemplo, (ASSEM, 1997, Chapitre X, §4).*

Lema 5.2.2. (i) *Sejam M um A -módulo à direita, N um A -módulo à esquerda e*

$$P_* : \cdots \rightarrow P_2 \xrightarrow{\varphi_2} P_1 \xrightarrow{\varphi_1} P_0 \xrightarrow{\varphi_0} N \rightarrow 0$$

uma resolução projetiva de N . Para cada $n \geq 0$, tem-se os isomorfismos functoriais

$$\text{Tor}_{n+1}^A(M, N) \cong \text{Tor}_n^A(M, \ker \varphi_0) \cong \cdots \cong \text{Tor}_j^A(M, \ker \varphi_{j-1}).$$

(ii) *Sejam M um A -módulo à direita, N um A -módulo à esquerda e*

$$Q_* : \cdots \rightarrow Q_2 \xrightarrow{\psi_2} Q_1 \xrightarrow{\psi_1} Q_0 \xrightarrow{\psi_0} M \rightarrow 0$$

uma resolução projetiva de M . Para cada $n \geq 0$, tem-se os isomorfismos functoriais

$$\text{Tor}_{n+1}^A(M, N) \cong \text{Tor}_n^A(\ker \psi_0, N) \cong \cdots \cong \text{Tor}_j^A(\ker \psi_{n-j}, N).$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (ASSEM, 1997, Chapitre IX, Lemme 4.3). \square

Lema 5.2.3. (i) *Seja M um A -módulo à direita. Cada sequência exata curta de A -módulos à esquerda $0 \rightarrow N' \rightarrow N \rightarrow N'' \rightarrow 0$ induz uma sequência exata longa*

$$\cdots \rightarrow \text{Tor}_{n+1}^A(M, N'') \rightarrow \text{Tor}_n^A(M, N') \rightarrow \text{Tor}_n^A(M, N) \rightarrow \text{Tor}_n^A(M, N'') \rightarrow \cdots$$

$$\cdots \rightarrow \text{Tor}_1^A(M, N'') \rightarrow M \otimes_A N' \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N'' \rightarrow 0.$$

(ii) Seja N um A -módulo à esquerda. Cada seqüência exata curta de A -módulos à direita $0 \rightarrow M' \rightarrow M \rightarrow M'' \rightarrow 0$ induz uma seqüência exata longa

$$\begin{aligned} \cdots \rightarrow \operatorname{Tor}_{n+1}^A(M'', N) \rightarrow \operatorname{Tor}_n^A(M', N) \rightarrow \operatorname{Tor}_n^A(M, N) \rightarrow \operatorname{Tor}_n^A(M'', N) \rightarrow \cdots \\ \cdots \rightarrow \operatorname{Tor}_1^A(M'', N) \rightarrow M' \otimes_A N \rightarrow M \otimes_A N \rightarrow M'' \otimes_A N \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (ASSEM, 1997, Capítulo IX, Théorème 4.5). \square

Lema 5.2.4. *As seguintes afirmações são equivalentes para cada A -módulo à direita M :*

(i) $\operatorname{pd}(M_A) \leq n$;

(ii) $\operatorname{Tor}_p^A(M, N) = 0$ para todo $p \geq n + 1$ e todo A -módulo à esquerda N .

Demonstração. A prova pode ser encontrada em (ASSEM, 1997, Chapitre X, Théorème 2.9). \square

Lema 5.2.5. *Seja*

$$0 \rightarrow P_n \xrightarrow{\varphi_n} P_{n-1} \xrightarrow{\varphi_{n-1}} \cdots \rightarrow P_0 \xrightarrow{\varphi_0} N \rightarrow 0$$

uma resolução projetiva finita do A -módulo à esquerda N . Se M é um A -módulo à direita tal que, para cada $j \geq 1$, $\operatorname{Tor}_j^A(M, N) = 0$, então

$$0 \rightarrow M \otimes P_n \rightarrow M \otimes P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M \otimes P_0 \rightarrow M \otimes N \rightarrow 0$$

é uma seqüência exata.

Demonstração. Pelo Lema 5.2.3, a seqüência exata curta

$$0 \rightarrow \ker \varphi_0 \hookrightarrow P_0 \xrightarrow{\varphi_0} N \rightarrow 0$$

induz a seqüência exata

$$0 \rightarrow \operatorname{Tor}_1^A(M, N) \rightarrow M \otimes \ker \varphi_0 \rightarrow M \otimes P_0 \xrightarrow{1 \otimes \varphi_0} M \otimes N \rightarrow 0.$$

Por hipótese, $\operatorname{Tor}_1^A(M, N) = 0$, portanto, a seqüência

$$0 \rightarrow M \otimes \ker \varphi_0 \rightarrow M \otimes P_0 \xrightarrow{1 \otimes \varphi_0} M \otimes N \rightarrow 0$$

é exata. Do mesmo modo, como $\operatorname{Tor}_1^A(M, \ker \varphi_j) \cong \operatorname{Tor}_{j+2}^A(M, N) = 0$, segue-se que a seqüência

$$0 \rightarrow M \otimes \ker \varphi_{j+1} \rightarrow M \otimes P_{j+1} \rightarrow M \otimes \ker \varphi_j \rightarrow 0$$

é exata para cada $0 \leq j \leq n - 1$. Logo

$$0 \rightarrow M \otimes P_n \rightarrow M \otimes P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow M \otimes P_0 \rightarrow M \otimes N \rightarrow 0$$

é exata, como queríamos demonstrar. \square

5.3 Dimensão finitística para extensões de quociente bifinito

Uma extensão $B \subseteq A$ é um par de álgebras de Artin B e A tal que B é uma subálgebra de A com a mesma identidade. A dimensão projetiva de um A - B -bimódulo X é denotada por $\text{pd}({}_A X_B)$.

Observação 5.3.1. *Se X é um B - B -bimódulo projetivo então X é um somando direto de cópias de $B \otimes_k B$ como B -bimódulo, logo, X é um somando direto de $B \otimes_k B \cong B^{\dim_k B}$ como B -módulo à esquerda. Portanto X é também um B -módulo à esquerda projetivo. Pelo mesmo raciocínio, X é um B -módulo à direita projetivo.*

Definição 5.3.2. *Uma extensão $B \subseteq A$ é **de quociente bifinito** se $\text{pd}({}_B A/B_B) < \infty$.*

Observação 5.3.3. *A condição $\text{pd}({}_B A/B_B) < \infty$ é uma das condições de extensões limitadas $B \subseteq A$ definida em (CIBILS; LANZILOTTA; MARCOS E. N.; SOLOTAR, 2022). Uma extensão $B \subseteq A$ é **limitada** se:*

- (i) $\text{pd}({}_B A/B_B) < \infty$;
- (ii) A/B é projetivo como B -módulo à esquerda ou B -módulo à direita;
- (iii) existe um inteiro positivo n tal que $A/B^{\otimes n} = 0$.

Observação 5.3.4. *Se a dimensão projetiva do B -bimódulo A/B é finita, então as dimensões projetivas de A/B como B -módulo à esquerda e B -módulo à direita também são finitas.*

Lema 5.3.5. *Se Q é um B -bimódulo projetivo, então $Q \otimes_B X$ é um B -módulo à esquerda projetivo para cada B -módulo X .*

Demonstração. A prova encontra-se em (IUSENKO; MACQUARRIE, 2021, Lemma 6.3). □

Lema 5.3.6. *Seja $B \subseteq A$ uma extensão com $\text{pd}({}_B A) < \infty$. Então*

$$\text{pd}({}_B X) \leq \text{pd}({}_B A) + \text{pd}({}_A X)$$

para todo A -módulo à esquerda X com dimensão projetiva finita.

Demonstração. Se P é um A -módulo à esquerda projetivo, então P é um somando direto de cópias de A , portanto, $\text{pd}({}_B P) \leq \text{pd}({}_B A)$. Dada uma resolução projetiva minimal $P_* \rightarrow X \rightarrow 0$ de X de comprimento $\text{pd}({}_A X)$, então $P_* \rightarrow X$ é também uma sequência exata quando vista como uma sequência de B -módulos à esquerda. Logo $\text{pd}({}_B X)$ é limitada por $\text{pd}({}_A X) + \text{pd}({}_B A)$. □

Lema 5.3.7. *Seja $B \subseteq A$ uma extensão com $\text{pd}(A_B) < \infty$. Para cada B -módulo à esquerda M e para $m \geq \text{pd}(A_B) - 1$,*

$$\text{pd}({}_A A \otimes_B \Omega_B^m(M)) \leq \text{pd}({}_B M).$$

Demonstração. Se $\text{pd}({}_B M) = \infty$, então não há nada a fazer. Suponha que a dimensão projetiva de M seja finita e denote por n_r a dimensão projetiva de A como B -módulo à direita. Sejam $m \geq n_r - 1$ e

$$0 \rightarrow P_n \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow P_0 \rightarrow \Omega_B^m(M) \rightarrow 0.$$

uma resolução projetiva para o B -módulo $\Omega_B^m(M)$.

Segue-se do Lema 5.2.2 que

$$\text{Tor}_j^B(A, \Omega_B^m(M)) \cong \text{Tor}_{1+j+m}^B(A, M)$$

para cada $j \geq 1$. Como $1 + j + m \geq n_A + 1$, então, pela versão dual do Lema 5.2.4, temos

$$\text{Tor}_j^B(A, \Omega_B^m(M)) \cong 0$$

para cada $j \geq 1$.

Segue-se do Lema 5.2.5 que a sequência

$$0 \rightarrow A \otimes_B P_n \rightarrow A \otimes_B P_{n-1} \rightarrow \cdots \rightarrow A \otimes_B P_0 \rightarrow A \otimes_B \Omega_B^m(M) \rightarrow 0$$

é exata. Além disso, a sequência acima é uma resolução projetiva para o A -módulo à esquerda $A \otimes_B \Omega_B^m(M)$ porque cada $A \otimes_B P_j$ é um somando direto de cópias de $A \otimes_B B \cong A$, ou seja, cada $A \otimes_B P_j$ é um A -módulo à esquerda projetivo; logo

$$\text{pd}({}_A A \otimes_B \Omega_B^m(M)) \leq \text{pd}({}_B \Omega_B^m(M)) \leq \text{pd}({}_B M).$$

□

Teorema 5.3.8. *Seja $B \subseteq A$ uma extensão de quociente bifinito. Se a dimensão finitística de A é finita, então a dimensão finitística de B também é finita.*

Demonstração. Denote por n_r a dimensão projetiva de A/B como B -módulo à direita e por d_A a dimensão finitística de A . Seja M um B -módulo à esquerda de dimensão projetiva finita. De modo análogo à prova do lema anterior, tem-se $\text{Tor}_j^B(A/B, \Omega_B^{n_r} M) = 0$ para cada $j \geq 1$. Portanto a sequência exata curta de B -bimódulos

$$0 \rightarrow B \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/B \rightarrow 0$$

induz a sequência exata de B -módulos à esquerda

$$0 \rightarrow \Omega_B^{n_r}(M) \rightarrow A \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M) \rightarrow (A/B) \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M) \rightarrow 0. \quad (5.1)$$

Iremos provar que as dimensão projetivas de $A \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)$ e $(A/B) \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)$ são limitadas por um número independente de M .

Segue-se também da sequência exata curta de B -módulos

$$0 \rightarrow B \hookrightarrow A \rightarrow A/B \rightarrow 0$$

e do Lema 5.1.2 que

$$\text{pd}({}_B A) \leq \sup\{\text{pd}({}_B B), \text{pd}({}_B A/B)\} = \text{pd}({}_B A/B).$$

Então, pelo Lema 5.3.7, temos $\text{pd}({}_A A \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)) \leq \text{pd}({}_B M) < \infty$, portanto, a dimensão projetiva do A -módulo à esquerda $A \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)$ é limitada por d_A . Logo, pelo Lema 5.3.6, a dimensão projetiva do B -módulo à esquerda $A \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)$ é menor do que ou igual a $d_A + \text{pd}({}_B A)$, ou seja,

$$\text{pd}({}_B A \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)) \leq d_A + \text{pd}({}_B A). \quad (5.2)$$

Seja

$$0 \rightarrow Q_m \rightarrow Q_{m-1} \rightarrow \cdots \rightarrow Q_0 \rightarrow A/B \rightarrow 0$$

uma resolução projetiva do B -bimódulo A/B . Então segue-se de

$$\text{Tor}_j^B(A/B, \Omega_B^{n_r}(M)) \cong 0.$$

e do Lema 5.2.5 que a sequência

$$0 \rightarrow Q_m \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M) \rightarrow \cdots \rightarrow Q_0 \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M) \rightarrow (A/B) \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M) \rightarrow 0$$

é exata. Além disso, pelo Lema 5.3.5, cada $Q_j \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)$ é um B -módulo à esquerda projetivo; logo

$$\text{pd}({}_B (A/B) \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)) \leq \text{pd}({}_B A/B_B). \quad (5.3)$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{pd}({}_B M) &\leq n_r + \text{pd}({}_B \Omega_B^{n_r}(M)) \\ &\leq n_r + \sup\{\text{pd}({}_B A \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)), \text{pd}({}_B (A/B) \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)) - 1\} && \text{por 5.1} \\ &\leq n_r + \sup\{d_A + \text{pd}({}_B A), \text{pd}({}_B (A/B) \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)) - 1\} && \text{por 5.2} \\ &\leq n_r + \sup\{d_A + \text{pd}({}_B A), \text{pd}({}_B A/B_B) - 1\} && \text{por 5.3} \\ &\leq \text{pd}({}_B A/B_B) + \sup\{d_A + \text{pd}({}_B A/B_B), \text{pd}({}_B A/B_B) - 1\} && \text{por 5.3} \\ &\leq d_A + 2\text{pd}({}_B A/B_B). \end{aligned}$$

□

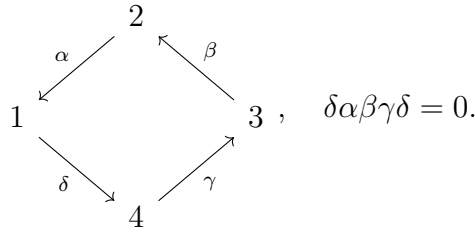
O Teorema 5.3.8 generaliza (IUSENKO; MACQUARRIE, 2021, Proposition 6.6). Como consequência imediata do Teorema 5.3.8, temos o seguinte resultado:

Corolário 5.3.9. *Seja*

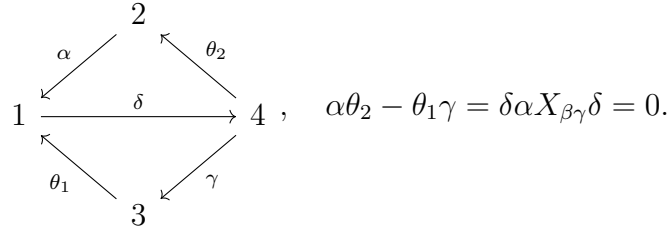
$$B = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \dots \subseteq A_{n-1} \subseteq A_n = A$$

uma cadeia de subálgebras tal que $A_i \subseteq A_{i+1}$ é uma extensão de quociente bifinito para cada $i = 0, \dots, n - 1$. Se $\text{fin.dim}(A) < \infty$, então $\text{fin.dim}(B) < \infty$.

Exemplo 5.3.10. *Seja A a álgebra monomial dada pela seguinte aljava com relações:*



Seja B a subálgebra de A gerada por $\{e_1, e_2, e_3, e_4, \alpha, \gamma, \delta, \theta_1 = \alpha\beta, \theta_2 = \beta\gamma\}$. Então a subálgebra B é dada pela seguinte aljava com relações:

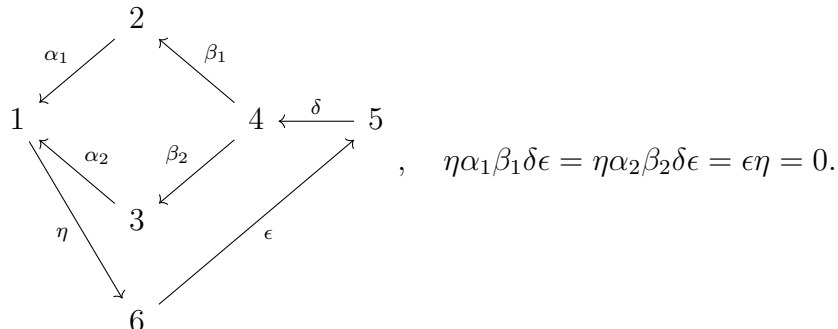


Como o B -bimódulo quociente A/B é isomorfo a $\frac{B}{J(B)}e_2 \otimes_k e_3 \frac{B}{J(B)}$, segue-se que a sequência

$$0 \longrightarrow B_{1,4} \xrightarrow{\varphi_2} B_{1,3} \oplus B_{2,4} \xrightarrow{\varphi_1} B_{2,3} \xrightarrow{\varphi_0} A/B \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva para o B -bimódulo A/B , onde $B_{i,j} = Be_i \otimes_k Be_j$. Logo $\text{pd}({}_B A/B_B) \leq 2$. As dimensões de A/B como B -módulo à esquerda e à direita são ambas iguais a 1, portanto, a extensão $B \subseteq A$ não satisfaz as hipóteses de (IUSENKO; MACQUARRIE, 2021, Proposition 6.6). Como cada álgebra monomial possui dimensão finitística finita, segue-se então do Teorema 5.3.8 que $\text{fin.dim}(B) < \infty$.

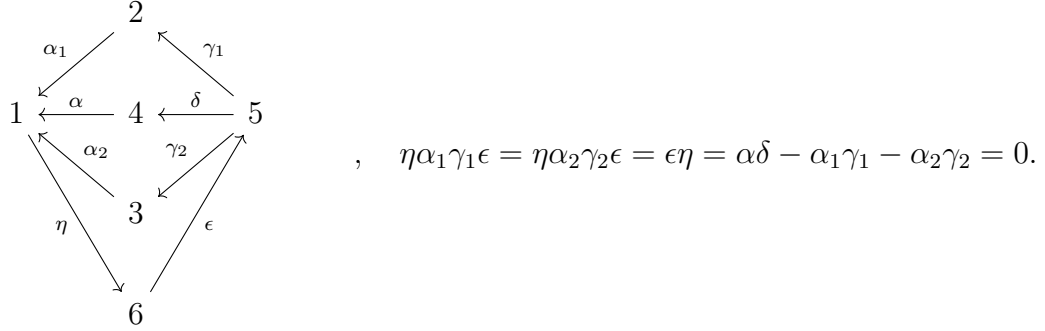
Exemplo 5.3.11. *Seja A a álgebra dada pela seguinte aljava com relações:*



Seja B a subálgebra de A gerada pelo conjunto

$$\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, \alpha_1, \alpha_2, \delta, \epsilon, \eta, \gamma_1 = \beta_1\delta, \gamma_2 = \beta_2\delta, \alpha = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2\}.$$

Então B é dado pela seguinte aljava com relações:



Não é difícil ver que

$$A/B = \{\beta_1 + B, \beta_2 + B, \alpha_1\beta_1 + B, \eta\alpha_1\beta_1 + B\}.$$

Logo a sequência exata

$$0 \longrightarrow B_{1,5} \longrightarrow B_{1,4} \oplus B_{2,5} \oplus B_{3,5} \longrightarrow B_{3,4} \oplus B_{2,4} \longrightarrow A/B \longrightarrow 0$$

é uma resolução projetiva para o B -bimódulo A/B . Portanto $B \subseteq A$ é uma extensão de quociente bifinito. Então, pelo Teorema 5.3.8, $\text{fin.dim} B < \infty$ porque A é uma álgebra monomial.

Corolário 5.3.12. *As afirmações são equivalentes:*

- (1) A dimensão finitística de cada k -álgebra de dimensão finita é finita;
- (2'') Para cada álgebra B de dimensão finita, existe uma extensão de quociente bifinito $B \subseteq A$ com $\text{fin.dim}(A) < \infty$.

Observação 5.3.13. *Os exemplos acima são exemplos de álgebras cujas aljavas são aljavas conexas por caminhos. Ou seja, o Teorema 5.3.8 pode ser utilizado para atacar problemas desta natureza.*

Observação 5.3.14. *No Exemplo 5.3.11, transportamos o problema da dimensão finitística de uma álgebra com relações mais elaboradas do tipo $w_3 - w_2 - w_1 = 0$ para uma álgebra monomial.*

Mostraremos o seguinte resultado que generaliza (CIBILS; LANZILOTTA; MARCOS E. N.; SOLOTAR, 2022, Theorem 4.2).

Proposição 5.3.15. *Seja $B \subseteq A$ uma extensão de quociente bifinito. Se $\text{gl.dim}A$ é finita, então $\text{gl.dim}B$ também é finita.*

Demonstração. Utilizaremos a notação do teorema anterior. Seja M um B -módulo à esquerda qualquer. Pela prova do teorema anterior, a dimensão projetiva do B -módulo $(A/B) \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)$ é menor do que ou igual a $\text{pd}({}_B A/B_B)$. O A -módulo $A \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)$ tem dimensão projetiva menor do que ou igual à dimensão global de A . Portanto, pelo Lema 5.3.6, a dimensão projetiva de $A \otimes_B \Omega_B^{n_r}(M)$ como B -módulo é menor do que ou igual a $\text{gl.dim}A + \text{pd}({}_B A)$. Logo

$$\text{pd}({}_B M) \leq n_r + \sup \{ \text{pd}({}_B A/B_B), \text{gl.dim}A + \text{pd}({}_B A) \} < \infty.$$

□

Observação 5.3.16. *Não é verdade que se $B \subseteq A$ é uma extensão de quociente bifinito, então a $\text{gl.dim}(B) < \infty$ implica que $\text{gl.dim}(A) < \infty$. Com efeito, a extensão $k \subseteq k[X]/\langle X^2 \rangle$ é uma extensão de quociente bifinito, porém $\text{gl.dim}(k) = 0$ e $\text{gl.dim}(k[X]/\langle X^2 \rangle) = \infty$.*

Referências

ASSEM, I. *Algèbre et modules*. Paris: Masson, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 15, 92, 93 e 94.

ASSEM, I.; SIMSON, D.; SKOWRONSKI, A. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras 1: Techniques of representation theory*. Cambridge: London Mathematical Society Student Texts Cambridge University Press, 2006. v. 65. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 17.

AUSLANDER, M.; REITEN, I. On a generalized version of the Nakayama conjecture. *Proceedings of the American Mathematical Society*, v. 52, p. 69–74, 1975. Citado na página 89.

AUSLANDER, M.; REITEN, I.; O.SMALO, S. *Representation theory of Artin algebras*. [S.l.]: Cambridge University Press, 1997. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics). ISBN 9780521599238; 0521599237. Citado na página 15.

AWODEY, S. *Category Theory*. New York: Oxford Logic Guides. The Clarendon Press, Oxford University Press, 2006. v. 49. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 45.

BASS, H. Finitistic dimension and a homological generalization of semiprimary rings. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 95, p. 466–488, 1960. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 89.

BRUMER, A. Pseudocompact algebras, profinite groups and class formations. *Journal of Algebra*, v. 4, p. 442–470, 1966. Citado 2 vezes nas páginas 22 e 23.

CHIN, W. Hereditary and path coalgebra. *Communications in Algebra*, v. 30, p. 1829–1831, 2002. Citado na página 28.

CIBILS, C.; LANZILOTTA, M.; MARCOS E. N.; SOLOTAR, A. Split bounded extension algebras and Han's conjecture. *Pacific Journal of Mathematics, Mathematical Sciences Publishers*, v. 307, n. 1, p. 63–77, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.2140%2Fpjm.2020.307.63>>. Citado na página 11.

CIBILS, C.; LANZILOTTA, M.; MARCOS E. N.; SOLOTAR, A. Jacobi–Zariski long nearly exact sequences for associative algebras. *Bulletin of the London Mathematical Society, Wiley*, v. 53, n. 6, p. 1636–1650, 2021. Disponível em: <<https://doi.org/10.1112%2Fblms.12516>>. Citado na página 11.

CIBILS, C.; LANZILOTTA, M.; MARCOS E. N.; SOLOTAR, A. Han's conjecture for bounded extensions. *Journal of Algebra, Elsevier BV*, v. 598, p. 48–67, 2022. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016%2Fj.jalgebra.2022.01.022>>. Citado 4 vezes nas páginas 11, 12, 95 e 99.

CURTIS, C. W. The structure of non-semisimple algebras. *Duke Mathematical Journal*, v. 21, p. 79–85, 1954. ISSN 0012-7094. Disponível em: <<http://projecteuclid.org/euclid.dmj/1077465586>>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.

- ECKSTEIN, F. The Malcev theorem. *Journal of Algebra*, v. 12, p. 372–385, 1969. ISSN 0021-8693. Disponível em: <[https://doi.org/10.1016/0021-8693\(69\)90038-6](https://doi.org/10.1016/0021-8693(69)90038-6)>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 30.
- GABRIEL, P. Indecomposable representations. II. In: *Symposia Mathematica, v. XI (Convegno di Algebra Commutativa, INDAM, Rome, 1971)*. [S.l.]: Academic Press, London, 1973. p. 81–104. Citado na página 25.
- GREEN, E. L.; KIRKMAN, E.; KUZMANOVICH, J. Finitistic dimensions of finite dimensional monomial algebras. *Journal of Algebra*, v. 136, p. 37–50, 1991. ISSN 0021-8693. Citado na página 90.
- GREEN, E. L.; MARCOS, E. N. Convex subquivers and the finitistic dimension. *Illinois Journal of Mathematics*, Duke University Press, v. 61, n. 3–4, 2017. ISSN 0019-2082. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1215/ijm/1534924832>>. Citado na página 91.
- GREEN, E. L.; ZIMMERMANN-HUISGEN, B. Finitistic dimension of Artinian rings with vanishing radical cube. *Mathematische Zeitschrift*, v. 206, p. 505–526, 1991. Citado na página 90.
- GUO, S. Finitistic dimension conjecture and extensions of algebras. *Communications in Algebra*, Informa UK Limited, v. 47, n. 8, p. 3170–3180, 2019. ISSN 1532-4125. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1080/00927872.2018.1552286>>. Citado na página 91.
- HAN, Y. Hochschild (co)homology dimension. *Journal of the London Mathematical Society*, v. 73, p. 657–668, 2006. Citado na página 11.
- IGUSA, K.; TODOROV, G. On the finitistic global dimension conjecture for Artin algebras. *Fields Institute Communications*, v. 45, p. 201–204, 2005. ISSN 978-0-8218-3415-2. Citado na página 90.
- IUSENKO, K.; MACQUARRIE, J. W. The path algebra as a left adjoint functor. *Algebras and Representation Theory*, v. 23, n. 1, p. 33–52, 2020. ISSN 1386-923X. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s10468-018-9836-y>>. Citado 12 vezes nas páginas 8, 12, 22, 23, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 39 e 43.
- IUSENKO, K.; MACQUARRIE, J. W. Homological properties of extensions of abstract and pseudocompact algebras. *ArXiv:2108.12923*, 2021. Disponível em: <<https://arxiv.org/abs/2108.12923>>. Citado 4 vezes nas páginas 11, 91, 95 e 98.
- IUSENKO, K.; MACQUARRIE, J. W.; QUIRINO, S. A functorial approach to Gabriel k -quiver constructions for coalgebras and pseudocompact algebras. *Bulletin of the Brazilian Mathematical Society, New Series*, 2020. ISSN 1678-7714. Disponível em: <<https://doi.org/10.1007/s00574-020-00227-4>>. Citado 6 vezes nas páginas 8, 9, 10, 50, 52 e 63.
- LANE, S. M. *Categories for the Working Mathematician*. [S.l.]: Springer, 1971. (Graduate Texts in Mathematics №5). ISBN 9780387900360; 0387900365; 9781461298397; 1461298393. Citado na página 46.
- MACQUARRIE, J. W.; SYMONDS, P.; ZALESSKII, P. Infinitely generated pseudocompact modules for finite groups and Weiss’ theorem. *Advances in Mathematics*, 2020. Disponível em: <<https://doi.org/10.1016/j.aim.2019.106925>>. Citado na página 24.

- RIBES, L.; ZALESKII, P. A. *Profinite groups*. [S.l.]: Springer, 2000. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 20, 21 e 24.
- WANG, C.; XI, C. Finitistic dimension conjecture and radical-power extensions. *Journal of Pure and Applied Algebra*, Elsevier BV, v. 221, n. 4, p. 832–846, 2017. ISSN 0022-4049. Disponível em: <<http://dx.doi.org/10.1016/J.JPAA.2016.08.006>>. Citado 2 vezes nas páginas 90 e 91.
- WANG, Y. A note on the finitistic dimension conjecture. *Communications in Algebra*, v. 22, 1994. Citado na página 90.
- WEI, J. Finitistic dimension and Igusa–Todorov algebras. *Advances in Mathematics*, v. 222, p. 2215–2226, 2009. Citado na página 91.
- WEI, J. Finitistic dimension conjecture and conditions on ideals. *Forum Mathematicum*, v. 23, 2011. Citado na página 91.
- XI, C. On the finitistic dimension conjecture I: Related to representation-finite algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, v. 193, p. 287–305, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 90.
- XI, C. On the finitistic dimension conjecture II: Related to finite global dimension. *Advances in Mathematics*, v. 201, p. 116–142, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 11 e 90.
- XI, C. On the finitistic dimension conjecture, III: Related to the pair $eAe \subseteq A$. *Journal of Algebra*, v. 319, p. 3666–3688, 2008. Citado na página 90.
- XI, C.; XU, D. M. The finitistic dimension conjecture and relatively projective modules. *Communications in Contemporary Mathematics*, v. 15, p. 3666–3688, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 90 e 91.
- YAGAMATA, K. Frobenius algebras. *Handbook of Algebra*, v. 1, p. 841–887, 1996. Citado na página 89.
- ZIMMERMANN-HUISGEN, B. Predicting syzygies over monomial relations algebras. *Manuscripta Mathematica*, v. 70, 1991. Citado na página 92.
- ZIMMERMANN-HUISGEN, B. *The finitistic dimension conjectures – a tale of 3.5 decades*. 2014. Citado 2 vezes nas páginas 91 e 92.