UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática
Dissertação de Mestrado

Reyssila Franciane Dutra do Nascimento

Generalizações de anéis regulares e anéis nil limpos

Belo Horizonte

2019

Reyssila Franciane Dutra do Nascimento

Generalizações de anéis regulares e anéis nil limpos

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rafael Bezerra dos Santos

Belo Horizonte

2019

Nascimento, Reyssila Franciane Dutra do.

N244g Generalizações de anéis regulares e anéis nil limpos [manuscrito] / Reyssila Franciane Dutra do Nascimento – 2019.
66 f. il.

Orientador: Rafael Bezerra dos Santos.
Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.64-66.

1. Matemática – Teses. 2. Anéis (Álgebra)– Teses. 3. Anéis de grupo – Teses. I. Santos Rafael Bezerra dos. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV.Título.

CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Generalizações de anéis regulares e anéis nil limpos

REYSSILA FRANCIANE DUTRA DO NASCIMENTO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Profa. Ana Cristina Vieira
UFMG

Prof. John William MacQuarrie
UFMG

Prof. Viktor Bekkert
UFMG

Belo Horizonte, 26 de setembro de 2019.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me permitir errar, aprender e crescer, pela força e a luz nos momentos difíceis nesta caminhada. Agradeço ao meu professor orientador Rafael Bezerra dos Santos, pela disponibilidade, paciência, dedicação, atenção, e incentivo durante a elaboração do mesmo. Agradeço à professora Ana Cristina Vieira e aos professores John William MacQuarrie e Viktor Bekkert por participar da avaliação deste trabalho e das valiosas sugestões. Agradeço aos meus pais, ao meu marido pelo apoio incondicional e aos familiares e amigos pelo companheirismo em todos os momentos.

Aos meus pais,

Eliane e Francisco.

Resumo

Neste trabalho, falaremos sobre anéis regulares, fortemente regulares, π-regulares, fortemente π-regulares, limpos e nil limpos. Os elementos regulares foram definidos em 1936, por von Neumann. Em 1939, McCoy apresentou uma generalização desses elementos, definindo os elementos π-regulares. Já em 1954, Azumaya define os elementos fortemente π-regulares e em 1977 Nicholson define os anéis limpos. Nos últimos anos, com as investigações sobre limpeza em anéis surge a classe dos anéis nil limpos, formulada por Diesl. Como consequência desse estudo, apresentamos propriedades destas classes de anéis e como elas se relacionam.

Palavras-chaves: Anel regular. Anel fortemente regular. Anel π-regular. Anel fortemente π-regular. Anel limpo. Anel nil limpo.

Abstract

In this work, we will talk about regular rings, strongly regular rings, π-regular rings, strongly π-regular rings, clean rings and nil clean rings. The regular elements were defined in 1936 by von Neumann. In 1939, McCoy generalized these elements and defined the π-regular elements. In 1954, Azumaya defined the strongly π-regular elements and in 1977 Nicholson defined the clean rings. In the last years, with the study of clean rings, has emerged the class of nil clean rings, formulated by Diesl. As a consequence of this study, we present properties of these ring classes and how they are related.

Keywords: Regular ring. Strongly regular ring. π-regular ring. Strongly π-regular rings. Clean ring. Nil clean rings.

Sumário

Capítulo 1

Introdução

Nos últimos séculos, vários problemas em Teoria de Anéis surgiram e alguns, até hoje, encontram-se sem solução. Na tentativa de solucioná-los, vários matemáticos desenvolveram novas técnicas e surgiram novas classes de anéis.

Nesta dissertação trabalharemos com anéis associativos com unidade. O objetivo principal desta dissertação é estudar a teoria e os resultados que relacionam as classes dos anéis limpos, fortemente limpos, regulares, fortemente regulares, π-regulares, fortemente π-regulares, nil limpos e fortemente nil limpos.

Em 1936 [23], von Neumann definiu que um elemento $a \in R$ é regular se $a = aba$ para algum $b \in R$. Um elemento $a \in R$ é chamado fortemente regular se existe um elemento $x \in R$ tal que $a = a^2x$ com $ax = xa$. Um anel R é chamado regular (fortemente regular) se todos os elementos são regulares (fortemente regulares).

Em 1939 [17], McCoy generalizou a noção de anéis regulares para anéis π- regulares. Um elemento $a \in R$ é chamado π-regular se a^n é regular para algum inteiro positivo n. O anel R é π-regular se todo elemento de R é

π-regular.

Arens-Kaplansky [1] e Kaplansky [12] investigaram anéis π-regulares e anéis em que para todo elemento $a \in R$, existem elementos $x, y \in R$ e inteiros positivos m, n tal que $a^m = a^{m+1}x$ e $a^n = ya^{n+1}$. Em 1954 [2], Azumaya chamou tais elementos de fortemente π-regulares. Os elementos fortemente π-regulares são uma generalização dos elementos fortemente regulares.

Dizemos que um anel é limpo se todo elemento pode ser escrito como a soma de uma unidade e um idempotente. Dizemos que um anel é fortemente limpo se ele é limpo e a unidade e o idempotente comutam. A propriedade de limpeza em anéis foi formulada por Nicholson em 1977 [20] ao estudar levantamentos de idempotentes módulo ideais à esquerda (direita) do anel.

Em 1988, Burgess e Menal [3] provaram que todo anel fortemente π-regular é fortemente limpo e, em 1999 [19], Nicholson mostrou que todo elemento fortemente π-regular é fortemente limpo. Com isso, temos que anéis fortemente limpos são uma generalização de anéis fortemente π-regulares.

Nos últimos anos, com as investigações sobre anéis limpos e propriedades fortemente limpas, Diesl desenvolveu uma teoria geral, baseada em idempotentes e decomposição de elementos, que unificou alguns conceitos existentes relacionados à limpeza e regularidade. Surgiram duas classes de anéis: os anéis nil limpos e os anéis fortemente nil limpos [7]. Esses anéis foram caracterizados pelo fato de todos os seus elementos ser a soma de um idempotente e um nilpotente. No caso do anel fortemente nil limpo, o idempotente e o elemento nilpotente comutam.

Este trabalho está estruturado em quatro capítulos. No Capítulo 1, definimos elementos idempotentes e nilpotentes. Falamos sobre a decomposição de Peirce, levantamentos de idempotentes e enunciamos alguns resultados envolvendo o radical de Jacobson.

No Capítulo 2, definimos anéis regulares, anéis fortemente regulares, anéis π-regulares, anéis fortemente π-regulares e demonstramos o Lema de Azumaya, o qual relaciona os elementos fortemente π-regulares, fortemente regulares e regulares.

No Capítulo 3, iniciamos o estudo de anéis limpos. Provamos que anéis de matrizes com coeficientes em um anel limpo é limpo e descrevemos uma nova classe de anéis limpos.

No Capítulo 4, estudamos anéis nil limpos e fortemente nil limpos. Utilizamos informações dos capítulos anteriores para demonstrar os resultados que conectam anéis fortemente limpos, anéis fortemente regulares, anéis fortemente π-regulares e anéis fortemente nil limpos.

Capítulo 2

Resultados preliminares

Neste capítulo apresentaremos alguns resultados sobre teoria de anéis. O leitor interessado pode encontrar os resultados desse capítulo nas referências [9, 14, 16].

2.1 Anéis

Seja R um conjunto não vazio munido de duas operações binárias, denotadas soma $(+)$ e multiplicação $(\cdot)$. Dizemos que R é um anel se para todo a, b e $c \in R$, as seguintes propriedades são verdadeiras:

1. $a + (b + c) = (a + b) + c$;

2. existe um elemento $0 \in R$ tal que $a + 0 = 0 + a = a$;

3. para todo $a \in R$, existe $-a \in R$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$;

4. $a + b = b + a$;

5. $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$;

6. $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$;

7. $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$.

Denotaremos o produto $a\cdot b = ab$. Se $ab = ba$, dizemos que R é um anel comutativo.

No anel R, se existe um elemento $1 \in R$ tal que $1a = a1 = a$ para todo $a \in R$, então dizemos que R é um anel com unidade. Salvo menção ao contrário, ao longo deste trabalho, R denotará um anel com unidade.

Exemplo 2.1.1. Os conjunto dos números inteiros $\mathbb{Z}$, racionais $\mathbb{Q}$ e reais $\mathbb{R}$ são anéis comutativos com unidade.

Exemplo 2.1.2. O conjunto $R[x]$ composto por elementos da forma $\sum_{i\in I} a_i x^i$ com $a_i \in R$ não nulo para uma quantidade finita de $i's$ possui estrutura de anel definindo a soma $\sum_{i\in I} a_i x^i + \sum_{i\in I} b_i x^i = \sum_{i\in I}(a_i+b_i)x^i$ e o produto $\left(\sum_{i\in I} a_i x^i\right)\left(\sum_{j\in I} b_j x^j\right) = \sum_{i,j\in I} a_i b_j x^{i+j}$. Esse anel é chamado anel de polinômios na variável x. Observamos que o anel de polinômios $R[x]$ é comutativo se, e somente se, R é um anel comutativo.

Definimos $R[x_1, x_2] = R[x_1][x_2]$ e, indutivamente, definimos o anel de polinômios em k variáveis com coeficientes no anel R por $R[x_1, \ldots, x_k] = (R[x_1, \ldots, x_{k-1}])[x_k]$. Analogamente, definimos $R[x_1, x_2, \ldots]$.

Exemplo 2.1.3. Seja R um anel. O conjunto $M_n(R)$ quando $n > 1$ das matrizes de ordem n com entradas em R, com as operações de adição e multiplicação usuais é um anel não comutativo.

Exemplo 2.1.4. Seja $\{R_i\}_{i\in I}$ uma família de anéis. O conjunto $\prod_{i\in I} R_i = \{(x_1, x_2, \ldots) : x_i \in R_i\}$ possui estrutura de anel definindo a soma $x + y = (x_1, x_2, \ldots) + (y_1, y_2, \ldots) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots)$ e o produto $xy = (x_1, x_2, \ldots)(y_1, y_2, \ldots) = (x_1 x_2, y_1 y_2, \ldots)$. O anel $\prod_{i\in I} R_i$ é chamado de produto direto dos anéis R_i.

Exemplo 2.1.5. Seja $\{R_i\}_{i \in I}$ uma família de anéis. O conjunto $\sum_{i\in I} R_i$ composto por elementos da forma $\sum_{i\in I} x_i$, com x_i não nulo para uma quantidade finita de $i's$, possui estrutura de anel definindo a soma $\sum_{i\in I} x_i + \sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I}(x_i + y_i)$ e o produto $\sum_{i\in I} x_i \sum_{i\in I} y_i = \sum_{i\in I} x_i y_i$. O anel $\sum_{i\in I} R_i$ é chamado de soma direta dos anéis R_i. Observamos que quando a quantidade de elementos em I é infinita, então esse será um anel sem unidade.

A seguir, daremos um exemplo de um conjunto que não é anel.

Exemplo 2.1.6. Consideremos o conjunto dos números naturais $\mathbb{N}$. Como os elementos de $\mathbb{N}$ não possuem inverso aditivo, isto é, não satisfaz o item 3 da definição de anel, temos que $\mathbb{N}$ não é um anel.

Definição 2.1.7. *Sejam R um anel e $a \in R$. Dizemos que a tem inverso à esquerda (à direita) se existe $b \in R$ tal que $ba = 1$ $(ab = 1)$. Se a tem inverso à esquerda e à direita, dizemos que a é invertível.*

Denotaremos por $U(R)$ o conjunto dos elementos invertíveis de R.

Suponha que $a \in R$ admite inverso à direita e à esquerda. Então, existem $b, c \in R$, tais que $ca = 1$ e $ab = 1$. Assim, $c = c1 = cab = 1b = b$. Portanto, se a tem inverso à direita e à esquerda, eles são iguais. Denotaremos o inverso de a por a^{-1}.

Se $R - \{0\} = U(R)$, dizemos que R é um anel de divisão. Vejamos alguns exemplos de anéis de divisão.

Exemplo 2.1.8. Consideremos o conjunto $\mathbb{H}_{\mathbb{R}} = \{\alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k : \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}\}$ tal que $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$, $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$. Dados $a = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ e $b = \beta_0 + \beta_1 i + \beta_2 j + \beta_3 k \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ e definindo a soma e o produto respectivamente:

(i) $a + b = (\alpha_0 + \beta_0) + (\alpha_1 + \beta_1)i + (\alpha_2 + \beta_2)j + (\alpha_3 + \beta_3)k;$

(ii) $ab = (\alpha_0\beta_0 - \alpha_1\beta_1 - \alpha_2\beta_2 - \alpha_3\beta_3) + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0 + \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2)i + (\alpha_0\beta_2 + \alpha_2\beta_0 + \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3)j + (\alpha_0\beta_3 + \alpha_3\beta_0 + \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)k.$

Temos que $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ é um anel com elemento neutro $0 = 0 + 0i + 0j + 0k$ e unidade $1 = 1 + 0i + 0j + 0k$. Se $a = \alpha_0 + \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k \neq 0$, então $\alpha_i \neq 0$ para algum $i = 0, 1, 2, 3$. Denotando por $c = \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \neq 0$, temos que $d = \frac{\alpha_0}{c} - \frac{\alpha_1}{c}i - \frac{\alpha_2}{c}j - \frac{\alpha_3}{c}k \in \mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ é o inverso de a. Assim, $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ é um anel não comutativo em que todos os elementos não nulos são invertíveis. Portanto, $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ é um anel de divisão não comutativo.

Definição 2.1.9. *Um anel de divisão comutativo é chamado de corpo.*

Exemplo 2.1.10. O conjunto dos números racionais $\mathbb{Q}$, reais $\mathbb{R}$ e complexos $\mathbb{C}$ são corpos.

Definição 2.1.11. *Sejam R um anel e S um subconjunto não vazio de R. Dizemos que S é um subanel de R se é fechado sob as operações de soma e multiplicação de R, ou seja, se S é um anel com as operações de R.*

Exemplo 2.1.12. O anel $\mathbb{Z}$ é um subanel de $\mathbb{Q}$.

Exemplo 2.1.13. Seja R um anel. O conjunto $Z(R) = \{a \in R : ax = xa, \forall x \in R\}$ é chamado de centro de um anel e é um subanel de R.

Exemplo 2.1.14. O subconjunto de $M_n(R)$ constituído de todas as matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em R é um subanel de $M_n(R)$. Denotaremos tal subanel por $UT_n(R)$.

Definição 2.1.15. *Sejam R um anel e I um subconjunto não vazio de R. Dizemos que I é um ideal à esquerda de R se as seguintes condições são verdadeiras:*

(i) *Se $x, y \in I$, então $x - y \in I$;*

(ii) *Se $x \in I$ e $a \in R$, então $ax \in I$.*

Denotaremos os ideais à esquerda de R por $I \trianglelefteq_l R$.

Analogamente definimos ideal à direita de um anel R ($I \trianglelefteq_r R$). Se I é um ideal à esquerda e à direita de R, dizemos que I é um ideal (bilateral) de R e será denotado por $I \trianglelefteq R$.

Se R é um anel não nulo, então R possui pelo menos dois ideais, que são o $\{0\}$ e o próprio R. Esses ideais são chamados ideais triviais. Se I é um ideal de R tal que I é diferente de R, dizemos que I é um ideal próprio de R.

Dizemos que um anel é simples se os únicos ideais são os triviais. Todo anel de divisão é simples.

Ideais próprios não nulos não contêm elementos invertíveis. De fato, se I é um ideal próprio não nulo à esquerda de R e $a \in I$ é invertível, então $1 = a^{-1}a \in I$ e assim, $x = x1 \in I$ para todo $x \in R$.

Exemplo 2.1.16. Os ideais do anel $\mathbb{Z}$ são da forma $n\mathbb{Z}$, para algum $n \in \mathbb{Z}$. De fato, dado I um ideal de $\mathbb{Z}$, se $I = \{0\}$ então $I = 0\mathbb{Z}$ e temos o resultado. Se $I \neq \{0\}$, então $I \cap \mathbb{N} \neq \emptyset$. Seja $n = min\{I \cap \mathbb{N}\}$. Provemos que $I = n\mathbb{Z}$. Como $n \in I$, $n\mathbb{Z} \subseteq I$, pois I é um ideal de $\mathbb{Z}$. Vamos mostrar que $I \subseteq n\mathbb{Z}$. Dado $b \in I$, se $b = 0$ então $b = n0 \in n\mathbb{Z}$. Suponha que $b \neq 0$. Podemos assumir, sem perda de generalidade, que $b > 0$. Pelo algoritmo da divisão euclidiana, existem q, $r \in \mathbb{Z}$ tais que $b = nq + r$ com $0 \leq r < n$. Como $r = b - nq$ e b, $n \in I$, temos que $r \in I$, mas $r < n$, então $r = 0$ e temos que $b = nq$. Logo, $b \in I$ e $I \subseteq n\mathbb{Z}$. Portanto, $I = n\mathbb{Z}$.

Ideais à direita não necessariamente são ideais à esquerda, como veremos no próximo exemplo.

Exemplo 2.1.17. Sejam A um anel e $R = M_2(A)$. Denotamos por e_{ij} as matrizes que possuem 1 na posição (i, j) e 0 nas demais. Os conjuntos

$$L_1 = \{xe_{11} + ye_{21} : x, y \in A\},$$

$$L_2 = \{xe_{12} + ye_{22} : x, y \in A\},$$

são ideais à esquerda de R, mas não são ideais à direita. Analogamente, os conjuntos

$$R_1 = \{xe_{11} + ye_{12} : x, y \in A\},$$

$$R_2 = \{xe_{21} + ye_{22} : x, y \in A\},$$

são ideais à direita de R, mas não são ideais à esquerda.

Exemplo 2.1.18. Sejam R um anel e $a \in R$. O conjunto dos múltiplos à esquerda de a, escrito da forma $Ra = \{xa : x \in R\}$, é um ideal à esquerda de R. Esse ideal é chamado ideal à esquerda de R gerado por a. O elemento a é chamado gerador de Ra. O conjunto RaR de todas as somas finitas da forma $\sum_i x_i a y_i$, com x_i, $y_i \in R$, é um ideal de R, chamado de ideal principal gerado por a denotado por $\langle a \rangle$.

Exemplo 2.1.19. Sejam R um anel e I_1, I_2 ideais à esquerda (à direita, bilaterais). O conjunto $I_1 + I_2 = \{x_1 + x_2 : x_1 \in I_1, x_2 \in I_2\}$ é um ideal à esquerda (à direita, bilateral) de R.

Exemplo 2.1.20. Seja $\{J_i : i \in I\}$ uma família de ideais à esquerda (à direita, bilaterais) de R. O conjunto $\bigcap_{i \in I} J_i$ é um ideal à esquerda (à direita, bilateral) de R.

Definição 2.1.21. *Seja X um subconjunto de um anel R. Seja $\{J_i : i \in I\}$ a família de todos os ideais à esquerda de R que contém X. O ideal $\bigcap_{i \in I} J_i$ é chamado de ideal à esquerda gerado por X. Denotaremos esse ideal por $\langle X \rangle$.*

Os elementos de X são os geradores do ideal $\langle X \rangle$. Se $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, então o ideal $\langle X \rangle$ será denotado por $\langle x_1, x_2, \ldots, x_n \rangle$.

Definição 2.1.22. *Sejam R, S anéis. Uma aplicação $f : R \longrightarrow S$ é um homomorfismo de anéis se para todo $a, b \in R$, temos:*

(i) $f(a+b) = f(a) + f(b)$;

(ii) $f(ab) = f(a)f(b)$.

Se f é um homomorfismo injetor e sobrejetor, dizemos que f é um isomorfismo. Neste caso, dizemos que R é isomorfo a S e escrevemos $R \simeq S$.

Definição 2.1.23. *Sejam R e S anéis. Dado $f : R \longrightarrow S$ um homomorfismo de anéis, chamam-se imagem de f e o núcleo de f, respectivamente, os conjuntos:*

$$Im(f) = \{y \in S : (\exists x \in R) f(x) = y\};$$

$$Ker(f) = \{x \in R : f(x) = 0\}.$$

Exemplo 2.1.24. *Sejam R, S anéis e $f : R \longrightarrow S$ um homomorfismo. Temos que a imagem de f é um subanel de S e o núcleo de f é um ideal de R.*

Definição 2.1.25. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Defina $R/I = \{\overline{x} = x + I : x \in R\}$. O conjunto R/I é um anel com as seguintes operações:*

(i) $\overline{x} + \overline{y} = \overline{x+y}$ *(soma)*;

(ii) $\overline{x} \cdot \overline{y} = \overline{xy}$ *(produto)*.

Chamamos esse anel de anel quociente de R por I.

Exemplo 2.1.26. Consideremos o anel $\mathbb{Z}$ e o ideal $n\mathbb{Z}$ com $n \geq 2$. Então, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \{a + n\mathbb{Z} : a \in \mathbb{Z}\}$. Denotaremos tal quociente por $\mathbb{Z}_n$.

Exemplo 2.1.27. Seja $f : \mathbb{Z}_2 \longrightarrow \mathbb{Z}_6$ o homomorfismo de anéis definido por $f(\overline{0}) = \overline{0}$ e $f(\overline{1}) = \overline{3}$. Observe que $Im(f) = \{\overline{0}, \overline{3}\} \subseteq \mathbb{Z}_6$ é um subanel e a imagem da unidade não é unidade.

Definição 2.1.28. *Dizemos que I é um ideal maximal de um anel R se $I \neq R$ e dado qualquer ideal J de R tal que $I \subseteq J \subseteq R$ temos que ou $I = J$ ou $J = R$.*

Exemplo 2.1.29. Considere o anel $\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\}$ e o subconjunto $I = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. I é um ideal de $\mathbb{Z}_4$ maximal, pois, dado qualquer ideal $I \neq J$ temos que, esse ideal contém $\overline{1}$ ou $\overline{3}$, que são elementos invertíveis. Logo, $J = R$ e segue o resultado.

Definição 2.1.30. *Dado $x \in R$, dizemos que x é nilpotente se existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x^n = 0$. O menor n que satisfaz essa propriedade é chamado índice de nilpotência de x.*

Denotaremos por $Nil(R)$ o conjunto dos elementos nilpotentes de R. Observamos que se $b \in Nil(R)$, então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $b^n = 0$. Logo $1 = (1+b)((-1)^{n-1}b^{n-1} + \cdots + b^2 - b + 1)$ e assim $1 + b$ possui inverso à direita. Pelo mesmo argumento utilizado acima vemos que $1 + b$ possui inverso à esquerda. Portanto, se b é nilpotente, então $1 + b$ é invertível.

Se R é um anel comutativo, então $Nil(R)$ é um ideal de R. De fato, dados x e $y \in Nil(R)$, temos que $x^n = 0$ e $y^m = 0$ para algum n e $m \in \mathbb{N}$. Como estamos supondo que R é comutativo, temos que $(rx)^n = r^n x^n = r^n 0 = 0$. Logo, $rx \in Nil(R)$ para todo $r \in R$. Considere $mmc(m, n) = k$. Então, como estamos supondo que R é comutativo, pelo Teorema do Binômio de Newton, temos que $(x - y)^k = 0$. Portanto, $x - y \in Nil(R)$.

Além disso, é fácil ver que elementos nilpotentes não são invertíveis.

Definição 2.1.31. *Seja I um ideal de R. Dizemos que I é um ideal nil se todo elemento é nilpotente. O ideal I é chamado de nilpotente se $I^n = \{0\}$ para algum $n \in \mathbb{N}$, onde*

$$I^n = I \cdots I = \left\{ \sum a_1 \cdots a_n : a_i \in I \right\}.$$

Exemplo 2.1.32. Sejam $A = UT_3(R)$ e I o ideal de A formado pelas matrizes triangulares estritamente superiores. Dado $M \in I$ temos que $M^3 = 0$. Logo I é um ideal nil de A. Observe que para quaisquer matrizes A_1, A_2, $A_3 \in I$, temos que $A_1A_2A_3 = 0$, logo I é nilpotente.

Note que um ideal I de um anel R é nilpotente se, e somente se, existe um inteiro positivo n tal que $a_1a_2 \cdots a_n = 0$ para qualquer escolha de elementos $a_1, a_2, \ldots, a_n \in I$. Consequentemente, todo ideal nilpotente é nil com expoente limitado, mas a recíproca não é verdadeira.

Exemplo 2.1.33. Seja $R = \mathbb{Z}[x_1, x_2, x_3, \ldots]/\langle x_1^2, x_2^3, x_3^4, \ldots\rangle$. Considere $I = \langle \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \ldots\rangle$. Temos que I é um ideal nil, mas não é nilpotente.

Definição 2.1.34. *Seja R um anel. Dizemos que R é um anel local se $R - U(R)$ é um ideal de R.*

Exemplo 2.1.35. Seja $R = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : n \text{ é ímpar}\}$. Então, $U(R) = \{\frac{m}{n} \in R : m \text{ é ímpar}\}$. Note que $R - U(R) = \{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}; m \text{ é par e } n \text{ é ímpar}\}$ é um ideal de R. Portanto, R é um anel local.

A partir de agora, faremos algumas considerações sobre o radical de Jacobson de um anel que serão úteis ao longo do trabalho.

O Lema 2.4.3 de [16] garante a existência de ideais maximais à esquerda em anéis com unidade. Logo, temos a seguinte definição.

Definição 2.1.36. *O radical de Jacobson do anel R, denotado por $J(R)$, é a interseção de todos os ideais maximais à esquerda de R.*

A Proposição 2.7.4 de [16] garante que o radical de Jacobson é um ideal bilateral de R e $J(R) \neq R$, pela definição de ideal maximal. Vejamos alguns exemplos de radicais de Jacobson.

Exemplo 2.1.37. Se R é simples, então $J(R) = \{0\}$.

Exemplo 2.1.38. $J(\mathbb{Z}) = \bigcap\limits_{p-primo} p\mathbb{Z} = \{0\}$.

Exemplo 2.1.39. $J(R/J(R)) = \{\overline{0}\}$.

Exemplo 2.1.40. $J(UT_2(R)) = \begin{pmatrix} J(R) & R \\ 0 & J(R) \end{pmatrix}$.

Exemplo 2.1.41. $J(M_n(R)) = M_n(J(R))$.

A seguir apresentaremos uma caracterização do radical de Jacobson.

Proposição 2.1.42. *Seja R um anel. Então $x \in J(R)$ se, e somente se, uma das condições abaixo é satisfeita.*

1. $1 + ax$ *tem inverso à esquerda para todo* $a \in R$;
2. $1 + xb$ *tem inverso à direita para todo* $b \in R$;
3. $1 + axb$ *tem inverso para todo* $a, b \in R$.

Um outro resultado interessante é:

Proposição 2.1.43. *Seja R um anel. Se $x \in J(R)$, então $1 + x \in U(R)$. Além disso, $J(R)$ é o maior ideal com essa propriedade.*

Veremos agora uma caracterização para elementos invertíveis em um anel.

Lema 2.1.44. *Dado um anel R e um ideal $I \subseteq J(R)$, um elemento $\overline{x}$ é invertível em R/I se, e somente se, x é invertível em R.*

Demonstração. Se $\overline{x} \in U(R/I)$, então existe $\overline{y} \in R/I$ tal que $\overline{y}\ \overline{x} = \overline{1}$, implicando em $\overline{yx - 1} = \overline{0}$ e $yx - 1 \in I$. Como $I \subseteq J(R)$, pela Proposição 2.1.43 temos que $1 + (yx - 1) \in U(R)$ isto é $yx \in U(R)$, portanto existe $z \in R$

tal que $z(yx) = (zy)x = 1$ e x admite inverso à esquerda. Analogamente mostramos que x admite inverso à direita. Portanto $x \in U(R)$.

Reciprocamente se $x \in U(R)$ então existe $y \in R$ tal que $xy = yx = 1$. Assim, $\overline{x}\,\overline{y} = \overline{1}$ e $\overline{y}\,\overline{x} = \overline{1}$, portanto $\overline{x} \in U(R/I)$. $\square$

O próximo resultado mostra uma relação entre ideais nil e o radical de Jacobson de um anel.

Lema 2.1.45. *Todo ideal nil está contido no radical de Jacobson.*

Demonstração. Dado I um ideal nil do anel R e $x \in I$ não nulo, $ax \in I$ para todo $a \in R$. Logo, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(ax)^n = 0$. Observe que $1 = 1-(ax)^n = ((ax)^{n-1}+(ax)^{n-2}+\cdots+(ax)+1)(1-ax)$. Assim, $1-ax$ admite inverso à esquerda para todo $a \in R$. Portanto $x \in J(R)$ e $I \subseteq J(R)$. $\square$

Definição 2.1.46. *Um anel é artiniano à esquerda se toda cadeia descendente de ideais à esquerda é estacionária, ou seja, se $A_i \trianglelefteq_l R$ e $A_1 \supset A_2 \supset \cdots$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $A_i = A_k$, para todo $i \geq k$.*

Exemplo 2.1.47. Seja R um anel de divisão. Todo anel de divisão é artiniano, pois como possui apenas os ideais triviais, a única cadeia é $R \supset \{0\}$, a qual estaciona.

Exemplo 2.1.48. O anel $\mathbb{Z}$ não é artiniano, pois a cadeia $2\mathbb{Z} \supset 4\mathbb{Z} \supset 8\mathbb{Z} \supset \cdots \supset 2^n\mathbb{Z} \supset \cdots$ não estaciona.

Exemplo 2.1.49. Todo anel com um número finito de ideais é artiniano. Em particular, todo anel finito é artiniano.

Definição 2.1.50. *Seja $\{R_i\}_{i\in I}$ uma família de subanéis de um anel R. Dizemos que L é a soma direta dessa família, e escrevemos $L = \oplus_{i\in I} R_i$, se:*
(i) $L = \sum_{i\in I} R_i$;
(ii) $R_i \cap \left(\sum_{j\neq i} R_j\right) = \{0\}$, *para todo* $i \in I$.

Definição 2.1.51. *Dizemos que o anel R é semissimples se todo ideal à esquerda é um somando direto, ou seja, se I é um ideal à esquerda de R, então existe L ideal à esquerda de R tal que $R = I \oplus L$.*

Nem todo anel é semissimples. De fato, como vimos no Exemplo 2.1.16, os ideais em $\mathbb{Z}$ são da forma $n\mathbb{Z}$ para $n \in \mathbb{Z}$. Logo, para quaisquer ideais em $\mathbb{Z}$, $n\mathbb{Z}$ e $m\mathbb{Z}$, com $m, n \in \mathbb{Z} - \{0\}$, temos que $m\mathbb{Z} \cap n\mathbb{Z} = mmc(m,n)\mathbb{Z} \neq \{0\}$.

A seguir, temos o Teorema de Wedderburn-Artin que caracteriza os anéis semissimples.

Teorema 2.1.52 (Wedderburn-Artin)**.** *Um anel R é semissimples se, e somente se, é isomorfo a uma soma direta de anéis de matrizes sobre anéis de divisão, isto é,*

$$R \simeq M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s).$$

Além disso, esta decomposição é única a menos de isomorfismos dos anéis de divisão e da reordenação dos índices.

O teorema a seguir nos dá uma caracterização de anéis semissimples.

Teorema 2.1.53. *Seja R um anel. Então R é semissimples se, e somente se, R é artiniano e $J(R) = \{0\}$.*

Como consequência do Teorema 2.1.53 temos o seguinte corolário.

Corolário 2.1.54. *Seja R um anel artiniano. Então $R/J(R)$ é um anel semissimples.*

2.2 Idempotentes

Um elemento $e \in R$ é idempotente se $e^2 = e$. Denotaremos por $I(R)$ o conjunto dos idempotentes de R. Claramente, 0 e 1 são elementos idempotentes em todo anel R, chamados de idempotentes triviais.

Definição 2.2.1. *Um anel R é chamado de anel booleano se todos os seus elementos são idempotentes.*

Se R é um anel booleano, então R é um anel comutativo. De fato, sejam x, $y \in R$. Como R é booleano temos que $x^2 = x$ e $y^2 = y$. Agora, $x + y = (x+y)^2 = x^2+xy+yx+y^2 = x+xy+yx+y$ implicando em $xy = -yx$. Uma vez que $(yx)^2 = yx$, temos que $yx = (yx)^2 = (-yx)^2 = -yx$ e consequentemente $xy = yx$.

Definição 2.2.2. *Seja $E = \{e_1, e_2, \ldots, e_k\}$ um conjunto de idempotentes do anel R. Se*
(i) $e_i \neq 0$ para todo $i = 1, \ldots, k$;
(ii) $1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_k$;
(iii) $e_ie_j = 0$ para todo $i \neq j$,
então dizemos que E é uma família completa de idempotentes ortogonais. Se cada idempotente da família E está no centro de R, dizemos que E é uma família completa de idempotentes ortogonais centrais.

Sejam R um anel e $e \in I(R)$, com $e \neq 0$. O conjunto $\{e, 1-e\}$ é uma família completa de idempotentes ortogonais. Como estamos trabalhando em anéis com unidade, temos que todo anel admite uma família completa de idempotentes ortogonais.

Exemplo 2.2.3. Em $M_n(R)$, temos que $E = \{e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{nn}\}$ é uma família completa de idempotentes ortogonais.

Lema 2.2.4. *Sejam R um anel e $e \in I(R)$. Se $e \in J(R)$, então $e = 0$.*

Demonstração. Se $e \in J(R)$, pela Proposição 2.1.43 temos que $1 - e$ é invertível. $e(1-e) = e - e^2 = 0$ e, já que $1 - e$ é invertível, $e = 0$. $\square$

Um fato importante sobre idempotentes em um anel arbitrário foi descoberto pelo algebrista americano Charles Sanders Peirce. Para qualquer idempotente $e \in I(R)$ em um anel R, temos três decomposições:

1. $R = Re \oplus R(1-e)$;

2. $R = eR \oplus (1-e)R$;

3. $R = eRe \oplus eR(1-e) \oplus (1-e)Re \oplus (1-e)R(1-e)$.

Observamos que as decomposições nos itens 1 e 2 são de ideais à esquerda e à direita respectivamente de R. A decomposição do item três é composta pelos subanéis eRe e $(1-e)R(1-e)$ com unidade e e $(1-e)$, respectivamente, e $eR(1-e)$ e $(1-e)Re$ subanéis sem unidade, pois o produto de quaisquer dois elementos é igual a zero. Observamos que se e é um idempotente central, então a decomposição de Pierce que aparece em 3 fica:

$3'$. $R = eRe \oplus (1-e)R(1-e)$, pois $eR(1-e) = (1-e)Re = \{0\}$.

Verifiquemos as igualdades que aparecem na Decomposição de Pierce.

1. Como $1 = e + (1-e)$, então $x = xe + x(1-e)$ e $R = Re + R(1-e)$. Se $x \in Re \cap R(1-e)$, então $x = r_1e$ e $x = r_2(1-e)$. Daí, $x = r_1e = xe = r_2(1-e)e = 0$ portanto $Re \cap R(1-e) = \{0\}$ e a soma é direta.

2. Demonstração análoga ao item 1.

3. Dado $x \in R$, $x = 1x1 = (e+(1-e))x(e+(1-e)) = exe + ex(1-e) + (1-e)xe + (1-e)x(1-e)$, assim $R = eRe + eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e)$. Tome $x \in eRe \cap (eR(1-e) + (1-e)Re + (1-e)R(1-e))$, então $x = er_1e$ e $x = er_2(1-e) + (1-e)r_3e + (1-e)r_4(1-e)$. Com isso, $x = er_1e = e(er_1e)e = exe = e(er_2(1-e) + (1-e)r_3e + (1-e)r_4(1-e))e = 0$, pois $(1-e)e = 0 = e(1-e)$. Repetindo esse processo para todos os subanéis, concluímos que a soma é direta.

A decomposição que aparece no item 3 pode ser escrita como uma matriz quadrada 2×2 da forma

$$R^{\pi} := \begin{bmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{bmatrix}.$$

O conjunto R^{π} forma um anel, com a adição e multiplicação usuais de matrizes, e é isomorfo a R. Esse isomorfismo pode ser visto por meio da aplicação $f : R \longrightarrow R^{\pi}$ dada por $f(x) = exee_{11} + ex(1-e)e_{12} + (1-e)xee_{21} + (1-e)x(1-e)e_{22}$.

A seguir, ilustraremos a decomposição de Peirce em relação ao idempotente e_{11} do anel de matrizes $M_2(A)$.

Exemplo 2.2.5. No anel $R = M_2(A)$, considere o idempotente $e = e_{11}$. Denotemos por I_2 a matriz $e_{11} + e_{22}$. Note que $Re = Ae_{11} \oplus Ae_{21}$, $eR = Ae_{11} \oplus Ae_{12}$, $(I_2 - e)R = Ae_{21} \oplus Ae_{22}$ e $R(I_2 - e) = Ae_{12} \oplus Ae_{22}$. Assim, $eRe = Ae_{11}$, $eR(I_2 - e) = Ae_{12}$, $(I_2 - e)Re = Ae_{21}$, $(I_2 - e)R(I_2 - e) = Ae_{22}$. Com isso, temos que:

1. $R = Re \oplus R(I_2 - e)$;

2. $R = eR \oplus (I_2 - e)R$;

3. $R = eRe \oplus eR(I_2 - e) \oplus (I_2 - e)Re \oplus (I_2 - e)R(I_2 - e)$.

Agora falaremos sobre levantamento de idempotentes módulo um ideal à esquerda (à direita, bilateral) em um anel R.

Definição 2.2.6. *Seja I um ideal à esquerda (à direita, bilateral) do anel R. Dizemos que idempotentes são levantados módulo I se para cada $x \in R$ com $x - x^2 \in I$, existe um idempotente $e \in R$ tal que $e - x \in I$.*

Observamos que se I é um ideal bilateral de R e $\overline{x} \in R/I$ é um idempotente em R/I, então x é levantado módulo I se, existe um idempotente $e \in R$ tal que $\overline{x} = \overline{e}$.

Nem sempre é possível levantar idempotentes de R módulo um ideal I. Por exemplo, se consideramos $R = \mathbb{Z}$ e $I = 6\mathbb{Z}$, como $6 = 3^2 - 3$, temos que $\overline{3}$ é idempotente em $R/I = \mathbb{Z}_6$, mas como os únicos idempotentes em $\mathbb{Z}$ são os triviais, temos que $\overline{3}$ não pode ser levantado para $\mathbb{Z}$.

Veremos que se I é um ideal nil, então sempre será possível levantar idempotentes módulo I.

Proposição 2.2.7. *Se I é um ideal nil do anel R, então idempotentes são levantados módulo I.*

Demonstração. Seja $e \in R$ tal que $\overline{e} \in R/I$ é um idempotente. Então $\overline{e}^2 = \overline{e}$ implica $\overline{e^2 - e} = \overline{0}$ e $e^2 - e \in I$. Como I é um ideal nil de R, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(e^2 - e)^n = 0$. Daí,

$$0 = (e - e^2)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} e^{n-k} (e^2)^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} e^{n-k+2k} =$$

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} e^{n+k} = e^n - ne^{n+1} + \cdots + (-1)^n e^{2n} =$$

$$e^n - e^{n+1} \underbrace{(n - \cdots + (-1)^n e^{n-1})}_{a} = e^n - e^{n+1} a,$$

onde a é uma expressão polinomial em e com coeficientes inteiros. Observe que

$$e^n = e^{n+1} a = ee^n a = ee^{n+1} aa = e^{n+2} a^2.$$

Indutivamente $e^n = e^{n+t} a^t$ para todo $t \geq 1$. Considere $e' = (ea)^n$. Temos que $(e')^2 = (ea)^{2n} = e^{2n} a^{2n} = e^{2n} a^n a^n = e^n a^n = e'$. Com isso, $\overline{e'} = (\overline{ea})^n = \overline{e^n a^n} = \overline{e^n}\ \overline{a^n} = \overline{e}^n\ \overline{a}^n = \overline{e}^{2n} \overline{a}^n = \overline{e^n} = \overline{e}^n = \overline{e}$. $\square$

Capítulo 3

Regularidade

Neste capítulo estudaremos propriedades e exemplos de elementos regulares, fortemente regulares, π-regulares e elementos fortemente π-regulares. Para finalizar esse estudo, provaremos o Lema de Azumaya e algumas consequências. O leitor interessado pode encontrar os resultados desse capítulo nas referências [2], [3] ,[4], [7], [8], [11], [17], [18], [21] e [23].

3.1 Anéis regulares

Em 1936 [23], von Neumann definiu que um elemento $a \in R$ é regular se $a = aba$ para algum $b \in R$. Como podemos observar, os elementos regulares são uma generalização dos elementos invertíveis. Se existe $b \in R$ é invertível, então chamamos a de elemento regular unitário. Um anel é regular se todos os seus elementos são regulares. Todo anel admite elementos regulares a saber, 0 e 1.

Exemplo 3.1.1. Elementos invertíveis são elementos regulares unitários. Logo, todo anel de divisão é regular.

Exemplo 3.1.2. Idempotentes são elementos regulares. Logo, todo anel booleano é regular.

Exemplo 3.1.3. Como $\overline{1}$ e $\overline{5} \in U(\mathbb{Z}_6)$ e $\overline{0}$, $\overline{4}$ e $\overline{3} \in I(\mathbb{Z}_6)$, para mostrar que $\mathbb{Z}_6$ é regular, temos que verificar se $\overline{2}$, é regular. Note que $\overline{2} = \overline{2} \cdot \overline{2} \cdot \overline{2}$. Portanto o anel $\mathbb{Z}_6$ é regular.

Exemplo 3.1.4. O anel $\mathbb{Z}_4$ não é regular, pois $\overline{2}$ não é regular.

Em geral, temos o seguinte teorema:

Teorema 3.1.5. [18] *O anel $\mathbb{Z}_n$ é regular se, e somente se, n é livre de quadrados.*

Exemplo 3.1.6. Considere o anel $M_2(\mathbb{Z}_2)$. Como os idempotentes de $M_2(\mathbb{Z}_2)$ são

$$0, e_{11}, e_{22}, e_{11} + e_{21}, e_{21} + e_{22}, e_{11} + e_{12}, e_{12} + e_{22}, e_{11} + e_{22},$$

e os elementos invertíveis são

$$e_{11} + e_{12} + e_{22}, e_{12} + e_{21} + e_{22}, e_{11} + e_{21} + e_{22}, e_{11} + e_{12} + e_{21}, e_{12} + e_{21},$$

para verificar se o anel $M_2(\mathbb{Z}_2)$ é regular, temos que verificar se os elementos e_{12}, e_{21} e $e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22}$ são elementos regulares. Como $e_{12} = e_{12}e_{21}e_{12}$, $e_{21} = e_{21}e_{12}e_{21}$ e $e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22} = (e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22})e_{11}(e_{11} + e_{12} + e_{21} + e_{22})$, concluímos que o anel $M_2(\mathbb{Z}_2)$ é regular.

Lema 3.1.7. *Sejam R um anel e $x \in R$ tal que $a - axa$ é regular. Então, a é regular.*

Demonstração. Se $a - axa$ é regular, então existe um elemento $y \in R$ tal que $(a - axa)y(a - axa) = a - axa$. Desenvolvendo o produto do lado esquerdo da igualdade, temos $aya - ayaxa - axaya + axayaxa = a - axa$ e $a = a(y - yax - xay + xayax + x)a$. Portanto, $a = aza$ onde $z = (y - yax - xay + xayax + x)$ e concluímos que a é regular em R. $\square$

Definição 3.1.8. *Um ideal I de um anel R é regular se todos os seus elementos são regulares. Denotaremos por $\mathcal{M}(R)$ o conjunto de todos os elementos $a \in R$ tais que $\langle a \rangle$ é regular.*

Teorema 3.1.9. *O conjunto $\mathcal{M}(R)$ é um ideal regular de R.*

Demonstração. Para mostrar que $\mathcal{M}(R)$ é um ideal de R, provemos que dados quaisquer a, $b \in \mathcal{M}(R)$ e $r \in R$, temos que $a - b \in \mathcal{M}(R)$ e ra, $ar \in \mathcal{M}(R)$. Consideremos inicialmente o ideal gerado por $\langle a-b \rangle$. Dado $x \in \langle a-b \rangle$, temos que $x = a_1 - b_1$, onde $a_1 \in \langle a \rangle$ e $b_1 \in \langle b \rangle$. Como $\langle a \rangle$ é regular, temos que $a_1 = a_1 y a_1$ para algum $y \in R$. Então $x - xyx = a_1 - b_1 - (a_1 - b_1)y(a_1 - b_1) = a_1 - b_1 - a_1 y a_1 - a_1 y b_1 - b_1 y a_1 + b_1 y b_1 = -b_1 - a_1 y b_1 - b_1 y a_1 + b_1 y b_1 \in \langle b_1 \rangle \subseteq \langle b \rangle$. Logo, $x - xyx$ é regular e pelo Lema 3.1.7 concluímos que x é regular. Como x é arbitrário em $\langle a-b \rangle$, temos que todos os elementos em $\langle a-b \rangle$ são regulares, o ideal $\langle a-b \rangle$ é regular e portanto $a - b \in \mathcal{M}(R)$. Consideremos agora o ideal $\langle ar \rangle$. Note que $\langle ar \rangle \subset \langle a \rangle \subset \mathcal{M}(R)$. Logo, $ar \in \mathcal{M}(R)$. Analogamente $ra \in \mathcal{M}(R)$. Portanto $\mathcal{M}(R)$ é um ideal de R. $\square$

O ideal $\mathcal{M}(R)$ tem algumas propriedades semelhantes às propriedades do radical de Jacobson de um anel R. Vejamos a seguir.

Teorema 3.1.10. *Para todo anel R, $\mathcal{M}(R/\mathcal{M}(R)) = \{\overline{0}\}$.*

Demonstração. Sejam $\overline{b} \in \mathcal{M}(R/\mathcal{M}(R))$ e $a \in \langle b \rangle$. Então $\overline{a} \in \langle \overline{b} \rangle$. Como $\overline{b} \in \mathcal{M}(R/\mathcal{M}(R))$, temos que $\overline{a}$ é regular. Portanto, existe $\overline{x} \in R/\mathcal{M}(R)$ tal que $\overline{a} = \overline{a}\ \overline{x}\ \overline{a}$. Daí, $\overline{a} - \overline{axa} = \overline{0}$, $a - axa \in \mathcal{M}(R)$. Pelo Teorema 3.1.9, $a - axa$ é regular e, pelo Lema 3.1.7, a é regular. Como a é um elemento arbitrário de $\langle b \rangle$, temos que todos os elemento em $\langle b \rangle$ são regulares. Portanto $\langle b \rangle$ é regular. Logo, $b \in \mathcal{M}(R)$ e $\overline{b} = \overline{0}$. $\square$

Teorema 3.1.11. $\mathcal{M}(M_n(R)) = M_n(\mathcal{M}(R))$.

Demonstração. Provemos primeiramente que $M_n(\mathcal{M}(R)) \subseteq \mathcal{M}(M_n(R))$. Para provar essa inclusão, primeiro estudaremos o caso para $n = 2$ e em seguida estenderemos o resultado para um n arbitrário. Vejamos primeiro o caso $n = 2$. Se x é um elemento regular de R, então existe $y \in R$ tal que $xyx = x$. Denotaremos y por x'. Seja $A = ae_{11} + be_{12} + ce_{21} + de_{22} \in M_2(\mathcal{M}(R))$ e considere $X = b'e_{21}$. Então $AXA = bb'ae_{11} + be_{12} + db'ae_{21} + db'be_{22}$. Logo, $B = A - AXA = ee_{11} + fe_{21} + ge_{22}$, com $e, f, g \in R$. Agora, seja $Y = e'e_{11} + g'e_{22}$. Então $BYB = ee_{11} + (fe'e + gg'f)e_{21} + ge_{22}$. Logo, $C = B - BYB = he_{21}$, com $h \in R$. Faça $Z = h'e_{12}$. Então $CZC = (he_{21})(h'e_{12})(he_{21}) = he_{21} = C$. Portanto, $C = CZC$ e C é regular. Pelo Lema 3.1.7 temos que B é regular. Logo, $A - AXA$ é regular e pelo Lema 3.1.7, temos que A é regular e consequentemente $A \in \mathcal{M}(M_n(R))$.

No caso $n = 2^k$, como $M_{2^k}(R) \simeq M_{2^{k-1}}(M_2(R))$, por indução segue o resultado.

Finalmente, seja n qualquer e escolha k tal que $2^k \geq n$. Seja $A \in M_n(R)$ e considere $A_1 \in M_{2^k}(R)$ da forma:

$$A_1 = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como elementos em $M_{2^k}(R)$ são regulares, existe um elemento

$$X = \begin{pmatrix} \tilde{A} & \tilde{B} \\ \tilde{C} & \tilde{D} \end{pmatrix}$$

de $M_{2^k}(R)$ tal que $A_1 X A_1 = A_1$ e consequentemente $A\tilde{A}A = A$. Portanto, A é regular e $M_n(\mathcal{M}(R)) \subseteq \mathcal{M}(M_n(R))$.

Provemos agora que $\mathcal{M}(M_n(R)) \subseteq M_n(\mathcal{M}(R))$. Dado $A = (a_{ij})$ em $\mathcal{M}(M_n(R))$, temos que $\langle A \rangle$ é regular. Logo, existe $X \in M_n(R)$ tal que $A = AXA = (AX)A(XA)$. Fixe uma entrada a_{ij} de A. Então $a_{ij} = \sum_{p,q} r_{pq} a_{pq} s_{pq}$,

r_{pq}, $s_{pq} \in R$. Agora, como $e_{ip}Ae_{qj} = a_{pq}e_{ij}$, a matriz $r_{pq}a_{pq}s_{pq}e_{11} \in \langle A\rangle$ e com isso, $a_{ij}e_{11} \in \langle A\rangle$. Seja $b \in \langle a_{ij}\rangle \trianglelefteq R$. Então $be_{11} \in \langle A\rangle$. Como $\langle A\rangle$ é regular, existe $Y \in M_n(R)$ tal que $be_{11}Ybe_{11} = be_{11}$. Mas isso implica que $by_{11}b = b$ e b é regular. Logo, $a_{ij} \in \mathcal{M}(R)$ e, portanto $\mathcal{M}(M_n(R)) \subseteq M_n(\mathcal{M}(R))$. $\square$

3.2 Anéis fortemente regulares

Nesta seção apresentaremos a classe dos anéis fortemente regulares. Esses anéis foram descobertos e nomeados por Arens e Kaplansky [1] no estudo de representações topológicas de álgebras em 1948.

Definição 3.2.1. *Sejam R um anel e $a \in R$. O conjunto $ann_l(a) = \{x \in R : xa = 0\}$ é chamado de anulador à esquerda de a. Analogamente, definimos anulador à direita de a e o denotamos por $ann_r(a)$.*

Teorema 3.2.2. *Sejam R um anel e $a \in R$. São equivalentes:*

1. *$xa^2 = a = a^2y$ para algum $x, y \in R$;*
2. *$Ra = Ra^2$ e $ann_l(a) = ann_l(a^2)$;*
3. *$R = Ra \oplus ann_l(a)$;*
4. *$aba = a$ e $ba = ab$ para algum $b \in R$;*
5. *$aua = a$ e $ua = au$ para algum $u \in U(R)$;*
6. *$a = ev = ve$ para algum $e \in I(R)$ e $v \in U(R)$;*
7. *$ua^2 = a = a^2u$ para $u \in U(R)$.*

Demonstração. ($1 \Rightarrow 2$) Suponha que $xa^2 = a = a^2y$ para alguns $x, y \in R$. Como $xa^2 = a$, temos que $a \in Ra^2$ e assim $Ra \subseteq Ra^2$. Como $Ra^2 \subseteq Ra$, segue que $Ra = Ra^2$. Provemos agora que $ann_l(a) = ann_l(a^2)$. É claro que $ann_l(a) \subseteq ann_l(a^2)$. Dado $r \in ann_l(a^2)$, temos que $ra = r(a^2y) = (ra^2)y = 0$ e assim $r \in ann_l(a)$. Portanto $ann_l(a) = ann_l(a^2)$.

$(2 \Rightarrow 3)$ Como $Ra = Ra^2$, existe $r \in R$ tal que $a = ra^2$. Consequentemente $(1-ra)a = 0$, isto é, $1-ra \in ann_l(a)$. Mas $ra \in Ra$. Logo $1 = ra+(1-ra)$ e $R = Ra+ann_l(a)$. Dado $w \in Ra \cap ann_l(a)$, temos que $w = sa$ e $wa = 0$. Assim $0 = wa = (sa)a = sa^2$ e $s \in ann_l(a^2)$. Como $ann_l(a) = ann_l(a^2)$, temos que $s \in ann_l(a)$ e, consequentemente, $w = sa = 0$. Portanto $Ra \cap ann_l(a) = \{0\}$ e $R = Ra \oplus ann_l(a)$.

$(3 \Rightarrow 4)$ Suponha que $R = Ra \oplus ann_l(a)$. Então $1 = xa + y$ com $x \in R$ e $y \in ann_l(a)$. Multiplicando a última igualdade à esquerda por a temos que $a = axa + ay$. Como $a - axa \in Ra$ e $ay \in ann_l(a)$, temos que $a - axa \in Ra \cap ann_l(a) = \{0\}$ e, portanto $a = axa$. Se multiplicamos a igualdade $1 = xa + y$ à direita por a, temos que $a = xa^2$. Faça $b = x^2a$. Então, $aba = a(x^2a)a = (ax)(xa^2) = axa = a$, $ab = ax^2a$ e $ba = x^2a^2 = x(xa^2) = xa$. Logo, $ab-ba \in Ra$, pois Ra é um ideal à esquerda de R. Agora, $(ab-ba)a = aba - ba^2 = a - x^2a^3 = a - x(xa^2)a = a - xa^2 = a - a = 0$. Portanto $ab - ba \in Ra \cap ann_l(a) = \{0\}$. Portanto, $ab = ba$.

$(4 \Rightarrow 5)$ Se $aba = a$ com $ab = ba$, então $a^2b = a = ba^2$. Defina $u = b^2a + (1 - ab)$. Temos que, u é invertível com inverso $a + (1 - ab)$. Portanto, para $u = b^2a + (1 - ab)$, temos que $aua = a$ e $au = ua$.

$(5 \Rightarrow 6)$ Se $aua = a$ e $ua = au$ para algum $u \in U(R)$, seja $v = u^{-1}$ e defina $e = au$. Então, $e^2 = auau = au = e$ e $ev = auv = a$ e $ve = vau = vua = a$.

$(6 \Rightarrow 7)$ Suponha que $a = ev = ve$ para algum $e \in I(R)$ e $v \in U(R)$. Seja $u = v^{-1}$. Note que $ua^2 = u(ev)(ev) = u(ve)(ev) = e(ev) = e^2v = ev = a$ e $a^2u = (ev)(ev)u = eve = ev = a$. Logo $ua^2 = a = a^2u$ onde u é invertível.

$(7 \Rightarrow 1)$ Imediato. $\square$

Definição 3.2.3. *Se $a \in R$ satisfaz uma condição do Teorema 3.2.2, logo todas, dizemos que a é fortemente regular. Se todo elemento em R é fortemente regular, dizemos que R é um anel fortemente regular.*

Todo anel admite pelo menos dois elementos fortemente regulares, a saber 0 e 1.

O próximo resultado é uma consequência imediata do Teorema 3.2.2.

Corolário 3.2.4. *Todo anel fortemente regular é regular.*

A recíproca do Corolário 3.2.4 nem sempre é verdadeira, como podemos ver no próximo exemplo.

Exemplo 3.2.5. O anel $M_2(\mathbb{Z}_2)$ é regular, mas não é fortemente regular. De fato, o elemento e_{12} não satisfaz o item (1) do Teorema 3.2.2, pois $(e_{12})^2 = 0$.

Caso R seja um anel comutativo e regular, o Teorema 3.2.2 garante que R é fortemente regular. Logo, anéis booleanos e corpos são exemplos de anéis fortemente regulares.

Exemplo 3.2.6. Todo elemento invertível é fortemente regular. Logo, o anel dos quatérnios $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}$ é um anel fortemente regular não comutativo.

Lema 3.2.7. *Sejam R um anel e a, $y \in R$ tais que $a^2y - a$ é fortemente regular. Então a é fortemente regular.*

Demonstração. Se $a^2y - a$ é fortemente regular, pelo Teorema 3.2.2, existe um elemento $z \in R$ tal que $(a^2y - a)^2z = a^2y - a$. Desenvolvendo o produto do lado esquerdo da igualdade, temos que $a^2(-ya^2yz + ayz + yaz - z + y) = a$. Fazendo $x = -ya^2yz + ayz + yaz - z + y$, temos que $a^2x = a$ e portanto a é fortemente regular. $\square$

Definição 3.2.8. *Sejam R um anel e I um ideal de R. Dizemos que I é um ideal fortemente regular se todos os seus elementos são fortemente regulares. Denotaremos por $\mathcal{N}(R)$ o conjunto de todos os elementos $a \in R$ tais que $\langle a \rangle$ é fortemente regular.*

Lema 3.2.9. *O conjunto $\mathcal{N}(R)$ é um ideal fortemente regular de R.*

Demonstração. Para mostrar que $\mathcal{N}(R)$ é um ideal de R, provemos que dados quaisquer $a,\ b \in \mathcal{N}(R)$ e $r \in R$, temos que $a - b \in \mathcal{N}(R)$ e $ra,\ ar \in \mathcal{N}(R)$. Consideremos inicialmente o ideal gerado por $\langle a-b \rangle$. Dado $x \in \langle a-b \rangle$, temos que $x = a_1 - b_1$, onde $a_1 \in \langle a \rangle$ e $b_1 \in \langle b \rangle$. Como $\langle a \rangle$ é fortemente regular, temos que $a_1 = a_1^2 y$ para algum $y \in R$. Então, $x^2 y - x = (a_1 - b_1)^2 y - (a_1 - b_1) = a_1^2 y - a_1 b_1 y - b_1 a_1 y + b_1^2 y - a_1 + b_1 = -a_1 b_1 y - b_1 a_1 y + b_1^2 y + b_1 \in \langle b_1 \rangle \subseteq \langle b \rangle$. Logo, $x^2 y - x$ é fortemente regular e pelo Lema 3.2.7 concluímos que x é fortemente regular e consequentemente $\langle a - b \rangle$ é um ideal fortemente regular e portanto $a - b \in \mathcal{N}(R)$. Consideremos agora o ideal $\langle ar \rangle$. Note que $\langle ar \rangle \subset \langle a \rangle \subset \mathcal{N}(R)$. Logo, $ar \in \mathcal{N}(R)$. Analogamente $ra \in \mathcal{N}(R)$. □

Assim como $\mathcal{M}(R)$, o ideal $\mathcal{N}(R)$ também tem uma propriedade semelhante à do radical de Jacobson, como veremos a seguir.

Teorema 3.2.10. *Para todo anel R temos que $\mathcal{N}(R/\mathcal{N}(R)) = \{\overline{0}\}$.*

Demonstração. Sejam $\overline{b} \in \mathcal{N}(R/\mathcal{N}(R))$ e $a \in \langle b \rangle$. Então $\overline{a} \in \langle \overline{b} \rangle$. Como $\overline{b} \in \mathcal{N}(R/\mathcal{N}(R))$, temos que $\overline{a}$ é fortemente regular. Portanto, existe $\overline{x} \in R/\mathcal{N}(R)$ tal que $\overline{a} = \overline{a}^2 \overline{x}$. Daí, $\overline{a} - \overline{a}^2 \overline{x} = \overline{0}$, $a - a^2 x \in \mathcal{N}(R)$. Pelo Lema 3.2.9, $a - a^2 x$ é fortemente regular e pelo Lema 3.2.7 a é fortemente regular. Como a é um elemento arbitrário de $\langle b \rangle$, temos que todos os elemento em $\langle b \rangle$ são fortemente regulares, portanto $\langle b \rangle$ é fortemente regular. Logo, $b \in \mathcal{N}(R)$ e $\overline{b} = \overline{0}$. □

Uma outra característica que o ideal $\mathcal{N}(R)$ possui é:

Lema 3.2.11. *O ideal $\mathcal{N}(R)$ admite apenas o nilpotente trivial.*

Demonstração. Seja $a \in \mathcal{N}(R)$ um elemento nilpotente. Então existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. Como $a \in \mathcal{N}(R)$, temos que $a^2x = a$ para algum $x \in R$. Note que $a = a^2x = aax = a(a^2x)x = a^3x^2$. Indutivamente, $a = a^tx^{t-1}$. Logo, $a = a^nx^{n-1} = 0$ e $a = 0$. $\square$

Definição 3.2.12. *Dado um anel R, dizemos que R é reduzido se $Nil(R) = \{0\}$.*

Exemplo 3.2.13. *Anéis de divisão são anéis reduzidos.*

Corolário 3.2.14. *Todo anel fortemente regular é reduzido.*

Lema 3.2.15. *Todo idempotente em $\mathcal{N}(R)$ é central.*

Demonstração. Sejam $e \in \mathcal{N}(R)$ um elemento idempotente e $x \in R$. Note que $(xe - exe)^2 = xexe - xeexe - exexe + exeexe = 0$, pois $e^2 = e$. Como $xe - exe \in \mathcal{N}(R)$, pelo Lema 3.2.11 temos que $xe - exe = 0$. Concluímos que $xe = exe$. Analogamente, vemos que $ex = exe$. Portanto, $xe = ex$ e consequentemente $e \in Z(R)$. $\square$

Definição 3.2.16. *Dizemos que um anel é abeliano se todo idempotente é central.*

Vejamos alguns exemplos de anéis abelianos.

Exemplo 3.2.17. Todo anel comutativo é abeliano.

Nem todo anel abeliano é comutativo. O próximo exemplo mostra um anel não comutativo abeliano.

Exemplo 3.2.18. Seja A um anel não comutativo com idempotentes triviais e considere o anel $R = A \times A$. Note que (a, b) é idempotente em R se, e somente se, a e b são idempotentes. Logo, os únicos idempotentes em R são: $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ e $(1, 1)$. Claramente esses idempotentes são centrais. Portanto R é um anel abeliano.

Como consequência do Lema 3.2.15, temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.19. *Todo anel fortemente regular é abeliano.*

O próximo lema mostra que, se $a \in \mathcal{N}(R)$ com $a^2x = a$ para algum $x \in R$, temos que ax é um idempotente.

Lema 3.2.20. *Sejam $a \in \mathcal{N}(R)$ e $x \in R$ tal que $a^2x = a$. Então,*
(i) $a^2x = axa = xa^2 = a$;
(ii) $ax = xa$ e ax é um idempotente.

Demonstração. (i) Como $a^2x = a$, temos que $(a - axa)^2 = a^2 - a^2xa - axa^2 + axa^2xa = (a^2x)a - a^2xa - ax(a^2x)a + axa^2xa = 0$. Como $a \in \mathcal{N}(R)$ e $\mathcal{N}(R)$ é um ideal de R, temos que $a - axa \in \mathcal{N}(R)$. Logo, pelo Lema 3.2.11, $a - axa = 0$ e $a = axa$. Provemos agora que $a = xa^2$. Note que $(a - xa^2)^2 = a^2 - axa^2 - xa^2a + xa^2xa^2 = a^2 - (axa)a - xa^3 + xa(axa)a = 0$, pois $a = axa$. Como $a \in \mathcal{N}(R)$ e $\mathcal{N}(R)$ é um ideal de R, temos que $a - xa^2 \in \mathcal{N}(R)$. Logo, pelo Lema 3.2.11, temos que $a - xa^2 = 0$ e $a = xa^2$. Portanto, $a^2x = axa = xa^2 = a$.
(ii) Como $a^2x = a = xa^2$, temos que $ax = (xa^2)x = x(a^2x) = xa$. Além disso, $(ax)^2 = axax = (a^2x)x = ax$. $\square$

Segue do Lema 3.2.20 o próximo teorema.

Teorema 3.2.21. *O ideal $\mathcal{N}(R)$ está contido em $\mathcal{M}(R)$.*

Daremos agora mais uma propriedade de anéis fortemente regulares.

Proposição 3.2.22. *Sejam R um anel fortemente regular e $x \in R$. Se $a = axa$, então $ax = xa$.*

Demonstração. Como $a = axa$ temos que $(a - a^2x)^2 = a^2 - a^3x - a^2xa + a^2xa^2x = a(axa) - a^3x - a^2xa + a(axa)ax = 0$ e $(a - xa^2)^2 = a^2 - axa^2 - xa^3 + xa^2xa^2 = (axa)a - axa^2 - xa^3 + xa(axa)a = 0$. Como R é fortemente regular, pelo Corolário 3.2.14, R é reduzido. Logo, $a - a^2x = 0$, $a - xa^2 = 0$ e $a = axa = a^2x = xa^2$. Com isso, $ax = (xa^2)x = x(a^2x) = xa$. □

Além disso, temos o seguinte resultado.

Proposição 3.2.23. *Seja R um anel fortemente regular. Dado $a \in R$, existe um único $x \in R$ com $a = axa$ e $x = xax$.*

Demonstração. Dado $a \in R$, como R é fortemente regular, pelo Teorema 3.2.2, existe $y \in R$ tal que $a = aya$ e $ay = ya$. Faça $x = yay$. Então, $axa = ay(aya) = aya = a$ e $xax = yay(aya)y = y(aya)y = yay = x$. Assim, tal x existe. Provemos que esse x é único. Suponha que exista $x_1 \in R$ tal que $x_1 = x_1ax_1$ e $a = ax_1a$. Pela Proposição 3.2.22, temos que x e x_1 comutam com a. Assim, $x_1 = x_1ax_1 = x_1axax_1 = x_1x(ax_1a) = x_1xa = x_1xaxa = (ax_1a)xx = axx = xax = x$. □

Enquanto $\mathcal{M}(R)$ satisfaz $\mathcal{M}(M_n(R)) = M_n(\mathcal{M}(R))$, $\mathcal{N}(R)$ não possui esta propriedade.

Teorema 3.2.24. *Para todo anel R e $n > 1$, $\mathcal{N}(M_n(R)) = \{0\}$.*

Demonstração. Seja $A \in \mathcal{N}(M_n(R))$. Então A é fortemente regular. Logo, existe uma matriz X tal que $A^2X = A$. Pelo Lema 3.2.20 e o Lema 3.2.15, temos que $AX \in Z(M_n(R))$. Logo, $AX = aI_n$, onde a é um elemento no centro de R e I_n é a matriz identidade de $M_n(R)$. Assim, temos que $A = A(AX) = A(aI_n) = AI_na = Aa = aA$. Dada uma matriz $B = ae_{ij} \in M_n(R)$ com $i \neq j$, uma vez que $e_{ij}^2 = 0$, temos que $B^2 = 0$. Observe que $B = aI_ne_{ij}$, assim, $B \in \langle aI_n \rangle = \langle AX \rangle \subset \langle A \rangle \subset \mathcal{N}(M_n(R))$. Logo, existe $Y \in M_n(R)$ tal que $B = B^2Y$ e consequentemente $a = 0$. Portanto, $A = 0$. $\square$

Do Teorema 3.2.24, podemos concluir que anéis de matrizes não possuem elementos fortemente regulares.

Teorema 3.2.25. *$\mathcal{M}(R) = \mathcal{N}(R)$ se, e somente se, $\mathcal{M}(R)$ não possui elementos nilpotentes não triviais.*

Demonstração. Suponha inicialmente que $\mathcal{M}(R)$ não possui elementos nilpotentes não triviais. Dado $a \in \mathcal{M}(R)$, temos que $\langle a \rangle$ é um ideal regular. Logo, para todo $b \in \langle a \rangle$, existe $x \in R$ tal que $b = bxb$. Consequentemente, $(b - b^2x)^2 = b^2 - b^3x - b^2xb + b^2xb^2x = b(bxb) - b^3x - b^2xb + b(bxb)bx = 0$ e $b - b^2x = 0$, pois por hipótese, $\mathcal{M}(R)$ não possui elementos nilpotentes não triviais. Assim, $b = b^2x$, b é um elemento fortemente regular e todos os elementos em $\langle a \rangle$ são fortemente regulares. Logo, $a \in \mathcal{N}(R)$ e $\mathcal{M}(R) \subseteq \mathcal{N}(R)$. Pelo Teorema 3.2.21 temos que $\mathcal{N}(R) \subseteq \mathcal{M}(R)$. Portanto, $\mathcal{M}(R) = \mathcal{N}(R)$. Suponhamos agora que $\mathcal{M}(R) = \mathcal{N}(R)$. Então, pelo Lema 3.2.11 temos o resultado. $\square$

Observamos que se R é comutativo, então todo elemento regular é fortemente regular em R. Logo, se R é comutativo ou não tem elementos nilpotentes não triviais, então $\mathcal{M}(R) = \mathcal{N}(R)$.

Para finalizar esta seção, daremos uma caracterização para elementos fortemente regulares. Veremos que elementos fortemente regulares poderão ser decompostos como a soma de um elemento idempotente e um elemento invertível.

Teorema 3.2.26. *Sejam R um anel e $a \in R$. O elemento a é fortemente regular se, e somente se, $a = f + v$, $f \in I(R)$, $v \in U(R)$, $af = fa$ e $faf = 0$.*

Demonstração. Suponha inicialmente que a é fortemente regular. Pelo Teorema 3.2.2, $a = eu = ue$ com $e \in I(R)$ e $u \in U(R)$. Logo, $a = ue = (1 - e) + (ue + e - 1)$ com $f = 1 - e \in I(R)$ e $ue + e - 1 = v \in U(R)$, com inverso $u^{-1}e + e - 1$. Além disso, $af = ue(1 - e) = 0 = (1 - e)eu = fa$ e $faf = af = a(1 - e) = a - ae = 0$. Provemos agora a recíproca. Suponha que $a = f + v$, $f \in I(R)$, $v \in U(R)$, $af = fa$, $faf = 0$. Logo, $0 = af = fa$. Mostraremos que a é fortemente regular utilizando (2) do Teorema 3.2.2. Temos que $Ra^2 \subseteq Ra$. Agora, $a^2 = (f + v)a = va$. Logo, $a = v^{-1}a^2 \in Ra^2$ e, portanto, $Ra^2 = Ra$. Já sabemos que $ann_l(a) \subseteq ann_l(a^2)$. Seja $x \in ann_l(a^2)$. Então $0 = xa^2 = xva = xav$ e $xa = 0$, pois $v \in U(R)$. Portanto, $ann_l(a^2) = ann_l(a)$ e concluímos que a é fortemente regular. $\square$

3.3 Anéis π-regulares

Em 1939 [17], McCoy generalizou a noção de anéis regulares e chamou a nova classe de anéis π-regulares.

Definição 3.3.1. *Dizemos que um elemento $a \in R$ é π-regular se existe um inteiro positivo n tal que a^n é regular. Se todo elemento de R é π-regular dizemos que R é um anel π-regular.*

Veremos alguns exemplos de anéis π-regulares.

Exemplo 3.3.2. Como 0 é regular, todo elemento nilpotente de um anel é π-regular.

Exemplo 3.3.3. Todo elemento regular é π-regular. No entanto, a recíproca não é verdadeira. Considere o anel $\mathbb{Z}_4$. Vimos que $\overline{2} \in \mathbb{Z}_4$ não é regular, mas é π-regular, pois $\overline{2}$ é nilpotente e os outros elementos de $\mathbb{Z}_4$ são idempotentes e invertíveis, isto é, também são π-regulares.

Lema 3.3.4. *Se R é π-regular, então $J(R)$ é nil.*

Demonstração. Seja $a \in J(R)$. Como R é π-regular, então $a^n r a^n = a^n$ para algum $n \geq 1$, $r \in R$. Como $J(R)$ é um ideal de R, temos que $a^n \in J(R)$ e consequentemente $a^n r \in J(R)$, logo $1 - a^n r$ é invertível. Como $a^n = a^n r a^n$, temos que $(1 - a^n r)a^n = 0$ e portanto $a^n = 0$, ou seja, a é nilpotente. Como $a \in J(R)$ é arbitrário, temos que todos os elementos em $J(R)$ são nilpotentes, isto é, $J(R)$ é nil. $\square$

O exemplo a seguir mostra que o Lema 3.3.4 não é uma condição suficiente para que um anel seja π-regular.

Exemplo 3.3.5. Sabemos do Exemplo 2.1.37, que $J(\mathbb{Z}) = \{0\}$, isto é, $J(\mathbb{Z})$ é nil, mas $\mathbb{Z}$ não é π-regular, pois dado $x \neq 0, 1 \in \mathbb{Z}$, não existe $y \in \mathbb{Z}$ tal que $x^n = x^n y x^n$ para algum $n \geq 1$.

Assim, obtemos uma condição necessária para que um anel seja π-regular. No próximo exemplo, usaremos o Lema 3.3.4 para exibir mais um exemplo de anel que não é π-regular.

Exemplo 3.3.6. Sejam $R = \left\{\frac{m}{n} \in \mathbb{Q};\ n \text{ é ímpar}\right\}$ e $\langle 2 \rangle$ o ideal principal gerado por 2 em R. Assim

$$\langle 2 \rangle = \{x \in R; x = \tfrac{a}{b}, \text{ onde } a \text{ é par e } b \text{ é ímpar}\}$$

e

$$R - \langle 2 \rangle = \{x \in R; x = \tfrac{a}{b}, \text{ onde } a,\, b \text{ são ímpares}\}.$$

Dado $y \in R - \langle 2 \rangle$ não nulo, temos que $y = \frac{a}{b}$ onde a é ímpar. Como a é ímpar, $\frac{b}{a} \in R$, além disso $y \cdot \frac{b}{a} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$. Assim, y é invertível. Portanto, R é um anel local e $J(R) = \langle 2 \rangle$ é o seu ideal maximal, que não é nil.

3.4 Anéis fortemente π-regulares

Arens-Kaplansky [1] e Kaplansky [12] investigaram anéis π-regulares e os anéis que definiremos nesta seção, são eles: anéis π-regulares à direita e à esquerda. Em 1954 [2], Azumaya chamou de elementos fortemente π-regulares, os elementos que eram π-regulares à direita e π-regulares à esquerda. Veremos ao longo do trabalho, que os elementos fortemente π-regulares são uma generalização dos elementos fortemente regulares.

Proposição 3.4.1. *Seja $a \in R$. São equivalentes:*

1. *$a^n \in Ra^{n+1}$ para algum inteiro $n \geq 1$;*
2. *$Ra^n = Ra^{n+1}$ para algum inteiro $n \geq 1$;*
3. *A cadeia $Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots$ estaciona.*

Demonstração. ($1 \Rightarrow 2$) Se $a^n \in Ra^{n+1}$ então $Ra^n \subseteq Ra^{n+1}$ e assim temos a igualdade.
($2 \Rightarrow 3$) Se $Ra^n = Ra^{n+1}$, para algum inteiro $n \geq 1$, vemos indutivamente que $Ra^n = Ra^{n+1} = Ra^{n+2} = \cdots$, assim, a cadeia

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq Ra^n = Ra^{n+1} = Ra^{n+2} = Ra^{n+3} = \cdots$$

estaciona, como queríamos.
($3 \Rightarrow 1$) Se a cadeia $Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots$ estaciona, então existe $n \geq 1$ tal que $Ra^n = Ra^{n+1}$. Logo $a^n \in Ra^{n+1}$. $\square$

Definição 3.4.2. *Se $a \in R$ satisfaz uma condição da Proposição 3.4.1, logo todas, dizemos que a é π-regular à esquerda. Analogamente, definimos elementos π-regulares à direita.*

Definição 3.4.3. *Dizemos que a é fortemente π-regular se é π-regular à direita e à esquerda. Se todo elemento de R é fortemente π-regular, então R é um anel fortemente π-regular.*

Definição 3.4.4. *Um conjunto G não vazio munido de uma operação binária $*$ é um semigrupo se para todos a, b, $c \in G$ vale $(a * b) * c = a * (b * c)$.*

Exemplo 3.4.5. Um anel é localmente finito se todo subconjunto finito gera um semigrupo finito com a operação de multiplicação. Anéis localmente finitos são fortemente π-regulares.

Demonstração. Sejam R um anel localmente finito, $a \in R$ e $S = \{a\}$. Então o subconjunto $S = \{a\}$ gera o semigrupo finito $\{a^m : m \in \mathbb{N}\}$ com a operação de multiplicação. Logo dado $m \in \mathbb{N}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^m = a^{m+n}$. Observe que $a^{m+n} = a^m a^n = a^{m+n} a^n = a^{m+2n}$. Indutivamente, $a^m = a^{m+kn}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Em particular, se $k = m$, $a^m = a^{m(n+1)}$. Agora,

$$a^{mn} = a^{m(n-1)+m} = a^m a^{m(n-1)} = a^{m(n+1)} a^{m(n-1)} = a^{2mn} = (a^{mn})^2.$$

Assim, a^t onde $t = mn$ é um idempotente em R, $Ra^{2t} = Ra^t$ e o anel satisfaz a condição de cadeia descendente de ideais principais à esquerda da forma

$$Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq Ra^t \supseteq Ra^{t+1} \supseteq \cdots \supseteq Ra^{2t} \supseteq \cdots,$$

para todo $a \in R$. Consequentemente R é fortemente π-regular. $\square$

Exemplo 3.4.6. Como $\mathbb{Z}_n$ é finito, é localmente finito, logo é fortemente π-regular.

Em 1976 [8], Dischinger mostrou que a noção de π-regularidade à esquerda e à direita eram equivalentes, por meio do teorema enunciado a seguir.

Teorema 3.4.7. *Um anel π-regular à direita é necessariamente π-regular à esquerda.*

O resultado de Dischinger garante que todo anel π-regular à direita é fortemente π-regular.

3.5 O Lema de Azumaya

O nosso objetivo agora é demonstrar o Lema de Azumaya, o qual fornecerá uma relação entre elementos fortemente π-regulares e elementos regulares. Para isso, iniciaremos com a demonstração de alguns lemas técnicos.

Lema 3.5.1. *Sejam R um anel e $a \in R$. Suponha que existam x, $y \in R$ satisfazendo $a^{n+1}x = a^n$, $ya^{m+1} = a^m$ para alguns n, $m \in \mathbb{N}$. Então $a^{m+1}x = a^m$ e $ya^{n+1} = a^n$.*

Demonstração. Se $m = n$, temos o resultado. Suponha $m > n$. Então $m = n + k$. Como $a^{n+1}x = a^n$, temos que $a^k a^{n+1}x = a^k a^n$ o que implica $a^{m+1}x = a^m$. Agora, observe que $a^n = a^{n+1}x = aa^n x = a(a^{n+1}x)x = a^{n+2}x^2$. Indutivamente, $a^n = a^{n+k}x^k$. Com isso, $a^n = a^{n+k}x^k = a^m x^k = ya^{m+1}x^k$. Logo, $ya^{n+1} = (ya)a^n = (ya)a^m x^k = ya^{m+1}x^k = a^n$. □

Lema 3.5.2. *Seja a um elemento fortemente regular de R. Então existe um único elemento $z \in R$ tal que $az = za$, $a^2z = a = za^2$ e $az^2 = z = z^2a$. Além disso, z comuta com todo elemento que comuta com a.*

Demonstração. Seja $a \in R$ um elemento fortemente regular. Então, pelo Teorema 3.2.2, $a^2x = a = ya^2$ para alguns $x, y \in R$. Daí

$$ax = ya^2x = ya \tag{1}$$

isto é,

$$ax^2 = yax = y^2a. \tag{2}$$

De (1) nós também temos que

(3) $$axa = ya^2 = a = a^2x = a(ax) = aya.$$

Agora, coloque $z = ax^2$. Segue de (1), (2) e (3) que $az = a(ax^2) = a(yax) = (aya)x = ax = ya = yaxa = za$, $a^2z = a(az) = a(za) = a(yaxa) = aya = a$. Assim $a^2z = a = za^2$. Verifiquemos agora que $z^2a = z = az^2$.

$$az^2 = (az)z = (za)z = (yaxa)z = yaz = yayax = yax = z.$$

Analogamente, vemos que $z^2a = z$. Provemos a unicidade de z. Suponha que existe z' que satisfaz $az' = z'a$, $z'a^2 = a = a^2z'$ e, $(z')^2a = z' = a(z')^2$. Assim, temos que:

$$z = az^2 = (z'a^2)z^2 = z'(a^2z)z = z'az = z'(z'a^2)z = (z')^2(a^2z) = (z')^2a = z'.$$

Para provar a última afirmação, isto é, que z comuta com todos os elementos que comutam com a, considere c tal que $ac = ca$. Então,

$$zac = zca = zca^2z = za^2cz = acz = caz.$$

Logo, z comuta com ac. Segue disso que

$$zc = z^2ac = (ac)z^2 = c(az^2) = cz$$

como queríamos. □

Agora, estamos prontos para demostrar o Lema de Azumaya.

Teorema 3.5.3 (Lema de Azumaya)**.** *Se $a \in R$ é fortemente π-regular, então a^n é fortemente regular para algum inteiro $n \geq 1$ e existe $z \in R$ tal que $az = za$ e $a^n = a^{n+1}z$.*

Demonstração. Se $a \in R$ é fortemente π-regular, então existem m, $n \in \mathbb{N}$, x, $y \in R$ tais que $a^n = a^{n+1}x$ e $a^m = ya^{m+1}$. Pelo Lema 3.5.1 temos que $a^m = a^{m+1}x$ e $a^n = ya^{n+1}$. Logo, $a^{n+1}x = a^n = ya^{n+1}$. Indutivamente, $a^{2n}x^n = a^n = y^na^{2n}$. Portanto, a^n é fortemente regular.

Provemos agora, a segunda parte do Lema de Azumaya. Como a^n é fortemente regular, pelo Lema 3.5.2, existe $w \in R$ tal que $(a^n)^2 w = a^n = w(a^n)^2$, $a^n w = wa^n$, $a^n w^2 = w = w^2 a^n$ e w comuta com todo elemento que comuta com a^n. Com isso, defina $z = a^{n-1}w$. Note que $az = a(a^{n-1}w) = a^n w$ e $za = a^{n-1}wa = wa^{n-1}a = wa^n$ e $a^{n+1}z = a^{n+1}(a^{n-1}w) = a^{n+1+n-1}w = a^{2n}w = a^n$ como queríamos. □

Como consequência do Lema de Azumaya, temos a seguinte proposição.

Proposição 3.5.4. *Seja $a \in R$. São equivalentes*

1. *a é fortemente π-regular;*

2. *Existe $n \geq 1 \in \mathbb{Z}$ tal que $a^n = fw = wf$ onde $f \in I(R)$, $w \in U(R)$ e a, f e w comutam entre si;*

3. *a^m é fortemente regular para algum inteiro $m \geq 1$.*

Demonstração. $(1 \Rightarrow 2)$ Se a é fortemente π-regular, o Lema de Azumaya garante que existem $z \in R$ e $1 \leq n \in \mathbb{Z}$ tal que $az = za$ e $a^n = a^{n+1}z$. Assim, $a^n = a^{n+1}z = a^n az = a^{n+1}z(az) = a^{n+2}z^2$. Indutivamente, $a^n = a^{n+k}z^k$. Em particular, $a^n = a^{2n}z^n = a^n z^n a^n$. Defina $f = a^n z^n = z^n a^n$. Note que $f^2 = a^n z^n a^n z^n = a^n z^n = f$, logo f é idempotente. Além disso, $af = aa^n z^n = a^{n+1}z^n = a^n z^n a = fa$ e $a^n f = a^n$. Se escrevemos $c = z^n f$, então $w = a^n + (1-f)$ é invertível com inverso $w^{-1} = c + (1-f)$. Como $fw = wf = a^n$, temos o resultado.

$(2 \Rightarrow 3)$ Dado (2), temos que $a^n w^{-1} a^n = fa^n = fw = a^n$ e $aw^{-1} = w^{-1}a$. Logo, pelo item 5 do Teorema 3.2.2, temos que a^n é fortemente regular.

$(3 \Rightarrow 1)$ Se a^m é fortemente regular onde $m \geq 1$, então $Ra^m = Ra^{2m}$. Daí, $Ra \supseteq Ra^2 \supseteq Ra^3 \supseteq \cdots \supseteq Ra^m \supseteq Ra^{m+1} \supseteq \cdots \supseteq Ra^{2m} \supseteq \cdots$. Mas

$Ra^m = Ra^{2m}$ implica $Ra^m = Ra^{m+i}$ para $i \geq 1$, portanto a é um elemento fortemente regular. $\square$

Portanto, obtemos a relação entre os anéis fortemente π-regular e π-regular.

Corolário 3.5.5. *Todo anel fortemente π-regular é π-regular.*

O Teorema que enunciaremos a seguir será utilizado na próxima seção. Ele nos dá uma condição necessária e suficiente para que um elemento seja fortemente π-regular.

Teorema 3.5.6. *Sejam R um anel e $a \in R$. O elemento a é fortemente π-regular se, e somente se, $a = e + u$, $e \in I(R)$, $u \in U(R)$, com $ae = ea$ e eae é nilpotente.*

Demonstração. Suponha inicialmente que a é fortemente π-regular. Então, pela Proposição 3.5.4, existe $n \geq 1$ tal que $a^n = fw = wf$ onde $f \in I(R)$, $w \in U(R)$ e f, w e a comutam entre si. Se mostrarmos que $u = a - (1 - f)$ é invertível, concluiremos que $e = 1 - f$. Defina $v = a^{n-1}w^{-1}f - (1 + a + \cdots + a^{n-1})(1 - f)$. Claramente $uv = vu$ e o fato que $u = af - (1 - a)(1 - f)$ nos da $uv = [af - (1 - a)(1 - f)][a^{n-1}w^{-1}f - (1 + a + \cdots + a^{n-1})(1 - f)] = a^n w^{-1} f + (1 - a)(1 + a + \cdots + a^{n-1})(1 - f) = f + (1 - a^n)(1 - f) = 1$ pois $a^n f = a^n$. Claramente $e = 1 - f$, u e a comutam entre si. Além disso, $eae = (1 - f)a(1 - f) = a(1 - f)$ e $(eae)^n = a^n(1 - f) = a^n - a^n f = 0$. Logo eae é nilpotente. Provemos agora a recíproca. Por hipótese, $a = e + u$, $e \in I(R)$, $u \in U(R)$, $ae = ea$ e eae é nilpotente. Logo, existe $n \geq 1$ tal que $(eae)^n = a^n e = 0$. Agora, $a^{n+1} = a^n a = a^n(e + u) = a^n u$. Portanto, $a^n = u^{-1}a^{n+1} \in Ra^{n+1}$ e, pela Proposição 3.4.1 concluímos que a é fortemente π-regular. $\square$

Se a é fortemente π-regular, pelo Teorema 3.5.6, $a = e + u$ tal que e é um idempotente, u é invertível tais que $ae = ea$ e eae é nilpotente. Chamaremos essa decomposição de um elemento fortemente π-regular de decomposição fortemente π-regular.

A proposição que enunciaremos agora garante a unicidade da decomposição fortemente π-regular.

Proposição 3.5.7. *Seja $a \in R$ um elemento fortemente π-regular e considere $a = e + u$. Se $a = f + v$ é outra decomposição fortemente π-regular de a, então $e = f$ e $u = v$.*

Demonstração. Pelo Teorema 3.5.6, ea e fa são ambos nilpotentes. Logo, podemos escolher um inteiro positivo n tal que $(ea)^n = 0 = (fa)^n$. Sejam $e' = 1-e$ e $f' = 1-f$. Então $e'a = e'u$ e $f'a = f'v$. Tomando às n-ésimas potências das últimas igualdades e usando o fato de e' e f' serem idempotentes, temos que $e'a^n = e'u^n$ e $f'a^n = f'v^n$. Como $ea^n = (ea)^n = 0 = (fa)^n = fa^n$, temos

$$e'u^n = e'a^n = e'a^n + ea^n = a^n = f'a^n + fa^n = f'a^n = f'v^n. \quad (1)$$

Multiplicando à esquerda por e e à direita por v^{-n} em (1) temos que $ef' = 0$. Multiplicando à esquerda por f e à direita por u^{-n} em (1) mostramos que $fe' = 0$. Usando a comutatividade de e com u e f com v, vemos que $f'e$ e $e'f$ também são zero. Assim, $0 = ef' = e(1-f) = e - ef$ e $e = ef$, por outro lado $0 = e'f = (1-e)f = f - ef$ e $f = ef$. Portanto $e = ef = f$. Como $e + u = a = f + v$ e $e = f$ temos $u = v$ e concluímos que a decomposição é única. $\square$

Capítulo 4

Anéis limpos

4.1 Anéis limpos

Os anéis limpos foram introduzidos por Nicholson em [20] quando estudava levantamento de idempotentes. Os anéis fortemente limpos, também foram definidos por Nicholson em [19]. Neste capítulo veremos como a regularidade em anéis está relacionada à teoria de limpeza em anéis.

Definição 4.1.1. *Dizemos que um elemento $a \in R$ é limpo se $a = e + u$ onde e é um idempotente e u é invertível. Se $eu = ue$, dizemos que a é fortemente limpo. Se todo elemento em R é limpo (fortemente limpo), dizemos que R é um anel limpo (fortemente limpo).*

Exemplo 4.1.2. Como 0 é um idempotente, elementos invertíveis são elementos limpos. Logo, todo anel de divisão é limpo. Em particular, todo corpo é fortemente limpo.

Exemplo 4.1.3. Sejam R um anel e $e \in I(R)$. Então $e = 2e - e + 1 - 1 = (1-e)+(2e-1)$. Como $(1-e)^2 = 1-e$ e $(2e-1)(2e-1) = 4e^2-2e-2e+1 = 1$, temos que $1-e \in I(R)$ e $2e-1 \in U(R)$. Logo, idempotentes são elementos limpos e todo anel booleano é limpo.

Exemplo 4.1.4. Se $a \in R$ é nilpotente então $a-1 \in U(R)$. Logo, $a = 1+(a-1)$ e, portanto, todo elemento nilpotente é limpo.

Definição 4.1.5. *Dizemos que $x \in R$ é quase regular se $x-1 \in U(R)$.*

Exemplo 4.1.6. Como elementos quase regulares podem ser escritos da forma $x = 1+(x-1)$, todo elemento quase regular é limpo. Como todo anel local é composto por elementos invertíveis e quase regulares, segue que todo anel local é limpo.

Seja R um anel. Um elemento $r \in R$ é limpo se, e somente se, $1-r$ é limpo. De fato, se r é limpo, então $r = e+u$ com $e \in I(R)$ e $u \in U(R)$. Daí $1-r = (1-e)+(-u)$ onde $1-e \in I(R)$ e $-u \in U(R)$. Agora, se $1-r$ é limpo, então $1-r = e+u$ com $e \in I(R)$ e $u \in U(R)$, $r = (1-e)+(-u)$ com $(1-e)^2 = 1-e$ e $-u \in U(R)$.

A seguir, exibiremos dois exemplos de anéis que não são limpos.

Exemplo 4.1.7. O anel $\mathbb{Z}$ não é limpo. De fato, sabemos que os únicos elementos invertíveis em $\mathbb{Z}$ são 1 e -1, e os únicos idempotentes em $\mathbb{Z}$ são 0 e 1. Portanto os únicos elementos limpos de $\mathbb{Z}$ são 0, ± 1 e 2.

Esse exemplo mostra que um subanel de um anel limpo nem sempre é limpo, pois $\mathbb{Q}$ é limpo (é um corpo), mas $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$ não é limpo, como mostramos acima.

Exemplo 4.1.8. Seja R um anel comutativo com unidade. O anel de polinômios $R[x]$ não é limpo.

Demonstração. Para ver que $R[x]$ não é limpo, mostraremos um elemento em $R[x]$ que não é limpo. Considere $x \in R[x]$ e suponha que $x = e + u$ onde e é um idempotente e u é invertível. Temos que $e = \sum_{i=0}^{m} e_i x^i$ e $u = \sum_{i=0}^{n} u_i x^i$.

Sabemos que se $e = \sum_{i=0}^{m} e_i x^i$ é idempotente em $R[x]$ então $e \in R$. Além disso, $u = \sum_{i=0}^{n} u_i x^i \in R[x]$ é invertível em $R[x]$ se, e somente se, u_0 é invertível em R e $u_1, \ldots, u_n$ são nilpotentes.

Como $x = e + u$, temos que $x = e_0 + u_0 + \sum_{i=1}^{n} u_i x^i$ e, consequentemente, $e_0 + u_0 = 0$, $u_i = 0$ para todo $2 \leq i \leq n$ e $x = u_1 x$. Mas $x = u_1 x$ implica $(u_1 - 1)x = 0$ e como u_1 é nilpotente, $u_1 - 1$ é invertível e temos que $x = 0$, absurdo. Portanto $R[x]$ não é limpo. $\square$

Vamos estabelecer algumas relações entre anéis limpos, anéis regulares e anéis fortemente regulares.

Vimos que um elemento é limpo, se podemos escrevê-lo como a soma de um elemento idempotente e um elemento invertível. Do Teorema 3.5.6, temos que elementos fortemente π-regulares também podem ser escritos como a soma de um elemento idempotente e um elemento invertível. Assim, temos que elementos fortemente π-regulares são fortemente limpos. Logo, todo anel fortemente π-regular é um anel limpo.

Pelo Teorema 3.2.26, temos que elementos fortemente regulares são elementos limpos. Logo, anéis fortemente regulares são anéis limpos, mas a recíproca nem sempre é verdadeira, pois o anel $\mathbb{Z}_4$ é limpo, mas não é fortemente regular. Além disso, temos que $\mathbb{Z}_4$ não é um anel regular, mas é um anel limpo. Logo, nem todo anel limpo é regular.

4.2 Propriedades de anéis limpos

Exibiremos agora algumas propriedades de anéis limpos.

Proposição 4.2.1. *Sejam R e S anéis e $f : R \longrightarrow S$ um homomorfismo sobrejetor. Se R é limpo, então S é limpo.*

Demonstração. Dado $s \in S$, existe $r \in R$ tal que $f(r) = s$. Como R é limpo, $r = e + u$ onde $e \in I(R)$ e $u \in U(R)$. Note que $(f(e))^2 = f(e^2) = f(e)$, isto é, $f(e) \in I(S)$ e como f é sobrejetora, $f(u) \in U(S)$. Logo $s = f(e) + f(u)$ e concluímos que S é limpo. $\square$

O próximo resultado garante que o produto direto não necessariamente finito de anéis limpos é limpo.

Proposição 4.2.2. *O produto direto de anéis limpos é limpo.*

Demonstração. Considere $R = \Pi_{i \in L} R_i$, onde L é um conjunto de índices e cada R_i é um anel limpo. Logo, para cada $i \in L$, $x_i = e_i + u_i$ com $e_i \in I(R)$ e $u_i \in U(R)$. Dado $(x_i)_{i \in L} \in \Pi_{i \in L} R_i$, temos que $(x_i)_{i \in L} = (e_i + u_i)_{i \in L} = (e_i)_{i \in L} + (u_i)_{i \in L}$. Como $(e_i)_{i \in L} \in I(R)$ e $(u_i)_{i \in L} \in U(R)$, temos que $(x_i)_{i \in L}$ é limpo, portanto $\Pi_{i \in L} R_i$ é um anel limpo. $\square$

Comecemos a estudar anéis limpos em termos da decomposição de Peirce.

Lema 4.2.3. *Sejam R um anel e $e \in I(R)$. Se eRe e $(1-e)R(1-e)$ são anéis limpos, então R é um anel limpo.*

Demonstração. Considere a decomposição de Pierce do anel R em relação ao idempotente e

$$R = \begin{bmatrix} eRe & eR(1-e) \\ (1-e)Re & (1-e)R(1-e) \end{bmatrix}.$$

Seja $A = \begin{bmatrix} a & x \\ y & b \end{bmatrix} \in R$. Como eRe é limpo, temos que $a = u + f$, onde $f^2 = f \in eRe$ e u é invertível em eRe, com inverso u_1. Note que $y \in (1-e)Re$, $u_1 \in eRe$ e $x \in eR(1-e)$, logo $yu_1x \in (1-e)R(1-e)$. Assim, $b - yu_1x \in (1-e)R(1-e)$. Como $(1-e)R(1-e)$ é limpo, temos que $b - yu_1x$ é limpo em $(1-e)R(1-e)$. Desse modo, $b - yu_1x = g + v$ onde $g^2 = g$ e v é invertível em $(1-e)R(1-e)$, com inverso v_1. Consequentemente,

$$A = \begin{bmatrix} f+u & x \\ y & g+v+yu_1x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{bmatrix}.$$

Claramente $\begin{bmatrix} f & 0 \\ 0 & g \end{bmatrix} \in I(R)$. Assim, falta mostrar que $\begin{bmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{bmatrix} \in U(R)$. Observe que $\begin{bmatrix} e & 0 \\ -yu_1 & 1-e \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} e & -u_1x \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}$ são invertíveis, com inversos $\begin{bmatrix} e & 0 \\ yu_1 & 1-e \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} e & u_1x \\ 0 & 1-e \end{bmatrix}$ respectivamente. Além disso,

$$\begin{bmatrix} e & 0 \\ -yu_1 & 1-e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & -u_1x \\ 0 & 1-e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}.$$

Como $\begin{bmatrix} u & 0 \\ 0 & v \end{bmatrix}$ também é invertível temos que $\begin{bmatrix} u & x \\ y & v+yu_1x \end{bmatrix}$ é invertível. □

O Lema 4.2.3 pode ser estendido para um conjunto completo de idempotentes ortogonais.

Teorema 4.2.4. *Se $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais de um anel R e, para cada $i = 1, \ldots, n$, o anel e_iRe_i é limpo, então R é um anel limpo.*

Demonstração. O caso $n = 2$ é o Lema 4.2.3. Faremos o caso $n = 3$ para facilitar o entendimento do leitor. Temos que $e_1 + e_2 + e_3 = 1$. Por hipótese,

e_1Re_1 é limpo. Vamos mostrar que $(1-e_1)R(1-e_1)$ é limpo. $(1-e_1)R(1-e_1)$ é um anel com unidade $1-e_1$. Note que $(1-e_1)e_i(1-e_1) = e_i$, $i = 2, 3$. Logo, $e_2, e_3 \in (1-e_1)R(1-e_1)$. Além disso, $e_2e_3 = 0$ e $e_2 + e_3 = 1 - e_1$. Assim, $(1-e_1)R(1-e_1) = e_2Re_2 + e_3Re_3$. Dado $w \in e_2Re_2 \cap e_3Re_3$, temos que $w = e_2r_2e_2$ e $w = e_3r_3e_3$, consequentemente $w = e_3we_3 = e_3e_2r_2e_2e_3 = 0$. Portanto, $(1-e_1)R(1-e_1) = e_2Re_2 \oplus e_3Re_3$. Como e_2Re_2 e e_3Re_3 são limpos, temos que $e_2Re_2 \oplus e_3Re_3$ é limpo, pela Proposição 4.2.2 e portanto $(1-e_1)R(1-e_1)$ é limpo. Pelo Lema 4.2.3, concluímos que R é limpo.

Provemos que o resultado é válido para $n \geq 3$. Suponha que $1 = e_1 + \cdots + e_n$, tal que $e_ie_j = 0$ para $i \neq j$ e $i, j = 1, \ldots, n$. Então, $1 - e_1 = e_2 + \cdots + e_n$, $(1-e_1)e_i(1-e_1) = e_i$ e $e_i \in (1-e_1)R(1-e_1)$ para $i = 2, \ldots, n$. Assim, $(1-e_1)R(1-e_1) = e_2Re_2 \oplus \cdots \oplus e_nRe_n$. Como e_iRe_i é limpo para $i = 1, \ldots, n$, concluímos que $(1-e_1)R(1-e_1)$ é limpo pela Proposição 4.2.2 e pelo Lema 4.2.3, temos que R é limpo. $\square$

Agora estamos prontos para demonstrar que anéis de matrizes com coeficientes em um anel limpo é limpo.

Teorema 4.2.5. *Se R é um anel limpo, então, para todo $n \geq 1$, $M_n(R)$ é limpo.*

Demonstração. Vimos que o conjunto formado pelas matrizes elementares $\{e_{ii}\}_{i=1}^{n}$ forma um conjunto de idempotentes ortogonais em $M_n(R)$. Além disso, $e_{ii}M_n(R)e_{ii} = Re_{ii}$. Como R é um anel limpo e $Re_{ii} \simeq R$, segue que $e_{ii}M_n(R)e_{ii}$ é um anel limpo, para todo $i = 1, \ldots, n$. Portanto, pelo Teorema 4.2.4, temos que $M_n(R)$ é limpo. $\square$

Pelo Teorema 4.2.5 e o Teorema 2.1.52 temos o próximo resultado que inclui a classe de anéis semissimples na classe de anéis limpos.

Teorema 4.2.6. *Se R é um anel semissimples, então R é um anel limpo.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.1.52

$$R \simeq M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s),$$

onde cada D_i é um anel de divisão, para $i = 1, \ldots, s$. Pelo Exemplo 4.1.2, D_i é limpo para $i = 1, \ldots, s$. Assim, o Teorema 4.2.5 garante que cada $M_{n_i}(D_i)$, $i = 1, \ldots, s$, é limpo e, pela Proposição 4.2.2, concluímos que $M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s)$ é limpo. Portanto, R é limpo. □

O resultado a seguir, demonstrado por Nicholson em 1977 [20], foi o marco inicial do estudo de anéis limpos.

Proposição 4.2.7. *Sejam R um anel limpo e I um ideal à esquerda (à direita, bilateral) de R. Então idempotentes são levantados módulo I.*

Demonstração. Seja $x \in R$ tal que $x - x^2 \in I$. Como R é limpo, podemos escrever $x = f + u$ com $u \in U(R)$ e $f \in I(R)$. Defina $e = u^{-1}(1-f)u$. Note que $e^2 = [u^{-1}(1-f)u][u^{-1}(1-f)u] = u^{-1}(1-f)^2u = u^{-1}(1-f)u = e$. Logo $e \in I(R)$. Além disso, $x - x^2 = (1-f)u - ux$ e com isso, $u^{-1}(x-x^2) = e - x \in I$, pois I é um ideal à esquerda de R. Como I é um ideal à esquerda de R arbitrário, temos que idempotentes podem ser levantados módulo I. □

Determinar se um anel é limpo não é uma tarefa fácil. A seguir, daremos uma caracterização de anéis limpos via o radical de Jacobson do anel.

Teorema 4.2.8. *Seja I um ideal de R tal que $I \subseteq J(R)$. Então R é limpo se, e somente se, o anel quociente R/I é limpo e idempotentes podem ser levantados módulo I.*

Demonstração. Se R é limpo, pela Proposição 4.2.1 o quociente R/I é limpo e pela Proposição 4.2.7, os idempotentes podem ser levantados módulo I. Reciprocamente, suponha que R/I é limpo e que idempotentes podem ser levantados módulo I. Como R/I é limpo, para qualquer $r \in R$ temos que $\overline{r} = \overline{u} + \overline{e}$ onde $\overline{u}$ é invertível e $\overline{e}$ é idempotente. Como idempotentes podem ser levantados módulo I, então existe um idempotente $e^* \in R$ tal que $\overline{e^*} = \overline{e}$. Assim, $\overline{r} = \overline{u} + \overline{e^*}$. Note que $\overline{u} = \overline{r} - \overline{e^*}$, logo $\overline{r - e^*}$ é invertível em R/I e pelo Lema 2.1.44, $r - e^*$ é invertível em R. Portanto, $r = (r - e^*) + e^*$, como queríamos. □

Como todo ideal nil está contido no radical de Jacobson e idempotentes são levantados módulo qualquer ideal nil, temos o seguinte resultado.

Corolário 4.2.9. *Sejam R um anel e I um ideal nil de R. Então R é limpo se, e somente se, o anel quociente R/I é limpo.*

Demonstração. Segue da Proposição 4.2.1 que se R é limpo, então R/I é limpo. Suponha agora que R/I é limpo. Então, pela Proposição 2.2.7, idempotentes são levantados módulo I. Além disso, pelo Lema 2.1.45, $I \subset J(R)$. Portanto, pelo Teorema 4.2.8, R é limpo. □

Finalizamos o capítulo exibindo mais uma classe de anéis limpos.

Teorema 4.2.10. *Se R é um anel artiniano, então R é um anel limpo.*

Demonstração. Se R é artiniano, então, pelo Corolário 2.1.54 $R/J(R)$ é semissimples e pelo Teorema 4.2.6 concluímos que $R/J(R)$ é limpo. Como R é um anel artiniano, temos que $J(R)$ é nilpotente [14, Teorema 4.12] e, como todo ideal nilpotente é nil, pela Proposição 2.2.7, idempotentes são levantados módulo $J(R)$. Portanto, pelo Teorema 4.2.8, concluímos que R é limpo. □

Capítulo 5

Anéis nil limpos

Estudaremos neste capítulo algumas propriedades e exemplos de anéis nil limpos e fortemente nil limpos com o objetivo de estudar relações entre esses anéis e os que estudamos até o momento. A principal referência é o artigo [7].

5.1 Anéis nil limpos

Definição 5.1.1. *Dizemos que $r \in R$ é nil limpo se pode ser escrito como a soma de um idempotente e um nilpotente. Caso o idempotente e o nilpotente comutam, dizemos que r é um elemento fortemente nil limpo. Se todo elemento em R é nil limpo (fortemente nil limpo), dizemos que R é um anel nil limpo (fortemente nil limpo).*

É fácil ver que 0 e 1 são elementos nil limpos em qualquer anel R. Elementos nilpotentes e idempotentes são nil limpos. Como todo elemento de um anel booleano é idempotente, temos que todo anel booleano é nil limpo. Como anéis booleanos são comutativos, segue que todo anel booleano é fortemente nil limpo.

Domínios com mais de dois elementos não são nil limpos, pois, os únicos idempotentes e nilpotentes são os triviais.

Uma vez que um corpo não é nil limpo, concluímos que anéis limpos não necessariamente são nil limpos, mas a recíproca é verdadeira como veremos na proposição a seguir.

Proposição 5.1.2. *Todo anel nil limpo é limpo.*

Demonstração. Suponha que R é um anel nil limpo e seja r um elemento de R. Como R é unitário, temos que $r-1 \in R$, logo $r-1 = e+b$ com $e \in I(R)$ e $b \in Nil(R)$, assim $r = e + (b+1)$ é limpo, pois $b+1$ é invertível. □

Portanto, acabamos de mostrar que o anel ser limpo é uma condição necessária para que seja nil limpo. Na demonstração da Proposição 5.1.2, usamos fortemente o fato do anel ser nil limpo. Se R fosse um anel qualquer, então dado $r \in R$ nil limpo então r é limpo?

A Proposição 5.1.3 a seguir, mostra que se R é um anel comutativo, então a resposta é positiva.

Proposição 5.1.3. *Todo elemento fortemente nil limpo é limpo.*

Demonstração. Sejam R um anel e $a \in R$ nil limpo. Então, $a = e + b$, onde e é um idempotente e b é um nilpotente e $eb = be$. Temos que $a = (1-e) + (2e-1+b)$. É claro que $1-e$ é idempotente. Vamos mostrar que $2e-1+b$ é invertível. Note que $2e-1$ é invertível, pois $(2e-1)^2 = 1$. Logo, fazendo $u = 2e-1$, temos que $2e-1+b = u+b = u(1+u^{-1}b)$. Como b é nilpotente e u^{-1} comuta com b, $u^{-1}b$ é nilpotente e, portanto, $1+u^{-1}b$ é invertível. Logo, $u(1+u^{-1}b) = 2e-1+b$ é invertível. □

Com a caracterização de anéis fortemente π-regulares dada pelo Teorema 3.5.6, provaremos que elementos fortemente nil limpos são fortemente π-regulares.

Proposição 5.1.4. *Todo elemento fortemente nil limpo é fortemente π-regular.*

Demonstração. Seja $a \in R$ um elemento fortemente nil limpo. Então $a = e + b$, onde $e \in I(R)$, $b \in Nil(R)$ e $eb = be$. Pela Proposição 5.1.3, temos que $a = (1 - e) + (2e - 1 + b)$ com $1 - e \in I(R)$, $2e - 1 + b \in U(R)$. Note que $(1 - e)a = (1 - e)(e + b) = e + b - e - eb = (e + b)(1 - e) = a(1 - e)$ e $(1 - e)a(1 - e) = (1 - e)(b - be) = b - be - eb + be = b - eb = (1 - e)b$ é nilpotente, pois $b \in Nil(R)$ e comuta com e. Portanto, a decomposição dada é a decomposição fortemente π-regular de a e concluímos que a é um elemento fortemente π-regular. □

Todo elemento fortemente nil limpo é fortemente π-regular e pelo Corolário 3.5.5, temos que todo elemento fortemente nil limpo é π-regular e consequentemente, todo elemento fortemente nil limpo possui alguma potência regular.

Corolário 5.1.5. *Todo elemento fortemente nil limpo é fortemente limpo.*

Pela Proposição 5.1.4 e o Corolário 5.1.5, concluímos que todo anel fortemente nil limpo é fortemente π-regular, fortemente limpo e em particular é limpo.

Lembremos que se a é fortemente nil limpo, então $a = e + b$ onde e é um idempotente e b é um nilpotente com $eb = be$. Chamaremos essa decomposição de a como decomposição fortemente nil limpa e provaremos que essa decomposição é única.

Corolário 5.1.6. *Todo elemento fortemente nil limpo admite uma única decomposição fortemente nil limpa.*

Demonstração. Seja a um elemento fortemente nil limpo. Suponha que $a = e_1 + f_1$ e $a = e_2 + f_2$ com e_1 e e_2 idempotentes e f_1 e f_2 nilpotentes, $e_1 f_1 = f_1 e_1$

e $e_2f_2 = f_2e_2$. Então $a = (1-e_1)+(2e_1-1+f_1)$ e $a = (1-e_2)+(2e_2-1+f_2)$ são decomposições fortemente π-regulares de a. Pela Proposição 3.5.7, $(1-e_1) = (1-e_2)$ e $(2e_1-1+f_1) = (2e_2-1+f_2)$, portanto $e_1 = e_2$ e $f_1 = f_2$. □

A próxima proposição dá uma caracterização para anéis fortemente nil limpos via elementos fortemente π-regulares.

Proposição 5.1.7. *Sejam R um anel e $a \in R$. Suponha que a é fortemente π-regular com $a = e + u$. Então a é fortemente nil limpo se, e somente se, $2e - 1 + u$ é nilpotente.*

Demonstração. Sejam $a \in R$ fortemente nil limpo e $a = f + b$ sua decomposição. Pela Proposição 5.1.4 temos que a admite uma decomposição fortemente π-regular da forma $a = (1 - f) + (2f - 1 + b)$. Pela Proposição 3.5.7, $e = 1-f$ e $u = 2f-1+b$. Com isso, $2e-1+u = 2(1-f)-1+(2f-1+b) = b$ é nilpotente. Reciprocamente se $2e - 1 + u$ é nilpotente, então vemos imediatamente que $a = e + u = (1 - e) + (2e - 1 + u)$ e assim a é fortemente nil limpo. □

Dizemos que $x \in R$ é unipotente se existe $b \in Nil(R)$ tal que $x = 1 + b$. Todo anel admite 1 como elemento unipotente, que chamaremos de unipotente trivial.

Se $a \in U(R)$ é fortemente nil limpo, sabendo que $a = 0 + a$ é a sua decomposição fortemente π-regular, temos que $2 \cdot 0 - 1 + a = -1 + a$ é nilpotente. Assim, podemos escrever a na forma $a = 1 + (-1 + a)$ e portanto a é unipotente. Por outro lado, se a é unipotente, então $a = 1 + b$ para algum nilpotente b, portanto a é fortemente nil limpo. Com isso, acabamos de mostrar o seguinte resultado:

Corolário 5.1.8. *Um elemento $a \in U(R)$ é fortemente nil limpo se, e somente se, é unipotente.*

Teorema 5.1.9. *Seja R um anel. Então R é fortemente nil limpo se, e somente se, R é fortemente π-regular e todo elemento invertível em R é unipotente.*

Demonstração. Suponha que R é fortemente nil limpo. Então, pela Proposição 5.1.4, R é fortemente π-regular. Além disso, pelo Corolário 5.1.8, todo elemento invertível em R é unipotente. Reciprocamente, suponha que R é fortemente π-regular e que todo elemento invertível em R é unipotente. Então, dado $a \in R$, pelo Teorema 3.5.6, $a = e + u$ com $e \in I(R)$, $u \in U(R)$, $ea = ae$ e $ae \in Nil(R)$. Por hipótese temos que $u = 1 + b$ com $b \in Nil(R)$. Logo, $a = e + 1 + b$. Multiplicando a última igualdade à direita por e temos que $ae = 2e + be$ e consequentemente $ae - be = 2e$. Como $ae = ea$ temos que $ue = eu$ e $be = eb$. Assim $be \in Nil(R)$, pois $b \in Nil(R)$, e $ae-be = 2e \in Nil(R)$, pois ae e be comutam. Note que $2e+u = u(2eu^{-1}+1)$. Como $2e$ é nilpotente e $eu = ue$, temos que $2eu^{-1} \in Nil(R)$ e consequentemente $2eu^{-1} + 1 \in U(R)$. Logo, $2e + u \in U(R)$ e, como todo elemento invertível é unipotente, $2e-1+u \in Nil(R)$. Portanto, pela Proposição 5.1.7, a é fortemente nil limpo. □

Exemplo 5.1.10. Considere no anel $M_2(R)$ a matriz $A = e_{11} + e_{12} + e_{21}$. Como $A - I_2$ não é nilpotente, A não é unipotente e, pelo Teorema 5.1.9, $M_2(R)$ não é um anel fortemente nil limpo.

Em geral temos o seguinte resultado.

Corolário 5.1.11. *Para todo anel R e para todo $n > 1$, $M_n(R)$ não é fortemente nil limpo.*

5.2 Propriedades de anéis nil limpos

Veremos agora algumas propriedades de anéis nil limpos.

Proposição 5.2.1. *O quociente de um anel nil limpo (fortemente nil limpo) é nil limpo (fortemente nil limpo). O produto direto finito de anéis nil limpos (fortemente nil limpo) é nil limpo (fortemente nil limpo).*

Demonstração. Para ver que o quociente de anéis nil limpos é nil limpo, seja I um ideal de R e considere $f : R \longrightarrow R/I$ a projeção canônica. Dado $x \in R$, temos que $x = e+b$ onde $e^2 = e$ e b é nilpotente com $b^n = 0$. Note que $f(e) = f(e^2) = f^2(e)$ e $0 = f(0) = f(b^n) = (f(b))^n$, logo $f(x) = f(e) + f(b)$ onde $f^2(e) = f(e)$ e $f(b)$ é nilpotente. Como f é sobrejetora, concluímos que R/I é nil limpo.

Considere agora $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ onde cada R_i é um anel nil limpo. Como R_i é nil limpo, para cada $i = 1, \ldots, n$, $x_i \in R_i$ escreve da forma $x_i = e_i + b_i$ com $e_i^2 = e_i$ e b_i nilpotente. Assim, $x = (e_1 + b_1, e_2 + b_2, \ldots, e_n + b_n) = (e_1, e_2, \ldots, e_n) + (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Como $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ é idempotente e $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ é nilpotente, com índice de nilpotência igual ao mínimo múltiplo comum dos índices de nilpotência de cada b_i, temos que x é nil limpo. Portanto $R = \prod_{i=1}^{n} R_i$ é um anel nil limpo. Analogamente verifica-se o caso de anéis fortemente nil limpo. □

Para mostrar que não podemos retirar a hipótese de que o produto direto seja finito na proposição anterior, primeiro iremos demonstrar o seguinte lema.

Lema 5.2.2. *Se R é um anel nil limpo, então o elemento $2 = 1 + 1$ é um nilpotente central e, como tal, está contido em $J(R)$.*

Demonstração. Se $2 = e+b$ onde $e \in I(R)$ e $b \in Nil(R)$, então $1-e = b-1$. Logo $b - 1$ é idempotente e invertível. Portanto, $b - 1 = 1$ e $b = 2$. Como 2 é um múltiplo da unidade do anel, segue que $\langle 2 \rangle$ é um ideal nil. Como todo ideal nil está contido no radical de Jacobson, temos que $\langle 2\rangle \subseteq J(R)$ e portanto $2 \in J(R)$. $\square$

Pelo Lema 5.2.2, se $2 = 1+1 \in R$ não é um nilpotente central, então R não é um anel nil limpo.

Considere o anel $\mathbb{Z}_{2^i}$ com $i \geq 1$. Dado um idempotente $\overline{e} \in \mathbb{Z}_{2^i}$ temos que $2^i | e(e-1)$. Como $mdc(e, e-1) = 1$ temos que $2^i|e$ ou $2^i|(e-1)$. Se $2^i|e$, temos que $\overline{e} = \overline{0}$. Se $2^i|(e-1)$, temos que $\overline{e} = \overline{1}$. Logo, os únicos idempotentes em $\mathbb{Z}_{2^i}$ são $\overline{0}$ e $\overline{1}$. Dado $x \in \mathbb{Z}_{2^i}$, temos que $x = \overline{2k}$ ou $x = \overline{1} + \overline{2k}$ com $k \in \mathbb{Z}$. Como $\overline{2k}$ é nilpotente em $\mathbb{Z}_{2^i}$, $\mathbb{Z}_{2^i}$ é um anel nil limpo. Consideremos agora, $R = \prod\limits_{i=1}^{\infty} \mathbb{Z}_{2^i}$ e o elemento $1+1 = (\overline{0}, \overline{2}, \overline{2}, \overline{2}, \ldots) \in R$. Observe que um elemento é nilpotente em R se, e somente se, possui apenas uma quantidade finita de entradas não nulas. Então, $1+1$ não é nilpotente. Como $1+1$ não é nilpotente, pelo Lema 5.2.2, R não é nil limpo. Portanto, o produto direto infinito de anéis fortemente nil limpos nem sempre é fortemente nil limpo ou nil limpo.

Por outro lado, se $\{R_i\}_{i\in I}$ é uma família de anéis nil limpos (fortemente nil limpos) e existe um N tal que o índice de nilpotência dos elementos nilpotentes de cada R_i para $i \in I$ são menores que N, então $\prod\limits_{i\in I} R_i$ é nil limpo (fortemente nil limpo).

Proposição 5.2.3. *Sejam R um anel e I um ideal nil de R. Então R é nil limpo se, e somente se, R/I é nil limpo.*

Demonstração. Se R é nil limpo, segue da Proposição 5.2.1 que R/I é nil limpo. Suponha agora que R/I é nil limpo. Então, para qualquer $r \in R$, temos que $\overline{r} = \overline{e} + \overline{x}$ onde $\overline{x}$ é nilpotente e $\overline{e}$ é idempotente. Como I é um ideal nil de R, pela Proposição 2.2.7 temos que idempotentes podem ser levantados módulo I. Logo, existe um idempotente $e' \in R$ tal que $\overline{e} = \overline{e'}$.

Assim $\overline{r} = \overline{e'} + \overline{x}$ e $\overline{r - e'}$ é nilpotente em R/I. Com isso, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{(r - e')}^n = 0$, e consequentemente $(r - e')^n \in I$. Como I é um ideal nil, exite $k \in \mathbb{N}$ tal que $((r - e')^n)^k = 0$, ou seja, $(r - e')^{nk} = 0$. Portanto, $r - e'$ é nilpotente, e concluímos que r é nil limpo em R e $r = e' + (r - e')$ com $e' \in I(R)$ e $r - e' \in Nil(R)$. □

O resultado a seguir dá uma condição necessária para que o anel seja nil limpo.

Proposição 5.2.4. *Se R é um anel nil limpo então $J(R)$ é nil.*

Demonstração. Seja $x \in J(R)$. Como R é nil limpo, existem $e \in I(R)$ e $b \in Nil(R)$ tais que $x = e + b$. Para mostrar o resultado, basta mostrar que $e = 0$. Como b é nilpotente, então $1 + b$ é invertível com inverso $1 + a$. Logo, $a + b + ba = 0$. Agora, $ex(1 + a) = e + ea + eb + eba = e + e(a + b + ba) = e$. Como $J(R)$ é um ideal, $ex(1 + a) \in J(R)$. Portanto, $e \in J(R)$ e pelo Lema 2.2.4, $e = 0$. □

Com isso, temos uma caracterização para anéis nil limpos via radical de Jacobson.

Corolário 5.2.5. *Um anel R é nil limpo se, e somente se, $J(R)$ é nil e $R/J(R)$ é nil limpo.*

Observamos que se R é abeliano e nil limpo, então R é fortemente nil limpo. O lema a seguir será importante na demonstração de que todo elemento nilpotente de um anel abeliano nil limpo está em $J(R)$.

Lema 5.2.6. *Seja R um anel limpo. Se I é um ideal à esquerda próprio de R que não está contido em $J(R)$, então I possui um idempotente não trivial.*

Demonstração. Suponha que os idempotentes de I são triviais e seja $a \in I$. Como R é nil limpo, pela Proposição 5.1.2, R é limpo e $a = e+u$ com $e \in I(R)$ e $u \in U(R)$. Observe que $u^{-1}(1-e)u$ é um idempotente e $u^{-1}(1-e)u = a - u^{-1}(a^2 - a) \in I$. Logo, $u^{-1}(1-e)u = 0$ e $e = 1$. Com isso, para todo $a \in I$, $a = 1 + u$ e $1 - a \in U(R)$. Logo, para todo $r \in R$, $1 - ra$ tem inverso à esquerda portanto, pela Proposição 2.1.42, $I \subseteq J(R)$. $\square$

Proposição 5.2.7. *Se R é um anel abeliano nil limpo, então todo elemento nilpotente de R está contido em $J(R)$.*

Demonstração. Suponha que $a \in R$ é nilpotente não trivial com índice de nilpotência n e $a \notin J(R)$. Logo $I = Ra$ é um ideal à esquerda de R que não está contido em $J(R)$. Como R é nil limpo, pela Proposição 5.1.2, R é limpo. Logo, pelo Lema 5.2.6, I possui um idempotente não trivial. Seja $e = ra$ esse idempotente. Como R é abeliano, todo idempotente de R é central e $e = e^2 = rara = r^2a^2$. Indutivamente, temos que $e = e^n = r^n a^n = 0$, absurdo. Portanto, todo elemento nilpotente de R está em $J(R)$. $\square$

Corolário 5.2.8. *Se R é um anel abeliano nil limpo com $J(R) = \{0\}$, então R é reduzido e portanto booleano.*

Demonstração. Como $J(R) = \{0\}$, pela Proposição 5.2.7, seu único nilpotente é o zero, portanto R é reduzido. Como R é nil limpo, temos que todo elemento de R é idempotente. Portanto, R é booleano. $\square$

Corolário 5.2.9. *Seja R um anel comutativo. Então R é nil limpo se, e somente se, $R/J(R)$ é booleano e $J(R)$ é nil.*

Demonstração. Suponha que R é nil limpo. Pela Proposição 5.2.4, $J(R)$ é nil. Como R é um anel comutativo, $R/J(R)$ é comutativo e consequentemente $R/J(R)$ é abeliano. Como quociente de anéis nil limpos são nil limpos, pela Proposição 5.2.7, todo elemento nilpotente de $R/J(R)$ está contido em $J(R/J(R))$ mas, $J(R/J(R)) = J(R)/J(R) = 0$. Então, pelo Corolário 5.2.8, $R/J(R)$ é booleano. Reciprocamente, se $R/J(R)$ é booleano, $R/J(R)$ é nil limpo e como $J(R)$ é nil, segue pelo Corolário 5.2.5 que R é nil limpo. $\square$

A demonstração do Lema a seguir pode ser encontrada em [6]. Será omitida desse trabalho, pois trata-se de uma prova técnica e longa.

Lema 5.2.10. *[6, Lemma 4] Sejam R um anel e I um ideal nilpotente de R. Um elemento $x \in R$ é fortemente π-regular se, e somente se, $\overline{x}$ é fortemente π-regular em $\overline{R} = R/I$.*

O teorema seguinte garante que elementos nil limpos no quociente de um anel por um ideal nilpotente também são nil limpos no anel.

Teorema 5.2.11. *Sejam R um anel, $a \in R$ e I um ideal nilpotente de R. Seja $\overline{R} = R/I$. Se $\overline{a}$ é fortemente nil limpo em $\overline{R}$, então a é fortemente nil limpo em R.*

Demonstração. Como $\overline{a}$ é fortemente nil limpo, escrevemos $\overline{a} = \overline{e} + \overline{b}$ onde $\overline{e}^2 = \overline{e}$ e $\overline{b}$ é nilpotente que comuta com $\overline{e}$. Pela Proposição 5.1.4, $\overline{a}$ admite uma decomposição fortemente π-regular da forma $\overline{a} = \overline{1-e} + \overline{2e-1+b}$. Como I é um ideal nilpotente de R, pelo Lema 5.2.10, existe um idempotente $f \in R$ e uma unidade $u \in R$ tal que $a = f + u$ é uma decomposição fortemente π-regular. Pela Proposição 5.1.7, precisamos apenas mostrar que $2f - 1 + u$ é nilpotente. Pela unicidade da decomposição fortemente π-regular, temos que $\overline{f} = \overline{1-e}$ e $\overline{u} = \overline{2e-1+b}$. Assim, $\overline{2f-1+u} = \overline{2(1-e)-1+2e-1+b} = \overline{b}$. Como b é nilpotente módulo I, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $\overline{b^n} = 0$ isto é, $\overline{(2f-1+u)^n} = 0$ implicando em $(2f-1+u)^n \in I$. Como I é um ideal nilpotente, em particular nil, temos que $(2f-1+u)^n$ é nilpotente. Logo existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $(2f - 1 + u)^{nk} = 0$, assim $2f - 1 + u$ é nilpotente. Portanto, pela Proposição 5.1.7 temos que a é fortemente nil limpo. $\square$

Corolário 5.2.12. *Suponha que R é um anel com um ideal nilpotente I. Então R é fortemente nil limpo se, e somente se R/I é fortemente nil limpo.*

Demonstração. A demonstração desse corolário segue diretamente da Proposição 5.2.1 e o Teorema 5.2.11. $\square$

Lema 5.2.13. *Seja R um anel nil limpo com apenas idempotentes triviais. Se $a \notin J(R)$, então $a \in U(R)$.*

Demonstração. Se $a \notin J(R)$, então Pela Proposição 2.1.42, existem r, $s \in R$ tais que $1 - ar$ e $1 - sa$ não admitem inverso à esquerda e à direita, respectivamente. Assim, como R é um anel nil limpo e 0 e 1 são os únicos idempotentes de R, podemos escrever $1-ar = 0+b$ ou $1-ar = 1+b$ onde b é nilpotente e analogamente $1-sa = 0+c$ ou $1-sa = 1+c$ onde c é nilpotente. Note que $1 - ar$ e $1 - sa$ não são invertíveis, logo $1 - ar = b$ e $1 - sa = c$, o que implica $ar = 1-b$ e $sa = 1-c$, ou seja ar e sa são invertíveis. Portanto, $ar(1 - b)^{-1} = 1$ e $(1 - c)^{-1}sa = 1$. Portanto, a é invertível. $\square$

A seguir daremos uma caracterização de anéis nil limpos via anéis locais e o radical de Jacobson.

Proposição 5.2.14. *Seja R um anel apenas com idempotentes triviais. Então R é nil limpo se, e somente se, R é um anel local, $J(R)$ é nil e $R/J(R) \simeq \mathbb{Z}_2$.*

Demonstração. Suponha que R é nil limpo e seja $a \in R$. Como R possui somente idempotentes triviais, então a é nilpotente ou $a = 1 + b \in U(R)$. Seja $a \in R-U(R)$. Pelo Lema 5.2.13, $a \in J(R)$. Com isso, $R-U(R) = J(R)$, R é local e $J(R)$ é nil. Agora, considere $R/J(R)$ e seja $\overline{x} \in R/J(R)$. Pelo exposto acima, $\overline{x} = \overline{1}+\overline{b}$ é invertível. Portanto $R/J(R)$ é um anel de divisão.

Além disso, se $\overline{x} = \overline{1} + \overline{b}$, como $\overline{b}$ é nilpotente, concluímos que $b \in J(R)$, $\overline{b} = 0$ e $\overline{x} = \overline{1}$. Logo, $R/J(R) \simeq \mathbb{Z}_2$.

Reciprocamente, tome $a \in R$ arbitrário e considere $\overline{a} \in R/J(R)$. Então $\overline{a} = \overline{0}$ ou $\overline{a} = \overline{1}$, assim $a \in J(R)$ ou $a - 1 \in J(R)$. Como $J(R)$ é nil, então ou a é nilpotente, ou $a - 1$ é nilpotente e consequentemente $a = 0 + a$ ou $a = 1 + (a - 1)$, portanto a é nil limpo. $\square$

O resultado a seguir mostra uma relação entre o anulador do elemento fortemente nil limpo e o idempotente que aparece em sua decomposição.

Lema 5.2.15. *Sejam R um anel e $a = e + b$ a decomposição fortemente nil limpa de $a \in R$. Então $ann_l(a) \subseteq ann_l(e)$ e $ann_r(a) \subseteq ann_r(e)$.*

Demonstração. Seja $r \in ann_l(a)$. Se $a = e+b$ então $0 = re+rbe = re+reb = re(1 + b)$, como $1 + b \in U(R)$, $re = 0$, portanto $r \in ann_l(e)$. Analogamente, se $r \in ann_r(a)$ e $a = e + b$, então $0 = er + ebr = (1 + b)er$ e $er = 0$, portanto $r \in ann_r(e)$. $\square$

Lema 5.2.16. *Sejam R um anel e $a = e + b$ a decomposição fortemente nil limpa de $a \in R$. Então $ann_l(a) \subseteq R(1 - e)$ e $ann_r(a) \subseteq (1 - e)R$.*

Demonstração. Se $r \in ann_l(a)$, pelo Lema 5.2.15, temos que $r \in ann_l(e)$, logo $re = 0$ e assim, $r = r + re = r(1 - e)$, portanto $r \in R(1 - e)$. Analogamente, se $r \in ann_r(a)$, pelo Lema 5.2.15, temos que $r \in ann_r(e)$, logo $er = 0$, $r = r + er = (1 - e)r$ e portanto $r \in (1 - e)R$. $\square$

Daremos a seguir uma caracterização de elementos fortemente nil limpos em fRf, com $f \in I(R)$.

Proposição 5.2.17. *Sejam R um anel e $f \in R$ um idempotente. Um elemento $a \in fRf$ é fortemente nil limpo em R se, e somente se, é fortemente nil limpo em fRf.*

Demonstração. Se $a \in fRf$ é fortemente nil limpo em fRf, então com a mesma decomposição nil limpa, a é fortemente nil limpo em R. Reciprocamente, considere $a \in fRf$ fortemente nil limpo em R tal que $a = e + b$ onde $e^2 = e$ e b é nilpotente. Note que $(1 - f)a = 0 = a(1 - f)$, logo $fa = a = af$. Pelo Lema 5.2.15, também temos que $(1 - f)e = 0 = e(1 - f)$, ou seja $ef = e = fe$. Com isso, temos que $(1 - f)a = (1 - f)e + (1 - f)b$, isto é, $(1 - f)b = 0$ e $f = fb$. Analogamente vemos que $f = bf$ e $fb = b = bf$. Como $fe = fef = (fef)^2$, pois e e f são idempotentes, temos que fef é um elemento idempotente em fRf. Como $b = bf = fbf$ e b é nilpotente temos que fbf é nilpotente em fRf. Portanto, $a = fef + fbf$ é fortemente nil limpo em fRf. $\square$

Portanto se estamos trabalhando com anéis fortemente nil limpos, concluímos que o anel da forma eRe onde $e^2 = e \in R$ será fortemente nil limpo. Assim, podemos enunciar o seguinte corolário.

Corolário 5.2.18. *Se R é um anel fortemente nil limpo e $f \in I(R)$, então o anel fRf é fortemente nil limpo.*

5.3 Contra-exemlos

A proposição a seguir resume o que estudamos até o momento sobre anéis fortemente regulares, fortemente nil limpos, fortemente π-regulares e fortemente limpos.

Proposição 5.3.1. *Sejam R um anel e $a \in R$. Considere as seguintes condições.*

1. *a é fortemente regular;*

2. *a é fortemente nil limpo;*

3. a é fortemente π-regular;

4. a é fortemente limpo.

Então, temos as sequências de implicações

$$1 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$$

$$2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4.$$

Demonstração. A demonstração de $1 \Rightarrow 3$ segue diretamente dos Teoremas 3.2.26 e 3.5.6. Já a demonstração de $3 \Rightarrow 4$ segue diretamente do Teorema 3.5.6 e a de $2 \Rightarrow 3$ segue da Proposição 5.1.4. □

Veremos que as recíprocas das implicações que aparecem na proposição anterior não são verdadeiras.

Exemplo 5.3.2. ($3 \nRightarrow 1$) Pelo Exemplo 3.4.6 temos que $\mathbb{Z}_4$ é fortemente π-regular. Uma vez que os únicos invertíveis em $\mathbb{Z}_4$ são $\overline{1}$ e $\overline{3}$, o elemento $\overline{2}$ admite a decomposição fortemente π-regular $\overline{2} = \overline{1} + \overline{1}$. Como $\overline{2} = \overline{1} \cdot \overline{2} \cdot \overline{1} \neq \overline{0}$, pelo Teorema 3.2.26, o elemento $\overline{2}$ não é fortemente regular. Portanto, $\mathbb{Z}_4$ é um anel fortemente π-regular, mas não é fortemente regular.

Exemplo 5.3.3. ($4 \nRightarrow 3$) Seja $R = \left\{ \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} : n \text{ é ímpar} \right\}$. Como os únicos elementos idempotentes em R são os triviais e o único nilpotente é o zero, dado $\frac{m}{n} \in R$, temos que:

$$\tfrac{m}{n} = 0 + \tfrac{m}{n} \text{ ou } \tfrac{m}{n} = 1 + \tfrac{-n+m}{n}.$$

Observe que essas decomposição são limpas, logo R é fortemente limpo. Sabemos pelo Corolário 3.5.5 que todo elemento fortemente π-regular é π-regular. Logo, pelo Lema 3.3.4, o radical de Jacobson de um anel fortemente π-regular é nil. Como vimos no Exemplo 3.3.6, $J(R) = \langle 2 \rangle$ não é nil, logo R não é fortemente π-regular.

Exemplo 5.3.4. ($3 \not\Rightarrow 2$) Todo corpo é fortemente π-regular, mas não é fortemente nil limpo, pois os únicos idempotentes e nilpotentes em um corpo com mais de dois elementos são os triviais.

Como o único nilpotente em um corpo é o zero, temos que um corpo com mais de dois elementos não é fortemente nil limpo, mas é fortemente regular.

Observamos que um anel é fortemente regular e fortemente nil limpo se, e somente se é booleano. De fato, se R é fortemente regular, pelo Lema 3.2.14, R é reduzido. Mas, por hipótese, R também é fortemente nil limpo, então, todo elemento em R é idempotente e portanto R é um anel booleano. Reciprocamente, se R é um anel booleano, dado $a \in R$, temos que a é fortemente nil limpo. Por outro lado, a admite a seguinte decomposição: $a = (1-a) + (2a-1)$. Como R é booleano, $a^2 = a$ e consequentemente $a(1-a) = 0 = (1-a)a$, $a(1-a)a \in Nil(R)$ e $(2a-1) \in U(R)$. Logo, pelo Teorema 3.2.26, concluímos que a é fortemente regular.

A demonstração do teorema a seguir pode ser encontrada em [22]. Utilizaremos este teorema para descrevermos dois exemplos: o primeiro exemplo mostrará um anel nil limpo que não é fortemente π-regular e o segundo exemplo mostrará um anel nil limpo que não é π-regular.

Teorema 5.3.5. *[22, Theorem 2.2] Seja $n \geq 1$. Para toda matriz $A \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ existe um idempotente $E \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ tal que $(A-E)^4 = 0$.*

O exemplo a seguir mostra que a Proposição 5.1.4 não é verdadeira, caso consideramos anéis nil limpos em vez de anéis fortemente nil limpos.

Exemplo 5.3.6. Seja $R = \prod\limits_{n\geq 1} M_n(\mathbb{Z}_2)$. Pelo Teorema 5.3.5, R é um anel nil limpo, pois, dado qualquer matriz $A \in M_n(\mathbb{Z}_2)$ temos que $A = E + (A-E)$ onde E é um idempotente e $(A-E)$ é nilpotente. Observe que para cada $n \geq 2$, o anel $M_n(\mathbb{Z}_2)$ admite $a_n = \sum\limits_{i=1}^{n-1} e_{i,i+1}$ como elemento nilpotente de índice de nilpotência n. Considere o elemento $a = (0, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots)$ em R. Observe que

$$a^n = (0, 0, \ldots, 0, a_{n+1}^n, a_{n+2}^n, \ldots)$$

com $a_{n+1}^n \neq 0$. Enquanto

$$a^{n+1} = (0, 0, \ldots, 0, 0, a_{n+2}^{n+1}, \ldots).$$

Logo, $a^n \notin a^{n+1}R$ e concluímos que R não é fortemente π-regular.

Exemplo 5.3.7. Seja $R = \prod_{n=1}^{\infty} M_n(\mathbb{Z}_4)$. Afirmamos que R é nil limpo. De fato, seja $I = \overline{2}R$. Note que $\overline{2}\mathbb{Z}_4 = \{\overline{0}, \overline{2}\}$. Logo, $I = \overline{2}R$ é um ideal nil de R. Escreva $\overline{R} = R/I \simeq \prod_{n=1}^{\infty} M_n(\mathbb{Z}_4/\{\overline{0}, \overline{2}\}) \simeq \prod_{n=1}^{\infty} M_n(\mathbb{Z}_2)$. Tome $a \in R$ qualquer. Pelo Teorema 5.3.5, existe um idempotente $e \in \overline{R}$ tal que $(\overline{a} - e)^4 = 0$. Como idempotentes sempre podem ser levantados módulo um ideal nil, existe um idempotente $e' \in R$ tal que $\overline{e'} = e$. Consequentemente $\overline{(a - e')^4} = 0$, isto é, $(a - e')^4 \in I$. Como todo elemento em I tem o quadrado igual a zero, segue que $(a - e')^8 = 0$ e $a = e' + (a - e')$. Para ver que R não é π-regular, defina para cada $n \geq 1$, os seguintes elementos em $M_n(\mathbb{Z}_4)$: $a_1 = \overline{2}$ e $a_n = \sum\limits_{i=2}^{n} e_{i,i-1} + \overline{2}e_{1,n}$ para $n \geq 2$. Podemos calcular diretamente que $a_n^n = \overline{2}I_n \in M_n(\mathbb{Z}_4)$, que não é um elemento regular em $M_n(\mathbb{Z}_4)$, pois, $\overline{2}^2 = \overline{0}$. Consequentemente, definindo $a = (a_1, a_2, a_3, \ldots) \in R$, nenhuma potência de a é regular em R. De fato, se existe algum $n \geq 1$ com a^n regular, segue que a_n^n é regular em $M_n(\mathbb{Z}_4)$, que é uma contradição. Isso prova que R não é π-regular. Portanto, acabamos de exibir um exemplo de um anel nil limpo, mas que não é π-regular.

Capítulo 6

Considerações Finais

Neste trabalho, estudamos anéis regulares, π-regulares, fortemente π-regulares, limpos e nil limpos. Vimos propriedades, exemplos e como esses anéis se relacionam. O estudo desses anéis teve início no século XX. Ao longo dos anos, técnicas foram desenvolvidas, resultados interessantes foram surgindo e questões foram deixadas em aberto.

Uma das questões em aberto foi proposta por Diesl em [7] e diz o seguinte: o anel de matrizes com coeficientes em um anel nil limpo é nil limpo? Diesl [7] mostra que o anel de matrizes com coeficientes em um anel nil limpo é limpo, mas a solução para a sua pergunta ainda é desconhecida.

Na teoria de anéis, há um problema conhecido como problema de Köthe. Este problema, introduzido por G. Köthe em 1930, diz: a soma de dois ideais à direita nil é também um ideal à direita nil? Uma outra formulação equivalente é: para qualquer anel R e qualquer ideal nil J de R, $M_n(J)$ é um ideal nil de $M_n(R)$ para todo n? Na tentativa de solucionar este problema, várias equivalências foram encontradas e uma delas, diz o seguinte: o problema de Köthe tem solução positiva se, e somente se, o anel de matrizes com coeficientes em um anel nil limpo é nil limpo. Portanto, a resposta à pergunta de

Diesl é positiva se, e somente se, o problema de Köthe tem solução positiva em classes de álgebras sobre o corpo $\mathbb{F}_2$.

Diesl em [7] traz também a seguinte pergunta: Existe um anel nil limpo que não é fortemente π-regular? Recentemente, Šter em [22] exibiu o Exemplo 5.3.6 dessa dissertação, respondendo afirmativamente esta pergunta.

Outras questões deixadas por Diesl em [7] que ainda estão em aberto são: Se R é um anel qualquer, dado $r \in R$ nil limpo, então r é limpo? Se R é um anel nil limpo e e é um idempotente, o anel eRe é nil limpo?

Portanto, em geral, o estudo de regularidade em anéis representa um papel importante no desenvolvimento da teoria de anéis limpos e problemas relacionados.

Bibliografia

[1] Arens, R. F.; Kaplansky, I., *Topological representation of algebras,* Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948) 457-481.

[2] Azumaya, G., *Strongly $\pi-$regular rings,* J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. Ser. I. **13** (1954) 34-39.

[3] Burgess, W. D.; Menal, P., *On strongly π-regular rings and homomorphisms into them,* Comm. Algebra **16** (1988), no. 8, 1701-1725.

[4] Brown, B.; McCoy, N. H., *The maximal regular ideal of a ring,* Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 165-171.

[5] Chen, H., *On uniquely clean rings,* Comm. Algebra **39** (2011), no. 1, 189-198.

[6] Diesl, A. J.; Dorsey, T. J.; Garg, S.; Khurana, D., *A note on completeness and strongly clean rings,* J.Pure Appl Algebra **218** (2014), no. 4, 661-665.

[7] Diesl, A. J., *Nil clean rings,* J. Algebra **383** (2013) 197-211.

[8] Dischinger, F., *Sur les anneaux fortement π-réguliers,* C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B **283** (1976), no. 8, A571-A573.

[9] Farb B.; Dennis, K. R., Noncommutative Algebra, Graduate Texts in Mathematics, 1993.

[10] Han, J.; Nicholson, W. K., *Extensions of clean rings,* Comm. Algebra **29** (2001), no. 6, 2589-2595.

[11] Huh, C.; Kim N. K.; Lee, Y., *Examples of strongly π-regulares rings,* J. Pure Appl. Algebra **189** (2004), no. 1-3, 195-210.

[12] Kaplansky, I., *Topological representation of algebras .II.,* Trans. Amer. Math. Soc. **68** (1950) 62-75.

[13] Kandô, T. *Strong regularity in arbitrary rings,* Nagoya Math. J. 4 (1952), 51-53.

[14] Lam, T. Y., A First Course in Noncommutative Rings, Springer-Velarg, 1991.

[15] Matczuk, J., *Conjugate (nil) clean rings and Köthe's problem,* J. Algebra Appl **16** (2017), no. 4, 1750073 14pp.

[16] Milies, C. P.; Sehgal. S. K., An Introduction to Group Rings, Kluwer Academic Publichers, 2002.

[17] McCoy, N. H., *Generalized regular rings.* Bull. Amer. Math. Soc. **45** (1939), no. 2, 175-178.

[18] Morgado, J., *Inteiros regulares módulo n,* Gazeta de Matematica (Lisboa) **33** (1972) No. 125-128, 1-5.

[19] Nicholson, W. K., *Strongly clean rings and Fitting's lemma,* Comm. Algebra **27** (1999), no. 8, 3583-3592.

[20] Nicholson, W.K., *Lifting idempotents and exchange rings,* Trans. Amer. Math. Soc. **229** (1977) 269-278.

[21] Nicholson, W. K.; Zhou, Y., *Rings in which elements are uniquely the sum of an idempotent and a unit,* Glasg. Math. J. **46** (2004), no. 2, 227-236.

[22] Šter, J., *On expressing matrices over* $\mathbb{Z}_2$ *as the sum of an idempotent and a nilpotent,* Linear Algebra Appl. **544** (2018) 339-349.

[23] von Neumann, J., *On regular rings* Proc. Natl. Acad. Sci. U.S.A. **22** (1936), No. 12, 707-713.