

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
ESCOLA DE ENGENHARIA

# Caracterização de sistemas dinâmicos através da simetria de vértices em redes

**Jônatan Henrique Ferreira**

**Orientador:** Prof. Dr. Martín Gómez Ravetti  
**Co-orientador:** Prof. Dra. Laura Corina Carpi

**Belo Horizonte**  
**2019**

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
DEPARTAMENTO DE ENGENHARIA DE PRODUÇÃO  
ESCOLA DE ENGENHARIA

## Caracterização de sistemas dinâmicos através da simetria de vértices em redes

**Jônatan Henrique Ferreira**

Dissertação apresentada, ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Produção – PPGEP – da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Engenharia de Produção.

**Área de Concentração:** Pesquisa Operacional e Intervenção em Sistemas Sociotécnicos

**Linha de Pesquisa:** Modelos e Algoritmos de Otimização para Sistemas em Redes e de Produção

**Orientador:** Martín Gómez Ravetti

**Co-orientador:** Laura Corina Carpi

**Belo Horizonte**  
**2019**

F383c

Ferreira, Jônatan Henrique.

Caracterização de sistemas dinâmicos através da simetria de vértices em redes [recurso eletrônico] / Jônatan Henrique Ferreira. - 2019.  
1 recurso online (87 f.) : pdf.

Orientador: Martín Gómez Ravetti.

Coorientador: Laura Corina Carpi.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 45-87.

Bibliografia: f. 42-44.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de produção - Teses. 2. Simetria - Teses. 3. Sistemas dinâmicos - Teses. I. Gómez Ravetti, Martín. II. Carpi, Laura Corina. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 658.5(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE PRODUÇÃO

UFMG

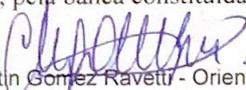
## FOLHA DE APROVAÇÃO

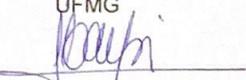
**Caracterização de sistemas dinâmicos através dasimetria de vértices em redes**

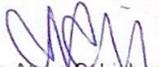
### JÔNATAN HENRIQUE FERREIRA

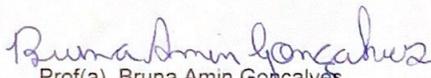
Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, como requisito para obtenção do grau de Mestre em ENGENHARIA DE PRODUÇÃO, área de concentração PESQUISA OPERACIONAL E INTERVENÇÃO EM SISTEMAS SOCIOTÉCNICOS, linha de pesquisa Mod. e Algorit. de Otimiz. para Sistemas em Redes e de Prod..

Aprovada em 23 de dezembro de 2019, pela banca constituída pelos membros:

  
Prof(a). Martin Gomez Ravetti - Orientador  
UFMG

  
Prof(a). Laura Corina Carpi  
CEFET-MG

  
Prof(a). Tiago Alves Schieber de Jesus  
UFMG

  
Prof(a). Bruna Amin Gonçalves  
UNA

Belo Horizonte, 23 de dezembro de 2019.

*"Este trabalho é dedicado ao meu pai, que não mediu esforços para me apoiar nessa etapa e que já não está mais entre nós.*

*À minha mãe, que está sempre em oração por minha vida.*

*E principalmente a Deus, que me sustentou até aqui."*

## AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Martín Gómez Ravetti, sem dúvidas não seria possível concluir essa etapa sem sua orientação. Sua prestatividade, apoio, paciência, dedicação e serenidade são exemplos de vida. Serei eternamente grato pela oportunidade.

À Prof. Dra. Laura Carpi, sua ajuda foi imprescindível para conclusão desse trabalho. Sua disposição e facilidade em externalizar ideias e informações foram essenciais para o desenvolvimento dessa dissertação.

Aos professores da banca Dr. Tiago Alves Schieber de Jesus e Dra. Bruna Amin Gonçalves, pela disposição em contribuir para a melhora deste trabalho.

À minha amiga Thamara Paula dos Santos Dias, pela constante troca de conhecimento, paciência e companheirismo.

Ao meu amigo Rodrigo Gonzaga Araújo, por me abrigar em Belo Horizonte sempre que precisei, meu sincero reconhecimento e gratidão.

À Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de Minas Gerais - FAPEMIG, pela bolsa de estudos.

À todos colegas e amigos de pesquisa do PPGEP que foram um suporte nessa trajetória.

*"Existem muitas hipóteses em ciência que estão erradas. Isso é perfeitamente aceitável, eles são a abertura para achar as que estão certas."*

*(Carl Sagan)*

# Resumo

A simetria é um conceito explorado por diversas áreas da ciência, sendo sempre associado a observação de partes, seja ela física ou não, que coincidam estruturalmente. Os problemas mais simples que tratam a simetria, buscam mostrar se um elemento é ou não simétrico pela possibilidade de se dividi-lo em partes iguais. Nos problemas mais complexos, a busca por padrões, redundância e regularidade toma termos quantitativos para a análise da simetria. Nesta conjuntura, propõe-se neste trabalho, uma análise quantitativa a fim de se obter uma medida de simetria dos nós de redes por meio da divergência de Jensen-Shannon ( $\mathcal{J}$ ), utilizando-se como funções de distribuições de probabilidade (PDF) como distribuições de distância dos nós (NDD) das redes. Foram propostas metodologias para a análise e utilização da medida de simetria dos nós das redes. A princípio, o comportamento da simetria dos nós das redes do modelo Barabási-Albert, foi observado durante a evolução da rede, com o intuito de se compreender como a medida de simetria se comporta com essa evolução. Em seguida, séries temporais do Movimento Browniano Fracionário (MBF), foram convertidas em redes por meio do método proposto por Luque et al. [2009], Grafo de Visibilidade Horizontal (Horizontal Visibility Graph - HVG), no qual transforma séries temporais em redes e a assim, propomos uma aplicação da medida de simetria dos nós das redes geradas para a caracterização dos Expoente de Hurst (H) das séries. Por fim, a partir da correlação de Pearson, dentro de um intervalo de tempo entre as séries temporais das ações que compõem o S&P 500, redes foram construídas com a finalidade de se propor uma alternativa de substituição de ações dentro de uma determinada carteira. Os rendimentos das carteiras de ações foram verificados quanto à substituição de algumas ações por outras simétricas a elas, e comparadas ao rendimento quando essa substituição é feita por ações de maior correlação e por substituição totalmente aleatória. A aplicabilidade da medida de simetria dos nós das redes, junto às metodologias aqui propostas, se mostraram eficientes para os problemas sugeridos.

**Palavras chave:** Simetria, Redes, Jensen-Shannon.

# Abstract

Symmetry is a concept explored by several areas of science, being always associated with the observation of parts, be it physical or not, that structurally coincide. The simplest problems that deal with symmetry, look for defining if an element is symmetrical or not by the possibility of break it into equal parts. In the most complex problems, the search for patterns, redundancy and regularity takes quantitative terms for the analysis of symmetry. At this juncture, this work proposes a quantitative analysis in order to obtain a measure of symmetry of network nodes by means of the Jensen-Shannon divergence ( $\mathcal{J}$ ), using as probability distribution functions (PDF) as node distance distribution (NDD) of the networks. Methodologies have been proposed for the analysis and use of the symmetry measure of the network nodes. At first, the behavior of the symmetry of the network nodes of the Barabási-Albert model was observed during the evolution of the network, in order to understand how the measure of symmetry behaves with this evolution. Then, time series of fractional Brownian motion (MBF) were converted into networks using the method proposed by Luque et al. [2009], Horizontal Visibility Graph (HVG), in which it transforms time series into networks and the thus, we propose an application of the measure of symmetry of the nodes of the generated networks for the characterization of the Hurst Exponent (H) of the series. Finally, based on the Pearson correlation, within a time interval between the time series of the stocks that make up the S&P500, networks were built with the purpose of proposing an alternative to replace stocks within a individual stocks portfolio. The yields of the stock portfolios were checked for the replacement of some stocks by others symmetrical to them, and compared to the yield when this replacement is made by stocks of greater correlation and by totally random substitution. The applicability of the symmetry measure of the network nodes, together with the methodologies proposed here, proved to be efficient for the suggested problems.

**Keywords:** Symmetry, Networks, Jensen-Shannon.

# Siglas e Abreviaturas

$\mathcal{J}$  Jensen-Shannon divergence

H Hurst

HVG Horizontal Visibility Graph - Grafo de Visibilidade Horizontal

MBF Movimentos Brownianos Fracionários - Fractional Brownian Motion

NDD Distribuições de Distância dos Nós - Node Distance Distribution

PDF Funções de Distribuições de Probabilidade - Probability Distribution Functions

S&P 500 Standard & Poor's 500

# Lista de Figuras

2.1	Complex symmetric subgraphs in the US power grid . . . . .	20
2.2	Análise da QJSD em grafos semelhantes. . . . .	21
3.1	Exemplo. Rede com 6 nós. . . . .	25
3.2	Exemplo. Representação de uma rede com 6 nós e 2 como referência, ou seja, a coloração dos demais nós estão vinculadas ao valor da coluna 2 da matriz $\mathcal{D}$ das tabelas 3.1 e 3.2 respectivamente. O quadro da esquerda representa a simetria dessa rede utilizando a matriz de transição e o da direita sem a matriz de transição. O espectro de cores, variando do azul ao vermelho, representam o valor da simetria, no qual, para o nó totalmente simétrico, $\mathcal{D} = 0$ , é atribuído o azul, e para o nó totalmente assimétrico, $\mathcal{D} = 1$ , é atribuído o vermelho. . . . .	27
3.3	Exemplo. Representação de uma rede aleatória com 10 vértices. Vértice 6 como referência. O quadro da esquerda representa a simetria dessa rede utilizando a matriz de transição e o da direita sem a matriz de transição. Obs: Quanto mais próximo de 0 mais simétrico . . . . .	30
3.4	Exemplo. Representação de uma rede aleatória com 10 vértices. Vértice 2 como referência. . . . .	30
3.5	Exemplo de transformação de uma série temporal, com 10 valores, em uma rede por meio do HVG. . . . .	32
4.1	Representação de uma rede baseada no modelo de Barabasi-Albert com 10, 80, 200 e 500 vértices. . . . .	35
4.2	Exemplo. Representação de uma rede BA. Simetria entre o 1º vértice gerado e o 10º vértice ao decorrer da geração de 3490 nós restantes. . . . .	36
4.3	Exemplo. Representação de uma rede BA $m=2$ . Simetria entre o 1º vértice gerado e o 950º vértice ao decorrer da geração de 2550 nós restantes. . . . .	36
4.4	Simetria entre o 1º vértice gerado e o 10º vértice ao decorrer da geração de 3490 nós restantes. . . . .	37
4.5	Simetria entre o 1º vértice gerado e o 950º vértice ao decorrer da geração de 2550 nós restantes. . . . .	38
4.6	Rede gerada a partir da correlação da tabela 4.3. $\rho = 0.8$ e $0.85$ . . . . .	41
4.7	Redes geradas pelos valores de fechamentos diários das ações da S&P 500, utilizando um período 122 dias, entre 25/11/2015 e 20/05/2016, para aplicação da correlação de Pearson $\rho$ , e conseqüentemente ligar os nós com o $\rho$ maior e igual ao estabelecido. . . . .	42
4.8	Representação da rede das ações da S&P 500 com limite de correlação $\rho = 0.8$ no período entre os dias 30 e 122. Vértices 3 e 10, AbbVie e Aetna Inc., respectivamente, em destaque. Vértice 3 como referência. . . . .	43

4.9	Ampliação da figura 4.8. Vértice 3 como referência. . . . .	43
4.10	O gráfico mostra o valor do rendimento do CO e o rendimento e intervalo de confiança de 95% para alterações dos CS, CA e CC. . . . .	45
4.11	Intervalo de confiança de 95% das médias dos retornos dos conjuntos da Figura 4.10. . . . .	45
4.12	Exemplo de séries temporais dos Movimentos Brownianos Fracionários (MBF). . . . .	51
4.13	Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com $10^5$ movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de $10^4$ nós. . . . .	53
4.14	Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com $10^5$ movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de $10^4$ nós. . . . .	53
B.1	Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com $9 \cdot 10^4$ movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de $9 \cdot 10^3$ nós. . . . .	84
B.2	Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com $8 \cdot 10^4$ movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de $8 \cdot 10^3$ nós. . . . .	84
B.3	Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com $7 \cdot 10^4$ movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de $7 \cdot 10^3$ nós. . . . .	85
B.4	Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com $6 \cdot 10^4$ movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de $6 \cdot 10^3$ nós. . . . .	85
B.5	Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com $6 \cdot 10^4$ movimentos brownianos dos Hurst 0.1 e 0.2, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de $6 \cdot 10^3$ nós. Nos testes observados para o intervalo de confiança aplicado, as séries com $6 \cdot 10^4$ movimentos brownianos obtiveram o limite inferior dos movimentos brownianos de Hurst 0.1 e limite superior dos movimentos brownianos de Hurst 0.2 coincidentes. . . . .	101

# Lista de Tabelas

3.1	Valores das NDD da rede da figura 3.2. . . . .	27
3.2	Valores da Matriz de transição da figura 3.2. . . . .	29
3.3	Valores da Matriz $\mathcal{D}$ da figura 3.2 com a matriz de transição. . . . .	29
3.4	Valores da Matriz $\mathcal{D}$ da figura 3.2 sem a matriz de transição. . . . .	29
3.5	Valores da Matriz $\mathcal{D}$ da figura 3.4 sem a matriz de transição, para o vértice 2. . . . .	31
3.6	Valores da Matriz $\mathcal{D}$ da figura 3.3. . . . .	32
4.1	Empresas listadas na S&P 500 entre 02/01/1962 e 30/06/2016 . . . . .	39
4.2	Exemplo de séries temporais de 4 ações com valores de 7 períodos. . . . .	40
4.3	Correlação de Pearson entre as ações da tabela 4.2 do período 1 ao 7. . . . .	41
4.4	Conjunto das ações alteradas CO - Conjunto Original. CS - Conjunto Simetria. CA - Conjunto Aleatória . . . . .	46
4.5	Tabela dos valores da Figura 4.10. . . . .	47
4.6	Gap médio e intervalo de confiança de 95% dos 92 experimentos com 50 carteiras em cada teste. Rede formada com $\rho = 0.85$ . . . . .	49
4.7	Gap médio e intervalo de confiança de 95% dos 94 experimentos com 50 carteiras em cada teste. Rede formada com $\rho = 0.80$ . . . . .	50
4.8	MBF de $10^5$ movimentos. Hurst = 0.1 . . . . .	52
B.1	Empresas listadas na S&P 500 entre 02/01/1962 e 30/06/2016 . . . . .	60
B.2	MBF de $10^5$ movimentos. Hurst = 0.2 . . . . .	86
B.3	MBF de $10^5$ movimentos. Hurst = 0.3 . . . . .	86
B.4	MBF de $10^5$ movimentos. Hurst = 0.4 . . . . .	86
B.5	MBF de $10^5$ movimentos. Hurst = 0.5 . . . . .	87
B.6	MBF de $10^5$ movimentos. Hurst = 0.6 . . . . .	87
B.7	MBF de $10^5$ movimentos. Hurst = 0.7 . . . . .	87
B.8	MBF de $10^5$ movimentos. Hurst = 0.8 . . . . .	88
B.9	MBF de $10^5$ movimentos. Hurst = 0.9 . . . . .	88
B.10	MBF de $9 \cdot 10^4$ movimentos. Hurst = 0.1 . . . . .	88
B.11	MBF de $9 \cdot 10^4$ movimentos. Hurst = 0.2 . . . . .	89
B.12	MBF de $9 \cdot 10^4$ movimentos. Hurst = 0.3 . . . . .	89
B.13	MBF de $9 \cdot 10^4$ movimentos. Hurst = 0.4 . . . . .	89
B.14	MBF de $9 \cdot 10^4$ movimentos. Hurst = 0.5 . . . . .	90
B.15	MBF de $9 \cdot 10^4$ movimentos. Hurst = 0.6 . . . . .	90
B.16	MBF de $9 \cdot 10^4$ movimentos. Hurst = 0.7 . . . . .	90
B.17	MBF de $9 \cdot 10^4$ movimentos. Hurst = 0.8 . . . . .	91
B.18	MBF de $9 \cdot 10^4$ movimentos. Hurst = 0.9 . . . . .	91
B.19	MBF de $8 \cdot 10^4$ movimentos. Hurst = 0.1 . . . . .	91

B.20 MBF de $8 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.2	92
B.21 MBF de $8 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.3	92
B.22 MBF de $8 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.4	92
B.23 MBF de $8 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.5	93
B.24 MBF de $8 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.6	93
B.25 MBF de $8 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.7	93
B.26 MBF de $8 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.8	94
B.27 MBF de $8 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.9	94
B.28 MBF de $7 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.1	94
B.29 MBF de $7 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.2	95
B.30 MBF de $7 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.3	95
B.31 MBF de $7 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.4	95
B.32 MBF de $7 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.5	96
B.33 MBF de $7 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.6	96
B.34 MBF de $7 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.7	96
B.35 MBF de $7 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.8	97
B.36 MBF de $7 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.9	97
B.37 MBF de $6 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.1	97
B.38 MBF de $6 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.2	98
B.39 MBF de $6 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.3	98
B.40 MBF de $6 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.4	98
B.41 MBF de $6 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.5	99
B.42 MBF de $6 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.6	99
B.43 MBF de $6 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.7	99
B.44 MBF de $6 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.8	100
B.45 MBF de $6 \cdot 10^4$ movimientos. Hurst = 0.9	100

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>15</b>
1.1	Objetivos . . . . .	16
1.1.1	Objetivos específicos . . . . .	16
1.2	Justificativa . . . . .	17
1.3	Organização do texto . . . . .	17
<b>2</b>	<b>Revisão da literatura</b>	<b>18</b>
2.1	Simetria e aplicações . . . . .	18
2.2	Isomorfismo e Automorfismo . . . . .	19
2.2.1	Simetria . . . . .	19
2.2.2	Simetria e níveis concêntricos . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Definição do Problema</b>	<b>23</b>
3.1	Metodologia . . . . .	24
3.1.1	Transformação de Séries Temporais em Redes . . . . .	31
<b>4</b>	<b>Aplicações</b>	<b>34</b>
4.1	Barabási-Albert (BA) . . . . .	34
4.1.1	BA - Aplicação . . . . .	34
4.2	Mercado Financeiro - Aplicação . . . . .	39
4.2.1	Carteira de ações . . . . .	44
4.3	Movimentos Brownianos Fracionários . . . . .	48
4.3.1	Caracterização do Expoente de Hurst . . . . .	51
<b>5</b>	<b>Conclusão</b>	<b>54</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>56</b>
<b>A</b>	<b>Arquivos</b>	<b>59</b>
<b>B</b>	<b>Tabelas adicionais</b>	<b>60</b>
B.1	Tabela das ações da SP500 . . . . .	60
B.2	Tabelas do experimento do MBF . . . . .	83

# Capítulo 1

## Introdução

A simetria é difunda e explorada em diversas áreas da ciência como: sociologia, biologia, exatas e etc., dispondo de características referentes à conformidade, perfeição, harmonia e havendo a possibilidade de se dividir algo em duas ou mais partes iguais, sendo ela assimétrica, se isso não for possível. Assim, a simetria é uma propriedade que conecta, compara e relaciona partes similares ou idênticas.

Schwichtenberg [2018] demonstra que na matemática a simetria pode ser definida como a invariância sob uma transformação ou classe de transformações, exemplificando que, se um sistema físico sofrer rotações arbitrárias e sempre continuar o mesmo, esse é simétrico, e que a teoria dos grupos expõe conceitos sobre a simetria.

Em seu estudo, Garrido [2010] exemplifica que a simetria tem a característica de se manter invariável perante algumas transformações, como rotação, reflexão etc., e ratifica que a simetria é normalmente disposta como a presença ou ausência de padrão, de forma discreta, reiterando sobre a utilidade de se caracterizá-la de forma contínua nos mais diversos sistemas, como em sistemas isolados (físicos), sendo que suas leis de conservação estão diretamente relacionadas às suas propriedades de simetria, assim, indicando uma aplicação de caracterização contínua da simetria desses sistemas, de forma que essa análise seja gradual. O autor introduz um método de estimar a simetria, que é a combinação de medidas difusas, onde retornam valores entre 0 e 1, gerando a possibilidade de se ter valores intermediários para ela.

As relações logarítmicas da entropia, medida do grau de desordem de um sistema, e simetria foram abordadas por Lin [1996] em seu estudo. O comportamento da entropia como uma função termodinâmica, a segunda lei da termodinâmica e as relações de entropia e informação foram investigadas com o intuito de se caracterizar as estabilidades estruturais e as espontaneidades do processo na química. O autor destaca que essas relações correspondem ao fato de que, quão maior a entropia maior a simetria, como uma mistura homogênea, que se tipifica pela sua indistinguibilidade e isso inclui todos os tipos de sistemas dinâmicos, estruturas estáticas e processos de perda de informação. Desta forma, o estudo se opõe a clássica visão de que a simetria é intrinsecamente relacionada a conceitos de beleza, proporção e harmonia.

Garrido [2011] explorou as relações dos níveis de simetria/assimetria com medidas de redes, como grau e entropia, com o objetivo de melhorar a percepção e ter mais clareza da funcionalidade e utilidade de tais medidas. O automorfismo de uma rede pode ser considerada como forma de simetria, pois a rede é mapeada em si, preservando a

topologia da rede. Redes aleatórias possuem um comprimento médio do caminho baixo, são esparsas, com baixo coeficiente de agrupamento. Redes como Fractal, Small-World e Scale-Free, são auto-similares, pois uma pequena fração da rede é análoga a própria rede [Bollobás e Riordan, 2008]. Portanto, essas medidas e representações podem ser consideradas correlatas a simetria/assimetria das redes.

Em uma estrutura qualquer a busca por padrões, nos seus mais diversos níveis e finalidades, pode ser atribuída à simetria. Elas podem abranger diferentes proporções de igualdade, vindo a ter um grau de simetria maior ou menor. Caracterizar se há simetria em determinado arranjo parte da definição de qual tipo de semelhança se busca e, em qual contexto se está inserido. A percepção da semelhança em muitos problemas, diferentemente dos casos tradicionais, são intrinsecamente abstratos, e que incorporam análises matemáticas para obtenção do reconhecimento de padrões.

Nas estruturas das redes, diversos quantificadores vêm sendo propostos com objetivo de melhor interpretar seus comportamentos, desde medidas básicas como: grau do vértice, grau médio dos vértices, distribuição da conectividade, diâmetro da rede e etc., até medidas mais complexas como: vulnerabilidade, robustez e etc. Em muitos casos a combinação de algumas dessas medidas, juntamente com equações matemáticas, dão origem a novas medidas que ajudam a responder o problema estudado.

A simetria em redes, ainda pouco explorada na literatura, é relacionada à interatividade dos nós para com a rede. Fundamentalmente, o intuito de se observar e analisar aspectos simétricos em uma rede, é a possibilidade de podermos criar e caracterizar associações dentro de um determinado estudo. Nessa conjectura, se obter vértices que possuam conectividade idêntica ou semelhante para com o restante da rede, proporciona uma leitura da rede que fundamentem sua aplicação, tais como: a possibilidade de remoção de um vértice a fim de verificar a variações na estrutura da rede, obter conjunto de vértices que desempenham o mesmo papel na rede, detectar modularidades na rede e etc.

Assim, identificar nós que possuam similaridade de conexão para com toda a rede, ou seja, nós simétricos, nos leva a diversas possibilidades de aplicações.

## 1.1 Objetivos

O objetivo geral deste trabalho trata-se da análise da simetria dos vértices das redes, com a aplicação de um método que possibilite a quantificação da simetria de cada vértice de uma rede. Assim, introduzir aplicações de simetria para redes.

### 1.1.1 Objetivos específicos

- Definir o conceito de simetria dos vértices de uma rede, considerando o problema proposto nesse trabalho.
- Validar o método de quantificação de simetria dos vértices das redes de diferentes dimensões.
- Testar e avaliar a aplicação do método em diversos tipos de redes.

## 1.2 Justificativa

Nas redes, as características de conectividade são exploradas a fim de conhecer sua estrutura. A identificação de uma rede, vértices e arestas, por meio de métricas, sugere a possibilidade de prever conexões, reconhecer padrões, testar vulnerabilidades, e etc. Diante desta perspectiva, a simetria presente nas redes se torna um interessante campo de estudo.

A simetria pode ser observada em uma rede por seus aspectos topológicos, ou seja, pela forma, estrutura e organização que seus nós estão conectados, também pode ser explorada por meio da atuação que cada vértice exerce na rede. A identificação da simetria dos nós em uma rede pode trazer informações quanto a pontos regulares, padrões e redundâncias do sistema estudado.

## 1.3 Organização do texto

Este trabalho está estruturado em 4 capítulos além da introdução. O Capítulo 2 faz uma revisão da literatura, mostrando as diversas formas de como a simetria é abordada nas redes. O Capítulo 3 retrata a descrição do problema, e na seção 3.1, como foi elaborada a metodologia para tal problema. Aplicações do método foram submetidos a alguns problemas e expostos no Capítulo 4. Por fim, a conclusão e perspectivas de trabalhos futuros são mostrados no Capítulo 5.

# Capítulo 2

## Revisão da literatura

A Simetria é um assunto abordado nas mais diversas áreas da ciência. A ideia central, independente do campo de estudo, é a busca por regularidade, padrão, similaridade, igualdade dentre outros aspectos gerais ou específicos que possam caracterizá-lo como simétrico.

A simetria, ainda que pouco explorada junto as redes, é abordada de diferentes formas e com variadas aplicações.

### 2.1 Simetria e aplicações

Uma das formas de se analisar sistemas é por meio das redes que se formam diante das relações dos seus agentes, denominados de nós ou vértices. Essa relação é atribuída por ligações(arestas) entre os agentes(vértices). Assim, elas podem ser obtidas e construídas por meio de diversos tipos de problemas. É o que mostra MacArthur et al. [2008], onde redes do mundo real: *Biological networks*, *Technological networks* e *Social networks*, são exploradas com o intuito de mostrar a existência de simetria.

Frost et al. [2017] mostram em seu estudo que a simetria e quebra da simetria estão fortemente ligadas a fatores relacionados ao câncer. A quebra de simetria no câncer foi abordada de forma: combinatória, onde células normais sempre se dividem em pares semelhantes, já em células cancerígenas essa divisão se caracteriza por ser assimétrica, que resulta em uma complexidade do sistema e geométrica, que consiste em quebra de simetria em estruturas geométricas convencionais e fractais. Convencionais se remete a real forma geométrica que uma célula possui, sendo que uma célula com formato anormal é visto como diagnóstico para o câncer. Fractais estão ligados a repetições estruturais sequenciais independente do nível espacial e funcional, que consiste em formar redes baseadas nas interações em que se ligam a demais redes, levando a uma certa regularidade de processos, já no câncer, esse equilíbrio é perdido. Assim, os autores sugerem que estudos combinados dos três tipos de quebra de simetria sejam realizados.

Zhang et al. [2017] investigaram o estado dinâmico de uma rede e propuseram a *sincronização remota mediada por incoerência* (IMRS). No trabalho, os autores geraram 3 redes: A, B e C, sendo que A é conectada a B e B é conectada a C, A e B não são diretamente conectadas. Assim, a IMRS é definido por 1 vértice da rede A é identicamente

sincronizado a um vértice  $N$  da rede  $C$ , sendo que os vértices intermediários da rede  $B$  seguem entre si, uma dinâmica estatisticamente incoerente. Os autores estabelecem três condições para que o IMRS seja observado: A existência de um estado para todo instante de tempo, que sejam iguais para o vértice 1 e  $N$ , que o estado de sincronização entre eles sejam estáveis e que cada vértice de  $B$  conectado a  $A$  tem que ser conectado a  $B$  exatamente da mesma maneira. Assim,  $A$  e  $C$  correspondem a um espelho simétrico, sendo que cada vértice em  $A$  corresponde a um vértice em  $C$ , e eles são identicamente sincronizados. Desta forma, a simetria do espelho possibilita a condição geral para o IMRS, que demonstra a incoerência na rede  $B$ . Este estudo possibilita a aplicação do IRMS, por exemplo, em sistemas de segurança de comunicação e distribuição de criptografia de chaves.

## 2.2 Isomorfismo e Automorfismo

Na teoria dos grafos, o isomorfismo e automorfismo são caracterizados por expor a semelhança, equivalência ou similaridade nas redes. O isomorfismo em redes se dá pela comparação de duas ou mais redes, onde elas serão isomórficas se forem idênticas, mesmo que a representação visual não seja similar. O automorfismo em redes, nada mais é que a permutação de vértices de um determinado grafo sem que se altere as suas características de adjacência [Beineke e Wilson, 2004].

Em seu estudo, Silva et al. [2016] fizeram uma revisão da literatura e mostraram que, em geral, a simetria em redes é sempre relacionada ao automorfismo. Isso se dá pela base algébrica, em que estudos introdutórios sobre grafos são fundamentados.

Schieber et al. [2017] propõe uma nova medida para se identificar isomorfismo em redes. Os autores sugerem um novo método que capture as diferenças topológicas das redes, diferentemente de medidas tradicionais que não conseguem capturá-las.

Garrido [2011] demonstra em seu estudo, que o grupo automorfismo é uma constante algébrica de uma rede. Assim, podemos dizer que um automorfismo de um rede é uma forma de simetria na qual a rede é mapeada para si mesma, preservando a conectividade do vértice. A análise de automorfismo pode ser aplicada em gráficos direcionados, em gráficos não orientados e gráficos mistos.

### 2.2.1 Simetria

A simetria em redes é um tema pouco explorado na literatura, deixando uma lacuna aberta para inúmeras aplicações. MacArthur et al. [2008] identificam em seu estudo que, graus de simetria podem ser encontrados nos mais diversos tipos redes reais, mas apenas os grupos de redes bem ordenadas receberam atenção. Assim, a origem e forma da simetria em redes reais expressivas são trabalhadas pelos autores, bem como seus efeitos na função da rede. Várias redes reais onde não se espera simetria, como *Biological networks*, *Technological networks* e *Social networks* foram investigadas a fim de se analisar e encontrar aspectos simétricos. Por meio da estrutura dos grupos de automorfismo de rede, foi proposto uma decomposição geométrica dessas redes a fim de se verificar uma possível simetria. A figura 2.1 mostra o exemplo de subgrafos complexos simétricos obtidos da Rede de Energia dos EUA. Os vértices em branco correspondem aos subgrafos simétricos, os vértices em

preto representam a estrutura adjacentes a esses subgrafos simétricos. Isso mostra que há simetria em redes reais.

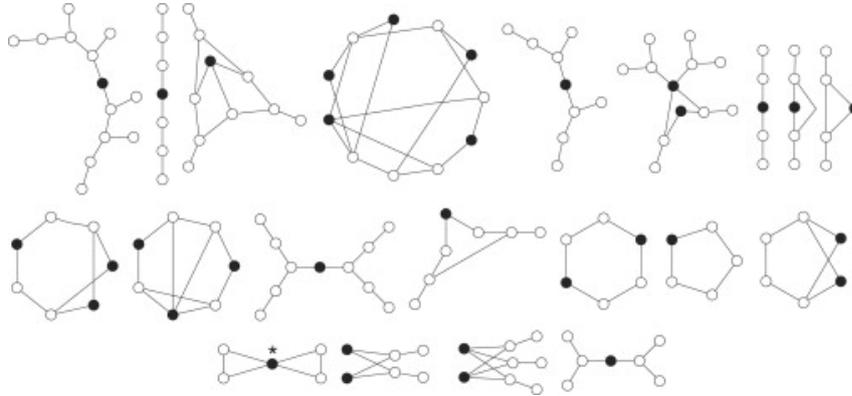


Figura 2.1: Complex symmetric subgraphs in the US power grid .  
Fonte: Elaborado por MacArthur et al. [2008].

Os autores também mostram que a robustez de uma rede, isto é, a capacidade de uma rede sofrer ataques em seus vértices mantendo a efetividade da rede, está diretamente ligada a redundância que essa rede possui, pois uma das características de uma rede robusta é possuir vértices que possam desempenhar o mesmo papel. Sabendo que no automorfismo os vértices são permutados sem alterar sua adjacência, o grau de redundância em uma rede, revela o seu nível de robustez, demonstrando a existência de simetria.

A complexidade de kolmogorov e o automorfismo dos grafos foi explorada por Zenil et al. [2014] mostrando o que grafos com maior grupo de automorfismo tem relação negativa com a complexidade de Kolmogorov, revelando que grafos simétricos podem ser mais difíceis de serem compactados.

Xiao et al. [2008], em uma abordagem teórica, propuseram alterações no modelo Barabási-Albert e demonstraram que padrões semelhantes de conectividade podem vir a criar simetria em tais redes. A relação entre as propriedades similares de ligação e o surgimento da simetria geral, em redes reais, foram demonstradas por meio do modelo, onde ele foi capaz de reproduzir tais propriedades. Assim, complementando a ideia de que a evolução em uma rede é fortemente influenciada por um padrão de ligação similar, consequentemente, por simetria na rede.

## 2.2.2 Simetria e níveis concêntricos

A busca por padrões foi abordada por Amancio et al. [2015] e Silva et al. [2016]. Um novo conceito de se analisar características de simetria em redes, baseado na regularidade das probabilidades de transição de um passeio aleatório concêntrico, foi apresentado. Dois tipos de medidas para simetria foram propostos: A *Backbone* e *Merged*, onde se diferem em remover ligações entre vértices do mesmo nível concêntrico e mesclar os vértices de mesmo nível concêntrico que estejam ligados no grafo original, respectivamente. A entropia de Shannon foi utilizada para o cálculo da simetria. Foi investigado a relação entre a simetria dos dois índices e medidas topológicas tradicionais como: *Node Degree*, *Clustering*, *Stress centrality*, *Betweenness* e *Clustering*, a correlação entre as duas simetrias propostas e essas medidas foi insignificante. Associado ao estudo, se utilizou quatro

técnicas de reconhecimento de padrões, bem conhecidas na literatura, *Support Vector Machines* (SVM), *Multilayer Perceptron* (MLP), *Nearest Neighbors* (KNN) e *Naive Bayes* (NB), para identificar a simetria entre redes de palavras, com o objetivo de se descobrir, com base nas análises, quem são os autores de cada livro. Foram utilizados 40 livros escritos por 8 autores. A Simetria *Merged* combinadas com SVM e MLP retornaram os melhores resultados para os testes, apresentando até 82,5% de taxa de acerto para reconhecimento dos autores. O estudo mostrou que, diferentemente do que se ocorre em medidas tradicionais de centralidade, por exemplo, onde o grau do vértice tem forte relação com a similaridade, as medidas de simetria propostas não apresentaram tal correlação, onde observou-se que palavras com o mesmo número de ligações obtiveram valores de simetria muito diferentes [Amancio et al., 2015].

Utilizando dos mesmos índices de simetria *Backbone* e *Merged*, Silva et al. [2016] aplicaram as medidas para séries históricas reais de ações do mercado financeiro de 1986 a 2002. Redes foram geradas a partir desses dados, onde os 5% do vértices mais correlacionados foram ligados, a partir da correlação de Pearson, dentro de uma janela de tempo de 28 dias entre o determinado dia. Os testes mostraram que a rede, fora do período de crise, são altamente simétricas. Os mesmos testes de correlação entre as medidas deste trabalho e medidas tradicionais foram realizadas e não foram encontradas correlação considerável.

Rossi et al. [2013] propuseram em seu trabalho uma abordagem quantitativa para a simetria, que consiste em medir o grau de simetria que um grafo possui, por meio das caminhadas quânticas em grafos, mostrando que elas podem gerar referência a estrutura simétrica da rede. Foi usada a matriz da divergência quântica de Jensen-Shannon (QJSD) no respectivo estudo, e ela se mostrou eficiente ao mostrar que seu valor aumenta conforme o número aproximado de simetrias no grafo aumenta. Na Figura 2.2 podemos observar que a QJSD conseguiu capturar uma pequena alteração no grafo, onde apenas uma ligação extra entre os vértices 3,4 mostrou que a simetria entre os vértices 2,3 e 2,4 foi perdida.

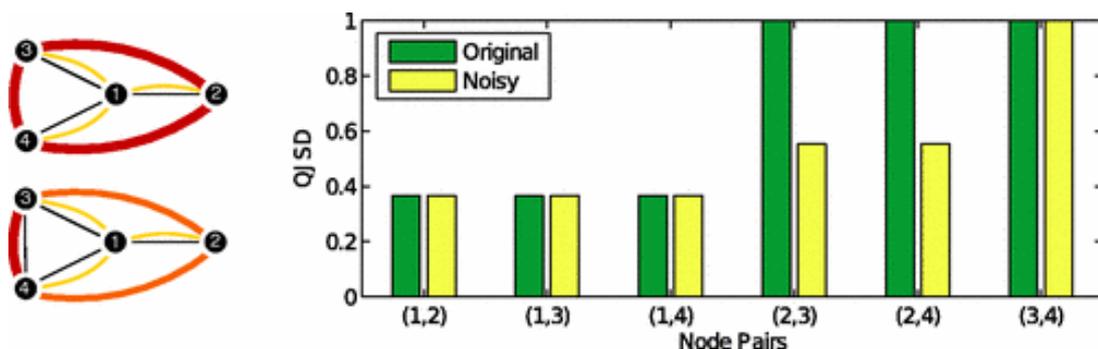


Figura 2.2: Análise da QJSD em grafos semelhantes.  
Fonte: Elaborado por: Rossi et al. [2013].

Segundo Mollgaard et al. [2016] a similaridade dos vértices de uma rede pode ser associada ao peso dos links (arestas). Nesse estudo, uma rede social multicamadas onde os links existem entre chamadas telefônicas, mensagens de texto e por proximidade física (Bluetooth) foi analisada a fim de conhecer a similaridade dos indivíduos. Foi proposto pelos autores medidas para o peso dos links entre os vértices, baseando nas interações que os indivíduos realizavam, separadamente, em cada camada. Os testes também levaram em consideração a influência do peso das ligações na homofilia, testada a partir do fator  $\alpha$  que varia de 0 a 2, onde 0 todas ligações tem a mesma importância e 2 considera apenas

os ligações mais fortes. Variáveis sociodemográficas, padrões comportamentais, atitudes em relação a política e religião e traços básicos dos cinco fatores da personalidade foram utilizadas para montar uma rede a fim de estimar a similaridade entre os indivíduos. Constatou-se que não existe homofilia para personalidades como conscienciosidade, agradabilidade e neuroticismo, mesmo ao se analisar somente indivíduos com forte ligações. Já no padrão de comportamento alcoólico é observado uma relação direta do aumento da similaridade conforme se prioriza aos links com maior peso. Na maioria dos casos a variação do  $\alpha$  se mostrou influente na similaridade, diretamente ou indiretamente, demonstrando que ao se analisar links fortemente ligados, a similaridade é exposta. Também foi demonstrado que a similaridade pode existir para certo aspecto em uma determinada camada e ser ausente nas outras camadas.

## Capítulo 3

# Definição do Problema

Nos estudos de redes, o objetivo da análise da simetria, seja dos vértices, níveis concêntricos, ou da rede como um todo, está diretamente relacionado à possibilidade de se determinar a regularidade que esta estrutura possui. Assim, ao se investigar uma rede, seja ela social, biológica, tecnológica etc., os aspectos de simetria podem resultar características importantes sobre ela.

As relações que existem entre os agentes (vértices) da rede podem ser analisadas ainda que eles não sejam vizinhos, isto é, mesmo que não estejam diretamente conectados, que não possuam grau de conectividade ou distribuição da conectividade similares, dentre outros. Deste modo, identificar a interação de um vértice para com os demais gera a perspectiva de se comparar dois ou mais vértices, ou seja, parametrizar uma conexão de um nó para com outros possibilita detectar e equiparar os nós.

Deste modo, obter uma medida que determine com eficiência a simetria entre os nós de uma rede é um grande desafio.

Assim, o presente estudo se fundamenta na hipótese que cada um dos vértices de uma rede possui algum grau de simetria para com os demais, mesmo que ele seja o mínimo e seja considerado totalmente assimétrico.

Modelos já conhecidos na literatura de geração de rede, como Barabási-Albert (BA), foram utilizados para observar a simetria dos vértices. O modelo de rede citado, foi submetido ao teste de simetria, observando como a simetria dos vértices evolui conforme o tamanho da rede aumenta.

Inúmeros problemas de redes complexas apresentam o atributo *tempo* em sua composição. Dessa forma, essas redes modificam a relação entre seus vértices em detrimento ao *tempo*, podendo, por exemplo, um par de vértices serem muito simétricos em determinado intervalo de tempo e pouco simétrico em um intervalo de tempo diferente.

Nesse caso, as alternativas de aplicações de busca por vértices simétricos em redes, levou esse trabalho a analisar a simetria em redes formadas por meio de séries temporais do mercado de capitais. O mercado financeiro possui ativos que ao longo do tempo sofrem variação no seu preço, gerando assim séries históricas. Nesse trabalho, séries históricas das ações das empresas listadas S&P 500, foram utilizadas para montar as redes, e suas ligações foram determinadas por um limite do coeficiente de correlação de Pearson de  $\rho = 0.80, 0.85, 0.90$  e  $0.95$  em um intervalo de tempo preestabelecido.

Séries de Movimentos Brownianos, com 100 mil movimentos e diferentes Hurst (H), foram transformadas em redes, por meio do Grafo de Visibilidade Horizontal (Horizontal Visibility Graph - HVG), gerando a possibilidade de se obter as simetrias dos seus vértices. As séries foram separadas em grupos de mesmo H. Obtivemos as simetrias dos vértices das redes geradas pelo HVG.

Nesta trabalho, aspectos simétricos voltados aos vértices das redes foram analisados, dentre as várias simetrias possíveis de se existir em uma rede, demonstramos quais vértices são mais simétricos entre um ou mais escolhidos.

A simetria em redes foi abordada de uma forma não encontrada na literatura até o presente momento. O que mais se assemelha do que aqui é proposto é a simetria por níveis concêntricos que, de modo geral, é utilizada para observar a simetria local ou global de uma rede, caracterizada pelas vizinhanças imediatas (nós que estão diretamente conectados), sendo que o nível de simetria mensurado ao redor de um vértice ou de uma rede por completo, é dado se essa rede possui muitas simetrias locais.

É apresentado nesse trabalho uma nova medida de simetria entre vértices.

### 3.1 Metodologia

Nessa seção é apresentado como um quantificador de distância foi utilizado para obter a simetria dos nós de uma rede.

A princípio, a teoria dos grafos estrutura os estudos em redes. Os grafos  $\mathcal{G}$  são compostos por um par de conjuntos  $(\mathcal{V}, \mathcal{E})$  - vértices e arestas. A definição para  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  é que ele seja um conjunto finito não vazio, e  $\mathcal{E} = \{e_1, e_2, \dots, e_m \mid e_m = (v_i, v_j): 1 \leq i, j \leq n, v_i \neq v_j\}$  um conjunto de pares não ordenados de vértices distintos. A ordem do grafo,  $n$ , é o número de vértices que ele possui,  $m$  é número de arestas. A matriz de adjacência  $\mathcal{A}_{n \times n}$  descreve o grafo  $\mathcal{G}$  com valores  $a_{ij}$ , 1 se houver ligação entre o  $v_i$  e o  $v_j$  e 0 se não houver ligação, onde  $i, j = 1, \dots, n$ .

A métrica que define o menor caminho entre dois vértices  $v$  e  $w$  em um grafo é denominada de "distância",  $d(v, w)$ . As propriedades seguintes são necessárias para garantir essa definição [Beineke e Wilson, 2004]:

- 1 -  $d(v, v) = 0$
- 2 -  $d(v, w) \geq 0$
- 3 -  $d(v, w) = d(w, v)$
- 4 -  $d(u, w) \leq d(u, v) + d(v, w)$

Nesse estudo, assumindo as propriedades 1, 2 e 3, funções de distribuições de probabilidade (Probability Distribution Functions - PDF) discretas são obtidas através das distribuições de "distância" dos vértices foram utilizadas, formando uma matriz quadrada,  $n \times n$ , da distribuições de distância dos nós (Node Distance Distribution - NDD), que são representadas por  $n$  colunas  $\mathcal{N}_i$ , onde cada coluna guarda as informações de um vértice  $i$  da rede,  $\{\mathcal{N}_1, \dots, \mathcal{N}_n\}$ . Cada posição da coluna está associada a quantos vértices estão à "distância"  $d$  do vértice  $i$  (menor caminho), ou seja, quantos nós são possíveis de serem alcançados com  $d$  passos ou movimentos a partir do nó  $i$ . Assim, a 1ª posição da coluna, referente a cada nó, guarda quantos nós podem ser alcançados com 1 movimento,

a 2ª posição armazena o número de nós que podem ser alcançados com 2 movimentos, e assim sucessivamente. A última posição de cada coluna,  $d = n$ , mantém a quantidade de vértices que não podem ser alcançados pelo número de passos máximo ( $n - 1$ ), isto é, nós que estão totalmente isolados ou em um subgrafo sem nenhuma conexão com o nó analisado. O valor obtido por cada posição das colunas é dividido por  $n - 1$  e representará a porcentagem  $p_d$  de vértices da rede que podem ser alcançados a partir do vértice  $i$   $\mathcal{N}_i = \{p_d; d = 1, \dots, n\}$ . Assim,  $\sum_{d=1}^n p_d = 1$ .

No grafo da figura 3.1 podemos compreender a formação da NDD. Presumindo um posicionamento no vértice 1, três vértices (2, 4 e 5) podem ser alcançado com um movimento, um vértice (6) pode ser alcançado com dois movimentos. Constata-se que para essa rede, todos vértices possíveis de serem percorridos a partir do 1 foram visitados com 2 passos, com exceção do 3, pois está totalmente isolado do 1, desta forma,  $\mathcal{N}_1 = \{p_1 = 3/5, p_2 = 1/5, p_3 = 0/5, p_4 = 0/5, p_5 = 0/5, p_6 = 1/5\}$ . A tabela 3.1 mostra a construção da NDD para este exemplo.

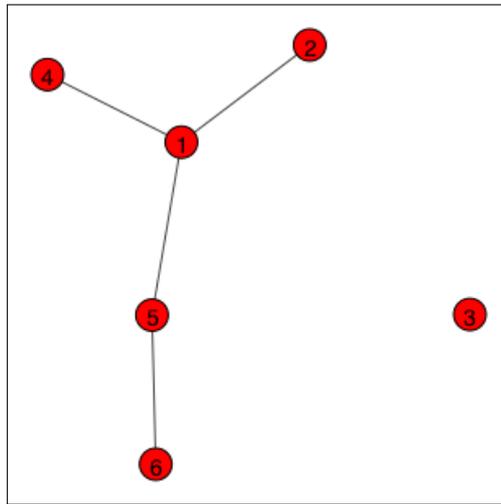


Figura 3.1: Exemplo. Rede com 6 nós.  
Fonte: Elaborada pelo autor.

A matriz de transição ( $\mathcal{T}$ ) é obtida pela matriz de adjacência da rede dividida pelo grau do seu respectivo vértice. Cada posição dessa matriz guarda a probabilidade de estando em determinado vértice, migrar para outro vértice da rede, gerando assim para cada vértice da rede uma função de probabilidade.

Utilizando-se de quantificadores da Teoria da Informação, Shannon entropy e divergência de Jensen-Shannon, [Schieber e Ravetti, 2013; Ravetti et al., 2014; Grosse et al., 2002; Schieber et al., 2016] analisaram diversos tipos de redes. Os quantificadores se mostraram eficientes na captura das distâncias entre as funções de probabilidade das redes estudadas, resultando conclusões práticas sobre elas.

Carpi et al. [2011] propuseram a aplicação da divergência de Jensen-Shannon ( $\mathcal{J}$ ) em três sistemas representados por redes: o modelo Watts–Strogatz, redes de genes durante o desenvolvimento da doença de Alzheimer e em redes climáticas da evolução do fenômeno El Niño/Oscilação Sul (ENOS). Para caracterizar os estados da evolução dessas redes, a distribuição de grau foi extraída de cada rede, gerando assim a função de probabilidade de distribuição de grau de cada uma delas. Com a finalidade de garantir a propriedade 4 de [Beineke e Wilson, 2004], a raiz quadrada da  $\mathcal{J}$  foi adotada. A métrica se mostrou

eficiente para os casos estudados, e validou a  $\mathcal{J}^{1/2}$  para quantificar e comparar estados em evoluções de redes.

Cabral et al. [2014] fizeram análises de variabilidade da rede em relação a remoção e adição de arestas, religação das arestas, remoção de vértices, denominadas de perturbações na rede. Os resultados evidenciam que a distância de Jensen–Shannon é mais estável, frente as perturbações, na maioria das redes em relação a distância de Hellinger e divergência de Kullback-Leibler. Este estudo sustenta a utilização da distância de Jensen-Shannon na busca por simetria em redes, visto que varias redes se alteram com o tempo.

Assim, é proposto neste trabalho a utilização da  $\mathcal{J}^{1/2}$  para medir a simetria dos vértices de uma rede. Dado uma rede qualquer  $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{E})$  retornar o níveis de simetria dos vértices por meio de suas funções de distribuição de probabilidade.

$$\mathcal{D}(i, j) = \frac{\sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j)} + \sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{T}_i, \mathcal{T}_j)}}{2} \quad (3.1)$$

em que

$$\mathcal{J}[\mathcal{N}_1, \mathcal{N}_2] = S \left[ \frac{\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2}{2} \right] - \frac{S[\mathcal{N}_1]}{2} - \frac{S[\mathcal{N}_2]}{2} \quad (3.2)$$

e

$$S[\mathcal{N}] = - \sum_{d=1}^n p_d \log_2[p_d] \quad (3.3)$$

O  $\mathcal{D}$ , mostrado na equação 3.1, representa a simetria entre os vértices  $i$  e  $j$ . Os valores retornados pela equação variam entre 0 e 1, sendo que, quanto mais próximo for de 0 maior será a simetria dos vértices, sendo que 0 indica que os vértices são totalmente simétricos e 1 que eles são totalmente assimétricos.

Inicialmente, testes em redes pequenas e aleatórias foram realizados a fim de observar os resultados da medida  $\mathcal{D}$  com a matriz de transição ( $\mathcal{T}$ ) como está na equação 3.1 e sem utilizá-la como mostra a equação 3.4. Percebeu-se que a  $\mathcal{T}$  absorve, significativamente, as conexões de vértices mais próximos, levando distorções de vértices com mesmo número de ligações, e (NDD) quase idênticas, serem menos simétricos por estarem mais próximo do vértice referência.

$$\mathcal{D}(i, j) = \sqrt{\mathcal{J}(\mathcal{N}_i, \mathcal{N}_j)} \quad (3.4)$$

A figura 3.2 ilustra um exemplo de uma rede de 6 nós, aplicado à medida  $\mathcal{D}$  com a  $\mathcal{T}$  e sem a  $\mathcal{T}$ .

A tabela 3.1 representa as NDD da figura 3.2, onde, por exemplo, a coluna  $\mathcal{N}_1 = \{p_1 = 3/5, p_2 = 1/5, p_3 = 0/5, p_4 = 0/5, p_5 = 0/5, p_6 = 1/5\}$ , ou seja, a partir do nó 1, os nós 2, 4 e 5 podem ser alcançados com 1 movimento, 3 nós de um total de 5 nós restantes da rede,  $p_1 = 3/5$ , ainda a partir do nó 1, apenas o nó 6 pode ser alcançado com 2 movimentos,  $p_2 = 1/5$ . Nesse exemplo, o número máximo de movimentos possíveis de se alcançar os nós são 2 movimentos, visto que já é o suficiente para alcançar todo os

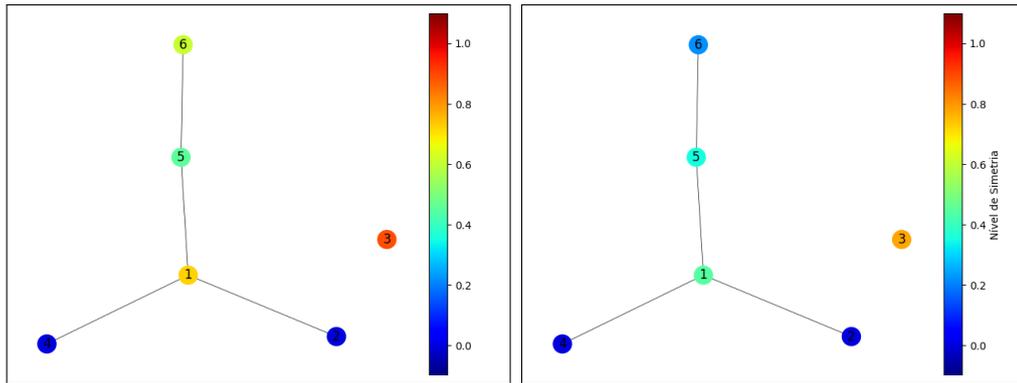


Figura 3.2: Exemplo. Representação de uma rede com 6 nós e 2 como referência, ou seja, a coloração dos demais nós estão vinculadas ao valor da coluna 2 da matriz  $\mathcal{D}$  das tabelas 3.1 e 3.2 respectivamente. O quadro da esquerda representa a simetria dessa rede utilizando a matriz de transição e o da direita sem a matriz de transição. O espectro de cores, variando do azul ao vermelho, representam o valor da simetria, no qual, para o nó totalmente simétrico,  $\mathcal{D} = 0$ , é atribuído o azul, e para o nó totalmente assimétrico,  $\mathcal{D} = 1$ , é atribuído o vermelho.

Fonte: Elaborada pelo autor.

nós ligados ao nó 1, sendo que, movimentos maiores que 2 não alcançarão nenhum nó, restando a última posição da coluna,  $d = n$  de  $\mathcal{N}_1$ , onde o nó 3 não pode ser alcançado por nenhuma quantidade de movimentos,  $p_6 = 1/5$ .

Tabela 3.1: Valores das NDD da rede da figura 3.2.

$\mathcal{N}_1$	$\mathcal{N}_2$	$\mathcal{N}_3$	$\mathcal{N}_4$	$\mathcal{N}_5$	$\mathcal{N}_6$
$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{5}$
$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{2}{5}$
$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$
$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$	$\frac{0}{5}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Como mencionado anteriormente, a  $\mathcal{T}$  é obtida por meio da matriz de adjacência  $\mathcal{A}_{n \times n}$  de um determinado grafo  $\mathcal{G}$  em que cada posição da matriz é dividida pelo grau do seu respectivo nó. A matriz de adjacência representa as conexões de uma rede, onde dois vértices  $v_i$  e  $v_j$  são adjacentes se eles forem conectados, e o valor será  $a_{ij} = 1$ , e  $a_{ij} = 0$  caso contrário. A tabela 3.2 mostra a  $\mathcal{T}$  da rede da figura 3.2, no qual cada coluna representa um nó observado, e cada linha a possibilidade de transição para o nó referente a linha, restando a possibilidade de que, se um nó não for conectado a nenhum outro, ou seja, um nó isolado, os valores da sua respectiva coluna serão 0, sendo 1 para a posição da coluna referente ao próprio nó, pois estando em um nó isolado, não existe possibilidade de transição. Assim, a primeira coluna da tabela 3.2 constitui a probabilidade de a partir do nó 1, e com um movimento, estar nos demais nós da rede.

As tabelas 3.3 e 3.4 mostram como as equações 3.1 e 3.4 capturam a simetria na rede. Em cada coluna temos, em sequência, o nível de simetria do vértice referência para os demais vértices. Por exemplo, tomando-se o nó 2 como referência para com os nós 1 e 4, teremos:

- $\mathcal{N}_2 = \{p_1 = 1/5, p_2 = 2/5, p_3 = 1/5, p_4 = 0/5, p_5 = 0/5, p_6 = 1/5\}$
- $\mathcal{N}_1 = \{p_1 = 3/5, p_2 = 1/5, p_3 = 0/5, p_4 = 0/5, p_5 = 0/5, p_6 = 1/5\}$
- $\mathcal{N}_4 = \{p_1 = 1/5, p_2 = 2/5, p_3 = 1/5, p_4 = 0/5, p_5 = 0/5, p_6 = 1/5\}$
- $(\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_1)/2 = \{p_1 = 2/5, p_2 = 3/10, p_3 = 1/10, p_4 = 0/10, p_5 = 0/10, p_6 = 1/5\}$
- $(\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_4)/2 = \{p_1 = 1/5, p_2 = 2/5, p_3 = 3/10, p_4 = 0/5, p_5 = 0/10, p_6 = 1/5\}$

Aplicando-se os itens acima na equação 3.3, teremos:

- $S[\mathcal{N}_2] = -\sum_{d=1}^n p_d \log_2[p_d] = -((1/5 * \log_2(1/5)) + (2/5 * \log_2(2/5)) + (1/5 * \log_2(1/5)) + (0/5 * \log_2(0/5)) + (0/5 * \log_2(0/5)) + (1/5 * \log_2(1/5))) \approx 1.9219$
- $S[\mathcal{N}_1] \approx 1.3709$
- $S[\mathcal{N}_4] = S[\mathcal{N}_2]$
- $S[(\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_1)/2] \approx 1.8464$
- $S[(\mathcal{N}_2 + \mathcal{N}_4)/2] \approx 1.9219$

Assim, podemos calcular a equação 3.4:

- $\mathcal{D}(2, 1) = \sqrt{\mathcal{J}[\mathcal{N}_2, \mathcal{N}_1]} = \sqrt{S\left[\frac{\mathcal{N}_1 + \mathcal{N}_2}{2}\right] - \frac{S[\mathcal{N}_2]}{2} - \frac{S[\mathcal{N}_1]}{2}}$   
 $= \sqrt{1.8464 - 1.9219/2 - 1.3709/2} \approx 0.4472$
- $\mathcal{D}(2, 4) = 0$

Na tabela 3.3, na primeira coluna, vértice 1, observa-se que, o vértice 5, valor (0.5987), seguido pelo vértice 6, valor (0.6012), vértices 2 e 4, valor (0.7236), vértice 3, valor (0.08905), apresentam nessa respectiva ordem, os níveis de simetria em relação ao vértice 1. Na segunda coluna, o vértice 4, valor (0.), vértice 5, valor (0.4553), vértice 6, valor (0.6112), vértice 1, valor (0.7236), vértice 3, valor (0.08905). Nessa rede, o vértice 3, apresenta-se como o vértice menos simétrico da rede, para todos os vértices ele é o menos simétrico.

Ainda analisando a figura 3.2, é observado que os nós 2 e 4 se dispõem de interações iguais para com o restante da rede, que também é observada nas colunas 2 e 4 da tabela 3.3.

Tabela 3.2: Valores da Matriz de transição da figura 3.2.

	Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5	Nó 6
Nó 1	$\frac{0}{3}$	$\frac{1}{1}$	0	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{1}$
Nó 2	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$	0	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{1}$
Nó 3	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{1}$	1	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{1}$
Nó 4	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$	0	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{0}{1}$
Nó 5	$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{1}$	0	$\frac{0}{1}$	$\frac{0}{2}$	$\frac{1}{1}$
Nó 6	$\frac{0}{3}$	$\frac{0}{1}$	0	$\frac{0}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{0}{1}$

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3.3: Valores da Matriz  $\mathcal{D}$  da figura 3.2 com a matriz de transição.

Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5	Nó 6
0.	0.7236	0.8905	0.7236	0.5987	0.6012
0.7236	0.	0.8905	0.	0.4553	0.6107
0.8905	0.8905	0.	0.8905	0.8905	0.8905
0.7236	0.	0.8905	0.	0.4553	0.6107
0.5987	0.4553	0.8905	0.4553	0.	0.7495
0.6012	0.6107	0.8905	0.6107	0.7495	0.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3.4: Valores da Matriz  $\mathcal{D}$  da figura 3.2 sem a matriz de transição.

Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5	Nó 6
0.	0.4472	0.7810	0.4472	0.1975	0.5248
0.4472	0.	0.7810	0.	0.3528	0.2214
0.7810	0.7810	0.	0.7810	0.7810	0.7810
0.4472	0.	0.7810	0.	0.3528	0.2214
0.1975	0.3528	0.7810	0.3528	0.	0.4990
0.5248	0.2214	0.7810	0.2214	0.4990	0.

Fonte: Elaborada pelo autor.

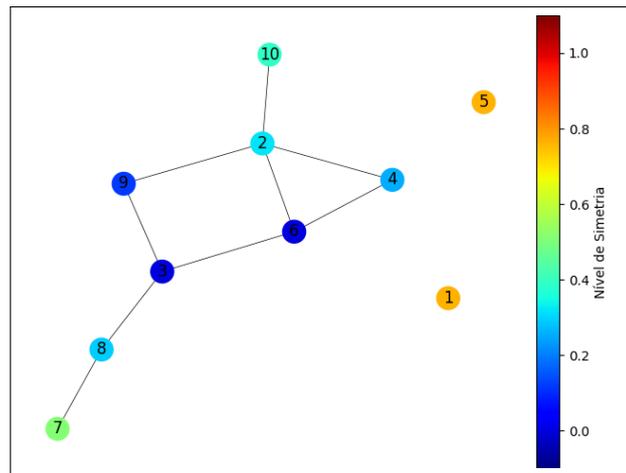


Figura 3.3: Exemplo. Representação de uma rede aleatória com 10 vértices. Vértice 6 como referência. O quadro da esquerda representa a simetria dessa rede utilizando a matriz de transição e o da direita sem a matriz de transição. Obs: Quanto mais próximo de 0 mais simétrico

Fonte: Elaborada pelo autor.

Observando as coluna do vértice 2 das tabela 3.3 e 3.4, podemos concluir que, utilizando a matriz de transição, o vértice mais simétrico ao 2 foi o 5 com  $\mathcal{D}(2, 5) = 0.4553$ , seguido pelo 6 com  $\mathcal{D}(2, 6) = 0.6107$ . Ademais, sem a matriz de transição essa ordem alterou, sendo  $\mathcal{D}(2, 5) = 0.3528$  e  $\mathcal{D}(2, 6) = 0.2214$ . Analisando a figura 3.2 e ao considerar que a comparação de colunas da matriz de transição da tabela 3.2 somente irá absorver similaridade de conexões de vizinhos diretos (com quem possuem ligação) e que esta modificou a ordem de simetria do exemplo analisado, optou-se que, usar a medida  $\mathcal{D}$  sem a matriz de transição é mais adequada para o uso da simetria proposta. Sendo assim, somente a equação 3.4 foi utilizada para o calculo da simetria dos nós nas aplicações do presente trabalho.

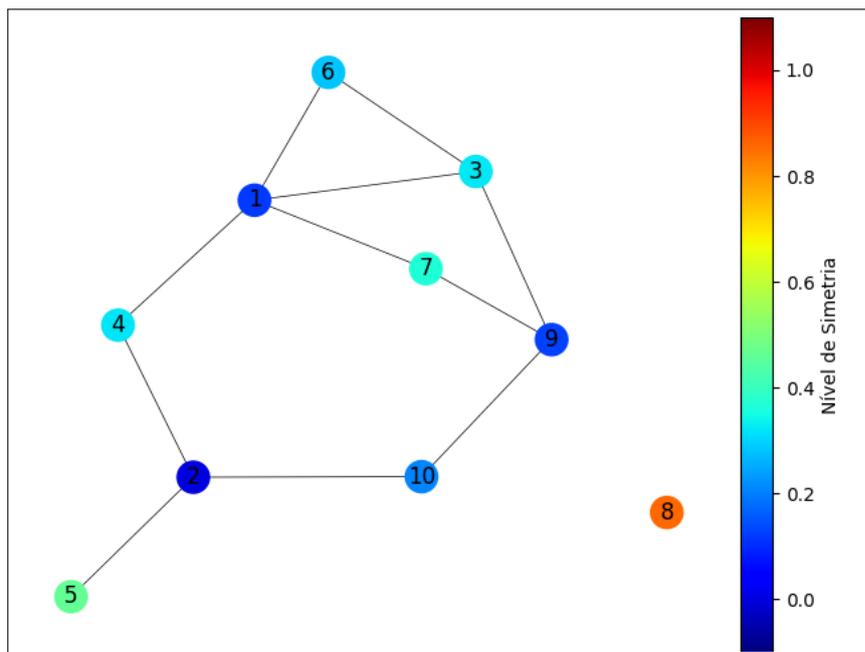


Figura 3.4: Exemplo. Representação de uma rede aleatória com 10 vértices. Vértice 2 como referência.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 3.5: Valores da Matriz  $\mathcal{D}$  da figura 3.4 sem a matriz de transição, para o vértice 2.

Nó 2
0.1175
0.
0.3249
0.3213
0.4654
0.2824
0.3644
0.8599
0.1270
0.2082

Fonte: Elaborada pelo autor.

A tabela 3.5 apresenta os valores da simetria da figura 3.4 em relação ao vértice 2. O vértice menos simétrico ao 2 é o vértice desconectado, 8 com  $\mathcal{D} = 0.8599$ , e os mais simétricos são os vértices 1 e 9, com  $\mathcal{D} = 0.1175$  e  $\mathcal{D} = 0.1270$ , respectivamente.

Assim, definimos que dois ou mais nós serão totalmente simétricos se possuírem suas NDD idênticas, ou seja, sem nenhuma variação em nenhuma posição da coluna de suas respectivas PDF. Em decorrência, se dois nós são totalmente simétricos, eles terão o mesmo nível de simetria para quaisquer outros nós da mesma rede. É o que se verifica na figura 3.3 juntamente com sua respectiva matriz  $\mathcal{D}$ , tabela 3.6, no qual nota-se que os nós desconectados da rede, nó 1 e 5, são totalmente simétricos  $\mathcal{D}(1, 5) = \mathcal{D}(5, 1) = 0$ , e possuem o mesmo valor  $\mathcal{D} = 0.7628$  para todos os demais nós. Na figura 3.2 e tabela 3.4 também constatamos que os nós 2 e 4 possuem  $\mathcal{D}$  idênticos para qualquer nó da rede, e possuem  $\mathcal{D}(2, 4) = \mathcal{D}(4, 2) = 0$ .

### 3.1.1 Transformação de Séries Temporais em Redes

Lacasa et al. [2008] propuseram um método de transformação de séries temporais em redes, algoritmo de visibilidade de grafo (VG). Luque et al. [2009], em seguida, apresentam uma simplificação do VG, o algoritmo de grafo de visibilidade horizontal (HVG), que, dado uma série temporal com  $T$  elementos,  $x = \{1, \dots, T\}$  e  $f(t)$ , cada par,  $x = i$  e  $x = j$ , será conectado, desde que seja possível traçar uma reta horizontal entre  $f(i)$  e  $f(j)$  sem que haja interferência de um  $f(k)$ , ou seja,  $i, j > k \forall i < k < j$ , e segue as características do VG, sendo elas: Conexo em que cada nó está conectado no mínimo as suas posições adjacentes; Arestas não dirigidas; Invariante sob transformação afins dos dados da série, no qual a visibilidade para a construção do algoritmo segue constante independente do redimensionamento dos eixos  $x$  e  $y$ . A figura 3.5 mostra um exemplo dessa transformação, assim, esse método foi aplicado para converter as séries temporais em redes.

Tabela 3.6: Valores da Matriz  $\mathcal{D}$  da figura 3.3.

Nó 1	Nó 2	Nó 3	Nó 4	Nó 5	Nó 6	Nó 7	Nó 8	Nó 9	Nó 10
0.	0.7628	0.7628	0.7628	0.	0.7628	0.7628	0.7628	0.7628	0.7628
0.7628	0.	0.3213	0.2630	0.7628	0.3213	0.4000	0.2333	0.4000	0.4180
0.7628	0.3213	0.	0.2522	0.7628	0.	0.5139	0.2920	0.1175	0.3912
0.7628	0.2630	0.2522	0.	0.7628	0.2522	0.3719	0.1472	0.2475	0.2630
0.	0.7628	0.7628	0.7628	0.	0.7628	0.7628	0.7628	0.7628	0.7628
0.7628	0.3213	0.	0.2522	0.7628	0.	0.5139	0.2920	0.1175	0.3912
0.7628	0.4000	0.5139	0.3719	0.7628	0.5139	0.	0.3104	0.5207	0.2630
0.7628	0.2333	0.2920	0.1472	0.7628	0.2920	0.3104	0.	0.3104	0.3014
0.7628	0.4000	0.1175	0.2475	0.7628	0.11753	0.5207	0.3104	0.	0.3612
0.7628	0.41801	0.3912	0.2630	0.7628	0.3912	0.2630	0.3014	0.3612	0.

Fonte: Elaborada pelo autor.

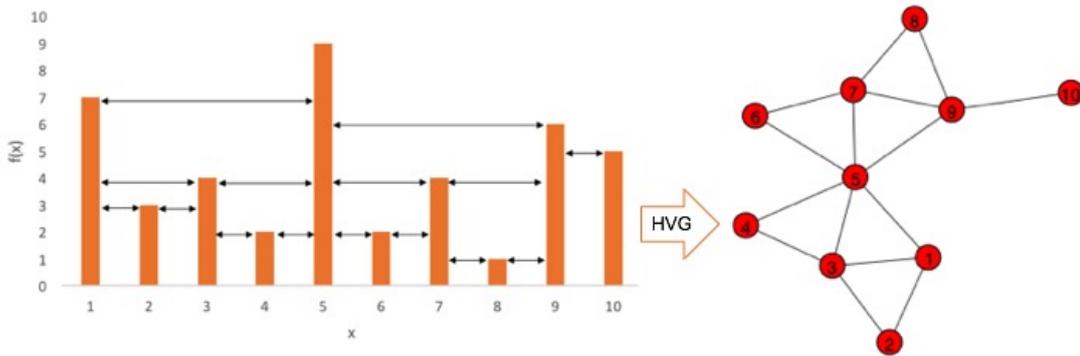


Figura 3.5: Exemplo de transformação de uma série temporal, com 10 valores, em uma rede por meio do HVG.

Fonte: Elaborada pelo autor.

No mesmo estudo, Lacasa et al. [2008] mostraram que a distribuição do grau dos grafos gerados pelo VG correspondiam a lei de potência  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  e Luque et al. [2009] provaram que todo grafo gerado por uma série aleatória por meio do HVG terá  $P(k) = (1/3)(2/3)^{k-2}$ . Posteriormente, Lacasa e Toral [2010] tentaram utilizar do HVG para caracterizar sistemas caóticos e estocásticos correlacionados e não correlacionado. Após gerarem as redes e computar a distribuição de grau, considerando que  $P(k) \sim \exp(-\lambda k)$ , sendo  $\lambda$  um parâmetro positivo, e  $k$  o grau do nó. Obtiveram que,  $\lambda_c = \ln(3/2)$  é o valor de fronteira dos sistemas estocásticos ( $\lambda > \lambda_c$ ) dos sistemas caóticos ( $\lambda < \lambda_c$ ). Ravetti et al. [2014] mostraram que nos estudos de Lacasa e Toral [2010], diversos exemplos apresentaram caracterizações diferentes ao proposto pela fronteira de  $\lambda_c = \ln(3/2)$ , e propuseram uma metodologia, também por meio do HVG, utilizando quantificadores da Teoria da Informação para discriminar sistemas caóticos e estocásticos correlacionados e não correlacionados.

Os grafos resultantes das séries dos MBF por meio do VG foram submetidos a análises em Lacasa et al. [2009] com o intuito de se identificar o H. Nos testes o H obteve uma relação linear com lei de potência  $P(k) \sim k^{-\gamma}$  das suas distribuições de graus, onde

$\gamma(H) = 3 - 2H$ , sendo observado uma boa aproximação para o  $H$  nos exemplos testados. Gonçalves [2016] examinou o estudo de Lacasa et al. [2009] aumentando o tamanho das séries examinadas. Os resultados mostram que a aproximação linear do  $H$  por  $\gamma(H) = 3 - 2H$  se mostrou instável. Em seguida, os autores demonstraram que  $P(k) \sim \exp(-\lambda k)$  proporciona um melhor ajuste à função de distribuição de grau das redes geradas pelo HVG do que  $P(k) \sim k^{-\gamma}$ , assim propuseram uma alternativa para a aproximação do  $H$  por meio da PDF da distribuição de grau das redes geradas pelo HVG, denominada de Lambda  $\lambda$ , os autores testaram redes de tamanho  $N = 10^4$  até  $N = 2 \cdot 10^6$  ajustaram uma reta do gráfico  $\ln(P(k))$  versus o grau  $k$  para onde o valor de  $\lambda$ , que é a inclinação da reta, e é encontrado pelo método dos mínimos quadrados, e concluíram o valor de  $\lambda$  começa a se estabilizar nas redes de tamanho  $N = 2 \cdot 10^6$  onde  $\lambda(H) = 0,677 + 0,460 H$ .

Como mostrado, os métodos de transformação de séries temporais em redes produziram uma variedade de possibilidades de aplicações para caracterização de sistemas, assim como seus parâmetros.

# Capítulo 4

## Aplicações

### 4.1 Barabási-Albert (BA)

Esse capítulo retrata a evolução e comportamento da simetria dos vértices da rede de Barabási-Albert (BA) por meio da medida proposta nesse trabalho. As figuras 4.1 mostram o crescimento da rede gerada pelo modelo do BA  $m = 2$  e a simetria dos vértices em relação ao vértice 1, sendo  $m$  o valor de arestas que cada novo vértice possuirá ao inserido na rede Barabási e Albert [1995]. A priori, os testes mostraram que os novos vértices adicionados tendem a ser cada vez menos simétricos aos de origem. Uma análise da evolução da simetria dos vértices da rede de BA foi feita para se avaliar a medida  $\mathcal{D}$ .

As redes foram geradas pela biblioteca do python-igraph Barabasi.

#### 4.1.1 BA - Aplicação

As redes de BA foram geradas para até 3500 vértices, utilizando o número de arestas a serem conectadas de um novo nó aos nós existentes de  $m = 2, 3, 4, 5$  e  $6$ . Observou-se que, as redes com números de vértices maiores que 3500 não apresentaram variações relevantes em relação à medida  $\mathcal{D}$  comparadas com as que aqui foram investigadas.

Primeiramente analisou-se o comportamento da simetria entre dois vértices que foram inseridos inicialmente à rede, no qual a cada novo nó incluído foi calculado valor de  $\mathcal{D}(1, 10)$ , sendo o cálculo iniciado a partir do 10º nó gerado. Assim, como podemos observar na figura 4.2, a evolução da simetria entre o 1º e o 10º vértice gerado ao decorrer da formação dos 3490 restantes da rede, tendeu a aumentar e a se estabilizar com o crescimento da rede, no obstante, na figura 4.3 verifica-se que a simetria entre o 1º e o 950º, sendo eles os dois vértices com intervalo de inserção maior do que o da primeira observação, a simetria  $\mathcal{D}(1, 950)$  se mostrou baixa e com pouca oscilação, não maior que 0.09, ao decorrer da geração dos 2550 vértices restantes.

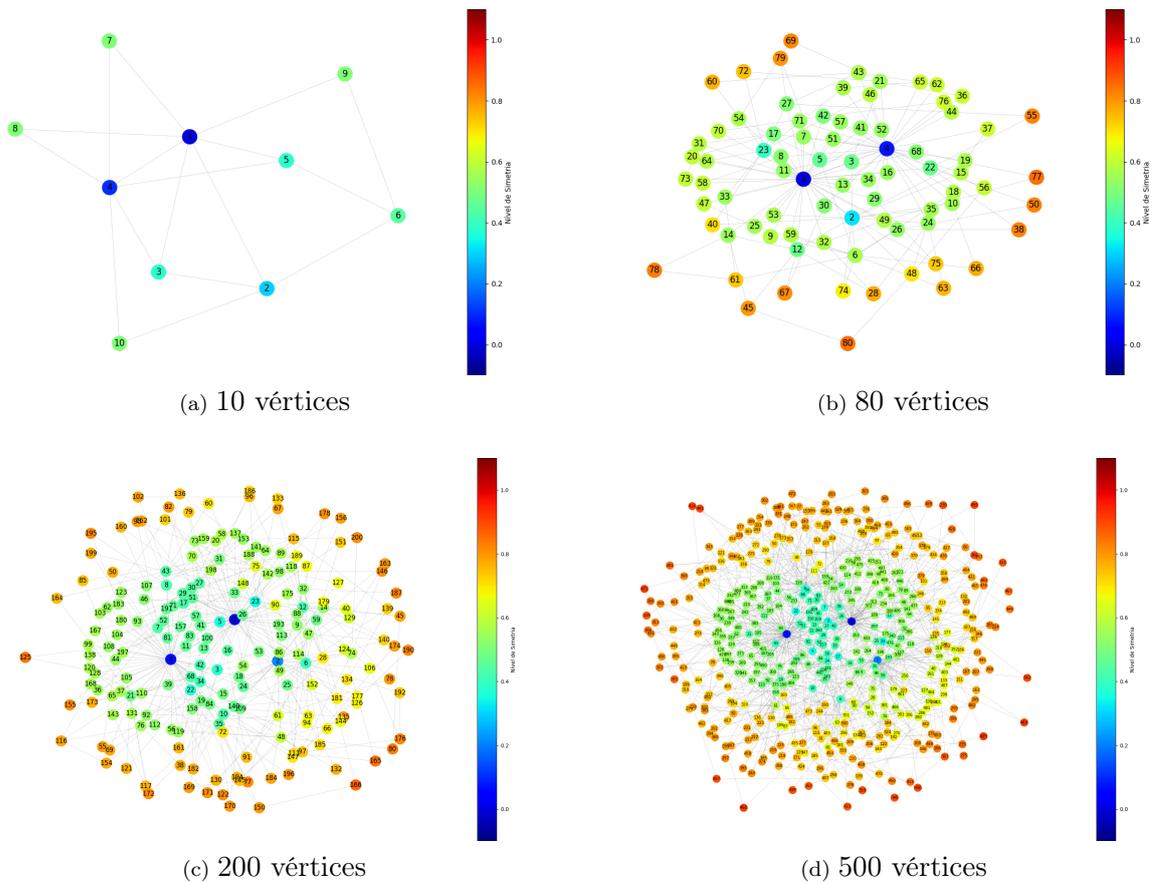


Figura 4.1: Representação de uma rede baseada no modelo de Barabasi-Albert com 10, 80, 200 e 500 vértices. Vértice 1 como referência.

Fonte: Elaborada pelo autor.

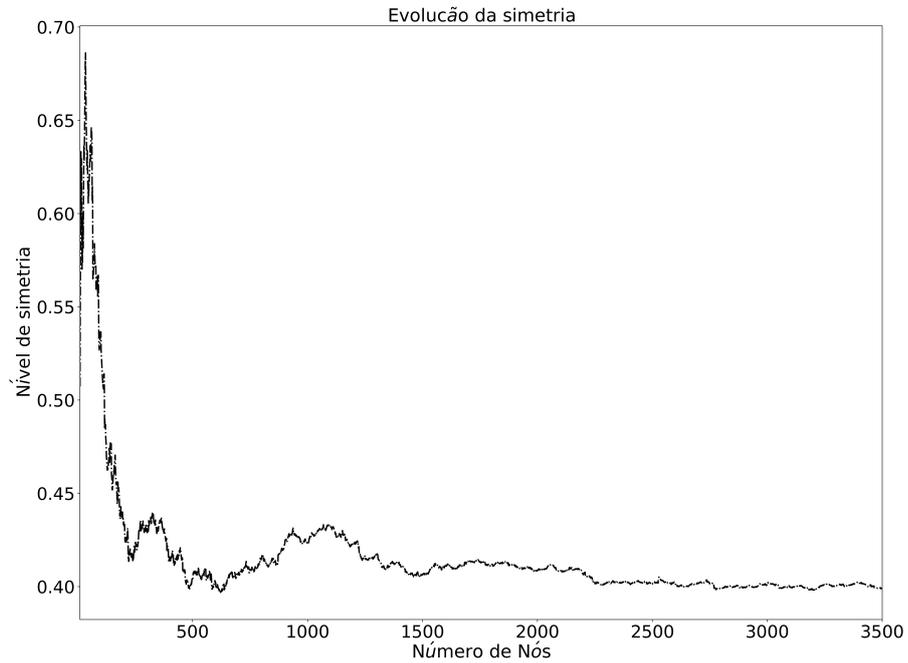


Figura 4.2: Exemplo. Representação de uma rede BA. Simetria entre o 1º vértice gerado e o 10º vértice ao decorrer da geração de 3490 nós restantes.

Fonte: Elaborada pelo autor.

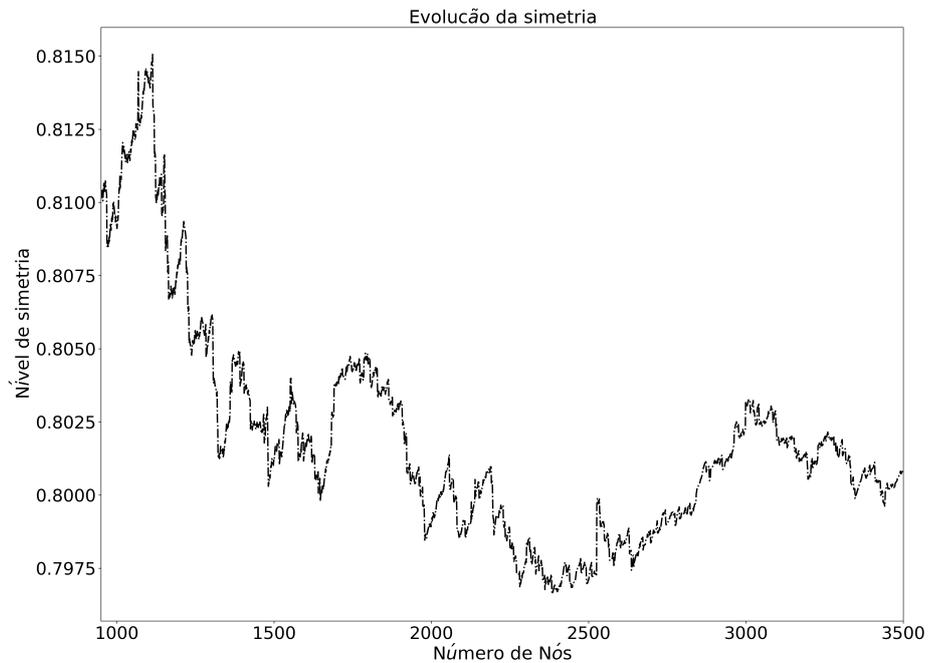


Figura 4.3: Exemplo. Representação de uma rede BA  $m=2$ . Simetria entre o 1º vértice gerado e o 950º vértice ao decorrer da geração de 2550 nós restantes.

Fonte: Elaborada pelo autor.

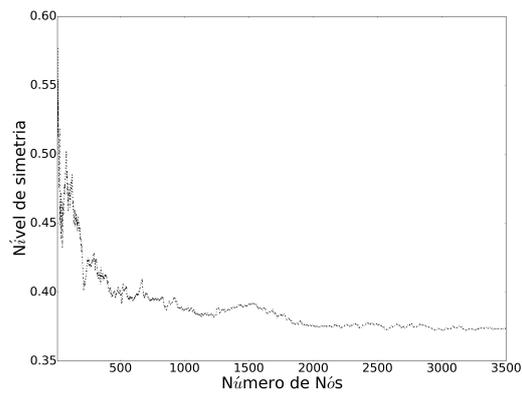
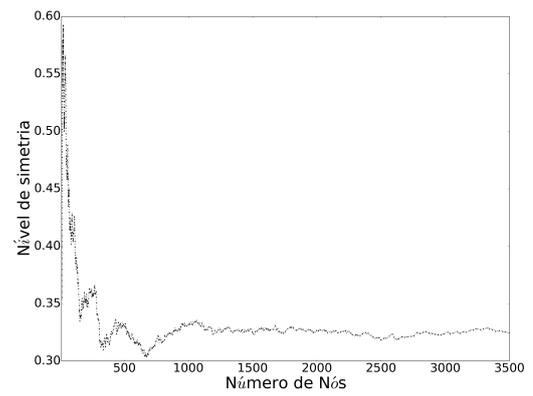
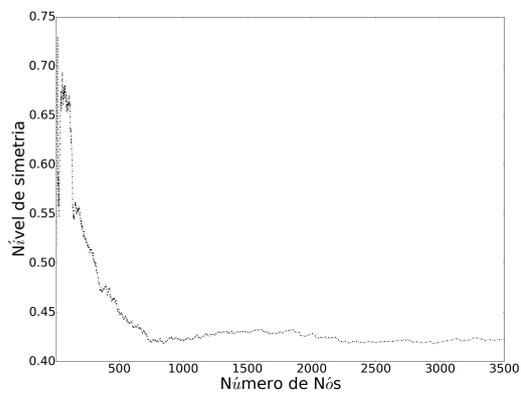
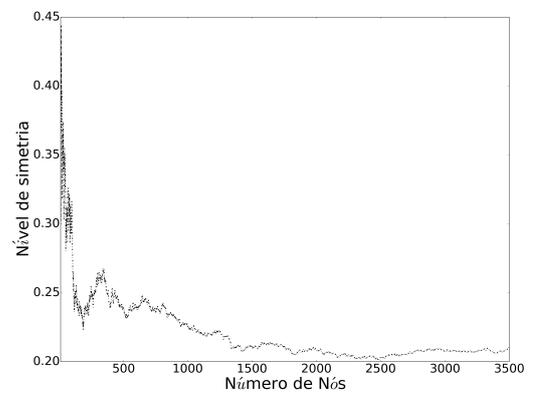
(a)  $m = 3$ (b)  $m = 4$ (c)  $m = 5$ (d)  $m = 6$ 

Figura 4.4: Simetria entre o 1<sup>o</sup> vértice gerado e o 10<sup>o</sup> vértice ao decorrer da geração de 3490 nós restantes.

Fonte: Elaborada pelo autor.

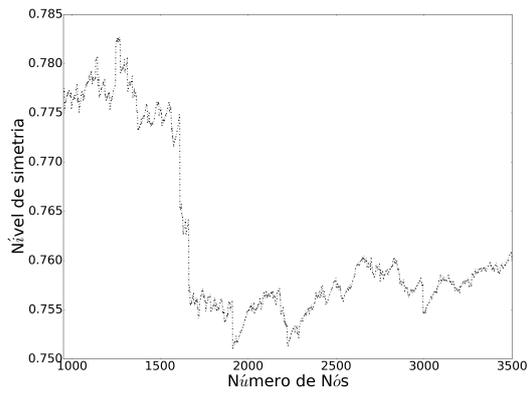
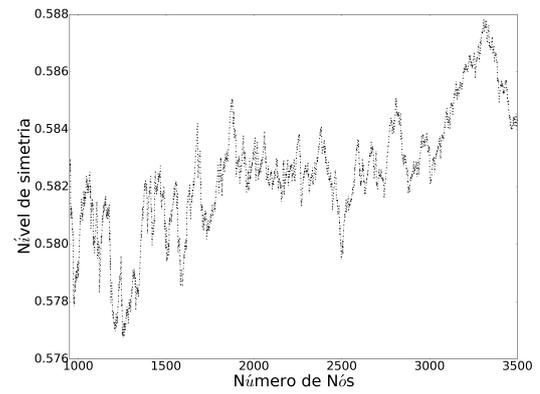
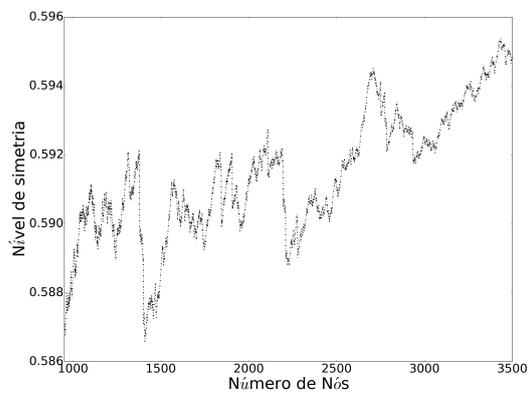
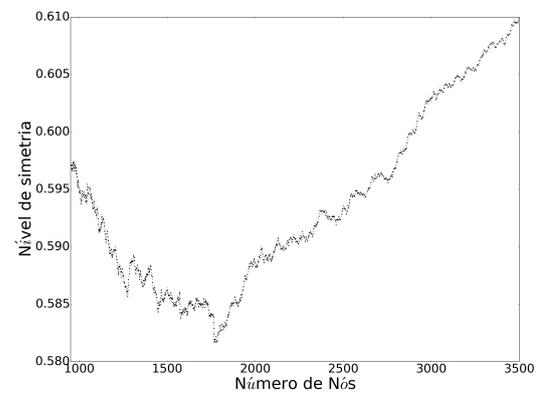
(a)  $m = 3$ (b)  $m = 4$ (c)  $m = 5$ (d)  $m = 6$ 

Figura 4.5: Simetria entre o 1º vértice gerado e o 950º vértice ao decorrer da geração de 2550 nós restantes.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nessa análise apresentada acima foi observada, para todo os  $m$  testados, uma tendência no qual os vértices iniciais apresentam entre si um aumento da simetria a cada novo nó adicionado, vindo a se estabilizar com o crescimento da rede. Já os testes entre um vértice inicial e um vértice mais periférico mostrou uma baixa simetria.

## 4.2 Mercado Financeiro - Aplicação

Nesta seção, uma aplicação real da medida  $\mathcal{D}$  proposta nesse trabalho será avaliada no mercado financeiro. Em todo o mundo, diversas empresas abrem seu capital negociando uma porcentagem do seu valor de mercado em uma bolsa de valores. Esse valor é dividido em um número de ações, que poderá ser negociado diariamente. Diversos fatores, específicos e gerais, influenciam nas oscilações diárias dos preços dessas ações: crise no setor da ação, disputas comerciais, o desempenho da empresa, falsas notícias e etc., isso irá influenciar na demanda e oferta pelas ações, podendo seu preço aumentar ou diminuir. Assim, os dados de negociação de cada ação são diariamente armazenados, gerando séries históricas dos mesmos. Utilizamos ações listadas na S&P 500, no total de  $N = 504$ , no período entre 02/01/1962 e 30/06/2016. Os dados das ações foram extraídos do (*Yahoo! Finance*), que possuem os seguintes dados: data, valor de abertura, valor máximo, valor mínimo, fechamento, volume de ações negociadas e fechamento ajustado, diários das ações. Na tabela 4.1 são listadas, como exemplo, algumas ações constando abreviação, nome da empresa, segmento, sub-segmento e localização de cada uma delas.

Tabela 4.1: Empresas listadas na S&P 500 entre 02/01/1962 e 30/06/2016

	Abreviação	Empresa	Segmento	Sub-segmento	Localização
1	MMM	3M Company	Industrials	Industrial Conglomerates	St. Paul, Minnesota
2	ABT	Abbott Laboratories	Health Care	Health Care Equipment & Services	North Chicago, Illinois
3	ABBV	AbbVie	Health Care	Pharmaceuticals	North Chicago, Illinois
4	ACN	Accenture plc	Information Technology	IT Consulting & Other Services	Dublin, Ireland
5	ATVI	Activision Blizzard	Information Technology	Home Entertainment Software	Santa Monica, California
6	AYI	Acuity Brands Inc	Industrials	Electrical Components & Equipment	Atlanta, Georgia
7	ADBE	Adobe Systems Inc	Information Technology	Application Software	San Jose, California
8	AAP	Advance Auto Parts	Consumer Discretionary	Automotive Retail	Roanoke, Virginia

9	AES	AES Corp	Utilities	Independent Power Producers & Energy Traders	Arlington, Virginia
10	AET	Aetna Inc	Health Care	Managed Health Care	Hartford, Connecticut
11	AFL	AFLAC Inc	Financials	Life & Health Insurance	Columbus, Georgia

Fonte: Elaborada pelo autor.

As redes nessa seção foram geradas a partir da correlação existente entre as ações, onde cada ação é considerada como um nó da rede e as conexões dos nós são estabelecidas por meio de um limite de correlação entre os pares das ações. O valor de fechamento diário de todos os pares do conjunto  $\mathcal{V}$  de ações foram utilizados para extrair as correlações de Pearson em um intervalo de 122 dias úteis das séries a partir do 30<sup>o</sup> dia da data mais recente dos dados, entre 19/05/2016 e 24/11/2015. Assim, os limites de correlações  $\rho = 0.8, 0.85, 0.90$  e  $0.95$  foram utilizados como filtro para se criar a conexão(arestas) entre as ações(nós). Quatro redes  $\mathcal{G}$  foram geradas, e para cada rede, todas as ações que obtiveram correlação superior ao limite pré-estabelecido, dentro do intervalo de tempo predeterminado, foram conectadas. Para exemplificar a geração das redes, foram criadas 4 séries temporais que se referenciam às ações. A tabela 4.2 exhibe os valores de 4 ações em um intervalo de 7 períodos (cada período é referente ao 1 dia), e a tabela 4.3 exhibe a correlação para todos os pares.

Tabela 4.2: Exemplo de séries temporais de 4 ações com valores de 7 períodos.

Período	Ação 1	Ação 2	Ação 3	Ação 4
1	23.45	10.17	59.06	15.75
2	23.30	10.13	59.03	15.70
3	23.23	10.11	59.10	15.73
4	23.20	10.15	59.18	15.74
5	23.14	10.05	59.07	15.70
6	22.99	10.03	59.18	15.65
7	22.83	10.01	59.16	15.60

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4.3: Correlação de Pearson entre as ações da tabela 4.2 do período 1 ao 7.

Ação	Ação	Correlação
1	2	0.91
1	3	-0.67
1	4	0.91
2	3	-0.42
2	4	0.89
3	4	-0.42

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nesse exemplo, para limites de correlação de Pearson  $\rho = 0.8$  e  $0.85$ , teremos a rede mostrada na figura 4.6. Para  $\rho = 0.95$  teremos uma rede totalmente desconectada, pois nenhum par de nós obteve correlação igual ou superior a  $0.95$ .

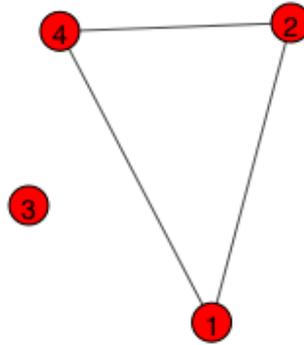


Figura 4.6: Rede gerada a partir da correlação da tabela 4.3.  $\rho = 0.8$  e  $0.85$ .

Fonte: Elaborada pelo autor.

A figura 4.7 exibe as 4 redes geradas das ações da S&P 500 com os limites de correlações  $\rho = 0.8, 0.85, 0.90$  e  $0.95$ .

Para todos os pares de nós das redes é aplicado a equação 3.2, assim, obtivemos todos os  $\mathcal{D}(i, j)$ .

As figuras 4.8 e 4.9 mostram a rede das ações do S&P500 gerada com limite de correlação  $\rho = 0.8$  no período entre os 30<sup>o</sup> dia e 122<sup>o</sup> dia. Para ajudar na compreensão e facilitar a visualização, a paleta de cores foi utilizada para representar o valor da simetria dos nós. O nó referência das figuras 4.8 e 4.9 é o nó 3, ou seja, a coloração de todos os demais nós estão relacionados com  $\mathcal{D}(3, j)$ . Em destaque os vértices 3 e 10 (AbbVie e Aetna Inc) obtiveram uma correlação igual a  $\rho = 0.6633$  para este período, sendo assim, eles não estão conectados. Já a simetria foi de  $\mathcal{D}(3, 10) = 0.0974$ , visto que esse valor próximo a 0 mostra que as colunas  $\mathcal{N}_3$  e  $\mathcal{N}_{10}$  possuem uma distância pequena, em outras palavras, para esta rede eles possuem um padrão de conexão, para com toda o restante da rede, muito parecidos e podendo-se se dizer que são muito simétricos.

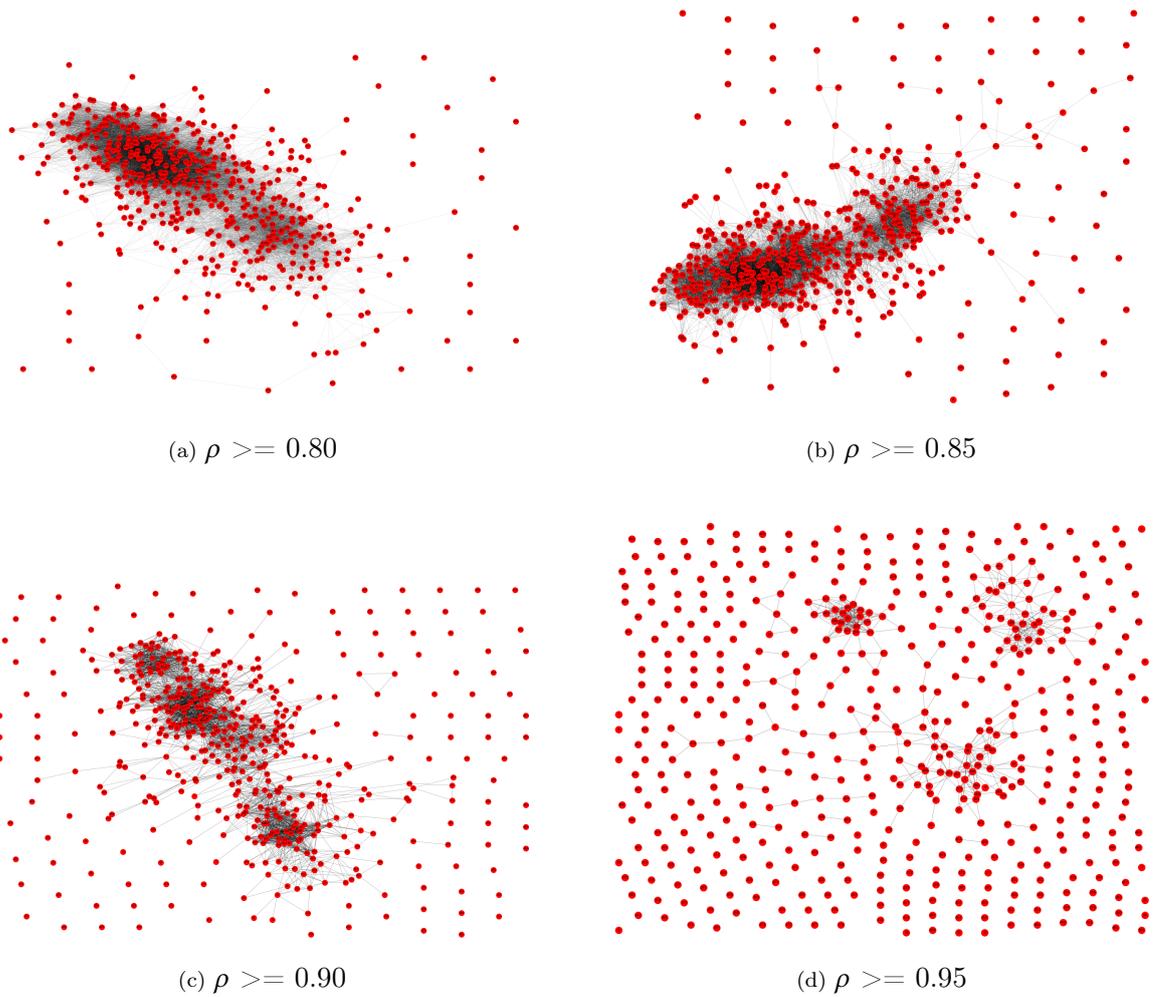


Figura 4.7: Redes geradas pelos valores de fechamentos diários das ações da S&P 500, utilizando um período 122 dias, entre 25/11/2015 e 20/05/2016, para aplicação da correlação de Pearson  $\rho$ , e conseqüentemente ligar os nós com o  $\rho$  maior e igual ao estabelecido.

Fonte: Elaborada pelo autor.

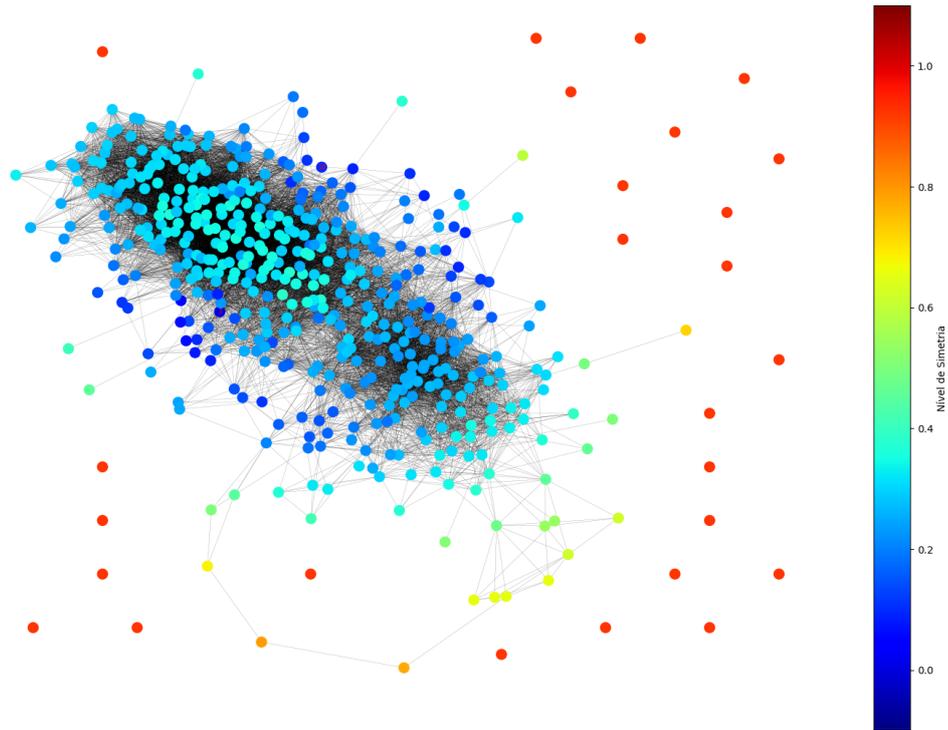


Figura 4.8: Representação da rede das ações da S&P 500 com limite de correlação  $\rho = 0.8$  no período entre os dias 30 e 122. Vértices 3 e 10, AbbVie e Aetna Inc., respectivamente, em destaque. Vértice 3 como referência.

Fonte: Elaborada pelo autor.

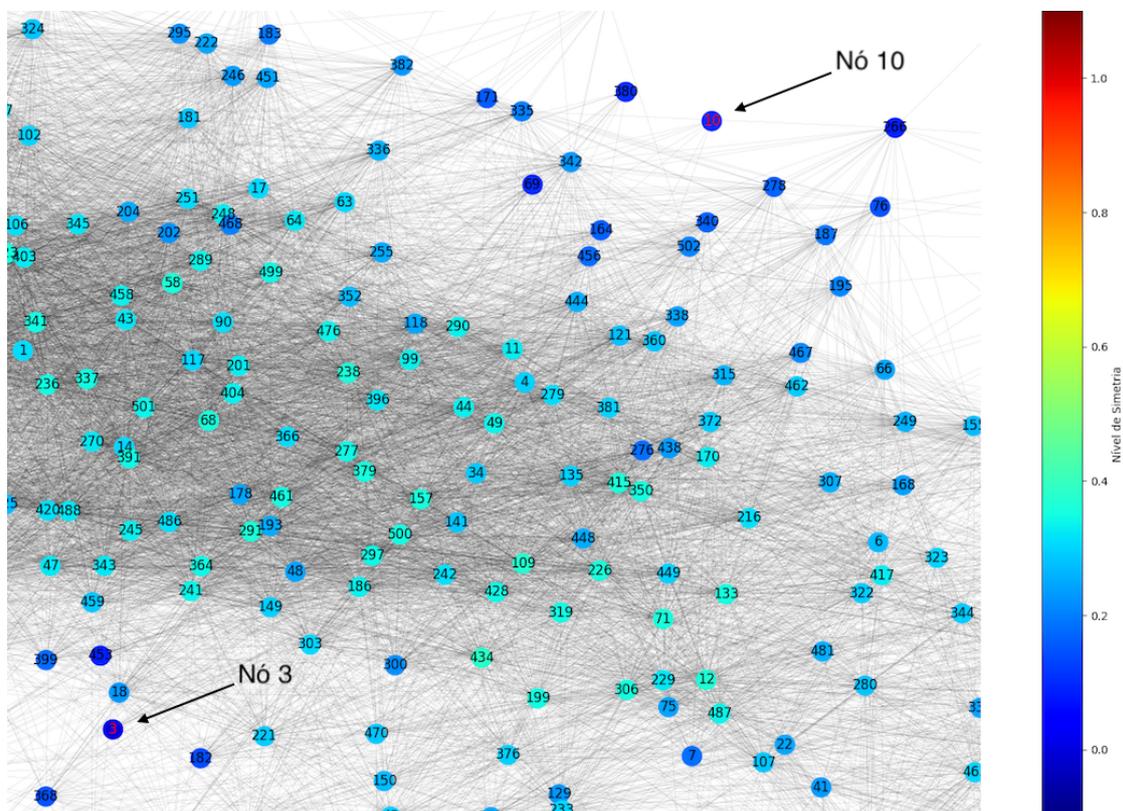


Figura 4.9: Ampliação da figura 4.8. Vértice 3 como referência.

Fonte: Elaborada pelo autor.

### 4.2.1 Carteira de ações

Após obter a  $\mathcal{D}(v_i, v_j)$  de todos os pares de nós das redes, sugerimos uma metodologia de substituição de ações de carteiras. Dado a intenção de substituir uma ou mais ações em uma determinada carteira, essa aplicação tem por objetivo sugerir outras ações que estão fora da carteira e que irão substituir as escolhidas para saírem da carteira, afim de aproximar o desempenho que a carteira original teria. Assim, diversas carteiras, com 15 ações, foram montadas aleatoriamente para se testar o método de substituição. Três tipos de trocas foram realizadas: a proposta neste trabalho, que se fundamenta em trocas de ações por outras ações com nível alto de simetria; trocas por ações com alta correlação; e trocas totalmente aleatória.

A ação 327, NextEra Energy, foi descartada do experimento por não possuir período de dados suficiente para os testes.

O procedimento para os testes da medidas foi realizado da seguinte maneira:

1. 15 ações dentro do conjunto  $\mathcal{V} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  são escolhidas aleatoriamente para se formar uma carteira de ações, sendo essa a carteira original, ou conjunto original de ações (CO). Exemplo, CO = {287, 216, 291, 103, 409, 415, 329, 80, 262, 165, 125, 480, 502, 22, 433}.

2. São escolhidas aleatoriamente, entre as 15 ações do CO, 4 ações para serem substituídas. Exemplo, Ações {103, 415, 262, 165}.

3. Para cada ação  $v_i$  escolhida no passo 2, uma lista ordenada com todas as ações  $v_j$  referente ao seus  $\mathcal{D}(v_i, v_j)$  é montada, da ação mais simétrica para menos simétrica. É separado um intervalo de 5% das ações mais simétricas a  $v_i$ .

- 3.1. É escolhida aleatoriamente, para cada ação do passo 2, uma das ações que compõe a lista do passo 3. Por exemplo, a lista dos 5% das ação mais simétricas a ação 415 é: {135, 242, 350, 319, 434, 226, 34, 428, 170, 372, 297, 109, 303, 500, 186, 71, 360, 216, 49, 44, 417, 121, 149, 459, 133}. E o valor da simetria de cada ação em relação a ação 415 é, respectivamente: {0.0122, 0.0126, 0.0138, 0.0141, 0.0149, 0.0222, 0.0237, 0.0246, 0.0253, 0.0267, 0.0284, 0.0306, 0.0316, 0.0322, 0.0343, 0.0426, 0.0450, 0.0455, 0.0457, 0.0491, 0.0496, 0.0504, 0.0521, 0.0540, 0.0543}.

4. As mesmas 4 ações do CO, escolhidas no passo 2 para serem substituídas, agora são utilizadas para gerar listas ordenadas de correlação, da maior correlação para a menor correlação em referência a cada ação que será substituída. É separado um intervalo de 5% das ações correlatas a cada ação do passo 2.

- 4.1. Aleatoriamente uma ação, para cada ação do passo 2, é escolhida da lista do passo 4. Formando o Conjunto de Correlação (CC).

5. As mesmas 4 ações do conjunto original, escolhidas para serem substituídas, são trocadas por uma escolha totalmente aleatória. formando o Conjunto Aleatório (CA).

6. Os passos 3.1, 4.1 e 5 são repetidos 10 vezes, e as ações já selecionadas anteriormente não são escolhidas novamente, como exibe a tabela 4.4.

7. Todo o procedimento a partir do passo 2 é repetido outras 10 vezes.

Para contabilização do rendimento da carteira, um aporte \$30000.00 é feito por ação no 30º dia, 19/05/2016, assim é calculado, pelo valor de fechamento, a quantidade de ações

a ser adquiridas naquela data. Por fim, no 1º dia, 30/06/2016, o valores de fechamento das ações são multiplicados pela suas respectivas quantidades de ações adquiridas no 30º dia. Ex: no 30º dia, 19/05/2016, a 3M Company teve o valor de fechamento unitário da ação em \$165.11, com um aporte de \$30000.00 seria possível comprar 181,69 ações da 3M Company. No 1º dia, 30/06/2016, o valor da ação da 3M Company foi de \$175.119, que multiplicado pela quantidade de ações adquiridas no dia 30/06/2016, renderia \$1818.60. A figura 4.10 e tabela 4.5 mostram os valores do rendimento da carteira do CO, juntamente com 10 interações de alterações do CO, ou seja, em cada uma das 10 interação, 4 ações são escolhidas para serem substituídas (passo 2), para cada interação são realizadas 10 alterações da carteira para cada tipo de alteração, e o rendimento e intervalo de confiança são calculados, com probabilidade 0.95, nas 10 alterações de cada tipo, CS, CA, CC, em cada interação.

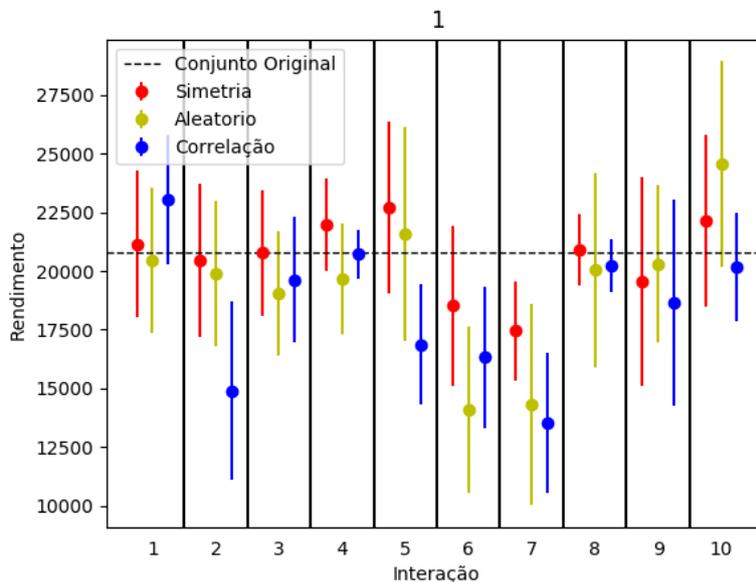


Figura 4.10: O gráfico mostra o valor do rendimento do CO e o rendimento e intervalo de confiança de 95% para alterações dos CS, CA e CC.

Fonte: Elaborada pelo autor.

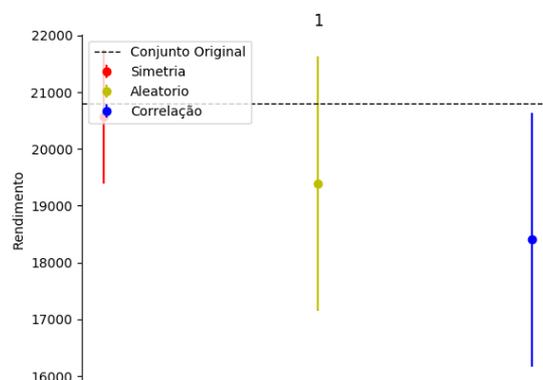


Figura 4.11: Intervalo de confiança de 95% das médias dos retornos dos conjuntos da Figura 4.10.

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4.4: Conjunto das ações alteradas CO - Conjunto Original. CS - Conjunto Simetria. CA - Conjunto Aleatória

C	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	A10	A11	A12	A13	A14	A15
C.O	287	216	291	103	409	415	329	80	262	165	125	480	502	22	433
CS1	287	216	291	192	409	360	329	80	100	1	125	480	502	22	433
CS2	287	216	291	260	409	133	329	80	163	116	125	480	502	22	433
CS3	287	216	291	258	409	350	329	80	115	341	125	480	502	22	433
CS4	287	216	291	127	409	149	329	80	162	158	125	480	502	22	433
CS5	287	216	291	110	409	417	329	80	134	346	125	480	502	22	433
CS6	287	216	291	240	409	303	329	80	128	501	125	480	502	22	433
CS7	287	216	291	92	409	44	329	80	224	43	125	480	502	22	433
CS8	287	216	291	111	409	297	329	80	189	64	125	480	502	22	433
CS9	287	216	291	234	409	319	329	80	147	499	125	480	502	22	433
CS10	287	216	291	139	409	428	329	80	151	201	125	480	502	22	433
CA1	287	216	291	32	409	303	329	80	247	458	125	480	502	22	433
CA2	287	216	291	212	409	202	329	80	295	233	125	480	502	22	433
CA3	287	216	291	84	409	247	329	80	222	271	125	480	502	22	433
CA4	287	216	291	18	409	209	329	80	2	488	125	480	502	22	433
CA5	287	216	291	47	409	26	329	80	55	270	125	480	502	22	433
CA6	287	216	291	244	409	500	329	80	231	229	125	480	502	22	433
CA7	287	216	291	225	409	253	329	80	366	220	125	480	502	22	433
CA8	287	216	291	213	409	352	329	80	458	452	125	480	502	22	433
CA9	287	216	291	312	409	120	329	80	346	78	125	480	502	22	433
CA10	287	216	291	418	409	297	329	80	241	324	125	480	502	22	433

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4.5: Tabela dos valores da Figura 4.10.

		Média	Limite Inferior	Limite Superior
1	CS	21144.78	18006.88	24282.67
	CA	20463.1	17353.29	23572.9
	CC	23042.9	20291.53	25794.26
2	CS	20477.68	17210.19	23745.17
	CA	19911.38	16812.47	23010.29
	CC	14890.94	11098.24	18683.63
3	CS	20765.71	18112.66	23418.76
	CA	19043.61	16378.05	21709.16
	CC	19614.67	16935.68	22293.66
4	CS	21955.29	19992.19	23918.39
	CA	19673.79	17308.33	22039.25
	CC	20711.47	19662.82	21760.11
5	CS	22704.57	19056.41	26352.73
	CA	21586.73	17035.14	26138.32
	CC	16871.29	14301.24	19441.33
6	CS	18517.34	15126.4	21908.28
	CA	14090.94	10533.14	17648.74
	CC	16320.15	13306.93	19333.36
7	CS	17456.09	15338.32	19573.86
	CA	14292.09	10011.34	18572.84
	CC	13520.59	10553.42	16487.75
8	CS	20916.49	19389.13	22443.84
	CA	20039.83	15909.1	24170.57
	CC	20243.14	19119.77	21366.51
9	CS	19559.48	15115.6	24003.36
	CA	20310.09	16983.84	23636.34
	CC	18649.45	14256.63	23042.27
10	CS	22147.52	18475.01	25820.03
	CA	24548.97	20165.15	28932.79
	CC	20154.22	17850.84	22457.6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Uma alteração do experimento explicado a cima foi realizado para se obter um valor referência padrão dos tipos de trocas de ações, objetivando-se analisar o gap médio, equação 4.1, entre o valor da carteira original e das trocas propostas.

$$gap = \frac{|CO - C_{alt}|}{CO} \quad (4.1)$$

$C_{alt}$  = um dos conjuntos de alteração: CS, CA ou CC.

O número de alterações das carteiras por teste também foi alterado, os passos 6 e 7 passaram de 10 repetições para 20 repetições por carteira gerada, visando diminuir o valor do intervalo de confiança dos testes.

Para se obter cada gap médio, foram geradas 50 carteiras de ações diferentes, e todo

o experimento foi executado 92 vezes utilizando em cada uma delas sementes diferentes da função "random".

Dentre os 92 experimentos para a rede gerada com  $\rho = 0.85$ , em 52.17% dos ensaios, o gap médio da troca de ações por simetria se mostrou menor, seguido por 45.65% nas trocas por correlação e 2.18% nas trocas aleatórias. Para a rede gerada com  $\rho = 0.80$ , o gap médio das trocas de ações por simetria foi menor em 57,89% dos experimentos, 42,11% menor nas trocas por correlação e 0% nas trocas aleatórias.

As tabelas 4.6 e 3.5 mostram os valores de cada gap médio para as redes geradas com  $\rho = 0.85$  e  $\rho = 0.80$ .

As redes geradas com  $\rho = 0.90$  e 95 não foram utilizadas para os testes, visto que elas possuem um alto número de nós desconectados.

### 4.3 Movimentos Brownianos Fracionários

Os Movimentos Brownianos Fracionários (MBF) são processos estocásticos que possuem características relacionadas à sua persistência, podendo haver dependência ou não dos movimentos já ocorridos. Esses processos são geralmente transformados em séries temporais, o que ajuda na leitura e compreensão do problema. O Expoente Hurst ( $H$ ), que varia entre 0 e 1, é usado para caracterizar o tipo do processo que a série temporal do MBF está relacionado [Mandelbrot e Van Ness, 1968]. Para cada valor do  $H$  o MBF apresenta um padrão.  $H = 0.5$ , o processo é independente, decorrelacionado. Para  $H > 0.5$ , o processo apresenta persistência, significando que movimentos futuros possuem uma maior possibilidade de seguir a tendência dos movimentos passados. Já para  $H < 0.5$ , antipersistência, os movimentos tendem a serem negativamente correlacionados. Na figura 4.12 são exibidos 4 exemplos de MBF de  $10^5$  movimentos, com diferentes  $H$ . Observa-se a tendência de maior suavidade dos movimentos das séries conforme se aumenta o  $H$ .

Foi utilizado a função "wfbm(H,L)" do software Matlab para gerar as séries temporais, onde  $H$  é o valor do Hurst e o  $L$  é o tamanho da série a ser gerada. O algoritmo de geração das séries foi introduzido por Abry e Sellan [1996] e acurado por Bardet et al. [2003].

Tabela 4.6: Gap médio e intervalo de confiança de 95% dos 92 experimentos com 50 carteiras em cada teste. Rede formada com  $\rho = 0.85$ .

Teste	Simetria	Int Conf	Aleatório	Int Conf	Correlação	Int Conf	Teste	Simetria	Int Conf	Aleatório	Int Conf	Correlação	Int Conf
1	0.517	0.185	0.629	0.226	0.5	0.16	2	0.332	0.08	0.393	0.103	0.373	0.076
3	0.678	0.434	0.76	0.487	0.697	0.43	4	2.001	3.04	2.643	4.044	1.423	1.891
5	0.544	0.354	0.686	0.516	0.571	0.356	6	0.455	0.253	0.509	0.281	0.45	0.197
7	0.304	0.067	0.329	0.075	0.306	0.056	8	0.468	0.266	0.525	0.287	0.508	0.291
9	0.547	0.352	0.601	0.391	0.534	0.304	10	1.211	1.103	1.32	1.143	1.134	1.018
11	0.524	0.283	0.599	0.313	0.541	0.251	12	0.5	0.204	0.633	0.29	0.49	0.175
13	0.307	0.098	0.32	0.089	0.332	0.081	14	0.596	0.574	0.772	0.833	0.539	0.404
15	0.621	0.353	0.69	0.348	0.559	0.274	16	0.365	0.149	0.423	0.187	0.406	0.159
17	0.696	0.538	0.735	0.535	0.663	0.488	18	1.058	0.984	1.18	1.065	0.969	0.833
19	0.556	0.414	0.566	0.362	0.566	0.387	20	0.354	0.121	0.355	0.106	0.382	0.146
21	0.534	0.391	0.651	0.445	0.578	0.44	22	0.485	0.239	0.579	0.29	0.553	0.276
23	0.437	0.167	0.495	0.191	0.442	0.169	24	0.579	0.48	0.581	0.432	0.5	0.319
25	0.475	0.179	0.541	0.216	0.469	0.156	26	1.103	1.352	1.185	1.371	0.948	1.056
27	0.932	1.078	0.955	1.055	0.956	1.058	28	0.541	0.276	0.605	0.303	0.56	0.237
29	0.444	0.183	0.471	0.182	0.43	0.158	30	0.374	0.096	0.423	0.107	0.376	0.082
31	0.259	0.047	0.313	0.067	0.309	0.055	32	0.382	0.164	0.403	0.173	0.408	0.179
33	0.526	0.321	0.656	0.457	0.505	0.288	34	0.608	0.303	0.8	0.442	0.565	0.253
35	1.105	1.614	1.302	1.943	0.976	1.325	36	0.937	0.796	1.07	0.891	0.82	0.653
37	0.511	0.232	0.561	0.256	0.526	0.239	38	0.589	0.431	0.732	0.607	0.702	0.602
39	1.741	1.871	1.961	2.115	1.533	1.478	40	2.877	3.507	2.578	2.954	3.193	3.897
41	0.272	0.089	0.284	0.081	0.299	0.072	42	0.37	0.13	0.413	0.133	0.397	0.127
43	0.645	0.465	0.697	0.493	0.623	0.412	44	1.013	1.06	1.528	1.799	0.928	0.908
45	0.876	0.824	0.956	0.895	1.058	1.15	46	0.66	0.449	0.712	0.475	0.647	0.386
47	0.716	0.509	0.787	0.533	0.767	0.576	48	0.839	0.673	1.038	0.817	0.762	0.591
49	0.347	0.156	0.412	0.201	0.38	0.156	50	0.471	0.216	0.529	0.244	0.488	0.198
51	2.774	4.726	3.129	5.283	1.893	2.959	52	0.332	0.112	0.357	0.113	0.348	0.106
53	0.553	0.287	0.598	0.301	0.577	0.268	54	0.84	0.728	0.991	0.84	0.831	0.656
55	0.327	0.112	0.389	0.143	0.357	0.104	56	0.752	0.645	0.82	0.689	0.875	0.852
57	0.435	0.143	0.446	0.131	0.449	0.142	58	48.365	93.349	53.676	103.764	43.89	84.562
59	0.382	0.151	0.478	0.228	0.381	0.133	60	0.421	0.175	0.514	0.253	0.426	0.179
61	0.524	0.241	0.559	0.237	0.549	0.232	62	0.616	0.265	0.718	0.324	0.571	0.218
63	1.328	1.466	1.32	1.402	1.068	1.078	64	0.909	0.99	0.993	1.078	0.965	1.082
65	5.195	9.337	5.061	8.966	3.782	6.599	66	1.433	0.878	1.629	0.986	1.505	0.963
67	0.375	0.208	0.496	0.278	0.354	0.134	68	0.707	0.442	0.878	0.649	0.681	0.422
69	4.685	8.711	4.213	7.691	4.587	8.477	70	0.42	0.146	0.479	0.165	0.44	0.14
71	5.17	7.833	4.493	6.717	4.115	5.861	72	0.338	0.099	0.385	0.118	0.368	0.106
73	0.696	0.342	0.764	0.415	0.69	0.353	74	0.382	0.301	0.394	0.268	0.388	0.25
75	0.38	0.155	0.407	0.157	0.404	0.135	76	0.333	0.132	0.364	0.121	0.325	0.092
77	0.701	0.647	0.965	1.06	0.778	0.776	78	0.585	0.357	0.697	0.464	0.546	0.284
79	0.191	0.021	0.213	0.025	0.227	0.02	80	0.56	0.561	0.715	0.747	0.538	0.457
81	70.691	136.13	56.912	108.647	53.023	101.18	82	0.552	0.286	0.674	0.389	0.604	0.298
83	0.345	0.186	0.447	0.286	0.342	0.139	84	0.419	0.241	0.466	0.243	0.455	0.257
85	0.817	0.49	1.051	0.712	0.735	0.388	86	0.489	0.341	0.592	0.421	0.509	0.374
87	1.094	1.062	1.187	1.099	1.067	1.052	88	0.433	0.197	0.502	0.238	0.488	0.228
89	1.014	1.22	1.216	1.405	0.896	1.014	90	0.636	0.391	0.752	0.506	0.644	0.404
91	0.977	1.038	1.032	0.963	1.233	1.449	92	0.333	0.116	0.395	0.142	0.349	0.111

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela 4.7: Gap médio e intervalo de confiança de 95% dos 94 experimentos com 50 carteiras em cada teste. Rede formada com  $\rho = 0.80$ .

Teste	Simetria	Int Conf	Aleatório	Int Conf	Correlação	Int Conf	Teste	Simetria	Int Conf	Aleatório	Int Conf	Correlação	Int Conf
1	0.711	0.295	0.809	0.331	0.694	0.277	2	0.525	0.272	0.612	0.313	0.477	0.21
3	0.471	0.325	0.509	0.302	0.486	0.316	4	0.958	1.112	0.988	1.082	0.957	1.018
5	0.535	0.307	0.648	0.377	0.476	0.196	6	0.565	0.289	0.639	0.347	0.609	0.339
7	7.774	14.71	11.225	21.414	6.09	11.384	8	1.998	1.951	2.466	2.433	1.818	1.798
9	3.532	6.098	3.746	6.386	3.268	5.491	10	1.526	1.668	1.769	2.003	1.293	1.208
11	0.378	0.133	0.469	0.217	0.394	0.14	12	7.102	12.165	10.518	18.333	7.874	13.581
13	0.533	0.403	0.618	0.49	0.568	0.416	14	0.628	0.317	0.69	0.346	0.596	0.285
15	2.59	3.644	2.843	3.738	2.593	3.776	16	1.001	0.729	1.221	0.93	0.963	0.687
17	0.659	0.667	0.83	0.938	0.731	0.839	18	1.008	0.909	1.009	0.874	1.077	0.978
19	0.286	0.123	0.323	0.139	0.316	0.138	20	0.48	0.212	0.61	0.359	0.494	0.238
21	12.159	22.674	11.829	21.888	11.013	20.315	22	0.638	0.483	0.683	0.475	0.59	0.379
23	0.678	0.546	0.744	0.563	0.687	0.547	24	0.787	0.618	0.871	0.671	0.774	0.553
25	0.841	0.766	1.011	0.972	0.692	0.474	26	3.705	5.171	5.639	8.215	3.24	4.395
27	0.486	0.297	0.574	0.339	0.475	0.258	28	0.382	0.187	0.446	0.217	0.352	0.117
29	0.472	0.193	0.55	0.228	0.515	0.19	30	2.777	4.634	2.844	4.626	1.98	3.052
31	2.241	3.471	2.579	3.899	1.887	2.752	32	0.412	0.158	0.457	0.164	0.425	0.165
33	0.659	0.41	0.719	0.383	0.598	0.268	34	0.582	0.415	0.685	0.487	0.555	0.35
35	0.436	0.231	0.58	0.383	0.484	0.294	36	0.537	0.367	0.605	0.392	0.495	0.258
37	0.906	0.751	1.146	1.077	0.844	0.602	38	0.622	0.442	0.685	0.471	0.584	0.376
39	0.716	0.346	0.849	0.425	0.688	0.317	40	0.679	0.28	0.835	0.37	0.635	0.213
41	0.498	0.178	0.591	0.225	0.505	0.173	42	1.415	1.272	1.635	1.399	1.227	1.072
43	0.417	0.234	0.54	0.326	0.443	0.241	44	1.032	1.286	1.581	2.18	1.092	1.373
45	0.379	0.135	0.458	0.173	0.372	0.113	46	0.727	0.605	0.755	0.626	0.743	0.642
47	0.41	0.187	0.479	0.233	0.424	0.191	48	0.374	0.194	0.425	0.225	0.395	0.191
49	0.944	0.933	1.069	0.906	0.927	0.889	50	0.33	0.14	0.4	0.174	0.366	0.128
51	0.386	0.121	0.427	0.148	0.388	0.108	52	0.505	0.252	0.575	0.282	0.523	0.254
53	0.274	0.101	0.313	0.121	0.307	0.097	54	0.498	0.209	0.642	0.295	0.531	0.196
55	0.312	0.083	0.343	0.098	0.377	0.099	56	0.437	0.371	0.54	0.511	0.494	0.432
57	0.463	0.207	0.552	0.286	0.484	0.189	58	0.377	0.109	0.423	0.131	0.383	0.093
59	0.618	0.445	0.75	0.59	0.587	0.361	60	0.36	0.11	0.44	0.155	0.362	0.096
61	0.887	0.921	1.121	1.308	0.942	0.975	62	1.361	1.618	1.461	1.721	1.452	1.805
63	0.573	0.473	0.686	0.573	0.513	0.36	64	0.288	0.076	0.335	0.089	0.321	0.081
65	0.508	0.306	0.568	0.349	0.518	0.264	66	0.57	0.249	0.645	0.316	0.573	0.23
67	0.523	0.232	0.628	0.278	0.512	0.222	68	0.368	0.166	0.441	0.191	0.385	0.13
69	0.801	1.016	0.883	1.148	0.988	1.314	70	0.338	0.109	0.397	0.145	0.343	0.111
71	0.642	0.44	0.736	0.468	0.671	0.493	72	4.818	7.977	5.371	8.532	4.791	7.966
73	0.253	0.076	0.312	0.112	0.283	0.078	74	0.372	0.161	0.452	0.242	0.384	0.144
75	0.324	0.094	0.378	0.114	0.348	0.087	76	0.823	0.683	0.899	0.733	0.827	0.644
77	0.491	0.343	0.561	0.349	0.489	0.3	78	0.368	0.103	0.424	0.131	0.4	0.112
79	0.605	0.222	0.683	0.241	0.584	0.205	80	0.323	0.125	0.372	0.154	0.356	0.132
81	0.615	0.394	0.645	0.369	0.664	0.413	82	0.551	0.364	0.59	0.339	0.57	0.361
83	2.749	4.129	3.723	5.857	2.232	3.046	84	8.555	16.088	7.418	13.698	5.116	9.299
85	0.392	0.148	0.47	0.199	0.4	0.144	86	0.3	0.079	0.355	0.107	0.336	0.084
87	2.898	4.992	3.743	6.497	2.469	4.099	88	0.467	0.164	0.524	0.185	0.467	0.152
89	0.447	0.222	0.55	0.307	0.494	0.3	90	0.347	0.137	0.43	0.243	0.366	0.138
91	0.736	0.422	0.959	0.554	0.679	0.339	92	0.401	0.32	0.52	0.489	0.405	0.265
93	0.533	0.299	0.594	0.295	0.5	0.241	94	0.869	0.987	1.16	1.42	0.924	1.024

Fonte: Elaborada pelo autor.

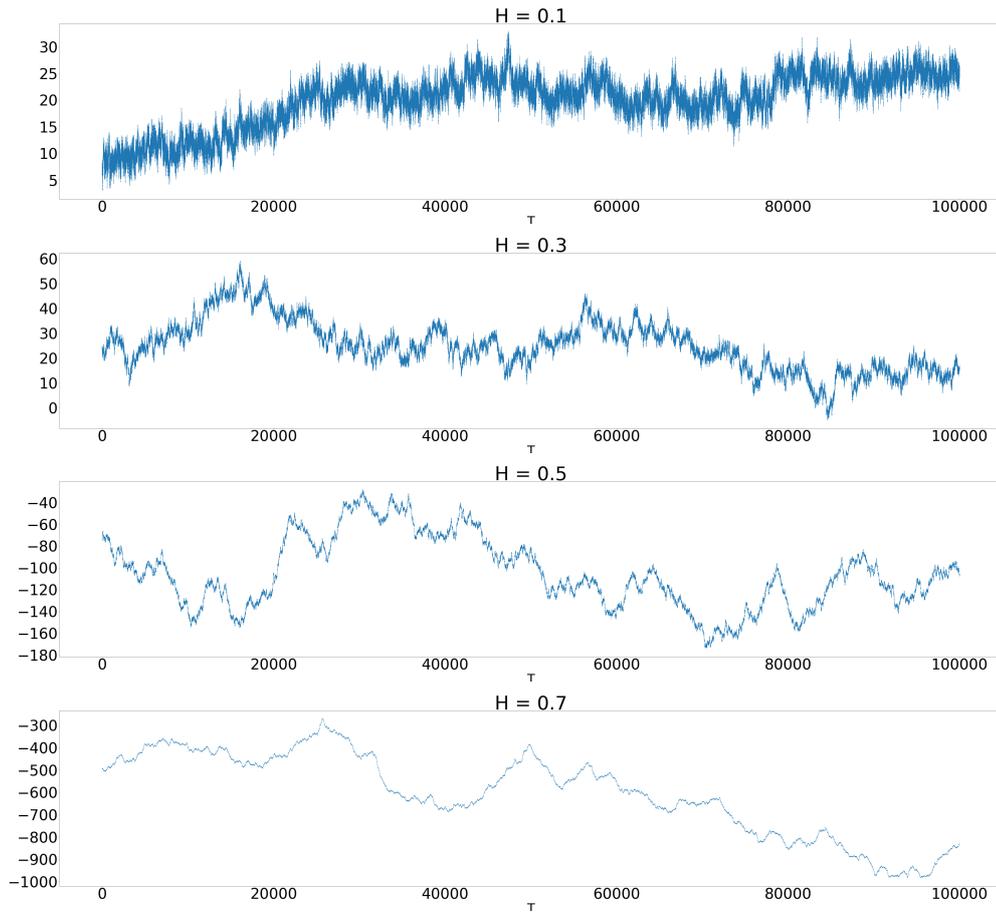


Figura 4.12: Exemplo de séries temporais dos Movimentos Brownianos Fracionários (MBF).  
Fonte: Elaborada pelo autor.

### 4.3.1 Caracterização do Expoente de Hurst

Foi proposto neste trabalho um método de caracterização do  $H$  de séries temporais dos MBFs, por meio da medida  $\mathcal{D}$ .

Como destacado na subseção 3.1, a medida  $\mathcal{D}$  retorna um valor entre 0 e 1 que representa a semelhança entre duas PDF. Assim, para se extrair as PDF relacionadas às séries temporais dos MBF, a transformação das séries em redes, por meio do HVG, foi utilizado.

Neste estudo, geramos  $k = 10$  séries temporais de MBF de  $10^6$  de movimentos para cada  $H$  observado. Os  $H$  utilizados foram: 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8 e 0.9. Sendo ao todo 90 séries temporais de MBF utilizadas nesse estudo. Em cada uma das séries geradas foi removido um intervalo de 100 mil movimentos,  $T = 10^5$ , das séries,  $J = \{1, \dots, T\}$ , entre as posições  $5 \cdot 10^5$  e  $6 \cdot 10^5$ . As séries resultantes desses cortes foram utilizadas para as transformações em redes, por meio do HVG.

Após cada rede  $\mathcal{G}_{hk}$ , sendo  $h = \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$  e  $k = \{1, 2, \dots, 10\}$ , ser gerada, foram extraídas as PDF, por meio das NDD, de todos os nós  $J$ . Sendo  $I$  um subconjunto de  $J$  com 11 elementos,  $I = \{1, 10^4, 2 \cdot 10^4, 3 \cdot 10^4, 4 \cdot 10^4, 5 \cdot 10^4, 6 \cdot 10^4, 7 \cdot 10^4, 8 \cdot 10^4, 9 \cdot 10^4, 10^5\}$ . Cada nó de  $I$  foi utilizado como base de aplicação da medida  $\mathcal{D}$ . Assim,  $\mathcal{D}(1, j = \{1, \dots, 10^5\})$ ,  $\mathcal{D}(10^4, j = \{1, \dots, 10^5\})$ , ...,  $\mathcal{D}(10^5, j = \{1, \dots, 10^5\})$ , foram computadas.

A série resultante de cada  $\mathcal{D}$  foi utilizada para avaliar o comportamento do movimento browniano. Por exemplo: Os valores de  $\mathcal{D}(1, 1) = 0.0$ ,  $\mathcal{D}(1, 2) = 0.0843$ ,  $\mathcal{D}(1, 3) = 0.1632$ ,  $\mathcal{D}(1, 4) = 0.0843$ ,  $\mathcal{D}(1, 5) = 0.0845$ ,  $\mathcal{D}(1, 6) = 0.1633$ .

A equação 4.2 mostra como trabalhamos com os valores obtidos da  $\mathcal{D}$ .

$$|\Delta \mathcal{D}_{hkij}| = \sum_{j=2}^T |\mathcal{D}_{hk}(i, j) - \mathcal{D}_{hk}(i, j-1)| \text{ para } h = 0.1, 0.2 \dots 0.9, k = 1, 2, \dots, 10, i = 1, 10^4, \dots I \quad (4.2)$$

Assim, aplicando os valores do exemplo anterior à equação 4.2, teremos:  $|\mathcal{D}(1, 2) - \mathcal{D}(1, 1)| = 0.0843$ ,  $|\mathcal{D}(1, 3) - \mathcal{D}(1, 2)| = 0.079$ ,  $|\mathcal{D}(1, 4) - \mathcal{D}(1, 3)| = 0.0789$ ,  $|\mathcal{D}(1, 5) - \mathcal{D}(1, 4)| = 0.0002$  e  $|\mathcal{D}(1, 6) - \mathcal{D}(1, 5)| = 0.0788$  e a somatória desses valores é: 0.3212.

Apresentamos na tabela 4.8, para  $H = 0.1$ , e na tabela B.2, para  $H = 0.2$ , os valores do acúmulo da variação da  $|\Delta \mathcal{D}_{hkij}|$  para cada um dos nós  $i$ . Em cada coluna estão os valores de  $|\Delta \mathcal{D}_{hk}|(i, j = \{1, \dots, 10^5\})$  de cada rede  $\mathcal{G}_{hk}$ . A última linha das tabelas 4.8 e B.2 mostram os valores médios de cada coluna. As figuras 4.13 e 4.14 mostram a média,  $\sum_{k \in \mathcal{G}_h, i=1}^I |\Delta \mathcal{D}_{hk}|$  e o intervalo de confiança de 95% das séries analisadas.

Tabela 4.8: MBF de  $10^5$  movimentos. Hurst = 0.1

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta \mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta \mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta \mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta \mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta \mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta \mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta \mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta \mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta \mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta \mathcal{D} $
1	1125.5	1950.23	2241.67	2302.86	1489.21	2309.6	1504.38	1504.38	1181.46	2406.11
10000	1063.9	3229.85	2023.29	2153.53	2349.35	2040.59	1585.31	1585.31	1526.7	2214.74
20000	1132.51	2951.45	2014.78	1702.59	2350.59	2268.27	1228.71	1228.71	1669.66	2345.96
30000	1208.35	2967.54	1784.86	1671.67	2445.25	2441.99	1738.97	1738.97	1521.51	1751.17
40000	1171.58	3201.94	1793.46	1674.87	2437.07	2269.38	1622.55	1622.55	1562.27	1322.0
50000	1532.39	3270.65	2023.1	1963.86	1159.77	2423.11	2041.76	2041.76	1692.87	2515.15
60000	1299.56	3272.04	2126.12	1947.85	2341.6	2084.92	2136.97	2136.97	1439.05	2434.76
70000	1394.18	2989.01	1778.7	1793.14	2608.5	1990.92	1556.21	1556.21	1339.5	2408.39
80000	1381.0	3162.25	1223.45	1949.56	2309.49	1839.62	1610.77	1610.77	1831.88	1528.42
90000	1260.7	3105.76	1759.89	1831.92	2571.02	2209.64	1736.48	1736.48	1629.63	2428.67
100000	1367.19	3006.4	1140.06	2142.91	1254.38	452.88	1667.19	1667.19	1715.14	709.27
$\bar{X}$	1266.98	3009.73	1809.94	1921.34	2119.65	2030.08	1675.38	1675.38	1555.42	2005.87

Fonte: Elaborada pelo autor.

Utilizando-se do mesmo intervalo de 100 mil movimentos  $T = 10^5$ , o experimento foi feito removendo-se 10 mil movimentos da parte final do intervalo, restando 90 mil movimentos  $T = 9 \cdot 10^4$ , figura B.1; 80 mil movimentos  $T = 8 \cdot 10^4$ , figura B.2; 70 mil movimentos  $T = 7 \cdot 10^5$ , figura B.3; 60 mil movimentos  $T = 6 \cdot 10^4$ , figura B.4. Conforme os valores apresentados nas figuras B.1 a B.4, constata-se que, para séries de até  $T = 7 \cdot 10^5$  a medida  $\mathcal{D}$  juntamente com o procedimento apresentado conseguiram distinguir os  $H$  das MBFs, de outro modo, para 60 mil movimentos o valor da medida do experimento se mostrou insatisfatório para o  $H = 0.1$  e  $0.2$ , figura B.5, onde o limite inferior do  $H = 0.1$  e limite superior do  $H = 0.2$  coincidiram.

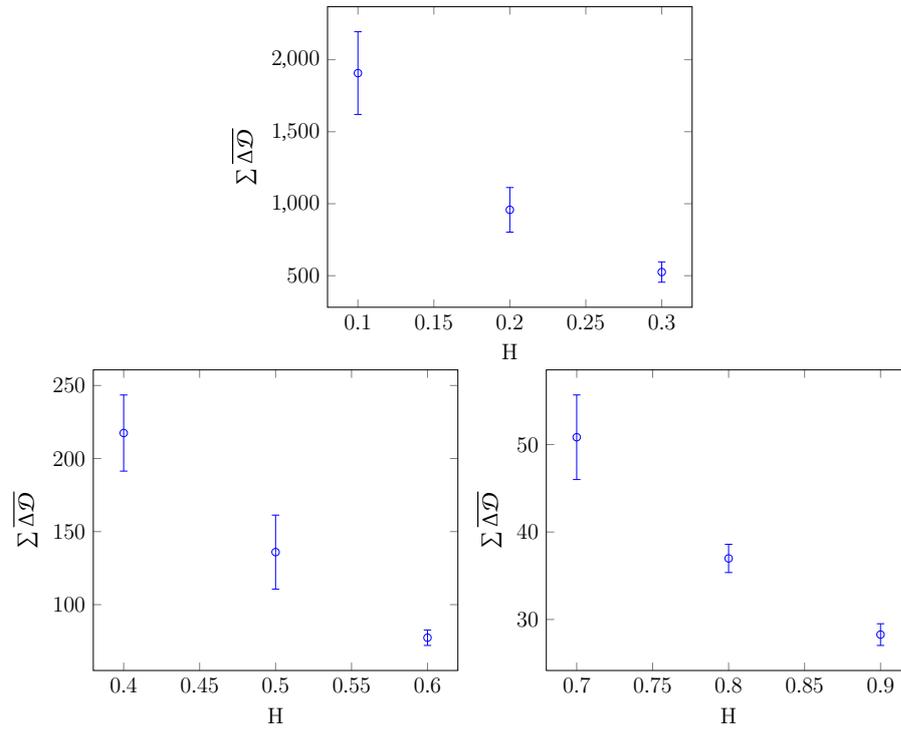


Figura 4.13: Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com  $10^5$  movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de  $10^4$  nós.

Fonte: Elaborada pelo autor.

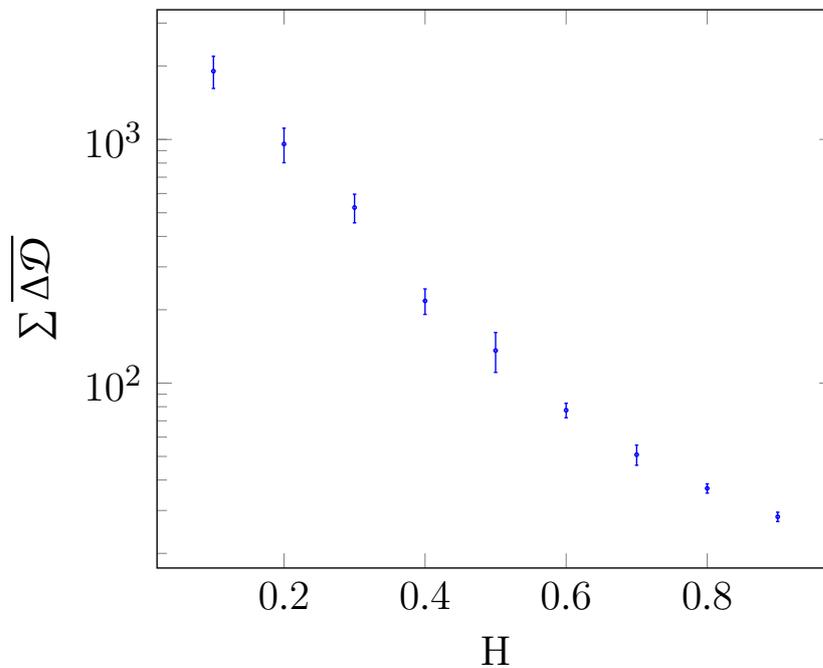


Figura 4.14: Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com  $10^5$  movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de  $10^4$  nós.

Fonte: Elaborada pelo autor.

# Capítulo 5

## Conclusão

Neste trabalho, apresentamos novas metodologias de análise de redes e séries temporais, onde foi proposto a aplicação de quantificadores da Teoria da Informação para primeiramente caracterizar os nós de uma rede. Por meio das funções de distribuições de probabilidade (PDF) extraídas das distribuições de distância nos nós (NDD) de uma rede, foi possível observar que, o valor resultante da  $\mathcal{D}$ , equação 3.4, representa com precisão a simetria de dois nós de uma rede.

A aplicação da metodologia em algumas redes aleatórias se deu apenas a avaliação inicial do modelo com a finalidade de entendê-lo e validá-lo. Os testes iniciais se mostraram adequados ao objetivo proposto nesse trabalho. Redes de Barabási-Albert foram submetidas à metodologia, e a simetria dos vértices centrais foram observados conforme a evolução da rede.

Aplicamos o  $\mathcal{D}$  em séries temporais do mercado financeiro que foram transformadas em redes por meio da sua correlação  $\rho = 0.8$  e  $0.85$  em um período predeterminado de tempo. O objetivo desse experimento foi oferecer mais uma opção de substituição de ações, enquanto se tem por objetivo manter ao máximo o desempenho que se obteria com as ações que foram substituídas. Assim, dado uma determinada carteira de ações no qual 4 ações precisam ser substituídas, o modelo sugere a troca dessas ações por ações simétricas a elas. O experimento utilizou um intervalo de 122 dias a partir do 30<sup>o</sup> dia da data mais recente dos dados, e comparou os rendimentos com os que não houveram troca das ações, mudando essas ações. Essa substituição foi comparada com a troca dessas mesmas 4 ações por outras 4 escolhidas aleatoriamente e em trocas baseadas em ações da maior correlação. Para as duas redes geradas  $\rho = 0.8$  e  $0.85$ , a troca por simetria se mostrou uma boa alternativa para substituição de ações de carteiras de ações.

Para novos experimentos, propomos utilizar carteiras com diferentes tamanhos e com variação do número de ações a serem substituídas.

Ao transformar séries temporais em redes, utilizando o método do Grafo de Visibilidade Horizontal (Horizontal Visibility Graph - HVG) do Luque et al. [2009], séries do Movimentos Brownianos Fracionários (MBF) foram transformados em redes. Uma metodologia foi proposta para caracterizar o expoente de Hurst (H) dessas séries, utilizando-se de uma fração das séries do MBF de  $10^5$  movimentos para  $H = \{0.1, 0.2, \dots, 0.9\}$ . Nas análises foi observado que a  $\mathcal{D}$ , juntamente com a metodologia apresentada para o cálculo do  $|\overline{\Delta \mathcal{D}}_k|$  se mostrou eficiente para distinguir os H das séries para séries de MBF de até  $7 \cdot 10^4$  movimentos.

Para trabalhos futuros, propomos parametrizar a medida  $|\overline{\Delta \mathcal{D}_k}|$ , testar a medida em intervalos de  $H$  ainda menores, como:  $H = \{0.10, 0.11, \dots, 0.19\}$ , aumentar o número de pontos observados nas séries, objetivando-se melhorar a precisão da caracterização do  $H$ , assim possibilitando utilizar séries de MBF menores que  $7 \cdot 10^4$ .

O modelo proposto para a obtenção da simetria dos vértices das redes, gerou resultados satisfatórios, representando com precisão a simetria nos cenários examinados. No entanto, é necessário que mais testes sejam realizados com diferentes limites de geração de redes.

Devido a complexidade computacional desse tipo problema, ele se torna de grande interesse científico, e ainda possui a característica da aplicabilidade prática nos mais diversos problemas da engenharia e computação, assim, o tema estudado e os resultados obtidos são importantes para todo o meio acadêmico.

## Referências Bibliográficas

- P. Abry e F. Sellan. The wavelet-based synthesis for fractional Brownian motion proposed by F. Sellan and Y. Meyer: Remarks and fast implementation. *Applied and Computational Harmonic Analysis*, 3(4):377–383, 1996. ISSN 10635203. doi: 10.1006/acha.1996.0030.
- D. R. Amancio, F. N. Silva, e L. D. F. Costa. Concentric network symmetry grasps authors' styles in word adjacency networks. *Epl*, 110(6), 2015. ISSN 12864854. doi: 10.1209/0295-5075/110/68001.
- A.-L. Barabási e R. Albert. Emergence of Scaling in Random Networks Downloaded from. *Mat. Res. Soc. Symp. Proc*, 74(October):677, 1995.
- J. M. Bardet, G. Lang, G. Oppenheim, A. Philippe, e M. S. Taqqu. Generators of long-range dependent processes: A survey. *Theory and Applications of Long-Range Dependence*, páginas 579–623, 2003. doi: citeulike-article-id:7689005.
- L. W. Beineke e R. J. Wilson. *Topics in Algebraic Graph Theory*. Cambridge University Press, 2004. ISBN 9780511529993. doi: 10.1017/CBO9780511529993.
- B. Bollobás e O. Riordan. Random Graphs and Branching Processes. Em B. Bollobás, R. Kozma, e D. Miklós, editores, *Handbook of Large-Scale Random Networks*, páginas 15–115. Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2008. ISBN 978-3-540-69395-6.
- R. S. Cabral, A. C. Frery, e J. A. Ramírez. Variability analysis of complex networks measures based on stochastic distances. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 415:73–86, 2014. ISSN 03784371. doi: 10.1016/j.physa.2014.07.079.
- L. C. Carpi, O. A. Rosso, P. M. Saco, e M. G. Ravetti. Analyzing complex networks evolution through Information Theory quantifiers. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 375(4):801–804, 2011. ISSN 03759601. doi: 10.1016/j.physleta.2010.12.038.
- J. J. Frost, K. J. Pienta, e D. S. Coffey. Symmetry and symmetry breaking in cancer: a foundational approach to the cancer problem. *Oncotarget*, 2017. ISSN 1949-2553. doi: 10.18632/oncotarget.22939.
- A. Garrido. Symmetry and asymmetry level measures. *Symmetry*, 2(2):707–721, 2010. ISSN 20738994. doi: 10.3390/sym2020707.
- A. Garrido. Symmetry in complex networks. *Symmetry*, 3(1):1–15, 2011. ISSN 20738994. doi: 10.3390/sym3010001.

- B. A. Gonçalves. *Análise de Séries Temporais Via Grafo de Visibilidade Horizontal e Teoria da Informação*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2016.
- I. Grosse, P. Bernaola-Galván, P. Carpena, R. Román-Roldán, J. Oliver, e H. E. Stanley. Analysis of symbolic sequences using the Jensen-Shannon divergence. *Physical Review E - Statistical Physics, Plasmas, Fluids, and Related Interdisciplinary Topics*, 65(4):16, 2002. ISSN 1063651X. doi: 10.1103/PhysRevE.65.041905.
- L. Lacasa e R. Toral. Description of stochastic and chaotic series using visibility graphs. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 82(3):1–11, 2010. ISSN 15393755. doi: 10.1103/PhysRevE.82.036120.
- L. Lacasa, B. Luque, F. Ballesteros, J. Luque, e J. C. Nuño. From time series to complex networks: The visibility graph. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 105(13):4972–4975, 4 2008. ISSN 0027-8424. doi: 10.1073/pnas.0709247105.
- L. Lacasa, B. Luque, J. Luque, e J. C. Nũo. The visibility graph: A new method for estimating the Hurst exponent of fractional Brownian motion. *Epl*, 86(3), 2009. ISSN 02955075. doi: 10.1209/0295-5075/86/30001.
- S.-K. Lin. Correlation of Entropy with Similarity and Symmetry. *J. Chem. Inf. Comput. Sci.*, 36:367–376, 1996. ISSN 1549-9596. doi: 10.1021/ci950077k.
- B. Luque, L. Lacasa, F. Ballesteros, e J. Luque. Horizontal visibility graphs: Exact results for random time series. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 80(4):1–11, 2009. ISSN 15393755. doi: 10.1103/PhysRevE.80.046103.
- B. D. MacArthur, R. J. Sánchez-García, e J. W. Anderson. Symmetry in complex networks. *Discrete Applied Mathematics*, 156(18):3525–3531, 2008. ISSN 0166218X. doi: 10.1016/j.dam.2008.04.008.
- B. B. Mandelbrot e J. W. Van Ness. Fractional Brownian Motions , Fractional Noises and Applications. *Society*, 10(4):422–437, 1968.
- A. Mollgaard, I. Zettler, J. Dammeyer, M. H. Jensen, S. Lehmann, e J. Mathiesen. Measure of node similarity in multilayer networks. *PLoS ONE*, 11(6):1–7, 2016. ISSN 19326203. doi: 10.1371/journal.pone.0157436.
- M. G. Ravetti, L. C. Carpi, B. A. Gonçalves, A. C. Frery, e O. A. Rosso. Distinguishing noise from chaos: Objective versus subjective criteria using horizontal visibility graph. *PLoS ONE*, 9(9), 2014. ISSN 19326203. doi: 10.1371/journal.pone.0108004.
- L. Rossi, A. Torsello, E. R. Hancock, e R. C. Wilson. Characterizing graph symmetries through quantum Jensen-Shannon divergence. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 88(3):1–9, 2013. ISSN 15393755. doi: 10.1103/PhysRevE.88.032806.
- T. A. Schieber e M. G. Ravetti. Simulating the dynamics of scale-free networks via optimization. *PLoS ONE*, 8(12), 2013. ISSN 19326203. doi: 10.1371/journal.pone.0080783.

- T. A. Schieber, L. Carpi, A. C. Frery, O. A. Rosso, P. M. Pardalos, e M. G. Ravetti. Information theory perspective on network robustness. *Physics Letters, Section A: General, Atomic and Solid State Physics*, 380(3):359–364, 2016. ISSN 03759601. doi: 10.1016/j.physleta.2015.10.055.
- T. A. Schieber, L. Carpi, A. Díaz-Guilera, P. M. Pardalos, C. Masoller, e M. G. Ravetti. Quantification of network structural dissimilarities. *Nature Communications*, 8(May 2016):2–11, 2017. ISSN 20411723. doi: 10.1038/ncomms13928.
- J. Schwichtenberg. *Physics from Symmetry*. Undergraduate Lecture Notes in Physics. Springer International Publishing, Cham, 2018. ISBN 978-3-319-66630-3. doi: 10.1007/978-3-319-66631-0.
- F. N. Silva, C. H. Comin, T. K. Peron, F. A. Rodrigues, C. Ye, R. C. Wilson, E. R. Hancock, e L. Daf Costa. Concentric network symmetry. *Information Sciences*, 333: 61–80, 2016. ISSN 00200255. doi: 10.1016/j.ins.2015.11.014.
- Y. Xiao, M. Xiong, W. Wang, e H. Wang. Emergence of symmetry in complex networks. *Physical Review E - Statistical, Nonlinear, and Soft Matter Physics*, 77(6):1–10, 2008. ISSN 15393755. doi: 10.1103/PhysRevE.77.066108.
- H. Zenil, F. Soler-Toscano, K. Dingle, e A. A. Louis. Correlation of automorphism group size and topological properties with program-size complexity evaluations of graphs and complex networks. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 404:341–358, 2014. ISSN 03784371. doi: 10.1016/j.physa.2014.02.060.
- L. Zhang, A. E. Motter, e T. Nishikawa. Incoherence-Mediated Remote Synchronization. *Physical Review Letters*, 118(17), 2017. ISSN 10797114. doi: 10.1103/PhysRevLett.118.174102.

# Apêndice A

## Arquivos

Os arquivos gerados e utilizados nesse trabalho estão anexados no link: [https://www.dropbox.com/sh/oedrkbivd2jozy6/AAC-0\\_2ewzj6hHk105JGRRu-a?dl=0](https://www.dropbox.com/sh/oedrkbivd2jozy6/AAC-0_2ewzj6hHk105JGRRu-a?dl=0)

# Apêndice B

## Tabelas adicionais

### B.1 Tabela das ações da SP500

Tabela B.1: Empresas listadas na S&P 500 entre 02/01/1962 e 30/06/2016

Cod.	Abreviação	Empresa	Segmento	Sub-segmento	Localização
1	MMM	3M Company	Industrials	Industrial Conglomerates	St. Paul, Minnesota
2	ABT	Abbott Laboratories	Health Care	Health Care Equipment & Services	North Chicago, Illinois
3	ABBV	AbbVie	Health Care	Pharmaceuticals	North Chicago, Illinois
4	ACN	Accenture plc	Information Technology	IT Consulting & Other Services	Dublin, Ireland
5	ATVI	Activision Blizzard	Information Technology	Home Entertainment Software	Santa Monica, California
6	AYI	Acuity Brands Inc	Industrials	Electrical Components & Equipment	Atlanta, Georgia
7	ADBE	Adobe Systems Inc	Information Technology	Application Software	San Jose, California
8	AAP	Advance Auto Parts	Consumer Discretionary	Automotive Retail	Roanoke, Virginia
9	AES	AES Corp	Utilities	Independent Power Producers & Energy Traders	Arlington, Virginia
10	AET	Aetna Inc	Health Care	Managed Health Care	Hartford, Connecticut
11	AFL	AFLAC Inc	Financials	Life & Health Insurance	Columbus, Georgia

12	AMG	Affiliated Managers Group Inc	Financials	Asset Management & Custody Banks	Beverly, Massachusetts
13	A	Agilent Technologies Inc	Health Care	Health Care Equipment & Services	Santa Clara, California
14	APD	Air Products & Chemicals Inc	Materials	Industrial Gases	Allentown, Pennsylvania
15	AKAM	Akamai Technologies Inc	Information Technology	Internet Software & Services	Cambridge, Massachusetts
16	ALK	Alaska Air Group Inc	Industrials	Airlines	Seattle, Washington
17	ALB	Albemarle Corp	Materials	Specialty Chemicals	Baton Rouge, Louisiana
18	AA	Alcoa Inc	Materials	Aluminum	New York, New York
19	AGN	Allergan plc	Health Care	Pharmaceuticals	Dublin, Ireland
20	LNT	Alliant Energy Corp	Utilities	Electric Utilities	Madison, Wisconsin
21	ALXN	Alexion Pharmaceuticals	Health Care	Biotechnology	Cheshire, Connecticut
22	ALLE	Allegion	Industrials	Building Products	Dublin, Ireland
23	ADS	Alliance Data Systems	Information Technology	Data Processing & Outsourced Services	Plano, Texas
24	ALL	Allstate Corp	Financials	Property & Casualty Insurance	Northfield Township, Illinois
25	GOOGL	Alphabet Inc Class A	Information Technology	Internet Software & Services	Mountain View, California
26	GOOG	Alphabet Inc Class C	Information Technology	Internet Software & Services	Mountain View, California
27	MO	Altria Group Inc	Consumer Staples	Tobacco	Richmond, Virginia
28	AMZN	Amazon.com Inc	Consumer Discretionary	Internet Retail	Seattle, Washington
29	AEE	Ameren Corp	Utilities	MultiUtilities	St. Louis, Missouri
30	AAL	American Airlines Group	Industrials	Airlines	Fort Worth, Texas
31	AEP	American Electric Power	Utilities	Electric Utilities	Columbus, Ohio
32	AXP	American Express Co	Financials	Consumer Finance	New York, New York
33	AIG	American International Group, Inc.	Financials	Property & Casualty Insurance	New York, New York

34	AMT	American Tower Corp A	Financials	Specialized REITs	Boston, Massachusetts
35	AWK	American Water Works Company Inc	Utilities	Water Utilities	Voorhees, New Jersey
36	AMP	Ameriprise Financial	Financials	Diversified Financial Services	Minneapolis, Minnesota
37	ABC	Amerisource-Bergen Corp	Health Care	Health Care Distribution & Services	Chesterbrook, Pennsylvania
38	AME	Ametek	Industrials	Electrical Components & Equipment	Berwyn, Pennsylvania
39	AMGN	Amgen Inc	Health Care	Biotechnology	Thousand Oaks, California
40	APH	Amphenol Corp A	Industrials	Electrical Components & Equipment	Wallingford, Connecticut
41	APC	Anadarko Petroleum Corp	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	The Woodlands, Texas
42	ADI	Analog Devices, Inc.	Information Technology	Semiconductors	Norwood, Massachusetts
43	AON	Aon plc	Financials	Insurance Brokers	London, United Kingdom
44	APA	Apache Corporation	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Houston, Texas
45	AIV	Apartment Investment & Mgmt	Financials	REITs	Denver, Colorado
46	AAPL	Apple Inc.	Information Technology	Computer Hardware	Cupertino, California
47	AMAT	Applied Materials Inc	Information Technology	Semiconductor Equipment	Santa Clara, California
48	ADM	Archer-Daniels-Midland Co	Consumer Staples	Agricultural Products	Decatur, Illinois
49	AJG	Arthur J. Gallagher & Co.	Financials	Insurance Brokers	Itasca, Illinois
50	AIZ	Assurant Inc	Financials	Multi-line Insurance	New York, New York
51	T	AT&T Inc	Telecommunications Services	Integrated Telecommunications Services	Dallas, Texas
52	ADSK	Autodesk Inc	Information Technology	Application Software	San Rafael, California
53	ADP	Automatic Data Processing	Information Technology	Internet Software & Services	Roseland, New Jersey
54	AN	AutoNation Inc	Consumer Discretionary	Specialty Stores	Fort Lauderdale, Florida

55	AZO	AutoZone Inc	Consumer Discretionary	Specialty Stores	Memphis, Tennessee
56	AVGO	Avago Technologies	Information Technology	Semiconductors	San Jose, California
57	AVB	AvalonBay Communities, Inc.	Financials	Residential REITs	Arlington, Virginia[3]
58	AVY	Avery Dennison Corp	Materials	Paper Packaging	Glendale, California
59	BHI	Baker Hughes Inc	Energy	Oil & Gas Equipment & Services	Houston, Texas
60	BLL	Ball Corp	Materials	Metal & Glass Containers	Broomfield, Colorado
61	BAC	Bank of America Corp	Financials	Banks	Charlotte, North Carolina
62	BK	The Bank of New York Mellon Corp.	Financials	Banks	New York, New York
63	BCR	Bard (C.R.) Inc.	Health Care	Health Care Equipment & Services	Murray Hill, New Jersey
64	BAX	Baxter International Inc.	Health Care	Health Care Equipment & Services	Deerfield, Illinois
65	BBT	BB&T Corporation	Financials	Banks	Winston-Salem, North Carolina
66	BDX	Becton Dickinson	Health Care	Health Care Equipment & Services	Franklin Lakes, New Jersey
67	BBBY	Bed Bath & Beyond	Consumer Discretionary	Specialty Stores	Union, New Jersey
68	BRK-B	Berkshire Hathaway	Financials	Multi-Sector Holdings	Omaha, Nebraska
69	BBY	Best Buy Co. Inc.	Consumer Discretionary	Computer & Electronics Retail	Richfield, Minnesota
70	BIIB	BIOGEN IDEC Inc.	Health Care	Biotechnology	Weston, Massachusetts
71	BLK	BlackRock	Financials	Asset Management & Custody Banks	New York, New York
72	HRB	Block H&R	Financials	Consumer Finance	Kansas City, Missouri
73	BA	Boeing Company	Industrials	Aerospace & Defense	Chicago, Illinois
74	BWA	BorgWarner	Consumer Discretionary	Auto Parts & Equipment	Auburn Hills, Michigan

75	BXP	Boston Properties	Financials	REITs	Boston, Massachusetts
76	BSX	Boston Scientific	Health Care	Health Care Equipment & Services	Marlborough, Massachusetts[4]
77	BMJ	Bristol-Myers Squibb	Health Care	Health Care Distributors & Services	New York, New York
78	BF-B	Brown-Forman Corporation	Consumer Staples	Distillers & Vintners	Louisville, Kentucky
79	CHRW	C. H. Robinson Worldwide	Industrials	Air Freight & Logistics	Eden Prairie, Minnesota
80	CA	CA, Inc.	Information Technology	Systems Software	Islandia, New York
81	COG	Cabot Oil & Gas	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Houston, Texas
82	CPB	Campbell Soup	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Camden, New Jersey
83	COF	Capital One Financial	Financials	Consumer Finance	Tysons Corner, Virginia
84	CAH	Cardinal Health Inc.	Health Care	Health Care Distributors & Services	Dublin, Ohio
85	HSIC	Henry Schein	Health Care	Health Care Distributors & Services	Melville, New York
86	KMX	Carmax Inc	Consumer Discretionary	Specialty Stores	Richmond, Virginia
87	CCL	Carnival Corp.	Consumer Discretionary	Hotels, Resorts & Cruise Lines	Miami, Florida
88	CAT	Caterpillar Inc.	Industrials	Construction & Farm Machinery & Heavy Trucks	Peoria, Illinois
89	CBG	CBRE Group	Financials	Real Estate Services	Los Angeles, California
90	CBS	CBS Corp.	Consumer Discretionary	Broadcasting & Cable TV	New York, New York
91	CELG	Celgene Corp.	Health Care	Biotechnology	Summit, New Jersey
92	CNC	Centene Corporation	Health Care	Managed Health Care	St Louis, Missouri
93	CNP	CenterPoint Energy	Utilities	MultiUtilities	Houston, Texas
94	CTL	CenturyLink Inc	Telecommunications Services	Integrated Telecommunications Services	Monroe, Louisiana
95	CERN	Cerner	Health Care	Health Care Distributors & Services	North Kansas City, Missouri

96	CF	CF Industries Holdings Inc	Materials	Fertilizers & Agricultural Chemicals	Deerfield, Illinois
97	SCHW	Charles Schwab Corporation	Financials	Investment Banking & Brokerage	San Francisco, California
98	CHK	Chesapeake Energy	Energy	Integrated Oil & Gas	Oklahoma City, Oklahoma
99	CVX	Chevron Corp.	Energy	Integrated Oil & Gas	San Ramon, California
100	CMG	Chipotle Mexican Grill	Consumer Discretionary	Restaurants	Denver, Colorado
101	CB	Chubb Limited	Financials	Property & Casualty Insurance	Zurich, Switzerland
102	CHD	Church & Dwight	Consumer Staples	Household Products	Ewing, New Jersey
103	CI	CIGNA Corp.	Health Care	Managed Health Care	Philadelphia, Pennsylvania
104	XEC	Cimarex Energy	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Denver, Colorado
105	CINF	Cincinnati Financial	Financials	Property & Casualty Insurance	Fairfield, Ohio
106	CTAS	Cintas Corporation	Industrials	Diversified Support Services	Mason, Ohio
107	CSCO	Cisco Systems	Information Technology	Networking Equipment	San Jose, California
108	C	Citigroup Inc.	Financials	Banks	New York, New York
109	CTXS	Citrix Systems	Information Technology	Internet Software & Services	Fort Lauderdale, Florida
110	CLX	The Clorox Company	Consumer Staples	Household Products	Oakland, California
111	CME	CME Group Inc.	Financials	Diversified Financial Services	Chicago, Illinois
112	CMS	CMS Energy	Utilities	MultiUtilities	Jackson, Michigan
113	COH	Coach Inc.	Consumer Discretionary	Apparel, Accessories & Luxury Goods	New York, New York
114	KO	The Coca Cola Company	Consumer Staples	Soft Drinks	Atlanta, Georgia
115	CTSH	Cognizant Technology Solutions	Information Technology	IT Consulting & Services	Teaneck, New Jersey
116	CL	Colgate-Palmolive	Consumer Staples	Household Products	New York, New York
117	CPGX	Columbia Pipeline Group Inc	Energy	Oil & Gas Storage & Transportation	Houston, Texas

118	CMCSA	Comcast A Corp	Consumer Discretionary	Broadcasting & Cable TV	Philadelphia, Pennsylvania
119	CMA	Comerica Inc.	Financials	Banks	Dallas, Texas
120	CAG	ConAgra Foods Inc.	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Omaha, Nebraska
121	CXO	Concho Resources	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Midland, Texas
122	COP	ConocoPhillips	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Houston, Texas
123	ED	Consolidated Edison	Utilities	Electric Utilities	New York, New York
124	STZ	Constellation Brands	Consumer Staples	Distillers & Vintners	Victor, New York
125	GLW	Corning Inc.	Industrials	Construction & Engineering	Corning, New York
126	COST	Costco Co.	Consumer Staples	Hypermarkets & Super Centers	Issaquah, Washington
127	CCI	Crown Castle International Corp.	Financials	REITs	Houston, Texas
128	CSRA	CSRA Inc.	Information Technology	IT Consulting & Services	Falls Church, Virginia
129	CSX	CSX Corp.	Industrials	Railroads	Jacksonville, Florida
130	CMI	Cummins Inc.	Industrials	Industrial Machinery	Columbus, Indiana
131	CVS	CVS Health	Consumer Staples	Drug Retail	Woonsocket, Rhode Island
132	DHI	D. R. Horton	Consumer Discretionary	Homebuilding	Fort Worth, Texas
133	DHR	Danaher Corp.	Industrials	Industrial Machinery	Washington D.C
134	DRI	Darden Restaurants	Consumer Discretionary	Restaurants	Orlando, Florida
135	DVA	DaVita Inc.	Health Care	Health Care Facilities	Denver, Colorado
136	DE	Deere & Co.	Industrials	Construction & Farm Machinery & Heavy Trucks	Moline, Illinois
137	DLPH	Delphi Automotive	Consumer Discretionary	Auto Parts & Equipment	Gillingham, Kent, United Kingdom
138	DAL	Delta Air Lines	Industrials	Airlines	Atlanta, Georgia
139	XRAY	Dentsply Sirona	Health Care	Health Care Supplies	York, Pennsylvania

140	DVN	Devon Energy Corp.	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Oklahoma City, Oklahoma
141	DO	Diamond Offshore Drilling	Energy	Oil & Gas Drilling	Houston, Texas
142	DLR	Digital Realty Trust	Financials	Specialized REITs	San Francisco, California
143	DFS	Discover Financial Services	Financials	Consumer Finance	Riverwoods, Illinois
144	DISCA	Discovery Communications-A	Consumer Discretionary	Broadcasting & Cable TV	Silver Spring, Maryland
145	DISCK	Discovery Communications-C	Consumer Discretionary	Broadcasting & Cable TV	Silver Spring, Maryland
146	DG	Dollar General	Consumer Discretionary	General Merchandise Stores	Goodlettsville, Tennessee
147	DLTR	Dollar Tree	Consumer Discretionary	General Merchandise Stores	Chesapeake, Virginia
148	D	Dominion Resources	Utilities	Electric Utilities	Richmond, Virginia
149	DOV	Dover Corp.	Industrials	Industrial Machinery	Downers Grove, Illinois
150	DOW	Dow Chemical	Materials	Diversified Chemicals	Midland, Michigan
151	DPS	Dr Pepper Snapple Group	Consumer Staples	Soft Drinks	Plano, Texas
152	DTE	DTE Energy Co.	Utilities	MultiUtilities	Detroit, Michigan
153	DD	Du Pont (E.I.)	Materials	Diversified Chemicals	Wilmington, Delaware
154	DUK	Duke Energy	Utilities	Electric Utilities	Charlotte, North Carolina
155	DNB	Dun & Bradstreet	Industrials	Data Processing Services	Short Hills, New Jersey
156	ETFC	E*Trade	Financials	Investment Banking & Brokerage	New York, New York
157	EMN	Eastman Chemical	Materials	Diversified Chemicals	Kingsport, Tennessee
158	ETN	Eaton Corporation	Industrials	Industrial Conglomerates	Dublin, Ireland
159	EBAY	eBay Inc.	Information Technology	Internet Software & Services	San Jose, California
160	ECL	Ecolab Inc.	Materials	Specialty Chemicals	St. Paul, Minnesota
161	EIX	Edison Int'l	Utilities	Electric Utilities	Rosemead, California

162	EW	Edwards Lifesciences	Health Care	Health Care Equipment & Services	Irvine, California
163	EA	Electronic Arts	Information Technology	Home Entertainment Software	Redwood City, California
164	EMC	EMC Corp.	Information Technology	IT Consulting & Services	Hopkinton, Massachusetts
165	EMR	Emerson Electric Company	Industrials	Industrial Conglomerates	Ferguson, Missouri
166	ENDP	Endo International	Health Care	Pharmaceuticals	Dublin, Ireland
167	ETR	Entergy Corp.	Utilities	Electric Utilities	New Orleans, Louisiana
168	EOG	EOG Resources	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Houston, Texas
169	EQT	EQT Corporation	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Pittsburgh, Pennsylvania
170	EFX	Equifax Inc.	Financials	Diversified Financial Services	Atlanta, Georgia
171	EQIX	Equinix	Information Technology	Internet Software & Services	Redwood City, California
172	EQR	Equity Residential	Financials	REITs	Chicago, Illinois
173	ESS	Essex Property Trust Inc	Financials	Residential REITs	Palo Alto, California
174	EL	Estee Lauder Cos.	Consumer Staples	Personal Products	New York, New York
175	ES	Eversource Energy	Utilities	MultiUtilities	Springfield, Massachusetts
176	EXC	Exelon Corp.	Utilities	MultiUtilities	Chicago, Illinois
177	EXPE	Expedia Inc.	Consumer Discretionary	Hotels, Resorts & Cruise Lines	Bellevue, Washington
178	EXPD	Expeditors Int'l	Industrials	Air Freight & Logistics	Seattle, Washington
179	ESRX	Express Scripts	Health Care	Health Care Distributors & Services	Cool Valley, Missouri
180	EXR	Extra Space Storage	Financials	Specialized REITs	Zurich, Switzerland
181	XOM	Exxon Mobil Corp.	Energy	Integrated Oil & Gas	Irving, Texas
182	FFIV	F5 Networks	Information Technology	Networking Equipment	Seattle, Washington
183	FB	Facebook	Information Technology	Internet Software & Services	Menlo Park, California

184	FAST	Fastenal Co	Industrials	Building Products	Winona, Minnesota
185	FRT	Federal Realty Investment Trust	Financials	Retail REITs	Rockville, Maryland
186	FDX	FedEx Corporation	Industrials	Air Freight & Logistics	Memphis, Tennessee
187	FIS	Fidelity National Information Services	Information Technology	Internet Software & Services	Jacksonville, Florida
188	FITB	Fifth Third Bancorp	Financials	Banks	Cincinnati, Ohio
189	FSLR	First Solar Inc	Information Technology	Semiconductors	Tempe, Arizona
190	FE	FirstEnergy Corp	Utilities	Electric Utilities	Akron, Ohio
191	FISV	Fiserv Inc	Information Technology	Internet Software & Services	Brookfield, Wisconsin
192	FLIR	FLIR Systems	Industrials	Aerospace & Defense	Wilsonville, Oregon
193	FLS	Flowserve Corporation	Industrials	Industrial Machinery	Irving, Texas
194	FLR	Fluor Corp.	Industrials	Diversified Commercial Services	Irving, Texas
195	FMC	FMC Corporation	Materials	Diversified Chemicals	Philadelphia, Pennsylvania
196	FTI	FMC Technologies Inc.	Energy	Oil & Gas Equipment & Services	Houston, Texas
197	FL	Foot Locker Inc	Consumer Discretionary	Apparel Retail	New York, New York
198	F	Ford Motor	Consumer Discretionary	Automobile Manufacturers	Dearborn, Michigan
199	FBHS	Fortune Brands Home & Security	Industrials	Building Products	Deerfield, Illinois
200	BEN	Franklin Resources	Financials	Asset Management & Custody Banks	San Mateo, California
201	FCX	Freeport-McMoran Cp & Gld	Materials	Diversified Metals & Mining	Phoenix, Arizona
202	FTR	Frontier Communications	Telecommunications Services	Integrated Telecommunications Services	Stamford, Connecticut
203	GPS	Gap (The)	Consumer Discretionary	Apparel Retail	San Francisco, California
204	GRMN	Garmin Ltd.	Consumer Discretionary	Consumer Electronics	Schaffhausen, Switzerland

205	GD	General Dynamics	Industrials	Aerospace & Defense	Falls Church, Virginia
206	GE	General Electric	Industrials	Industrial Conglomerates	Fairfield, Connecticut
207	GGP	General Growth Properties Inc.	Financials	REITs	Chicago, Illinois
208	GIS	General Mills	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Golden Valley, Minnesota
209	GM	General Motors	Consumer Discretionary	Automobile Manufacturers	Detroit, Michigan
210	GPC	Genuine Parts	Consumer Discretionary	Specialty Stores	Atlanta, Georgia
211	GILD	Gilead Sciences	Health Care	Biotechnology	Foster City, California
212	GPN	Global Payments Inc	Information Technology	Data Processing & Outsourced Services	Atlanta, Georgia
213	GS	Goldman Sachs Group	Financials	Investment Banking & Brokerage	New York, New York
214	GT	Goodyear Tire & Rubber	Consumer Discretionary	Tires & Rubber	Akron, Ohio
215	GWW	Grainger (W.W.) Inc.	Industrials	Industrial Materials	Lake Forest, Illinois
216	HAL	Halliburton Co.	Energy	Oil & Gas Equipment & Services	Houston, Texas
217	HBI	Hanesbrands Inc	Consumer Discretionary	Apparel, Accessories & Luxury Goods	Winston-Salem, North Carolina
218	HOG	Harley-Davidson	Consumer Discretionary	Motorcycle Manufacturers	Milwaukee, Wisconsin
219	HAR	Harman Int'l Industries	Consumer Discretionary	Consumer Electronics	Stamford, Connecticut
220	HRS	Harris Corporation	Information Technology	Telecommunications Equipment	Melbourne, Florida
221	HIG	Hartford Financial Svc.Gp.	Financials	Property & Casualty Insurance	Hartford, Connecticut
222	HAS	Hasbro Inc.	Consumer Discretionary	Leisure Products	Pawtucket, Rhode Island
223	HCA	HCA Holdings	Health Care	Health Care Facilities	Nashville, Tennessee
224	HCP	HCP Inc.	Financials	REITs	Long Beach, California
225	HP	Helmerich & Payne	Energy	Oil & Gas Drilling	Tulsa, Oklahoma[5]
226	HES	Hess Corporation	Energy	Integrated Oil & Gas	New York, New York

227	HPE	Hewlett Packard Enterprise	Information Technology	Technology Hardware, Storage & Peripherals	Palo Alto, California
228	HOLX	Hologic	Health Care	Health Care Equipment	Marlborough, Massachusetts
229	HD	Home Depot	Consumer Discretionary	Home Improvement Retail	Atlanta, Georgia
230	HON	Honeywell Int'l Inc.	Industrials	Industrial Conglomerates	Morristown, New Jersey
231	HRL	Hormel Foods Corp.	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Austin, Minnesota
232	HST	Host Hotels & Resorts	Financials	REITs	Bethesda, Maryland
233	HPQ	HP Inc.	Information Technology	Computer Hardware	Palo Alto, California
234	HUM	Humana Inc.	Health Care	Managed Health Care	Louisville, Kentucky
235	HBAN	Huntington Bancshares	Financials	Banks	Columbus, Ohio
236	ITW	Illinois Tool Works	Industrials	Industrial Machinery	Glenview, Illinois
237	ILMN	Illumina Inc	Health Care	Life Sciences Tools & Services	San Diego, California
238	IR	Ingersoll-Rand PLC	Industrials	Industrial Conglomerates	Dublin, Ireland
239	INTC	Intel Corp.	Information Technology	Semiconductors	Santa Clara, California
240	ICE	Intercontinental Exchange	Financials	Diversified Financial Services	Atlanta, Georgia
241	IBM	International Bus. Machines	Information Technology	IT Consulting & Services	Armonk, New York
242	IP	International Paper	Materials	Paper Products	Memphis, Tennessee
243	IPG	Interpublic Group	Consumer Discretionary	Advertising	New York, New York
244	IFF	Intl Flavors & Fragrances	Materials	Specialty Chemicals	New York, New York
245	INTU	Intuit Inc.	Information Technology	Internet Software & Services	Mountain View, California
246	ISRG	Intuitive Surgical Inc.	Health Care	Health Care Equipment & Services	Sunnyvale, California
247	IVZ	Invesco Ltd.	Financials	Asset Management & Custody Banks	Atlanta, Georgia
248	IRM	Iron Mountain Incorporated	Industrials	Data Processing Services	Boston, Massachusetts

249	JEC	Jacobs Engineering Group	Industrials	Industrial Conglomerates	Pasadena, California
250	JBHT	J. B. Hunt Transport Services	Industrials	Trucking	Lowell, Arkansas
251	JNJ	Johnson & Johnson	Health Care	Health Care Equipment & Services	New Brunswick, New Jersey
252	JCI	Johnson Controls	Consumer Discretionary	Auto Parts & Equipment	Milwaukee, Wisconsin
253	JPM	JPMorgan Chase & Co.	Financials	Banks	New York, New York
254	JNPR	Juniper Networks	Information Technology	Networking Equipment	Sunnyvale, California
255	KSU	Kansas City Southern	Industrials	Railroads	Kansas City, Missouri
256	K	Kellogg Co.	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Battle Creek, Michigan
257	KEY	KeyCorp	Financials	Banks	Cleveland, Ohio
258	KMB	Kimberly-Clark	Consumer Staples	Household Products	Irving, Texas
259	KIM	Kimco Realty	Financials	REITs	New Hyde Park, New York
260	KMI	Kinder Morgan	Energy	Oil & Gas Refining & Marketing & Transportation	Houston, Texas
261	KLAC	KLA-Tencor Corp.	Information Technology	Semiconductor Equipment	Milpitas, California
262	KSS	Kohl's Corp.	Consumer Discretionary	General Merchandise Stores	Menomonee Falls, Wisconsin
263	KHC	Kraft Heinz Co	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Northfield, Illinois
264	KR	Kroger Co.	Consumer Staples	Food Retail	Cincinnati, Ohio
265	LB	L Brands Inc.	Consumer Discretionary	Apparel Retail	Columbus, Ohio
266	LLL	L-3 Communications Holdings	Industrials	Industrial Conglomerates	New York, New York
267	LH	Laboratory Corp. of America Holding	Health Care	Health Care Facilities	Burlington, North Carolina
268	LRCX	Lam Research	Information Technology	Semiconductor Equipment	Fremont, California
269	LM	Legg Mason	Financials	Asset Management & Custody Banks	Baltimore, Maryland
270	LEG	Leggett & Platt	Industrials	Industrial Conglomerates	Carthage, Missouri

271	LEN	Lennar Corp.	Consumer Discretionary	Homebuilding	Miami, Florida
272	LVLT	Level 3 Communications	Telecommunications Services	Alternative Carriers	Broomfield, Colorado
273	LUK	Leucadia National Corp.	Financials	Multi-Sector Holdings	New York, New York
274	LLY	Lilly (Eli) & Co.	Health Care	Pharmaceuticals	Indianapolis, Indiana
275	LNC	Lincoln National	Financials	Multi-line Insurance	Radnor, Pennsylvania
276	LLTC	Linear Technology Corp.	Information Technology	Semiconductors	Milpitas, California
277	LKQ	LKQ Corporation	Consumer Discretionary	Distributors	Chicago, Illinois
278	LMT	Lockheed Martin Corp.	Industrials	Aerospace & Defense	Bethesda, Maryland
279	L	Loews Corp.	Financials	Multi-Sector Holdings	New York, New York
280	LOW	Lowe's Cos.	Consumer Discretionary	Home Improvement Retail	Mooresville, North Carolina
281	LYB	LyondellBasell	Materials	Diversified Chemicals	Rotterdam, Netherlands
282	MTB	M&T Bank Corp.	Financials	Banks	Buffalo, New York
283	MAC	Macerich	Financials	Retail REITs	Santa Monica, California
284	M	Macy's Inc.	Consumer Discretionary	Department Stores	Cincinnati, Ohio
285	MNK	Mallinckrodt Plc	Health Care	Pharmaceuticals	Dublin, Ireland
286	MRO	Marathon Oil Corp.	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Houston, Texas
287	MPC	Marathon Petroleum	Energy	Oil & Gas Refining & Marketing & Transportation	Findlay, Ohio
288	MAR	Marriott Int'l.	Consumer Discretionary	Hotels, Resorts & Cruise Lines	Bethesda, Maryland
289	MMC	Marsh & McLennan	Financials	Insurance Brokers	New York, New York
290	MLM	Martin Marietta Materials	Materials	Construction Materials	Raleigh, North Carolina
291	MAS	Masco Corp.	Industrials	Building Products	Taylor, Michigan
292	MA	Mastercard Inc.	Information Technology	Internet Software & Services	Harrison, New York
293	MAT	Mattel Inc.	Consumer Discretionary	Leisure Products	El Segundo, California

294	MKC	McCormick & Co.	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Sparks, Maryland
295	MCD	McDonald's Corp.	Consumer Discretionary	Restaurants	Oak Brook, Illinois
296	MCK	McKesson Corp.	Health Care	Health Care Distributors & Services	San Francisco, California
297	MJN	Mead Johnson	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Glenview, Illinois
298	WRK	Westrock Co	Materials	Paper Packaging	Richmond, Virginia
299	MDT	Medtronic plc	Health Care	Health Care Equipment & Services	Dublin, Ireland
300	MRK	Merck & Co.	Health Care	Pharmaceuticals	Whitehouse Station, New Jersey
301	MET	MetLife Inc.	Financials	Life & Health Insurance	New York, New York
302	KORS	Michael Kors Holdings	Consumer Discretionary	Apparel, Accessories & Luxury Goods	New York, New York
303	MCHP	Microchip Technology	Information Technology	Semiconductors	Chandler, Arizona
304	MU	Micron Technology	Information Technology	Semiconductors	Boise, Idaho
305	MSFT	Microsoft Corp.	Information Technology	Systems Software	Redmond, Washington
306	MHK	Mohawk Industries	Consumer Discretionary	Home Furnishings	Amsterdam, New York
307	TAP	Molson Coors Brewing Company	Consumer Staples	Brewers	Denver, Colorado
308	MDLZ	Mondelez International	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Northfield, Illinois
309	MON	Monsanto Co.	Materials	Fertilizers & Agricultural Chemicals	Creve Coeur, Missouri
310	MNST	Monster Beverage	Consumer Staples	Soft Drinks	Corona, California
311	MCO	Moody's Corp	Financials	Diversified Financial Services	New York, New York
312	MS	Morgan Stanley	Financials	Investment Banking & Brokerage	New York, New York
313	MOS	The Mosaic Company	Materials	Fertilizers & Agricultural Chemicals	Plymouth, Minnesota
314	MSI	Motorola Solutions Inc.	Information Technology	Telecommunications Equipment	Schaumburg, Illinois

315	MUR	Murphy Oil	Energy	Integrated Oil & Gas	El Dorado, Arkansas
316	MYL	Mylan N.V.	Health Care	Pharmaceuticals	Amsterdam, Netherlands
317	NDAQ	NASDAQ OMX Group	Financials	Diversified Financial Services	New York, New York
318	NOV	National Oilwell Varco Inc.	Energy	Oil & Gas Equipment & Services	Houston, Texas
319	NAVI	Navient	Financials	Consumer Finance	Newark, Delaware
320	NTAP	NetApp	Information Technology	Internet Software & Services	Sunnyvale, California
321	NFLX	Netflix Inc.	Information Technology	Internet Software & Services	Los Gatos, California
322	NWL	Newell Rubbermaid Co.	Consumer Discretionary	Housewares & Specialties	Sandy Springs, Georgia
323	NFX	Newfield Exploration Co	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Houston, Texas
324	NEM	Newmont Mining Corp. (Hldg. Co.)	Materials	Gold	Denver, Colorado
325	NWSA	News Corp. Class A	Consumer Discretionary	Publishing	New York, New York
326	NWS	News Corp. Class B	Consumer Discretionary	Publishing	New York, New York
327	NEE	NextEra Energy	Utilities	MultiUtilities	Juno Beach, Florida
328	NLSN	Nielsen Holdings	Industrials	Research & Consulting Services	New York, New York
329	NKE	Nike	Consumer Discretionary	Apparel, Accessories & Luxury Goods	Washington County, Oregon
330	NI	NiSource Inc.	Utilities	MultiUtilities	Merrillville, Indiana
331	NBL	Noble Energy Inc	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Houston, Texas
332	JWN	Nordstrom	Consumer Discretionary	Department Stores	Seattle, Washington
333	NSC	Norfolk Southern Corp.	Industrials	Railroads	Norfolk, Virginia
334	NTRS	Northern Trust Corp.	Financials	Asset Management & Custody Banks	Chicago, Illinois
335	NOC	Northrop Grumman Corp.	Industrials	Aerospace & Defense	West Falls Church, Virginia

336	NRG	NRG Energy	Utilities	Independent Power Producers & Energy Traders	Princeton, New Jersey
337	NUE	Nucor Corp.	Materials	Steel	Charlotte, North Carolina
338	NVDA	Nvidia Corporation	Information Technology	Semiconductors	Santa Clara, California
339	ORLY	O'Reilly Automotive	Consumer Discretionary	Specialty Stores	Springfield, Missouri
340	OXY	Occidental Petroleum	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Los Angeles, California
341	OMC	Omnicom Group	Consumer Discretionary	Advertising	New York, New York
342	OKE	ONEOK	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Tulsa, Oklahoma
343	ORCL	Oracle Corp.	Information Technology	Application Software	Redwood Shores, California
344	OI	Owens-Illinois Inc	Materials	Metal & Glass Containers	Perrysburg, Ohio
345	PCAR	PACCAR Inc.	Industrials	Construction & Farm Machinery & Heavy Trucks	Bellevue, Washington
346	PH	Parker-Hannifin	Industrials	Industrial Conglomerates	Cleveland, Ohio
347	PDCO	Patterson Companies	Health Care	Health Care Supplies	St. Paul, Minnesota
348	PAYX	Paychex Inc.	Information Technology	Internet Software & Services	Penfield, New York
349	PYPL	PayPal	Information Technology	Data Processing & Outsourced Services	San Jose, California
350	PNR	Pentair Ltd.	Industrials	Industrial Conglomerates	Worsley, UK
351	PBCT	People's United Financial	Financials	Thrifts & Mortgage Finance	Bridgeport, Connecticut
352	PEP	PepsiCo Inc.	Consumer Staples	Soft Drinks	Purchase, New York
353	PKI	PerkinElmer	Health Care	Health Care Equipment & Services	Waltham, Massachusetts
354	PRGO	Perrigo	Health Care	Pharmaceuticals	Dublin, Ireland
355	PFE	Pfizer Inc.	Health Care	Pharmaceuticals	New York, New York
356	PCG	PG&E Corp.	Utilities	MultiUtilities	San Francisco, California

357	PM	Philip Morris International	Consumer Staples	Tobacco	New York, New York
358	PSX	Phillips 66	Energy	Oil & Gas Refining & Marketing & Transportation	Houston, Texas
359	PNW	Pinnacle West Capital	Utilities	MultiUtilities	Phoenix, Arizona
360	PXD	Pioneer Natural Resources	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Irving, Texas
361	PBI	Pitney-Bowes	Industrials	Office Services & Supplies	Stamford, Connecticut
362	PNC	PNC Financial Services	Financials	Banks	Pittsburgh, Pennsylvania
363	RL	Polo Ralph Lauren Corp.	Consumer Discretionary	Apparel, Accessories & Luxury Goods	New York, New York
364	PPG	PPG Industries	Materials	Diversified Chemicals	Pittsburgh, Pennsylvania
365	PPL	PPL Corp.	Utilities	Electric Utilities	Allentown, Pennsylvania
366	PX	Praxair Inc.	Materials	Industrial Gases	Danbury, Connecticut
367	CFG	Citizens Financial Group	Financials	Banks	Providence, Rhode Island
368	PCLN	Priceline.com Inc	Consumer Discretionary	Hotels, Resorts & Cruise Lines	Norwalk, Connecticut
369	PFG	Principal Financial Group	Financials	Diversified Financial Services	Des Moines, Iowa
370	PG	Procter & Gamble	Consumer Staples	Personal Products	Cincinnati, Ohio
371	PGR	Progressive Corp.	Financials	Property & Casualty Insurance	Mayfield Village, Ohio
372	PLD	Prologis	Financials	Diversified Financial Services	San Francisco, California
373	PRU	Prudential Financial	Financials	Diversified Financial Services	Newark, New Jersey
374	PEG	Public Serv. Enterprise Inc.	Utilities	Electric Utilities	Newark, New Jersey
375	PSA	Public Storage	Financials	REITs	Glendale, California
376	PHM	Pulte Homes Inc.	Consumer Discretionary	Homebuilding	Atlanta, Georgia
377	PVH	PVH Corp.	Consumer Discretionary	Apparel, Accessories & Luxury Goods	New York, New York
378	QRVO	Qorvo	Information Technology	Semiconductors	Hillsboro, Oregon

379	PWR	Quanta Services Inc.	Industrials	Industrial Conglomerates	Houston, Texas
380	QCOM	QUALCOMM Inc.	Information Technology	Semiconductors	San Diego, California
381	DGX	Quest Diagnostics	Health Care	Health Care Facilities	Madison, New Jersey
382	RRC	Range Resources Corp.	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Fort Worth, Texas
383	RTN	Raytheon Co.	Industrials	Aerospace & Defense	Waltham, Massachusetts
384	O	Realty Income Corporation	Financials	REITs	San Diego, California
385	RHT	Red Hat Inc.	Information Technology	Systems Software	Raleigh, North Carolina
386	REGN	Regeneron	Health Care	Biotechnology	Tarrytown, New York
387	RF	Regions Financial Corp.	Financials	Diversified Financial Services	Birmingham, Alabama
388	RSG	Republic Services Inc	Industrials	Industrial Conglomerates	Phoenix, Arizona
389	RAI	Reynolds American Inc.	Consumer Staples	Tobacco	Winston-Salem, North Carolina
390	RHI	Robert Half International	Industrials	Human Resource & Employment Services	Menlo Park, California
391	ROK	Rockwell Automation Inc.	Industrials	Industrial Conglomerates	Milwaukee, Wisconsin
392	COL	Rockwell Collins	Industrials	Industrial Conglomerates	Cedar Rapids, Iowa
393	ROP	Roper Industries	Industrials	Industrial Conglomerates	Sarasota, Florida
394	ROST	Ross Stores	Consumer Discretionary	Apparel Retail	Pleasanton, California
395	RCL	Royal Caribbean Cruises Ltd	Consumer Discretionary	Hotels, Resorts & Cruise Lines	Miami, Florida
396	R	Ryder System	Industrials	Industrial Conglomerates	Miami, Florida
397	CRM	Salesforce.com	Information Technology	Internet Software & Services	San Francisco, California
398	SCG	SCANA Corp	Utilities	MultiUtilities	Cayce, South Carolina
399	SLB	Schlumberger Ltd.	Energy	Oil & Gas Equipment & Services	Curaçao, Kingdom of the Netherlands
400	SNI	Scripps Networks Interactive Inc.	Consumer Discretionary	Broadcasting & Cable TV	Cincinnati, Ohio

401	STX	Seagate Technology	Information Technology	Computer Storage & Peripherals	Dublin, Ireland
402	SEE	Sealed Air Corp.(New)	Materials	Paper Packaging	Elmwood Park, New Jersey
403	SRE	Sempra Energy	Utilities	MultiUtilities	San Diego, California
404	SHW	Sherwin-Williams	Materials	Specialty Chemicals	Cleveland, Ohio
405	SIG	Signet Jewelers	Consumer Discretionary	Specialty Stores	Hamilton, Bermuda
406	SPG	Simon Property Group Inc	Financials	REITs	Indianapolis, Indiana
407	SWKS	Skyworks Solutions	Information Technology	Semiconductors	Woburn, Massachusetts
408	SLG	SL Green Realty	Financials	Office REITs	New York, New York
409	SJM	Smucker (J.M.)	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Orrville, Ohio
410	SNA	Snap-On Inc.	Consumer Discretionary	Household Appliances	Kenosha, Wisconsin
411	SO	Southern Co.	Utilities	Electric Utilities	Atlanta, Georgia
412	LUV	Southwest Airlines	Industrials	Airlines	Dallas, Texas
413	SWN	Southwestern Energy	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Houston, Texas[6]
414	SE	Spectra Energy Corp.	Energy	Oil & Gas Refining & Marketing & Transportation	Houston, Texas
415	SPGI	S&P Global, Inc.	Financials	Diversified Financial Services	New York, New York
416	STJ	St Jude Medical	Health Care	Health Care Equipment & Services	Little Canada, Minnesota
417	SWK	Stanley Black & Decker	Consumer Discretionary	Household Appliances	New Britain, Connecticut
418	SPLS	Staples Inc.	Consumer Discretionary	Specialty Stores	Framingham, Massachusetts
419	SBUX	Starbucks Corp.	Consumer Discretionary	Restaurants	Seattle, Washington
420	HOT	Starwood Hotels & Resorts	Consumer Discretionary	Hotels, Resorts & Cruise Lines	White Plains, New York
421	STT	State Street Corp.	Financials	Diversified Financial Services	Boston, Massachusetts
422	SRCL	Stericycle Inc	Industrials	Industrial Conglomerates	Lake Forest, Illinois

423	SYK	Stryker Corp.	Health Care	Health Care Equipment & Services	Kalamazoo, Michigan
424	STI	SunTrust Banks	Financials	Banks	Atlanta, Georgia
425	SYMC	Symantec Corp.	Information Technology	Application Software	Mountain View, California
426	SYF	Synchrony Financial	Financials	Consumer Finance	Stamford, Connecticut
427	SYZ	Sysco Corp.	Consumer Staples	Food Distributors	Houston, Texas
428	TROW	T. Rowe Price Group	Financials	Diversified Financial Services	Baltimore, Maryland
429	TGT	Target Corp.	Consumer Discretionary	General Merchandise Stores	Minneapolis, Minnesota
430	TEL	TE Connectivity Ltd.	Information Technology	Electronic Equipment & Instruments	Schaffhausen, Switzerland
431	TGNA	Tegna	Consumer Discretionary	Publishing	McLean, Virginia
432	TDC	Teradata Corp.	Information Technology	Application Software	Miamisburg, Ohio
433	TSO	Tesoro Petroleum Co.	Energy	Oil & Gas Refining & Marketing & Transportation	San Antonio, Texas
434	TXN	Texas Instruments	Information Technology	Semiconductors	Dallas, Texas
435	TXT	Textron Inc.	Industrials	Industrial Conglomerates	Providence, Rhode Island
436	HSY	The Hershey Company	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Hershey, Pennsylvania
437	TRV	The Travelers Companies Inc.	Financials	Property & Casualty Insurance	New York, New York
438	TMO	Thermo Fisher Scientific	Health Care	Health Care Equipment & Services	Waltham, Massachusetts
439	TIF	Tiffany & Co.	Consumer Discretionary	Apparel, Accessories & Luxury Goods	New York, New York
440	TWX	Time Warner Inc.	Consumer Discretionary	Broadcasting & Cable TV	New York, New York
441	TJX	TJX Companies Inc.	Consumer Discretionary	Apparel Retail	Framingham, Massachusetts
442	TMK	Torchmark Corp.	Financials	Life & Health Insurance	McKinney, Texas
443	TSS	Total System Services	Information Technology	Internet Software & Services	Columbus, Georgia
444	TSCO	Tractor Supply Company	Consumer Discretionary	Specialty Retail	Brentwood, Tennessee

445	TDG	TransDigm Group	Industrials	Aerospace & Defense	Cleveland, Ohio
446	RIG	Transocean	Energy	Oil & Gas Drilling	Vernier, Switzerland
447	TRIP	TripAdvisor	Consumer Discretionary	Internet Retail	Newton, Massachusetts
448	FOXA	Twenty-First Century Fox Class A	Consumer Discretionary	Publishing	New York, New York
449	FOX	Twenty-First Century Fox Class B	Consumer Discretionary	Publishing	New York, New York
450	TSN	Tyson Foods	Consumer Staples	Packaged Foods & Meats	Springdale, Arkansas
451	TYC	Tyco International	Industrials	Industrial Conglomerates	Schaffhausen, Switzerland
452	UDR	UDR Inc	Financials	Residential REITs	Highlands Ranch, Colorado
453	ULTA	Ulta Salon Cosmetics & Fragrance Inc	Consumer Discretionary	Specialty Stores	Bolingbrook, Illinois
454	USB	U.S. Bancorp	Financials	Banks	Minneapolis, Minnesota
455	UA	Under Armour	Consumer Discretionary	Apparel, Accessories & Luxury Goods	Baltimore, Maryland
456	UNP	Union Pacific	Industrials	Railroads	Omaha, Nebraska
457	UAL	United Continental Holdings	Industrials	Airlines	Chicago, Illinois
458	UNH	United Health Group Inc.	Health Care	Managed Health Care	Minnetonka, Minnesota
459	UPS	United Parcel Service	Industrials	Air Freight & Logistics	Atlanta, Georgia
460	URI	United Rentals, Inc.	Industrials	Trading Companies & Distributors	Stamford, Connecticut
461	UTX	United Technologies	Industrials	Industrial Conglomerates	Hartford, Connecticut
462	UHS	Universal Health Services, Inc.	Health Care	Health Care Facilities	King of Prussia, Pennsylvania
463	UNM	Unum Group	Financials	Diversified Financial Services	Chattanooga, Tennessee
464	URBN	Urban Outfitters	Consumer Discretionary	Apparel Retail	Philadelphia, Pennsylvania
465	VFC	V.F. Corp.	Consumer Discretionary	Apparel, Accessories & Luxury Goods	Greensboro, North Carolina

466	VLO	Valero Energy	Energy	Oil & Gas Refining & Marketing & Transportation	San Antonio, Texas
467	VAR	Varian Medical Systems	Health Care	Health Care Equipment & Services	Palo Alto, California
468	VTR	Ventas Inc	Financials	Diversified Financial Services	Chicago, Illinois
469	VRSN	Verisign Inc.	Information Technology	Internet Software & Services	Dulles, Virginia
470	VRSK	Verisk Analytics	Industrials	Research & Consulting Services	Jersey City, New Jersey
471	VZ	Verizon Communications	Telecommunications Services	Integrated Telecommunications Services	New York, New York
472	VRTX	Vertex Pharmaceuticals Inc	Health Care	Biotechnology	Cambridge, Massachusetts
473	VIAB	Viacom Inc.	Consumer Discretionary	Broadcasting & Cable TV	New York, New York
474	V	Visa Inc.	Information Technology	Internet Software & Services	San Francisco, California
475	VNO	Vornado Realty Trust	Financials	REITs	New York, New York
476	VMC	Vulcan Materials	Materials	Construction Materials	Birmingham, Alabama
477	WMT	Wal-Mart Stores	Consumer Staples	Hypermarkets & Super Centers	Bentonville, Arkansas
478	WBA	Walgreens Boots Alliance	Consumer Staples	Drug Retail	Deerfield, Illinois
479	DIS	The Walt Disney Company	Consumer Discretionary	Broadcasting & Cable TV	Burbank, California
480	WM	Waste Management Inc.	Industrials	Environmental Services	Houston, Texas
481	WAT	Waters Corporation	Health Care	Health Care Distributors & Services	Milford, Massachusetts
482	ANTM	Anthem Inc.	Health Care	Managed Health Care	Indianapolis, Indiana
483	WFC	Wells Fargo	Financials	Banks	San Francisco, California
484	HCN	Welltower Inc.	Financials	REITs	Toledo, Ohio
485	WDC	Western Digital	Information Technology	Computer Storage & Peripherals	Irvine, California
486	WU	Western Union Co	Information Technology	Internet Software & Services	Englewood, Colorado

487	WY	Weyerhaeuser Corp.	Financials	REITs	Federal Way, Washington
488	WHR	Whirlpool Corp.	Consumer Discretionary	Household Appliances	Benton Harbor, Michigan
489	WFM	Whole Foods Market	Consumer Staples	Food Retail	Austin, Texas
490	WMB	Williams Cos.	Energy	Oil & Gas Exploration & Production	Tulsa, Oklahoma
491	WLTW	Willis Towers Watson	Financials	Insurance Brokers	London, United Kingdom
492	WEC	Wisconsin Energy Corporation	Utilities	Electric Utilities	Milwaukee, Wisconsin
493	WYN	Wyndham Worldwide	Consumer Discretionary	Hotels, Resorts & Cruise Lines	Parsippany, New Jersey
494	WYNN	Wynn Resorts Ltd	Consumer Discretionary	Casinos & Gaming	Las Vegas, Nevada
495	XEL	Xcel Energy Inc	Utilities	MultiUtilities	Minneapolis, Minnesota
496	XRX	Xerox Corp.	Information Technology	IT Consulting & Services	Norwalk, Connecticut
497	XLNX	Xilinx Inc	Information Technology	Semiconductors	San Jose, California
498	XL	XL Capital	Financials	Property & Casualty Insurance	Hamilton, Bermuda
499	XYL	Xylem Inc.	Industrials	Industrial Conglomerates	White Plains, New York
500	YHOO	Yahoo Inc.	Information Technology	Internet Software & Services	Sunnyvale, California
501	YUM	Yum! Brands Inc	Consumer Discretionary	Restaurants	Louisville, Kentucky
502	ZBH	Zimmer Biomet Holdings	Health Care	Health Care Equipment & Services	Warsaw, Indiana
503	ZION	Zions Bancorp	Financials	Banks	Salt Lake City, Utah
504	ZTS	Zoetis	Health Care	Pharmaceuticals	Florham Park, New Jersey

Fonte: Elaborada pelo autor.

## B.2 Tabelas do experimento do MBF

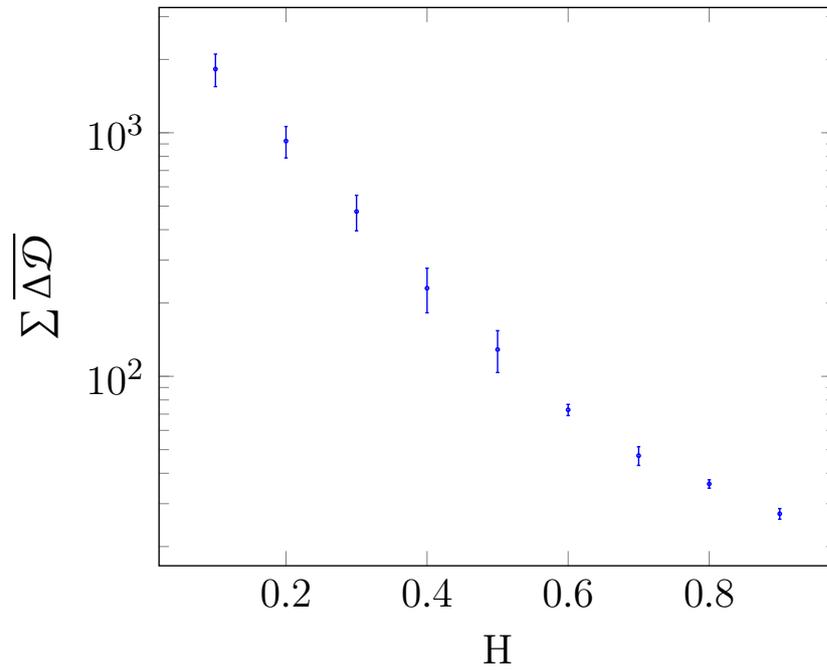


Figura B.1: Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com  $9.10^4$  movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de  $9.10^3$  nós.  
Fonte: Elaborada pelo autor.

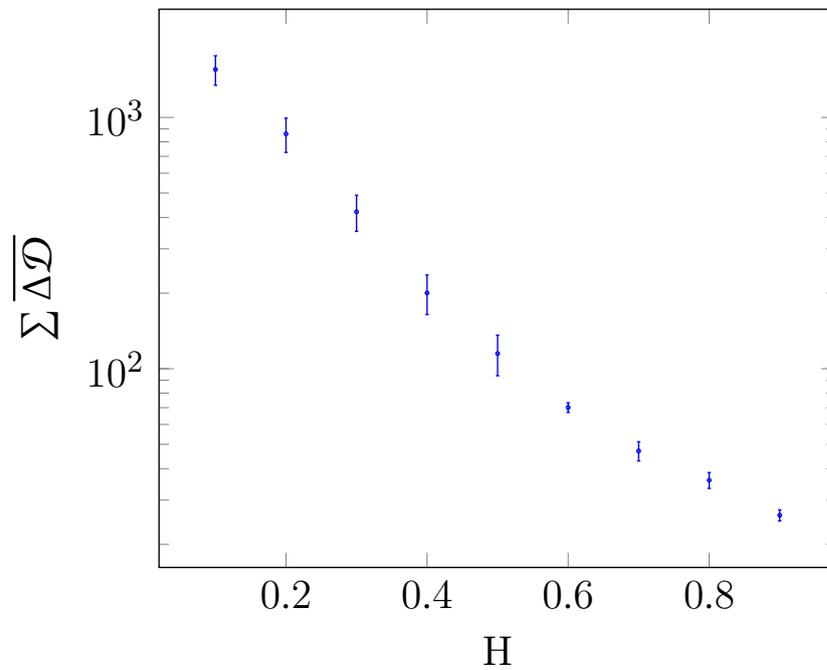


Figura B.2: Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com  $8.10^4$  movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de  $8.10^3$  nós.  
Fonte: Elaborada pelo autor.

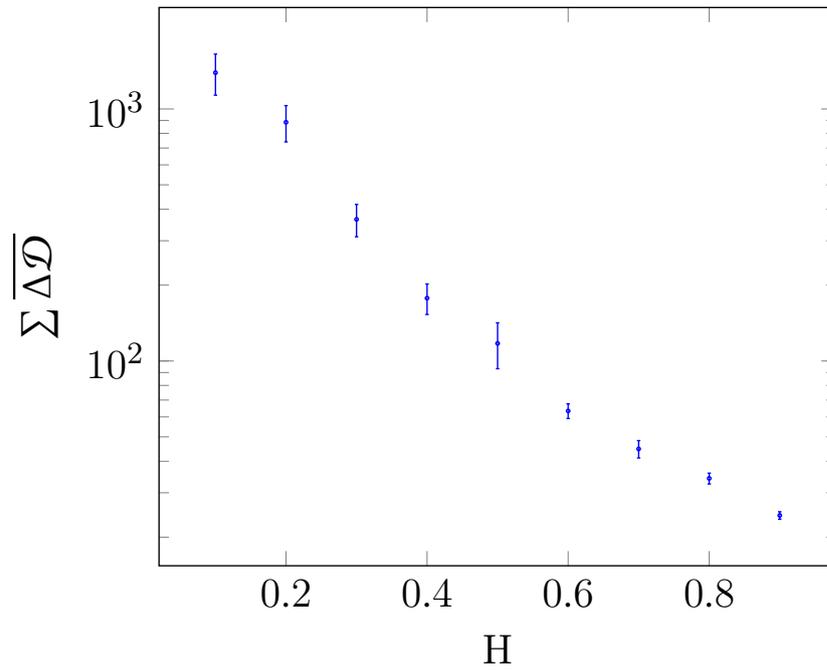


Figura B.3: Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com  $7.10^4$  movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de  $7.10^3$  nós.  
Fonte: Elaborada pelo autor.

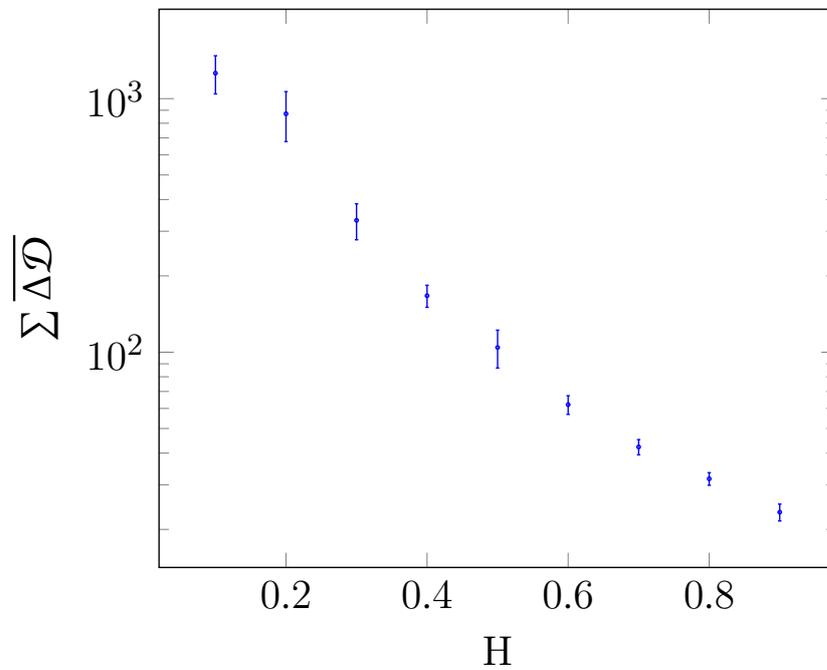


Figura B.4: Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com  $6.10^4$  movimentos brownianos para cada Hurst, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de  $6.10^3$  nós.  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela B.2: MBF de  $10^5$  movimentos. Hurst = 0.2

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	937.41	1321.39	953.94	844.67	1373.78	924.17	889.69	485.3	678.88	534.3
10000	1209.13	1733.02	892.3	1089.65	1400.26	867.24	963.4	750.46	776.15	753.63
20000	819.69	1717.44	921.09	1096.83	1322.28	718.9	957.08	732.59	1053.07	726.42
30000	901.78	1811.71	767.67	1015.19	1341.87	812.57	698.84	1437.38	1077.51	748.54
40000	1029.6	1750.99	651.19	880.51	621.26	815.9	846.79	1508.41	985.05	836.27
50000	877.72	1750.49	685.52	978.83	460.94	870.92	1022.68	1398.23	962.83	792.73
60000	744.85	1081.49	876.45	702.42	1420.38	757.62	966.86	1206.54	568.12	679.9
70000	994.09	1314.39	910.35	771.23	1351.31	588.83	1062.45	1450.75	716.65	654.9
80000	925.53	1261.12	955.33	390.58	1458.86	294.22	923.81	928.35	1038.46	693.86
90000	879.13	1140.61	867.48	551.02	1471.19	435.94	1032.54	783.31	1026.73	730.45
100000	963.26	1620.29	852.28	520.83	1314.88	291.29	588.86	1009.76	1023.44	745.87
$\bar{X}$	934.74	1500.26	848.50	803.79	1230.63	670.69	904.81	1062.82	900.62	717.89

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela B.3: MBF de  $10^5$  movimentos. Hurst = 0.3

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	363.48	379.19	605.02	566.34	360.8	393.67	313.83	325.37	246.84	294.57
10000	381.5	650.09	537.39	781.93	459.3	415.96	477.33	696.88	266.25	692.54
20000	251.26	670.61	420.35	860.84	594.96	380.96	490.57	628.55	360.21	579.95
30000	544.66	745.72	487.25	510.34	556.48	386.9	612.65	663.27	377.17	590.63
40000	489.05	551.13	568.82	831.04	563.95	379.88	623.9	527.74	372.48	487.7
50000	524.96	790.81	494.7	834.9	495.23	382.48	255.27	367.97	438.4	342.84
60000	270.62	775.62	496.72	818.7	401.98	399.78	521.65	330.79	501.32	653.94
70000	260.75	797.76	673.07	821.52	393.86	398.91	643.89	553.5	419.01	580.37
80000	622.06	875.46	551.97	708.3	408.71	378.92	694.66	636.37	516.59	565.33
90000	570.64	646.21	562.98	816.0	450.04	412.68	683.48	664.16	490.85	467.38
100000	602.68	658.47	596.8	558.09	465.0	398.3	588.43	647.48	324.13	277.73
$\bar{X}$	443.79	685.55	545.01	737.09	468.21	393.49	536.88	549.28	392.11	503.0

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela B.4: MBF de  $10^5$  movimentos. Hurst = 0.4

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	229.48	95.73	313.82	335.66	202.33	180.65	199.49	109.97	306.65	270.61
10000	191.66	245.28	283.87	291.01	142.65	216.81	323.89	185.12	291.75	226.65
20000	151.32	275.28	318.06	271.98	171.11	227.65	375.92	142.35	305.83	277.63
30000	191.07	133.96	192.43	307.57	113.03	144.65	347.42	145.46	163.55	185.13
40000	150.09	120.23	161.91	224.6	97.82	155.53	352.45	149.79	135.9	269.71
50000	178.87	126.7	190.0	271.72	177.94	135.26	149.15	293.83	124.61	260.95
60000	258.67	95.58	94.62	300.32	136.28	207.07	229.16	307.15	200.31	188.68
70000	246.88	208.99	263.15	256.3	97.92	239.74	315.39	292.34	284.79	239.14
80000	269.37	246.42	176.1	302.3	129.77	237.15	354.5	149.02	277.02	249.38
90000	225.6	231.99	295.9	266.44	153.59	227.43	331.55	195.34	221.88	208.35
100000	190.27	235.16	284.97	151.49	119.89	196.11	99.03	149.27	213.15	258.77
$\bar{X}$	207.57	183.21	234.07	270.85	140.21	197.09	279.81	192.7	229.59	239.55

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela B.5: MBF de  $10^5$  movimentos. Hurst = 0.5

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	130.96	100.47	248.7	108.33	69.18	87.48	122.9	119.7	66.56	135.38
10000	113.32	167.57	205.85	125.67	81.16	160.6	62.59	135.57	103.62	173.34
20000	98.56	94.58	229.93	100.08	79.97	117.03	130.21	132.76	90.03	157.73
30000	91.31	162.54	233.49	116.01	81.63	139.67	100.38	182.09	74.52	160.27
40000	108.3	133.64	232.58	91.77	112.62	239.02	106.23	171.06	124.96	110.54
50000	111.82	128.05	251.77	141.79	142.0	157.23	94.26	160.45	143.45	174.2
60000	135.57	128.81	247.55	142.51	122.28	242.22	95.14	151.63	118.52	170.48
70000	105.19	79.21	248.18	137.84	129.68	206.82	69.01	156.57	82.87	109.47
80000	132.61	108.86	229.93	141.23	96.98	214.43	109.0	143.05	94.05	166.89
90000	129.09	94.02	226.4	145.92	102.89	157.02	118.58	151.53	100.35	134.72
100000	132.24	49.01	168.13	102.81	137.06	174.05	100.13	145.14	88.64	154.91
$\bar{X}$	117.18	113.34	229.32	123.09	105.04	172.32	100.77	149.96	98.87	149.81

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela B.6: MBF de  $10^5$  movimentos. Hurst = 0.6

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	43.78	68.33	66.87	74.76	44.05	116.15	72.45	58.43	45.11	50.36
10000	47.66	68.77	83.21	66.51	47.69	88.45	83.91	106.32	44.68	57.35
20000	75.38	76.52	76.24	67.75	76.28	82.78	88.0	92.89	81.62	70.02
30000	84.48	101.96	80.6	74.64	80.12	106.96	88.16	98.6	74.56	73.98
40000	65.84	79.55	58.63	64.22	109.75	103.09	84.83	52.87	97.51	63.68
50000	71.84	67.91	77.14	82.04	114.78	105.27	69.66	64.7	104.54	52.52
60000	57.1	79.27	61.39	93.76	40.79	87.68	67.27	40.34	111.01	49.89
70000	91.7	57.69	79.03	90.17	87.72	81.55	61.12	81.57	106.27	98.03
80000	101.03	62.78	48.67	85.54	78.52	70.65	72.28	71.41	122.47	83.63
90000	80.56	61.53	102.96	68.71	76.06	128.71	54.66	67.54	107.97	134.68
100000	62.01	77.84	83.73	46.69	59.17	72.5	70.01	72.39	115.72	70.2
$\bar{X}$	71.03	72.92	74.41	74.07	74.08	94.89	73.85	73.37	91.95	73.12

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela B.7: MBF de  $10^5$  movimentos. Hurst = 0.7

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	39.92	52.44	46.75	32.34	34.72	49.66	32.86	30.37	52.33	36.97
10000	54.42	64.05	49.34	51.77	45.92	44.6	33.89	49.18	57.89	59.69
20000	58.13	72.49	42.65	49.15	65.53	53.93	36.57	52.01	57.81	33.63
30000	69.87	65.59	44.64	50.86	49.14	54.26	50.9	51.46	59.41	52.1
40000	39.64	77.92	45.59	63.07	35.24	50.3	30.97	62.17	67.93	56.72
50000	37.72	79.89	51.16	57.28	32.53	48.28	34.94	50.67	63.41	54.93
60000	48.0	70.33	49.96	60.31	67.83	66.0	75.35	42.36	74.46	33.91
70000	45.36	75.54	72.88	48.62	45.01	44.64	46.32	40.92	58.97	40.82
80000	38.09	67.23	49.28	60.09	46.28	47.48	37.14	39.96	53.18	60.99
90000	39.8	60.17	55.77	63.66	55.57	63.62	53.6	37.44	61.24	49.89
100000	24.38	63.49	47.0	52.67	35.0	37.08	45.74	32.69	47.24	28.61
$\bar{X}$	45.03	68.1	50.45	53.62	46.62	50.89	43.48	44.48	59.44	46.21

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela B.8: MBF de  $10^5$  movimentos. Hurst = 0.8

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	46.95	29.79	30.06	22.74	24.27	36.79	52.35	41.27	19.05	28.35
10000	34.41	27.45	57.28	35.76	35.29	37.4	35.83	39.77	34.28	38.04
20000	39.93	54.79	44.34	32.54	48.95	35.28	32.41	37.63	35.65	43.44
30000	39.23	30.41	58.9	28.6	50.41	31.7	47.95	44.78	37.06	56.04
40000	30.13	35.42	56.98	25.83	20.19	38.52	36.63	48.41	44.8	56.33
50000	38.0	28.15	40.1	26.61	25.14	38.96	31.71	44.99	42.78	41.2
60000	35.76	29.12	38.43	37.87	35.66	35.86	30.72	46.55	50.64	39.0
70000	40.35	46.87	33.29	59.29	35.56	32.94	32.4	49.47	19.2	40.6
80000	33.09	28.24	38.89	48.24	55.68	34.42	27.45	23.86	29.05	45.26
90000	33.39	41.12	24.15	46.07	46.67	35.75	27.82	29.19	45.97	36.98
100000	22.93	35.59	16.53	34.05	23.95	37.67	20.34	22.86	24.11	40.82
$\bar{X}$	35.83	35.18	39.9	36.15	36.52	35.93	34.15	38.98	34.78	42.37

Fonte: Elaborada pelo autor.

Tabela B.9: MBF de  $10^5$  movimentos. Hurst = 0.9

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	25.93	24.54	31.99	21.2	21.18	26.22	30.22	14.59	25.64	26.3
10000	31.04	23.48	23.48	22.99	42.49	27.18	29.5	28.53	32.97	37.95
20000	36.2	29.77	26.49	26.03	31.38	31.1	36.5	22.25	34.78	32.3
30000	22.0	22.21	33.14	40.63	33.25	32.99	28.85	24.09	34.51	26.93
40000	31.92	32.8	35.33	21.23	36.74	31.1	35.9	34.91	33.07	29.3
50000	26.19	28.38	23.58	22.37	33.18	31.68	35.5	25.02	39.34	26.12
60000	22.18	26.3	31.89	29.04	33.3	25.32	32.48	29.38	20.06	31.8
70000	33.49	37.47	26.58	24.65	23.87	25.97	38.93	21.22	33.53	30.36
80000	24.87	32.3	23.84	24.16	31.37	35.84	38.09	25.54	28.65	18.77
90000	23.94	28.87	27.04	39.56	27.69	29.4	29.35	23.75	27.97	24.8
100000	13.65	28.5	15.43	29.88	20.09	22.23	14.74	25.11	13.26	17.04
$\bar{X}$	26.49	28.6	27.16	27.43	30.41	29.0	31.82	24.94	29.43	27.42

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	1036.13	1744.1	2110.31	2164.41	1332.79	1939.37	1227.02	2414.66	1055.55	2354.87
9000	984.76	2636.24	1967.29	2206.43	1982.33	2190.26	1488.13	2252.87	1078.14	2041.5
18000	1096.97	2642.07	1807.6	1706.65	2111.2	1942.55	943.98	2301.89	1142.34	2195.42
27000	1112.39	2701.25	2086.01	1440.26	2282.76	1871.91	1689.74	2305.33	1207.73	2037.67
36000	1057.89	2577.3	753.63	1636.32	2331.59	2137.97	1712.74	2092.64	1379.66	1787.65
45000	771.05	2892.91	1919.06	1698.06	796.64	1980.33	1696.25	1875.82	1379.06	576.13
54000	1220.13	2771.05	1839.83	2035.48	2041.37	2098.28	1939.82	2536.13	1352.19	1117.07
63000	1100.32	2833.41	1755.96	2020.83	2222.16	1895.55	1608.21	2102.24	1207.0	2105.86
72000	1329.05	2453.83	1629.1	2117.24	2208.65	1658.94	1501.22	2047.34	1257.34	2110.34
81000	1148.21	2823.3	1372.32	2156.6	1983.77	1683.09	1996.5	2230.7	1342.35	2018.6
90000	1066.23	2834.38	1975.2	2177.84	2330.49	2074.31	1745.36	2721.45	1405.56	1774.42
$\bar{X}$	1083.92	2628.17	1746.94	1941.83	1965.79	1952.05	1595.36	2261.92	1255.17	1829.05

Tabela B.10: MBF de  $9 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.1

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	658.97	1124.46	784.07	886.98	1339.53	966.59	803.83	476.05	731.24	485.4
9000	1039.27	1557.61	771.91	1078.01	1457.81	890.34	903.12	783.95	712.11	690.76
18000	707.97	1528.98	777.83	903.01	1216.54	637.26	1066.14	562.47	838.07	745.79
27000	784.23	1492.18	645.04	1081.28	851.07	908.72	1137.22	1563.35	915.56	653.99
36000	996.26	1522.4	618.44	1050.08	988.32	838.55	652.4	1522.93	833.8	763.84
45000	952.85	1506.95	685.74	971.66	509.2	868.76	743.91	1531.84	881.51	730.17
54000	820.61	1558.66	894.34	905.06	1156.31	927.99	866.13	1248.23	778.78	772.92
63000	848.77	1261.66	903.64	760.85	1301.76	832.64	1067.68	1582.33	535.17	670.71
72000	849.29	1249.33	941.54	661.76	1361.73	645.06	1066.01	1480.5	591.59	632.58
81000	951.46	1137.39	974.5	580.96	1315.09	331.53	1145.53	598.45	750.47	545.08
90000	644.86	1103.55	674.74	590.43	1378.7	429.08	1052.49	572.12	790.93	649.94
$\bar{X}$	841.32	1367.56	788.35	860.91	1170.55	752.41	954.95	1083.84	759.93	667.38

Tabela B.11: MBF de  $9 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.2  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	340.35	221.22	469.93	477.92	410.72	315.79	375.98	302.79	206.48	274.08
9000	281.29	557.98	413.24	669.3	530.84	359.78	583.34	469.4	177.79	549.75
18000	239.04	623.91	314.32	793.81	601.2	352.01	559.72	464.61	313.72	539.81
27000	421.35	735.49	292.34	674.06	543.31	351.95	647.16	539.38	303.66	706.57
36000	396.57	560.8	406.51	799.72	569.43	328.92	625.2	551.39	295.21	445.39
45000	401.78	509.75	464.64	789.35	561.11	310.99	509.96	403.94	354.9	502.13
54000	420.41	705.86	415.59	716.49	387.98	339.75	271.42	299.78	322.54	236.7
63000	278.19	674.08	385.7	788.53	476.59	284.9	678.82	489.24	335.27	736.53
72000	235.38	680.89	493.71	745.39	482.89	363.42	732.54	407.11	427.33	716.51
81000	418.47	762.65	454.94	546.69	408.42	347.48	697.64	489.36	460.43	709.21
90000	368.26	625.39	358.32	706.5	418.86	349.44	693.32	396.22	373.64	316.37
$\bar{X}$	345.55	605.27	406.3	700.71	490.12	336.77	579.55	437.57	324.63	521.19

Tabela B.12: MBF de  $9 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.3  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	236.55	96.95	283.8	371.15	181.62	159.41	221.39	105.06	311.05	256.34
9000	198.75	200.7	266.52	338.93	213.96	194.4	323.43	221.03	285.99	233.58
18000	207.33	219.94	212.31	306.73	174.82	215.82	401.74	155.17	185.46	254.59
27000	173.94	191.87	135.1	443.02	106.59	156.0	389.58	118.67	255.71	200.59
36000	196.8	111.68	151.4	326.67	117.47	163.54	362.13	171.19	152.0	241.48
45000	174.75	97.42	139.47	331.07	137.03	150.1	145.46	150.92	102.82	261.98
54000	176.34	107.95	187.5	334.51	142.2	176.75	106.13	295.15	188.43	241.27
63000	310.36	95.63	99.24	397.84	98.66	155.18	386.78	312.51	140.2	207.1
72000	275.25	161.04	239.49	416.4	87.26	196.83	378.12	310.07	281.09	226.32
81000	290.72	136.13	143.67	359.82	133.84	176.74	404.95	150.64	283.45	233.25
90000	147.22	156.2	163.16	318.78	126.69	221.64	382.8	197.95	136.51	212.81
$\bar{X}$	217.09	143.23	183.79	358.63	138.19	178.77	318.41	198.94	211.15	233.57

Tabela B.13: MBF de  $9 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.4  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	112.22	96.14	252.54	87.8	65.57	85.86	127.23	114.76	66.11	129.4
9000	111.58	168.47	194.51	109.0	66.9	133.58	57.33	119.51	93.19	154.56
18000	133.72	103.99	235.73	113.86	70.38	114.07	115.3	135.33	76.57	101.82
27000	103.34	147.44	234.11	132.38	102.61	101.79	98.45	147.65	87.94	120.88
36000	107.52	120.83	205.09	105.3	101.06	204.83	117.73	187.21	80.43	95.16
45000	79.65	146.63	243.01	94.56	133.12	232.14	110.38	143.88	138.87	163.32
54000	119.21	111.19	252.01	98.86	136.45	167.22	104.96	124.38	102.58	163.88
63000	119.7	94.79	269.36	123.97	66.71	183.69	108.79	153.44	91.64	151.49
72000	119.01	71.66	201.53	130.68	147.1	169.83	69.11	176.93	82.17	99.12
81000	119.01	115.08	250.27	115.91	123.84	154.72	109.58	140.09	85.98	152.77
90000	110.01	90.24	200.23	133.72	86.06	98.98	127.22	120.57	65.09	126.27
$\bar{X}$	112.27	115.13	230.76	113.28	99.98	149.7	104.19	142.16	88.23	132.61

Tabela B.14: MBF de  $9 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.5  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	41.41	77.43	62.84	73.68	45.81	99.36	68.28	50.49	45.79	46.04
9000	54.79	76.02	58.39	72.49	40.53	90.32	80.57	96.73	47.45	65.88
18000	55.57	97.29	82.63	78.0	63.22	84.6	70.16	56.36	67.89	52.96
27000	69.06	98.83	88.83	72.16	79.49	103.66	81.94	91.87	74.63	75.99
36000	84.53	87.53	64.88	62.7	85.72	80.35	82.41	93.65	90.53	69.64
45000	50.33	96.45	52.14	87.77	91.87	70.01	86.73	54.57	89.74	77.73
54000	86.85	78.54	77.25	85.52	74.23	74.56	78.71	56.73	77.31	40.67
63000	59.11	55.93	92.25	97.59	55.6	69.52	71.55	30.57	101.18	81.89
72000	86.46	69.56	70.84	95.36	71.21	71.46	64.11	66.29	106.85	56.74
81000	95.68	49.97	60.28	67.27	61.92	71.31	63.54	59.5	107.72	95.07
90000	83.72	44.8	81.4	49.0	68.7	102.81	35.23	44.87	82.24	87.07
$\bar{X}$	69.77	75.67	71.97	76.5	67.12	83.45	71.2	63.78	81.03	68.15

Tabela B.15: MBF de  $9 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.6  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	39.55	48.78	43.89	32.81	33.57	51.13	31.05	27.5	49.27	34.52
9000	53.4	61.85	54.73	39.82	45.65	49.29	34.28	47.23	51.78	48.71
18000	48.03	67.26	44.38	52.66	48.76	61.88	42.82	47.94	44.61	35.78
27000	40.57	67.22	56.77	54.77	45.71	41.91	44.28	36.93	45.73	41.9
36000	38.12	53.67	30.14	59.94	39.01	63.11	32.04	37.13	61.61	48.67
45000	53.08	62.66	46.87	55.89	37.55	59.55	25.11	45.97	60.15	42.32
54000	47.71	61.05	51.22	50.8	46.27	44.96	39.65	39.36	69.92	41.36
63000	49.33	68.32	62.94	60.14	51.31	67.81	63.1	33.87	51.34	28.78
72000	40.84	55.68	53.04	43.3	46.02	57.49	40.47	38.61	58.97	59.45
81000	41.45	55.27	34.66	45.72	40.13	37.52	46.71	31.69	52.99	64.51
90000	37.08	58.63	34.81	33.41	31.79	47.44	53.77	35.75	50.81	37.3
$\bar{X}$	44.47	60.03	46.68	48.12	42.34	52.92	41.21	38.36	54.29	43.94

Tabela B.16: MBF de  $9 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.7  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	46.13	28.95	32.48	21.81	25.73	35.46	48.4	39.58	18.33	31.34
9000	32.94	33.52	51.79	31.93	40.25	39.96	45.72	49.8	29.41	50.94
18000	47.34	37.4	38.09	37.39	30.32	38.12	49.37	39.31	37.43	52.08
27000	39.03	30.15	42.69	35.35	43.57	27.86	34.11	41.73	50.1	46.81
36000	44.07	44.53	42.4	32.54	22.86	30.97	50.34	36.35	53.36	35.01
45000	31.55	32.48	31.32	31.05	26.28	32.61	28.75	45.15	39.36	31.66
54000	45.63	36.3	52.58	27.01	19.76	32.77	31.73	45.1	45.38	39.36
63000	46.01	40.79	44.02	50.5	31.55	34.24	42.69	42.58	33.28	33.54
72000	35.37	41.96	36.1	50.36	34.42	38.2	41.22	26.1	20.79	35.42
81000	37.72	26.29	43.52	39.93	49.41	36.84	27.94	23.99	19.88	39.11
90000	24.67	27.19	9.19	38.64	30.74	29.1	19.98	15.71	27.73	21.51
$\bar{X}$	39.13	34.51	38.56	36.05	32.26	34.19	38.2	36.86	34.09	37.89

Tabela B.17: MBF de  $9 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.8  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	25.93	22.26	29.79	20.56	19.62	24.89	25.37	15.06	24.6	25.19
9000	31.72	20.74	21.81	19.15	24.05	28.7	29.94	30.35	28.02	29.14
18000	34.02	25.16	27.15	22.76	34.79	28.35	28.64	25.92	34.62	31.81
27000	26.78	28.68	34.9	38.63	26.28	28.17	30.33	24.57	33.45	23.97
36000	23.7	26.48	26.4	21.27	26.24	21.51	30.88	30.71	33.78	22.49
45000	32.56	27.91	40.18	20.51	32.54	17.04	34.67	35.48	35.74	23.49
54000	17.08	23.9	24.54	23.22	27.5	20.93	34.04	31.2	36.46	21.58
63000	18.53	32.76	26.02	30.63	31.05	32.17	33.5	31.6	18.59	30.46
72000	28.18	25.62	32.0	36.76	28.44	32.65	36.78	20.59	27.67	31.01
81000	19.17	27.99	26.48	25.48	30.08	29.43	38.59	23.26	31.1	21.37
90000	19.49	23.24	23.77	20.7	23.48	26.43	26.28	21.45	27.27	19.35
$\bar{X}$	25.2	25.88	28.46	25.42	27.64	26.39	31.73	26.38	30.12	25.44

Tabela B.18: MBF de  $9 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.9  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	803.92	1661.71	1713.68	2089.45	1225.83	1399.82	1041.78	1984.03	964.5	2042.12
8000	1010.56	2048.1	1434.46	1830.06	1765.95	1623.83	1307.93	1946.07	854.5	1939.47
16000	927.27	2173.83	1483.7	1850.03	1925.46	1213.79	1142.43	2124.79	915.64	2028.01
24000	1095.45	1665.6	1134.04	1663.02	1737.13	1454.77	1587.41	2117.64	898.72	1945.85
32000	1042.97	1867.88	1375.41	1607.2	1969.05	1549.64	1932.9	2344.62	971.81	1866.53
40000	1093.78	2002.3	1546.44	1729.87	2057.63	1515.64	1238.08	2186.34	1192.23	1317.57
48000	1095.38	1737.35	1903.63	1813.82	948.46	1690.42	1618.04	1072.63	1215.51	784.79
56000	1071.65	2279.53	1763.64	2011.67	1729.17	1566.45	1883.92	1779.75	904.83	1757.52
64000	1344.15	2271.92	1531.23	2007.68	1820.71	1058.53	1236.04	2265.33	746.42	1875.44
72000	1405.56	1981.61	1372.82	1708.19	1852.9	1066.94	1308.78	1851.68	1075.31	1863.44
80000	1186.95	2244.17	1124.67	1752.39	1367.29	1264.39	1326.41	1699.09	1176.27	1104.15
$\bar{X}$	1097.97	1994.0	1489.43	1823.94	1672.69	1400.38	1420.34	1942.91	992.34	1684.08

Tabela B.19: MBF de  $8 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.1  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	476.37	1041.13	705.13	963.39	1066.98	1076.35	656.22	500.64	871.19	437.95
8000	1098.73	1610.74	703.39	1129.96	1123.89	929.39	794.65	749.48	910.95	524.35
16000	767.16	1604.1	586.63	1132.46	947.93	794.3	974.94	323.02	800.93	706.01
24000	1020.45	1594.7	683.12	1151.59	1098.84	1018.52	1049.95	1462.32	818.63	698.09
32000	934.11	1590.7	730.86	924.58	1133.63	905.32	432.93	1484.23	789.69	678.72
40000	999.74	1631.98	703.52	967.32	442.7	884.54	717.64	1553.36	700.99	615.11
48000	668.0	1423.05	363.87	1116.21	468.56	949.24	774.44	1628.58	806.43	677.74
56000	642.2	1529.77	775.85	1129.25	1002.71	983.5	883.22	1263.21	854.25	706.77
64000	721.27	968.65	799.95	959.69	939.82	1011.52	922.13	1572.18	485.64	670.74
72000	648.83	1064.1	804.15	812.26	1057.94	802.4	841.07	1578.53	602.82	581.27
80000	641.47	1150.53	834.26	709.94	975.83	488.69	444.77	445.09	613.2	436.92
$\bar{X}$	783.48	1382.68	699.16	999.7	932.62	894.89	771.99	1141.88	750.43	612.15

Tabela B.20: MBF de  $8 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.2  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	297.24	192.06	327.11	412.73	376.14	302.61	307.82	298.69	210.34	232.46
8000	243.27	483.47	329.91	543.7	589.18	313.01	446.54	446.29	231.38	581.65
16000	217.73	430.71	364.75	536.75	611.66	255.84	412.28	471.35	272.46	626.22
24000	254.71	640.83	300.99	561.62	534.9	308.57	523.57	452.1	300.44	592.31
32000	377.26	566.44	333.42	481.03	549.89	341.23	537.43	464.35	188.62	365.54
40000	380.19	402.46	301.76	681.68	548.06	279.34	523.94	314.26	312.3	512.3
48000	344.35	593.41	369.65	701.45	585.44	238.64	231.17	293.56	326.4	417.09
56000	283.84	517.29	259.23	685.26	543.42	259.5	331.6	315.73	368.24	287.02
64000	256.35	534.87	340.47	552.32	583.89	229.02	534.84	340.04	322.94	650.11
72000	280.24	548.56	377.58	647.72	596.09	319.8	548.45	340.82	342.81	639.46
80000	262.92	540.75	325.92	584.26	391.85	341.18	507.07	376.63	353.75	622.23
$\bar{X}$	290.74	495.53	330.07	580.77	537.32	289.89	445.88	373.98	293.61	502.4

Tabela B.21: MBF de  $8 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.3  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	257.07	99.19	280.62	349.74	184.0	149.01	185.32	107.86	255.12	236.72
8000	227.25	154.75	251.81	293.56	157.22	184.51	249.29	246.26	228.93	209.75
16000	196.5	241.92	216.61	265.86	148.59	194.16	303.12	141.27	244.38	213.4
24000	163.1	203.17	137.14	338.48	202.44	116.06	301.71	108.55	224.82	234.62
32000	210.95	106.51	180.96	309.69	87.22	146.29	320.89	168.82	123.77	126.3
40000	192.83	100.38	134.99	247.95	82.4	141.81	322.46	155.46	124.64	234.53
48000	168.42	98.56	110.91	364.32	151.36	139.84	143.67	302.95	148.38	203.24
56000	291.94	108.08	97.25	324.59	136.84	184.95	114.48	256.77	150.58	227.78
64000	306.8	96.13	121.48	327.15	118.96	152.39	297.89	310.35	144.23	246.59
72000	286.2	160.79	205.79	384.91	98.9	185.25	255.96	316.62	163.39	204.62
80000	265.28	140.91	114.09	311.11	93.23	151.09	288.82	104.88	168.93	250.06
$\bar{X}$	233.3	137.31	168.33	319.76	132.83	158.67	253.05	201.8	179.74	217.06

Tabela B.22: MBF de  $8 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.4  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	99.18	100.51	205.51	65.2	67.3	84.52	90.32	101.65	63.76	87.28
8000	115.4	158.57	173.42	113.18	90.68	128.54	76.94	113.61	83.24	152.28
16000	125.4	75.01	190.1	100.55	73.23	118.85	100.95	134.47	88.58	116.95
24000	97.66	143.28	152.11	103.44	49.03	127.52	88.1	136.1	68.8	153.69
32000	93.5	155.45	153.25	108.33	93.9	154.81	57.35	167.3	76.37	76.16
40000	98.39	114.97	184.99	83.47	103.65	211.18	98.99	149.53	108.74	110.14
48000	112.71	86.98	214.11	96.47	122.72	219.9	53.77	122.42	120.55	183.78
56000	115.17	123.92	201.87	114.74	111.01	203.58	88.7	117.98	127.47	186.35
64000	119.64	106.97	203.64	118.91	82.11	192.86	110.52	125.05	82.96	166.1
72000	121.72	65.77	167.43	129.21	138.36	151.19	68.59	161.64	92.22	81.89
80000	110.92	83.45	200.67	97.61	86.3	144.6	95.12	112.77	58.76	137.28
$\bar{X}$	109.97	110.44	186.1	102.83	92.57	157.96	84.48	131.14	88.31	131.99

Tabela B.23: MBF de  $8 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.5

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	39.28	78.94	60.3	80.07	48.54	82.03	61.07	49.45	48.35	48.43
8000	55.54	64.84	49.37	77.59	46.54	72.45	84.85	101.53	44.37	72.7
16000	45.61	92.73	64.96	69.76	65.75	66.49	68.37	80.66	58.47	90.13
24000	71.87	84.55	70.93	65.39	69.7	83.21	63.2	89.72	61.36	71.59
32000	63.49	81.68	76.5	75.94	92.95	63.74	74.49	82.85	81.66	76.37
40000	62.45	77.2	52.48	36.92	99.54	87.57	78.68	46.66	77.74	59.51
48000	68.42	76.05	64.28	79.33	94.03	82.52	79.62	52.15	72.79	66.28
56000	78.64	79.72	80.06	47.79	70.59	78.27	66.47	44.32	99.0	36.47
64000	69.63	72.32	80.91	106.56	56.19	65.92	75.59	38.44	88.88	56.07
72000	72.87	82.09	70.3	95.15	54.57	66.93	60.78	67.15	99.76	49.95
80000	66.75	61.83	46.55	77.76	58.62	64.02	72.93	42.64	71.47	61.14
$\bar{X}$	63.14	77.45	65.15	73.84	68.82	73.92	71.46	63.23	73.08	62.6

Tabela B.24: MBF de  $8 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.6  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	37.24	49.03	47.03	38.6	32.55	52.16	30.99	26.65	42.04	39.09
8000	47.13	54.44	61.08	42.29	53.75	39.13	25.96	43.71	47.09	46.96
16000	50.01	56.56	53.27	45.35	51.71	61.31	49.32	40.22	42.17	55.41
24000	49.0	50.99	58.43	53.54	37.14	43.65	55.97	42.8	39.37	39.42
32000	46.55	56.2	33.96	54.46	35.22	60.04	27.43	43.35	57.67	47.76
40000	32.44	71.15	39.2	58.43	30.24	45.54	31.07	55.83	62.94	52.31
48000	36.19	59.41	42.89	59.1	29.04	56.19	41.71	53.6	60.85	26.73
56000	47.68	56.45	58.98	59.68	51.89	35.01	51.06	42.78	72.8	40.89
64000	43.77	63.26	77.91	48.0	68.51	62.45	46.95	46.39	54.59	29.27
72000	41.67	66.31	57.56	51.96	48.04	59.98	38.39	35.91	58.24	44.33
80000	36.91	66.68	39.61	24.66	45.71	43.39	34.25	24.01	47.02	37.15
$\bar{X}$	42.6	59.14	51.81	48.73	43.98	50.8	39.37	41.38	53.16	41.76

Tabela B.25: MBF de  $8 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.7  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	43.01	27.26	31.34	22.63	25.32	34.86	43.61	38.45	19.44	27.25
8000	34.75	31.75	44.1	36.06	39.84	28.78	42.53	40.66	27.24	49.09
16000	37.24	42.73	42.93	37.87	28.34	33.2	46.6	37.85	33.92	46.21
24000	27.1	31.05	43.91	21.79	44.97	30.7	45.95	32.4	41.32	46.51
32000	30.99	39.61	49.11	27.01	25.29	29.91	42.22	37.71	45.51	52.61
40000	25.67	33.27	54.17	24.7	22.0	35.99	33.48	38.79	36.41	53.74
48000	49.15	34.97	42.74	33.4	20.41	32.53	23.98	32.19	38.51	33.45
56000	42.58	40.22	46.69	32.7	20.6	29.43	29.15	41.88	41.06	39.63
64000	47.52	30.67	39.78	54.1	35.57	34.45	41.96	40.69	29.63	34.6
72000	36.1	40.93	36.0	52.45	34.83	36.6	43.53	27.43	18.51	32.14
80000	25.47	21.51	38.38	30.45	32.19	31.14	31.95	16.21	21.01	39.06
$\bar{X}$	36.32	34.0	42.65	33.92	29.94	32.51	38.63	34.93	32.05	41.3

Tabela B.26: MBF de  $8 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.8  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	25.17	20.18	27.86	19.12	16.5	23.34	19.94	13.71	24.0	24.53
8000	33.17	29.23	23.02	24.2	26.9	27.75	26.14	20.35	27.68	33.61
16000	31.04	22.36	19.77	19.21	28.66	30.17	33.35	28.55	31.11	34.67
24000	27.18	22.29	29.13	25.39	22.13	29.96	33.23	16.8	42.55	29.58
32000	17.8	15.92	27.21	21.62	34.14	27.84	33.46	27.05	40.14	23.64
40000	29.73	28.32	32.36	19.88	34.34	32.47	30.11	32.24	29.39	27.19
48000	28.35	22.59	34.82	20.39	31.56	24.5	29.81	26.45	36.17	25.5
56000	20.31	20.16	23.94	19.59	22.34	17.69	25.18	34.32	24.88	29.12
64000	15.61	33.41	28.91	31.15	26.99	19.03	27.77	24.29	21.39	30.36
72000	24.76	25.27	30.82	35.67	26.21	31.18	31.93	17.43	19.2	30.92
80000	18.58	22.63	17.33	23.03	18.85	22.34	32.21	19.45	20.26	19.03
$\bar{X}$	24.7	23.85	26.83	23.57	26.24	26.02	29.38	23.69	28.8	28.01

Tabela B.27: MBF de  $8 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.9  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	729.1	1351.24	1755.45	2176.33	1144.6	1638.44	879.41	2135.67	770.89	1631.86
7000	683.12	2057.42	1612.38	1992.18	1461.67	1643.37	1014.58	2203.0	662.23	1521.86
14000	696.67	1923.59	1441.66	2037.82	1596.87	1411.08	917.46	1746.72	749.72	1580.33
21000	788.31	1700.74	918.87	1986.44	1222.15	1690.37	1316.43	1892.27	867.38	1424.78
28000	912.26	1811.01	1610.3	2031.81	1626.26	1546.79	1039.27	1966.84	955.08	1400.37
35000	882.65	1685.83	1521.67	1985.39	1564.16	1737.42	1109.56	1125.34	870.5	1154.71
42000	532.38	1986.29	1905.25	2033.45	1711.26	1688.73	1145.58	1739.21	895.32	600.78
49000	763.58	2073.77	1756.41	1245.44	1323.56	1749.21	1288.19	1454.97	724.69	497.89
56000	675.01	2153.67	1710.72	2124.55	1264.87	1599.19	1160.5	1757.74	687.69	1209.08
63000	827.16	1978.07	1073.14	2130.12	1350.78	1380.54	1000.1	1874.85	836.12	1235.44
70000	694.45	2062.8	1205.81	791.94	1500.04	778.38	1151.49	2172.33	912.15	1298.34
$\bar{X}$	744.06	1889.49	1501.06	1866.86	1433.29	1533.05	1092.96	1824.45	811.98	1232.31

Tabela B.28: MBF de  $7 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.1  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	570.12	982.48	642.25	1138.88	776.4	1236.0	469.27	492.68	1006.52	369.27
7000	1074.93	1587.86	642.56	1238.41	892.79	1068.19	949.34	660.92	939.64	744.26
14000	1056.67	1604.85	454.32	1361.96	758.96	891.4	1107.28	474.41	983.48	610.37
21000	914.49	1453.58	642.33	1278.93	857.24	1024.91	1064.63	588.34	981.07	647.38
28000	832.27	1257.96	512.82	1249.64	662.11	982.55	1027.71	1151.6	955.04	683.82
35000	1109.88	1506.88	614.4	1161.55	506.91	1043.45	244.28	1171.17	893.88	686.11
42000	973.01	1483.29	671.79	1149.25	433.46	1027.3	665.5	1099.65	832.44	457.39
49000	851.52	1245.92	510.51	1192.11	502.96	1057.56	878.71	1163.92	935.02	622.04
56000	793.92	1519.09	677.4	1242.32	516.16	1089.32	976.96	985.63	991.87	607.73
63000	439.38	713.33	664.64	985.45	677.43	1166.16	844.52	1152.59	869.34	638.58
70000	741.24	905.27	691.67	973.32	719.37	749.56	567.04	1102.36	705.13	478.98
$\bar{X}$	850.68	1296.41	611.34	1179.26	663.98	1030.58	799.57	913.02	917.59	595.09

Tabela B.29: MBF de  $7 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.2  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	263.66	202.35	224.68	255.64	319.48	257.84	312.23	359.85	228.16	193.55
7000	288.91	365.57	287.11	435.47	536.83	322.56	350.13	442.71	236.22	533.72
14000	197.17	415.79	289.94	456.5	497.66	250.31	256.16	451.71	249.4	511.01
21000	274.51	317.65	314.4	473.68	515.91	260.0	328.19	403.14	274.07	467.48
28000	436.52	506.08	311.71	190.39	519.94	245.32	312.75	440.86	229.24	457.16
35000	351.72	358.48	298.89	614.74	499.47	309.52	436.85	468.38	314.73	312.02
42000	359.91	328.77	199.28	632.92	481.24	190.74	403.82	385.05	293.68	469.95
49000	409.54	479.71	348.07	676.64	465.5	246.51	326.64	341.57	274.67	401.95
56000	260.77	430.15	294.52	597.21	492.43	246.69	305.5	389.15	301.79	285.33
63000	306.16	463.55	320.19	648.49	580.24	221.86	322.43	295.59	357.91	415.98
70000	227.03	463.3	290.69	553.4	535.21	302.49	360.27	250.79	292.65	343.61
$\bar{X}$	306.9	393.76	289.04	503.19	494.9	259.44	337.72	384.44	277.5	399.25

Tabela B.30: MBF de  $7 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.3  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	198.73	93.26	260.85	313.16	172.17	136.0	177.92	115.46	232.41	198.47
7000	193.81	100.02	263.72	244.06	186.24	183.22	176.52	189.23	241.66	243.5
14000	129.54	219.49	218.68	224.53	192.63	166.0	256.3	105.71	231.89	211.71
21000	151.7	218.95	245.05	298.42	148.82	111.95	210.24	156.87	228.91	215.52
28000	132.94	135.39	144.83	282.76	97.11	127.96	262.48	106.83	167.49	142.1
35000	190.28	91.03	183.17	220.48	107.36	132.53	201.41	147.6	126.72	240.84
42000	180.01	99.76	107.98	245.88	143.05	141.02	228.82	175.48	128.44	250.02
49000	190.21	131.2	168.64	295.81	179.01	130.62	159.14	154.89	151.08	169.86
56000	209.96	105.57	119.35	272.99	152.84	160.37	109.53	200.04	189.99	188.96
63000	227.86	98.57	107.84	310.72	116.27	140.7	164.47	256.22	182.77	163.54
70000	148.41	83.79	96.74	250.45	122.75	127.18	143.54	238.37	124.0	180.91
$\bar{X}$	177.59	125.18	174.26	269.02	147.11	141.59	190.03	167.88	182.31	200.49

Tabela B.31: MBF de  $7 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.4  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	79.62	123.71	237.75	52.56	65.77	78.79	65.52	98.28	63.45	62.54
7000	97.12	153.56	191.96	90.12	78.46	111.54	56.96	96.69	89.96	123.01
14000	96.03	159.01	229.25	101.65	68.32	109.8	95.02	110.33	71.21	150.24
21000	94.47	113.85	218.38	77.69	67.17	74.66	92.15	86.29	48.62	163.96
28000	99.79	121.36	211.19	106.74	84.46	116.69	60.62	104.61	72.79	132.96
35000	120.88	129.46	159.22	90.12	97.99	182.08	110.57	137.65	69.83	52.5
42000	115.57	122.43	175.73	100.22	94.9	189.53	104.32	92.3	127.71	185.56
49000	102.26	140.08	239.24	113.36	133.4	163.34	60.93	106.08	137.14	172.96
56000	107.06	153.15	230.01	111.14	100.1	179.77	86.05	106.67	129.92	182.35
63000	98.61	147.77	234.79	115.64	61.97	145.61	101.43	107.19	80.67	158.98
70000	119.22	114.76	236.41	104.8	124.51	101.89	101.3	81.51	68.15	44.35
$\bar{X}$	102.79	134.47	214.9	96.73	88.82	132.16	84.99	102.51	87.22	129.95

Tabela B.32: MBF de  $7 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.5  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	40.2	86.15	59.75	68.47	48.13	74.87	51.37	44.83	49.88	51.79
7000	47.04	84.76	52.68	65.08	57.8	63.03	56.76	85.99	40.05	93.36
14000	51.18	71.4	58.73	62.77	74.92	47.26	70.39	93.36	41.92	81.89
21000	68.05	83.84	36.34	55.65	65.84	56.87	74.66	95.06	69.16	72.34
28000	58.12	95.97	59.05	72.15	83.75	85.05	60.0	83.28	49.92	60.92
35000	92.27	72.41	50.19	52.74	90.59	49.45	42.6	89.5	49.24	81.82
42000	66.67	80.54	50.62	41.48	62.85	65.03	76.26	49.51	58.89	48.5
49000	70.2	78.04	70.36	59.74	86.37	84.39	53.39	42.69	78.6	74.69
56000	80.55	81.55	77.89	39.18	66.45	66.9	48.37	46.91	81.51	40.72
63000	59.84	84.75	64.12	71.94	59.61	55.43	64.62	34.34	76.66	39.94
70000	52.19	68.46	42.9	65.32	39.75	44.19	38.88	32.43	56.44	56.95
$\bar{X}$	62.39	80.71	56.6	59.5	66.91	62.95	57.94	63.45	59.3	63.9

Tabela B.33: MBF de  $7 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.6  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	34.48	44.23	43.25	45.35	34.06	53.59	33.33	23.36	40.39	44.81
7000	48.25	51.54	33.39	48.66	49.6	41.03	32.22	34.92	34.38	57.28
14000	49.19	57.36	65.69	55.1	69.55	43.56	41.12	46.24	43.76	60.32
21000	57.41	53.92	56.29	38.38	69.68	46.58	37.57	46.31	40.91	28.35
28000	37.07	55.44	27.69	64.7	36.05	40.2	38.64	30.26	27.96	49.35
35000	23.54	52.85	29.25	56.29	32.99	54.09	23.07	29.31	42.24	39.89
42000	47.13	46.69	44.36	53.39	32.08	56.86	32.18	37.36	43.97	34.93
49000	34.72	51.64	44.02	65.15	42.34	53.84	41.91	47.5	40.08	29.78
56000	44.59	52.77	49.4	60.93	38.96	36.0	52.7	38.54	73.83	46.43
63000	43.84	55.96	53.6	61.78	42.81	72.7	45.12	33.62	49.38	31.28
70000	39.55	32.07	58.22	60.12	32.17	52.21	40.54	45.45	38.11	36.72
$\bar{X}$	41.8	50.41	45.92	55.44	43.66	50.06	38.04	37.53	43.18	41.74

Tabela B.34: MBF de  $7 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.7  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	41.7	27.32	25.93	22.13	21.45	35.36	39.15	35.9	14.05	27.62
7000	47.87	28.42	43.45	36.04	35.51	28.7	38.79	45.95	28.07	45.43
14000	49.15	43.48	50.61	37.48	32.51	38.4	35.48	31.19	24.05	40.16
21000	22.22	26.78	33.04	29.19	44.62	26.86	33.9	38.77	29.5	44.63
28000	26.51	33.28	35.82	31.83	45.72	21.7	36.3	35.29	44.48	54.56
35000	25.58	38.07	39.13	37.6	32.18	34.37	41.78	35.96	49.59	35.12
42000	26.55	30.7	34.45	28.07	27.33	39.46	32.08	38.49	32.16	32.32
49000	50.49	24.08	34.23	29.05	32.26	31.38	27.97	35.1	38.69	34.86
56000	42.88	43.13	43.77	25.3	19.73	28.85	24.89	37.15	39.84	41.92
63000	44.5	44.11	34.77	45.52	28.03	31.82	31.35	37.04	30.8	41.99
70000	27.32	32.6	22.7	41.31	16.29	27.83	25.15	33.22	16.95	25.66
$\bar{X}$	36.8	33.82	36.17	33.05	30.51	31.34	33.35	36.73	31.65	38.57

Tabela B.35: MBF de  $7 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.8  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	24.01	20.3	26.33	18.14	13.87	23.03	18.87	11.88	24.9	23.55
7000	22.73	25.69	27.86	26.57	21.97	24.84	31.54	28.93	32.81	30.75
14000	32.43	27.08	19.94	23.21	25.9	26.04	24.92	27.51	23.52	23.4
21000	33.18	33.32	27.55	33.81	25.59	26.0	27.22	16.58	36.99	26.93
28000	17.34	23.72	29.28	30.72	22.85	32.13	30.89	13.46	34.91	21.96
35000	18.52	23.62	30.01	20.4	22.82	20.33	22.65	20.32	24.76	22.2
42000	23.15	25.25	22.03	18.24	28.3	21.04	24.62	24.94	31.9	19.68
49000	22.8	22.68	28.27	23.82	34.01	32.81	31.48	29.41	31.74	21.14
56000	19.76	19.62	24.46	17.09	22.23	17.15	23.31	33.33	23.76	28.45
63000	16.81	29.84	25.45	26.83	25.67	21.86	28.33	28.24	19.67	30.46
70000	17.43	21.91	13.5	20.42	24.19	14.28	20.01	15.27	11.0	22.93
$\bar{X}$	22.56	24.82	24.97	23.57	24.31	23.59	25.8	22.72	26.91	24.68

Tabela B.36: MBF de  $7 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.9  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	716.53	1097.31	1601.64	1881.66	1101.75	1700.66	755.9	1606.76	871.63	1249.85
6000	665.38	1682.2	1600.86	1670.09	1513.24	1783.01	691.28	1659.44	725.5	1227.43
12000	710.18	1727.71	1406.83	1806.76	1475.1	1553.29	1089.31	1497.54	778.98	1248.76
18000	668.58	1578.44	1124.92	1602.33	1321.56	1622.7	834.29	1667.97	966.2	1270.41
24000	863.55	1369.84	642.74	1391.91	1315.29	1765.6	1310.9	1681.33	974.27	1230.11
30000	875.0	1603.01	1564.36	1477.1	1513.53	1690.37	959.51	1018.71	984.71	1093.75
36000	633.9	1462.21	827.64	1562.67	1518.17	1835.79	999.77	1596.37	1006.07	1060.42
42000	626.14	1652.2	1707.18	1719.67	1514.7	1739.15	1020.33	1501.59	1020.73	769.07
48000	750.42	1240.23	1737.99	1457.26	1254.84	1767.43	1090.74	756.36	893.76	780.07
54000	694.53	1706.59	1645.64	1898.38	974.76	1725.56	1087.73	1608.52	1072.27	382.16
60000	424.01	1762.33	735.82	1798.65	942.91	1697.94	1059.19	1642.49	504.95	682.16
$\bar{X}$	693.47	1534.73	1326.87	1660.59	1313.26	1716.5	990.81	1476.1	890.82	999.47

Tabela B.37: MBF de  $6 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.1  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	630.71	912.36	626.38	962.15	760.46	1033.27	327.48	437.27	1054.48	325.21
6000	1291.85	1687.34	597.74	1033.59	803.5	937.66	957.15	550.57	1005.82	618.65
12000	1311.85	1669.57	479.08	1166.28	821.59	856.44	1056.07	448.28	1114.57	654.28
18000	1152.88	1427.43	617.16	963.57	687.68	601.47	888.07	215.77	954.23	601.56
24000	1123.4	1633.38	628.83	1241.69	795.39	1001.07	1028.37	708.6	1090.45	542.86
30000	1021.14	1705.85	629.55	1115.13	721.76	906.34	504.54	741.95	983.07	612.35
36000	1229.36	1686.97	522.48	1163.84	600.66	899.46	669.06	794.81	898.14	705.53
42000	1155.52	1592.02	669.32	1058.71	456.53	938.19	730.53	724.84	908.85	416.92
48000	921.45	1555.69	373.28	1141.9	671.63	933.62	782.29	801.17	1065.94	506.9
54000	850.05	1643.34	526.12	1239.91	623.12	1023.07	736.51	649.27	1114.51	528.13
60000	405.29	1441.85	383.09	1182.44	504.97	866.88	338.45	648.37	1086.59	528.93
$\bar{X}$	1008.5	1541.44	550.27	1115.38	677.03	908.86	728.96	610.99	1025.15	549.21

Tabela B.38: MBF de  $6 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.2

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	271.06	185.13	215.48	242.45	271.4	228.86	320.17	405.41	232.06	170.37
6000	285.6	325.29	219.98	245.19	379.87	248.7	388.42	467.67	284.2	468.61
12000	230.13	266.34	210.98	381.56	435.44	300.41	379.54	470.34	139.94	373.66
18000	197.59	245.39	223.57	403.83	412.4	212.55	313.08	424.74	252.8	335.39
24000	257.33	389.24	218.75	486.48	373.52	234.08	482.18	488.43	260.37	433.76
30000	463.33	337.84	241.95	169.53	373.7	213.08	477.15	501.64	200.28	399.42
36000	465.2	269.49	233.56	600.22	389.53	182.8	367.75	469.88	185.57	337.04
42000	400.85	240.7	213.08	540.06	376.06	160.97	418.86	482.89	179.03	490.25
48000	428.41	340.3	208.05	573.48	455.92	142.46	395.82	404.62	261.89	481.08
54000	428.13	286.7	258.03	549.49	406.57	214.68	301.25	388.82	272.33	433.35
60000	210.02	334.03	239.19	580.42	401.01	211.68	353.47	354.86	253.82	191.84
$\bar{X}$	330.69	292.77	225.69	433.88	388.68	213.66	381.61	441.75	229.3	374.07

Tabela B.39: MBF de  $6 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.3

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	178.68	89.49	265.21	234.87	192.74	140.8	208.96	96.5	218.05	161.37
6000	168.4	114.52	270.23	203.03	205.59	186.18	197.73	157.93	215.06	190.51
12000	150.54	197.77	235.37	190.07	212.3	162.91	206.1	167.87	213.35	185.34
18000	178.21	192.68	243.21	201.35	178.35	188.9	200.42	117.66	144.74	176.53
24000	137.94	156.16	140.84	214.23	208.34	106.71	198.11	83.9	198.14	165.65
30000	149.14	97.03	181.42	196.8	81.42	108.8	236.08	104.48	125.4	89.14
36000	178.84	86.55	187.05	224.48	103.52	145.43	198.37	135.33	125.55	180.01
42000	167.69	99.56	98.82	170.18	161.72	137.92	236.64	158.1	143.87	236.55
48000	199.57	148.39	149.64	267.45	194.6	159.68	196.71	142.88	153.39	141.17
54000	142.28	140.03	166.9	204.1	219.59	150.73	125.0	152.54	152.98	209.14
60000	161.48	74.49	160.4	232.02	131.61	68.95	77.18	158.21	164.8	131.03
$\bar{X}$	164.8	126.97	190.83	212.6	171.8	141.55	189.21	134.13	168.67	169.68

Tabela B.40: MBF de  $6 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.4

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	61.21	85.2	197.54	42.2	67.66	77.46	55.89	79.2	57.95	56.06
6000	84.45	147.29	134.43	70.13	70.92	90.19	47.66	93.54	103.21	118.43
12000	75.62	129.45	153.6	85.83	68.12	110.14	81.97	89.19	101.66	122.87
18000	82.61	91.63	196.85	65.82	64.39	83.42	85.02	98.89	70.83	122.06
24000	96.36	131.55	166.56	95.09	41.1	98.81	77.86	119.02	59.68	148.24
30000	104.72	139.67	213.07	90.92	61.02	53.81	69.29	150.95	70.39	130.7
36000	110.63	107.92	156.8	95.89	96.48	120.81	111.23	150.34	66.88	52.12
42000	109.24	95.25	154.17	91.73	89.67	140.95	99.33	89.5	132.98	146.43
48000	106.91	85.91	188.66	91.03	121.67	150.58	69.96	119.03	127.7	143.16
54000	110.81	129.98	190.72	77.58	135.13	108.81	89.37	116.03	99.48	128.19
60000	78.57	128.37	162.26	76.53	72.19	147.77	63.89	95.7	92.1	117.25
$\bar{X}$	92.83	115.66	174.06	80.25	80.76	107.52	77.41	109.22	89.35	116.86

Tabela B.41: MBF de  $6 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.5

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	40.91	76.84	57.38	58.36	37.77	76.85	46.02	48.17	54.22	53.9
6000	49.25	62.33	66.83	60.63	41.61	69.0	54.86	62.05	53.41	86.84
12000	37.35	81.35	49.86	54.09	54.7	81.47	60.5	81.06	41.97	64.19
18000	43.72	87.13	50.67	60.9	73.42	69.32	53.23	53.39	54.73	46.91
24000	73.99	85.3	60.5	54.07	68.26	88.1	58.55	77.6	56.46	65.63
30000	92.1	86.8	55.62	62.34	55.7	78.29	62.98	71.87	36.17	55.5
36000	84.67	79.99	52.34	53.37	71.78	64.69	73.07	68.9	73.06	60.01
42000	70.29	73.33	41.15	38.58	66.05	65.49	74.3	54.02	56.07	50.39
48000	67.68	81.95	56.4	60.04	95.08	78.65	73.25	59.79	53.42	75.01
54000	87.25	78.45	63.84	51.18	65.56	59.67	69.49	60.99	49.18	51.77
60000	53.97	76.99	58.8	34.21	63.21	69.97	38.74	44.77	39.5	39.04
$\bar{X}$	63.74	79.13	55.76	53.43	63.01	72.86	60.45	62.05	51.65	59.02

Tabela B.42: MBF de  $6 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.6

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	29.21	38.0	40.79	50.99	30.44	49.39	30.97	24.08	43.17	47.94
6000	45.73	49.37	57.63	52.24	49.35	39.86	33.43	36.83	55.45	57.93
12000	50.25	39.84	51.28	49.12	69.01	48.86	36.16	45.84	43.87	47.31
18000	39.2	59.99	39.86	49.21	41.37	53.09	37.49	43.24	38.63	32.57
24000	41.92	46.23	54.56	45.82	33.57	46.63	50.98	41.03	28.11	32.56
30000	57.97	50.04	38.84	43.45	40.59	52.22	46.23	44.34	48.02	46.4
36000	27.64	50.21	29.67	50.34	32.77	50.44	33.3	30.92	40.7	43.11
42000	30.77	54.45	34.91	46.62	30.71	52.87	32.41	40.16	42.98	34.69
48000	34.91	48.12	38.06	47.46	30.17	49.11	37.57	46.71	44.15	20.5
54000	34.75	47.68	43.55	49.86	38.18	39.9	23.6	35.53	47.71	31.96
60000	36.72	47.98	33.99	46.52	25.56	50.23	33.95	34.96	50.92	44.98
$\bar{X}$	39.01	48.36	42.11	48.33	38.34	48.42	36.01	38.51	43.97	40.0

Tabela B.43: MBF de  $6 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.7

Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	40.66	26.3	21.43	20.57	20.72	32.29	36.53	30.72	15.06	26.49
6000	37.7	27.76	44.56	23.73	32.86	34.19	25.6	44.08	27.9	27.92
12000	50.76	41.89	37.66	32.33	29.76	33.62	38.84	37.38	28.64	26.79
18000	42.49	33.36	30.14	36.7	26.28	32.8	39.21	31.92	30.64	40.62
24000	21.79	24.46	39.15	20.58	41.5	26.98	38.13	28.88	34.12	39.77
30000	31.02	26.25	45.97	27.96	42.09	26.01	35.54	31.99	25.38	44.9
36000	35.92	39.0	33.81	32.43	21.77	27.07	40.57	31.96	47.16	30.76
42000	28.51	31.31	32.43	30.21	28.23	37.75	31.38	35.78	30.27	28.44
48000	42.07	34.8	30.39	35.48	21.15	24.73	31.73	25.72	29.5	31.62
54000	27.99	35.33	48.64	28.53	19.7	26.09	29.89	34.36	35.35	35.19
60000	24.55	30.63	32.76	19.0	15.35	22.16	11.44	29.86	28.07	36.29
$\bar{X}$	34.86	31.92	36.09	27.96	27.22	29.43	32.62	32.97	30.19	33.53

Tabela B.44: MBF de  $6 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.8  
Fonte: Elaborada pelo autor.

Nó	$\mathcal{G}_1 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_2 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_3 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_4 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_5 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_6 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_7 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_8 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_9 \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $	$\mathcal{G}_{10} \rightarrow  \Delta\mathcal{D} $
1	22.96	20.06	23.42	17.92	12.13	20.98	17.6	12.61	27.23	22.48
6000	22.09	29.01	24.49	27.86	17.93	24.61	32.19	26.41	33.81	31.79
12000	39.11	21.0	20.56	20.0	26.62	28.1	25.73	25.86	28.14	27.08
18000	30.06	23.74	22.79	18.03	29.02	25.73	23.06	20.14	31.61	28.7
24000	24.2	20.42	25.69	21.49	20.17	27.44	29.86	14.69	38.07	26.55
30000	17.91	16.21	27.04	34.47	25.39	27.93	20.02	16.29	31.01	21.21
36000	23.13	19.84	21.51	17.14	21.65	20.91	17.52	21.98	28.25	18.86
42000	22.52	24.34	21.1	18.85	24.71	19.88	17.04	22.69	32.14	20.53
48000	26.45	18.32	33.33	20.35	27.84	27.21	25.19	21.44	32.81	19.0
54000	21.3	18.09	23.71	22.01	23.6	22.4	29.22	25.86	30.89	14.59
60000	14.43	19.18	24.51	14.24	17.97	13.89	24.02	18.04	23.0	16.36
$\bar{X}$	24.01	20.93	24.38	21.12	22.46	23.55	23.77	20.55	30.63	22.47

Tabela B.45: MBF de  $6 \cdot 10^4$  movimentos. Hurst = 0.9  
Fonte: Elaborada pelo autor.

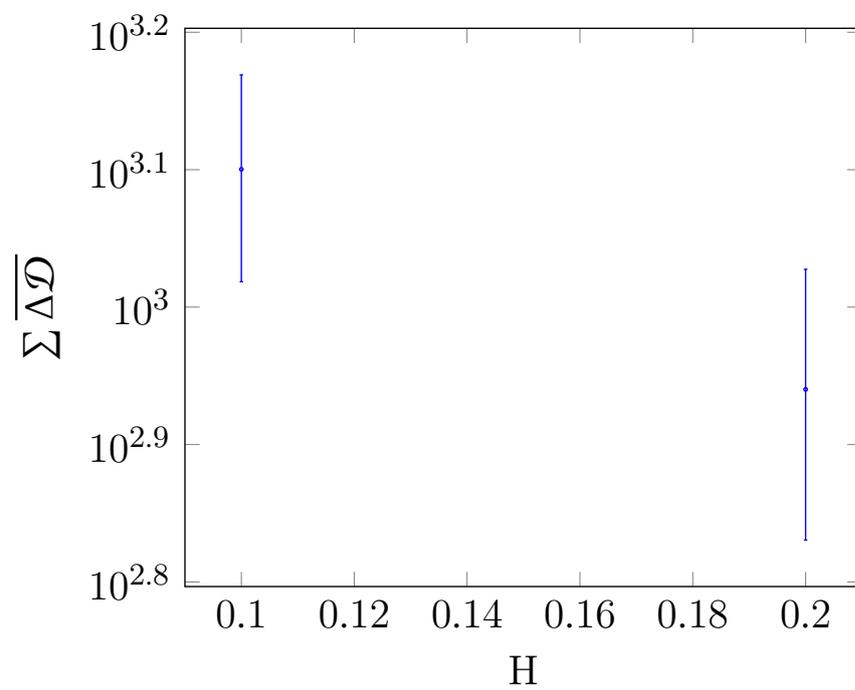


Figura B.5: Intervalo de confiança de 95% de 10 séries com  $6 \cdot 10^4$  movimentos brownianos dos Hurst 0.1 e 0.2, analisando a variação da simetria em 11 nós de cada série, distribuídos em intervalos de  $6 \cdot 10^3$  nós. Nos testes observados para o intervalo de confiança aplicado, as séries com  $6 \cdot 10^4$  movimentos brownianos obtiveram o limite inferior dos movimentos brownianos de Hurst 0.1 e limite superior dos movimentos brownianos de Hurst 0.2 coincidentes.

Fonte: Elaborada pelo autor.