

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

Departamento de Engenharia de Estruturas

Curso de Especialização em Análise e Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado e  
Aço

Jefferson Da Silva Carvalho

**ESTUDO SOBRE ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS BASEADOS NA TEORIA DE  
REISSNER-MINDLIN**

Belo Horizonte  
2019

Jefferson da Silva Carvalho

**ESTUDO SOBRE ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS BASEADOS NA TEORIA DE  
REISSNER-MINDLIN**

Monografia de especialização apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira

Belo Horizonte  
2019



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
*Curso de Especialização em Análise e Dimensionamento de  
Estruturas de Concreto Armado e Aço*

## ATA DA DEFESA

**“Estudo sobre Elementos Finitos de Placas Baseados na Teoria de  
Reissner-Mindlin”**


**JEFFERSON DA SILVA CARVALHO**

Trabalho Final defendido perante a banca examinadora, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Especialista em Análise e Dimensionamento de Estruturas de Concreto Armado e Aço”

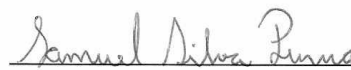
Aprovada em 18 de fevereiro de 2019.

Por:

Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira  
Avaliador 1 – Orientador

  
\_\_\_\_\_  
Nota: 100

Prof. Dr. Samuel Silva Penna  
Avaliador 2

  
\_\_\_\_\_  
Nota: 100

## **AGRADECIMENTOS**

A Deus, por tantas Graças recebidas no desenvolvimento deste trabalho.

A minha mãe Lourdes, pela amorosa e singela doação de cada dia em me propiciar tempo nos estudos. A meu pai Ademar, pelo amor e orgulho a mim sempre dedicados e sua contribuição prática.

A minha noiva Maria Adriana, pelo grande amor e carinho ao me escutar até nos mínimos detalhes deste TCC. Obrigado por compreender minhas ausências.

Aos meus irmãos, Miro pelos conselhos, a Dê por sempre se preocupar com o progresso do trabalho e a Dani, pela poderosa Oração de Santo Tomás de Aquino para pedir Luz nos estudos.

Ao professor Roque, por ter me confiado esta oportunidade incrível de aprendizado e esclarecer minhas dúvidas semanalmente.

Ao Samir, pela singular contribuição teórica.

Ao Roberto Júnior, em possibilitar férias no trabalho para dedicação aos estudos.

Aos demais amigos da Fiat que de uma forma indireta contribuíram para que eu chegasse até aqui, em especial o Roberto Freitas, por ter me ajudado nos primeiros passos na área de Elementos Finitos.

A todos os professores e profissionais da Especialização, sobretudo a secretária Alessandra Cristina Rodrigues Souza, por tanta disponibilidade e gentileza a mim direcionadas.

## Resumo

Este trabalho de conclusão de curso apresenta um estudo sobre elementos finitos de placa fundamentados na teoria de Reissner-Mindlin, a qual é aplicada para placas de qualquer espessura. O objetivo é promover um estudo quali-quantitativo de convergência que contempla configurações compostas por diferentes condições de contorno, carregamentos, geometrias, espessuras e elementos. Todos esses modelos são avaliados em duas condições de integração. A primeira utilizando somente integração completa e a segunda comparando essa com as integrações reduzida e seletiva, as quais são utilizadas para eliminar o bloqueio ao cisalhamento transversal em placas finas. Após esse estudo, uma investigação qualitativa é feita considerando a convergência examinada, seus modos espúrios de energia nula e o tempo de processamento. As simulações foram realizadas utilizando o sistema INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*). Dos resultados obtidos, constatou-se a eficácia das técnicas anti-travamento em placas finas principalmente quando se utiliza o elemento Q4, e uma forma alternativa de resolver esse defeito, utilizando a integração completa com elementos de maior ordem e de menores dimensões. Em placas mediantemente espessas e espessas, as integrações reduzidas e seletivas em conjunto com os elementos de menor ordem, Q4 ou Q8, tornam-se também alternativas em casos onde não seja possível o uso de elementos de maior ordem e com integração completa. Cada uma dessas possibilidades distintas de se fazer a mesma análise acompanha diferentes desempenhos quanto à convergência, modos espúrios e tempo. Conclui-se, desse modo, que não existe um caminho ideal em análises de elementos finitos de placa. Todavia, uma ponderação entre os três parâmetros mencionados anteriormente, se torna útil para decidir qual a melhor escolha na simulação a ser executada.

Palavras-chave: Placas de Reissner-Mindlin; Método dos Elementos Finitos; Travamento do esforço cortante; Técnicas de Integração Reduzida/Seletiva; Convergência

## **Abstract**

This final paper presents a study about finite elements based on Reissner-Mindlin plate theory, which is applicable for plates of any thickness. The purpose is to promote a quali-quantitative convergence study that covers configurations with different boundary conditions, loads, geometries, thicknesses and elements. Each one of these models is evaluated in two integration conditions. The first one using only full integration and the second comparing it with the reduced and selective integrations, the shear locking techniques in thin plates. After this study, a qualitative investigation is done considering the previous convergence, their spurious zero energy modes and computing time. The simulations were done using the INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) system. From the results, it was verified the good performance of the techniques to avoid shear locking in thin plates especially when Q4 element is used, and a new way to solve this defect by using full integration with elements of higher order and smaller dimensions. In moderate thickness and thick plates, reduced and selective integrations combining with lower order elements, such as Q4 and Q8, is also an alternative in cases where higher order elements with full integration is not possible. Each one of these distinct possibilities on doing the same analysis have different performance about convergence, spurious modes and time. It is concluded there is no ideal path in analysis of plate finite elements. Although a good balance between the three parameters mentioned before, becomes useful to decide which is the best choice in every single simulation to be executed.

**Keywords:** Reissner-Mindlin Plate; Finite Element Method; Shear Locking; Reduced/Selective Integration Techniques; Convergence

## LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1 – Placa sob ações de forças e momentos.....	16
Figura 2.2 – Placa fletida no plano X-Z .....	18
Figura 2.3 – Detalhe dos deslocamentos e rotações da placa.....	19
Figura 2.4 – Distribuição das tensões $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$ e $\tau_{xz}, \tau_{yz}$ .....	23
Figura 2.5 – Esforço interno $M_x$ atuante na placa.....	24
Figura 2.6 – Sentidos positivos convencionados para os esforços internos .....	26
Figura 3.1 – Barra tracionada representada por um elemento finito .....	28
Figura 3.2 – Coordenadas adimensionais .....	32
Figura 3.3 – Def. da coord. natural $\xi$ . Geometria real e normalizada para um elem. de 2 nós	33
Figura 3.4 – Triângulo de Pascal em duas dimensões e em coordenadas naturais.....	34
Figura 3.5 – Elemento retangular. Sistema de coordenadas cartesianas e naturais.....	34
Figura 3.6 – Elemento isoparamétrico bilinear .....	35
Figura 3.7 – Elemento isoparamétrico biquadrático Lagrange.....	36
Figura 3.8 – Elemento isoparamétrico bicúbico Lagrange.....	36
Figura 3.9 – Elemento isoparamétrico biquadrático Serendipity .....	37
Figura 3.10 – Elemento isoparamétrico bicúbico Serendipity .....	38
Figura 3.11 – Coordenadas de área de um triângulo .....	39
Figura 3.12 – Elemento isoparamétrico triangular linear .....	40
Figura 3.13 – Elemento triangular quadrático .....	41
Figura 3.14 – Elemento triangular cúbico .....	41
Figura 3.15 – Integral de uma função bilinear e suas duas primeiras derivadas .....	47
Figura 3.16 – Exemplos de elementos isoparamétricos .....	49
Figura 3.17 – Elementos sem correspondência biunívoca de mapeamento .....	49
Figura 3.18 – Regras para um mapeamento biunívoco (a) e (b) .....	50
Figura 3.19 – Paralelogramo infinitesimal de área $dA$ .....	52
Figura 3.20 – Coordenadas naturais para um elemento triangular .....	54
Figura 3.21 – Integração numérica .....	56
Figura 3.22 – Quadratura de Gauss nos elementos quadrilaterais.....	58
Figura 3.23 – Coordenadas e pesos para a quadratura Gauss em elementos triangulares.....	60
Figura 3.24 – Algumas condições de contorno em placas de Reissner-Mindlin.....	62

Figura 3.25 – Condição de contorno para placa quadrada e circular .....	62
Figura 3.26 – Modos de corpo rígido para um elemento de placa .....	65
Figura 3.27 – Modos de energia nula do elem. Q4 com int. red./sel. sendo $\alpha$ o fator de escala	68
Figura 3.28 – Exemplificação de formação de modo de energia nula em placa fina .....	69
Figura 4.1 – Convergência à medida que se refina a malha .....	72
Figura 4.2 – Refinamento de malha para a placa quadrada .....	74
Figura 4.3 – Refinamento de malha para a placa circular .....	74
Figura 4.4 – Dimensões da placa fina .....	75
Figura 4.5 – Soluções analíticas em placas finas .....	76
Figura 4.6 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elems. quadrilaterais e IC .....	77
Figura 4.7 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elems. triangulares e IC .....	77
Figura 4.8 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elem. Q4 e IC x IR x IS .....	78
Figura 4.9 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elem. Q8 e IC x IR x IS .....	78
Figura 4.10 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elem. Q9 e IC x IR x IS .....	79
Figura 4.11 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elem. Q12 e IC x IR x IS .....	79
Figura 4.12 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elem. Q16 e IC x IR x IS .....	80
Figura 4.13 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elems. quadrilaterais e IC .....	80
Figura 4.14 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elems. triangulares e IC .....	81
Figura 4.15 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elem. Q4 e IC x IR x IS .....	81
Figura 4.16 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elem. Q8 e IC x IR x IS .....	82
Figura 4.17 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elem. Q9 e IC x IR x IS .....	82
Figura 4.18 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elem. Q12 e IC x IR x IS .....	83
Figura 4.19 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elem. Q16 e IC x IR x IS .....	83
Figura 4.20 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elems. quadrilaterais e IC .....	84
Figura 4.21 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elems. triangulares e IC .....	84
Figura 4.22 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elem. Q4 e IC x IR x IS .....	85
Figura 4.23 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elem. Q8 e IC x IR x IS .....	85
Figura 4.24 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elem. Q9 e IC x IR x IS .....	86
Figura 4.25 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elem. Q12 e IC x IR x IS .....	86
Figura 4.26 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elem. Q16 e IC x IR x IS .....	87
Figura 4.27 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elems. quadrilaterais e IC .....	87
Figura 4.28 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elems. triangulares e IC .....	88
Figura 4.29 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elem. Q4 e IC x IR x IS .....	88



Figura 4.30 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elem. Q8 e IC x IR x IS .....	89
Figura 4.31 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elem. Q9 e IC x IR x IS .....	89
Figura 4.32 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elem. Q12 e IC x IR x IS .....	90
Figura 4.33 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elem. Q16 e IC x IR x IS .....	90
Figura 4.34 – Dimensões da placa moderadamente espessa .....	91
Figura 4.35 – Soluções analíticas em placas mod. espessas.....	92
Figura 4.36 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elems. quadrilaterais e IC .....	92
Figura 4.37 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elems. triangulares e IC.....	93
Figura 4.38 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elem. Q4 e IC x IR x IS.....	93
Figura 4.39 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elemento Q8 e IC x IR x IS...	94
Figura 4.40 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elem. Q9 e IC x IR x IS.....	94
Figura 4.41 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elem. Q12 e IC x IR x IS.....	95
Figura 4.42 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elem. Q16 e IC x IR x IS.....	95
Figura 4.43 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elems. quadrilaterais e IC.....	96
Figura 4.44 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elems. triangulares e IC.....	96
Figura 4.45 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elem. Q4 e IC x IR x IS .....	97
Figura 4.46 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elem. Q8 e IC x IR x IS .....	97
Figura 4.47 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elem. Q9 e IC x IR x IS .....	98
Figura 4.48 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elem. Q12 e IC x IR x IS .....	98
Figura 4.49 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elem. Q16 e IC x IR x IS .....	99
Figura 4.50 – Dimensões da placa espessa.....	99
Figura 4.51 – Solução analítica em uma placa espessa .....	100
Figura 4.52 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PE-EN-CC com elems. quadrilaterais e IC .....	101
Figura 4.53 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PE-EN-CC com elems. triangulares e IC .....	101
Figura 4.54 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PE-EN-CC com elem. Q4 e IC x IR x IS .....	102
Figura 4.55 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PE-EN-CC com elem. Q8 e IC x IR x IS .....	102
Figura 4.56 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PE-EN-CC com elem. Q9 e IC x IR x IS .....	103

## LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1 – Pontos de integração, fatores-peso e ordens de integração de Gauss-Legendre	57
Quadro 3.2 – Quadratura para integração da matriz de rigidez, número de mecanismos espúrios e razões de restrições em malha de 2x2 elementos .....	66
Quadro 4.1 – Configurações para o estudo de convergência .....	73
Quadro 4.2 – Monotonicidade para os elementos quadrilaterais.....	103
Quadro 4.3 – Monotonicidade para os elementos triangulares .....	104
Quadro 4.4 – Resumo das principais análises do estudo de convergência.....	107

# SUMÁRIO

<b>1</b>	<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>14</b>
1.1	Objetivos do Trabalho .....	15
<b>2</b>	<b>TEORIA DE PLACAS DE REISSNER-MINDLIN</b>	<b>16</b>
2.1	Introdução .....	16
2.2	Hipóteses.....	16
2.3	Campo de Deslocamentos.....	18
2.4	Relações Deformações-Deslocamentos.....	20
2.5	Relações Tensões-Deformações .....	22
2.6	Esforços Internos .....	24
<b>3</b>	<b>ELEMENTOS FINITOS BASEADOS NA TEORIA DE PLACAS DE REISSNER-MINDLIN</b>	<b>27</b>
3.1	Introdução .....	27
3.2	Funções de Forma para os Elementos de Reissner-Mindlin.....	28
3.2.1	Funções de forma para elementos finitos em 1D de continuidade $C^0$ .....	28
3.2.2	Funções de forma para elementos finitos em 2D de continuidade $C^0$ .....	33
3.2.2.1	Função de forma para elementos retangulares de continuidade $C^0$	34
3.2.2.1.1	Função de forma para elementos retangulares de Lagrange	35
3.2.2.1.2	Função de forma para elementos retangulares Serendipity	37
3.2.2.2	Função de forma para elementos triangulares de continuidade $C^0$	38
3.3	Formulação dos Elementos.....	42
3.3.1	Discretização do campo de deslocamentos.....	42

3.3.2	Discretização das deformações generalizadas, do campo de tensões e dos esforços internos .....	43
3.3.3	Princípio dos Trabalhos Virtuais .....	44
3.3.4	Formulação Isoparamétrica .....	47
3.3.4.1	Introdução .....	47
3.3.4.2	Elementos quadrilaterais isoparamétricos .....	48
3.3.4.3	Elementos triangulares isoparamétricos .....	53
3.3.5	Integração Numérica.....	55
3.3.5.1	Introdução .....	55
3.3.5.2	Integração numérica em elementos quadrilaterais .....	57
3.3.5.3	Integração numérica em elementos triangulares .....	59
3.3.6	Condições de contorno .....	61
3.4	Desempenho dos elementos de Reissner-Mindlin para placas finas .....	63
3.4.1	Travamento de esforço cortante. Integração reduzida e mecanismos espúrios. Razão de restrição. ....	63
3.4.2	Elementos quadrilaterais de Reissner-Mindlin baseados em integração reduzida/seletiva.....	68
3.4.3	Elementos triangulares de Reissner-Mindlin.....	71
<b>4</b>	<b>SIMULAÇÕES</b> .....	<b>72</b>
4.1	Estudo de Convergência .....	72
4.2	Estudo de Convergência de Placas Finas .....	75
4.2.1	Configuração 1: PF-SA-CC.....	77
4.2.2	Configuração 2: PF-SA-CD.....	80
4.2.3	Configuração 3: PF-EN-CC.....	84
4.2.4	Configuração 4: PF-EN-CD .....	87
4.3	Estudo de Convergência de Placas Moderadamente Espessas .....	91

4.3.1	Configuração 5: PME-SA-CD.....	92
4.3.2	Configuração 6: PME-EN-CD.....	96
4.4	Estudo de Convergência de Placas Espessas.....	99
4.4.1	Configuração 7: PE-EN-CC.....	101
4.5	Monotonicidade dos Resultados.....	103
4.6	Análise Crítica dos Resultados.....	104
4.6.1	Avaliação quali-quantitativa da convergência.....	104
4.6.2	Avaliação qualitativa da convergência, modos espúrios e tempo de processamento	106
<b>5</b>	<b>CONCLUSÃO</b>	<b>108</b>
<b>6</b>	<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>109</b>

## 1 INTRODUÇÃO

Uma estrutura de placa é um importante componente de engenharia utilizado amplamente em várias indústrias, como na aeroespacial, na construção naval e na engenharia civil. O método dos elementos finitos é geralmente considerado o recurso mais conveniente e efetivo em análises desses tipos de estruturas. Para o seu desenvolvimento são utilizados elementos formulados por teorias de placas, sendo que as duas mais conhecidas são a de Kirchhoff e a de Reissner-Mindlin (CEN; SHANG, 2015).

A diferença básica nos pressupostos dessas duas teorias é a deformação transversal por cisalhamento considerada somente por Reissner-Mindlin, o que torna essa teoria aplicável para placas de qualquer espessura, enquanto que a de Kirchhoff é restrita somente às placas finas. Por possibilitar um estudo mais abrangente em relação às espessuras de placas, neste trabalho é avaliada a convergência dos elementos finitos desenvolvidos com as hipóteses de Reissner-Mindlin. Porém, em placas finas surge um problema ao utilizar essa teoria conforme aponta Soriano (2003), um fenômeno conhecido como *shear locking* na literatura em inglês, significando travamento de esforço cortante. A integração reduzida e a seletiva, as quais serão tratados neste texto, são um dos procedimentos para evitar esse bloqueio apesar de gerarem mecanismo espúrios de energia nula.

O estudo de convergência aqui proposto, é efetuado utilizando placas finas, moderadamente espessas e espessas sob diferentes tipos de integração, condições de contorno, carregamentos e geometrias. São empregados elementos quadrilaterais e triangulares na construção dos modelos, avaliando-os de forma crítica considerando os resultados de deslocamentos transversais.

Esse estudo, que está descrito em parte do texto dedicado às simulações numéricas, capítulo 4, é antecedido por dois capítulos contendo a base teórica. O capítulo 2, o qual apresenta o modelo matemático desenvolvido com a teoria de Reissner-Mindlin, e o capítulo 3, que detalha os modelos de elementos finitos formulados com as equações matemáticas do capítulo anterior. Por fim, o capítulo 5 expõe as considerações finais deste estudo.

## 1.1 Objetivos do Trabalho

O trabalho tem por finalidade o estudo de convergência de elementos finitos de placas baseado na teoria de Reissner-Mindlin, cuja elaboração é feita através de simulações numéricas. Para o pré-processamento, o processamento e o pós processamento dessas análises, foi adotado o software INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), projeto que está em constante desenvolvimento no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais (<https://www.insane.dees.ufmg.br>).

Este estudo adota duas condições de integração. A primeira utilizando a integração completa nos elementos quadrilaterais e triangulares, na qual é avaliada a convergência desses elementos com o aumento de suas ordens e em conjunto com o refinamento de suas malhas. Nessa condição, examina-se de qual forma ocorre a convergência das placas, principalmente das de espessura fina, na ausência das técnicas anti-bloqueio, e procedendo somente com o aumento dos graus de liberdade do modelo. A segunda é referente ao uso das integrações reduzida e seletiva comparadas a integração completa para cada elemento quadrilateral, e também com a diminuição de seu tamanho. Nesta circunstância, analisa-se a eficácia das técnicas anti-travamento para as placas finas e também o modo como essas integrações impactam na convergência das placas moderadamente espessas e espessas.

Em todas as condições de integração, estuda-se a monotonicidade dos resultados, e também, avaliam-se comparativamente a convergência entre as famílias dos elementos quadrilaterais de mesma ordem.

## 2 TEORIA DE PLACAS DE REISSNER-MINDLIN

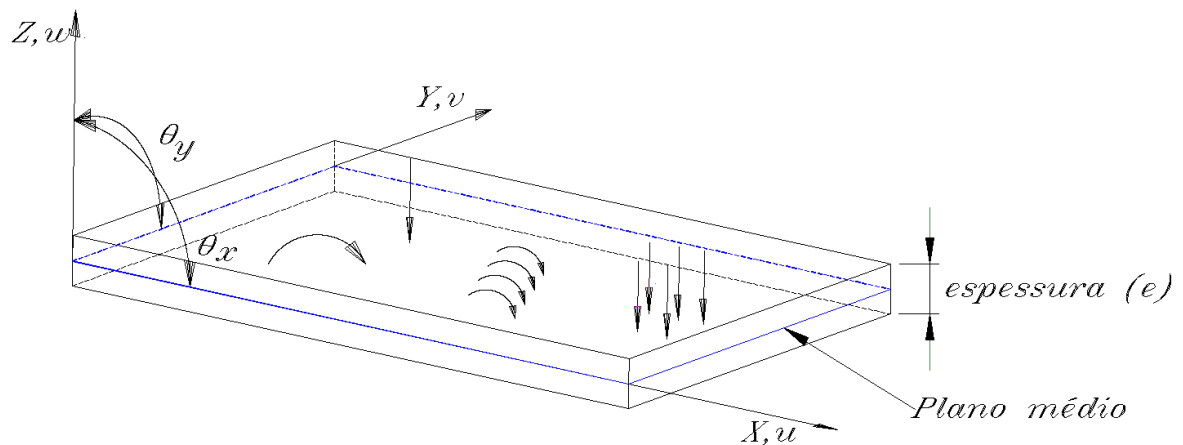
### 2.1 Introdução

Uma placa é um sólido cuja espessura é muito menor que suas outras duas dimensões. O estudo de suas equações é feito a partir de um plano de referência, o plano médio, definido por ser uma superfície equidistante das maiores faces superior e inferior desse sólido (OÑATE, 2013).

Da mesma forma que em vigas, placas com material homogêneo e isotrópico resistem somente a esforços de flexão. Ao contrário, placas com material heterogêneo ou cascas, se comportam de forma diferente. Pontos de seu plano médio podem se deslocar em direções do próprio plano, gerando deslocamentos e forças nesse plano. Isso muda o modo padrão de flexão de uma placa homogênea para um novo modo, no qual flexão e efeitos axiais (membrana) se acoplam (OÑATE, 2009).

A Figura 2.1 mostra a representação geométrica de uma placa e os respectivos esforços causadores de sua flexão.

Figura 2.1 – Placa sob ações de forças e momentos



Fonte: O autor.

### 2.2 Hipóteses

Segundo Oñate (2013), as seguintes hipóteses simplificadoras são adotadas para a teoria de Reissner-Mindlin:



1. Pontos pertencentes ao plano médio não transladam nas direções  $x$  e  $y$ , somente se movem verticalmente ao longo da direção  $z$ , logo:

$$u = v = 0 \quad (2.1)$$

2. Os pontos contidos em uma reta normal ao plano médio antes da deformação terão o mesmo deslocamento vertical  $w$  (a espessura não muda durante a deformação) após a deformação.

3. A tensão normal na direção  $z$ ,  $\sigma_z$ , é desprezível.

4. Retas normais ao plano médio antes da deformação, permanecem retas mas não necessariamente ortogonais a esse plano após a deformação.

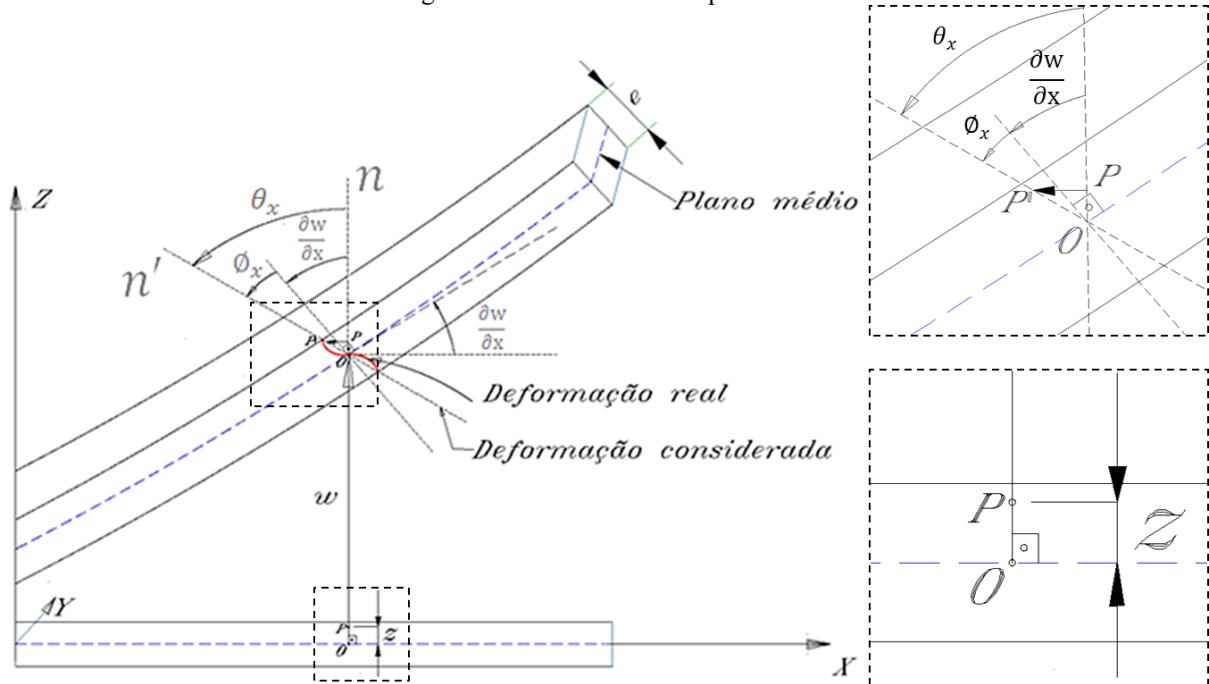
As hipóteses 1, 2 e 4 permitem calcular o campo de deslocamentos em qualquer ponto da placa, enquanto a hipótese 3 interfere na relação tensão-deformação. Na sequência serão tratados todos esses pressupostos, mas antes vale ressaltar com detalhes, a diferença fundamental contida na hipótese 4 das duas teorias de placas como mencionado no capítulo introdutório.

Na teoria de Kirchhoff ou teoria clássica para placas finas, onde a razão entre a espessura e o menor lado seja igual ou inferior a 0,05, a deformação transversal por cisalhamento é negligenciável, portanto, retas normais ao plano médio antes da deformação permanecem retas e ortogonais a esse plano após a deformação. Quando são avaliadas placas moderadamente espessas onde a razão anteriormente citada está entre 0,05 e 0,10 e placas espessas, razão maior que 0,10, o cisalhamento transversal já não é mais desprezível o qual torna maior a distorção da normal durante a deformação. Dessa forma, a teoria de Reissner-Mindlin representa uma melhor aproximação para a real deformação da placa e com isso, retas normais ao plano médio permanecem retas, mas não mais normais a esse plano (OÑATE, 2013).

### 2.3 Campo de Deslocamentos

Seja a imagem da Figura 2.2.

Figura 2.2 – Placa fletida no plano X-Z

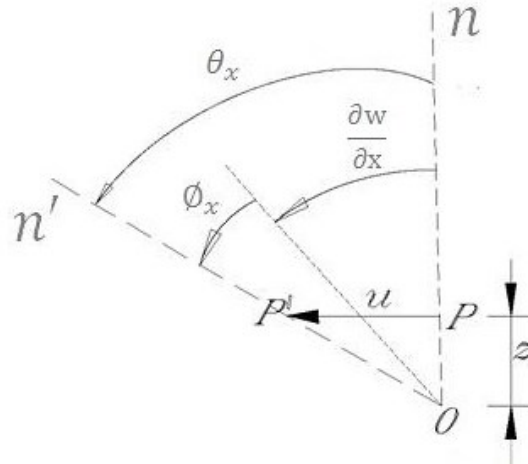


Fonte: O autor.

A figura ilustra dois pontos O e P quaisquer de uma placa no estado indeformado e deformado por uma flexão no plano X-Z, ambos situados em uma reta normal ao plano médio dessa placa. O ponto O localiza-se no plano médio, enquanto o P está a uma distância z de O.

De acordo com a hipótese 1, o ponto O somente desloca-se verticalmente de um valor  $w(x, y, z) = w(x, y)$ . Segundo a hipótese 2, o ponto P também desloca-se com o mesmo valor w mas o mesmo experimenta também uma rotação  $\theta_x$ , correspondente ao giro da reta n normal ao plano médio. Esse giro, por ser pequeno, permite aproximar o arco formado pela rotação para um deslocamento horizontal PP' de valor igual a u, conforme mostrado a seguir no detalhe dos deslocamentos e rotações da FIG. 2.2.

Figura 2.3 – Detalhe dos deslocamentos e rotações da placa



Fonte: O autor.

O deslocamento horizontal do ponto P é então dado por:

$$u(x, y, z) = -z \operatorname{tg}(\theta_x) \quad (2.2)$$

Em regime de pequenos deslocamentos tem-se:

$$\operatorname{tg}(\theta_x) \cong \theta_x \quad (2.3)$$

Logo:

$$u(x, y, z) = -z\theta_x \quad (2.4)$$

De maneira análoga, para uma flexão no plano Y-Z:

$$v(x, y, z) = -z\theta_y \quad (2.5)$$

Assim, com a análise de flexão da placa nos planos X-Z e Y-Z, é possível escrever os deslocamentos de um ponto qualquer distante z do plano médio por:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ v(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\ w(x, y, z) &= w(x, y) \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $u$ ,  $v$  e  $w$  são os deslocamentos nas direções  $x$ ,  $y$  e  $z$  respectivamente.

Das equações precedentes, observa-se que, para obtenção dos deslocamentos de um ponto qualquer de uma placa, basta saber os deslocamentos do ponto de mesmas coordenadas  $x$  e  $y$  localizado no plano médio ( $z = 0$ ). Portanto, é necessário apenas conhecer o vetor de deslocamentos  $\underline{u}$  de um ponto contido nesse plano (PITANGUEIRA, 2016).

Logo:

$$\underline{u} = \begin{pmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} \quad (2.7)$$

As rotações  $\theta_x$  e  $\theta_y$  de acordo com a hipótese 4, podem ser expressadas da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \theta_x &= \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \theta_y &= \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{aligned} \quad (2.8)$$

Conforme pode ser visto nas Eqs. (2.8),  $\theta_x$  e  $\theta_y$  são funções da soma de duas rotações. A primeira representa a inclinação do plano médio da placa, a qual é dependente da flecha  $w$ . A segunda uma rotação adicional  $\phi$  resultante da não ortogonalidade da reta normal ao plano médio após a deformação. Uma vez que  $\theta_x$  e  $\theta_y$  não podem ser obtidas somente a partir de  $w$ , essas rotações são tratadas como variáveis independentes (OÑATE, 2013).

Ainda se tratando da 4ª hipótese, a consideração de que retas normais ao plano médio permanecem retas após a deformação é uma aproximação do comportamento real das normais. Na FIG. 2.2, a deformação real de  $n$  é uma distorção de sua reta e sua representação simplificada é uma reta  $n'$  que corresponde a uma “média” dessa distorção (OÑATE, 2013).

## 2.4 Relações Deformações-Deslocamentos

A Teoria da Elasticidade apresentada por Timoshenko e Goodier (1951) para um sólido em três dimensões (3D), considerando material homogêneo e isotrópico e campos de pequenos deslocamentos e deformações, estabelece as seguintes relações:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} \quad ; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \quad ; \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \quad ; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\quad (2.9)$$

onde  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  são as deformações normais e  $\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$  são as deformações transversais.

Substituindo as Eqs. (2.6) do campo de deslocamento nas Eqs. descritas em (2.9), obtêm-se:

$$\begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \gamma_{xz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial x} = -\phi_x \\ \gamma_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = -\theta_y + \frac{\partial w}{\partial y} = -\phi_y\end{aligned}\quad (2.10)$$

Devido à condição de não ortogonalidade da reta  $n$ , existe o surgimento de deformações transversais  $\gamma_{xz}$  e  $\gamma_{yz}$  as quais são independentes da coordenada  $z$  e que possuem valores em módulo iguais às rotações adicionais  $\phi_x$  e  $\phi_y$ , nessa ordem (OÑATE, 2013).

Agrupando as deformações não nulas em um vetor de deformações, obtêm-se:

$$\underline{\varepsilon} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -z \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -z \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -z \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{\varepsilon}_f \\ \underline{\varepsilon}_c \end{Bmatrix}\quad (2.11)$$

onde

$\underline{\varepsilon}_f = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$  é o vetor de deformações devido à flexão e

$\underline{\varepsilon}_c = \begin{Bmatrix} \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix}$  é o vetor de deformações devido ao cisalhamento transversal.

## 2.5 Relações Tensões-Deformações

A relação entre tensões e deformações, descrita em Oñate (2009), é também obtida a partir da Teoria da Elasticidade de um sólido em 3D, considerando as mesmas premissas mencionadas do item 2.4 e assumindo um Estado Plano de Tensões ( $\sigma_z = 0$ ). Esse Estado é devido a hipótese 3 de Reissner-Mindlin em que  $\sigma_z$  é desprezível e pelo fato da placa estar livre para se deformar na direção  $z$ . Assim, pode-se escrever:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{Bmatrix} \quad (2.12)$$

ou

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\varepsilon} \quad (2.13)$$

sendo

$$\underline{\sigma} = \begin{Bmatrix} \sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} \quad \text{e} \quad \underline{D} = \begin{Bmatrix} \underline{D}_f \\ \underline{D}_c \end{Bmatrix}$$

no qual

$\underline{\sigma}_f = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}$  é o vetor de tensões devido à flexão,

$\underline{\sigma}_c = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}$  é o vetor de tensões devido ao cisalhamento transversal,

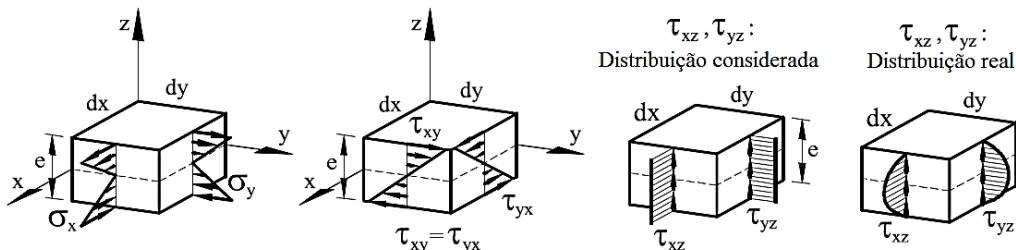
$$\underline{D}_f = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad \text{é a matriz constitutiva de flexão e}$$

$$\underline{D}_c = G \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{é a matriz constitutiva de cisalhamento transversal.}$$

onde  $E$  é módulo de elasticidade do material,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $G$  o módulo de elasticidade transversal.

Conforme expressado na Eq. (2.12), as tensões no plano causadas pela flexão da placa,  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  e  $\tau_{xy}$ , variam linearmente ao longo do eixo  $z$  e as tensões devido a cisalhamento transversal,  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , são constantes ao longo da espessura ( $e$ ). No entanto, de acordo com Thompson e Warsi (1982 *apud* Oñate, 2013), a distribuição real de  $\tau_{xz}$  e  $\tau_{yz}$ , obtidas a partir da Teoria de Elasticidade para um material isotrópico, não é uniforme, mas sim parabólica como pode ser visto a seguir (Figura 2.4).

Figura 2.4 – Distribuição das tensões  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  e  $\tau_{xz}$ ,  $\tau_{yz}$



Fonte: Adaptado de Oñate (2013, p.295).

A fim de superar essa aproximação na distribuição das tensões, são utilizados coeficientes de correção ao cisalhamento,  $k_{ij}$ , os quais modificam a matriz constitutiva  $\underline{D}_c$  de forma a alterar o trabalho interno associado às tensões de cisalhamento transversais para que o mesmo coincida com o trabalho interno obtido pela Teoria da Elasticidade (OÑATE, 2013).

Desse modo, tem-se:

$$\underline{D}_c = G \begin{bmatrix} k_{11} & 0 \\ 0 & k_{22} \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

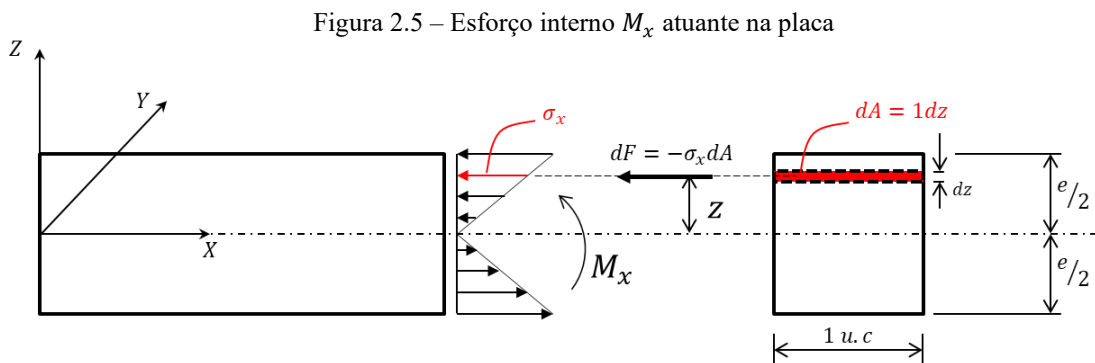
Para seções retangulares constantes, caso mais comum em placas, adota-se:

$$k_{11} = k_{22} = \frac{5}{6} \quad (2.15)$$

## 2.6 Esforços Internos

Os esforços internos são calculados somando-se o esforço atuante em cada fatia infinitesimal de área  $dA$  de uma placa por toda sua espessura, ou seja, consistem na integração das tensões ao longo da espessura de uma placa de comprimento unitário (PITANGUEIRA, 2016).

Seja o esforço interno  $M_x$  (momento fletor no plano X-Z) da FIG. 2.5, o mesmo pode ser obtido da seguinte forma:



Fonte: Adaptado de Pitangueira (2016, p.151).

Para uma fatia infinitesimal:

$$dM_x = z dF = -z \sigma_x dz \quad (2.16)$$

Em toda placa:

$$M_x = \int_{-e/2}^{+e/2} -\sigma_x z dz \quad (2.17)$$

De forma análoga, é feito o cálculo dos outros esforços internos oriundos das tensões de flexão, momento fletor  $M_y$  e momento de torção  $M_{xy}$ , e também os oriundos das tensões de cisalhamento, esforços cortantes  $Q_x$  e  $Q_y$ . A diferença é que nestes, pelo fato das tensões cisalhantes serem constantes na direção da  $z$ , suas integrais não contém a variável  $z$  (SALIBA, 2007).



Assim:

$$\underline{M} = \begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-e/2}^{+e/2} \begin{Bmatrix} -Z\sigma_x \\ -Z\sigma_y \\ -Z\tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz = \int_{-e/2}^{+e/2} \begin{Bmatrix} -Z\sigma_f \\ \sigma_c \end{Bmatrix} dz = \int_{-e/2}^{+e/2} \begin{Bmatrix} Z^2 \underline{D}_f \hat{\underline{\epsilon}}_f \\ \underline{D}_c \hat{\underline{\epsilon}}_c \end{Bmatrix} dz \quad (2.18)$$

no qual

$$\hat{\underline{\epsilon}}_f = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad \text{é o vetor de deformação generalizada de flexão e} \quad (2.19)$$

$$\hat{\underline{\epsilon}}_c = \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} \quad \text{é o vetor de deformação generalizada de cisalhamento.}$$

Resolvendo a integral da Eq. (2.18), encontra-se:

$$\underline{M} = \begin{Bmatrix} \frac{e^3}{12} \underline{D}_f \hat{\underline{\epsilon}}_f \\ e \underline{D}_c \hat{\underline{\epsilon}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \hat{\underline{D}}_f \hat{\underline{\epsilon}}_f \\ \hat{\underline{D}}_c \hat{\underline{\epsilon}}_c \end{Bmatrix} \quad (2.20)$$

sendo que

$$\underline{M} = \begin{Bmatrix} M_f \\ M_c \end{Bmatrix} \quad \text{é o vetor de esforços internos por unidade de comprimento,}$$

$$\hat{\underline{D}}_f = \frac{e^3}{12} \underline{D}_f \quad \text{é a matriz constitutiva generalizada de flexão e}$$

$$\hat{\underline{D}}_c = e \underline{D}_c \quad \text{é a matriz constitutiva generalizada de cisalhamento.}$$

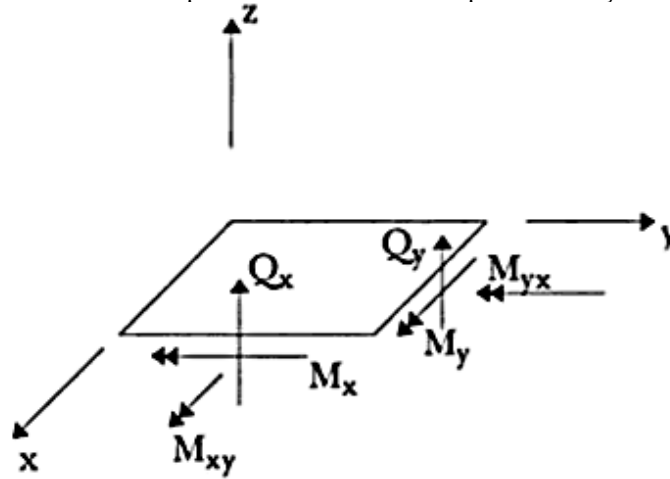
A Eq. (2.20) pode ser escrita na forma de matriz por:

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} \hat{\underline{D}}_f & 0 \\ 0 & \hat{\underline{D}}_c \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \hat{\underline{\epsilon}}_f \\ \hat{\underline{\epsilon}}_c \end{Bmatrix} = \hat{\underline{D}} \hat{\underline{\epsilon}} \quad (2.21)$$

onde  $\hat{\underline{D}}$  é a matriz constitutiva generalizada e  $\hat{\underline{\epsilon}}$  é o vetor de deformações generalizadas.

A convenção dos esforços internos é dada de acordo com a FIG. 2.6 a seguir.

Figura 2.6 – Sentidos positivos convencionados para os esforços internos



Fonte: SORIANO, 2003, p.253.

### 3 ELEMENTOS FINITOS BASEADOS NA TEORIA DE PLACAS DE REISSNER-MINDLIN

#### 3.1 Introdução

A partir da teoria de placas de Reissner-Mindlin descrita no capítulo 2, foi possível estabelecer um modelo matemático que, com hipóteses simplificadoras, substituiu o problema de meio contínuo da estrutura real da placa. Com esse modelo, é possível calcular através de equações diferenciais, as deformações, tensões e esforços internos para infinitos pontos da placa conhecendo-se o vetor de deslocamentos do plano médio da mesma, isto é, segundo Eqs. (2.11), (2.13) e (2.20) nessa ordem. Por outro lado, é possível calcular essas mesmas grandezas da placa através de equações algébricas em um número finito de pontos de seu plano médio, através de um método discreto; no caso deste trabalho será utilizado o Método dos Elementos Finitos (MEF).

No modelo de deslocamentos do MEF, o domínio do problema é dividido em subdomínios de dimensões finitas, denominados elementos finitos, onde o campo de deslocamentos é arbitrado. Escrevendo-se o campo de deslocamentos de cada elemento em função dos deslocamentos nodais, obtém-se um sistema de equações algébricas que, quando resolvido, permite solucionar o problema (PITANGUEIRA, 2016, pag.1).

Desse modo, para a solução do problema via MEF é necessário obter o campo de deslocamentos dos elementos finitos que por sua vez dependem de suas funções de forma, as quais estarão descritas na próxima subseção. Em seguida, será abordada no item 3.3, a formulação dos elementos finitos baseados na teoria de Reissner-Mindlin e também suas derivações em formas arbitrárias com o uso da formulação isoparamétrica (por exemplo, quadrilaterais de formas irregulares e triângulos de lados curvos) e a integração numérica. Por fim, na última subseção deste capítulo, serão abordadas as dificuldades do uso dos elementos de Reissner-Mindlin em placas finas devido à excessiva influência dos termos de cisalhamento transversal e a forma de contornar esse problema com o uso da integração reduzida/seletiva.

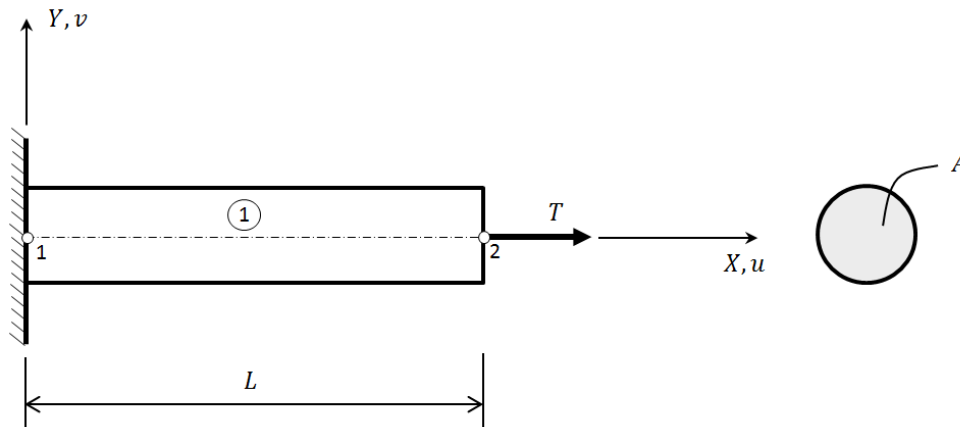
### 3.2 Funções de Forma para os Elementos de Reissner-Mindlin

Visando uma melhor compreensão das funções de forma para os elementos de Reissner-Mindlin, elementos finitos em duas dimensões (2D), será apresentada antes a abordagem das funções de forma de um elemento unidimensional (1D), bem como o conceito de coordenadas naturais e continuidade.

#### 3.2.1 Funções de forma para elementos finitos em 1D de continuidade $C^0$

Considerando uma barra esbelta de comprimento  $L$ , seção transversal de área constante  $A$ , sujeita a uma força axial de tração  $T$  e constituída de material homogêneo e isotrópico, sua discretização será feita por um único elemento de dois nós, como na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Barra tracionada representada por um elemento finito



Fonte: O autor.

Supondo que a barra resiste somente a esforços axiais, a mesma desloca-se de um valor  $u$  na direção  $X$  com a aplicação da força  $T$ . Dessa forma, o elemento finito apresenta um grau de liberdade em cada nó referente a esse deslocamento, num total de dois graus de liberdade. Assim, um polinômio interpolador de dois termos, ou seja, linear, é definido com o objetivo de aproximar o deslocamento horizontal da barra por:

$$u(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (3.1)$$

Escrevendo de forma matricial o polinômio anterior tem-se:

$$u(x) = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \quad (3.2)$$

ou, simbolicamente

$$u(x) = \underline{\varphi} \underline{\alpha} \quad (3.3)$$

onde

$$\underline{\varphi} = [1 \quad x] \text{ e } \underline{\alpha} = [\alpha_0 \quad \alpha_1]^T$$

Supondo-se conhecidos os valores nodais, pode se escrever:

$$u(x = 0) = d_1 \quad (3.4)$$

$$u(x = L) = d_2 \quad (3.5)$$

Utilizando as Eqs. (3.4) e (3.5) na Eq. (3.1), obtêm-se

$$\alpha_0 + \alpha_1(0) = d_1 \quad (3.6)$$

$$\alpha_0 + \alpha_1(L) = d_2 \quad (3.7)$$

Matricialmente, escrevendo as Eqs. (3.6) e (3.7), resulta em:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix} \quad (3.8)$$

ou

$$\underline{G} \underline{\alpha} = \underline{d} \quad (3.9)$$

sendo

$$\underline{G} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix}, \underline{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \end{Bmatrix} \text{ e } \underline{d} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{Bmatrix}$$

Substituindo  $\underline{\alpha}$  retirado da Eq. (3.9) na Eq. (3.3), obtêm-se:

$$u(x) = \underline{\varphi} \underline{G}^{-1} \underline{d} \quad (3.10)$$

Simplificando, encontra-se:

$$u(x) = \underline{N} \underline{d} \quad (3.11)$$

no qual

$$\underline{N} = \underline{\varphi} \underline{G}^{-1} = [N_1 \quad N_2] \quad \begin{array}{l} \text{é a matriz das funções de forma ou interpolação do} \\ \text{elemento e} \end{array} \quad (3.12)$$

$\underline{d}$  é o vetor de deslocamentos nodais do elemento.

Multiplicado o valor de  $\underline{\varphi}$  e invertendo a matriz  $\underline{G}$ , encontra-se a função de forma para cada nó.

Logo:

Para o nó 1:

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.13)$$

Para o nó 2:

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (3.14)$$

As funções acima possuem as seguintes propriedades:

1. Em qualquer nó ( $i$ ) do elemento finito, existe uma função  $N_i$ ;
2.  $N_1 + N_2 = 1$ ;
3.  $N_1 = 1$  no nó 1 e  $N_1 = 0$  no nó 2;
4.  $N_2 = 0$  no nó 1 e  $N_2 = 1$  no nó 2;

Outra característica importante, é que essas funções de forma garantem que o deslocamento axial da barra seja contínuo dentro do elemento e entre elementos adjacentes. Elementos que satisfazem essa condição são denominados de continuidade  $C^0$  (OÑATE, 2009).

Ainda se tratando dessas funções de interpolação, outro aspecto a ser considerado é referente à sua obtenção. Como descrito na Eq. (3.12), é necessário inverter a matriz  $\underline{G}$  de dimensão 2x2 visto que a barra é um elemento finito de 2 graus de liberdade. Se fosse um elemento de 24 graus de liberdade, essa matriz seria de dimensão 24x24, ou seja, um considerável esforço algébrico seria necessário para o cálculo de sua inversa. Segundo Dune, Irons *et. al* (1968 *apud* Zienkiewicz e Taylor, 2000), em elementos retangulares de continuidade  $C^0$ , ocasionalmente a inversa de  $\underline{G}$  pode não existir.

De forma alternativa, as funções de forma para elementos 1D de continuidade  $C^0$  podem ser obtidas de forma direta, simplesmente utilizando as expressões polinomiais de Lagrange, conforme descrito em Oñate (2009) e definidas a seguir.

Seja um polinômio de Lagrange  $l_i^n(x)$  de ordem  $n - 1$ , o mesmo é estabelecido em termos de  $n$  pontos com coordenadas  $x_1, x_2, \dots, x_n$ :

$$l_i^n(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \cdots (x - x_n) \quad (3.15)$$

Nota-se que  $l_i^n(x_i) = y_i (\neq 0)$  e  $l_i^n(x_j) = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, n$  ( $j \neq i$ ). Considerando que os pontos coincidam com os nós dos elementos e um valor diferente de zero  $y_i$  é padronizado para um valor unitário, o polinômio de Lagrange se torna então normalizado de modo que:

$$l_i^n(x) = \frac{l_i^n(x)}{l_i^n(x_i)} = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right) \quad (3.16)$$

onde  $\prod$  representa o produtório e o índice  $x$  especifica o ponto onde essa coordenada é calculada.

Portanto, as funções de interpolação  $N_i$  de um elemento de Lagrange com  $n$  nós coincidem com os polinômios normalizados de Lagrange, logo:

$$N_i(x) = l_i^n(x) \quad (3.17)$$

Pela Eq. (3.17) é justificado o motivo de um elemento em 1D de continuidade  $C^0$  ser conhecido como elemento de Lagrange.

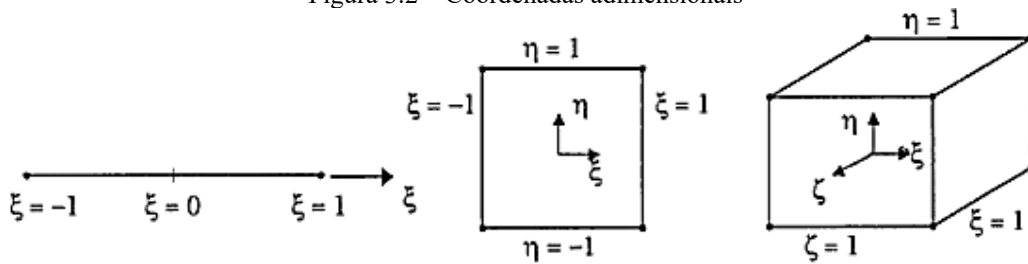
Retornando a um elemento finito em 1D de dois nós e continuidade  $C^0$ , têm-se utilizando a Eq. (3.16) em (3.17), de forma direta:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = 1 - \frac{x}{L} \\ N_2 &= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x}{L} \end{aligned} \quad (3.18)$$

de forma que  $N_1$  e  $N_2$  são as mesmas funções de interpolação definidas nas Eqs. (3.13) e (3.14).

No intuito de facilitar o tratamento das funções de forma de um elemento finito, outro sistema de coordenadas passa a ser empregado. Segundo Soriano (2003), esse sistema é conhecido por **coordenadas adimensionais, naturais** ou **normalizadas** ( $\xi$ ,  $\eta$ ,  $\zeta$ ) e contém sua origem no centroide do elemento. Pode ser utilizado em elementos de uma, duas e três dimensões como ilustra a Figura 3.2.

Figura 3.2 – Coordenadas adimensionais



Fonte: SORIANO, 2003, p.107.

De acordo com Logan (2007), essas coordenadas são definidas em conformidade com a geometria do elemento e não por sua orientação em um sistema global. Logo, para Johnston (1984) e Rao (2004), as derivadas e integrais das funções de forma, utilizadas no cálculo da matriz de rigidez e das forças nodais equivalentes, são mais facilmente obtidas com esse sistema local o qual é vinculado a geometria do elemento.

A derivação das funções de forma da barra tracionada em termos do sistema de coordenada natural  $\xi$ , é feita conforme definição descrita em Oñate (2009):

$$\xi = 2 \frac{x - x_c}{l(e)} \quad (3.19)$$

onde  $x_c$  é a coordenada cartesiana do centro geométrico do elemento. A Eq. (3.19) fornece:

$\xi = -1$  na extremidade esquerda do elemento

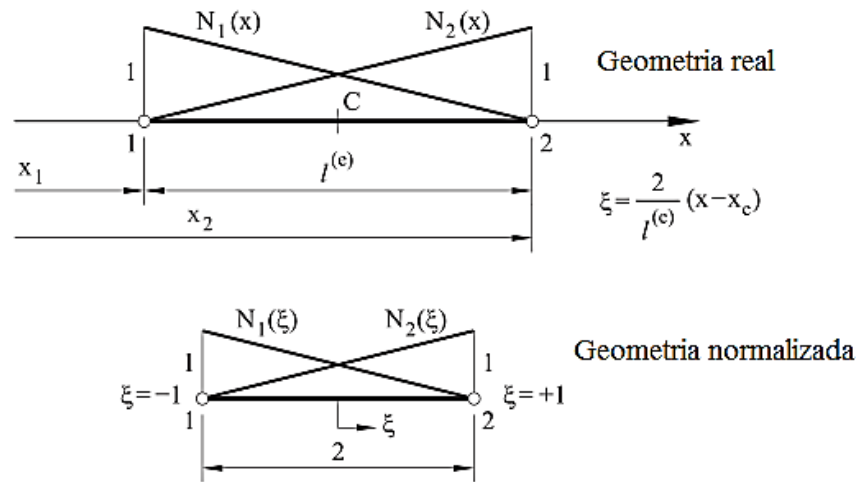
$\xi = 0$  no centroide do elemento

$\xi = +1$  na extremidade direita do elemento

Portanto, a equação anterior transforma sua geometria real, ou genericamente um elemento finito de 2 nós, em uma geometria normalizada de comprimento igual a dois como demonstrado na FIG. 3.3. Nessa ilustração, também estão representadas as funções de forma em coordenadas cartesianas e naturais.



Figura 3.3 – Def. da coord. natural  $\xi$ . Geometria real e normalizada para um elem. de 2 nós



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.79).

Análogo à Eq. (3.16), as funções de interpolação na coordenada  $\xi$  podem ser escritas da seguinte forma:

$$N_i(\xi) = l_i^n(\xi) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left( \frac{\xi - \xi_j}{\xi_i - \xi_j} \right) \quad (3.20)$$

Na barra tracionada, elemento linear de Lagrange com 2 nós, têm-se então:

$$N_1 = \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} = \frac{1}{2}(1 - \xi) \quad (3.21)$$

$$N_2 = \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} = \frac{1}{2}(1 + \xi)$$

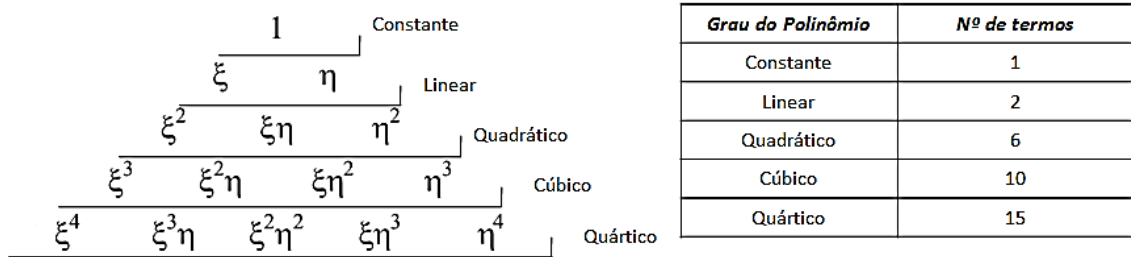
### 3.2.2 Funções de forma para elementos finitos em 2D de continuidade $C^0$

Da mesma forma que a barra tracionada anteriormente estudada, os elementos de Reissner-Mindlin requerem também a continuidade  $C^0$ , como será visto no item 3.3.3.

Eles são divididos entre retangulares e triangulares e suas funções de interpolação são utilizadas em suas formulações isoparamétricas, as quais serão apresentadas adiante. Assim, são denominados elementos isoparamétricos.

Esses elementos, conforme descrito em Oñate (2009), possuem diferença quanto a seu polinômio aproximador, sendo o mesmo completo em elementos triangulares e incompletos nos retangulares. Os termos desses polinômios são retirados do triângulo de Pascal, conforme Figura 3.4.

Figura 3.4 – Triângulo de Pascal em duas dimensões e em coordenadas naturais



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.159).

Adiante, serão apresentadas as funções de forma para os elementos de placa retangulares e triangulares de Reissner-Mindlin de continuidade  $C^0$  utilizados no estudo.

### 3.2.2.1 Função de forma para elementos retangulares de continuidade $C^0$

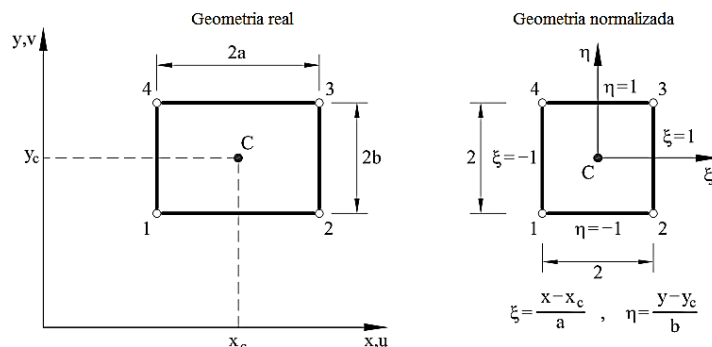
Segundo Oñate (2009), um sistema local  $\xi, \eta$  é definido em cada elemento e normalizado de forma que os lados do elemento estejam localizados em  $\xi = \pm 1$  e  $\eta = \pm 1$ , logo:

$$\xi = \frac{x - x_c}{a} \quad ; \quad \eta = \frac{y - y_c}{b} \tag{3.22}$$

onde  $2a$  e  $2b$  são os lados do retângulo e  $x_c$  e  $y_c$  são as coordenadas de seu centroide (FIG.3.5).

Nota-se que, no sistema de coordenadas naturais, o retângulo se transforma em um quadrado de lados igual a dois (FIG. 3.5).

Figura 3.5 – Elemento retangular. Sistema de coordenadas cartesianas e naturais



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.160).

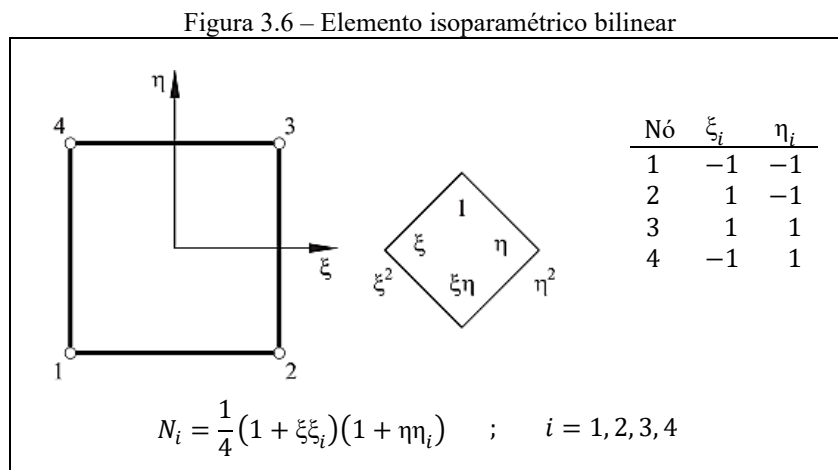
Os elementos retangulares de continuidade  $C^0$  estão divididos em duas famílias, Lagrange e Serendipity, as quais serão abordadas a seguir.

### 3.2.2.1.1 Função de forma para elementos retangulares de Lagrange

De acordo Oñate (2009), as funções de interpolação nos elementos retangulares dessa família podem ser obtidas pelo simples produto de dois polinômios de Lagrange normalizados em 1D conforme Eq. (3.20), a qual pode ser usada tanto para a coordenada  $\xi$  quanto para a  $\eta$  em qualquer nó. Logo, se  $l_i^I(\xi)$  e  $l_j^J(\eta)$  são polinômios de Lagrange em 1D para um nó  $i$ , de ordem  $I$  e  $J$  respectivamente e nas direções  $\xi$  e  $\eta$  nessa ordem, encontra-se:

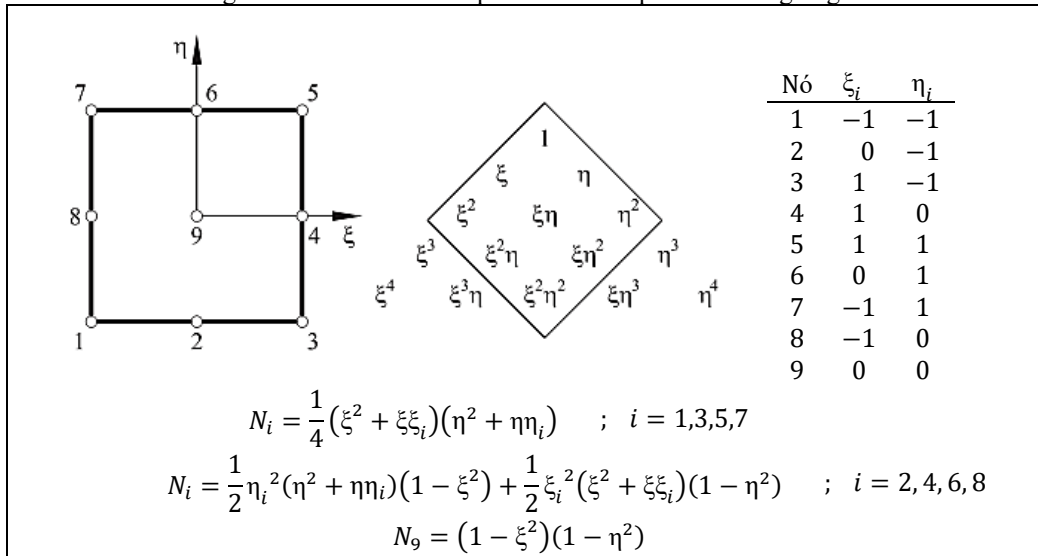
$$N_i(\xi, \eta) = l_i^I(\xi) l_j^J(\eta) \quad (3.23)$$

As funções de forma nos elementos de Lagrange de quatro, nove e dezesseis nós, são apresentadas daqui em diante com seus respectivos termos do triângulo de Pascal (Figuras 3.6, 3.7 e 3.8).



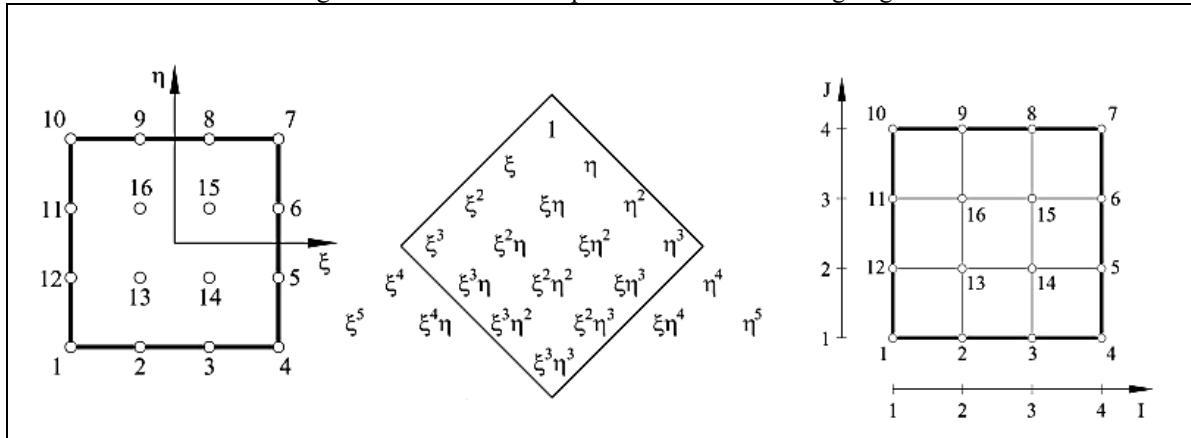
Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.162).

Figura 3.7 – Elemento isoparamétrico biquadrático Lagrange



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.162).

Figura 3.8 – Elemento isoparamétrico bicúbico Lagrange



$$N_i = N_I(\xi) N_J(\eta) \quad ; \quad i = 1,16$$

I	$N_I(\xi)$
1	$N_1 = \frac{1}{16}(\xi - 1)(1 - 9\xi^2)$
2	$N_2 = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 - 3\xi)$
3	$N_3 = \frac{9}{16}(1 - \xi^2)(1 + 3\xi)$
4	$N_4 = \frac{1}{16}(\xi + 1)(9\xi^2 - 1)$

Similarmente, para  $N_J(\eta)$  muda  $\xi$  por  $\eta$

Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.162).

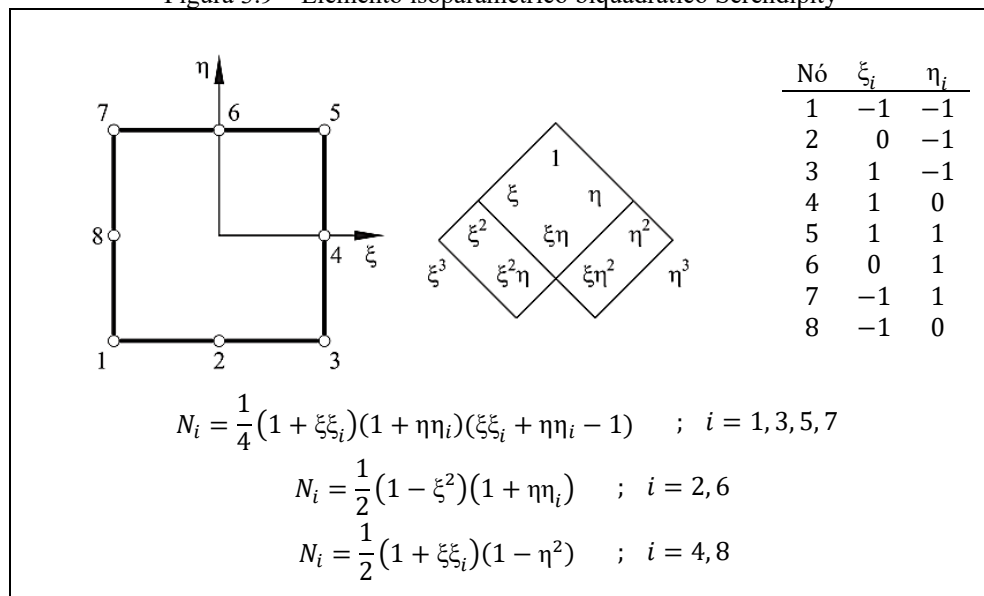
### 3.2.2.1.2 Função de forma para elementos retangulares Serendipity

De acordo com Soriano (2003), na família Lagrange os elementos possuem pontos internos dispostos segundo uma malha ortogonal regular a qual é definida pelos pontos nodais dos lados dos elementos. Na família Serendipity, os elementos têm forma semelhante, porém com menor número de pontos. O nome Serendipity, do inglês, significa habilidade de descobertas por acaso e se deve ao fato das funções de aproximação dessa família terem sido originalmente determinadas por tentativa.

O primeiro elemento da família é o de quatro de nós, cuja função de forma é idêntica ao elemento linear de Lagrange.

O biquadrático de oito nós é o segundo elemento, com funções de forma para os nós localizados nos pontos médios dos lados obtidas pelo produto da função quadrática em  $\xi$  ou  $\eta$  pela função linear em  $\eta$  ou  $\xi$ . Para os nós dos vértices, a função  $N_5$  por exemplo, é encontrada subtraindo a correspondente função linear desse nó pelas funções  $N_4$  e  $N_6$  multiplicadas por  $1/2$ , a fim de que se tenham valores nulos nos pontos nodais 4 e 6 respectivamente. As demais funções dos vértices são obtidas de maneira semelhante e com isso, têm-se de forma genérica, as equações das funções de acordo com a FIG. 3.9.

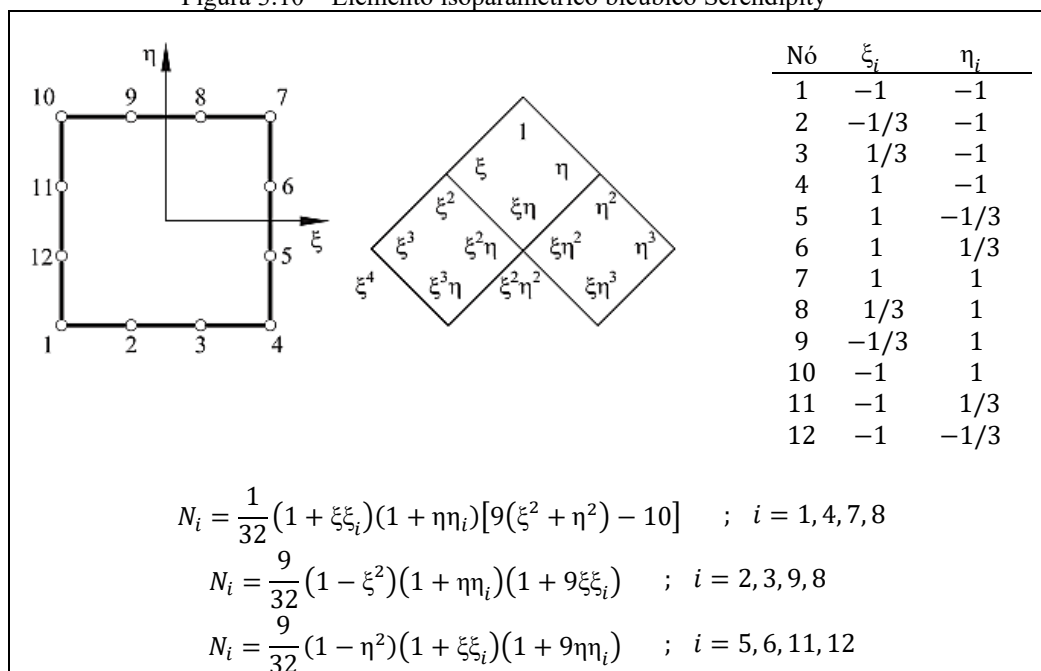
Figura 3.9 – Elemento isoparamétrico biquadrático Serendipity



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.168).

O terceiro elemento é o bicúbico de doze nós, tendo as funções de forma obtidas de forma similar ao de ordem quadrática. Os nós de localização intermediária aos vértices possuem função de forma dada pelo produto da função cúbica em  $\xi$  ou  $\eta$  pela função linear em  $\eta$  ou  $\xi$ . Para os nós dos vértices, a função  $N_1$  por exemplo, é encontrada subtraindo a correspondente função linear desse nó por parcelas ( $2/3$  das funções  $N_2$  e  $N_{12}$  e  $1/3$  das funções  $N_3$  e  $N_{11}$ ), de modo a se ter nulo os correspondentes valores nodais. As outras funções dos vértices são obtidas de maneira análoga, logo têm-se as equações dessas funções (FIG. 3.10).

Figura 3.10 – Elemento isoparamétrico bicúbico Serendipity



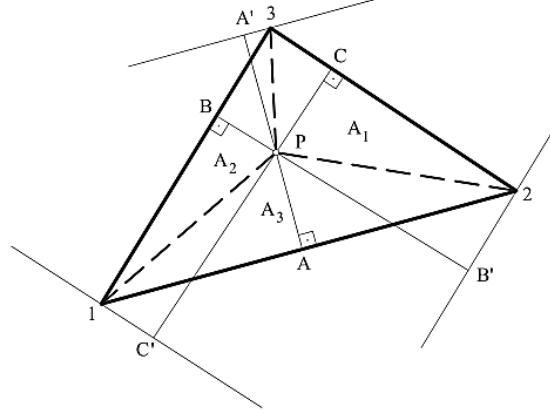
Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.168).

### 3.2.2.2 Função de forma para elementos triangulares de continuidade $C^0$

Segundo Oñate (2009), as funções de forma nos elementos triangulares de continuidade  $C^0$  são mais facilmente obtidas utilizando coordenadas de área como detalhado a seguir.

Seja um ponto P dentro de um triângulo de área A e vértices 1, 2 e 3 definindo as sub-áreas  $A_1$ ,  $A_2$  e  $A_3$  correspondentes aos triângulos P23, P13 e P12 respectivamente (FIG 3.11).

Figura 3.11 – Coordenadas de área de um triângulo



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.174).

As coordenadas de área são definidas de maneira que:

$$L_1 = \frac{A_1}{A} = \frac{CP}{CC'} \quad ; \quad L_2 = \frac{A_2}{A} = \frac{BP}{BB'} \quad ; \quad L_3 = \frac{A_3}{A} = \frac{AP}{AA'} \quad (3.24)$$

sendo

$$L_1 + L_2 + L_3 = \frac{A_1 + A_2 + A_3}{A} = \frac{A}{A} = 1 \quad (3.25)$$

Observa-se que as coordenadas de área do centroide de um triângulo são  $L_1 = L_2 = L_3 = 1/3$ .

As funções de forma de triângulos contêm polinômios completos de grau  $M$  e sua obtenção utilizando o conceito das coordenadas anteriormente descritas será mostrado adiante.

Sendo um nó  $i$  caracterizado pela posição  $(I, J, K)$ , respectivas potências das coordenadas de área  $L_1, L_2$  e  $L_3$ , tem-se que  $I + J + K = M$  e sua função de interpolação é dada por:

$$N_i = l_i^I(L_1) l_j^J(L_2) l_k^K(L_3) \quad (3.26)$$

onde  $l_i^I(L_1)$  é o polinômio de ordem  $I$  normalizado de Lagrange em 1D em  $L_1$  o qual possui valor unitário no nó  $i$ , ou seja:

$$l_i^I(L_1) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^I \left( \frac{L_1 - L_1^j}{L_1^i - L_1^j} \right) \quad (3.27)$$

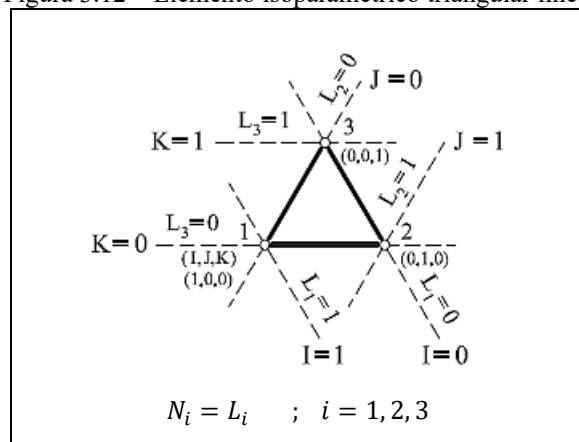
com expressões similares para  $l_j^i(L_2)$  e  $l_k^i(L_3)$ . Na Eq. (3.27),  $L_1^i$  é o valor de  $L_1$  no nó  $i$ .

São observados os seguintes itens sobre as potências  $I, J, K$ :

1. A função de forma para o nó de vértice depende somente de uma coordenada de área e, assim, a correspondente potência  $I, J, K$  desse nó será igual a  $M$ .
2. Todos nós localizados na mesma linha  $L_i = \text{constante}$  possuem o mesmo valor de  $I$  ocorrendo o mesmo para  $L_2$  e  $J$  e  $L_3$  e  $K$ .
3. Os valores de  $I, J, K$  decrescem progressivamente de um valor máximo igual a  $M$  nas linhas  $L_i = 1$  referente aos nós de vértices, até um valor igual a zero nas linhas  $L_i = 0$  que estão do lado oposto a cada nó  $i$ .

A seguir (Figuras 3.12, 3.13 e 3.14), serão apresentados os elementos triangulares de estudo deste trabalho os quais ilustram as definições antecedentes de  $I, J, K$  e também as expressões das respectivas funções de forma conforme Eqs. (3.26) e (3.27).

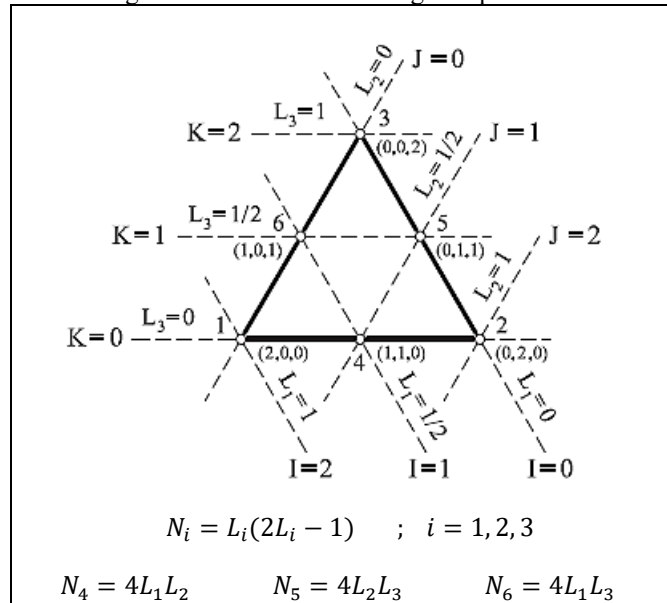
Figura 3.12 – Elemento isoparamétrico triangular linear



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.176).

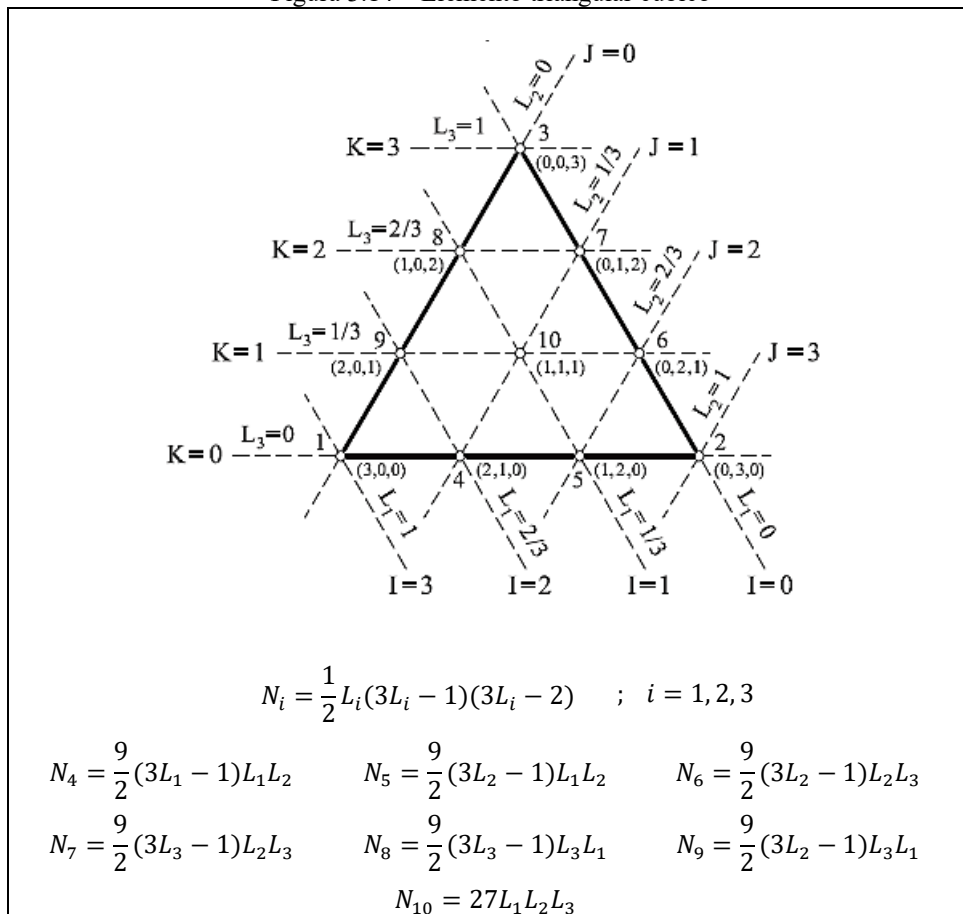


Figura 3.13 – Elemento triangular quadrático



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.176).

Figura 3.14 – Elemento triangular cúbico



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.176).

### 3.3 Formulação dos Elementos

#### 3.3.1 Discretização do campo de deslocamentos

A teoria de placas de Reissner-Mindlin estabelece a independência entre as flechas e as rotações, conforme visto anteriormente nas Eqs. (2.7) e (2.8). Desse modo, qualquer uma dessas variáveis é interpolada usando funções de forma de continuidade  $C^0$  como mostrado adiante na Eq. (3.28):

$$\underline{u} = \begin{Bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} N_i w_i \\ N_i \theta_{x_i} \\ N_i \theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \underline{N} \underline{d} \quad (3.28)$$

onde  $n$  é o número de nós do elemento,  $\underline{N}$  é a matriz das funções de forma dos elementos retangulares e triangulares de Reissner-Mindlin apresentados nas respectivas subseções 3.2.2.1 e 3.2.2.2, dada por:

$$\underline{N} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \cdots & N_n & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \cdots & 0 & N_n & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \cdots & 0 & 0 & N_n \end{bmatrix} = [\underline{N}_1 \quad \underline{N}_2 \quad \cdots \quad \underline{N}_n],$$

com

$$\underline{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i \end{bmatrix} \quad (3.29)$$

e  $\underline{d}$  o vetor de deslocamentos do elemento, definido:

$$\underline{d} = [w_1 \quad \theta_{x_1} \quad \theta_{y_1} \cdots w_n \quad \theta_{x_n} \quad \theta_{y_n}]^T = [\underline{d}_1 \quad \underline{d}_2 \quad \cdots \quad \underline{d}_n]^T,$$

com

$$\underline{d}_i = \begin{Bmatrix} w_i \\ \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{Bmatrix} \quad (3.30)$$

### 3.3.2 Discretização das deformações generalizadas, do campo de tensões e dos esforços internos

As deformações generalizadas são expressas em termos de deslocamentos nodais, substituindo a Eq. (3.28) no vetor de deformações generalizadas obtido pela Eq. (2.19):

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \begin{Bmatrix} \underline{\hat{\varepsilon}}_f \\ \underline{\hat{\varepsilon}}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ \left( \frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \right) \\ \frac{\partial w}{\partial x} - \theta_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} - \theta_y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{x_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{y_i} \\ \left( \frac{\partial N_i}{\partial y} \theta_{x_i} + \frac{\partial N_i}{\partial x} \theta_{y_i} \right) \\ \frac{\partial N_i}{\partial x} w_i - N_i \theta_{x_i} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} w_i - N_i \theta_{y_i} \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{Bmatrix} \underline{B}_{f_i} \\ \underline{B}_{c_i} \end{Bmatrix} \underline{d}_i$$

$$\underline{\hat{\varepsilon}} = \underline{B} \underline{d} \quad (3.31)$$

onde

$\underline{B} = [\underline{B}_1, \underline{B}_2, \dots, \underline{B}_n]$  é a matriz de deformações generalizadas do elemento e

$\underline{B}_i = \begin{Bmatrix} \underline{B}_{f_i} \\ \underline{B}_{c_i} \end{Bmatrix}$  é a matriz de deformações generalizadas para um nó  $i$  sendo suas sub-matrizes dadas por:

$$\underline{B}_{f_i} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial N_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial N_i}{\partial y} & \frac{\partial N_i}{\partial x} \end{bmatrix} \quad \text{como a matriz das deformações generalizadas de flexão e} \quad (3.32)$$

$$\underline{B}_{c_i} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} & -N_i & 0 \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} & 0 & -N_i \end{bmatrix} \quad \text{correspondendo a matriz das deformações generalizadas de cisalhamento.}$$

O vetor de tensões ao longo da espessura  $\underline{\sigma}$  pode ser encontrado por intermédio da matriz  $\underline{S}$  como será demonstrado na sequência, a partir da reescrita da Eq. (2.11):

$$\underline{\varepsilon} = \underline{S} \underline{\hat{\varepsilon}} \quad (3.33)$$

sendo

$$\underline{S} = \begin{bmatrix} -z & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -z & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ a matriz de transformações das deformações.}$$

Assim, substituindo a Eq. (3.31) na (3.33) e depois levando à Eq. (2.13) tem-se:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{S} \underline{B} \underline{d} \quad (3.34)$$

O vetor de esforços internos é obtido relacionando as Eqs. (3.31) e (2.21), logo:

$$\underline{M} = \underline{\hat{D}} \underline{B} \underline{d} \quad (3.35)$$

Nota-se que, para encontrar as grandezas envolvidas nos problemas de placas, deformações (Eq.(3.31)), tensões (Eq.(3.34)) e esforços internos (Eq. (3.35)), é necessário conhecer o vetor de deslocamentos nodais ( $\underline{d}$ ). Para isso, pode se aplicar o Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV) como será visto na próxima subseção.

### 3.3.3 Princípio dos Trabalhos Virtuais

De acordo com Pitangueira (2016, p.33):

Numa estrutura em equilíbrio sujeita a um sistema de forças externas, ao se impor deslocamentos virtuais compatíveis, o trabalho realizado pelas forças reais externas sobre os deslocamentos virtuais é igual ao trabalho das tensões internas sobre as deformações produzidas pelos deslocamentos virtuais.

Aplicando esse princípio em uma placa submetida a um carregamento vertical distribuído  $q(x, y)$  e cargas pontuais  $P_i$  atuando na direção  $z$ , encontra-se:

*Trabalho Virtual Interno = Trabalho Virtual Externo*

$$\iiint_V \delta \underline{\varepsilon}^T \underline{\sigma} dV = \iint_A \delta \underline{u}^T \underline{q} dA + \sum_i^{NCC} \delta \underline{u}_i^T \underline{P}_i \quad (3.36)$$

onde  $NCC$  é o número de cargas concentradas e

$$\delta \underline{u} = [\delta w, \delta \theta_x, \delta \theta_y]^T \quad ; \quad \underline{q} = [f_z, m_x, m_y]^T \quad ; \quad \underline{P}_i = [P_{z_i}, M_{x_i}, M_{y_i}]^T \quad (3.37)$$

sendo  $\delta \underline{u}$  o vetor de deslocamentos virtuais nodais,  $\delta \underline{\varepsilon}$  o vetor de deformações virtuais,  $f_z$ ,  $m_x$  e  $m_y$  a força vertical distribuída e os momentos distribuídos agindo nos plano  $XZ$  e  $YZ$ , respectivamente, e  $P_{z_i}$ ,  $M_{x_i}$  e  $M_{y_i}$  a força vertical concentrada e os momentos fletores atuando em um ponto  $i$ .

Das Eqs. (3.33) e (3.28), deduz-se que as deformações e os deslocamentos virtuais podem ser escritos da forma:

$$\delta \underline{\varepsilon}^T = \delta \underline{\hat{\varepsilon}}^T \underline{S}^T \quad ; \quad \delta \underline{u}^T = \delta \underline{d}^T \underline{N}^T \quad (3.38)$$

Assim, o PTV se torna:

$$\iiint_V \delta \underline{\hat{\varepsilon}}^T \underline{S}^T \underline{\sigma} dV = \iint_A \delta \underline{d}^T \underline{N}^T \underline{q} dA + \sum_i^{NCC} \delta \underline{u}_i^T \underline{P}_i$$

Conhecendo que  $dV = dA dz$  e considerando que as cargas concentradas e os deslocamentos incidem somente nos nós do elemento, têm-se um novo vetor  $\underline{p}$  e o vetor  $\delta \underline{d}^T$  para forças concentradas e deslocamentos nodais, nessa ordem. Assim obtém-se:

$$\iint_A \delta \underline{\hat{\varepsilon}}^T \left[ \int_{-e/2}^{+e/2} \underline{S}^T \underline{\sigma} dz \right] dA = \iint_A \delta \underline{d}^T \underline{N}^T \underline{q} dA + \delta \underline{d}^T \underline{p} \quad (3.39)$$

A partir das Eqs. (3.31) deduzem-se as deformações virtuais generalizadas  $\delta \underline{\hat{\varepsilon}}^T$  e das Eqs. (2.18) e (3.35) e da matriz  $\underline{S}$ :

$$\iint_A \delta \underline{d}^T \underline{B}^T \underline{M} dA = \iint_A \delta \underline{d}^T \underline{B}^T \underline{\hat{D}} \underline{B} \underline{d} dA = \iint_A \delta \underline{d}^T \underline{N}^T \underline{q} dA + \delta \underline{d}^T \underline{p}$$

$$\delta \underline{d}^T \left[ \left( \iint_A \underline{B}^T \underline{\hat{D}} \underline{B} dA \right) \underline{d} \right] = \delta \underline{d}^T \left[ \iint_A \underline{N}^T \underline{q} dA + \underline{p} \right]$$

$$\left( \iint_A \underline{B}^T \widehat{\underline{D}} \underline{B} dA \right) \underline{d} = \iint_A \underline{N}^T \underline{q} dA + \underline{p} \quad (3.40)$$

Reescrevendo a Eq. (3.40) simbolicamente:

$$\underline{k} \underline{d} = \underline{f}_{eq} + \underline{p} \quad (3.41)$$

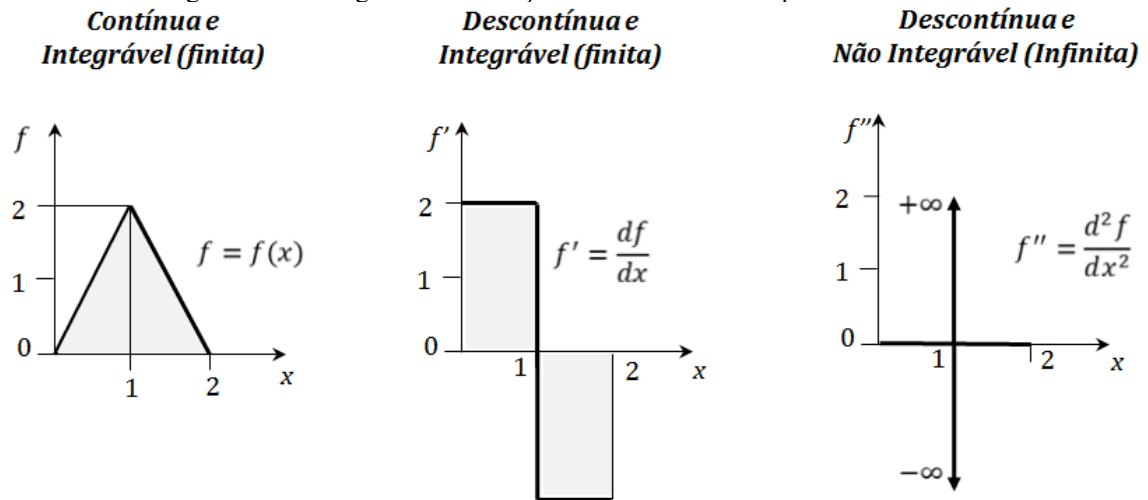
onde:

$$\begin{aligned} \underline{k} &= \iint_A \underline{B}^T \widehat{\underline{D}} \underline{B} dA \quad \text{é a matriz de rigidez do elemento, sendo composta por:} \\ \underline{k} &= \iint_A (\underline{B}_f^T \widehat{\underline{D}}_f \underline{B}_f + \underline{B}_c^T \widehat{\underline{D}}_c \underline{B}_c) dA = \underline{k}_f + \underline{k}_c, \quad \text{onde} \\ \underline{k}_f &= \iint_A \underline{B}_f^T \widehat{\underline{D}}_f \underline{B}_f dA \quad \text{a matriz de rigidez do elemento de flexão e} \\ \underline{k}_c &= \iint_A \underline{B}_c^T \widehat{\underline{D}}_c \underline{B}_c dA \quad \text{a matriz de rigidez do elemento de cisalhamento} \\ \underline{f}_{eq} &= \iint_A \underline{N}^T \underline{q} dA \quad \text{é o vetor de forças nodais equivalentes às forças} \\ &\quad \text{distribuídas e} \\ \underline{p} &\quad \text{é o vetor das forças nodais.} \end{aligned} \quad (3.42)$$

De acordo com Zienkiewicz e Taylor (2000), as integrais contidas no PTV devem possuir seus termos finitos para que sejam integráveis. Esses termos são traduzidos como as funções de forma  $N$  e suas derivadas que são associadas às deformações do elemento. Essa condição pode ser mais bem entendida através de um exemplo descrito em Oñate (2009).

Dado uma função contínua  $f(x)$  e suas duas primeiras derivadas conforme mostrado na FIG. 3.15, a integral de  $f(x)$  por ser finita, existe no intervalo considerado e é igual à área do triângulo sombreado. A função  $f'(x)$  também é integrável, visto que é finita, sendo sua integral igual à área dos retângulos, porém é uma função não contínua. No entanto, a segunda derivada  $f''(x)$  não é integrável, pois possui dois pontos que tendem ao infinito devido a descontinuidade de  $f'(x)$ .

Figura 3.15 – Integral de uma função bilinear e suas duas primeiras derivadas



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, p.102).

Assim, de forma geral, as derivadas de ordem  $m$  são integráveis se suas derivadas de ordem  $m - 1$  são contínuas (continuidade  $C^{m-1}$ ). No caso do PTV descrito pela Eq. (3.40), somente derivadas de primeira ordem compõem sua integral e com isso, apenas continuidade  $C^0$  é requerida. Dessa forma, para Zienkiewicz e Taylor (2000), essa continuidade garante continuidade no campo dos deslocamentos (e também nas funções de forma) e que as deformações são integráveis (finitas) apesar de serem descontínuas.

### 3.3.4 Formulação Isoparamétrica

#### 3.3.4.1 Introdução

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), elementos retangulares e triangulares não são suficientes para representar formas complexas que podem ocorrer em situações reais. Com isso, esses elementos de forma simples são distorcidos em outras formas mais arbitrárias.

Consoante com Soriano (2003, p.125):

No desenvolvimento de elemento finito com forma distorcida, é prático e muito vantajoso definir sua geometria por interpolação de suas coordenadas nodais. Quando nessa definição são utilizadas as mesmas funções da solução aproximada do campo de deslocamentos, o elemento é denominado **isoparamétrico**.

Rao (2004) cita outras denominações para o elemento além do isoparamétrico. Se a geometria é descrita por uma função de ordem inferior à função do campo de deslocamentos, o elemento

é classificado como **subparamétrico**. Em contrapartida, se a geometria é descrita por uma função de ordem superior à função do campo de deslocamentos, o elemento é dito **superparamétrico**. Neste trabalho, o estudo estará delimitado aos elementos isoparamétricos e subparamétricos quadrilaterais e triangulares.

### 3.3.4.2 Elementos quadrilaterais isoparamétricos

A geometria de um elemento quadrilateral isoparamétrico em 2D com  $n$  nós é expressa de acordo com Oñate (2009), da seguinte forma:

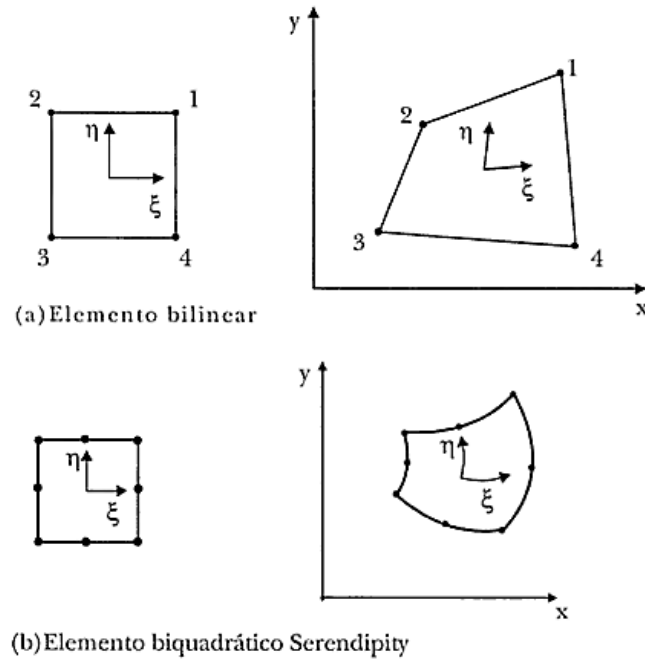
$$x = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) y_i \quad (3.43)$$

onde  $N_i$  é a função de interpolação em coordenadas naturais  $\xi, \eta$  para a forma regular do elemento (quadrado de tamanho igual a 2) e  $x_i$  e  $y_i$  são as coordenadas cartesianas de cada ponto da geometria. Dessa maneira, em conformidade com Soriano (2003), mapeia-se um elemento bidimensional de domínio auxiliar regular de coordenadas naturais  $\xi, \eta$  ortogonais em um elemento de domínio físico de coordenadas cartesianas  $x, y$ .

A título de exemplos, consideram-se o elemento bidimensional de quatro pontos nodais (FIG. 3.16 (a)) e o biquadrático Serendipity (FIG. 3.16 (b)). No primeiro caso, como as funções de interpolação desse elemento são lineares em  $\xi$  e  $\eta$ , nas coordenadas cartesianas  $xy$  todo lado do elemento é um segmento de reta definido pelos respectivos nós localizados nos vértices. Portanto, o elemento regular no domínio auxiliar fica distorcido na forma quadrilateral no domínio físico. No caso (b), de forma análoga, o elemento distorce, porém com lados curvos devido ao elemento regular ser biquadrático e, dessa forma, as coordenadas  $\xi, \eta$  tornam-se curvilíneas no plano bi-ortogonal  $xy$ .



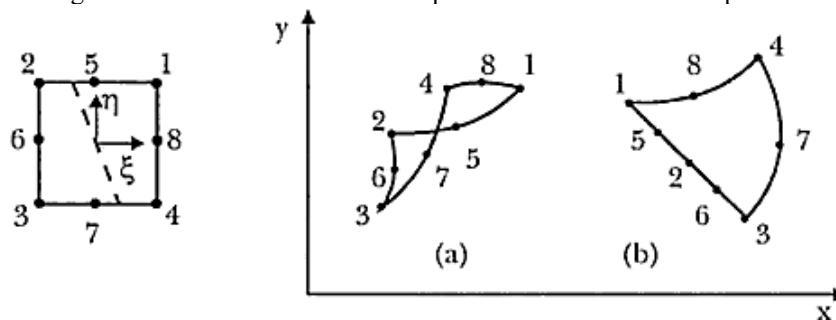
Figura 3.16 – Exemplos de elementos isoparamétricos



Fonte: Adaptado de Soriano (2003, p.126).

Soriano (2003) afirma que é necessário ocorrer uma correspondência biunívoca entre os domínios auxiliar e físico. Como contra exemplos, podem ser vistos na FIG. 3.17 dois casos onde essas correspondências não acontecem. No caso (a), os pontos tracejados do elemento regular (entre os pontos 2 e 5 e entre os pontos 7 e 4), são mapeados em um único ponto de domínio físico (ponto de interseção das curvas). No caso (b), as direções  $\xi$  e  $\eta$  são coincidentes no ponto nodal 2.

Figura 3.17 – Elementos sem correspondência biunívoca de mapeamento

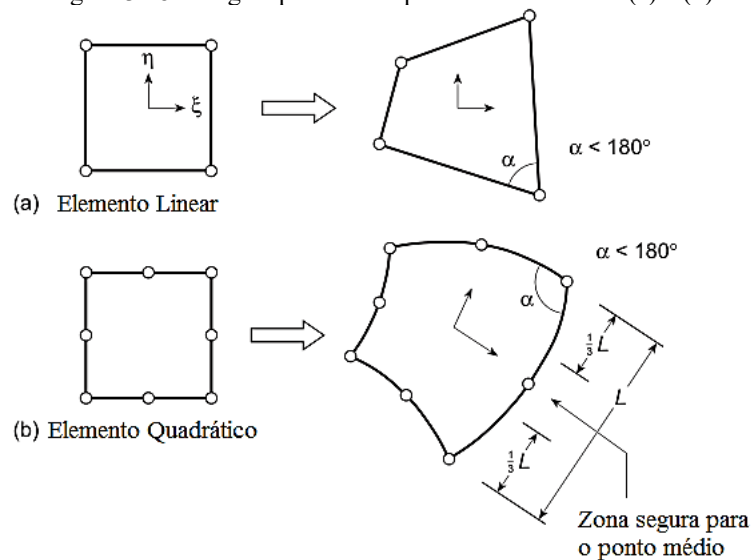


Fonte: SORIANO, 2003, p.127.

De acordo com Soriano (2003), a não correspondência biunívoca é identificada por determinante nulo da matriz Jacobiana (a ser apresentado adiante), o qual inviabiliza a determinação das componentes de deformação no sistema cartesiano. A singularidade dessa matriz, conforme aponta Aves Filho (2008), ocorre quando o elemento é muito distorcido.

Portanto, Strang e Fix (1973 *apud* Oñate, 2009) afirmam que esse determinante deve ser constante e positivo no domínio do elemento e que para elementos lineares quadrilaterais essa condição acontece se nenhum ângulo entre dois lados for igual ou maior que  $180^\circ$ . Zienkiewicz e Taylor (2000) descrevem que nos elementos quadráticos é adicionalmente requerido que os nós de lados estejam localizados no terço médio da distância entre os nós dos vértices como mostrado na FIG. 3.18. Em elementos quadrilaterais de ordem superior, Oñate (2009) cita que não existem regras práticas nessa verificação e que a única possibilidade é conferir o valor constante positivo para o determinante da matriz Jacobiana.

Figura 3.18 – Regras para um mapeamento biunívoco (a) e (b)



Fonte: Adaptado de Zienkiewicz e Taylor (2000, p.205).

Segundo Zienkiewicz e Taylor (2000), para se efetuar uma análise de elementos finitos da forma vista na Eq. (3.41), é imprescindível obter a matriz de rigidez do elemento e o vetor de forças nodais equivalentes (caso exista carga distribuída no problema a ser avaliado). Essas variáveis são obtidas a partir das integrais da Eq. (3.42), porém para serem resolvidas precisam antes de duas transformações.

Dado que as funções de forma  $N_i$  são definidas em termos de coordenadas locais  $\xi$  e  $\eta$  e a matriz  $B_i$  é definida sendo a derivada de  $N_i$  em relação às coordenadas globais cartesianas  $x$  e  $y$ , torna-se necessário obter  $B_i$  como as derivadas das funções de forma em relação às coordenadas  $\xi$  e  $\eta$ . Nessa primeira transformação, recorre-se a regra da cadeia com intuito de descobrir as derivadas das funções  $N_i(x, y)$  já que da Eq. (3.43),  $x = x(\xi, \eta)$  e  $y = y(\xi, \eta)$ .

Então, diferenciando  $N_i$  em relação a  $\xi$  e  $\eta$ , encontram-se:

$$\frac{\partial N_i}{\partial \xi} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} ; \quad \frac{\partial N_i}{\partial \eta} = \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \quad (3.44)$$

matricialmente,

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (3.45)$$

onde

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{é a matriz Jacobina do elemento de transformação das derivadas} \\ \text{de } N_i \text{ em coordenadas naturais e globais.} \end{array} \quad (3.46)$$

Como se tem interesse nas derivadas de  $N_i$  em relação a  $x$  e  $y$  para a matriz  $B_i$  (a qual estará agora em função de  $\xi$  e  $\eta$ ), inverte-se a matriz  $J$  na Eq. (3.45):

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial x}{\partial \eta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (3.47)$$

onde  $|J|$  é o determinante da matriz Jacobiana, ou simplesmente Jacobiano. Substituindo a definição da geometria em (3.43) na Eq. (3.46), obtém-se a matriz jacobina a partir das coordenadas globais:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i ; \quad \frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i ; \quad \text{etc.} \quad (3.48)$$

logo:

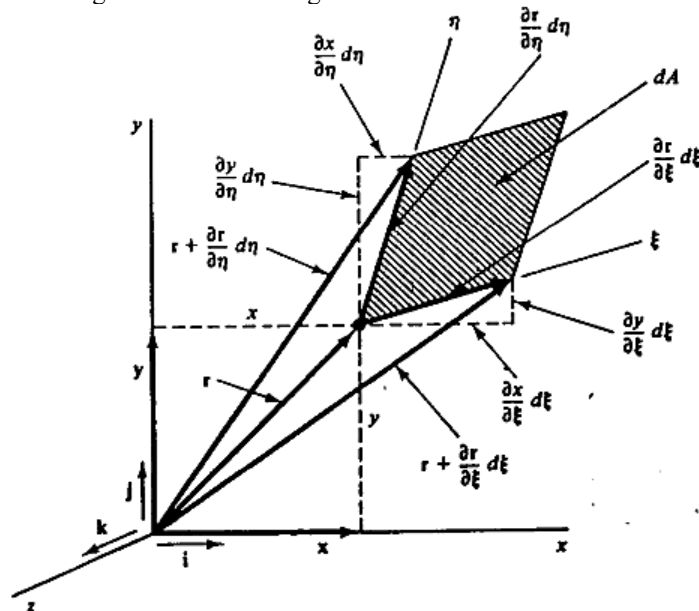
$$J = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

Sendo essa matriz não singular, existe uma correspondência biunívoca entre  $\xi, \eta$  e  $x, y$  o que permite escrever a Eq. (3.47) (SORIANO, 2003).

A segunda transformação das integrais em (3.42) envolve a mudança da área infinitesimal  $dA = dx dy$  para expressões em termos de  $d\xi$  e  $d\eta$  e adicionalmente a substituição apropriada dos limites de integração, que no espaço  $\xi$  e  $\eta$  passam a ser de  $-1$  a  $+1$ . Para isso, considera-se a dedução feita por Johnston (1984), conforme demonstrado adiante.

Seja uma área infinitesimal  $dA$  em coordenadas naturais:

Figura 3.19 – Paralelogramo infinitesimal de área  $dA$



Fonte: JOHNSTON, 1984, p.112.

O vetor  $\mathbf{r}$  localiza um ponto genérico em coordenadas cartesianas  $x$  e  $y$  como descrito a seguir:

$$\mathbf{r} = \mathbf{x} + \mathbf{y} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (3.50)$$

As taxas de variação de  $\mathbf{r}$  em relação à  $\xi$  e em relação à  $\eta$  são respectivamente:

$$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \mathbf{j} \quad ; \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} = \frac{\partial x}{\partial \eta} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial \eta} \mathbf{j} \quad (3.51)$$

Quando as duas derivadas da Eq. (3.51) são multiplicada por  $d\xi$  e  $d\eta$ , nessa ordem, formam-se dois lados adjacentes do paralelogramo infinitesimal de área  $dA$  conforme figura anterior. Essa área pode ser determinada pelo seguinte produto vetorial triplo:

$$dA = \left( \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \xi} d\xi \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \eta} d\eta \right) \cdot \mathbf{k} \quad (3.52)$$

Substituindo as equações em (3.51) na Eq. (3.52) e resolvendo o produto, obtém-se:

$$dA = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 0 + 1 \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta = \left( \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \right) d\xi d\eta \quad (3.53)$$

A Eq. (3.53) pode ser escrita como determinante por:

$$dA = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} d\xi d\eta = |J| d\xi d\eta \quad (3.54)$$

onde  $J$  é a matriz Jacobina definida na Eq. (3.46) e  $|J|$  é seu determinante.

Feita as duas transformações anteriores, é possível calcular as integrais da Eq. (3.42) no sistema adimensional  $\xi, \eta$  e desse modo, elas constituem a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais equivalentes para o elemento quadrilateral isoparamétrico, que podem ser escritas da forma:

$$\underline{k} = \iint_A \underline{B}^T \widehat{D} \underline{B} dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T(\xi, \eta) \widehat{D} \underline{B}(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta \quad (3.55)$$

é a matriz de rigidez para um elemento quadrilateral isoparamétrico.

$$\underline{f}_{eq} = \iint_A \underline{N}^T \underline{q} dA = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T(\xi, \eta) \underline{q} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta$$

é o vetor de forças nodais equivalentes às forças distribuídas para um elemento quadrilateral isoparamétrico.

Sendo  $\underline{B}(\xi, \eta)$  obtido a partir da Eq. (3.47) e  $J(\xi, \eta)$  pela Eq. (3.49).

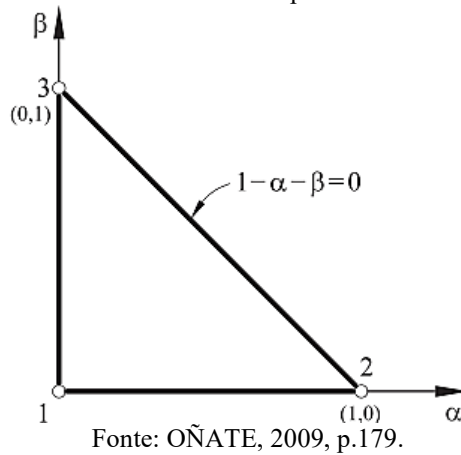
### 3.3.4.3 Elementos triangulares isoparamétricos

Segundo Oñate (2009), a interpolação isoparamétrica nos elementos triangulares é escrita de forma similar a Eq. (3.43), assim:

$$x = \sum_{i=1}^n N_i(L_1, L_2, L_3) x_i \quad ; \quad y = \sum_{i=1}^n N_i(L_1, L_2, L_3) y_i \quad (3.56)$$

Em triângulos de lados curvos, é conveniente usar coordenadas naturais  $\alpha$  e  $\beta$  definidas de forma que o triângulo tenha os lados sobre as retas  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  e  $1 - \alpha - \beta = 0$  (FIG. 3.20).

Figura 3.20 – Coordenadas naturais para um elemento triangular



As funções de forma em um triângulo de 3 nós são:

$$N_1 = 1 - \alpha - \beta \quad ; \quad N_2 = \alpha \quad ; \quad N_3 = \beta \quad (3.57)$$

Visto que  $L_i = N_i$  para o triângulo de três nós em coordenadas de área, as coordenadas  $L_2$  e  $L_3$  coincidem com as coordenadas naturais  $\alpha$  e  $\beta$  nessa ordem e  $L_1 = 1 - \alpha - \beta$ . Portanto, é necessário apenas essa substituição para obter todas as funções de forma dos elementos triangulares em coordenadas naturais.

A obtenção das derivadas cartesianas de  $N_i$  segue exatamente os procedimentos adotados nos elementos quadrilaterais, trocando simplesmente as coordenadas  $\xi$  e  $\eta$  por  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Logo:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial x} \\ \frac{\partial N_i}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \beta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial y}{\partial \beta} & -\frac{\partial x}{\partial \beta} \\ -\frac{\partial y}{\partial \alpha} & \frac{\partial x}{\partial \alpha} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial N_i}{\partial \beta} \end{Bmatrix} \quad (3.58)$$

sendo

$$J = \sum_{i=1}^n \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \alpha} y_i \\ \frac{\partial N_i}{\partial \beta} x_i & \frac{\partial N_i}{\partial \beta} y_i \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Por fim, a matriz de rigidez e o vetor de forças nodais equivalentes seguem suas expressões também de forma análoga a (3.55).

Assim:

$$\underline{k} = \iint_A \underline{B}^T \underline{\hat{D}} \underline{B} dA = \int_0^1 \int_0^{1-\beta} \underline{B}^T(\alpha, \beta) \underline{\hat{D}} \underline{B}(\alpha, \beta) |J(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta$$

é a matriz de rigidez para um elemento triangular isoparamétrico. (3.60)

$$\underline{f}_{eq} = \iint_A \underline{N}^T \underline{q} dA = \int_0^1 \int_0^{1-\beta} \underline{N}^T(\alpha, \beta) \underline{q} |J(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta$$

é o vetor de forças nodais equivalentes às forças distribuídas para um elemento triangular isoparamétrico.

### 3.3.5 Integração Numérica

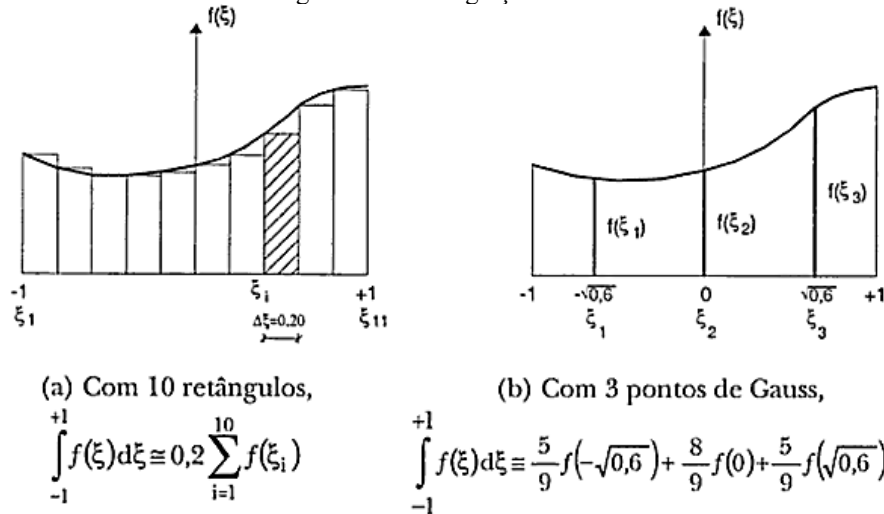
#### 3.3.5.1 Introdução

De acordo com Soriano (2003), quando a definição da geometria do elemento é feita através da interpolação das coordenadas nodais e/ou elementos de ordem elevada, como visto anteriormente nos elementos retangulares e triangulares isoparamétricos, as integrais da matriz de rigidez e dos vetores de forças nodais equivalentes são muito elaboradas e impraticáveis de serem calculadas analiticamente, na grande maioria dos casos. Dessa forma, utiliza-se a integração numérica.

O método mais simples para integração numérica de uma função  $f$  na variável  $\xi$  é por retângulos, onde adotam-se  $p$  pontos igualmente espaçados, em conformidade com a Eq. (3.61) e FIG. 3.21(a):

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \cong \Delta\xi \sum_{i=1}^p f(\xi_i) \quad (3.61)$$

Figura 3.21 – Integração numérica



Fonte: SORIANO, 2003, p.145.

Vários outros métodos foram desenvolvidos visando maior desempenho de cálculo, mas o que apresentou maior eficiência para uma dada acurácia em integrais unidimensionais, como ressalta Fröberg (1966 *apud* Soriano, 2003), foi o método de Gauss ou Gauss-Legendre.

Soriano (2003) aponta que nesse método fixa-se um número  $p$  de pontos de cálculo do integrando na variável  $\xi$ , as posições desses pontos e os multiplicadores dos correspondentes valores do integrando, fatores peso  $H_i$ , de forma a se ter a melhor precisão para aproximação. Portanto:

$$I = \int_{-1}^{+1} f(\xi) d\xi \cong \sum_{i=1}^p H_i f(\xi_i) \quad (3.62)$$

A Eq. (3.62) revela que a integração com  $p$  pontos é uma soma ponderada que requer a determinação de  $2p$  incógnitas  $H_i$  e  $\xi_i$ , que uma vez encontradas, determinam a integração exata de um polinômio de grau  $(2p - 1)$ , grau esse denominado de ordem de integração. O Quadro 3.1 a seguir fornece as posições dos pontos de integrações, os correspondentes fatores-peso e as respectivas ordens de integração.



Quadro 3.1 – Pontos de integração, fatores-peso e ordens de integração de Gauss-Legendre

N. de pontos	Coordenada $\xi_i$	$H_i$	Ordem
1	0	2	Linear
2	$\pm 1/\sqrt{3}$	1	Quadrática/Cúbica
3	$\pm\sqrt{0,6}$	5/9	Quártica/Quíntupla
	0	8/9	
4 com $a=\sqrt{1,2}$	$\pm\sqrt{(3+2a)/7}$	$1/2 - 1/(6a)$	Sêxtupla/Sétupla
	$\pm\sqrt{(3-2a)/7}$	$1/2 + 1/(6a)$	

Fonte: Adaptado de Soriano (2003, p.146).

Nota-se que os pontos de integração são simétricos em relação à origem e que a soma dos fatores-peso em cada ordem de integração é igual ao comprimento do elemento na coordenada  $\xi$ . A FIG. 3.21 (b) exemplifica esse método para 3 pontos de integração os quais integram exatamente uma forma polinomial de ordem quíntupla. Ressalta-se que o uso de um maior número de pontos que o necessário na integração exata não altera o resultado.

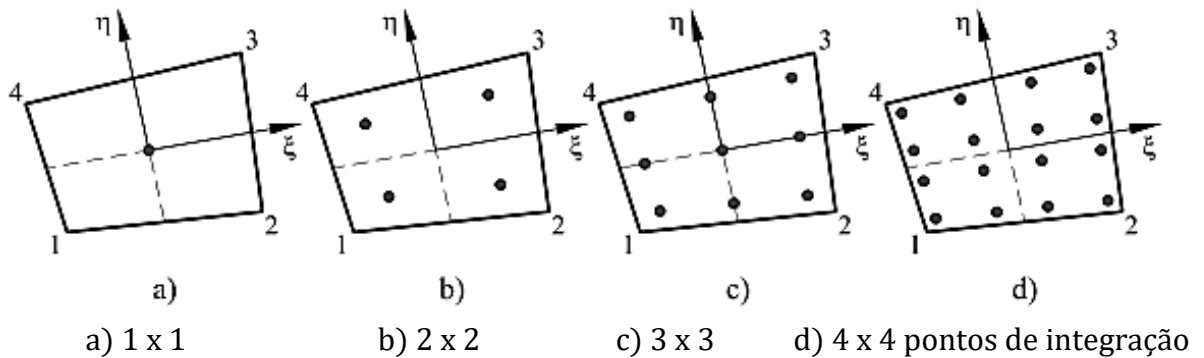
### 3.3.5.2 Integração numérica em elementos quadrilaterais

Soriano (2003) cita que para a integração com duas ou três variáveis independentes, o usual é adotar sucessivamente a integração unidimensional de Gauss-Legendre em todas as variáveis desconsiderando-se a influência das demais. Assim, para o caso bidimensional de um elemento isoparamétrico quadrilateral tem-se:

$$I = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \cong \int_{-1}^{+1} \left[ \sum_{i=1}^{p1} H_i f(\xi_i, \eta) \right] d\eta = \sum_{i=1}^{p1} \sum_{j=1}^{p2} H_i H_j f(\xi_i, \eta_j) \quad (3.63)$$

sendo  $p1$  e  $p2$  os números de pontos de integração nas direções  $\xi$  e  $\eta$ , respectivamente. Nota-se que os valores de  $H_j$  e  $\xi_j$  são os mesmos descritos no Quadro 3.1 alterando o  $i$  pelo  $j$ , e que a soma dos fatores-peso em cada integração é igual à área de domínio auxiliar de coordenadas normalizadas. A FIG. 3.22 ilustra as quadraturas mais comuns nos elementos quadrilaterais:

Figura 3.22 – Quadratura de Gauss nos elementos quadrilaterais



Fonte: Adaptado de Oñate (2009, pag.198).

Uma observação é que o somatório descrito na Eq. (3.63) pode ocorrer com  $(p_1 \times p_2)$  pontos de integração, ou seja, com  $(p_1 \times p_2)$  possibilidades distintas para as coordenadas  $\xi_i, \eta_j$  e respectivos pesos  $H_i H_j$ .

Considerando por exemplo, a matriz de rigidez do elemento Serendipity de 8 nós. A mesma para uma integração exata denominada **completa** conforme aponta Soriano (2003), envolve a integração do elemento não distorcido. Oñate (2009) afirma que esses elementos são o retangular e o triângulo de lado reto cujas matrizes Jacobiana são constantes. Assim, o integrando do elemento Serendipity de oito nós contém termos com o produto  $(N_{,\xi} \cdot N_{,\xi})$  e  $(N_{,\eta} \cdot N_{,\eta})$ , sendo  $N$  composto por termos  $\xi^2 \eta^2$ . Desse produto, resultam então, polinômios de quarto grau em  $\xi$  e  $\eta$  sendo necessário três pontos de integração em cada direção.

Soriano (2003) aponta que pode se alterar o número de pontos de integração de uma direção a outra, em função da ordem de integração que se deseja. Complementa que em elementos com igual número de nós em cada lado, é natural adotar o mesmo número de pontos de integração em todas orientações. Considerando então o mesmo número de pontos, o total número de pontos de integração no elemento Serendipity de 8 nós será  $(3 \times 3) = 9$ .

A matriz de rigidez e o vetor de forças nodais equivalentes para um elemento quadrilateral isoparamétrico usando integração numérica são escritos da forma:

$$\begin{aligned}
\underline{k} &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{B}^T(\xi, \eta) \widehat{D} \underline{B}(\xi, \eta) |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \\
&= \sum_{i=1}^{p1} \sum_{j=1}^{p2} H_i H_j [\underline{B}^T(\xi_i, \eta_j) \widehat{D} \underline{B}(\xi_i, \eta_j) |J(\xi_i, \eta_j)|] \\
&= \sum_{i=1}^{p1_f} \sum_{j=1}^{p2_f} H_i H_j [\underline{B}_f^T(\xi_i, \eta_j) \widehat{D}_f \underline{B}_f(\xi_i, \eta_j) |J(\xi_i, \eta_j)|] + \\
&= \sum_{i=1}^{p1_c} \sum_{j=1}^{p2_c} H_i H_j [\underline{B}_c^T(\xi_i, \eta_j) \widehat{D}_c \underline{B}_c(\xi_i, \eta_j) |J(\xi_i, \eta_j)|]
\end{aligned}$$

onde  $(p1_f, p2_f)$  e  $(p1_c, p2_c)$  são os pontos de integração para a matriz de rigidez de flexão e cisalhamento, nessa ordem. (3.64)

$$\underline{f}_{eq} = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \underline{N}^T(\xi, \eta) \underline{q} |J(\xi, \eta)| d\xi d\eta = \sum_{i=1}^{p1} \sum_{j=1}^{p2} H_i H_j [\underline{N}^T(\xi_i, \eta_j) \underline{q} |J(\xi_i, \eta_j)|]$$

### 3.3.5.3 Integração numérica em elementos triangulares

Segundo Soriano (2003), para os elementos triangulares foram desenvolvidos procedimentos numéricos de integração nas coordenadas triangulares de acordo com a Eq. (3.65):

$$I = \int_0^1 \int_0^{1-L_3} f(L_1, L_2, L_3) dL_2 dL_3 = \sum_{i=1}^p H_i f(L_{1_i}, L_{2_i}, L_{3_i}) \quad (3.65)$$

onde  $p$  é o número de pontos de integração sendo  $L_{1_i}, L_{2_i}, L_{3_i}$  e  $H_i$  as coordenadas de área e correspondente fator-peso para o  $i$ -ésimo ponto de integração. Constata-se que a soma dos pesos em cada ordem equivale a  $1/2$ , ou seja, a área do triângulo normalizado de lados retos.

A FIG. 3.23 apresenta a localização dos pontos de integração bem como as correspondentes coordenadas e fator-peso das ordens do elemento. Essa figura é também uma aplicação direta para o cálculo das integrais no domínio das coordenadas naturais  $\alpha$  e  $\beta$ .

Figura 3.23 – Coordenadas e pesos para a quadratura Gauss em elementos triangulares

Figura	Pontos	N. de Pontos	Coordenadas			$H_i$	Ordem
			L1	L2	L3		
(a)	a	1	1/3	1/3	1/3	1/2	Linear
(b)	a	3	1/2	1/2	0	1/6	Quadrática
	b		0	1/2	1/2	1/6	
	c		1/2	0	1/2	1/6	
(c)	a	4	1/3	1/3	1/3	$\gamma_1$	Cúbica
	b		0,6	0,2	0,2	$\gamma_2$	
	c		0,2	0,6	0,2	$\gamma_2$	
	d		0,2	0,2	0,6	$\gamma_2$	
(d)	a	6	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\beta_1$	$\gamma_3$	Quártica
	b		$\beta_1$	$\alpha_1$	$\beta_1$	$\gamma_3$	
	c		$\beta_1$	$\beta_1$	$\alpha_1$	$\gamma_3$	
	d		$\alpha_2$	$\beta_2$	$\beta_2$	$\gamma_4$	
	e		$\beta_2$	$\alpha_2$	$\beta_2$	$\gamma_4$	
	f		$\beta_2$	$\beta_2$	$\alpha_2$	$\gamma_4$	
$\alpha_1=0,8168475730$		$\beta_1=0,0915762135$	$\gamma_1=-27/96$			$2\gamma_3=0,1099517437$	
$\alpha_2=0,1081030182$		$\beta_2=0,4459484909$	$\gamma_2=25/96$			$2\gamma_4=0,2233815897$	

Fonte: Adaptado de Oñate (2009, pag.200).

A matriz de rigidez e o vetor de forças nodais equivalentes para um elemento triangular isoparamétrico usando integração numérica são escritos da forma:

$$\begin{aligned}
\underline{k} &= \int_0^1 \int_0^{1-\beta} \underline{B}^T(\alpha, \beta) \widehat{\underline{D}} \underline{B}(\alpha, \beta) |J(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta = \\
&= \sum_{i=1}^p H_i [\underline{B}^T(\alpha_i, \beta_i) \widehat{\underline{D}} \underline{B}(\alpha_i, \beta_i) |J(\alpha_i, \beta_i)|] \\
&= \sum_{i=1}^{p_f} H_i [\underline{B}_f^T(\alpha_i, \beta_i) \widehat{\underline{D}}_f \underline{B}_f(\alpha_i, \beta_i) |J(\alpha_i, \beta_i)|] + \\
&= \sum_{i=1}^{p_c} H_i [\underline{B}_c^T(\alpha_i, \beta_i) \widehat{\underline{D}}_c \underline{B}_c(\alpha_i, \beta_i) |J(\alpha_i, \beta_i)|] \\
\underline{f}_{eq} &= \int_0^1 \int_0^{1-\beta} \underline{N}^T(\alpha, \beta) \underline{q} |J(\alpha, \beta)| d\alpha d\beta = \sum_{i=1}^p H_i [\underline{N}^T(\alpha_i, \beta_i) \underline{q} |J(\alpha_i, \beta_i)|]
\end{aligned}$$

onde  $p_f$  e  $p_c$  e são os pontos de integração para a matriz de rigidez de flexão e cisalhamento, respectivamente. (3.66)

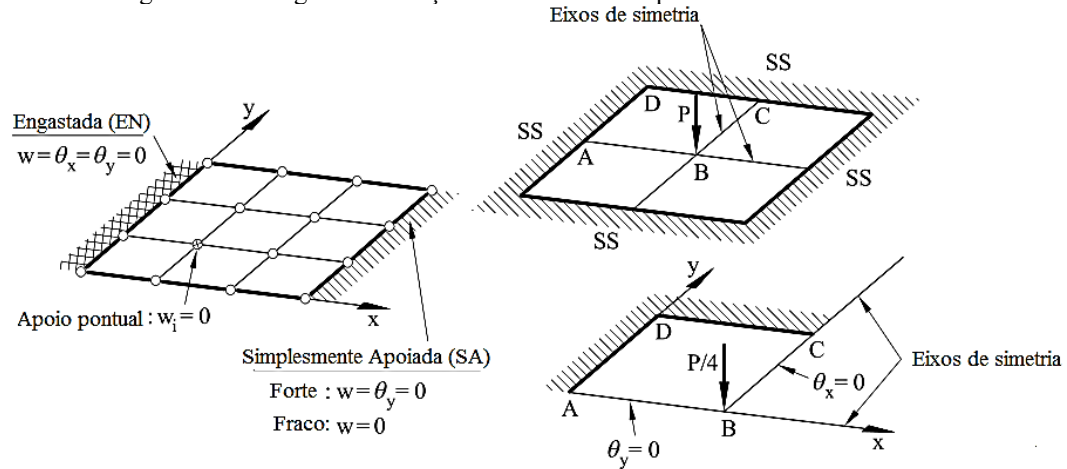
### 3.3.6 Condições de contorno

As condições de contorno mais comuns para os elementos finitos baseados na teoria de Reissner-Mindlin estão descritas conforme Oñate (2013):

1. Apoio pontual:  $w_i = 0$
2. Eixo de simetria (de geometria e da carga):  $\theta_n = 0$ , onde  $n$  é a direção normal ao eixo de simetria e a carga concentrada em uma placa duplamente simétrica é igual a  $P/4$ . A carga distribuída não altera-se em condições de dupla simetria.
3. Engastada (EN):  $w = \theta_x = \theta_y = 0$  (para o lado engastado).
4. Simplemente Apoiada (SA)
  - 4.1 Apoio forte:  $w = \theta_s = 0$ , onde  $s$  é a direção do lado
  - 4.2 Apoio fraco:  $w = 0$ .

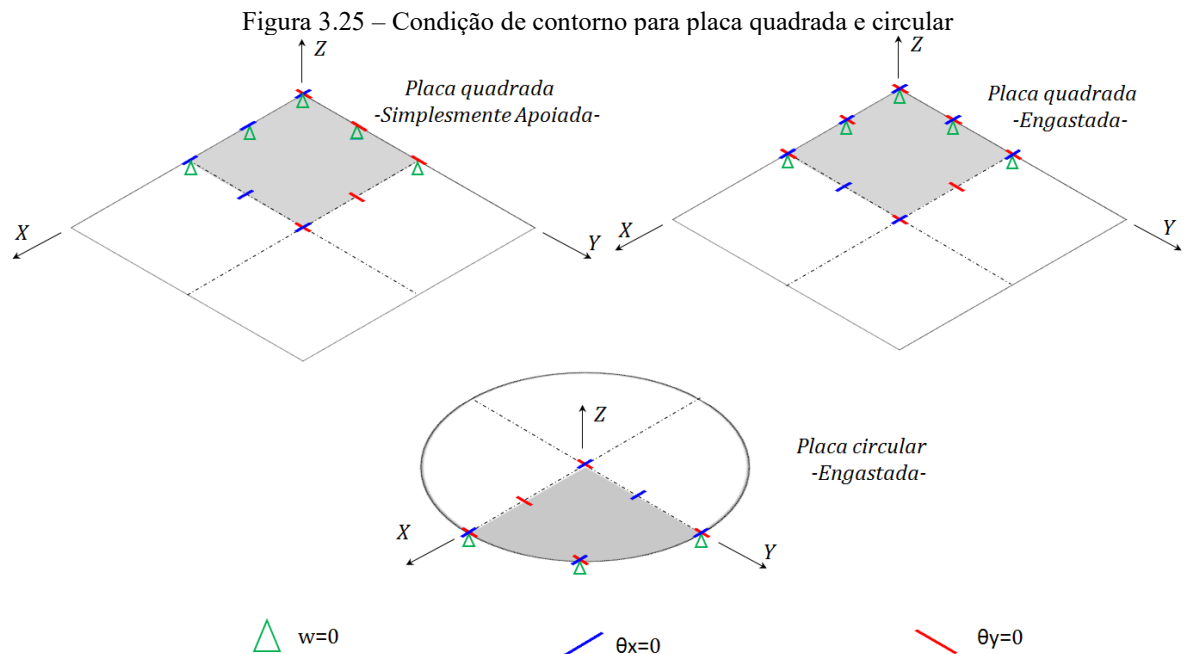
Essas condições podem ser visualizadas na FIG. 3.24.

Figura 3.24 – Algumas condições de contorno em placas de Reissner-Mindlin



Fonte: Adaptado de Oñate (2013, pag.306).

O mesmo autor afirma que em placas com cantos (por exemplo o D da FIG. 3.24), é recomendado o uso de apoio forte. As simulações deste trabalho usam esse tipo de apoio, pois envolvem essa configuração de placa, bem como o engastado e a dupla simetria tanto da geometria da placa, a qual é quadrada e redonda, quanto para a carga concentrada (FIG. 3.25).



Fonte: O autor.

A quantidade de condições de contorno entre os vértices da placa é função da distribuição dos nós ao longo de sua borda que por sua vez depende da malha adotada. Na figura anterior, de forma genérica, somente um nó está contido entre os vértices.

### 3.4 Desempenho dos elementos de Reissner-Mindlin para placas finas

#### 3.4.1 Travamento de esforço cortante. Integração reduzida e mecanismos espúrios.

##### Razão de restrição.

Segundo Oñate (2013), os elementos de Reissner-Mindlin apresentam um travamento na solução numérica em placas finas, da mesma forma que acontece nos elementos de viga de Timoshenko. Esse bloqueio pode ser demonstrado considerando um placa isotrópica de espessura constante sobre cargas nodais. O equilíbrio da equação global, de acordo com as Eqs. (3.41) e (3.42) é descrito da forma:

$$(\underline{k}_f + \underline{k}_c) \underline{d} = \underline{p} \quad (3.67)$$

Sendo as propriedades do material e espessura constantes, a Eq. (3.67) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\left( \frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)} \bar{k}_f + Ge\bar{k}_c \right) \underline{d} = \underline{p} \quad (3.68)$$

onde  $e$  é a espessura da placa,  $E$  é módulo de elasticidade do material,  $\nu$  é o coeficiente de Poisson e  $G$  o módulo de elasticidade transversal.

A solução “exata” em uma placa fina em conformidade com a teoria de Kirchhoff, que é uma teoria adequada às placas finas, delgadas ou esbeltas como descrito em Soriano (2003), é inversamente proporcional a  $\frac{Ee^3}{12(1-\nu^2)}$ , conforme apontam Thompson e Warsi (1982 *apud* Oñate, 2013). Denominando essa resposta como de  $d_k$  e dividindo a Eq. (3.68) por esse termo, tem-se:

$$\left( \bar{k}_f + \frac{1}{\beta} \bar{k}_c \right) \underline{d} = \frac{12(1-\nu^2)}{Ee^3} \underline{p} = O(d_k) \quad (3.69)$$

onde

$$\beta = \frac{Ee^2}{12(1-\nu^2)G} \quad (3.70)$$

e o lado direito da Eq. (3.69) é da ordem de magnitude da solução exata da placa fina.

Com  $e \rightarrow 0$ ,  $\beta \rightarrow 0$  e  $\frac{1}{\beta} \rightarrow \infty$  de forma a tornar o termo  $\bar{k}_c$  em (3.69) dominante nessa equação quando a placa é mais fina. Logo, o termo  $\bar{k}_b$  se torna negligenciável e desse modo, a Eq. (3.69) tende a:

$$\left(\frac{1}{\beta} \bar{k}_c\right) \underline{d} = O(d_k) \quad e \quad \bar{k}_c \underline{d} = \beta O(d_k) \rightarrow 0 \quad (3.71)$$

Assim, em placas muito finas como mostra a primeira parte da equação, a solução é infinitamente mais rígida que a solução analítica, gerando então, o travamento de esforço cortante da solução o qual acarreta deslocamentos praticamente iguais à zero. Da segunda parte da equação, deduz que a única possibilidade para obter uma solução diferente de  $\underline{d} = 0$  é que  $\underline{k}_c$  seja singular.

Singularidade de  $\underline{k}_c$  pode ser alcançada por meio da integração reduzida segundo Zienkiewicz e Taylor (2000).

A fim de facilitar o entendimento dos tipos de integração posteriormente usados, são apresentadas as seguintes terminologias:

1. Integração completa (IC): integração exata de  $\underline{k}_f$  e  $\underline{k}_c$ .
2. Integração seletiva (IS): integração exata de  $\underline{k}_f$  e reduzida de  $\underline{k}_c$ .
3. Integração reduzida (IR): integração reduzida de  $\underline{k}_f$  e  $\underline{k}_c$ .

A integração reduzida descrita em Soriano (2003) apresenta uma ordem de integração menor do que a da completa. Com essa integração, a influência de termos altos das funções de interpolação na matriz de rigidez é cancelada, correspondendo então a uma redução do grau do campo dos deslocamentos e podendo até conduzir a um elemento não conforme, o qual não garante a continuidade de deslocamentos em interface de elementos adjacentes. Com a transformação do elemento em não conforme, a rigidez do elemento é reduzida podendo resultar em uma melhor razão de convergência. No entanto, essa eliminação dos termos altos das funções de interpolação pode criar, no âmbito do elemento, **modos espúrios de energia nula** adicionalmente aos modos naturais de energia nula, ou modos de corpo rígido.





Nesse quadro também contém a razão de restrição para a placa e também os elementos quadrilaterais e triangulares que são usados neste trabalho, os quais serão detalhados a seguir.

Quadro 3.2 – Quadratura para integração da matriz de rigidez, número de mecanismos espúrios e razões de restrições em malha de 2x2 elementos

Elemento	Quadratura	Integração de		N. Mecanismos Espúrios	R <sub>1</sub>	R <sub>2</sub>
		$k_f$	$k_c$			
Bilinear (Q4)	C	2 x 2	2 x 2	0	24/32 (T)	19/32(T)
	S	2 x 2	1 x 1	2	24/8	19/8
	R	1 x 1	1 x 1	4	24/8	19/8
Biquadrático Serendipity (Q8)	C	3 x 3	3 x 3	0	60/72(T)	42/72(T)
	S	3 x 3	2 x 2	0	60/32	47/32
	R	2 x 2	2 x 2	1	60/32	47/32
Biquadrático Lagrange (Q9)	C	3 x 3	3 x 3	0	72/72(T)	59/72(T)
	S	3 x 3	2 x 2	1	72/32	59/32
	R	2 x 2	2 x 2	4	72/32	59/32
Bicúbico Serendipity (Q12)	C	4 x 4	4 x 4	0	96/128(T)	75/128(T)
	S	4 x 4	3 x 3	0	96/72	75/72
	R	3 x 3	3 x 3	0	96/72	75/72
Bicúbico Lagrange (Q16)	C	4 x 4	4 x 4	0	144/128	123/128(T)
	S	4 x 4	3 x 3	1	144/72	123/72
	R	3 x 3	3 x 3	4	144/72	123/72
Triangular Linear (T3)	C	1	1	-	-	-
	S	1	1	-	-	-
	R	1	1	-	-	-
Triangular Quadrático (T6)	C	3	3	-	-	-
	S	3	3	-	-	-
	R	3	3	-	-	-
Triangular Cúbico (T10)	C	6	6	-	-	-
	S	6	6	-	-	-
	R	6	6	-	-	-
C (Completa); S (Seletiva); R (Reduzida)						

Fonte: Adaptado de Oñate (2013, pag.313) e Soriano (2003, p.276).

A razão de restrição permite de forma simples e prática a identificação de propensão ao travamento e a relação de qualidade entre elementos. Soriano (2003) descreve essa razão por:

$$R = \frac{n - r}{c} \quad (3.72)$$

onde  $n$ ,  $r$  e  $c$  são, nessa ordem, o número de deslocamentos nodais, de restrições de apoio e de restrições de esforço cortante. Nestes são associados a todo ponto de integração da matriz de rigidez  $k_c$  duas restrições de esforço cortante, uma relativa a  $\phi_x$  e outra em termos de  $\phi_y$ . Razão de restrição maior que a unidade identifica a supremacia dos graus de liberdade em relação às restrições de esforço cortante e a potencialidade para a não ocorrência de travamento. Razões menores que um são acompanhadas pela letra T, indicando travamento. A razão é feita em malhas de 2x2 elementos quadrilaterais de Reissner-Mindlin com integração completa e reduzida/seletiva. As condições de contorno são identificadas pelo índice 1 (apenas três restrições para evitar os deslocamentos de corpo rígido, ilustrado na FIG. 3.26) e pelo índice 2 em malhas simplesmente apoiadas em todos nós do contorno (impedido apenas os deslocamentos transversais).

Observa-se que com integração reduzida/seletiva, todos os elementos passam no teste da razão de restrição. Com condições de contorno suficientes apenas para impedir os deslocamentos de corpo rígido e utilizando integração completa, apenas o elemento bicúbico de Lagrange passa no teste. Com as bordas da placa simplesmente apoiada (apoio fraco) e utilizando integração completa, nenhum dos elementos passa no teste. Reduzindo as condições de contorno, cresce a potencialidade de não se ter travamento e identifica-se que a família Lagrange é menos propícia ao bloqueio que a família Serendipity. Quanto aos modos espúrios, a integração seletiva apresenta menor número comparado à integração reduzida.

Do modo mostrado previamente, a integração reduzida/seletiva surgiu como um tipo de solução para o bloqueio de esforço cortante em elementos quadrilaterais. Oñate (2013) descreve mais dois outros tipos de elementos de placa de Reissner-Mindlin, quadrilaterais e triangulares, para o desbloqueio da solução numérica: elementos baseados em **deformação de cisalhamento imposta** e elementos baseados na **interpolação interligada**, em inglês *linked interpolation*. O estudo deste trabalho delimita-se aos elementos quadrilaterais baseados em integração reduzida/seletiva e aos elementos triangulares com a formulação clássica, a serem vistos na sequência.

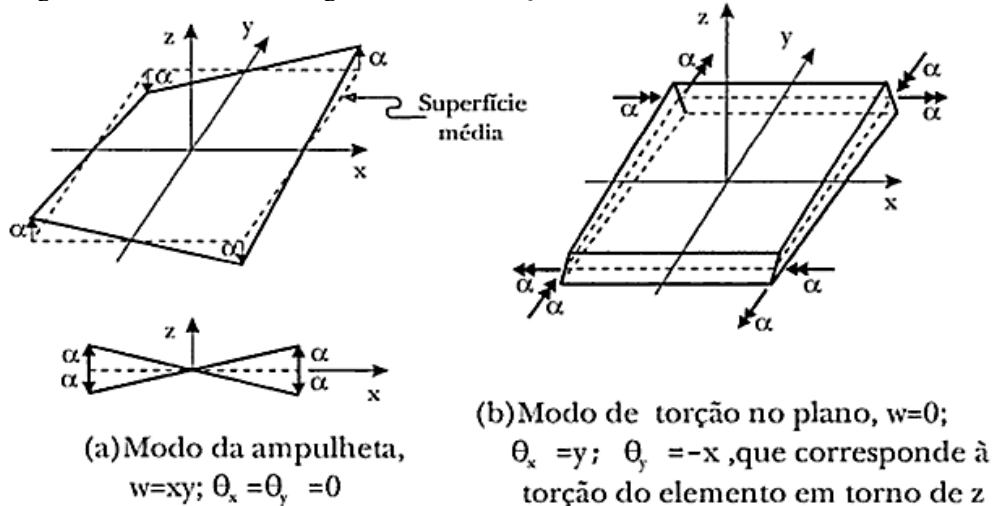
### 3.4.2 Elementos quadrilaterais de Reissner-Mindlin baseados em integração reduzida/seletiva

As definições adiante dos elementos são feitas de forma resumida, com base nas descrições de Oñate (2013) e Soriano (2003).

#### 1. Elemento de placa quadrilateral de 4 nós (Q4):

Elemento bilinear de quatro nós de vértice, com um total de 12 graus de liberdade que se dividem em três graus por nó (deslocamento vertical e duas rotações). Com formulação isoparamétrica, suas funções de forma são as mesmas do elemento isoparamétrico de quatro nós como descrito na FIG. 3.6. Sua integração completa é com 2x2 pontos e a integração reduzida com 1 ponto. Apresenta quatro modos espúrios de energia nula na integração reduzida e apenas dois na seletiva (comuns aos dois primeiros da integração reduzida) os quais são denominados de modo de ampulheta (ou *hourglass*) e modo de torção no plano, respectivamente representados na FIG. 3.27.

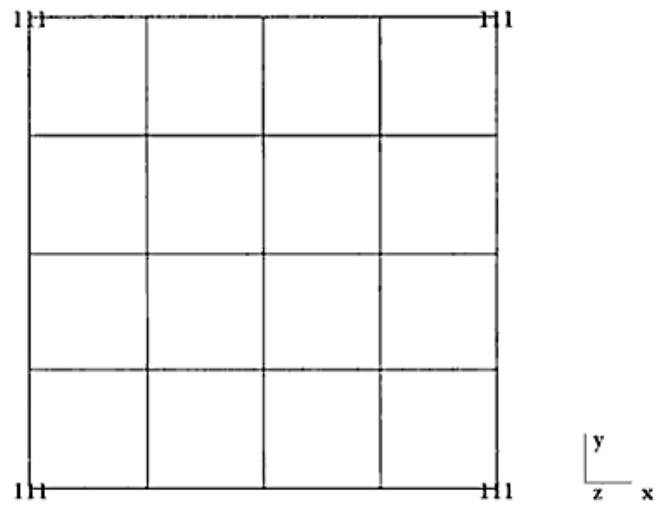
Figura 3.27 – Modos de energia nula do elem. Q4 com int. red./sel. sendo  $\alpha$  o fator de escala



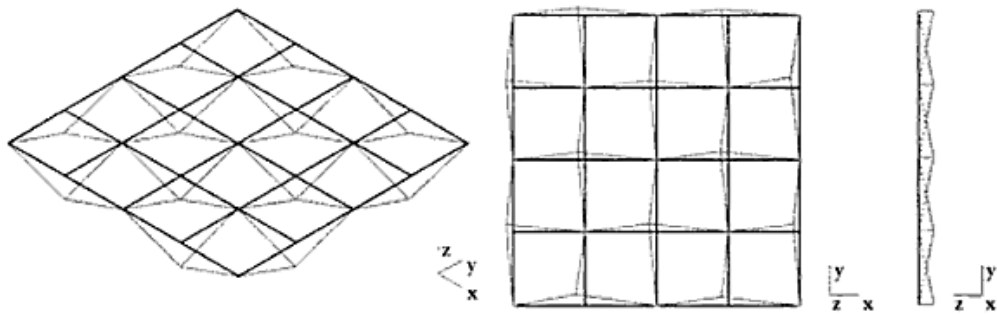
Fonte: SORIANO, 2003, p.278.

O modo em b) é dito não comunicável na malha porque a torção de um elemento é impedida por outros elementos adjacentes através de torções que se opõem. No modo de ampulheta, o efeito pode ser estendido em toda malha. A título de exemplo, tem-se o caso de uma placa apoiada em seus vértices sob carregamento uniforme, quando então a deformada obtida não tem coerência física com o carregamento aplicado, o modo é dito comunicável como representado na FIG. 3.28.

Figura 3.28 – Exemplificação de formação de modo de energia nula em placa fina



a) Malha de elementos



b) Deformadas com modos da ampulheta

Fonte: SORIANO, 2003, p.280.

Esse modo pode ser interrompido restringindo-se na malha os deslocamentos verticais de dois lados perpendiculares de pelo menos um elemento. Dessa forma, o impedimento de formação do modo em apenas um elemento, se estende por restrições elásticas, a toda malha.

O elemento Q4 é usualmente usado com integração seletiva por evitar travamento e fornecer bons resultados mesmo com formas distorcidas, desde que se evite o modo de ampulheta.

## 2. Elemento de placa quadrilateral Serendipity de 8 nós (Q8):

Elemento biquadrático de oito nós, com um total de 24 graus de liberdade, também três por nó. Com formulação isoparamétrica, suas funções de forma são as mesmas do elemento isoparamétrico de oito nós como descrito na FIG. 3.9. Sua integração completa requer  $3 \times 3$  pontos e a integração reduzida  $2 \times 2$  pontos. Apresenta apenas um modo espúrio de energia nula na integração reduzida, o qual não é comunicável. No entanto, esse modo merece atenção para problemas onde a placa é engastada, visto que o elemento trava.

## 3. Elemento de placa quadrilateral Lagrange de 9 nós (Q9):

Elemento correspondente ao Q8 com um nó a mais, totalizando desse modo 27 graus de liberdade e contendo a mesma ordem de integração. Sua formulação isoparamétrica é obtida a partir das funções de forma do elemento isoparamétrico de nove nós, de acordo com a FIG. 3.7. Com integração reduzida, esse elemento tem quatro modos espúrios de energia nula enquanto com integração seletiva apenas um que é comunicável, mas que pode ser evitado de forma semelhante ao caso do modo da ampulheta.

Embora o elemento Q9 pareça desfavorável em relação ao Q8 por apresentar um modo espúrio causado pela integração seletiva o qual pode se propagar pela malha, o seu ponto nodal central assegura-lhe, em formas distorcidas, melhor comportamento que o Serendipity. Além disso, o elemento Lagrange, em conformidade com o apresentado no Quadro 3.2 tem maiores razões de restrições comparadas aos de Serendipity, portanto, menos propenso a travamento de esforço cortante.

## 4. Elemento de placa quadrilateral Serendipity de 12 nós (Q12):

Elemento bicúbico com um total de 36 graus de liberdade, sendo três em cada nó. A formulação isoparamétrica é realizada conforme funções de forma do elemento bicúbico Serendipity da FIG. 3.10. Sua quadratura completa é formada por  $4 \times 4$  nós e a reduzida por  $3 \times 3$  nós. Não apresenta nenhum modo espúrio de energia nula

### 5. Elemento de placa quadrilateral Lagrange de 16 nós (Q16):

Correspondente ao Q12, esse elemento apresenta 4 nós a mais totalizando num total de 48 graus de liberdade e possui a mesma quadratura. A formulação isoparamétrica se desenvolve com as funções de forma do elemento bicúbico de Lagrange de 16 nós, apresentado na FIG. 3.8.

Análogo ao Q9, as quadraturas reduzida e seletiva do elemento produzem mecanismo espúrios e quanto ao bloqueio, o Q16 é menos propenso quando comparado ao elemento Serendipity de mesma ordem.

Finalmente, o mérito da integração seletiva/reduzida versus integração completa não é relevante para esse elemento.

#### **3.4.3 Elementos triangulares de Reissner-Mindlin**

Esses elementos como descritos anteriormente, são formulados com a teoria clássica de Reissner-Mindlin sem nenhuma alteração para evitar o travamento do esforço cortante em placas finas.

Possuem denominação T3, T6 e T10, com 3, 6 e 10 nós e, conseqüentemente 9, 18 e 30 graus de liberdade, nessa ordem.

As funções de interpolação nas suas formulações isoparamétricas estão de acordo com as FIGs. 3.12, 3.13 e 3.14, respectivamente, e suas quadraturas, são 1, 3 e 6 pontos de Gauss, conforme Quadro 3.2.

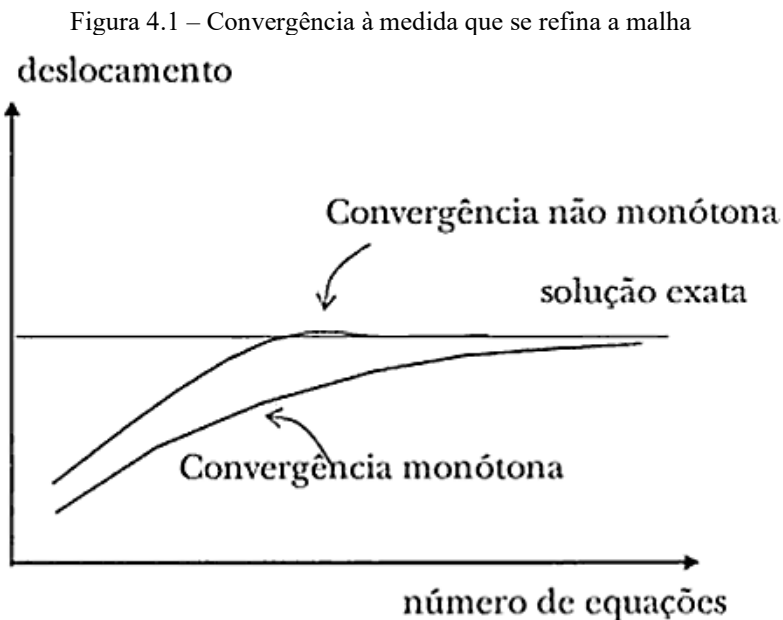
Soriano (2003) aponta que o travamento de esforço cortante é particularmente intenso nos elementos T3.

## 4 SIMULAÇÕES

### 4.1 Estudo de Convergência

Segundo Soriano (2003), uma questão muito relevante, a ser identificada no campo de deslocamentos de um determinado elemento, é se o mesmo resulta em malhas de elementos cujos resultados convergem para a solução exata, à medida que se refinam as malhas. Esse refinamento é feito por redução da dimensão do elemento, pelo aumento de sua ordem ou pela combinação desses dois procedimentos.

O autor ainda explica que, de forma geral, pelo fato do modelo discreto com elementos conformes ser mais rígido do que o modelo matemático original, espera-se que essa convergência seja monótona por baixo, ou seja, que os valores de deslocamentos obtidos sejam menores que o analítico. A FIG. 4.1 ilustra essa convergência prevista e também a convergência não monótona. A convergência monótona por cima, não apresentado nessa figura, ocorre quando os valores dos deslocamentos são maiores que o valor analítico.



Fonte: SORIANO, 2003, p.69.

Dessa forma, conhecido os objetivos deste trabalho, as simulações seguintes têm como foco o estudo de convergência para os elementos finitos anteriormente apresentados em duas condições de integração.



A primeira é referente à integração completa (IC) dos elementos quadrilaterais e triangulares, onde simultaneamente com os respectivos aumentos de suas ordens, de Q4 a Q16 e de T3 a T10, aumentam-se o número de elementos da malha.

A segunda condição é referente ao confronto dos três tipos de integração apresentadas, IC x integração reduzida (IR) x integração seletiva (IS) em todos os elementos quadrilaterais (Q4, Q8, Q9, Q12 e Q16) combinado também com o aumento do número de elementos.

Essas duas condições são avaliadas em sete diferentes configurações, combinando espessura, condição de contorno, carregamento e geometria da placa, conforme detalhado no quadro seguinte.

Quadro 4.1 – Configurações para o estudo de convergência

Config.	Espessura	Cond. de Contorno	Carregamento	Geometria
1.	PF	SA	CC	Quadrada
2.	PF	SA	CD	Quadrada
3.	PF	EN	CC	Quadrada
4.	PF	EN	CD	Quadrada
5.	PME	SA	CD	Quadrada
6.	PME	EN	CD	Quadrada
7.	PE	EN	CC	Circular

PF (Placa Fina); PME (Placa Moderadamente Espessa); PE (Placa Espessa)  
SA (Simplesmente Apoiada); EN (Engastada)  
CC (Carga Concentrada); CD (Carga Distribuída)

Fonte: O autor.

Todos modelos são constituídos por material homogêneo e isotrópico, com módulo de elasticidade  $E = 1092000 \text{ uf}/\text{uc}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . As condições de contorno são definidas segundo a FIG. 3.25 e os padrões adotados no refinamento das malhas, para a placa quadrada e circular, estão ilustrados de acordo com as FIGs. 4.2 e 4.3, nessa ordem.

Figura 4.2 – Refinamento de malha para a placa quadrada

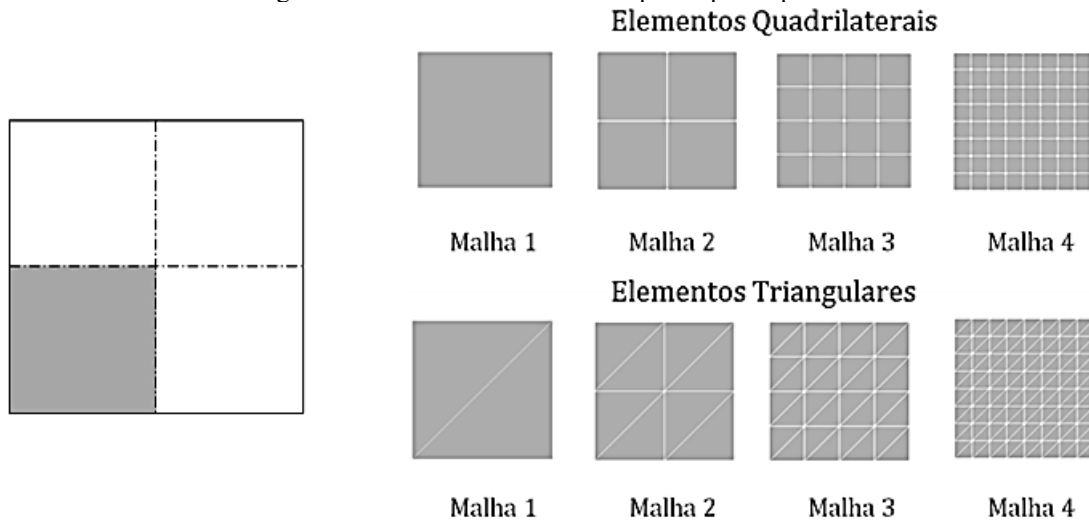
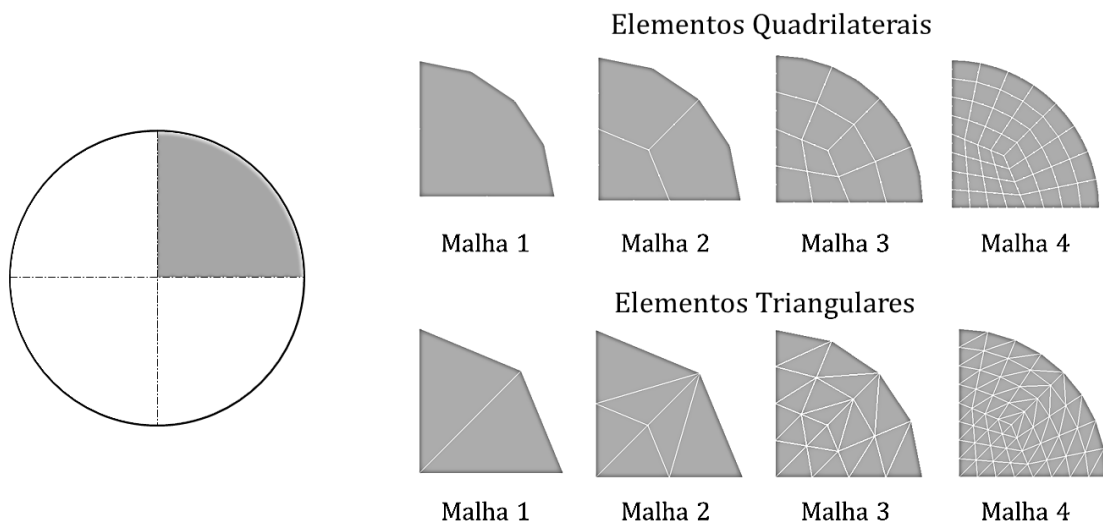


Figura 4.3 – Refinamento de malha para a placa circular



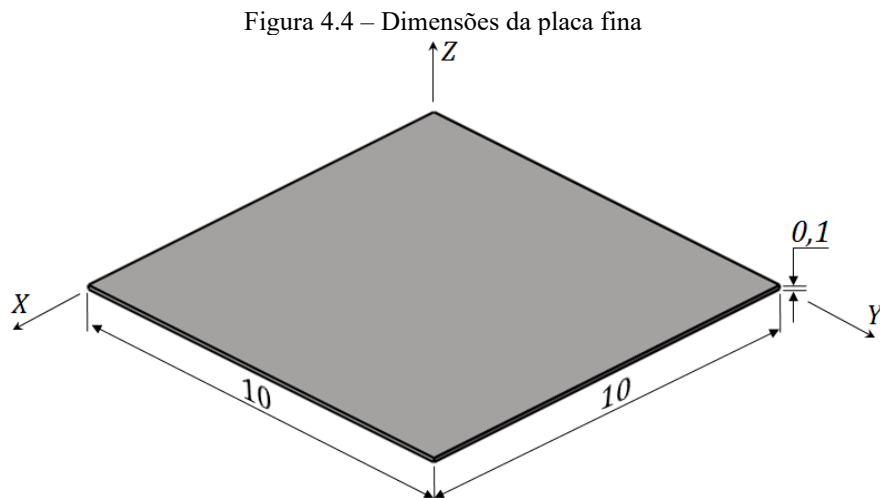
Os resultados apresentados serão divididos em três grupos: placas finas, placas moderadamente espessas e placas espessas. Essas partes conterão os gráficos dos deslocamentos transversais em função do refinamento da malha e da ordem do elemento, e também esses resultados em tabelas. A discussão desses valores será abordada no item 4.6.1.

O critério adotado na escolha do número de casas decimais da flecha foi de se ter no mínimo, o número de algarismos significativos da solução analítica da configuração avaliada, sendo o número total de casas decimais igual em todos os elementos e malhas adotadas.

A diferença percentual entre a solução via MEF e a solução analítica encontra-se entre parênteses após o resultado da flecha encontrada, sendo acompanhada por um sinal negativo quando a convergência é monótona por baixo, e por um sinal positivo, quando a convergência é monótona por cima. Para essa diferença, adotou-se o número mínimo de casas decimais que permitisse, em todo modelo, compreender a porcentagem nas situações em que a solução do modelo é aproximadamente igual à solução analítica (valores próximos de zero) e também para distinguir porcentagens entre elementos ou malhas com valores semelhantes. Nas placas moderadamente espessas, além do critério dos algarismos significativos, foi necessário o uso do critério da diferença percentual.

## 4.2 Estudo de Convergência de Placas Finas

No estudo das placas finas, o modelo avaliado contém dimensões de acordo com a FIG. 4.4, onde seu lado  $a = 10 uc$  e sua espessura  $e = 0,1 uc$ .



Fonte: Adaptado de Samir (2007, p.94).

As soluções analíticas desse modelo em placas apoiadas e engastadas com carga concentrada ou distribuída, são descritas em Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959) e estão mostradas na FIG. 4.5. Os valores das flechas máximas,  $w_{max}$ , calculados com as dimensões acima, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson como anteriormente citados e carga concentrada  $P = -1 uf$  ou carga distribuída  $q = -1 uc/uc^2$ , também são fornecidos nessa figura.

Figura 4.5 – Soluções analíticas em placas finas

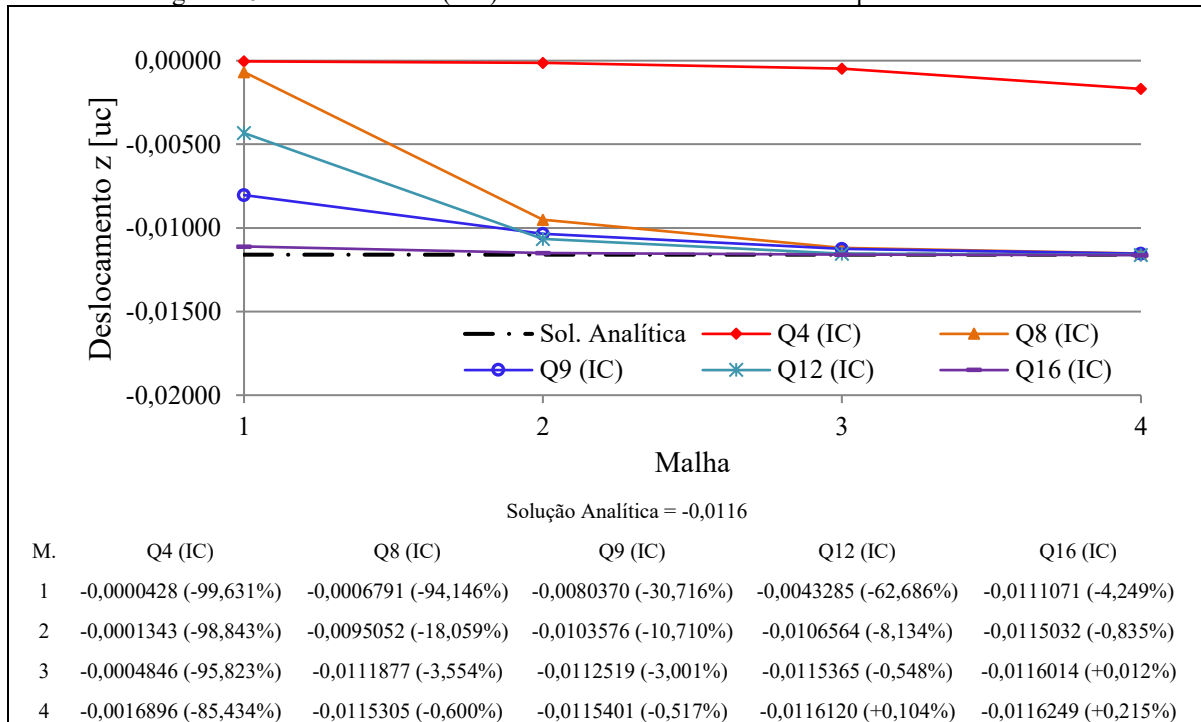
Configuração	Solução Analítica	
1. PF-SA-CC		$w_{max} = 0,0116 \frac{P a^2}{D} = -0,0116 uc$
2. PF-SA-CD		$w_{max} = 0,00406 \frac{q a^4}{D} = -0,406 uc$
3. PF-EN-CC		$w_{max} = 0,0056 \frac{P a^2}{D} = -0,0056 uc$
4. PF-EN-CD		$w_{max} = 0,00126 \frac{q a^4}{D} = -0,126 uc$
$D = \frac{E e^3}{12 (1 - \nu^2)} \rightarrow$ Coeficiente de rigidez à flexão da placa		

Fonte: O autor.

#### 4.2.1 Configuração 1: PF-SA-CC

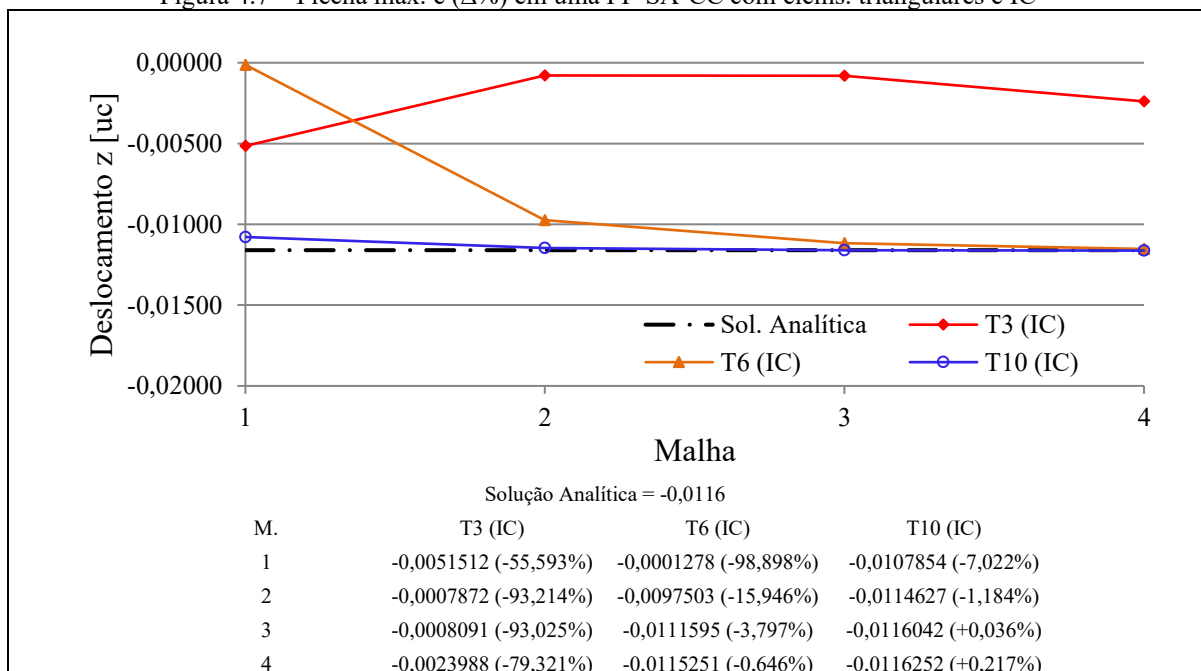
a) 1ª Condição: IC

Figura 4.6 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elems. quadrilaterais e IC



Fonte: O autor.

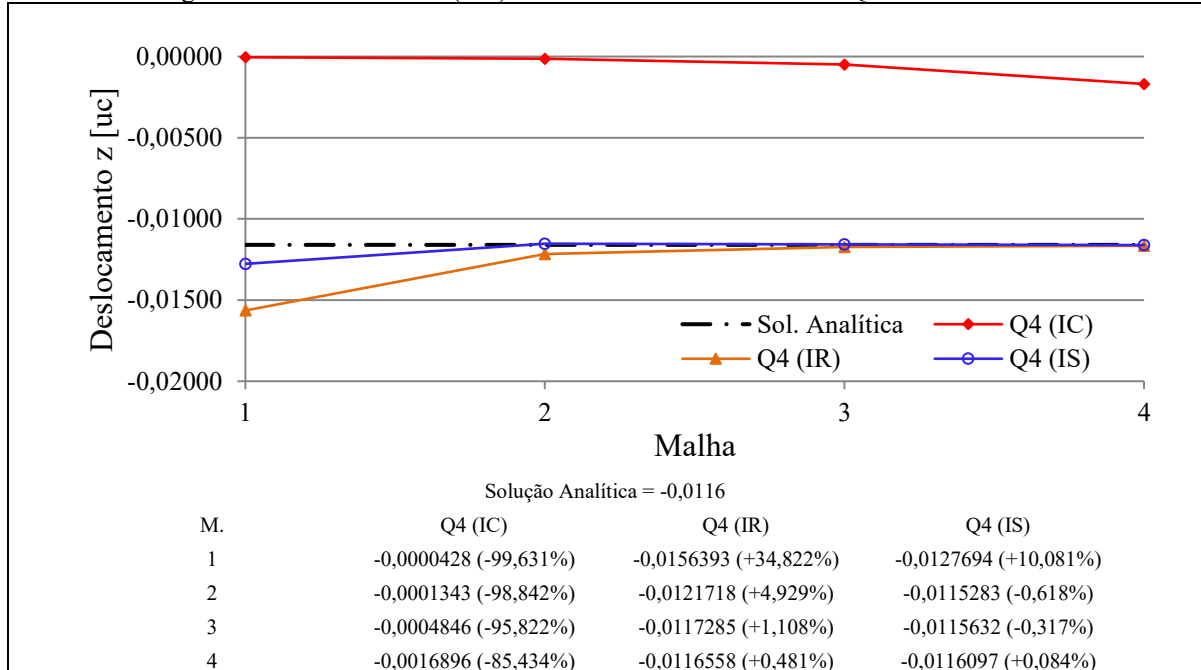
Figura 4.7 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elems. triangulares e IC



Fonte: O autor.

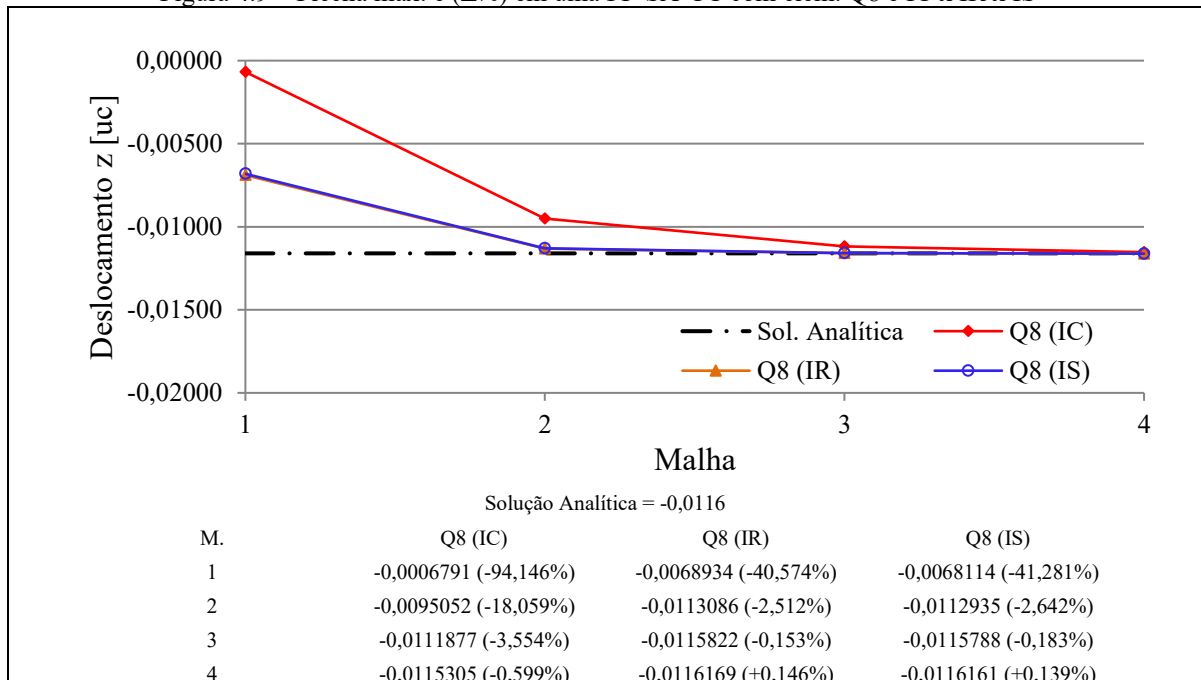
b) 2ª Condição: IC x IR x IS nos elementos quadrilaterais

Figura 4.8 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elem. Q4 e IC x IR x IS

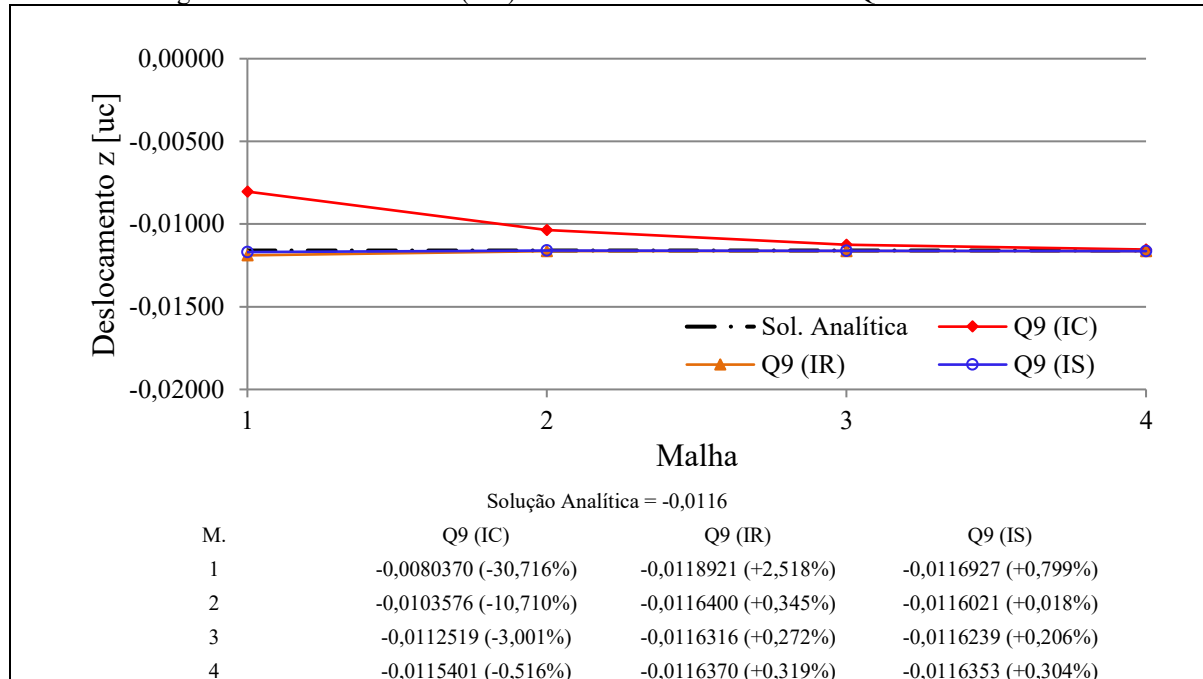


Fonte: O autor.

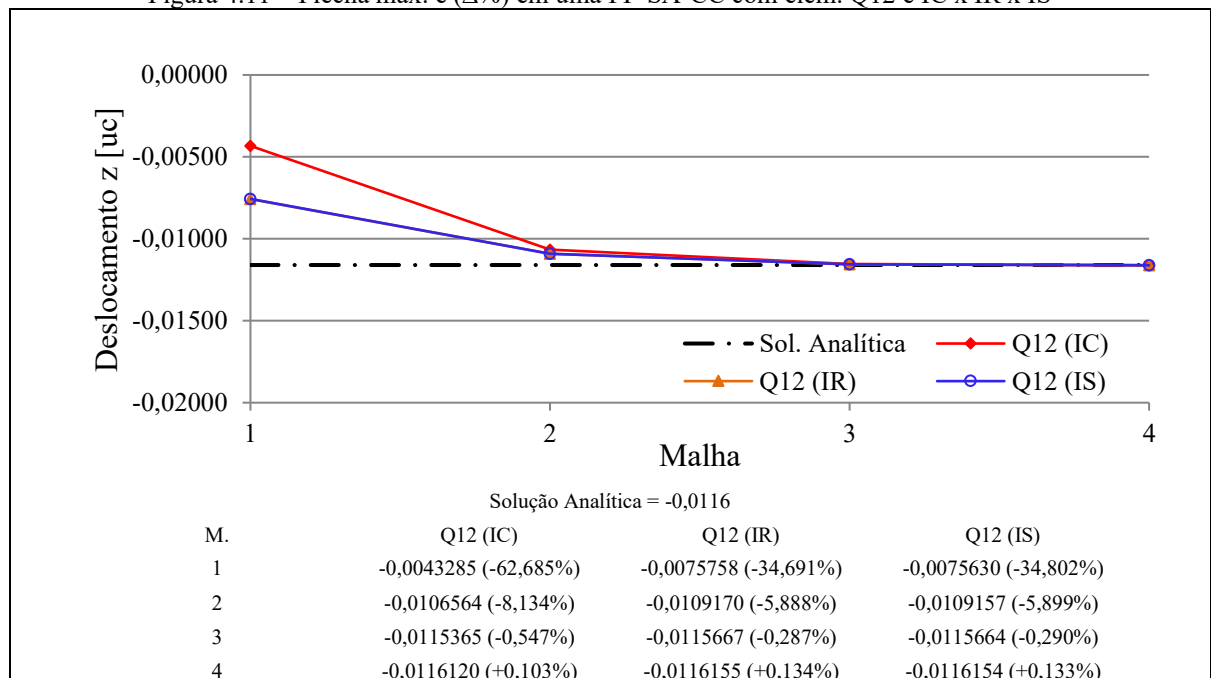
Figura 4.9 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elem. Q8 e IC x IR x IS



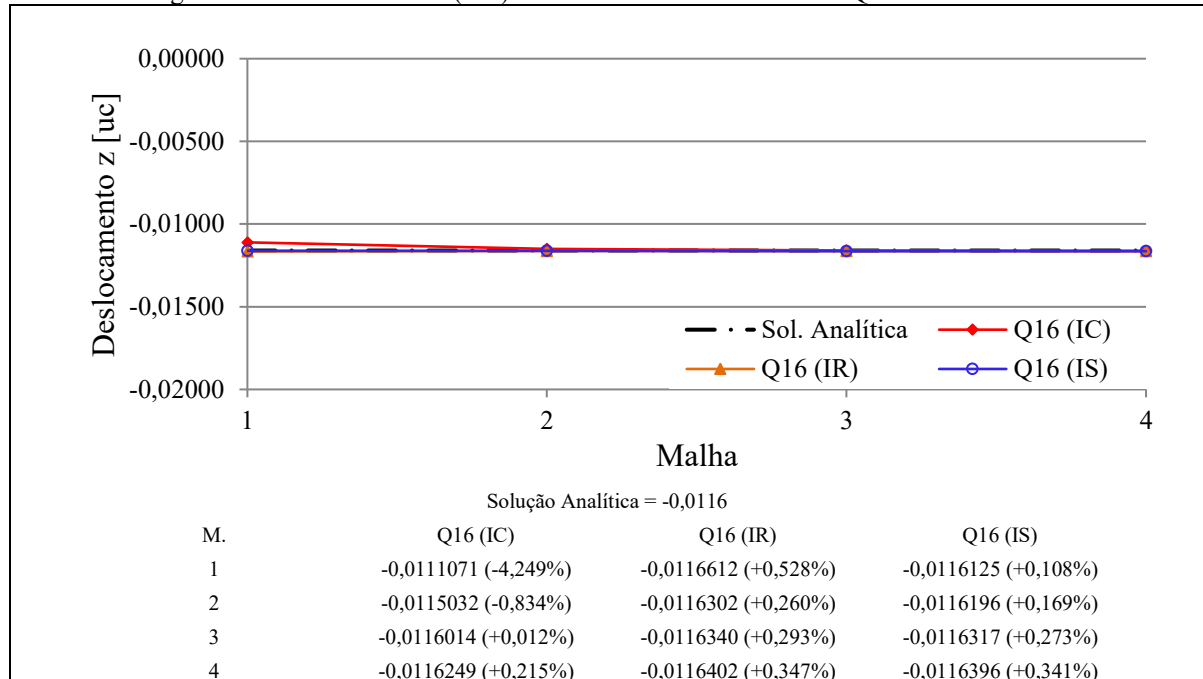
Fonte: O autor.

Figura 4.10 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elem. Q9 e IC x IR x IS

Fonte: O autor.

Figura 4.11 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elem. Q12 e IC x IR x IS

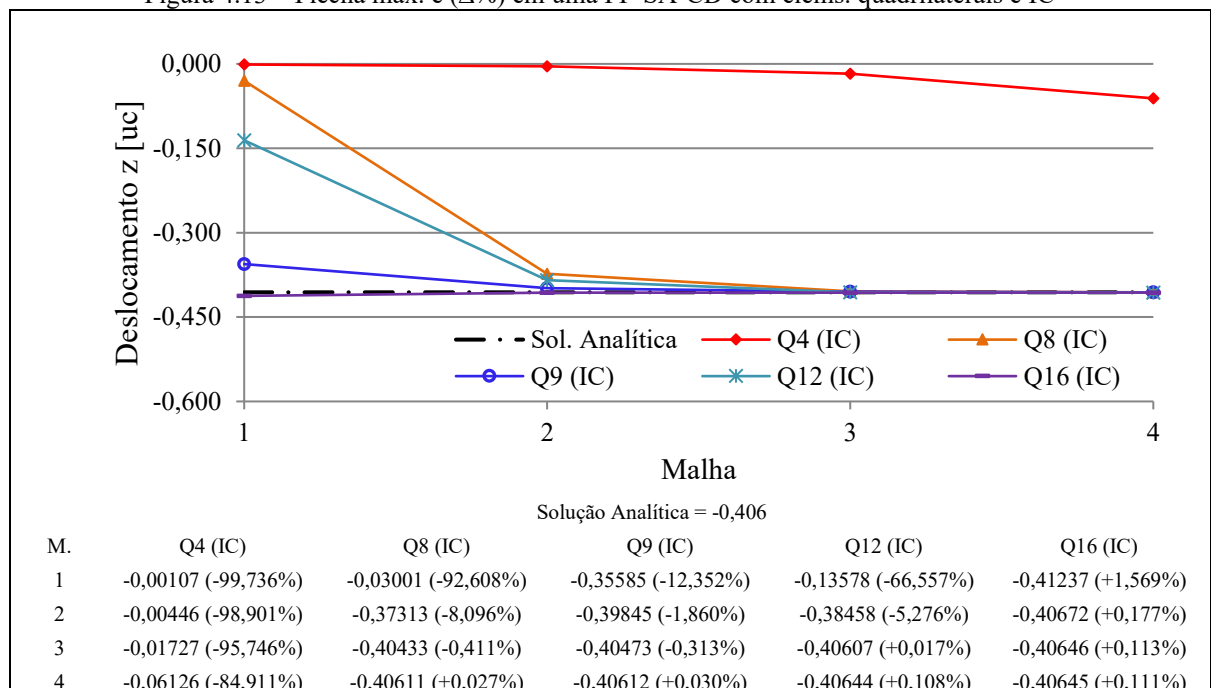
Fonte: O autor.

Figura 4.12 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CC com elem. Q16 e IC x IR x IS

Fonte: O autor.

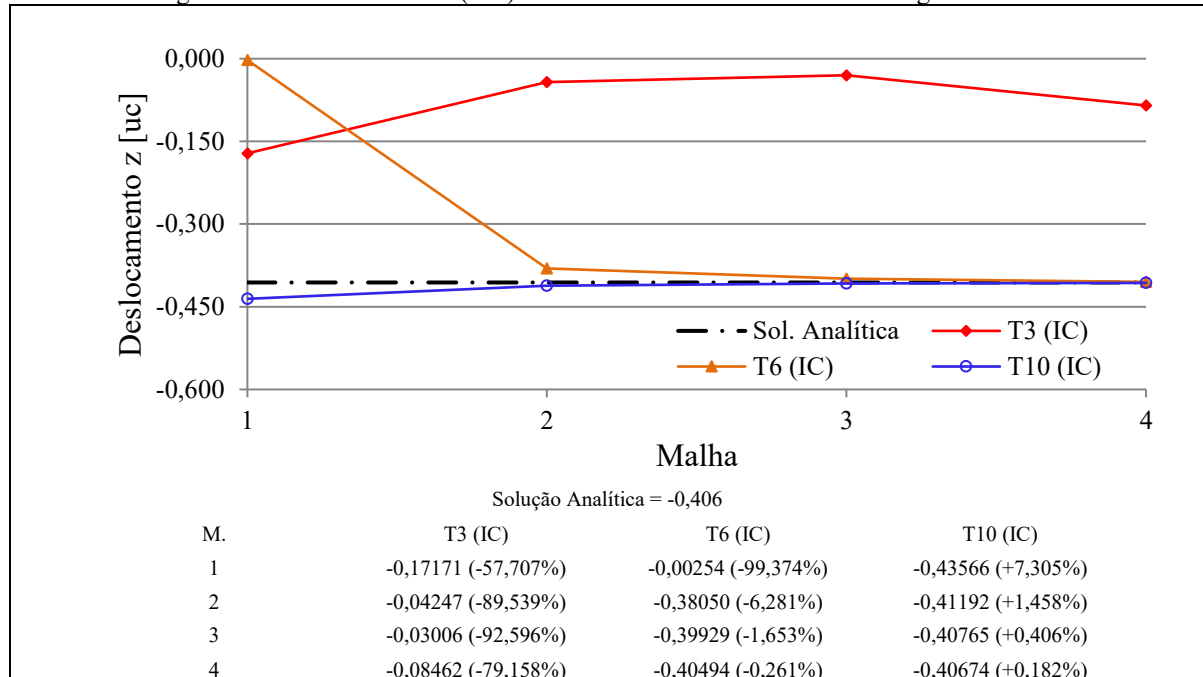
## 4.2.2 Configuração 2: PF-SA-CD

a) 1ª Condição: IC

Figura 4.13 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elems. quadrilaterais e IC

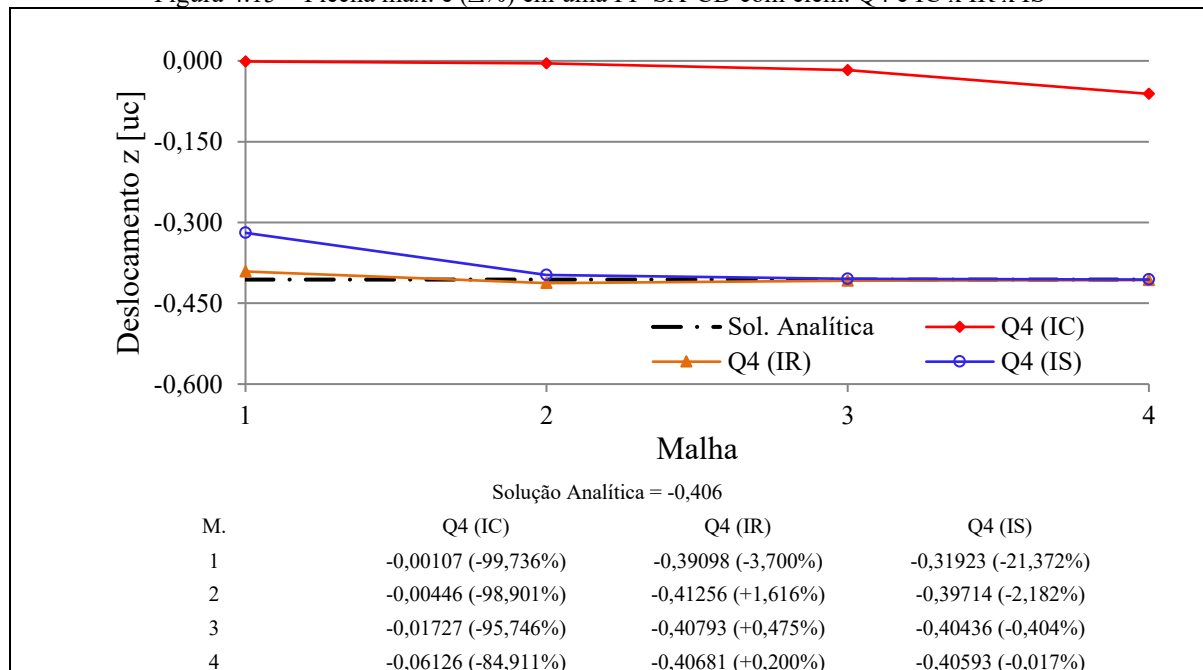
Fonte: O autor.



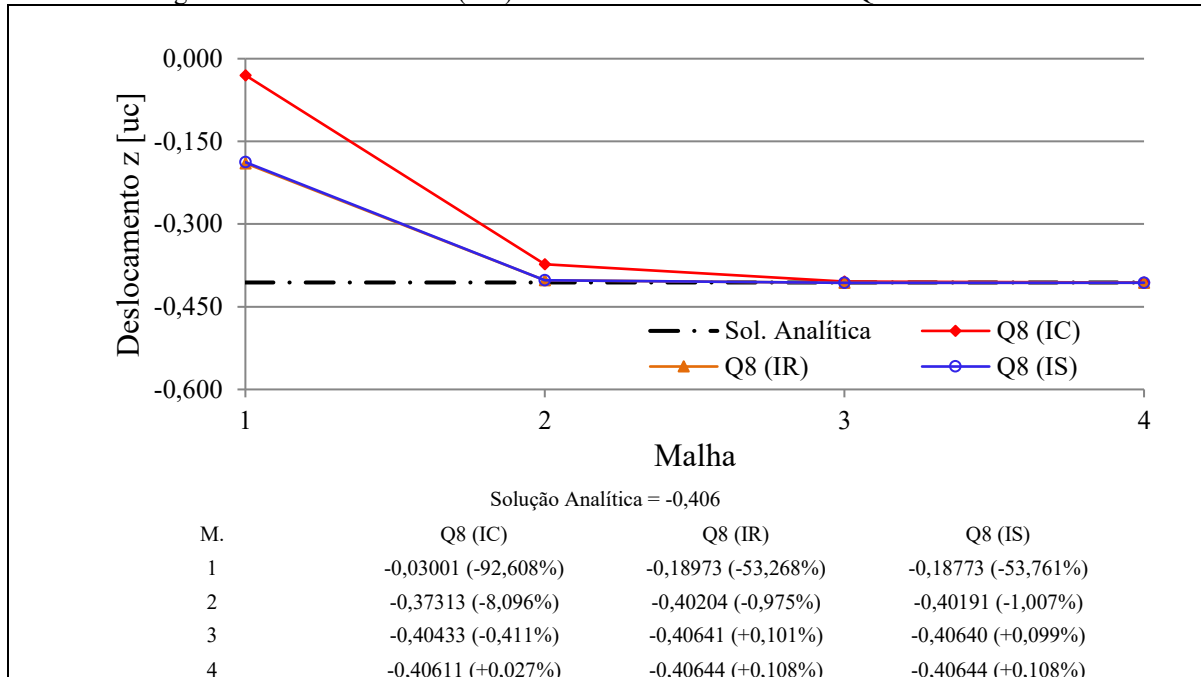
Figura 4.14 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elems. triangulares e IC

Fonte: O autor.

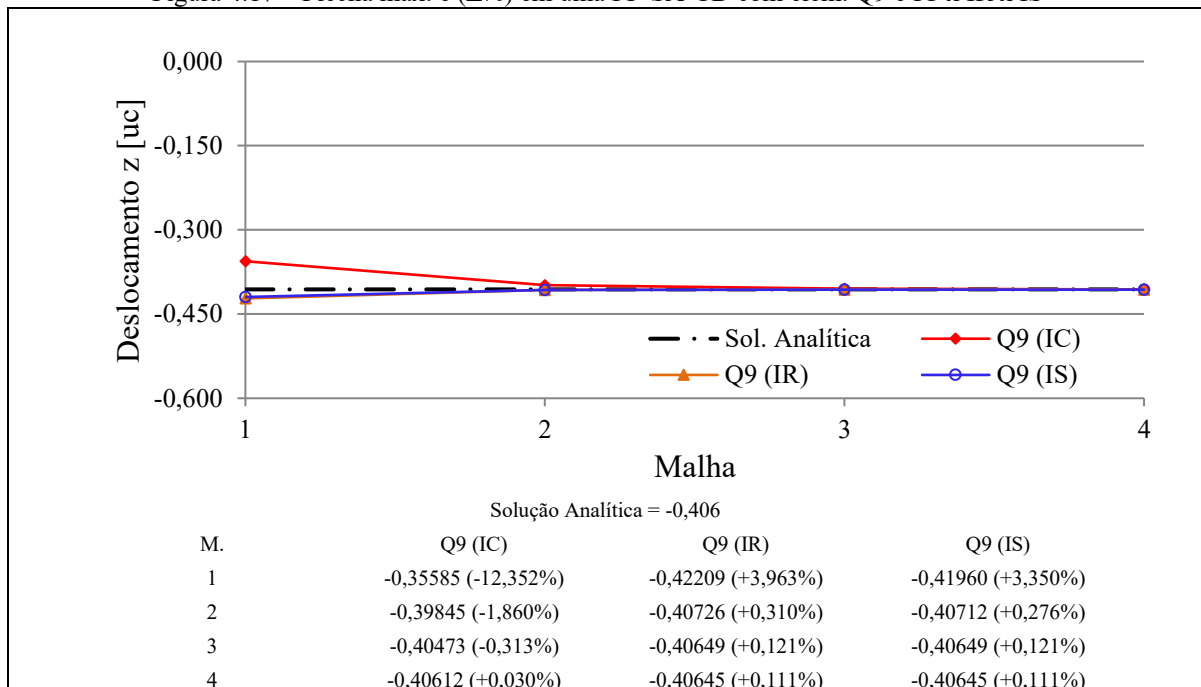
b) 2ª Condição: IC x IR x IS nos elementos quadrilaterais

Figura 4.15 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elem. Q4 e IC x IR x IS

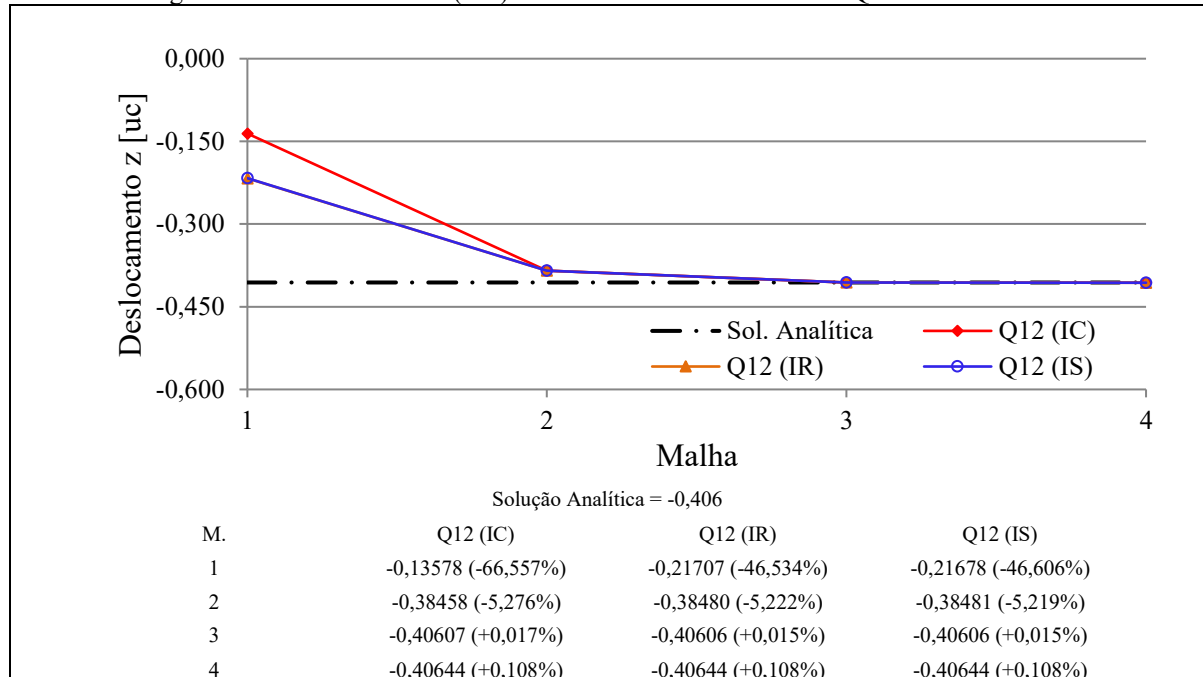
Fonte: O autor.

Figura 4.16 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elem. Q8 e IC x IR x IS

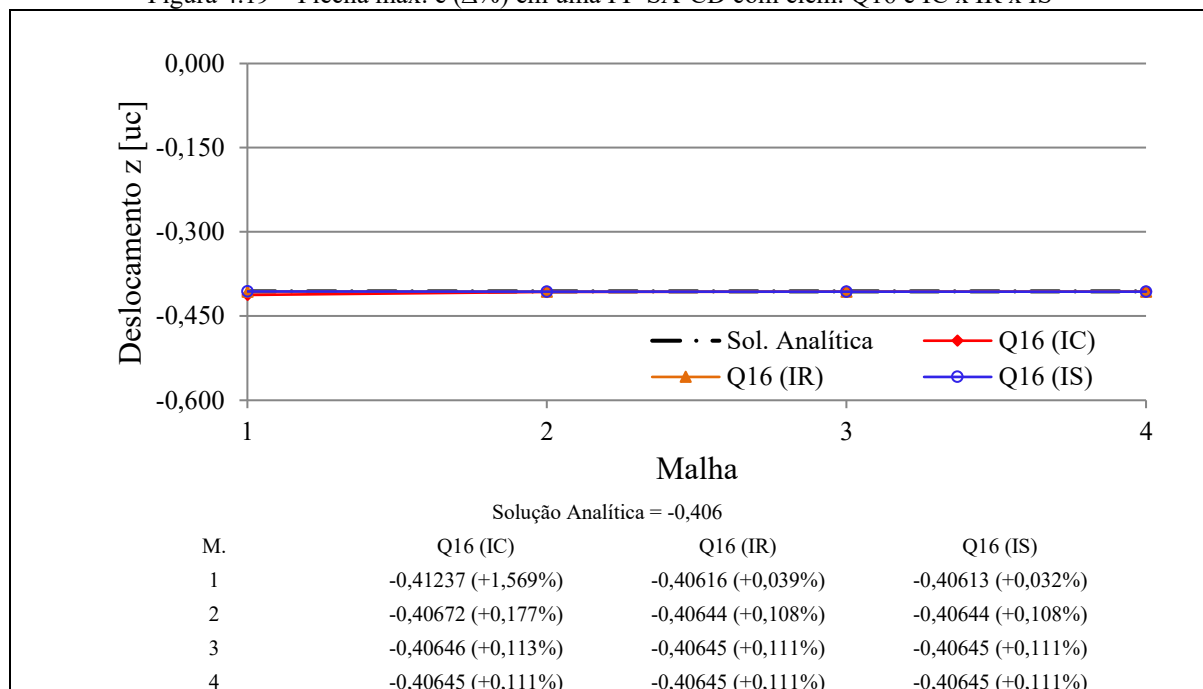
Fonte: O autor.

Figura 4.17 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elem. Q9 e IC x IR x IS

Fonte: O autor.

Figura 4.18 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elem. Q12 e IC x IR x IS

Fonte: O autor.

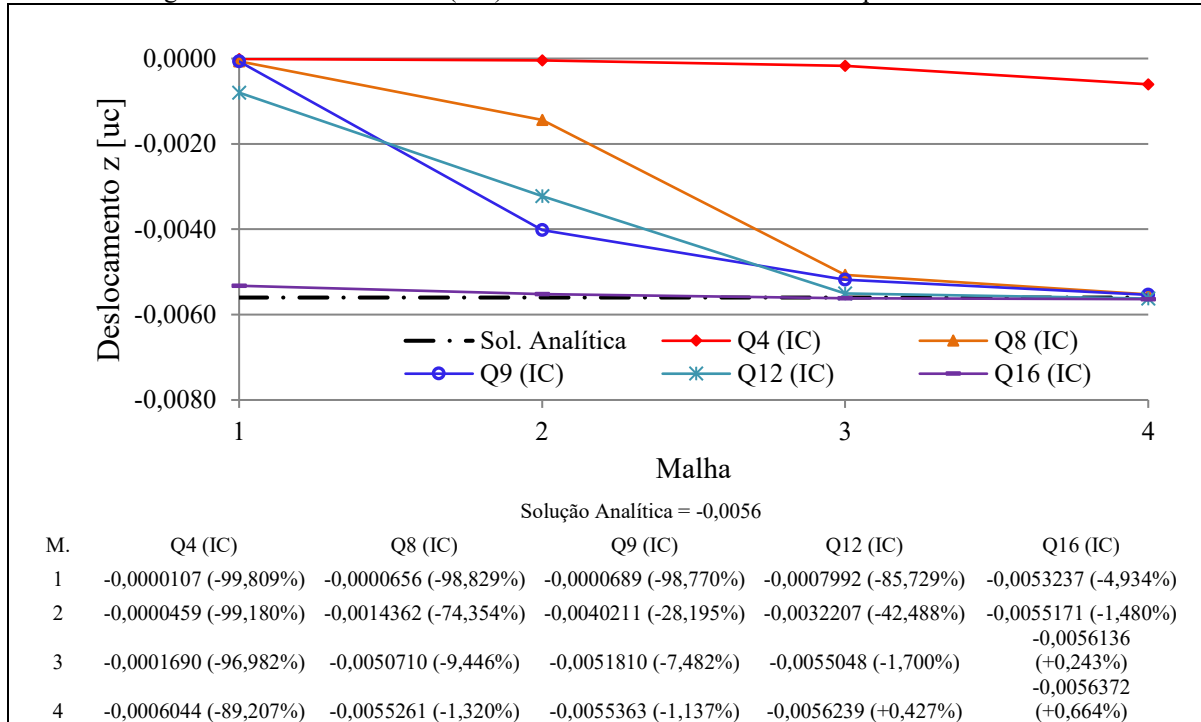
Figura 4.19 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-SA-CD com elem. Q16 e IC x IR x IS

Fonte: O autor.

### 4.2.3 Configuração 3: PF-EN-CC

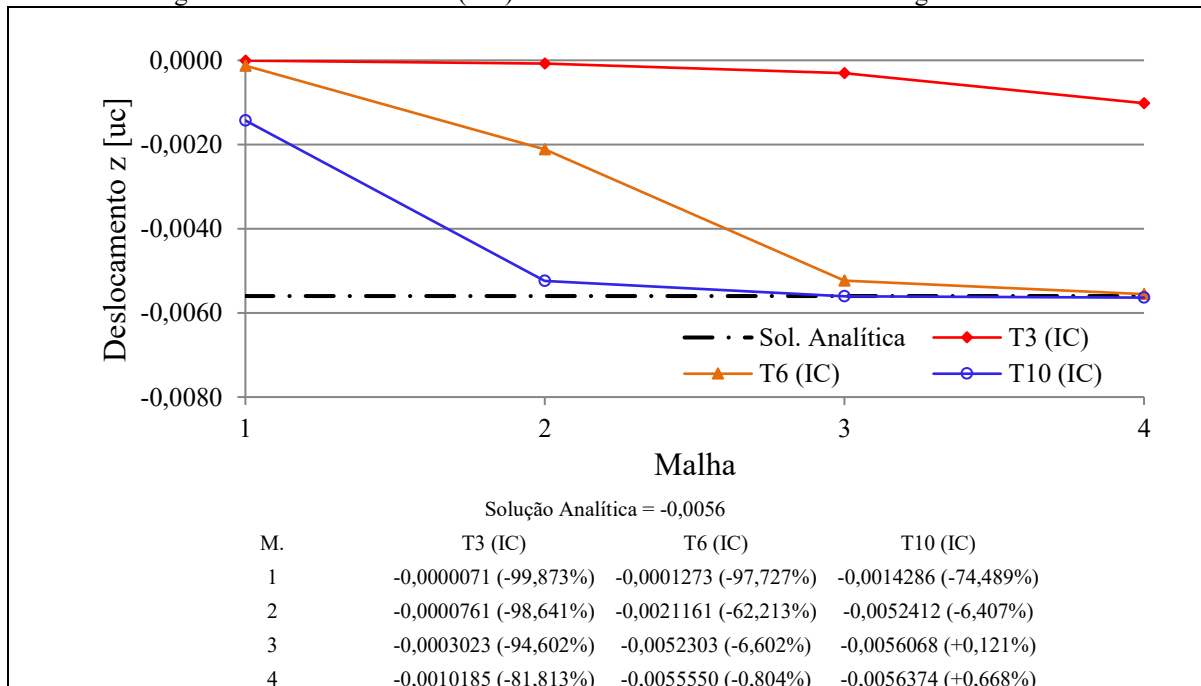
a) 1ª Condição: IC

Figura 4.20 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elems. quadrilaterais e IC



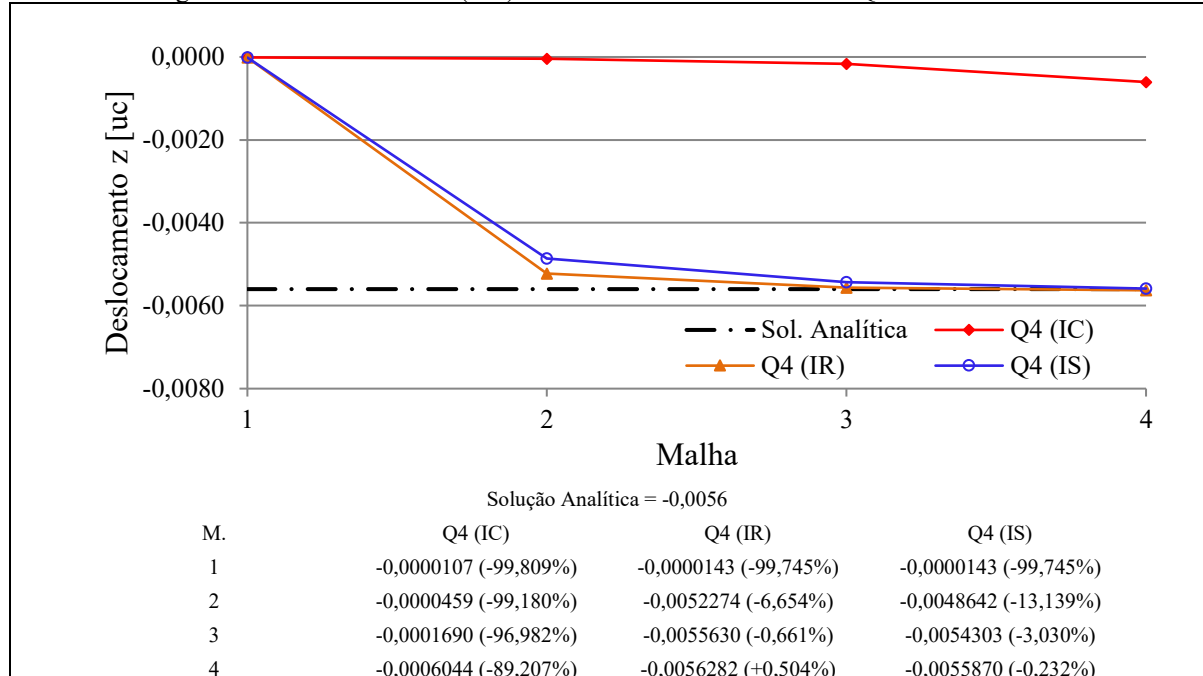
Fonte: O autor.

Figura 4.21 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elems. triangulares e IC

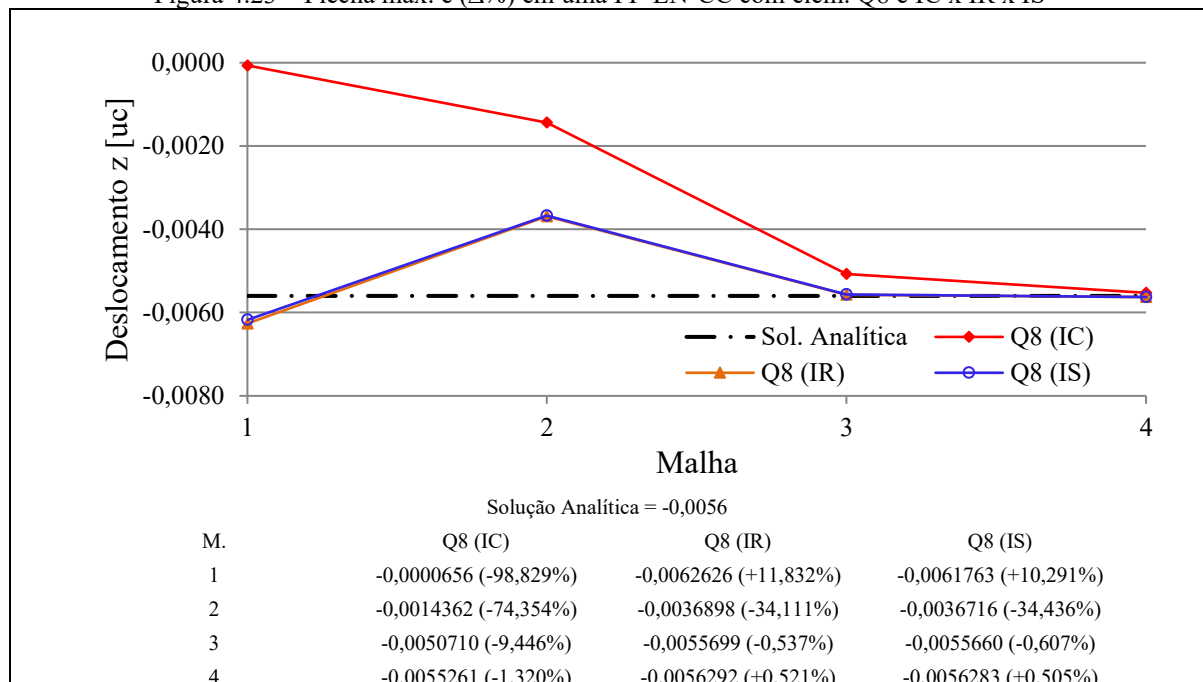


Fonte: O autor.

## b) 2ª Condição: IC x IR x IS nos elementos quadrilaterais

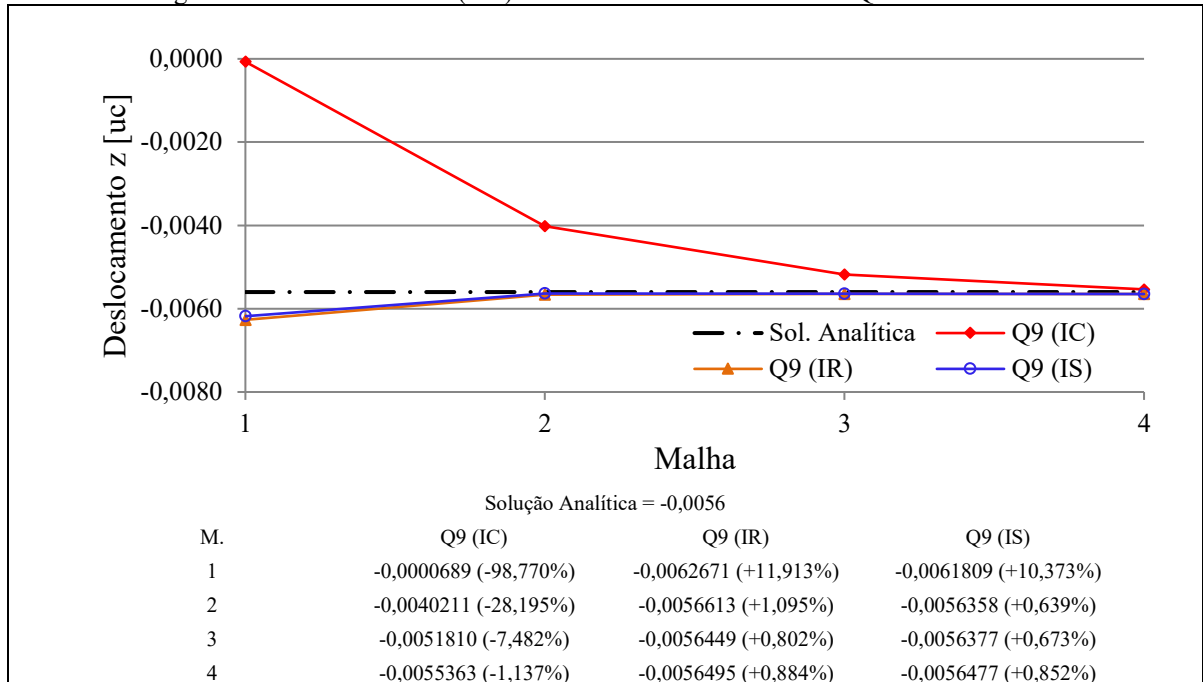
Figura 4.22 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elem. Q4 e IC x IR x IS

Fonte: O autor.

Figura 4.23 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elem. Q8 e IC x IR x IS

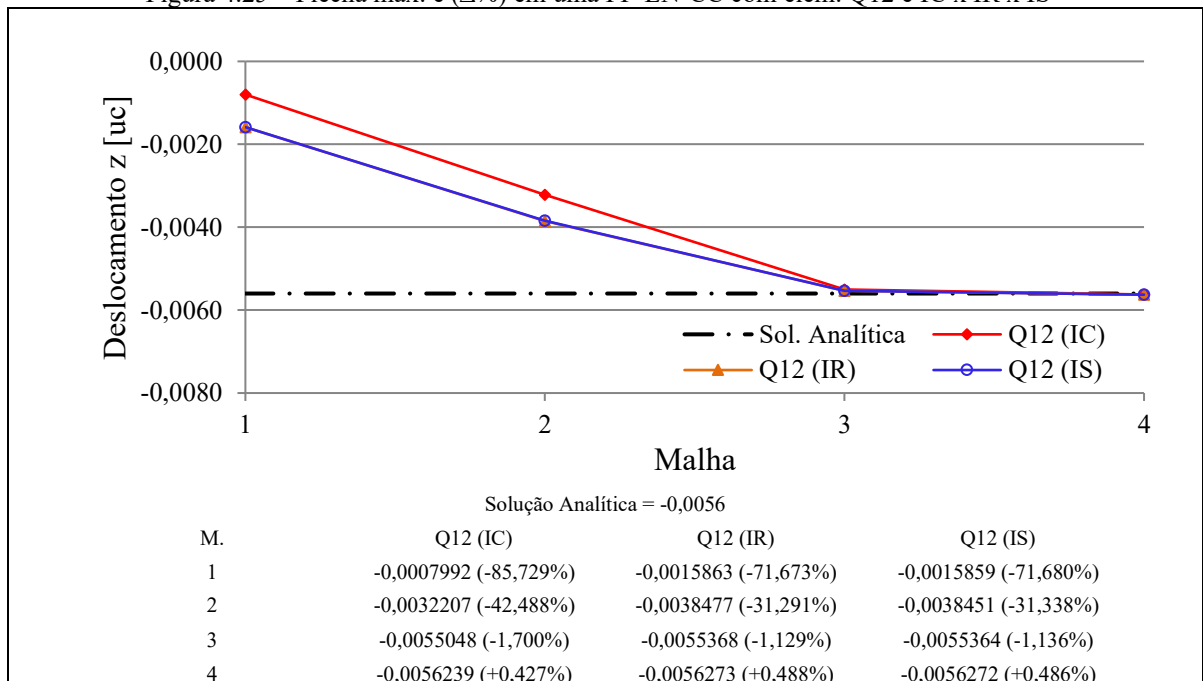
Fonte: O autor.

Figura 4.24 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elem. Q9 e IC x IR x IS

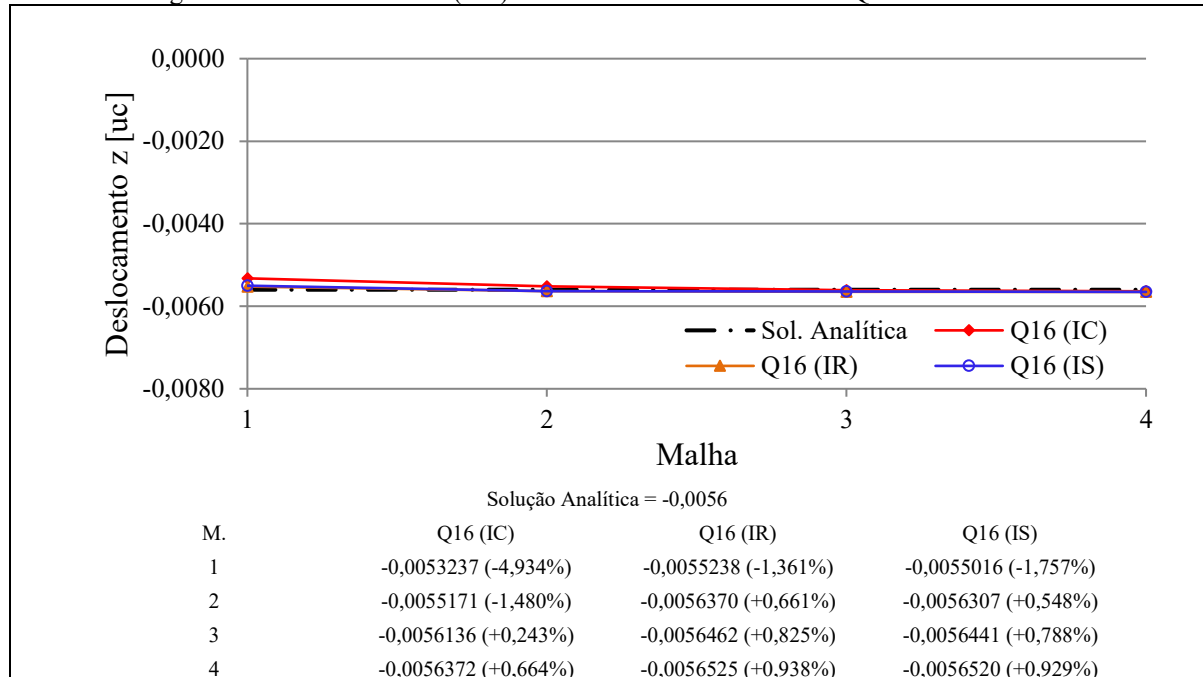


Fonte: O autor.

Figura 4.25 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elem. Q12 e IC x IR x IS



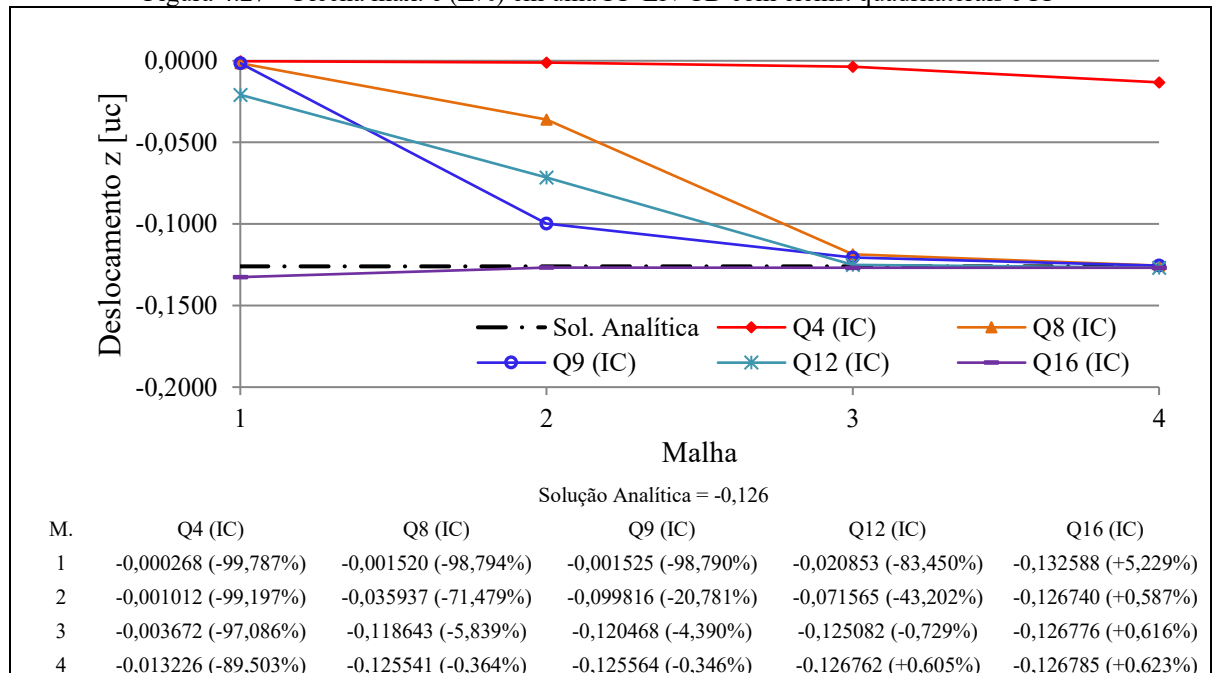
Fonte: O autor.

Figura 4.26 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CC com elem. Q16 e IC x IR x IS

Fonte: O autor.

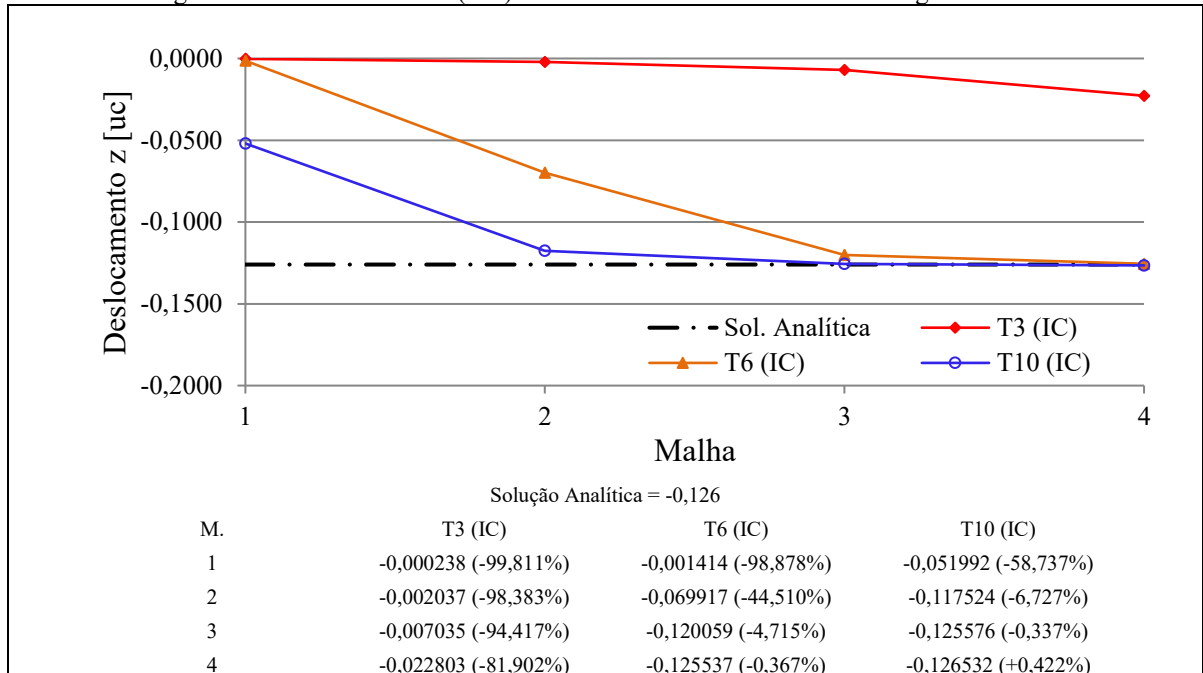
#### 4.2.4 Configuração 4: PF-EN-CD

a) 1ª Condição: IC

Figura 4.27 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elems. quadrilaterais e IC

Fonte: O autor.

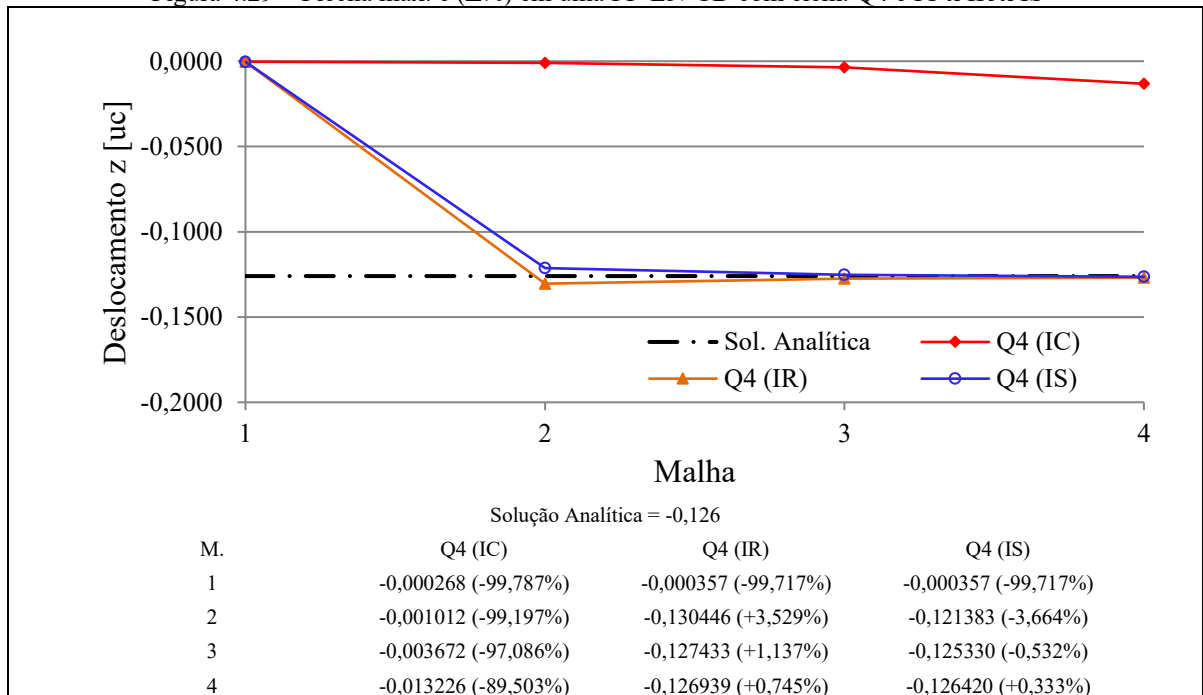
Figura 4.28 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elems. triangulares e IC



Fonte: O autor.

b) 2ª Condição: IC x IR x IS nos elementos quadrilaterais

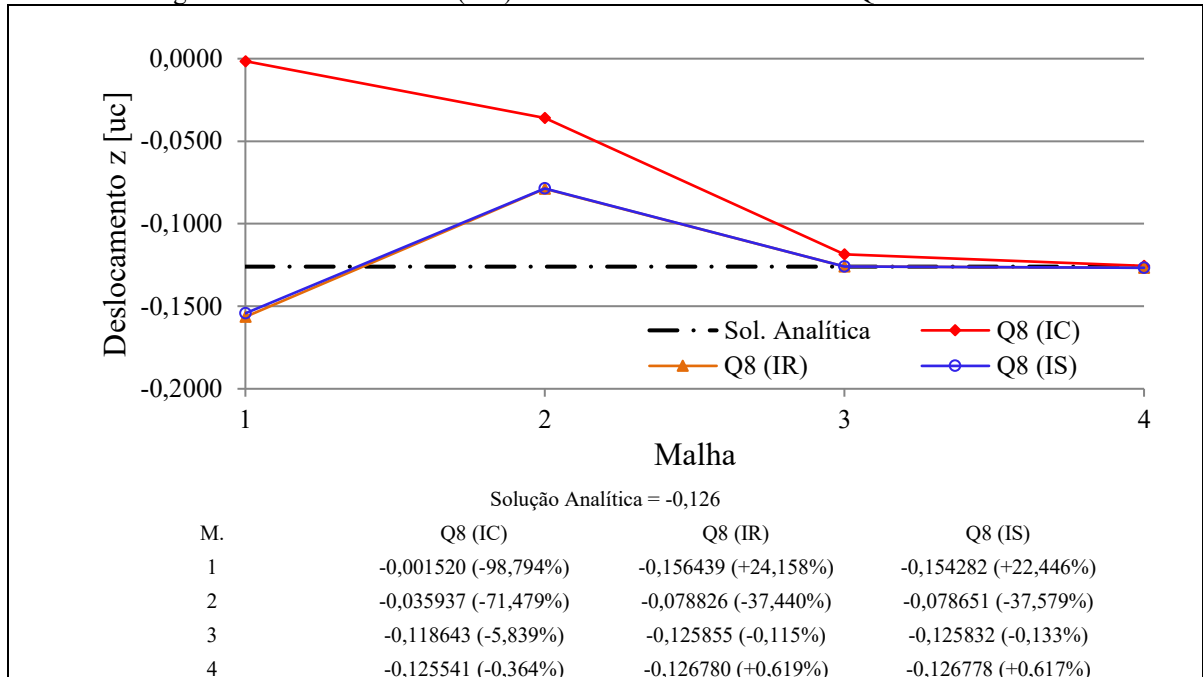
Figura 4.29 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elem. Q4 e IC x IR x IS



Fonte: O autor.

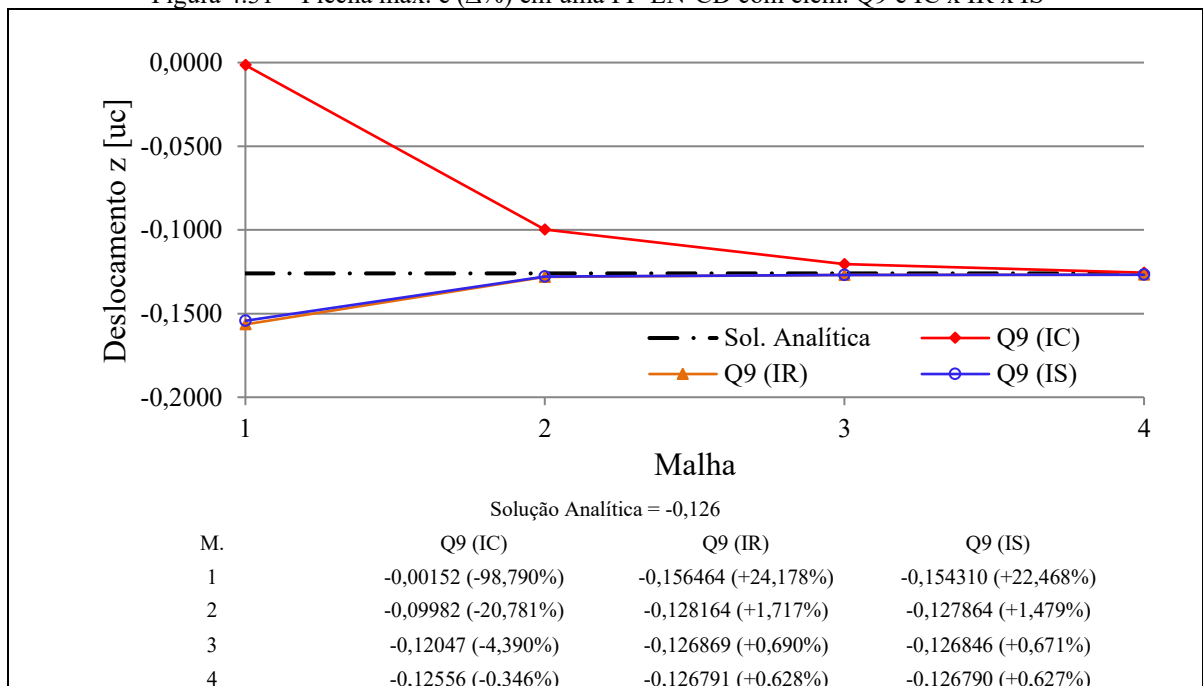


Figura 4.30 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elem. Q8 e IC x IR x IS



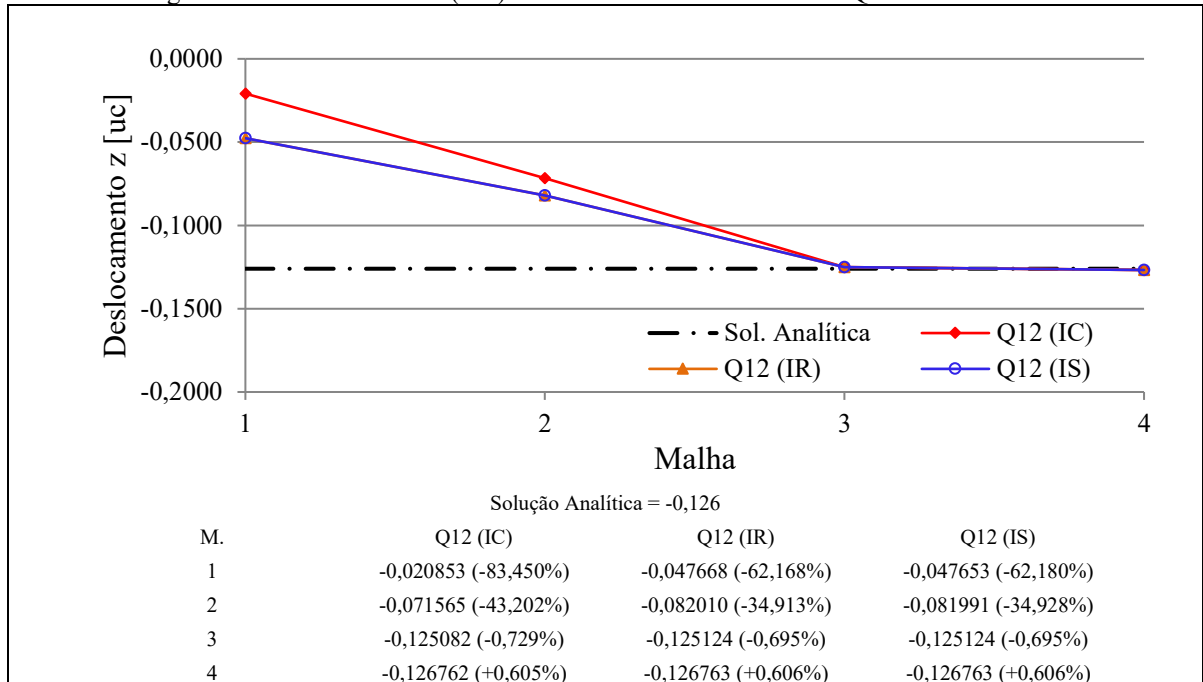
Fonte: O autor.

Figura 4.31 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elem. Q9 e IC x IR x IS



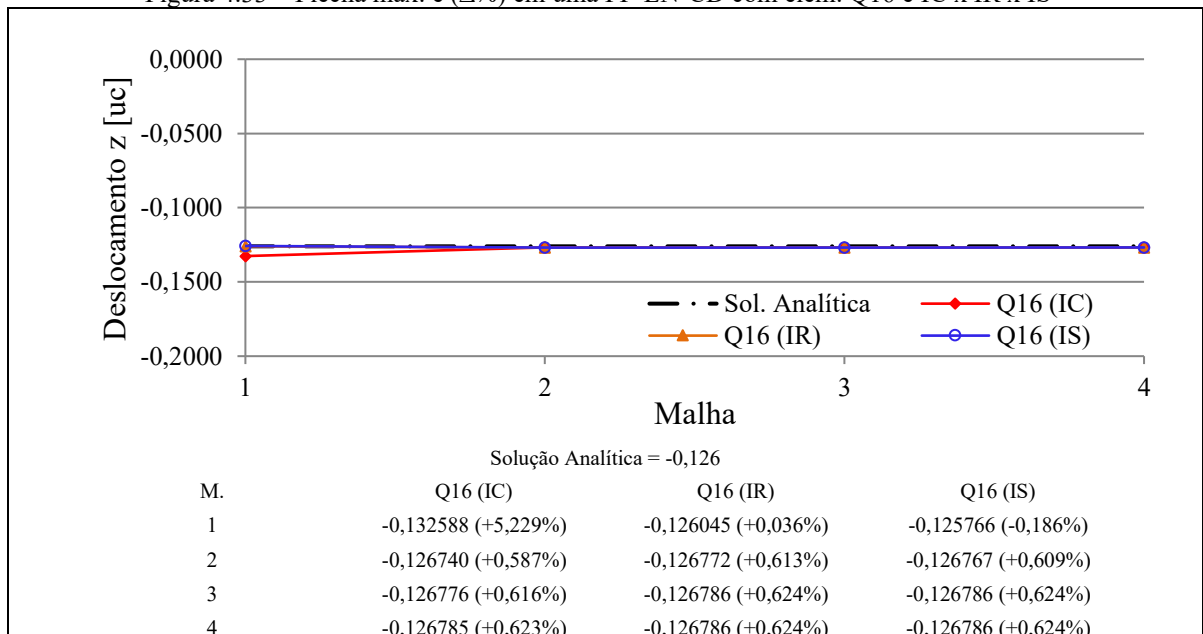
Fonte: O autor.

Figura 4.32 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elem. Q12 e IC x IR x IS



Fonte: O autor.

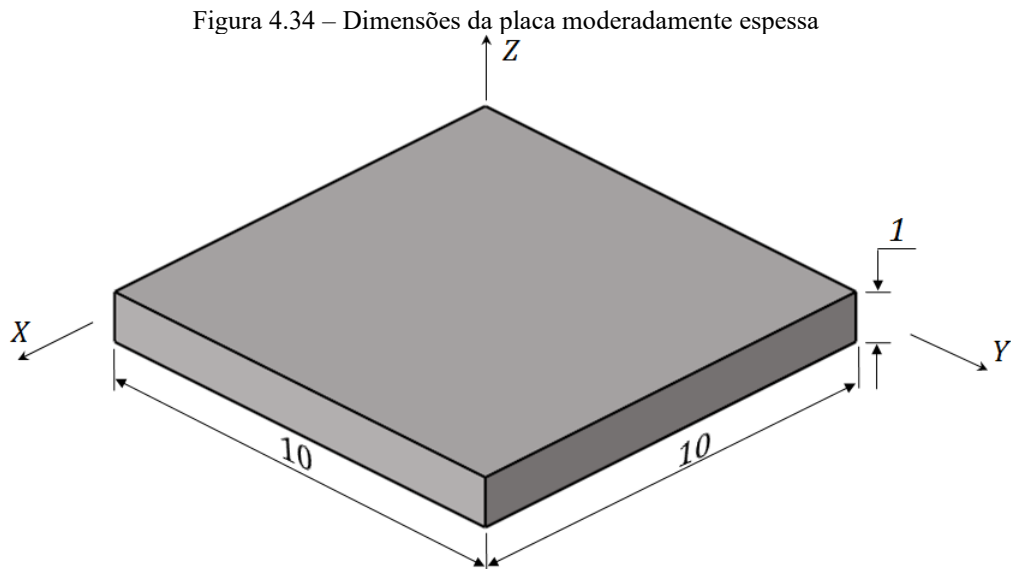
Figura 4.33 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PF-EN-CD com elem. Q16 e IC x IR x IS



Fonte: O autor.

### 4.3 Estudo de Convergência de Placas Moderadamente Espessas

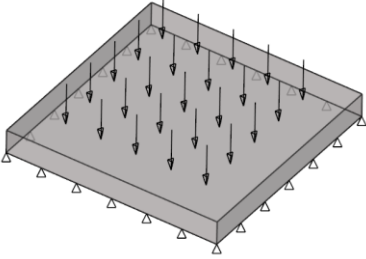
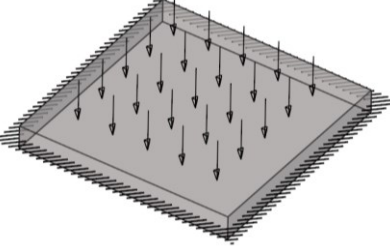
Neste estudo, o modelo avaliado contém dimensões segundo FIG. 4.34, sendo seu lado  $a = 10 uc$  e sua espessura  $e = 1 uc$ .



Fonte: Adaptado de Samir (2007, p.122).

As soluções analíticas desse modelo em placas apoiadas e engastadas com carga distribuída, consoante com a teoria de Mindlin são descritas em Hinton e Huang (1986) e Liu e Riggs (2002) as quais são exibidas na FIG. 4.35. Nessa figura também são informados os valores das flechas máximas,  $w_{max}$ , calculados com as dimensões acima, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson como anteriormente citados, carga distribuída  $q = -1 uc/uc^2$  e coeficiente de rigidez a flexão da placa  $D$ , de acordo com a FIG. 4.5.

Figura 4.35 – Soluções analíticas em placas mod. espessas

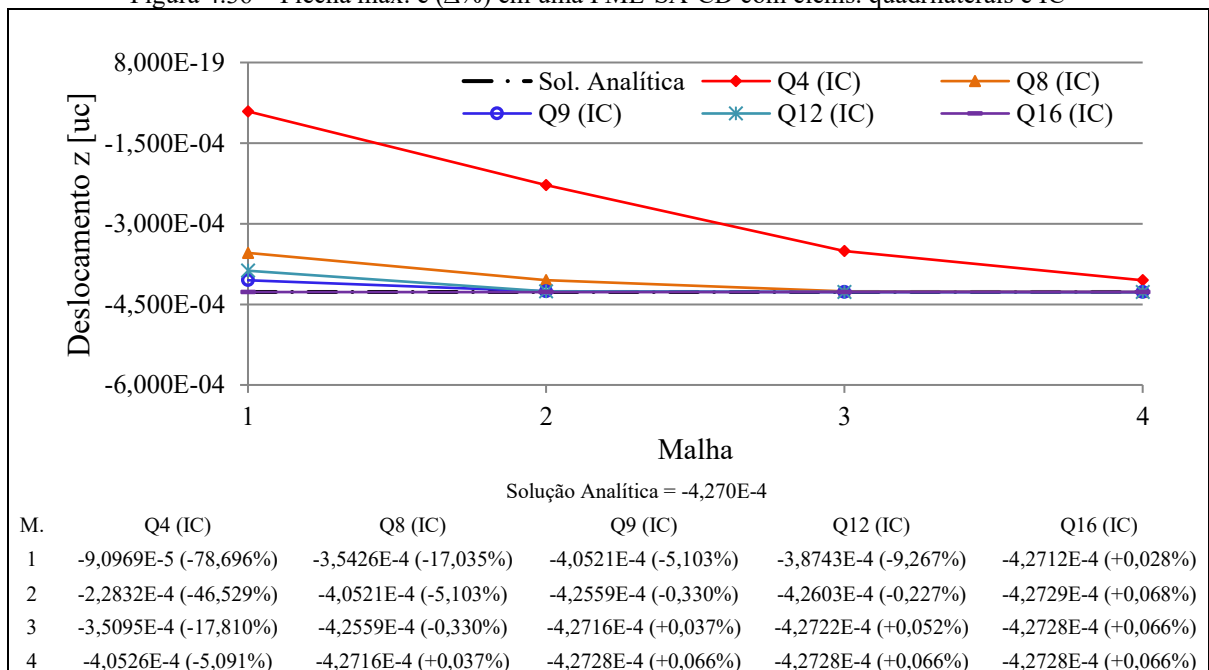
Configuração	Solução Analítica
<p>5. PME-SA-CD</p> 	$w_{max} = 0,004270 \frac{q a^4}{D}$ $= -4,270 \cdot 10^{-4} uc$
<p>6. PME-EN-CD</p> 	$w_{max} = 0,001500 \frac{q a^4}{D}$ $= -1,500 \cdot 10^{-4} uc$

Fonte: O autor.

### 4.3.1 Configuração 5: PME-SA-CD

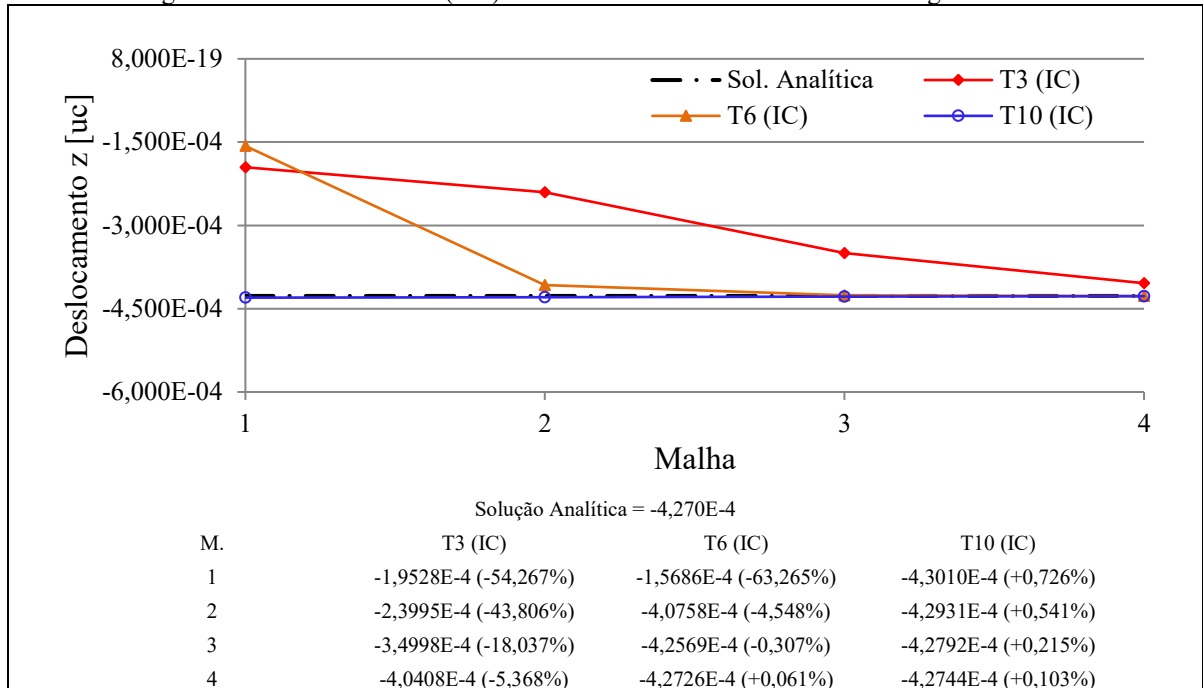
a) 1ª Condição: IC

Figura 4.36 – Flecha máx. e (Δ%) em uma PME-SA-CD com elems. quadrilaterais e IC



Fonte: O autor.

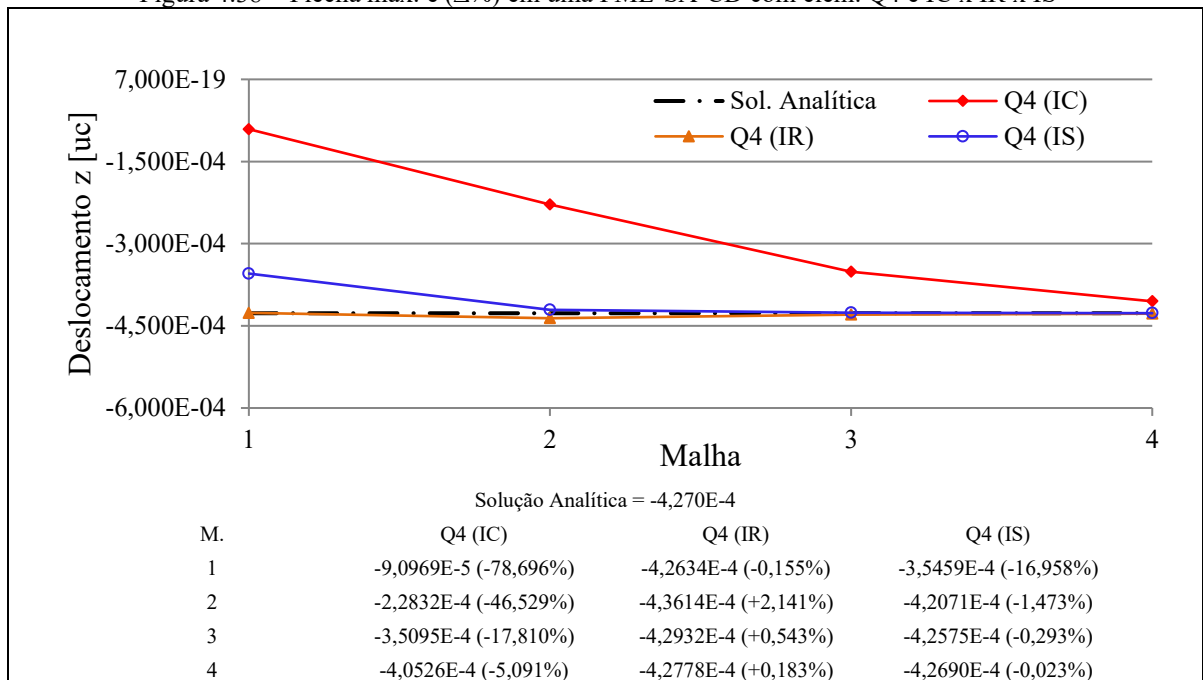
Figura 4.37 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elems. triangulares e IC



Fonte: O autor.

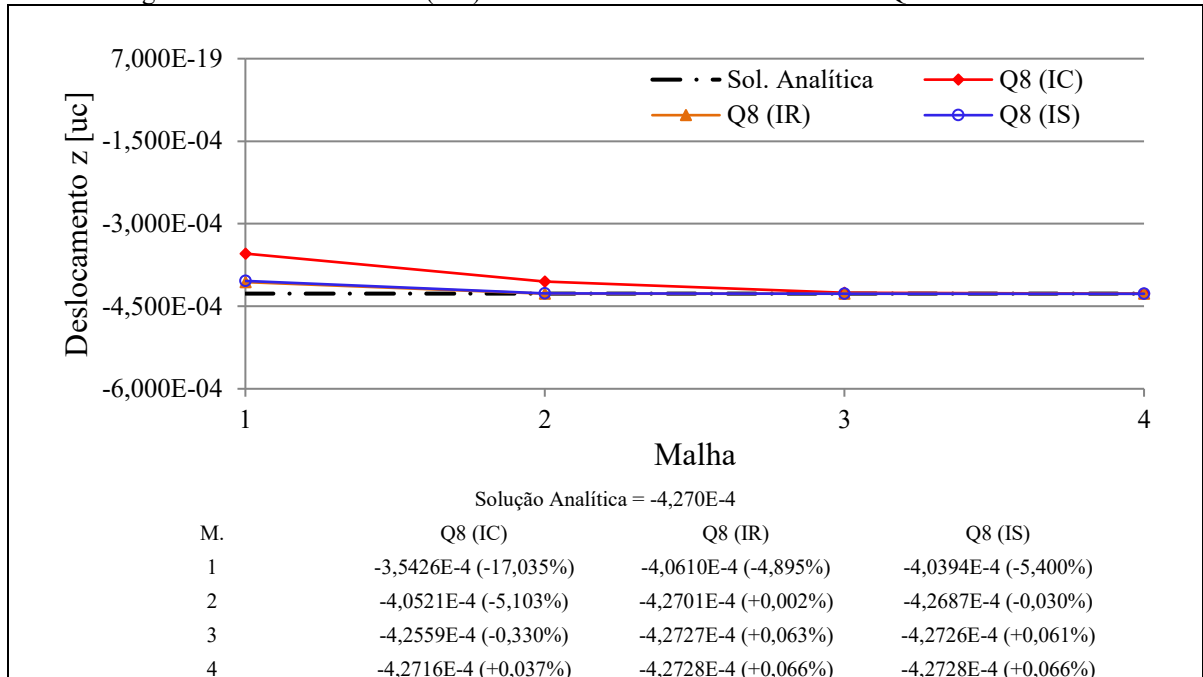
b) 2ª Condição: IC x IR x IS nos elementos quadrilaterais

Figura 4.38 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elem. Q4 e IC x IR x IS



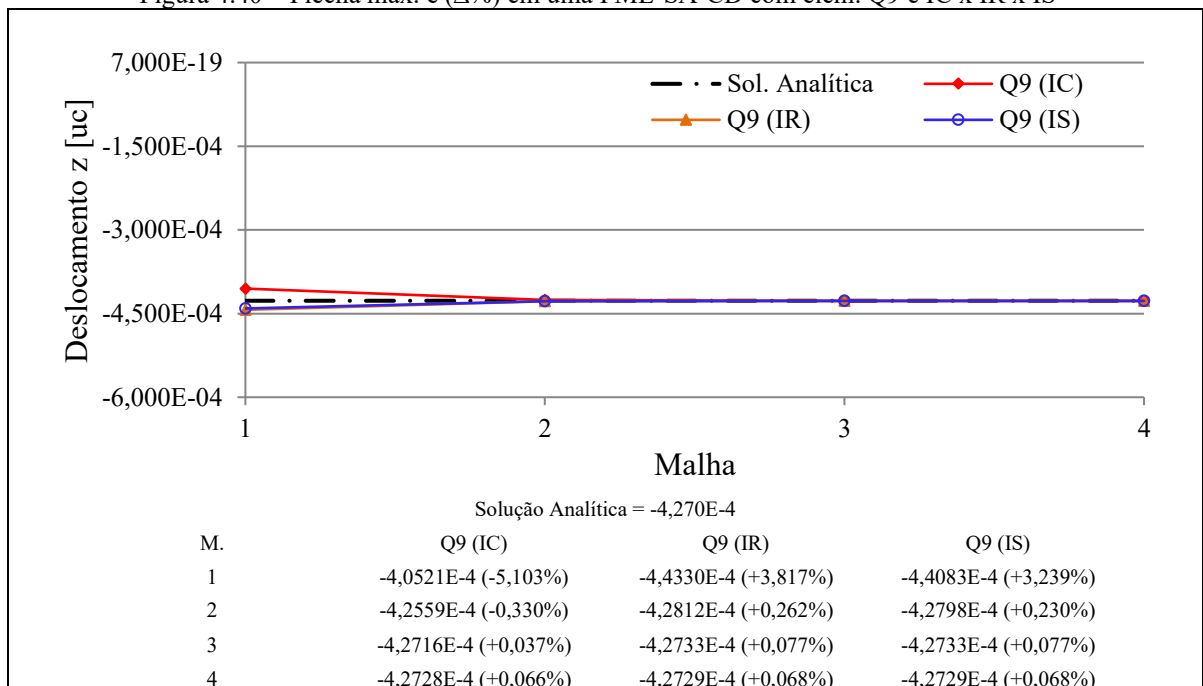
Fonte: O autor.

Figura 4.39 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elemento Q8 e IC x IR x IS



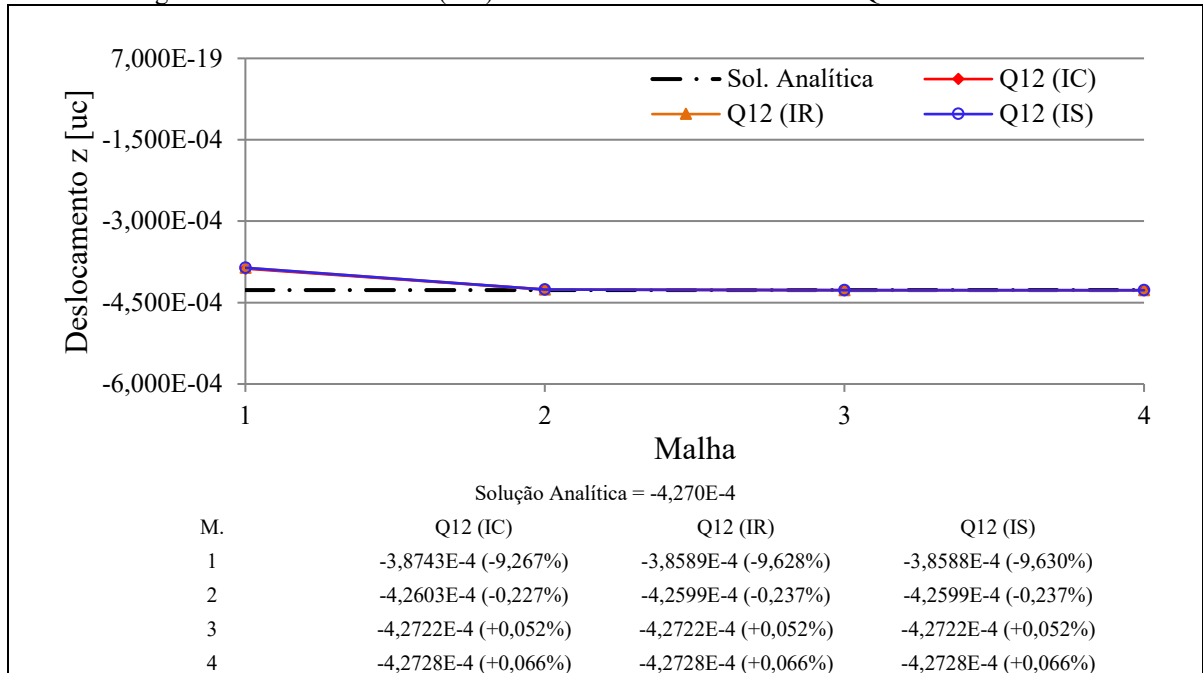
Fonte: O autor.

Figura 4.40 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elem. Q9 e IC x IR x IS



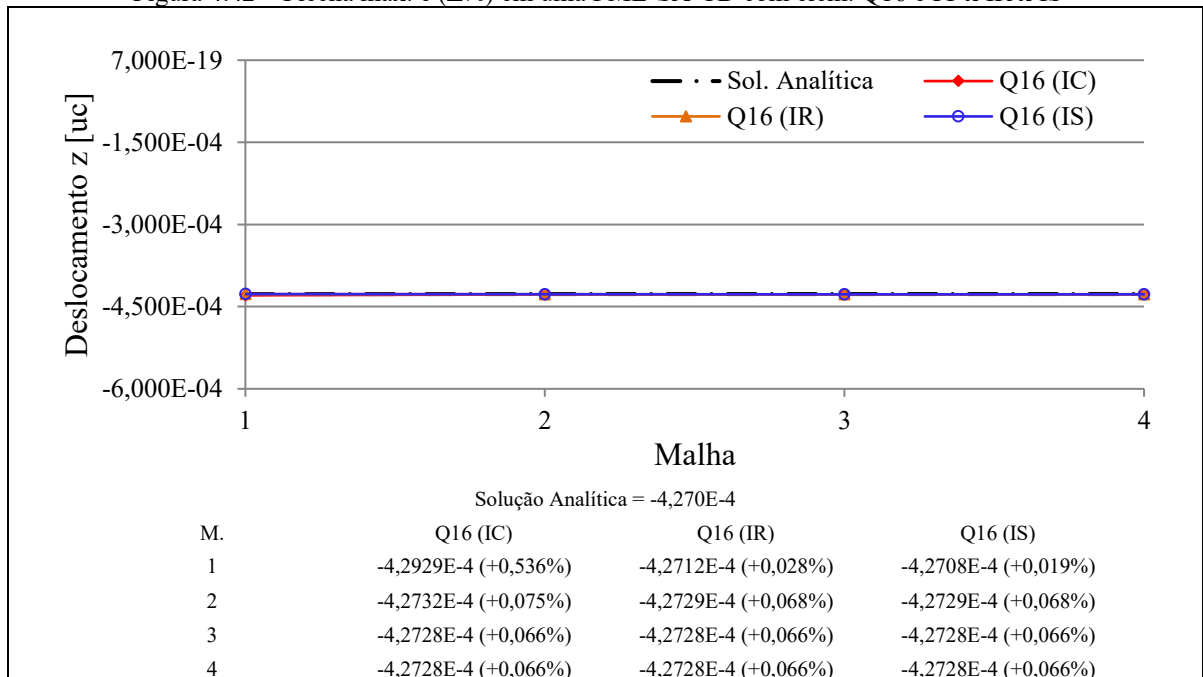
Fonte: O autor.

Figura 4.41 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elem. Q12 e IC x IR x IS



Fonte: O autor.

Figura 4.42 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-SA-CD com elem. Q16 e IC x IR x IS

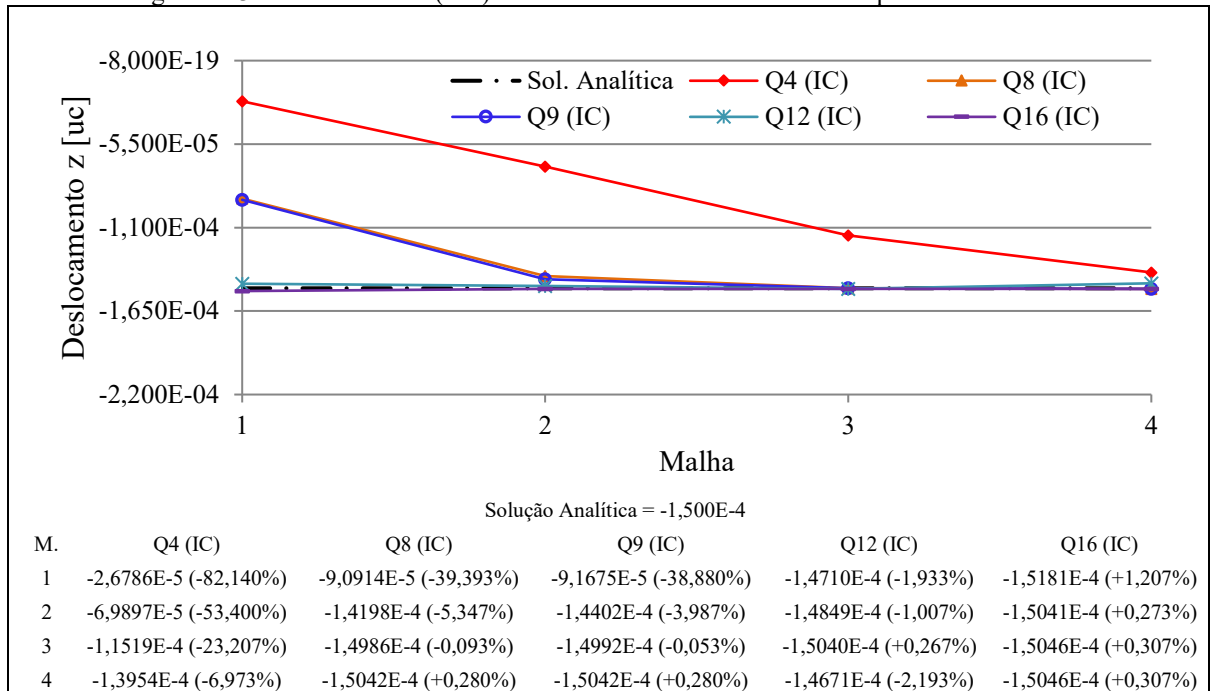


Fonte: O autor.

### 4.3.2 Configuração 6: PME-EN-CD

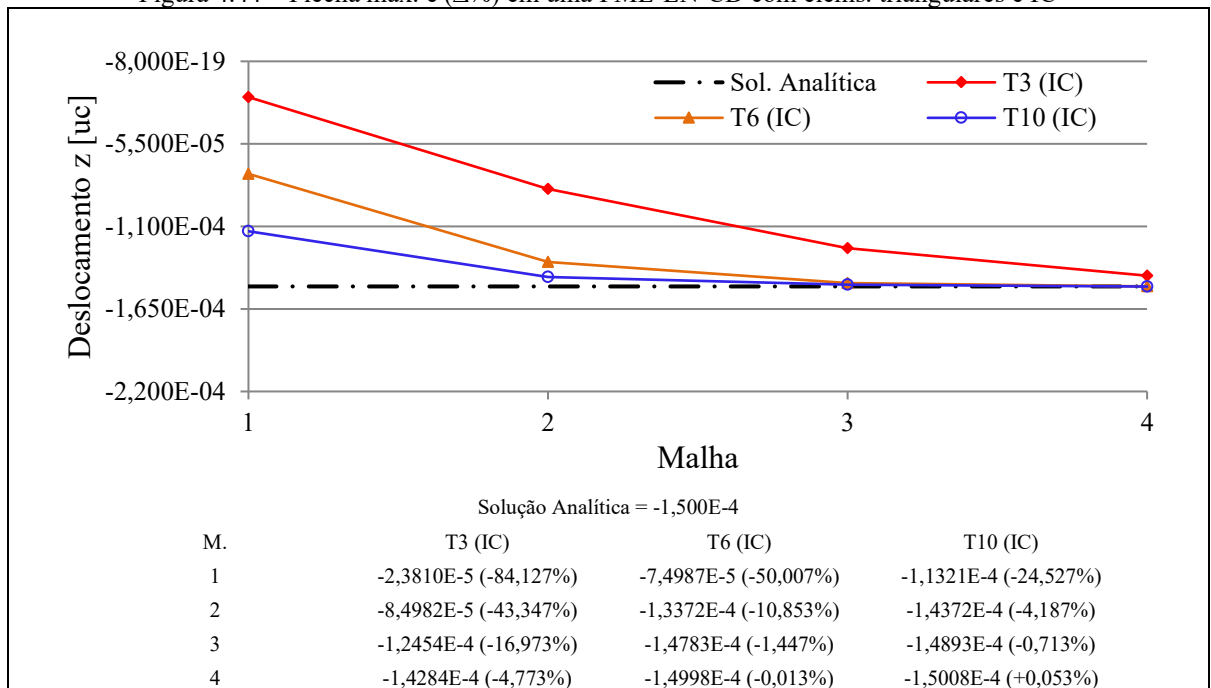
a) 1ª Condição: IC

Figura 4.43 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elems. quadrilaterais e IC



Fonte: O autor.

Figura 4.44 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elems. triangulares e IC

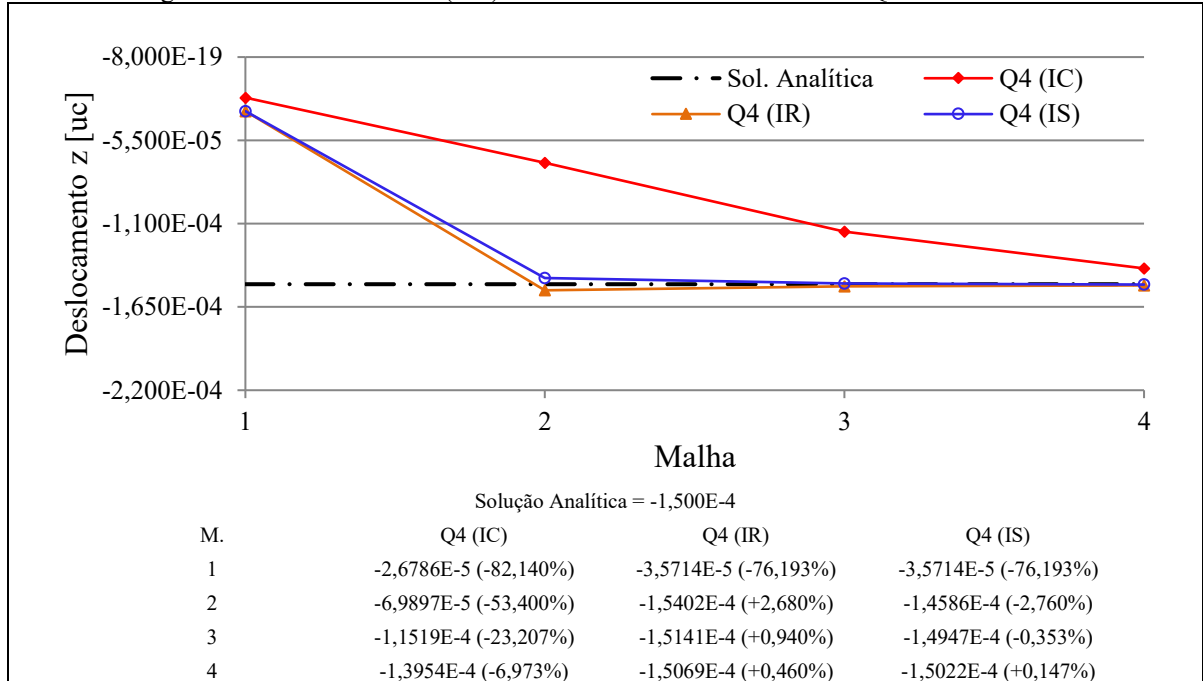


Fonte: O autor.



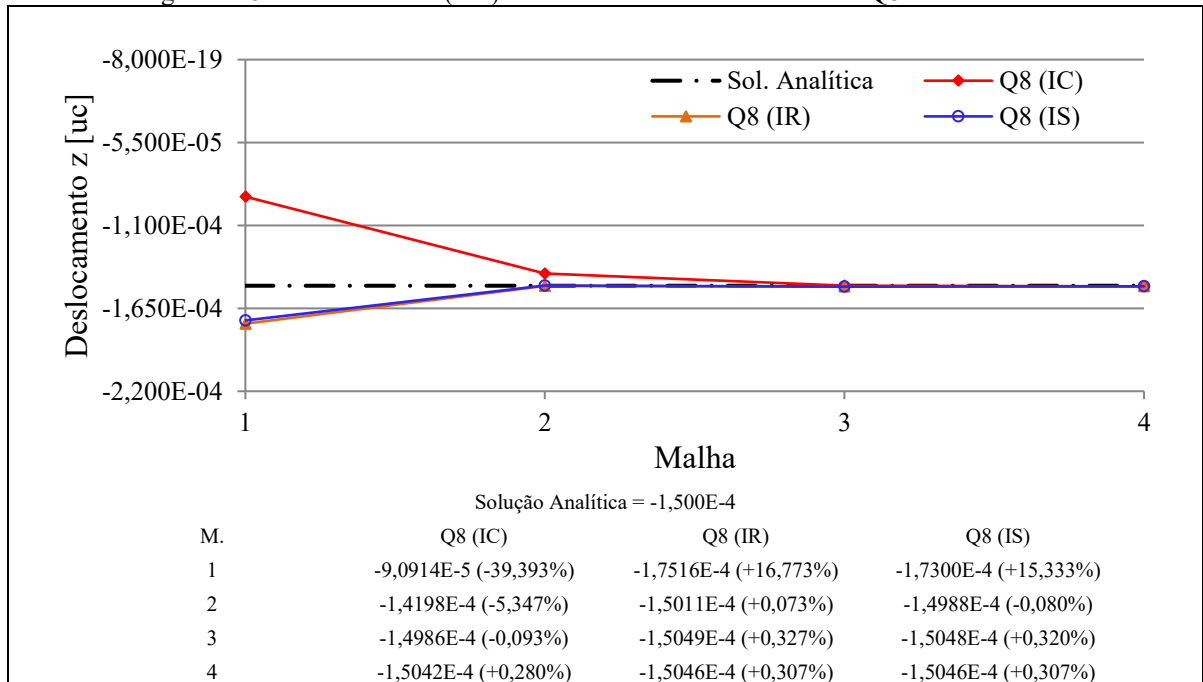
b) 2ª Condição: IC x IR x IS nos elementos quadrilaterais

Figura 4.45 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elem. Q4 e IC x IR x IS



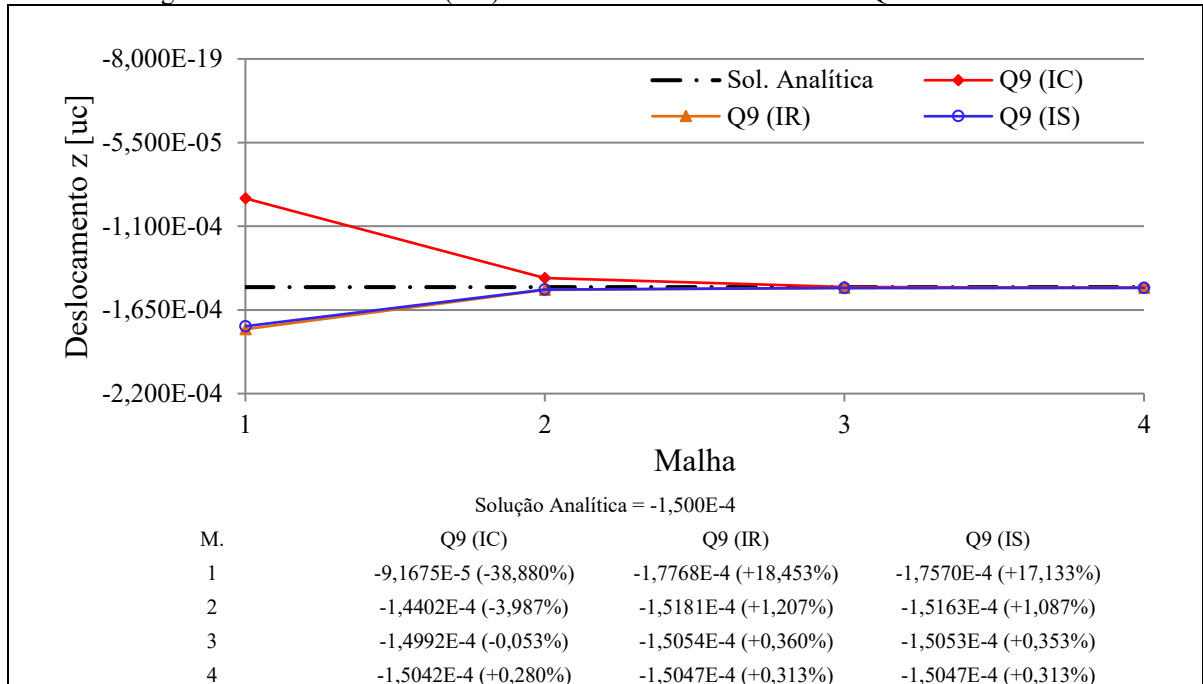
Fonte: O autor.

Figura 4.46 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elem. Q8 e IC x IR x IS



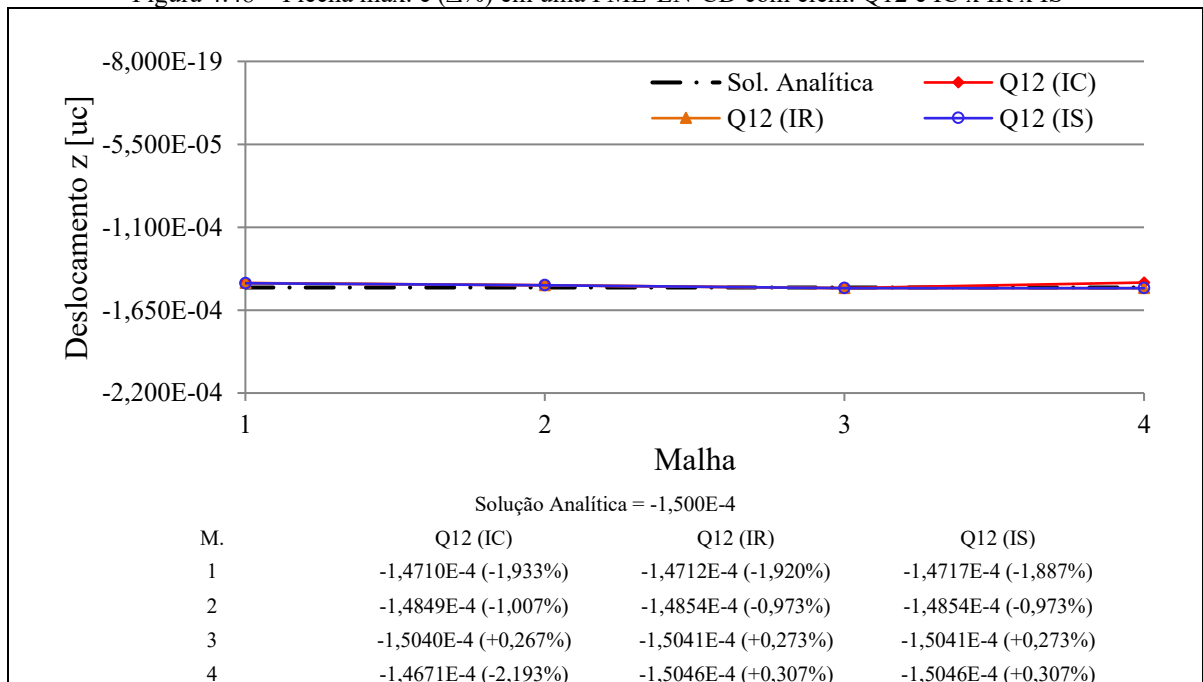
Fonte: O autor.

Figura 4.47 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elem. Q9 e IC x IR x IS

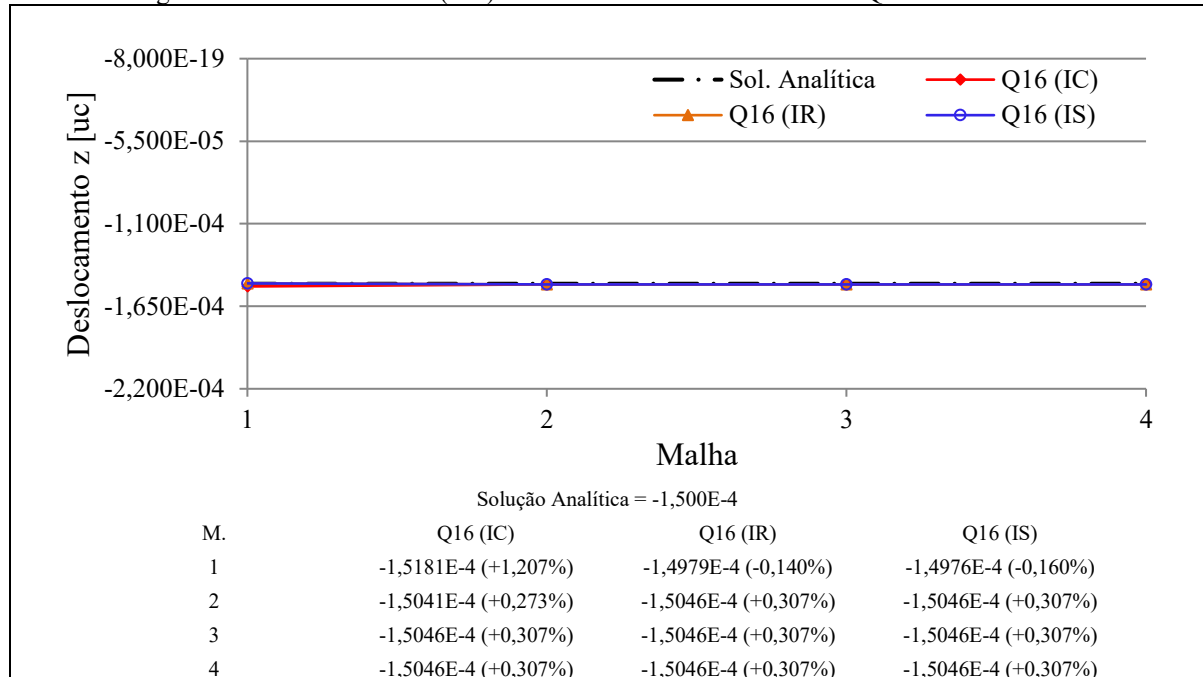


Fonte: O autor.

Figura 4.48 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elem. Q12 e IC x IR x IS



Fonte: O autor.

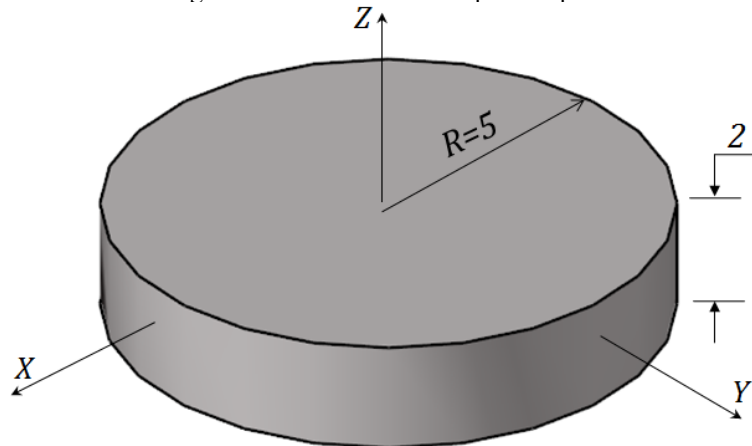
Figura 4.49 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PME-EN-CD com elem. Q16 e IC x IR x IS

Fonte: O autor.

#### 4.4 Estudo de Convergência de Placas Espessas

No estudo das placas espessas, o modelo avaliado é elaborado com o uso de uma placa circular, com dimensões segundo FIG. 4.50, onde seu raio  $R = 5 uc$  e sua espessura  $e = 2 uc$ .

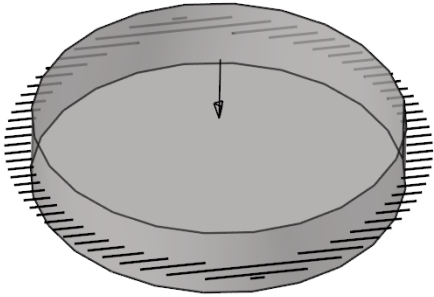
Figura 4.50 – Dimensões da placa espessa



Fonte: Adaptado de Samir (2007, p.126).

A solução analítica desse modelo em uma placa engastada e com carga concentrada, consoante com a teoria de Mindlin é descrita em Gruttmann e Wagner (2004) como pode ser ilustrado na FIG. 4.51.

Figura 4.51 – Solução analítica em uma placa espessa

Configuração	
7. PE-EN-CC	
Solução Analítica	
$w_{max} = \frac{P a^2}{16 \pi D} \left[ \left( 1 - \frac{r^2}{a^2} \right) + \frac{2 r^2}{a^2} \ln \frac{r}{a} - \frac{8 D}{k G e a^2} \ln \frac{r}{a} \right]$ $= -2,035 \times 10^{-6} \text{ uc}$	

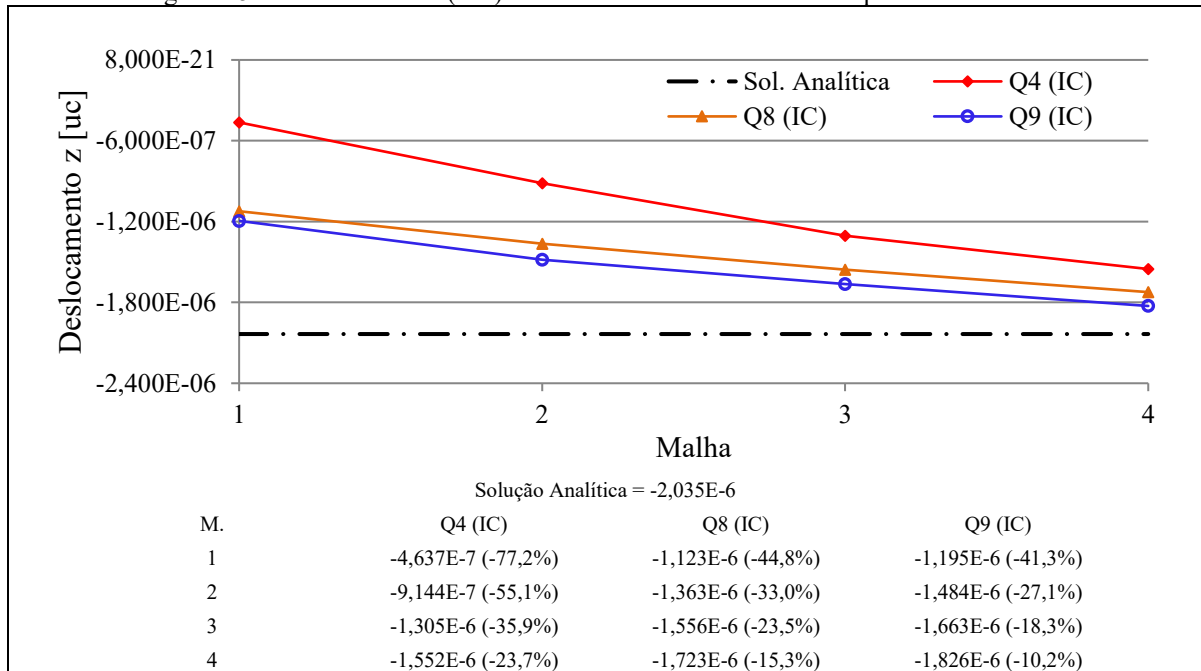
Fonte: O autor.

O valor da flecha máxima,  $w_{max}$ , é calculado usando as dimensões da FIG. 4.50 da placa, sendo  $a$  o seu raio, módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson anteriormente citados,  $G$  o módulo de elasticidade transversal, carga concentrada  $P = -1 \text{ uf}$ ,  $k = 5/6$  sendo o fator de correção da tensão cisalhante, coeficiente de rigidez a flexão da placa  $D$  de acordo com a FIG. 4.5 e  $r$  a distância do centro ao ponto onde será encontrado o deslocamento transversal  $w$ . Uma vez que esse deslocamento é calculado no centro da placa, considera-se que  $r = 0,01 \text{ uc}$ , valor próximo ao centro, visto a ocorrência da singularidade para  $r = 0 \text{ uc}$ .

#### 4.4.1 Configuração 7: PE-EN-CC

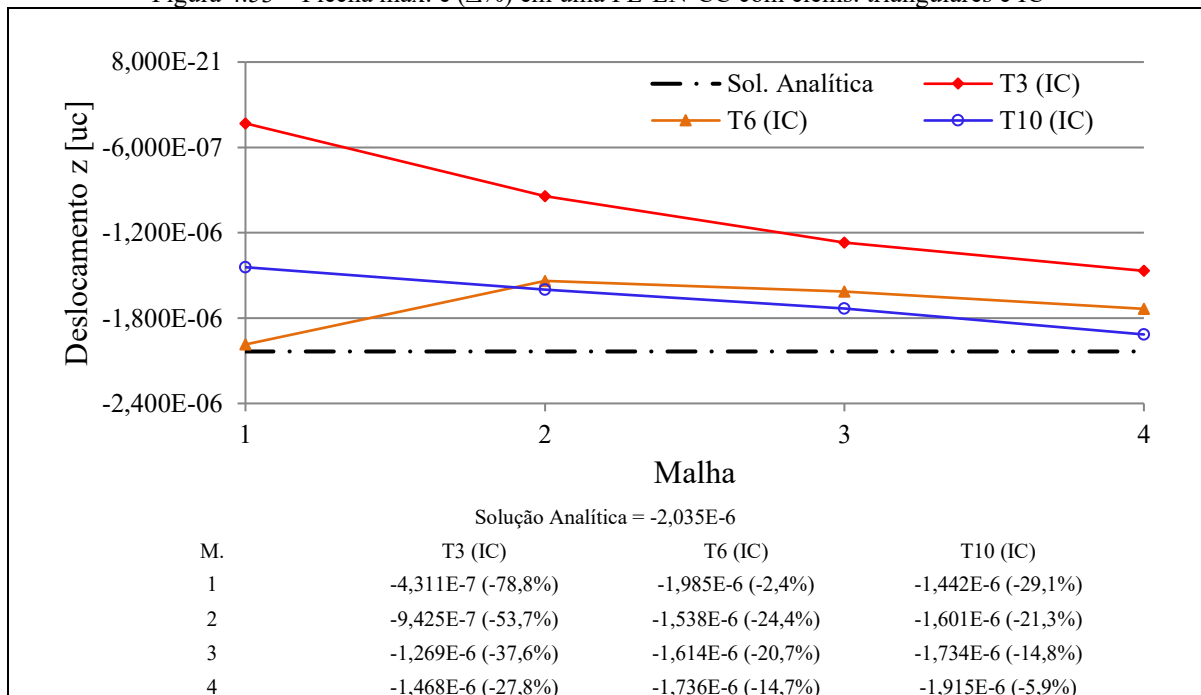
a) 1ª Condição: IC

Figura 4.52 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PE-EN-CC com elems. quadrilaterais e IC



Fonte: O autor.

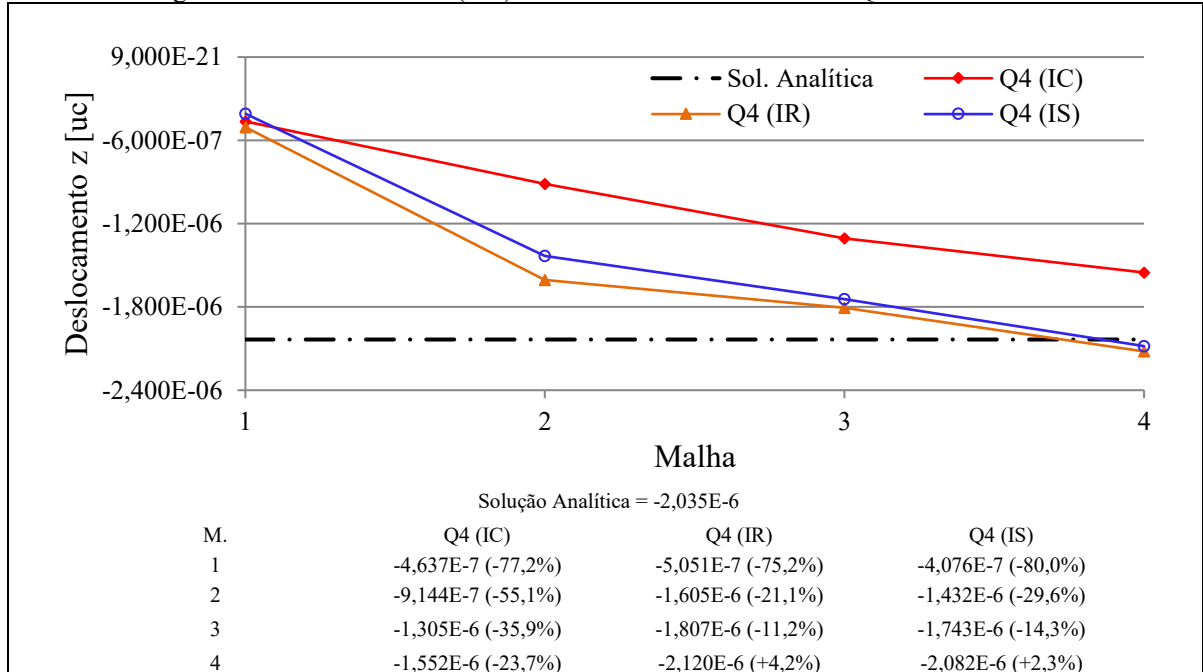
Figura 4.53 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PE-EN-CC com elems. triangulares e IC



Fonte: O autor.

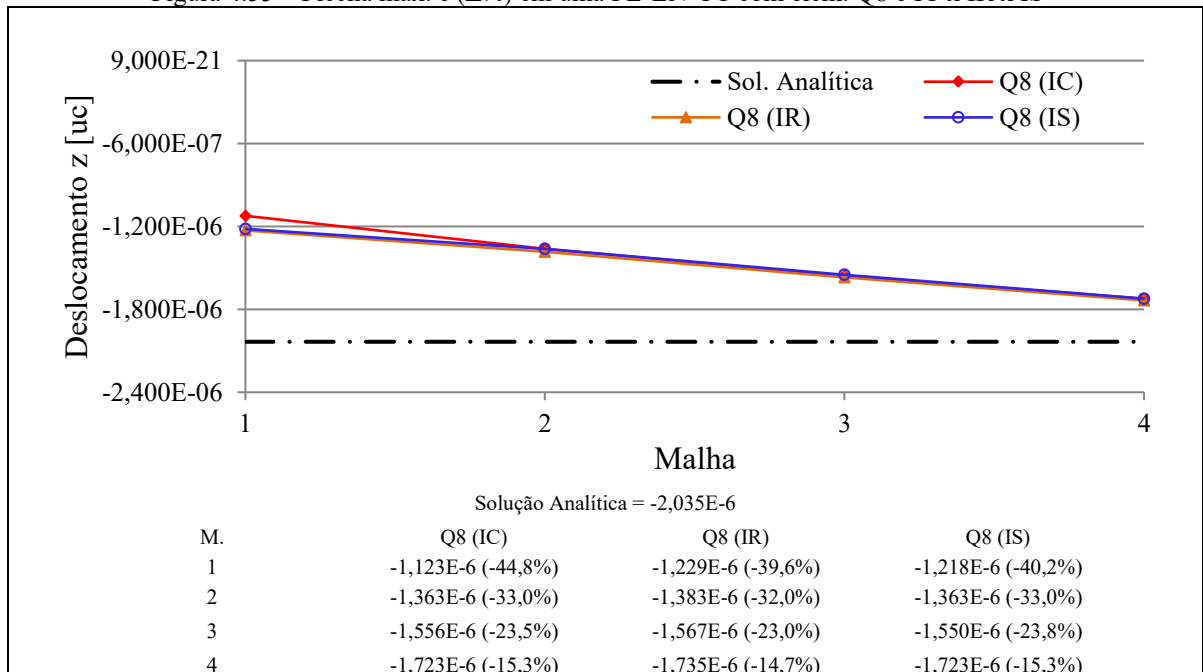
b) 2ª Condição: IC x IR x IS nos elementos quadrilaterais

Figura 4.54 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PE-EN-CC com elem. Q4 e IC x IR x IS

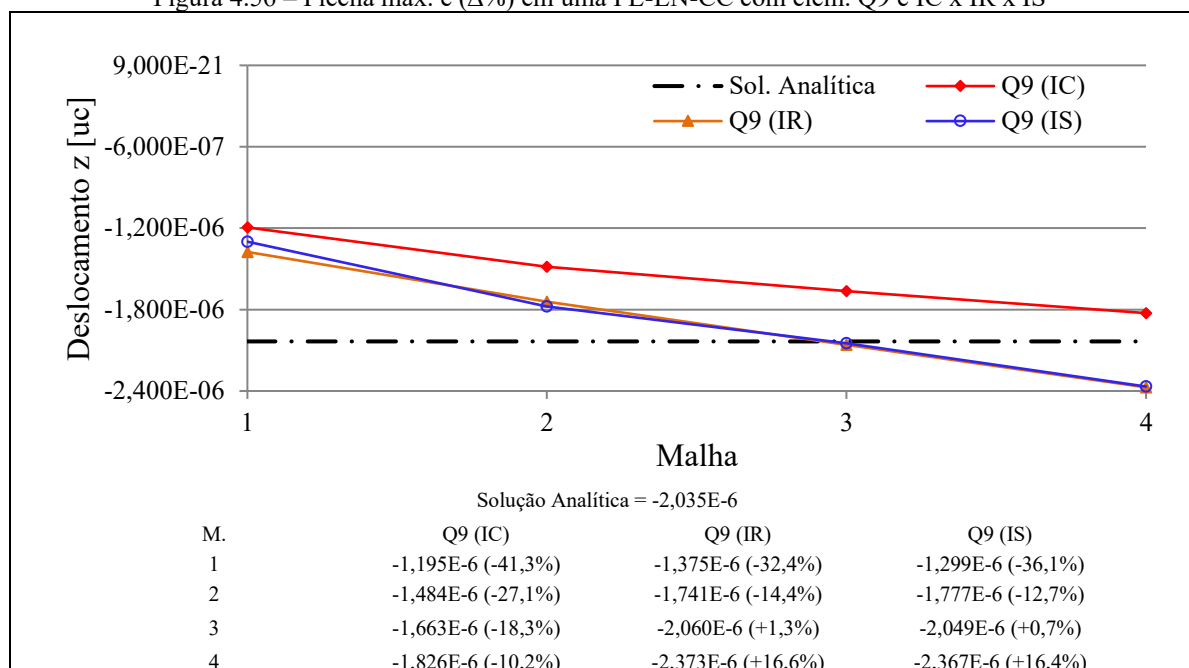


Fonte: O autor.

Figura 4.55 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PE-EN-CC com elem. Q8 e IC x IR x IS



Fonte: O autor.

Figura 4.56 – Flecha máx. e ( $\Delta\%$ ) em uma PE-EN-CC com elem. Q9 e IC x IR x IS

Fonte: O autor.

#### 4.5 Monotonicidade dos Resultados

Os Quadros 4.2 e 4.3 apresentam a monotonicidade por elemento e respectiva integração utilizada nas sete configurações de placa anteriormente descritas. Os símbolos  $-$ ,  $+$  e  $\sim$  representam que a aproximação é monótona por baixo, por cima e não monótona, respectivamente. Espaços em branco significam que não foram realizadas as simulações.

Quadro 4.2 – Monotonicidade para os elementos quadriláteros

Elemento \ Config.	Q4			Q8			Q9			Q12			Q16		
	IC	IR	IS	IC	IR	IS	IC	IR	IS	IC	IR	IS	IC	IR	IS
1.PF-SA-CC	-	+	$\sim$	-	$\sim$	$\sim$	-	+	+	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	+	+
2. PF-SA-CD	-	$\sim$	-	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	+	+	$\sim$	$\sim$	$\sim$	+	+	+
3.PF-EN-CC	-	$\sim$	-	-	$\sim$	$\sim$	-	+	+	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$
4.PF-EN-CD	-	$\sim$	$\sim$	-	$\sim$	$\sim$	-	+	+	$\sim$	$\sim$	$\sim$	+	+	$\sim$
5.PME-SA-CD	-	$\sim$	-	$\sim$	$\sim$	$\sim$	$\sim$	+	+	$\sim$	$\sim$	$\sim$	+	+	+
6.PME-EN-CD	-	$\sim$	$\sim$	$\sim$	+	$\sim$	$\sim$	+	+	$\sim$	$\sim$	$\sim$	+	$\sim$	$\sim$
7.PE-EN-CC	-	$\sim$	$\sim$	-	-	-	-	$\sim$	$\sim$						

Fonte: O autor.

Quadro 4.3 – Monotonicidade para os elementos triangulares

Config. \ Elemento	T3	T6	T10
	IC	IC	IC
1.PF-SA-CC	–	–	~
2. PF-SA-CD	–	–	+
3.PF-EN-CC	–	–	~
4.PF-EN-CD	–	–	~
5.PME-SA-CD	–	~	+
6.PME-EN-CD	–	–	~
7.PE-EN-CC	–	–	–

Fonte: O autor.

## 4.6 Análise Crítica dos Resultados

A avaliação dos resultados simulados está dividida em duas partes. A primeira em uma análise quali-quantitativa referente à convergência das placas simuladas. A segunda, em uma análise qualitativa das principais conclusões dessa investigação de convergência, de seus modos espúrios e do seu tempo de processamento.

### 4.6.1 Avaliação quali-quantitativa da convergência

Nas simulações envolvendo placas finas utilizando integração completa, onde se esperava o travamento da solução numérica, verificou-se que ao se aumentar a ordem do elemento Q4, de Q8 a Q16, e do elemento T3, de T6 a T10, combinados com o refinamento da malha, a solução numérica convergiu para a resposta analítica. Essas convergências aconteceram devido ao aumento significativo dos graus de liberdade da placa, os quais flexibilizaram seu deslocamento, vencendo então o bloqueio.

Com o uso também unicamente da integração completa, nas placas mediamente espessas e espessas, as quais não produzem o bloqueio, os elementos de menor ordem Q4 e T3 convergiram para a solução analítica ao se refinar a malha, com diferenças percentuais maiores que os respectivos elementos quadrilaterais e triangulares de maior ordem devido suas formulações serem de menor grau. Para essas placas, o uso das técnicas anti-bloqueio propiciaram ganhos extras em flexibilidades, os quais podem ser usados favoravelmente em determinadas situações. Por exemplo, casos onde se tenha dificuldades de utilizar elementos de



maior ordem como nos softwares comerciais ANSYS e ABAQUS, cujos elementos de casca são disponibilizados somente até a ordem quadrática de interpolação. Todavia, deve se atentar para que não haja flexibilização excessiva da solução numérica, a ponto de aumentar significativamente o erro com a solução analítica conforme será explicado adiante no caso da FIG. 4.56.

No confronto entre IC x IR x IS, comprovou-se a convergência quando utilizado as integrações anti-bloqueio principalmente nas placas finas com o uso do elemento Q4, e em menor escala, nas placas de maior espessura. Com apenas o uso da malha 2 desse elemento de menor ordem, a diferença percentual média das quatro configurações de placas finas utilizando essa malha, foi de aproximadamente 4% para integração reduzida e 5% para integração seletiva, enquanto que com a integração completa, esse erro é em torno de 99%. Outra observação, é que de forma geral, essas integrações resultaram em convergências adequadas, mas com desempenhos distintos de acordo com a configuração de placa. A integração reduzida foi superior a seletiva nos modelos 2 e 3, e a seletiva, superior nas configurações 1 e 4.

Nos elementos com formulações de maior grau, Q8, Q9, Q12 e Q16, o uso da integração reduzida ou seletiva se revelou praticamente indiferente na convergência de todas as espessuras de placas. E quando se utilizou os elementos Q12 e Q16 nas placas mediantemente espessas, não existiu diferença significativa entre todos os modos de integração.

Certificou-se que de forma geral, a família Lagrange é menos propícia ao bloqueio que a família Serendipítica, pois a mesma caracteriza-se por ter mais graus de liberdade devido aos nós centrais, gerando maiores razões de restrições. Destaque para o elemento Q9 o qual foi superior em termos de erro percentual a seu correspondente Q8 em praticamente todos os modelos de placa.

O elemento Q9 quase sempre, foi também melhor que o elemento de maior ordem Q12 pois este apresenta menor razão de restrição comparado ao primeiro. Outro ponto desfavorável do elemento Q12 é sua não monotonicidade para todos os modelos de placa.

Quanto à monotonicidade dos outros elementos, somente o elemento T3 e o Q4 utilizando integração completa, apresentaram monotonicidade por baixo em todas as configurações.

Com o uso da integração reduzida e seletiva, observa-se que o aumento da flexibilidade da placa gerou deslocamentos até maiores que os da solução analítica com o refino da malha, tornando o resultado não monotônico. Esse fenômeno por ser bem entendido pelo gráfico da FIG. 4.56, onde em uma placa espessa onde não há o bloqueio da solução numérica, o uso da integração reduzida/seletiva flexibilizou de forma excessiva o deslocamento, gerando na malha 4, valor de flecha cerca de 16% maior que o da solução analítica.

Algumas particularidades também podem ser mencionadas. Como visto na teoria, validou-se pelos resultados que o elemento Q8 apresentou maior bloqueio em placas engastadas. Por sua vez, os elementos triangulares quando utilizados com malhas de um único elemento, exibiram valores não esperados, por exemplo no caso do elemento T3 nas configurações 1 e 2 e do elemento T6 na configuração 7 os quais resultaram em flechas maiores que das demais malhas. Esses resultados atípicos podem ser erros numéricos, motivados pelo baixo número de graus de liberdade quando comparado às demais malhas, sendo 9 para o elemento T3 e 18 para o elemento T6.

#### **4.6.2 Avaliação qualitativa da convergência, modos espúrios e tempo de processamento**

Os modos espúrios de energia nula em cada elemento e respectiva integração, foram mostrados quantitativamente no Quadro 3.2. Porém, por simplicidade, eles serão apresentados qualitativamente.

O tempo de processamento, uma variável muito importante quando se trata de análises virtuais, será retratado também de forma qualitativa. A saber, que a integração reduzida apresenta um menor tempo quando comparada às demais, dado que existe um menor número de pontos de integração a serem calculados nas parcelas de flexão e cisalhamento das matrizes de rigidez do elemento. O segundo menor tempo é para integração seletiva, pois a redução dos pontos se dá somente na parcela de cisalhamento. E por fim, a integração completa com o maior tempo de processamento, pois são utilizados todos os pontos de integração das partes da matriz de rigidez.

Entre as famílias dos elementos, a Lagrange é a que apresenta maior tempo de análise, visto que por possuir mais nós, sua matriz de rigidez é a de maior dimensão e com isso mais tempo é necessário para seu cálculo.

Tendo assim definido essas variáveis, a seguir estão descritos através de um quadro resumo, as principais análises feitas da convergência das placas simuladas pelo INSANE de acordo com seu tipo de integração, sua espessura e seu elemento. São expostos duas ou três possibilidades distintas de se fazer a mesma análise, mas com diferentes comportamentos quanto à convergência, modos espúrios e tempo de processamento.

Dessa forma, essas três variáveis são classificadas individualmente de modo qualitativo e em relação à seus desempenhos, com os símbolos **xx**, **x**, **✓** e **✓✓** significando que este último apresenta um resultado melhor que o terceiro, que é melhor que o segundo e por sua vez melhor que o primeiro. O símbolo – representa que independe o tipo de integração e espessuras analisados, desde que sejam os mesmos quando comparados nas duas famílias.

Quadro 4.4 – Resumo das principais análises do estudo de convergência

Análise	Int.	Esp.	Elemento	Conv.	Modos Eps.	Tempo
1. IC em placas finas, alternativo a IR/IS	IR		Q4	✓	<b>xx</b>	✓✓
	IS	PF	Q4	✓	<b>x</b>	✓
	IC		Q8 a Q16	✓	✓	<b>x</b>
2. IR/IS em placas espessas, alternativo aos elems. de maior ordem	IC		Q9 a Q16	✓	✓	<b>x</b>
	IR	PME PE	Q4, Q8	✓	<b>xx</b>	✓✓
	IS		Q4, Q8	✓	<b>x</b>	✓
3. IR/IS indiferentes em elementos de maior ordem	IR	PF		✓	<b>xx</b>	✓✓
	IS	PME	Q8 a Q16	✓	<b>x</b>	✓
	IC	PE		<b>x</b>	✓	<b>x</b>
4. IR/IS/IC indiferentes nos elems. Q12 e Q16 em PMEs	IR			✓	<b>xx</b>	✓✓
	IS	PME	Q12 e Q16	✓	<b>x</b>	✓
	IC			✓	✓	<b>x</b>
5. Família de elementos	–	–	Q8 e Q12	<b>x</b>	✓	✓
	–	–	Q9 e Q16	✓	<b>x</b>	<b>x</b>

Fonte: O autor.

## 5 CONCLUSÃO

Finalizado as simulações numéricas, totalizando em 480 modelos, foi verificado que somente os elementos T3 e Q4 com o uso da integração completa, mostraram monotonicidade em todas configurações de placa e o Q12 em nenhum desses modelos.

Constatou-se o êxito das técnicas anti-bloqueio em placas finas, principalmente no elemento Q4 e uma alternativa a essas técnicas ao se fazer uso de elementos de maior ordem, menores dimensões e com integração completa.

Nas placas mediamente espessas e espessas, as integrações reduzidas e seletivas juntamente com os elementos de menor ordem, Q4 ou Q8, tornaram-se outra possibilidade a casos onde não se possam usar elementos de maior ordem com integração completa. Estes, por sua vez, não apresentaram diferença quanto ao uso das integrações anti-travamento em placas de todas as espessuras, enquanto que o Q9 e o Q16 em placas mediamente espessas, exibiram aproximadamente os mesmos resultados de deslocamentos nas três formas de integração.

A família Lagrange praticamente, mostrou-se superior a família Serendipity quanto ao bloqueio, tendo ênfase para o elemento Q9 quando comparado ao Q8 e até mesmo ao Q12.

Todas essas possibilidades distintas de se fazer a mesma análise, sendo por tipo de integração ou pela família do elemento, resulta em diferentes desempenhos quanto à convergência, modos espúrios e tempo de processamento, conforme Quadro 4.4. Conclui-se desse modo, que não existe um caminho ideal em análises de elementos finitos de placa. No entanto, uma ponderação entre esses três parâmetros mencionados anteriormente, se torna útil para decidir qual a melhor escolha na simulação a ser avaliada.

Por fim, se tratando do conteúdo teórico, demonstrou-se o modelo matemático da teoria de Reissner-Mindlin por trás do sistema computacional empregado nas análises executadas. Os elementos finitos usados foram minuciosamente detalhados, desde suas funções de forma, a qual didaticamente foi apresentado antes as funções de interpolação de um elemento 1D, coordenadas naturais e continuidade do elemento, até suas formulações. Conceitos como o PTV, formulação isoparamétrica, integração numérica e as condições de contorno empregadas em placas, também foram devidamente abordadas.

## 6 REFERÊNCIAS

- ABAQUS. *Abaqus 6.14 documentation*. Providence: SIMULIA, 2014. Disponível em <<http://ivt-abaqusdoc.ivt.ntnu.no:2080/v6.14/>>. Acesso em: 04 jan. 20115.
- ALVES FILHO, A. Elementos finitos. A base da tecnologia CAE. 5. ed. São Paulo: ÉRICA, 2008.
- ANSYS. *Theory Reference*. Rel. 5.6. Canonsburg: ANSYS, INC, 1999. Disponível em <<http://research.me.udel.edu/lwang/teaching/MEx81/ansys56manual.pdf>>. Acesso em: 04 jan. 2019.
- CEN, S.; SHANG, Y. Developments of Mindlin-Reissner plate elements. Hindawi Publishing Corporation, Beijing, 2015. 12p. Disponível em <<http://dx.doi.org/10.1155/2015/456740>>. Acesso em: 29 set. 2018.
- GRUTTMANN, F.; WAGNER, W. A stabilized one-point integrated quadrilateral Reissner-Mindlin plate element. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 2004. Disponível em <<https://doi.org/10.1002/nme.1148>>. Acesso em: 09 dez. 2018.
- HINTON, E.; HUANG, H. C. A family of quadrilateral mindlin plate elements with substitute shear strain fields. *Computers and Structures, Great Britain*, v.23, n.3, p. 409-431, 1986.
- JOHNSTON, P. R. *Finite elements for structural analysis*. 1. ed. New Jersey: PRENTICE HALL, 1984.
- LIU, Y. J.; RIGGS, H. R.; Development of the min-n family of triangular anisoparametric mindlin plate elements, Mānoa, July 2002. Report UHM/CE/02-02, University of Hawaii – Department of Civil and Environmental Engineering. Disponível em <<http://www.cee.hawaii.edu/wp-content/uploads/UHM-CEE-02-02.pdf>>. Acesso em: 18 dez. 2018.
- LOGAN, L. D. *A first course in the finite element method*. 4. ed. Platteville: THOMSON, 2007.
- OÑATE, E. *Structural analysis with the finite element method. Linear statics. Volume 1. Basis and solids*. 1. ed. Barcelona: SPRINGER, 2009.
- OÑATE, E. *Structural Analysis with the finite element method. Linear statics. Volume 2. Beams, plates and shells*. 1. ed. Barcelona: SPRINGER, 2013.
- PITANGUEIRA, R. L. Elementos finitos bidimensionais para análise de estruturas. Ver. 1.01. Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG. Belo Horizonte. 2016.
- RAO, S. S. *The finite element method in engineering*. 4. ed. Miami: ELSEVIER, 2004.
- SALIBA, S. S. Implementação computacional e análise crítica de elementos finitos de placas. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas)–Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2007.

SORIANO, H. L. Método de elementos finitos em análise de estruturas. 1. Ed. São Paulo: EDUSP, 2003.

TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. *Theory of plates and shells*. 2. ed. Nova York: MCGRAW-HILL, 1959.

TIMOSHENKO, S.; GOODIER, J. N. *Theory of elasticity*. 2. ed. Nova York: MCGRAW-HILL, 1951.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L. *The finite element method. Volume 1: The basis*. 5. ed. Oxford: BUTTERWORTH-HEINEMANN, 2000.