

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação

Vinícius Teodoro de Castro Pires

**Redes Neurais LSTM e Otimização de portfólio para auxílio a tomada de decisão na
Bolsa de valores**

Belo Horizonte
2022

Vinícius Teodoro de Castro Pires

**Redes Neurais LSTM e Otimização de portfólio para auxílio a tomada de decisão na
Bolsa de valores**

Versão Final

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ciência da Computação da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

Orientador: Adriano César Machado Pereira

Belo Horizonte
2022

Pires, Vinícius Teodoro de Castro.

P667r Redes neurais LSTM e otimização de portfólio para auxílio a tomada de decisão na bolsa de valores [manuscrito] / Vinícius Teodoro de Castro Pires — 2022.
78 f. il.; 29 cm.

Orientador: Adriano César Machado Pereira.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais – Departamento de Ciência da Computação
Referências: f.76-78.

1. Computação – Teses. 2. Redes neurais (Computação) – Teses. 3. Teoria do portfólio – Teses. 4. Modelo de Markowitz – Teses. 5. Bolsa de valores - Modelos econométricos – Teses. I. Pereira, Adriano César Machado. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Computação. III. Título.

CDU 519.6*82 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM CIÊNCIA DA COMPUTAÇÃO

FOLHA DE APROVAÇÃO

REDES NEURAIS LSTM E OTIMIZAÇÃO DE PORTFÓLIO PARA AUXÍLIO A TOMADA DE DECISÃO EM APLICAÇÕES FINANCEIRAS

VINÍCIUS TEODORO DE CASTRO PIRES

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. Adriano César Machado Pereira - Orientador
Departamento de Ciência da Computação - UFMG

Prof. Cristiano Arbex Valle
Departamento de Ciência da Computação - UFMG

Prof. Heitor Soares Ramos Filho
Departamento de Ciência da Computação - UFMG

Belo Horizonte, 16 de agosto de 2022.



Documento assinado eletronicamente por **Adriano Cesar Machado Pereira, Professor do Magistério Superior**, em 18/10/2022, às 06:14, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Cristiano Arbex Valle, Professor do Magistério Superior**, em 18/10/2022, às 22:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Heitor Soares Ramos Filho, Professor do Magistério Superior**, em 19/10/2022, às 01:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1782625** e o código CRC **92A9D4FC**.

Resumo

Em um cenário econômico onde a rentabilidade de investimentos tradicionais é, geralmente, menor que a inflação do mesmo período, investir na bolsa de valores tem se tornado uma opção atraente. O foco deste projeto de pesquisa realizado foi construir estratégias de investimento que se apoiam em algoritmos já conhecidos de otimização de portfólio, redes neurais e de tratamento de dados, combinando-os em busca de uma estratégia arrojada. A rede neural recorrente *Long Short-Term Memory* foi utilizada para construir modelagens capazes de realizar a previsão do retorno esperado e de avaliar ações para operações diárias. Os resultados e análises construídos trouxeram combinações de diferentes objetivos de otimização, como maximização do Sharpe, maximização da utilidade quadrática, e minimização da variância com diferentes formas de construir o parâmetro de retorno esperado dos otimizadores. Além disso, foram avaliadas as performances de operações de compra e venda diárias baseadas no valor predito pela modelagem para os ativos dentro dos portfólios otimizados de cada uma das estratégias. Para avaliação comparativa da performance das modelagens montadas foram escolhidos o IBO-VESPA e o IPCA, que no período de avaliação entre janeiro de 2021 a abril de 2022 tiveram como resultado -9% e 14.78%, respectivamente. As estratégias com os melhores resultados do projeto foram em portfólios otimizados que utilizaram o retorno esperado predito pela LSTM como entrada, onde a otimização usando Sharpe Ratio teve um retorno 35.79% e Utilidade quadrática, 66.93%. Apesar do melhor resultado, o portfólio que otimiza a utilidade quadrática tem baixa diversidade e o portfólio que maximiza Sharpe tem maior diversidade e pode ser mais indicado para investidores que não desejam alto grau de risco. Pensando em diversidade de ações na composição do portfólio, a minimização da variância é uma proposta interessante, pois teve um retorno de 11.33%, mas apresentou resultados menos voláteis e maior número de diferentes ativos em carteira por mês. As operações em portfólios ótimos não obtiveram bons resultados devido à mudança de composição do portfólio em cada operação, o que não garante um portfólio otimizado.

Palavras-chave: Redes Neurais, LSTM, Otimização de portfólio, Markowitz, Bolsa de valores

Abstract

In an economic scenario where the profitability of traditional investments is often lower than the inflation of the same period, investing in the stock market has become an attractive option. The focus of the research carried out was to build investment strategies that rely on already known algorithms for portfolio optimization, neural networks and data processing, combining them in search of a bold strategy. The Long Short-Term Memory recurrent neural network was used to build models capable of predicting the expected return and evaluating actions for daily operations. The strategies built brought combinations of different optimization objectives, such as Sharpe maximization, quadratic utility maximization and variance minimization with different ways of building the expected return parameter of the optimizers. In addition, the performance of daily purchase and sale operations was evaluated based on the value predicted by the model for the assets within the optimized portfolios of each strategie. As a benchmark of models created, the IBOVESPA and the IPCA were chosen, which in the evaluation period between January 2021 and April 2022 resulted in -9% and 14.78%, respectively. The strategies with the best results of the project were in optimized portfolios that used the expected return predicted by LSTM as an input, where Sharpe had a return of 35.79% and Quadratic Utility 66.93%. Despite the best result, the portfolio that optimizes Quadratic Utility has low diversity and the portfolio that maximizes Sharpe has greater diversity and may be more suitable for investors who do not want a high degree of risk. Considering the diversity of stocks in the portfolio composition, the minimization of variance is an interesting proposal as it had a return of 11.33% but presented less volatile results and a greater number of different assets monthly. Operations in optimal portfolios did not obtain good results due to the change in the composition of the portfolio in each operation, which does not guarantee an optimized portfolio during the period of operation.

Keywords: Recurrent Neural Networks, Long Short-Term Memory Networks, Portfolio Optimization, Heikin-Ashi, Stock Market

Lista de Figuras

3.1	Interpretação do gráfico de velas.	24
3.2	Gráfico de comparação, <i>Heikin-Ashi</i> vs <i>Candle</i> padrão.	25
3.3	Perceptron.	27
3.4	Exemplo de uma Rede Neural Artificial de 2 camadas com 2 entradas e 2 saídas.	28
3.5	Rede neural totalmente recorrente.	29
3.6	Rede neural parcialmente recorrente.	30
3.7	Rede neural simples.	30
3.8	Estrutura de uma LSTM.	31
3.9	Forget Gate.	31
3.10	<i>Input Gate</i> e <i>Input Modulation Gate</i>	32
3.11	Atualização da célula de memória.	32
3.12	Saída final.	33
3.13	<i>Fronteira Eficiente</i>	36
3.14	<i>Função de utilidade</i>	38
4.1	Fluxograma descritivo das etapas necessárias para construção do projeto.	40
4.2	Arquitetura da rede utilizada.	44
4.3	Efeito do aumento do número de épocas nas previsões.	45
4.4	Ação executada quando o valor da ação predito para o próximo dia é maior que o atual e a ação não está em carteira.	46
4.5	Ação executada quando o valor da ação predito para o próximo dia é maior que o atual e a ação está em carteira.	47
4.6	Ação executada quando o valor da ação predito para o próximo dia é menor que o atual e a ação está em carteira.	47
4.7	Ação executada quando o valor da ação predito para o próximo dia é menor que o atual e a ação não está em carteira.	48
4.8	RMH como <i>input</i> dos otimizadores de portfólio.	49
4.9	Modelo preditivo de tendência como <i>input</i> dos otimizadores de portfólio.	50
4.10	Modelo preditivo em <i>backtest input</i> dos otimizadores de portfólio.	50
4.11	Descrição do calculo realizado para calcular o retorno final das estratégias de compra e venda.	51
4.12	Arquitetura da estratégia final com <i>input</i> convencional para o portfólio ótimo.	52
4.13	Arquitetura da estratégia final com <i>input</i> de modelagem para o portfólio ótimo.	52

5.1	Retornos mensais da estratégia de otimização usando sharpe, considerando os retornos esperados com RMH, RP, RMB e dois <i>benchmarks</i> , IBOVESPA e IPCA.	56
5.2	Retornos mensais da estratégia de otimização usando utilidade quadrática, considerando os retornos esperados com RMH, RP, RMB e dois <i>benchmarks</i> , IBOVESPA e IPCA.	62
5.3	Retornos mensais da estratégia de otimização usando a minimização da variância, comparado a dois <i>benchmarks</i> , IBOVESPA e IPCA.	66

Lista de Tabelas

3.1	<i>Heikin-Ashi</i> e a Tendência - Cinco Cenários	25
5.1	Resultados das estratégias de predição do retorno esperado	54
5.2	Resultados dos portfólios que maximizam Sharpe, considerando os retornos esperados com RMH, RP, RMB e dois <i>benchmarks</i> , IBOVESPA e IPCA	55
5.3	Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RP em 2021	56
5.4	Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RP em 2022	57
5.5	Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RMH em 2021	58
5.6	Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RMH em 2022	58
5.7	Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RMB em 2021	59
5.8	Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RMB em 2022	60
5.9	Resultados dos portfólios que maximizam a utilidade quadrática, considerando os retornos esperados com RMH, RP, RMB e dois <i>benchmarks</i> , IBOVESPA e IPCA.	61
5.10	Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RP em 2021	62
5.11	Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RP em 2022	63
5.12	Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RMH em 2021	63
5.13	Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RMH em 2022	63
5.14	Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RMB em 2021	64
5.15	Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RMB em 2022	64
5.16	Resultados do portfólio que minimiza a variância, comparado a dois <i>benchmarks</i> , IBOVESPA e IPCA	65
5.17	Alocação mensal do portfólio otimizado com minimização da variância em 2021	66
5.18	Alocação mensal do portfólio otimizado com minimização da variância em 2022	67
5.19	Resultado consolidado de todas as estratégias de otimização com os retornos esperados	68
5.20	Resultado das operações de compra e venda na carteira otimizada com Utilidade Quadrática	70
5.21	Resultado das operações de compra e venda na carteira otimizada com Sharpe	71
5.22	Resultado das operações de compra e venda na carteira otimizada com Minimização da variância	72
5.23	Resultado consolidado das operações de compra e venda em todas as estratégias de otimização com os retornos esperados	73

Sumário

1	Introdução	12
1.1	Motivação	12
1.2	Objetivos	14
	Objetivo geral	14
	Objetivo específicos	14
1.3	Contribuições esperadas	15
1.4	Organização do texto	15
2	Trabalhos relacionados	17
3	Fundamentação teórica	20
3.1	Bolsa de valores	20
3.2	Séries remporais	22
3.3	<i>Candlestick</i>	23
3.4	<i>Heikin-Ashi</i>	24
3.5	Redes neurais artificiais	26
	Redes neurais recorrentes	28
	<i>LSTM networks</i>	29
3.6	Otimização de portfólio	33
	Retorno esperado	34
	Variância e desvio padrão	34
	Covariância	34
	Teorema de markowitz	35
	Fronteira eficiente	36
	Sharpe ratio	37
	Minimização global da variância	37
	Função de utilidade	38
	Utilidade quadrática	39
4	Metodologia e desenvolvimento	40
4.1	Coleta e preparação de dados	41
4.2	Retorno esperado	42
	Retorno médio histórico (RMH)	42
	Modelagem preditiva	42

Arquitetura da LSTM	43
Previsão de tendência	45
Estratégia de operações diárias	46
4.3 Otimização de portfólio	48
4.4 Operações em portfólios ótimos	50
4.5 Análise dos resultados	51
5 Resultados e análise	53
5.1 Predição do retorno esperado	53
5.2 Carteiras otimizadas	54
Sharpe ratio	54
Utilidade quadrática	60
Minimização da variância	64
Discussão de resultados	67
5.3 Operação em carteiras ótimas	69
Utilidade quadrática	69
Sharpe	70
Minimização da variância	71
Discussão de resultados	72
6 Conclusão	74
6.1 Trabalhos futuros	76
Referências Bibliográficas	77

Capítulo 1

Introdução

Esse capítulo tem o propósito de contextualizar sobre o tema do projeto, apresentar sua relevância e descrever seus objetivos.

1.1 Motivação

Em um cenário econômico onde a rentabilidade dos investimentos tradicionais tais como poupança, Certificados de Depósito Bancário (CDB) e fundos de investimento é, muitas das vezes, menor do que a inflação do mesmo período, investir na bolsa de valores tem-se tornado uma opção atraente. Dessa forma, buscando um maior retorno nos investimentos, a bolsa de valores vem despertando, cada vez mais, o interesse dos pesquisadores por ser, além de um ambiente de incertezas, um ambiente que não pode ser modelado matematicamente [KRISTENSEN et al., 2009].

Nos últimos anos, o número de ações compradas e vendidas cresceu de maneira vertiginosa. Em 2020, por exemplo, o volume de transações na bolsa de valores apresentou um aumento superior a 33%, com uma previsão de crescimento, ainda maior, nos anos que se seguem. Sendo assim, esse cenário tem chamado a atenção de especialistas tanto na construção de um portfólio de ações que garanta rendimento positivo, mesmo em períodos de instabilidade, quanto na previsão de riscos futuros, que possam servir de alerta aos investidores [Neira & Filgueiras, 2020].

A B3 possui uma ferramenta online que possibilita ao investidor, por meio dos sites das corretoras, transmitir ordens de compra ou venda diretamente ao sistema de negociação. Apesar dessa ferramenta ajudar os investidores na movimentação de ações, é necessário o conhecimento de técnicas, análises e estudos que possam os auxiliar na construção de um bom portfólio de ações.

Existem muitas maneiras de representar um ativo e analisá-lo para criar um bom portfólio. A análise do gráfico de vela (*candlestick*), por exemplo, é uma das mais importantes técnicas utilizadas no mercado financeiro pelos analistas. Este gráfico, se particionado em um

determinado número de observações, apresenta padrões que podem ser utilizados para definir o comportamento futuro do ativo. As observações, podem ser vistas como 'lotes' que estão em um mesmo espaço de tempo t e possuem um conjunto de atributos relacionados a variação do preço. Essas características mostram que o comportamento de um ativo pode ser descrito por uma série temporal discreta [M. Pinheiro & F. S. Gomes, 2008].

Apesar da possibilidade de previsão de comportamento a partir das análises de candle, há um debate constante sobre a previsão de mudanças nos preços das ações devido à complexidade e dinamismo inatos de fazer previsões de séries temporais no mercado financeiro. Os métodos tradicionais de análise técnicas e fundamentalistas não são capazes de absorver as relações não lineares entre as variáveis que compõem o preço de uma ação, levando à necessidade de técnicas mais avançadas [DE MOURA, 2006].

Métodos de aprendizado de máquina tem se tornado um tópico de frequente de pesquisa nos últimos anos devido às suas aplicações comerciais aos altos riscos e ao desejo de automatizar as negociações com lucratividade. Redes Neurais Recorrentes são ferramentas poderosas para modelagem sequências. Eles são flexivelmente extensíveis e podem incorporar vários tipos de informação, incluindo ordem temporal. Essas propriedades os tornam adequados para gerar recomendações [Donkers et al., 2017].

Ao contrário dos modelos estatísticos tradicionais, as RNNS são modelos não paramétricos, orientados a dados, tolerantes a ruídos e capazes de aprender relacionamentos complexos a partir de dados incompletos ou corrompidos. Portanto, são ferramentas poderosas para descrever a dinâmica complexa presente nas séries financeiras.

Dentre os inúmeros modelos de RNNs, a Long Short-Term Memory (LSTM) tem se destacado. A LSTM foi desenvolvida para estimar, prever e classificar séries temporais mesmo quando há um grande intervalo entre eventos cruciais. Além disso, essa rede pode memorizar dados mesmo quando há um grande gap entre a ocorrência de eventos e apresenta diversas vantagens em relação as redes neurais de múltiplas camadas como, generalização, tratamento de ruído e menor complexidade na atualização de peso e intervalo de tempo [Chen et al., 2015].

Apesar dos resultados lucrativos apresentados em diversos estudos utilizando LSTM, os melhores resultados podem estar associados a ativos de maior previsibilidade pela rede utilizada ou a cenários positivos em que a ação também seria lucrativa com uma estratégia de compra e manutenção. Partindo dessa premissa, escolher a ação certa para alimentar o modelo aumentaria as chances de lucro.

Para montar um portfólio lucrativo de ações, os pesquisadores comumente recorrem a métodos de otimização de portfólio. Tais métodos possuem como objetivo escolher ações otimizando critérios como, por exemplo, a minimização de risco, maximização de retorno, maximização da utilidade quadrática, maximização do Sharpe ou outros indicadores que são escolhidos de acordo com o perfil do investidor.

Sabendo disso, uma forma de entrelaçar modelos preditores e de otimização de portfólio é utilizar o otimizador como seletor de ações para uma rede neural recorrente com uma

estratégia de compra e venda dentro do portfólio.

Portfólios de ações que com funções objetivo que maximizam a Utilidade Quadrática e o Sharpe, recebem como entrada os lucros esperados para o próximo intervalo de tempo e o risco que é referente a variância do ativo em análise. O lucro esperado pode ser obtido usando diversas técnicas como a predição da tendência do próximo mês ou a análises de dados do passado de cada ativo, neste trabalho, foi proposto utilizar tanto uma predição de tendência realizada por um modelo preditivo quanto a média da performance do algoritmo preditivo realizando operações de compra e venda diárias nos últimos seis meses do ativo.

Com o melhor portfólio de ações em mãos, o trabalho propõe operações em cada ativo de maneira individual. Um fato observado por diversos pesquisadores durante a negociação de ações é a alta frequência com que os modelos vendem e compram ativos, não acompanhando as tendências das séries analisadas. Para evitar isso, os dados usados para treinar o modelo foram alterados com a técnica de Heikin-Ashi que elimina ruídos nos dados deixando-os com a tendência mais bem definida e evitando compras geradas por aprendizado em oscilações ruidosas.

1.2 Objetivos

Objetivo geral

Este trabalho teve como objetivo geral a criação de um sistema inteligente, que constrói portfólios ótimos usando a saída de redes neurais como retorno esperado e realiza operações de compra e venda nos portfólios selecionados de acordo com valor predito da ação no próximo dia.

Objetivo específicos

1. Coletar dados da bolsa de valores.
2. Desenvolver algoritmos de otimização de portfólio.
3. Desenvolver estratégias para construir o retorno esperado baseado em redes neurais

Desenvolver uma rede neural recorrente capaz de prever o preço da ação para o próximo dia e utilizar a performance em backtest do algoritmo preditivo diário como retorno esperado de otimizadores de portfólio

Desenvolver uma rede neural recorrente capaz de prever o preço da ação para o próximo mês. *backtest* e a precisão de tendência do próximo mês como lucro esperado na entrada do otimizador e utilizar a saída do algoritmo preditivo mensal como retorno esperado de otimizadores de portfólio.

4. Realizar operações de compra e venda nos portfólios otimizados, rebalanceando-os todo mês.
5. Comparar as estratégias construídas tanto com portfólios ótimos em *buy and hold* quanto com operações nos portfólios.

1.3 Contribuições esperadas

A contribuição efetiva desse trabalho está na construção de estratégias de investimento que combinam modelagens preditivas, otimizadores e técnicas de tratamento de dados muito conhecidas na literatura. Combinar modelagens para montar uma estratégia robusta de investimento significa aproveitar e usar estudos e algoritmos de maneira inteligente e criativa em busca de eficiência e retorno.

Espera-se que as arquiteturas criadas e estratégias desenvolvidas contribuam para o crescimento da área de Robôs de Investimento (*Algorithmic trading*), servindo como base e incentivo para novas pesquisas que combinam otimização de portfólio e modelagens preditivas.

1.4 Organização do texto

A dissertação está organizada em 5 capítulos. O primeiro capítulo fez uma contextualização dos temas presentes no trabalho, da importância da pesquisa e dos objetivos da dissertação. No segundo capítulo são introduzidos os Trabalhos Relacionados, apresentando a literatura que fundamenta esse trabalho; em seguida, o capítulo de Metodologia e Desenvolvimento, descreve quais etapas guiam a pesquisa com detalhes das práticas; posteriormente, no capítulo 4,

são apresentadas análises quantitativas da aplicação da modelagem e seus resultados, e por fim, a no último capítulo, a Conclusão.

Capítulo 2

Trabalhos relacionados

Paralelamente ao crescente interesse pela bolsa de valores houve, também, um considerável aumento das pesquisas relacionadas ao mercado financeiro com o intuito de encontrar padrões nos ativos comercializados que pudessem auxiliar de maneira adequada os investidores. Para este fim, o emprego de séries temporais na análise do comportamento do mercado, bem como na identificação dos melhores momentos de negociação, tem crescido de maneira significativa.

Bedo et al. [2013] propuseram uma estratégia de representação que tenta prever o comportamento dos valores das ações a cada sexta-feira. Para realizar esta representação foram usadas duas estratégias. Na primeira, o autor utilizou diversos classificadores (Rede Neural Artificial, *k-nearest neighbors algorithm* (kNN), Árvore de decisão, entre outros) com objetivo de se obter uma resposta booleana, dizendo se ação tem tendência de alta ou não. A segunda estratégia, por sua vez, recupera do banco de dados as semanas mais parecidas com a atual e utiliza os resultados anteriores na previsão dos valores das ações no momento atual. Os melhores resultados obtidos foram utilizando a primeira estratégia e a melhor acurácia média obtida foi sobre o índice *Dow Jones I A*, com 81% de acerto das previsões. Em contrapartida, sobre o índice *Shangai S E* o método obteve somente 61% de acurácia.

Seguindo a linha de previsões, o trabalho desenvolvido por Quintão Paiva [2014] propõe um método para previsão da tendência de um ativo, analisando a influência de indicadores e dados sociais no comportamento de uma ação e do mercado. Para realizar a previsão, foram criadas diferentes redes neurais e utilizados três ativos (ITUB4, VALE5 e CMIG4), além do BOVA11. Para medir a eficácia do método, foi utilizado a *Weighted F-Measure*. Todos os ativos testados nesse trabalho alcançaram, em pelo menos um mês, um valor de *Weighted F-Measure* acima de 0,8, garantindo assim, segundo o autor, um resultado satisfatório.

Trazendo para um contexto parecido com o abordado por esse trabalho, Obeidat et al. [2018] apresentaram uma abordagem baseada em rede neural para recomendações de alocação adaptativa de ativos. Ele combinou LSTM e modelos de otimização de portfólio com dados sobre preços históricos, dados macroeconômicos e indicadores de mercado. O LSTM produz o retorno esperado e é usado como entrada para o modelo de portfólio, alcançando um lucro médio de 10 % por ano durante 6 anos.

Qiyuan [2016] utilizou a LSTM para prever o comportamento de ativos, examinando o desempenho do algoritmo para diferentes configurações, como por exemplo, o número de

neurônios na camada escondida e o número de amostras em sequência. Ao todo foram analisadas cinco indústrias, alcançando uma acurácia média de 54,83% na previsão dos melhores ativos. Os resultados obtidos por um simulador de compra e venda, com um investimento inicial igual a \$6,000,000, foi de \$411,233.33 de lucro, após 400 horas de análise.

Nessa linha de trabalhos, Di Persio & Honchar [2016] comparam três diferentes redes neurais, um *perceptron* de multicamadas, uma rede neural convolucional e a LSTM, para previsão de valores de ativos do índice SP500. Os resultados obtidos no trabalho indicaram que a rede neural convolucional teve um desempenho melhor quando comparado aos outros métodos, conseguindo uma acurácia média de 54%. A LSTM e o *perceptron* de multicamadas, por sua vez, conseguiram uma acurácia de 52%.

Akita et al. [2016] propuseram uma união entre um modelo de predição LSTM e uma avaliação de linguagem natural feita em jornais na identificação de informações sobre um ativo. Resumidamente, o trabalho realiza um estudo da correlação entre 2 empresas, identificando o quanto um evento como "Nissan tem um *recall*" pode interferir no preço da ação da Toyota. Testes foram realizados em 10 empresas, nas quais, as informações obtidas sobre cada uma delas foram utilizadas na previsão dos ativos das outras companhias. A rede LSTM, nesse trabalho, foi capaz de obter lucro em todas as empresas.

Utilizando a LSTM, Nelson et al. [2017] tentaram prever comportamentos futuros de ações utilizando histórico de preço e análises técnicas de indicadores. Para isso, foi criado um modelo de predição e foram feitos vários experimentos utilizando quatro empresas: BOVA11, BBDC4, CIEL3, ITUB4 e PETR4. Os resultados obtidos foram comparados a diferentes métodos de *Machine Learning* e estratégias de investimento. De acordo com os autores, os resultados foram promissores, atingindo uma acurácia média de 55,9% na previsão do aumento ou decréscimo do valor de uma ação em particular.

Com intuito de reconhecer um vocabulário em larga escala a partir da fala, Sak et al. [2014] utilizaram duas arquiteturas diferentes de LSTM. A primeira introduz uma camada de projeção recorrente entre o LSTM e a camada de saída, enquanto a outra arquitetura introduz uma camada não recorrente optando-se, nesse caso, por aumentar o tamanho da camada de projeção. Ambas as arquiteturas melhoraram a performance da LSTM atingindo uma acurácia de até 75% e mostraram que essa alternativa é melhor do que utilizar *Deep Neural Networks* (DNNs). Além disso, o autor mostrou que em uma única máquina *multi-core*, a LSTM não apresentou uma escalabilidade adequada para grandes redes.

Nos trabalhos citados, modelos de redes neurais recorrentes, como LSTM, obtiveram resultados acima dos modelos clássicos para modelagem de problemas sequenciais como o mercado financeiro. O trabalho atual inspira-se na combinação apresentada por Obeidat et al. [2018] que tem como proposta analisar a junção das modelagens de otimização e da modelagem preditiva e que obteve resultados positivos em um vasto período de análise.

Alguns fatores diferenciam o trabalho atual do apresentado, como, a utilização de pré-processamento dos dados com *Heikin-Ashi*, e o uso da modelagem preditiva em diferentes mo-

mentos da construção da estratégia de investimento, para o retorno esperado de entrada do otimizador e para operação nos portfólios ótimos construídos. Além disso, em uma das soluções propostas o retorno esperado é construído com o *backtest* de uma estratégia de compra e venda otimizar um portfólio baseado na estratégia de operação proposta para o momento posterior a definição da carteira.

Capítulo 3

Fundamentação teórica

Neste capítulo são discutidos conceitos fundamentais para o melhor entendimento deste trabalho. A primeira seção descreve a bolsa de valores de uma maneira geral, elucidando fatores de compra e venda, além de fatores que influenciam na tomada de decisão de um investidor. A segunda seção explica de maneira sucinta o conceito de séries temporais. A terceira seção descreve os conceitos básicos de *candles*, bem como seus padrões. Seguindo esse pensamento, a quarta seção apresenta a técnica *Heikin-Ashi*, que representa uma forma diferente de gerar e visualizar os *candles*. A quinta seção, introduz o conceito de Redes Neurais Artificiais, descrevendo suas variações e abordando os conceitos de um tipo específico denominado *Long Short Term Memory* (LSTM). A última seção, por sua vez, detalha os conceitos de otimização de portfólio em conjunto com os objetivos das funções otimizadas no desenvolvimento do trabalho.

3.1 Bolsa de valores

A bolsa de valores é um mercado onde, investidores e empresas, vendem e compram títulos e ações. Uma ação é um título negociável no qual representa uma fração mínima do capital social de uma empresa de capital aberto, ou seja, de uma empresa do tipo S.A. (Sociedade Anônima) [C. Piazza, 2008].

Lançar ações na bolsa de valores pode ser uma alternativa para que uma empresa possa arrecadar capital e investir em crescimento, infraestrutura e modernização. Cada comprador de uma ação referente a uma empresa se torna um sócio dela. Dessa forma, o lucro da empresa pode ser repassado aos acionistas sob a forma de dividendos ou sob a forma de valorização no preço de negociação das ações [C. Piazza, 2008].

Ao investir em ações, o comprador troca dinheiro por ações de uma determinada empresa, podendo vendê-las a qualquer momento. A diferença entre o valor de compra e de venda representa o lucro ou prejuízo desta operação:

$$(PV - PC)NL = Lucro, \quad (3.1)$$

em que NL é o número de ações, PV é o preço da venda da ação e PC é o preço da compra. C. Piazza [2008].

Dois tipos de análise são muito utilizados por investidores para decidir qual é a melhor hora de comprar ou vender uma ação, sendo elas, a Análise Técnica e a Análise Fundamentalista.

A visão Fundamentalista estuda os fatores macro e microeconômicos que influenciam no equilíbrio entre a oferta e a demanda do mercado. Essa análise é mais voltada para a questão qualitativa da empresa e é baseada em três pilares: análise geral da empresa; indústria ou mercado na qual está inserido; e os indicadores econômicos [Tucci Chaves, 2004].

Alguns fatores como a relação preço/lucro, o lucro líquido, o grau de endividamento, o patrimônio líquido e uma possível fusão de uma empresa, podem ser utilizados para dar o diagnóstico sobre a saúde financeira de uma empresa. Esse diagnóstico, aliado aos indicadores econômicos e ao cenário do mercado no qual a empresa está inserida, são utilizados como ferramenta para os investidores que optam pela análise fundamentalista [Tucci Chaves, 2004].

Por outro lado, a Análise Técnica foca na compreensão e análise do comportamento histórico dos preços e volumes dos ativos no passado para realizar a previsão do comportamento de uma ação no futuro. Analistas técnicos podem se basear no comportamento gráfico dos preços ao longo do tempo, bem como podem fazer uso de ferramentas estatísticas para aplicação da análise [Tucci Chaves, 2004].

Até 1999, ações eram negociadas somente por intermédio de uma corretora, que ficava responsável pela administração do portfólio do investidor. Sendo assim, o investidor tinha que ligar para uma corretora associada que funcionava como intermediária na compra das ações. Com a popularização da internet e a necessidade de tornar a negociação de ações mais prática e viável, a Bovespa criou o *Home Broker*. O *Home Broker*, é um sistema de negociação eletrônica de ações que permite a compra e venda de um ativo diretamente do IBOVESPA ou por meio do *website* de uma corretora. Com isso, o investimento ficou mais rápido e prático, permitindo que pequenos investidores entrassem no mercado acionário, fato raro antigamente [M. Pinheiro & F. S. Gomes, 2008].

Com o *Home Broker*, além da comodidade e do conforto, o investidor pode acompanhar as ações em tempo real e ter acesso diretamente aos índices do mercado. Os índices, são medidas que podem mostrar ou indicar um determinado comportamento do mercado, possibilitando um aumento na lucratividade do investidor [M. Pinheiro & F. S. Gomes, 2008]. Um dos principais índices utilizados é o IBOVESPA, índice da Bolsa de valores de São Paulo que mede a lucratividade de uma carteira hipotética. Este indicador permite ao investidor calcular o rendimento que teria se possuísse as ações mais negociadas, seguras e rentáveis para investir no momento [C. Piazza, 2008].

Quando estamos tratando de um período longo, podemos esbarrar em uma grande quantidade de dados que, ao serem observados de forma ordenada, seguem um parâmetro de tempo

t para definir seus intervalos, caracterizando uma série temporal.

3.2 Séries temporais

Uma série temporal pode ser definida como um conjunto de observações que estão ordenadas segundo um parâmetro de tempo e que possuem dependência serial. Um dos objetivos do estudo de séries temporais é analisar e modelar essa dependência [I. S. Silva et al., 2008].

Séries temporais podem ser classificadas como discretas, contínuas, determinísticas, estocásticas, multivariadas e multidimensionais. A representação das séries utilizando a abordagem de componentes não observáveis, é a combinação de quatro componentes [Mendenhall et al., 1993]:

- Sazonal;
- Cíclica;
- Tendência;
- Erro.

Uma série temporal é dita sazonal se seu comportamento é influenciado por fatores sazonais e ele tende a se repetir a cada s períodos de tempo. Um exemplo clássico de sazonalidade é a de vendas mensais de brinquedos, que tem um pico no mês de dezembro e possivelmente um pico secundário em outubro [Hindman, 2011].

É muito comum que as pessoas confundam o comportamento sazonal com o comportamento cíclico, porém eles são bem diferentes. Uma série é cíclica se seus dados possuem quedas e picos que não são fixos a um determinado período e nem a algum aspecto do calendário. Geralmente, efeitos cíclicos em uma série temporal são causados por mudanças na demanda do produto, por ciclos de negócios e, em particular, pela incapacidade de se suprir as necessidades do consumidor [Hindman, 2011].

De modo geral, uma série temporal pode exibir tendências de crescimento ou decréscimo a longo prazo. Essa tendência pode ter diversos padrões de alteração, podendo crescer ou decrescer de forma exponencial, linear ou amortecida. O aumento constante da população, do produto interno bruto ou variações graduais e regulares ao longo do tempo, entre outros fatores, são causas comuns das tendências nas séries temporais [S. EHLERS, 2009].

Componentes de erros que apresentam variações ascendentes ou descendentes após a ocorrência de um efeito de tendência, um efeito cíclico, ou um efeito sazonal, podem aparecer.

Eventos políticos e oscilações climáticas podem gerar flutuações de curto prazo com deslocamento fora do padrão, caracterizando a componente de erro.

As séries temporais também podem ser classificadas como estacionárias ou ergódicas quando estamos tratando da variabilidade das observações. Em uma série temporal estacionária, as estatísticas não são afetadas por variações no tempo. Por outro lado, na série considerada ergódica, apenas a realização do processo estocástico é suficiente para se obter todas as estatísticas dele [MORETTIN & TOLOI, 2006].

Os dados que compõe uma série temporal na bolsa de valores, quando analisados separadamente em uma granularidade diária ou específica, possuem um conjunto de informações que podem ser observadas por meio de um *candlestick*.

3.3 *Candlestick*

No século XVII um comerciante japonês de arroz chamado Munehisa Honma desenvolveu um método de Análise Técnica para analisar o preço do arroz conhecida como *candlestick* (gráfico de vela). Este gráfico mostra preços de abertura, de máximo, de mínimo e de fechamento em um formato parecido com os gráficos de hoje, porém de uma maneira que atenua a relação entre os preços de abertura e fechamento [DINH THI, 2006].

Para criar um gráfico de velas, é necessário ter um conjunto de dados que contenha a abertura, o fechamento e os valores de máximo e mínimo para cada período de tempo que se deseja mostrar [DINH THI, 2006].

Na Figura 3.1, a parte chamada de corpo real representa o intervalo entre a seção de abertura e a de fechamento. É possível observar que o gráfico à esquerda da imagem tem o corpo real branco. Isso significa que o valor de abertura foi menor do que o de fechamento. De forma análogo, pode-se observar que gráfico à direita da Figura 1 tem um corpo real preto, indicando um valor de fechamento menor do que o de abertura [DINH THI, 2006].

As linhas finas abaixo do corpo real representam as sombras, que podem ser de dois tipos: sombra inferior e sombra superior. A parte de baixo da sombra inferior representa o valor de mínimo enquanto o pico da sombra superior representa o valor de máximo. Para os japoneses o corpo real é considerado a parte essencial da oscilação do preço e as sombras são consideradas flutuações fora do padrão [DINH THI, 2006].

Identificar tendências em um gráfico de vela padrão pode ser uma tarefa difícil. A dificuldade é dada pela grande variação de *candles* de alta e baixa independentemente da tendência

Figura 3.1: Interpretação do gráfico de velas.

Fonte: [Análise técnica no turfe: Análise Gráfica de velas japonesas, 2014]

final de um período maior. Uma maneira de reduzir os *candles* contrários a tendência no período e obter uma melhor visualização dos dados é utilizando a técnica do *Heikin-Ashi*.

3.4 *Heikin-Ashi*

Heikin-Ashi, em que *Heikin* significa média ou equilíbrio e *Ashi* significa perna ou a barra do preço, é uma técnica que elimina irregularidades do gráfico normal, oferecendo uma melhor visualização de tendências e consolidações [Valcu, 2004].

Esse método utiliza valores modificados de abertura, fechamento, máximo e mínimo e a partir deles gera um novo gráfico de vela no qual é possível observar o status do mercado, bem como sua força. Os valores modificados são obtidos a partir das seguintes operações [Valcu, 2004]:

$$HA_{Fechamento} = (Abertura + Fechamento + Minimo + Maximo) / 4 \quad (3.2)$$

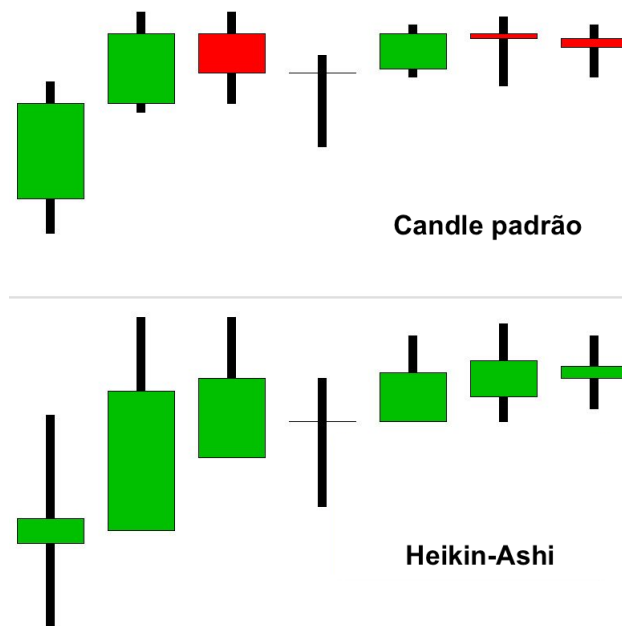
$$HA_{Abertura} = (HA_{Abertura}(Anterior) + HA_{Fechamento}(Anterior)) / 2 \quad (3.3)$$

$$HA_{Maximo} = Maior(Maximo, HA_{Abertura}, HA_{Fechamento}) \quad (3.4)$$

$$HA_{M\u00ednimo} = Menor(Minimo, HA_{Abertura}, HA_{Fechamento}) \quad (3.5)$$

Os valores de Abertura, Fechamento, M\u00e1ximo e M\u00ednimo s\u00e3o referentes ao gr\u00e1fico tradicional e o prefixo HA indica que a vari\u00e1vel \u00e9 referente ao valor modificado do *heikin-ashi*.

Figura 3.2: Gr\u00e1fico de compara\u00e7\u00e3o, *Heikin-Ashi* vs *Candle* padr\u00e3o.



Fonte: [*Heiken Ashi Strategies: It works. Sometimes.*, n.d.]

A Figura 3.2 mostra uma compara\u00e7\u00e3o entre um gr\u00e1fico com e sem *Heikin-Ashi* durante um per\u00edodo de sete dias. \u00c9 poss\u00edvel observar que a tend\u00eancia \u00e9 de alta e que o gr\u00e1fico que utiliza o *Heikin-Ashi* tende a eliminar os *candles* de tend\u00eancia contr\u00e1ria, facilitando a interpreta\u00e7\u00e3o gr\u00e1fica. A Tabela 3.1 resume as fases de uma tend\u00eancia e seus respectivos padr\u00f5es [Valcu, 2004].

Tabela 3.1: *Heikin-Ashi* e a Tend\u00eancia - Cinco Cen\u00e1rios

Tipo	Alta	Baixa
normal	corpos de alta	corpos de baixa
forte	corpos de alta maiores sem sombra inferior	corpos de baixa maiores sem sombras superiores
fraca	corpos menores, sombras inferiores	corpos menores, sombras superiores
consolida\u00e7\u00e3o	corpos menores com sombra inferior e superior	corpos menores com sombra inferior e superior
Mudan\u00e7a de tend\u00eancia	corpos pequenos com sobras longas	corpos pequenos com sobras longas

Seguindo com a análise, é possível destacar algumas características que permitem ter uma melhor interpretação da informação transmitida. Em gráficos tradicionais, é comum observar muitas oscilações e, mesmo que o local em análise tenha uma tendência de alta ou baixa, é também normal a identificação de *candles* contrários a tendência. No *Heikin-Ashi*, essas oscilações são contidas explicitando-se as tendências em um gráfico mais compacto, mostrando, de forma clara, a tendência do local [Valcu, 2004].

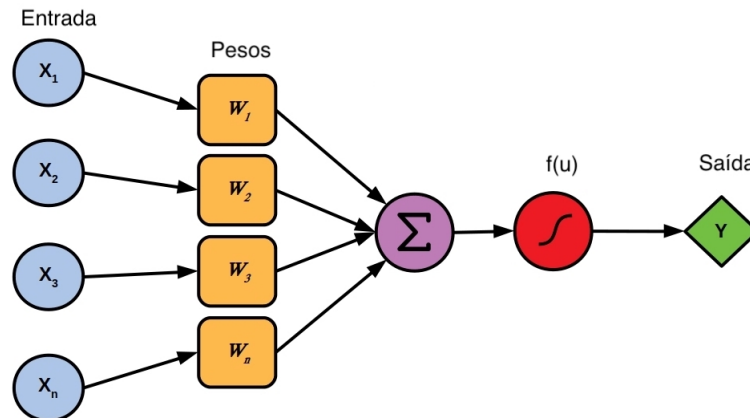
3.5 Redes neurais artificiais

Os primeiros estudos sobre Redes Neurais Artificiais (RNA) surgiram com McCulloch e Pitts em 1943 quando os mesmos propuseram a construção de uma máquina baseada no cérebro humano. Anos mais tarde, ROSENBLATT [1958] conseguiu desenvolver o primeiro neurônio, o perceptron, que apresentava capacidade de treinamento. O primeiro neuro computador, no entanto, só foi desenvolvido em 1967 por MINSKY [1967].

De acordo com Haykin [2009], uma rede neural é um processador paralelo massivamente distribuído feito a partir de unidades de processamento simples com capacidade natural de armazenar conhecimento experimental e torná-lo disponível para uso. As semelhanças com o cérebro humano são dadas por dois aspectos: o conhecimento é adquirido através do processo de aprendizado e os pesos sinápticos são utilizados para armazenar tal conhecimento.

Uma RNA é formada por neurônios artificiais que são unidades de processamento conectadas por canais de comunicação associados a um determinado peso e a um conjunto de treinamento. Os neurônios fazem operações sobre os dados de entrada recebidos pelas conexões, sendo essas interações entre as unidades de processamento das redes responsáveis pelo comportamento inteligente de uma RNA [FERNANDES, 2003].

Figura 3.3: Perceptron.

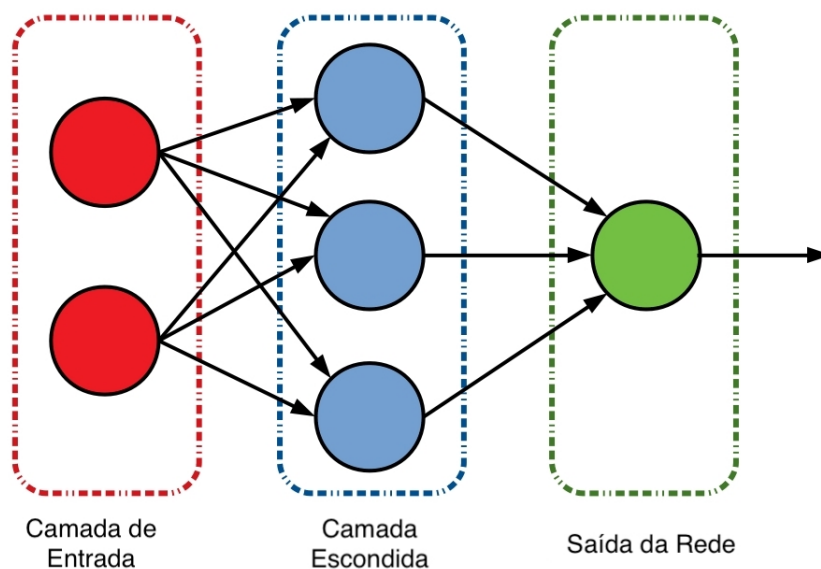


Fonte: Adaptado de [Gewalt, 2020]

A Figura 3.3 mostra o exemplo de um neurônio artificial com entradas iguais a X_1 , X_2 , ..., X_n , bem como os pesos sinápticos W_i atribuídos a cada uma das entradas. A saída linear u é gerada a partir da soma das entradas X_i ponderadas pelos pesos W_i que ao passar por uma função de ativação $f(u)$ gera a saída do neurônio.

A rede neural mais simples é constituída por uma camada de entrada que representam as entradas da rede e apenas uma camada de neurônios de saída. Já as redes neurais de múltiplas camadas ou MLP (*multilayer perceptron*) são constituídas, como o nome sugere, por uma camada de entrada que representam as entradas da rede, camadas escondidas e uma camada de saída (Figura 3.4). Essas redes possuem como vantagem principal a capacidade de aproximação de funções não lineares [Di Persio & Honchar, 2016].

Figura 3.4: Exemplo de uma Rede Neural Artificial de 2 camadas com 2 entradas e 2 saídas.

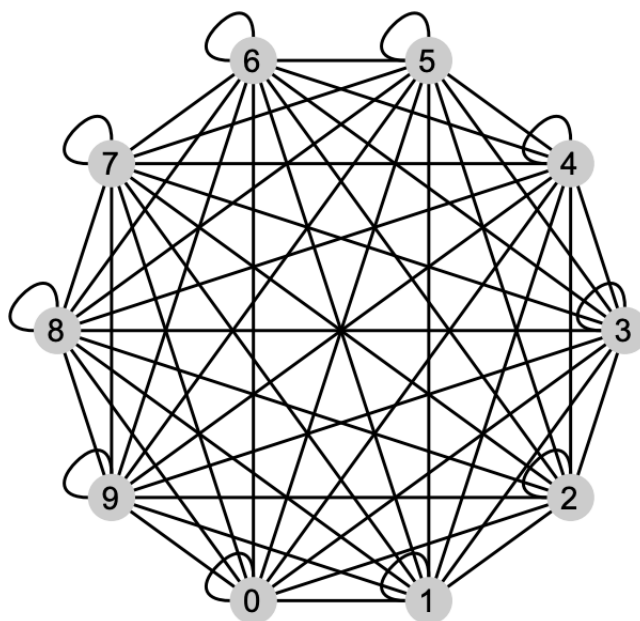


Fonte: Adaptado de [Gewalt, 2020]

Redes neurais recorrentes

Redes neurais recorrentes (RNN) foram muito estudadas na década de 90 e tem como seu maior propósito lidar com processos em que os padrões são tanto sequenciais quanto dinâmicos. Uma RNN é uma rede neural em que uma unidade qualquer de processamento pode realimentar qualquer outra unidade. Uma variação desse modelo são as redes neurais parcialmente recorrentes em que as conexões são divididas entre conexões diretas e de realimentação [Medsker & Jain, 2001].

Na Figura 3.5 podemos observar uma rede neural totalmente recorrente na qual cada neurônio recebe como entrada a saída de cada um dos neurônios.

Figura 3.5: Rede neural totalmente recorrente.

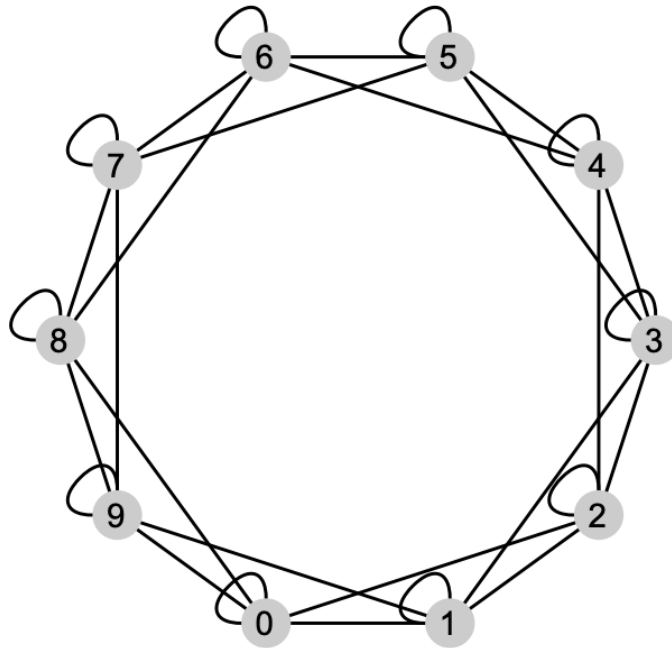
Fonte: [Keirsbilck et al., 2019]

A rede neural parcialmente recorrente apresentada na Figura 3.6 apresenta uma arquitetura parecida a mostrada na Figura 3.5. No entanto, nessa arquitetura, somente alguns neurônios possuem laços de recorrência com a camada subsequente, caracterizando-se como uma rede parcialmente recorrente.

Dentre as redes neurais recorrentes, a *Long Short Term Memory* é uma das redes que vem sendo bastante estudada por utilizar memória permitindo, dessa forma, a manutenção de entradas anteriores por um longo prazo. A manutenção dessas entradas progressas é importante no processo de previsão de valores de saídas futuras.

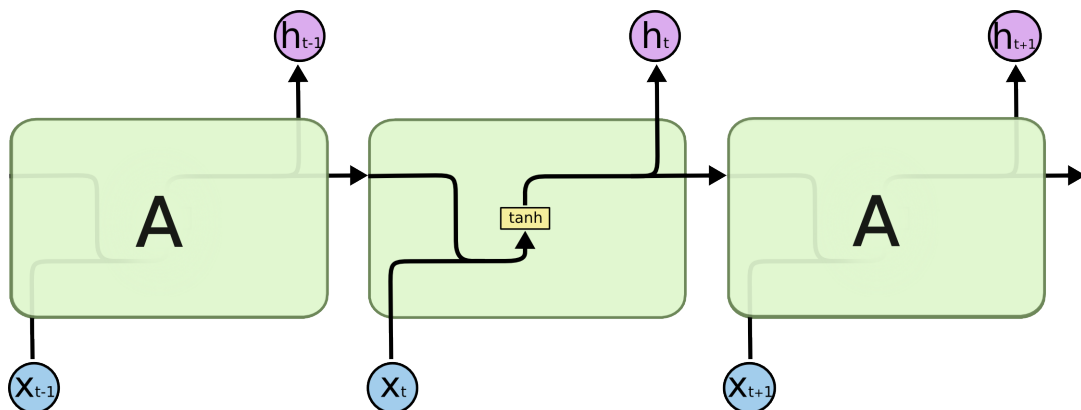
LSTM networks

A *Long Short Term Memory* é um tipo de rede neural parcialmente recorrente que foi originalmente criada por Hochreiter & Schmidhuber [1997]. Esse tipo de rede neural foi redescoberto no contexto do aprendizado profundo (*deep learning*) e é capaz de aprender dependências de longo prazo, evitando que com o tempo uma entrada importante deixe de interferir no valor de saída, um problema recorrente das redes neurais comuns. A LSTM tem como comportamento padrão o uso da memória de longo prazo e para isso utiliza uma célula que mantém salvo os dados passados que são considerados relevantes [Chen et al., 2015].

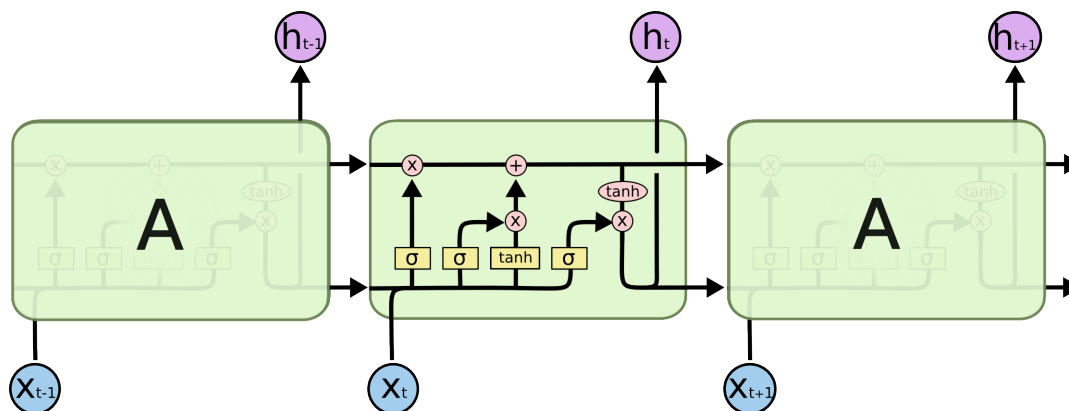
Figura 3.6: Rede neural parcialmente recorrente.

Fonte: [Keirbilck et al., 2019]

Redes neurais tradicionais são formadas por uma cadeia de módulos repetidos de estruturas simples de camada única com transformação do tipo tangente hiperbólica (Figura 3.7). LSTMs, por sua vez, também possuem essa estrutura de cadeia, porém os módulos ao invés de conterem uma única camada de rede neural, contêm quatro, que interagem entre si [Nelson et al., 2017].

Figura 3.7: Rede neural simples.

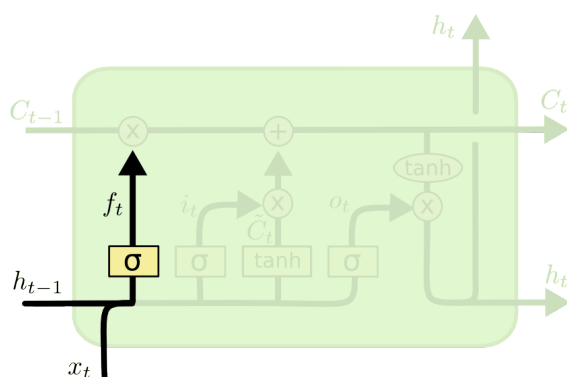
Fonte: [Olah, 2015]

Figura 3.8: Estrutura de uma LSTM.

Fonte: [Olah, 2015]

Uma rede neural LSTM é composta de células (blocos de LSTM) interligadas (Figura 3.8). Cada bloco contém três tipos de entrada: *input Gate*, *Output Gate* e *Forget Gate* que são explicitados nas Figuras 3.12 e 3.9, respectivamente. Cada uma delas, respectivamente, é responsável por implementar as funções de escrita, leitura e restabelecimento da célula de memória. Essas entradas são analógicas e geralmente utilizam uma função sigmoide de ativação. A presença dessas entradas, permite que a LSTM sofra influência de uma informação por tempo indeterminado, já que mantém dados em memória.

O primeiro passo da LSTM é decidir qual informação pode ser descartada da célula de memória. Essa decisão é feita pelo *Forget Gate* que recebe o valor da saída do bloco anterior h_{t-1} , o valor de entrada do bloco atual x_t e gera como saída um número entre 0 e 1 (em que 0 representa remover o valor e 1 manter o valor em memória) para cada entrada presente na célula de memória C_{t-1} do bloco anterior (Figura 3.9).

Figura 3.9: Forget Gate.

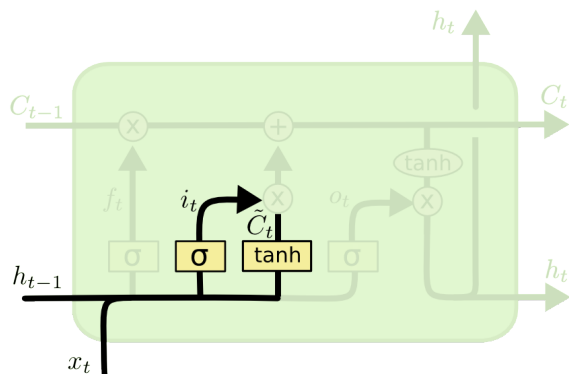
$$f_t = \sigma (W_f \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_f)$$

Fonte: [Olah, 2015]

O próximo passo é decidir se a nova informação presente na entrada x_t deve ser mantida na célula de memória. Esse processo é dividido em duas partes. Primeiramente, a camada sigmoide *input Gate* decide quais valores devem ser atualizados. Posteriormente, a camada

tangente *Input Modulation Gate* (\tilde{C}_t) cria um um vetor de novos valores candidatos a serem adicionados na célula de memória (Figura 3.13).

Figura 3.10: *Input Gate e Input Modulation Gate.*



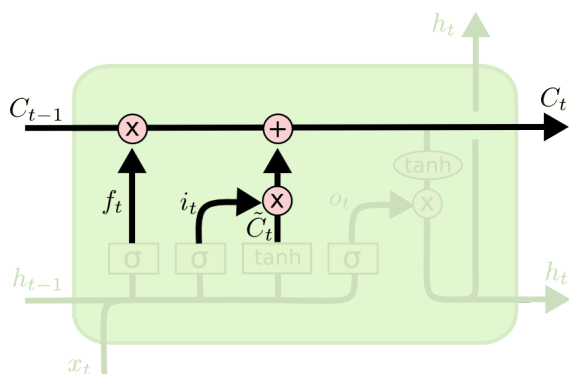
$$i_t = \sigma(W_i \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_i)$$

$$\tilde{C}_t = \tanh(W_C \cdot [h_{t-1}, x_t] + b_C)$$

Fonte: [Olah, 2015]

Agora o estado da célula de memória deve ser atualizado utilizando os passos anteriores. O antigo estado deve ser multiplicado por f_t , descartando as informações determinadas pelo *Forget Gate*. Posteriormente, os novos valores filtrados pela camada tangente $i_t * \tilde{C}_t$ são adicionados (Figura 3.11).

Figura 3.11: Atualização da célula de memória.

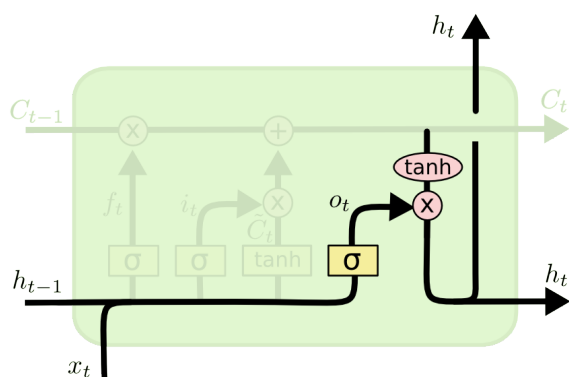


$$C_t = f_t * C_{t-1} + i_t * \tilde{C}_t$$

Fonte: [Olah, 2015]

A saída é baseada na célula de memória, porém, é uma versão filtrada da mesma. Primeiramente, a camada sigmóide *Output Gate* decide qual parte da célula de memória deve estar na saída. Então a célula de memória é normalizada utilizando uma função tangente e multiplicada pela saída do *Output Gate*, para que a saída final seja apenas o que for filtrado (Figura 3.12).

Figura 3.12: Saída final.



$$o_t = \sigma (W_o [h_{t-1}, x_t] + b_o)$$

$$h_t = o_t * \tanh (C_t)$$

Fonte: [Olah, 2015]

Em um contexto de séries temporais, principalmente em um cenário extremamente volátil como o da bolsa de valores, alguns ativos podem ter maior previsibilidade, ou seja, os padrões do sistema causal que interferem na série podem ser mais facilmente identificados por uma rede neural. Com isso, em busca de uma estratégia robusta, cada ativo pode necessitar de uma arquitetura de rede diferente e a seleção dos ativos para prever tem grande influência no resultado final.

3.6 Otimização de portfólio

O mercado financeiro, apesar dos benefícios e recompensas, é extremamente volátil e requer uma análise crítica para avaliar adequadamente os riscos relativos a seleção dos ativos que irão compor seu portfólio [Omisore et al., 2012].

Constantemente, investidores se deparam com o objetivo conflitante de minimizar riscos e, ao mesmo tempo, maximizar retornos. Considerando os trade-offs entre risco e retorno, Harry Markowitz, um economista financeiro americano, propôs a chamada teoria moderna do portfólio em 1952.

A teoria do portfólio moderno proposta por Markowitz, tem como objetivo maximizar o retorno esperado do portfólio para uma determinada quantidade de risco ou, de forma equivalente, minimizar o risco para um determinado nível de retorno esperado, escolhendo minuciosamente as proporções dos ativos.

O modelo proposto por Markowitz considera três fatores principais, o retorno esperado, a variância e a covariância. As subseções a seguir descrevem esses fatores considerando o contexto de investimentos [Omisore et al., 2012].

Retorno esperado

A taxa de retorno pode ser descrita pela relação entre o retorno do ganho ou perda de dinheiro do investimento que o investidor faz. O resultado dessa taxa de retorno é geralmente expresso como uma porcentagem e, considerando um investimento em um ativo entre o tempo t e $t-1$, pode ser descrito da seguinte forma:

$$r_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}} \quad (3.6)$$

onde, P_t é o preço da ação no tempo t e P_{t-1} é o preço no tempo $t-1$.

Variância e desvio padrão

Em análises de investimento, risco se refere a chance de uma variação do retorno esperando, sendo assim, investimentos que possuem maior variação, são considerados investimentos de alto risco.

Para medir riscos do investimento em ativos, a variância e o desvio padrão são peça fundamental. O desvio padrão mede a dispersão sobre o valor esperado e é o indicador estatístico mais utilizado para medir o risco de um ativo.

Abaixo temos a definição matemática da variância e do desvio padrão, respectivamente [Omisore et al., 2012]:

$$\sigma_i^2 = Var(r^i) = \frac{\sum_{t=1}^m (r_t^i - \mu_i)^2}{m - 1} \quad (3.7)$$

$$\sigma_i = \sqrt{\sigma_i^2} = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^m (r_t^i - \mu_i)^2}{m - 1}} \quad (3.8)$$

Covariância

Ao trabalhar com ações, as dimensões do risco podem ser organizadas em uma matriz de covariância dos retornos. A diagonal dessa matriz é composta pela variância de cada ativo e

seus outros elementos são referentes as covariâncias de cada par de ações [Omisore et al., 2012].

$$\Omega_{n \times n} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_1^2 & \dots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \dots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}, \quad (3.9)$$

onde

$$\sigma_{ij} = Cov(r^i, r^j) = \frac{\sum_{t=1}^m (r_t^i - \mu_i)(r_t^j - \mu_j)}{m} \quad (3.10)$$

Teorema de markowitz

Em 1990, Harry Markowitz recebeu o Prêmio Nobel de Economia por seu trabalho sobre a teoria do portfólio. A suposição básica é que as taxas de retorno por um período de tempo são variáveis e aleatórias e, portanto, a expectativa matemática e o desvio padrão podem ser calculados, visto que o desvio padrão é considerado uma medida de risco de investimento.

O retorno esperado sobre a carteira $E(r_p)$ é uma combinação linear do retorno esperado sobre os ativos nela incluídos, tais fatores são as participações relativas dos ativos na carteira. O risco de investimento é medido pelo desvio padrão P , que depende dos desvios padrão não lineares e das covariâncias de retorno dos ativos individuais [Omisore et al., 2012].

A teoria de Markowitz traz a diversificação como fator principal e está sujeita ao fato de que com o aumento do número de ativos na carteira, o número correspondente de covariâncias torna-se significativamente maior do que o número de ativos e, portanto, o risco da carteira dependerá em maior grau de covariância entre ativos em vez do risco de ativos individuais. A aparente forma de otimização paramétrica do modelo de Markowitz pode ser descrita pela seguinte representação matemática:

$$\text{maximize} \quad E(r_p) = \sum_{i=1}^n (w_i \mu_i) \quad (3.11)$$

$$\text{minimize} \quad \sigma_p = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}} \quad (3.12)$$

$$\text{subject to} \quad 0 \leq w_i \leq 1, \sum_{i=1}^n w_i = 1 \quad (3.13)$$

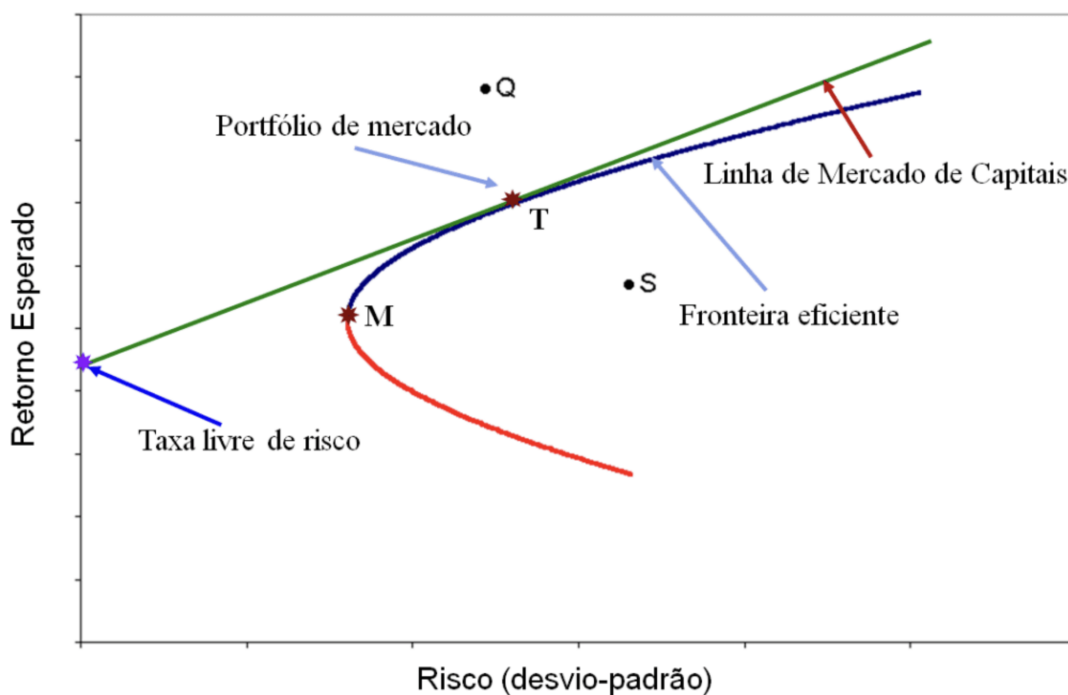
onde $i = 1, \dots, n$ representa o conjunto de ações; w_i é referente ao percentual do capital que será investido no ativo i ; r^i é o retorno no ativo i ; μ_i é o retorno esperado; σ_{ij} é a covariância

do retorno esperado entre os ativos i e j ; $E(r_p)$ é o retorno esperado total do portfólio; σ_p é o risco do portfólio [Omisore et al., 2012].

Fronteira eficiente

As combinações possíveis de ativos podem gerar inúmeros resultados que podem ser visualizados em um espaço de risco e retorno. Nesse espaço é possível visualizar as carteiras para as quais existe o risco mais baixo para um determinado nível de retorno, mais conhecida como fronteira eficiente. Por outro lado, para um determinado montante de risco, a carteira situada na fronteira eficiente representa a combinação que oferece o melhor retorno possível. Ou seja, a fronteira eficiente são os portfólios com risco ótimo para níveis diferentes de retorno esperado mínimo [Omisore et al., 2012].

Figura 3.13: *Fronteira Eficiente.*



Fonte: [Markowitz Model, 2021]

A Figura acima mostra aos investidores todo o conjunto de oportunidades de investimento, que é o conjunto de todas as combinações possíveis de risco e retorno oferecidas por carteiras formadas por ativos em proporções diferentes. A combinação dos ativos de risco específicos na carteira traçada na fronteira eficiente representa o menor risco possível para a carteira para um nível desejado de retorno esperado, ou o melhor retorno esperado possível para um nível de risco aceitável [Omisore et al., 2012].

Sharpe ratio

A medida de Sharpe é uma medida de desempenho da carteira que dá o prêmio de risco por unidade de risco total, que é medido pelo desvio padrão de retorno da carteira. O prêmio de risco em uma carteira em si é o retorno total da carteira menos a taxa livre de risco (o retorno que estou deixando de receber por optar investir em outro ativo mais arriscado). Em outras palavras, a medida de Sharpe divide o excesso de retorno médio do portfólio pelo desvio padrão dos retornos no mesmo período. A medida pode ser expressa na seguinte fórmula [Omisore et al., 2012]:

$$S_p = \frac{E(r_p - r_f)}{\sigma_p} \quad (3.14)$$

onde r_f é o retorno no ativo livre de risco.

Minimização global da variância

Portfólios baseado no risco tentam contornar a alta sensibilidade dos portfólios de Markowitz as estimativas de erro do retorno esperado não fazendo uso dos mesmos e se baseando apenas na matriz de covariância [Ardia et al., 2017].

O portfólio que minimiza a variância global é o portfólio de ações com a menor variância para uma dada matriz Σ de covariância e representa a solução para o seguinte problema de minimização [Kempf & Memmel, 2005]:

$$\text{minimize } w \quad w^T \Sigma w \quad (3.15)$$

$$\text{subject to} \quad w_i \geq 0 \quad (3.16)$$

$$w^T \underline{1} = 1 \quad (3.17)$$

$$(3.18)$$

onde $\underline{1}$ é um vetor de colunas com dimensão apropriada com entradas iguais a 1 e $w = (w_1, \dots, w_N)^T$ é o vetor dos pesos do portfólio. O portfólio de mínima variância global tem seus pesos $w_{MV} = (w_{MV,i}, \dots, w_{MV,N})^T$ dados por [Kempf & Memmel, 2005]:

$$w_{MV} = \frac{\Sigma^{-1} \underline{1}}{\mathbf{1}^T \Sigma^{-1} \mathbf{1}} \quad (3.19)$$

$$(3.20)$$

Função de utilidade

A utilidade indica a direção de preferência do tomador de decisão, permitindo então, valorar a distribuição dos possíveis resultados de uma decisão. O objetivo dessa estratégia é maximizar a utilidade esperada, onde a função de utilidade descreve a satisfação do investidor frente a uma situação de risco [Aguiar, 2004].

Uma função de utilidade U é definida em $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e todos os cenários de investimento são classificados de acordo com o valor de utilidade esperado $E[U(X)]$, onde quanto maior o valor melhor.

Para exemplificar, podemos considerar dois investimentos:

- Investimento A: 10 milhões de retorno com 100% de chance.
- Investimento B: 20 milhões de retorno com 30% de chance e 5 milhões de retorno com 70% de chance.

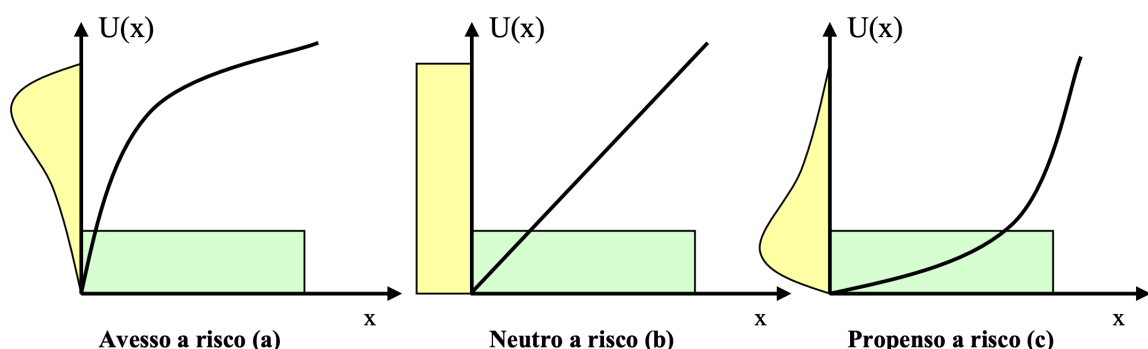
Para um investidor que tem como função de utilidade $U(X) = \sqrt{X}$ temos o seguinte cálculo para definir o investimento:

$$A = \sqrt{10} = 3.16 \quad (3.21)$$

$$B = \sqrt{200.3} + \sqrt{50.7} = 2.9 \quad (3.22)$$

Logo, o investidor escolheria a opção de investimento A. O mercado financeiro tem diferentes perfis de investidores e com isso a função que define a utilidade pode ser diferente para cada um deles, diferenciado a aversão a risco de cada um deles.

Figura 3.14: *Função de utilidade.*



Fonte: [Aguiar, 2004]

A Figura 3.14 mostra três diferentes funções de utilidade para investidores, o avesso ao risco, o neutro e o propenso ao risco, isso indica que a magnitude de se expor a um resultado ruim é diferente para cada um deles [Aguiar, 2004].

Utilidade quadrática

O principal propósito das funções de utilidade é classificar alternativas que capturam a aversão a risco e em finanças, a função de utilidade mais comumente utilizada para descrever o comportamento de um investidor é a de utilidade quadrática, tendo sua popularidade baseada no fato de que sob a suposição de utilidade quadrática a análise de variância média é ótima. A utilidade quadrática pode ser descrita por:

$$U(X) = X - bX^2 \quad (3.23)$$

Nessa função, podemos observar que para $b > 0$, o resultado da função de utilizada é uma função estritamente côncava que caracteriza uma aversão a risco e que somente para valores menores que zero temos um perfil mais arrojado.

No contexto de Markowitz, temos duas importantes observações ao compor a função de utilidade, a matriz de peso das alocações dos ativos e o retorno esperado. A função de utilidade que descreve essa otimização é representada por:

$$\text{maximize}_w \quad w^T \mu - \frac{\delta}{2} w^T \Sigma w \quad (3.24)$$

$$(3.25)$$

Na equação acima, quanto maior o δ menor o risco atrelado a carteira otimizada.

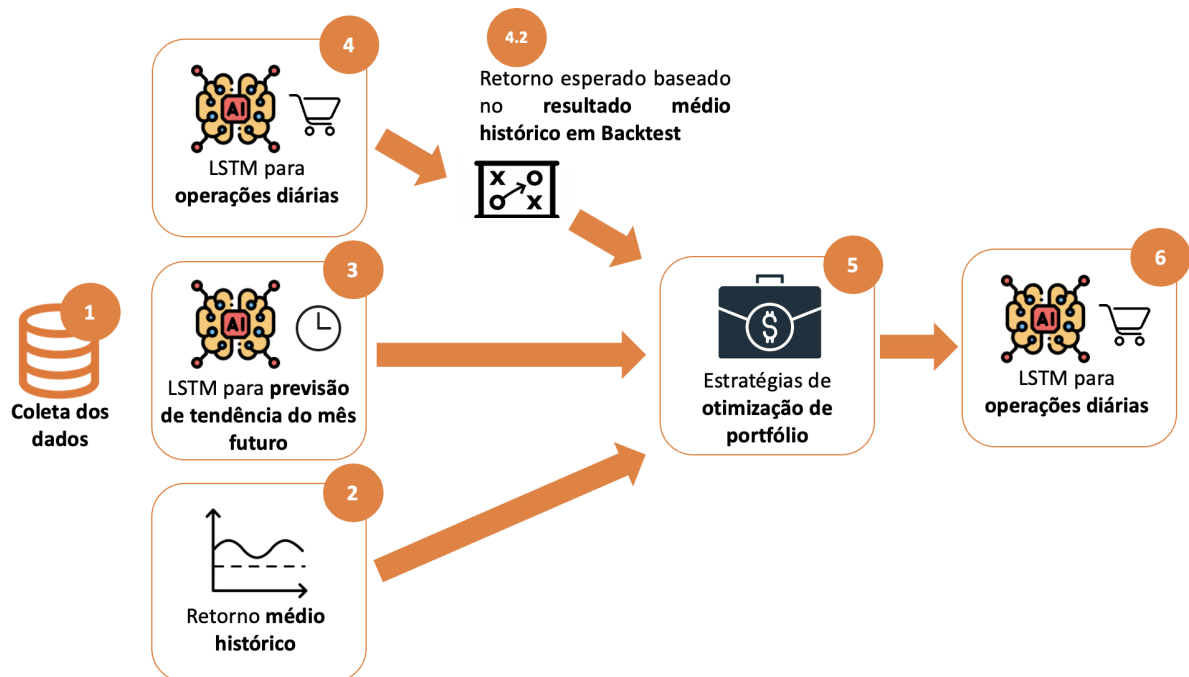
Capítulo 4

Metodologia e desenvolvimento

Essa dissertação propôs o desenvolvimento de métodos para o auxílio na tomada de decisão em aplicações financeiras. Para isso, foram utilizados os conceitos apresentados no Capítulo 3 que, combinados, resultaram em uma estratégia para compra e venda de ativos baseada na seleção de um portfólio de ações e na predição do comportamento dos ativos selecionados.

A Figura 4.1 exibe um fluxograma com os componentes técnicos e as conexões existentes entre cada um deles. As seções a seguir detalham cada etapa da nossa metodologia de projeto.

Figura 4.1: Fluxograma descritivo das etapas necessárias para construção do projeto.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

4.1 Coleta e preparação de dados

Para trabalhar com o mercado financeiro, a forma de coleta e tratamento dos dados é muito importante para extrair *insights* relevantes. Como primeiro passo do projeto, foi definido o mercado alvo como o mercado brasileiro e os ativos escolhidos para análise e construção de todo o projeto foram os da IBOVESPA.

Para coleta dos dados de maneira temporal, ou seja, dos últimos anos e com uma granularidade diária, foi necessário buscar por APIs (*Application Programming Interface*) que fizessem tal disponibilização. A escolhida pelo trabalho foi a do Yahoo Finanças que fornece os dados na seguinte estrutura:

- Código do ativo, que identifica a ação na bolsa de valores.
- Valor de fechamento, que corresponde ao último valor do *candle*.
- Valor de abertura do *candle*.
- Valor máximo alcançado dentro do período do *candle*.
- Valor mínimo alcançado dentro do período do *candle*.
- Volume transacionado
- Dia referente.

A partir da coleta, foram feitas análises exploratórias no dado, identificando dados faltantes para alguns ativos, que foram removidos do estudo. Além disso, foram estudados métodos de pré-processamento e a técnica de *Heikin-Ashi*, foi encontrada como uma opção para reduzir os ruídos provenientes das séries caóticas geradas pelas ações do mercado brasileiro. A Figura 3.2 ilustra essa suavização da série temporal.

Os dados foram pré-processados usando *Heikin-Ashi* e então preparados para servirem como *input* das próximas etapas. Para a etapa de otimização de portfólio, pensando na volatilidade em um curto prazo, foram utilizados os campos de data e valor de fechamento com somente dois anos do histórico das ações. Enquanto isso, para os modelos preditivos, foram utilizados os campos de data, volume e valor de fechamento das séries completas.

4.2 Retorno esperado

Com os dados em mãos e tratados, o desafio passa a ser a definição e construção da estratégia de investimento. Como proposta da dissertação, o primeiro passo da estratégia de investimento contempla as etapas 2, 3 e 4 da Figura 4.1, que são formas diferentes de construir o retorno esperado que será *input* da estratégia de otimização.

Retorno médio histórico (RMH)

Um dos processos mais simples e comumente utilizados para obtenção do retorno esperado é baseado no retorno histórico da série temporal de cada ativo. Além de ser facilmente interpretável e muito intuitivo, a premissa para tal abordagem é devido ao fato de que os padrões e comportamentos de uma ação tendem a se repetir no futuro.

Por ser uma área de amplo estudo no mercado algumas bibliotecas em *Python* já disponibilizam modelos de otimização com a estratégia de *input* do RMH como retorno esperado implementada. Para o projeto essa estratégia foi utilizada como *benchmark* para as modelagens preditivas e aproveitou-se do desenvolvimento construído pela biblioteca *PyPortfolioOPT*.

Modelagem preditiva

Para as etapas 3 e 4 uma definição importante foi entender qual modelagem preditiva seria utilizada para lidar com o cenário volátil e incerto da bolsa de valores. Por se tratar de um problema complexo, as redes neurais recorrentes são vastamente utilizadas nesse campo e a habilidade de captar padrões de curto e longo prazo, além os estudos com relação a sua performance em problemas de séries temporais complexos foram fatores determinantes para escolha da rede neural recorrente LSTM como modelo a ser testado.

Como um dos objetivos do trabalho é combinar a modelagem preditiva com estratégias de otimização de portfólio, o intervalo de tempo a ser predito e as avaliações de performance foram realizadas mensalmente, sendo assim, aderentes a um rebalanceamento de portfólio mensal.

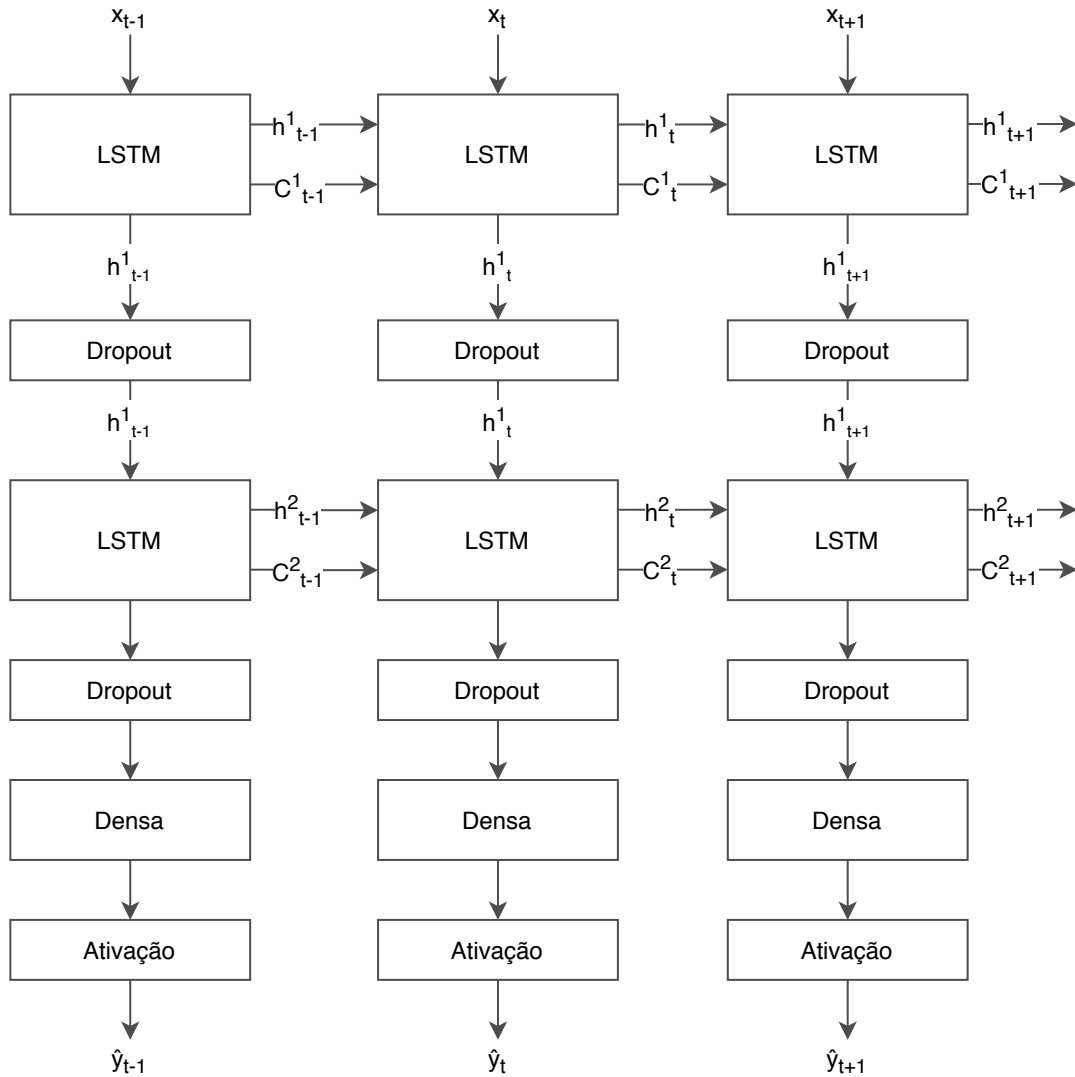
Arquitetura da LSTM

Para ser capaz de absorver os padrões da bolsa de valores e fazer previsões assertivas, foi desenvolvida uma rede neural recorrente composta por LSTMs empilhados. Essa rede neural recebe como entrada o preço da abertura transformado usando a técnica de *Heikin-Ashi* e o volume movimentado da ação no dia anterior, ambos normalizados e tem como objetivo realizar previsões, ponto a ponto, do preço de abertura das ações de acordo com a janela de predição definida.

Além dos LSTMs empilhados, o modelo é composto por camadas densas que representam uma operação linear um pra um de transformação e camadas de *dropout* que durante o treinamento desconsidera randomicamente *outputs* para auxiliar na generalização do modelo e evitar *overfitting* [Mou et al., 2018].

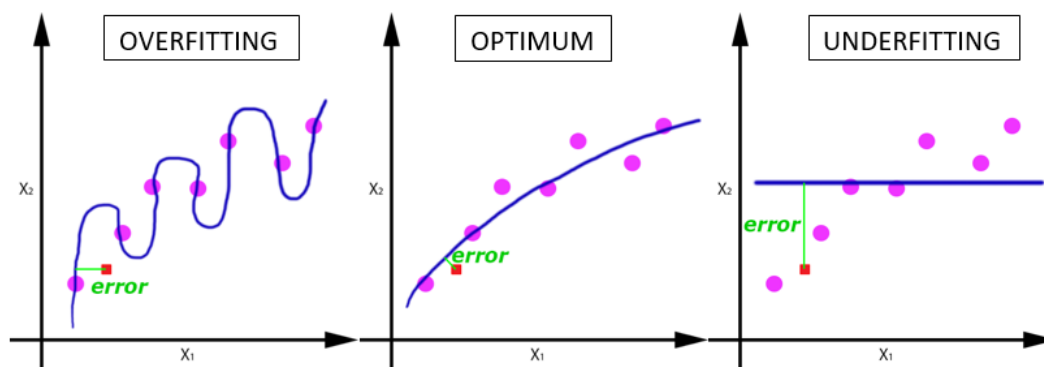
O modelo foi construído usando a biblioteca do Keras e para sua entrada do modelo foram construídas *time windows* de 50 dias, responsáveis pelas janelas de memória do LSTM. Foram mantidos os parâmetros base do LSTM e a arquitetura final está representada na Figura 4.13, mostrando a função de ativação linear utilizada e o otimizador *RMSprop*. O modelo foi treinado com um número máximo de 200 épocas, usando da propriedade de finalizar o treinamento em caso de estabilização do erro (*logloss*).

Figura 4.2: Arquitetura da rede utilizada.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

Foram realizados testes com diferentes valores para o número de épocas e para o *batch size*. O número de épocas é referente ao número de vezes em que todo o conjunto de treino percorre a rede neural. Um número alto de épocas pode causar um *overfitting* devido ao número de vezes que o dado de treino passa pela rede para que os pesos sejam calibrados, e em contrapartida um número baixo pode representar um *underfitting*.

Figura 4.3: Efeito do aumento do número de épocas nas predições.

Fonte: Desenvolvida pelo autor

A figura acima mostra três cenários e a medida que o número de épocas aumenta, a curva vai de *underfitting* para o ótimo e posteriormente para *overfitting*. O número final escolhido foi de 150 épocas para a predição com janelas curtas e 200 épocas para janelas de longo prazo.

Para que a rede neural seja treinada é necessário que o *dataset* de treino seja dividido em partes, que são chamadas de *batches*. O parâmetro *batch size* é referente ao número de exemplos presentes em um *batch*. Maiores *batches* convergem mais rápido e podem gerar melhores performances, porém, exigem mais poder computacional. Para o trabalho foi escolhido um *batch size* de 258.

Foram criadas duas estratégias a partir do *output* gerado pela modelagem, em uma delas a previsão é feita de ponto a ponto e o valor anterior do preço de abertura é atualizado a cada predição feita e em outra a atualização só acontece posterior a N dias, onde N é o número de dias em que o mercado abre no mês.

Previsão de tendência

Para estratégia de previsão de tendência a predição também é feita de ponto a ponto, porém, os valores anteriores não são atualizados para o mês a ser predito, simulando um cenário onde os valores do próximo mês são desconhecidos. Tais abordagens são diferentes formas de se testar como uma saída de um modelo preditor pode ser integrada a um otimizador de portfólio.

A previsão de tendência tem o objetivo de ser mais assertiva que o RMH para prever o valor esperado de fechamento para o próximo mês, tornando assim mais eficiente a otimização de portfólio realizada. Nessa etapa a LSTM recebe a série histórica do ativo e realiza a previsão do valor final após um mês.

Considerando que estamos no último dia do mês de maio, por exemplo, e queremos construir um portfólio para investimento em junho, o último valor utilizado pela modelagem é

o dia 31 de maio e o valor a ser predito é referente ao dia 30 de junho. Com isso, o retorno esperado é a diferença entre o valor predito para o dia 30 de junho e o valor real do dia 31 de maio.

A forma de construir o retorno esperado tem diferentes objetivos dentro da dissertação, o retorno mensal predito visa construir um portfólio ótimo para manter-se em carteira durante todo o período pré-remanejamento futuro. A próxima subseção apresenta uma estratégia que busca otimizar a carteira para operações com os ativos selecionados.

Estratégia de operações diárias

A performance de modelos preditivos para operações na bolsa de valores tem grande oscilação de ativo para ativo, portanto, a etapa 4 do projeto propõe a construção de portfólios ótimos baseados na performance passada de um algoritmo preditivo para que o mesmo modelo opere nos ativos selecionados durante o próximo mês.

Para essa etapa, a rede neural recorrente tem o objetivo de prever o valor do próximo dia, atualizando o valor do dia anterior após cada predição e a performance do algoritmo para essa estratégia é medida de acordo com o retorno financeiro das operações. Para obter o retorno financeiro é necessário construir uma estratégia de compra e venda das ações que seja coerente com o mercado.

Compras e vendas foram definidas de acordo com os valores preditos pelo algoritmo LSTM e uma compra somente é realizada se o valor de abertura da ação previsto para o dia seguinte for maior que o valor atual da mesma.

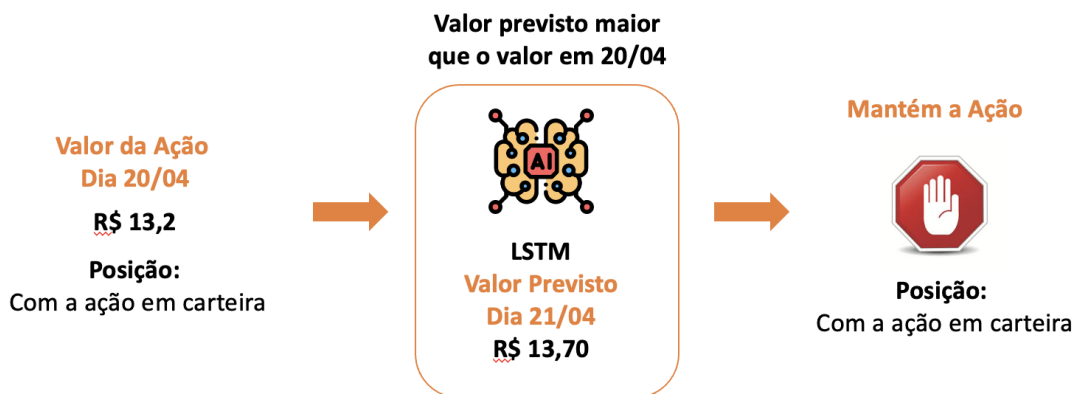
Figura 4.4: Ação executada quando o valor da ação predito para o próximo dia é maior que o atual e a ação não está em carteira.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

Após ter a ação em carteira, caso os próximos valores preditos continuem sendo maiores que o atual, o investimento é mantido, ou seja, não são realizadas novas aquisições.

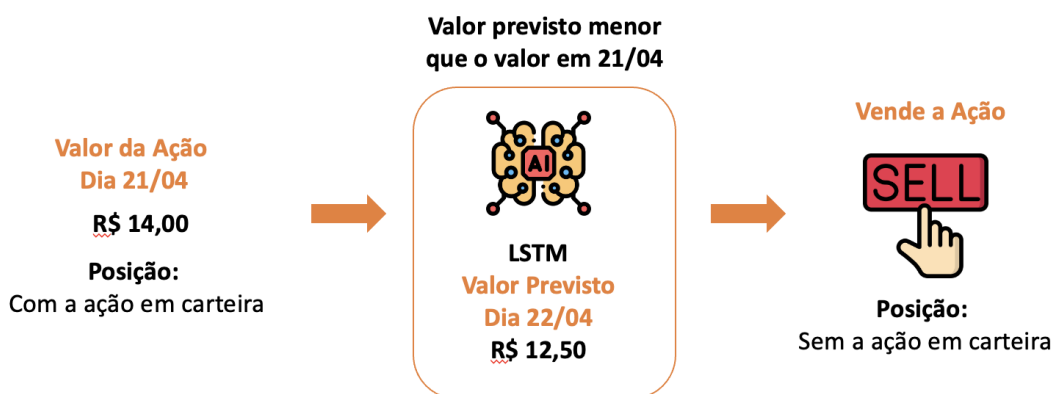
Figura 4.5: Ação executada quando o valor da ação predito para o próximo dia é maior que o atual e a ação está em carteira.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

Caso o valor de abertura predito pela rede para o próximo dia seja menor que o valor atual da ação, a venda é realizada (essa operação só é feita caso a empresa já faça parte do portfólio).

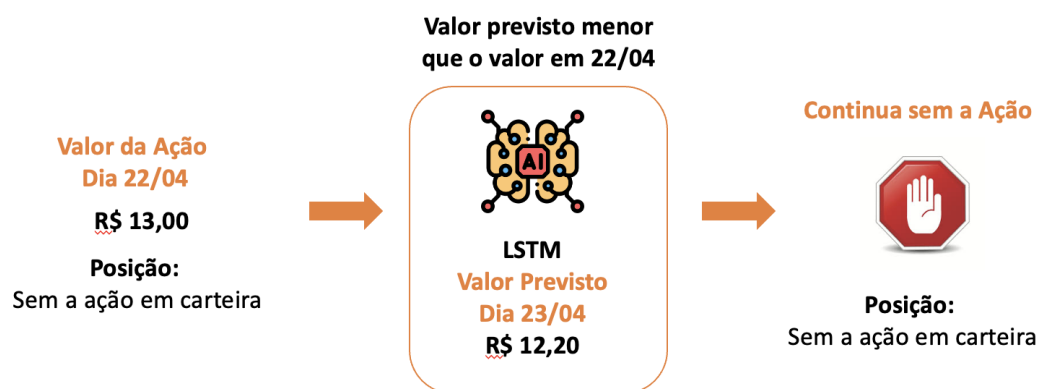
Figura 4.6: Ação executada quando o valor da ação predito para o próximo dia é menor que o atual e a ação está em carteira.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

E como último cenário possível, caso a ação não esteja na carteira e o valor previsto seja menor que o valor do dia atual, a compra não é realizada e o dia é considerado sem nenhuma operação

Figura 4.7: Ação executada quando o valor da ação predito para o próximo dia é menor que o atual e a ação não está em carteira.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

Com a definição do momento de compra e venda, a estratégia para construir o retorno esperado é definida a partir do retorno médio em backtest (RMB) da modelagem nos seis meses anteriores a data de observação. Para isso, são simuladas operações durante cada mês, sempre contabilizando a atualização do patrimônio e é realizada a média dos últimos seis meses do valor obtido.

Considerar o RMB como retorno esperado visa otimizar um portfólio onde a modelagem preditiva de operações tem uma boa performance. A necessidade de uma boa performance parte do princípio de que serão realizadas operações de compra e venda no portfólio montado para o próximo mês.

4.3 Otimização de portfólio

A bolsa de valores brasileira (B3), conta com aproximadamente 1739 ações, que representam empresas listadas, e assim como uma digital cada ação possui comportamento único, com a sua volatilidade, tendência e padrões. A etapa 5 tem a proposta de criar portfólios otimizados para combinar as series únicas de cada ativo de acordo com um objetivo.

Modelos de otimização de portfólio podem ter diversos objetivos e são comumente aplicados para construir carteiras de acordo com o perfil de cada investidor. Para dissertação foram escolhidos três modelos para comparação, o que maximiza o Sharpe, o que maximiza a utilidade quadrática e o que minimiza a variância.

Para construção de todos os modelos utilizados, foi utilizada a biblioteca *PyPortfolioOpt* alterando os parâmetros de entrada referentes ao retorno esperado para cada otimizador esco-

lhido. Os modelos de Sharpe e da utilidade quadrática recebem a matriz de covariância para o cálculo do risco e o retorno esperado, entretanto, a utilidade quadrática também recebe a aversão a risco que no trabalho foi considerada igual a 1. O algoritmo de minimização de variância não necessita do retorno esperado como parâmetro e foi utilizado como modelo de *benchmark* para os portfólios que consideram retorno esperado.

Como proposta do trabalho, foram criadas três estratégias para calcular o retorno esperado. A primeira estratégia citada na seção anterior, contempla os portfólios de Sharpe e utilidade quadrática com o RMH como entrada.

Figura 4.8: RMH como *input* dos otimizadores de portfólio.



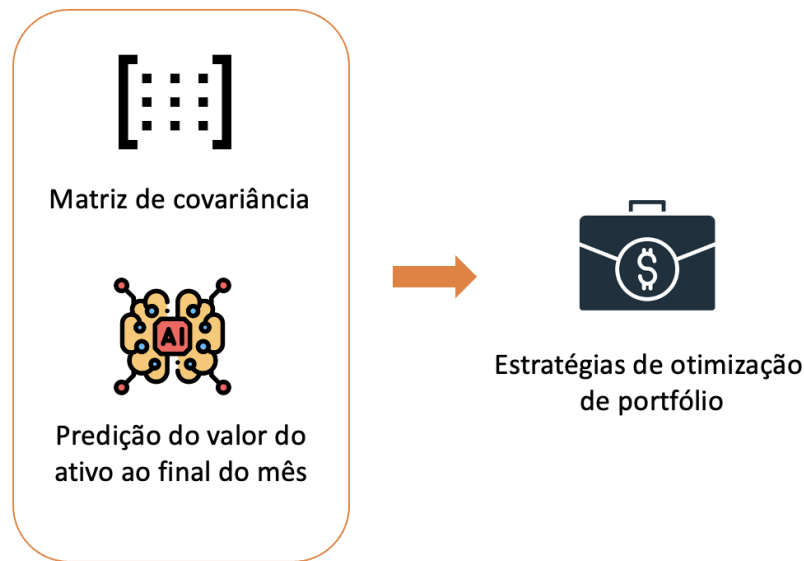
Fonte: Desenvolvida pelo autor

Como segunda estratégia, os otimizadores usaram como entrada a predição de valor do ativo para o próximo mês, comparando com o valor da data de observação.

A terceira estratégia utiliza o RMB da modelagem preditiva como entrada do otimizador, considerando seis meses de performance financeira da estratégia de compra e venda

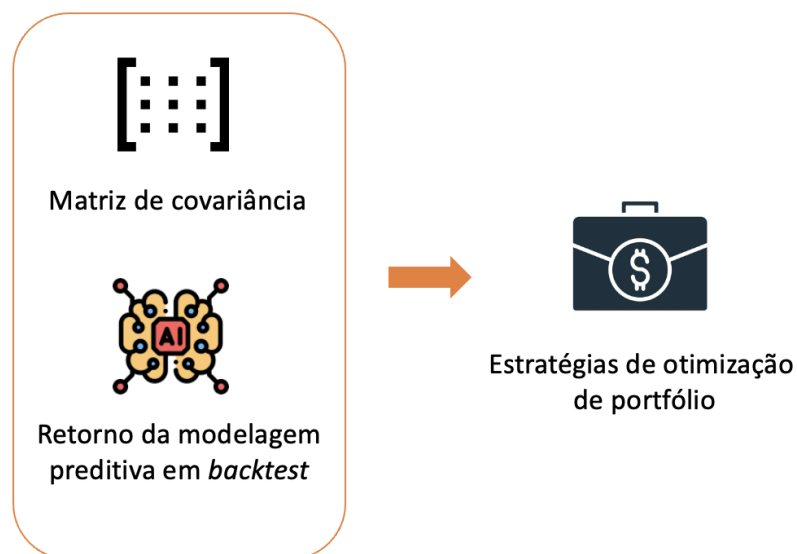
As estratégias de otimização citadas tem como *output* a uma carteira de ações otimizadas de acordo com seu objetivo e que devem ser mantidas até o tempo rebalanceamento de 1 mês considerado no projeto.

Figura 4.9: Modelo preditivo de tendência como *input* dos otimizadores de portfólio.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

Figura 4.10: Modelo preditivo em *backtest* *input* dos otimizadores de portfólio.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

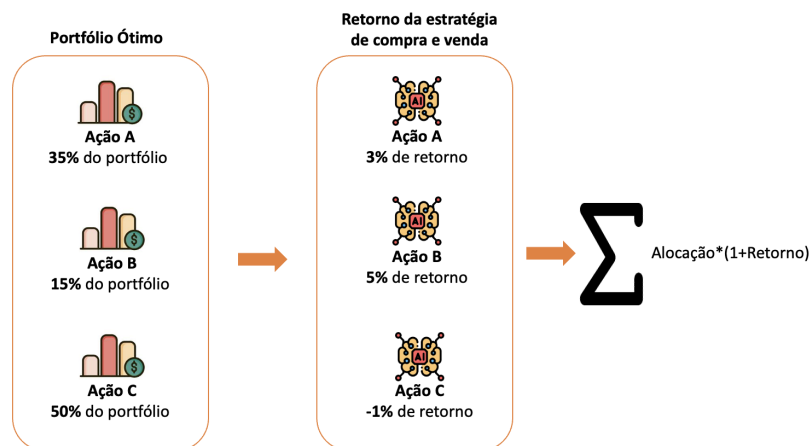
4.4 Operações em portfólios ótimos

Esta dissertação propõe o uso de modelos preditivos e portfólios ótimos em diferentes fases, nas seções anteriores foram descritas as etapas para construção dos portfólios ótimos, a seção atual descreve as operações de compra e venda em portfólios ótimos.

Após obtermos as carteiras ótimas para cada mês, o modelo preditivo deverá operar utilizando a estratégia de compra e venda descrita na seção 4.2 com o montante alocado para cada ação, ou seja, considerando uma carteira com um investimento de R\$ 10.000,00 se uma ação compõe 23% do portfólio, ela deverá ter R\$ 2.300,00.

Para calcular o retorno do portfólio para qualquer valor de carteira, foi utilizada a seguinte estratégia:

Figura 4.11: Descrição do calculo realizado para calcular o retorno final das estratégias de compra e venda.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

O somatório da figura acima pode ser descrita pela seguinte expressão matemática:

$$\sum_{i=1}^x w_i(1 + r_i) \quad (4.1)$$

$$(4.2)$$

Onde x representa o conjunto de ações do portfólio ótimo, w_i representa a alocação percentual na ação i do portfólio e r_i representa o retorno do ativo.

4.5 Análise dos resultados

Para análise dos resultados, o projeto foi dividido em duas etapas, a primeira que compara os otimizadores de portfólio com diferentes entradas referente as estratégias descritas na seção 4.3 e a segunda referente ao modelo completo que considera o modelo preditor operando nos portfólios ótimos das duas estratégias geradas. As figuras abaixo representam as possíveis combinações finais.

Figura 4.12: Arquitetura da estratégia final com *input* convencional para o portfólio ótimo.

Fonte: Desenvolvida pelo autor

Figura 4.13: Arquitetura da estratégia final com *input* de modelagem para o portfólio ótimo.

Fonte: Desenvolvida pelo autor

As avaliações dos resultados foram realizadas em um período de um ano, onde o mercado apresentou momentos de queda, de neutralidade e de alta. Além das comparações feitas com modelagens convencionais, também foram trazidas comparações de performance com fundos e índices.

Capítulo 5

Resultados e análise

Este capítulo apresenta detalhadamente os resultados e as análises dos modelos criados. Ao final, é realizada uma comparação entre o modelo, a estratégia de *buy and hold* e a IBOVESPA, com intuito de mostrar a efetividade dos mesmos, indicando, dessa forma, se o método proposto poderia ser utilizado como ferramenta de auxílio em investimentos.

Foram realizadas simulações de investimento por 16 meses, considerando um período de treino de cinco anos e as seções a seguir avaliam para cada etapa da construção da estratégia as métricas que validam ou invalidam a solução proposta.

5.1 Predição do retorno esperado

Como proposta do trabalho, foram construídas duas novas estratégias descritas na subseção 4.2 para elaborar o retorno esperado utilizado como *input* para os otimizadores. Habitualmente o retorno esperado é obtido a partir do retorno médio histórico (RMH), e esse foi o *benchmark* utilizado nas métricas de avaliação. A segunda metodologia foi construída com o retorno predito para o próximo mês usando uma LSTM (RP) e a terceira com o retorno médio dos últimos 6 meses em *backtest* (RMB).

As metodologias tem como valor de *output* um "palpite" referente ao valor da ação ao final do último mês, e por isso, uma das métricas utilizadas foi o erro médio absoluto percentual entre o valor final do mês predito e o valor real. A Tabela abaixo contempla os valores do erro médio absoluto (MAE) e a raiz quadrada do erro médio quadrático (RMSE) para todos os ativos da IBOVESPA, durante os 16 meses de observação, usando cada uma das metodologias propostas:

Tabela 5.1: Resultados das estratégias de predição do retorno esperado

Metodologia	MAE	RMSE
RMH	11.79%	24.26%
RP	6.60%	12.19%
RMB	17.14%	29.36%

O melhor resultado apresentado foi referente a predição feita pela LSTM do valor final de fechamento da ação no próximo mês, reduzindo o MAE em 45% e o RMSE em 49,8% quando comparada ao RMH. O RMB tem uma proposta não convencional que replica a performance de operações de compra e venda históricos para prever a performance da LSTM no mês futuro e já era esperado um resultado com um erro maior que as outras estratégias.

5.2 Carteiras otimizadas

Para entender a eficiência das carteiras construídas, nessa seção, foram analisados os resultados das carteiras considerando a compra do ativo no início do mês e a venda somente ao final. Os resultados foram divididos de acordo com cada otimização proposta, a de Sharpe, a de utilidade quadrática e a de minimização de variância.

Sharpe ratio

A Tabela apresentada abaixo contempla os resultados mensais da otimização usando Sharpe para cada *input* de retorno esperado proposto.

Tabela 5.2: Resultados dos portfólios que maximizam Sharpe, considerando os retornos esperados com RMH, RP, RMB e dois *benchmarks*, IBOVESPA e IPCA

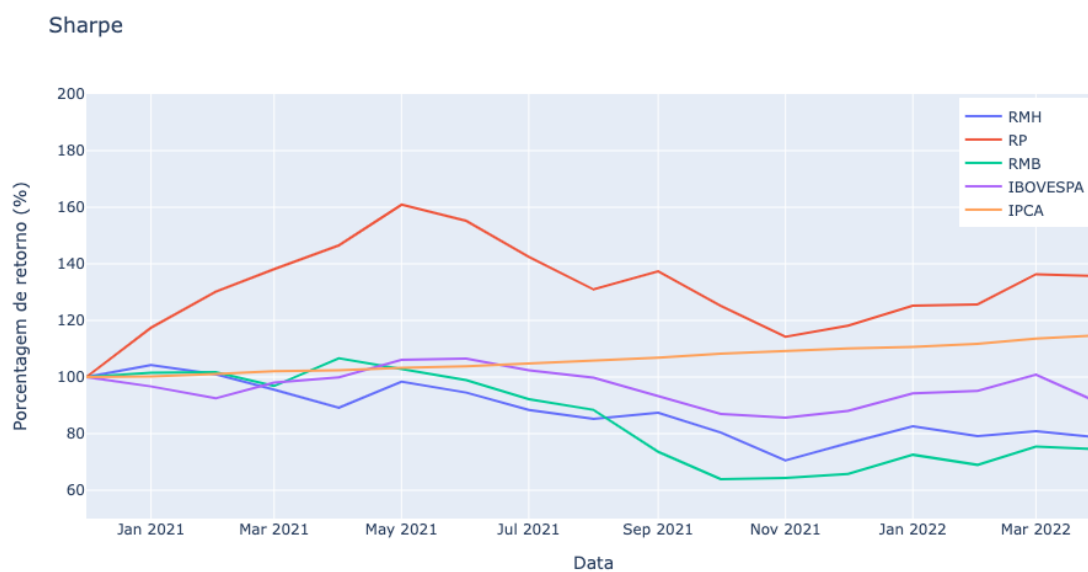
Sharpe					
Data	RMH	RP	RMB	IBOVESPA	IPCA
2021-01	4.22%	17.45%	1.53%	-3.32%	0.25%
2021-02	-3.12%	10.82%	0.22%	-4.37%	0.86%
2021-03	-5.35%	6.13%	-4.84%	6.00%	0.93%
2021-04	-6.72%	6.06%	10.10%	1.94%	0.31%
2021-05	10.36%	9.84%	-3.56%	6.16%	0.83%
2021-06	-3.92%	-3.57%	-3.80%	0.46%	0.53%
2021-07	-6.51%	-8.19%	-6.82%	-3.94%	0.96%
2021-08	-3.55%	-8.09%	4.04%	-2.48%	0.87%
2021-09	2.57%	4.91%	-16.79%	-6.57%	1.16%
2021-10	-8.03%	-8.90%	-13.11%	-6.74%	1.25%
2021-11	-12.26%	-8.69%	0.65%	-1.53%	0.95%
2021-12	8.68%	3.40%	2.25%	2.85%	0.73%
2022-01	7.77%	5.95%	10.24%	6.98%	0.54%
2022-02	-4.19%	0.39%	-4.92%	0.89%	1.01%
2022-03	2.16%	8.47%	9.34%	6.06%	1.62%
2022-04	-2.79%	-0.46%	-1.31%	-10.10%	1.06%
Total	-21.39%	35.69%	-25.57%	-9%	14.78%

A partir da Tabela 5.2, podemos observar que a carteira que utiliza o RP obteve resultados negativos somente nos meses em que a Ibovespa também foi negativa, que são os meses de junho a novembro de 2021 e abril de 2022, além disso, em janeiro, fevereiro e setembro a carteira ainda teve um retorno positivo mesmo com um cenário contrário.

A Figura 5.1 simula a atualização percentual da carteira mês a mês, evidenciando a baixa performance das estratégias de RMH e RMB que foram inferiores ao IPCA e IBOVESPA durante quase todo o período de análise. Já a estratégia com RP foi superior durante os 16 meses e chegou a ter um percentual de ganho superior a 60%.

É importante observar que independente da estratégia utilizada para retorno esperado, as carteiras com Sharpe apresentaram grandes oscilações nos valores de lucros e prejuízos durante os meses, indicando um alto risco atrelado ao investimento em tais estratégias. A baixa diversificação do segmento dos ativos atrelados as carteiras e a instabilidade do mercado no período em análise podem ter sido fatores determinantes para tais oscilações, as tabelas abaixo descrevem a composição das carteiras para cada um dos s de retorno esperado.

Figura 5.1: Retornos mensais da estratégia de otimização usando sharpe, considerando os retornos esperados com RMH, RP, RMB e dois *benchmarks* , IBOVESPA e IPCA.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

Tabela 5.3: Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RP em 2021

Data	2021-01	2021-02	2021-03	2021-04	2021-05	2021-06	2021-07	2021-08	2021-09	2021-10	2021-11	2021-12
Empresa												
BEEF3	-	2.7%	-	6.36%	-	15.46%	-	-	24.99%	-	-	-
CPFE3	53.27%	-	25.01%	-	-	-	-	-	-	6.37%	-	87.03%
EGIE3	-	-	-	-	-	19.2%	-	-	-	-	-	-
ELET3	-	21.62%	-	-	-	20.25%	90.17%	-	-	-	-	-
ELET6	-	-	-	68.09%	43.79%	24.29%	-	59.34%	24.05%	42.05%	61.88%	-
ITUB4	-	-	9.25%	-	-	-	-	-	-	-	-	-
SLCE3	46.73%	57.71%	65.74%	25.55%	56.21%	14.31%	9.83%	33.45%	20.05%	51.58%	38.12%	12.97%
TAE11	-	-	-	-	-	-	-	7.21%	-	-	-	-
TIMS3	-	17.97%	-	-	-	6.49%	-	-	30.9%	-	-	-

Tabela 5.4: Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RP em 2022

Data	2022-01	2022-02	2022-03	2022-04
Empresa				
ABEV3	-	-	3.24%	-
BBSE3	-	-	-	13.45%
BEEF3	-	4.33%	-	-
CPFE3	6.81%	63.92%	-	-
EGIE3	39.92%	-	-	-
ELET3	-	-	75.6%	-
ELET6	-	-	-	53.88%
EMBR3	7.87%	6.83%	-	-
SLCE3	23.36%	24.92%	21.16%	14.66%
VALE3	22.03%	-	-	18.01%

A primeira tabela corresponde ao portfólio montado utilizando o retorno esperado baseado no valor predito pela LSTM. Tal carteira, foi a mais lucrativa da otimização de Sharpe, porém, foi a que menos teve uma diversificação dos ativos utilizados, com apenas 13 empresas distintas em 16 meses e 3,25 ações por mês em média. Tal fato indica um maior risco da carteira que pode ter corroborado para meses com prejuízos acima de 8% e meses com lucro acima de 10%.

Na carteira montada prevaleceram em quase todos os meses, ativos de empresas de energia, como Eletrobras (ELET3, ELET6), Engie (EGIE3) e CPFL Energia (CPFE3), e uma empresa do setor agrícola a SLC Agrícola (SLCE3). Quando comparadas ao mercado, as ações das empresas Engie, CPFL e SLC, sofreram menos com a queda que aconteceu entre julho e novembro, além disso, em setembro a empresa Minerva Foods estava em carteira, o que culminou em um resultado positivo, já que a empresa cresceu 27% no período.

No período de junho a novembro, a carteira teve uma desvalorização de 29% enquanto a IBOVESPA caiu 17%, porém, no mês de abril, a estratégia teve um retorno negativo de somente -0,46% enquanto a IBOVESPA caiu 10,1% e nos meses do início do ano de 2021 foram os meses em que a estratégia obteve o maior lucro, mesmo com o cenário negativo. Tais dados, mostram uma oscilação negativa somente em momentos nos quais o mercado estava com um cenário negativo e ainda sim, quando em queda, possui uma queda similar a do mercado. Entretanto, as oscilações positivas são bem diferentes, já que o portfólio teve um crescimento positivo de 35.69% e a IBOVESPA uma queda de 9%.

Tabela 5.5: Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RMH em 2021

Data	2021-01	2021-02	2021-03	2021-04	2021-05	2021-06	2021-07	2021-08	2021-09	2021-10	2021-11	2021-12
Empresa												
BIDI11	-	-	-	-	-	-	-	16.98%	5.62%	-	-	3.46%
BPAN4	4.79%	2.8%	4.84%	-	15.74%	-	-	-	-	-	-	-
BRAP4	-	-	-	-	-	-	-	3.42%	-	-	-	-
ENEV3	39.48%	25.64%	37.5%	41.24%	8.09%	21.33%	9.87%	5.71%	-	-	-	-
JHSF3	2.24%	2.47%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
MGLU3	3.54%	11.8%	13.03%	4.15%	-	-	-	-	-	-	-	-
MRFG3	-	-	-	-	-	-	-	3.1%	-	-	-	3.54%
POSI3	-	-	-	-	11.0%	16.59%	9.85%	10.64%	9.89%	-	-	-
PRIO3	10.6%	8.91%	1.85%	3.57%	5.25%	7.23%	16.97%	8.84%	17.3%	31.34%	31.23%	30.84%
SLCE3	-	-	-	6.16%	20.16%	26.95%	40.52%	29.46%	26.84%	34.09%	36.41%	38.18%
SUZB3	-	-	-	-	-	-	-	-	10.04%	-	-	-
WEGE3	39.35%	48.39%	42.78%	44.89%	39.77%	27.9%	22.78%	21.85%	30.31%	34.57%	32.36%	23.98%

Tabela 5.6: Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RMH em 2022

Data	2022-01	2022-02	2022-03	2022-04
Empresa				
BPAC11	-	-	-	4.55%
CSNA3	-	3.19%	-	4.21%
GGBR4	-	-	-	6.89%
MRFG3	24.66%	8.66%	-	16.19%
PRIO3	16.52%	6.2%	9.11%	18.31%
SLCE3	31.44%	64.12%	54.37%	12.38%
SUZB3	2.03%	7.16%	-	2.56%
TAEE11	-	8.32%	20.31%	28.01%
TOTS3	-	-	-	4.63%
VALE3	-	-	16.21%	2.26%
WEGE3	25.36%	2.35%	-	-

A estratégia que usa o RMH, apresentou retornos negativos em meses onde o mercado apresentava um cenário positivo, com um resultado final de -21.39%, valor inferior ao da IBO-VESPA (-9%). Além disso, nos meses em que a bolsa estava em queda, a carteira também apresentou resultados negativos.

Apesar de dos resultados gerais da carteira terem sido negativos, as carteiras selecionadas pela estratégia possuem uma maior diversificação que a estratégia com RP, apresentado em média 5.5 ativos por mês e 18 empresas. As empresas que tiveram maior participação nas carteiras foram a PetroRio (PRIO3) e a WEG S.A (WEGE3), uma com foco na produção de

petróleo e gás e outra com foco em produção de máquinas elétricas. Apesar do resultado negativo das carteiras, as duas empresas sofreram menos que o mercado nos períodos de junho a novembro.

Tabela 5.7: Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RMB em 2021

Data	2021-01	2021-02	2021-03	2021-04	2021-05	2021-06	2021-07	2021-08	2021-09	2021-10	2021-11	2021-12
Empresa												
ABEV3	-	-	-	-	-	-	2.6%	-	-	-	-	8.94%
BBSE3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	8.92%
BRAP4	7.68%	23.79%	3.01%	14.19%	10.54%	-	-	-	-	-	-	-
BRFS3	-	-	-	-	-	5.76%	-	-	-	-	-	-
CIEL3	33.46%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CMIG4	-	-	-	-	-	-	3.27%	-	-	-	-	-
CSAN3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	4.61%
CSNA3	-	-	-	11.36%	-	-	3.36%	-	-	-	-	-
CVCB3	-	-	-	-	1.31%	5.07%	-	-	-	-	-	-
DXCO3	3.57%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	24.07%	-
ELET3	4.97%	16.25%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
EMBR3	-	-	-	-	-	-	-	-	11.59%	-	-	-
ENEV3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	2.86%	77.53%
ENGI11	17.56%	-	10.53%	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ITUB4	-	-	-	-	1.82%	-	5.66%	-	-	-	-	-
KLBN11	5.88%	-	55.16%	-	19.08%	-	12.08%	-	-	-	-	-
MRFG3	-	-	6.31%	-	-	-	-	-	-	-	-	-
MULT3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	5.05%	-	-
PCAR3	-	-	-	5.36%	17.11%	19.36%	20.46%	24.16%	32.07%	30.11%	6.14%	-
POSI3	-	-	-	-	-	19.23%	18.94%	26.2%	45.51%	64.84%	66.93%	-
RADL3	-	11.06%	-	18.96%	-	-	-	-	-	-	-	-
SLCE3	-	-	-	11.24%	1.19%	-	10.78%	49.64%	-	-	-	-
SUZB3	4.52%	21.6%	22.84%	20.98%	11.81%	-	15.69%	-	-	-	-	-
TAE11	14.96%	-	2.15%	-	26.19%	18.0%	-	-	-	-	-	-
TOTS3	-	-	-	17.91%	-	-	-	-	-	-	-	-
USIM5	-	-	-	-	-	-	-	-	10.83%	-	-	-
VALE3	-	-	-	-	10.96%	30.17%	7.16%	-	-	-	-	-
WEGE3	7.41%	27.31%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
YDUQ3	-	-	-	-	-	2.42%	-	-	-	-	-	-

Tabela 5.8: Alocação mensal do portfólio otimizado com Sharpe e RMB em 2022

Data	2022-01	2022-02	2022-03	2022-04
Empresa				
BBSE3	-	-	23.57%	14.06%
CPFE3	-	-	32.98%	-
CPLE6	-	6.44%	-	25.55%
CSAN3	72.17%	54.54%	7.15%	-
CSNA3	-	-	-	8.33%
ITSA4	-	-	1.01%	-
JBSS3	-	27.84%	-	18.31%
MULT3	-	11.18%	-	-
PRI03	-	-	-	11.8%
QUAL3	-	-	22.9%	-
RADL3	-	-	-	6.39%
SLCE3	-	-	-	15.56%
TIMS3	27.83%	-	12.38%	-

Com a maior diversificação de carteira das 3 estratégias, a carteira que utilizou o RMB obteve resultados negativos em metade dos meses da análise. A carteira com o RMB tem foco em construir um portfólio de ativos para operações de compra e venda que maximize o lucro dessas operações, portanto, já se esperava que o resultado em *buy and hold* dos portfólios mensais apresentassem aleatoriedade de comportamento ou que seguissem a tendência do mercado.

Utilidade quadrática

Com o melhor resultado do trabalho, a maximização da utilidade quadrática apresentou resultados positivos em duas das três estratégias propostas. A tabela abaixo ilustra o resultado mês a mês:

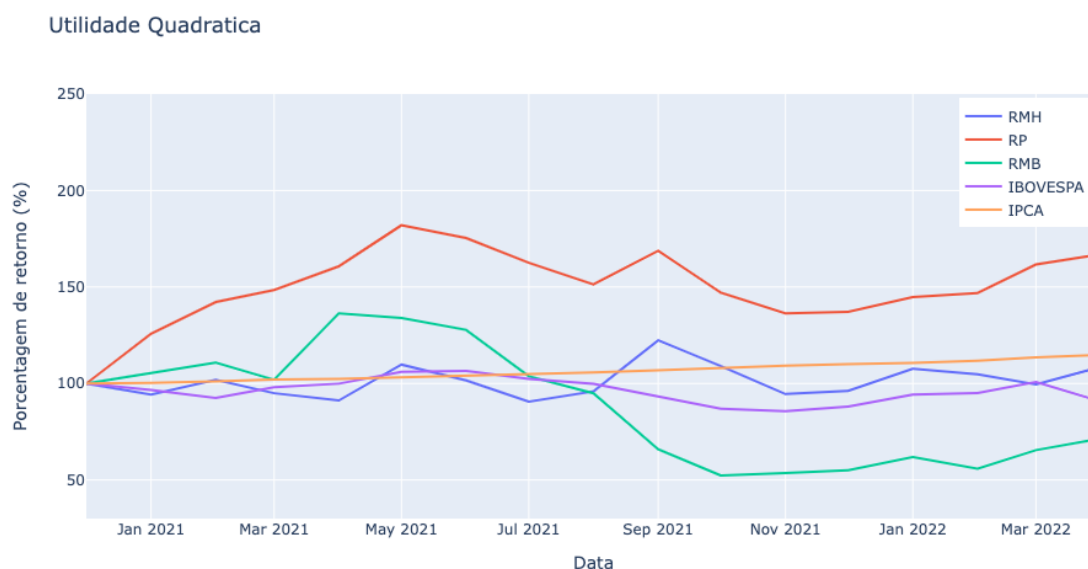
Tabela 5.9: Resultados dos portfólios que maximizam a utilidade quadrática, considerando os retornos esperados com RMH, RP, RMB e dois *benchmarks* , IBOVESPA e IPCA.

Utilidade quadrática					
Data	RMH	RP	RMB	IBOVESPA	IPCA
2021-01	-5.76%	25.78%	5.38%	-3.32%	0.25%
2021-02	8.18%	13.03%	5.12%	-4.37%	0.86%
2021-03	-6.84%	4.39%	-7.97%	6.00%	0.93%
2021-04	-3.95%	8.28%	33.66%	1.94%	0.31%
2021-05	20.34%	13.22%	-1.69%	6.16%	0.83%
2021-06	-7.41%	-3.65%	-4.59%	0.46%	0.53%
2021-07	-10.78%	-7.30%	-18.83%	-3.94%	0.96%
2021-08	5.77%	-6.90%	-8.52%	-2.48%	0.87%
2021-09	27.61%	11.54%	-30.55%	-6.57%	1.16%
2021-10	-10.92%	-12.86%	-20.62%	-6.74%	1.25%
2021-11	-13.29%	-7.34%	2.34%	-1.53%	0.95%
2021-12	1.77%	0.59%	2.90%	2.85%	0.73%
2022-01	11.91%	5.60%	12.28%	6.98%	0.54%
2022-02	-2.67%	1.42%	-9.79%	0.89%	1.01%
2022-03	-4.97%	10.08%	17.34%	6.06%	1.62%
2022-04	9.02%	3.26%	9.02%	-10.10%	1.06%
Total	8.53%	66.93%	-28.60%	-9%	14.78%

Na tabela fica evidente a maior presença de meses com valores extremos de lucros e prejuízos para as carteiras, como no mês de janeiro de 2021 onde a carteira com RP teve um retorno positivo de 25% e no mês de setembro de 2021 onde a carteira com RMB apresentou prejuízo de -30.55%.

Assim como a otimização com Sharpe, o *input* de *backtest* resultou em uma carteira negativa, porém, RMH apresentou um resultado devido a meses com retornos de 20% e 27% que conseguiram fazer com que a estratégia obtivesse lucro mesmo com a maioria dos meses com resultados negativos.

Figura 5.2: Retornos mensais da estratégia de otimização usando utilidade quadrática, considerando os retornos esperados com RMH, RP, RMB e dois *benchmarks*, IBOVESPA e IPCA.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

A visão temporal apresentada pela Figura 5.2 apresenta novamente que a carteira com RP é superior aos índices e as carteiras com outros retornos esperados. A carteira com RMB apresentou até o cenário negativo do mercado em junho, um comportamento superior aos índices de comparação, porém, a estratégia sofre muito no período de baixa com prejuízos consecutivos de -30.55% e -20.62%.

Tabela 5.10: Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RP em 2021

Data	2021-01	2021-02	2021-03	2021-04	2021-05	2021-06	2021-07	2021-08	2021-09	2021-10	2021-11	2021-12
Empresa												
BEEF3	-	-	-	-	-	1.94%	-	-	43.42%	-	-	-
CPFE3	37.66%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100.0%
ELET3	-	33.84%	-	-	-	84.04%	100.0%	-	53.84%	-	-	-
ELET6	-	-	-	100.0%	67.36%	14.02%	-	100.0%	2.73%	86.78%	100.0%	-
SLCE3	62.34%	66.16%	100.0%	-	32.64%	-	-	-	-	13.22%	-	-

Tabela 5.11: Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RP em 2022

	Data	2022-01	2022-02	2022-03	2022-04
Empresa					
CPFE3	-	74.83%	-	-	-
ELET3	-	-	100.0%	-	-
ELET6	-	-	-	100.0%	-
EMBR3	16.46%	1.71%	-	-	-
SLCE3	83.54%	23.46%	-	-	-

A carteira com maior retorno do trabalho, apresentou uma diversificação muito restrita com relação ao número de ativos por mês e o número de empresas no portfólio, foram em média 1.62 ativos por mês e apenas 6 empresas selecionadas durante os 16 meses.

O alto retorno do portfólio está atrelado a performances individuais das ações como SLCE3, ELET3 e ELET6 que dominam em grande parte a composição das carteiras mensais. Considerando a baixa diversidade da carteira, ela pode sofrer muito com erros de predição do modelo preditivo e a mudanças não captadas do mercado, já que possui baixa diversidade.

Apesar da baixa diversidade, a carteira só teve resultados negativos em cinco meses do período, junho, julho, agosto, outubro e novembro, com um resultado de -25.45% entre junho e novembro.

Tabela 5.12: Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RMH em 2021

	Data	2021-01	2021-02	2021-03	2021-04	2021-05	2021-06	2021-07	2021-08	2021-09	2021-10	2021-11	2021-12
Empresa													
BIDI11	-	-	-	-	-	-	-	-	26.6%	-	-	-	-
BPAN4	-	-	10.19%	-	55.8%	-	-	-	-	-	-	-	-
MGLU3	-	-	24.5%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
POSI3	-	-	-	-	18.36%	63.16%	13.21%	19.91%	10.31%	-	-	-	-
PRI03	100.0%	73.86%	31.42%	37.4%	25.84%	36.84%	86.79%	53.49%	89.69%	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%
WEGE3	-	26.14%	33.9%	62.6%	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 5.13: Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RMH em 2022

	Data	2022-01	2022-02	2022-03	2022-04
Empresa					
MRFG3	44.15%	-	-	-	-
PRI03	52.46%	24.38%	46.12%	100.0%	-
SLCE3	-	75.62%	53.88%	-	-
WEGE3	3.39%	-	-	-	-

Com maior diversificação que a estratégia de RP, o RMH também possuiu alocações majoritárias em apenas alguns ativos, como o PRIO3 que por 5 meses representou 100% da carteira alocada.

Em dois meses o retorno do portfólio foi acima de 20%, porém, assim como altos lucros o portfólio também apresenta 3 meses com prejuízos acima de 10%, o que evidencia um alto risco associado ao investimento nas carteiras construídas pela estratégia.

Tabela 5.14: Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RMB em 2021

Data	2021-01	2021-02	2021-03	2021-04	2021-05	2021-06	2021-07	2021-08	2021-09	2021-10	2021-11	2021-12
Empresa												
CIEL3	100.0%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
CSNA3	-	-	-	100.0%	-	-	-	-	-	-	-	-
ELET3	-	100.0%	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-
ENEV3	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	-	100.0%
PCAR3	-	-	-	-	100.0%	100.0%	100.0%	100.0%	-	-	-	-
POSI3	-	-	-	-	-	-	-	-	100.0%	100.0%	100.0%	-
SUZB3	-	-	100.0%	-	-	-	-	-	-	-	-	-

Tabela 5.15: Alocação mensal do portfólio otimizado com Utilidade Quadrática e RMB em 2022

Data	2022-01	2022-02	2022-03	2022-04
Empresa				
CSAN3	100.0%	91.64%	-	-
JBSS3	-	8.36%	-	-
PRIO3	-	-	-	100.0%
QUAL3	-	-	100.0%	-

O portfólio otimizado com a RMB não apresentou diversificação de ações, apontando somente uma ação para cada mês. Além do resultado com -28.60% de prejuízo, a estratégia se mostrou muito arriscada e associada somente a crescimentos individuais de ativos e não a combinações de séries para portfólios diversificados e robustos.

Minimização da variância

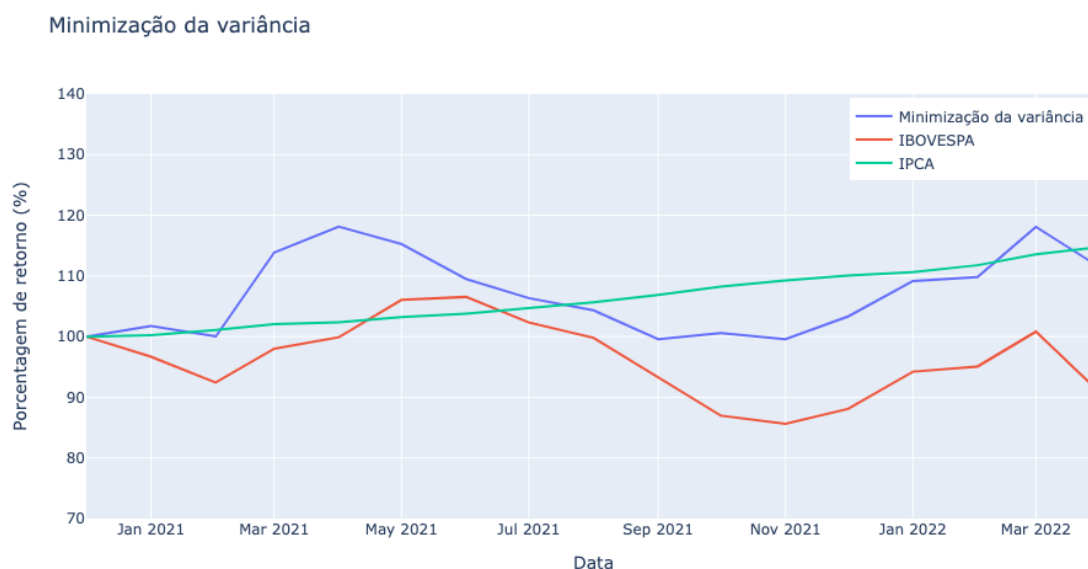
A última estratégia de otimização, a minimização da variância, não depende do retorno esperado assim como nos objetivos otimizados nas subseções anteriores. Com isso, a estratégia foi a que apresentou um menor desvio padrão entre os retornos mensais.

Tabela 5.16: Resultados do portfólio que minimiza a variância, comparado a dois *benchmarks* , IBOVESPA e IPCA

Data	Minimização da variância	IBOVESPA	IPCA
2021-01	1.75%	-3.32%	0.25%
2021-02	-1.70%	-4.37%	0.86%
2021-03	13.81%	6.00%	0.93%
2021-04	3.76%	1.94%	0.31%
2021-05	-2.41%	6.16%	0.83%
2021-06	-5.02%	0.46%	0.53%
2021-07	-2.87%	-3.94%	0.96%
2021-08	-1.86%	-2.48%	0.87%
2021-09	-4.55%	-6.57%	1.16%
2021-10	0.98%	-6.74%	1.25%
2021-11	-0.97%	-1.53%	0.95%
2021-12	3.74%	2.85%	0.73%
2022-01	5.66%	6.98%	0.54%
2022-02	0.59%	0.89%	1.01%
2022-03	7.54%	6.06%	1.62%
2022-04	-5.73%	-10.10%	1.06%
Total	11.33%	-9%	14.78%

A tabela acima ilustra o quanto a estratégia é menos arriscada que as estratégias anteriores, apesar de um lucro em março de 2021 de 13.81%, os lucros e prejuízos dos outros meses tiveram oscilações reduzidas. Um investidor conservador ainda se assustaria com alguns meses da carteira, porém, um investidor arrojado poderia facilmente se acostumar com as oscilações. Além disso, a estratégia teve um retorno positivo de 11.33% enquanto a IBOVESPA caiu 9% no mesmo período.

Figura 5.3: Retornos mensais da estratégia de otimização usando a minimização da variância, comparado a dois *benchmarks*, IBOVESPA e IPCA.



Fonte: Desenvolvida pelo autor

A Figura 5.3 mostra um fator interessante sobre a similaridade dos retornos e prejuízos da IBOVESPA aos do portfólio ótimo que minimiza a variância. Isso acontece porque o portfólio é balanceado e tende a ser mais próximo do cenário do mercado, porém, podemos observar que os retornos foram acima dos apresentados pela IBOVESPA e durante todo o período foram bem próximos ao IPCA.

Tabela 5.17: Alocação mensal do portfólio otimizado com minimização da variância em 2021

Data	2021-01	2021-02	2021-03	2021-04	2021-05	2021-06	2021-07	2021-08	2021-09	2021-10	2021-11	2021-12
Empresa												
BBSE3	9.85%	9.58%	9.64%	11.29%	11.16%	11.34%	11.17%	11.28%	11.27%	10.85%	10.92%	10.7%
CRFB3	5.44%	4.17%	3.44%	4.79%	4.29%	4.59%	4.64%	4.95%	4.64%	4.92%	4.87%	4.53%
EGIE3	4.61%	4.93%	5.68%	7.03%	7.09%	7.18%	7.38%	7.46%	7.33%	7.78%	8.22%	9.4%
KLBN11	2.87%	1.95%	3.24%	3.77%	3.88%	4.02%	4.0%	3.79%	3.8%	4.01%	3.88%	3.91%
PCAR3	3.8%	3.75%	3.56%	1.67%	1.56%	1.45%	1.41%	1.33%	1.22%	1.05%	-	-
RADL3	8.74%	8.93%	8.81%	8.68%	8.73%	8.26%	7.99%	7.89%	8.42%	8.14%	7.66%	8.09%
SLCE3	7.56%	7.59%	7.19%	7.8%	8.22%	8.94%	9.35%	9.24%	9.72%	8.98%	9.11%	8.04%
SUZB3	8.31%	9.68%	8.87%	8.66%	8.63%	9.05%	9.26%	9.45%	9.36%	9.22%	9.81%	10.65%
TAAE11	39.05%	39.56%	39.96%	36.52%	36.11%	35.16%	35.23%	35.08%	34.41%	35.51%	36.32%	36.25%
VIVT3	9.75%	9.86%	9.61%	9.78%	10.33%	10.02%	9.56%	9.54%	9.83%	9.53%	9.21%	8.43%

Tabela 5.18: Alocação mensal do portfólio otimizado com minimização da variância em 2022

Data	2022-01	2022-02	2022-03	2022-04
Empresa				
BBSE3	10.36%	9.52%	7.67%	4.19%
BRAP4	-	-	1.46%	1.17%
CRFB3	4.71%	4.31%	4.19%	1.18%
DXCO3	-	-	-	2.2%
EGIE3	10.16%	10.36%	10.66%	9.62%
ENBR3	-	-	-	5.62%
FLRY3	-	-	-	2.59%
JBSS3	-	-	-	2.94%
KLBN11	3.4%	2.91%	3.81%	4.85%
MRFG3	-	-	-	5.48%
RADL3	8.11%	7.81%	6.94%	2.75%
SLCE3	8.54%	8.96%	9.91%	5.73%
SUZB3	10.99%	11.44%	11.03%	7.85%
TAAE11	35.29%	36.1%	35.33%	23.19%
VALE3	-	-	-	8.81%
VIVT3	8.43%	8.58%	9.0%	11.83%

Com média de 12.2 ativos em carteiras por mês, a otimizador que minimiza a variância propôs o portfólio mais diversificado do trabalho e com isso, o menor risco para os investidores. Tal conclusão já era esperada pela proposta do otimizador, que é encontrar series temporais que minimizam o risco do investimento.

Além do alto número de ativos em carteira, os portfólios que foram propostos diversificam também o segmento das empresas, no mês de abril de 2022, por exemplo, as empresas da carteira representavam 11 segmentos diferentes.

Discussão de resultados

As metodologias apresentadas nas subseções anteriores trouxeram resultados interessantes em três aspectos, diversificação de carteira, variância de retornos e performance.

A carteira que combina as estratégias de RP e maximização de utilidade quadrática foi a que apresentou o maior retorno, porém, tem baixíssima diversificação de ativos e de segmentos

que os ativos estão.

Ações de um mesmo segmento podem sofrer junto com oscilações do mercado e se o modelo preditor não conseguir captar tais mudanças o resultado pode ser catastrófico para o portfólio. Um exemplo disso é o mês de outubro de 2021 onde a estratégia alocou 85.41% do portfólio em ELET6 que caiu 14% no mês.

Uma carteira que combina um resultado positivo surpreendente e um pouco mais de diversificação que a que utiliza maximização de utilidade quadrática é a carteira de maximização de Sharpe com o RP que obteve um resultado de 35.69% com em média 3.18 ações por mês no portfólio.

A carteira que possui a maior diversificação e ainda sim obteve resultados positivos, foi a carteira de minimização da variância que apresentou um lucro de 11.33% com em média 16.1 ações em carteira por mês.

As carteiras que consideram o RP conseguiram resultados que superam com louvor o IPCA (14.78%) e a IBOVESPA (-9%) no mesmo período, porém, as outras carteiras, como a de RMB obtiveram resultados piores aos que os do IPCA e da IBOVESPA. O portfólio que utiliza o RMH para maximização do Sharpe também perdeu para os dois índices, enquanto o de maximização da utilidade quadrática e o de minimização da variância foram superiores a IBOVESPA com resultado positivo de 8.53% e 11.33%, respectivamente, porém, inferiores ao IPCA.

Cada uma das três metodologias apresentadas poderia ser utilizada por diferentes perfis de investidores, a primeira, de maximização da utilidade quadrática seria indicada para um investidor disposto a correr altos riscos. A segunda carteira poderia ser utilizada por um investidor arrojado, mas não tão disposto a correr altos riscos e a terceira carteira, por investidores mais conservadores.

Tabela 5.19: Resultado consolidado de todas as estratégias de otimização com os retornos esperados

Resultado consolidado			
Otimizador	RMH	RP	RMB
Maximização do Sharpe	-21.39%	35.69%	-25.57%
Maximização da Utilidade Quadrática	8.53%	66.93%	-28.60%
Minimização da variância	11.33%		

5.3 Operação em carteiras ótimas

A etapa final da pesquisa proposta nessa dissertação envolve operações de compra e venda realizadas por um modelo preditivo. As tabelas de resultados foram divididas por estratégia para construção do retorno esperado que alimenta a otimização de portfólio.

A carteira com retorno esperado baseado no RMB é a que otimiza considerando a performance do modelo preditivo para compra e venda e esperasse que o resultado obtido seja superior as outras estratégias.

Utilidade quadrática

A estratégia de compra e venda usando o otimizador que maximiza utilidade quadrática, não obteve bons resultados quando comparada ao portfólio otimizado em *buy and hold*. Somente a versão que considerou o RP obteve resultado positivo, porém, em alguns meses com cenário de mercado positivo a estratégia apresentou prejuízo.

A metodologia que considera o RMB, apesar de ser a que foi construída para otimizar os retornos das operações de compra e venda foi a que culminou no maior prejuízo.

Todos os portfólios ótimos apresentaram resultados negativos em meses com cenários positivos, demonstrando a instabilidade e o risco das estratégias.

Tabela 5.20: Resultado das operações de compra e venda na carteira otimizada com Utilidade Quadrática

Utilidade Quadrática			
Data	RMH	RP	RMB
2021-01	20.76%	-1.78%	-2.65%
2021-02	-0.56%	9.79%	-6.17%
2021-03	-5.4%	8.66%	7.93%
2021-04	-0.49%	-3.97%	0.91%
2021-05	15.45%	1.62%	19.88%
2021-06	0.46%	10.87%	-10.18%
2021-07	-7.18%	-9.41%	-1.62%
2021-08	-10.2%	0.24%	-5.95%
2021-09	5.76%	-3.55%	8.43%
2021-10	26.45%	-0.25%	-9.31%
2021-11	-12.21%	-11.96%	3.01%
2021-12	-16.83%	-6.06%	-1.17%
2022-01	-5.29%	8.13%	-1.17%
2022-02	9.17%	7.17%	-4.11%
2022-03	0.33%	-3.04%	-15.16%
2022-04	-11.38%	-0.88%	-11.38%
Total	-1.92%	2.01%	-29.29%

Sharpe

As operações de compra e venda na carteira otimizada também apresentaram resultados negativos no total. Além disso, em meses em que o cenário do mercado foi positivo. A carteira com retorno esperado usando *backtest* foi a com pior performance, apresentando 11 dos 16 meses com resultado negativo.

Tabela 5.21: Resultado das operações de compra e venda na carteira otimizada com Sharpe

Sharpe			
Data	RMH	RP	RMB
2021-01	3.39%	-2.52%	2.42%
2021-02	-1.85%	8.38%	-2.75%
2021-03	-4.59%	6.39%	-0.8%
2021-04	-3.22%	-3.94%	1.18%
2021-05	8.26%	0.94%	5.88%
2021-06	5.33%	5.38%	-3.77%
2021-07	-2.99%	-7.97%	-1.63%
2021-08	-6.99%	-3.35%	-6.8%
2021-09	-2.13%	-2.44%	1.25%
2021-10	12.53%	3.76%	-6.47%
2021-11	-5.45%	-6.9%	2.46%
2021-12	-11.69%	-7.03%	-1.41%
2022-01	-1.71%	6.08%	-1.31%
2022-02	5.88%	7.42%	-1.79%
2022-03	-1.02%	-3.11%	-3.41%
2022-04	1.09%	0.65%	0.33%
Total	-7.68%	-0.53%	-16.07%

Minimização da variância

A estratégia de compra e venda com minimização de variância foi a que apresentou o melhor resultado da seção, apresentando 10.34% de lucro e um desvio padrão de apenas 1.59%. Além disso, os resultados negativos aconteceram somente em meses em que o mercado apresentou um cenário de baixa, tendo ainda sim, dois meses positivos nesse período.

Tabela 5.22: Resultado das operações de compra e venda na carteira otimizada com Minimização da variância

Data	Minimização da variância
2021-01	1.15%
2021-02	0.48%
2021-03	0.59%
2021-04	2.3%
2021-05	0.62%
2021-06	-0.99%
2021-07	-0.97%
2021-08	-3.06%
2021-09	-0.62%
2021-10	1.19%
2021-11	1.0%
2021-12	-0.79%
2022-01	1.46%
2022-02	3.07%
2022-03	1.19%
2022-04	3.45%
Total	10.34%

Discussão de resultados

Apesar de ser considerada a estratégia mais promissora dessa etapa, os resultados demonstraram o contrário, com os dois piores resultados dessa etapa. O otimizador que considera Sharpe teve um resultado de -16.07% de retorno e o resultado com utilidade quadrática foi extremamente negativo com -29.29%.

Os resultados negativos podem estar atrelados ao fato de que estratégias de otimização de portfólio consideram que as ações estarão em carteira durante todo o período de alocação. Compras e vendas do ativo durante o mês mudam a serie temporal que representa a carteira alocada no momento e, conseqüentemente, as propriedades otimizadas na carteira.

A única estratégia que obteve resultado superior ao do portfólio otimizado em *buy and hold* foi a de minimização de variância. Além do resultado superior a estratégia apresentou menor oscilação entre os resultados, o que pode indicar um menor risco associado ao investimento na carteira. Apesar do resultado positivo, nenhuma das estratégias superou o resultado acumulado do IPCA ao final do período que foi de 14.78%.

Tabela 5.23: Resultado consolidado das operações de compra e venda em todas as estratégias de otimização com os retornos esperados

Resultado consolidado			
Otimizador	RMH	RP	RMB
Maximização de Sharpe	-7.68%	-0.53%	-16.07%
Maximização de Utilidade Quadrática	-1.92%	2.01%	-29.29%
Minimização de variância		10.32%	

Capítulo 6

Conclusão

O presente trabalho apresentou estratégias de investimento que combinam otimização de portfólio e redes neurais recorrentes. O foco da pesquisa apresentada foi em entender como e em quais momentos as duas modelagens poderiam ser combinadas, trazendo duas alternativas, uma que usa o modelo preditivo para gerar o retorno esperado da otimização e outra que usa o modelo preditivo para operar em ações de um portfólio ótimo montado.

Os resultados e análises construídas trouxeram combinações de diferentes objetivos de otimização, como, maximização do Sharpe, maximização da utilidade quadrática e minimização da variância com diferentes formas de construir o parâmetro de retorno esperado dos otimizadores. Dentre as estratégias de *input* para o retorno esperado foram utilizadas duas com modelagem preditiva, uma que realizava a predição do valor da ação para o próximo mês e outra que usava o RMB das operações de compra e venda. Além disso, o RMH foi utilizado como *benchmark* para comparar com os resultados que combinam redes neurais e otimizadores.

Utilizar a previsão de um modelo preditivo como retorno esperado reduziu o erro com relação ao valor real em 49.8% quando comparado a estratégia de RMH comumente utilizada como baseline para otimizadores. Tal redução permitiu com que as otimizações fossem mais assertivas e atingissem os melhores resultados do projeto.

O otimizador com objetivo de maximizar Sharpe somente apresentou resultado positivo quando recebeu como *input* o RP, com resultados negativos apenas em momentos em que o mercado estava em queda. Além disso, os resultados gerados para o RP trouxeram diversificação de portfólio e um retorno final de 35.69%, valor muito superior ao IPCA (14.78%) e a IBOVESPA(-9%) no mesmo período. Os resultados com RMB e RMH apresentaram resultados iguais a -25.57% e -21.39%, respectivamente.

O otimizador que maximiza a utilidade quadrática apresentou o melhor resultado do projeto com o *input* do RP, 66.93%, porém, as carteiras apresentadas durante os meses não possuíram diversificação, com meses em que o portfólio sugeriu apenas uma empresa para investimento. O *input* do RMH, apesar de ter um resultado positivo, rendeu abaixo do IPCA, apresentou pequena diversificação e alta instabilidade com resultados negativos em meses onde o cenário do mercado era de alta. O RMB apresentou um resultado.

Para comparar os resultados com uma estratégia que não usa o retorno esperado como parâmetro, foi utilizada o otimizador que minimiza a variância. Tal portfólio apresentou menor

desvio padrão nos retornos mensais, obteve lucro, porém, os lucros obtidos foram menores que a inflação no período.

O resultado com remanejamento dos portfólios mensalmente apresentou resultados interessantes para o retorno esperado, com a maximização da utilidade quadrática, temos o melhor resultado do trabalho, porém, com pouca diversificação, fator que implica diretamente no risco associado a estratégia. Com um resultado também positivo, a maximização de Sharpe com o RP pode ser uma ótima opção para investidores que procuram maior diversificação.

A última etapa da modelagem proposta contempla na inserção do modelo preditivo utilizado para criar o RMB para operar nas carteiras ótimas geradas. Esperava-se que a otimização com RMB escolhesse ações que o modelo tem alta performance e que combinadas tem pouco risco para que operações de compra e venda desses ativos gerassem bom resultados. Entretanto, os otimizadores com RMB apresentaram resultados negativos e o portfólio foi exposto a um risco maior que o otimizado toda vez que não possuía em carteira comprada todos os ativos indicados pelo portfólio.

Para as outras combinações o resultado foi inferior ao IPCA e esse fator também pode estar vinculado a quebra das propriedades otimizadas em momentos onde ações do portfólio estão vendidas e a série temporal resultante não é mais a que representa a montada pelo otimizador. A estratégia que pareceu mais promissora foi utilizando a minimização da variância, onde o portfólio para operação apresentou alta diversificação e os resultados das operações trouxeram um retorno positivo e baixo desvio padrão dos resultados mensais.

Considerando todos os resultados apresentados, podemos concluir que operações de compra e venda em portfólios ótimos não apresentam uma combinação que aproveita do melhor das duas estratégias. Além disso, os resultados negativos mostram que caso um investidor venha a usar algumas das combinações propostas, existe uma grande chance de prejuízos no médio prazo.

A partir dos resultados de portfólio remanejados mensalmente temos duas abordagens promissoras com o RP que bateram todas as outras apresentadas na dissertação. Com isso, podemos concluir que acertar o retorno esperado para o próximo mês pode potencializar o resultado de carteiras otimizadas e que redes neurais recorrentes podem ser uma boa opção para essa tarefa.

Como contribuição científica esse trabalho trouxe a a validação do uso de técnicas preditivas como entrada de um otimizador e, além disso, evidenciou uma combinação onde o Sharpe Ratio ameniza efeitos de modelagens preditivas onde pode-se produzir anomalias. Outra combinação estudada foi a de operar em carteiras ótimas, porém, essa não obteve sucesso. Apesar de necessitar de uma maior investigação, essa hipótese trouxe a tona a invalidação de propriedades otimizadas no momento da desfiguração do portfólio para operação, e portanto, não demonstrou ser um estratégia viável para investimentos embasados.

6.1 Trabalhos futuros

A metodologia utilizada na dissertação e os resultados gerados abrem novas perspectivas de trabalhos futuros, que listamos a seguir:

- Analisar portfólios que apresentem estratégias que possibilitem um investimento real na bolsa, sempre considerando a alocação de uma ação inteira;
- Utilizar outros algoritmos, tais como o XGBoost e SARIMA para comparar com a LSTM;
- Testar outras formas de calcular o retorno esperado utilizando outras técnicas já implementadas na literatura
- Testar outras otimizações de portfólio como o BlackLitterman;
- Utilizar algoritmos que operam com linguagem natural, incorporando informações extras sobre os ativos; e
- Investir utilizando a estratégia.

Referências Bibliográficas

- Aguiar, A. S. (2004). *Estratégias de ofertas de geradoras em leilões de contratação de energia*.
- Akita, R., Yoshihara, A., Matsubara, T., & Uehara, K. (2016). Deep learning for stock prediction using numerical and textual information.
- Análise técnica no turfe: Análise gráfica de velas japonesas*. (2014, Dez). Retrieved from <https://www.academiadasapostasbrasil.com/blog/2014/12/analise-tecnica-no-turfe-analise-grafica-de-velas-japonesas-58>
- Ardia, D., Boudt, K., & Fleury, J.-P. G. (2017). Riskportfolios: Computation of risk-based portfolios in R.
- Bedo, M. V. N., Pereira dos Santos, D., S. Kaster, D., & Traina Jr, C. (2013). A similarity-based approach for financial time series analysis and forecasting. , 46.
- Chen, K., Yi, Z., & Fangyan, D. (2015). A lstm-based method for stock returns prediction : A case study of china stock market.
- C. Piazza, M. (2008). *Bem-vindo a bolsa de valores*. Novo Conceito Editora.
- DE MOURA, F. (2006). *O uso de redes neurais artificiais na previsão de tendências no mercado de ações* (PhD Thesis).
- DINH THI, M. N. (2006). *Forecasting and trading stock using technical analysis and neural fuzzy network* (DEGREE OF MASTER OF SCIENCE IN INFORMATION TECHNOLOGY).
- Di Persio, L., & Honchar, O. (2016). Artificial neural networks architectures for stock price prediction: comparisons and applications.
- Donkers, T., Loepf, B., & Daniel, J. (2017). Sequential user-based recurrent neural network recommendations. , 9.
- FERNANDES, A. M. d. R. (2003). *Inteligência artificial noções gerais*. Visual books.
- Gewalt, R. (2020, Oct). *Perceptrons – these artificial neurons are the fundamentals of neural networks*. Retrieved from <https://starship-knowledge.com/tag/indirect-feedback>
- Haykin, S. (2009). *Neural networks and learning machines*. Pearson.

- Heiken ashi strategies: It works. sometimes.* (n.d.). Retrieved from <https://www.tradingschools.org/heiken-ashi-strategies/>
- Hindman, R. J. (2011). *Cyclic and seasonal time series.* Retrieved from <https://robjhyndman.com/hyndsight/cyclclcts/>
- Hochreiter, S., & Schmidhuber, J. (1997). Long short-term memory.
- I. S. Silva, M., C. Guimaraes, E., & Tavares, M. (2008). Previsao da temperatura media mensal de uberlandia, mg, com modelos de series temporais.
- Keirsbilck, M. V., Keller, A., & Xiaodong, Y. (2019). Rethinking full connectivity in recurrent neural networks.
- Kempf, A., & Memmel, C. (2005). On the estimation of the global minimum variance portfolio.
- KRISTENSEN, H., RHOTEN, T., & COELHO, L. D. S. (2009). Comparação entre abordagens de previsão de series temporais baseadas em modelos holt-winters e redes neurais artificiais.
- Markowitz model.* (2021, Jun). Retrieved from <https://quantpedia.com/markowitz-model/>
- Medsker, L., & Jain, L. (2001). *Recurrent neural networks.* CRC Pressn.
- Mendenhall, W., E.Reinmuth, J., & J.Beaver, R. (1993). *Statistics for management and economics.*
- MINSKY, M. (1967). *The perceptron: A probabilistic model for information storage and organization in the brain.* Prentice-Hall.
- MORETTIN, P., & TOLOI, M. C. (2006). *Análise de séries temporais.* Ed. São Paulo:Egard Blucher.
- Mou, W., Zhou, Y., Gao, J., & Wang, L. (2018). Dropout training, data-dependent regularization, and generalization bounds. In *International conference on machine learning* (pp. 3645–3653).
- M. Pinheiro, M., & F. S. Gomes, C. (2008). Evolução do mercado acionario: Home broker - estudo de caso hsbc.
- Neira, A. C., & Filgueiras, I. (2020, Apr). *Número de pessoas físicas na b3 tem alta recorde e bate 2,24 milhões em março.* Retrieved from <https://valorinveste.globo.com/objetivo/hora-de-investir/noticia/2020/04/03/numero-de-pessoas-fisicas-na-b3-tem-alta-recorde-e-bate-224-milhoes-em-marco.ghtml>

- Nelson, D. M. Q., Pereira, A. C. M., & de Oliveira, R. A. (2017). Stock market's price movement prediction with lstm neural networks.
- Obeidat, S., Shapiro, D., Lemay, M., Kate MacPherson, M., & Bolic, M. (2018). Adaptive portfolio asset allocation optimization with deep learning.
- Olah, C. (2015, Aug). *Understanding lstm networks*. Retrieved from <http://colah.github.io/posts/2015-08-Understanding-LSTMs/>
- Omisore, I., Yusuf, M. O., & Christopher, N. (2012). The modern portfolio theory as an investment decision tool.
- Qiyuan, G. (2016). *Stock market forecasting using recurrent neural network*.
- Quintão Paiva, L. H. (2014). Proposta e análise métodos de previsão de séries temporais na tomada de decisão para investimentos em ações.
- ROSENBLATT, F. (1958). *Computation: finite and infinite machines*.
- Sak, H., Senior, A., & Beaufays, F. (2014). Long short-term memory based recurrent neural network architectures for large vocabulary speech recognition.
- S. EHLERS, R. (2009). *Analise de series temporais*.
- Tucci Chaves, D. A. (2004). Analise tecnica e fundamentalista: divergencias, similaridades e complementariedades.
- Valcu, D. (2004). *Technical analysis of stocks commodities*.