

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Uma versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand

Célio Augusto Terra de Souza

Belo Horizonte - MG
2020

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA



Célio Augusto Terra de Souza
Orientador: Prof. Dr. Bernardo Nunes Borges de Lima

Uma versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas-ICEX da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
2020

Souza, Célio Augusto Terra de.

S729u Uma versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand
[manuscrito] / Célio Augusto Terra de Souza. - 2020.
44 f. il.

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas
Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática.

Referências: f.43-44

1. Matemática – Teses. 2. Percolação – Teses. 3. Correlação
(Estatística) – Teses. 4. Grupo de renormalização – Teses. I.
Lima, Bernardo Nunes Borges de. II. Universidade Federal de
Minas Gerais; Instituto de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

Uma versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand

CÉLIO AUGUSTO TERRA DE SOUZA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Bernardo N. B. de Lima

Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima
UFMG

Daniel Ungaretti Borges

Dr. Daniel Ungaretti Borges
USP

Leonardo T. Rolla

Prof. Leonardo Trivellato Rolla
Universidade de Warwick

Roger William Câmara Silva

Prof. Roger William Câmara Silva
DEST/UFMG

Belo Horizonte, 19 de outubro de 2020.

Agradecimentos

Tenho tantos agradecimentos a fazer que temo que está página seja demasiado pequena para contê-los.

Em primeiro lugar, a Deus, que nunca me abandonou e sempre esteve ao meu lado.

Agradeço à minha família, principalmente aos meus pais, Inês e Elizei, e ao meu irmão Álvaro, que me apoiaram durante toda essa jornada.

Ao meu orientador, Prof. Bernardo Lima, pelo convite para trabalharmos juntos, por ter acreditado no meu potencial e pela ótima orientação durante o Mestrado. Sem sua ajuda, não teria conseguido chegar até aqui.

Aos demais professores e funcionários do Departamento de Matemática, em especial às funcionárias Andréa e Kelli, que me aguentaram dois anos com muitas perguntas repetidas e meio desesperadas.

Aos meus amigos, dentro e fora da UFMG. Não vou citar nomes, mas vocês sabem quem são. Vocês foram o meu apoio em todas as horas e sempre acreditaram mim mim. Foram muitas horas de conversas, risadas, papo na sala do café... Guardo tudo isso com muito carinho.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) - Código de Financiamento 001.

*Para meus pais, Inês e Elizei
e meu irmão, Álvaro.*

Mathematics, rightly viewed, possesses not only truth, but supreme beauty — a beauty cold and austere, like that of sculpture, without appeal to any part of our weaker nature, without the gorgeous trappings of painting or music, yet sublimely pure, and capable of a stern perfection such as only the greatest art can show.

Bertrand Russell

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

David Hilbert

Resumo

Neste trabalho, apresentamos um resultado recente de H. Duminil-Copin, G. Kozma e V. Tassion, dando uma cota superior para o parâmetro de percolação crítica em lajes. Por meio de um sistema de renormalização sem sementes, junto com um processo exploratório, provamos que $p_c(\text{Slab}_n^d) = p_c + O(1/\sqrt{\log n})$. Usando essa estimativa, mostramos uma cota superior para o comprimento de correlação ξ_p , concluindo que $\xi_p \leq \exp(C(p - p_c)^{-2})$, para alguma constante C grande o suficiente.

Palavras-chave: percolação em lajes, comprimento de correlação, renormalização sem sementes.

Abstract

In this work we present a recent result by H. Duminil-Copin, G. Kozma and V. Tassion, giving an upper bound for the critical percolation parameter in slabs. Through a renormalization scheme coupled with an exploratory process, we prove that $p_c(\text{Slab}_n^d) = p_c + O(1/\sqrt{\log n})$. Using this bound we show an upper bound for the correlation length ξ_p , concluding that $\xi_p \leq \exp(C(p - p_c)^{-2})$ for some constant C large enough.

Keywords: percolation in slabs, correlation length, seedless renormalization.

Sumário

Introdução	11
1 Preliminares	13
1.1 Definições e resultados básicos	13
1.2 O problema da percolação crítica	15
1.3 O comprimento de correlação	19
2 Renormalização sem sementes	21
2.1 Uma versão alternativa da condição (b)	22
2.2 Conexões a conjuntos arbitrários	23
2.3 Processos exploratórios	26
2.4 Renormalização	28
2.5 Um lema auxiliar	31
3 Uma versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand	34
3.1 Cota inferior para a probabilidade de ligação a caixas grandes	34
3.2 Um resultado do tipo limiar abrupto	36
3.3 Versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand	41
3.4 Uma cota superior para o comprimento de correlação	42
Referências Bibliográficas	45

Introdução

A existência ou não de aglomerados abertos infinitos no ponto crítico ($p = p_c$) é, talvez, o maior problema em aberto da teoria de percolação.

Alguns resultados nesse sentido já foram encontrados. Não há aglomerado aberto no ponto crítico quando $d = 2$ ([17], [18]). Técnicas pioneiras foram usadas em [15] e [16] para provar a não-existência de tais aglomerados para $d \geq 19$. O limite foi abaixado para $d \geq 11$ em [12]. Também não há percolação no ponto crítico em $\mathbb{Z}^2 \times G$, com G um grafo finito ([8], [10]), bem como para alguns outros casos.

Em seu importante artigo de 1990 [14], G. R. Grimmett e J. M. Marstrand provam que, para todo $\varepsilon > 0$, se, na percolação de parâmetro p certos conjuntos estão ligados com probabilidade grande, então há percolação em lajes no parâmetro $p + \varepsilon$ (Teorema 1.2 no presente texto). Com isso, é possível provar que

$$p_c(\mathbb{Z}^d) = \lim_n p_c(\text{Slab}_n^d).$$

Para provar esse resultado, Grimmett e Marstrand usam uma técnica de renormalização do reticulado \mathbb{Z}^d . Para isso, utilizam o conceito de *sementes*. Sementes são caixas com todas os elos abertos, localizadas na fronteira de caixas grandes. Grimmett e Marstrand provam que, permitindo um pouco de *sprinkling*, isto é, aumentando o parâmetro de p para $p + \varepsilon$, é possível garantir a ligação de caixas grandes até sementes em suas bordas com probabilidade positiva. Assim, é construído um aglomerado aberto infinito na laje.

Recentemente, H. Duminil-Copin, G. Kozma e V. Tassion, em um *pre-print* [9] provam uma versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand. Em particular, provam que $p_c(\text{Slab}_n^d) - p_c(\mathbb{Z}^d) = O(1/\sqrt{\log n})$ (Teorema 3.1). Usando esse resultado, é possível obter uma cota superior para o comprimento de correlação, que aparece bastante em contextos físicos (Teorema 3.2), reformulando, assim, o Teorema 3.1 de maneira independente do Teorema de Grimmett-Marstrand.

A demonstração do Teorema 3.1 é uma aplicação de um outro resultado importante sobre percolação em lajes (Teorema 2.1). A fim de provar o Teorema 2.1, os autores de [9] usam um procedimento de renormalização, como em [14]. No entanto, ao contrário de [14], não são usadas sementes. A vantagem desse processo de renormalização sem sementes, é que o "custo" das sementes é muito alto - isto é, é necessário tomar um ε relativamente grande no Teorema 2.1 para obter uma boa cota inferior para a probabilidade de percolação. A cota obtida para o comprimento de correlação usando o Teorema 3.1 é bem melhor que cotas anteriores obtidas usando métodos com sementes.

No presente trabalho, é feito um estudo do artigo de Duminil-Copin, Kozma e Tassion, enunciando e provando os resultados obtidos, apresentando as provas de maneira mais extensa e

detalhada.

No primeiro capítulo, são lembrados conceitos básicos de percolação. Também são apresentadas algumas estratégias que podem ser usadas para resolver o problema da percolação no ponto crítico, bem como o conceito de comprimento de correlação e avanços feitos na área.

No segundo capítulo, é enunciado e provado um teorema que estabelece condições suficientes para que haja percolação em lajes com probabilidade positiva (Teorema 2.1). Para provar esse teorema, é usado um processo de renormalização sem sementes, junto com um processo exploratório. Nesse passo, é fundamental o Lema 2.3, apresentado em [14], sobre percolação de sítios em processos exploratórios.

No terceiro capítulo, o Teorema 2.1 é usado para provar uma versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand (Teorema 3.1). Para estabelecer as condições necessárias, é fundamental o resultado de Chayes e Chayes [5] de que $P_{p_c+\varepsilon}[0 \leftrightarrow \infty] \geq \varepsilon$, assim como resultados apresentados em [20] sobre sensibilidade ao ruído de funções booleanas. Também é provada a cota superior para o coeficiente de correlação (Teorema 3.2).

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Definições e resultados básicos

Fixe um inteiro $d \geq 2$. Consideremos a rede hipercúbica \mathbb{Z}^d . Usaremos em \mathbb{Z}^d a norma

$$\|x\| = \max\{|x_i|, 1 \leq i \leq d\},$$

a menos que outra norma seja explicitamente declarada.

Dois vértices x e y de \mathbb{Z}^d são ditos *vizinhos*, e denotamos $x \sim y$, se $\|x - y\|_1 = 1$. Nesse caso, o subconjunto $\{x, y\}$ é dito um *elo* de \mathbb{Z}^d . O conjunto de todos os elos de \mathbb{Z}^d é denotado por $E(\mathbb{Z}^d)$. Mais geralmente, sendo $S \subseteq \mathbb{Z}^d$, denotamos por $E(S)$ o conjunto dos elos de S .

Seja S subconjunto de \mathbb{Z}^d . Definimos a *fronteira de vértices* de S , ou simplesmente *fronteira* de S , como o conjunto

$$\partial S := \{x \in S : \exists y \notin S, x \sim y\},$$

e a *fronteira de elos* de S como o conjunto

$$\partial_E S := \{\{x, y\} \in E(\mathbb{Z}^d) : x \in S, y \notin S\}.$$

Para $n \geq 1$, definimos a *caixa de raio* n como

$$\Lambda_n := \{x : \|x\| \leq n\}.$$

Seja $d \geq 3$. A *laje de largura* n é definida como

$$\text{Slab}_n^d := \mathbb{Z}^2 \times \{-n, \dots, n\}^{d-2}.$$

Denotaremos a laje também por Slab_n , se a dimensão d do reticulado estiver clara no contexto.

Dado um ponto qualquer x e um subconjunto S de \mathbb{Z}^d , denotamos por $x + S$ o conjunto obtido transladando o conjunto S pelo vetor x , isto é,

$$x + S := \{x + y, y \in S\}.$$

Em particular,

$$x + \Lambda_n := \{y; \|y - x\| \leq n\}.$$

O *diâmetro* de um conjunto S é definido como $\max\{\|x - y\|; x, y \in S\}$. Por exemplo, o diâmetro da caixa Λ_n é $2n$.

Usaremos na maior parte deste trabalho o modelo de percolação de elos, como introduzido, por exemplo, em [13]. Seja $p \in [0, 1]$. Consideramos o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$, sendo o espaço amostral

$$\Omega := \prod_{e \in E(\mathbb{Z}^d)} \{0, 1\},$$

Cada ponto do espaço amostral é denominado uma *configuração de percolação*, e denotado por $\omega = (\omega(e) : e \in E(\mathbb{Z}^d))$. Se $\omega(e) = 0$, diremos que o elo e está *fechado*, e se $\omega(e) = 1$, diremos que e está *aberto*.

A σ -álgebra \mathcal{F} é a gerada pelos cilindros de dimensão finita, e a medida P_p é a medida produto

$$P_p := \prod_{e \in E(\mathbb{Z}^d)} \mu_e,$$

sendo μ_e a medida de Bernoulli em $\{0, 1\}$:

$$\mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p, \quad \mu_e(\omega(e) = 1) = p.$$

A existência da medida P_p é garantida pelo Teorema da Extensão de Kolmogorov. Usaremos E_p para indicar a esperança com respeito à medida P_p .

Seja S um subconjunto de \mathbb{Z}^d , e x, y dois vértices de S . Diremos que x e y *estão ligados por um caminho aberto em S* se existirem vértices $x = v_0, v_1, \dots, v_{k-1}, v_k = y$, todos pertencentes a S , tais que $v_i \sim v_{i+1}$ e o elo $\{v_i, v_{i+1}\}$ é aberto para todo $0 \leq i \leq k - 1$. Se isso acontece, denotamos por $x \xrightarrow{S} y$. Sejam, $A, B \subseteq S$. Diremos que $A \xrightarrow{S} B$ se existirem $x \in A$ e $y \in B$ com $x \xrightarrow{S} y$. Caso $A \xrightarrow{S} \partial\Lambda_n$ para todo n suficientemente grande, diremos que $A \xrightarrow{S} \infty$. No caso em que $S = \mathbb{Z}^d$, não explicitaremos o conjunto S nas notações anteriores, escrevendo apenas $x \leftrightarrow y$, etc.

Um *aglomerado aberto* é um conjunto maximal de vértices que estão ligados entre si por caminhos abertos em uma configuração ω .

Sendo $S \ni 0$ um subconjunto infinito de \mathbb{Z}^d , definimos a função

$$\begin{aligned} \theta_S : [0, 1] &\rightarrow [0, 1] \\ p &\mapsto P_p[0 \xrightarrow{S} \infty]. \end{aligned}$$

A função θ_S é não-decrescente em p (veja [13]). É também claro que $\theta_S(0) = 0$ e $\theta_S(1) = 1$. Assim, é possível definir a *probabilidade crítica* do conjunto S como

$$p_c(S) := \sup\{p : \theta_S(p) = 0\}.$$

Em particular, denotaremos $p_c(\mathbb{Z}^d)$ apenas como p_c . Um dos resultados clássicos de percolação afirma que $0 < p_c < 1$ ([13], Teorema 1.10).

Usaremos a seguinte ordem parcial em Ω . Sendo ω_1 e ω_2 duas configurações de percolação, dizemos que $\omega_1 \leq \omega_2$ se $\omega_1(e) \leq \omega_2(e)$ para todo elo e , isto é, se todo elo aberto em ω_1 também

está aberto em ω_2 .

Um evento A é dito *crescente* se $1_A(\omega_1) \geq 1_A(\omega_2)$ sempre que $\omega_1 \geq \omega_2$. Em outras palavras, se A acontece para uma determinada configuração, continua acontecendo caso mais elos sejam abertos. Dizemos que um evento A é *decrecente* se A^c é crescente. É natural esperar, então, que se aumentarmos o parâmetro de percolação, isto é, permitirmos mais elos abertos, a probabilidade da ocorrência de eventos crescentes seja maior. A próxima proposição, provada em [13], Capítulo 2, mostra que isso realmente ocorre.

Proposição 1.1. *Seja A um evento crescente, e $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$. Então,*

$$P_{p_1}(A) \leq P_{p_2}(A).$$

O Teorema abaixo, denominado desigualdade FKG, é de suma importância para o estudo de percolação.

Teorema 1.1 (FKG). *Sejam A e B dois eventos crescentes. Então*

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B).$$

A desigualdade FKG também é válida se A e B forem ambos decrescentes. A prova do teorema pode ser encontrada em [13], Capítulo 2.

Seja A um evento e e um elo de \mathbb{Z}^d . Dizemos que e é *pivotal para A* se as configurações

$$\omega^e(f) := \begin{cases} \omega(f), & \text{se } f \neq e \\ 1, & \text{se } e = f \end{cases} \quad \text{e} \quad \omega_e(f) := \begin{cases} \omega(f), & \text{se } f \neq e \\ 0, & \text{se } e = f \end{cases}$$

satisfazem $\omega^e \in A$ e $\omega_e \notin A$ ou $\omega^e \notin A$ e $\omega_e \in A$.

1.2 O problema da percolação crítica

Como notado anteriormente, um dos maiores problemas em aberto da teoria de percolação em \mathbb{Z}^d é o comportamento da função

$$p \mapsto P_p[0 \leftrightarrow \infty]$$

quando $p = p_c$. Conjectura-se que essa função seja contínua em p_c para todo $d \geq 2$. Isto é, quase certamente não há aglomerado aberto infinito no ponto crítico.

Uma possível abordagem para essa conjectura envolve argumentos topológicos. O objetivo é encontrar uma sequência de eventos \mathcal{E}_n , tais que:

- cada \mathcal{E}_n dependa apenas de elos em Λ_n ;
- existe um $\delta > 0$ tal que, para todo p ,

$$\text{há algum } \mathcal{E}_n \text{ satisfazendo } P_p[\mathcal{E}_n] > 1 - \delta \iff P_p[0 \leftrightarrow \infty] > 0. \quad (1.1)$$

A primeira condição acima implica que a função $p \mapsto P_p[\mathcal{E}_n]$ é contínua, visto que é um polinômio. Portanto, o conjunto $\{p : P_p[\mathcal{E}_n] > 1 - \delta\}$ é aberto, sendo a imagem inversa de um aberto por uma função contínua. Pela segunda condição,

$$\{p : P_p[0 \leftrightarrow \infty] > 0\} = \bigcup_n \{p : P_p[\mathcal{E}_n] > 1 - \delta\},$$

que é aberto. Daí, $P_{p_c}[0 \leftrightarrow \infty] = 0$.

Normalmente, um lado da equivalência em (1.1) é mais fácil de provar, enquanto o outro é mais difícil. Quanto mais exigências são feitas sobre os eventos \mathcal{E}_n , mais fácil se torna a implicação direta (\implies) mas, em contrapartida, mais difícil se torna a implicação reversa (\impliedby). O artigo [9] fornece alguns exemplos de seqüências possíveis para \mathcal{E}_n , que reproduzimos abaixo.

Exemplo 1.1. Tome \mathcal{E}_n sendo o evento que a caixa $\Lambda_{n/10}$ está conectada a $\partial\Lambda_n$ e, além disso, o segundo maior aglomerado em Λ_n tem raio menor que $n/10$ (veja Figura 1.1 - as caixas está fora de escala). Nesse caso, a implicação \implies foi provada em [1], mas a recíproca ainda está em aberto.

A maior dificuldade em exemplos como esse está na limitação do tamanho do segundo maior aglomerado. Em geral, é difícil provar a não-existência de dois aglomerados grandes disjuntos.

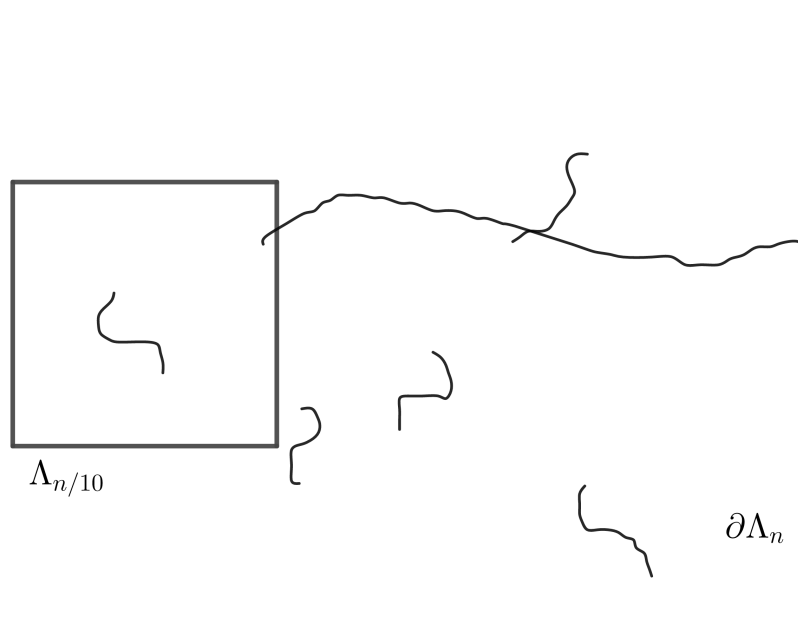


Figura 1.1: Eventos do Exemplo 1.1

Exemplo 1.2. Neste exemplo, tomaremos os eventos \mathcal{E}_n como sendo

\mathcal{E}_n : as caixas $(\pm n, 0) + \Lambda_{n/2}$ estão conectadas dentro de Λ_{2n} e, além disso, existe no máximo um aglomerado aberto ligando cada uma das caixas $(\pm n, 0) + \Lambda_{n/2}$ a $(\pm n, 0) + \partial\Lambda_n$ (vide Figura 1.2).

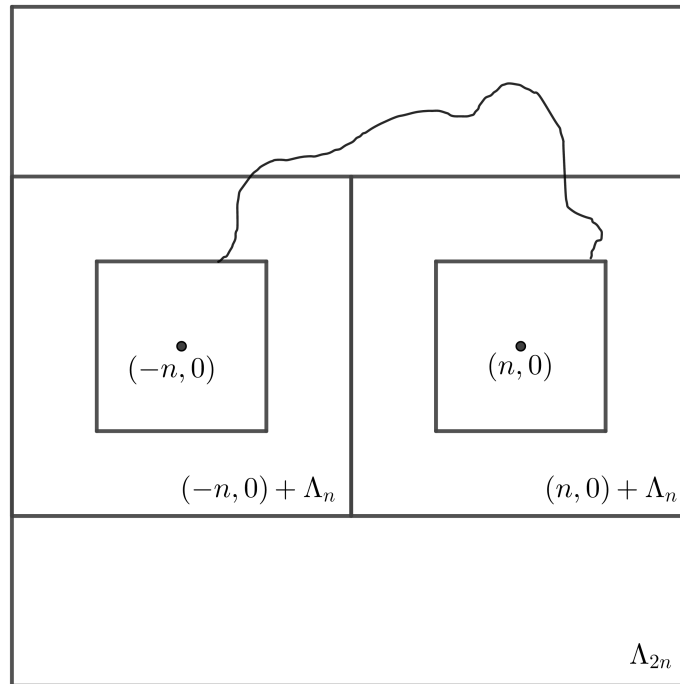


Figura 1.2: Eventos do Exemplo 1.2

Também nesse caso, a implicação direta é relativamente fácil de provar. De fato, um argumento do tipo *coarse-graining* pode ser utilizado para provar a supercriticalidade do processo de percolação nesse caso, como notado em [9]. No entanto, o outro lado da implicação ainda está em aberto.

Escolhas para \mathcal{E}_n como as apresentadas nos Exemplos 1.1 e 1.2 apresentam o inconveniente de ser difícil provar a unicidade de certos aglomerados abertos ligando dois conjuntos. Já foi provado que, para altas dimensões, existem vários aglomerados distintos em Λ_n no ponto crítico ($p = p_c$), como atesta [1]. Então, é possível que, quando p é ligeiramente maior que o ponto crítico, ainda existam vários aglomerados em Λ_n , dificultando a prova da unicidade dos aglomerados de interesse.

Exemplo 1.3. Modificaremos ligeiramente o Exemplo 1.2. Agora, tomaremos \mathcal{E}_n como os mesmos do Exemplo 1.2, mas com as caixas $(\pm n, 0) + \Lambda_{n/2}$ substituídas por $(\pm n, 0) + \Lambda_{u_n}$, para u_n escolhido de maneira adequada, e u_n bem menor que $n/2$.

Novamente, a implicação direta é relativamente fácil de provar, usando o mesmo argumento do exemplo anterior. Por outro lado, a implicação reversa torna-se mais difícil, pois na fase supercrítica é possível que haja mais de um aglomerado ligando $(\pm n, 0) + \Lambda_{u_n}$ a $(\pm n, 0) + \Lambda_n$. Tomando u_n menor, torna-se mais fácil provar a existência do aglomerado desejado, mas torna-se mais difícil demonstrar que as duas caixas estão conectadas.

Definição 1.1. Sejam $1 \leq m \leq n$. Definimos o evento $A_2(m, n)$ como sendo o conjunto de todas as configurações de percolação restritas à caixa Λ_n para as quais existem pelo menos dois aglomerados abertos distintos intersectando simultaneamente Λ_m e $\partial\Lambda_n$.

A Proposição a seguir, provada por R. Cerf em [4] será muito útil mais adiante nesse trabalho.

Proposição 1.2. *Seja $d \geq 2$. Para todo $p \in [0, 1]$ e n grande o suficiente, existe uma constante $\alpha \in (0, 1)$, dependendo de d , tal que*

$$P_p[A_2(n^\alpha, n)] \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

O artigo de Cerf [4] não prova a Proposição 1.2 em toda a generalidade, apenas para $p = p_c$. No entanto, Duminil-Copin, Kozma e Tassion mostram em [9] como estender a cota para todo $p \in [0, 1]$.

A Proposição 1.2 nos ajuda a estabelecer possíveis valores para u_n no Exemplo 1.3. De fato, com esse resultado podemos limitar a probabilidade de existirem dois aglomerados distintos entre as caixas, de modo que podemos pegar u_n como sendo n^α . Se n é suficientemente grande, n^α é bem menor que $n/2$, facilitando a prova da implicação inversa comparativamente ao Exemplo 1.2

Exemplo 1.4. Tomemos a sequência de eventos

\mathcal{E}_n : Para algum $N = N(\delta)$, independente de n , a caixa Λ_N está conectada à face $\{n\} \times \{-n, \dots, n\}^{d-1}$.

Note que, se $n \leq N$, a faceta $\{n\} \times \{-n, \dots, n\}^{d-1}$ está contida em Λ_N , e o evento \mathcal{E}_n ocorre trivialmente. Usando a ergodicidade da medida P_p , pode-se provar que, na fase supercrítica, para todo p existe um n para o qual $P_p[\mathcal{E}_n] > 1 - \delta$ (ver [9]). O outro lado da equivalência ainda é um problema em aberto.

Grimmett e Marstrand, em [14], obtiveram um avanço importante na prova da equivalência (1.1). Os autores provam o seguinte teorema.

Teorema 1.2 (Grimmett-Marstrand). *Sejam \mathcal{E}_n como definidos no Exemplo 1.4. Para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que, para todo n ,*

$$P_p[\mathcal{E}_n] > 1 - \delta \implies P_{p+\varepsilon}[0 \overset{\text{Slab}_n^d}{\longleftrightarrow} \infty] > 0.$$

Em outras palavras, a equivalência (1.1) é válida, caso se permita *sprinkling* na probabilidade p do elo estar aberto.

Tendo em vista o resultado acima, é fácil ver a importância de se estabelecerem cotas superiores para ε , o *sprinkling* necessário no Teorema 1.2. Se fosse estabelecido que nenhum *sprinkling* seja necessário, a conjectura de que $P_{p_c}[0 \leftrightarrow \infty] = 0$ em \mathbb{Z}^d , para todo $d \geq 3$ estaria provada.

Em [9], H. Duminil-Copin, V. Tassion e G. Kozma apresentam um resultado importante nesse sentido, provando que podemos tomar $\varepsilon = 1/\sqrt{\log n}$ (Teorema 3.1). A fim de obter esse resultado, provam um teorema, por si só de muita importância, que estabelece condições suficientes para que haja percolação em lajes (Teorema 2.1).

1.3 O comprimento de correlação

Definimos uma quantidade que está relacionada à probabilidade crítica da laje.

Definição 1.2. O comprimento de correlação ξ_p é definido como

$$\xi_p := \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{\log P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n]},$$

se $p < p_c$, e

$$\xi_p := \lim_{n \rightarrow \infty} -\frac{n}{\log P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n, 0 \leftrightarrow \infty]},$$

se $p > p_c$.

A existência dos limites acima é garantida pelos métodos usados na Seção 6.2 de [13], no caso subcrítico, e em [6] para a fase supercrítica.

A Definição 1.2 é motivada pelo fato que, na fase subcrítica, a probabilidade do evento $\{0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}$ decai exponencialmente com n (vide [2], [11]). O comprimento de correlação mede a taxa com que essa probabilidade decai com n . Em outras palavras,

$$P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \approx \exp(-n/\xi_p).$$

Para o caso supercrítico, o decaimento exponencial de $P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n, 0 \leftrightarrow \infty]$ segue do fato, provado em [14], que para todo $p > p_c$, existe $n \geq 1$ tal que

$$P_p[0 \xrightarrow{\text{Slab}_n^d} \infty] > 0,$$

junto com os resultados de [7].

Temos que $P_{p_c}[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n]$ decai polinomialmente com n , o que implica que ξ_p é ilimitado em qualquer vizinhança de p_c , pois a taxa de decaimento de $P_p[- \leftrightarrow \partial\Lambda_n]$ fica cada vez menor quando p se aproxima de p_c . Da definição, segue imediatamente que o comprimento de correlação é não decrescente para $p \in (0, p_c)$.

Neste trabalho, usaremos a notação p_n para o menor $p < p_c$ tal que $\xi_p = n$. As observações nos dois parágrafos anteriores implicam que p_n está bem definido.

Usando a versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand que provaremos (Teorema 3.1), é possível provar que, para $C > 0$ suficientemente grande,

$$\xi_p \leq \exp(C(p - p_c)^{-2}).$$

Esse fato será provado na Seção 3.4.

Os autores de [9] acreditam que a cota acima, embora seja um avanço importante, pode ser melhorada. De fato, conjectura-se que, para todo $p \neq p_c$,

$$\xi_p = |p - p_c|^{-\nu+o(1)},$$

isto é, $o(1)$ é uma função tal que $o(1) \rightarrow 0$ se $p \rightarrow p_c$ e

$$\nu = \begin{cases} \frac{4}{3}, & \text{se } d = 2, \\ 0,87\dots, & \text{se } d = 3, \\ 0,69\dots, & \text{se } d = 4, \\ 0,56\dots, & \text{se } d = 5, \\ \frac{1}{2}, & \text{se } d \geq 6. \end{cases}$$

Os valores para $d = 3, 4, 5$ são frutos de estimativas numéricas. Os demais valores são conjecturados a partir de considerações físicas (vide, por exemplo, [19]). Alguns resultados nesse sentido já foram provados. A conjectura $\xi_p = |p - p_c|^{-\frac{1}{2}+o(1)}$ foi provada em [15] e [16], para todo $p < p_c$ e $d \geq 19$.

Capítulo 2

Renormalização sem sementes

O seguinte teorema é fundamental a fim de estabelecer uma cota quantitativa para a quantidade de *sprinkling* necessário.

Teorema 2.1. *Seja $d \geq 3$ a dimensão do reticulado. Existe alguma constante $C = C(d) > 0$, tal que vale o seguinte. Assuma que, para algum $p \in [0, 1]$ e algum $\varepsilon > 0$ existam constantes $1 \leq k \leq K \leq n \leq N < \infty$, com $K \leq \varepsilon^2 n$ satisfazendo as seguintes condições:*

$$(a) P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_N] \geq \varepsilon,$$

$$(b) P_p[\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_N] \geq 1 - \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

$$(c) P_p[A_2(k, K)] \leq \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right) \text{ e } P_p[A_2(n, N)] \leq \exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\right),$$

sendo $A_2(k, K)$ e $A_2(n, N)$ como na Definição 1.1. Então

$$P_{p+C\varepsilon}[0 \xleftrightarrow{\text{Slab}_{3N}^d} \infty] \geq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Notemos que, embora o Teorema 2.1 não exija que $p > p_c$, suas hipóteses estabelecem um comportamento similar ao encontrado na fase supercrítica: existe uma probabilidade positiva da origem estar ligada a uma caixa grande, de tamanho N ; a caixa menor, de tamanho k , está ligada à caixa de dimensão N com grande probabilidade; e, além disso, o aglomerado aberto entre as caixas de dimensão k e K , bem como entre as de dimensão n e N , é provavelmente único. Em um certo sentido, as hipóteses "forjam" um comportamento supercrítico e garantem que, se admitirmos que mais alguns elos sejam abertos, alcançaremos o estado supercrítico na laje.

É interessante notar como a variação de ε afeta as condições **(a)**, **(b)** e **(c)**. Aumentando ε e mantendo-se fixas as constantes k , K , n e N , as condições **(b)** e **(c)** continuam sendo satisfeitas, mas a hipótese **(a)** pode deixar de ser verdadeira. A princípio, isso poderia ser resolvido tomando N menor. No entanto, ao manter n fixo e diminuindo N , o evento $A_2(n, N)$ pode deixar de ocorrer pois, embora Λ_n e $\partial\Lambda_N$ continuem ligadas por um caminho aberto, o aglomerado aberto entre essas duas caixas não será necessariamente único. Isso atrapalharia a cota necessária na hipótese **(c)**.

Essas considerações se refletem no fato de que, se tomarmos um ε maior se, por um lado obtemos uma cota inferior melhor para a percolação na laje, por outro lado o *sprinkling* necessário aumenta.

A prova do Teorema 2.1 será feita por meio de um processo de renormalização do reticulado, junto com um processo de exploração. A necessidade do *sprinkling* surge durante o processo de renormalização, quando são introduzidas novas configurações de percolação, abrindo elos usados para a propagação do aglomerado aberto.

Na Seção 2.1, será apresentada uma versão diferente da condição **(b)**. Na Seção 2.2, provaremos uma cota para a probabilidade de ligação de certos conjuntos grandes. Na Seção 2.3, reveremos o conceito de processos exploratórios, que serão usados na Seção 2.4 para provar o Teorema 2.1. Por fim, na Seção 2.5, será provado um lema usado durante a demonstração do Teorema 2.1.

2.1 Uma versão alternativa da condição **(b)**

Definição 2.1. Definimos a faceta $F(N)$ como o conjunto

$$F(N) = \{(x_1, \dots, x_d) \in \partial\Lambda_N : x_1 = N, x_2 \geq 0, \dots, x_d \geq 0\}.$$

Estabeleceremos agora uma condição decorrente da condição **(b)**, que será útil na prova de certos resultados.

Lema 2.1. *Suponha válida a condição **(b)** do Teorema 2.1. Então*

$$P_p[\Lambda_k \xleftrightarrow{\Lambda_N} F(N)] \geq 1 - \exp[-1/(\varepsilon d 2^d)].$$

Demonstração: Divida $\partial\Lambda_N$ em $d 2^d$ cópias $F_1(N), \dots, F_{d 2^d}(N)$ da faceta $F(N)$, tais que:

$$\partial\Lambda_N = \bigcup_{i=1}^{d 2^d} F_i(N).$$

Defina, para $1 \leq i \leq d 2^d$, os eventos

$$A_i = \{\Lambda_k \xleftrightarrow{\Lambda_N} F_i(N)\}$$

e

$$A = \{\Lambda_k \leftrightarrow \partial\Lambda_N\}.$$

É claro que

$$A = \bigcup_{i=1}^{d 2^d} A_i.$$

Usaremos a desigualdade FKG numa forma conhecida como "truque da raiz quadrada" (ver

[13], equação 11.14). Temos que

$$\begin{aligned}
1 - P_p(A) &= 1 - P_p\left(\bigcup_i A_i\right) \\
&= P_p\left(\bigcup_i A_i\right)^c \\
&= P_p\left(\bigcap_i A_i^c\right).
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Os eventos A_i^c são decrescentes, então, pela desigualdade FKG:

$$P_p\left(\bigcap_i A_i^c\right) \geq \prod_{i=1}^{d2^d} P_p(A_i^c) = (1 - P_p(A_1))^{d2^d}, \tag{2.2}$$

onde na última igualdade foram utilizadas as simetrias translacional e de rotação. Daí, usando a condição (b):

$$\begin{aligned}
1 - P_p(A) &\geq (1 - P_p(A_1))^{d2^d} \\
\implies \exp(-1/\varepsilon) &\geq (1 - P_p(A_1))^{d2^d} \\
\implies \exp(-1/(\varepsilon d2^d)) &\geq 1 - P_p(A_1),
\end{aligned}$$

isto é, $P_p[\Lambda_k \xleftrightarrow{\Lambda_N} F(N)] \geq 1 - \exp[-1/(\varepsilon d2^d)]$, como queríamos demonstrar. ■

2.2 Conexões a conjuntos arbitrários

O próximo lema nos permite, na presença das condições (a), (b) e (c) do Teorema 2.1, obter uma espécie de condição (b) fortalecida, substituindo a caixa Λ_k por conjuntos suficientemente grandes, e a fronteira $\partial\Lambda_N$ por uma faceta $F(N)$.

Lema 2.2. *Assuma que as condições (a), (b) e (c) do Teorema 2.1 sejam satisfeitas. Então, existe algum $c > 0$, dependendo apenas de d , tal que para todo conjunto S , conexo, com um diâmetro maior que n tal que $0 \in S$,*

$$P_p[S \xleftrightarrow{\Lambda_N} F(N)] \geq 1 - 2 \exp[-c/\varepsilon].$$

Demonstração: Sejam $p \in [0, 1]$ e $k \leq K \leq n \leq N$, com $K \leq \varepsilon^2 n$, que cumpram todas as condições do Teorema 2.1. Sem perda de generalidade, suporemos que ε é pequeno o suficiente. Caso contrário, podemos escolher c suficientemente pequeno de modo que $\exp(-c/\varepsilon)$ seja grande o suficiente, e o resultado do lema é trivial.

Fixemos um conjunto S , contendo a origem, com um diâmetro maior que n . Sem perda de generalidade, suporemos $S \subseteq \Lambda_n$. De fato, caso $S \not\subseteq \Lambda_n$, a probabilidade de S estar conectado a alguma faceta de Λ_N aumenta, devido à conexidade de S . Observemos também que essa suposição só é razoável porque supomos $0 \in S$. Do contrário, poderíamos escolher S bem afastado da origem, de modo que não seria possível aplicar as hipóteses do lema.

Escolhemos l pontos $x_1, \dots, x_l \in S$, e definimos as caixas $Q_i'' := x_i + \Lambda_K$. Escolheremos os x_i de modo que as caixas Q_i'' sejam todas disjuntas e contidas em Λ_n . Pelas hipóteses de que o diâmetro de S é maior que n , da conexidade de S e que $K \leq \varepsilon^2 n$, vemos que é possível tomar

$l \geq c_1/\varepsilon^2$, para alguma constante c_1 . Tomaremos então $l = \lceil c_1/\varepsilon^2 \rceil$. Definiremos também as caixas menores $Q'_i = x_i + \Lambda_k$.

Para $1 \leq i \leq l$, definamos os eventos

$$E_i := \{x_i \leftrightarrow \partial Q''_i\} \cap \{\text{existe um único aglomerado em } Q''_i \text{ de } Q'_i \text{ até } \partial Q''_i\}$$

e

$$B_i := \{Q'_i \leftrightarrow \partial \Lambda_N\}.$$

Temos que

$$\{x_i \leftrightarrow \partial Q''_i\} \subseteq E_i \cup \tilde{A}_2(k, K),$$

sendo $\tilde{A}_2(k, K)$ uma versão deslocada de $A_2(k, K)$ centrada em x_i (ver Definição 1.1). De fato, se $\{x_i \leftrightarrow \partial Q''_i\}$ ocorre, ou o aglomerado ligando a caixa Q'_i à fronteira de Q''_i é único e, nesse caso, ocorre E_i ; ou existem pelo menos dois aglomerados ligando Q'_i a $\partial \Lambda Q''_i$ e, portanto, ocorre $\tilde{A}_2(k, K)$. Daí,

$$P_p[x_i \leftrightarrow \partial Q''_i] \leq P_p[E_i] + P_p[\tilde{A}_2(k, K)].$$

Por invariância translacional, $P_p[x_i \leftrightarrow \partial Q''_i] = P_p[0 \leftrightarrow \partial \Lambda_K]$ e $P_p[\tilde{A}_2(k, K)] = P_p[A_2(k, K)]$. Portanto,

$$P_p[E_i] \geq P_p[0 \leftrightarrow \partial \Lambda_K] - P_p[A_2(k, K)].$$

Usando as condições **(a)** e **(c)**,

$$P_p[E_i] \geq \varepsilon - \exp(-1/\varepsilon) \geq \varepsilon/2$$

para ε suficientemente pequeno.

A independência dos eventos E_i segue do fato das caixas Q''_i serem disjuntas. Assim,

$$P_p[\cap E_i^c] = \prod_i P_p[E_i^c] = \prod_i (1 - P_p[E_i]) \leq (1 - \varepsilon/2)^l \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon l}{2}\right) = 2 \exp(-c_2 \varepsilon l),$$

para alguma constante $c_2 \geq 0$. Logo,

$$P_p[\cup E_i] = 1 - P_p[\cap E_i^c] \geq 1 - 2 \exp(-c_2 \varepsilon l) \geq 1 - 2 \exp(-c_3/\varepsilon),$$

Na última desigualdade, foi usada a cota $l \geq c_1/\varepsilon^2$.

Tendo obtido uma cota para $\cup E_i$, obteremos uma cota para $\cup B_i$. Escolha uma faceta F de $x_i + \Lambda_N$ que esteja fora de Λ_{N-1} (existe pelo menos uma faceta que cumpre essa condição). Se B_i ocorre, isto é, se x_i não está ligado a $\partial Q''_i$, então, em particular, Q'_i não está ligada a F , daí $B_i \subseteq \{Q'_i \leftrightarrow F\}$.

Pelo Lema 2.1 e usando a invariância por translação para trocar o centro da caixa de 0 para x_i , obtemos:

$$P_p[B_i] \leq P_p[Q'_i \leftrightarrow F] \leq \exp[-1/(d2^d \varepsilon)].$$

Assim:

$$P_p[\cup B_i] \leq \sum_i P_p[B_i] \leq l \exp[-1/(d2^d \varepsilon)].$$

Para todo λ grande o suficiente, e a constante temos que existe uma constante $c_4 > 0$ tal que

$$(1 + c_1 \lambda^2) e^{-a\lambda} \ll e^{-c_4 \lambda}$$

Tomando $\lambda = 1/\varepsilon$, usamos a cota acima e o fato que $l \leq c_1/\varepsilon + 1$ para concluir que

$$P_p[\cup B_i] \leq \exp(-c_4/\varepsilon).$$

Suponha que haja algum i para o qual $E_i \setminus B_i$ ocorra. Já que E_i ocorre, x_i está ligado a $\partial Q_i''$, e, como B_i não ocorre, $Q_i' \leftrightarrow \partial \Lambda_N$. Além disso, também porque E_i ocorre, sabemos que os aglomerados que realizam essas duas ligações devem ser o mesmo (existe um único aglomerado em Q_i'' de Q_i' a $\partial Q_i''$). Daí, existe uma ligação entre x_i e $\partial \Lambda_N$ (ver Figura 2.1). Em particular, $S \leftrightarrow \partial \Lambda_N$ e

$$\bigcup_i E_i \setminus B_i \subseteq \{S \leftrightarrow \partial \Lambda_N\}.$$

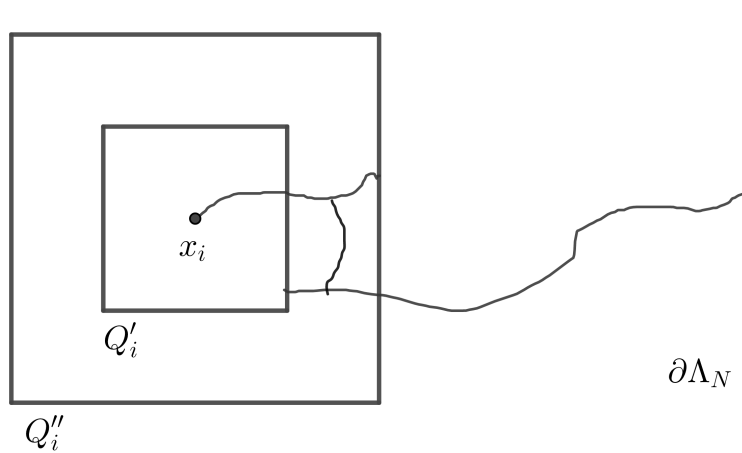


Figura 2.1: O vértice x_i está ligado a $\partial \Lambda_N$

Temos também que

$$\cup_i E_i \subseteq (\cup_i B_i) \cup (\cup_i E_i \setminus B_i).$$

De fato, se algum E_j ocorre, então ou nenhum B_i ocorre (e, em particular, $E_j \setminus B_j$ ocorre), ou ocorre pelo menos um B_j , e portanto, $\cup B_i$ ocorre. Logo,

$$P_p[\cup E_i] \leq P_p[\cup B_i] + P_p[\cup E_i \setminus B_i].$$

Utilizando os resultados obtidos:

$$\begin{aligned}
P_p[S \leftrightarrow \partial\Lambda_N] &\geq P_p[\cup E_i \setminus B_i] \\
&\geq P_p[\cup E_i] - P_p[\cup B_i] \\
&\geq 1 - 2 \exp(-c_3/\varepsilon) - \exp(-c_4/\varepsilon) \\
&\geq 1 - 2e^{-c_5/\varepsilon},
\end{aligned} \tag{2.3}$$

para alguma constante c_5 escolhida apropriadamente.

Suponha que ocorra o evento $\{\Lambda_n \leftrightarrow F(N)\} \cap \{S \leftrightarrow \partial\Lambda_N\} \cap A_2(n, N)^c$. Daí, S está ligado a $\partial\Lambda_N$ e a caixa Λ_n está ligada a $F(N)$. Os dois aglomerados fazendo essa ligação devem ser o mesmo pois, como ocorre $A_2(n, N)$, existe no máximo um aglomerado ligando Λ_n a $\partial\Lambda_N$, e estamos supondo $S \subseteq \Lambda_n$. Assim, $S \leftrightarrow F(N)$ em Λ_N .

Então

$$\{S \xrightarrow{\Lambda_N} F(N)\}^c \subseteq \{\Lambda_n \leftrightarrow F(N)\} \cup \{S \leftrightarrow \partial\Lambda_N\} \cup A_2(n, N).$$

Usando a hipótese (c), bem como a conclusão do Lema 2.1 e a cota que acabou de ser provada em (2.3),

$$\begin{aligned}
P_p[(S \xrightarrow{\Lambda_N} F(N))^c] &\leq P_p[(\Lambda_n \leftrightarrow F(N))^c] + P_p[S \leftrightarrow \partial\Lambda_N] + P_p[A_2(n, N)] \\
&\leq \exp(-1/\varepsilon) + 2 \exp(-c_5/\varepsilon) + \exp(-1/\varepsilon).
\end{aligned}$$

Assim,

$$P_p[S \xrightarrow{\Lambda_N} F(N)] \geq 1 - Ce^{-c_6/\varepsilon}.$$

Tomando ε suficientemente pequeno, temos que, para alguma constante c apropriadamente escolhida,

$$1 - Ce^{-c_6/\varepsilon} \geq 1 - 2e^{-c/\varepsilon}$$

e o resultado está provado. ■

2.3 Processos exploratórios

Provaremos o Teorema 2.1 usando um processo de renormalização junto com um processo de exploração. Iremos explorar o aglomerado da origem. Usando o Lema 2.2, é possível provar que, se a origem está conectada a uma caixa grande distante da origem, então aglomerado aberto da origem deve conter um conjunto grande, que é suficiente para propagar o aglomerado para caixas vizinhas. Assim, construiremos, passo a passo, um aglomerado infinito contendo a origem.

Definiremos de maneira formal o que é um processo de exploração.

Definição 2.2. Fixe uma ordenação qualquer dos elos de \mathbb{Z}^2 . Considere uma família de variáveis aleatórias $\{g(x) : x \in \mathbb{Z}^d\}$, tomando valores em $\{0, 1\}$. Uma *sequência exploratória* é uma sequência $X_t = (A_t, B_t)$, com $\{0\} = A_0 \subseteq A_1 \subseteq A_2 \dots$ e $\emptyset = B_0 \subseteq B_1 \subseteq B_2 \dots$ de subconjuntos de \mathbb{Z}^d , satisfazendo, para todo natural $t \geq 0$, a condição abaixo.

- Sendo e_t o elo minimal ligando A_t a $(A_t \cup B_t)^c$, caso tal elo esteja bem definido, e x_{t+1} a extremidade de e_t em $(A_t \cup B_t)^c$, então

$$X_{t+1} = \begin{cases} (A_t \cup \{x_{t+1}\}, B_t), & \text{se } g(x_{t+1}) = 1, \\ (A_t, B_t \cup \{x_{t+1}\}), & \text{se } g(x_{t+1}) = 0. \end{cases}$$

- Caso não haja elo ligando A_t a $(A_t \cup B_t)^c$, então $X_{t+1} = X_t$.

Definição 2.3. Dizemos que a sequência exploratória $X_t = (A_t, B_t)$ *percola* se o conjunto $\cup_{t \geq 0} A_t$ é infinito.

De maneira informal, uma sequência exploratória separa um conjunto de vértices "bons" dos vértices "ruins", examinando vértice a vértice. Uma sequência exploratória muito usada provém da exploração do aglomerado aberto da origem. Nesse caso, os vértices "bons", isto é, os pertencentes a A_t são os que estão ligados à origem e examinados após t passos de exploração, e os vértices "ruins", em B_t , são a parte descoberta da fronteira fechada do aglomerado da origem.

Podemos definir um modelo de percolação de sítios em \mathbb{Z}^d de maneira similar a como fizemos com percolação de elos. Tomaremos $\Omega = \prod_{x \in \mathbb{Z}^d} \{0, 1\}$.

O lema abaixo, provado pela primeira vez em [14], fornece uma condição suficiente para que uma sequência exploratória percole.

Lema 2.3. *Seja $p_c^{\text{sítios}}$ o parâmetro crítico de percolação de sítios Bernoulli em \mathbb{Z}^2 . Seja $X_t = (A_t, B_t)$ uma sequência exploratória aleatória, e suponha que exista algum $q > p_c^{\text{sítios}}$ tal que, para todo $t \geq 0$,*

$$P(B_{t+1} = B_t \mid X_0 \dots X_t) \geq q \text{ q.c.},$$

sendo P a medida de probabilidade associada às variáveis g da Definição 2.2. Então, a sequência X percola com probabilidade maior que uma constante $c = c(q) > 0$, que pode ser tomada arbitrariamente próxima de 1 desde que q seja próximo o suficiente de 1.

Demonstração: Seja $\{f(x) : x \in \mathbb{Z}^d\}$ uma família de variáveis aleatórias independentes, indexada pelos vértices de \mathbb{Z}^d , cada $f(x)$ sendo uniforme em $[0, 1]$. Diremos que o vértice v é q -aberto se $f(x) \leq q$ e q -fechado caso contrário.

Definiremos uma nova sequência exploratória $Y_t = (\alpha_t, \beta_t)$. Os vértices nos conjuntos α_t serão chamados de *verdes*, e os vértices em β_t de *vermelhos*. Definiremos a origem como *verde*, e $\alpha_0 = \{0\}, \beta_0 = \emptyset$. Tomemos o elo minimal ligado a origem, e diremos que sua outra extremidade, x_1 , é verde se $f(x_1) \leq P(B_1 = B_0 \mid X_0 = (\alpha_0, \beta_0))$. Caso contrário, diremos que x_1 é vermelho. De maneira geral, caso o vértice x_{t+1} esteja bem definido, declaramos x_{t+1} verde se $f(x_{t+1}) \leq P(B_{t+1} = B_t \mid X_i = (\alpha_i, \beta_i), 0 \leq i \leq t)$ e vermelho caso contrário.

Sejam os conjuntos $\mathcal{A} = \cup_t \alpha_t$ e $\mathcal{B} = \cup_t \beta_t$. Pela construção da sequência, todos os vértices em \mathcal{B} são q -fechados. Segue que o aglomerado de vértices q -abertos da origem, \mathcal{C}_q , não pode intersectar \mathcal{B} . Daí, $\mathcal{C}_q \subseteq \mathcal{A}$. Ora, como $q > p_c^{\text{sítios}}$, existe uma probabilidade positiva, digamos, $c(q)$, de \mathcal{C}_q ser infinito. Além disso, podemos tomar $c(q)$ tão perto de 1 quanto queiramos, se q for grande o suficiente. Já que $\mathcal{C}_q \subseteq \mathcal{A}$, a sequência Y_t percola com probabilidade no mínimo $c(q)$. Como as sequências X_t e Y_t tem a mesma distribuição, X_t também percola com probabilidade pelo menos $c(q)$. ■

2.4 Renormalização

Passaremos agora à prova do Teorema 2.1. Daqui em diante, identificaremos o ponto $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2$ com o ponto $(x_1, x_2, 0, \dots, 0) \in \mathbb{Z}^d$.

A estratégia da prova é provar que, condicionando que o aglomerado aberto da origem toca a fronteira de alguma caixa grande, é possível propagar o aglomerado abrindo alguns elos a mais em uma vizinhança da caixa. Como a condição **(a)** dá uma cota para a probabilidade da ligação entre a origem e uma caixa grande, esses fatos podem ser combinados para provar o Teorema 2.1

Definamos, para cada $x \in \mathbb{Z}^2$, as caixas $\Lambda_x = Nx + \Lambda_N \subseteq \mathbb{Z}^d$ e $\tilde{\Lambda}_x = Nx + \Lambda_{3N} \subseteq \mathbb{Z}^d$. Notemos que, embora x seja tomado em \mathbb{Z}^2 , estamos considerando essas caixas como subconjuntos de \mathbb{Z}^d . Notemos também, que Λ_x e $\tilde{\Lambda}_x$ estão contidas em Slab_{3N} .

Seja ω uma configuração de percolação Bernoulli de parâmetro p em Slab_{3N} . Para cada $x \in \mathbb{Z}^2$, definimos uma configuração de percolação em $\tilde{\Lambda}_x$, denotada por ω^x , de parâmetro $\lambda\varepsilon$, sendo λ uma constante a ser definida posteriormente. Supomos que cada ω^x seja independente uma da outra.

Introduziremos uma nova notação. Se ω é uma configuração de percolação na laje, denotaremos por $\mathcal{C}(\omega)$ o conjunto de vértices que estão conectados à origem dentro de $\mathbb{Z}^2 \times \{-3N, \dots, 3N\}^{d-2}$ por um caminho em ω . Isto é,

$$\mathcal{C}(\omega) = \{x \in \text{Slab}_{3N}; \quad 0 \xleftrightarrow{\text{Slab}_{3N}} x \text{ em } \omega\}.$$

Definiremos agora uma sequência de configurações de percolação $(\omega_t)_{t \geq 0}$ na laje Slab_{3N} , e um processo exploratório X em \mathbb{Z}^2 .

Definição 2.4. Defina $X_0 = (A_0, B_0) := (\{0\}, \emptyset)$ e $\omega_0 = \omega$. Para todo $t \in \mathbb{Z}$, $t \geq 0$, definiremos recursivamente as sequências $(X_t)_t$ e $(\omega_t)_t$ da seguinte maneira:

- caso não haja elo conectando A_t a $(A_t \cup B_t)^c$, defina $X_{t+1} := X_t$ e $\omega_{t+1} := \omega_t$;
- caso contrário, seja $x = x_t$ a extremidade em $(A_t \cup B_t)^c$ do elo mínimo que conecta A_t a $(A_t \cup B_t)^c$. Defina

$$\begin{aligned} \omega_{t+1} &:= \omega_t \vee \omega^x \\ X_{t+1} &:= \begin{cases} (A_t \cup \{x\}, B_t), & \text{se } 0 \leftrightarrow \Lambda_x \text{ em } \omega_{t+1} \\ (A_t, B_t \cup \{x\}), & \text{caso contrário.} \end{cases} \end{aligned}$$

A notação \vee denota a união dos elos abertos das duas configurações de percolação.

Sejam as configurações

$$\omega_{\text{total}} := \omega \vee \left(\bigvee_{x \in \mathbb{Z}^2} \omega^x \right)$$

e

$$\omega_\infty := \bigvee_{t \geq 0} \omega_t$$

Como todo elo aberto em ω_∞ também está aberto em ω_{total} , então $\omega_\infty \leq \omega_{\text{total}}$. Além disso, se $(X_t)_t$ percola, então $0 \leftrightarrow \infty$ em ω_∞ . De fato, se $\cup_t A_t$ é infinito, então existem infinitos vértices

x_t para os quais $0 \leftrightarrow \Lambda_{x_t}$ em ω_{t+1} , em particular, em ω_∞ .

Provaremos agora que

$$P[X \text{ percola} \mid 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_0 \text{ em } \mathcal{C}(\omega_0)] \geq \frac{1}{2}.$$

Para isso, recorreremos ao Lema 2.3. Fixemos $q > p_c^{\text{sítios}}$ tal que a constante $c(q)$ cuja existência é garantida pelo Lema 2.3 seja maior do que ou igual a $1/2$. É necessário provar, então, que

$$P(B_{t+1} = B_t \mid X_0, \dots, X_t) \geq q, \text{ q.c..}$$

É claro que se não existe elo ligando A_t a $(A_t \cup B_t)^c$, $B_{t+1} = B_t$. Focaremos a atenção no caso em que o elo mínimo ligando A_t a $(A_t \cup B_t)^c$ está bem definido. Denotemos por x a extremidade desse elo mínimo em $(A_t \cup B_t)^c$.

Os conjuntos aleatórios X_0, \dots, X_t e o evento que x está bem definido são mensuráveis com respeito a $\mathcal{C}(\omega_0) \dots \mathcal{C}(\omega_t)$. Isto é, o conhecimento dos vértices abertos até o t -ésimo passo é suficiente para conhecer X_0, \dots, X_t e saber se x está bem definido ou não. Então, basta mostrar que, para todos C_0, \dots, C_t admissíveis,

$$P(0 \leftrightarrow \Lambda_x \text{ em } \omega_{t+1} \mid \mathcal{C}(\omega_0) = C_0, \dots, \mathcal{C}(\omega_t) = C_t) \geq q, \text{ q.c.} \quad (2.4)$$

Ora, (2.4) seguiria se provássemos que, para todo C_t admissível,

$$P[C_t \leftrightarrow \Lambda_x \text{ em } \omega_t \vee \omega^x \mid \omega_t|_{\partial_E C_t} \equiv 0] \geq q. \quad (2.5)$$

Lembremos que $\partial_E C_t$ é a fronteira de elos de C_t .

De fato, se $\mathcal{C}(\omega_t) = C_t$, então os vértices em C_t estão ligados a 0 em ω_t , e se $C_t \leftrightarrow \Lambda_x$ em $\omega_t \vee \omega_x$, temos que 0 está conectado a Λ_x em $\omega_t \vee \omega^x = \omega_{t+1}$. A condição em (2.5) garante que, mesmo que a fronteira de C_t esteja fechada, conseguimos uma ligação para Λ_x com probabilidade alta, se abrirmos mais alguns elos. Nesse passo é que se faz necessário introduzir o *sprinkling*, por meio da abertura de elos em ω^x .

Seja x' a extremidade de e pertencente a A_t . Como $x' \in A_t$, $0 \leftrightarrow \Lambda_{x'}$ em ω_t . Isto é, todo C_t admissível deve intersectar $\Lambda_{x'}$. Tome $y \in \Lambda_{x'} \cap C_t$, então, ao menos uma das facetas de $y + \Lambda_N$ está contida em Λ_x (vide a Figura 2.2 para uma representação bidimensional das posições relativas). Já que estamos condicionando ao evento $0 \leftrightarrow \partial\Lambda_0$, o diâmetro de C_t é pelo menos N e, portanto, aplicamos o Lema 2.2 a C_t , mudando 0 para y , e obtendo

$$P_p[C_t \overset{\tilde{\Lambda}_x}{\leftrightarrow} \Lambda_x \text{ em } \omega \vee \omega^x] \geq 1 - 2e^{-c/\varepsilon}.$$

Como $\omega \leq \omega_t$ e o evento $C_t \leftrightarrow \Lambda_x$ é crescente, então,

$$P_p[C_t \overset{\tilde{\Lambda}_x}{\leftrightarrow} \Lambda_x \text{ em } \omega_t \vee \omega^x] \geq 1 - 2e^{-c/\varepsilon}.$$

Os estados dos elos nas configurações ω_t e ω^x são independentes, logo o Lema 2.4 abaixo garante a cota em (2.5).

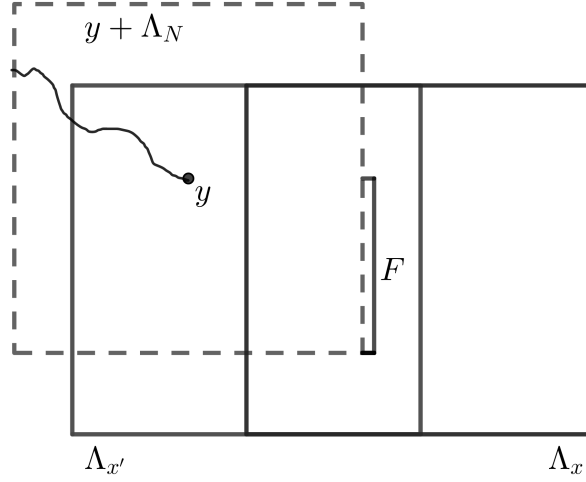


Figura 2.2: Posição relativa de F e dos blocos renormalizados

A essência do argumento reside no fato de que, como a probabilidade de ligação entre C_t e a faceta em $\omega_t \vee \omega_x$ é grande, essa probabilidade ainda é grande se fecharmos a fronteira de C_t em ω_t , desde que tomemos o parâmetro de ω^x grande o suficiente.

Afirmamos então, que a sequência (X_t) percola com probabilidade pelo menos $\varepsilon/2$. De fato,

$$\begin{aligned}
 P(X_t \text{ percola}) &\geq P(X_t \text{ percola}, 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_0 \text{ em } \mathcal{C}(\omega_0)) \\
 &= P[X \text{ percola} \mid 0 \leftrightarrow \partial\Lambda_0 \text{ em } \mathcal{C}(\omega_0)]P[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_0 \text{ em } \mathcal{C}(\omega_0)] \\
 &\geq \frac{\varepsilon}{2},
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

já que, pela condição **(a)**,

$$P[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_0 \text{ em } \mathcal{C}(\omega_0)] \geq \varepsilon.$$

Como $\omega_\infty \leq \omega_{\text{total}}$, toda configuração que percola em ω_∞ também percola em ω_{total} . Mas cada elo da laje Slab_{3N} pertence a, no máximo, 49 caixas $\tilde{\Lambda}_x$: as caixas cujo centro está a uma distância de até $3N$ do elo. No pior dos casos, uma extremidade v do elo é centro de uma caixa $\tilde{\Lambda}_v$, e esse vértice pertencerá a todas as caixas cujos centros estão localizados em um quadrado do reticulado renormalizado, com centro em v e largura de $7N$. Daí se segue a cota de 49 caixas no máximo (vide Figura 2.3 - note que um elo com extremidade v pode apontar para fora do papel). Como os vértices x , centro das caixas $\tilde{\Lambda}_x$ são tomados apenas em \mathbb{Z}^d , o número 49 não depende da dimensão do reticulado.

Assim, a configuração ω_{total} é dominada estocasticamente por uma percolação de parâmetro $p + 49 \cdot \lambda\varepsilon$. Toda configuração que percola em ω_{total} também percola nessa $(p + 49 \cdot \lambda\varepsilon)$ -percolação. Como acabamos de provar que a probabilidade de percolação em ω_{total} é pelo menos $\varepsilon/2$, na $(p + 49 \cdot \lambda\varepsilon)$ -percolação essa probabilidade também é pelo menos $\varepsilon/2$, e o Teorema 2.1 está provado.

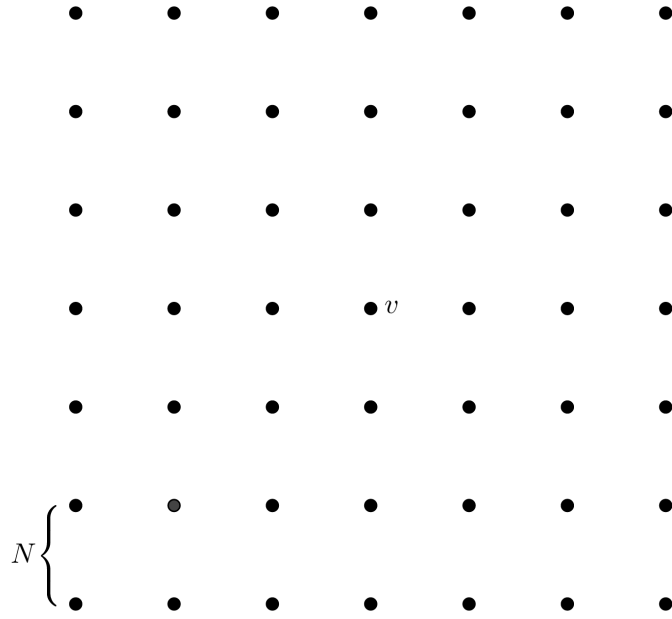


Figura 2.3: Centros de caixas no reticulado normalizado que contém o vértice v

2.5 Um lema auxiliar

Resta enunciarmos e provarmos o Lema 2.4. Introduziremos uma notação para a fronteira de los restrita a um conjunto fixo.

Definição 2.5. Fixe um subconjunto $R \subseteq \mathbb{Z}^d$. Para $A \subseteq \mathbb{Z}^d$, definimos

$$\Delta A = \{\{x, y\} \subseteq R : |x - y| = 1, x \in A, y \in R \setminus A\}.$$

Lema 2.4. Para todos $\delta, \eta > 0$, existe $\lambda > 0$ tal que, para todo $p \in [\delta, 1 - \delta]$ e $\varepsilon > 0$, bem como todos $A, B \subseteq R$, se

$$P_p[A \overset{R}{\leftrightarrow} B] \geq 1 - 2\exp(-\eta/\varepsilon),$$

então

$$P[A \overset{R}{\leftrightarrow} B \text{ em } \omega \vee \tilde{\omega} \mid \omega(e) = 0, \forall e \in \Delta A] \geq 1 - \delta,$$

onde ω é configuração num processo de percolação Bernoulli satisfazendo $P[\omega(e) = 1] \geq p$, para todo e , e $\tilde{\omega}$ é uma percolação Bernoulli de parâmetro $\lambda\varepsilon$, independente de ω .

Demonstração: Se $A \cap B \neq \emptyset$, o lema é imediato. Portanto, suporemos que $A \cap B = \emptyset$. Definimos o evento

$$E := \{\omega(e) = 0 \text{ para todo } e \in \Delta A\},$$

e o conjunto

$$W := \{\{x, y\} \in \Delta A : y \overset{R \setminus A}{\leftrightarrow} B \text{ em } \omega\}.$$

Já que $A \cap B = \emptyset$, todo caminho aberto em ω ligando A a B em R deve usar pelo menos um elo de W (o elo pelo qual o caminho "sai" de A). Assim, se todos os elos de W estiverem

fechados, $A \leftrightarrow B$ em R .

Portanto, para todo $t \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
P_p[A \leftrightarrow B \text{ em } R] &\geq P_p[\omega(e) = 0, \forall e \in W \text{ e } |W| < t] \\
&\geq P_p[\omega(e) = 0, \forall e \in W] P_p[|W| < t] \\
&\geq (1-p)^{|W|} P_p[|W| < t] \\
&\geq (1-p)^{t-1} P_p[|W| < t].
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Na segunda desigualdade, usamos FKG, já que os eventos em questão são decrescentes.

Se existe algum elo $e = \{x, y\}$ aberto em $\tilde{\omega}$, pela definição de W , temos que y está ligado a B em ω . Como $x \in A$, segue que A está ligado a B em $\omega \vee \tilde{\omega}$, mesmo assumindo que todas os elos de ΔA estão fechados em ω . Daí, para $t \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
P[A \xleftrightarrow{R} B \text{ em } \omega \vee \tilde{\omega} \mid E] &\geq P[\exists e \in W : \tilde{\omega}(e) = 1 \mid E] \\
&\geq P[\exists e \in W : \tilde{\omega}(e) = 1, |W| \geq t \mid E]
\end{aligned} \tag{2.8}$$

O evento $\{|W| \geq t\}$ é independente de E , já que na definição de W não são feitas quaisquer suposições sobre o estado dos elos pertencentes a E . Além disso, $\tilde{\omega}$ é independente de ω , então o evento $\{\exists e \in W : \tilde{\omega} = 1\}$ também é independente de E . Daí,

$$\begin{aligned}
P[A \xleftrightarrow{R} B \text{ em } \omega \vee \tilde{\omega} \mid E] &\geq P[\exists e \in W : \tilde{\omega}(e) = 1, |W| \geq t \mid E] \\
&= P[\exists e \in W : \tilde{\omega}(e) = 1, |W| \geq t] \\
&\geq (1 - (1 - \lambda\varepsilon)^t) P[|W| \geq t],
\end{aligned} \tag{2.9}$$

já que a probabilidade de um elo estar fechado em $\tilde{\omega}$ é $(1 - \lambda\varepsilon)$ e, portanto, a probabilidade de todas os elos de W estarem fechadas em $\tilde{\omega}$ e $|W| \geq t$ é, pelo menos, $(1 - \lambda\varepsilon)^t$.

Por (2.7), temos que

$$P_p[|W| \geq t] = 1 - P_p[|W| < t] \geq 1 - \frac{P_p[A \leftrightarrow B \text{ em } R]}{(1-p)^{t-1}}.$$

Combinando a equação acima e (2.9), bem como as hipóteses do lema,

$$\begin{aligned}
P[A \xleftrightarrow{R} B \text{ em } \omega \vee \tilde{\omega} \mid E] &\geq (1 - (1 - \lambda\varepsilon)^t) \left(1 - \frac{P_p[A \leftrightarrow B \text{ em } R]}{(1-p)^{t-1}} \right) \\
&\geq (1 - (1 - \lambda\varepsilon)^t) \left(1 - \frac{\exp(-\eta/\varepsilon)}{(1-p)^{t-1}} \right) \\
&= 1 + (1 - \lambda\varepsilon)^t \left(\frac{\exp(-\eta/\varepsilon)}{(1-p)^{t-1}} - 1 \right) - \frac{\exp(-\eta/\varepsilon)}{(1-p)^{t-1}}.
\end{aligned} \tag{2.10}$$

Quando t tende a infinito, $(1/(1-p)^{t-1}) \rightarrow \infty$. Daí, para t grande o suficiente,

$$\frac{\exp(-\eta/\varepsilon)}{(1-p)^{t-1}} - 1 \geq C \frac{\exp(-\eta/\varepsilon)}{(1-p)^{t-1}},$$

para alguma constante $C > 0$. Logo, para todo t grande o suficiente,

$$\begin{aligned}
P[A \xleftrightarrow{R} B \text{ em } \omega \vee \tilde{\omega} \mid E] &\geq 1 + (1 - \lambda\varepsilon)^t \frac{C \exp(-\eta/\varepsilon)}{(1-p)^{t-1}} - \frac{\exp(-\eta/\varepsilon)}{(1-p)^{t-1}} \\
&\geq 1 + C \frac{\exp(-\eta/\varepsilon)}{\delta^{t-1}} ((1 - \lambda\varepsilon)^t - 1) \\
&= 1 + \delta C \frac{\exp(-\eta/\varepsilon)}{\delta^t} ((1 - \lambda\varepsilon)^t - 1).
\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ora, é claro que a última fração tende a $-\infty$ com t . Assim, tomando um $\lambda = \lambda(\eta, \delta)$ suficientemente grande, de modo que $(1 - \lambda\varepsilon)$ seja próximo de 1, temos que $(1 - \lambda\varepsilon)^t$ e $(1 - \lambda\varepsilon)^{t+1}$ são próximos, de modo que o tamanho do "salto" entre um valor de t e o próximo é pequeno. Como a desigualdade (2.11) é válida para t arbitrário, é possível, para todo $\varepsilon > 0$, escolher um t adequado, a fim de que

$$C \frac{\exp(-\eta/\varepsilon)}{\delta^t} ((1 - \lambda\varepsilon)^t - 1) \geq -1,$$

o que conclui a demonstração. ■

Capítulo 3

Uma versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand

Um dos principais resultados que apresentaremos aqui é o Teorema 3.1, enunciado e provado em [9]. Com ele, é possível cotar superiormente a probabilidade crítica para Slab_n^d . Em particular, provaremos que $p_c(\text{Slab}_n^d) < p_c + \frac{C}{\sqrt{\log n}}$, para alguma constante $C > 0$.

Nas Seções 3.1 e 3.2, provaremos alguns resultados que nos permitirão estabelecer condições nas quais é possível aplicar o Teorema 2.1. Usaremos esses resultados na Seção 3.3 para provar a versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand. Em seguida, na Seção 3.4, é provada uma cota superior para o comprimento de correlação.

3.1 Cota inferior para a probabilidade de ligação a caixas grandes

Nesta seção, provaremos a seguinte proposição, que melhora o resultado de Chayes e Chayes [5], de que $P_{p_c+\varepsilon}[0 \leftrightarrow \infty] \geq \varepsilon$.

Proposição 3.1. *Para todo n grande o suficiente,*

$$P_{p_n + \frac{1}{\sqrt{\log n}}}[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \geq \frac{1}{\sqrt{\log n}}.$$

Lembramos que p_n é o menor $p < p_c$ tal que $\xi_p = n$.

A demonstração se baseia na construção de uma função auxiliar φ_p , definida em subconjuntos finitos de \mathbb{Z}^d . Essa função mede, de certo modo, uma probabilidade ponderada de existir um caminho aberto ligando a origem à fronteira do conjunto.

Demonstração: Seja S um subconjunto limitado de \mathbb{Z}^d , contendo a origem, e p o parâmetro de percolação. Defina a função

$$\varphi_p(S) = \sum_{\substack{x \sim y \\ x \in S, y \notin S}} p P_p[0 \xleftrightarrow{S} x].$$

Usaremos alguns resultados encontrados em [11]. Considere um conjunto $S \subseteq \Lambda_n$, $n \geq 1$ fixo. A última equação da seção 2.1 de [11] estabelece que

$$P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{nk}] \leq \varphi_p(S)^{k-1}, \quad (3.1)$$

para todo $k \geq 1$. O Lema 2.1 do mesmo artigo estabelece que

$$\frac{d}{dp} P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \geq \frac{1}{p(1-p)} \cdot \left[\inf_{0 \in S \subseteq \Lambda_n} \varphi_p(S) \right] \cdot (1 - P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n]). \quad (3.2)$$

Suponha que haja algum subconjunto S de Λ_n tal que $\varphi_p(S) < \frac{1}{e}$. Então, $\varphi_p(S) = e^{-A}$, para algum $A > 1$. Usando a desigualdade (3.1), segue que

$$P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_k] \leq P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_{n\lfloor k/n \rfloor}] \leq \varphi_p(S)^{\lfloor k/n \rfloor - 1} \leq e^{-A\lfloor k/n \rfloor + A}, \quad (3.3)$$

onde na primeira desigualdade foi usado o fato que $k \geq n\lfloor k/n \rfloor$.

Sabemos, da definição do comprimento de correlação, que $P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_k]$ decai exponencialmente, de maneira similar a $\exp(-\xi_p/n)$. A Equação (3.3) implica, então, que $\xi_p < n$. De fato,

$$\begin{aligned} \xi_p &= \lim_k - \frac{k}{\log P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_k]} \\ &\leq \lim_k - \frac{k}{\log(e^{-A\lfloor k/n \rfloor + A})} \\ &= \lim_k \frac{k}{A\lfloor k/n \rfloor + A}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mas, como $\lfloor k/n \rfloor > (k/n) - 1$,

$$\frac{k}{A\lfloor k/n \rfloor + A} < \frac{k}{A(k/n - 1) + A} = \frac{n}{A}. \quad (3.5)$$

Logo,

$$\xi_p \leq \frac{n}{A} < n$$

pois $A > 1$.

Pela definição de p_n , segue-se que $\varphi_{p_n}(S) \geq 1/e$, para todo $S \subseteq \Lambda_n$ contendo 0. Ora, a função $\varphi_p(S)$ é crescente em p , daí $\varphi_p(S) \geq 1/e$, sempre que $p \geq p_n$. Usando essa cota em (3.2), e lembrando que $p(1-p) \leq 1/4$, para todo $p \in [0, 1]$, obtemos:

$$\frac{d}{dp} P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \geq \frac{4}{e} (1 - P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n]), \quad (3.6)$$

para todo $p \geq p_n$.

Tome agora $p_{n'} = p_n + \frac{1}{\sqrt{\log n}}$. Caso $P_{p_{n'}}[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \leq 1 - \frac{\epsilon}{4}$, temos $\frac{4}{e}(1 - P_p[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n]) \geq 1$ para todo p entre p_n e $p_{n'}$. Integrando a Equação (3.6) entre p_n e $p_{n'}$:

$$\begin{aligned}
P_{p_{n'}}[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] &\geq P_{p_{n'}}[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] - P_{p_n}[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \\
&= \int_{p_n}^{p_{n'}} \frac{d}{dp} P_{p_n}[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] dp \\
&\geq \int_{p_n}^{p_{n'}} 1 dp \\
&= p_{n'} - p_n \\
&= \frac{1}{\sqrt{\log n}}.
\end{aligned}$$

Se $P_{p_{n'}}[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] > 1 - \frac{\epsilon}{4}$, basta tomar n suficientemente grande para que a cota seja trivial, isto é, basta tomar n grande o suficiente para que

$$\frac{1}{\sqrt{\log n}} \leq 1 - \frac{\epsilon}{4} < P_{p_{n'}}[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n].$$

■

3.2 Um resultado do tipo limiar abrupto

Nesta seção, provaremos um resultado do tipo limiar abrupto, provando uma cota inferior para a probabilidade de ligação entre uma caixa pequena, de raio n^β , $\beta < 1$, e a fronteira da caixa Λ_n . Para isso, provaremos o seguinte lema:

Lema 3.1. *Seja $0 < \beta < \alpha < 1$, sendo α dado pela Proposição 1.2. Defina $f(p) = P_p[\Lambda_{\lfloor n^\beta \rfloor} \leftrightarrow \partial\Lambda_n]$. Para todo $\delta > 0$, existe uma constante $c = c(\delta, \beta, d)$, tal que, para todo $\delta \leq p \leq 1 - \delta$,*

$$\frac{f'(p)}{f(p)(1-f(p))} \geq c \log n.$$

Demonstração: Tomemos um n suficientemente grande e coloquemos $m = \lfloor n^\beta \rfloor$. Provaremos, primeiramente, a seguinte cota:

$$P_p[e \text{ é um elo pivotal fechado para } \Lambda_m \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \leq \frac{1}{m^{\alpha/4}}. \quad (3.7)$$

Dividiremos a demonstração da Desigualdade (3.7) em dois casos. Denotemos por ρ a maior distância na norma L^∞ entre os vértices de e e $\partial\Lambda_m \cup \partial\Lambda_n$.

No primeiro caso, supomos $\rho \geq m^{1/4}$. Considere uma caixa B de raio $m^{\alpha/4}$ centrada em e . Se e é um elo pivotal fechado para o evento $\Lambda_m \leftrightarrow \partial\Lambda_n$, então existe um aglomerado aberto ligando Λ_m a um vértice de e e outro aglomerado ligando o outro vértice de e a $\partial\Lambda_n$. Pela definição de pivotal, esses aglomerados são distintos, já que e é fechado. Isto é, existem dois aglomerados abertos distintos ligando B a $\partial\Lambda_m \cup \partial\Lambda_n$. Em consequência, ocorre uma versão deslocada do evento $A_2(m^{\alpha/4}, m^{1/4})$, para algum α para o qual vale a Proposição 1.2. Aplicando a Proposição 1.2 obtemos o resultado desejado.

No segundo caso, a distância entre e e $\partial\Lambda_m \cup \partial\Lambda_n$ é menor que $m^{1/4}$. Primeiramente, supomos que e está mais próximo de $\partial\Lambda_m$. Definamos uma translação τ por um vetor de $\Lambda_{m^{1/4}}$ de modo

que $e \in \tau\Lambda_m$. Essa translação será repetida por até $I = \lfloor \frac{1}{2}m^{3/4} \rfloor$ vezes. Para $1 \leq i < I$, definamos

$$e_i = \tau^i e,$$

sendo τ^i a i -ésima iterada de τ , e

$$B_i = \{e_i \text{ é um elo pivotal para } \tau^i\Lambda_m \leftrightarrow \tau^i\partial\Lambda_n\}.$$

Por convenção, $B_0 = \{e \text{ é um elo pivotal para } \Lambda_m \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}$

Segue-se que $e_i \subseteq \Lambda_m$ para todo $1 \leq i < I$. Por simetria translacional, $e_i \subseteq \tau^j\Lambda_m$, sempre que $i < j$. De fato, basta verificar que $e \subseteq \tau^j\Lambda_m$ para todo $j \geq 1$. Mas isso é facilmente verificável, pois pela definição de τ , temos que $e \subseteq \tau\Lambda_m$. Como são feitas no máximo I translações por uma distância de $m^{1/4}$, a caixa Λ_m irá se deslocar por no máximo uma distância de $m/2$. Assim, o elo e sempre estará contido em $\tau^j\Lambda_m$.

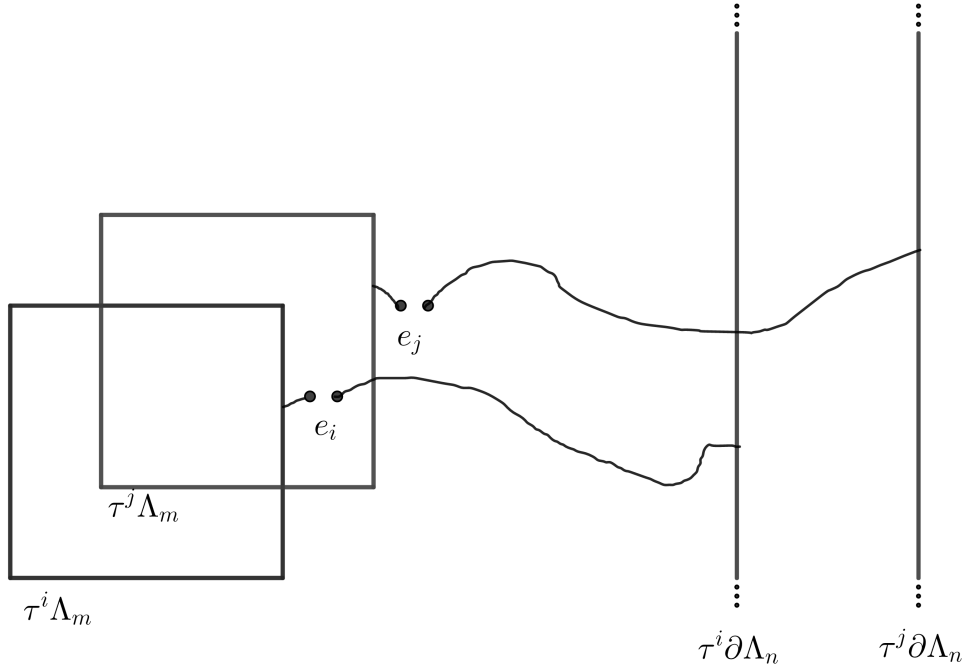


Figura 3.1: Dois elos e_i e e_j , com $i < j$, e as caixas transladadas

Seja agora uma variável aleatória M que conta o número de índices i para os quais B_i ocorre, isto é,

$$M = 1_{B_1} + 1_{B_2} + \cdots + 1_{B_I}.$$

A invariância por translação assumida no modelo implica que $P_p[B_0] = P_p[B_i]$, para todo i . Logo,

$$(I \cdot P_p[B_0])^2 = E_p[M]^2. \quad (3.8)$$

Usando a desigualdade de Jensen e a definição de M ,

$$\begin{aligned}
E_p[M]^2 &\leq E_p[M^2] \\
&= E_p[(1_{B_1} + 1_{B_2} + \cdots + 1_{B_I})^2] \\
&= \sum_i E_p[(1_{B_i})^2] + 2 \sum_{i < j} E_p[1_{B_i} \cdot 1_{B_j}] \\
&= \sum_i E_p[1_{B_i}] + 2 \sum_{i < j} E_p[1_{B_i} \cdot 1_{B_j}] \\
&= E_p[M] + 2 \sum_{i < j} P_p[B_i \cap B_j].
\end{aligned} \tag{3.9}$$

Suponhamos agora que B_i e B_j ocorrem simultaneamente, com $i < j$. Segue da definição de elo pivotal que, sendo e_i pivotal para B_i , um vértice de e_i , que denotaremos por x_i , está ligado a $\partial\tau^i\Lambda_n$ e o outro vértice está ligado a $\tau^i\Lambda_m$. De modo similar, um vértice x_j de e_j está ligado a $\partial\tau^j\Lambda_n$ e o outro vértice está ligado a $\tau^j\Lambda_m$ (veja Figura 3.1). No entanto, se B_j ocorre, e_j está fechado, e como é pivotal para $\tau^j\Lambda_m \leftrightarrow \tau^j\partial\Lambda_n$, temos que $\tau^j\Lambda_m \leftrightarrow \tau^j\partial\Lambda_n$. Como x_i pertence a $\tau^j\Lambda_m$, temos que x_i não pode estar conectado a $\tau^j\partial\Lambda_n$. Daí, os aglomerados abertos de x_i e x_j , restritos à caixa $\Lambda_{n/2}$ devem ser distintos, pois do contrário haveria uma ligação entre $\tau^j\Lambda_m$ e $\tau^j\partial\Lambda_n$. Tomando n grande o suficiente, $2m \leq (n/2)^\alpha$, e x_i e x_j pertencem a Λ_{2m} . Aplicando a Proposição 1.2, temos que

$$P_p[B_i \cap B_j] \leq P_p[A_2(2m, n/2)] \leq P_p[A_2((n/2)^\alpha, n/2)] \leq \frac{1}{(n/2)^\alpha} \leq \frac{1}{2m} \tag{3.10}$$

Para o outro termo da soma em (3.9), usamos a cota trivial $M \leq I$. Usando a cota (3.10) em (3.8), e notando que o somatório em (3.9) tem no máximo I^2 termos,

$$P_p[B_0]^2 \leq \frac{I}{I^2} + 2 \times \frac{I^2}{2mI^2} = \frac{1}{I} + \frac{1}{m}.$$

Ora, $I = \lfloor \frac{1}{2}m^{3/4} \rfloor \geq 1/(2\sqrt{m})$ se m é grande o suficiente. Daí, para m grande,

$$P_p[B_0]^2 \leq \frac{1}{2\sqrt{m}} + \frac{1}{m} \leq \frac{1}{\sqrt{m}} \implies P_p[B_0] \leq \frac{1}{\sqrt[4]{m}}.$$

Resta provar o caso onde e se encontra mais próximo de $\partial\Lambda_n$. De maneira análoga ao caso anterior, defina uma translação τ por um vetor de $\Lambda_{m^{1/4}}$, de modo que e não pertença a $\tau\Lambda_n$. Definimos e_i e B_i da mesma maneira que anteriormente. Agora, para todo $i < j$, e_i não está dentro de $\tau^j\Lambda_n$. Um argumento completamente similar ao caso anterior mostra que, também nesse caso, vale $P_p[B_0] \leq m^{-1/4}$.

A prova do lema está quase completa. Usaremos o lema abaixo, relacionado à sensibilidade ao ruído de funções booleanas cuja prova se encontra, por exemplo, em [3] e [21].

Lema 3.2. *Para todo $\delta > 0$, existe $c' = c'(\delta) > 0$, constante, tal que, para qualquer evento crescente A dependente de uma coleção finita de elos E , e qualquer $p \in [\delta, 1 - \delta]$,*

$$\frac{d}{dp}P_p[A] \geq c' \log \left(\frac{1}{\max\{P_p[e \text{ é um elo pivotal para } A : e \in E]\}} \right) \cdot P_p[A](1 - P_p[A]).$$

Tomemos A como o evento $\{\Lambda_m \leftrightarrow \partial\Lambda_n\}$. O evento $\{e \text{ é um elo pivotal para } A\}$ independe de e ser aberto ou fechado. Daí,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp}P_p[A] &\geq c' \log \left(\frac{1-p}{\max\{(1-p)(P_p[e \text{ é um elo pivotal para } A : e \in E])\}} \right) P_p[A](1-P_p[A]) \\ &= c' \log \left(\frac{1-p}{\max\{P_p[e \text{ é um elo pivotal fechado para } A : e \in E]\}} \right) P_p[A](1-P_p[A]) \\ &\geq c' \log((1-p)m^{\alpha/4})P_p[A](1-P_p[A]) \\ &= c'(\log(1-p) + \frac{\beta\alpha}{4} \log n)P_p[A](1-P_p[A]). \end{aligned}$$

A função $p \mapsto \log(1-p)$ é contínua no compacto $[\delta, 1-\delta]$, portanto podemos limitar o termo $c'(\log(1-p) + \frac{\beta\alpha}{4} \log n)$ por $c \log n$, sendo a constante c escolhida de modo adequado. Já que $p \neq 0$, $p \neq 1$ e A depende de um número finito de elos, $P_p[A] \neq 0$ e $1 - P_p[A] \neq 0$. A prova do lema segue imediatamente dividindo os dois lados da inequação por $P_p[A](1 - P_p[A])$. ■

Usaremos o Lema 3.1 para provarmos a seguinte proposição.

Proposição 3.2. *Para todo $0 < \beta < 1$ e n grande o suficiente, existe uma constante C , dependente de β e da dimensão d do reticulado, tal que*

$$P_{p_n + \frac{c}{\sqrt{\log n}}}[\Lambda_{n^\beta} \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \geq 1 - e^{-\sqrt{\log n}}.$$

Demonstração: Podemos supor sem perda de generalidade que $\beta < \alpha$, sendo α dado pela Proposição 1.2. De fato, caso $\alpha < \beta$, basta tomar $\beta' < \alpha$ e observar que $P_p[\Lambda_{n^\beta} \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \geq P_p[\Lambda_{n^{\beta'}} \leftrightarrow \partial\Lambda_n]$. Continuaremos usando a notação $f(p) = P_p[\Lambda_{n^\beta} \leftrightarrow \partial\Lambda_n]$. Usando o Lema 3.1, temos que, para n suficientemente grande,

$$\frac{f'(p)}{f(p)(1-f(p))} \geq c \log n. \quad (3.11)$$

Coloquemos $p'_n = p_n + \frac{1}{\sqrt{\log n}}$. Usando a Proposição 3.1,

$$P_{p'_n}[\Lambda_{n^\beta} \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \geq P_{p'_n}[0 \leftrightarrow \partial\Lambda_n] \geq \frac{1}{\sqrt{\log n}}. \quad (3.12)$$

Definamos p''_n de tal modo que $f(p''_n) = \frac{1}{2}$. Ora, f é uma função contínua, já que depende de um número finito de elos. Como f é não decrescente, $f(0) = 0$ e $f(1) = 1$, pelo Teorema do Valor Intermediário p''_n está bem definido. Além disso, $f(p'_n) \leq \frac{1}{2}$, se tomamos n suficientemente grande, e $p'_n \leq p''_n$. No intervalo $[p'_n, p''_n]$, temos que $f(p) \leq \frac{1}{2}$, daí $\frac{1}{1-f(p)} \leq 2$. Usando esse fato em (3.11),

$$[\log f]' = \frac{f'(p)}{f(p)} \geq c \log n. \quad (3.13)$$

Notemos que ao passar de (3.11) para (3.13), a constante c foi dividida ao meio, mas mantivemos a mesma letra, para simplificação da notação.

Integrando (3.13),

$$\begin{aligned} \int_{p'_n}^{p''_n} [\log f]' dp &\geq \int_{p'_n}^{p''_n} c \log n dp \\ \implies \log \left(\frac{f(p''_n)}{f(p'_n)} \right) &\geq c(p''_n - p'_n) \log n. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Por (3.12), $f(p'_n) \geq \frac{1}{\sqrt{\log n}}$, e $f(p''_n) = \frac{1}{2}$ por definição. Logo, $\frac{f(p''_n)}{f(p'_n)} \leq \frac{\sqrt{\log n}}{2}$ e

$$\log \left(\frac{f(p''_n)}{f(p'_n)} \right) \leq \log \left(\frac{\sqrt{\log n}}{2} \right) = \log \frac{1}{2} + \frac{\log \log n}{2}.$$

Usando essa cota em (3.14), obtemos

$$p''_n \leq p'_n + \frac{\hat{C} \log \log n}{\log n} \quad (3.15)$$

para alguma constante \hat{C} .

No intervalo $[p''_n, p''_n + C/\sqrt{\log n}]$ adotamos uma estratégia similar. Nesse intervalo, $f(p) \geq \frac{1}{2}$, e, usando (3.11) obtemos:

$$-[\log(1-f)]' = \frac{f'(p)}{1-f(p)} \geq c \log n. \quad (3.16)$$

Novamente, foi preciso dividir a constante por 2 no processo. Integrando (3.16):

$$\begin{aligned} - \int_{p''_n}^{p''_n + C/\sqrt{\log n}} [\log(1-f)]' dp &\geq c \log n \int_{p''_n}^{p''_n + C/\sqrt{\log n}} dp \\ \implies \log(1-f(p''_n)) - \log \left(1 - f \left(p''_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}} \right) \right) &\geq \frac{\tilde{c} \log n}{\sqrt{\log n}} \\ \implies \log \frac{1}{2} - \log \left(1 - f \left(p''_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}} \right) \right) &\geq \tilde{c} \sqrt{\log n} \\ \implies - \log \left(1 - f \left(p''_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}} \right) \right) &\geq \tilde{c} \sqrt{\log n} - \log \frac{1}{2} \\ &\geq \tilde{c} \sqrt{\log n}, \end{aligned}$$

onde usamos o fato de que $f(p''_n) = \frac{1}{2}$ por definição. Se tomarmos C suficientemente grande, podemos tomar $\tilde{c} = 1$. Daí, segue imediatamente que

$$f \left(p''_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}} \right) \geq 1 - \exp(-\sqrt{\log n}). \quad (3.17)$$

Resta substituir p''_n por p_n em (3.17) para obtermos a desigualdade desejada. Ora, sabemos que $\log n = O(\sqrt{n})$. Em particular, $\log \log n = O(\sqrt{\log n})$. Assim, $\frac{\log \log n}{\log n}$ cresce de maneira mais lenta que $\frac{\sqrt{\log n}}{\log n} = \frac{1}{\sqrt{\log n}}$. Então, usando a cota (3.15) vemos que, aumentando a constante C , se necessário,

$$p_n'' + \frac{C}{\sqrt{\log n}} \leq p_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}},$$

para n grande o suficiente. Como f é crescente,

$$f\left(p_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}}\right) \geq 1 - \exp(-\sqrt{\log n}),$$

como queríamos demonstrar. ■

3.3 Versão quantitativa do Teorema de Grimmett-Marstrand

Estamos prontos para enunciar e provar um dos principais resultados deste trabalho, uma versão quantitativa para o teorema apresentado por Grimmett e Marstrand em [14].

Teorema 3.1. *Fixe $d \geq 3$. Existe uma constante $C = C(d) > 0$ tal que, para todo $n \geq 6$,*

$$P_{p_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}}}[0 \xrightarrow{\text{Slab}_n^d} \infty] \geq \frac{1}{2\sqrt{\log n}}.$$

Em particular,

$$p_c(\text{Slab}_n^d) < p_c + \frac{C}{\sqrt{\log n}}.$$

Demonstração: É fácil ver que a segunda afirmação do Teorema 3.1 segue da primeira. De fato, pela definição de p_n , temos que $p_n < p_c$. Então, toda $(p_c + C/\sqrt{\log n})$ -configuração em Slab_n^d tem uma probabilidade de percolar estritamente positiva, ao menos $\frac{1}{2\sqrt{\log n}}$. Daí, se segue que $p_c(\text{Slab}_n^d) < p_c + \frac{C}{\sqrt{\log n}}$.

Provaremos agora a primeira afirmação. Para isso, usaremos o Teorema 2.1, com

$$\begin{aligned} p &= p_n + \frac{\lambda}{\sqrt{\log n}} \\ \varepsilon &= \frac{1}{\sqrt{\log n}} \\ (k, K, n, N) &= (n^{\alpha^3}, n^{\alpha^2}, n^\alpha, n), \end{aligned}$$

sendo α a constante dada pela Proposição 1.2 e λ é alguma constante grande o suficiente.

O valor de ε (isto é, o *sprinkling*) escolhido surge da necessidade, pela condição **(b)** do Teorema 2.1, de se ter $-\log[1 - f(p)] \geq 1/\varepsilon$, sendo f a função definida no Lema 3.1. Usando as demonstrações da Proposição 3.1, bem como os Lemas 3.1 e 3.2 permitem provar, do mesmo modo que na prova da Proposição 3.2, a cota $-\log[1 - f(p)] \geq \varepsilon \log n$. Combinando esses fatos, vemos a necessidade de se tomar $\varepsilon = 1/\sqrt{\log n}$.

Verifiquemos que as três condições do Teorema 2.1 são satisfeitas. A condição **(a)** segue imediatamente da Proposição 3.1, se n é grande o suficiente. Aplicando a Proposição 3.2 com $\beta = \alpha^3$, obtemos a condição **(b)**. A Proposição 1.2 garante que, se n é suficientemente grande,

$$P_p[A_2(n^\alpha, n)] \leq \frac{1}{n^\alpha}.$$

Ora, para todo n suficientemente grande,

$$\begin{aligned}
& \sqrt{\log n} & \leq & \alpha \log n \\
\implies \exp(-\alpha \log n) & \leq & \exp(-\sqrt{\log n}) \\
\implies \frac{1}{n^\alpha} & \leq & \exp(-\sqrt{\log n}).
\end{aligned}$$

O mesmo raciocínio, aplicado a n^{α^3} e n^{α^2} mostra que $P_p[A_2(n^{\alpha^3}, n^{\alpha^2})] \leq \exp(-\sqrt{\log n})$, e, portanto, a condição **(c)** é satisfeita.

Assim, o Teorema 2.1 garante que

$$P_{p_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}}} [0 \xleftrightarrow{\text{Slab}_{3n}^d} \infty] \geq \frac{1}{2\sqrt{\log n}}. \quad (3.18)$$

Para obter o Teorema 3.1, é necessário substituir, em (3.18), Slab_{3n}^d por Slab_n^d . Tome $m := \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$ (aqui usamos o fato de que, como $n \geq 6$, $m \geq 2$). Então, $\text{Slab}_{3m}^d \subseteq \text{Slab}_n^d$ e, como p_n cresce com n , temos que

$$p_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}} \geq p_m + \frac{C}{\sqrt{\log m}},$$

ajustando a constante C se necessário. Daí, aplicando (3.18),

$$\begin{aligned}
P_{p_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}}} [0 \xleftrightarrow{\text{Slab}_n^d} \infty] & \geq P_{p_m + \frac{C}{\sqrt{\log m}}} [0 \xleftrightarrow{\text{Slab}_{2m}^d} \infty] \\
& \geq \frac{1}{2\sqrt{\log m}} \\
& \geq \frac{1}{2\sqrt{\log n}},
\end{aligned}$$

e o Teorema 3.1 está provado. ■

3.4 Uma cota superior para o comprimento de correlação

Usando o Teorema 3.1, é possível provar uma cota superior para o comprimento de correlação.

Teorema 3.2. *Seja $d \geq 3$. Existe $C = C(d) > 0$ tal, que, para todo $p \in [0, 1]$, $p \neq p_c$,*

$$\xi_p \leq \exp(C(p - p_c)^{-2}).$$

Demonstração: Suponha, primeiramente, $p < p_c$. Defina $n := \lfloor \xi_p \rfloor$. Então, $p_n \leq p$ e, aplicando o Teorema 3.1, obtemos

$$p_c \leq p_n + \frac{C}{\sqrt{\log n}} \leq p + \frac{C}{\sqrt{\log \xi_p}},$$

o que, reorganizando os termos, é equivalente a $\xi_p \leq \exp(C(p - p_c)^{-2})$.

Para o caso $p > p_c$, será conveniente trabalhar com a "outra laje", definida como

$$\text{OSlab}_n = \{-n, \dots, n\} \times \mathbb{Z}^{d-1}.$$

Defina a função

$$\theta(p, n) := P_p[(-n, 0, \dots, 0) \xrightarrow{\text{OSlab}_n} \infty].$$

Estimemos $\theta(p, n)$. Para isso, notemos que existe uma constante $c > 0$ tal que, para todo n ,

$$\sum_{x \in \partial \Lambda_n} P_{p_c}[0 \xrightarrow{\Lambda_n} x] \geq c. \quad (3.19)$$

Isso decorre do fato que, no ponto crítico, a probabilidade da origem estar ligada a Λ_n decai polinomialmente com n . Uma prova de (3.19) foi dada na demonstração da Proposição 3.1. De fato, provamos que, para todo S finito e contendo a origem, $\varphi_{p_n}(S) \geq 1/e$. Tomando $S = \Lambda_n$, e usando que $\varphi_p(S)$ cresce com p , temos que $\varphi_{p_c}(\Lambda_n) \geq 1/e$, e (3.19) segue.

Por causa da simetria translacional, o mesmo pode ser dito para a face de cima da caixa, isto é,

$$\sum_{x \in \{n\} \times \{-n, \dots, n\}^{d-1}} P_{p_c}[0 \xrightarrow{\Lambda_n} x] \geq c. \quad (3.20)$$

Notemos que, ao passar de (3.19) para (3.20), a constante c foi modificada mas, por simplicidade de notação, manteremos o mesmo símbolo, assim como o faremos no resto da demonstração.

Ora, (3.20) implica que, para pelo menos algum $x \in \{n\} \times \{-n, \dots, n\}^{d-1}$, $P_{p_c}[0 \xrightarrow{\Lambda_n} x] \geq cn^{1-d}$. Pela simetria do modelo, existe algum $y \in \{0\} \times \{-n, \dots, n\}^{d-1}$ tal que

$$P_{p_c}[(-n, 0, \dots, 0) \xrightarrow{\text{OSlab}_n} y] \geq cn^{1-d},$$

já que OSlab_n é um conjunto "maior" que a versão transladada de Λ_n . De maneira mais rigorosa, existe uma isometria I tal que $(-n, \dots, 0) + \Lambda_n \subseteq I(\text{OSlab}_n)$. Está claro que a desigualdade acima continua válida se substituirmos p_c por qualquer $p > p_c$.

Seja $p > p_c$. Pelo Teorema 3.1, existe $n \leq \exp(C(p - p_c)^{-2})$ tal que $P_p[0 \xrightarrow{\text{Slab}_n} \infty] \geq \frac{1}{2\sqrt{\log n}}$. Então, já que OSlab_n é "maior" que Slab_n , $P_p[0 \xrightarrow{\text{OSlab}_n} \infty] \geq \frac{1}{2\sqrt{\log n}}$. Por invariância de translação,

$$P_p[y \xrightarrow{\text{OSlab}_n} \infty] \geq \frac{1}{2\sqrt{\log n}}.$$

Notemos que só é possível aplicar invariância por translação nesse caso porque a primeira coordenada de y é 0, de modo que y se encontra a mesma distância das duas fronteiras de OSlab_n .

Daí,

$$\begin{aligned} \theta(p, n) &\geq P_p[(-n, 0, \dots, 0) \xrightarrow{\text{OSlab}_n} y, y \xrightarrow{\text{OSlab}_n} \infty] \\ &\geq P_p[(-n, 0, \dots, 0) \xrightarrow{\text{OSlab}_n} y] P_p[y \xrightarrow{\text{OSlab}_n} \infty] \\ &\geq cn^{1-d} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\log n}}, \end{aligned} \quad (3.21)$$

onde na segunda desigualdade usamos FKG. Pelo Teorema 5 de [7], $\xi_p \leq \frac{n}{\theta(p, n)}$. Daí, como

$$n \leq \exp(C(p - p_c)^{-2}),$$

$$\begin{aligned} \xi_p &\leq cn^d \sqrt{\log n} \\ &\leq c \exp(Cd(p - p_c)^{-2})(p - p_c)^{-1} \\ &\leq \exp(C(p - p_c)^{-2}), \end{aligned}$$

tomando C grande o suficiente. De fato, tomando $y = (p - p_c)^{-1}$, dado que $p > p_c$, temos que $y \in [1, +\infty)$ e $y \leq y \exp(Cy^2)$ nesse intervalo. Portanto, $y \exp(Cy^2) \leq \exp(2Cy^2)$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] M. Aizenman. On the Number of Incipient Spanning Clusters. *Nuclear Physics B*, 485(3):551–582, February 1997.
- [2] M. Aizenman and D.J. Barsky. Sharpness of the Phase Transition in Percolation Models. *Commun. Math. Phys.*, 108(3):489–526, October 1987.
- [3] J. Bourgain, J. Kahn, G. Kalai, Y. Katznelson, and N. Linial. The Influence of Variables in Product Spaces. *Israel J. Math.*, 77(1-2):55–64, February 1992.
- [4] R. Cerf. A Lower Bound on the Two-Arms Exponent for Critical Percolation on the Lattice. *The Annals of Probability*, 43(5):2458–2480, September 2015.
- [5] J.T. Chayes and L. Chayes. Inequality for the Infinite-Cluster Density in Bernoulli Percolation. *Phys. Rev. Lett.*, 56(16):1619–1622, April 1986.
- [6] J.T. Chayes, L. Chayes, G.R. Grimmett, H. Kesten, and R.H. Schonmann. The Correlation Length for the High-Density Phase of Bernoulli Percolation. *The Annals of Probability*, 17(4):1277–1302, October 1989.
- [7] J.T. Chayes, L. Chayes, and C.M. Newman. Bernoulli Percolation above Threshold: an Invasion Percolation Analysis. *Ann. Probab.*, 15(4):1272,1287, October 1987.
- [8] M. Damron, C.M. Newman, and V. Sidoravicius. Absence of Site Percolation at Criticality in $\mathbb{Z}^2 \times \{0, 1\}$. *Random Structures Algorithms*, 47(2):328–340, September 2015.
- [9] H. Duminil-Copin, G. Kozma, and V. Tassion. Upper bounds on the percolation correlation length, 2020.
- [10] H. Duminil-Copin, V. Sidoravicius, and V. Tassion. Absence of Infinite Cluster for Critical Bernoulli Percolation on Slabs. *Commun. Pure Appl. Math.*, 69(7):1397–1411, April 2016.
- [11] H. Duminil-Copin and V. Tassion. A New Proof of the Sharpness of the Phase Transition for Bernoulli Bond Percolation on \mathbb{Z}^d . *L'Enseignement Mathématique*, 62(1/2):199–206, 2016.
- [12] R. Fitzner and R. van der Hofstad. Mean-field Behavior for Nearest-Neighbor Percolation in $d > 10$. *Electronic Journal of Probability*, 22(43):1–65, 2017.
- [13] G.R. Grimmett. *Percolation*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 2 edition, 1999.

- [14] G.R. Grimmett and J. M. Marstrand. The Supercritical Phase of Percolation is Well Behaved. *Proceedings: Mathematical and Physical Sciences*, 430(1879):439–457, August 1990.
- [15] T. Hara. Mean-field Critical Behaviour for Correlation Length for Percolation in High Dimensions. *Probability Theory and Related Fields*, 86(3):337–385, September 1990.
- [16] T. Hara and G. Slade. Mean-field Critical Behaviour for Percolation in High Dimensions. *Communications in Mathematical Physics*, 128(2):333–391, March 1990.
- [17] T. E. Harris. A Lower Bound for the Critical Probability in a certain Percolation Process. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 56(1):13–20, January 1960.
- [18] H. Kesten. The Critical Probability of Bond Percolation on the Square Lattice equals $1/2$. *Commun. Math. Phys.*, 74(1):41–69, February 1980.
- [19] A. LeClair and J. Squires. Conformal Bootstrap for Percolation and Polymers. *J. Stat. Mech. Theory Exp.*, 2018(12):1–19, December 2018.
- [20] N. Linial, J. Kahn, and G. Kalai. The influence of variables on boolean functions. In *2013 IEEE 54th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 68–80, Los Alamitos, CA, USA, oct 1988. IEEE Computer Society.
- [21] M. Talagrand. On Russo’s Approximate Zero-One Law. *Ann. Propab.*, 22(3):1576–1587, July 1994.