

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FELIPE FORTES BRAZ

ASSOCIAÇÃO ENTRE DISTRIBUIÇÃO DE
PROBABILIDADE DE FASE ÓPTICA E DETECÇÃO DE
FASE RELATIVA EM METROLOGIA QUÂNTICA
FOTÔNICA

BELO HORIZONTE
2022

Felipe Fortes Braz

**Associação entre Distribuição de Probabilidade de
Fase Óptica e Detecção de Fase Relativa em
Metrologia Quântica Fotônica**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ciências.

Orientador: Pablo Lima Saldanha

Belo Horizonte

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B827a Braz, Felipe Fortes.

Associação entre distribuição de probabilidade de fase óptica e detecção de fase relativa em metrologia quântica fotônica / Felipe Fortes Braz. – 2022. 59f., enc. : il.

Orientador: Pablo Lima Saldanha.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

Bibliografia: f. 55-59.

1. Metrologia. 2. Interferometria. 3. Óptica quântica. I. Título. II. Saldanha, Pablo Lima. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 535.14 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ATA DE DEFESA DE TESE

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 405ª TESE DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR FELIPE FORTES BRAZ orientado pelo professor Pablo Lima Saldanha, para obtenção do grau de **DOUTOR EM CIÊNCIAS, área de concentração Física**. Às 8 horas e 30 minutos de oito de novembro de dois mil e vinte e dois reuniu-se, por videoconferência, a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Pablo Lima Saldanha** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Carlos Henrique Monken** (Departamento de Física/UFMG), **Raphael Campos Drumond** (Departamento de Matemática/UFMG), **Gabriel Horacio Aguilar** (Instituto de Física/UFRJ) e **Leonardo Antônio Mendes de Souza** (Departamento de Física/UFV) para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o Mestre **FELIPE FORTES BRAZ** à arguição de seu trabalho de Tese de Doutorado, que recebeu o título de "**ASSOCIAÇÃO ENTRE DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE FASE ÓPTICA E DETECÇÃO DE FASE RELATIVA EM METROLOGIA QUÂNTICA FOTÔNICA**". O candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição, e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 08 de novembro de 2022.

Prof. Pablo Lima Saldanha
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Gabriel Horacio Aguilar
Instituto de Física/UFRJ

Prof. Carlos Henrique Monken
Departamento de Física/UFMG

Prof. Leonardo Antônio Mendes de Souza
Departamento de Física/UFV

Prof. Raphael Campos Drumond
Departamento de Matemática/UFMG

Candidato: Felipe Fortes Braz



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Antônio Mendes de Souza, Usuário Externo**, em 08/11/2022, às 14:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Henrique Monken, Chefe de departamento**, em 08/11/2022, às 15:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Raphael Campos Drumond, Professor do Magistério Superior**, em 08/11/2022, às 16:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pablo Lima Saldanha, Servidor(a)**, em 08/11/2022, às 17:09, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felipe Fortes Braz, Usuário Externo**, em 08/11/2022, às 18:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1885776** e o código CRC **85385A95**.

À Thays Pierangeli, por cuidar e educar indissociavelmente.

Agradecimentos

Agradeço às agências de fomento: a CAPES pelo fornecimento da bolsa de estudo entre o período de agosto de 2016 até fevereiro de 2018 e o CNPQ por manter a bolsa vigente entre o período de março de 2018 até julho de 2021 mesmo durante a pandemia. Gostaria de agradecer a todos que participaram de forma direta ou indireta nos últimos 6 anos para que eu conseguisse chegar ao fim do doutorado. Peço licença para agradecer nominalmente algumas pessoas que foram fundamentais em minha vida neste período. Agradeço à minha esposa Thays Pierangeli, que esteve ao meu lado o tempo todo, incentivando-me a seguir em frente, apoiando-me incondicionalmente e torcendo para que o dia da defesa chegasse, bem como sua família em Lavras - MG pela hospitalidade e acolhimento nos momentos críticos da pandemia. Agradeço também à minha família que apoiou mesmo distante 600 km em Santo André - SP, começando por minha mãe com todo seu amor e carinho, seguindo por minha irmã e seu marido Alexandre, que agora são pais do Bernardo de Oliveira Braz, nascido enquanto esta tese estava sendo escrita, meu irmão, que também tem deficiência visual, e seus cães-guia, que são um exemplo de amizade. Por fim, agradeço ao meu pai que, dentre todos os esforços, aprendeu a notação de mecânica quântica para fazer gravações dos livros de física para que eu estudasse.

Agradeço ainda ao colegiado do Programa de Pós-Graduação em Física da UFMG por acatar os meus pedidos de extensões de prazo e ter a sensibilidade de compreender e indicar qual o melhor caminho para concluir esta tese. Agradeço ao NAI - Núcleo de Acessibilidade e Inclusão da UFMG, que ofereceu alternativas para contornar os desafios que qualquer estudante com deficiência visual possui ao ingressar em uma universidade. Ao serviço de escuta da UFMG com a Etel Rossi e suas orientações e à Pro-Reitoria de Assuntos Estudantis por acompanhar e viabilizar recursos humanos e financeiros para manter o auxílio aos meus monitores durante todo o período do doutorado. Aos monitores, um agradecimento carinhoso pelo auxílio em todas as atividades que realizei durante o doutorado: Diego Braga Ferreira (set 2016 - jul 2020), Tamiris Calixto (ago 2020 - abr 2022), Thiago Carvalho (ago 2019 - dez 2019), Ludmila Botelho (fev 2020 - dez 2020), João Vitor Frossart (fev 2021 - jul 2021) e Raphaela de Oliveira (ago 2021 até a presente data).

Por fim, agradeço em destaque algumas pessoas que tiveram profunda influência em minha trajetória na Física. Aos professores da Pós-Graduação em Física da UFMG: Pablo Saldanha, Reinaldo Oliveira Viana, José Rachid Mohallem, Carlos Monken, Mário Mazzoni, Paulo Sérgio e Rodrigo Gribel. Aos professores particulares: Rómulo Abreu de Matos, Amanda Pavani, Amanda Ralston e Paloma Rodrigues. Finalmente, aos amigos, colegas e voluntários (e suas famílias): Mateus Porreca e Lídia, Victor e Amanda, Bruno,

Rafael, Renan, Débora, Evelyn, Vinícius, Igor, Elver e Talita. Também agradeço a Mônica e Thiago, Tamiris e Jôse, Carol Reis, Marcelo Nery, Lucas, Leonardo, Thiago, André, Ana Clara, Natalia, Paula e Renan, Mário, Sheila, Geovani, Tales, Everton, Marcelo Victor, André Brito, Alice, Ana Paula, João Guilherme, Wagner, Robert e a todos que foram gentis ao me auxiliar nos corredores do ICEX.

Epígrafe

Estude a física do seu problema de pesquisa.

(Professores da Física, UFMG)

Resumo

A medição de uma diferença de fase entre dois modos ópticos de um interferômetro tem várias aplicações importantes em metrologia. Essa detecção pode ser útil em diversos contextos, como por exemplo na detecção de ondas gravitacionais. A natureza quântica da luz impõe um limite para se medir a diferença de fase com precisão, sendo esse limite conhecido por limite de Heisenberg (HL). Por outro lado, a metrologia quântica fotônica estuda alternativas para alcançar o HL por meio de estados quânticos emaranhados ou comprimidos. Segundo a teoria da estimativa de parâmetros, a incerteza mínima na fase θ estimada em uma estratégia de medição considerando luz clássica escala com $1/\sqrt{\bar{N}}$, sendo \bar{N} o número médio de fótons. Essa dependência é conhecida por limite quântico padrão. No entanto, ao considerar fontes de luz quânticas, nota-se uma melhoria significativa na estimativa do parâmetro de fase, pois sua incerteza mínima pode escalar com $1/\bar{N}$, conhecido por HL.

Nesta tese, partindo da distribuição de probabilidade de fase relativa $P(\phi)$ introduzida por Luis e Sánchez-Soto em 1996, obtivemos esta distribuição para vários estados quânticos da luz úteis em metrologia quântica fotônica. Mostramos que, dentro da precisão numérica de nossos cálculos, a informação de Fisher obtida via distribuição de fase relativa é igual à informação quântica de Fisher para os estados considerados, tal que as diferenças médias entre essas quantidades foram da ordem de 0,1%. Nossos resultados indicam que a distribuição de fase relativa pode ser usada para prever a incerteza mínima possível no processo de detecção de fase em metrologia quântica, uma vez que essa incerteza depende da informação quântica de Fisher, pelo menos para estados puros.

Palavras-chave: Metrologia Quântica, Interferometria, Fases em Óptica Quântica.

Abstract

The measurement of a phase difference between two optical modes in an interferometer has several important applications in metrology. This measurement can be useful in several contexts, such as in the detection of gravitational waves. The quantum nature of light imposes a limit on how accurately a phase difference can be measured, this limit being known as the Heisenberg limit (HL). On the other hand, photonic quantum metrology studies alternatives to reach the HL through entangled or squeezed quantum states. According to the theory of parameter estimation, the minimum uncertainty possible in the estimation of a phase θ considering classical light scales with $1/\sqrt{\bar{N}}$, where \bar{N} is the average number of photons. This dependence is known as the standard quantum limit. However, when considering quantum light sources, there is a significant improvement in the estimation of the phase parameter, as its minimum uncertainty can scale with $1/\bar{N}$, known as HL.

In this thesis, starting from the relative phase probability distribution $P(\phi)$ introduced by Luis and Sánchez-Soto in 1996, we obtained this distribution for several quantum states of light useful in photonic quantum metrology. We show that, within the numerical precision of our calculations, the Fisher information obtained via the relative phase distribution is equal to the quantum Fisher information for the considered states, such that the average differences between these quantities were on the order of 0,1%. Our results indicate that the relative phase distribution can be used to predict the minimum possible uncertainty in the phase detection process in quantum metrology, since this uncertainty depends on the quantum Fisher information, at least for pure states.

Keywords: Quantum Metrology, Interferometry, Phases in Quantum Optics.

Lista de ilustrações

- Figura 1 – (a) Esquema genérico para a estimativa de uma fase θ introduzida em um dos modos ópticos. Um estado inicial de dois modos $|\Psi\rangle$ é preparado. O estado evolui para $|\Psi_\theta\rangle$ devido à introdução da fase. Medidas são realizadas no estado final para estimar θ . (b) Uma possibilidade de implementação do protocolo. Luz em um estado separável conhecido nos modos a' e b' incide nas entradas do divisor de feixes BS_1 . Em seguida, uma fase θ_a é adicionada ao modo a , preparando o estado $|\Psi\rangle$ nos modos a e b . Após a evolução do sistema, uma fase θ_b é introduzida no modo b antes dos caminhos se recombinarem no divisor de feixes BS_2 . Os detectores D_1 e D_2 medem a intensidade (número de fótons) nas saídas do interferômetro e a fase θ pode ser estimada a partir desses resultados. 27
- Figura 2 – Distribuições de probabilidade de fase para estados coerentes dadas pela Eq. (4.16) com $\theta_c = 0$ e com diferentes números médios de fótons: $|\alpha|^2 = 1$ em vermelho, $|\alpha|^2 = 2$ em azul e $|\alpha|^2 = 10$ em verde. 36
- Figura 3 – Análise do caso de um estado de Fock em uma das entradas do interferômetro da Fig. 1b. (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $N = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $N = 10$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua), que neste caso é $F_Q = N$, e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), que foi computado numericamente, em função de N 42
- Figura 4 – Análise do caso de estados NOON no interferômetro da Fig. 1a. (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $N = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $N = 10$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua), que neste caso é $F_Q = N^2$, e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), que foi computado numericamente, em função de N 45
- Figura 5 – Análise do caso estados de fase nas entradas do interferômetro da Fig. 1a. (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $N = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $N = 10$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua), que neste caso é $F_Q = (N^2 + 2N)/3$, e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), que foi computado numericamente, em função de N 47

- Figura 6 – Análise do caso de um estado de Fock gêmeos nas entradas do interferômetro da Fig. 1b. (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $N = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $N = 10$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua) e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), ambos computados numericamente, em função de N . A linha vermelha tracejada indica a função $(N^2 + 2N)/2$ 48
- Figura 7 – Análise do caso de um estado de Fock correlacionado nas entradas do interferômetro da Fig. 1b. (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $N = 11$, (b) distribuição de fase relativa com $N = 11$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua) e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), ambos computados numericamente, em função de N 49
- Figura 8 – Análise de um estado comprimido e um estado coerente nas entradas do interferômetro da Fig. 1b, na configuração ótima com $\sinh^2(r) = |\alpha|^2 = \bar{N}/2$, com o estado nos modos a e b projetado em um número total de fótons \bar{N} . O estado resultante é dado pela Eq. (5.26) com os coeficientes da Eq. (5.27). (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $\bar{N} = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $\bar{N} = 10$, e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua) e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), ambos computados numericamente, em função de $\bar{N} = 10$. A linha vermelha tracejada mostra a função \bar{N}^2 51
- Figura 9 – Análise de um estado comprimido e um estado coerente nas entradas do interferômetro da Fig. 1b, em uma configuração com $\sinh^2(r) = \sqrt{\bar{N}}/2$, com o estado nos modos a e b projetado em um número total de fótons \bar{N} . O estado resultante é dado pela Eq. (5.26) com os coeficientes da Eq. (5.27). (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $\bar{N} = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $\bar{N} = 10$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua) e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), ambos computados numericamente, em função de \bar{N} . A linha vermelha tracejada mostra a função $1.45\bar{N}^{3/2}$ 52

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
2	QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	18
3	DETECÇÃO DE FASE ÓPTICA EM METROLOGIA QUÂNTICA FOTÔNICA	26
4	DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE FASE PARA CAM- POS ÓPTICOS	33
4.1	Distribuição de Probabilidade de Fase em um Modo do Campo Óptico Quantizado	33
4.2	Distribuição de Probabilidade de Fase Relativa Entre Dois Modos de Campos Ópticos Quantizados	36
5	DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE DE FASE RELATIVA PARA ESTADOS ÚTEIS EM METROLOGIA QUÂNTICA	39
5.1	Estado de Fock em uma Entrada do Interferômetro	42
5.2	Estado NOON	43
5.3	Estado de Fase	46
5.4	Estado de Fock Gêmeos	47
5.5	Estado de Fock Correlacionado	48
5.6	Estado Coerente-Comprimido	49
5.7	Discussão	52
6	CONCLUSÃO	54
	REFERÊNCIAS	56

1 Introdução

A óptica física tem por objetivo descrever fenômenos da natureza da radiação eletromagnética, sendo um dos exemplos desses fenômenos a interferência da luz. O cenário físico que vamos tratar nesta tese é a passagem de uma onda eletromagnética através de um interferômetro onde se aplica um deslocamento de fase em um dos caminhos ópticos em seu interior. Além disso, imediatamente na saída, encontram-se detectores para medir a intensidade luminosa [1]. Neste cenário, vamos descrever o modo de um campo eletromagnético como uma onda plana com polarização bem definida. Assim como será visto com detalhes no próximo capítulo, ao quantizar um modo do campo de luz, é possível associar o fóton a uma excitação elementar desse modo, ou seja, a energia é discretizada em níveis bem definidos. Nesta tese, estenderemos essa ideia para o caso do interferômetro, onde cada caminho ou braço representa um modo óptico. Analisaremos como mensurar a diferença de fase entre dois modos ópticos e avaliaremos o comportamento de incidência de diferentes estados quânticos da luz nas portas de entrada de um interferômetro.

A natureza corpuscular da luz impõe limites para a máxima precisão possível na estimativa da diferença de fase entre dois modos ópticos em um interferômetro. Esse comportamento quântico gera flutuações nas contagens de fótons pelos detectores nas saídas do interferômetro, conhecido por *shot noise*, que prejudica a estimativa de fase. Com a luz clássica tendo um número médio de fótons \bar{N} , a incerteza na estimativa de fase escala, na melhor das hipóteses, com $1/\sqrt{\bar{N}}$, conhecido por limite quântico padrão (SQL). Entretanto, a partir de fontes de luz quântica, envolvendo emaranhamento ou luz comprimida, essa incerteza pode escalar com $1/\bar{N}$, conhecido por limite de Heisenberg (HL). Nesses casos, uma precisão muito maior pode ser alcançada com um valor grande para \bar{N} com o uso de estados quânticos para a luz [2–4].

Esta tese tem por objetivo estudar a precisão na medição da diferença de fase óptica. Para tal, utiliza-se fundamentos de metrologia quântica específicos para o campo da fotônica [4] e conceitos relacionados à interferometria para ilustrar um campo de luz quantizado incidente em um dado interferômetro. A metrologia quântica fotônica investiga alternativas para obter melhorias significativas na estimativa da diferença de fase óptica em interferometria. Uma vez que a fase absoluta não é um operador quântico, considera-se na literatura o operador diferença de fase [5–7]. Se considerarmos experimentalmente um pulso de luz entrando em um dado interferômetro, por exemplo do tipo Mach-Zehnder (MZ), a luz sofrerá uma superposição de caminho óptico. Em outras palavras, a diferença de fase estará associada à diferença de caminho óptico. Por fim, quando a luz atravessar todo o percurso do interferômetro, ela incidirá em detectores responsáveis por medir a intensidade luminosa. Por exemplo, este processo é usualmente utilizado em detectores de

ondas gravitacionais, nos quais uma pequena variação da fase no interior do interferômetro gera uma pequena variação de intensidade em cada detector, indicando que houve uma passagem de onda gravitacional [8].

Muitos avanços experimentais recentes foram alcançados no campo da metrologia quântica fotônica no que tange a questão da estimativa de fase em limites ótimos de precisão [3, 4, 9]. Estratégias envolvendo emaranhamento, múltiplas amostragens do deslocamento de fase e medição adaptativa têm sido utilizadas para otimizar estimativas de deslocamento de fase [10]. Medidas coerentes envolvendo operações de emaranhamento podem ser úteis para estimativa de fase na presença de ruído [11]. Avanços notáveis na estimativa de múltiplos parâmetros também têm sido relatados na literatura [12–14]. Recentemente mostrou-se como a insensibilidade da interferência de dois fótons em um interferômetro do tipo Hong-Ou-Mandel [15] às flutuações de fase pode ser utilizada para reduzir o ruído de fase na medição de um ângulo de inclinação de espelho [16] em relação a um procedimento clássico semelhante [17], aumentando a precisão da medida. Destaca-se também a aplicação da metrologia quântica fotônica na melhoria da sensibilidade dos detectores de ondas gravitacionais [8, 18–20], que tem se mostrado uma grande aliada para o avanço deste campo de pesquisa.

A grandeza a ser estimada no contexto deste trabalho é o parâmetro de fase θ introduzido em um dos caminhos de um interferômetro. Dessa forma, objetiva-se que a incerteza no parâmetro de fase seja mínima. O chamado limite de Cramér-Rao determina a menor incerteza possível na estimativa do parâmetro θ de acordo com uma relação inversa com a raiz quadrada da informação de Fisher $1/\sqrt{F}$, sendo F a informação de Fisher [3, 4]. Isto é, quanto maior for F menor será a incerteza $\Delta\theta$ no parâmetro, implicando em uma medição com alta precisão. De forma geral, a informação de Fisher quantifica a influência que o parâmetro de fase possui nas distribuições de probabilidade dos resultados de diferentes medições que podem ser feitas. Por exemplo, em um cenário interferométrico, onde se objetiva medir intensidade da luz, a distribuição de probabilidade para a detecção de fótons por diferentes detectores nas saídas do interferômetro também dependerá do parâmetro de fase. Ou seja, se θ perturbar de forma significativa a distribuição, será mensurável. Portanto o limite de Cramér-Rao estima qual a perturbação mínima para que a medição da intensidade luminosa indique essa perturbação. Por outro lado, a informação de Fisher quântica F_Q , otimiza o esquema de medição [3]. Isto é, entre todas as medições possíveis, F_Q maximiza a informação de Fisher F .

A quantidade física que será tratada nesta tese é a diferença de fase ou fase relativa entre os modos ópticos [5, 6]. A grandeza física conjugada à diferença de fase é a diferença de número de fótons. Nota-se uma relação de complementaridade entre essas quantidades, de forma que podemos fazer uma analogia com a relação de incerteza entre tempo e energia [1]. Para definir o quão bem localizada é a fase relativa em um interferômetro,

utilizamos a prescrição da distribuição de probabilidade de fase relativa introduzida por Luis e Sánchez-Soto $P(\phi)$ [7]. Nessa prescrição, os autores propõem a projeção de estados quânticos que descrevem a luz incidente no interferômetro no auto-estado de fase relativa e também do número total de fótons. Com esse conhecimento, comparamos a distribuição de probabilidade de fase com a informação de Fisher quântica no intuito de associar $P(\phi)$ com a máxima precisão na estimativa da diferença de fase. Em seguida, calculamos a informação de Fisher com base nessa distribuição de probabilidade e mostramos que o resultado é muito próximo da informação quântica de Fisher para os estados tratados. A diferença média entre essas quantidades para os estados quânticos testados é menor que 0,1%, uma diferença compatível com a precisão numérica de nossos cálculos.

Sendo assim, essas quantidades apontam que uma pequena variação $\delta\theta$ na fase de um dos caminhos do interferômetro será detectável se ela modificar sensivelmente a distribuição inicial da fase relativa entre os dois modos do interferômetro. Mostramos esta equivalência aproximada para estados NOON [21] e estados de fase [22], que são estados localizados no interior do interferômetro. Além disso, outros estados quânticos incidentes na entrada do interferômetro do tipo MZ foram considerados, como o estado de Fock gêmeos [23], que representa um estado com o mesmo número de fótons em cada uma das entradas do interferômetro, e o estado de Fock correlacionado [24, 25], que representa o número de fótons emaranhados nas entradas deste interferômetro. Em seguida, considerou-se também outros dois casos, sendo um descrito pela incidência de um estado coerente em uma das entradas do interferômetro e o estado de vácuo comprimido na outra [26], enquanto o outro caso é um estado de Fock em uma das entradas e o estado de vácuo na outra [1]. Com isso, observou-se que, ao se utilizar fontes de luz quântica, melhorias significativas na detecção da variação de fase relativa são alcançadas, tendo relevantes aplicações no campo da metrologia quântica fotônica.

Em suma, esta tese está organizada em 6 capítulos. Além desta introdução, no Capítulo 2 vamos trazer a quantização do campo eletromagnético. Em seguida, daremos no Capítulo 3 um panorama da teoria da estimativa de parâmetros específica para a fase em um cenário interferométrico. Já no capítulo 4, vamos apresentar como obter a distribuição de probabilidade de fase relativa entre dois modos ópticos de um interferômetro. Na sequência, o Capítulo 5 apresentará todos os resultados originais obtidos, comparando a distribuição de probabilidade de fase com a informação de Fisher quântica para diferentes estados quânticos úteis em metrologia quântica. Uma análise de como essas quantidades variam em função do número total de fótons do estado também será apresentada, revelando ainda uma diferença média menor que 0,1% entre essas quantidades. Esses resultados foram publicados na referência [27]. Finalmente, a tese será concluída no Capítulo 6.

2 Quantização do Campo Eletromagnético

A quantização do campo eletromagnético nos permite interpretar a excitação elementar de um modo do campo como um fóton. Esse processo introduz uma quantidade chamada número de fótons e nos permite tratar novos fenômenos físicos como as flutuações de vácuo - uma consequência de quando o número de fótons é nulo e que não é possível de ser descrita classicamente. No decorrer deste capítulo, vamos mostrar como se quantiza o campo eletromagnético, bem como expressar o campo quantizado em função dos operadores de quadratura. Além disso, vamos trazer as principais propriedades de alguns estados quânticos úteis para óptica quântica como o estado de Fock, o estado coerente e o estado de vácuo comprimido, ao passo que este último é particularmente importante na área da metrologia quântica, sendo bastante utilizado em trabalhos recentes que visam alcançar limites máximos de precisão em medições de diferenças de fase ópticas [8, 18–20, 28–31]. Os passos matemáticos apresentados neste capítulo estão baseados na referência [1].

No espaço livre as densidades de carga e corrente são nulas e as equações de Maxwell podem ser escritas como

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t},\end{aligned}\tag{2.1}$$

onde \mathbf{E} é o campo elétrico, \mathbf{B} o campo magnético e $1/c^2 = \mu_0 \epsilon_0$, sendo μ_0 a permeabilidade magnética do vácuo e ϵ_0 a permissividade elétrica do vácuo.

Aplicando o rotacional na equação de Maxwell para o rotacional do campo elétrico, temos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}.\tag{2.2}$$

Usando a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$ e o fato de que estamos no espaço livre ($\nabla \cdot \mathbf{E} = 0$), temos

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\partial(\nabla \times \mathbf{B})}{\partial t}.\tag{2.3}$$

Das equações de Maxwell, sabemos que o rotacional do campo magnético é proporcional à derivada temporal do campo elétrico. Dessa forma, teremos que

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}.\tag{2.4}$$

Seguindo um procedimento análogo para o campo magnético, teremos que

$$\nabla^2 \mathbf{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2}. \quad (2.5)$$

Podemos observar que as Eq. (2.4) e (2.5) possuem a forma de uma equação de onda tridimensional se propagando no espaço com velocidade c .

Nosso problema físico se localiza no interior de um volume de quantização V , tal que o campo eletromagnético é descrito através de uma superposição de ondas planas que obedecem as Eq. (2.4) e (2.5). Consideraremos que a onda se propaga na direção de \hat{z} entre os limites de paredes perfeitamente condutoras em $z = 0$ e $z = l$, nas quais o campo elétrico se anula. Dessa forma, o volume de quantização será dado por $V = Al$, onde A corresponde a uma área de quantização no plano xy . Vale ressaltar que, em particular, para o caso do espaço livre esse volume de quantização tende ao infinito. Ao longo deste capítulo, vamos tratar apenas de um modo do campo eletromagnético se propagando na direção de \hat{z} com polarização bem definida na direção de \hat{x} dentro de um volume de quantização V , que pode ser descrito algebricamente por

$$E_x(z, t) = \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} q(t) \sin(kz), \quad (2.6)$$

sendo ω a frequência de oscilação, V o volume de quantização, $k = \omega/c$ o número de onda e $q(t)$ está associado a amplitude de oscilação do campo elétrico. Vale ressaltar que as constantes introduzidas nesta equação foram convenientemente escolhidas de forma que uma analogia com sistemas mecânicos possa ser feita diretamente.

Uma vez que se assumiu que o campo elétrico está polarizado na direção de \hat{x} para uma onda eletromagnética plana se propagando em \hat{z} com campos elétrico e magnético transversais, conseqüentemente, o campo magnético estará na direção de \hat{y} . Isso pode ser facilmente obtido através da equação de Maxwell para o rotacional do campo magnético e da Eq. (2.6), tal que o campo magnético pode ser escrito como

$$B_y(z, t) = \left(\frac{\mu_0\epsilon_0}{k} \right) \left(\frac{2\omega^2}{V\epsilon_0} \right)^{1/2} \dot{q}(t) \cos(kz), \quad (2.7)$$

sendo que $\dot{q}(t)$ está associado a amplitude de oscilação do campo magnético.

Em suma, as Eq. (2.6) e (2.7) descrevem um modo de excitação do campo eletromagnético correspondente a uma onda plana de frequência ω . Contudo, a investigação de fenômenos interferométricos será feita posteriormente considerando dois modos do campo eletromagnético.

Classicamente, a energia U de um campo eletromagnético no espaço livre é dada por

$$U = \int_V dV \left(\frac{\epsilon_0}{2} |\mathbf{E}|^2 + \frac{1}{2\mu_0} |\mathbf{B}|^2 \right). \quad (2.8)$$

Substituindo as Eqs. (2.6) e (2.7) na Eq. (2.8), temos

$$U = \int_V dV \left(\frac{\omega^2}{V} \right) \left[q^2(t) \sin^2(kz) + \frac{1}{\omega^2} \dot{q}^2(t) \cos^2(kz) \right]. \quad (2.9)$$

Podemos separar essa integral no volume de quantização V em duas contribuições, sendo uma integral de área que resultará na própria área A de quantização, e em uma integral que compreende $z = [0, l]$. Separando a integral em z em duas contribuições através da relação trigonométrica $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, temos

$$U = \left(\frac{\omega^2}{l} \right) \left[q^2(t) \int_z dz + \left(\frac{\dot{q}^2(t)}{\omega^2} - q^2(t) \right) \int_z dz \cos^2(kz) \right], \quad (2.10)$$

tal que

$$U = \left(\frac{\omega^2}{l} \right) \left[q^2(t)l + \left(\frac{\dot{q}^2(t)}{\omega^2} - q^2(t) \right) \frac{l}{2} \right], \quad (2.11)$$

e, finalmente, podemos escrever a energia de um modo do campo eletromagnético como

$$U = \frac{1}{2} [\dot{q}^2(t) + \omega^2 q^2(t)]. \quad (2.12)$$

Um oscilador harmônico simples unidimensional, como um sistema massa-mola, pode ser descrito por uma única coordenada generalizada que terá um momento conjugado associado a ela [32]. Define-se o momento conjugado associado a uma coordenada generalizada q_k como $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$, onde L é a lagrangiana do sistema [32]. No caso de um sistema massa-mola, a lagrangiana do sistema é dada por $L = m\dot{q}^2/2 - m\omega^2 q^2/2$, onde a posição da massa em função do tempo $q(t)$ é a coordenada generalizada e o momento conjugado é dado por $p = m\dot{q}(t)$, sendo q e p quantidades canonicamente conjugadas [32]. O Hamiltoniano, portanto, é dado por $H = p^2/2m + m\omega^2 q^2/2$. Considerando um oscilador harmônico de massa unitária, observamos que o Hamiltoniano desse sistema mecânico é análogo à energia de um modo do campo eletromagnético obtida através das equações de Maxwell, tal que por analogia podemos associar as amplitudes de oscilação dos campos elétrico $q(t)$ e magnético $\dot{q}(t)$ como quantidades canonicamente conjugadas.

Uma vez que o campo E_x se relaciona com a posição canônica q e que o campo magnético B_y se relaciona com o momento canônico \dot{q} , podemos reescrever a energia do modo do campo eletromagnético em termos das variáveis canônicas q e $p = \dot{q}$, tal que

$$U = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2). \quad (2.13)$$

A quantização do campo eletromagnético pode ser feita pela correspondência das quantidades canonicamente conjugadas q e p com os operadores de posição e momento da mecânica quântica, \hat{q} e \hat{p} respectivamente. Portanto, a natureza da luz quantizada é descrita por um oscilador harmônico quântico para cada modo do campo eletromagnético.

Assim, o hamiltoniano quântico associado ao modo considerado do campo eletromagnético de frequência ω pode ser descrito por

$$\hat{H} = \frac{1}{2}(\hat{p}^2 + \omega^2 \hat{q}^2), \quad (2.14)$$

sendo \hat{p} e \hat{q} operadores canonicamente conjugados que obedecem a relação de comutação

$$[\hat{q}, \hat{p}] = i\hbar \hat{I}. \quad (2.15)$$

Podemos escrever também dois outros operadores quânticos em termos das quantidades conjugadas [1]

$$\begin{aligned} \hat{a} &= (2\hbar\omega)^{-\frac{1}{2}}(\omega\hat{q} + i\hat{p}), \\ \hat{a}^\dagger &= (2\hbar\omega)^{-\frac{1}{2}}(\omega\hat{q} - i\hat{p}), \end{aligned} \quad (2.16)$$

cuja relação de comutação é

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = \hat{I}. \quad (2.17)$$

Esses operadores são conhecidos como operadores aniquilação \hat{a} e criação \hat{a}^\dagger . Assim, o Hamiltoniano do sistema pode ser reescrito como

$$\hat{H} = \hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right). \quad (2.18)$$

Este Hamiltoniano se refere a um modo do campo eletromagnético. Em um tratamento envolvendo os múltiplos modos do campo eletromagnético, o hamiltoniano do sistema resultaria em uma somatória de osciladores harmônicos quânticos independentes para cada modo [1].

Uma possível representação para descrever estes operadores é a representação de Heisenberg, onde um operador \hat{O} , que não depende explicitamente do tempo, evolui por meio da relação

$$\frac{d\hat{O}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{O}]. \quad (2.19)$$

Considerando o Hamiltoniano descrito na Eq. (2.18), pode-se obter a dependência temporal do operador aniquilação \hat{a} com base na Eq. (2.19). Dessa forma, temos

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{a}}{dt} &= \frac{i}{\hbar} [\hat{H}, \hat{a}] \\ &= \frac{i}{\hbar} \left[\hbar\omega \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \hat{a} \right] \\ &= i\omega (\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{a} - \hat{a} \hat{a}^\dagger \hat{a}) \\ &= i\omega [\hat{a}, \hat{a}^\dagger] \hat{a} \\ &= -i\omega \hat{a}, \end{aligned} \quad (2.20)$$

cuja solução geral possível é

$$\hat{a}(t) = \hat{a}(0)e^{-i\omega t}. \quad (2.21)$$

Pelo mesmo método, também podemos obter a dependência temporal do operador criação \hat{a}^\dagger

$$\hat{a}^\dagger(t) = \hat{a}^\dagger(0)e^{i\omega t}. \quad (2.22)$$

Desse modo, os operadores de campo elétrico e magnético podem ser reescritos em termos dos operadores aniquilação e criação pela substituição das Eq.(2.16a) e (2.16b) nas Eq. (2.6) e (2.7)

$$\hat{E}_x(z, t) = \mathcal{E}_0 \sin(kz)(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}), \quad \mathcal{E}_0 = (\hbar\omega/\epsilon_0 V)^{1/2} \quad (2.23)$$

$$\hat{B}_y(z, t) = -i\mathcal{B}_0 \cos(kz)(\hat{a}e^{-i\omega t} - \hat{a}^\dagger e^{i\omega t}), \quad \mathcal{B}_0 = (\mu_0/k)(\epsilon_0\hbar\omega^3/V)^{1/2}. \quad (2.24)$$

O operador $\hat{a}^\dagger\hat{a}$ possui um significado especial, uma vez que representa o número de fótons, sendo chamado de operador número e denotado por \hat{N} . Em particular, vamos introduzir o estado de Fock $|N\rangle$, um estado que representa o número de ocupação de fótons em cada modo. A atuação do operador aniquilação sobre este estado promove a destruição de um fóton do modo do campo eletromagnético, enquanto o operador de criação eleva o número do fótons na medida em que ambos os operadores são aplicados no estado de Fock. Ademais, estados de Fock possuem a propriedade de serem estados ortonormais, *i.e.* $\langle M|N\rangle = \delta_{M,N}$, formando uma base completa

$$\sum_{N=0}^{\infty} |N\rangle\langle N| = \hat{I}. \quad (2.25)$$

Os estados de Fock são auto-estados do Hamiltoniano do sistema e, pela equação de auto-valores, estão associados aos níveis de energia do oscilador harmônico [1]

$$\hat{H}|N\rangle = E_N|N\rangle, \quad \text{com } E_N = \hbar\omega(N + 1/2). \quad (2.26)$$

As atuações dos operadores de criação e aniquilação no estado de Fock são dadas pelas relações

$$\begin{aligned} \hat{a}|N\rangle &= \sqrt{N}|N-1\rangle, \\ \hat{a}^\dagger|N\rangle &= \sqrt{N+1}|N+1\rangle, \end{aligned} \quad (2.27)$$

que podem ser obtidas a partir do fato de que um estado de Fock também é auto-estado do operador número de fótons \hat{N} , tal que $\hat{N}|N\rangle = N|N\rangle$.

Calculando o valor esperado do operador campo elétrico dado pela Eq. (2.23) para um estado de Fock, temos que

$$\langle \hat{E}_x \rangle_N = \langle N|\hat{E}_x(z, t)|N\rangle = \mathcal{E}_0 \sin(kz) (\langle \hat{a} \rangle e^{-i\omega t} + \langle \hat{a}^\dagger \rangle e^{i\omega t}). \quad (2.28)$$

Utilizando as Eq. (2.27a) e (2.27b), podemos reescrever o valor esperado do campo elétrico como

$$\langle \hat{E}_x \rangle_N = \mathcal{E}_0 \sin(kz) \left(\sqrt{N} \langle N|N-1 \rangle e^{-i\omega t} + \sqrt{N+1} \langle N|N+1 \rangle e^{i\omega t} \right). \quad (2.29)$$

Pela relação de ortonormalidade dos estados de Fock, vemos, então, que o valor esperado do operador campo elétrico descrito nessa base será sempre nulo $\langle \hat{E}_x \rangle_N = 0$.

Outra forma de descrever os operadores de campo elétrico e magnético é em termos dos operadores de quadratura \hat{X}_1 e \hat{X}_2 . Esses operadores são ortogonais e análogos aos operadores canonicamente conjugados \hat{q} e \hat{p} associados às amplitudes de oscilação do campo eletromagnético. Os operadores de quadraturas podem ser definidos em função dos operadores aniquilação e criação [1]

$$\begin{aligned} \hat{X}_1 &= \frac{1}{2}(\hat{a} + \hat{a}^\dagger) \\ \hat{X}_2 &= \frac{1}{2i}(\hat{a} - \hat{a}^\dagger), \end{aligned} \quad (2.30)$$

tal que a relação de comutação entre esses operadores é dada por $[\hat{X}_1, \hat{X}_2] = i/2$. Devido a não-comutatividade entre os operadores de quadratura, pode-se expressar uma relação de incerteza entre as variâncias de \hat{X}_1 e \hat{X}_2 , sendo $\langle (\Delta \hat{X}_1)^2 \rangle \langle (\Delta \hat{X}_2)^2 \rangle \geq 1/16$. Em particular, para o estado de Fock $|N\rangle$, temos $\langle N|\hat{X}_1|N\rangle = 0 = \langle N|\hat{X}_2|N\rangle$. Contudo, $\langle N|\hat{X}_1^2|N\rangle = (2N+1)/4 = \langle N|\hat{X}_2^2|N\rangle$. Dessa forma, se o número de fótons é nulo ($N=0$, que corresponde ao vácuo), a relação de incerteza entre os operadores de quadratura é minimizada. Finalmente, podemos então escrever o operador de campo elétrico como

$$\hat{E}_x(z, t) = 2\mathcal{E}_0 \sin(kz) [\hat{X}_1 \cos(\omega t) + \hat{X}_2 \sin(\omega t)]. \quad (2.31)$$

Um dos estados quânticos mais utilizados na óptica quântica é o estado coerente, que leva, no limite de altas intensidades, a um estado clássico para a luz. Este estado pode, por exemplo, ser utilizado em experimentos que se propõem investigar fenômenos interferométricos. Na base de estados de Fock, o estado coerente $|\alpha\rangle$ é descrito por

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{N=0}^{\infty} \frac{\alpha^N}{\sqrt{N!}} |N\rangle, \quad (2.32)$$

onde $|\alpha|^2$ corresponde ao número médio de fótons, portanto, conclui-se que se o número médio de fótons \bar{N} for nulo, $|\alpha\rangle \rightarrow |0\rangle$. Desse modo, nota-se que o estado de vácuo é um caso particular do estado coerente, em outras palavras, estados coerentes podem ser interpretados como o estado de vácuo deslocado no parâmetro α . Diferentemente do estado de Fock, estados coerentes não são ortogonais entre si. Contudo, eles formam uma base e qualquer estado arbitrário no espaço de Hilbert pode ser escrito em termos dos estados coerentes, com a ressalva de que há mais estados coerentes disponíveis para se

expressar um estado arbitrário do que o mínimo suficiente, formando uma base chamada de super-completa. Além disso, os estados $|\alpha\rangle$ são auto-estados do operador aniquilação, tal que

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle, \quad (2.33)$$

sendo α um número complexo. Tomando o conjugado hermitiano da equação anterior, obtemos a seguinte relação dual para o operador \hat{a}^\dagger

$$\langle\alpha|\hat{a}^\dagger = \alpha^*\langle\alpha|. \quad (2.34)$$

Utilizando os operadores de quadratura para representar um modo do campo eletromagnético, podemos calcular o valor esperado desses operadores para um estado coerente da luz a fim de obter o valor esperado do operador campo elétrico para esse estado. Dessa forma, utilizando as relações descritas acima (2.30), (2.33) e (2.34), bem como a condição de normalização dos estados coerentes ($\langle\alpha|\alpha\rangle = 1$) e a representação em forma polar do auto-valor $\alpha = |\alpha|e^{i\theta_c}$, temos que $\langle\alpha|\hat{X}_1|\alpha\rangle = |\alpha|\cos\theta_c$ e $\langle\alpha|\hat{X}_2|\alpha\rangle = |\alpha|\sin\theta_c$, onde θ_c é uma parametrização para o estado coerente. Temos ainda que $\langle\alpha|\hat{X}_1^2|\alpha\rangle = 1/4 + |\alpha|^2\cos^2\theta_c$ e $\langle\alpha|\hat{X}_2^2|\alpha\rangle = 1/4 + |\alpha|^2\sin^2\theta_c$. Portanto, a variância dos operadores de quadratura para o estado coerente assumem um valor constante $\langle(\Delta\hat{X}_1)^2\rangle_\alpha = 1/4 = \langle(\Delta\hat{X}_2)^2\rangle_\alpha$, sendo $\alpha = 0$ tem-se o valor esperado das quadraturas para o estado de vácuo, como já mencionado fica evidente que o estado de vácuo é também um caso particular do estado coerente.

Finalmente, podemos calcular o valor esperado do operador campo elétrico para um estado coerente tendo em vista os valores esperados dos operadores de quadratura nesse estado e a Eq. (2.31). Utilizando a relação trigonométrica $\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$, podemos obter de forma direta que

$$\langle\hat{E}_x\rangle_\alpha = 2\mathcal{E}_0|\alpha|\sin(kz)\cos(\theta_c - \omega t). \quad (2.35)$$

O valor esperado do campo elétrico obtido para um estado coerente $|\alpha\rangle$ é equivalente ao valor esperado obtido para estados clássicos [1], tal que estados coerentes são considerados os estados quânticos de maior correspondência com estados clássicos.

Por fim, outro estado quântico relevante para a metrologia quântica que vamos apresentar é o estado de vácuo comprimido $|\xi\rangle$, sendo $\xi = re^{i\theta_S}$, onde r e θ_S são os parâmetros de compressão e de fase respectivamente. Por certo, a utilização de estados comprimidos da luz em interferômetros pode ser um poderoso recurso quântico para aprimorar medições de quantidades físicas. Um exemplo disso é a medição da variação da diferença de fase entre dois caminhos ópticos de um interferômetro. O estado de vácuo comprimido escrito na base dos estados de Fock é dado por

$$|\xi\rangle = \sum_{m=0}^{\infty} S_{2m}|2m\rangle, \quad (2.36)$$

onde

$$S_{2m} = \frac{1}{\sqrt{\cosh r}} (-1)^m \frac{\sqrt{(2m)!}}{2^m m!} (e^{i\theta_s} \tanh r)^m.$$

Em alguns casos, é conveniente introduzir um operador generalizado de quadratura $\hat{X}(\tau) = (\hat{a}e^{-i\tau} + \hat{a}^\dagger e^{i\tau})/2$, tal que $\hat{X}(0) = \hat{X}_1$ e $\hat{X}(\pi/2) = \hat{X}_2$. Uma das vantagens em se utilizar estados comprimidos é a redução em uma das variâncias associadas ao operador generalizado de quadratura. O comportamento da minimização da variância dos operadores de quadratura para os estados comprimidos é complementar, pois enquanto a variância de um dos operadores de quadratura é minimizada, a variância do operador de quadratura ortogonal necessariamente aumenta para que a relação de incerteza entre os operadores seja satisfeita. Por esta razão, estados comprimidos são considerados um poderoso recurso quântico na área da metrologia quântica, tal como veremos nos próximos capítulos. A possibilidade de minimização da variância de pelo menos um operador de quadratura que descreve o campo eletromagnético permite aprimorar medições da diferença de fase no interior de um interferômetro que utiliza fontes de luz quânticas, alcançando os limites máximos de precisão.

3 Detecção de fase óptica em metrologia quântica fotônica

De modo geral, a metrologia é um campo da ciência que estuda as medições de quantidades físicas. Além disso, esta ciência das medições pode trazer avanços tecnológicos ao investigar melhorias nos instrumentos de medida. Dessa forma, nota-se que a relevância em se estudar métodos alternativos para o aprimoramento é altamente necessária, pois quando se atribui um número a uma grandeza física, o resultado deve ser o mais preciso possível. Por outro lado, a metrologia quântica investiga formas de alcançar o limite máximo de precisão fazendo uso de recursos quânticos [2, 33]. Desse modo, o efeito gerado nos processos de medida são de melhora significativa nas medições. Em outras palavras, comparando duas fontes de luz, sendo uma luz clássica descrita por um estado coerente e uma fonte de luz quântica descrita por um estado comprimido, ou estados emaranhados, o ganho na medição da variação da diferença de fase em um interferômetro é significativo.

Uma importante aplicação na óptica moderna para o aprimoramento dos detectores de ondas gravitacionais é a utilização de fontes de luz puramente quânticas, por exemplo os estados comprimidos da luz [34]. De forma geral, utiliza-se estados comprimidos da luz para se medir com eficiência a diferença de fase dentro do interferômetro de Michelson [34, 35]. Visto que a onda gravitacional é capaz de deformar o espaço-tempo dentro do interferômetro provocando uma mudança sensível no caminho óptico percorrido pela luz, esta onda gera um sinal que será mensurável através da diferença de intensidade de luz nos detectores na saída do interferômetro [8, 18–20, 28–31]. Porém, o ruído gerado pelo fato de que a luz é quantizada cria uma flutuação aleatória dessas intensidades, prejudicando a precisão da medida. Afinal, a onda gravitacional só será detectável se a variação que ela provocar na intensidade medida pelos detectores for maior que este ruído. Com isso, podemos associar a variação da diferença de fase dentro do interferômetro com a diferença de intensidades medida pelos detectores. Como um exemplo, vamos trazer a teoria da estimativa de parâmetro com intuito de alcançar limites máximos de precisão para uma fase no interior de um interferômetro, tal como se utiliza nos detectores de ondas gravitacionais.

O processo que se utiliza para estimar a fase óptica no interior de um interferômetro em um protocolo de metrologia quântica pode ser descrito em três etapas principais [1]. Primeiramente, será necessário descrever o estado inicial do sistema. Em seguida, deve-se descrever o operador de evolução do sistema, que é responsável por trazer uma variação na fase θ durante a passagem da luz no interior do interferômetro. Por fim, deve-se mostrar como obter a medição dos resultados das quantidades físicas, no presente caso, as intensidades luminosas que estão associadas às variações das fases ópticas no interior do

interferômetro.

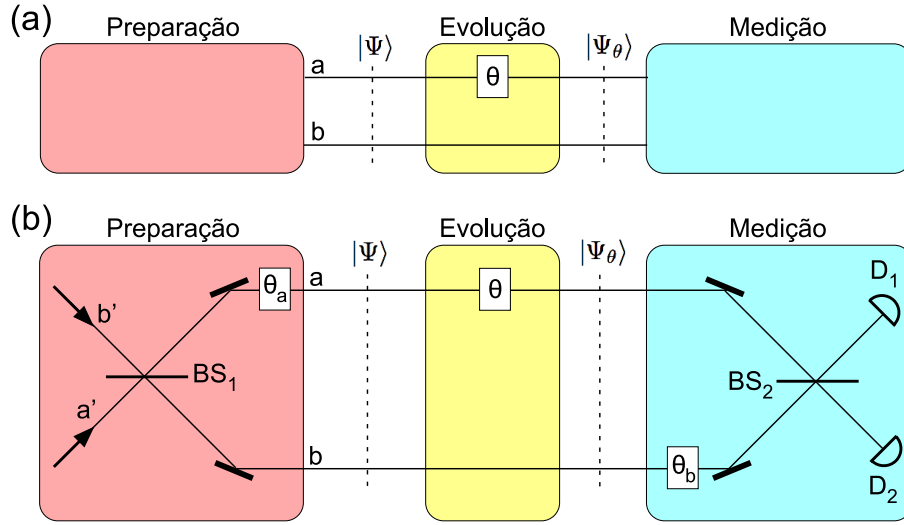


Figura 1 – (a) Esquema genérico para a estimativa de uma fase θ introduzida em um dos modos ópticos. Um estado inicial de dois modos $|\Psi\rangle$ é preparado. O estado evolui para $|\Psi_\theta\rangle$ devido à introdução da fase. Medidas são realizadas no estado final para estimar θ . (b) Uma possibilidade de implementação do protocolo. Luz em um estado separável conhecido nos modos a' e b' incide nas entradas do divisor de feixes BS_1 . Em seguida, uma fase θ_a é adicionada ao modo a , preparando o estado $|\Psi\rangle$ nos modos a e b . Após a evolução do sistema, uma fase θ_b é introduzida no modo b antes dos caminhos se recombinarem no divisor de feixes BS_2 . Os detectores D_1 e D_2 medem a intensidade (número de fótons) nas saídas do interferômetro e a fase θ pode ser estimada a partir desses resultados.

Considerando-se o esquema interferométrico retratado na Fig. 1a, um estado puro geral de dois modos dentro deste interferômetro pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle = \sum_{N,k} A_{N,k} |k\rangle_a |N-k\rangle_b, \quad (3.1)$$

onde $|k\rangle_a$ representa um estado de Fock com k fótons no modo a e $|N-k\rangle_b$ um estado com $N-k$ fótons no modo b , sendo N o número total de fótons nos dois modos ópticos. Por outro lado, a Fig. 1b ilustra uma forma possível para preparar o estado inicial e medir o estado final com o sistema constituído de dois caminhos ópticos, formando um interferômetro de Mach-Zehnder (MZ). No esquema interferométrico mostrado, a onda de luz é descrita em um estado quântico separável bem conhecido de dois modos que incide nas entradas do divisor de feixes BS_1 . A atuação do divisor de feixes é dada através das seguintes equações de transformação dos operadores de aniquilação

$$\begin{aligned} \hat{a}' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} - i\hat{b}), \\ \hat{b}' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\hat{a} + \hat{b}). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Observa-se que uma fase θ_a é adicionada para preparar o estado $|\Psi\rangle$, com o intuito de centralizar a distribuição de fase relativa em zero, como será visto com mais detalhes no próximo capítulo.

De modo geral, o operador quântico que descreve a introdução de uma pequena fase θ como indicado nas Figs. 1a e 1b é dado por $\hat{U}(\theta) = e^{i\hat{n}_a\theta}$, sendo \hat{n}_a o operador número de fótons no braço a . Note que a fase θ localiza-se no caminho óptico a , portanto, cada fóton que passa por esse caminho é afetado pela fase θ . No caso específico da Fig. 1b, para se obter a evolução do estado quântico, após sofrer a atuação tanto do divisor de feixes quanto do operador de deslocamento de fase, devemos considerar o estado no interior do interferômetro de MZ descrito na Eq. (3.1). O estado após a atuação do operador de deslocamento de fase é dado por

$$|\Psi_\theta\rangle = e^{i\hat{n}_a\theta} |\psi\rangle = \sum_{N,k} A_{N,k} e^{i\hat{n}_a\theta} |k\rangle_a |N-k\rangle_b = \sum_{N,k} A_{N,k} e^{ik\theta} |k\rangle_a |N-k\rangle_b. \quad (3.3)$$

Como última etapa do processo, medições no estado final $|\Psi_\theta\rangle$ são realizadas com o objetivo de estimar θ , cujo valor é inicialmente desconhecido. Vale ressaltar que o procedimento pode ser repetido p vezes para aumentar a precisão do parâmetro θ . Existem limites de precisão para se medir a fase relativa de dois modos ópticos em interferometria [2], sendo eles tratados por limite quântico padrão (*standard quantum limit* - SQL) e limite de Heisenberg (HL). Ambos são inerentes à natureza quântica da luz. A diferença entre os limites é o alcance que cada conjunto de estados quânticos pode atingir. Por exemplo, considerando-se um estado coerente $|\alpha\rangle$ com número médio de fótons $|\alpha|^2 = \bar{N}$ em uma das entradas do interferômetro da Fig. 1b, a incerteza em uma medição do parâmetro θ será $\Delta\theta \geq 1/\sqrt{\bar{N}}$ [1], o chamado SQL. Isto implica que fontes que se aproximam do tratamento clássico da luz produzem um limite proporcional a $1/\sqrt{\bar{N}}$. Por outro lado, a medida que avançam os estudos sobre o uso de fontes de luz puramente quânticas em protocolos de metrologia quântica, a incerteza do parâmetro obedece o chamado HL [36], $\Delta\theta \geq 1/\bar{N}$.

Sabe-se que a teoria da estimativa de parâmetros também estuda formas de saturar o limite de precisão HL em um cenário óptico interferométrico. Nesta abordagem, utiliza-se a informação de Fisher F , que é uma quantidade que mede o quanto de informação pode-se obter de um parâmetro θ introduzido no sistema que altera as distribuições de probabilidade dos resultados das quantidades físicas a serem mensuráveis. Dessa forma, quanto maior for F , mais se tem informações sobre o parâmetro. Em outras palavras, F pode ser definida por [4]

$$F(\theta) = \sum_x \frac{1}{P_x(\theta)} \left[\frac{\partial P_x(\theta)}{\partial \theta} \right]^2, \quad (3.4)$$

sendo $P_x(\theta)$ a distribuição de probabilidade para obter o resultado de medição x dado o parâmetro θ . A soma em x contempla todos os resultados possíveis da medição. A relação

que conecta a informação de Fisher com a incerteza do parâmetro θ a ser estimado é descrita por [4]

$$\Delta\theta \geq \Delta\theta_{CR} = \frac{1}{\sqrt{pF(\theta)}}, \quad (3.5)$$

sendo p o número de repetições do experimento. Segundo a literatura [3, 4], o limite de Cramér-Rao é definido exatamente pela condição de saturação do limite inferior da incerteza do parâmetro θ , sendo o limite inferior da incerteza denominado $\Delta\theta_{CR}$. Este vínculo é derivado de um estimador eficiente que tem por objetivo minimizar o erro do parâmetro θ [3].

Por outro lado, existe o limite de Cramér-Rao quântico que deriva de $\Delta\theta_{CR}$. Assim como $\Delta\theta_{CR}$ depende da informação de Fisher F , o limite de Cramér-Rao quântico depende da informação de Fisher quântica F_Q , que representa uma medida de distância entre estados quânticos que se diferem pelo parâmetro θ . Porém, neste regime, considera-se a otimização da estratégia de medição do parâmetro θ [26]. A maximização de $F(\theta)$ sobre todas as medições quânticas possíveis produz a informação quântica de Fisher F_Q para o estado quântico $|\Psi\rangle$ sob a evolução $e^{i\hat{n}_a\theta}$, que leva ao limite de precisão final [3, 4, 37–39]. Em outras palavras, considerando todas as estratégias de medições possíveis, a informação de Fisher quântica representa aquela que é a melhor possível. Portanto, podemos considerar o limite de Cramér-Rao quântico em função de F_Q através da relação a seguir

$$\Delta\theta \geq \frac{1}{\sqrt{pF_Q(\theta)}}. \quad (3.6)$$

Fisicamente, quando a incerteza do parâmetro é mínima significa que a quantidade estimada está próxima do valor real. Isto é, quanto maior for F_Q menor será a incerteza no parâmetro θ , implicando em um resultado com alta precisão. Dessa forma, podemos descrever a informação de Fisher quântica como a quantidade que mede a influência que o parâmetro a ser mensurável possui ao ser introduzido em um esquema interferométrico como o da Fig. 1a. Ou seja, para que o parâmetro θ seja detectável, ele deve perturbar de forma sensível a distribuição de probabilidade da quantidade física que se deseja mensurar.

Considerando-se o espaço de probabilidades, a informação de Fisher se relaciona de uma forma direta com a distância de Hellinger D_H [40], que fornece uma medida da diferença entre duas distribuições de probabilidade. Em outras palavras, D_H é definida por

$$D_H(P, Q) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_j \left[\sqrt{P_j(\theta)} - \sqrt{Q_j(\theta)} \right]^2}, \quad (3.7)$$

sendo que $P_j(\theta)$ e $Q_j(\theta)$ representam duas distribuições de probabilidade. Para cada distribuição, j representa um resultado possível da medida dado um parâmetro θ . Sendo assim, a somatória contempla o conjunto de todos os resultados possíveis para a medição. Com o propósito de estimar o parâmetro θ ilustrado na Fig. 1a, vamos considerar uma

perturbação mínima por meio de $Q_j(\theta) = P_j(\theta + d\theta)$, sendo $d\theta$ um infinitesimal desvio em θ para que haja uma diferença entre as distribuições de probabilidades. Desse modo, o interesse da metrologia quântica é medir o parâmetro $d\theta$ com alta precisão. Para tal, escrevemos o quadrado de D_H como $D_H^2(\theta, \theta + d\theta) = 1/2 \sum_j \left[\sqrt{P_j(\theta + d\theta)} - \sqrt{P_j(\theta)} \right]^2$. Note que podemos definir uma função $f_j(x) = \sqrt{P_j(x)}$ e portanto a expressão para o quadrado da distância de Hellinger é reescrita em termos dessa função

$$D_H^2(\theta, \theta + d\theta) = \frac{1}{2} \sum_j [f_j(\theta + d\theta) - f_j(\theta)]^2. \quad (3.8)$$

Observe que o diferencial da função $f_j(\theta)$ pode ser escrito como

$$df_j(\theta) = \frac{df_j(\theta)}{d\theta} d\theta. \quad (3.9)$$

Assim, a distância de Hellinger é reescrita por

$$\begin{aligned} D_H^2(\theta, \theta + d\theta) &= \frac{1}{2} \sum_j \left[\frac{df_j(\theta)}{d\theta} \right]^2 d\theta^2 \\ &= \frac{1}{2} \sum_j \left[\frac{\partial f_j(\theta)}{\partial P_j(\theta)} \frac{\partial P_j(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 d\theta^2. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por fim, ao computar a derivada na função $f_j(\theta)$ temos

$$D_H^2(\theta, \theta + d\theta) = \frac{1}{2} \sum_j \left[\frac{1}{2\sqrt{P_j(\theta)}} \frac{\partial P_j(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 d\theta^2 = \frac{1}{8} \left\{ \sum_j \frac{1}{P_j(\theta)} \left[\frac{\partial P_j(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 \right\} d\theta^2. \quad (3.11)$$

Observe que a quantidade dentro das chaves na última igualdade da Eq. (3.11) é a informação de Fisher F da Eq. (3.4) [3,4]. Em suma, a relação entre a distância de Hellinger e a informação de Fisher é de proporcionalidade. Isto é, quanto maior a distância entre as distribuições de probabilidades, maior será a informação de Fisher. Em metrologia quântica esta relação torna-se importante porque à medida em que se perturba infinitesimalmente o parâmetro θ , obtém-se uma grande variação na distribuição de probabilidade permitindo assim que θ seja mensurável.

Como foi mencionado, a informação de Fisher quântica F_Q representa uma maximização da informação de Fisher F [4] ao otimizarmos o esquema de medição deixando fixos o estado quântico inicial do sistema e o operador evolução que depende do parâmetro a ser estimado. Por isso, o resultado obtido depende da distância máxima entre os estados quânticos inicial e evoluído, com objetivo de distinguir o parâmetro a ser estimado [3].

Considerando um estado puro qualquer inicial $|\Psi_0\rangle$ e um operador de evolução dado por $e^{i\hat{H}\theta}$, sendo θ o parâmetro a ser estimado, a informação de Fisher quântica pode ser simplificada por $F_Q = 4 \langle (\Delta \hat{H})^2 \rangle$. Para demonstrar esta relação devemos considerar uma fase infinitesimal θ , onde termos de θ^2 tendem a zero. Desta forma o operador de

evolução fica $\hat{U}(\theta) = e^{i\hat{H}\theta} \approx 1 + i\hat{H}\theta$. Com isso, descrevemos a evolução do estado inicial através de

$$|\psi_\theta\rangle = \hat{U}(\theta) |\psi_0\rangle = e^{i\hat{H}\theta} |\psi_0\rangle \approx (1 + i\hat{H}\theta) |\psi_0\rangle. \quad (3.12)$$

Uma medição ótima em um sistema desse tipo, que resulta na maior precisão para a estimativa de θ , tem como resultados possíveis projeções em uma base ortonormal em que o estado inicial $|\psi_0\rangle$ é um dos elementos. Para medir o estado $|\psi_j\rangle$, a mecânica quântica afirma que a probabilidade desse resultado depende da projeção do estado evoluído $|\psi_\theta\rangle$ no estado $|\psi_j\rangle$

$$P_j(\theta) = |\langle\psi_j|\psi_\theta\rangle|^2. \quad (3.13)$$

Ao substituir o estado $|\psi_\theta\rangle$, tem-se $P_j(\theta) = \left| \langle\psi_j|\hat{U}(\theta)|\psi_0\rangle \right|^2 = \left| \delta_{j,0} + i\theta \langle\psi_j|\hat{H}|\psi_0\rangle \right|^2$. Para $j = 0$, temos

$$P_0(\theta) = \left| 1 + i\theta \langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle \right|^2 = 1 + \theta^2 \left(\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle \right)^2. \quad (3.14)$$

Para $j \neq 0$, temos

$$P_j(\theta) = \left| i\theta \langle\psi_j|\hat{H}|\psi_0\rangle \right|^2 = \theta^2 \langle\psi_j|\hat{H}|\psi_0\rangle \langle\psi_0|\hat{H}|\psi_j\rangle = \theta^2 \langle\psi_0|\hat{H}|\psi_j\rangle \langle\psi_j|\hat{H}|\psi_0\rangle. \quad (3.15)$$

Retomando a informação de Fisher da Eq. (3.4), temos

$$F = \sum_j \frac{1}{P_j(\theta)} \left[\frac{\partial P_j(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 = \frac{1}{P_0(\theta)} \left[\frac{\partial P_0(\theta)}{\partial \theta} \right]^2 + \sum_{j=1}^N \frac{1}{P_j(\theta)} \left[\frac{\partial P_j(\theta)}{\partial \theta} \right]^2. \quad (3.16)$$

Substituindo os resultados das probabilidades com $j = 0$ e $j \neq 0$, considerando que nesse caso ótimo a informação de Fisher concorda com a informação de Fisher quântica, temos

$$F_Q = \frac{4\theta^2 \left(\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle \right)^4}{1 + \theta^2 \left(\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle \right)^2} + \sum_{j=1}^N \frac{4\theta^2 \left(\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_j\rangle \langle\psi_j|\hat{H}|\psi_0\rangle \right)^2}{\theta^2 \langle\psi_0|\hat{H}|\psi_j\rangle \langle\psi_j|\hat{H}|\psi_0\rangle}. \quad (3.17)$$

Assumindo a resolução da identidade $\sum_j |\psi_j\rangle \langle\psi_j| = \mathbb{I}$, podemos reescrevê-la como $\sum_{j=1}^N |\psi_j\rangle \langle\psi_j| = \mathbb{I} - |\psi_0\rangle \langle\psi_0|$. Logo, fazendo a substituição na informação de Fisher, o resultado fica

$$F_Q = \frac{4\theta^2 \left(\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle \right)^4}{1 + \theta^2 \left(\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle \right)^2} + 4 \left[\langle\psi_0|\hat{H}^2|\psi_0\rangle - \left(\langle\psi_0|\hat{H}|\psi_0\rangle \right)^2 \right]. \quad (3.18)$$

Dado que o parâmetro θ é infinitesimal, podemos tomar o limite deste parâmetro indo para zero. Assim, o primeiro termo da Eq.(3.18) se anula e finalmente chegamos na expressão para a informação de Fisher quântica, quando se considera estados puros

$$F_Q = 4 \left\langle \left(\Delta \hat{H} \right)^2 \right\rangle. \quad (3.19)$$

Desse modo, notamos que para o caso de estados puros nos esquemas da Fig. 1, em que temos $\hat{H} = \hat{n}_a$ no operador evolução $e^{i\hat{H}\theta}$, a informação de Fisher quântica é proporcional à variância do número de fótons no braço a do interferômetro

$$F_Q = 4 \langle (\Delta \hat{n}_a)^2 \rangle. \quad (3.20)$$

Portanto, nos próximos capítulos, consideraremos para vários estados quânticos puros úteis em metrologia quântica fotônica, a informação de Fisher quântica descrita pela Eq. (3.20). Com isso, a ideia é quantificar qual a perturbação mínima pelo parâmetro θ no esquema da Fig. 1a que influencia a distribuição de probabilidade da quantidade que deve ser mensurável. No presente caso, vamos apresentar como obter a distribuição de probabilidade de fase relativa entre dois caminhos ópticos no interior do interferômetro de MZ. Além disso, vamos comparar essa distribuição de probabilidade com a informação de Fisher quântica e associar a incerteza do parâmetro de fase com a precisão na medição da diferença de fase no interior do interferômetro.

4 Distribuição de probabilidade de fase para campos ópticos

Em um dado modo óptico do campo eletromagnético quantizado, existem duas grandezas físicas complementares - a amplitude e a fase. Sabendo que a amplitude no regime quântico está relacionada com o operador número de fótons \hat{N} , a fase deveria ser representada por um operador de fase $\hat{\phi}$, pois entende-se que existe uma relação de incerteza entre ΔN e $\Delta\phi$, assim como a relação de incerteza de Heisenberg entre tempo e energia. No entanto, a fase não é um observável mensurável. Desta forma, tal como o tempo não configura um operador quântico, o operador de fase também não é bem definido, pois uma das dificuldades para se estabelecer um operador quântico que represente a fase óptica é o fato de que o espectro de autovalores da quantidade conjugada, que seria o número de fótons, não apresenta valores negativos. Entretanto, o interesse real é usualmente na diferença de fase entre modos ópticos e não na fase absoluta. Desse modo, a quantidade conjugada quando se considera a diferença de fase é a diferença entre os números de fótons em cada um dos modos, que podem assumir valores negativos. Portanto, a quantidade física que será considerada ao longo deste capítulo é o operador diferença de fase, que referenciaremos generalizadamente como $\hat{\phi}$. Como resultado dessa não compatibilidade entre essas grandezas, estados ópticos com uma fase relativamente bem definida devem apresentar uma larga incerteza no número de fótons, enquanto estados com o número de fótons bem definido devem apresentar uma fase completamente indeterminada [1, 41, 42].

Nas próximas seções descreveremos como obter a distribuição de probabilidade de fase óptica. Iniciaremos tratando da distribuição de probabilidade de fase considerando um modo óptico e, em seguida, trataremos a distribuição de fase relativa entre dois modos.

4.1 Distribuição de Probabilidade de Fase em um Modo do Campo Óptico Quantizado

Historicamente, a busca pelo operador de fase absoluta foi marcada por várias tentativas [1, 43–45]. Dirac postulou, por exemplo, que o operador de aniquilação \hat{a} poderia ser definido na forma de decomposição polar como $\hat{a} = e^{i\hat{\phi}}\sqrt{\hat{N}}$, onde $\hat{\phi}$ é o operador de fase absoluta e \hat{N} é o operador número de fótons. Porém, $\hat{\phi}$ deveria ser um observável, isto é, um operador hermitiano onde $\hat{\phi} = \hat{\phi}^\dagger$, contudo isto não é verificado [1]. Outra tentativa foi feita por Susskind e Glogover (SG), que descreveram o operador de fase quântica \hat{E} como [1]

$$\hat{E} = (\hat{N} + 1)^{-\frac{1}{2}}\hat{a} = (\hat{a}\hat{a}^\dagger)^{-\frac{1}{2}}\hat{a}, \quad (4.1)$$

tal que

$$\hat{E}^\dagger = \hat{a}^\dagger(\hat{N} + 1)^{-\frac{1}{2}} = \hat{a}^\dagger(\hat{a}\hat{a}^\dagger)^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.2)$$

onde vale ressaltar que a notação \hat{E} é original dos autores e não deve ser confundida com o operador campo elétrico no presente contexto. O operador \hat{E} de SG é comumente conhecido por operador exponencial [1, 45]. Os operadores \hat{E} e \hat{E}^\dagger podem ser decompostos na base de Fock

$$\hat{E} = \sum_{N=0}^{\infty} |N\rangle\langle N+1| \quad (4.3)$$

$$\hat{E}^\dagger = \sum_{N=0}^{\infty} |N+1\rangle\langle N|. \quad (4.4)$$

Para verificar a unitariedade destes operadores devemos calcular $\hat{E}\hat{E}^\dagger$ e $\hat{E}^\dagger\hat{E}$ a partir das Eq. (4.3) e (4.4) e observar se são quantidades equivalentes. Fazendo-se isto, obtemos que

$$\begin{aligned} \hat{E}\hat{E}^\dagger &= \sum_{N,M} |N\rangle\langle N+1|M+1\rangle\langle M| = \sum_{N,M} |N\rangle\langle M| \delta_{N+1,M+1} = \sum_N |N\rangle\langle N| \\ \hat{E}^\dagger\hat{E} &= \sum_{N,M} |M+1\rangle\langle M|N\rangle\langle N+1| = \sum_{N,M} |M+1\rangle\langle N+1| \delta_{N,M} = \sum_N |N+1\rangle\langle N+1|, \end{aligned} \quad (4.5)$$

portanto, podemos sintetizar os resultados por

$$\hat{E}\hat{E}^\dagger = \mathbb{I} \quad (4.6)$$

$$\hat{E}^\dagger\hat{E} = \mathbb{I} - |0\rangle\langle 0|. \quad (4.7)$$

Contudo, dos resultados obtidos percebemos que o operador SG não é unitário. O termo que elimina a unitariedade do operador é o projetor no estado de vácuo $|0\rangle\langle 0|$. Logo, para que SG seja considerado aproximadamente um operador unitário, este termo deve ser desprezível para o estado em questão. Se tomarmos como exemplo o estado coerente $|\alpha\rangle$, o termo de vácuo deste estado é pequeno quando o módulo ao quadrado de α é muito maior que 1. Portanto, o número médio de fótons deve ser muito maior que 1 para se considerar o operador SG unitário.

Outro fato importante é que os operadores \hat{E} e \hat{E}^\dagger não são observáveis, mas são análogos à função exponencial. Sendo assim, a partir deles foram definidos dois novos operadores hermitianos, \hat{C} e \hat{S} , que são análogos às funções $\cos \phi$ e $\sin \phi$ respectivamente, sendo descritos por [1, 45]

$$\hat{C} = \frac{1}{2}(\hat{E} + \hat{E}^\dagger) \quad (4.8)$$

e

$$\hat{S} = \frac{1}{2i}(\hat{E} - \hat{E}^\dagger). \quad (4.9)$$

A equação de auto-valores para o operador de fase \hat{E} pode ser calculada a partir das decomposições na base de Fock da seguinte forma [1, 7]

$$\hat{E}|\phi\rangle = e^{i\phi}|\phi\rangle, \quad (4.10)$$

onde o auto-estado $|\phi\rangle$ é calculado a partir das Eq. (4.3) e (4.4), tal que

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{N=0}^{\infty} e^{iN\phi}|N\rangle. \quad (4.11)$$

Perceba que $|\phi\rangle$ não é normalizável [1]. Usando a expressão

$$\int_0^{2\pi} e^{i(N-N')\phi} d\phi = 2\pi\delta_{N,N'}, \quad (4.12)$$

podemos verificar que os auto-estados de fase levam à relação

$$\int_0^{2\pi} d\phi |\phi\rangle\langle\phi| = \mathbb{I}. \quad (4.13)$$

Embora não seja possível definir um operador de fase hermitiano, os auto-estados $|\phi\rangle$ do operador \hat{E} são estados com fase bem definida, de forma que podemos associar uma distribuição de fase $P(\phi)$ para um estado quântico arbitrário $|\Psi\rangle$ em termos da sua projeção num auto-estado $|\phi\rangle$, tal que

$$P(\phi) = |\langle\phi|\Psi\rangle|^2. \quad (4.14)$$

Para exemplificar como podemos associar uma distribuição de probabilidade de fase a um estado quântico, abordaremos em particular um estado de Fock $|N\rangle$ e também um estado coerente $|\alpha\rangle$. Para o estado de Fock, podemos escrever a distribuição de probabilidade de fase [1] como se segue

$$\begin{aligned} P_N(\phi) &= |\langle\phi|N\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} \left| \sum_{N'=0}^{\infty} e^{-iN'\phi} \langle N'|N\rangle \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi}. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Note que este resultado implica em uma distribuição de probabilidade uniforme, isto é, podemos afirmar que a fase é completamente indefinida, enquanto que a incerteza ΔN é nula quando se define o estado de Fock com N fótons. Portanto, a relação de complementaridade entre fase e número de fótons é observada neste contexto onde se avalia a fase quando se projeta no estado de Fock.

Por outro lado, a distribuição de probabilidade de fase para um estado coerente $|\alpha\rangle$, com $\alpha = |\alpha|e^{i\theta_c}$, pode ser escrita como [1]

$$\begin{aligned} P_\alpha(\phi) &= |\langle\phi|\alpha\rangle|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi} e^{-|\alpha|^2} \left| \sum_{N=0}^{\infty} e^{iN(\phi-\theta_c)} \frac{|\alpha|^N}{\sqrt{N!}} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Diferentes distribuições para estados coerentes calculadas de acordo com a Eq. (4.16) estão representadas na Fig. 2. Vemos que quanto maior é o número médio de fótons $|\alpha|^2$, menor é a largura da distribuição. Além disso, podemos notar que a incerteza $\Delta\hat{N}$ para o estado coerente é dada por $\Delta\hat{N} = \sqrt{\bar{N}}$, sendo $\bar{N} = |\alpha|^2$. Dessa relação, podemos deduzir que $\Delta\hat{N} \propto |\alpha|$. Dessa forma, intuitivamente, podemos sintetizar esta relação observando que quanto maior for a incerteza de $\Delta\hat{N}$, menor será a incerteza na fase ϕ .

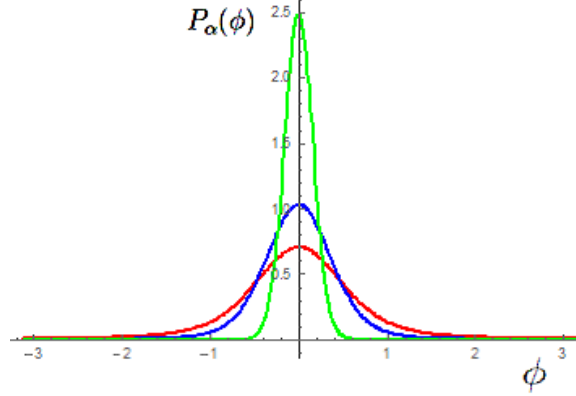


Figura 2 – Distribuições de probabilidade de fase para estados coerentes dadas pela Eq. (4.16) com $\theta_c = 0$ e com diferentes números médios de fótons: $|\alpha|^2 = 1$ em vermelho, $|\alpha|^2 = 2$ em azul e $|\alpha|^2 = 10$ em verde.

4.2 Distribuição de Probabilidade de Fase Relativa Entre Dois Modos de Campos Ópticos Quantizados

Apresentaremos a seguir o formalismo para a obtenção da distribuição de probabilidade para a diferença de fase entre dois modos ópticos de mesma frequência, conforme descrito na referência [7]. Esta abordagem vai trazer a distribuição de fase relativa, que representa o quão bem conhecida é a fase no interior de um interferômetro, por exemplo nos esquemas interferométricos das Fig. 1a e 1b.

Seja ρ um estado composto arbitrário, os autores apresentam o formalismo para calcularmos a distribuição de probabilidade para diferença de fase considerando a distribuição conjunta das fases dos dois modos, tal que

$$P_\rho(\phi_1, \phi_2) = \langle \phi_1, \phi_2 | \rho | \phi_1, \phi_2 \rangle, \quad (4.17)$$

onde $|\phi_1, \phi_2\rangle = |\phi_1\rangle |\phi_2\rangle$, com $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ sendo os auto-estados de fase de cada modo definidos na Eq. (4.11), sendo esta equação uma extensão natural da Eq. (4.14).

Se fixarmos a diferença de fase entre os dois modos como $\phi = \phi_1 - \phi_2$, considerando $\phi_1 = \gamma + \phi$ e $\phi_2 = \gamma$, obtemos uma distribuição para ϕ dada por

$$P_\rho(\phi) = \int d\gamma \langle \gamma + \phi, \gamma | \rho | \gamma + \phi, \gamma \rangle. \quad (4.18)$$

A partir da Eq. (4.11), podemos escrever

$$|\gamma + \phi, \gamma\rangle = \frac{1}{2\pi} \sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} e^{ij\phi} e^{i(j+k)\gamma} |j, k\rangle. \quad (4.19)$$

Aplicando este estado na Eq. (4.18), temos

$$P_\rho(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{j,j'} \sum_{k,k'} e^{i(j-j')\phi} \left(\int \frac{d\gamma}{2\pi} e^{i[(j+k)-(j'+k')\gamma]} \right) \langle j', k' | \rho | j, k \rangle. \quad (4.20)$$

Agora, se considerarmos $u = j + k$ e $v = j' + k'$, a Eq. (4.20) pode ser escrita como

$$P_\rho(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \sum_{j=0}^u \sum_{j'=0}^v e^{i(j-j')\phi} \left(\int \frac{d\gamma}{2\pi} e^{i(u-v)\gamma} \right) \langle j', v - j' | \rho | j, u - j \rangle. \quad (4.21)$$

Note que a integral na Eq. (4.21) se reduz ao delta de Kronecker $\delta_{u,v}$, logo

$$P_\rho(\phi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{j,j'=0}^u e^{i(j-j')\phi} \langle j', u - j' | \rho | j, u - j \rangle. \quad (4.22)$$

Com isto, Luis e Sánchez-Soto definem uma distribuição de probabilidade para a diferença de fase como [7]

$$P_\rho(\phi) = \sum_{N=0}^{\infty} \langle \phi^N | \rho | \phi^N \rangle, \quad (4.23)$$

sendo $|\phi^N\rangle$ o estado de diferença de fase para dois modos num subespaço de dimensão N cujo número total de fótons é N , definido por [22, 44, 46]

$$|\phi^N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^N e^{ij\phi} |j, N - j\rangle. \quad (4.24)$$

Em particular, para um estado puro $\rho = |\Psi\rangle \langle \Psi|$, podemos escrever

$$P(\phi | \Psi) = \sum_{N=0}^{\infty} |\langle \phi^N | \Psi \rangle|^2. \quad (4.25)$$

Considerando o caso ilustrado pela Fig. 1a, a distribuição de probabilidade $P(\phi)$ quando se projeta o auto-estado de fase relativa $|\phi^N\rangle$ no estado $|\Psi\rangle = \sum_k A_{M,k} |k\rangle_a |M - k\rangle_b$ com o número de fótons fixo $M = N$, temos

$$\begin{aligned} P_N(\phi) &= |\langle \phi^N | \Psi \rangle|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^M e^{-ij\phi} A_{M,k} \delta_{j,k} \delta_{N-j, M-k} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^N e^{-ij\phi} A_{N,j} \right|^2. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Em suma, a distribuição de probabilidade nos traz a ideia de quão bem definida é a fase relativa entre os modos ópticos para estados puros. Percebe-se que existe uma relação de incerteza entre a diferença de fase e a diferença no número de fótons entre os dois modos. Em outras palavras, se a diferença do número de fótons é bem conhecida, tem-se uma distribuição uniforme para a diferença de fase. Contudo, se a distribuição da diferença de fase for bem localizada, a diferença do número de fótons terá grande incerteza. O interesse deste trabalho é associar a própria distribuição de probabilidade de fase relativa para vários estados puros úteis em metrologia quântica com a precisão na estimativa de uma fase introduzida no interferômetro. No próximo capítulo, apresentaremos os resultados obtidos desta tese, discutindo como a distribuição de fase relativa se relaciona com a informação de Fisher quântica, que representa a maximização da precisão no processo de estimativa do parâmetro de fase, conforme visto no capítulo anterior.

5 Distribuição de probabilidade de fase relativa para estados úteis em metrologia quântica

Um esquema interferométrico para se inferir a fase óptica no interior de um interferômetro é descrito de acordo com o cenário apresentado pela Fig. 1. A Fig. 1a ilustra um esquema geral para se medir a fase considerando o estado $|\Psi\rangle$ descrito pela Eq. (3.1) dentro do interferômetro. Já a Fig. 1b descreve o caso específico de preparação de um estado de entrada em um interferômetro do tipo MZ, sendo este inicialmente preparado antes de passar pelo primeiro divisor de feixes BS_1 . Os exemplos que serão tratados neste capítulo possuem o número de fótons bem definido N , com exceção do estado coerente-comprimido $|\alpha, \xi\rangle$ [26], que representa o estado coerente $|\alpha\rangle$ incidente em uma das entradas do interferômetro, enquanto na outra entrada tem-se o estado de vácuo comprimido $|\xi\rangle$. Para este caso, considerou-se a projeção em um estado com um número de fótons fixo igual ao número médio de fótons \bar{N} .

Para alcançar o limite de Heisenberg, que determina a máxima precisão permitida pela mecânica quântica [3, 4], a informação de Fisher quântica F_Q deve ser $F_Q = \bar{N}^2$ na Eq. (3.20), o que ocorre para alguns estados quânticos com número médio de fótons \bar{N} . Com isso, segundo a Eq. (3.6) temos que $\Delta\theta \geq 1/(\sqrt{p}\bar{N})$ - o conhecido limite de Heisenberg. No presente trabalho, consideraremos estados quânticos com o número de fótons fixo N , logo temos

$$|\Psi_N\rangle = \sum_k A_{N,k} |k\rangle_a |N-k\rangle_b, \quad (5.1)$$

sendo o limite de Cramér-Rao dado por

$$\Delta\theta_N \geq \frac{1}{\sqrt{pF_Q(\Psi_N)}}, \quad \text{onde} \quad (5.2)$$

$$F_Q(\Psi_N) = 4 \langle (\Delta\hat{n}_a)^2 \rangle = 4 \left\{ \frac{\sum_k |A_{N,k}|^2 k^2}{\sum_k |A_{N,k}|^2} - \left[\frac{\sum_k |A_{N,k}|^2 k}{\sum_k |A_{N,k}|^2} \right]^2 \right\},$$

sendo \hat{n}_a o operador número de fótons no modo a . Note que consideramos o caso geral em que o estado da Eq. (5.1) pode não estar normalizado.

Definindo $\Delta\phi$ como a largura da distribuição de probabilidade para a diferença de fase e Δn_- a largura da distribuição de probabilidade para a diferença de fótons entre os modos a e b , temos que $\Delta\phi\Delta n_- \geq \pi$, conforme discutido no Capítulo 4 desta tese através da Eq. (4.15). Para estados com um número total de fótons $N = n_a + n_b$, podemos escrever $n_- = n_a - n_b = 2n_a - N$, tal que $\Delta n_- = 2\Delta n_a$ e, portanto, temos

$$\Delta\phi\Delta n_a \geq \frac{\pi}{2}. \quad (5.3)$$

Podemos comparar essa desigualdade com aquela obtida pela Eq. (5.2) para $p = 1$, tal que

$$\Delta\theta_N \Delta n_a \geq \frac{\pi}{2}. \quad (5.4)$$

Note que as incertezas $\Delta\phi$ e $\Delta\theta_N$ obedecem a mesma desigualdade com Δn_a , porém elas representam diferentes quantidades. A grandeza $\Delta\phi$ é a incerteza da diferença de fase entre os modos a e b do estado quântico $|\Psi_N\rangle$ dado pela Eq. (5.1), enquanto $\Delta\theta_N$ é a precisão da estimativa da fase óptica θ no esquema da Fig. 1a quando o estado inicial é $|\Psi_N\rangle$ com um número fixo de fótons N . Vale ressaltar que a mesma ideia é extensível para o esquema da Fig. 1b, com a ressalva de que é necessário projetar o estado inicial no número médio de fótons quando este não apresentar um número de fótons bem definido. Apesar de $\Delta\phi$ e $\Delta\theta_N$ significarem fisicamente quantidades distintas, a ideia deste trabalho é levantar a discussão de que essas duas quantidades estão relacionadas.

A ideia que apresentaremos nesta tese pode ser resumida da seguinte forma: para ser possível estimar o desvio $\Delta\theta$ a partir de uma fase inicialmente estimada θ , conforme ilustrado no esquema da Fig. 1a, é preciso que $\Delta\theta$ desloque a distribuição de fase relativa inicial do estado $|\Psi_N\rangle$ por uma quantidade apreciável. Isto é, devemos ter que $\Delta\theta \geq \Delta\phi$. Dessa forma, o valor mínimo detectável de $\delta\theta$ (que é aproximadamente a incerteza $\Delta\theta$ na estimativa de fase) deve ser aproximadamente $\Delta\phi$, *i.e.*, $\Delta\theta \approx \Delta\phi$. No entanto, para distribuições periódicas da diferença de fase, um desvio de fase menor que $\Delta\phi$, da ordem do período da distribuição, pode alterá-la consideravelmente. Assim, é necessária uma forma mais robusta de definir a perturbação gerada por uma pequena fase adicionada à distribuição de fase relativa. Sendo assim, a principal ideia deste trabalho é levar essa relação ao limite e associar as propriedades da distribuição de fase relativa com a precisão nos protocolos de estimativa da fase óptica em metrologia quântica.

Com o propósito de elucidar para o caso em que o desvio de fase é pequeno, vamos considerar a fidelidade clássica (também conhecida por fidelidade Bhattacharyya) entre duas distribuições de probabilidade próximas [38]

$$\mathcal{F} = \int d\phi \sqrt{P_N(\phi)P_N(\phi + \delta\phi)}, \quad (5.5)$$

sendo $P_N(\phi)$ a distribuição de fase relativa da Eq. (4.26). De forma completamente análoga aos resultados vistos no capítulo 3, em que havia um regime discreto para a distribuição de probabilidade, ao considerarmos termos até $(\delta\phi)^2$ na expansão de Taylor da fidelidade, temos

$$\mathcal{F} \approx 1 - \frac{1}{8} F_{\text{LSS}}(\delta\phi)^2, \quad (5.6)$$

sendo

$$F_{\text{LSS}} = \int d\phi \frac{1}{P_N(\phi)} \left[\frac{\partial P_N(\phi)}{\partial \phi} \right]^2 \quad (5.7)$$

a informação de Fisher obtida via distribuição de fase relativa Luis e Sánchez-Soto (LSS) $P_N(\phi)$ da Eq. (4.26). Este resultado é análogo à informação de Fisher para o regime discreto

da Eq. (3.11). Por outro lado, a informação de Fisher da Eq. (5.2) pode ser derivada da mesma forma a partir da fidelidade entre as distribuições de probabilidade dos resultados de medição para estados que diferem por uma pequena quantidade no parâmetro θ [38, 39].

Neste sentido, ao decorrer deste capítulo serão apresentados os resultados da equivalência aproximada entre a informação de Fisher obtida via distribuição de fase relativa F_{LSS} da Eq. (5.7) e a informação quântica de Fisher da Eq. (5.2) para vários estados puros $|\Psi_N\rangle$ úteis em metrologia quântica obtidos seguindo os protocolos ilustrados na Fig. 1. A diferença tipicamente menor que 0,2% que obtivemos entre essas quantidades está compatível com a precisão numérica dos cálculos.

Primeiramente, para cada estado quântico considerado escrito como na Eq. (5.1), computou-se a densidade de probabilidade do número de fótons no modo a , dada por $|A_{N,k}|^2$, para um número total de fótons N e $k = n_a$ representando o número de fótons correspondente ao modo a . Além disso, obteve-se a distribuição de probabilidade de fase relativa dada pela Eq. (4.26). Em seguida, calculou-se a informação de Fisher via distribuição de fase relativa F_{LSS} da Eq. (5.7) e a informação quântica de Fisher F_Q da Eq. (5.2), com o intuito de comparar essas duas quantidades.

Os resultados obtidos serão apresentadas graficamente por 3 figuras para cada caso, uma com a distribuição de probabilidade do número de fótons no modo a , n_a , outra com a distribuição de probabilidade de fase relativa, ambas com um valor fixo para o número total de fótons N e, finalmente, uma do comportamento de F_{LSS} e F_Q em função de N .

Os resultados estão organizados separadamente para cada caso abordado. Num primeiro momento, trataremos do esquema descrito pela Fig. 1b, cujo o estado inicial é um estado com N fótons em uma das entradas do divisor de feixes enquanto na outra tem-se o estado de vácuo. Neste exemplo, o limite esperado para a detecção de fase relativa é o limite quântico padrão, pois este estado se aproxima do regime clássico para um número de fótons grande. Em seguida os dois exemplos estão ilustrados pela Fig. 1a, para os quais a distribuição de probabilidade de fase relativa será avaliada a partir dos estados do tipo NOON [21] e de fase [7], que representam um estado já preparado no interior do interferômetro e caracterizam-se pelo número de fótons bem definido N . Na sequência, trataremos do esquema descrito na Fig. 1b, que parte da descrição de estados quânticos antes do primeiro divisor de feixes BS_1 para abordar estados iniciais do tipo Fock-gêmeos [23], que representam um estado inicial com o mesmo número de fótons para cada entrada do interferômetro, Fock correlacionado [24, 25], que representa um estado incidente com o número de fótons emaranhados no primeiro divisor de feixes e coerente-comprimido [26], com um estado de vácuo comprimido em uma entrada e um estado coerente na outra entrada do BS_1 .

5.1 Estado de Fock em uma Entrada do Interferômetro

A primeira classe de estados que trataremos é o estado de Fock $|N\rangle_{a'}$ em uma das entradas do interferômetro da Fig. 1b e um estado de vácuo na outra, ou seja, $|\Psi_{0_N}\rangle = |N\rangle_{a'} |0\rangle_{b'}$. O divisor de feixes BS_1 realiza a seguinte transformação nos operadores de aniquilação para os modos considerados

$$\begin{aligned}\hat{a}' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a} - i\hat{b}), \\ \hat{b}' &= \frac{1}{\sqrt{2}}(-i\hat{a} + \hat{b}).\end{aligned}\quad (5.8)$$

Com a ação das transformações descritas acima devido ao divisor de feixe BS_1 e uma fase $\theta_a = -\pi/2$, o estado quântico $|\Psi_N\rangle$ da Eq. (3.1) tem coeficientes dados por

$$A_{N,k} = \frac{i^{N-k}}{\sqrt{2^N}} \sqrt{\binom{N}{k}}, \quad (5.9)$$

tal que seus módulos quadrados estão mostrados na Fig. 3a para $N = 10$, obedecendo a relação a seguir

$$|A_{N,k}|^2 = \frac{1}{2} \binom{N}{k}. \quad (5.10)$$

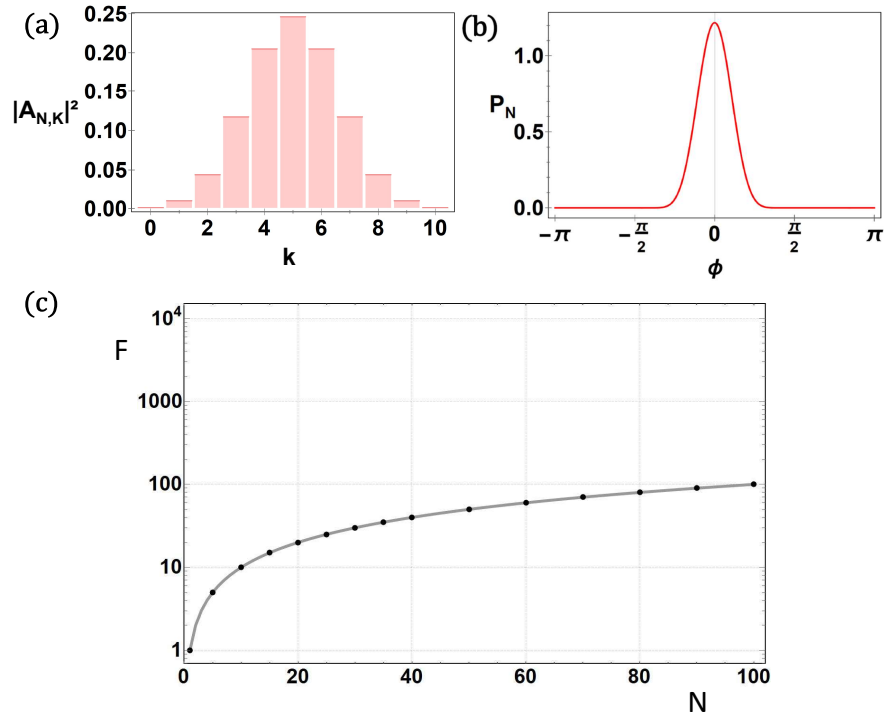


Figura 3 – Análise do caso de um estado de Fock em uma das entradas do interferômetro da Fig. 1b. (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $N = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $N = 10$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua), que neste caso é $F_Q = N$, e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), que foi computado numericamente, em função de N .

A distribuição de fase relativa da Eq. (4.26) está mostrada na Fig. 3b para $N = 10$, sendo a distribuição descrita por

$$P_N(\phi) = \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^N e^{-ij\phi} \frac{i^{N-j}}{\sqrt{2}} \sqrt{\binom{N}{j}} \right|^2. \quad (5.11)$$

Nesta situação, F_Q da Eq. (5.2) pode ser computada analiticamente, sendo igual a N . Para demonstrar este fato para a informação de Fisher quântica F_Q , temos que

$$\begin{aligned} F_Q &= 4 \langle (\Delta \hat{n}_a)^2 \rangle = 4 [\langle \Psi_N | \hat{n}_a^2 | \Psi_N \rangle - (\langle \Psi_N | \hat{n}_a | \Psi_N \rangle)^2] \\ &= 4 \left(\frac{N^2 + N}{4} - \frac{N^2}{4} \right) \\ &= N. \end{aligned} \quad (5.12)$$

A Fig. 3c mostra os valores analíticos para F_Q (linha cinza contínua) e os valores computados numericamente para F_{LSS} (círculos pretos), em função de N . Note que o eixo y do gráfico está em escala logarítmica, representação que também será adotada para expressar os resultados subsequentes. A diferença percentual média entre essas quantidades para os pontos mostrados na Fig. 3c é 0,00001%. Dessa forma, segundo nossa abordagem, para este caso é possível notar que tanto a estimativa de parâmetros via informação de Fisher quântica quanto via distribuição LSS podem ser consideradas equivalentes.

5.2 Estado NOON

A segunda classe de estados que trataremos será o estado NOON [21] nos modos a e b na Fig. 1a, que pode ser escrito como

$$|\Psi_N\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|N\rangle_a |0\rangle_b + |0\rangle_a |N\rangle_b]. \quad (5.13)$$

Os coeficientes da Eq. (5.1) são $A_{N,k} = (\delta_{k,0} + \delta_{k,N})/\sqrt{2}$ para este caso, estando o módulo ao quadrado dos coeficientes mostrados na Fig. 4a para $N = 10$. A distribuição de fase relativa para o estado NOON, que neste caso é dada por

$$\begin{aligned} P_N(\phi) &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^N e^{-ij\phi} A_{N,j} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^N e^{-ij\phi} \frac{(\delta_{j,0} + \delta_{j,N})}{\sqrt{2}} \right|^2 \\ &= \left| \frac{1 + e^{-iN\phi}}{2\sqrt{\pi}} \right|^2 \\ &= \frac{1 + \cos(N\phi)}{2\pi}, \end{aligned} \quad (5.14)$$

está mostrada na Fig. 4b para $N = 10$. Observe que o padrão de interferência de um estado NOON tem uma periodicidade $2\pi/N$, que é compatível com os N picos presentes na distribuição de fase relativa mostrada na Fig. 4b. Para obter a incerteza no parâmetro θ ilustrado na Fig. 1a, devemos obter a informação de Fisher quântica dada pela Eq. (5.2), tal que

$$\begin{aligned} F_Q &= 4 \langle (\Delta \hat{n}_a)^2 \rangle = 4 [\langle \Psi_N | \hat{n}_a^2 | \Psi_N \rangle - (\langle \Psi_N | \hat{n}_a | \Psi_N \rangle)^2] \\ &= 4 \left(\frac{N^2}{2} - \frac{N^2}{4} \right) \\ &= N^2. \end{aligned} \quad (5.15)$$

De posse desse resultado de F_Q , podemos obter de acordo com a Eq. (5.2) $\Delta\theta \geq 1/\sqrt{pF_Q} \propto 1/N$. Portanto, a incerteza mínima possível para o parâmetro θ é proporcional a $1/N$ quando se tem o estado NOON no interior do interferômetro, sendo dado pelo limite de Heisenberg.

Contudo, pode-se demonstrar que F_{LSS} também pode ser obtida analiticamente. Para demonstrar este resultado, tomamos como base a forma analítica da distribuição de fase relativa dada pela Eq. (5.14). Além disso, a relação que expressa F_{LSS} em função de $P_N(\phi)$ para o estado NOON é descrita pela Eq. (5.7). Logo, o primeiro passo dessa demonstração é calcular a derivada da distribuição de fase relativa com respeito a ϕ e, em seguida, elevar ao quadrado. Normalizando essa expressão pela própria distribuição, temos que

$$\frac{1}{P_N(\phi)} \left[\frac{\partial P_N(\phi)}{\partial \phi} \right]^2 = \frac{1}{P_N(\phi)} \left[-\frac{N \sin(N\phi)}{2\pi} \right]^2. \quad (5.16)$$

Manipulando algebricamente o lado direito da equação anterior e utilizando a Eq. (5.14), temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_N(\phi)} \left[\frac{\partial P_N(\phi)}{\partial \phi} \right]^2 &= \frac{1}{P_N(\phi)} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^2 \sin^2(N\phi) \frac{1 - \cos(N\phi)}{1 - \cos(N\phi)} \\ &= \frac{2\pi}{1 + \cos(N\phi)} \left(\frac{N}{2\pi} \right)^2 \sin^2(N\phi) \frac{1 - \cos(N\phi)}{1 - \cos(N\phi)} \\ &= \frac{N^2 \sin^2(N\phi) [1 - \cos(N\phi)]}{2\pi (1 - \cos^2(N\phi))} \\ &= \frac{N^2}{2\pi} [1 - \cos(N\phi)]. \end{aligned} \quad (5.17)$$

Por fim, podemos obter F_{LSS} integrando a relação anterior no intervalo $[-\pi, \pi]$, no qual contém toda a informação da distribuição sem ambiguidades

$$\begin{aligned} F_{\text{LSS}} &= \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \frac{N^2}{2\pi} [1 - \cos(N\phi)] \\ &= \frac{N^2}{2\pi} \left[\int_{-\pi}^{\pi} d\phi - \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \cos(N\phi) \right] \\ &= N^2. \end{aligned} \quad (5.18)$$

A Fig. 4c mostra o comportamento de $F_Q = N^2$ (linha cinza contínua) e o valor calculado numericamente para F_{LSS} (círculos pretos), em função de N . A diferença percentual média entre F_Q e F_{LSS} para os pontos mostrados na Fig. 4c é 0,14%. Como essas quantidades são analiticamente iguais para o estado NOON, seria esperado que a diferença entre F_Q e F_{LSS} fosse exatamente nula. Contudo, obtivemos uma diferença percentual não-nula, implicando que o valor de 0,14% reflete a precisão numérica de nossos cálculos, que está associada às limitações numéricas em realizar cálculos infinitesimais como o caso da integral. Portanto, pode-se tomar este valor como referência para a ordem de grandeza da precisão dos nossos cálculos para os próximos resultados. Dessa forma, a obtenção de uma diferença percentual médias entre F_Q e F_{LSS} que seja da mesma ordem de grandeza do caso do estado NOON abre precedentes para futuras investigações de uma correspondência analíticas entre F_Q e F_{LSS} para esses casos.

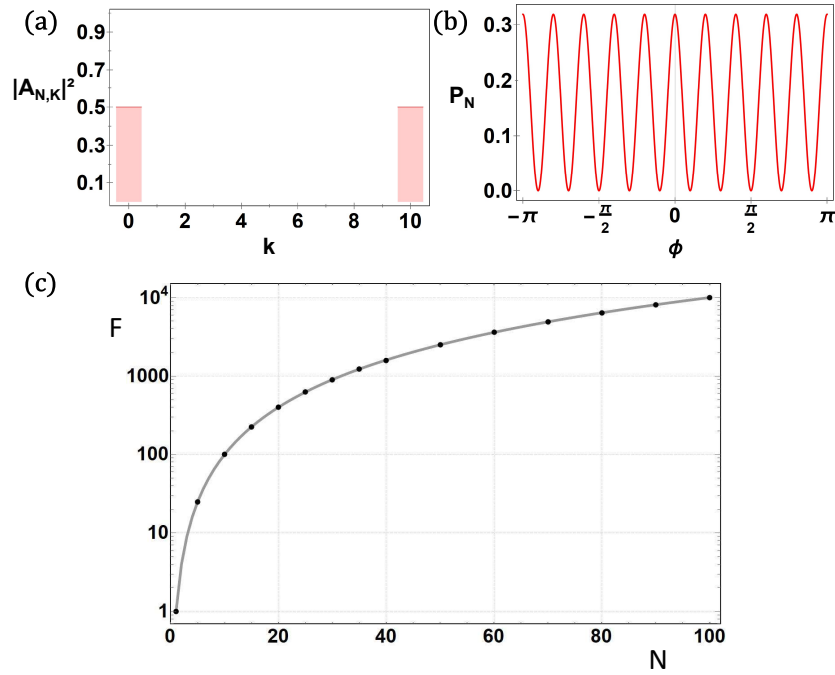


Figura 4 – Análise do caso de estados NOON no interferômetro da Fig. 1a. (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $N = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $N = 10$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua), que neste caso é $F_Q = N^2$, e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), que foi computado numericamente, em função de N .

Embora o estado NOON atinja o limite ótimo de precisão, é necessário um conhecimento *a priori* da localização aproximada da fase relativa. Isso se deve ao fato de que o padrão de interferência de um estado NOON apresenta uma periodicidade $2\pi/N$, com N picos presentes na distribuição de fase relativa mostrada na Fig. 4b. Assim, para evitar redundâncias, deve-se localizar a fase θ a uma N -ésima parte do intervalo entre $-\pi$ e π , de modo que podemos lidar arbitrariamente apenas com o pico central da distribuição de fase relativa e ainda sim preservar todas as informações que podem ser obtidas com o sistema.

Contudo, se a fase inicial θ for completamente desconhecida, o procedimento de estimativa deve ter um estágio inicial de determinação da localização aproximada dessa fase antes de se usar um estado NOON para melhorar a precisão da sua estimativa, garantindo que a interpretação dos dados não será ambígua.

5.3 Estado de Fase

O terceiro estado que trataremos é o estado de fase nos modos a e b na Fig. 1a, dado pela Eq. (4.24), sendo $|\Psi_N\rangle = |\tilde{\phi}^{(N)}\rangle$ descrito explicitamente por

$$|\tilde{\phi}^{(N)}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N+1}} \sum_{j=0}^N e^{-ij\tilde{\phi}} |j\rangle_a |N-j\rangle_b. \quad (5.19)$$

Consideraremos $\tilde{\phi} = 0$ para centralizar a distribuição de probabilidade $P_N(\phi)$ em zero. Os coeficientes da Eq. (5.1) para este caso são dados por $A_{N,k} = 1/\sqrt{N+1}$, tal que o módulo ao quadrado desses coeficientes está mostrado na Fig. 5a para $N = 10$. A distribuição de probabilidade de fase relativa para o caso dos estados de fase é dada por

$$\begin{aligned} P_N(\phi) &= \left| \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{j=0}^N e^{-ij\phi} \frac{1}{\sqrt{N+1}} \right|^2 \\ &= \frac{1}{2\pi(N+1)} \left| \sum_{j=0}^N e^{-ij\phi} \right|^2. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Utilizando o programa Mathematica, o resultado para a Eq. (5.20) da distribuição de probabilidade de fase relativa para o estado de fase é

$$P_N(\phi) = \frac{1}{2\pi(N+1)} \left\{ \frac{\sin[\phi(N+1)/2]}{\sin[\phi/2]} \right\}^2 \quad (5.21)$$

e está mostrado na Fig. 5b para $N = 10$.

A informação de Fisher quântica para este caso pode ser calculada analiticamente, sendo que

$$\begin{aligned} F_Q &= 4 \left[\langle \tilde{\phi}^{(N)} | \hat{n}_a^2 | \tilde{\phi}^{(N)} \rangle - \left(\langle \tilde{\phi}^{(N)} | \hat{n}_a | \tilde{\phi}^{(N)} \rangle \right)^2 \right] \\ &= 4 \left(\frac{2N^2 + N}{6} - \frac{N^2}{4} \right) \\ &= \frac{N^2 + 2N}{3}. \end{aligned} \quad (5.22)$$

A Fig. 5c mostra o comportamento de $F_Q = (N^2 + 2N)/3$ (linha cinza contínua) e F_{LSS} (círculos pretos), que foi calculado numericamente, em função de N . A diferença percentual média entre F_Q e F_{LSS} para os pontos mostrados na Fig. 5c é 0,20%.

É importante ressaltar que a distribuição de fase relativa para um estado de fase tem o pico central muito mais alto que os demais picos da distribuição, ao contrário de um estado NOON onde todos os picos têm a mesma altura. Portanto, considerando o estado de fase, a diferença de fase está localizada na região entre $-\pi/N$ e π/N , uma vez que a maior parte da probabilidade está concentrada nessa região sem ambiguidade.

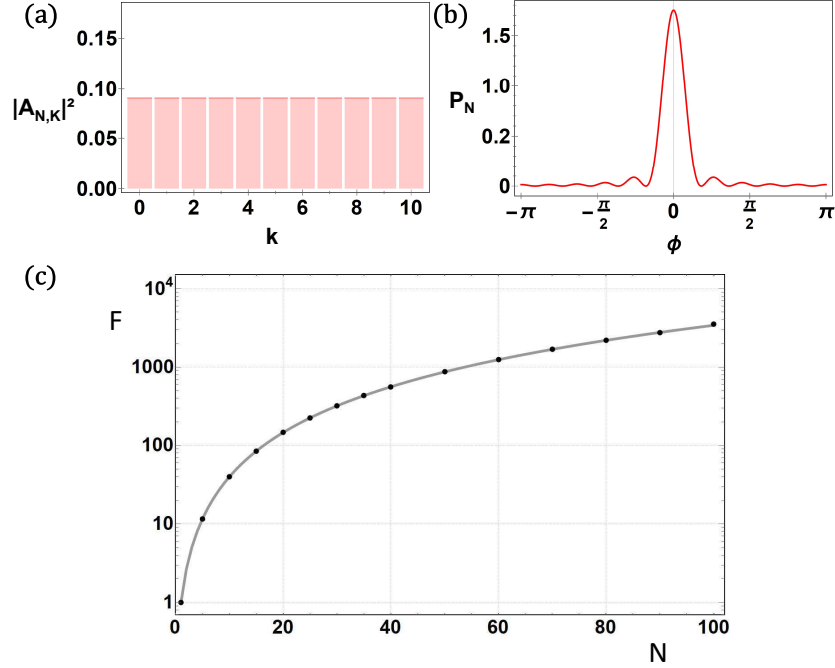


Figura 5 – Análise do caso estados de fase nas entradas do interferômetro da Fig. 1a. (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $N = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $N = 10$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua), que neste caso é $F_Q = (N^2 + 2N)/3$, e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), que foi computado numericamente, em função de N .

5.4 Estado de Fock Gêmeos

Para os próximos quatro exemplos de estados que trataremos, será considerado o protocolo de estimativa de fase representado pela Fig. 1b. Sendo o primeiro caso desse grupo de estados quânticos incidentes no interferômetro o estado $|\Psi_0\rangle = |N/2\rangle_{a'}|N/2\rangle_{b'}$, ou seja, dois estados de Fock com o mesmo número de fótons $N/2$ em cada modo [23] (sendo N par). O divisor de feixes BS_1 realiza a transformação nos operadores de aniquilação para os modos considerados de acordo com a Eq. (5.8), sendo que o estado de entrada $|\Psi_0\rangle$, ao atravessar o primeiro divisor de feixes, será levado em $|\Psi_N\rangle$, descrito pela Eq. (5.1).

Neste caso, ajusta-se a fase θ_a do esquema representado na Fig. 1b como $\theta_a = 0$, tal que o pico central da distribuição de fase relativa fique centralizado em $\phi = 0$. Dessa forma, no caso dos estados de Fock gêmeos, os coeficientes da Eq. (5.1) para o estado $|\Psi_N\rangle$

nos modos a e b após BS_1 são dados por

$$A_{N,k} = \frac{i^{N/2}}{\sqrt{2^N}} \sqrt{\binom{N}{N/2}} \sum_{q=0}^{N/2} i^{-2q+k} \binom{N/2}{q} \binom{N/2}{kq} / \sqrt{\binom{N}{k}}. \quad (5.23)$$

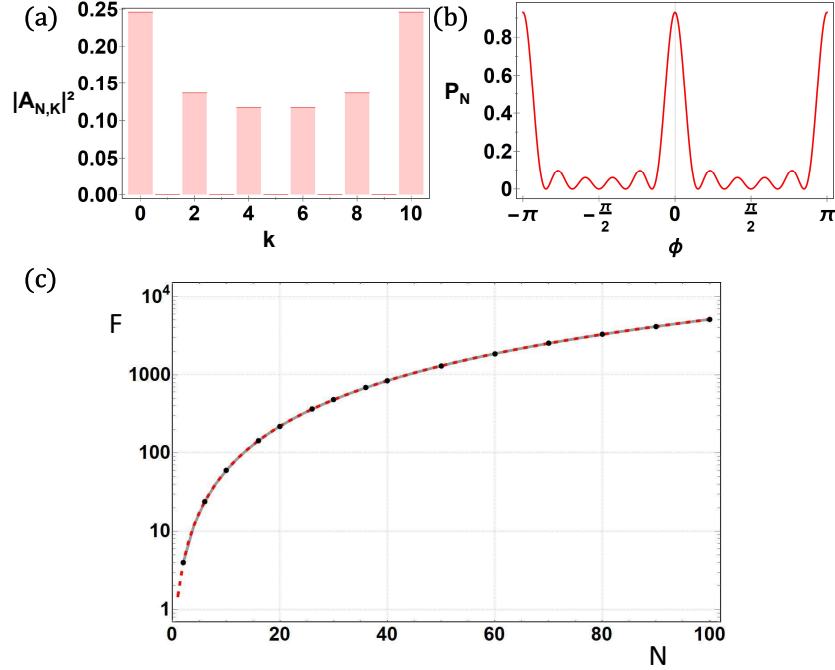


Figura 6 – Análise do caso de um estado de Fock gêmeos nas entradas do interferômetro da Fig. 1b. (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $N = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $N = 10$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua) e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), ambos computados numericamente, em função de N . A linha vermelha tracejada indica a função $(N^2 + 2N)/2$.

O módulo ao quadrado dos coeficientes estão mostrados na Fig. 6a para $N = 10$. A distribuição de fase relativa está mostrada na Fig. 6b para $N = 10$. A Fig. 6c mostra o comportamento de F_Q (linha cinza contínua) e F_{LSS} (círculos pretos), que foram computados numericamente, em função de N . A linha vermelha tracejada ilustra o comportamento mostrado na Ref. [47] para a informação quântica de Fisher do estado de Fock-gêmeos para N grande, $N^2/2 + N$. A diferença percentual média entre F_Q e F_{LSS} para os pontos mostrados na Fig. 6c é 0,05%.

5.5 Estado de Fock Correlacionado

Outro estado que trataremos é o estado de Fock correlacionado que chega às portas de entrada do interferômetro da Fig. 1b [24, 25], sendo descrito por

$$|\Psi_0\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|N_+\rangle_{a'} |N_-\rangle_{b'} + |N_-\rangle_{a'} |N_+\rangle_{b'}], \quad (5.24)$$

onde $N_{\pm} = (N \pm 1)/2$. Neste caso, N deve ser ímpar, uma vez que não há uma quantidade fracionada de fótons. Novamente, o BS_1 transformará os operadores de aniquilação de acordo com a Eq. (5.8). Consideraremos que a fase θ_a após o BS_1 na Fig. 1b é $\theta_a = 0$.

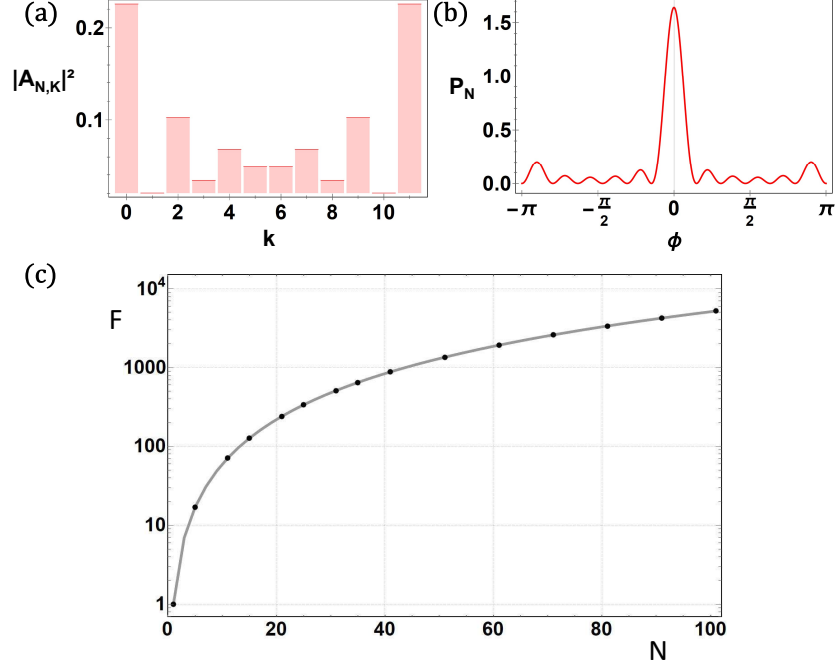


Figura 7 – Análise do caso de um estado de Fock correlacionado nas entradas do interferômetro da Fig. 1b. (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $N = 11$, (b) distribuição de fase relativa com $N = 11$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua) e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), ambos computados numericamente, em função de N .

Os coeficientes escritos na forma da Eq. (5.1) para o estado inicial descrito pela Eq. (5.24) são

$$A_{N,k} = \frac{i^{N/2}}{\sqrt{2^{N-1}}} \sqrt{\binom{N}{N_+}} \sum_{q=0}^{N_+} \cos \left[\frac{\pi}{4} (2k - 4q + 1) \right] \binom{N_+}{q} \binom{N - N_+}{k - q} / \sqrt{\binom{N}{k}}, \quad (5.25)$$

tal que os módulos quadrados desses coeficientes estão mostrados na Fig. 7a para $N = 11$. A distribuição de fase relativa da Eq. (4.26) está mostrada na Fig. 7b para $N = 11$. Já Fig. 7c mostra o comportamento de F_Q (linha cinza contínua) e F_{LSS} (círculos pretos), que foram computados numericamente, em função de N . A diferença percentual média entre F_Q e F_{LSS} para os pontos mostrados na Fig. 7c é 0,05%.

5.6 Estado Coerente-Comprimido

Para melhorar a precisão do sistema, consideraremos agora a proposta inicial de Caves [26], na qual um estado de vácuo comprimido $|\xi\rangle_{a'}$ e um estado coerente $|\alpha\rangle_b$ chegam

nas entradas do interferômetro da Fig. 1b, isto é, $|\Psi\rangle_0 = |\xi\rangle_{a'} |\alpha\rangle_{b'}$. Vale ressaltar que este procedimento é atualmente utilizado na melhoria da sensibilidade de detectores de ondas gravitacionais [8, 18–20]. Na base de Fock, esses estados de entrada podem ser escritos como

$$|\xi\rangle_{a'} = \sum_{m=0}^{\infty} S_{2m} |2m\rangle_{a'}, \quad |\alpha\rangle_{b'} = \sum_{N=0}^{\infty} C_N |N\rangle_{b'}, \quad (5.26)$$

onde $S_{2m} = \sqrt{(2m)!} (-e^{i\theta_s} \tanh r)^m / (2^m m! \sqrt{\cosh r})$ e $C_N = e^{-|\alpha|^2/2} (\alpha e^{i\theta_c})^N / \sqrt{N!}$. Observe que para condições ótimas, ou seja, que permitem alcançar o limite máximo de precisão, devemos ter $\theta_s - 2\theta_c = 0$. Com a ação das transformações descritas na Eq. (5.8) devido ao divisor de feixe BS₁ da Fig. 1b, o estado quântico $|\Psi\rangle$ da Eq. (3.1) tem coeficientes dados por

$$A_{N,k} = \sum_{m=0}^{N/2} \frac{i^{N-2m} C_{N-2m} S_{2m}}{\sqrt{2^N}} \sqrt{\binom{N}{2m}} \times \sum_{q=0}^{N-2m} i^{-2q+k} \binom{N-2m}{q} \binom{2m}{k-q} / \sqrt{\binom{N}{k}}, \quad (5.27)$$

onde consideraremos que a fase θ_a após a BS₁ é $\theta_a = -\pi/2$ no intuito de centralizar o pico da distribuição de fase em $\phi = 0$. Note que não temos um número total definido de fótons, uma vez que as somatórias na Eq. (5.26), que descrevem os estados de entrada, possuem infinitos termos. Assim, para fazer comparações, projetaremos o estado que descreve o sistema após passar por BS₁ em um número total de fótons igual ao número médio de fótons do estado original.

A precisão máxima deste protocolo ocorre quando o número médio de fótons do estado comprimido é igual ao número médio de fótons do estado coerente nas entradas do interferômetro, com $\sinh^2(r) = |\alpha|^2 = \bar{N}/2$, sendo \bar{N} o número médio de fótons do estado total [36]. Considerando o estado quântico nesta configuração e projetando este estado em um número médio total de fótons \bar{N} , a Fig. 8a mostra o módulo quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ da Eq. (5.27) para $\bar{N} = 10$. A distribuição de fase relativa da Eq. (4.26) é mostrada na Fig. 8b, novamente para $\bar{N} = 10$. A Fig. 8c mostra o comportamento de F_Q (linha cinza contínua) e F_{LSS} (círculos pretos), que foram computados numericamente, em função de \bar{N} , sempre em uma configuração com $\sinh^2(r) = |\alpha|^2 = \bar{N}/2$. A linha vermelha tracejada mostra a função \bar{N}^2 , mostrando que este esquema é realmente ótimo, atingindo o limite de Heisenberg. A diferença percentual média entre F_Q e F_{LSS} para os pontos mostrados na Fig. 8c é de 0,05%.

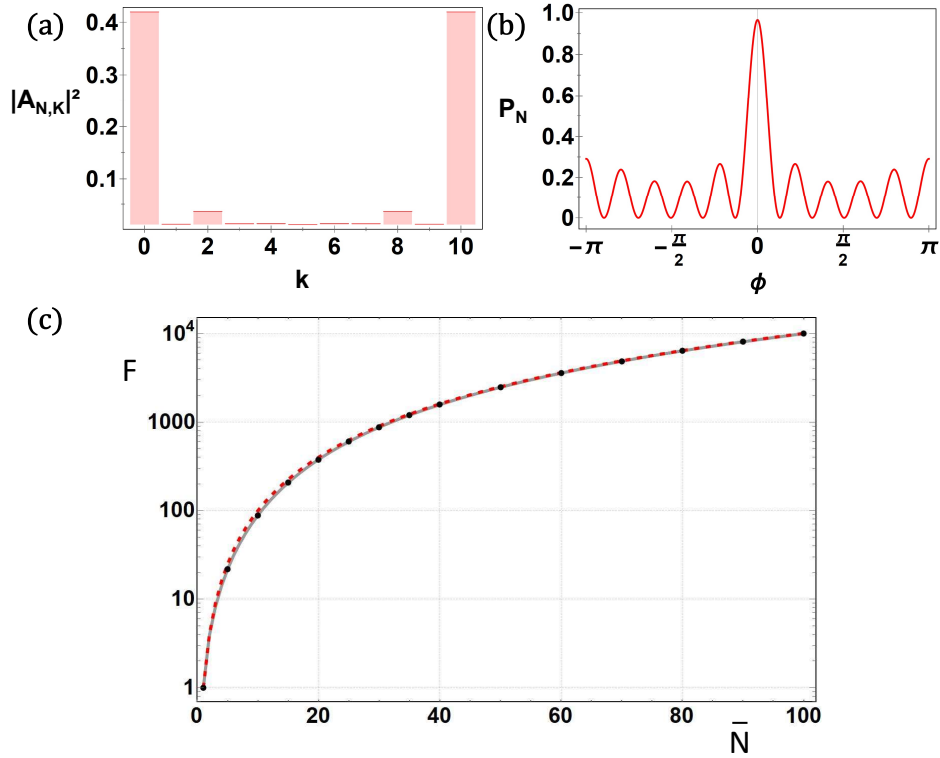


Figura 8 – Análise de um estado comprimido e um estado coerente nas entradas do interferômetro da Fig. 1b, na configuração ótima com $\sinh^2(r) = |\alpha|^2 = \bar{N}/2$, com o estado nos modos a e b projetado em um número total de fótons \bar{N} . O estado resultante é dado pela Eq. (5.26) com os coeficientes da Eq. (5.27). (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $\bar{N} = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $\bar{N} = 10$, e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua) e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), ambos computados numericamente, em função de $\bar{N} = 10$. A linha vermelha tracejada mostra a função \bar{N}^2 .

Existe outro regime onde esta configuração com um estado comprimido e um estado coerente nas portas de entrada do interferômetro da Fig. 1b é muito útil. Nessa configuração, temos $\sinh^2(r) \approx \sqrt{\bar{N}}/2$ com $\bar{N} \gg 1$, tal que a informação sobre a fase θ introduzida no interferômetro pode ser extraída unicamente da diferença nos números de fótons detectados pelos detectores D_1 e D_2 neste regime [3, 4]. Uma desvantagem é que a incerteza mínima na fase estimada escala com $1/\bar{N}^{3/4}$, não com $1/\bar{N}$ como no caso ótimo. Novamente, projetamos o estado considerado em um número médio total de fótons igual a \bar{N} para obter um estado como o da Eq. (5.1) com os coeficientes $A_{N,k}$ dados pela Eq. (5.27) neste regime com $\sinh^2(r) = \sqrt{\bar{N}}/2$. A Fig. 9a mostra o módulo quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ da Eq. (5.27) para $\bar{N} = 10$. A distribuição de fase relativa da Eq. (4.26) é mostrada na Fig. 9b, novamente para $\bar{N} = 10$. A Fig. 8c mostra o comportamento de F_Q (linha cinza contínua) e F_{LSS} (círculos pretos), que foram computados numericamente, em função de \bar{N} . A linha vermelha tracejada mostra a função $1.45\bar{N}^{3/2}$ com o intuito de servir como um guia de visualização. A diferença percentual média entre F_Q e F_{LSS} para os pontos mostrados na Fig. 8c é 0,13%.

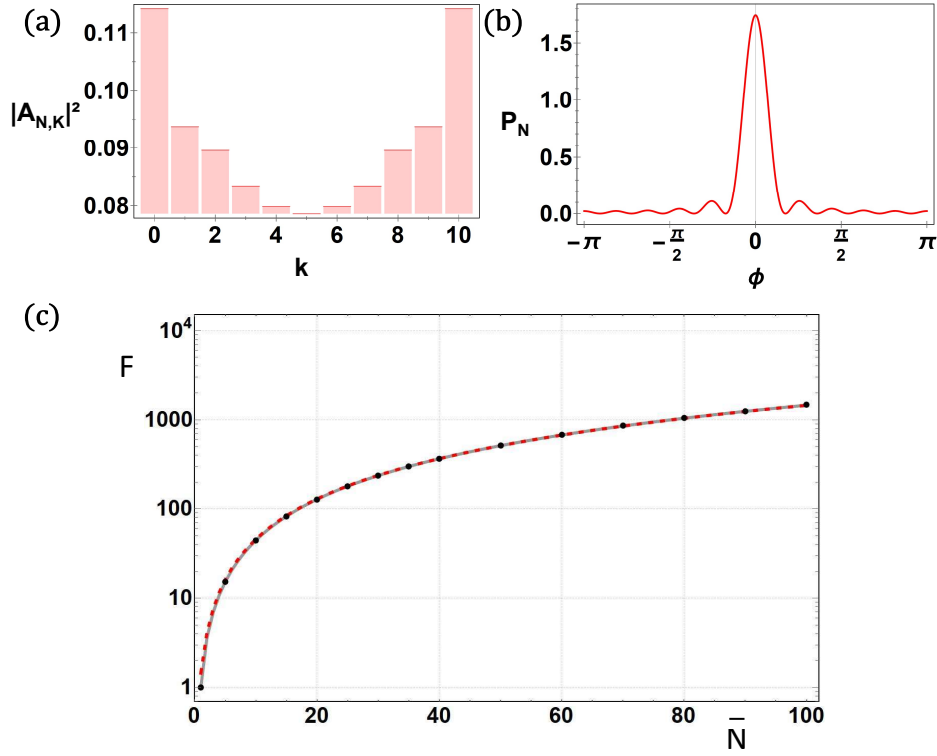


Figura 9 – Análise de um estado comprimido e um estado coerente nas entradas do interferômetro da Fig. 1b, em uma configuração com $\sinh^2(r) = \sqrt{\bar{N}}/2$, com o estado nos modos a e b projetado em um número total de fótons \bar{N} . O estado resultante é dado pela Eq. (5.26) com os coeficientes da Eq. (5.27). (a) Módulo ao quadrado dos coeficientes $A_{N,k}$ com $\bar{N} = 10$, (b) distribuição de fase relativa com $\bar{N} = 10$ e (c) F_Q da Eq. (5.2) (linha cinza contínua) e F_{LSS} da Eq. (5.7) (círculos pretos), ambos computados numericamente, em função de \bar{N} . A linha vermelha tracejada mostra a função $1.45\bar{N}^{3/2}$.

5.7 Discussão

Em suma, a ideia deste trabalho foi mostrar como a distribuição de probabilidade de fase relativa introduzida por Luis e Sánchez-Soto [7] está associada à incerteza mínima na estimativa do parâmetro de fase óptica θ introduzido em um interferômetro, para estados puros ópticos de dois modos úteis em metrologia quântica. Uma vez que essa incerteza é quantificada pela informação de Fisher quântica F_Q dada pela Eq. (5.2), a equivalência aproximada dessa quantidade com a informação de Fisher calculada via distribuição de fase relativa F_{LSS} dada pela Eq. (5.7) leva ao fato de que para se detectar uma variação $\delta\theta$ na quantidade θ , ela deve alterar sensivelmente a distribuição de probabilidade de fase relativa do estado quântico inicial. Nesse sentido, podemos ver que, de acordo com a Eq. (5.2) e a Eq. (3.20), uma minimização da incerteza na estimativa do parâmetro de fase óptica θ é alcançada por uma maximização de F_Q e, conseqüentemente, de $\Delta\hat{n}_a$, que representa o desvio padrão no número de fótons no modo a na Fig. 1. Em outras palavras, a quantidade $\Delta\hat{n}_a$ nos informa o quão distante o número de fótons do modo a está em relação à média.

Logo, a consequência de quanto mais longe essa quantidade estiver da média é que a quantidade $\Delta\phi$ estará bem localizada, devido à relação de complementaridade entre a fase relativa e o número de fótons no modo a . Com intuito de maximizar $\Delta\hat{n}_a$, os coeficientes $A_{N,k}$ na Eq. (5.1) devem ter grandes amplitudes nos extremos $k = 0$ e $k = N$. Isso é verdade para todos os estados quânticos úteis em metrologia quântica que foram estudados neste trabalho.

Por exemplo, destaca-se o estado NOON (como visto na Fig. 4a) e o estado ótimo obtido com a incidência de um estado coerente-comprimido nas entradas do interferômetro (Fig. 8a), uma vez que ambos sistemas atingem o limite de Heisenberg [2], $\Delta\theta = 1/N$ (com $p = 1$). Para esses estados, as componentes com $k = 0$ e $k = N$ levam a uma alta contribuição de um termo de oscilação $\cos(N\phi)$ na distribuição de probabilidade de fase relativa, como pode ser visto nas Figs. 4b e 8b, minimizando a largura dos picos centrais. Por outro lado, podemos observar que esses comportamentos não ocorrem para um estado de Fock-vácuo nas entradas do interferômetro, como evidenciado pelas Figs. 3a e 3b, notando que à medida que o valor de n_a se aproxima da média a incerteza na diferença de fase piora em localização. Por esta razão, destacamos que o uso de fontes de luz quântica pode ser considerado o responsável pelo aprimoramento nas medições de fase relativa em protocolos de metrologia quântica.

Desse modo, observamos que é possível mensurar a diferença de fase no interior de um interferômetro quando se perturba de forma significativa a distribuição de probabilidade de fase relativa, por meio da abordagem proposta por Luis e Sánchez-Soto [7]. Além disso, contemplando todos os resultados apresentados nesta tese, mostramos que as diferenças médias entre as informações quânticas de Fisher F_Q e F_{LSS} obtidas das distribuições de fases relativas para os estados testados são da ordem de 0,1%. Essa diferença é compatível com a precisão numérica dos cálculos, um fato que levanta a questão se existe uma equivalência formal analítica entre essas quantidades, ainda sob nossa investigação. Os resultados apresentados neste capítulo foram publicados na referência [27].

6 Conclusão

Apresentou-se nesta tese que o fóton é considerado uma excitação elementar de um modo quantizado de um campo eletromagnético [1]. Ao quantizar o campo eletromagnético, foi possível atribuir melhorias significativas na medição de variação da fase relativa no interior de um interferômetro. Certamente, este fato constituiu num avanço importante para o campo da metrologia quântica fotônica [4]. Ademais, vale a pena ressaltar que esse aprimoramento da medição não é contemplado pela teoria clássica da luz, apontando para a relevância de estudos nesta direção com o propósito de superar os limites de precisão impostos pela natureza quântica da luz. Além disso, destacou-se em nossa abordagem alguns estados quânticos relevantes para a descrição do campo de luz, como por exemplo o estado de Fock-vácuo, NOON, fase, Fock gêmeos, Fock correlacionado e coerente-comprimido. Em particular, o estado coerente-comprimido é considerado um estado que eleva o nível de precisão na medição de grandezas físicas, tal como uma pequena variação de fase no interior de um interferômetro. Dessa forma, esse estado é particularmente útil em aplicações de alta sensibilidade como a detecção da passagem de uma onda gravitacional [8, 18–20, 28–31].

Para realizar medições com alta precisão, a teoria da estimativa de parâmetros define um limite conhecido por Cramér-Rao, que representa uma incerteza mínima no parâmetro a ser mensurável [3]. É interessante notar que essa incerteza mínima está relacionada com a informação de Fisher quântica F_Q , que otimiza a estratégia de medição. Ademais, notamos que F_Q está relacionada com a distância entre estados quânticos que se diferem pelo parâmetro de fase θ . Dessa forma, quando F_Q é grande, variando-se infinitesimalmente θ , gera-se uma grande perturbação na distribuição de probabilidade $P(\theta)$ levando à possibilidade de detecção do parâmetro. Sabe-se que o limite máximo de precisão inerente à natureza quântica da luz é conhecido como o limite de Heisenberg. Isto é, a incerteza do parâmetro θ é descrita em termos do número de fótons N por $\Delta\theta = 1/N$.

Por outro lado, há uma outra abordagem que mostra como se obter a informação sobre a diferença de fase óptica entre dois modos em um interferômetro do tipo MZ a partir do cálculo da distribuição de probabilidade de fase relativa [7]. Com o intuito de mensurar a fase introduzida no interior de um interferômetro, mostramos como a distribuição de probabilidade de fase relativa para os estados quânticos ópticos de dois modos puros úteis em metrologia quântica está associada à incerteza mínima na estimativa de uma pequena fase óptica θ adicionada a um desses modos. Para tal, mostramos que a diferença média entre as informações de Fisher obtidas da distribuição de fases relativas e as informações quânticas de Fisher para os estados testados é menor que 0,1%. Esta diferença é compatível com a precisão numérica dos cálculos, levantando uma pertinente questão sobre a existência de uma equivalência formal entre essas quantidades, ainda sob

nossa investigação. A equivalência aproximada entre essas quantidades ilustra o fato de que, para que uma variação $\delta\theta$ na quantidade θ seja detectável, ela deve alterar sensivelmente a distribuição de fase relativa do estado quântico inicial.

Portanto, ressalta-se que a abordagem para conhecer a fase relativa no interior de um interferômetro por meio da distribuição de probabilidade de diferença de fase alcança, dentro de uma faixa de erro restrita, os mesmos resultados que a teoria da estimativa de parâmetros previa através do limite de Cramér-Rao via informação de Fisher quântica. Dessa forma, a distribuição de probabilidade de diferença de fase pode ser associada com a precisão na medição da variação da fase relativa em interferometria.

Num panorama prático que pode ser descrito em metrologia quântica, a preparação do estado inicial não é perfeita e o sistema é submetido a processos de decoerência, tornando a estimativa da precisão máxima do protocolo uma tarefa difícil [48]. Todavia, uma possível extensão dos resultados apresentados nesta tese é o estudo para estados mistos do campo quântico de dois modos, que pode ser útil para fornecer estimativas para a precisão do protocolo com base na distribuição de fase relativa. Futuramente, a mesma abordagem desta tese pode ser aplicada no estudo de estados mais robustos num panorama prático, no qual deve-se considerar perdas, como processos de decoerência, por exemplo. Além da abordagem tomando a distribuição de fase relativa de campos quânticos apresentada nesta tese, pode-se analisar a largura dessa distribuição para apresentar uma explicação geral para a redução de ruído em experimentos que produzem e caracterizam estados de luz comprimida [49]. Se levarmos em conta que o campo de um laser não é um estado coerente, mas uma combinação incoerente de estados coerentes com fases aleatórias [50], o que equivale a uma combinação incoerente de estados de Fock [51, 52], a conclusão é que não é possível produzir um estado comprimido em um modo nas configurações usuais [49]. No entanto, a largura da distribuição de fase relativa entre o campo de sinal e o campo usado como oscilador local diminui com o aumento do parâmetro de compressão da forma esperada [49]. Este fato pode ser considerado a razão fundamental para a redução de ruído nos experimentos. Assim, a análise da distribuição de fase relativa entre dois modos ópticos quânticos pode esclarecer outros aspectos importantes da metrologia quântica, além dos tratados nesta tese.

Referências

- [1] C. C. Gerry e P. L. Knight: *Introductory quantum optics*. Cambridge University Press, 2008. Citado 14 vezes nas páginas 15, 16, 17, 18, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 33, 34, 35 e 54.
- [2] V. Giovannetti, S. Lloyd e L. Maccone: *Quantum-enhanced measurements: Beating the standard quantum limit*. *Science*, 306(5700):1330–1336, 2004. <https://doi.org/10.1126/science.1104149>. Citado 4 vezes nas páginas 15, 26, 28 e 53.
- [3] R. Demkowicz-Dobrzański, M. Jarzyna e J. Kolodyński: *Quantum limits in optical interferometry*. *Progress in Optics*, 60:345–435, 2015. <https://doi.org/10.1016/bs.po.2015.02.003>. Citado 7 vezes nas páginas 15, 16, 29, 30, 39, 51 e 54.
- [4] E. Polino, M. Valeri, N. Spagnolo e F. Sciarrino: *Photonic quantum metrology*. *AVS Quantum Science*, 2(2):024703, 2020. <https://doi.org/10.1116/5.0007577>. Citado 8 vezes nas páginas 15, 16, 28, 29, 30, 39, 51 e 54.
- [5] S. M. Barnett e D. T. Pegg: *Quantum theory of optical phase correlations*. *Physical Review A*, 42(11):6713–6720, 1990. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.42.6713>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- [6] A. Luis e L. L. Sánchez-Soto: *Phase-difference operator*. *Physical Review A*, 48(6):4702–4708, 1993. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.48.4702>. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.
- [7] A. Luis e L. L. Sánchez-Soto: *Probability distributions for the phase difference*. *Physical Review A*, 53(1):495–501, 1996. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.53.495>. Citado 9 vezes nas páginas 15, 17, 35, 36, 37, 41, 52, 53 e 54.
- [8] J. Aasi *et al.*: *Enhanced sensitivity of the LIGO gravitational wave detector by using squeezed states of light*. *Nature Photonics*, 7:613–619, 2013. <https://doi.org/10.1038/nphoton.2013.177>. Citado 5 vezes nas páginas 16, 18, 26, 50 e 54.
- [9] Pirandola, S., B. R. Bardhan, T. Gehring, C. Weedbrook e S. Lloyd: *Advances in photonic quantum sensing*. *Nature Photonics*, 60:724–733, 2018. <https://doi.org/10.1038/s41566-018-0301-6>. Citado na página 16.
- [10] Daryanoosh, S., S. Slussarenko, D. W. Berry, H. M. Wiseman e G. J. Pryde: *Experimental optical phase measurement approaching the exact Heisenberg limit*. *Nature Communications*, 9:4606, 2018. <https://doi.org/10.1038/s41467-018-06601-7>. Citado na página 16.

- [11] Piera, R. S., S. P. Walborn e G. H. Aguilar: *Experimental demonstration of the advantage of using coherent measurements for phase estimation in the presence of depolarizing noise*. Physical Review A, 103(1):012602, 2021. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.103.012602>. Citado na página 16.
- [12] M. Valeri *et al.*: *Experimental adaptive Bayesian estimation of multiple phases with limited data*. npj Quantum Information, 6(1):92, 2020. <https://doi.org/10.1038/s41534-020-00326-6>. Citado na página 16.
- [13] S. Hong *et al.*: *Quantum enhanced multiple-phase estimation with multi-mode $N00N$ states*. Nature Communications, 12:5211, 2021. <https://doi.org/10.1038/s41467-021-25451-4>. Citado na página 16.
- [14] L.-Z. Liu *et al.*: *Distributed quantum phase estimation with entangled photons*. Nature Photonics, 15:137, 2021. <https://doi.org/10.1038/s41566-020-00718-2>. Citado na página 16.
- [15] C. K. Hong, Z. Y. Ou e L. Mandel: *Measurement of subpicosecond time intervals between two photons by interference*. Physical Review Letters, 59(18):2044–2046, 1987. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.59.2044>. Citado na página 16.
- [16] Aguilar, G. H., R. S. Piera, P. L. Saldanha, R. L. de Matos Filho e S. P. Walborn: *Robust interferometric sensing using two-photon interference*. Physical Review Applied, 14(2):024028, 2020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevApplied.14.024028>. Citado na página 16.
- [17] Walborn, S. P., G. H. Aguilar, L. Davidovich P. L. Saldanha e R. L. de Matos Filho: *Interferometric sensing of the tilt angle of a gaussian beam*. Physical Review Research, 2(3):033191, 2020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevResearch.2.033191>. Citado na página 16.
- [18] The LIGO Scientific Collaboration: *A gravitational wave observatory operating beyond the quantum shot-noise limit*. Nature Physics, 7:962–965, 2011. <https://doi.org/10.1038/nphys2083>. Citado 5 vezes nas páginas 16, 18, 26, 50 e 54.
- [19] Y. Zhao *et al.*: *Frequency-dependent squeezed vacuum source for broadband quantum noise reduction in advanced gravitational-wave detectors*. Physical Review Letters, 124(17):171101, 2020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.171101>. Citado 5 vezes nas páginas 16, 18, 26, 50 e 54.
- [20] V. Sequino: *Quantum noise reduction in Advanced Virgo*. Physica Scripta, 96(10):104014, 2021. <https://doi.org/10.1088/1402-4896/ac0d30>. Citado 5 vezes nas páginas 16, 18, 26, 50 e 54.

- [21] J. J. Bollinger, W. M. Itano, D. J. Wineland e D. J. Heinzen: *Optimal frequency measurements with maximally correlated states*. Physical Review A, 54(6):R4649–R4652, 1996. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.R4649>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 41 e 43.
- [22] B. C. Sanders e G. J. Milburn: *Optimal quantum measurements for phase estimation*. Physical Review Letters, 75(16):2944–2947, 1995. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.2944>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 37.
- [23] M. J. Holland e K. Burnett: *Interferometric detection of optical phase shifts at the Heisenberg limit*. Physics Review Letters, 71(9):1355–1358, 1993. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.71.1355>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 41 e 47.
- [24] B. Yurke: *Input states for enhancement of fermion interferometer sensitivity*. Physical Review Letters, 56(15):1515–1517, 1986. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.56.1515>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 41 e 48.
- [25] J. P. Dowling: *Correlated input-port, matter-wave interferometer: Quantum-noise limits to the atom-laser gyroscope*. Physical Review A, 57(6):4736–4746, 1998. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.57.4736>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 41 e 48.
- [26] C. M. Caves: *Quantum-mechanical radiation-pressure fluctuations in an interferometer*. Physical Review Letters, 45:75, 1980. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.45.75>. Citado 5 vezes nas páginas 17, 29, 39, 41 e 49.
- [27] Braz, Felipe F., Tamiris R. Calixto e Pablo L. Saldanha: *Relative phase distribution and the precision of optical phase sensing in quantum metrology*. Optics Communications, 527:128954, 2023, ISSN 0030-4018. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0030401822006010>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 53.
- [28] H. Vahlbruch, M. Mehmet, K. Danzmann e R. Schnabel: *Detection of 15 dB squeezed states of light and their application for the absolute calibration of photoelectric quantum efficiency*. Physical Review Letters, 117(11):110801, 2016. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.117.110801>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 26 e 54.
- [29] F. Acernese *et al.*: *Increasing the astrophysical reach of the advanced virgo detector via the application of squeezed vacuum states of light*. Physical Review Letters, 123(23):231108, 2019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.231108>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 26 e 54.
- [30] M. Tse *et al.*: *Quantum-enhanced advanced LIGO detectors in the era of gravitational-wave astronomy*. Physical Review Letters, 123(23):231107, 2019. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.123.231107>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 26 e 54.

- [31] L. McCuller *et al.*: *Frequency-dependent squeezing for advanced LIGO*. Physical Review Letters, 124(17):171102, 2020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.124.171102>. Citado 3 vezes nas páginas 18, 26 e 54.
- [32] J. B. Marion: *Classical dynamics of particles and systems*. Academic Press, (2013). Citado na página 20.
- [33] Adesso, G., F. Dell'Anno, S. De Siena, F. Illuminati e L. A. M. Souza: *Optimal estimation of losses at the ultimate quantum limit with non-Gaussian states*. Physical Review A, 79:040305, 2009. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.79.040305>. Citado na página 26.
- [34] A. I. Lvovsky: *cap.5 Squeezed Light - Photonics*. John Wiley & Sons, Ltd, 2015. Citado na página 26.
- [35] A. A. Michelson e E. W. Morley: *On the relative motion of the Earth and of the luminiferous ether*. Sidereal Messenger, 6:306–310, 1887. Citado na página 26.
- [36] L. Pezzé e A. Smerzi: *Mach-Zehnder interferometry at the Heisenberg limit with coherent and squeezed-vacuum light*. Physical Review Letters, 100(7):073601, 2008. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.100.073601>. Citado 2 vezes nas páginas 28 e 50.
- [37] C. M. Caves, S. L. Braunstein e: *Statistical distance and the geometry of quantum states*. Physics Review Letters, 72(22):3439, 1994. <https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.72.3439>. Citado na página 29.
- [38] Pezzè, L., A. Smerzi, M. K. Oberthaler, R. Schmied e e P. Treutlein: *Quantum metrology with nonclassical states of atomic ensembles*. Reviews of Modern Physics, 90(3):035005, 2018. <https://doi.org/10.1103/RevModPhys.90.035005>. Citado 3 vezes nas páginas 29, 40 e 41.
- [39] P. Kok, J. S. Sidhu e: *Geometric perspective on quantum parameter estimation*. AVS Quantum Science, 2(1):014701, 2020. <https://doi.org/10.1116/1.5119961>. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 41.
- [40] L. L. Cam e G. L. Yang: *Asymptotics in statistics - Some basic concepts*. Springer, 2000. Citado na página 29.
- [41] D. T. Pegg e S. M. Barnett: *Unitary phase operator in quantum mechanics*. Europhysics Letters, 6(6):483–487, 1988. <https://doi.org/10.1209/0295-5075/6/6/002>. Citado na página 33.
- [42] L. Mandel e E. Wolf: *Optical coherence and quantum optics*. Cambridge University Press, (2008). Citado na página 33.

- [43] D. T. Pegg e S. M. Barnett : *Quantum optical phase*. Journal of Modern Optics, 44(2):225–264, 1997. <https://doi.org/10.1080/09500349708241868>. Citado na página 33.
- [44] A. Luis e L. Sánchez-Soto: *Quantum phase difference, phase measurements and stokes operators*. Progress in Optics, 41:421–481, 2000, ISSN 0079-6638. [https://doi.org/10.1016/S0079-6638\(00\)80021-9](https://doi.org/10.1016/S0079-6638(00)80021-9). Citado 2 vezes nas páginas 33 e 37.
- [45] D. S. Simon, G. Jaeger e A. V. Sergienko: *Quantum metrology, imaging, and communication*. Springer Nature, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 34.
- [46] A. Luis e J. Peřina: *Optimum phase-shift estimation and the quantum description of the phase difference*. Physical Review A, 54(5):4564–4570, 1996. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.54.4564>. Citado na página 37.
- [47] J. Sahota e N. Quesada: *Quantum correlations in optical metrology: Heisenberg-limited phase estimation without mode entanglement*. Physical Review A, 91(1):013808, 2015. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.91.013808>. Citado na página 48.
- [48] B. M. Escher, R. L. de Matos Filho e L. Davidovich: *General framework for estimating the ultimate precision limit in noisy quantum-enhanced metrology*. Nature Physics, 7:406–411, 2011. <https://doi.org/10.1038/nphys1958>. Citado na página 55.
- [49] T. R. Calixto e P. L. Saldanha: *Describing squeezed-light experiments without squeezed-light states*. Physical Review A, 102(5):053723, 2020. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.102.053723>. Citado na página 55.
- [50] W. F. Walls e G. J. Milburn: *Quantum optics*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2008. Citado na página 55.
- [51] K. Mølmer: *Optical coherence: A convenient fiction*. Physics Review A, 55(4):3195–3203, 1997. <https://doi.org/10.1103/PhysRevA.55.3195>. Citado na página 55.
- [52] P. L. Saldanha: *Quantum analysis of the direct measurement of light waves*. New Journal of Physics, 16(1):013021, 2014. <https://doi.org/10.1088%2F1367-2630%2F16%2F1%2F013021>. Citado na página 55.