

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Razão Cruzada: dos clássicos aos contemporâneos

Hellen Lima de Paula

Belo Horizonte - MG

2016

Hellen Lima de Paula

Razão Cruzada: dos clássicos aos contemporâneos

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Mário Jorge Dias Carneiro

Coorientador: Heleno da Silva Cunha

Universidade Federal de Minas Gerais

18 de novembro de 2016

A Deus, a Ele toda honra e toda glória.

Agradecimentos

Agradeço à minha família, que sempre foi a minha base, por todo o amor e suporte. Em especial à minha mãe e melhor amiga, que é o pilar que me sustenta.

Ao meu orientador Mário Jorge, por todo o conhecimento transmitido e paciência, e ao meu coorientador Heleno, pelas importantes contribuições.

A todos os meus colegas, que se tornaram amigos nesta caminhada, por toda ajuda, companheirismo, palavras de apoio e risadas. Em especial ao Marcos e ao Weberson, meus colegas de turma, Cajeh e Mallu, minhas calouras, e ao Leandro, meu veterano, pelas muitas horas de estudo e por todo o incentivo.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

E à todos que estiveram comigo durante esta jornada, direta ou indiretamente, esta conquista é de todos nós.

Resumo

Inspirados pelo artigo *What is a cross-ratio?* de François Labourie, publicado na Notices of AMS – American Mathematical Society, nosso objetivo é percorrer diversos contextos em que o conceito de razão cruzada é utilizado.

Iniciando com o caso unidimensional, no contexto da Geometria Euclidiana, seguindo aos teoremas fundamentais da Geometria Projetiva e chegando ao plano complexo (e esfera de Riemann) e à Geometria Hiperbólica real. A razão cruzada é preservada pelas transformações lineares fracionárias, ou transformações de Möbius, e é essencialmente o único invariante projetivo de uma quádrupla de pontos colineares, o que justifica sua importância para a Geometria Projetiva. No modelo de Cayley-Klein, da Geometria Hiperbólica real, a distância entre os pontos é expressa em termos da razão cruzada.

Abordamos, ainda, o conceito de razão cruzada complexa, apresentado por Korányi e Riemann, que é uma generalização da razão cruzada clássica e um importante invariante geométrico de uma quádrupla de pontos na fronteira do plano hiperbólico complexo.

No contexto de dinâmica é apresentado o conceito de derivada de Schwarz, visto como uma versão infinitesimal da razão cruzada, que permite avaliar a variação, sob uma transformação definida na reta projetiva, da razão cruzada de pontos infinitamente próximos.

Abstract

Inspired by *What is a cross-ratio?*, published by François Labourie in Notices of AMS - American Mathematical Society, our goal is to go through several contexts in which the concept of cross-ratio is used.

Starting with the onedimensional case, in the context of classical Euclidean Geometry, following to the fundamental theorems of Projective Geometry and arriving at the complex plane (and Riemann sphere) and real Hyperbolic Geometry. The cross-ratio is preserved by the fractional linear transformations, or Möbius transformations, and is essentially the only projective invariant of a quadruple of collinear points, which justifies its importance for Projective Geometry. In the Cayley-Klein model of real Hyperbolic Geometry, the distance between points is expressed in terms of the cross-ratio.

We also approach the concept of complex cross-ratio, presented by Korányi and Riemann, which is a generalization of classical cross-ratio and an important geometric invariant of a quadruple of points at the boundary of the complex hyperbolic plane.

In the context of dynamics the concept of the derivative of Schwarz is presented as an infinitesimal version of the cross-ratio, which allows us to evaluate the variation, under a defined transformation in the projective line, of the cross-ratio of infinitely close points.

Lista de Figuras

1.1	Elementos de perspectiva.	4
1.2	Rebatimento do plano imagem sobre o plano objeto.	6
1.3	O Teorema de Desargues	12
1.4	O Teorema de Pappus	13
1.5	Relação de equivalência \sim em S^2	19
1.6	Não-orientabilidade de \mathbb{P}^2	20
2.1	O Teorema de Pascal	30
2.2	O Teorema Projetivo da Borboleta	31
2.3	Quadrilátero circunscrito	33
3.1	A métrica hiperbólica em termos da razão cruzada.	48
3.2	H-reta passando por dois pontos.	49
4.1	Representação de cadeias no grupo de Heisenberg.	63
4.2	Projeção de um \mathbb{R} -círculo finito no plano \mathbb{C}	64
6.1	Relação entre distância e razão cruzada.	107

Conteúdo

Agradecimentos

Resumo

Abstract

Introdução	1
1 Geometria Projetiva	3
1.1 Elementos de Perspectiva	3
1.2 A Perspectiva Plana	5
1.3 Perspectivas de Retas	8
1.4 O Plano Projetivo	14
1.4.1 Transformações Projetivas no Plano Projetivo	15
1.4.2 Coordenadas Projetivas	17
1.4.3 O Plano Projetivo: Uma Descrição Formal	18
2 A Razão Cruzada	21
2.1 A Razão Cruzada em Geometria Projetiva	21
2.2 A Invariância da Razão Cruzada	24
2.3 A Razão Cruzada em uma Seção Cônica	28
2.4 A Razão Cruzada na Esfera de Riemann	31
2.4.1 Funções Invertíveis na Esfera de Riemann	35

3	Geometria Hiperbólica Real	38
3.1	A Razão Cruzada	38
3.2	O Plano Hiperbólico	43
3.3	A Métrica Hiperbólica	44
3.4	As Geodésicas do Plano Hiperbólico	48
3.5	As Isometrias do Plano Hiperbólico	51
4	Geometria Hiperbólica Complexa	54
4.1	O Modelo Projetivo	54
4.2	O Modelo da Bola Unitária	56
4.2.1	Outra Expressão para o Produto Hermitiano	57
4.3	O Modelo do Parabolóide	58
4.3.1	A Transformação de Cayley	58
4.3.2	A Fronteira do Plano Hiperbólico Complexo	60
4.4	Subvariedades Totalmente Geodésicas	62
4.4.1	Subvariedades Totalmente Geodésicas Holomorfas	62
4.4.2	Subvariedades Totalmente Geodésicas Totalmente Reais	62
4.4.3	Cadeias e \mathbb{R} -círculos	63
4.5	A Razão Cruzada Complexa	64
4.6	O Invariante Angular de Cartan	69
4.7	Uma Caracterização para Quádruplas de Pontos na Fronteira do Plano Hiperbólico, $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$	73
5	Dinâmica Unidimensional	78
5.1	A Razão Cruzada em Dinâmica Unidimensional	78
5.2	A Razão Cruzada	80
5.3	Funções de Distorção Constante	83
5.4	O Princípio da Expansão Mínima	87
5.5	O Princípio de Koebe	90

CONTEÚDO

5.6	O Primeiro Princípio de Expansão	97
5.7	Alguns fatos sobre a Derivada de Schwarz	99
6	Razão Cruzada - Uma Descrição Mais Geral	105
	Bibliografia	109

Introdução

A uma quádrupla de pontos distintos está associado um invariante, a razão cruzada, da seguinte maneira, duas quádruplas são equivalentes sob uma transformação se, e somente se, elas possuem a mesma razão cruzada. Em coordenadas projetivas, a razão cruzada é calculada como uma razão envolvendo quatro termos com alguma “simetria cruzada”, o que justifica o seu nome. Nesse texto, queremos desenvolver o conceito de razão cruzada em alguns dos contextos onde esse conceito aparece.

Nos capítulos 1 e 2, apresentamos a razão cruzada no contexto da Geometria Projetiva. Descrevemos os elementos da Perspectiva, que surge com motivação na arte e na pintura, e os direcionamos na construção da Geometria Projetiva de maneira mais formal. Nesse contexto apresentamos alguns dos resultados clássicos, como o Teorema de Desargues e o Teorema de Pappus, cujas demonstrações apresentadas se utilizam da razão cruzada. Apresentamos, ainda, o conceito de razão cruzada na esfera de Riemann e mostramos que quatro pontos estão “alinhados” se, e somente se, sua razão cruzada é um número real.

No capítulo 3, apresentamos a razão cruzada no contexto da Geometria Hiperbólica Real, mostramos que ela é preservada pelas transformações de Möbius e que a métrica nesse espaço pode ser descrita em termos da razão cruzada.

No capítulo 4, apresentamos de maneira breve algumas descrições do plano hiperbólico complexo e o conceito de razão cruzada complexa, que é uma generalização da razão cruzada de uma quádrupla de números complexos, e que é um importante invariante geométrico nesse contexto. Juntamente com o invariante angular de Cartan, apresentamos uma caracterização para quádruplas de pontos na fronteira do plano hiperbólico complexo.

No capítulo 5, trabalhamos no contexto de dinâmica unidimensional. Apresentamos a relação da razão cruzada com a Derivada de Schwarz e usamos a distorção da razão cruzada em resultados como o Princípio de Expansão Mínima, o Princípio de Koebe e o Princípio de Expansão.

No capítulo 6, orientados pelo artigo *What is a cross-ratio?* de François Labourie, apresentamos uma descrição mais geral da razão cruzada, em uma discussão que apresenta a importância desse conceito em contextos mais avançados, como superfícies de Hadamard, Teoria de Teichmüller e componentes de Hitchin, apenas para motivar o leitor (e nós mesmos) na busca por mais contextos onde esse conceito aparece e se faz importante.

O simples conjunto de relações satisfeito pela razão cruzada, que aparece ao mesmo tempo em vários contextos, é flexível o suficiente para descrever várias situações dinâmicas e geométricas e, ao mesmo tempo, rigoroso o suficiente para fornecer informações muito importantes sobre dinâmica, estrutura de Poisson e representações de grupo de uma superfície.

Capítulo 1

Geometria Projetiva

Quando buscamos conhecer as origens da Geometria Projetiva, encontramos na arte e na pintura as motivações principais do surgimento e do desenvolvimento desta ciência matemática. Por isso, a perspectiva aparece fortemente como um fundamento principal. Através da perspectiva e da reta de fuga, motivamos a definição de pontos ideais ou pontos no infinito. São esses pontos ideais que unidos aos pontos do plano euclidiano irão definir o plano projetivo.

Existem, tradicionalmente, duas maneiras de se abordar a Geometria Projetiva. A primeira é tomar a geometria euclidiana como base, utilizar e estender seus conceitos para se chegar à Geometria Projetiva. A segunda é a sintética, onde simplesmente colocamos todos os axiomas que regem esta geometria. No nosso contexto inicial, a maneira que nos parece mais adequada é a primeira.

1.1 Elementos de Perspectiva

O modelo de perspectiva que vamos considerar consiste de dois planos perpendiculares entre si e um ponto O que não pertence a nenhum dos dois planos. Um plano horizontal que é o plano objeto, π_o , também conhecido como plano de terra, um plano vertical que é o plano imagem, π_i , e o ponto O que é o centro da perspectiva. Alguns elementos da perspectiva merecem destaque:

- A reta $\pi_o \cap \pi_i$ é a linha de terra.

- A reta que liga o centro da perspectiva O a qualquer ponto $P \in \pi_o$ é chamada linha de projeção. Essa linha intersecta o plano π_i em um ponto P' , que é a imagem do ponto P .
- Traçando por O um plano paralelo a π_o , sua interseção com o plano π_i é uma reta, f , chamada de linha no horizonte, ou reta de fuga. Os pontos de f são os pontos do plano π_i que não são imagem de nenhum ponto de π_o .
- Traçando por O um plano paralelo a π_i determinamos uma reta, v , interseção desse plano com o plano π_o . Os pontos de v são os pontos do plano π_o que não tem imagem no plano π_i .

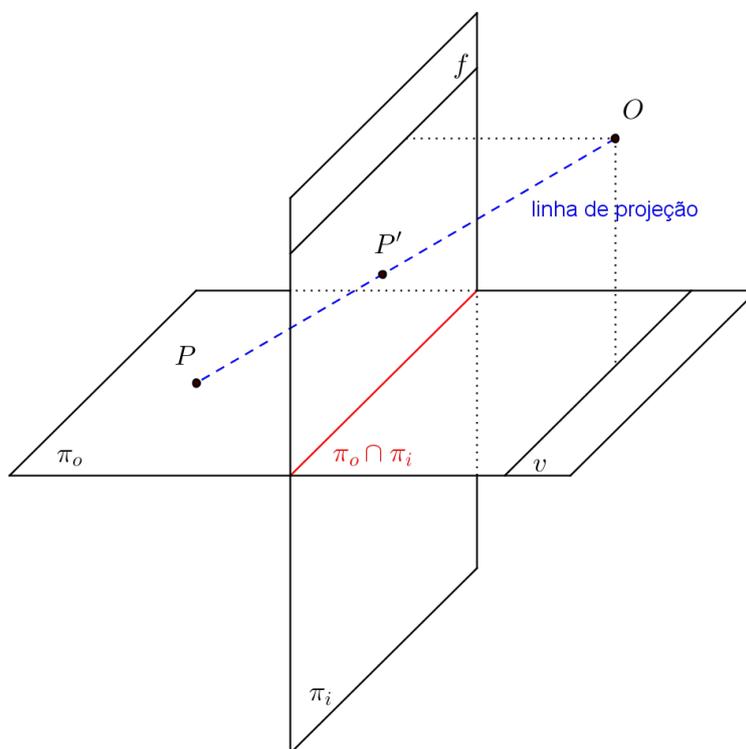


Figura 1.1: Elementos de perspectiva.

Para determinar a imagem de uma reta r contida no plano objeto, procedemos da seguinte maneira: traçamos por O uma reta s paralela à reta r . Essas duas retas determinam um plano que intersecta o plano imagem, π_i , na reta r' , que é a imagem da reta r pela perspectiva.

A reta v divide o plano π_o em dois semiplanos, $(\pi_o)_1$ e $(\pi_o)_2$, e a reta f divide o plano π_i nos semiplanos $(\pi_i)_1$ e $(\pi_i)_2$. A perspectiva estabelece uma bijeção entre $(\pi_o)_1$ e $(\pi_i)_1$ e entre $(\pi_o)_2$ e

$(\pi_i)_2$. Os pontos da reta v e da reta f ficam sem correspondentes euclidianos nessa perspectiva. Para resolver isso, completamos os planos objeto e imagem com uma reta de pontos ideais (pontos no infinito). A reta dos pontos ideais do plano objeto faz correspondência biunívoca com os pontos da reta f , completada com seu ponto ideal, e os pontos ideais do plano imagem com a reta v , também completada com seu ponto ideal.

Ao adicionarmos um ponto ideal, uma reta e todas as outras que, no plano euclidiano, eram paralelas a essa reta, passam a ter esse ponto ideal como ponto comum e, portanto, deixam de ser paralelas. Ao se adicionar a reta de pontos ideais ao plano euclidiano, sempre que forem dadas duas retas elas terão um ponto em comum.

1.2 A Perspectiva Plana

A maneira que apresentamos a Geometria Projetiva até aqui, apesar de ter uma ligação muito forte com a pintura e o desenho, que motivaram o seu desenvolvimento, é insuficiente para se obter resultados mais aprofundados, como pretendemos. Dessa forma, vamos considerar uma técnica que consiste em rebater o plano imagem sobre o plano objeto e, então, a perspectiva tridimensional define agora uma transformação do plano, que chamaremos de perspectiva plana. Através do conceito de perspectiva plana obteremos todas as transformações projetivas do plano e, conseqüentemente, os resultados importantes da geometria projetiva dos quais trataremos.

Consideremos, então, um sistema de perspectiva (π_o, π_i, \hat{O}) , onde o plano objeto é perpendicular ao plano imagem (notamos o centro da perspectiva por \hat{O} , para reservar a notação O para o centro da perspectiva plana que iremos definir). Precisamos tomar, agora, um cuidado adicional com a posição do centro da perspectiva, além de exigir que ele não pertença a nenhum dos planos objeto e imagem, é necessário que ele não pertença ao plano que contém a linha de terra e forma um ângulo de 45° com o plano π_o .

Tendo o sistema de perspectiva, tomamos o plano π , que passa por \hat{O} é perpendicular aos planos objeto e imagem. Traçamos nesse plano, a linha de projeção que forma um ângulo de 45° com a reta $\pi_o \cap \pi$. A linha de projeção intersecta o plano objeto, π_o , no ponto que denotaremos

por O , e que tem por imagem o ponto O' . Rebater o plano imagem sobre o plano objeto consiste em rotacionar o plano imagem em 90° , tendo a linha de terra como eixo de rotação. O sentido da rotação deve fazer com que o ponto imagem O' seja rebatido exatamente sobre o ponto O do plano objeto.

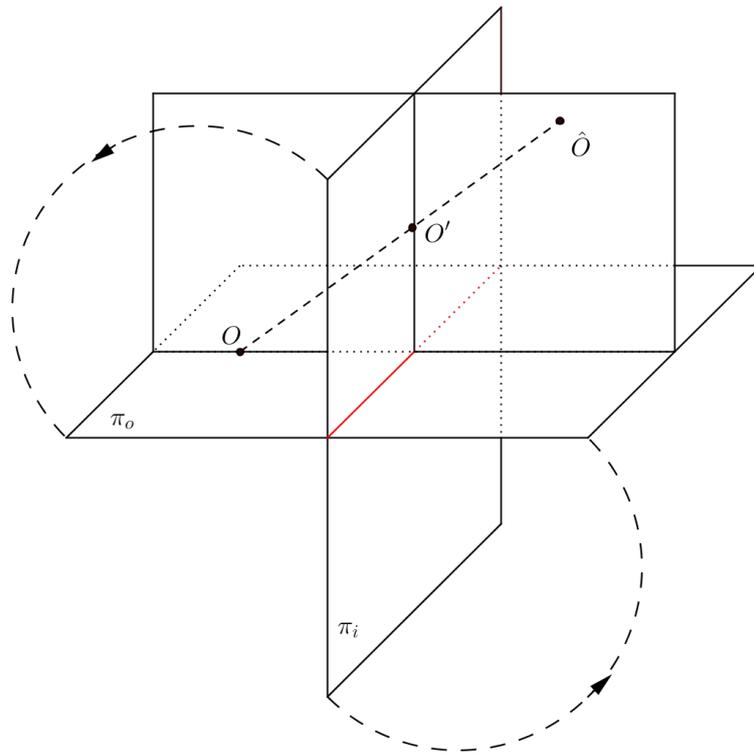


Figura 1.2: Rebatimento do plano imagem sobre o plano objeto.

Ao fazermos o rebatimento do plano imagem sobre o plano objeto, temos, de início, dois elementos que merecem destaque. A linha de terra e o ponto objeto O , que coincide com o ponto imagem O' que não pertence à linha de terra. A partir destes dois elementos podemos obter resultados básicos e interessantes sobre a perspectiva plana. Citaremos alguns deles:

Resultado 1.2.1. *Seja r uma reta que passa pelo ponto O , então a sua imagem r' coincide com a reta r .*

Demonstração. É fácil ver que a imagem de r é uma reta, desta forma, basta conhecer a imagem de dois pontos distintos dessa reta. Temos dois casos a considerar. No primeiro, a reta r intersecta a linha de terra em um ponto L , com isso, r contém dois pontos O e L tais

que $O' = O$ e $L' = L$, portanto a imagem r' da reta r contém os pontos O e L , coincidindo assim, com a reta r . No segundo caso, a reta r é paralela à linha de terra. Nesse caso, a sua imagem r' contém o ponto O e não pode ser nenhuma das outras retas não paralelas à linha de terra, já que essas retas são suas próprias imagens. Assim, resta apenas a reta r para ser a reta imagem. \square

Resultado 1.2.2. *Seja P um ponto do plano, com $P \neq O$, então a sua imagem P' pertence à reta \overleftrightarrow{OP} .*

Demonstração. É consequência imediata do resultado anterior. \square

Resultado 1.2.3. *Os únicos pontos fixos são os pontos da linha de terra e o ponto O (um ponto P é dito fixo pela perspectiva quando sua imagem (rebatida) P' coincide com P).*

Demonstração. A suposição da existência de um ponto fixo P , distinto de O e que não pertença à linha de terra, nos conduz ao absurdo de que todos os pontos do plano são fixos. Pois, dado um ponto Q , qualquer do plano, usando o resultado 1.2.2, temos que sua imagem Q' está na reta \overleftrightarrow{OQ} e analogamente também está na reta \overleftrightarrow{PQ} , sendo, portanto, o próprio ponto Q . \square

Resultado 1.2.4. *Dados a linha de terra, o ponto O , um ponto P e sua imagem P' , determinamos a imagem de qualquer ponto.*

Demonstração. Para determinar a imagem de um ponto Q qualquer do plano π_o , traçamos a reta \overleftrightarrow{OQ} , pois sabemos que Q' pertence a essa reta. Traçamos a reta \overleftrightarrow{PQ} e obtemos a sua imagem. Se \overleftrightarrow{PQ} intersecta a linha de terra em um ponto L , a reta imagem é $\overleftrightarrow{LP'}$. Se \overleftrightarrow{PQ} for paralela à linha de terra, a reta imagem é a reta que passa por P' e é paralela à linha de terra. O ponto imagem Q' é o ponto de interseção dessas duas retas. \square

Como vimos, uma perspectiva plana é uma transformação do plano euclidiano π_o (menos os pontos da reta v) no plano π_o (uma vez que o plano π_i foi rebatido sobre π_o). Podemos notar tal transformação por $p : \pi_o \setminus \{v\} \rightarrow \pi_o \setminus \{f(reb)\}$, onde $\{f(reb)\}$ denota o conjunto dos pontos da reta de fuga rebatida. A perspectiva plana pode ser estendida de maneira única ao plano projetivo pela união de π_o com a reta de seus pontos ideais, que notaremos por $\pi_o \cup \{v\} = \mathbb{P}^2$,

da seguinte maneira: se V é um ponto da reta v , este ponto, que sabemos não ter imagem em π_o , terá imagem em \mathbb{P}^2 . De fato, a imagem de V é simplesmente o ponto ideal da reta determinada por V e por O . Por outro lado, se P é um ponto ideal, a sua imagem é o ponto de interseção da reta $f(\text{reb})$ (e seu ponto ideal), com a reta determinada por P e por O . Dessa forma, cada perspectiva plana em π_o se estende de maneira única a uma perspectiva em \mathbb{P}^2 .

Agora, ao considerarmos duas perspectivas planas p_1 e p_2 estendidas ao plano projetivo, sua composta $p = p_1 \circ p_2$ estará bem definida em todo o plano projetivo. Com isso, podemos considerar as perspectivas planas paralelas, que são perspectivas no plano projetivo, cujo centro é um ponto ideal. As transformações projetivas que são obtidas pela composta de somente perspectivas planas paralelas formam uma classe particular de transformações projetivas que preservam a razão simples de segmentos e que estão relacionadas às transformações afins do plano.

1.3 Perspectivas de Retas

Já vimos que, dada qualquer transformação projetiva, p , do plano projetivo, a imagem de qualquer reta é uma reta. Sendo assim, ao considerarmos uma reta do plano projetivo e sua imagem pela transformação p temos uma transformação projetiva da reta escolhida na outra reta.

Definição 1.3.1. Uma *perspectiva de retas* é uma transformação que leva pontos de uma reta (objeto) em uma outra reta (imagem) de maneira que cada par de pontos correspondentes é colinear com o ponto fixo O , chamado de centro da perspectiva e que não está contido nem na reta objeto nem na reta imagem. Uma transformação projetiva de retas ou uma projetividade de retas é uma perspectiva de retas ou uma composta de perspectivas de retas.

Alguns resultados simples e interessantes sobre perspectivas de retas:

Resultado 1.3.2. *Seja $p : r_1 \rightarrow r_2$ uma perspectiva de retas com centro O . Se existe $P \in r_1$ tal que $p(P) \in r_1$, como $p(P) \in r_1 \cap r_2$ e $P, p(P)$ e O são colineares, segue da definição que $p(P) = P$.*

Resultado 1.3.3. *A composta de duas perspectivas de retas não é, em geral, uma perspectiva de retas.*

Veremos à seguir que a composta de duas perspectivas $p_1 : r \rightarrow s$, de centro O_1 e $p_2 : s \rightarrow t$, de centro O_2 é uma perspectiva de retas somente nos casos em que $r \cap s \cap t = A$ ou O_1, O_2 e $r \cap t$ são colineares.

Resultado 1.3.4. *Perspectivas e projetividades de retas são aplicações injetivas e sobrejetivas, portanto, possuem inversas.*

Resultado 1.3.5. *Dados três pontos distintos A, B e C de uma reta r , é possível construir uma projetividade que leva A em B , B em A e mantém fixo C .*

A notação para uma projetividade como a acima é $r(A, B, C) \bar{\wedge} r(B, A, C)$. Quando temos uma projetividade de uma reta r em uma reta r' , com centro O , que leva A em A' , B em B' e C em C' , a notação é $r(A, B, C) \underset{\wedge}{O} r'(A', B', C')$. Uma maneira de se construir uma projetividade $p : r \rightarrow r'$ tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$ e $p(C) = C'$, onde A, B e C são pontos distintos de r e A', B' e C' são pontos distintos de r' , será mostrada na demonstração do seguinte teorema.

Teorema 1.3.6. *Sejam r e r' duas retas no plano projetivo e sejam A, B e C , pontos distintos de r , e A', B' e C' , pontos distintos de r' , existe uma projetividade $p : r \rightarrow r'$ tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$ e $p(C) = C'$.*

Demonstração. Supondo, inicialmente, que $r \neq r'$, temos três casos a considerar:

1. Se $A = A' = r \cap r'$, então $r(A, B, C) \underset{\wedge}{O} r'(A', B', C')$, onde $O = \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$ é a projetividade procurada.
2. Se A, B, C, A', B' e C' são todos distintos do ponto $r \cap r'$. Sejam $M = \overleftrightarrow{AB'} \cap \overleftrightarrow{A'B}$, $N = \overleftrightarrow{AC'} \cap \overleftrightarrow{A'C}$ e t a reta que passa por M e N , então $r(A, B, C) \underset{\wedge}{A'} t(\hat{A}, M, N) \underset{\wedge}{A'} r'(A', B', C')$ é a projetividade procurada, onde $\hat{A} = \overleftrightarrow{AA'} \cap t$.
3. Se $A, B, C \neq r \cap r'$ e $A' = r \cap r'$. Usando uma reta auxiliar s , tal que $s \cap r = A$, e um ponto O , definimos a perspectiva de centro O , $r(A, B, C) \underset{\wedge}{O} r'(A, B_s, C_s)$ e caímos no caso 2, com isso, $r(A, B, C) \underset{\wedge}{O} r'(A, B_s, C_s) \underset{\wedge}{A'} t(\hat{A}, M, N) \underset{\wedge}{A'} r'(A', B, C')$ é a projetividade para esse caso.

Finalmente, se $r = r'$, usamos uma reta auxiliar m e um ponto O para definirmos uma perspectiva de centro O , de r em m , $r(A, B, C) \xrightarrow{O} m(A_m, B_m, C_m)$. Assim, basta-nos construir uma perspectiva de m em r que leva A_m em A , B_m em B e C_m em C , como feito nos casos anteriores. \square

Observação 1.3.7. Na demonstração acima, é sempre possível escolher a reta m de modo a evitar o caso 3, portanto, a projetividade $p : r \rightarrow r'$, tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$ e $p(C) = C'$, pode ser construída usando-se no máximo três perspectivas de retas.

Se construirmos, de duas maneiras distintas, uma projetividade $p : r \rightarrow r'$, tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$ e $p(C) = C'$, dado um quarto ponto $D \in r$, a imagem de D , por essa projetividade será a mesma nas duas construções? O teorema fundamental da geometria projetiva para retas afirma que sim.

Teorema 1.3.8 (Teorema Fundamental da Geometria Projetiva (para retas)). *Sejam r e r' duas retas do plano projetivo, dados A, B e C , três pontos distintos em r , e A', B' e C' , três pontos distintos em r' , existe uma única projetividade de retas $p : r \rightarrow r'$, tal que $p(A) = A'$, $p(B) = B'$ e $p(C) = C'$.*

Faremos a demonstração do Teorema Fundamental (para retas) usando a razão cruzada, que será apresentada no próximo capítulo. Agora, apresentaremos algumas aplicações do Teorema Fundamental:

Corolário 1.3.9. *Dadas duas retas distintas, r e s no plano projetivo e uma projetividade $p : r \rightarrow s$, então p pode ser obtida como a composta de apenas duas ou três perspectivas de retas.*

Corolário 1.3.10. *Seja $p : r \rightarrow s$, uma projetividade de retas, tal que $A = r \cap s$ é um ponto fixado por p , então p é uma perspectiva de retas.*

Demonstração. Tomando B e C dois pontos de r , distintos de A , e B' e C' suas imagens por p . Seja $O = \overleftrightarrow{BB'} \cap \overleftrightarrow{CC'}$, a perspectiva de retas $q : r \rightarrow s$ com centro em O coincide com p nos pontos A, B e C , portanto, $p \equiv q$. \square

Corolário 1.3.11. *Sejam $p_1 : r \rightarrow s$ e $p_2 : s \rightarrow t$, duas perspectivas de retas com centro O_1 e O_2 , respectivamente. Então:*

- i. Se $O_1 = O_2$, $p_3 = p_2 \circ p_1 : r \rightarrow t$ é perspectiva de retas com centro $O_1 = O_2$.*
- ii. Se $O_1 \neq O_2$ e $r \cap t = A \notin s$, então $p_3 = p_2 \circ p_1 : r \rightarrow t$ é perspectiva de retas se, e somente se, O_1, O_2 e A são colineares.*
- iii. Se r, s e t forem concorrentes em A , então $p_3 = p_2 \circ p_1 : r \rightarrow t$ é perspectiva de retas com centro O_3 . Mais ainda, O_1, O_2 e O_3 são colineares.*

Demonstração. *i.* Como $O_1 = O_2$, para qualquer ponto $A \in r$, temos que os pontos $p_3(A) = p_2 \circ p_1(A)$, A e $O_1 = O_2$ são colineares.

ii. Supondo que O_1, O_2 e A são colineares, temos que $p_3(A) = p_2 \circ p_1(A) = A$, ou seja, o ponto $A = r \cap t$ é fixado por p_3 . Pelo Corolário 1.3.10, temos que p_3 é uma perspectiva de retas.

Por outro lado, se $p_3 = p_2 \circ p_1 : r \rightarrow t$ é uma perspectiva de retas de centro O_3 , como $A = r \cap t$, temos que $p_3(A) = p_2 \circ p_1(A) = A$. Com isso, os pontos $A, p_1(A)$ e O_1 são colineares, pois p_1 é perspectiva. Também, $p_1(A), p_2 \circ p_1(A) = A$ e O_2 são colineares, por p_2 ser perspectiva. Logo, O_1, O_2 e A são colineares.

iii. Como $A = r \cap t$, segue do Corolário 1.3.10 que, $p_3 = p_2 \circ p_1 : r \rightarrow t$ é uma perspectiva de retas, com centro O_3 . Para vermos que O_1, O_2 e O_3 são colineares, consideremos a reta $\overleftrightarrow{O_1O_2}$. Temos duas opções:

- $\overleftrightarrow{O_1O_2} \cap r = B \neq A$

Então, os pontos $B, p_1(B)$ e O_1 são colineares, por p_1 ser perspectiva de retas. Os pontos $p_1(B), p_2 \circ p_1(B)$ e O_2 são colineares, por p_2 ser perspectiva de retas. Com isso, $B, p_1(B), p_2 \circ p_1(B), O_1$ e O_2 são colineares. Como $B, p_2 \circ p_1(B)$ e O_3 são colineares, por $p_3 = p_2 \circ p_1$ ser perspectiva de retas, temos O_1, O_2 e O_3 colineares.

- $\overleftrightarrow{O_1O_2} \cap r = A$

Suponhamos, por absurdo, que $O_3 \notin \overleftrightarrow{O_1O_2}$, então a reta $\overleftrightarrow{O_1O_3}$ não contém o ponto A . Observe que $p_1^{-1} : s \rightarrow r$ é perspectiva de retas com centro O_1 e que $p_2 = p_3 \circ p_1^{-1}$. Consideremos os pontos $C = s \cap \overleftrightarrow{O_1O_3}$, $p_1^{-1}(C) \in r$ e $p_3 \circ p_1^{-1}(C) = p_2(C)$, então $C, p_1^{-1}(C), p_3 \circ p_1^{-1}(C), O_1$ e O_3 são colineares. Mas, também $C, p_2(C)$ e O_2 são colineares, absurdo, pois teríamos O_1, O_2 e O_3 colineares. Portanto, $O_3 \in \overleftrightarrow{O_1O_2}$, como queríamos.

□

Outros dois teoremas importantes em Geometria Projetiva, que são consequências do Teorema Fundamental da Geometria Projetiva (para retas), são os seguintes.

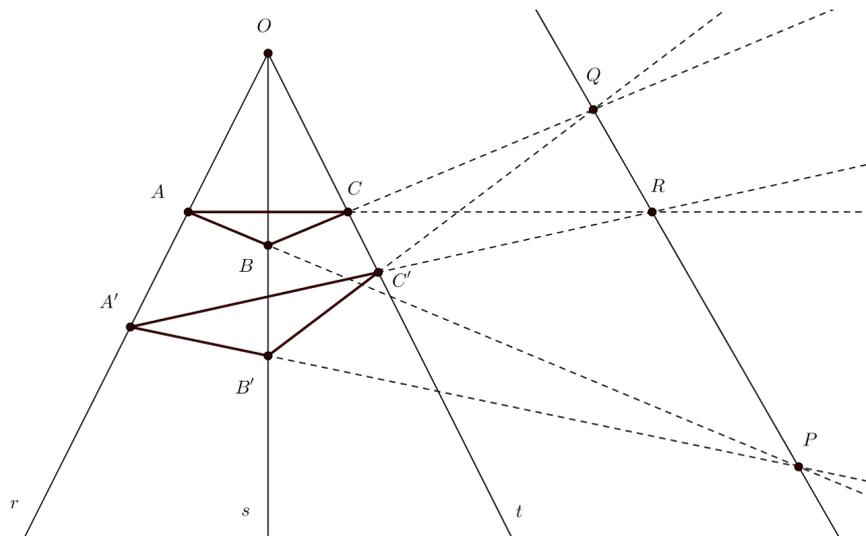


Figura 1.3: O Teorema de Desargues

Teorema 1.3.12 (Teorema de Desargues). *No plano projetivo sejam dados dois triângulos A, B, C e A', B', C' , tais que as retas $\overleftrightarrow{AA'}, \overleftrightarrow{BB'}$ e $\overleftrightarrow{CC'}$ são concorrentes em um ponto O . Então, os pontos $P = \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{A'B'}$, $Q = \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{B'C'}$ e $R = \overleftrightarrow{AC} \cap \overleftrightarrow{A'C'}$ são colineares.*

Demonstração. Sejam $r = \overleftrightarrow{AA'}$, $s = \overleftrightarrow{BB'}$ e $t = \overleftrightarrow{CC'}$, que concorrem no ponto O . Consideremos as perspectivas $p_1 : r \rightarrow s$ e $p_2 : s \rightarrow t$, tais que $p_1(O) = O$, $p_1(A) = B$ e $p_1(A') = B'$ e $p_2(O) = O$, $p_2(B) = C$ e $p_2(B') = C'$. Então, $p_2 \circ p_1 : r \rightarrow t$ é uma perspectiva de retas, uma

1.4 O Plano Projetivo

Agora, daremos ao plano projetivo uma abordagem diferente da que foi feita nas seções anteriores, onde o descrevemos de maneira puramente intuitiva.

Consideremos no \mathbb{R}^3 o plano $\pi_1 = \{(x, y, 1); x, y \in \mathbb{R}\}$ e seja i a sua reta de pontos ideais. O plano $\mathbb{P}^2 = \pi_1 \cup i$ é o *plano projetivo*. Agora, consideremos o conjunto $\mathbb{R}P^2$ de todos os $[x, y, z]$, com $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ em \mathbb{R}^3 , onde $[x, y, z] = \{(\lambda x, \lambda y, \lambda z); \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}\}$. O elemento $[x, y, z]$ representa uma reta menos um ponto, o ponto $(0, 0, 0)$.

Proposição 1.4.1. *Existe uma decomposição natural de $\mathbb{R}P^2$ em dois subconjuntos, ou seja, $\mathbb{R}P^2 = (\mathbb{R}P^2)_1 \cup (\mathbb{R}P^2)_0$, onde $(\mathbb{R}P^2)_1 = \{[x, y, 1]; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ e $(\mathbb{R}P^2)_0 = \{[x, y, 0]; (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$.*

Demonstração. Dado $[x, y, z] \in \mathbb{R}P^2$, se $z = 0$, então $[x, y, z] \in (\mathbb{R}P^2)_0$ e, se $z \neq 0$, então $[x, y, z] = \left[\frac{x}{z}, \frac{y}{z}, 1\right] \in (\mathbb{R}P^2)_1$. \square

Proposição 1.4.2. *Existe uma correspondência biunívoca entre o plano projetivo \mathbb{P}^2 e o conjunto algébrico $\mathbb{R}P^2$, de forma que o plano Euclidiano π_1 fica em correspondência biunívoca com o $(\mathbb{R}P^2)_1$ e a reta dos pontos ideais i , fica em correspondência biunívoca com $(\mathbb{R}P^2)_0$.*

Demonstração. Um ponto P do plano π_1 tem coordenadas $(x, y, 1)$ e, portanto, está associado a $[x, y, 1]$, que é um elemento de $(\mathbb{R}P^2)_1$, e, assim, obtemos a correspondência biunívoca entre π_1 e $(\mathbb{R}P^2)_1$.

Se P é um ponto ideal de \mathbb{P}^2 , P é um ponto de interseção da família de retas paralelas em π_1 , a uma reta de equação $ax + by = 0$ e $z = 1$. Associamos a P o elemento $[a, -b, 0]$ de $(\mathbb{R}P^2)_0$. O ponto $[a, -b, 0]$ representa a reta de equação $ax + by = 0$ e $z = 0$, sem a origem, que é uma reta paralela, em \mathbb{R}^3 , à família de retas dadas, e que tem P como seu ponto ideal. Essa associação estabelece a correspondência biunívoca entre a reta i e $(\mathbb{R}P^2)_0$. \square

Dessa forma, cada ponto do plano projetivo \mathbb{P}^2 estará munido de suas coordenadas $[x, y, z]$, que são as *coordenadas homogêneas* do ponto.

Uma reta em \mathbb{P}^2 é formada por pontos de uma reta Euclidiana $r \in \pi_1$ e seu ponto ideal (ou ponto no infinito).

Sejam $P_1 = [x_1, y_1, z_1]$ e $P_2 = [x_2, y_2, z_2]$ dois pontos distintos em $\mathbb{R}P^2$. Em \mathbb{R}^3 , os pontos $(0, 0, 0)$, (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2) determinam um plano de equação

$$\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{bmatrix} = 0,$$

que pode ser escrito como $ax + by + cz = 0$, onde $a = y_1z_2 - y_2z_1$, $b = x_2z_1 - x_1z_2$ e $c = x_1y_2 - x_2y_1$. Dessa forma, as coordenadas homogêneas dos pontos P_1 e P_2 satisfazem $ax + by + cz = 0$, também o ponto de coordenadas homogêneas $[b, -a, 0]$ a satisfaz, e é, portanto, o ponto ideal da reta que contém P_1 e P_2 . Portanto, a equação da reta projetiva que contém os pontos $P_1 = [x_1, y_1, z_1]$ e $P_2 = [x_2, y_2, z_2]$ é $(y_1z_2 - y_2z_1)x + (x_2z_1 - x_1z_2)y + (x_1y_2 - x_2y_1)z = 0$.

1.4.1 Transformações Projetivas no Plano Projetivo

Nosso primeiro objetivo aqui é obter as coordenadas homogêneas de um ponto $p(P)$, onde $P = [p_1, p_2, p_3]$ é um ponto na reta r dada pela equação $ax + by + cz = 0$, e $p : r \rightarrow s$ é uma perspectiva de retas de centro $O = [o_1, o_2, o_3]$. Para isso, temos o seguinte resultado.

Proposição 1.4.3. *Seja s a reta de equação $ax + by + cz = 0$ e $O = [o_1, o_2, o_3]$. Então a perspectiva $p : r \rightarrow s$ de centro O é representada pela matriz*

$$M = \begin{bmatrix} bo_2 + co_3 & -ao_2 & -ao_3 \\ -bo_1 & ao_1 + co_3 & -bo_3 \\ -co_1 & -co_2 & ao_1 + bo_2 \end{bmatrix}.$$

Demonstração. Primeiro, calculamos a equação da reta que contém os pontos O e P , que é dada por $(o_2p_3 - o_3p_2)x + (o_3p_1 - o_1p_3)y + (o_1p_2 - o_2p_1)z = 0$. O ponto $p(P)$ é a interseção

dessa reta com a reta s . Calculando o determinante

$$\det \begin{bmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ (o_2p_3 - o_3p_2) & (o_3p_1 - o_1p_3) & (o_1p_2 - o_2p_1) \\ a & b & c \end{bmatrix} = 0,$$

obtemos que $p(P)$ é dado pelo produto de matrizes

$$\begin{bmatrix} p_1 & p_2 & p_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} bo_2 + co_3 & -ao_2 & -ao_3 \\ -bo_1 & ao_1 + co_3 & -bo_3 \\ -co_1 & -co_2 & ao_1 + bo_2 \end{bmatrix}.$$

□

Observamos que a matriz M obtida não é inversível, entretanto, ela é uma matriz de posto 2. Além disso, se $p_1 : r \rightarrow s$ é uma perspectiva de centro O_1 , representada pela matriz M_1 , e $p_2 : s \rightarrow t$ é uma perspectiva de centro O_2 , representada pela matriz M_2 , então $p_2 \circ p_1 : r \rightarrow t$ é uma transformação projetiva de retas, representada pela matriz $M_1 \cdot M_2$ (produto de matrizes).

Com isso, obtemos uma maneira de considerar transformações Euclidianas como restrições, ao plano π_1 , de transformações projetivas no plano projetivo.

1. Translações:

A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ a & b & 1 \end{bmatrix}$ representa uma transformação projetiva, cuja restrição ao plano π_1

é a translação de vetor $v = (a, b)$. A transformação projetiva que estende a translação fixa todos os pontos da reta ideal.

2. Rotação de um ângulo α e centro (a, b) :

A matriz $\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ -a \cos \alpha + b \sin \alpha + a & -a \sin \alpha - b \cos \alpha + b & 1 \end{bmatrix}$ representa uma transforma-

ção projetiva, cuja restrição ao plano π_1 é a rotação de um ângulo α e centro (a, b) .

3. Reflexão em torno de uma reta:

A matriz
$$\begin{bmatrix} 1 - m^2 & 2m & 0 \\ 2m & -(1 - m)^2 & 0 \\ -2b & 2b & 1 + m^2 \end{bmatrix}$$
 representa uma transformação projetiva, cuja restrição ao plano π_1 é a reflexão em torno da reta $y = mx + b$ e $z = 1$.

4. Homotetia:

A matriz
$$\begin{bmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ (1 - k)a & (1 - k)b & 1 \end{bmatrix}$$
 representa uma transformação projetiva que estende a homotetia de razão k e centro (a, b) do plano π_1 . Também nesse caso, a transformação projetiva que estende a homotetia fixa todos os pontos da reta ideal.

1.4.2 Coordenadas Projetivas

Agora, o *plano projetivo* \mathbb{P}^2 é visto como um conjunto de retas através de um ponto de observação O , no espaço tridimensional. Uma *reta projetiva* l é um plano passando por O e um *ponto projetivo* P é uma reta passando por O . Se a reta que define o ponto P está contida em um plano l , dizemos que $P \in l$. Se \mathbb{A}^2 é um plano qualquer que não passa por O , então, podemos identificar qualquer ponto projetivo de \mathbb{P}^2 com pontos comuns em \mathbb{A}^2 , tomando a interseção da reta definida pelo ponto projetivo com \mathbb{A}^2 . Uma reta projetiva que é definida por um plano passando pelo ponto O que é paralelo ao plano \mathbb{A}^2 é chamada de *reta no infinito*. Pontos projetivos contidos na reta no infinito são chamados de *pontos infinitos*.

Se tomarmos o ponto $O = (0, 0, 0)$, podemos considerar coordenadas no plano projetivo da seguinte maneira. Todo ponto projetivo P é uma reta passando por O e por algum ponto (p, q, r) . Então todo ponto na reta definida por P é da forma $\lambda(p, q, r)$, para algum λ . Representamos, assim, o ponto projetivo P por $P = [p : q : r]$, porque nos importamos apenas com a razão das coordenadas. Se \mathbb{A}^2 é o plano $z = 1$, um ponto qualquer em \mathbb{A}^2 corresponde ao ponto

$P = [\frac{p}{r} : \frac{q}{r} : 1]$, ou, se desconsiderarmos a coordenada z , apenas $(\frac{p}{r}, \frac{q}{r})$. Se $r = 0$, então P é um ponto infinito com inclinação $\frac{q}{p}$.

Podemos atribuir coordenadas projetivas às retas projetivas da mesma forma. Uma reta projetiva l é definida pela equação de um plano $dx + ey + fz = 0$, onde d, e e f não são todos nulos. Mais ainda, essa equação define a mesma reta projetiva se reescalarmos d, e e f por um mesmo fator λ , não nulo. Assim, denotamos a reta projetiva l por $l = (d : e : f)$.

Um ponto projetivo $P = [p : q : r]$ pertence a uma reta projetiva $l = (d : e : f)$ se, e somente se, satisfaz $dp + eq + fr = 0$.

A interseção de l com o plano \mathbb{A}^2 definido por $z = 1$ é exatamente a reta $dx + ey + f = 0$. A reta no infinito tem coordenadas $(0 : 0 : 1)$.

O sistema de coordenadas que acabamos de descrever é conhecido como coordenadas projetivas cartesianas.

1.4.3 O Plano Projetivo: Uma Descrição Formal

Como vimos, o plano projetivo \mathbb{P}^2 pode ser visto como o conjunto de todas as retas que passam pela origem em \mathbb{R}^3 . Uma vez que cada reta de \mathbb{R}^3 intersecta a esfera unitária

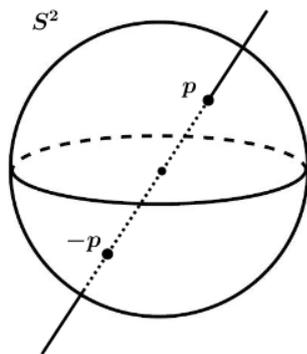
$$S^2 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3; x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}$$

em exatamente dois pontos antipodais, temos a seguinte descrição formal:

Definição 1.4.4. O *plano projetivo real* \mathbb{P}^2 é o espaço quociente da esfera unitária S^2 pela relação de equivalência $p \sim q \Leftrightarrow p = \pm q$, para todos $p, q \in S^2$. Os pontos de \mathbb{P}^2 são, portanto, os conjuntos $[p] = \{p, -p\}$, com $p \in S^2$.

Seja $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ a projeção canônica $\pi(p) = [p]$. Damos a \mathbb{P}^2 a topologia quociente, isto é, um subconjunto $A \subset \mathbb{P}^2$ é aberto, se $\pi^{-1}(A)$ é aberto em S^2 . Com isso, π é uma aplicação contínua.

Se $U \subset S^2$ é aberto, então $\pi^{-1} \circ \pi(U) = U \cup (-U)$ é aberto em S^2 , logo $\pi(U) \subset \mathbb{P}^2$ é aberto. Sendo assim, $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ é uma aplicação aberta.

Figura 1.5: Relação de equivalência \sim em S^2

\mathbb{P}^2 é uma variedade diferenciável de dimensão 2 e de classe C^∞ , não orientável:

1. Como S^2 possui base enumerável e $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ é contínua e aberta, temos que \mathbb{P}^2 também possui base enumerável.

Se $p \neq q \in S^2$ não são antipodais, existem vizinhanças V , de p , e W , de q , tais que $V \cap W = \emptyset$ e $V \cap (-W) = \emptyset$. Isso significa que $\pi(V)$ e $\pi(W)$ são vizinhanças disjuntas, em \mathbb{P}^2 , de $\pi(p)$ e $\pi(q)$, respectivamente. Com isso, \mathbb{P}^2 é Hausdorff.

Como S^2 é compacta e π é contínua, temos que $\mathbb{P}^2 = \pi(S^2)$ é compacto.

2. Para construirmos um atlas em \mathbb{P}^2 , consideremos os abertos $U_i^\pm \subset S^2$, definidos por

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; x_i > 0\},$$

$$U_i^- = \{(x_1, x_2, x_3) \in S^2; x_i < 0\},$$

para $i = 1, 2, 3$. Considerando a aplicação

$$\begin{aligned} \varphi_1^+ : U_1^+ &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\mapsto \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1} \right), \end{aligned}$$

e, de maneira análoga, as aplicações $\varphi_1^\pm, \varphi_2^\pm$ e φ_3^\pm . Temos que φ_i^\pm é contínua, pois suas funções coordenadas o são.

Para cada $i = 1, 2, 3$ a aplicação $\pi : S^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ leva os hemisférios U_i^\pm homeomorficamente sobre o mesmo subconjunto $W_i \subset \mathbb{P}^2$.

Temos, assim, um sistema de coordenadas locais $w_i : W_i \rightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por $w_i = \varphi_i^+ \circ (\pi|_{U_i^+})^{-1}$, para $i = 1, 2, 3$.

A coleção $\mathcal{U} = \{w_1, w_2, w_3\}$ é um atlas de dimensão 2 em \mathbb{P}^2 .

Para vermos que \mathcal{U} é de classe C^∞ , sem perda de generalidade, dado $p \in W_1 \cap W_2$, temos que $p = \pi(\mathbf{x})$, para um único $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \in S^2$, tal que $x_1 > 0$, então, $w_1(p) = \left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}\right)$. Se $x_2 > 0$, então $\mathbf{x} \in U_2^+$ e, assim, $w_2(p) = \left(\frac{x_1}{x_2}, \frac{x_3}{x_2}\right)$. Se, por outro lado, $x_2 < 0$, então $-\mathbf{x} \in U_2^+$ e, portanto, $w_2(p) = \left(-\frac{x_1}{x_2}, -\frac{x_3}{x_2}\right)$.

Com isso, o domínio $w_2 \circ w_1^{-1}$ é a união de dois abertos disjuntos, em um dos quais $w_2 \circ w_1^{-1} = \varphi_2^+ \circ (\varphi_1^+)^{-1}$ e no outro $w_2 \circ w_1^{-1} = \varphi_2^+ \circ \alpha \circ (\varphi_1^+)^{-1}$, onde $\alpha(\mathbf{x}) = -\{\mathbf{x}\}$.

Portanto, $w_2 \circ w_1^{-1}$ é de classe C^∞ .

3. A não-orientabilidade de \mathbb{P}^2 se deve ao fato de que \mathbb{P}^2 contém uma faixa de Möbius; a imagem de uma faixa equatorial de S^2 por π , como na figura a seguir:

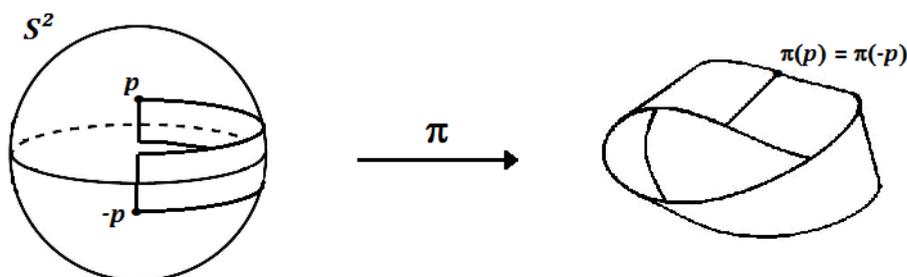


Figura 1.6: Não-orientabilidade de \mathbb{P}^2

Capítulo 2

A Razão Cruzada

2.1 A Razão Cruzada em Geometria Projetiva

Alguns conceitos métricos da Geometria Euclidiana são preservados pela perspectiva e, portanto, são preservados pelas transformações projetivas. Dentre eles, destacamos, por exemplo, a relação de incidência. Mas, um conceito métrico que é básico em Geometria Projetiva e que é preservado por qualquer projetividade de retas, que trataremos aqui, é o conceito de razão cruzada.

Definição 2.1.1. Se A, B e C são três pontos distintos em uma reta, definimos a sua *razão* por

$$(A, B; C) = \frac{AC}{BC},$$

onde a razão é dita positiva se as semirretas \overrightarrow{AC} e \overrightarrow{BC} tem o mesmo sentido, e negativa caso contrário. Se l_1, l_2 e l_3 são três retas distintas concorrentes em um único ponto, definimos a sua *razão* por

$$(l_1, l_2; l_3) = \frac{\sin \angle l_1 l_3}{\sin \angle l_2 l_3},$$

onde os ângulos estão orientados no sentido horário.

Agora, podemos definir a razão cruzada para uma quádrupla de pontos em uma reta.

Definição 2.1.2. Sejam A, B, C e D são quatro pontos em uma reta, três deles distintos,

definimos a sua *razão cruzada* por

$$(A, B; C, D) = \frac{(A, B; C)}{(A, B; D)} = \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}.$$

Se l_1, l_2, l_3 e l_4 são quatro retas que concorrem em um mesmo ponto, três delas distintas, sua *razão cruzada* é dada por

$$(l_1, l_2; l_3, l_4) = \frac{(l_1, l_2; l_3)}{(l_1, l_2; l_4)} = \frac{\sin \angle l_1 l_3}{\sin \angle l_2 l_3} \cdot \frac{\sin \angle l_2 l_4}{\sin \angle l_1 l_4}.$$

É importante estender as definições acima para quaisquer quatro pontos ou retas no plano projetivo. Uma das maneiras de fazermos isto é considerar definições especiais se um dos quatro pontos A, B, C ou D é um ponto no infinito. Denotando por ∞ o ponto no infinito da reta AB , definimos a razão cruzada por

$$(A, B; C, \infty) = \frac{AC}{BC}.$$

Da mesma forma, podemos definir a razão cruzada de quatro pontos no infinito, da seguinte forma.

Definição 2.1.3. Se os pontos A, B, C e D são pontos no infinito com inclinações a, b, c e d , respectivamente, sua *razão cruzada* é

$$(A, B; C, D) = \frac{c - a}{c - b} \cdot \frac{d - b}{d - a}.$$

É importante observar que o sinal da razão cruzada independe da orientação escolhida para a reta que contém os pontos A, B, C e D , mas que a posição dos pontos influencia totalmente em seu valor. Se os pontos A, B, C e D são todos pontos euclidianos da reta, então:

$$\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{BD}{AD} \cdot \frac{AC}{BC} = \frac{DB}{CB} \cdot \frac{CA}{DA} = \frac{CA}{DA} \cdot \frac{DB}{CB},$$

portanto,

$$(A, B; C, D) = (B, A; D, C) = (D, C; B, A) = (C, D; A, B).$$

Se escrevermos $(A, B; C, D) = x$, então

$$(A, B; D, C) = \frac{AD}{BD} \cdot \frac{BC}{AC} = \frac{1}{\frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD}} = \frac{1}{(A, B; C, D)} = \frac{1}{x}.$$

Novamente, mudando a posição dos pontos obtemos

$$(A, B; D, C) = (B, A; C, D) = (C, D; B, A) = (D, C; A, B) = \frac{1}{x}.$$

Da mesma forma, obtemos as seguintes razões cruzadas:

$$(A, C; B, D) = (C, A; D, B) = (D, B; C, A) = (B, D; A, C) = 1 - x;$$

$$(A, C; D, B) = (C, A; B, D) = (B, D; C, A) = (D, B; A, C) = \frac{1}{1 - x};$$

$$(A, D; C, B) = (D, A; B, C) = (B, C; D, A) = (C, B; A, D) = \frac{x}{x - 1};$$

$$(A, D; B, C) = (D, A; C, B) = (C, B; D, A) = (B, C; A, D) = \frac{x - 1}{x}.$$

O mesmo vale se um dos pontos for um ponto ideal da reta, ou ponto no infinito.

Exemplo 2.1.4. Se A, B, C, X e Y são pontos em uma reta r e tivermos $A \neq B$ e $(A, B; C, X) = (A, B; C, Y)$, então $X = Y$. De fato,

$$(A, B; C, X) = (A, B; C, Y) \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} \frac{BX}{AX} = \frac{AC}{BC} \frac{BY}{AY} \Leftrightarrow \frac{BX}{AX} = \frac{BY}{AY}.$$

Sejam $x - a, x - b, y - a$ e $y - b$, os comprimentos de AX, BX, AY e BY , respectivamente.

Temos

$$(x - b)(y - a) = (x - a)(y - b) \Leftrightarrow (a - b)(x - y) = 0,$$

então, $X = Y$.

Exemplo 2.1.5. $(A, B; C, D) = 1$ se, e somente se, $A = B$ ou $C = D$. De fato,

$$(A, B; C, D) = \frac{AC}{BC} \frac{BD}{AD} = 1 \Leftrightarrow \frac{AC}{BC} = \frac{AD}{BD}.$$

Com isso, se $c - a, c - b, d - a$ e $d - b$ são os comprimentos de AC, BC, AD e BD , respectivamente, temos

$$\frac{c - a}{c - b} = \frac{d - a}{d - b} \Leftrightarrow (b - a)(d - c) = 0,$$

se, e somente se, $A = B$ ou $C = D$.

Exemplo 2.1.6. Se $A \neq B, C \neq D$ e $(A, B; C, D) = (A, B; D, C)$, então $(A, B; C, D) = -1$. De fato, sabemos que

$$(A, B; C, D) = (A, B; D, C) = \frac{1}{(A, B; C, D)}.$$

Assim, ou $(A, B; C, D) = 1$ ou $(A, B; C, D) = -1$. Como $A \neq B$ e $C \neq D$, concluímos que $(A, B; C, D) = -1$.

Nesse caso, os pontos A, B, C e D são ditos *harmônicos*.

2.2 A Invariância da Razão Cruzada

Em vista do que foi mostrado sobre as várias relações existentes entre as 24 possíveis razões cruzadas de quatro pontos A, B, C e D dados, podemos supor, sem perda de generalidade, que os números AC, AD, BC e BD , que aparecem na razão cruzada a seguir são positivos.

Lema 2.2.1. *Sejam r e r' retas projetivas e $p : r \rightarrow r'$ uma perspectiva de centro O . Então, $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$, onde $p(A) = A', p(B) = B', p(C) = C'$ e $p(D) = D'$.*

Demonstração. Vamos considerar três casos:

Caso 1. Suponhamos que os pontos A, B, C, D e A', B', C', D' sejam todos pontos euclidianos das retas r e r' , respectivamente. Consideremos a reta perpendicular à reta r , que passa pelo ponto O , e seja H o ponto de interseção dessa reta com r . Então:

$$\begin{aligned}
(A, B; C, D) &= \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = \frac{\frac{1}{2}HO \cdot AC}{\frac{1}{2}HO \cdot BC} \cdot \frac{\frac{1}{2}HO \cdot BD}{\frac{1}{2}HO \cdot AD} \\
&= \frac{\text{Área}(AOC)}{\text{Área}(BOC)} \cdot \frac{\text{Área}(BOD)}{\text{Área}(AOD)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}AO \cdot OC \cdot \sin(\angle AOC)}{\frac{1}{2}BO \cdot OC \cdot \sin(\angle BOC)} \cdot \frac{\frac{1}{2}BO \cdot OD \cdot \sin(\angle BOD)}{\frac{1}{2}AO \cdot OD \cdot \sin(\angle AOD)} \\
&= \frac{\sin(\angle AOC)}{\sin(\angle BOC)} \cdot \frac{\sin(\angle BOD)}{\sin(\angle AOD)}.
\end{aligned}$$

Consideremos, agora, a reta perpendicular à reta r' , passando por O , e seja H' a interseção dessa reta com r' . Temos:

$$\begin{aligned}
(A', B'; C', D') &= \frac{A'C'}{B'C'} \cdot \frac{B'D'}{A'D'} = \frac{\frac{1}{2}H'O \cdot A'C'}{\frac{1}{2}H'O \cdot B'C'} \cdot \frac{\frac{1}{2}H'O \cdot B'D'}{\frac{1}{2}H'O \cdot A'D'} \\
&= \frac{\text{Área}(A'OC')}{\text{Área}(B'OC')} \cdot \frac{\text{Área}(B'OD')}{\text{Área}(A'OD')} \\
&= \frac{\frac{1}{2}A'O \cdot OC' \cdot \sin(\angle A'OC')}{\frac{1}{2}B'O \cdot OC' \cdot \sin(\angle B'OC')} \cdot \frac{\frac{1}{2}B'O \cdot OD' \cdot \sin(\angle B'OD')}{\frac{1}{2}A'O \cdot OD' \cdot \sin(\angle A'OD')} \\
&= \frac{\sin(\angle A'OC')}{\sin(\angle B'OC')} \cdot \frac{\sin(\angle B'OD')}{\sin(\angle A'OD')} = \frac{\sin(\angle AOC)}{\sin(\angle BOC)} \cdot \frac{\sin(\angle BOD)}{\sin(\angle AOD)} \\
&= (A, B; C, D)
\end{aligned}$$

Os ângulos $\angle A'OC'$ e $\angle AOC$ são congruentes, pois A, A', O são colineares e C, C', O também o são. O mesmo vale para os demais ângulos.

Caso 2. Suponhamos que o ponto D seja ponto ideal da reta r e A, B, C e A', B', C', D' sejam pontos euclidianos das retas r e r' , respectivamente. Consideremos, novamente, a reta perpendicular à reta r , passando por O , e H sua interseção com r . Então:

$$\begin{aligned}
(A, B; C, D) &= \frac{AC}{BC} = \frac{\frac{1}{2}HO \cdot AC}{\frac{1}{2}HO \cdot BC} = \frac{\text{Área}(AOC)}{\text{Área}(BOC)} \\
&= \frac{\frac{1}{2}AO \cdot OC \cdot \sin(\angle AOC)}{\frac{1}{2}BO \cdot OC \cdot \sin(\angle BOC)} \\
&= \frac{AO}{BO} \cdot \frac{\sin(\angle AOC)}{\sin(\angle BOC)}
\end{aligned}$$

Como no caso 1, temos $(A', B'; C', D') = \frac{\sin(\angle AOC)}{\sin(\angle BOC)} \cdot \frac{\sin(\angle BOD')}{\sin(\angle AOD')}$.

Mas, $\sin(\angle AOD') = \cos(\angle AOH) = \frac{HO}{OA}$, pois a reta que contém os pontos O e D' é paralela à reta r . Com isso, $\frac{AO}{BO} = \frac{\sin(\angle BOD')}{\sin(\angle AOD')}$, portanto, $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$.

Caso 3. Agora, suponhamos, sem perda de generalidade, que A é ponto ideal da reta r e um dos pontos imagem é ponto ideal da reta r' , seja ele o ponto B' . Tomando uma reta auxiliar s , diferente de r' , que passe por A' e que não seja paralela nem à reta que contém os pontos O e C , nem à reta que contém O e D . A projetividade

$$r(A, B; C, D) \underset{\wedge}{O} s(A', B_s; C_s, D_s) \underset{\wedge}{O} r'(A', B'; C', D')$$

é a composta de duas perspectivas que satisfazem ao caso 2 e, por isso, preserva a razão cruzada.

□

Segue do lema anterior que a razão cruzada é preservada por qualquer composta de perspectivas de retas.

Teorema 2.2.2. *Seja $p : r \rightarrow r'$ uma projetividade de retas. Então $(A, B; C, D) = (A', B'; C', D')$, onde $p(A) = A', p(B) = B', p(C) = C'$ e $p(D) = D'$.*

Além disso, observe que se $p : r \rightarrow s$ for uma aplicação injetiva que preserva a razão cruzada, então p é uma projetividade de retas. Isso se deve ao Teorema 1.3.6 de existência de

projetividades. Para ver isto, tomamos três pontos distintos A, B, C em r e suas respectivas imagens A', B', C' em s e construímos a projetividade $p_1 : r \rightarrow s$, tal que $p_1(A) = A', p_1(B) = B'$ e $p_1(C) = C'$. Consideremos, agora, um ponto qualquer D em r , diferente de A, B e C , e sejam $D' = p(D)$ e $D'_1 = p_1(D)$. Como tanto p quanto p_1 preservam a razão cruzada, temos

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D') = (A', B'; C', D'_1),$$

assim $D' = D'_1$ e, portanto, $p = p_1$.

Temos, com isso, o seguinte teorema:

Teorema 2.2.3. *Seja $p : r \rightarrow r'$ uma aplicação injetiva de retas no plano projetivo. Então p é uma projetividade de retas se, e somente se, dados A, B, C e D , pontos distintos de r , e $A' = p(A), B' = p(B), C' = p(C)$ e $D' = p(D)$ suas imagens em r' , vale*

$$(A, B; C, D) = (A', B'; C', D').$$

Agora, temos uma demonstração para o Teorema Fundamental da Geometria Projetiva (para retas), 1.3.8, usando, para a existência o Teorema 1.3.6 de existência de projetividade e, para unicidade, o teorema acima.

A maneira como a razão cruzada de quatro pontos e a razão cruzada de quatro retas se relacionam é uma consequência do Teorema Fundamental da Geometria Projetiva, 1.3.8.

Corolário 2.2.4 (Teorema Fundamental da Razão Cruzada). *Sejam A, B, C e D quatro pontos em uma reta r , três deles distintos, e seja E um ponto fora da reta, então*

$$(EA, EB; EC, ED) = (A, B; C, D).$$

Demonstração.

$$(EA, EB; EC, ED) = \frac{\sin \angle AEC}{\sin \angle BEC} \cdot \frac{\sin \angle BED}{\sin \angle AED} = \frac{\frac{\text{Área}(AEC) \cdot 2}{EA \cdot EC}}{\frac{\text{Área}(BEC) \cdot 2}{EB \cdot EC}} \cdot \frac{\frac{\text{Área}(BED) \cdot 2}{EB \cdot ED}}{\frac{\text{Área}(AED) \cdot 2}{EA \cdot ED}}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\text{Área}(AEC)}{\text{Área}(BEC)} \cdot \frac{\text{Área}(BED)}{\text{Área}(AED)} = \frac{AC \cdot h}{BC \cdot h} \cdot \frac{BD \cdot h}{AD \cdot h} \\
&= \frac{AC}{BC} \cdot \frac{BD}{AD} = (A, B; C, D),
\end{aligned}$$

onde h é a distância entre a reta r e o ponto E . □

2.3 A Razão Cruzada em uma Seção Cônica

Uma seção cônica é a curva obtida pela interseção de um cone com um plano. Como o plano Euclidiano pode ser visto como mergulhado no plano projetivo, as cônicas também podem ser consideradas como objetos na geometria projetiva. Com isso, podemos definir a razão cruzada em uma seção cônica. Esse é o nosso objetivo nesta seção.

Proposição 2.3.1. *Sejam A, B, C e D quatro pontos consecutivos em um círculo ω , orientado positivamente no sentido anti-horário, e suponhamos que os arcos AC, CB, BD e DA de ω tenham ângulos centrais de $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ e 2δ , respectivamente. Seja E outro ponto em ω , então*

$$(EA, EB; EC, ED) = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \delta}.$$

Em particular, temos

$$|(EA, EB; EC, ED)| = \frac{|AC| |BD|}{|AD| |BC|}.$$

Demonstração. Sabemos que $\angle AEC = \alpha$, $\angle AED = \delta$, $\angle BEC = \beta$ e $\angle BED = \gamma$, com isso

$$(EA, EB; EC, ED) = \frac{\sin \angle AEC}{\sin \angle BEC} \cdot \frac{\sin \angle BED}{\sin \angle AED} = \frac{\sin \alpha}{\sin(-\beta)} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin(-\delta)} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \delta}.$$

□

Corolário 2.3.2. *Seja ω uma seção cônica qualquer, isto é, qualquer interseção de um cone \mathcal{C} através de um ponto de observação O com o plano \mathbb{A}^2 . Se A, B, C, D, E e F são pontos distintos em ω , então $(EA, EB; EC, ED) = (FA, FB; FC, FD)$.*

Demonstração. Primeiro, suponhamos que ω seja um círculo e que os arcos AC, CB, BD e DA tenham ângulos centrais de $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ e 2δ , respectivamente. Temos

$$(EA, EB; EC, ED) = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \cdot \frac{\sin \gamma}{\sin \delta} = (FA, FB; FC, FD).$$

No caso geral, tomando um plano $\mathbb{A}^{2'}$, tal que $\mathcal{C} \cap \mathbb{A}^{2'}$ é um círculo. Sejam A', B', C', D', E' e F' as interseções das retas $\overleftrightarrow{OA}, \overleftrightarrow{OB}, \overleftrightarrow{OC}, \overleftrightarrow{OD}, \overleftrightarrow{OE}$ e \overleftrightarrow{OF} com o plano $\mathbb{A}^{2'}$, respectivamente. Então,

$$\begin{aligned} (EA, EB; EC, ED) &= (A, B; C, D) = (A', B'; C', D') = (E'A', E'B'; E'C', E'D') \\ &= (F'A', F'B'; F'C', F'D') = (A', B'; C', D') = (A, B; C, D) \\ &= (FA, FB; FC, FD). \end{aligned}$$

□

Com isso, temos a seguinte definição:

Definição 2.3.3. Se A, B, C e D são quatro pontos em uma seção cônica ω , definimos a razão cruzada de A, B, C e D com respeito a ω por

$$(A, B; C, D)_\omega = (EA, EB; EC, ED),$$

onde E é um quinto ponto em ω .

Pelo corolário 2.3.2, essa razão não depende da escolha do ponto E .

Nossa primeira aplicação para a razão cruzada em uma seção cônica é uma demonstração simples para o Teorema de Pascal.

Teorema 2.3.4 (Teorema de Pascal). *Se $ABCDEF$ é um hexágono qualquer com vértices em uma cônica ω , então as interseções dos lados opostos $AB \cap DE$, $BC \cap EF$ e $CD \cap FA$ são colineares.*

Demonstração. Sejam $L = BC \cap EF$, $M = CD \cap FA$ e $N = AB \cap DE$ as interseções dos lados

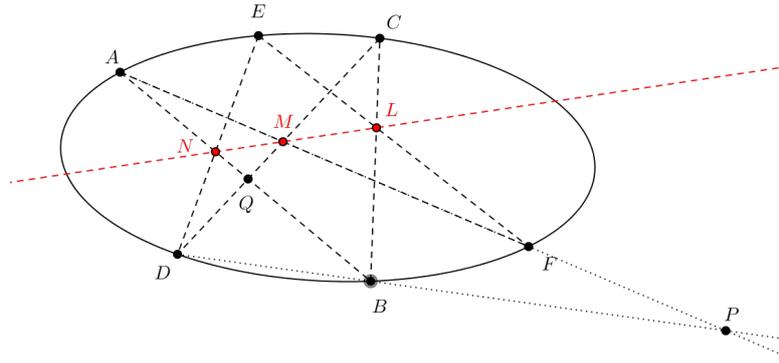


Figura 2.1: O Teorema de Pascal

opostos do hexágono, e sejam $P = AF \cap BD$ e $Q = AB \cap CD$. Então

$$\begin{aligned} (C, L; P, B) &= (FC, FL; FP, FB) = (C, E; A, B)_\omega \\ &= (DC, DE; DA, DB) = (Q, N; A, B) \\ &= (MQ, MN; MA, MB) = (C, MN \cap BC; P, B), \end{aligned}$$

o que implica $L = MN \cap BC$. Mas, como $L = BC \cap EF$, temos que $L \in MN$. \square

Outra aplicação para a razão cruzada em uma cônica é uma demonstração simples para o Teorema Projetivo da Borboleta.

Teorema 2.3.5 (Teorema Projetivo da Borboleta). *Sejam ω uma cônica e PQ uma corda em ω através de um ponto M . Sejam AB e CD duas outras cordas de ω passando por M , $X = AD \cap PQ$ e $Y = BC \cap PQ$. Então $(P, Q; M, X) = (Q, P; M, Y)$. Em particular, se M é o ponto médio de PQ , então $|MX| = |MY|$.*

Demonstração. Usando a razão cruzada, temos

$$\begin{aligned} (P, Q; M, X) &= (AP, AQ; AM, AX) = (P, Q; B, D)_\omega \\ &= (CP, CQ; CB, CD) = (P, Q; Y, M) \\ &= (Q, P; M, Y). \end{aligned}$$

Com isso, se M é o ponto médio de PQ , temos que $|PX| + |MX| = |MY| + |QY|$ e

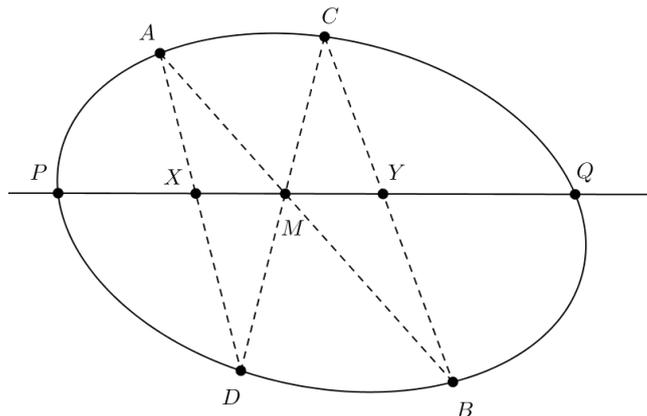


Figura 2.2: O Teorema Projetivo da Borboleta

$$(P, Q; M, X) = (Q, P; M, Y) \Rightarrow \frac{PM}{QM} \frac{QX}{PX} = \frac{QM}{PM} \frac{PY}{QY} \Rightarrow \frac{QX}{PX} = \frac{PY}{QY}.$$

E, assim, $|PX| = |QY|$, portanto, $|MX| = |MY|$. □

2.4 A Razão Cruzada na Esfera de Riemann

Usamos, na seção 1.4, três coordenadas projetivas para descrever o plano projetivo \mathbb{P}^2 e, da mesma forma, podemos usar duas coordenadas projetivas para descrever uma reta projetiva. Especificamente, o ponto projetivo $[s : t]$ corresponderá ao ponto arbitrário $z = \frac{s}{t}$, se $t \neq 0$, e ao ponto no infinito, ∞ , se $t = 0$. Quando admitimos $s, t \in \mathbb{C}$, temos o que é chamado de *reta projetiva complexa* $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ou a conhecida *esfera de Riemann*, da seguinte maneira:

Considerando os pares de números complexos (s, t) , sob a relação de equivalência $(s, t) \sim (\lambda s, \lambda t)$, para todo número $\lambda \in \mathbb{C}^*$. O plano complexo, \mathbb{C} , com coordenada z , pode ser aplicado sobre a reta projetiva complexa, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, por $(s, t) = (z, 1)$. Qualquer outra cópia de \mathbb{C} , com coordenada \tilde{z} , pode ser aplicada por $(s, t) = (1, \tilde{z})$. Essas duas cartas cobrem a esfera de Riemann.

Para z e \tilde{z} , não nulos, a seguinte identificação $(1, \tilde{z}) = \left(\frac{1}{\tilde{z}}, 1\right) = (z, 1) = \left(1, \frac{1}{z}\right)$ mostra que as mudanças de coordenadas são dadas por $z = \frac{1}{\tilde{z}}$ e $\tilde{z} = \frac{1}{z}$.

Com isso, a esfera de Riemann é uma esfera bidimensional com estrutura complexa, que admite um atlas cujas mudanças de coordenadas são holomorfas.

Definimos a razão cruzada na esfera de Riemann da mesma forma que em uma reta:

$$(a, b; c, d) = \frac{c - a}{c - b} \cdot \frac{d - b}{d - a},$$

onde a, b, c e d são números complexos correspondendo a pontos arbitrários na esfera de Riemann.

Proposição 2.4.1. *Os pontos A, B, C e D correspondentes aos números complexos a, b, c e d , respectivamente, estão em uma reta ou em um círculo se, e somente se, $(a, b; c, d)$ é um número real. Se eles estão em uma reta, temos $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)$, e, se estão em um círculo ω , temos $(a, b; c, d) = (A, B; C, D)_\omega$.*

Demonstração. Suponhamos que A, B, C e D pertençam a uma reta paralela ao eixo real, como os números complexos a, b, c e d possuem a mesma parte imaginária, é fácil ver que $(a, b; c, d)$ é um número real. Se a reta que contém os pontos A, B, C e D for paralela ao eixo imaginário ou tiver inclinação θ , considerando a forma polar dos números a, b, c e d , também vemos que $(a, b; c, d)$ é real. Da mesma forma, se A, B, C e D pertencem a um círculo, podemos, sem perda de generalidade, supor que eles estão sobre o círculo de raio r centrado na origem e basta considerar a forma polar de a, b, c e d para ver que $(a, b; c, d)$ é um número real.

Por outro lado, suponhamos que $(a, b; c, d) = \lambda \in \mathbb{R}$, então

$$(a, b; c, d) = \frac{c - a}{c - b} \cdot \frac{d - b}{d - a} = \lambda \Rightarrow (c - a)(d - b) = \lambda \cdot (d - a)(c - b).$$

Se os pontos A, B e C pertencem a uma mesma reta, podemos construir uma projetividade de retas que os levam em $p(A), p(B)$ e $p(C)$, respectivamente. Como essa projetividade é única e

$$(p(A), p(B); p(C), p(D)) = (A, B; C, D)$$

temos que o ponto D pertence à mesma reta que A, B e C .

Agora, se os pontos a, b e c não são colineares, consideremos o círculo que os contém. Como

$$(c-a)(d-b) = \lambda \cdot (d-a)(c-b) = (d-a)(c-b) + (\lambda-1)(d-a)(c-b)$$

e

$$\begin{aligned} (\lambda-1)(d-a)(c-b) &= \left(\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a} - 1 \right) \cdot (d-a)(c-b) \\ &= (c-a)(d-b) - (c-b)(d-a) \\ &= (d-c)(b-a), \end{aligned}$$

temos

$$(c-a)(d-b) = (d-a)(c-b) + (d-c)(b-a).$$

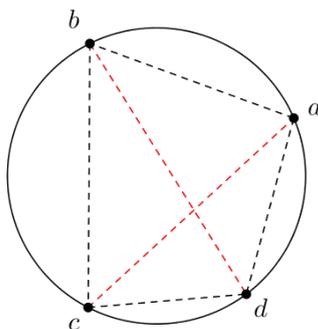


Figura 2.3: Quadrilátero circunscrito

E, o Teorema de Ptolomeu afirma que se o produto das diagonais de um quadrilátero é igual à soma dos produtos dos lados opostos, então o quadrilátero está inscrito em um círculo. Com isso, temos que o ponto d pertence ao círculo que contém os pontos a, b e c . \square

A inversão em relação ao círculo unitário é dada por $z \mapsto \frac{1}{\bar{z}}$, na esfera de Riemann. Como,

$$\left(\frac{1}{\bar{a}}, \frac{1}{\bar{b}}; \frac{1}{\bar{c}}, \frac{1}{\bar{d}} \right) = \overline{\frac{\frac{1}{c} - \frac{1}{a}}{\frac{1}{c} - \frac{1}{b}} \cdot \frac{\frac{1}{d} - \frac{1}{b}}{\frac{1}{d} - \frac{1}{a}}} = \overline{\frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-a}{d-b}} = \overline{(a, b; c, d)},$$

a inversão leva a razão cruzada em seu complexo conjugado. De fato, a inversão em qualquer círculo (ou reta) leva círculos em círculos e retas em retas.

Definição 2.4.2. Para toda matriz $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, com determinante $ad - bc \neq 0$, associamos uma transformação f_M na esfera de Riemann da seguinte maneira.

Em coordenadas projetivas $[s : t]$, escrevemos

$$f_M([s : t]) = [as + bt : cs + dt].$$

Em coordenadas arbitrárias $z = \frac{s}{t}$, escrevemos

$$f_M(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

As transformações f_M são chamadas de *Transformações de Möbius*.

Exemplo 2.4.3. Para qualquer matriz M , de ordem 2×2 com determinante não nulo, e para quaisquer pontos a, b, c e d na esfera de Riemann, vale

$$(f_M(a), f_M(b); f_M(c), f_M(d)) = (a, b; c, d).$$

De fato, seja $M = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, então

$$(f_M(a), f_M(b); f_M(c), f_M(d)) = \frac{f_M(c) - f_M(a)}{f_M(c) - f_M(b)}.$$

Como $f_M(a) = \frac{\alpha a + \beta}{\gamma a + \delta}$, $f_M(b) = \frac{\alpha b + \beta}{\gamma b + \delta}$, $f_M(c) = \frac{\alpha c + \beta}{\gamma c + \delta}$ e $f_M(d) = \frac{\alpha d + \beta}{\gamma d + \delta}$. Desenvolvendo, temos

$$(f_M(a), f_M(b); f_M(c), f_M(d)) = (a, b; c, d).$$

Como consequência da proposição 2.4.1, temos que as Transformações de Möbius levam círculos e retas em círculos e retas. De fato, dados a, b, c e d na esfera de Riemann, se $(a, b; c, d) \in \mathbb{R}$, sabemos que os pontos a, b, c e d estão em um círculo ou em uma reta. Se f é uma transformação de Möbius, então $(f(a), f(b); f(c), f(d)) = (a, b; c, d) \in \mathbb{R}$, ou seja, os $f(a), f(b), f(c)$ e $f(d)$ estão em um círculo ou em uma reta.

Exemplo 2.4.4. A composição de transformações de Möbius corresponde à multiplicação de matrizes, isto é, para quaisquer duas matrizes M e N e qualquer ponto $[s : t]$ na reta projetiva \mathbb{CP}^1 , temos

$$f_M(f_N([s : t])) = f_{MN}([s : t]).$$

Com efeito, sejam

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ e } N = \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix}.$$

Temos

$$\begin{aligned} f_M(f_N([s : t])) &= f_M([es + ft : gs + ht]) \\ &= [aes + aft + bgs + bht : ces + cft + dgs + dht] \\ &= [(ae + bg)s + (af + bh)t : (ce + dg)s + (cf + dh)t] \\ &= f_{MN}([s : t]). \end{aligned}$$

Isso nos diz que o conjunto de todas as transformações de Möbius forma um grupo com a operação da composição, onde o inverso de uma transformação associada à uma matriz M , $(f_M)^{-1}$, é dado pela transformação associada à matriz inversa de M , $f_{M^{-1}}$, e a identidade desse grupo é a transformação associada à matriz identidade $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Consideremos o homomorfismo Φ que aplica uma matriz $M \in GL(2, \mathbb{R})$ na transformação de Möbius associada a essa matriz. Como $\det \lambda M = \lambda^2 \det M$, para um escalar $\lambda \neq 0$, a transformação de Möbius associada à matriz M é a mesma associada à matriz λM . Ou seja, o núcleo do homomorfismo Φ consiste de todos os múltiplos escalares da matriz identidade, I . Temos, assim, que o grupo quociente $\frac{GL(2, \mathbb{R})}{(\mathbb{R} \setminus \{0\} \cdot I)}$ é isomorfo ao grupo das transformações de Möbius, que é conhecido como grupo linear projetivo e denotado por $PGL(2, \mathbb{R})$.

2.4.1 Funções Invertíveis na Esfera de Riemann

Suponhamos que a reta projetiva \mathbb{CP}^1 tenha coordenada z . Podemos definir uma função $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ via alguma construção geométrica de maneira que f seja invertível. Como qualquer função definida geometricamente pode ser descrita algebricamente escrevendo-se todos

os pontos em coordenadas, nossa função f pode ser escrita como uma função algébrica de z e, como pedimos que ela seja invertível, f pode ser escrita como uma função racional, isto é, a razão de dois polinômios:

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)}.$$

Como construímos f para que seja invertível, a equação $f(z) = w$ tem exatamente uma solução, isto é, f é injetiva, então o polinômio $p(z) - wq(z)$ tem grau 1, para todo w . Com isso, p e q são polinômios lineares e podemos escrever

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}.$$

Assim, f é uma transformação de Möbius e, portanto, preserva a razão cruzada. Isso nos fornece o seguinte resultado.

Proposição 2.4.5. *Se f é uma função invertível definida na reta projetiva via alguma construção geométrica, então f preserva a razão cruzada. Mais ainda, f é uma transformação de Möbius.*

Demonstração. Vimos, na discussão acima, que se f é construída de maneira que seja invertível na reta projetiva, então f é uma transformação de Möbius. E, no exemplo 2.4.3, vimos que toda transformação de Möbius preserva a razão cruzada. \square

Também vale a recíproca. Ou seja:

Proposição 2.4.6. *Se $f : \mathbb{CP}^1 \rightarrow \mathbb{CP}^1$ é uma aplicação que preserva a razão cruzada, então f é uma Transformação de Möbius.*

Demonstração. Sejam a, b e c pontos fixados na reta \mathbb{CP}^1 , $f(a), f(b)$ e $f(c)$ suas imagens pela função f , e z , um ponto qualquer, temos $(f(a), f(b); f(c), f(z)) = (a, b; c, z)$.

Assim, $\frac{f(c) - f(a)}{f(c) - f(b)} \cdot \frac{f(z) - f(b)}{f(z) - f(a)} = \frac{c - a}{c - b} \cdot \frac{z - b}{z - a}$. Escrevendo $f(a) = a', f(b) = b'$ e $f(c) = c'$, e desenvolvendo a expressão acima, encontramos

$$f(z) = \frac{[b'(b - c)(c' - a') - a'(a - c)(c' - b')]z + [ab'(c - b)(c' - a') - a'b(c' - b')(c - a)]}{[(a - c)(b' - c') - (a' - c')(b - c)]z + [b(b' - c')(c - a) - a(a' - c')(c - b)]},$$

ou seja,

$$f(z) = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

Como tomamos o ponto z arbitrário, concluímos que f é uma transformação de Möbius. \square

Combinando as proposições 2.4.5 e 2.4.6, concluímos:

Teorema 2.4.7. *Uma aplicação f , definida na esfera de Riemann, é uma Transformação de Möbius se, e somente se, preserva a razão cruzada.*

Capítulo 3

Geometria Hiperbólica Real

3.1 A Razão Cruzada

Dados quatro pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 em \mathbb{C} , aqui consideraremos a razão cruzada desses pontos como

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4},$$

sendo estendida por continuidade para incluir o caso em que um dos pontos z_i é ∞ . Por exemplo,

$$[z_1, z_2, z_3, \infty] = \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}.$$

Em particular, temos $[0, 1, z, \infty] = z$, para qualquer $z \in \mathbb{C}$.

Se g é uma transformação de Möbius dada por

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \text{ com } ad - bc \neq 0,$$

já vimos que g preserva a razão cruzada, isto é,

$$[g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] = [z_1, z_2, z_3, z_4].$$

Veremos que, se uma transformação de Möbius g fixa três pontos na esfera de Riemann

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, que denotaremos a partir de agora por $\hat{\mathbb{C}}$, então essa transformação é a identidade. Primeiro, por continuidade, definimos $g(\infty)$ por

$$g(\infty) = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \lim_{z \rightarrow \infty} \frac{a + \frac{b}{z}}{c + \frac{d}{z}} = \frac{a}{c}.$$

Com isso, temos que g fixa o ponto ∞ isto é, $g(\infty) = \infty$ se, e somente se, $c = 0$. Suponhamos que g fixe três pontos de $\hat{\mathbb{C}}$ e não seja a identidade.

Se $c = 0$, temos que $g(z) = \frac{a}{d}z + \frac{b}{d}$. Então, se $\frac{a}{d} = 1$, a equação $g(z) = z$ não possui solução em \mathbb{C} , pois $g(z) = z \Leftrightarrow z + \frac{b}{d} = z$. Se $\frac{a}{d} \neq 1$, a equação $g(z) = z \Leftrightarrow \frac{a}{d}z + \frac{b}{d} = z$, possui única solução, a saber $z = \frac{b}{d-a}$. Assim, a transformação g fixa apenas dois pontos de $\hat{\mathbb{C}}$.

Por outro lado, se $c \neq 0$, as soluções de $g(z) = z$ estão em \mathbb{C} , pois $g(\infty) \neq \infty$, e são raízes da equação polinomial $cz^2 + (d-a)z - b = 0$. Nesse caso, g fixa no máximo dois pontos.

Com isso, temos que a única transformação de Möbius que fixa três pontos em $\hat{\mathbb{C}}$ é a identidade.

Agora, se z_1, z_2, z_3 é uma tripla de pontos na esfera de Riemann e seja w_1, w_2, w_3 outra tripla, então existe uma única transformação de Möbius que leva z_1, z_2, z_3 em w_1, w_2, w_3 , respectivamente. De fato, a unicidade se dá pois, se f e g são duas transformações tais que $f(z_i) = w_i$ e $g(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$, a composição $f^{-1} \circ g$ fixa três pontos em $\hat{\mathbb{C}}$, logo $f \equiv g$. Para a existência, construímos duas transformações f e g , da seguinte forma:

$$f(z) = [z_1, z_2, z, z_3] \quad \text{e} \quad g(z) = [w_1, w_2, z, w_3],$$

onde $f(z_1) = 0, f(z_2) = 1, f(z_3) = \infty$ e $g(w_1) = 0, g(w_2) = 1, g(w_3) = \infty$. E, assim, $g^{-1} \circ f(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$.

Usando esse fato, se

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4],$$

existe uma transformação de Möbius g tal que $g(z_i) = w_i$, para $i = 1, \dots, 4$. Para ver isso, sejam f e h transformações de Möbius que levam z_1, z_2 e z_4 em $0, 1$ e ∞ e w_1, w_2 e w_4 em $0, 1$

e ∞ , respectivamente. Então

$$\begin{aligned}
 f(z_3) &= [0, 1, f(z_3), \infty] \\
 &= [f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] \\
 &= [z_1, z_2, z_3, z_4] \\
 &= [w_1, w_2, w_3, w_4] \\
 &= [h(w_1), h(w_2), h(w_3), h(w_4)] \\
 &= [0, 1, h(w_3), \infty] \\
 &= h(w_3).
 \end{aligned}$$

E, tomando $g = h^{-1} \circ f$, temos que $g(z_i) = w_i$, para $i = 1, \dots, 4$.

Agora, vamos avaliar como a razão cruzada

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

varia com as permutações de z_i . Considerando o grupo S_4 , das permutações de quatro elementos, cada $\sigma \in S_4$ induz uma mudança no valor da razão cruzada por

$$\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4] \mapsto [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}].$$

Essa mudança no valor da razão cruzada depende de σ e de λ , mas não depende dos valores dos z_i 's individualmente.

Isso acontece pois, como vimos acima, se $[z_1, z_2, z_3, z_4] = [w_1, w_2, w_3, w_4]$, existe uma transformação de Möbius g , com $g(z_i) = w_i$, e então

$$\begin{aligned}
 [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}] &= [g(z_{\sigma(1)}), g(z_{\sigma(2)}), g(z_{\sigma(3)}), g(z_{\sigma(4)})] \\
 &= [w_{\sigma(1)}, w_{\sigma(2)}, w_{\sigma(3)}, w_{\sigma(4)}].
 \end{aligned}$$

Considerando a função f_σ , $\sigma \in S_4$, dada por

$$f_\sigma(\lambda) = [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}],$$

onde $\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4]$. Temos que $f_\pi \circ f_\sigma = f_{\pi\sigma}$, pois

$$\begin{aligned} f_\pi \circ f_\sigma(\lambda) &= f_\pi([z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}]) \\ &= [z_{\pi\sigma(1)}, z_{\pi\sigma(2)}, z_{\pi\sigma(3)}, z_{\pi\sigma(4)}] \\ &= f_{\pi\sigma}(\lambda). \end{aligned}$$

Supondo que σ seja a permutação (12) isto é, $\sigma(1) = 2$, $\sigma(2) = 1$, $\sigma(3) = 3$ e $\sigma(4) = 4$, e seja g uma transformação de Möbius tal que $g(z_1) = 0$, $g(z_2) = 1$ e $g(z_4) = \infty$. Então

$$\begin{aligned} \lambda &= [z_1, z_2, z_3, z_4] \\ &= [g(z_1), g(z_2), g(z_3), g(z_4)] \\ &= [0, 1, g(z_3), \infty] \\ &= g(z_3) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} f_\sigma(\lambda) &= [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}] \\ &= [z_2, z_1, z_3, z_4] \\ &= [g(z_2), g(z_1), g(z_3), g(z_4)] \\ &= [1, 0, g(z_3), \infty] \\ &= \frac{1 - g(z_3)}{1 - 0} \\ &= 1 - \lambda. \end{aligned}$$

Com isso, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.1.1. *Sejam $\sigma \in S_4$, uma permutação dos elementos $\{1, 2, 3, 4\}$, $\lambda = [z_1, z_2, z_3, z_4]$ e $f_\sigma(\lambda)$ a função que associa λ a $[z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}]$. Temos:*

- i. $f_\sigma(\lambda) = 1 - \lambda$, se σ é a permutação (12) ou (34);
- ii. $f_\sigma(\lambda) = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, se σ é a permutação (13) ou (24);
- iii. $f_\sigma(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$, se σ é a permutação (14) ou (23).

Demonstração. *i.* Se σ é a permutação (34), considerando a transformação de Möbius g que leva z_1, z_2 e z_4 em $0, 1$ e ∞ , respectivamente. Então

$$\lambda = g(z_3),$$

como antes, e

$$\begin{aligned} f_\sigma(\lambda) &= [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}] \\ &= [z_1, z_2, z_4, z_3] \\ &= [g(z_1), g(z_2), g(z_4), g(z_3)] \\ &= [0, 1, \infty, g(z_3)] \\ &= \frac{g(z_3) - 1}{-1} \\ &= 1 - \lambda. \end{aligned}$$

ii. Da mesma forma, se σ é a permutação (13), considerando g como antes, temos

$$\begin{aligned} f_\sigma(\lambda) &= [z_{\sigma(1)}, z_{\sigma(2)}, z_{\sigma(3)}, z_{\sigma(4)}] \\ &= [z_3, z_2, z_1, z_4] \\ &= [g(z_3), g(z_2), g(z_1), g(z_4)] \\ &= [g(z_3), 1, 0, \infty] \\ &= \frac{g(z_3)}{g(z_3) - 1} \\ &= \frac{\lambda}{\lambda - 1}. \end{aligned}$$

Os outros casos são análogos. □

No Capítulo 2, usamos a seguinte definição para a razão cruzada $(a, b; c, d) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a}$, para os pontos a, b, c e d na esfera de Riemann, $\hat{\mathbb{C}}$. Vamos avaliar como essa razão cruzada se relaciona com a razão cruzada que escolhemos para este capítulo.

Se denotarmos por $R = (a, b; c, d)$, então $R = (a, b; c, d) = \frac{c-a}{c-b} \cdot \frac{d-b}{d-a} = [c, b, a, d] = f_\sigma(\lambda)$, para σ a permutação (13) e $\lambda = [a, b, c, d]$. Com isso, $R = \frac{\lambda}{\lambda - 1}$, e temos uma comparação da Proposição 3.1.1 com as alterações na disposição dos pontos feitas na Seção 2.1.

3.2 O Plano Hiperbólico

Vamos iniciar nossa descrição da geometria Hiperbólica em termos da geometria Euclidiana, assim, podemos pensar nela como subordinada à geometria Euclidiana. Os pontos, retas e demais objetos serão definidos como subconjuntos do plano Euclidiano e, dessa forma, evitaremos a necessidade de uma discussão axiomática para a geometria Hiperbólica. Claro, existem conjuntos adequados de axiomas e, uma vez bem verificado que eles valem no nosso modelo, podemos usar os teoremas que são produzidos à partir deles. Não iremos, no entanto, verificá-los aqui. Essa construção axiomática pode ser encontrada em [12], por exemplo. Dentro das limitações da geometria Euclidiana seremos tão rigorosos e completos quanto possível.

Podemos usar o semiplano superior $\mathbb{H}^2 = \{x + iy \in \mathbb{C}; y > 0\}$ como um modelo para o plano hiperbólico que suporta uma métrica ρ derivada de $ds = \frac{|dz|}{\text{Im}[z]}$, ou $ds = \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2}}{y}$, onde $z = x + iy \in \mathbb{H}^2$.

Veremos também que reflexões em círculos da forma $|z - x_0| = r$, onde $x_0 \in \mathbb{R}$ e $r > 0$, e reflexões em retas “verticais” da forma $x = x_1$, com $x_1 \in \mathbb{R}$, são isometrias de (\mathbb{H}^2, ρ) . Mostraremos isso na seção 3.4.

Há um modelo em termos do disco unitário

$$\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\} = \{x + iy \in \mathbb{C}; x^2 + y^2 < 1\}.$$

A métrica ρ de \mathbb{H}^2 se transfere a uma métrica em Δ , que é derivada de

$$ds = \frac{2|dz|}{1 - |z|^2},$$

ou

$$ds = \frac{2\sqrt{dx^2 + dy^2}}{1 - (x^2 + y^2)}, \text{ onde } z = x + iy \in \Delta.$$

Usaremos ρ para designar tanto a métrica em \mathbb{H}^2 como em Δ .

Uma das principais vantagens de discutirmos a geometria Hiperbólica em termos da Euclidiana é que podemos introduzir facilmente o *círculo de pontos no infinito*, que significa $\mathbb{R}^1 \cup \{\infty\}$

para \mathbb{H}^2 e $\{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ para Δ . Esses pontos não pertencem de fato ao plano hiperbólico, entretanto, são fundamentais para qualquer discussão sobre geometria Hiperbólica. A união do plano hiperbólico com o círculo no infinito recebe o nome de *plano hiperbólico fechado*.

Os modelos descritos acima são conhecidos como modelos de Poincaré para a geometria Hiperbólica.

3.3 A Métrica Hiperbólica

Vamos descrever uma construção para a métrica ρ que é derivada de $ds = \frac{|dz|}{\text{Im}[dz]}$. Para cada caminho contínuo e diferenciável por partes em \mathbb{H}^2 , $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{H}^2$, seu “comprimento” é dado por

$$\|\gamma\| = \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}[\gamma(t)]} dt.$$

A função ρ será, então, definida por

$$\rho(z, w) = \inf \|\gamma\|, \quad \text{para } z, w \in \mathbb{H}^2,$$

onde o ínfimo é tomado sobre todos os caminhos γ ligando z a w em \mathbb{H}^2 .

Pela maneira como foi definida, temos que ρ satisfaz:

- i. $\rho(z, w) \geq 0$, para quaisquer $z, w \in \mathbb{H}^2$ e $\rho(z, w) = 0$ se, e somente, se $z = w$.
- ii. $\rho(z, w) = \rho(w, z)$, para todos $z, w \in \mathbb{H}^2$.
- iii. $\rho(z_1, z_3) \leq \rho(z_1, z_2) + \rho(z_2, z_3)$, para $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{H}^2$.

Assim, ρ é, de fato, uma métrica em \mathbb{H}^2 .

Agora, consideremos $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $ad - bc > 0$, e seja $z \in \mathbb{H}^2$, $z = x + iy$ com $y > 0$, então

$$g(x + iy) = \frac{ax + iay + b}{cx + icy + d} = \frac{(ax + b) + iay}{(cx + d) + icy} \cdot \frac{(cx + d) - icy}{(cx + d) - icy}$$

$$= \frac{[(ax + b)(cx + d) + acy^2] + i(ad - bd)y}{(cx + d)^2 + c^2y^2},$$

como $(ad - bd)y > 0$, temos que $g(z) \in \mathbb{H}^2$. E, como g é invertível, concluímos que g aplica \mathbb{H}^2 bijetivamente sobre si. Também,

$$g'(z) = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2} \quad \text{e} \quad \text{Im}[g(x + iy)] = \frac{(ad - bc)y}{(cx + d)^2 + c^2y^2}.$$

Como, $|g'(z)| = \frac{ad - bc}{|cz + d|^2}$ e $|cz + d|^2 = (cx + d)^2 + c^2y^2$, temos

$$\frac{|g'(z)|}{\text{Im}[g(z)]} = \frac{1}{y} = \frac{1}{\text{Im}[z]}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \|g\gamma\| &= \int_a^b \frac{|(g\gamma)'(t)|}{\text{Im}[g\gamma(t)]} dt \\ &= \int_a^b \frac{|(g'(\gamma(t)))| \cdot |\gamma'(t)|}{\text{Im}[g(\gamma(t))]} dt \\ &= \int_a^b \frac{|\gamma'(t)|}{\text{Im}[\gamma(t)]} dt \\ &= \|\gamma\|. \end{aligned}$$

O que mostra que g preserva o comprimento do caminho γ , nos fornecendo

$$\rho(z, w) = \inf\|\gamma\| = \inf\|g\gamma\| = \rho(g(z), g(w))$$

e isso nos diz que g preserva as distâncias em \mathbb{H}^2 , ou seja, g é uma isometria de (\mathbb{H}^2, ρ) . Usaremos isso para obter uma expressão explícita para $\rho(z, w)$.

Teorema 3.3.1. *Se ρ é a função definida por $\rho(z, w) = \inf\|\gamma\|$, para $z, w \in \mathbb{H}^2$, então*

$$i. \quad \rho(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| - |z - w|}{|z - \bar{w}| + |z - w|};$$

$$ii. \cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}[z]\operatorname{Im}[w]};$$

$$iii. \sinh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}[z]\operatorname{Im}[w])^{1/2}};$$

$$iv. \cosh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \frac{|z - \bar{w}|}{2(\operatorname{Im}[z]\operatorname{Im}[w])^{1/2}};$$

$$v. \tanh \left[\frac{1}{2} \rho(z, w) \right] = \left| \frac{z - w}{z - \bar{w}} \right|.$$

Demonstração. *i.* Dados dois pontos $z, w \in \mathbb{H}^2$, seja L o único círculo euclidiano que os contém e é ortogonal ao eixo real (ou o círculo no infinito). Temos que L intercepta o eixo real em algum ponto finito α . Tomamos, então, a transformação

$$g(z) = -(z - \alpha)^{-1} + \beta = \frac{\beta z - (1 + \beta\alpha)}{z - \alpha},$$

para um β adequado, de maneira que g seja uma bijeção de L sobre o eixo imaginário. É suficiente calcularmos $\rho(z, w)$ no caso em que z e w pertencem ao eixo imaginário, pois, já vimos que g preserva distâncias.

Podemos, assim, assumir que $z = pi$ e $w = qi$, com $0 < p < q$, e considerarmos a curva $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathbb{H}^2$, dada por

$$\gamma(t) = (1 - t)z + tw = i(p + t(q - p)),$$

e temos

$$\begin{aligned} \|\gamma\| &= \int_0^1 \frac{|\gamma'(t)|}{\operatorname{Im}[\gamma(t)]} dt = \int_0^1 \frac{|i(q - p)|}{[p + t(q - p)]} dt \\ &= \int_0^1 \frac{(q - p)}{[p + t(q - p)]} dt = \log \left(\frac{q}{p} \right). \end{aligned}$$

Assim, $\rho(z, w) = \log \left(\frac{q}{p} \right)$ e

$$\log \frac{|z - \bar{w}| - |z - w|}{|z - \bar{w}| + |z - w|} = \log \frac{|pi + qi| - |pi - qi|}{|pi + qi| + |pi - qi|} = \log \frac{(p + q) - (p - q)}{(p + q) + (p - q)} = \log \left(\frac{q}{p} \right).$$

Portanto,

$$\rho(z, w) = \log \frac{|z - \bar{w}| - |z - w|}{|z - \bar{w}| + |z - w|}.$$

ii. Considerando, $z = pi$ e $w = qi$, como antes, tendo $\rho(z, w) = \log \left(\frac{q}{p} \right)$, por um lado vale

$$\cosh \rho(z, w) = \cosh \log \left(\frac{q}{p} \right) = \frac{e^{\log \frac{q}{p}} + e^{-\log \frac{q}{p}}}{2} = \frac{p^2 + q^2}{2pq}.$$

Por outro lado,

$$1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}[z]\operatorname{Im}[w]} = 1 + \frac{|i(p - q)|^2}{2pq} = 1 + \frac{(p - q)^2}{2pq} = \frac{p^2 + q^2}{2pq}.$$

Então,

$$\cosh \rho(z, w) = 1 + \frac{|z - w|^2}{2\operatorname{Im}[z]\operatorname{Im}[w]}.$$

Os itens *iii*, *iv* e *v* são verificados da mesma forma. □

Podemos, ainda, obter uma expressão para $\rho(z, w)$ em termos da razão cruzada.

Se considerarmos z e w em \mathbb{H}^2 , seja L o círculo euclidiano que os contém e é ortogonal ao círculo no infinito ($\mathbb{R} \cup \{\infty\}$). Tomemos, como na demonstração anterior, a transformação de Möbius g que aplica L bijetivamente sobre o eixo imaginário. O círculo L intercepta o círculo no infinito em dois pontos z^* e w^* , possivelmente infinitos, que podemos nomear de forma que z^*, z, w e w^* estejam nessa ordem.

Agora, como o $g(L)$ é o eixo imaginário, ou $g(z^*) = 0$ ou $g(z^*) = \infty$, se $g(z^*) = \infty$, aplicando a transformação $z \mapsto -\frac{1}{z}$, podemos assumir que g é tal que

$$g(z^*) = 0, \quad g(z) = yi, \quad g(w) = vi \quad \text{e} \quad g(w^*) = \infty,$$

onde $y < v$.

Então, como a razão cruzada é invariante sob transformações de Möbius,

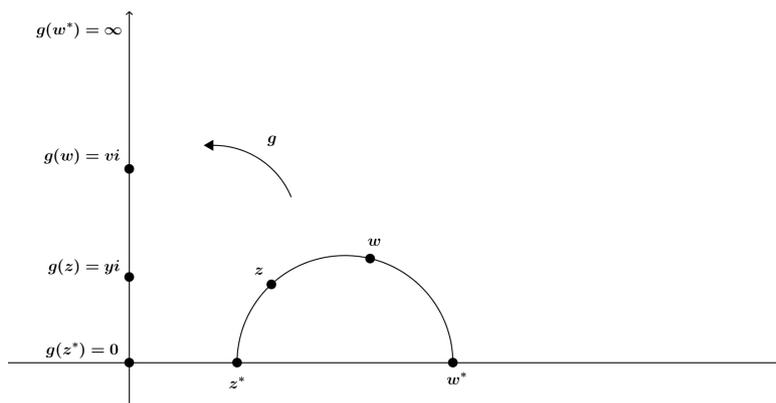


Figura 3.1: A métrica hiperbólica em termos da razão cruzada.

$$\begin{aligned}
 \rho(z, w) &= \rho(g(z), g(w)) = \rho(iy, iv) = \log\left(\frac{v}{y}\right) = \log\left(\frac{vi}{yi}\right) \\
 &= \log\left(\frac{0 - vi}{0 - yi}\right) = \log[0, yi, vi, \infty] \\
 &= \log[g^{-1}(0), g^{-1}(yi), g^{-1}(vi), g^{-1}(\infty)] \\
 &= \log[z^*, z, w, w^*].
 \end{aligned}$$

E temos, assim, uma expressão para a métrica ρ de \mathbb{H}^2 em termos da razão cruzada, como queríamos.

3.4 As Geodésicas do Plano Hiperbólico

Iniciaremos esta seção definindo uma *reta hiperbólica*, ou *h-reta*, como sendo a interseção do plano hiperbólico com um círculo euclidiano ou uma reta que é ortogonal ao círculo no infinito. Com essa definição, temos, facilmente, os seguintes resultados:

Resultado 3.4.1. *Para todo par de pontos no plano hiperbólico \mathbb{H}^2 existe uma única h-reta.*

Demonstração. Dados dois pontos $z, w \in \mathbb{H}^2$, se a reta euclidiana que passa por z e w é ortogonal ao círculo no infinito, então essa é a h-reta passando por z e w .

Caso contrário, basta considerar a reta euclidiana que passa por z e w , tomar o ponto médio M do segmento euclidiano \overline{zw} e, por ele, tomar a reta Euclidiana r que é ortogonal à reta euclidiana \overleftrightarrow{zw} . Tome o círculo euclidiano de centro H e raio $|Hz|$ (ou $|Hw|$), onde H é a

interseção de r com o círculo no infinito. A interseção desse círculo com o plano \mathbb{H}^2 é a h-reta que contém z e w . □

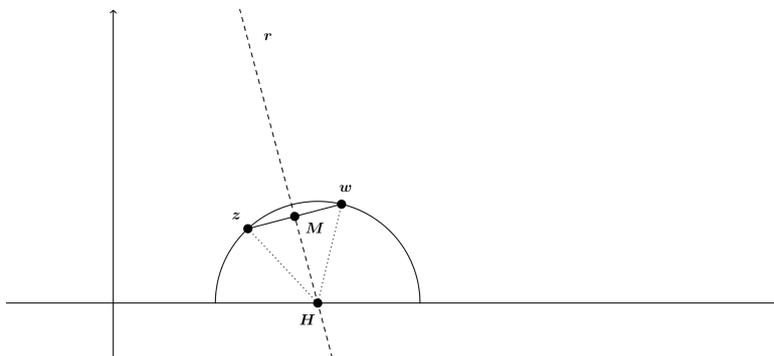


Figura 3.2: H-reta passando por dois pontos.

Resultado 3.4.2. *Duas h-retas distintas se interceptam em, no máximo, um ponto no plano hiperbólico.*

Resultado 3.4.3. *Dadas duas h-retas quaisquer L_1 e L_2 em \mathbb{H}^2 , existe uma isometria g tal que $g(L_1) = L_2$.*

Demonstração. Basta construirmos uma transformação g como na demonstração do Teorema 3.3.1. □

Dado qualquer ponto $w \in \mathbb{H}^2$, temos que

$$\{z \in \mathbb{H}^2; |z| = |w|\}$$

é a única h-reta que contém w e que é ortogonal ao eixo imaginário positivo (que é uma h-reta). Como a isometria do resultado 3.4.3 pode ser tomada como uma transformação de Möbius, obtemos:

Resultado 3.4.4. *Dada qualquer h-reta L e qualquer ponto w em \mathbb{H}^2 , existe uma única h-reta passando por w e ortogonal a L .*

Um aspecto essencial da geometria axiomática é a noção de um ponto “estar entre” outros dois pontos em uma reta. No caso da geometria Hiperbólica, isso pode ser descrito em termos da métrica.

Dados dois pontos z e w em uma h-reta L , o conjunto $L - \{z, w\}$ tem três componentes conexas, onde exatamente uma tem o fecho compacto (relativamente ao plano hiperbólico). Essa componente é o *segmento aberto* (z, w) e, dizemos que um ponto v está entre z e w se, e somente se, $v \in (z, w)$. O *segmento fechado* $[z, w]$ e os segmentos $[z, w)$, $(z, w]$ são definidos de maneira natural.

Já sabemos, pela construção que foi feita na demonstração do Teorema 3.3.1, que se a curva γ , que liga o ponto z ao ponto w , é um círculo euclidiano (ou uma reta) ortogonal ao círculo no infinito, vale

$$\|\gamma\| = \rho(ip, iq).$$

Com isso, estabelecemos a seguinte proposição:

Proposição 3.4.5. *Sejam z e w dois pontos arbitrários no plano hiperbólico, \mathbb{H}^2 . Uma curva γ ligando z a w satisfaz*

$$\|\gamma\| = \rho(z, w)$$

se, e somente se, γ é a parametrização do segmento $[z, w]$ como uma curva simples, isto é, a parametrização de um círculo euclidiano (ou de uma reta) ortogonal ao círculo no infinito.

É por esse motivo que as h-retas são as *geodésicas* (as curvas que realizam a menor distância) no plano hiperbólico \mathbb{H}^2 .

Agora, consideremos três pontos quaisquer z, w e v no plano hiperbólico. Se tivermos v entre os pontos z e w , então

$$\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w).$$

Por outro lado, se v não está entre z e w , então o caminho γ contendo os segmentos $[z, v]$ e $[v, w]$ satisfaz, pela proposição 3.4.5,

$$\|\gamma\| > \rho(z, w).$$

E, temos a seguinte proposição:

Proposição 3.4.6. *Sejam z e w pontos distintos no plano hiperbólico. Então*

$$\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w)$$

se, e somente se, $v \in [z, w]$.

Finalizamos essa seção com mais algumas definições básicas. Os pontos z_1, z_2, \dots do plano hiperbólico são *colineares* se eles pertencem à uma mesma geodésica. Cada geodésica tem dois pontos finais, ambos no círculo no infinito, e podemos estender a notação dos segmentos para incluir as geodésicas, de maneira que (α, β) denota a geodésica de pontos finais α e β .

Se L_1 e L_2 são duas geodésicas distintas, dizemos que L_1 e L_2 são *paralelas* se, e somente se, elas tem exatamente um ponto final em comum. Se L_1 e L_2 não tem pontos finais em comum, então elas podem se intersectar em um ponto ou podem ser disjuntas, caso $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ ou $L_1 \cap L_2 = \emptyset$, respectivamente.

3.5 As Isometrias do Plano Hiperbólico

Nosso objetivo, nesta seção é identificar todas as isometrias do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 . Sejam z, w e v , pontos distintos em \mathbb{H}^2 , com v entre z e w . Então, $\rho(z, w) = \rho(z, v) + \rho(v, w)$ e, para qualquer isometria φ de \mathbb{H}^2 , vale

$$\rho(\varphi(z), \varphi(w)) = \rho(\varphi(z), \varphi(v)) + \rho(\varphi(v), \varphi(w)),$$

portanto, $\varphi(v)$ está entre $\varphi(z)$ e $\varphi(w)$.

Com isso, temos que φ aplica o segmento $[z, w]$ sobre o segmento $[\varphi(z), \varphi(w)]$, ou seja, φ leva h-retas em h-retas.

Assim, dada qualquer isometria φ , existe alguma isometria $g(z) = \frac{az + b}{cz + d}$, com $ad - bc > 0$, tal que a composição $g \circ \varphi$ mantém o eixo imaginário, aqui denotado por L , invariante. De fato, basta tomarmos a isometria g que leva $\varphi(L)$ sobre L .

Aplicando as isometrias $z \mapsto kz$, com $k > 0$, e $z \mapsto -\frac{1}{z}$, se necessário, podemos assumir que

$g \circ \varphi$ fixa o ponto i , isto é, $g \circ \varphi(i) = i$, e mantém invariantes os semieixos $(0, i)$ e (i, ∞) .

Como, ainda pela construção feita na demonstração do teorema 3.3.1,

$$\rho(ip, iq) = \log\left(\frac{q}{p}\right) = -\log\left(\frac{p}{q}\right) \Rightarrow \rho(ip, iq) = \left|\log\left(\frac{q}{p}\right)\right|,$$

temos

$$\rho(\varphi(ip), \varphi(iq)) = \rho(ip, iq) = \left|\log\left(\frac{q}{p}\right)\right|,$$

e isso vale para quaisquer ip, iq em L , portanto, $g \circ \varphi$ fixa qualquer ponto do eixo imaginário L .

Agora, tomando qualquer ponto $z \in \mathbb{H}^2$, escrevendo $z = x + iy$ e $g \circ \varphi(z) = u + iv$. Para todo $t > 0$,

$$\rho(z, it) = \rho(g \circ \varphi(z), g \circ \varphi(it)) = \rho(u + iv, it),$$

donde,

$$\rho(x + iy, it) = \rho(u + iv, it).$$

Pelo item *iii*, da proposição 3.3.1, $\sinh\left[\frac{1}{2}\rho(z, w)\right] = \frac{|z - w|}{2(\operatorname{Im}[z]\operatorname{Im}[w])^{1/2}}$. Então

$$\begin{aligned} \rho(x + iy, it) &= \rho(u + iv, it) \\ \Leftrightarrow \sinh\left[\frac{1}{2}\rho(x + iy, it)\right] &= \sinh\left[\frac{1}{2}\rho(u + iv, it)\right] \\ \Leftrightarrow \frac{|x + i(y - t)|}{2\sqrt{\operatorname{Im}[x + iy]\operatorname{Im}[it]}} &= \frac{|u + i(v - t)|}{2\sqrt{\operatorname{Im}[u + iv]\operatorname{Im}[it]}} \\ \Leftrightarrow \frac{|x + i(y - t)|}{2\sqrt{yt}} &= \frac{|u + i(v - t)|}{2\sqrt{vt}} \\ \Leftrightarrow \frac{|x + i(y - t)|^2}{yt} &= \frac{|u + i(v - t)|^2}{vt} \\ \Leftrightarrow v[x^2 + (y - t)^2] &= y[u^2 + (v - t)^2]. \end{aligned}$$

Como isso vale para qualquer $t > 0$, $y = v$ e $x^2 = u^2$, então, $g \circ \varphi(z) = z$ ou $g \circ \varphi(z) = -\bar{z}$.

Pela continuidade das isometrias, concluímos que isso vale para qualquer $z \in \mathbb{H}^2$, e isso nos

fornece o seguinte teorema, que caracteriza as isometrias do plano hiperbólico, como queríamos.

Teorema 3.5.1. *O grupo das isometrias de (\mathbb{H}^2, ρ) é o grupo de aplicações da forma*

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{ou} \quad z \mapsto \frac{a(-\bar{z}) + b}{c(-\bar{z}) + d}$$

onde a, b, c e d são reais e $ad - bc > 0$.

Pela discussão feita na seção 3.1, temos que o grupo das isometrias de (\mathbb{H}^2, ρ) age transitivamente sobre as triplas de pontos distintos de \mathbb{H}^2 , ou seja, dadas duas triplas de pontos distintos z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 em \mathbb{H}^2 , existe uma transformação de Möbius, portanto, uma isometria g tal que $g(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$.

Capítulo 4

Geometria Hiperbólica Complexa

Existem vários modelos para o plano hiperbólico complexo, apresentaremos, nas próximas seções, de maneira sucinta, alguns desses modelos.

4.1 O Modelo Projetivo

Apresentaremos inicialmente o modelo projetivo, que apresenta a vantagem de usar Álgebra Linear para resolver muitos problemas relacionados aos plano hiperbólico complexo.

Consideremos o espaço vetorial complexo \mathbb{C}^3 munido da forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ não degenerada de assinatura $(2, 1)$:

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3,$$

onde $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{w} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$ estão em \mathbb{C}^3 .

Agora, considerando os subconjuntos de $\mathbb{C}^{2,1}$:

$$V_0 = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = 0\};$$

$$V_+ = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle > 0\};$$

$$V_- = \{\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}; \langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle < 0\},$$

que são formados pelos vetores *nulos*, *positivos* e *negativos*, respectivamente, de $\mathbb{C}^{2,1}$.

Seja $\mathbb{P} : \mathbb{C}^{2,1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{CP}^2$, a projeção natural sobre o plano projetivo complexo, onde $\mathbb{CP}^2 = (\mathbb{C}^3 \setminus \{0\}) / \sim$, onde $z \sim w$ se, e somente se, $z = \lambda w$, para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$. O *plano hiperbólico complexo* $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é a variedade analítica complexa dada pela imagem de V_- pela projeção \mathbb{P} , isto é $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_-)$, munida da métrica Riemanniana induzida da forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Essa métrica induz uma função distância ρ , chamada *métrica de Bergman*, que é dada por

$$\cosh^2 \left(\frac{1}{2} \cdot \rho(z, w) \right) = \frac{\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle \cdot \langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle}{\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle \cdot \langle \mathbf{w}, \mathbf{w} \rangle}, \text{ onde } z, w \in \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2.$$

Os vetores \mathbf{z} e \mathbf{w} são vetores negativos de $\mathbb{C}^{2,1}$, que são projetados em z e w por \mathbb{P} , respectivamente. Dito de outra forma, os vetores \mathbf{z} e \mathbf{w} são os levantamentos de z e w , respetivamente.

A fronteira do plano hiperbólico complexo, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, pode ser vista como o conjunto $\mathbb{P}(V_0)$, no plano projetivo complexo, e é denotada por $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Mas falaremos mais detalhadamente sobre ela na seção 4.3.

Denotamos por $U(2, 1)$ o grupo das aplicações lineares de $\mathbb{C}^{2,1}$ que preservam a forma hermitiana, ou seja, se $f \in U(2, 1)$, então f satisfaz $\langle f(\mathbf{z}), f(\mathbf{w}) \rangle = \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle$, para todos \mathbf{z} e \mathbf{w} em $\mathbb{C}^{2,1}$. A cada transformação linear unitária $f \in U(2, 1)$, associamos uma aplicação $\mathbf{f} : \mathbb{CP}^2 \rightarrow \mathbb{CP}^2$, dada por $\mathbf{f}(z) = \mathbb{P}(f(\mathbf{z}))$, onde $z = \mathbb{P}(\mathbf{z})$, \mathbf{f} é um biholomorfismo (holomorfismo bijetivo) que mantém $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ invariante.

Como f preserva a norma hermitiana de $\mathbb{C}^{2,1}$, temos que \mathbf{f} é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Por outro lado, se \mathbf{f} é um biholomorfismo que mantém $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ invariante, existe uma aplicação unitária $f \in U(2, 1)$ tal que $\mathbf{f}(z) = \mathbb{P}(f(\mathbf{z}))$, para todo $\mathbf{z} \in \mathbb{C}^{2,1}$.

O conjunto $\mathbb{P}(U(2, 1)) = PU(2, 1)$ é o grupo de todos os biholomorfismos de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, onde $PU(2, 1)$ é a projetivização do grupo unitário $U(2, 1)$ e seus elementos são transformações lineares projetivas.

4.2 O Modelo da Bola Unitária

Seja $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$, um vetor em $V_- \subset \mathbb{C}^{2,1}$. Como \mathbf{z} é negativo, temos

$$\langle \mathbf{z}, \mathbf{z} \rangle = z_1 \bar{z}_1 + z_2 \bar{z}_2 - z_3 \bar{z}_3 = |z_1|^2 + |z_2|^2 - |z_3|^2 < 0,$$

portanto, $z_3 \neq 0$. Dividindo, então, as coordenadas de \mathbf{z} por z_3 , obtemos $\begin{bmatrix} \frac{z_1}{z_3} \\ \frac{z_2}{z_3} \\ 1 \end{bmatrix}$, um vetor que

está na reta negativa determinada por \mathbf{z} .

Se escrevemos $z'_1 = \frac{z_1}{z_3}$ e $z'_2 = \frac{z_2}{z_3}$, o vetor $\begin{bmatrix} z'_1 \\ z'_2 \end{bmatrix}$ satisfaz $|z'_1|^2 + |z'_2|^2 = \left| \frac{z_1}{z_3} \right|^2 + \left| \frac{z_2}{z_3} \right|^2 = \frac{|z_1|^2 + |z_2|^2}{|z_3|^2} < 1$, uma vez que $\mathbf{z} \in V_-$. Portanto, o vetor \mathbf{z}' pertence à bola unitária \mathbb{B}^2 de \mathbb{C}^2 , sendo

$$\mathbb{B}^2 = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^2; |x|^2 + |y|^2 < 1 \right\}.$$

Por outro lado, se $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ é um vetor que pertence à \mathbb{B}^2 , esse vetor define o vetor $\begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$,

que é um vetor negativo em $\mathbb{C}^{2,1}$. Com isso, obtemos uma identificação natural entre o plano hiperbólico complexo $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e a bola unitária \mathbb{B}^2 de \mathbb{C}^2 , da seguinte forma:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_-) & \longrightarrow & \mathbb{B}^2 & & \mathbb{B}^2 & \longrightarrow & \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_-) \\ \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} \frac{z_1}{z_3} \\ \frac{z_2}{z_3} \end{bmatrix} & \text{e} & \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & \longmapsto & \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

4.2.1 Outra Expressão para o Produto Hermitiano

Consideremos o ponto ideal $p_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \partial\mathbb{B}^2$, cujo levantamento em $\mathbb{C}^{2,1}$ é o ponto

$\tilde{p}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Vamos mudar da base canônica $E = \{e_1, e_2, e_3\}$ de $\mathbb{C}^{2,1}$, para uma base que inclua o vetor $\tilde{p}_\infty = e_3 - e_2$.

Considerando a base $\hat{E} = \{\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3\}$, de \mathbb{C}^3 , dada por

$$\hat{e}_1 = e_1, \quad \hat{e}_2 = -e_2 + e_3 \quad \text{e} \quad \hat{e}_3 = \frac{e_2 + e_3}{2}.$$

A matriz de mudança de base de \hat{E} para E é dada por

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

de modo que $D[\mathbf{z}]_{\hat{E}} = [\mathbf{z}]_E$, onde $[\mathbf{z}]_{\hat{E}}$ e $[\mathbf{z}]_E$ são as matrizes coluna que representam o vetor \mathbf{z} nas bases \hat{E} e E , respectivamente.

A forma hermitiana $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z_1 \bar{w}_1 + z_2 \bar{w}_2 - z_3 \bar{w}_3$ pode ser representada na base E através da matriz

$$I_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

por $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = [\mathbf{w}]_E^* \cdot I_{2,1} \cdot [\mathbf{z}]_E$.

Para representá-la na base \hat{E} , temos

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle &= (D[\mathbf{w}]_{\hat{E}})^* \cdot I_{2,1} \cdot (D[\mathbf{z}]_{\hat{E}}) \\ &= [\mathbf{w}]_{\hat{E}}^* \cdot D^* \cdot I_{2,1} \cdot D \cdot [\mathbf{z}]_{\hat{E}} \end{aligned}$$

Como $D^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, temos $D^* \cdot I_{2,1} \cdot D = \hat{I}_{2,1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Com isso, a

representação da forma hermitiana $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle$, na base \hat{E} , é dada por $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = [\mathbf{w}]_{\hat{E}}^* \cdot \hat{I}_{2,1} \cdot [\mathbf{z}]_{\hat{E}}$.

Ou seja, se $[\mathbf{z}]_{\hat{E}} = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix}$ e $[\mathbf{w}]_{\hat{E}} = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, temos que

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle &= \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & \bar{w}_2 & \bar{w}_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \bar{w}_1 & -\bar{w}_3 & -\bar{w}_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \\ &= z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_3 - z_3 \bar{w}_2 \end{aligned}$$

é a expressão para a forma hermitiana na base \hat{E} .

Essa mudança de base será útil quando trabalharmos com a razão cruzada complexa, na seção 4.5.

4.3 O Modelo do Parabolóide

4.3.1 A Transformação de Cayley

Escolhendo um ponto $q \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, onde $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 = \mathbb{P}(V_0)$, como na seção 4.1, esse ponto corresponde a um vetor na reta gerada por um vetor nulo $Q \in \mathbb{C}^{2,1}$. Existe um único \mathbb{C} -hiperplano $H(q)$ tangente a $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ em q , correspondendo ao hiperplano $Q^\perp \subset \mathbb{C}^{2,1}$, onde Q^\perp é o hiperplano formado pelos vetores de $\mathbb{C}^{2,1}$ ortogonais a Q com respeito à forma $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Então o plano hiperbólico $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ está mergulhado no espaço afim $\mathbb{P}(\mathbb{C}^{2,1}) \setminus H$ como um domínio

ilimitado.

Especificamente, vamos tomar Q como o vetor em $\mathbb{C}^{2,1}$, que é o levantamento do ponto ideal p_∞ , dado por

$$\tilde{p}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Nesse caso, o \mathbb{C} -hiperplano $H(\tilde{p}_\infty)$ consiste de todos os pontos com coordenadas homogêneas

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ -z_2 \end{bmatrix},$$

e considerando

$$B : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{P}(\mathbb{C}^{2,1}) \setminus H(\tilde{p}_\infty)$$

$$\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \longmapsto \begin{bmatrix} z_1 \\ \frac{1}{2} - z_2 \\ \frac{1}{2} + z_2 \end{bmatrix}.$$

Com isso, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, que é a projetivização dos vetores negativos de $\mathbb{C}^{2,1}$, $\mathbb{P}(V_-)$, corresponde ao domínio de Siegel

$$\mathfrak{H}^2 = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{C}^2; 2\operatorname{Re}[w_2] - |w_1|^2 > 0 \}.$$

O domínio de Siegel e a bola unitária, \mathbb{B}^2 de \mathbb{C}^2 , estão relacionados pela *transformação de Cayley* da seguinte forma

$$\mathbf{z} \in \mathbb{B}^2 \iff \mathbf{w} \in \mathfrak{H}^2$$

$$\begin{bmatrix} z_1 = \frac{2w_1}{1 + 2w_2} \\ z_2 = \frac{1 - 2w_2}{1 + 2w_2} \end{bmatrix} \iff \begin{bmatrix} w_1 = \frac{z_1}{1 + z_2} \\ w_2 = \frac{1 - z_2}{2 + 2z_2} \end{bmatrix}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{B}^2 &\iff |z_1|^2 + |z_2|^2 < 1 \\
&\iff \left| \frac{2w_1}{1+2w_2} \right|^2 + \left| \frac{1-2w_2}{1+2w_2} \right|^2 < 1 \\
&\iff |2w_1|^2 + |1-2w_2|^2 < |1+2w_2|^2 \\
&\iff 4|w_1|^2 + (\operatorname{Re}[1-2w_2])^2 + (\operatorname{Im}[1-2w_2])^2 < (\operatorname{Re}[1+2w_2])^2 + (\operatorname{Im}[1+2w_2])^2 \\
&\iff 4|w_1|^2 + (1-2\operatorname{Re}[w_2])^2 + (-2\operatorname{Im}[w_2])^2 < (1+2\operatorname{Re}[w_2])^2 + (2\operatorname{Im}[w_2])^2 \\
&\iff 4|w_1|^2 - 4\operatorname{Re}[w_2] < 4\operatorname{Re}[w_2] \\
&\iff 2\operatorname{Re}[w_2] - |w_1|^2 > 0 \\
&\iff \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix} \in \mathfrak{H}^2.
\end{aligned}$$

A caracterização do plano hiperbólico em termos do domínio de Siegel, \mathfrak{H}^2 , é conhecida como o modelo do parabolóide para $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

4.3.2 A Fronteira do Plano Hiperbólico Complexo

Pela transformação de Cayley, a fronteira $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ do plano hiperbólico corresponde ao conjunto

$$\partial\mathfrak{H}^2 = \{ \mathbf{w} \in \mathbb{C}^2; 2\operatorname{Re}[w_2] - |w_1|^2 = 0 \}$$

junto com o ponto ideal p_{∞} .

Esse ponto p_∞ corresponde ao ponto $\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \in \partial\mathbb{B}^2$, cujo levantamento em $\mathbb{C}^{2,1}$ é o ponto

$$\tilde{p}_\infty = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Como $\mathbf{w} \in \partial\mathbb{H}_\mathbb{C}^2$, $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, satisfaz

$$2\operatorname{Re}[w_2] - |w_1|^2 = 0 \Leftrightarrow 2\operatorname{Re}[w_2] = |w_1|^2 \Leftrightarrow \operatorname{Re}[w_2] = \frac{|w_1|^2}{2},$$

temos que w_2 é da forma $w_2 = \frac{|w_1|^2}{2} + it$, para algum $t \in \mathbb{R}$. Com isso, dado qualquer ponto $z \in \mathbb{C}$, temos que \mathbf{w} pode ser visto como $\begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \end{bmatrix}$, onde $w_1 = z$ e $w_2 = \frac{|z|^2}{2} + it$, para algum $t \in \mathbb{R}$.

Desse modo, $\partial\mathfrak{H}^2$ pode ser visto como a compactificação em um ponto de $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$.

Definição 4.3.1. O grupo de Heisenberg é o conjunto $\mathcal{H} = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ munido da seguinte operação:

$$(z_1, t_1) * (z_2, t_2) = (z_1 + z_2, t_1 + t_2 + 2\operatorname{Im}[z_1 \cdot \bar{z}_2]).$$

Da identificação

$$(z, t) \in \mathcal{H} \iff \mathbf{w} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{|z|^2}{2} + it \end{bmatrix} \in \partial\mathfrak{H}^2,$$

vemos que a fronteira do plano hiperbólico também pode ser vista como a compactificação em um ponto do grupo de Heisenberg.

4.4 Subvariedades Totalmente Geodésicas

4.4.1 Subvariedades Totalmente Geodésicas Holomorfas

Seja V um subespaço complexo de $\mathbb{C}^{2,1}$, de dimensão complexa $m + 1$, com $m = 1$, ou 2 . A interseção da projetivização de V , descrita na seção 4.1, com o plano hiperbólico complexo, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, produz uma cópia de um espaço hiperbólico complexo, nesse caso $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ ou $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, mergulhado em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, que é uma subvariedade totalmente geodésica, o que significa que o subespaço $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1$ ou $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ contém todas as geodésicas do plano $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ que são tangentes a si. O que temos é que

$$\mathbb{P}(V \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cong \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^1 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(V \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cong \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$$

é uma subvariedade totalmente geodésica que é denominada *subvariedade totalmente geodésica holomorfa* do plano hiperbólico complexo, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

Denominamos a fronteira ideal de uma subvariedade totalmente geodésica holomorfa como uma \mathbb{C}^m -cadeia. No nosso caso, as \mathbb{C}^2 -cadeias são denominadas *hiperplanos complexos* e as \mathbb{C}^1 -cadeias são denominadas apenas *cadeias*.

4.4.2 Subvariedades Totalmente Geodésicas Totalmente Reais

Seja, agora, V um subespaço real de $\mathbb{C}^{2,1}$ de dimensão real $m + 1$, com $m = 1$, ou 2 . A projetivização de V , descrita na seção 4.1, intersectada com o plano hiperbólico complexo, $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, produz uma cópia de um espaço hiperbólico real, que denotaremos aqui $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1$ ou $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, mergulhado em $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, que é uma subvariedade totalmente geodésica. Ou seja,

$$\mathbb{P}(V \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cong \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1 \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}(V \setminus \{0\}) \cap \mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2 \cong \mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$$

é uma subvariedade totalmente geodésica denominada *subvariedade totalmente geodésica totalmente real*, ou \mathbb{R} -planos, de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. A fronteira ideal de um \mathbb{R} -plano, $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^2$, é um \mathbb{R} -círculo.

Os subespaços $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^1$ são as geodésicas do plano hiperbólico complexo.

4.4.3 Cadeias e \mathbb{R} -círculos

Daremos uma breve descrição no grupo de Heisenberg das cadeias e \mathbb{R} -círculos na fronteira do plano hiperbólico complexo, $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

As cadeias que contém o ponto ideal são denominadas cadeias infinitas e as cadeias que não o contém são cadeias finitas.

As cadeias infinitas são retas euclidianas em $\mathbb{C} \times \mathbb{R}$ ortogonais ao plano \mathbb{C} . As cadeias finitas são elipses cuja projeção em \mathbb{C} é uma circunferência.

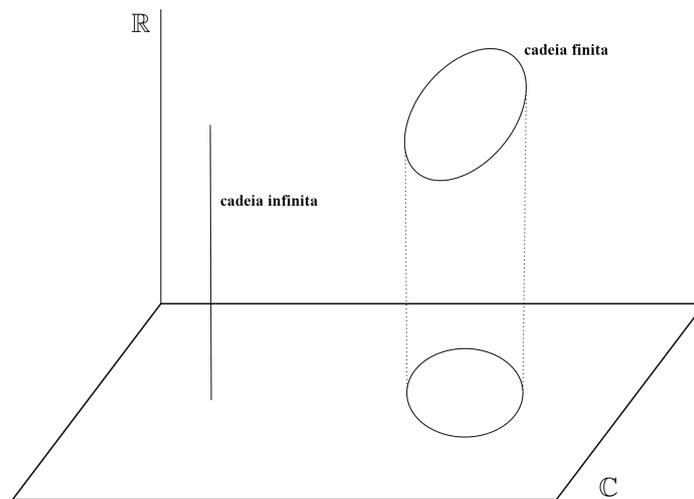


Figura 4.1: Representação de cadeias no grupo de Heisenberg.

De maneira análoga às cadeias, os \mathbb{R} -círculos são denominados infinitos ou finitos caso contenham ou não o ponto ideal, respectivamente.

Os \mathbb{R} -círculos infinitos são retas euclidianas não ortogonais ao plano \mathbb{C} . Já os \mathbb{R} -círculos finitos são determinados pela equação

$$\operatorname{Re} \left[\frac{2z}{1 + |z|^2 + it} \right] = 0,$$

para os pontos $(z, t) \in \mathcal{H}$.

A projeção de um \mathbb{R} -círculo finito no plano \mathbb{C} é a Lemniscata de Bernoulli dada pela equação

$$|z|^4 + \operatorname{Re}[z^2] = 0,$$

onde $z \in \mathbb{C}$.

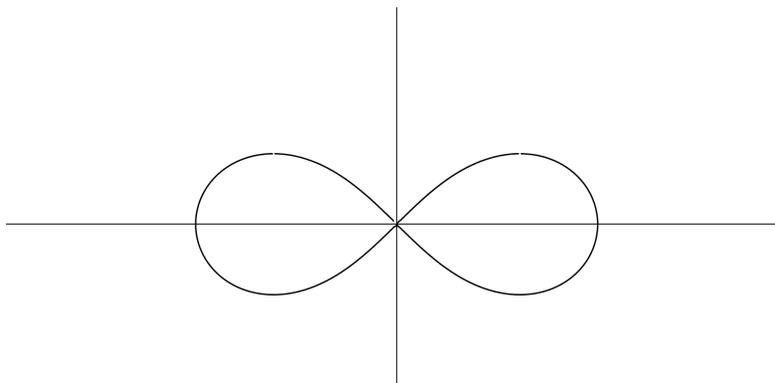


Figura 4.2: Projção de um \mathbb{R} -círculo finito no plano \mathbb{C} .

4.5 A Razão Cruzada Complexa

Definimos a *razão cruzada complexa* de uma quádrupla ordenada de pontos (z_1, z_2, z_3, z_4) na fronteira do plano hiperbólico, $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, da seguinte maneira:

Definição 4.5.1. Sejam $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e consideremos os vetores nulos $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ e \mathbf{z}_4 em $\mathbb{C}^{2,1}$ correspondendo à z_1, z_2, z_3 e z_4 , respectivamente. A *razão cruzada complexa* da quádrupla (z_1, z_2, z_3, z_4) é dada por

$$\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle}.$$

O conceito de razão cruzada complexa, que foi apresentado por Korányi e Riemann (e por isso, também é conhecida como *razão cruzada complexa de Korányi-Riemann*), é uma generalização da razão cruzada de uma quádrupla de números complexos, apresentada na seção 2.4, e um importante invariante geométrico de uma quádrupla de pontos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

A razão cruzada complexa satisfaz algumas propriedades interessantes. As apresentaremos a seguir:

Propriedade 4.5.2. Se \mathbf{f} é uma isometria do plano hiperbólico complexo, isto é, $\mathbf{f} \in PU(2, 1)$, então

$$\mathbb{X}\{\mathbf{f}(z_1), \mathbf{f}(z_2), \mathbf{f}(z_3), \mathbf{f}(z_4)\} = \mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}.$$

Demonstração. Se $\mathbf{f} \in PU(2, 1)$, então \mathbf{f} está identificada por uma aplicação linear unitária $f \in U(2, 1)$, da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}(z_i) = \mathbb{P}(f(\mathbf{z}_i)), \text{ onde } z_i = \mathbb{P}(\mathbf{z}_i), \text{ com } \mathbf{z}_i \in \mathbb{C}^{2,1}, \text{ para } i = 1, \dots, 4.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \mathbb{X}\{\mathbf{f}(z_1), \mathbf{f}(z_2), \mathbf{f}(z_3), \mathbf{f}(z_4)\} &= \frac{\langle f(\mathbf{z}_3), f(\mathbf{z}_1) \rangle \cdot \langle f(\mathbf{z}_4), f(\mathbf{z}_2) \rangle}{\langle f(\mathbf{z}_4), f(\mathbf{z}_1) \rangle \cdot \langle f(\mathbf{z}_3), f(\mathbf{z}_2) \rangle} \\ &= \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle} \\ &= \mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}. \end{aligned}$$

□

Considerando a caracterização que fizemos para a fronteira do plano hiperbólico na subseção 4.3.2, onde identificamos pontos no grupo de Heisenberg com pontos no domínio de Siegel da seguinte maneira:

$$(z, t) \in \mathcal{H} \iff \mathbf{w} = \begin{bmatrix} z \\ \frac{|z|^2}{2} + it \end{bmatrix} \in \partial\mathfrak{H}^2,$$

e, identificando o domínio de Siegel com a bola unitária através da transformação de Cayley, temos as seguintes propriedades:

Propriedade 4.5.3. *Se z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a uma cadeia, então $\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \in \mathbb{R}$. Por exemplo, dados quatro pontos com coordenadas de Heisenberg como a seguir, temos*

$$\mathbb{X}\{\infty, (0, 0), (0, 1), (0, t)\} = t.$$

Demonstração. Considerando a base \hat{E} , descrita na subseção 4.2.1, obtemos os seguintes levantamentos para os pontos $\infty, (0, 0), (0, 1)$ e $(0, t)$:

$$\begin{aligned} \infty &\mapsto \mathbf{z}_1 = [\tilde{p}_\infty]_{\hat{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; & (0,0) &\mapsto \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ (0,1) &\mapsto \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}; & (0,t) &\mapsto \mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ it \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com isso, e usando a expressão da forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ na base \hat{E} , que é dada por $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_3 - z_3 \bar{w}_2$, temos

$$\mathbb{X}\{\infty, (0,0), (0,1), (0,t)\} = \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle} = \frac{(-1) \cdot (-it)}{(-1) \cdot (-i)} = t.$$

□

Propriedade 4.5.4. *Se z_1, z_2, z_3 e z_4 pertencem a um \mathbb{R} -círculo, então $\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} > 0$. Por exemplo, dados quatro pontos com coordenadas de Heisenberg como a seguir, temos:*

$$\mathbb{X}\{\infty, (0,0), (0,1), (r,0)\} = r^2.$$

Demonstração. Considerando novamente a base \hat{E} obtemos os seguintes levantamentos para os pontos $\infty, (0,0), (1,0)$ e $(r,0)$:

$$\begin{aligned} \infty &\mapsto \mathbf{z}_1 = [\tilde{p}_\infty]_{\hat{E}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}; & (0,0) &\mapsto \mathbf{z}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}; \\ (1,0) &\mapsto \mathbf{z}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}; & (r,0) &\mapsto \mathbf{z}_4 = \begin{bmatrix} r \\ \frac{r^2}{2} \\ 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Com isso, e usando, novamente, a expressão da forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ dada por $\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle = z_1 \bar{w}_1 - z_2 \bar{w}_3 - z_3 \bar{w}_2$, temos

$$\mathbb{X}\{\infty, (0, 0), (1, 0), (r, 0)\} = \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle} = \frac{(-1) \cdot \left(-\frac{r^2}{2}\right)}{(-1) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)} = r^2.$$

□

Temos ainda propriedades de Simetria e de Produtos Cíclicos da razão cruzada complexa.

Propriedade 4.5.5 (Propriedades de Simetria). *A razão cruzada complexa satisfaz às seguintes relações sob as permutações de S_4 , preservando-se a partição $\{\{1, 2\}, \{3, 4\}\}$:*

$$\begin{aligned} \mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} &= \mathbb{X}\{z_2, z_1, z_4, z_3\} \\ &= \overline{\mathbb{X}\{z_3, z_4, z_1, z_2\}} \\ &= \overline{\mathbb{X}\{z_4, z_3, z_2, z_1\}} \\ &= \mathbb{X}\{z_2, z_1, z_3, z_4\}^{-1} \\ &= \mathbb{X}\{z_1, z_2, z_4, z_3\}^{-1} \\ &= \overline{\mathbb{X}\{z_4, z_3, z_1, z_2\}}^{-1} \\ &= \overline{\mathbb{X}\{z_3, z_4, z_2, z_1\}}^{-1}. \end{aligned}$$

Demonstração. Vamos verificar apenas algumas das igualdades, pois a verificação é análoga para as demais.

Como $\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} = \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle}$, e vale $\overline{\langle \mathbf{z}, \mathbf{w} \rangle} = \langle \mathbf{w}, \mathbf{z} \rangle$, pois $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é uma forma hermitiana. Temos

$$\begin{aligned} \mathbb{X}\{z_2, z_1, z_4, z_3\} &= \frac{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle}{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle} = \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle} = \mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \\ \overline{\mathbb{X}\{z_3, z_4, z_1, z_2\}} &= \overline{\left(\frac{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle}{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle} \right)} = \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle}{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle} = \mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_4, z_3\}^{-1} &= \left(\frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle} \right)^{-1} = \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle} = \mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \\ \overline{\mathbb{X}\{z_4, z_3, z_1, z_2\}}^{-1} &= \overline{\left(\frac{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle}{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle} \right)^{-1}} = \frac{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle} = \mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}.\end{aligned}$$

□

Da mesma forma, temos as seguintes simetrias:

$$\begin{aligned}\mathbb{X}\{z_1, z_3, z_2, z_4\} &= \mathbb{X}\{z_3, z_1, z_4, z_2\} & \mathbb{X}\{z_2, z_3, z_1, z_4\} &= \mathbb{X}\{z_3, z_2, z_4, z_1\} \\ &= \overline{\mathbb{X}\{z_2, z_4, z_1, z_3\}} & &= \overline{\mathbb{X}\{z_1, z_4, z_2, z_3\}} \\ &= \overline{\mathbb{X}\{z_4, z_2, z_3, z_1\}} & &= \overline{\mathbb{X}\{z_4, z_1, z_3, z_2\}} \\ &= \mathbb{X}\{z_3, z_1, z_2, z_4\}^{-1} & &= \mathbb{X}\{z_3, z_2, z_1, z_4\}^{-1} \\ &= \mathbb{X}\{z_1, z_3, z_4, z_2\}^{-1} & &= \mathbb{X}\{z_2, z_3, z_4, z_1\}^{-1} \\ &= \overline{\mathbb{X}\{z_4, z_2, z_1, z_3\}}^{-1} & &= \overline{\mathbb{X}\{z_4, z_1, z_2, z_3\}}^{-1} \\ &= \overline{\mathbb{X}\{z_2, z_4, z_3, z_1\}}^{-1} & &= \overline{\mathbb{X}\{z_1, z_4, z_3, z_2\}}^{-1}.\end{aligned}$$

Assim, vemos que as 24 razões cruzadas possíveis, dependem apenas de 3 delas, a saber,

$$\mathbb{X}_1 := \mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}, \quad \mathbb{X}_2 := \mathbb{X}\{z_1, z_3, z_2, z_4\} \quad \text{e} \quad \mathbb{X}_3 := \mathbb{X}\{z_2, z_3, z_1, z_4\}.$$

Propriedade 4.5.6 (Produtos Cíclicos). *A razão cruzada complexa satisfaz às seguintes igualdades:*

$$\begin{aligned}|\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}\mathbb{X}\{z_1, z_4, z_2, z_3\}\mathbb{X}\{z_1, z_3, z_4, z_2\}| &= \\ |\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}\mathbb{X}\{z_4, z_2, z_1, z_3\}\mathbb{X}\{z_3, z_2, z_4, z_1\}| &= \\ |\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}\mathbb{X}\{z_2, z_4, z_3, z_1\}\mathbb{X}\{z_4, z_1, z_3, z_2\}| &= \\ |\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}\mathbb{X}\{z_2, z_3, z_1, z_4\}\mathbb{X}\{z_3, z_1, z_2, z_4\}| &= 1.\end{aligned}$$

Demonstração. Novamente, verificaremos apenas uma das igualdades, pois a verificação das demais é semelhante.

$$\begin{aligned}&|\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}\mathbb{X}\{z_1, z_4, z_2, z_3\}\mathbb{X}\{z_1, z_3, z_4, z_2\}| \\ &= \left| \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle} \cdot \frac{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \rangle}{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle} \cdot \frac{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle}{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_3 \rangle} \right|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \left| \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle}{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_3 \rangle} \right| = \left| \frac{\overline{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle} \cdot \overline{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_3 \rangle}}{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_3 \rangle} \right| = \left| \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle}{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle \cdot \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_3 \rangle} \right| \\
 &= \left| \frac{\overline{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle}}{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle} \right| \cdot \left| \frac{\overline{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_3 \rangle}}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_3 \rangle} \right| = 1.
 \end{aligned}$$

□

Observação 4.5.7. Os produtos cíclicos funcionam da mesma forma para a razão cruzada clássica. De fato, para a razão cruzada usada no capítulo 3, por exemplo, temos

$$\begin{aligned}
 [z_1, z_2, z_3, z_4][z_1, z_4, z_2, z_3][z_1, z_3, z_4, z_2] &= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} \cdot \frac{z_1 - z_2}{z_1 - z_4} \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_4}{z_1 - z_3} \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} \\
 &= \frac{z_2 - z_4}{z_3 - z_4} \cdot \frac{z_4 - z_3}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_3 - z_2}{z_4 - z_2} \\
 &= -\frac{z_4 - z_2}{z_3 - z_4} \cdot \frac{z_3 - z_4}{z_2 - z_3} \cdot \frac{z_2 - z_3}{z_4 - z_2} \\
 &= -1.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$|[z_1, z_2, z_3, z_4][z_1, z_4, z_2, z_3][z_1, z_3, z_4, z_2]| = 1.$$

4.6 O Invariante Angular de Cartan

Associado a uma tripla de pontos na fronteira do plano hiperbólico complexo, $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, podemos associar um invariante que nos fornece a informação de que a tripla está contida em uma cadeia ou em um \mathbb{R} -círculo.

Sejam z_1, z_2 e z_3 uma tripla ordenada de pontos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, com levantamentos $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2$ e \mathbf{z}_3 em $\mathbb{C}^{2,1}$, respectivamente. O produto hermitiano triplo é dado por

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle \in \mathbb{C}.$$

A matriz de Gram é dada por

$$G = (\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle) = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_1 \rangle & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1 \rangle & \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_2 \rangle & \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle & \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle & \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_3 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_1 \rangle & 0 & \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle \\ \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle & \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle & 0 \end{bmatrix},$$

cujo determinante é

$$\det G = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle + \overline{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle} \cdot \overline{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle} \cdot \overline{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle} = 2\operatorname{Re}[\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle].$$

Como a forma hermitiana $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tem assinatura $(2, 1)$, temos $\operatorname{Re}[\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle] \leq 0$. Além disso, se substituirmos cada levantamento \mathbf{z}_i por outro representante $\tilde{\mathbf{z}}_i = \lambda_i \mathbf{z}_i$, com $\lambda_i \in \mathbb{C}^*$, $i = 1, 2, 3$, o produto hermitiano triplo fica

$$\langle \tilde{\mathbf{z}}_1, \tilde{\mathbf{z}}_2, \tilde{\mathbf{z}}_3 \rangle = |\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3|^2 \cdot \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle.$$

Definimos, então, o *invariante angular de Cartan* por

$$\mathbb{A}(z_1, z_2, z_3) = \arg(-\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle),$$

que independe da escolha dos levantamentos e satisfaz

$$-\frac{\pi}{2} \leq \mathbb{A}(z_1, z_2, z_3) \leq \frac{\pi}{2}.$$

O invariante angular de Cartan é o único invariante de uma tripla de pontos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, no seguinte sentido:

Teorema 4.6.1. *Sejam z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 duas triplas de pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, tais que*

$$\mathbb{A}(z_1, z_2, z_3) = \mathbb{A}(w_1, w_2, w_3).$$

Então, existe isometria $\mathbf{f} \in PU(2, 1)$ tal que $\mathbf{f}(z_i) = w_i$, para $i = 1, 2, 3$. Além disso, se z_1, z_2, z_3

e w_1, w_2, w_3 não pertencem a uma mesma cadeia, tal isometria é única.

Demonstração. Tomando levantamentos $\mathbf{z}_i, \mathbf{w}_i \in \mathbb{C}^{2,1}$ de z_i, w_i , para $i = 1, 2, 3$, respectivamente. Suponhamos, inicialmente, que z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 não pertençam a uma mesma cadeia, então seus levantamentos $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ são linearmente independentes e $\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle \neq 0$, se $i \neq j$, da mesma forma, $\langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle \neq 0$, se $i \neq j$.

Podemos, então, reescalar os levantamentos de uma maneira adequada para

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle = \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2 \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w}_3 \rangle = 1$$

e

$$\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle = \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3 \rangle = e^{i\theta},$$

onde $\theta = \mathbb{A}(z_1, z_2, z_3) = \mathbb{A}(w_1, w_2, w_3)$.

Seja f uma aplicação que associa $\mathbf{z}_i \mapsto \mathbf{w}_i$, então g é unitária, pois

$$\langle f(\mathbf{z}_i), f(\mathbf{z}_j) \rangle = \langle \mathbf{w}_i, \mathbf{w}_j \rangle = \langle \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle, \text{ para } i = 1, 2, 3,$$

e se estende a um automorfismo de $\mathbb{C}^{2,1}$. A aplicação projetiva $\mathbf{f} \in PU(2, 1)$ associada é a isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ procurada.

Agora, se z_1, z_2, z_3 e w_1, w_2, w_3 pertencem a uma mesma cadeia em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, existe uma isometria entre os planos gerados por $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3$ e $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3$, mas ao estendermos essa isometria a $\mathbb{C}^{2,1}$, não podemos garantir sua unicidade. \square

O invariante angular de Cartan também satisfaz:

Proposição 4.6.2. *Se \mathbf{f} é uma isometria de $\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, isto é, $\mathbf{f} \in PU(2, 1)$, então*

$$\mathbb{A}(\mathbf{f}(z_1), \mathbf{f}(z_2), \mathbf{f}(z_3)) = \mathbb{A}(z_1, z_2, z_3),$$

para toda tripla de pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$.

Demonstração. Se $\mathbf{f} \in PU(2, 1)$, sabemos que \mathbf{f} está identificada por uma aplicação linear unitária $f \in U(2, 1)$, da seguinte maneira:

$$\mathbf{f}(z_i) = \mathbb{P}(f(\mathbf{z}_i)), \text{ onde } z_i = \mathbb{P}(\mathbf{z}_i), \text{ com } \mathbf{z}_i \in \mathbb{C}^{2,1}, \text{ para } i = 1, 2, 3.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(\mathbf{f}(z_1), \mathbf{f}(z_2), \mathbf{f}(z_3)) &= \arg(-\langle f(\mathbf{z}_1), f(\mathbf{z}_2), f(\mathbf{z}_3) \rangle) \\ &= \arg(-\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle) \\ &= \mathbb{A}(z_1, z_2, z_3). \end{aligned}$$

□

Propriedade 4.6.3. *Uma tripla de pontos distintos z_1, z_2, z_3 em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ está em uma cadeia se, e somente se, $\mathbb{A}(z_1, z_2, z_3) = \pm \frac{\pi}{2}$.*

Proposição 4.6.4. *Uma tripla de pontos distintos z_1, z_2, z_3 em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ está em um \mathbb{R} -círculo se, e somente se, $\mathbb{A}(z_1, z_2, z_3) = 0$.*

O invariante angular de Cartan se relaciona com a razão cruzada complexa da seguinte maneira:

Propriedade 4.6.5. *Os produtos cíclicos da razão cruzada complexa estão relacionados com o invariante angular de Cartan por:*

$$\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}\mathbb{X}\{z_1, z_4, z_2, z_3\}\mathbb{X}\{z_1, z_3, z_4, z_2\} = e^{2i\mathbb{A}(z_2, z_3, z_4)}.$$

Demonstração. Se z_1, z_2, z_3, z_4 pertencem a uma cadeia em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, pela propriedade 4.5.3, temos que a razão cruzada desses pontos é um número real. Pela propriedade 4.5.6, temos que

$$\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}\mathbb{X}\{z_1, z_4, z_2, z_3\}\mathbb{X}\{z_1, z_3, z_4, z_2\} = \pm 1.$$

e, como $-\frac{\pi}{2} \leq \mathbb{A}(z_2, z_3, z_4) \leq \frac{\pi}{2}$, para todos $z_2, z_3, z_4 \in \partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, temos que

$$-\pi \leq 2\mathbb{A}(z_2, z_3, z_4) \leq \pi,$$

com isso $e^{2i\mathbb{A}(z_2, z_3, z_4)} = -1$, mostrando que

$$\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}\mathbb{X}\{z_1, z_4, z_2, z_3\}\mathbb{X}\{z_1, z_3, z_4, z_2\} = e^{2i\mathbb{A}(z_2, z_3, z_4)}.$$

Agora, se z_1, z_2, z_3, z_4 não pertencem a uma mesma cadeia em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, assim como na demonstração do Teorema 4.6.1, podemos tomar levantamentos $\mathbf{z}_i \in \mathbb{C}^{2,1}$ de z_i , para $i = 1, \dots, 4$, de maneira que $\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle = \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle = 1$ e $\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \rangle = e^{i\theta}$, onde $\theta = \mathbb{A}(z_2, z_3, z_4)$.

Assim,

$$\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}\mathbb{X}\{z_1, z_4, z_2, z_3\}\mathbb{X}\{z_1, z_3, z_4, z_2\} = \frac{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle}{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_2 \rangle} \cdot \frac{\langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \rangle}{\langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_3 \rangle} = \frac{e^{i\theta}}{e^{-i\theta}} = e^{2i\theta},$$

portanto,

$$\mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\}\mathbb{X}\{z_1, z_4, z_2, z_3\}\mathbb{X}\{z_1, z_3, z_4, z_2\} = e^{2i\mathbb{A}(z_2, z_3, z_4)}.$$

□

4.7 Uma Caracterização para Quádruplas de Pontos na Fronteira do Plano Hiperbólico, $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$

Consideremos z_1, z_2, z_3, z_4 uma quádrupla ordenada de pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e sejam \mathbf{z}_i , para $i = 1, \dots, 4$, os seus respectivos levantamentos em $\mathbb{C}^{2,1}$. Como esse vetores são vetores nulos em $\mathbb{C}^{2,1}$, temos que $\langle \mathbf{z}_i, \mathbf{z}_j \rangle \neq 0$, para $i \neq j$, então, podemos reescalar os levantamentos de maneira que

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2 \rangle = \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3 \rangle = \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4 \rangle = 1 \quad \text{e} \quad |\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle| = 1.$$

Para isso, se $a = \frac{1}{\sqrt{|\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle|}}$, basta tomarmos $\tilde{\mathbf{z}}_1 = a\mathbf{z}_1$, $\tilde{\mathbf{z}}_2 = \frac{1}{a}\mathbf{z}_2$, $\tilde{\mathbf{z}}_3 = a\mathbf{z}_3$ e $\tilde{\mathbf{z}}_4 = \frac{1}{a}\mathbf{z}_4$.

Com isso, a matriz de Gram associada a $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$ é dada por

$$G = \begin{bmatrix} 0 & 1 & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle & \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle \\ 1 & 0 & 1 & \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle \\ \langle \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_1 \rangle & 1 & 0 & 1 \\ \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_1 \rangle & \langle \mathbf{z}_4, \mathbf{z}_2 \rangle & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

que é chamada de matriz de Gram *normalizada*.

Temos que se z_1, z_2, z_3, z_4 e w_1, w_2, w_3, w_4 são duas quádruplas ordenadas de pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ e G e G' são as respectivas matrizes de Gram normalizadas associadas, então existe uma aplicação $\mathbf{f} \in PU(2, 1)$ tal que $\mathbf{f}(z_i) = w_i$, para $i = 1, \dots, 4$, se, e somente se, $G = G'$.

O determinante da matriz de Gram normalizada associado a uma quádrupla de pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ é dado por

$$-2\operatorname{Re}[\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle] - 2\operatorname{Re}[\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle \overline{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle}] - 2\operatorname{Re}[\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle \overline{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle} \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle] + |\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle|^2 + |\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle|^2 + 1.$$

Considerando, ainda, a quádrupla ordenada de pontos distintos z_1, z_2, z_3, z_4 em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, e a matriz de Gram normalizada associada a essa quádrupla, temos as seguintes expressões para o invariante angular de Cartan das triplas

$$\begin{aligned} \mathbb{A}(z_1, z_2, z_3) &= \arg(-\overline{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle}), & \mathbb{A}(z_1, z_2, z_4) &= \arg(-\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle \overline{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle}), \\ \mathbb{A}(z_1, z_3, z_4) &= \arg(-\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle \overline{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle}), & \mathbb{A}(z_2, z_3, z_4) &= \arg(-\overline{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle}). \end{aligned}$$

As razões cruzadas \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 apresentadas na seção 4.5 que, lembramos, são dadas por

$$\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}\{z_1, z_2, z_3, z_4\} \quad \text{e} \quad \mathbb{X}_2 = \mathbb{X}\{z_1, z_3, z_2, z_4\},$$

ao considerarmos a matriz de Gram normalizada, ficam

$$\mathbb{X}_1 = \frac{\overline{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle} \overline{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle}}{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle} \quad \text{e} \quad \mathbb{X}_2 = \frac{1}{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle}.$$

Combinando as expressões para o invariante angular de Cartan da tripla z_1, z_2 e z_3 e para

as razões cruzadas, \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 , obtemos

$$\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle = -e^{-i\mathbb{A}}, \quad \langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle = \frac{1}{\overline{\mathbb{X}_2}} \quad \text{e} \quad \langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle = -\frac{\overline{\mathbb{X}_1}e^{i\mathbb{A}}}{\overline{\mathbb{X}_2}},$$

onde $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_1, z_2, z_3)$.

Com isso, temos uma nova maneira de expressar a matriz de Gram normalizada associada à quadrupla z_1, z_2, z_3, z_4 , cujo determinante, pode escrito como

$$\det G = \frac{1}{|\mathbb{X}_2|^2} [-2\operatorname{Re}[\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2] - 2\operatorname{Re}[\mathbb{X}_1\overline{\mathbb{X}_2}e^{-i2\mathbb{A}}] + |\mathbb{X}_1|^2 + |\mathbb{X}_2|^2 + 1].$$

Com o desenvolvimento que foi feito até aqui, temos a seguinte proposição:

Proposição 4.7.1. *Os números \mathbb{X}_1 , \mathbb{X}_2 e \mathbb{A} determinam uma única classe de congruência de quádruplas ordenadas de pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ em relação à ação diagonal do grupo $PU(2, 1)$, isto é, dadas duas quádruplas ordenadas de pontos distintos z_1, z_2, z_3, z_4 e w_1, w_2, w_3, w_4 em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, existe uma transformação $\mathbf{f} \in PU(2, 1)$, tal que $\mathbf{f}(z_i) = w_i$, para $i = 1, \dots, 4$, se, e somente se,*

$$\begin{aligned} \mathbb{X}_1(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \mathbb{X}_1(w_1, w_2, w_3, w_4), \\ \mathbb{X}_2(z_1, z_2, z_3, z_4) &= \mathbb{X}_2(w_1, w_2, w_3, w_4), \\ \mathbb{A}(z_1, z_2, z_3) &= \mathbb{A}(w_1, w_2, w_3). \end{aligned}$$

Sabemos que o determinante da matriz de Gram é menor do que ou igual a zero. Como estamos considerando quádruplas de pontos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$, temos que quaisquer levantamentos $\mathbf{z}_1, \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_3, \mathbf{z}_4$ são linearmente dependentes, isso implica que $\det G = 0$, com isso, temos o seguinte resultado:

Proposição 4.7.2. *Seja z_1, z_2, z_3, z_4 uma quádrupla ordenada de pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$. Então,*

- i. Os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 estão em uma cadeia se, e somente se, $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{A} = \pm\frac{\pi}{2}$ e $(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + 1)^2 = 0$.*

ii. Os pontos z_1, z_2, z_3 e z_4 estão em um \mathbb{R} -círculo se, e somente se, $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2 \in \mathbb{R}$, $\mathbb{A} = 0$ e

$$(\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2)^2 - 2(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) + 1 = 0.$$

Onde $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}(z_1, z_2, z_3, z_4)$, $\mathbb{X}_2 = \mathbb{X}(z_1, z_3, z_2, z_4)$ e $\mathbb{A} = \mathbb{A}(z_1, z_2, z_3)$.

Demonstração. Suponhamos primeiro que a quádrupla de pontos z_1, z_2, z_3, z_4 esteja em uma cadeia ou em um \mathbb{R} -círculo. Como $\det G = 0$ e, em ambos os casos, \mathbb{X}_1 e \mathbb{X}_2 são reais, temos

$$\begin{aligned} -2\operatorname{Re}[\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2] - 2\operatorname{Re}[\mathbb{X}_1 \overline{\mathbb{X}_2} e^{-i2\mathbb{A}}] + |\mathbb{X}_1|^2 + |\mathbb{X}_2|^2 + 1 &= 0 \\ \Downarrow \\ -2(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) - 2(\mathbb{X}_1 \mathbb{X}_2 e^{-i2\mathbb{A}}) + \mathbb{X}_1^2 + \mathbb{X}_2^2 + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Com isso, se os pontos estão em uma cadeia, $\mathbb{A} = \pm \frac{\pi}{2}$, e temos

$$\begin{aligned} -2(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) + 2(\mathbb{X}_1 \mathbb{X}_2) + \mathbb{X}_1^2 + \mathbb{X}_2^2 + 1 &= 0 \\ \Downarrow \\ (\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2 + 1)^2 &= 0. \end{aligned}$$

Se os pontos estão em um \mathbb{R} -círculo, temos $\mathbb{A} = 0$, assim

$$\begin{aligned} -2(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) - 2(\mathbb{X}_1 \mathbb{X}_2) + \mathbb{X}_1^2 + \mathbb{X}_2^2 + 1 &= 0 \\ \Downarrow \\ (\mathbb{X}_1 - \mathbb{X}_2)^2 - 2(\mathbb{X}_1 + \mathbb{X}_2) + 1 &= 0. \end{aligned}$$

Por outro lado, se $\mathbb{X}_1, \mathbb{X}_2$ não forem reais, os pontos z_1, z_2, z_3, z_4 não pertencem nem a uma cadeia, nem a um \mathbb{R} -círculo.

Se $\mathbb{A} = \pm \frac{\pi}{2}$, considerando

$$\mathbb{A}(z_1, z_2, z_4) = \arg(-\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle \overline{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle}),$$

como $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle = \frac{1}{\mathbb{X}_2}$ e $\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle = -\frac{\mathbb{X}_1 e^{i\mathbb{A}}}{\mathbb{X}_2}$, concluímos que $\mathbb{A}(z_1, z_2, z_4) = \mathbb{A} = \pm \frac{\pi}{2}$. Assim, pontos os z_1, z_2, z_3 pertencem a uma cadeia e z_1, z_2, z_4 também pertencem a uma cadeia. Mas,

por dois pontos distintos em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{C}}^2$ passa uma única cadeia, portanto, z_1, z_2, z_3, z_4 pertencem a uma mesma cadeia.

Agora, se $\mathbb{A} = 0$, considerando

$$\mathbb{A}(z_1, z_3, z_4) = \arg(-\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle \overline{\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle}), \text{ e } \mathbb{A}(z_2, z_3, z_4) = \arg(-\overline{\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle}).$$

Novamente, como $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_3 \rangle = -e^{-i\mathbb{A}}$, $\langle \mathbf{z}_1, \mathbf{z}_4 \rangle = \frac{1}{\mathbb{X}_2}$ e $\langle \mathbf{z}_2, \mathbf{z}_4 \rangle = -\frac{\mathbb{X}_1 e^{i\mathbb{A}}}{\mathbb{X}_2}$, temos

$$\mathbb{A}(z_1, z_2, z_3) = \mathbb{A}(z_1, z_2, z_4) = \mathbb{A}(z_1, z_3, z_4) = \mathbb{A}(z_2, z_3, z_4) = 0,$$

o que significa cada tripla está em um \mathbb{R} -círculo. Como o $\det G = 0$, temos que z_1, z_2, z_3, z_4 estão num espaço tridimensional, estando todos, portanto, no mesmo \mathbb{R} -círculo. \square

Capítulo 5

Dinâmica Unidimensional

5.1 A Razão Cruzada em Dinâmica Unidimensional

Uma das principais questões no campo de Sistemas Dinâmicos é avaliar quando dois sistemas apresentam o mesmo comportamento. Uma maneira de se avaliar isso é através da *equivalência topológica*. Duas aplicações do $f, g : N \rightarrow N$ (ao longo deste capítulo consideramos sempre que N é ou o intervalo $[-1, 1]$ ou o círculo $S^1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; x^2 + y^2 = 1\} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$) são ditas topologicamente equivalentes, ou conjugadas, se existe um homeomorfismo $h : N \rightarrow N$ tal que $h \circ f = g \circ h$. Entretanto, em dinâmica unidimensional, é interessante estudar primeiro uma noção mais fraca de equivalência, a noção de *equivalência combinatorial*. Dizer que duas aplicações $f, g : N \rightarrow N$ são combinatorialmente equivalentes, de maneira informal, significa dizer que existe uma “aplicação” sobrejetiva $h : N \rightarrow N$, que preserva a ordem, com a propriedade que a imagem de um ponto ou é um único ponto ou um único intervalo fechado tal que $h \circ g = f \circ h$. Essa “aplicação” é um *blow-up*, que pode colapsar alguns intervalos em pontos ou explodir alguns pontos em intervalos.

Poincaré (1880) mostrou que qualquer homeomorfismo do círculo, sem pontos periódicos, é combinatorialmente equivalente a uma rotação. Mais ainda, dois homeomorfismos são combinatorialmente equivalentes se, e somente se, eles possuem o mesmo *número de rotação*. O

número de rotação de um homeomorfismo do círculo, f , que preserva a orientação, é dado por

$$\rho(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F^n(x) - x}{n},$$

onde $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é um levantamento de f . Poincaré mostrou que esse limite sempre existe e independe da escolha do ponto x .

A dinâmica de um homeomorfismo definido no círculo com número de rotação racional é simples, pois suas órbitas são periódicas ou assintóticas a órbitas periódicas. O interessante é quando o número de rotação é irracional, pois, nesse caso, o homeomorfismo não possui pontos periódicos e suas órbitas ou são densas em S^1 , ou estão contidas em um conjunto de Cantor, ou são assintóticas a um conjunto de Cantor.

Denjoy (1932) provou que qualquer difeomorfismo do círculo de classe C^2 , sem pontos periódicos, é topologicamente equivalente a uma rotação. Se dois mapas são combinatorialmente equivalentes sob quais circunstâncias eles serão topologicamente equivalentes? Essa questão está intimamente relacionada à existência de *intervalos errantes*. Um intervalo é dito errante se todas as suas iteradas de ordem grande, sob uma aplicação, são disjuntas e essas iteradas não tendem a uma órbita periódica.

Apesar da não existência de intervalos errantes ser uma propriedade topológica da aplicação, isso não acontece para uma grande classe de aplicações suaves. Com isso, a atenção é voltada a aplicações com certa suavidade. O primeiro resultado nessa direção foi feito por Denjoy para difeomorfismos do círculo. O Teorema de Denjoy estabelece que, se $f : S^1 \rightarrow S^1$ é um difeomorfismo de classe C^1 e sua derivada possui variação limitada, então f não possui intervalos errantes. O principal argumento usado por Denjoy para essa prova foi o controle da distorção na restrição de iteradas do difeomorfismo a alguns intervalos.

Se a aplicação f possuir pontos críticos, a situação se torna ainda mais delicada. Para contornar esse problema, inicialmente, foi preciso assumir que f satisfazia a uma condição “mágica”:

$$Sf = \frac{f'''}{f'} - \frac{3}{2} \left[\frac{f''}{f'} \right]^2 < 0,$$

conhecida como derivada de Schwarz negativa. No entanto, mais tarde foi provado que essa suposição era supérflua e não tão misteriosa afinal.

A situação, agora, está completamente compreendida: aplicações unidimensionais, que satisfazem a algumas condições de suavidade e não possuem pontos críticos planos, não possuem intervalos errantes (um ponto crítico de f é plano se todas as derivadas de f se anulam nesse ponto). Para provar isso, utiliza-se técnicas combinatórias e de distorção. O objetivo de se usar técnicas de distorção é fornecer limites para as iteradas de ordem grande. Se a aplicação possui pontos críticos, ela certamente não se aproxima de um comportamento linear, mesmo sua distorção não é limitada. Essas técnicas de distorção fornecem distorção limitada na ausência de pontos críticos e o Princípio de Koebe, que delimita a distorção “longe dos pontos críticos”. É nesse contexto que a razão cruzada é utilizada em dinâmica unidimensional.

5.2 A Razão Cruzada

A distorção de uma aplicação diferenciável f em um intervalo $T \subset N$ pode ser obtida pela razão máxima dos valores absolutos de sua derivada em dois pontos diferentes, com isso, medimos a não-linearidade de f . Outra maneira de obtermos essa distorção é considerando pares de intervalos adjacentes, $L, R \subset T$, e avaliar a razão $\mathcal{R}(f, L, R) = \frac{\mathcal{R}(f(L), f(R))}{\mathcal{R}(L, R)}$, onde $\mathcal{R}(L, R) = \frac{|L|}{|R|}$. A distorção de uma aplicação diferenciável f é limitada em um intervalo T se, e somente se, a razão $\mathcal{R}(f, L, R)$ é limitada para qualquer par de intervalos adjacentes $L, R \subset T$.

Quando a aplicação f possui pontos críticos, nem sempre conseguimos considerar a razão \mathcal{R} de um par de intervalos adjacentes, com isso, não conseguimos avaliar a sua não-linearidade. Assim, ao invés de considerarmos três pontos consecutivos, vamos considerar quatro e medir a sua posição pela sua razão cruzada. E, então, vamos avaliar como uma aplicação distorce a razão cruzada de tal configuração de quatro pontos.

Definição 5.2.1. Sejam $J \subset T$ intervalos abertos e limitados em N tais que $T \setminus J$ consiste dos intervalos L e R . Definimos a razão cruzada desses intervalos como $D(T, J) = \frac{|T||J|}{|L||R|}$.

Observe que, se $T = [a, d]$ e $J = [b, c]$, temos

$$D(T, J) = \frac{|d - a||c - b|}{|b - a||d - c|} = [a, b, c, d] - 1,$$

onde $[a, b, c, d]$ denota a razão cruzada usada no capítulo 3.

A razão cruzada $D(J, T)$ está relacionada com a métrica hiperbólica. De fato, seja T um intervalo aberto e limitado em N . Para $x, y \in T$, temos

$$\rho_T(x, y) = \log \frac{|L \cup J||J \cup R|}{|L||R|} = \log(1 + D(T, J)),$$

onde J é o intervalo $(x, y) \subset T$. Falaremos um pouco mais sobre essa métrica na propriedade 5.3.2 a seguir.

Definição 5.2.2. Se $g : T \rightarrow N$ é contínua e monótona e $J \subset T$ são intervalos abertos e limitados em N , então nós definimos a *distorção da razão cruzada* de g por

$$B(g, T, J) = \frac{D(g(T), g(J))}{D(T, J)}.$$

Se J tem um ponto de fronteira em comum com T , tomamos o $\limsup B(g, T, J_n)$, onde $\{J_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de intervalos satisfazendo $J_n \subset J_{n+1} \subset \dots \subset J$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} J_n = J$.

Se $f : I \rightarrow I$ é contínua e $f^n|_T$, onde $f^n(x) = \underbrace{f(f(\dots(f(x))))}_{n \text{ vezes}}$, é monótona, então

$$B(f^n, T, J) = B(f, T, J) \cdot B(f, f(T), f(J)) \dots B(f, f^{n-1}(T), f^{n-1}(J)) = \prod_{i=0}^{n-1} B(f, f^i(T), f^i(J)),$$

onde $J \subset T$ são intervalos abertos e limitados em I .

Definição 5.2.3. Seja $g : T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^3 . Definimos *derivada de Schwarz* de g por

$$Sg(x) = \frac{D^3g(x)}{Dg(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2g(x)}{Dg(x)} \right)^2,$$

se $Dg(x) \neq 0$.

A derivada de Schwarz satisfaz à seguinte Regra da Cadeia:

$$S(g \circ f) = Sg \circ f \cdot (Df)^2 + Sf.$$

De fato, como

$$\begin{aligned} D(g \circ f) &= Dg \circ f \cdot (Df), \\ D^2(g \circ f) &= D^2g \circ f \cdot (Df)^2 + Dg \circ f \cdot (D^2f) \text{ e} \\ D^3(g \circ f) &= D^3g \circ f \cdot (Df)^3 + 3D^2g \circ f \cdot (Df) \cdot (D^2f) + Dg \circ f \cdot (D^3f). \end{aligned}$$

Temos

$$\begin{aligned} S(g \circ f) &= \frac{D^3(g \circ f)}{D(g \circ f)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2(g \circ f)}{D(g \circ f)} \right)^2 \\ &= \frac{D^3g \circ f \cdot (Df)^3 + 3D^2g \circ f \cdot (Df) \cdot (D^2f) + Dg \circ f \cdot (D^3f)}{Dg \circ f \cdot (Df)} \\ &\quad - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2g \circ f \cdot (Df)^2 + Dg \circ f \cdot (D^2f)}{Dg \circ f \cdot (Df)} \right)^2 \\ &= \left(\frac{D^3g \circ f}{Dg \circ f} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2g \circ f}{Dg \circ f} \right)^2 \right) (Df)^2 + \frac{D^3f}{Df} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f}{Df} \right)^2 \\ &= Sg \circ f \cdot (Df)^2 + Sf. \end{aligned}$$

Vamos apresentar, agora, algumas propriedades do operador distorção B , definido acima, da derivada de Schwarz e do grupo das transformações de Möbius, que sabemos, são aplicações da forma

$$\phi(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

onde a, b, c e d são números reais tais que $ad - bc \neq 0$ e $x \in \mathbb{R}$.

Propriedade 5.2.4. *A derivada de Schwarz de uma aplicação $g : T \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é identicamente*

nula se, e somente se, g é a restrição de uma transformação de Möbius a T .

Demonstração. Suponhamos, primeiro, que g seja a restrição de uma transformação de Möbius a T , podendo assim, escrever g como

$$g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{onde } ad - bc \neq 0.$$

Como

$$Dg(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}, \quad D^2g(x) = \frac{-2c(ad - bc)}{(cx + d)^3} \quad \text{e} \quad D^3g(x) = \frac{6c^2(ad - bc)}{(cx + d)^4},$$

temos

$$Sg(x) = \frac{D^3g(x)}{Dg(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2g(x)}{Dg(x)} \right)^2 = 0, \quad \text{para todo } x \in T.$$

Por outro lado, podemos escrever Sg da seguinte maneira

$$Sg(x) = -2|Dg(x)|^{\frac{1}{2}} \cdot D^2 \left(\sqrt{\frac{1}{|Dg(x)|}} \right).$$

E, se $Sg \equiv 0$ em T , temos que

$$D^2 \left(\sqrt{\frac{1}{|Dg(x)|}} \right) = 0, \quad \text{para todo } x \in T.$$

Então, podemos escrever $\frac{1}{|Dg(x)|^{\frac{1}{2}}} = cx + d$, para $c, d \in \mathbb{R}$. E, com isso, $g(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Logo, g é a restrição de uma transformação de Möbius a T . □

5.3 Funções de Distorção Constante

Propriedade 5.3.1. *Seja $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ uma função monótona. Então $B(g, T^*, J^*) = 1$, para todos os pares de intervalos $J^* \subset T^* \subset T$, se, e somente se, g é uma restrição de uma transformação de Möbius a T .*

Demonstração. Se as componentes de $T^* \setminus J^*$ são os intervalos L e R , temos

$$B(g, T^*, J^*) = \frac{D(g(T^*), g(J^*))}{D(T^*, J^*)} = \frac{\frac{|g(T^*)||g(J^*)|}{|g(L)||g(R)|}}{\frac{|T^*||J^*|}{|L||R|}}.$$

Suponhamos que $T^* = (a, d)$ e $J^* = (b, c)$, então

$$B(g, T^*, J^*) = \frac{\frac{|g(d)-g(a)||g(c)-g(b)|}{|g(b)-g(a)||g(d)-g(c)|}}{\frac{|d-a||c-b|}{|b-a||d-c|}} = \frac{[g(a), g(b), g(c), g(d)] - 1}{[a, b, c, d] - 1}.$$

Com isso, $B(g, T^*, J^*) = 1$ se, e somente se, $[g(a), g(b), g(c), g(d)] = [a, b, c, d]$. E, sabemos que g preserva a razão cruzada se, e somente se, g é uma (restrição de) transformação de Möbius. \square

Propriedade 5.3.2. *Seja $T \subset \mathbb{R}$, um intervalo aberto e limitado. Para $x, y \in T$ seja*

$$\rho_T(x, y) = \log \frac{|L \cup J||J \cup R|}{|L||R|},$$

onde $J = (x, y)$ e $T \setminus J$ são os intervalos L e R .

Então, ρ_T é uma métrica em T e o grupo de isometrias dessa métrica é o grupo de todas as transformações de Möbius de T sobre T . Mais ainda, esse grupo de isometrias age transitivamente sobre T , ou seja, dados $x, y \in T$ existe uma transformação de Möbius $\phi : T \rightarrow T$, tal que $\phi(x) = y$.

Demonstração. Primeiro, vejamos que $\frac{|L \cup J||J \cup R|}{|L||R|} = 1 + D(T, J)$. De fato, como $L \cap R = \emptyset$,

$$\begin{aligned} \frac{|L \cup J||J \cup R|}{|L||R|} &= \frac{(|L| + |J|)(|J| + |R|)}{|L||R|} = \frac{|L||J| + |L||R| + |J||J| + |J||R|}{|L||R|} \\ &= \frac{|J|(|L| + |J| + |R|) + |L||R|}{|L||R|} = \frac{|J|(|L \cup J \cup R|)}{|L||R|} + 1 \\ &= \frac{|J||T|}{|L||R|} + 1 = 1 + D(T, J). \end{aligned}$$

Agora, vamos verificar que ρ_T é uma métrica:

i. Se $x \neq y$, então

$$\rho_T(x, y) = \log \frac{|L \cup J| |J \cup R|}{|L| |R|} \geq 0.$$

Se $x = y$, então $|J| = 0$, portanto $\rho_T(x, x) = \log \frac{|L| |R|}{|L| |R|} = \log 1 = 0$. E, se $\rho_T(x, y) = 0$, então

$$\log \frac{|L \cup J| |J \cup R|}{|L| |R|} = 0 \Rightarrow \frac{|L \cup J| |J \cup R|}{|L| |R|} = 1 \Rightarrow |J|(|J| + |L| + |R|) = 0$$

com isso, ou $|J| = 0$ ou $|J| + |L| + |R| = |T| = 0$, ambos os casos implicam $x = y$.

ii. $\rho_T(x, y) = \rho_T(y, x)$, para todos $x, y \in T$. De fato,

$$\rho_T(x, y) = \log \frac{|L \cup J| |J \cup R|}{|L| |R|} = \log \frac{|R \cup J| |J \cup L|}{|R| |L|} = \rho_T(y, x).$$

iii. $\rho_T(x, z) \leq \rho_T(x, y) + \rho_T(y, z)$, para todos $x, y, z \in T$. Com efeito, sejam $T = (a, b)$, $L = (a, x)$, $J = (x, y)$, $K = (y, z)$ e $R = (z, b)$, então

$$\rho_T(x, z) = \log \frac{|L \cup J \cup K| |J \cup K \cup R|}{|L| |R|},$$

$$\rho_T(x, y) = \log \frac{|L \cup J| |J \cup K \cup R|}{|L| |K \cup R|},$$

$$\rho_T(y, z) = \log \frac{|L \cup J \cup K| |K \cup R|}{|L \cup J| |R|}.$$

Com isso, podemos ver que

$$\rho_T(x, z) = \rho_T(x, y) + \rho_T(y, z).$$

Para ver que o grupo de isometrias de ρ_T é o grupo das transformações de Möbius, basta ver que pela propriedade 5.3.1, acima, se ϕ é uma transformação de Möbius, temos que

$D(\phi(T), \phi(J)) = D(T, J)$ e a recíproca vale. Com isso,

$$\rho_T(x, y) = \log(1 + D(T, J)) = \log(1 + D(\phi(T), \phi(J))) = \rho_T(\phi(x), \phi(y)),$$

para todos $x, y \in \mathbb{R}$, se, e somente se, ϕ é uma transformação de Möbius.

Por fim, se $T = (a, b)$, então, para quaisquer $x, y \in T$, existe uma única transformação de Möbius ϕ tal que $\phi(a) = a$, $\phi(b) = b$ e $\phi(x) = y$. Mostrando que ϕ age transitivamente sobre T . \square

Observação 5.3.3. A fórmula definindo ρ_T é exatamente a mesma fórmula que fornece a distância entre dois pontos no plano hiperbólico real, por isso, chamamos ρ_T de métrica hiperbólica do intervalo T .

Propriedade 5.3.4. Se $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ tem derivada de Schwarz negativa (respectivamente positiva), em todos os pontos, e ϕ, ψ são transformações de Möbius, então $g \circ \phi$ e $\psi \circ g$ também tem derivada de Schwarz negativa (respectivamente positiva).

Demonstração. Como $S\phi \equiv 0$ e $S\psi \equiv 0$ temos

$$\begin{aligned} S(\phi \circ g) &= Sg \circ \phi \cdot (D\phi)^2 + S\phi = Sg \circ \phi \cdot (D\phi)^2 < 0, \text{ se } Sg < 0 \text{ e} \\ S(\psi \circ g) &= Sg \circ \psi \cdot (D\psi)^2 + S\psi = Sg \circ \psi \cdot (D\psi)^2 < 0, \text{ se } Sg < 0. \end{aligned}$$

\square

Propriedade 5.3.5. Se $g : T \rightarrow \mathbb{R}$ é uma aplicação de classe C^3 com derivada de Schwarz negativa, então $B(g, T^*, J^*) > 1$, para todo par de intervalos $J^* \subset T^* \subset T$.

Demonstração. Primeiro, vamos mostrar que se $Sg < 0$, então a aplicação $x \mapsto Dg(x)$ não tem mínimo local positivo, pois, se $Sg(x) < 0$ e $D^2g(x) = 0$, temos que $\frac{D^3g(x)}{Dg(x)} < 0$. Se $D^3g(x) > 0$, então $D^3g(x) < 0$, portanto $Dg(x)$ é ponto de máximo local. Esse é o Princípio do Mínimo, que generalizaremos na próxima seção.

Agora, sejam $T^* = (x_0, x_1)$, $J^* = (y_0, y_1)$ e ϕ uma transformação de Möbius, tal que $\phi \circ g(x_0) = x_0$, $\phi \circ g(x_1) = x_1$ e $\phi \circ g(y_0) = y_0$. Afirmamos que $\phi \circ g(y_1) > y_1$.

De fato, se $\phi \circ g(y_1) \leq y_1$, teríamos, pelo Teorema do Valor Médio, que existem $z_0 \in [x_0, y_0]$, $z_1 \in [y_0, y_1]$ e $z_2 \in [y_1, x_1]$ tais que

$$D(\phi \circ g)(z_0) = \frac{\phi \circ g(y_0) - \phi \circ g(x_0)}{y_0 - x_0} = \frac{y_0 - x_0}{y_0 - x_0} = 1,$$

$$D(\phi \circ g)(z_1) = \frac{\phi \circ g(y_1) - \phi \circ g(y_0)}{y_1 - y_0} = \frac{\phi \circ g(y_1) - y_0}{y_1 - y_0} \leq \frac{y_1 - y_0}{y_1 - y_0} = 1 \text{ e}$$

$$D(\phi \circ g)(z_2) = \frac{\phi \circ g(x_1) - \phi \circ g(y_1)}{x_1 - y_1} = \frac{x_1 - \phi \circ g(y_1)}{x_1 - y_1} \geq \frac{x_1 - y_1}{x_1 - y_1} = 1,$$

o que contradiz o Princípio do Mínimo, uma vez que $S(\phi \circ g) = Sg < 0$. Portanto $\phi \circ g(y_1) > y_1$, como afirmamos.

Com isso, se $L^* = (x_0, y_0)$ e $R^* = (y_1, x_1)$, como tomamos ϕ tal que $\phi \circ g(x_0) = x_0$, $\phi \circ g(x_1) = x_1$ e $\phi \circ g(y_0) = y_0$, temos $|\phi \circ g(T^*)| = |T^*|$ e $|\phi \circ g(L^*)| = |L^*|$, e assim,

$$B(\phi \circ g, T^*, J^*) = \frac{D(\phi \circ g(T^*), \phi \circ g(J^*))}{D(T^*, J^*)} = \frac{|\phi \circ g(T^*)| |\phi \circ g(J^*)|}{|\phi \circ g(L^*)| |\phi \circ g(R^*)|} \cdot \frac{|L^*| |R^*|}{|T^*| |J^*|} = \frac{\frac{|\phi \circ g(J^*)|}{|J^*|}}{\frac{|\phi \circ g(R^*)|}{|R^*|}}.$$

Como $\phi \circ g(y_1) > y_1$, temos

$$|\phi \circ g(J^*)| > |J^*| \Rightarrow \frac{|\phi \circ g(J^*)|}{|J^*|} > 1 \quad \text{e} \quad |\phi \circ g(R^*)| < |R^*| \Rightarrow \frac{|\phi \circ g(R^*)|}{|R^*|} < 1.$$

Assim, $B(\phi \circ g, T^*, J^*) > 1$.

Mas,

$$B(\phi \circ g, T^*, J^*) = B(\phi, g(T^*), g(J^*)) \cdot B(g, T^*, J^*) > 1$$

e, como ϕ é uma transformação de Möbius, pela propriedade 5.3.1, $B(\phi, g(T^*), g(J^*)) = 1$, portanto $B(g, T^*, J^*) > 1$, como queríamos. \square

5.4 O Princípio da Expansão Mínima

O seguinte resultado é um princípio de expansão mínima formulado em termos da distorção.

Teorema 5.4.1 (Princípio da Expansão Mínima). *Sejam $T = [a, b] \subset N$ e $g : T \rightarrow g(T) \subset N$, um difeomorfismo de classe C^1 , e $x \in [a, b]$. Se, para qualquer par de intervalos abertos $J^* \subset T^* \subset T$, temos*

$$B(g, T^*, J^*) \geq C_0 > 0,$$

então

$$|Dg(x)| \geq C_0^3 \cdot \min\{|Dg(a)|, |Dg(b)|\}.$$

Demonstração. Seja $T^* = [a^*, b^*]$, um intervalo qualquer com $T^* \subset T$, e $J^* \subset T^*$. Então

$$\lim_{J^* \rightarrow T^*} B(g, T^*, J^*) = \lim_{J^* \rightarrow T^*} \frac{\frac{|g(T^*)||g(J^*)|}{|T^*||J^*|}}{\frac{|g(L^*)||g(R^*)|}{|L^*||R^*|}} = \frac{|g(T^*)|^2}{|T^*|^2} \cdot \frac{1}{|Dg(a^*)| \cdot |Dg(b^*)|},$$

onde L^* e R^* são as componentes de $T^* \setminus J^*$.

Também, se $x \in T$ e $T \setminus \{x\}$ tem componentes L e R , temos

$$\lim_{J \rightarrow x} B(g, T, J) = \lim_{J \rightarrow x} \frac{\frac{|g(T)||g(J)|}{|T||J|}}{\frac{|g(L)||g(R)|}{|L||R|}} = \frac{|Dg(x)| \cdot \frac{|g(T)|}{|T|}}{\frac{|g(L)||g(R)|}{|J||R|}},$$

onde $J \rightarrow x$ significa que, se $J = (x_0, x_1)$, temos $x_0 \rightarrow x$ pela esquerda e $x_1 \rightarrow x$ pela direita.

Definindo os operadores

$$B_0(g, T^*) = \frac{|g(T^*)|^2}{|T^*|^2} \cdot \frac{1}{|Dg(a^*)| \cdot |Dg(b^*)|} \quad \text{e} \quad B_1(g, T, x) = \frac{|Dg(x)| \cdot \frac{|g(T)|}{|T|}}{\frac{|g(L)||g(R)|}{|J||R|}}.$$

Como L e R estão contidos em T , vale

$$B_0(g, L) = \frac{|g(L)|^2}{|L|^2} \cdot \frac{1}{|Dg(a)| \cdot |Dg(x)|}; \quad B_0(g, R) = \frac{|g(R)|^2}{|R|^2} \cdot \frac{1}{|Dg(x)| \cdot |Dg(b)|},$$

e, por hipótese, $B(g, T^*, J^*) \geq C_0 > 0$, para todos os intervalos $J^* \subset T^*$ em T , então

$$B_0(g, L) \geq C_0, \quad B_0(g, R) \geq C_0 \quad \text{e} \quad B_1(g, T, x) \geq C_0.$$

Isto é,

$$\left(\frac{|g(L)|^2}{|L|^2}\right) \geq C_0 \cdot |Dg(a)| \cdot |Dg(x)|, \quad \left(\frac{|g(R)|^2}{|R|^2}\right) \geq C_0 \cdot |Dg(x)| \cdot |Dg(b)|$$

e

$$|Dg(x)| \geq C_0 \cdot \frac{\frac{|g(L)||g(R)|}{|L||R|}}{\frac{|g(T)|}{|T|}},$$

com isso

$$|Dg(x)|^2 \geq C_0^2 \cdot \left(\frac{\frac{|g(L)||g(R)|}{|L||R|}}{\frac{|g(T)|}{|T|}}\right)^2.$$

Suponhamos, sem perda de generalidade que g é crescente e seja $x \in T$, qualquer. Considerando, L e R as componentes de $T \setminus \{x\}$, temos, pelo Teorema do Valor Médio,

$$\frac{|g(T)|}{|T|} = Dg(y), \text{ para algum } y \in T.$$

Como $y \in L$ ou $y \in R$, temos

$$\frac{|g(T)|}{|T|} \leq \max \left\{ \frac{|g(L)|}{|L|}, \frac{|g(R)|}{|R|} \right\}.$$

Como g é difeomorfismo, obtemos

$$\min \left\{ \frac{|g(L)|}{|L|}, \frac{|g(R)|}{|R|} \right\} \leq \frac{|g(T)|}{|T|} \leq \max \left\{ \frac{|g(L)|}{|L|}, \frac{|g(R)|}{|R|} \right\},$$

então,

$$\frac{1}{\frac{|g(T)|}{|T|}} \geq \frac{1}{\max \left\{ \frac{|g(L)|}{|L|}, \frac{|g(R)|}{|R|} \right\}} \Rightarrow \frac{\frac{|g(L)||g(R)|}{|L||R|}}{\frac{|g(T)|}{|T|}} \geq \min \left\{ \frac{|g(L)|}{|L|}, \frac{|g(R)|}{|R|} \right\}.$$

E, temos

$$\begin{aligned} |Dg(x)|^2 &\geq C_0^2 \cdot \left(\min \left\{ \frac{|g(L)|}{|L|}, \frac{|g(R)|}{|R|} \right\} \right)^2 \geq C_0^2 \cdot \min \left\{ \frac{|g(L)|^2}{|L|^2}, \frac{|g(R)|^2}{|R|^2} \right\} \\ &\geq C_0^2 \cdot \min \{ C_0 \cdot |Dg(a)| \cdot |Dg(x)|, C_0 \cdot |Dg(x)| \cdot |Dg(b)| \}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|Dg(x)| \geq C_0^3 \cdot \min \{|Dg(a)|, |Dg(b)|\}.$$

□

5.5 O Princípio de Koebe

Nesta seção vamos apresentar um dos resultados mais fortes em dinâmica unidimensional: O Princípio de Koebe. Para aplicações com derivada de Schwarz negativa uma versão desse resultado foi provada e usada por Van Strien, em 1981, sendo, posteriormente, redescoberta por Johnson e Guckenheimer, em 1987.

Depois, Van Strien estendeu o resultado para aplicações que não possuem derivada de Schwarz negativa. Esse princípio estabelece que uma aplicação que satisfaça uma limitação para a distorção da razão cruzada tem não-linearidade limitada ‘longe de seus pontos críticos’.

Sejam $U \subset V$ dois intervalos, dizemos que V é uma vizinhança ε -escalada de U se ambas as componentes de $V \setminus U$ tem comprimento $\varepsilon \cdot |U|$.

Teorema 5.5.1 (Princípio de Koebe). *Sejam $C_0 \in (0, 1]$ e $g : T \rightarrow g(T)$, um difeomorfismo de classe C^1 . Assumindo que, para quaisquer intervalos J^* e T^* com $J^* \subset T^* \subset T$, tenhamos*

$$B(g, T^*, J^*) \geq C_0 > 0.$$

Suponhamos que $J \subset T$ e que $g(T)$ contenha uma vizinhança τ -escalada de $g(J)$, então

$$\frac{1}{K(C_0, \tau)} \leq \frac{Dg(x)}{Dg(y)} \leq K(C_0, \tau),$$

para todos $x, y \in J$, onde $K(C_0, \tau) = \frac{(1 + \tau)^2}{C_0^6 \cdot \tau^2}$. Mais ainda, se $Sg < 0$, podemos tomar $C_0 = 1$ e existe uma constante \hat{K} que depende apenas de τ , tal que

$$\left| \frac{Dg(x)}{Dg(y)} - 1 \right| \leq \hat{K} \cdot \frac{x - y}{|J|}.$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $J = g(J) = [0, 1]$ e que g é crescente. Sejam $T = [a, b]$, onde $a < 0 < 1 < b$, $L = [a, 0]$ e $R = [1, b]$.

Usando o operador B_0 , dado por $B_0(g, T^*) = \frac{|g(T^*)|^2}{|T^*|^2} \cdot \frac{1}{|Dg(a^*)| \cdot |Dg(b^*)|}$, para o intervalo J , temos

$$B_0(g, J) = \frac{|g(J)|^2}{|J|^2} \cdot \frac{1}{|Dg(0)| \cdot |Dg(1)|} \Rightarrow |Dg(0)| \cdot |Dg(1)| \leq \frac{1}{C_0}. \quad (5.1)$$

Da mesma forma, usando o operador B_1 , dado por $B_1(g, T, x) = \frac{|Dg(x)| \cdot \frac{|g(T)|}{|T|}}{\frac{|g(L)||g(R)|}{|J||R|}}$, para o intervalo $L \cup J$, temos

$$B_1(g, L \cup J, 0) = \frac{|Dg(0)| \cdot \frac{|g(L \cup J)|}{|L \cup J|}}{\frac{|g(L)||g(J)|}{|L||J|}} \geq C_0 \Rightarrow |Dg(0)| \geq C_0 \cdot \frac{\frac{|g(L)|}{|L|}}{\frac{|g(L \cup J)|}{|L \cup J|}},$$

pois $|J| = |g(J)| = 1$. Mas, $\frac{|g(L)|}{|L|} \cdot \frac{|L \cup J|}{|g(L \cup J)|} \geq \frac{|g(L)|}{|g(L \cup J)|} \geq \frac{\tau}{\tau + 1}$, já que $g(T)$ contém vizinhança τ -escalada de $g(J)$.

Com isso,

$$|Dg(0)| \geq C_0 \cdot \frac{\tau}{\tau + 1}. \quad (5.2)$$

De maneira totalmente análoga, obtemos

$$|Dg(1)| \geq C_0 \cdot \frac{\tau}{\tau + 1}. \quad (5.3)$$

Combinando 5.1 e 5.3, temos

$$|Dg(0)| \cdot |Dg(1)| \leq \frac{1}{C_0} \Rightarrow |Dg(0)| \cdot C_0 \cdot \frac{\tau}{\tau + 1} \Rightarrow |Dg(0)| \leq \frac{\tau + 1}{C_0^2 \cdot \tau},$$

com isso e 5.2, obtemos

$$C_0 \cdot \frac{\tau}{\tau + 1} \leq |Dg(0)| \leq \frac{\tau + 1}{C_0^2 \cdot \tau}.$$

Da mesma forma, obtemos

$$C_0 \cdot \frac{\tau}{\tau + 1} \leq |Dg(1)| \leq \frac{\tau + 1}{C_0^2 \cdot \tau}.$$

Pelo Princípio do Mínimo,

$$|Dg(x)| \geq C_0^3 \cdot \min \{|Dg(0)|, |Dg(1)|\} \geq C_0^4 \cdot \frac{\tau}{\tau+1}, \text{ para todo } x \in [0, 1]. \quad (5.4)$$

Agora, sejam $U = [0, x]$ e $V = [x, 1]$, como g é um difeomorfismo, se $\frac{|g(U)|}{|U|} \leq 1$ então $\frac{|g(V)|}{|V|} \geq 1$, e vice-versa. Suponhamos, então, que $\frac{|g(U)|}{|U|} \leq 1$ e, usando o operador B_0 para o intervalo U , temos

$$B_0(g, U) = \frac{|g(U)|^2}{|U|^2} \cdot \frac{1}{|Dg(0)| \cdot |Dg(x)|} \Rightarrow |Dg(0)| \cdot |Dg(x)| \leq \frac{1}{C_0},$$

de 5.2,

$$\frac{C_0 \cdot \tau}{\tau+1} \cdot |Dg(x)| \leq |Dg(x)| \cdot |Dg(0)| \leq \frac{1}{C_0} \Rightarrow |Dg(x)| \leq \frac{\tau+1}{C_0^2 \cdot \tau}.$$

De 5.4,

$$\frac{C_0^4 \cdot \tau}{\tau+1} \leq |Dg(x)| \leq \frac{\tau+1}{C_0^2 \cdot \tau}, \text{ para todo } x \in J.$$

Como

$$|Dg(x)| \leq \frac{\tau+1}{C_0^2 \cdot \tau} \Rightarrow -\frac{\tau+1}{C_0^2 \cdot \tau} \leq Dg(x) \leq \frac{\tau+1}{C_0^2 \cdot \tau}, \text{ para todo } x \in J,$$

e

$$Dg(y) \geq |Dg(y)| \geq \frac{C_0^4 \cdot \tau}{\tau+1} \Rightarrow \frac{C_0^4 \cdot \tau}{\tau+1} \geq \frac{1}{Dg(y)}, \text{ para todo } y \in J.$$

Temos

$$\frac{Dg(x)}{Dg(y)} \leq \frac{(\tau+1)^2}{C_0^4 \cdot \tau^2}, \text{ para todos } x, y \in J.$$

Da mesma forma, estabelecemos a outra desigualdade e obtemos

$$\frac{1}{K(C_0, \tau)} \leq \frac{Dg(x)}{Dg(y)} \leq K(C_0, \tau),$$

para todos $x, y \in J$, onde $K(C_0, \tau) = \frac{(1+\tau)^2}{C_0^6 \cdot \tau^2}$. □

Observação 5.5.2. $K(C_0, \tau) \rightarrow 1$, quando $C_0 \rightarrow 1$ e $\tau \rightarrow \infty$. Portanto, a distorção de g é

muito pequena se o valor de C_0 é próximo de 1 e se considerarmos pontos x em um intervalo $J \subset T$, tal que $g(J)$ é extremamente pequeno e extremamente próximo da fronteira de $g(T)$.

Observação 5.5.3. Se $U \subset V$ são dois intervalos, então o comprimento de U em termos da métrica hiperbólica de V é dado por

$$\ell_V(U) := \log \frac{|L \cup U||U \cup R|}{|L||R|},$$

onde L e R são as componentes de $V \setminus U$.

Se V contém uma vizinhança ε -escalada de U , então

$$\exp \left[\frac{\ell_V(U)}{2} \right] \leq \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon} \leq \exp [2\ell_V(U)].$$

Se V é uma vizinhança ε -escalada de U , então $\exp \left[\frac{\ell_V(U)}{2} \right] = \frac{1 + \varepsilon}{\varepsilon}$.

Como $K(C_0, \tau) = \frac{1}{C_0^6} \cdot \frac{(1+\tau)^2}{\tau^2}$ e, nas hipóteses do Princípio de Koebe, temos que $g(T)$ contém uma vizinhança τ -escalada de $g(J)$, então

$$\frac{1}{C_0^6} \cdot \exp [\ell_{g(T)}(g(J))] \leq K(C_0^6, \tau) \leq \frac{1}{C_0^6} \cdot \exp [4\ell_{g(T)}(g(J))].$$

Como, $\frac{1}{K(C_0^6, \tau)} \leq \frac{Dg(x)}{Dg(y)} \leq K(C_0^6, \tau)$, temos

$$C_0^6 \cdot \exp [-4\ell_{g(T)}(g(J))] \leq \frac{Dg(x)}{Dg(y)} \leq \frac{1}{C_0^6} \cdot \exp [4\ell_{g(T)}(g(J))], \text{ para todos } x, y \in J.$$

Com isso, essa razão é limitada, em um intervalo J , por uma constante que depende apenas de C_0 e do comprimento de $g(J)$ na métrica hiperbólica de $g(T)$.

O Princípio de Koebe nos diz que um difeomorfismo g tem a distorção limitada em um determinado intervalo. Agora vamos apresentar duas outras versões do Princípio de Koebe.

Corolário 5.5.4 (Princípio de Koebe - um lado). *Para cada par $C > 0$ e $\beta > 0$ existe um $K < \infty$ com a seguinte propriedade. Sejam $T = [a, b]$ e $g : T \rightarrow g(T)$, um difeomorfismo de classe C^1 . Assumindo que, para quaisquer intervalos J^* e T^* , com $J^* \subset T^* \subset T$, seja válido*

$$B(g, T^*, J^*) \geq C > 0.$$

Então,

$$|Dg(x)| \geq \frac{1}{K} \cdot |Dg(b)|,$$

para cada $x \in [a, b]$, tal que $\frac{|g(x) - g(a)|}{|g(T)|} \geq \beta$.

Demonstração. Sejam $L = [a, x]$ e $J = [x, b]$, usando o operador B_0 , dado por $B_0(g, T^*) = \frac{|g(T^*)|^2}{|T^*|^2} \cdot \frac{1}{|Dg(a^*)| \cdot |Dg(b^*)|}$, para o intervalo J , temos

$$B_0(g, J) = \frac{|g(J)|^2}{|J|^2} \cdot \frac{1}{|Dg(x^*)| \cdot |Dg(b^*)|} \geq C > 0,$$

com isso

$$\frac{|g(J)|}{|J|} \geq C^{1/2} \cdot |Dg(x)|^{1/2} \cdot |Dg(b)|^{1/2}. \quad (5.5)$$

Agora, usando o operador B_1 , dado por $B_1(g, T, x) = \frac{|Dg(x)| \cdot \frac{|g(T)|}{|T|}}{\frac{|g(L)||g(R)|}{|J||R|}}$, para o intervalo $J \cup L = T$, temos

$$B_1(g, L \cup J, x) = \frac{|Dg(x)| \cdot \frac{|g(T)|}{|T|}}{\frac{|g(L)||g(R)|}{|J||R|}} \geq C > 0,$$

assim,

$$|Dg(x)| \geq C \cdot \frac{|g(L)|}{|L|} \cdot \frac{|g(J)|}{|J|} \cdot \frac{|T|}{|g(T)|},$$

o que implica

$$\begin{aligned} |Dg(x)| &\geq C \cdot \frac{|g(x) - g(a)|}{|g(T)|} \cdot \frac{|g(J)|}{|J|} \cdot \frac{|L \cup J|}{|L|} \\ &\geq C \cdot \beta \cdot \frac{|g(J)|}{|J|}. \end{aligned}$$

De 5.5,

$$|Dg(x)|^{1/2} \geq C^{3/2} \cdot \beta \cdot |Dg(b)|^{1/2}.$$

Portanto,

$$|Dg(x)| \geq C^3 \cdot \beta^2 \cdot |Dg(b)|.$$

□

Definição 5.5.5. Dizemos que uma aplicação $\phi : J \rightarrow \mathbb{R}$ é α -Hölder (ou Hölder com expoente α) em um ponto $y \in J$, se existe uma constante D tal que

$$\frac{|\phi(x) - \phi(y)|}{|x - y|^\alpha} \leq D,$$

para todo $x \in J$, tal que $|x - y| \leq 1$.

Corolário 5.5.6 (Princípio de Koebe $C^{1+\frac{1}{2}}$). *Para cada par $D > 0$ e $\tau > 0$ existe um $L(D, \tau) < \infty$ satisfazendo à seguinte propriedade. Sejam $J \subset T$ intervalos e $g : T \rightarrow g(T)$ um homeomorfismo, tal que $g(T)$ é uma vizinhança τ -escalada de $g(J)$. Assumindo que, para quaisquer intervalos J^* e T^* , com $J^* \subset T^* \subset T$, tenhamos*

$$|B(g, T^*, J^*) - 1| \leq D \cdot \frac{|T^*|}{|T|}.$$

Então, g é de classe $C^{1+\frac{1}{2}}$, isto é,

$$\left| \frac{Dg(x)}{Dg(y)} - 1 \right| \leq L(D, \tau) \cdot \left[\frac{|x - y|}{|T|} \right]^{1/2}, \text{ para todos } x, y \in J.$$

Em particular, $\log Dg$ é Hölder com expoente $\frac{1}{2}$ no interior de T .

Demonstração. Se considerarmos $J \subset T$ intervalos tais que J, L ou R é degenerado em um ponto, onde L e R são as componentes de $T \setminus J$. Usando o operador B_1 , que é dado por

$$B_1(g, T, x) = \frac{|Dg(x)| \cdot \frac{|g(T)|}{|T|}}{\frac{|g(L)||g(R)|}{|J||R|}},$$

vemos que Dg existe para todo $x \in T$, mais ainda, como

$$|B(g, T^*, J^*) - 1| \leq D \cdot \frac{|T^*|}{|T|},$$

para quaisquer intervalos J^* e T^* , com $J^* \subset T^* \subset T$, temos

que Dg é limitada em T .

Agora, sejam $x, y \in J$ e $J' = [x, y]$. Se $|J'| > \frac{|T|}{2}$, o resultado segue do Princípio de Koebe. Então, supondo que $|J'| \leq \frac{|T|}{2}$, sejam $C_1 > 0$ e T' um intervalo, com $J' \subset T' \subset T$, tal que T' é vizinhança $C_1 \cdot \left[\frac{|T|}{|J'|} \right]^{1/2}$ -escalada de J' . Temos

$$|T'| \leq 3 \cdot C_1 \cdot \left[\frac{|T|}{|J'|} \right]^{1/2} \cdot |J'| \leq 3 \cdot C_1 \cdot [|T| \cdot |J'|]^{1/2}.$$

Conseqüentemente,

$$|B(g, T', J') - 1| \leq D \cdot \frac{|T'|}{|T|} \leq D \cdot \frac{3 \cdot C_1 \cdot [|T| \cdot |J'|]^{1/2}}{|T|} = 3D \cdot C_1 \cdot \left[\frac{|J'|}{|T|} \right]^{1/2}.$$

Usando a notação do corolário 5.5.4 (Princípio de Koebe - um lado), de $B(g, T', J') \geq C > 0$, temos

$$|C - 1| \leq |B(g, T', J') - 1| \leq 3D \cdot C_1 \cdot \left[\frac{|J'|}{|T|} \right]^{1/2}.$$

Além disso, se $g(T')$ é uma vizinhança $C'_1 \cdot \left[\frac{|T|}{|J'|} \right]^{1/2}$ -escalada de $g(J')$, pelo Princípio de Koebe, $\tau \geq C'_1 \cdot \left[\frac{|T|}{|J'|} \right]^{1/2}$. E, também,

$$C^6 \cdot \left(\frac{\tau}{1 + \tau} \right)^2 \leq \frac{|Dg(x)|}{|Dg(y)|} \leq \frac{1}{C^6} \cdot \left(\frac{1 + \tau}{\tau} \right)^2.$$

Como,

$$\frac{1 + \tau}{\tau} - 1 = \frac{1}{\tau} \leq C_2 \cdot \left[\frac{|J'|}{|T|} \right]^{1/2} \quad \text{e} \quad |C - 1| \leq C_2 \cdot \left[\frac{|J'|}{|T|} \right]^{1/2},$$

onde $C_2 = \min \left\{ \frac{1}{C'_1}, 3D \cdot C_1 \right\}$ e satisfaz $C_2 \cdot \left[\frac{|J'|}{|T|} \right]^{1/2} \leq C_2 \cdot \left[\frac{|x - y|}{|T|} \right]^{1/2}$. Temos, novamente pelo Princípio de Koebe,

$$\left| \frac{Dg(x)}{Dg(y)} - 1 \right| \leq L(D, \tau) \cdot \left[\frac{|x - y|}{|T|} \right]^{1/2}, \quad \text{para todos } x, y \in J.$$

Por fim, como $\log \frac{Dg(x)}{Dg(y)} < \frac{Dg(x)}{Dg(y)} - 1$, temos

$$|\log Dg(x) - \log Dg(y)| \leq \frac{L(D, \tau)}{|T|^{1/2}} \cdot |x - y|^{1/2},$$

portanto, $\log Dg$ é Hölder com expoente $\frac{1}{2}$. □

5.6 O Primeiro Princípio de Expansão

O próximo resultado que apresentaremos afirma que sempre que um intervalo é aplicado de maneira monótona sobre si e com uma expansão da razão cruzada, então a aplicação está realmente se expandindo em algum ponto.

Teorema 5.6.1 (Primeiro Princípio de Expansão). *Para todos $\varepsilon > 0$ e $\delta > 0$ existe um $\sigma > 0$ para o qual a seguinte propriedade é válida. Sejam $J \subset T$ intervalos em N , para os quais $g : T \rightarrow g(T) \subset N$ é um difeomorfismo de classe C^1 e, assumindo que, ambas as componentes de $T \setminus J$ comprimento maior do que ou igual a $\delta \cdot |T|$. Se*

$$B(g, T, J) \geq 1 + \varepsilon$$

e $g(T) \supset T$, então existe $x \in T$ satisfazendo

$$Dg(x) \geq 1 + \sigma.$$

Demonstração. Sejam L e R , as componentes de $T \setminus J$, e seja $\xi > 0$ suficientemente pequeno para que $(1 + \varepsilon)(1 + \xi)^2 \geq 1 + \frac{1}{2}\varepsilon$. Temos dois casos a considerar:

1º caso: Suponhamos que $\frac{|g(L)|}{|L|} \geq 1 - \xi$ e $\frac{|g(R)|}{|R|} \geq 1 - \xi$.

Então,

$$B(g, T, J) = \frac{\frac{|g(T)||g(J)|}{|T||J|}}{\frac{|g(L)||g(R)|}{|L||R|}} \geq 1 + \varepsilon,$$

assim,

$$\frac{|g(T)|}{|T|} \cdot \frac{|g(J)|}{|J|} \geq (1 + \varepsilon) \cdot \frac{|g(L)|}{|L|} \cdot \frac{|g(R)|}{|R|} \geq (1 + \varepsilon)(1 + \xi)^2 \geq 1 + \frac{1}{2}\varepsilon.$$

Então, pelo menos um dos termos $\frac{|g(T)|}{|T|}, \frac{|g(J)|}{|J|}$ é menor do que ou igual a $\sqrt{1 + \frac{1}{2}\varepsilon}$. Pelo Teorema do Valor Médio, em qualquer um dos casos, obtemos que existe $x \in T$ tal que $Dg(x) \geq \sqrt{1 + \frac{1}{2}\varepsilon}$.

2º caso: Supondo, agora, que $\frac{|g(L)|}{|L|} < 1 - \xi$.

Como $|L|, |R| \geq \delta \cdot |T|$, temos

$$\begin{aligned} \frac{|g(J \cup R)|}{|J \cup R|} &= \frac{|g(T)| - |g(L)|}{|T| - |L|} \geq \frac{|T| - |g(L)|}{|T| - |L|} \\ &> \frac{|T| - (1 - \xi)|L|}{|T| - |L|} = 1 + \frac{\xi \cdot |L|}{|T| - |L|} \\ &> 1 + \frac{\xi \cdot \delta}{1 - \delta}. \end{aligned}$$

Pelo Teorema do Valor Médio, existe $x \in J \cup R$, tal que $Dg(x) \geq 1 + \frac{\xi \cdot \delta}{1 - \delta}$.

No caso em que $\frac{|g(R)|}{|R|} < 1 - \xi$, de maneira análoga ao 2º caso, obtemos $Dg(x) \geq 1 + \frac{\xi \cdot \delta}{1 - \delta}$, para algum $x \in L \cup J$.

Combinando

$$Dg(x) \geq \sqrt{1 + \frac{1}{2}\varepsilon} \quad \text{e} \quad Dg(x) \geq 1 + \frac{\xi \cdot \delta}{1 - \delta},$$

temos que existe $x \in T$, tal que

$$Dg(x) \geq 1 + \sigma,$$

onde σ depende de ε e δ . □

Observação 5.6.2. Supor que ambas as componentes de $T \setminus J$ tem comprimento maior do que ou igual a $\delta \cdot |T|$, não é o mesmo que supor que T contenha uma vizinhança δ -escalada de J .

5.7 Alguns fatos sobre a Derivada de Schwarz

Nesta seção, faremos algumas observações sobre a derivada de Schwarz e sua relação com as transformações projetivas. Já sabemos que se $Sf = 0$, então f é uma transformação de Möbius, preservando, assim, a razão cruzada. Mais precisamente, a derivada de Schwarz tem a seguinte relação com a razão cruzada:

Lema 5.7.1. *Seja f uma aplicação de classe C^3 . Então existe uma única transformação de Möbius, ϕ , tal que o limite*

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\phi \circ f)(x) - x}{x^3}$$

é finito. Esse limite é igual a $\frac{Sf(0)}{6}$. Mais ainda, sejam $J = [h, 2h]$ e $T = [0, 3h]$, então

$$Sf(0) = -\frac{3}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(f, T, J) - 1}{h^2}.$$

Da mesma forma,

$$Sf(0) = -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+D(f(T), f(J))}{1+D(T, J)} - 1}{h^2}.$$

Demonstração. Podemos assumir que $Df(0) \neq 0$. Como $S(\phi \circ f) = Sf$, quando ϕ é uma transformação de Möbius, podemos assumir também que $f(x) = x + ax^3 + o(|x|^3)$, onde $o(t)$ é uma função tal que $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{o(t)}{t} = 0$.

De fato, dados $a_0, a_1, a_3 \in \mathbb{R}$, existe uma única transformação de Möbius, ϕ , tal que $\phi(0) = a_0$, $D\phi(0) = a_1$ e $D^2\phi(0) = a_2$. Pois, se

$$\phi(x) = \frac{ax + b}{cx + d}, \text{ como } ad - bc \neq 0, \text{ vale } D\phi(0) \neq 0,$$

e temos,

$$a = \left(-\frac{a_0 a_2}{2a_1} + a_1 \right) \cdot d, \quad b = a_0 \cdot d \quad \text{e} \quad c = -\frac{a_2}{2a_1} \cdot d.$$

Portanto, existe uma única transformação de Möbius, ϕ , para a qual $\phi \circ f(x) = x + ax^3 + o(|x|^3)$. A derivada de Schwarz $Sf(x) = \frac{D^3 f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2 f(x)}{Df(x)} \right)^2$, de $f(x) = x + ax^3 + o(|x|^3)$ é

$$Sf(0) = 6a.$$

Como

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\phi \circ f)(x) - x}{x^3} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x + ax^3 + o(|x|^3))}{x^3} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left[a \frac{o(|x|^3)}{x^3} \right] \\ &= a. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\phi \circ f)(x) - x}{x^3} = \frac{Sf(0)}{6}.$$

Agora, se $J = [h, 2h]$ e $T = [0, 3h]$, sejam $L = [0, h]$ e $R = [2h, 3h]$, temos

$$\begin{aligned} |f(T)| &= f(3h) - f(0) = 3h + 27ah^3 \\ |f(J)| &= f(2h) - f(h) = h + 7ah^3 \\ |f(L)| &= h + ah^3 \\ |f(R)| &= h + 19ah^3 \end{aligned}$$

com isso,

$$B(f, T, J) = \frac{\frac{|f(T)||f(J)|}{|T||J|}}{\frac{|f(L)||f(R)|}{|L||R|}} = \frac{h^2 + 16ah^4 + 63a^2h^6}{h^2 + 20ah^4 + 19a^2h^6}.$$

Então,

$$B(f, T, J) - 1 = -\frac{4ah^2}{1 + 20ah^2 + 19a^2h^4} + o(h^2), \text{ onde } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^2)}{h^2},$$

assim,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(f, T, J) - 1}{h^2} = -4a.$$

Como $Sf(0) = 6a$,

$$Sf(0) = -\frac{3}{2} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{B(f, T, J) - 1}{h^2}.$$

De maneira análoga, temos $\frac{1 + D(f(T), f(J))}{1 + D(T, J)} - 1 = -\frac{3ah^2 - 33a^2h^4}{1 + 20ah^2 + 19a^2h^4}$ e

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1 + D(f(T), f(J))}{1 + D(T, J)} - 1}{h^2} = -3a,$$

portanto,

$$Sf(0) = -2 \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{1+D(f(T),f(J))}{1+D(T,J)} - 1}{h^2}.$$

□

Exemplo 5.7.2. Se f é um polinômio de grau maior do que ou igual a 2, com coeficientes reais e todos os zeros de Df são reais, então $Sf < 0$. De fato, suponhamos que o grau de f seja $n + 1, n \geq 1$, e que $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ sejam os zeros de Df . Podemos, então, assumir que $Df(x) = A(x - a_1) \cdots (x - a_n)$. Com isso,

$$D^2f(x) = A[(x - a_2) \cdots (x - a_n) + \cdots + (x - a_1) \cdots (x - a_{n-1})]$$

$$D^3f(x) = 2A[(x - a_3) \cdots (x - a_n) + \cdots + (x - a_1) \cdots (x - a_{n-2})].$$

Assim,

$$\begin{aligned} Sf(x) &= \frac{D^3f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x)}{Df(x)} \right)^2 \\ &= 2 \cdot \left[\frac{1}{(x - a_1)(x - a_2)} + \cdots + \frac{1}{(x - a_{n-1})(x - a_n)} \right] - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{x - a_1} + \cdots + \frac{1}{x - a_n} \right]^2 \\ &= -\frac{1}{(x - a_1)(x - a_2)} - \cdots - \frac{1}{(x - a_{n-1})(x - a_n)} - \frac{3}{2} \frac{1}{(x - a_1)^2} - \cdots - \frac{3}{2} \frac{1}{(x - a_n)^2}. \end{aligned}$$

Com isso, $Sf < 0$.

Consideremos, agora, um grupo de difeomorfismos locais na reta gerados por uma Álgebra de Lie \mathcal{L} de geradores infinitesimais.

Lembrando que uma álgebra de Lie \mathcal{L} é um espaço vetorial, munido de uma multiplicação $[\cdot, \cdot]$, que satisfaz

- i. $[\cdot, \cdot]$ é bilinear;
- ii. $[x, x] = 0$, para todo $x \in \mathcal{L}$;

iii. $[x, [y, z]] = [[x, y], z] + [y, [x, z]]$, para todos $x, y, z \in \mathcal{L}$.

A propriedade iii é conhecida como identidade de Jacobi e também pode ser dada por

$$[x, [y, z]] + [y, [z, x]] + [z, [x, y]] = 0.$$

Se supormos que o grupo (de difeomorfismos locais na reta gerado por \mathcal{L}) é transitivo, temos que existe um elemento $u \in \mathcal{L}$, tal que $u(0) \neq 0$. Usando um sistema de coordenadas diferentes, podemos assumir que $L(x) = \frac{d}{dx}$. Agora, assumindo que $\dim(\mathcal{L}) = m$ e tomando $v = f(x)\frac{d}{dx} \in \mathcal{L}$, então $[u, v] = v'$, onde $v' = f'(x)\frac{d}{dx}$. Da mesma forma, $[u, v^k] = v^{k+1}$, onde $v^k = D^k f(x)\frac{d}{dx}$. Então, como estamos supondo \mathcal{L} m -dimensional, v, \dots, v^m são linearmente dependentes e, portanto, as funções $f, \dots, D^m f$ são linearmente dependentes. Consequentemente, f satisfaz uma equação diferencial homogênea linear de ordem menor do que ou igual a m , com coeficientes constantes, e, então, f é analítica.

Agora, se f não é um polinômio de grau menor do que ou igual a 2, então a álgebra de Lie gerada por $u = f\frac{d}{dx}$ tem dimensão infinita, isto é,

$$[u, u], [u, [u, u]], [u, [u, [u]]], \dots$$

gera um espaço de dimensão infinita.

Então, os únicos geradores de uma álgebra de Lie de dimensão finita são

$$L_1 = \frac{d}{dx} \quad L_2 = x\frac{d}{dx} \quad \text{e} \quad L_3 = x^2\frac{d}{dx}.$$

Vejamos quais grupos são gerados por tais geradores.

- A aplicação de t por $L_1(x) = \frac{d}{dx}$ é

$$x \longmapsto x + t,$$

e, portanto, L_1 gera o grupo de translações.

- A aplicação de t por $L_2(x) = x \frac{d}{dx}$ é

$$x \mapsto x \cdot e^t$$

e gera as homotetias da reta.

- Para $L_3(x) = x^2 \frac{d}{dx}$ é

$$x \mapsto \frac{x}{-xt + 1},$$

que só existe se t for finito, e essas são as transformações de Möbius. A aplicação $h_t(x) = \frac{x}{-xt + 1}$ satisfaz $h_t(0) = 0$, $Dh_t(0) = 1$ e $D^2h_t(0) = t$.

Juntas, essas transformações geram todas as transformações de Möbius

$$x \mapsto \frac{ax + b}{cx + d}.$$

Com isso, os únicos invariantes diferenciais que correspondem a grupos de Lie de dimensão finita são

$$D(f) = f', \quad N(f) = \frac{D^2 f}{Df} \quad \text{e} \quad S(f) = \frac{D^3 f}{Df} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2 f}{Df} \right)^2.$$

Esses operadores diferenciais são a diferenciação, o operador de não-linearidade e a derivada de Schwarz. Eles são invariantes, pois

$$\begin{aligned} D(L_{1,t} f) &= D(f) \\ N(L_{1,t} f) &= N(L_{2,t} f) = N(f) \\ S(L_{1,t} f) &= S(L_{2,t} f) = S(L_{3,t} f) = S(f), \end{aligned}$$

para todo t . Em particular, $\ker(D) = \{f; Df = 0\}$ é o grupo das translações, $\ker(N) = \{f; Nf = 0\}$ é o grupo das transformações afins e $\ker(S) = \{f; Sf = 0\}$ é o grupo das transformações de Möbius.

De fato,

- $D(L_{1,t}f) = D(f)$:

$$D(L_{1,t}f)(x) = D(f(x) + t) = Df(x).$$

- $N(L_{1,t}f) = N(L_{2,t}f) = N(f)$:

$$N(L_{1,t}f)(x) = N(f(x) + t) = \frac{D^2(f(x) + t)}{D(f(x) + t)} = \frac{D^2f(x)}{Df(x)} = N(f(x))$$

e

$$N(L_{2,t}f)(x) = N(f(x) \cdot e^t) = \frac{D^2(f(x) \cdot e^t)}{D(f(x) \cdot e^t)} = \frac{e^t \cdot D^2f(x)}{e^t \cdot Df(x)} = N(f(x)).$$

- $S(L_{1,t}f) = S(L_{2,t}f) = S(L_{3,t}f) = S(f)$:

$$\begin{aligned} S(L_{1,t}f)(x) &= S(f(x) + t) = \frac{D^3(f(x) + t)}{D(f(x) + t)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2(f(x) + t)}{D(f(x) + t)} \right)^2 \\ &= \frac{D^3f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x)}{Df(x)} \right)^2 = Sf(x), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} S(L_{2,t}f)(x) &= S(f(x) \cdot e^t) = \frac{D^3(f(x) \cdot e^t)}{D(f(x) \cdot e^t)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2(f(x) \cdot e^t)}{D(f(x) \cdot e^t)} \right)^2 \\ &= \frac{e^t \cdot D^3f(x)}{e^t \cdot Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{e^t \cdot D^2f(x)}{e^t \cdot Df(x)} \right)^2 = Sf(x), \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} S(L_{3,t}f)(x) &= S\left(\frac{f(x)}{-xt+1}\right) = \frac{D^3\left(\frac{f(x)}{-xt+1}\right)}{D\left(\frac{f(x)}{-xt+1}\right)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2\left(\frac{f(x)}{-xt+1}\right)}{D\left(\frac{f(x)}{-xt+1}\right)} \right)^2 \\ &= \frac{D^3f(x)}{Df(x)} - \frac{3}{2} \left(\frac{D^2f(x)}{Df(x)} \right)^2 = Sf(x). \end{aligned}$$

Capítulo 6

Razão Cruzada - Uma Descrição Mais Geral

Já vimos que a uma quádrupla de pontos distintos está associado um invariante, a razão cruzada *projetiva*, de maneira que duas quádruplas são equivalentes sob uma transformação se, e somente se, elas possuem a mesma razão cruzada. A razão cruzada projetiva fornece uma caracterização geométrica da reta projetiva.

Considerando quatro pontos distintos ordenados (x, y, z, t) na reta projetiva, existe, essencialmente, únicas coordenadas de maneira que x é gerado por $(1, 0)$, y por $(0, 1)$, z por $(1, 1)$ e t por $(b, 1)$. Então, $b := \mathbf{b}(x, y, z, t)$ é a razão cruzada desses quatro pontos. A razão cruzada projetiva satisfaz a um conjunto de relações algébricas. Destacamos a relação de produto cíclico (1), a relação aditiva (2), a relação de simetria (3) e a relação de normalização(4):

$$(1) \quad \mathbf{b}(x, y, z, t) = \mathbf{b}(x, w, z, t)\mathbf{b}(w, y, z, t),$$

$$(2) \quad \mathbf{b}(x, y, z, t) = 1 - \mathbf{b}(t, y, z, x),$$

$$(3) \quad \mathbf{b}(x, y, z, t) = \mathbf{b}(z, t, x, y),$$

$$(4) \quad \mathbf{b}(x, y, z, t) = 1 \Leftrightarrow x = y \text{ ou } z = t.$$

Por outro lado, qualquer conjunto munido de uma função \mathbf{b} , de quádruplas de pontos, satisfazendo a essas relações, pode ser visto como um subconjunto da reta projetiva complexa

onde \mathbf{b} é uma restrição da razão cruzada projetiva. Essa elementar, porém notável, afirmação estabelece que a razão cruzada projetiva caracteriza completamente a reta projetiva.

Já vimos, também, que podemos descrever o plano hiperbólico real, \mathbb{H}^2 , como uma extensão métrica da reta projetiva real, $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. No modelo do disco de Poincaré, o plano hiperbólico é o disco unitário Δ , cuja fronteira $\partial\Delta = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\} = \{x + iy \in \mathbb{C}; x^2 + y^2 = 1\}$ pode ser identificada com uma reta projetiva real. As geodésicas, nesse modelo, são a interseção de círculos ortogonais a $\partial\Delta$ com o plano hiperbólico. Dessa forma, um par de pontos na reta projetiva real $\partial\Delta$ determinam uma única geodésica. Vimos como a razão cruzada se relaciona com a distância no modelo do semiplano superior, agora, descreveremos como acontece essa relação no modelo do disco.

Um *horociclo* centrado em um ponto x da reta projetiva real é um círculo em Δ tangente a $\partial\Delta$ no ponto x . Seja γ a única geodésica unindo dois pontos A e B no plano hiperbólico; sejam x e y os pontos inicial e final da geodésica γ no infinito; sejam C_x e C_y os horociclos centrados em x e y e passando pelos pontos A e B , respectivamente; sejam, finalmente, z e t os centros dos dois horociclos tangentes a C_x e C_y , respectivamente. Então a distância hiperbólica entre os pontos A e B é o logaritmo da razão cruzada dos pontos x, y, z, t . Essa construção permite descrever a distância hiperbólica em termos da razão cruzada, como foi feito no capítulo 3, e vice-versa.

Por outro lado, a reta real projetiva apresenta-se como uma “fronteira no infinito” do plano hiperbólico. No modelo do disco de Poincaré, duas geodésicas orientadas com mesmo ponto final, isto é, se encontram a uma distância finita uma da outra, em $\partial\Delta$ são ditas assintóticas. Isso permite a extensão dessas ideias às *superfícies de Hadamard*. Uma variedade Riemanniana bidimensional M é uma superfície de Hadamard se é simplesmente conexa, completa e tem curvatura seccional negativa. A fronteira no infinito $\partial_\infty M$ de uma superfície de Hadamard, M , é o conjunto de classes de equivalência de geodésicas orientadas assintóticas. Para o plano hiperbólico, a fronteira no infinito é exatamente a reta real projetiva $\partial\Delta$.

Uma generalização para a razão cruzada em ∂M foi dada por Otal fazendo o caminho inverso. Dados quatro pontos em $\partial_\infty M$ ele considerou quatro horociclos e definiu a razão cruzada

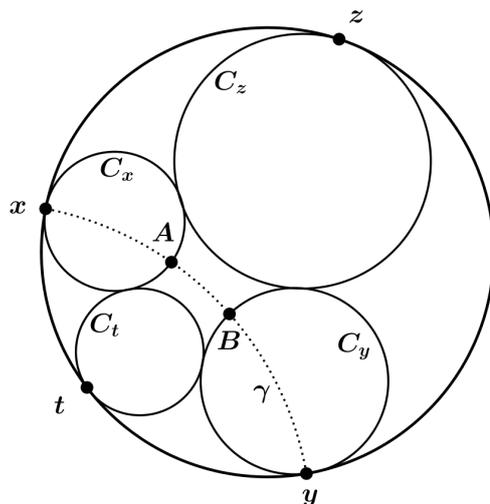


Figura 6.1: Relação entre distância e razão cruzada.

dos pontos x, y, z, t como a exponencial da distância entre dois pontos A e B , convencionando o sinal de maneira adequada. Em geral, a função correspondente cumpre as relações satisfeitas pela razão cruzada, exceto a relação aditiva (2). Usando essa construção, Otal provou que uma métrica com curvatura negativa em uma superfície é caracterizada pelo comprimento de geodésicas fechadas. Bourdon usou um conceito de razão cruzada parecido para definir uma geometria na fronteira no infinito de um espaço métrico com curvatura negativa.

Falando um pouco sobre a razão cruzada em um contexto de dinâmica e Teoria de Teichmüller. Consideremos M um recobrimento universal de uma superfície fechada S , a fronteira no infinito de M , depende apenas do grupo fundamental de S , $\pi_1(S)$, por isso, a denotaremos por $\partial_\infty \pi_1(S)$. A fronteira no infinito é homeomorfa a um círculo e admite a ação de $\pi_1(S)$. Assim, toda métrica com curvatura negativa em S fornece uma razão cruzada invariante sob a ação de $\pi_1(S)$ em $\partial_\infty \pi_1(S)$.

Uma interpretação dinâmica pode ser dada à razão cruzada. Consideremos o quociente do espaço de triplas ordenadas de pontos distintos em $\partial_\infty \pi_1(S)$ pela ação diagonal de $\pi_1(S)$. Esse quociente, denotado por US , é compacto. Uma razão cruzada gera um grupo de transformações $\{\phi_t\}$ em US , da seguinte forma $\phi_t(x, y, z) = (x, y, w)$, onde $t = \mathbf{b}(x, y, z, w)$. Da relação do produto cíclico (1), temos que $\phi_{t+s} = \phi_t \circ \phi_s$. Essa construção recupera o conceito de fluxo

geodésico quando a razão cruzada vem de uma métrica com curvatura negativa. Em geral, há uma relação muito próxima entre a razão cruzada e dinâmica.

Considerando, agora, o espaço de todas as razões cruzadas em $\partial_\infty\pi_1(S)$, que chamaremos de \mathcal{M}_S . O espaço de Fricke, de estruturas hiperbólicas em S , que é identificado com o espaço de Teichmüller, $\mathcal{T}(S)$ de estruturas complexas em S , pelo Teorema de Uniformização, é visto, de maneira natural, em \mathcal{M}_S como o subconjunto de razões cruzadas projetivas. Cada razão cruzada identifica a fronteira no infinito, $\partial_\infty\pi_1(S)$, com a reta projetiva e, assim, define uma representação de $\pi_1(S)$ em $PSL(2, \mathbb{R})$ e uma estrutura hiperbólica em S . Da mesma forma, um espaço de representações de $\pi_1(S)$ em $PSL(n, \mathbb{R})$, conhecido como componente de Hitchin, é identificado como o espaço de razões cruzadas satisfazendo regras generalizando a relação aditiva (2). Por fim, \mathcal{M}_S também contém o espaço de todas as métricas com curvatura negativa em S .

Acredita-se que o espaço \mathcal{M}_S possui uma estrutura que generaliza a estrutura de Poisson em componentes de Hitchin, descrita por Goldman. Uma estrutura de Poisson em um conjunto Y é uma álgebra de Lie em um conjunto de funções definidas em Y , tal que o colchete de Lie satisfaz a uma regra de Leibniz com respeito à multiplicação. Esse conceito surge em mecânica clássica e conduz à mecânica quântica. Por construção, toda quádrupla de pontos (x, y, z, t) na fronteira no infinito define uma função em \mathcal{M}_S por $\mathbf{b} \mapsto \mathbf{b}(x, y, z, t)$. Essas funções, quando restritas ao espaço de Fricke, produzem uma classe de funções cujo colchete de Poisson tem sido calculado por Wolpert e Penner. Essas funções foram representadas como operadores em espaços de Hilbert por Chekhov, Fock e Penner.

Em outra direção, as razões cruzadas também tem sido usadas para generalizar muitas propriedades da Teoria Clássica de Teichmüller, tais como identidades de McShane, para a *Teoria Superior de Teichmüller-Thurston*, que é o estudo de componentes de Hitchin.

A razão cruzada projetiva (muito além do que vimos no capítulo 3) está fortemente relacionada com a geometria hiperbólica tridimensional. Dois exemplos recentes são o estudo de Neumann do Terceiro Problema de Hilbert em Geometria Hiperbólica, e a *Geometria Hiperbólica Quântica* desenvolvida por Baseilhac, Bonahod, Benedetti, Kashaev, etc.

Bibliografia

- [1] Almeida, F. R. T., *Geometria Projetiva e Desenho*, Notas de Aula, IME-USP (2013).
- [2] Beardon, A. F., *The Geometry of Discrete Groups*, Springer, Graduate Texts in Mathematics (1995).
- [3] Brady, Z., *Cross Ratio*, Notas de Aula, Stanford University.
- [4] Busemann, H.; Kelly, P. J., *Projective geometry and projective metrics*, Academic Press (1953).
- [5] Cunha, H.; Gusevskii, N, *On the moduli space of quadruples of points in the boundary of complex hyperbolic*, Transformation Groups, Vol. 15, 261-283 (2010).
- [6] Lima, E. L., *Variiedades Diferenciáveis*, Coleção Publicações Matemáticas, IMPA (2007).
- [7] Goldman, W. M., *Complex Hyperbolic Geometry*, Oxford Press (1999).
- [8] Korányi, A.; Riemann, H. M., *The Complex Cross Ratio on the Heisenberg Group*, L'Enseignement Mathématique, Vol. 33, 291-300 (1987).
- [9] Labourie, F., *Cross ratios, surface groups, $PSL(n, \mathbb{R})$ and diffeomorphisms of the circle*, Publ. Math. IHES, N°106, 139-213 (2007).
- [10] Labourie, F., *What is a cross ratio?*, Notices of the Am. Math. Soc, Vol. 55, N°10, 1234-1235 (2008).
- [11] Ovsienko, V.; Tabachnikov, S., *What is the Schwarzian Derivative?*, Notices of the Am. Math. Soc, Vol. 56, N°1, 34-36 (2009).

- [12] Rocha, L. F. C., *Introdução à Geometria Hiperbólica Plana*, IMPA (1987).
- [13] Strien, S. V.; Melo, W. de, *One-Dimensional Dynamics*, Springer-Verlag (1993).