

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-graduação em Matemática

Jéssica Duarte Silva Guimarães

**UMA ANÁLISE DO MODELO SIRS
E O ESTUDO DE SUAS BIFURCAÇÕES**

Belo Horizonte

2022

Jéssica Duarte Silva Guimarães

UMA ANÁLISE DO MODELO SIRS E O ESTUDO DE SUAS BIFURCAÇÕES

Versão final

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Gilcione Nonato Costa

Belo Horizonte

2022

Guimarães, Jéssica Duarte Silva.

G963u Uma análise do modelo SIRS e o estudo de suas bifurcações
[manuscrito] / Jéssica Duarte Silva Guimarães. – 2022.
79 f. il.

Orientador: Gilcione Nonato Costa.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f.78-79.

1. Matemática – Teses. 2. Epidemiologia - Modelos matemáticos – Teses. 3. Equações diferenciais – Teses. 4. Teoria da bifurcação – Teses. I. Costa, Gilcione Nonato.. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51 (043)



Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Uma Análise do Modelo SIRS e o Estudo de suas
Bifurcações*

JÉSSICA DUARTE SILVA GUIMARÃES

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos senhores:

Prof. Alcione Nonato Costa
UFMG

Prof. Marcelo Domingos Marchesin
UFMG

Prof. Wilhelm Alexander Cardoso Steinmetz
UFMG

Belo Horizonte, 17 de agosto de 2022.

Agradecimentos

A Deus por ter me dado saúde e garra para que eu possa superar os desafios que me foram colocados.

A esta universidade por ter me dado a oportunidade de fazer um mestrado e adquirir conhecimento específico e para a vida.

Ao meu orientador, Gilcione Nonato Costa pela oportunidade, paciência, dedicação, tempo, conselhos, sabedoria e apoio na elaboração deste trabalho.

Ao professor Armando Gil Magalhães Neves, pela leitura e contribuições satisfatórias de ensinamentos e sugestões que me permitiram apresentar um melhor desempenho.

Ao professor Marcelo Domingos Marchesin, pela ajuda e pela paciência com as correções.

Aos meus pais, que sempre me apoiaram com muito carinho e dedicação.

Ao meu marido Thiago, pelo incentivo e pelo apoio incondicional, que sempre foi compreensivo e incentivador para que eu pudesse almejar os meus sonhos e nunca desistir.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigada.

Resumo

Esta dissertação trata-se da análise de um estudo sobre um modelo epidemiológico com taxa de incidência não-linear geral, o qual temos o modelo SIR (Susceptível-Infetado-Recuperado) com uma generalização. O estudo tem o objetivo de estabelecer condições para a quantidade e estabilidade dos pontos de equilíbrio será feito, e esse nos levará ao comportamento de algumas bifurcações mesmo tendo a doença controlada.

Palavras-chave: modelos epidêmicos. sistemas de equações diferenciais. pontos de equilíbrio. bifurcações de Hopf. de sela-nó e de Bogdavov-Takens.

Abstract

This dissertation is about the analysis of a study on an epidemiological model with general non-linear incidence rate, which we have the SIR model (Susceptible-Infected- Recovered) with a generalization. The study with the objective of establishing conditions for the quantity and stability of the balance points will be done, and this will lead us to the behavior of some bifurcations even with the disease controlled.

Keywords: epidemic models. systems of differential equations. equilibrium points. Hopf, saddle-node e Bogdavov-Takens bifurcations.

Lista de ilustrações

Figura 1 – A existência de um único I^* se $\mathcal{R}_0 > 1$	27
Figura 2 – A existência de um único I^* se $\mathcal{R}_0 = 1$ e $f_I(0, \nu) > p/k$	28
Figura 3 – Não existência de I^* se $\mathcal{R}_0 = 1$ e $f_I(0, \nu) \leq p/k$	28
Figura 4 – Não existência de pontos de equilíbrios I^* se $\mathcal{R}_0 < 1$ e $f_\infty(\nu) \leq 1/\mathcal{R}_0 - 1$	29
Figura 5 – $(\partial G/\partial I) _{I=I_0^*} = (\partial \phi/\partial I) _{I=I_0^*} - 1 = 0$, mas sem ponto fixo.	31
Figura 6 – $(\partial G/\partial I) _{I=I_0^*} = (\partial \phi/\partial I) _{I=I_0^*} - 1 = 0$, com um ponto fixo	31
Figura 7 – $(\partial G/\partial I) _{I=I_0^*} = (\partial \phi/\partial I) _{I=I_0^*} - 1 = 0$, com dois pontos fixos	32
Figura 8 – Ciclos limites	40
Figura 9 – Plano de fases para $\mu \leq 0$	42
Figura 10 – Plano de fases para $\mu > 0$	43
Figura 11 – $dB/(d\nu) _{\nu^c} > 0$	45
Figura 12 – Diagrama de bifurcação do Hopf e a família de ciclos limites γ_μ resultantes da bifurcação de Hopf	46
Figura 13 – Diagrama de bifurcação Sela-Nó do exemplo (4.5.1)	51
Figura 14 – Diagrama de bifurcação Sela-Nó	56
Figura 15 – Órbita homoclínica no plano e órbita homoclínica no espaço tridimensional	57
Figura 16 – Aparecimento de um ciclo limite L_β	58
Figura 17 – Desaparecimento de um ciclo limite L_β	58
Figura 18 – O conjunto de bifurcação parcial e retratos de fase da equação (4.27).	61
Figura 19 – Bifurcação de Bogdanov–Takens	64
Figura 20 – Retrato de fase do modelo numérico para $\nu = 0.08 < \nu_1$	73
Figura 21 – Retrato de fase do modelo numérico para $\nu_1 < \nu = 7 < \nu_2$	74
Figura 22 – Retrato de fase do modelo numérico para $\nu = 8 > \nu_2$	74
Figura 23 – Diagrama de bifurcação de Hopf em ν_1 e ν_2	74
Figura 24 – Retrato de fase em um ponto de Bogdanov–Takens com $(\mathcal{R}_{BT}, \nu_{BT})$	75
Figura 25 – Curvas de bifurcação do modelo numérico	75

Sumário

1	INTRODUÇÃO	11
2	PRELIMINARES	15
2.1	Alguns conceitos da teoria de EDO	15
2.1.1	Teorema de Grobman–Hartman	16
2.1.2	Formas Normais	18
2.1.3	Teorema de Poincaré–Bendixson	18
3	TERMOS EPIDEMIOLÓGICOS E PONTOS DE EQUILÍBRIO	20
3.1	O número básico de reprodução (\mathcal{R}_0)	20
3.2	Considerações sobre a função não-linear geral $f(I, \nu)$	21
3.3	Pontos de Equilíbrio do Modelo	22
3.4	Modelo Reduzido e dinâmica do modelo	34
4	BIFURCAÇÕES	38
4.1	Bifurcações em Pontos de Equilíbrio Não-Hiperbólicos	38
4.2	O que é uma bifurcação?	38
4.3	Ciclo limite	39
4.4	Bifurcação de Hopf	40
4.4.1	Bifurcações Hopf supercríticas e subcríticas	45
4.4.2	Forma Normal da Bifurcação de Hopf	47
4.5	Bifurcação de Sela-Nó	50
4.5.1	Bifurcação Sela–Nó no modelo reduzido	54
4.6	Bifurcação Homoclínica	56
4.6.1	Órbita Homoclínica	57
4.6.2	Bifurcação Homoclínica	57
4.7	Bifurcação de Bogdanov-Takens	58
4.7.1	Forma Normal da Bifurcação de Bogdanov-Takens	59
4.7.2	Bifurcação de Bogdanov-Takens no modelo (3.4)	64

5	UMA SIMULAÇÃO NUMÉRICA TENDO $f(I; \nu)$	69
6	CONSIDERAÇÕES FINAIS	77
6.1	Considerações finais	77
	REFERÊNCIAS	78

1 Introdução

Motivados pela atual situação pandêmica mundial, resolvemos estudar e aprofundar em alguns modelos epidemiológicos como o modelo SIR e suas generalizações tais como SIRS. O modelo SIR é um modelo epidemiológico usado para descrever algumas doenças que produzem uma imunidade permanente no indivíduo. Esse modelo é relativamente simples para descrever alguns problemas reais, mas suas variações para um âmbito mais complexo, como o modelo SIRS, é algo que se aproxima mais da modelagem de algumas doenças, como a gripe e a Covid-19, onde, com o passar do tempo, os indivíduos recuperados perdem a imunidade adquirida pela infecção, e logo, podem se infectar novamente.

O modelo epidemiológico estudado será um modelo SIRS com uma taxa de incidência não-linear geral, ou seja, a taxa que mede "o número de transmissões por unidade de tempo"[11, p.51] será não-linear. A taxa de incidência, presente em modelos de epidemiologia clássicos, depende bi-linearmente tanto dos indivíduos que possam se infectar com a doença quanto dos indivíduos infectados [11, p.254]. Porém, essa dependência bilinear, não fornece informações suficientes sobre a situação da doença [1, p.1795]. Um estudo feito em [18], mostra que o uso da taxa de incidência não-linear modela de uma forma mais precisa simulações para surtos de sarampo. Dessa forma, ao considerarmos uma taxa de incidência sendo não-linear, essa nos fornecerá informações mais reais, e possibilitará o estudo de bifurcações, dado que, "modelos com taxa de incidência não-linear podem exibir oscilações periódicas (...)"[1] e múltiplos pontos de equilíbrios.

O modelo SIRS, assim como o SIR, é um modelo compartimentado que recebe esse nome devido ao fato da população ser dividida em compartimentos (ou classes), que indicam em qual estado se encontra o indivíduo. As transições entre as classes do modelo estudado em [1] são matematicamente expressas pelas seguintes equações:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Pi - \beta[1 + f(I, \nu)] \frac{IS^p}{N} - \mu S + \delta R, \\ \frac{dI}{dt} = \beta[1 + f(I, \nu)] \frac{IS^p}{N} - (\mu + \alpha)I, \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I - (\mu + \delta)R \end{cases} \quad (1.1)$$

em que $p > 0$; N a população total, sendo $N = S + I + R$ a soma das classes, dadas a seguir

- Suscetíveis (S): o número de indivíduos sadios que estão suscetíveis a contrair a doença;
- Infectados (I): o número de indivíduos que contraíram a doença e podem transmiti-la aos indivíduos suscetíveis por transmissão direta;
- Removidos (R): o número de indivíduos que foram infectados, mas não são mais portadores da doença, por motivo de isolamento, cura (adquirindo ou não imunidade) ou morte.

No sistema (1.1), o parâmetro Π é a taxa de recrutamento de indivíduos (incluindo recém nascidos e imigrantes) na classe suscetível. Os demais parâmetros são os seguintes:

- μ é a taxa de mortalidade natural (não induzida pela doença);
- β é a probabilidade de infecção por contato por unidade de tempo;
- α é a taxa de recuperação;
- δ é a taxa na qual os indivíduos recuperados perdem sua imunidade (adquirida pela infecção).

A função $f(I, \nu)$ será assumida de classe $C^3(\mathbb{R})$ para I e $\nu > 0$ um parâmetro. Em geral, $f(I, \nu)$ é uma função não-linear que satisfaz algumas condições específicas que serão abordadas na seção 3.2.

Ao apresentarmos os parâmetros de (1.1), temos que o modelo SIRS é uma extensão do modelo SIR, ou seja, do modelo epidemiológico onde os indivíduos recuperados não voltam para a classe suscetíveis ($\delta = 0$).

O modelo SIRS clássico pode ser obtido do modelo (1.1) quando a constante $p = 1$ e a função f for nula, sendo esse, dado como

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Pi - \beta \frac{IS}{N} - \mu S + \delta R, \\ \frac{dI}{dt} = \beta \frac{IS}{N} - (\mu + \alpha)I, \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I - (\mu + \delta)R. \end{cases} \quad (1.2)$$

Contudo, temos que o objeto de estudo é o modelo (1.2) com uma alteração da taxa de incidência $(\beta IS)/N$, para a seguinte taxa de incidência não-linear geral

$$\beta[1 + f(I, \nu)] \frac{IS^p}{N}, \quad (1.3)$$

onde condições para a ocorrência de pontos de equilíbrios e bifurcações serão estabelecidas no modelo, conforme o estudo feito em [1]. Em [7] e [17], uma análise do modelo SIRS com uma taxa de incidência não-linear específica foi usada para ilustrar o fato de que bifurcações ocorrerão.

Para o estudo de bifurcações, alguns parâmetros que estão associados ao modelo serão perturbados, e as respectivas mudanças qualitativas sofridas no modelo, devida à essas perturbações, serão analisadas. Nessas mudanças qualitativas, podem ocorrer o surgimento ou desaparecimento de órbitas periódicas, ou até mesmo o surgimento de pontos de equilíbrios. Assim, as perturbações nos parâmetros do modelo (1.1) geram bifurcações que serão os tópicos abordados nesta dissertação, dentre os quais, as bifurcações de Hopf, de Sela-Nó e Bogdanov-Takens.

Mais precisamente, a bifurcação de Hopf está associada à situação em que um ponto crítico de um sistema troca a sua estabilidade e faz surgir ou desaparecer uma órbita periódica em função da variação de um parâmetro. Essa troca da estabilidade ocorre quando os autovalores da matriz jacobiana do sistema no ponto crítico são complexos diferentes de zero e com parte real nula. No caso específico do sistema (1.1), isso ocorre quando o parâmetro ν , presente na função f , atinge um valor específico. Para o estudo dessa bifurcação, trabalharemos com a forma normal da bifurcação de Hopf, uma vez que a forma normal nos permite fazer um estudo local da estrutura qualitativa do sistema não-linear (1.1). Outro ponto importante que estudaremos, é a classificação dessa bifurcação, que pode ser supercrítica ou subcrítica dependendo do sinal de um parâmetro definido como coeficiente cúbico da forma normal do modelo.

Já a bifurcação de Sela-Nó está relacionada com o surgimento ou desaparecimento de pontos críticos ao variarmos apenas um parâmetro do modelo. Mais precisamente, tal situação ocorre quando a matriz jacobiano de um sistema em um ponto de crítico possui exatamente um autovalor não nulo. Dessa forma, o objetivo é encontrar as condições necessárias, no sistema, para que tal situação ocorra. Essa bifurcação será encontrada usando o Teorema de Sotomayor que classifica bifurcações de codimensão um em \mathbb{R}^2 através da diferencial do campo e dos seus autovalores.

Ao contrário das bifurcações tratadas anteriormente, a bifurcação de Bogdanov-Takens somente pode ocorrer através da variação de dois parâmetros. No caso bidimensional, um ponto crítico é chamado de Bogdanov-Takens se possui multiplicidade igual a dois e o jacobiano do sistema no mesmo ponto possui autovalores nulos.

A justificativa biológica para estudarmos bifurcações em modelos epidemiológicos, ou seja, "compreender padrões de periodicidade e identificar os fatores específicos posteriores a esses surtos periódicos é de extrema relevância para prever e controlar a propagação de doenças infecciosas que ocorrem entre um indivíduo infeccioso e um suscetível"[7, p.93].

Para o aprofundamento de tal estudo, trabalharemos com o artigo *On Equilibria Stability in an Epidemiological SIR Model with Recovery–Dependent Infection Rate* [3], e como centro de estudo, o artigo *Bifurcation Analysis Of an Sirs Epidemic Model With Generalized Incidence* [1]. Teremos como base para a fundamentação teórica os livros *Differential Equations and Dynamical Systems* [15] de Perko, *An Introduction to Mathematical Epidemiology* [11] de Maia e *Equações Diferenciais Ordinárias* [16] de Sotomayor. Outras fontes para o estudo serão mencionadas ao longo do texto.

Para os próximos capítulos desta dissertação, teremos a seguinte distribuição: no capítulo 2, apresentaremos alguns conceitos preliminares de equações diferenciais ordinárias. No capítulo 3, estabeleceremos alguns conceitos e modificações sobre o modelo (1.1) baseado em [1], e também analisaremos seus pontos de equilíbrio. No capítulo 4, traremos o conceito de bifurcação, juntamente com as condições necessárias no modelo para o surgimento da bifurcação de Hopf, Sela-Nó, Homoclínica e de Bogdanov–Takens. No capítulo 5, faremos a análise numérica do modelo para uma função $f(I, \nu)$ específica, e no capítulo 6, as considerações finais.

2 Preliminares

Antes de começarmos nosso estudo em bifurcações do modelo epidemiológico escolhido, estabeleceremos alguns resultados e definições preliminares, tais como Campos Hiperbólicos, Teorema de Grobman-Hartman, Formas Normais, entre outros.

2.1 Alguns conceitos da teoria de EDO

Realizamos nosso estudo em sistemas de equações diferenciais não-lineares que possuem a seguinte forma

$$\dot{x} = F(x), \quad x(0) = x_0 \quad (2.1)$$

onde $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^m$ é uma função contínua, sendo $\Delta \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto.

Obtermos a expressão explícita da solução do sistema não-linear (2.1) nem sempre é possível, mas podemos encontrar soluções aproximadas através de alguns métodos, tais como: aproximações sucessivas, que também é conhecida como o método de Picard, métodos numéricos como Runge–Kutta, entre outros. Os métodos numéricos, geralmente são usados para formular algumas hipóteses ou obter resultados específicos de um problema. Como o objetivo da dissertação é estudar e analisar os resultados gerais encontrados em [1], se faz necessário um estudo qualitativo do referido sistema, sendo que esse estudo nos permite determinar propriedades gerais de suas soluções sem explicitamente calculá-las. Uma alternativa para o estudo qualitativo do comportamento local das soluções de (2.1) se deu através do teorema de Grobman–Hartman (2.1.1), onde esse garante que localmente o comportamento de um campo vetorial não-linear hiperbólico será o mesmo que o de um sistema linear do tipo

$$\dot{x} = \mathbf{A}x \quad (2.2)$$

na vizinhança da origem, onde $\mathbf{A} = DF(x_0)$ é a matriz jacobiana no ponto crítico x_0 do sistema.

Dessa forma, tendo em vista que sabemos estudar a estrutura qualitativa dos sistemas lineares com mais facilidade, as informações qualitativas a respeito do comportamento local das soluções do sistema não-linear (2.1), podem ser estudadas através do sistema linear (2.2).

2.1.1 Teorema de Grobman–Hartman

Definição 2.1.1. Dizemos que a matriz $A \in L(\mathbb{R})^n$ é hiperbólica se possui todos os autovalores com parte real não nula.

Um ponto de equilíbrio (ou singular) do campo vetorial F , ou seja, do sistema (2.1), é um ponto $x_0 \in \Delta \subset \mathbb{R}^m$ no qual $F(x_0) = 0$, e um ponto regular, é um ponto $x_0 \in \Delta \subset \mathbb{R}^m$ tal que $F(x_0) \neq 0$.

Definição 2.1.2. Um ponto de equilíbrio $x_0 \in \Delta \subset \mathbb{R}^m$ do sistema (2.1) é dito hiperbólico se a matriz jacobiana $DF(x_0)$ é hiperbólica, ou seja, todos os autovalores da matriz $DF(x_0)$ têm parte real não nula.

Definição 2.1.3. Um ponto de equilíbrio $x_0 \in \Delta \subset \mathbb{R}^m$ do sistema (2.1), na qual a matriz jacobiana $DF(x_0)$ não tem autovalores nulos é chamado de ponto de equilíbrio não–degenerado, caso contrário, é chamado de ponto de equilíbrio degenerado.

A seguir, enunciaremos o teorema de Grobman-Hartman. O teorema é de grande relevância para estudo da estrutura qualitativa dos sistemas não–lineares, pois esse, garante que topologicamente o comportamento local do sistema não–linear (2.1) próximo a um ponto de equilíbrio hiperbólico é tipicamente determinado pelo comportamento do sistema linear (2.2) perto da origem.

Sem perda de generalidade, podemos supor que o ponto de equilíbrio x_0 foi transladado para a origem.

Definição 2.1.4. Dois sistemas autônomos de equações diferenciais, como (2.1) e (2.2) são ditos topologicamente conjugados em uma vizinhança da origem, ou seja, possuem a mesma estrutura qualitativa próxima à origem, se existir um homeomorfismo H que mapeia abertos U e V , que contenham as respectivas origens, e que leva trajetórias de (2.1) em U em trajetórias de (2.2) em V e preserva sua orientação pelo parâmetro t .

Teorema 2.1.1. (Teorema de Grobman-Hartman) Sejam Δ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^m contendo a origem, $F \in C^1(\Delta)$ e φ_t o fluxo do sistema não-linear (2.1). Suponhamos que $F(0) = 0$ e que a matriz $A = DF(0)$ seja hiperbólica. Então, o sistema (2.1) é topologicamente conjugado ao sistema linear $\dot{y} = Ay$. Ou seja, existe um homeomorfismo $H : U \rightarrow V$, com

$U \subset \Delta$ e $V \subset \mathbb{R}^m$ abertos em torno da origem tal que

$$H \circ \varphi_t(x_0) = e^{At} H(x_0);$$

e mapeia trajetórias de (2.1) contidas em U em trajetórias do sistema linear correspondente, contidas em V e preservando a orientação dada pelo parâmetro t .

Dessa forma, conforme em [15], temos o seguinte teorema:

Teorema 2.1.2. *Seja Δ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 contendo a origem e seja $F \in C^2(\Delta)$. Suponhamos que a origem é um ponto crítico hiperbólico do sistema não-linear (2.1). Então, a origem é um nó estável (ou instável) para o sistema (2.1) se e somente se é um nó estável (ou instável) para o sistema (2.2) com $A = DF(0)$. E a origem é um foco estável (ou instável) para o sistema (2.1) se e somente se é um foco estável (ou instável) para o sistema (2.2) com $A = DF(0)$.*

Demonstração. Consulte [15, p.143]. □

Definição 2.1.5. *(Foco-centro) A origem do sistema (2.1) é chamada de foco-centro se existe uma sequência de órbitas fechadas φ_n , com φ_{n+1} no interior de φ_n tal que $\varphi_n \rightarrow \mathbf{0}$ (origem) quando $n \rightarrow \infty$ e tal que toda trajetória entre φ_n e φ_{n+1} espiralam na direção φ_n para φ_{n+1} quando $t \rightarrow \pm\infty$.*

Teorema 2.1.3. *Seja Δ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 contendo a origem e seja $F \in C^1(\Delta)$ com $F(0) = 0$. Suponha que a origem é um centro para sistema linear (2.2) com $A = DF(0)$. Então, a origem é um centro, um foco-centro ou um foco para o sistema não-linear (2.1).*

Demonstração. Consulte [15, p.144] □

Conforme [15, p.145], um foco-centro não pode ocorrer em um sistema analítico¹. Assim, teremos o seguinte corolário

Corolário 2.1.1. *Seja Δ um subconjunto aberto de \mathbb{R}^2 contendo a origem e seja F uma função analítica com $F(0) = 0$. Suponha que a origem é um centro para sistema linear (2.2) com $A = DF(0)$. Então a origem é um centro ou um foco para o sistema não-linear (2.1).*

¹ Sistema composto por funções analíticas, ou seja, funções que podem ser localmente expandidas em séries de Taylor.

2.1.2 Formas Normais

Uma das abordagens mais eficientes para análise de sistemas dinâmicos não-lineares se trata da teoria da forma normal, onde um determinado sistema dinâmico complexo descrito por equações diferenciais pode ser simplificado, através de sucessivas transformações de coordenadas, em uma expressão explícita que preserva a topologia do espaço de fases do sistema original, na vizinhança do ponto de equilíbrio [6, p.138].

Sabemos que uma mudança de coordenadas linear

$$x = \mathbf{T}y$$

transforma uma equação diferencial linear

$$\dot{x} = \mathbf{A}x$$

na seguinte forma

$$\dot{y} = (\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T})y$$

onde $x, y \in \mathbb{R}^m$, \mathbf{A} e \mathbf{T} são matrizes $n \times n$, e \mathbf{T} é não degenerada. Então, sem mudar a estrutura topológica das órbitas, podemos estudar o caso onde a matriz \mathbf{A} está na forma de Jordan.

Para os sistemas não-lineares e não-hiperbólicos temos um procedimento similar, ou seja, conseguimos obter uma forma mais simples da equação via uma mudança de coordenadas usando a teoria de Formas Normais.

A teoria de Formas Normais será útil no estudo das bifurcações, uma vez que bifurcações ocorrem somente em pontos não-hiperbólicos de um sistema de equações diferenciais não-lineares. Assim, a forma normal de cada bifurcação nos permitirá fazer um estudo local da estrutura qualitativa do sistema nesses pontos.

2.1.3 Teorema de Poincaré–Bendixson

Definição 2.1.6. *Sejam $F : \Delta \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ um campo vetorial de classe C^K , $1 \leq K \leq \infty$ definido no aberto Δ , e $\varphi_p(t) = \varphi(t, p)$ uma órbita de F passando por p , definida do seu*

intervalo máximo $I_p = (\omega_-(p), \omega_+(p))$. Se $\omega_-(p) = -\infty$ e $\omega_+(p) = +\infty$, definiremos os conjuntos ω -limite e α -limite de p por

$$\omega(p) = \{q \in \Delta : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow \infty \text{ e } \varphi_p(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}$$

$$\alpha(p) = \{q \in \Delta : \exists(t_n) \text{ com } t_n \rightarrow -\infty \text{ e } \varphi_p(t_n) \rightarrow q, \text{ quando } n \rightarrow \infty\}.$$

Definição 2.1.7. A semi-órbita positiva passando por p , denotada por γ_p^+ , é definida por $\gamma_p^+ = \{\varphi(t, p) : t \geq 0\}$.

Teorema 2.1.4. O teorema de Poincaré– Bendixson

Seja $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma órbita de F definida para todo $t \geq 0$ tal que γ_p^+ esteja contida em um compacto $K \subset \Delta \subset \mathbb{R}^2$. Suponha que o campo F possui um número finito de pontos de equilíbrio em $\omega(p)$. Então, têm-se as seguintes alternativas:

1. Se $\omega(p)$ contém somente pontos regulares, então $\omega(p)$ é uma órbita periódica;
2. Se $\omega(p)$ contém pontos regulares e singulares, então $\omega(p)$ consiste de um conjunto de órbitas, cada uma das quais tende a um desses pontos singulares quando $t \rightarrow \pm\infty$;
3. Se $\omega(p)$ não contém pontos regulares, então $\omega(p)$ é um ponto singular.

Demonstração. Consulte [16, p.134] □

Teorema 2.1.5. Aplicação do teorema de Poincaré– Bendixson

Seja F um campo vetorial de classe C^1 num conjunto aberto $\Delta \subset \mathbb{R}^2$. Se γ é uma órbita fechada de F tal que $\text{Int}^2 \gamma \subset \Delta$ então existe um ponto singular de F contido em $\text{Int} \gamma$.

Demonstração. Consulte [16, p.140] □

² Interior da órbita fechada γ .

3 Termos epidemiológicos e pontos de equilíbrio

Neste capítulo, apresentaremos alguns termos da área epidemiológica que serão necessários para o entendimento do nosso trabalho e, também, analisaremos condições e teoremas para a existência dos pontos de equilíbrio do modelo (1.1), conforme [1].

3.1 O número básico de reprodução (\mathcal{R}_0)

O número básico de reprodução \mathcal{R}_0 é um termo matemático usado em epidemiologia para indicar o quão contagiosa é uma doença específica. Como discutido em [4], o número básico de reprodução (\mathcal{R}_0), é o número médio de casos secundários¹ produzidos, em uma população completamente suscetível, por um indivíduo infectado. Assim, o valor indica o número de outras pessoas que uma única pessoa infectada irá contagiar, assumindo que todas as outras pessoas estão suscetíveis a contrair a doença. Por exemplo, sendo $\mathcal{R}_0 = 4$ significa que, no início de uma epidemia, cada pessoa infectada irá contagiar outras quatro.

Dentro do campo da epidemiologia, os valores de \mathcal{R}_0 são usados para estimar a expansão ou a erradicação de uma doença, de forma que, como em [5], para alguns modelos

- Se $\mathcal{R}_0 < 1$, então, em média, um indivíduo infectado produz menos de um novo indivíduo infectado ao longo de seu período infeccioso, e a infecção pode não se espalhar;
- Se $\mathcal{R}_0 > 1$, então, cada indivíduo infectado produz, em média, mais de uma nova infecção, dessa forma, a doença pode-se propagar em uma população.

A definição do \mathcal{R}_0 para diferentes tipos de modelos epidemiológicos ainda levanta muita discussão entre cientistas da área epidemiológica. Essa definição depende de muitos termos que fogem o objetivo deste trabalho. Dessa forma, não discutiremos a teoria por trás da definição do número básico de reprodução, mas para um leitor mais interessado, assim como em [13] e em [11, p.104], o \mathcal{R}_0 que usaremos em nosso trabalho pode ser calculado como "o maior autovalor

¹ "Os casos secundários devem ser entendidos como uma infecção adquirida em um momento posterior ao do caso primário, de um portador que, provavelmente, compõe o grupo de contatos íntimos." [2]

positivo da matriz chamada de próxima geração"[11, p.107]. Uma discussão similar pode ser encontrada em [14].

3.2 Considerações sobre a função não-linear geral $f(I, \nu)$

Como já mencionado na introdução desta dissertação, as transições entre as classes do modelo estudado são matematicamente expressas pelas equações (1.1):

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Pi - \beta[1 + f(I, \nu)]\frac{IS^p}{N} - \mu S + \delta R, \\ \frac{dI}{dt} = \beta[1 + f(I, \nu)]\frac{IS^p}{N} - (\mu + \alpha)I, \\ \frac{dR}{dt} = \alpha I - (\mu + \delta)R, \end{cases}$$

onde a função $f(I, \nu) \in C^3(\mathbb{R})$, para $I \geq 0$ e $\nu \geq 0$ um parâmetro, é não-linear e satisfaz as seguintes hipóteses:

- $A_1) f(0, \nu) = f(I, 0) = 0;$
- $A_2) \frac{\partial f}{\partial \nu} > 0$ para $\nu > 0;$
- $A_3) \frac{\partial f}{\partial I} > 0$ para $I > 0;$
- $A_4) \frac{\partial^2 f}{\partial I^2} \leq 0$ para $I > 0.$

De [1], temos da hipótese A_1 que quando I e ν assumem valores pequenos, a taxa de incidência passa a ter o termo $\beta I/N$ dominante, uma vez que f assumirá valores positivos próximos de zero, e para valores grandes de I e ν , o termo dominante passa a ser $f(I, \nu)I/N$.

As hipóteses A_2 e A_3 , indicam que a função f cresce a medida que I ou ν crescem, já a suposição A_4 , garante que f têm sua concavidade voltada para baixo, o que, de certa forma, implica em uma saturação da taxa de crescimento da função.

O fator S^p , na taxa de incidência (1.3), é considerada por [1], como uma forma específica ao invés de considerar uma situação mais geral dada por uma função $\psi(S)$ que satisfaça as condições $\psi(0) = 0$ e $\psi'(S) \geq 0$ para $S \geq 0$. Para maiores detalhes veja [12].

Vale ressaltarmos que, uma complicação matemática, como o uso de uma função f não-linear geral em um modelo SIRS, não é algo criado para simplesmente estudarmos bifurcações. Esses modelos existem, e a não linearidade da função f vem de vários fatores que necessariamente afetam a taxa de incidência como, por exemplo, o uso de máscaras de proteção por parte da população, a diminuição da circulação de pessoas com o fechamento do comércio, entre outros.

3.3 Pontos de Equilíbrio do Modelo

No modelo (1.1), sempre teremos um único ponto de equilíbrio livre de doença (ELD), ou seja, onde o número de infectados é igual a zero, ($I = 0$). Poderemos ainda, ter outros pontos de equilíbrio, sendo esses, chamados de pontos de equilíbrio endêmico.

Para encontrarmos o equilíbrio livre de doença (ELD), basta encontrarmos os valores de S e R tais que suas derivadas sejam nulas. Uma vez que, nesse caso $I = 0$ e $f(0, \nu) = 0$ (de A_1), teremos

$$\frac{dS}{dt} = \Pi - \mu S \quad (3.1)$$

e

$$\frac{dR}{dt} = -(\mu + \delta)R, \quad (3.2)$$

tendo como equilíbrio $S = \Pi/\mu$ e $R = 0$ respectivamente. Assim, obtemos o ponto ELD $\xi_0 = (\Pi/\mu, 0, 0)$.

Para encontrarmos os pontos de equilíbrio endêmico, somaremos as três equações do modelo (1.1), onde

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} + \frac{dI}{dt} + \frac{dR}{dt} &= \Pi - \mu S + \delta R - (\mu + \alpha)I + \alpha I - (\mu + \delta)R \\ &= \Pi - \mu S - \mu I - \mu R \\ &= \Pi - \mu(S + R + I), \end{aligned}$$

e a população total $N = S + I + R$ obedecerá a seguinte equação

$$\frac{dN}{dt} = \Pi - \mu N. \quad (3.3)$$

Ao resolvermos a equação (3.3), obtemos que $N(t) = c_1 e^{-\mu t} + \Pi/\mu$ e que $\lim_{t \rightarrow \infty} N(t) = \Pi/\mu$. Dessa forma, em qualquer equilíbrio $\xi_0^* = (S^*, R^*, I^*)$, temos $N^* = S^* + I^* + R^* = \Pi/\mu$, e

$$\Omega = \left\{ (S, I, R) : S, I, R \geq 0, S + I + R = \frac{\Pi}{\mu} \right\}$$

uma região positivamente invariante para o modelo (1.1), isto é, dado um ponto q em Ω , a órbita do sistema de equações diferenciáveis passando por q , $\varphi(t, q)$, permanecerá em Ω para todo t positivo. Daqui em diante, estudaremos a dinâmica do modelo (1.1) no primeiro octante, ou seja, na região Ω , e encontraremos os seus pontos de equilíbrio endêmico também em Ω .

Ao resolvermos, no ponto de equilíbrio endêmico, a segunda equação do sistema (1.1), onde

$$\beta[1 + f(I, \nu)] \frac{IS^p}{N} - (\mu + \alpha)I = 0,$$

teremos a seguinte expressão para S^p :

$$S^p = \frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f(I, \nu)]} N \quad (3.4)$$

Como $N = \Pi/\mu$, segue que (3.4) se reescreve da seguinte forma:

$$S^p = \frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f(I, \nu)]} \frac{\Pi}{\mu}. \quad (3.5)$$

Da mesma forma, a partir da terceira equação do sistema (1.1), no equilíbrio endêmico, teremos

$$\alpha I - (\mu + \delta)R = 0,$$

ou seja, obteremos a seguinte expressão para R :

$$R = \frac{\alpha I}{\mu + \delta}. \quad (3.6)$$

Ao substituírmos (3.5) e (3.6) na primeira equação do sistema (1.1), para I em equilíbrio, teremos

$$\Pi - \beta[1 + f(I; \nu)] \frac{I}{N} \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f(I, \nu)]} \frac{\Pi}{\mu} \right) - \mu S + \delta \left(\frac{\alpha I}{\mu + \delta} \right) = 0,$$

e ao usarmos $N = \Pi/\mu$, após uma simplificação obteremos

$$\Pi - (\mu + \alpha)I - \mu S + \delta \left(\frac{\alpha I}{\mu + \delta} \right) = 0.$$

Da equação (3.5), teremos que

$$S = \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f(I, \nu)]} \frac{\Pi}{\mu} \right)^{1/p}, \quad (3.7)$$

logo, ao usarmos (3.7), segue que

$$\Pi - (\mu + \alpha)I - \mu \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f(I, \nu)]} \frac{\Pi}{\mu} \right)^{1/p} + \delta \left(\frac{\alpha I}{\mu + \delta} \right) = 0. \quad (3.8)$$

Assim, obteremos

$$\Pi - \frac{(\mu + \delta)(\mu + \alpha)I - \delta(\alpha I)}{\mu + \delta} - \mu \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f(I, \nu)]} \frac{\Pi}{\mu} \right)^{1/p} = 0.$$

Após colocarmos I em evidência e efetuarmos a distributiva, obteremos a seguinte equação:

$$\Pi - \frac{\mu(\mu + \alpha + \delta)}{\mu + \delta} I - \mu \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f(I, \nu)]} \frac{\Pi}{\mu} \right)^{1/p} = 0. \quad (3.9)$$

Ao isolarmos I na equação (3.9), teremos que

$$\begin{aligned} I &= \frac{(\mu + \delta)\Pi}{\mu(\mu + \alpha + \delta)} - \frac{\mu(\mu + \delta)}{\mu(\mu + \alpha + \delta)} \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f(I, \nu)]} \frac{\Pi}{\mu} \right)^{1/p} \\ &= \frac{(\mu + \delta)}{\mu(\mu + \alpha + \delta)} \left[\Pi - \mu \left(\frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f(I, \nu)]} \frac{\Pi}{\mu} \right)^{1/p} \right]. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Usaremos o número básico de reprodução \mathcal{R}_0 , discutido na seção (3.1) e definido em [1] como

$$\mathcal{R}_0 = \frac{\beta}{\mu + \alpha} \left(\frac{\Pi}{\mu} \right)^{p-1}, \quad (3.11)$$

onde, ao reescrevermos (3.11) como

$$\frac{\mu + \alpha}{\beta} = \frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(\frac{\Pi}{\mu} \right)^{p-1},$$

e usarmos na equação (3.10), teremos

$$\begin{aligned}
 I &= \frac{(\mu + \delta)}{\mu(\mu + \alpha + \delta)} \left[\Pi - \mu \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(\frac{\Pi}{\mu} \right)^{p-1} \frac{1}{[1 + f(I, \nu)]} \frac{\Pi}{\mu} \right)^{1/p} \right] \\
 &= \frac{(\mu + \delta)}{\mu(\mu + \alpha + \delta)} \left[\Pi - \mu \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0} \left(\frac{\Pi}{\mu} \right)^p \frac{1}{[1 + f(I, \nu)]} \right)^{1/p} \right] \\
 &= \frac{(\mu + \delta)}{\mu(\mu + \alpha + \delta)} \left[\Pi - \frac{\mu \Pi}{\mu} \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0 [1 + f(I, \nu)]} \right)^{1/p} \right] \\
 &= \frac{(\mu + \delta) \Pi}{\mu(\mu + \alpha + \delta)} \left[1 - \left(\frac{1}{\mathcal{R}_0 [1 + f(I, \nu)]} \right)^{1/p} \right].
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

Logo, as raízes de (3.9) são os pontos fixos da seguinte função

$$\phi(I, \nu) \equiv k \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{1/p} [1 + f(I, \nu)]^{1/p}} \right) < k, \tag{3.13}$$

onde $k = (\mu + \delta) \Pi / [\mu(\mu + \alpha + \delta)]$, ou seja, queremos encontrar I^* tal que $\phi(I^*, \nu) = I^*$.

Observemos que como

$$k < \frac{\Pi}{\mu} \Rightarrow \phi(I, \nu) < \frac{\Pi}{\mu}, \tag{3.14}$$

logo, os pontos fixos de ϕ estão na região Ω .

Para prosseguirmos, calcularemos a primeira e a segunda derivada da função ϕ :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial I} &= \frac{\partial \left[-k \left(\mathcal{R}_0 (1 + f(I, \nu)) \right)^{-1/p} \right]}{\partial I} \\
 &= -k \left[-\frac{1}{p} \left(\mathcal{R}_0 (1 + f(I, \nu)) \right)^{-1/p-1} \right] \mathcal{R}_0 f_I(I, \nu) \\
 &= k \left[\frac{1}{p} (\mathcal{R}_0)^{-1/p} \left((1 + f(I, \nu)) \right)^{-1/p-1} \right] f_I(I, \nu) \\
 &= \frac{k f_I(I, \nu)}{p \mathcal{R}_0^{1/p} [1 + f(I, \nu)]^{1+1/p}}.
 \end{aligned}$$

Como k e p são positivos, $\mathcal{R}_0 \geq 0$, e da condição A_3 temos que f é crescente, segue que a primeira derivada da função ϕ é positiva.

Ao calcularmos a segunda derivada da função ϕ , teremos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \phi}{\partial I^2} &= k \frac{f_{II}(I, \nu) p \mathcal{R}_0^{1/p} [1 + f(I, \nu)]^{1+1/p} - f_I(I, \nu) p \mathcal{R}_0^{1/p} (1 + 1/p) [1 + f(I, \nu)]^{1/p} f_I(I, \nu)}{p^2 \mathcal{R}_0^{2/p} [1 + f(I, \nu)]^{2+2/p}} \\ &= k \frac{p \mathcal{R}_0^{1/p} [1 + f(I, \nu)]^{1/p} \left[f_{II}(I, \nu) [1 + f(I, \nu)] - (1 + 1/p) f_I^2(I, \nu) \right]}{p^2 \mathcal{R}_0^{2/p} [1 + f(I, \nu)]^{2+2/p}} \\ &= k \frac{f_{II}(I, \nu) [1 + f(I, \nu)] - (1 + 1/p) f_I^2(I, \nu)}{p \mathcal{R}_0^{1/p} [1 + f(I, \nu)]^{2+1/p}}. \end{aligned}$$

Dessa forma, da condição A_4 , temos $f_{II} \leq 0$, o que implica que $\partial \phi / \partial I^2$ é negativa. Assim, para determinarmos a quantidade de pontos de equilíbrio endêmico do modelo (1.1) nas condições em que $\mathcal{R}_0 > 1$, $\mathcal{R}_0 = 1$ e $\mathcal{R}_0 < 1$, consideraremos algumas propriedades da função ϕ :

1. $\phi_0 \equiv \phi(0, \nu) = k \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{1/p}} \right)$;
2. $\frac{\partial \phi}{\partial I} = \frac{k f_I(I, \nu)}{p \mathcal{R}_0^{1/p} [1 + f(I, \nu)]^{1+1/p}} > 0$;
3. $\frac{\partial^2 \phi}{\partial I^2} = k \frac{f_{II}(I, \nu) [1 + f(I, \nu)] - (1 + 1/p) f_I^2(I, \nu)}{p \mathcal{R}_0^{1/p} [1 + f(I, \nu)]^{2+1/p}} < 0$.

Por definição, a função ϕ (3.13) é limitada superiormente uma vez que $\phi < k$. Dessa forma, ao ser ϕ uma função crescente (propriedade (2)) e limitada, teremos que o

$$\lim_{I \rightarrow \infty} \phi(I, \nu) \equiv \phi_\infty$$

existe e é finito.

A seguir, encontraremos a quantidade de pontos de equilíbrio endêmico. Ao considerarmos $\mathcal{R}_0 > 1$, teremos

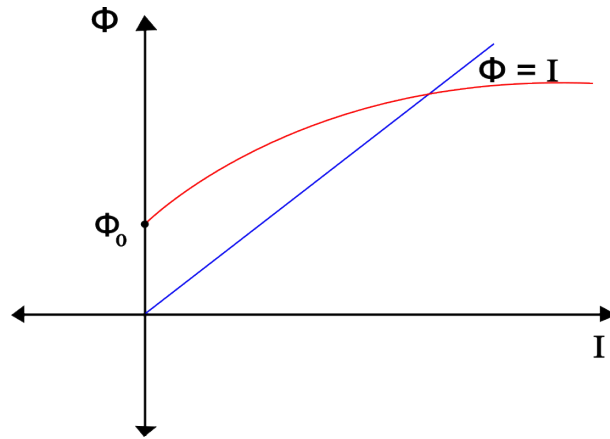
$$\frac{1}{\mathcal{R}_0^{1/p}} < 1,$$

então

$$\phi_0 = k \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{1/p}} \right) > 0. \quad (3.15)$$

Assim, como $\phi_0 > 0$ e ϕ é crescente, além da existência e finitude de ϕ_∞ , teremos ϕ_∞ positivo. Da propriedade (3), temos que ϕ é côncavo para baixo. Dessa forma, com todas essas considerações, existe um único $I^* > 0$ tal que $\phi(I^*, \nu) = I^*$ (cf. figura (1)).

Figura 1 – A existência de um único I^* se $\mathcal{R}_0 > 1$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Sendo $\mathcal{R}_0 = 1$, temos

$$\phi_0 = k \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{1/p}} \right) = 0. \quad (3.16)$$

Para calcularmos a quantidade de pontos de equilíbrio endêmico, precisaremos avaliar a derivada da função ϕ em $I = 0$. Ao considerarmos $\mathcal{R}_0 = 1$, e da condição A_1 termos que, $f(0, \nu) = 0$, segue que

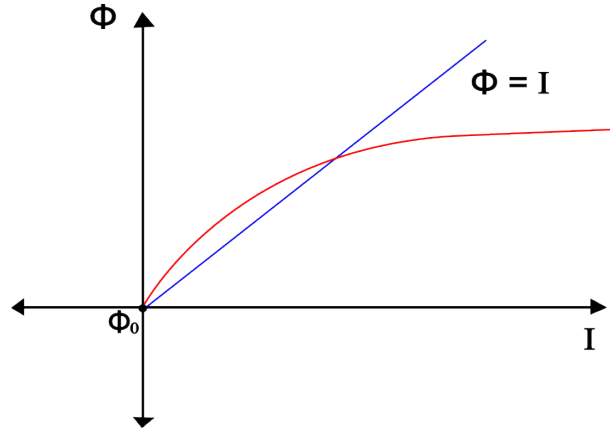
$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial I} \right|_{I=0} = \frac{k f_I(0, \nu)}{p}. \quad (3.17)$$

Logo,

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial I} \right|_{I=0} = \frac{k f_I(0, \nu)}{p} > 1 \iff f_I(0, \nu) > \frac{p}{k}. \quad (3.18)$$

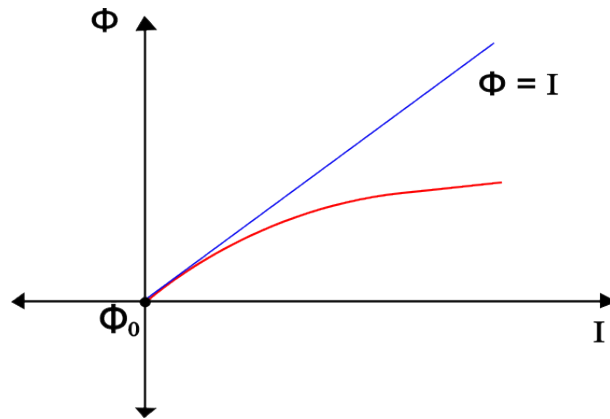
Dessa forma, a equação $\phi(I, \nu) = I$ tem uma única raiz se $f_I(0, \nu) > p/k$, já que sua derivada em $I = 0$ é maior que a derivada da reta $\phi = I$ no mesmo ponto (cf. figura (2)) e não possui raiz caso contrário, já que terá derivada menor que uma unidade (cf. figura (3)),

Figura 2 – A existência de um único I^* se $\mathcal{R}_0 = 1$ e $f_I(0, \nu) > p/k$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 3 – Não existência de I^* se $\mathcal{R}_0 = 1$ e $f_I(0, \nu) \leq p/k$.



Fonte: Elaborado pela autora.

Finalmente, se $\mathcal{R}_0 < 1$, então

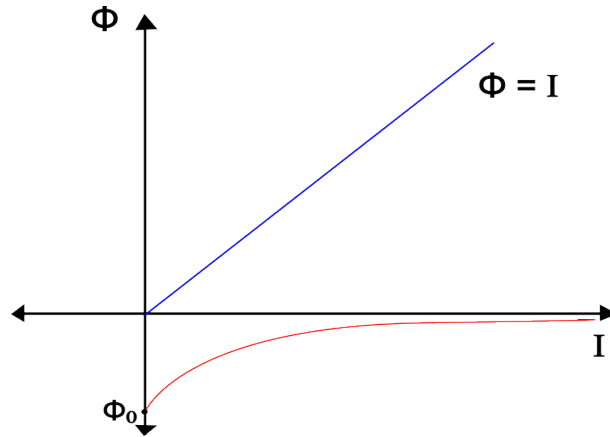
$$\phi(0, \nu) = k \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{1/p}} \right) < 0 \tag{3.19}$$

Neste caso, ao observarmos a função ϕ :

$$\phi(I, \nu) \equiv k \left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0^{1/p} [1 + f(I, \nu)]^{1/p}} \right), \tag{3.20}$$

se $\lim_{I \rightarrow \infty} f(I, \nu) \equiv f_\infty(\nu) \leq 1/\mathcal{R}_0 - 1$ então $\phi_\infty \leq 0$ e, assim, nenhuma raiz positiva da equação $\phi(I, \nu) = I$ existirá (cf. figura (4)).

Figura 4 – Não existência de pontos de equilíbrios I^* se $\mathcal{R}_0 < 1$ e $f_\infty(\nu) \leq 1/\mathcal{R}_0 - 1$



Fonte: Elaborado pela autora.

Se $f_\infty(\nu) > 1/\mathcal{R}_0 - 1$, então dependendo da forma funcional da função ϕ , a equação $\phi(I, \nu) = I$ pode ter nenhuma, uma ou duas raízes positivas. Portanto, como em [1], teremos o seguinte teorema:

Teorema 3.3.1. (*Quantidade de pontos de equilíbrio endêmico em função do número básico de reprodução \mathcal{R}_0*)

1. Se $\mathcal{R}_0 > 1$, então o modelo (1.1) tem um único ponto de equilíbrio endêmico ;
2. Se $\mathcal{R}_0 = 1$, então o modelo (1.1) tem um único ponto de equilíbrio endêmico se $f_I(0, \nu) > p/k$ e nenhum equilíbrio endêmico se $f_I(0, \nu) \leq p/k$;
3. Se $\mathcal{R}_0 < 1$, então:
 - a) o modelo (1.1) não tem ponto de equilíbrio endêmico sempre que $f_\infty(\nu) \leq 1/\mathcal{R}_0 - 1$;
 - b) o modelo (1.1) pode ter nenhum, um ou dois pontos de equilíbrio endêmicos se $f_\infty(\nu) > 1/\mathcal{R}_0 - 1$.

Ao estabelecermos o teorema (3.3.1), temos que a existência de dois pontos de equilíbrio endêmico só pode ocorrer se $\mathcal{R}_0 < 1$ e $f_\infty(\nu) > 1/\mathcal{R}_0 - 1$. Dessa forma, tendo essas considerações, mostraremos, a seguir, as condições sob as quais o modelo exibe dois pontos de equilíbrio endêmico.

Consideremos a função

$$G(I, \nu) = \phi(I, \nu) - I. \quad (3.21)$$

Suponhamos que $f_I(0, \nu) > p/k$, como $\mathcal{R}_0 < 1$, logo

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial I} \right|_{I=0} = \frac{k f_I(I, \nu)}{p \mathcal{R}_0^{1/p}} > 1. \quad (3.22)$$

Dessa forma, como

$$\left. \frac{\partial G}{\partial I} \right|_{I=0} = \left. \frac{\partial \phi}{\partial I} \right|_{I=0} - 1,$$

de (3.22), teremos $\left. \frac{\partial G}{\partial I} \right|_{I=0} > 0$.

Como ϕ_∞ existe e é finito, teremos

$$\lim_{I \rightarrow \infty} \frac{\partial \phi}{\partial I} = 0. \quad (3.23)$$

Assim, $\lim_{I \rightarrow \infty} \frac{\partial G}{\partial I} = -1$. Pela propriedade (3), segue que

$$\frac{\partial^2 G}{\partial I^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial I^2} < 0.$$

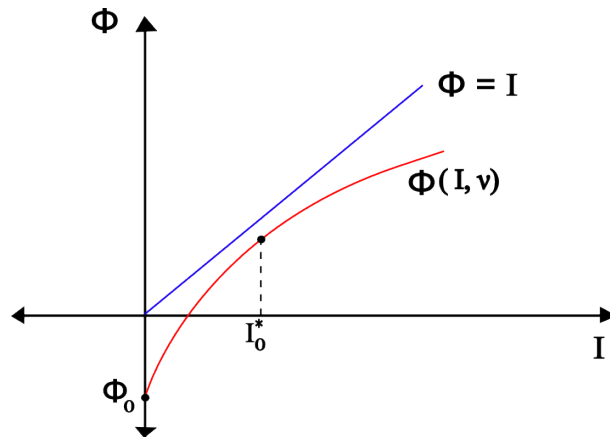
Assim, $\partial G / \partial I$ é uma função monótona decrescente de I , e portanto, como $(\partial G / \partial I)|_{I=0} > 0$ e $\lim_{I \rightarrow \infty} \partial G / \partial I = -1$, pelo teorema do Valor Intermediário, existe um único $I_0^* > 0$ tal que

$$\left. \frac{\partial G}{\partial I} \right|_{I=I_0^*} = 0. \quad (3.24)$$

A unicidade de I_0^* , vem da monotonicidade da função $\frac{\partial G}{\partial I}$. Com esses dados, teremos que a função $\partial G / \partial I$ é positiva no intervalo $(0, I_0^*)$, nula em I_0^* e negativa em (I_0^*, ∞) . Logo, G é uma função crescente no intervalo $(0, I_0^*]$, decrescente em (I_0^*, ∞) com um valor máximo no ponto I_0^* .

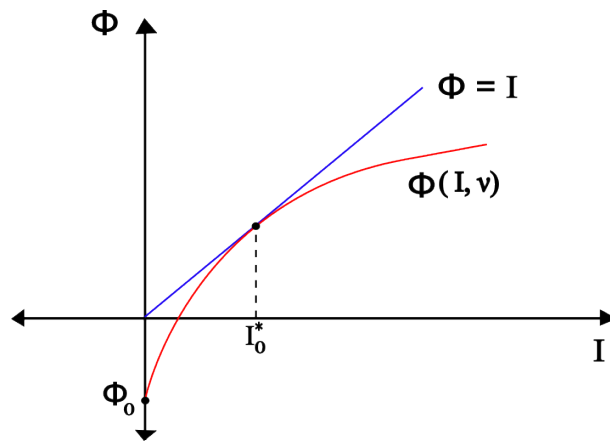
Da equação (3.24), teremos que a função $\phi(I, \nu)$ poderá assumir umas das três formas a seguir no ponto I_0^* :

Figura 5 – $(\partial G/\partial I)|_{I=I_0^*} = (\partial\phi/\partial I)|_{I=I_0^*} - 1 = 0$, mas sem ponto fixo.



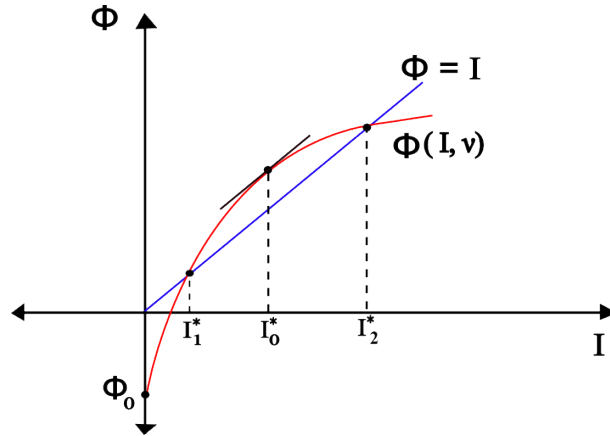
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 6 – $(\partial G/\partial I)|_{I=I_0^*} = (\partial\phi/\partial I)|_{I=I_0^*} - 1 = 0$, com um ponto fixo



Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 7 – $(\partial G/\partial I)|_{I=I_0^*} = (\partial\phi/\partial I)|_{I=I_0^*} - 1 = 0$, com dois pontos fixos



Fonte: Elaborado pela autora.

Ao calcularmos $G(0, \nu)$ para $\mathcal{R}_0 < 1$, temos de (3.19) que,

$$G(0, \nu) = \phi(0, \nu) < 0, \tag{3.25}$$

e para $\mathcal{R}_0 = 1$, teremos de (3.16) que,

$$G(0, \nu) = \phi(0, \nu) = 0. \tag{3.26}$$

Por hipótese, a função $f \in C^3(\mathbb{R}^3)$, e portanto, o mesmo se aplicada para G . Dessa forma, por continuidade da derivada da G , segue-se que existe um \mathcal{R}^* , com $\mathcal{R}^* < 1$, para o qual $\frac{\partial G}{\partial I}$ tem uma única raiz I_0^* com

$$\left. \frac{\partial G}{\partial I} \right|_{I=I_0^*} = G(I_0^*) = 0,$$

ou seja, $G(I_0^*, \nu) = \phi(I_0^*, \nu) - I_0^* = 0$. Assim, teremos um único ponto de equilíbrio endêmico para $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}^*$, e para valores de $\mathcal{R}_0 \in (\mathcal{R}^*, 1)$, G terá duas raízes I_1^* e I_2^* com $I_1^* < I_2^*$, correspondendo a dois pontos de equilíbrio endêmico do modelo.

Mostramos a seguir a unicidade de \mathcal{R}^* . Para calcularmos $\left(\frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right)$, teremos que

$$\frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} = \frac{\partial I}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{R}_0}, \tag{3.27}$$

logo,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \phi}{\partial \mathcal{R}_0} &= \frac{k}{p\mathcal{R}_0^{1/p+1}[1+f]^{1/p}} + \frac{k}{p\mathcal{R}_0^{1/p}[1+f(I,\nu)]^{1+1/p}} \left(\frac{\partial f}{\partial \mathcal{R}_0} \right) \\
 &= \frac{k}{p\mathcal{R}_0^{1/p+1}[1+f]^{1/p}} + \frac{k}{p\mathcal{R}_0^{1/p}[1+f(I,\nu)]^{1+1/p}} \left(\frac{\partial f}{\partial I} \right) \left(\frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right) \\
 &= \frac{k}{p\mathcal{R}_0^{1/p+1}[1+f]^{1/p}} + \frac{k f_I}{p\mathcal{R}_0^{1/p}[1+f(I,\nu)]^{1+1/p}} \left(\frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right) \\
 &= \frac{k}{p\mathcal{R}_0^{1/p+1}[1+f]^{1/p}} + \frac{\partial \phi}{\partial I} \left(\frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right).
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

Logo,

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_1^*} &= \left. \frac{\partial I}{\partial \phi} \right|_{I=I_1^*} \left[\left. \frac{k}{p\mathcal{R}_0^{1+\frac{1}{p}}[1+f(I,\nu)]^{\frac{1}{p}}} \right|_{I=I_1^*} + \left. \frac{\partial \phi}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_1^*} \right] \\
 &= \left. \frac{\partial I}{\partial \phi} \frac{k}{p\mathcal{R}_0^{1+\frac{1}{p}}[1+f(I,\nu)]^{\frac{1}{p}}} \right|_{I=I_1^*} + \left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_1^*}.
 \end{aligned}$$

Ao assumirmos $\left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_1^*} > 0$, e termos em conta que $\left. \frac{\partial \phi}{\partial I} \right|_{I=I_1^*} > 1$, segue que

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_1^*} &= \left. \frac{\partial I}{\partial \phi} \frac{k}{p\mathcal{R}_0^{1+\frac{1}{p}}[1+f(I,\nu)]^{\frac{1}{p}}} \right|_{I=I_1^*} + \left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_1^*} \\
 &> \frac{\alpha k}{p\mathcal{R}_0^{1+\frac{1}{p}}[1+f(I,\nu)]^{\frac{1}{p}}} \Big|_{I=I_1^*} + \left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_1^*} > \left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_1^*}
 \end{aligned}$$

com $0 < \alpha < \left. \frac{\partial I}{\partial \phi} \right|_{I=I_1^*}$. Logo, temos uma contradição. Dessa forma, $(\partial I / \partial \mathcal{R}_0)|_{I=I_1^*} < 0$, e portanto, o número de indivíduos infectados, no ponto de equilíbrio endêmico menor, diminui quando \mathcal{R}_0 aumenta. De forma análoga, ao assumirmos $\left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_2^*} < 0$, e termos em conta que

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial I} \right|_{I=I_2^*} < 1, \text{ segue que}$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_2^*} &= \left. \frac{\partial I}{\partial \phi} \frac{k}{p \mathcal{R}_0^{1+\frac{1}{p}} [1 + f(I, \nu)]^{\frac{1}{p}}} \right|_{I=I_2^*} + \left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_2^*} \\ &> \left. \frac{k}{p \mathcal{R}_0^{1+\frac{1}{p}} [1 + f(I, \nu)]^{\frac{1}{p}}} \right|_{I=I_2^*} + \left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_2^*} > \left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_2^*} \end{aligned}$$

uma contradição. Logo, $\left. \frac{\partial I}{\partial \mathcal{R}_0} \right|_{I=I_2^*} > 0$, portanto, o número de indivíduos infectados, no ponto de equilíbrio maior, aumenta quando \mathcal{R}_0 aumenta. Portanto, a quantidade \mathcal{R}^* para o qual $\partial(G/\partial I)|_{I=I_0^*} = G(I_0^*) = 0$, é única, e assim, teremos o seguinte teorema.

Teorema 3.3.2. *Se $f_I(0, \nu) > p/k$, então existe um único \mathcal{R}^* com $\mathcal{R}^* < 1$ tal que o modelo (1.1) não tem ponto de equilíbrio endêmico se $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}^*$, um único ponto de equilíbrio endêmico se $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}^*$, e dois pontos de equilíbrio endêmico se $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1$.*

Na próxima seção, para estudarmos estabilidade dos pontos de equilíbrio, iniciaremos por reduzir o modelo (1.1).

3.4 Modelo Reduzido e dinâmica do modelo

A região Ω é positivamente invariante para o modelo (1.1), e conforme em [1], assumiremos que a população atingiu o seu valor limiar, ou seja, $N \equiv \Pi/\mu = S + I + R$, e ao considerarmos $R = \Pi/\mu - S - I$ na primeira equação do modelo (1.1), obtemos as equações do modelo reduzido, dado a seguir:

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Pi - \left(\frac{\mu}{\Pi}\right)\beta[1+f]IS^p - \mu S + \delta\left(\frac{\Pi}{\mu} - S - I\right), \\ \frac{dI}{dt} = \left(\frac{\mu}{\Pi}\right)\beta[1+f]IS^p - (\mu + \alpha)I. \end{cases} \quad (3.29)$$

em que $f = f(I, \nu)$.

Ao calcularmos a matriz jacobiana do modelo (3.29) em um ponto genérico (S, I) , teremos que, ela é dada por

$$J = \begin{pmatrix} -p\frac{\mu}{\Pi}\beta IS^{p-1}[1 + f(I, \nu)] - (\mu + \delta) & -\frac{\mu}{\Pi}\beta S^p[1 + f + If_I(I, \nu)] - \delta \\ p\frac{\mu}{\Pi}\beta IS^{p-1}[1 + f] & \frac{\mu}{\Pi}\beta S^p[1 + f + If_I(I, \nu)] - (\mu + \alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.30)$$

Como os pontos de equilíbrio do modelo reduzido (3.29) correspondem aos do modelo (1.1), o equilíbrio livre de doença de (3.29), dado por $E_0 = (\Pi/\mu, 0)$, tem a correspondente matriz jacobiana

$$J_0 = \begin{pmatrix} -(\mu + \delta) & -\beta\left(\frac{\Pi}{\mu}\right)^{p-1} - \delta \\ 0 & (\mu + \alpha)(R_0 - 1) \end{pmatrix}$$

Não é difícil ver que os autovalores da matriz J_0 são $\lambda_1 = -(\mu + \alpha)$ e $\lambda_2 = (\mu + \alpha)(R_0 - 1)$. Então E_0 é localmente estável assintoticamente se $\mathcal{R}_0 < 1$, sendo que nessa situação, ambos os autovalores seriam negativos. E, caso contrário, E_0 é instável se $\mathcal{R}_0 > 1$, mais precisamente, E_0 seria um ponto de sela, uma vez que os autovalores teriam sinais contrários.

A seguir, discutiremos como \mathcal{R}_0 se relaciona com a dinâmica da doença, conforme [1]. Suponhamos agora que $\mathcal{R}_0 < 1$. Se o modelo não tem ponto de equilíbrio endêmico, então, da aplicação (2.1.5) do teorema de Poincaré-Bendixson (2.1.4), nenhuma órbita periódica existe na região Ω . Ou seja, também não existem órbitas periódicas atratoras. Assim, como Ω é uma região positivamente invariante, e o equilíbrio livre de doença E_0 é o único equilíbrio em Ω , a estabilidade local de E_0 implica que toda solução iniciada em Ω se aproxima de E_0 . Nessas condições, garantiremos a estabilidade global de E_0 .

Teorema 3.4.1. *Suponhamos $\mathcal{R}_0 < 1$. Se o modelo não tem equilíbrio endêmico, então o equilíbrio livre de doença é globalmente estável assintoticamente.*

Do teorema (3.3.2), sabemos que se $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}^*$, então o modelo (3.29) não possui ponto de equilíbrio endêmico. Assim, temos que o teorema (3.4.1) implica que E_0 é globalmente estável assintoticamente sempre que $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}^*$.

Além disso, se temos as condições (3.a) do teorema (3.3.1), ou seja, $f(I, \nu)$ é limitada e $\mathcal{R}_0 < 1/[1 + f_\infty(\nu)]$, então $\phi_\infty < 0$ e portanto, o modelo não tem equilíbrio endêmico (cf. figura 4). Nessa condições, o equilíbrio livre de doenças também é globalmente assintoticamente estável.

Ao supormos que $f_I(0, \nu) > p/k$ e $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1$, ou seja, condições para a existência de dois pontos de equilíbrio endêmico do modelo (3.4) demonstrada no teorema (3.3.2), teremos o seguinte resultado

Teorema 3.4.2. *Se $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1$, então um dos pontos de equilíbrio endêmico é um ponto de sela e o outro é atrator ou repulsor.*

Demonstração. Ao considerarmos $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < 1$, o teorema (3.3.2) garante a existência de dois pontos de equilíbrio endêmico no modelo reduzido (3.29). Consideremos esses dois pontos por $E_1^* = (S_1^*, I_1^*)$ e $E_2^* = (S_2^*, I_2^*)$ com E_1^* tendo o menor número de infectados e E_2^* o maior.

Ao calcularmos a matriz jacobina (3.30) em um ponto de equilíbrio endêmico $E^* = (S^*, I^*)$, teremos

$$J^*(\nu) = \begin{pmatrix} -a - (\mu + \delta) & -b - \delta \\ a & b - (\mu + \alpha) \end{pmatrix}.$$

onde

$$a = p \frac{\mu}{\Pi} \beta [1 + f(I^*, \nu)] I^* S^{*p-1}, \quad (3.31)$$

$$b = \frac{\mu}{\Pi} \beta [1 + f(I^*, \nu) + I^* f_I(I^*, \nu)] S^{*p}. \quad (3.32)$$

Ao explicitarmos o $\det(\lambda \mathbf{I}_2 - J^*(\nu)) = 0$, em que \mathbf{I}_2 é a matriz identidade, obtemos que

$$\lambda^2 + \lambda(a - b + \mu + \alpha + \mu + \delta) + a(\mu + \alpha + \delta) + (\mu + \delta)(-b + \mu + \alpha). \quad (3.33)$$

Sendo assim, os autovalores da matriz Jacobiana $J^*(\nu)$ são as raízes do polinômio característico

$$P(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda + C, \quad (3.34)$$

com

$$B = a - b + 2\mu + \alpha + \delta \quad (3.35)$$

$$C = a(\mu + \alpha + \delta) + (\mu + \delta)(-b + \mu + \alpha). \quad (3.36)$$

Ao usarmos (3.32), (3.5), (3.11) e $k = (\mu + \delta)\Pi/[\mu(\mu + \alpha + \delta)]$, obtemos que

$$\frac{(\mu + \delta)(-b + \mu + \alpha)}{a(\mu + \alpha + \delta)} = -\frac{kf_I(I, \nu)}{p\mathcal{R}_0^{1/p}[1 + f(I, \nu)]^{1+1/p}} = -\frac{\partial\phi}{\partial I}, \quad (3.37)$$

logo, C pode ser rescrito como

$$\begin{aligned} C &= a(\mu + \alpha + \delta) - a(\mu + \alpha + \delta)\frac{\partial\phi}{\partial I}\Big|_{I=I^*} \\ &= a(\mu + \alpha + \delta)\left(1 - \frac{\partial\phi}{\partial I}\Big|_{I=I^*}\right). \end{aligned} \quad (3.38)$$

Ao sabermos que $\frac{\partial\phi}{\partial I} > 1$ em E_1^* , segue que $C|_{I=I_1^*} < 0$, e, portanto, como C é o produto das raízes de $P(\lambda)$, teremos $P(\lambda)$ com duas raízes de sinais opostos, logo E_1^* é um ponto de sela. Notemos que como $\frac{\partial\phi}{\partial I} < 1$ em E_2^* , segue de (3.38) que $C|_{I=I_2^*} > 0$, então E_2^* não pode ser um ponto de sela, já que o produto das raízes sendo positivo, temos que as duas raízes serão negativas ou positivas. Portanto, E_2^* é atrator ou repulsor.

□

4 Bifurcações

Neste capítulo, apresentaremos e discutiremos a respeito das bifurcações de Hopf, Sela-Nó e Bogdanov-Takens. Além disso, faremos uma análise da estabilidade dos pontos de equilíbrio para obtermos as formas normais de cada modelo de bifurcações estudada, quando for o caso.

4.1 Bifurcações em Pontos de Equilíbrio Não-Hiperbólicos

Da teoria local dos sistemas de equações diferenciais, sabemos que podemos determinar localmente a dinâmica do sistema

$$\dot{x} = F(x), \quad (4.1)$$

onde $x \in \mathbb{R}^m$ e $F = (F_1, \dots, F_n)$, por meio do processo de linearização do sistema em uma vizinhança do ponto de equilíbrio x_0 usando o teorema de Grobman-Hartman (2.1.1) desde que nenhum dos autovalores da matriz jacobiana $DF(x_0)$ tenha parte real nula. Reescrevendo o sistema acima como

$$\dot{x} = F(x, \rho), \quad (4.2)$$

em que $\rho \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de parâmetros e os pontos de equilíbrio do sistema são dados por $F(x^*, \rho) = 0$, temos que, se perturbarmos o sistema (4.2), isto é, se variarmos continuamente o parâmetro ρ , sabemos que sistemas vizinhos, obtidos da perturbação, têm as mesmas propriedades topológicas do sistema (4.2) nos pontos hiperbólicos, uma vez que os autovalores da matriz jacobiana variam continuamente em função do vetor de parâmetros. Desta forma, nossos estudos em bifurcações se concentrarão em pontos críticos não-hiperbólicos. A seguir definiremos o conceito de bifurcação.

4.2 O que é uma bifurcação?

Como sabemos, os sistemas de equações diferenciais que modelam, por exemplo, doenças infecciosas, são compostos por equações que possuem alguns parâmetros, onde definimos em (4.2)

a coleção desses parâmetros como o vetor $\rho \in \mathbb{R}^m$. Ao variarmos ρ , podem ocorrer mudanças na estrutura qualitativa das soluções. Conforme em [8, p. 57], "ao considerarmos o retrato de fase do sistema, à medida que os parâmetros variam, o retrato de fase também varia. Dessa forma, existem duas opções: ou o sistema permanece topologicamente equivalente ao original, ou sua topologia muda". Assim, essas mudanças no retrato de fase são chamadas de bifurcações, e os valores dos parâmetros, onde ocorrem essas mudanças, são chamados de valores de bifurcação. [8, p.57]

A análise de bifurcações para um quantidade expressiva de parâmetros é complexa e as vezes difícil de solucionar. Existem métodos que ajudam a sanar essa dificuldade, dentre os quais, pode-se destacar o uso de formas normais e o Teorema da Variedade central, que leva ao teorema de Sotomayor.

Na medida do possível, abordaremos ao longo de cada seção seguinte, uma teoria que descreve e permite a análise das bifurcações típicas que estudamos.

Antes de seguirmos a primeira aplicação; uma busca pela bifurcação de Hopf, definiremos o conceito de ciclo limite.

4.3 Ciclo limite

No estudo de sistemas dinâmicos com espaço de fase bidimensional, um ciclo limite é uma órbita γ fechada no espaço de fase onde órbitas espirais se aproximam ou se afastam dele, seja quando o tempo se aproxima do infinito ou quando o tempo se aproxima do infinito negativo. Esse comportamento é uma característica de sistemas não—lineares.

Como em [16], segue a definição de ciclo limite:

Definição 4.3.1. *Ciclo limite*

Sejam Δ um aberto de \mathbb{R}^2 e $F : \Delta \rightarrow \mathbb{R}^2$ um campo vetorial de classe C^1 . Uma órbita periódica γ de F chama-se ciclo limite se existe uma vizinhança V de γ tal que γ é a única órbita fechada de F que intercepta V .

Proposição 4.3.1. *Com as notações da definição acima, existem apenas os seguintes tipos de ciclos limites (diminuindo V se necessário):*

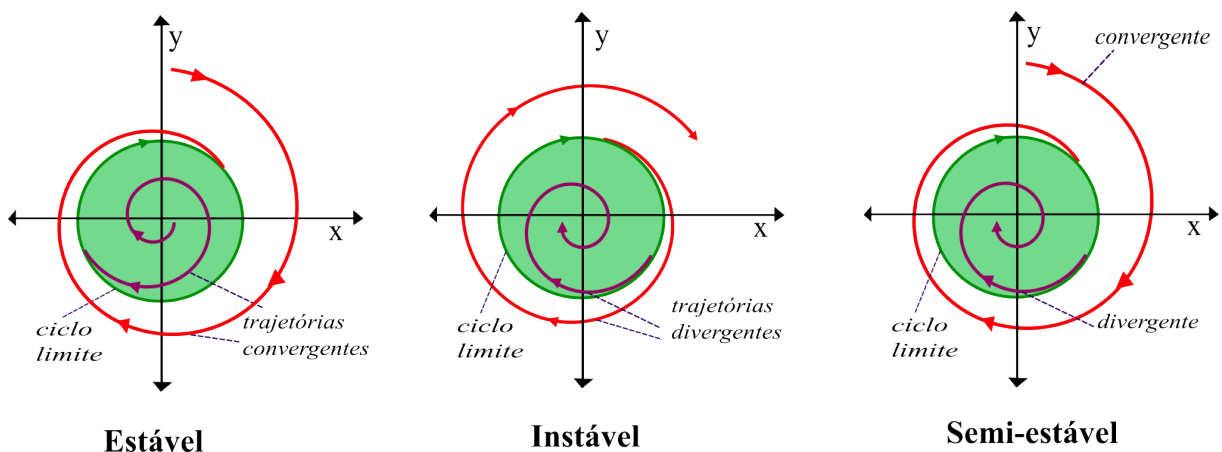
1. *Estável*, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V$;
2. *Instável*, quando $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V$;
3. *Semi-estável*, quando $\lim_{t \rightarrow \infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V \cap \text{Ext}^2 \gamma$; e $\lim_{t \rightarrow -\infty} d(\varphi(t, q), \gamma) = 0$ para todo $q \in V \cap \text{Int} \gamma$, ou o contrário.

onde $d(., .)$ é uma métrica.

Demonstração. Consulte [16, p.109] □

Na figura (8), teremos os três tipos de ciclos limites.

Figura 8 – Ciclos limites



Fonte: Elaborado pela autora.

4.4 Bifurcação de Hopf

O aparecimento ou o desaparecimento de uma órbita periódica através da variação de um parâmetro é conhecido como bifurcação de Hopf. Mais precisamente, trata-se de uma bifurcação local na qual um ponto crítico de um sistema dinâmico ganha ou perde a estabilidade, à medida que um par de autovalores conjugados complexos (da linearização em torno do ponto fixo) intersecta o eixo imaginário do plano complexo .

Para ilustrarmos essa bifurcação, segue o exemplo de um sistema planar onde ocorre uma Bifurcação de Hopf, conforme [15].

¹ $\varphi(t) = \varphi(t, p)$ uma órbita de F passando por p , conforme na seção (2.1.3)

² Parte externa da órbita γ .

Exemplo 4.4.1. Consideremos este sistema planar

$$\begin{cases} \dot{x} = -y + x(\mu - x^2 - y^2) \\ \dot{y} = x + y(\mu - x^2 - y^2). \end{cases} \quad (4.3)$$

O único ponto de equilíbrio é a origem. Assim, a matriz jacobiana desse sistema na origem será

$$DF(0, \mu) = \begin{pmatrix} \mu & -1 \\ 1 & \mu \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

onde seus respectivos autovalores serão $\lambda_1 = \mu + i$ e $\lambda_2 = \mu - i$. Pelo teorema (2.1.2), é possível classificar a estabilidade do ponto de equilíbrio, onde a origem do sistema não-linear planar será

- um foco estável se $\mu < 0$, pois teremos a parte real dos autovalores sendo negativa;
- um foco instável se $\mu > 0$, pois teremos a parte real dos autovalores sendo positiva,

Para $\mu = 0$, $DF(0, 0)$ tem um par de autovalores imaginários puros, e pelo corolário (2.1.1), temos que a origem é um centro ou um foco para o sistema não-linear com $\mu = 0$. Na verdade, a estrutura do retrato de fase torna-se visível se escrevermos este sistema em coordenadas polares (r, θ) , onde

$$x = r \cos(\theta), \quad y = r \sin(\theta).$$

e

$$\dot{x} = \dot{r} \cos(\theta) - r \dot{\theta} \sin(\theta), \quad \dot{y} = \dot{r} \sin(\theta) + r \dot{\theta} \cos(\theta).$$

Ao substituírmos essas equações no sistema (4.3), obtemos

$$\begin{cases} \dot{r} \cos(\theta) - r \dot{\theta} \sin(\theta) = -r \sin(\theta) + r \cos(\theta)(\mu - r^2) \\ \dot{r} \sin(\theta) + r \dot{\theta} \cos(\theta) = r \cos(\theta) + r \sin(\theta)(\mu - r^2). \end{cases} \quad (4.5)$$

Ao multiplicarmos a primeira equação de (4.5) por $\cos(\theta)$, a segunda por $\sin(\theta)$ e depois somarmos, obteremos, em coordenadas polares

$$\dot{r} = r(\mu - r^2),$$

e ao multiplicarmos a primeira equação do mesmo sistema por $-\sin(\theta)$, a segunda por $\cos(\theta)$ e depois somarmos, obteremos

$$\dot{\theta} = 1.$$

Assim o sistema (4.3) é reescrito da seguinte forma

$$\begin{cases} \dot{r} = r(\mu - r^2) \\ \dot{\theta} = 1. \end{cases} \quad (4.6)$$

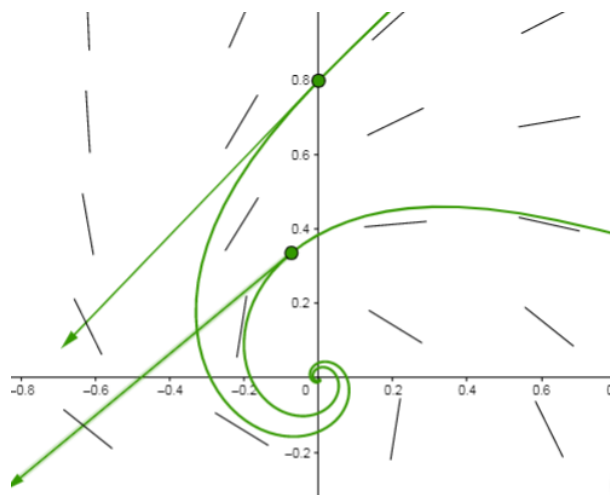
Dado que a primeira equação do sistema (4.6) é autônoma, analisaremos a função

$$f(r) = r(\mu - r^2). \quad (4.7)$$

Por razões físicas apenas consideraremos $r > 0$, dessa forma, temos duas situações para considerarmos; $\mu \leq 0$ e $\mu > 0$:

- Para $\mu \leq 0$, temos que $f(r) = r(\mu - r^2) < 0 \Rightarrow \dot{r} = f(r) < 0$. Logo a origem é um ponto de equilíbrio estável.

Figura 9 – Plano de fases para $\mu \leq 0$



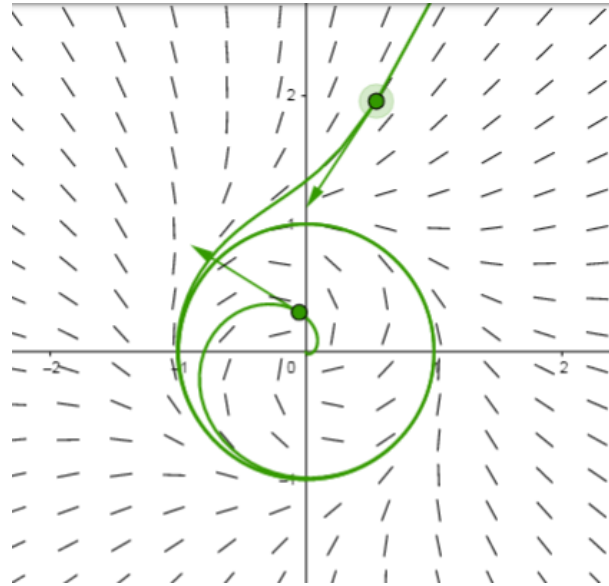
Fonte: Elaborado pela autora.

- Para $\mu > 0$, temos que :

$$\begin{cases} f(x) > 0, & \text{se } 0 < r < \sqrt{\mu} \\ f(x) < 0, & \text{se } r > \sqrt{\mu} \end{cases}$$

logo, a origem é um ponto de equilíbrio instável, no caso, um foco.

Figura 10 – Plano de fases para $\mu > 0$



Fonte: Elaborado pela autora.

Vemos que a troca da estabilidade da origem, no sistema (4.3), ocorre quando $\mu = 0$, provocando assim uma bifurcação de Hopf. Observe que, após o parâmetro μ passar por zero e se tornar positivo, ocorre o aparecimento de uma órbita periódica; um ciclo limite estável de raio $\sqrt{\mu}$, dado por

$$\gamma_{\mu}(t) = \sqrt{\mu}(\cos(t), \sin(t))^T.$$

De uma forma geral, como em [6, p.151], as condições de existência da bifurcação de Hopf são dadas através do seguinte teorema :

Teorema 4.4.1. (Condições de existência de uma bifurcação de Hopf)

Suponhamos que o sistema dado pela equação (4.2) tenha um ponto de equilíbrio (x_0, ρ_0) , para o qual as seguintes propriedades são satisfeitas:

- A matriz jacobiana $Df_x(x_0, \rho_0)$ tem um simples par de autovalores imaginários puros e nenhum outro autovalor com parte real nula, o que implica na existência de uma curva suave de pontos de equilíbrio $(x(\rho), \rho)$ com $(x(\rho_0) = x_0)$. Os autovalores $\lambda(\rho)$ e $\bar{\lambda}(\rho)$ de

(4.2), os quais são imaginários puros em $\rho = \rho_0$, variam suavemente com a variação do parâmetro ρ ;

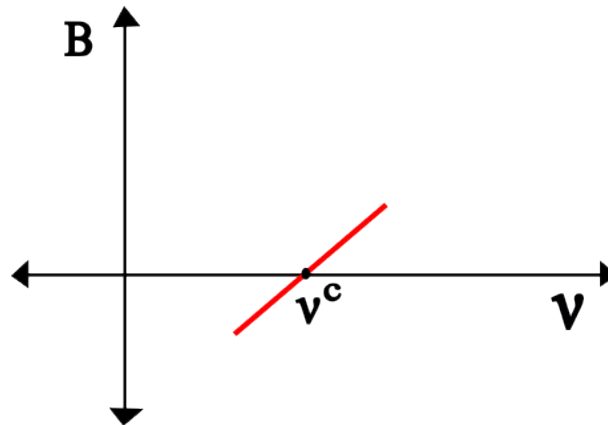
- Os autovalores $\lambda(\rho) = \alpha(\rho) + i\beta(\rho)$, $\bar{\lambda}(\rho) = \alpha(\rho) - i\beta(\rho)$ devem intersectar o eixo imaginário com velocidade não nula, tal que

$$\frac{\partial}{\partial \rho}(\alpha(\rho)) \neq 0; \quad (4.8)$$

o que implica que existe uma variedade central tridimensional, passando através de (x_0, ρ_0) .

Para mais detalhes, consulte [6, p.151].

Ao considerarmos o conceito de bifurcação de Hopf, as discussões da seção (3.4), $C|_{I=I_2} > 0$ e $E_2^* = (S_2^*, I_2^*)$ o segundo ponto de equilíbrio endêmico que, como já demonstrado pelo teorema (3.4.2), pode ser atrator ou repulsor, teremos que qualquer troca de estabilidade de E_2^* corresponderá a uma bifurcação de Hopf, onde essa ocorre quando $B|_{I=I_2^*}$, do polinômio característico $P(\lambda)$ (3.34), for nulo. Suponhamos ainda que exista ν^c tal que $B(\nu^c) \equiv B|_{I=I_2^*(\nu^c)} = 0$ e $dB/(d\nu)|_{\nu^c} \neq 0$. Então, o modelo passa por uma bifurcação de Hopf na qual as raízes do polinômio característico $P(\lambda)$ intersectam o eixo imaginário quando ν atinge ν^c tal que $d(Re[\lambda(\nu)])/(d\nu) = -(1/2)(dB/d\nu) \neq 0$ em ν^c . Observemos que, o valor de B representa a soma dos autovalores da matriz jacobiana no ponto de equilíbrio endêmico. Dessa forma, a condição de termos a derivada da parte real dos autovalores não—nula em relação ao parâmetro ν em ν^c , é a maneira de garantirmos a troca de estabilidade do ponto de equilíbrio (cf. figura (11))

Figura 11 – $dB/(d\nu)|_{\nu^c} > 0$ 

Fonte: Elaborado pela autora.

Assim, se $dB/(d\nu)|_{\nu^c} > 0$, temos $Re[\lambda(\nu)] < 0$ para $\nu < \nu^c$, e $Re[\lambda(\nu)] > 0$, caso contrário.

A seguir, definiremos os dois tipos de bifurcação de Hopf.

4.4.1 Bifurcações Hopf supercríticas e subcríticas

Sabemos que a bifurcação de Hopf do modelo (3.29) ocorre quando o parâmetro ν assumir o valor de ν^c . Para a bifurcação Hopf, existem dois tipos: a supercrítica e a subcrítica.

Uma bifurcação de Hopf leva ao aparecimento (ou desaparecimento) de um ciclo limite, que pode ser atrator (estável) ou repulsor (instável) quando ν assume o valor crítico de bifurcação. Caso o ciclo limite seja atrator, a bifurcação recebe o nome de supercrítica e subcrítica, caso contrário, conforme [15, p.352].

O tipo de bifurcação de Hopf será determinado pelo sinal de uma constante (σ_1) chamada de coeficiente cúbico da forma normal do modelo (3.29) como em [6, p.152]. Em outras fontes, como em [15, p.352], esse coeficiente é definido como Número de Liapunov. Em caso dessa constante ser negativa, teremos uma bifurcação de Hopf supercrítica, caso contrário, teremos uma bifurcação de Hopf subcrítica. Essa relação é verificada no teorema (4.4.2), para o seguinte sistema planar, conforme [15, p.352].

Considere o seguinte sistema analítico planar

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \mu x - y + p(x, y) \\ \dot{y} &= x + \mu y + q(x, y) \end{aligned} \tag{4.9}$$

com as funções analíticas

$$p(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} a_{ij} x^i y^j = (a_{20}x^2 + a_{11}xy + a_{02}y^2) + (a_{30}x^3 + a_{21}x^2y + a_{12}xy^2 + a_{03}y^3) + \dots$$

$$q(x, y) = \sum_{i+j \geq 0} b_{ij} x^i y^j = (b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2) + (b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3) + \dots$$

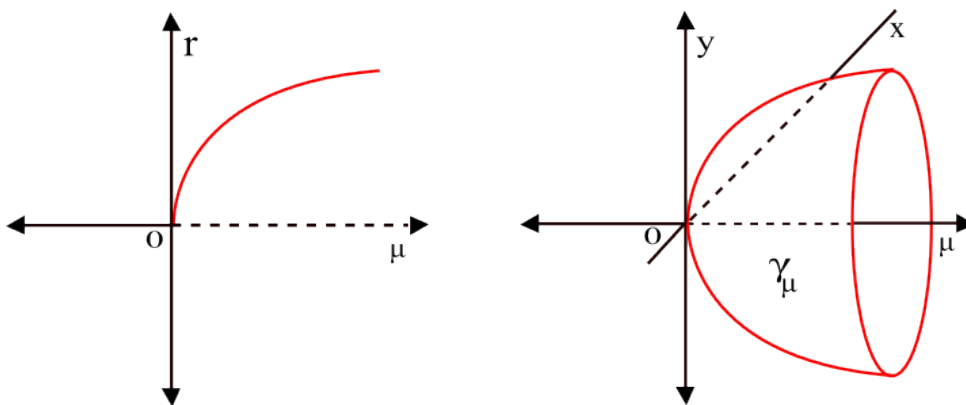
e com

$$\sigma_1 = \frac{2\pi}{2} [3(a_{30} + b_{03}) + (a_{12} + b_{21}) - 2(a_{20}b_{20} - a_{02}b_{02}) + a_{11}(a_{02} + a_{20}) - b_{11}(b_{02} + b_{20})],$$

teremos o seguinte teorema, conforme em [15, p.352]:

Teorema 4.4.2. (A bifurcação de Hopf) Se $\sigma_1 \neq 0$, então a bifurcação de Hopf ocorre na origem do sistema analítico planar no valor de bifurcação $\mu = 0$; em particular, se $\sigma_1 < 0$, então um único ciclo limite estável bifurca da origem do sistema planar quando μ cresce a partir de zero, e se $\sigma_1 > 0$, então um único ciclo limite instável bifurca da origem do sistema planar à medida que μ diminui de zero. Se $\sigma_1 < 0$, os retratos de fase do sistema planar serão topologicamente equivalentes aos mostrados na figura (9) e (10) e há uma superfície de órbitas periódicas que tem uma tangência quadrática com o plano (x, y) na origem em $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ conforme a figura (12), adaptada de [15, p.351].

Figura 12 – Diagrama de bifurcação do Hopf e a família de ciclos limites γ_μ resultantes da bifurcação de Hopf



Fonte: Adaptado pela autora.

Antes de apresentarmos o cálculo da constante (σ_1) conforme em [6], e usada em [1], se faz necessário o estudo da forma normal do sistema (3.29).

4.4.2 Forma Normal da Bifurcação de Hopf

A forma normal de um sistema dinâmico é uma forma simplificada do sistema que pode ser útil para determinar o seu comportamento. No entanto, para obtermos tais forma normais, em geral, utilizamos operações que envolvem cálculos com grande custo computacional. Dessa forma, ao pensarmos nos sistemas que sofrem uma bifurcação de Hopf, se faz necessário sistematizar um resultado onde sistemas pertencentes a uma determinada classe, no qual as condições de ocorrência da bifurcação de Hopf são satisfeitas, possuam uma mesma forma normal.

Sabemos, por [15], que se as condições do teorema (4.4.1) forem satisfeitas para os autovalores $\lambda(\rho) = \alpha(\rho) + i\beta(\rho)$, $\bar{\lambda}(\rho) = \alpha(\rho) - i\beta(\rho)$, segue que o sistema (4.2), pode ser escrito na seguinte forma normal,

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha(\rho)x - \beta(\rho)y + (\sigma_1x - \sigma_2y)(x^2 + y^2) \\ \dot{y} = \alpha(\rho)y + \beta(\rho)x + (\sigma_1y + \sigma_2x)(x^2 + y^2), \end{cases} \quad (4.10)$$

com σ_1 e σ_2 constantes chamadas de coeficientes cúbicos da forma normal. Porém se a parte linear do sistema dinâmico estiver na forma canônica de Jordan, podemos expressar a Equação (4.10) como

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f(x, y) \\ g(x, y) \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

onde $f(0) = g(0) = 0$ e $Df(0) = Dg(0) = 0$ e o coeficiente cúbico (σ_1), que determina o tipo de bifurcação de Hopf, conforme em [6, p.152], será dado por

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \frac{1}{16} \left[f_{xxx} + f_{xyy} + g_{xxy} + g_{yyy} \right] + \frac{1}{16\omega} \left[f_{xy}(f_{xx} + f_{yy}) \right. \\ \left. - g_{xy}(g_{xx} + g_{yy}) - f_{xx}g_{xx} + f_{yy}g_{yy} \right]. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Para mais detalhes, consulte [6, p.152].

Nesse sentido, para determinarmos sob quais condições ocorrem cada tipo de bifurcação de Hopf, do modelo epidemiológico SIRS (3.29), transformaremos o sistema que o descreve para a forma normal da bifurcação de Hopf (4.11).

Consideraremos a translação $S = S^* + x$ e $I = I^* + y$ sobre um ponto de equilíbrio endêmico genérico $E^* = (S^*, I^*)$, onde $(C|_{I=I^*} > 0)$, corresponde a origem do novo sistema de coordenadas (x, y) . Dessa forma, o sistema (3.29) se reescreve como:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \Pi - \left(\frac{\mu}{\Pi}\right)\beta[1 + f(I; \nu)](I^* + y)(S^* + x)^p - \mu(S^* + x) \\ \quad + \delta\left[\frac{\Pi}{\mu} - (S^* + x) - (I^* + y)\right], \\ \frac{dy}{dt} = \left(\frac{\mu}{\Pi}\right)\beta[1 + f(I; \nu)](I^* + y)(S^* + x)^p - (\mu + \alpha)I. \end{cases} \quad (4.13)$$

onde $f(I; \nu) = f(I^* + y; \nu) = f(I^*; \nu) + yf_I(I^*; \nu) + f_2(y, I^*; \nu)$ é a expansão em série de Taylor da função $f(I; \nu)$ em torno do ponto $I = I^*$ e $f_2(y, I^*; \nu)$ denota termos de segunda e demais ordens em y . Ao desenvolvermos o binômio de Newton

$$(S^* + x)^p = S^{*p} + pS^{*p-1} \sum_{k=2}^{\infty} \binom{p}{k} x^k S^{*p-k}, \quad (4.14)$$

a partir das equações (3.5) e (3.6), juntamente com a expressão de $f(I; \nu)$, o sistema (4.13) será transformado no sistema de equações

$$\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix} = J^*(\nu) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -M(x, y; \nu) \\ M(x, y; \nu) \end{pmatrix}, \quad (4.15)$$

onde $M = M(x, y; \nu)$ é dado por

$$\begin{aligned} M = & \left(\frac{\mu}{\Pi}\right)\beta \left\{ \left[(1 + f(I^*; \nu))I^* + (1 + f(I^*; \nu) + f_I(I^*; \nu))y \right] \sum_{k=2}^{\infty} \binom{p}{k} x^k S^{*p-k} \right. \\ & + p \left[1 + f(I^*; \nu) + f_I(I^*; \nu) \right] xy S^{*p-1} + \left[(I^* + y)f_2(y, I^*; \nu) + y^2 f_I(I^*, \nu) \right] \\ & \left. \left[S^{*p} + xpS^{*p-1} + \sum_{k=2}^{\infty} \binom{p}{k} x^k S^{*p-k} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Observação 4.4.1. Após cálculos e várias verificações, chegamos em uma expressão de M diferente da encontrada em [1].

Não é difícil percebermos que o traço $(J^*(\nu^c)) = (-a + b - 2\mu - \alpha - \delta)(\nu^c) = -B(\nu^c) = 0$. Seja \mathbf{u} um autovetor de $J^*(\nu^c)$ correspondente ao autovalor $i\omega_c$, i.e., $(J^*(\nu^c))\mathbf{u} =$

$i\omega_c \mathbf{u}$, onde $\mathbf{u} = (u^1, u^2)^T \in \mathbb{C}^2$ e $\omega_c = \sqrt{C(I^*(\nu^c))}$. Com um simples cálculo, obtemos que $\mathbf{u} = (b+\delta, -b+\mu+\alpha-i\omega_c)^T$. Seja $\mathbf{u} = [Re(\mathbf{u}) + iIm(\mathbf{u})]$ e ao definirmos $\mathbf{Q} = [Re(\mathbf{u}), Im(\mathbf{u})]$ segue que:

$$\mathbf{Q}^{-1} J^*(\nu^c) \mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Ao definirmos $(\varepsilon, \eta)^T = \mathbf{Q}^{-1}(x, y)^T$, ou seja, ao escrevermos o sistema (4.41) na base dos autovetores, o sistema se reescreve da seguinte maneira

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} - \frac{1}{b+\delta} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{\mu+\alpha+\delta}{\omega_c} \end{pmatrix} \tilde{M}(\varepsilon, \eta; \nu), \quad (4.17)$$

onde $\tilde{M}(\varepsilon, \eta; \nu) = M((b+\delta)\varepsilon, (-b+\mu+\alpha)\varepsilon - \omega_c\eta; \nu)$, uma vez que $\mathbf{Q}(\varepsilon, \eta)^T = (x, y)^T$. Desde que

$$\left. \frac{d}{d\nu} \text{traço}(J^*\nu) \right|_{\nu=\nu^c} = - \left. \frac{dB}{d\nu} \right|_{\nu=\nu^c} \neq 0,$$

temos que a função $B(\nu)$ intersecta o eixo $-\nu$ em ν^c crescendo ou decrescendo, e portanto, segue que E^* é localmente estável assintoticamente para $\nu < \nu^c$ e instável para $\nu > \nu^c$ se $dB/d\nu|_{\nu=\nu^c} < 0$, uma vez que o polinômio característico terá duas raízes negativas se $\nu < \nu^c$ e duas raízes positivas se $\nu > \nu^c$. De forma análoga, se $dB/d\nu|_{\nu=\nu^c} > 0$, teremos que E^* será localmente assintoticamente estável se $\nu > \nu^c$ e instável se $\nu < \nu^c$, e então podemos concluir que o modelo sofre uma bifurcação de Hopf em $\nu = \nu^c$.

Para o cálculo do coeficiente cúbico da forma normal, σ_1 , em $(0, 0, \nu^c)$, usaremos a equação (4.12), sendo, como feito em [1]

$$\begin{aligned} 16(b+\delta)^2 \sigma_1 = & -(b+\delta) \left[\tilde{M}_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon} + \tilde{M}_{\varepsilon\eta\eta} + \frac{\mu+\alpha+\delta}{\omega_c} (\tilde{M}_{\varepsilon\varepsilon\eta} + \tilde{M}_{\eta\eta\eta}) \right] \\ & - \frac{1}{\omega_c} \left[1 - \left(\frac{\mu+\alpha+\delta}{\omega_c} \right)^2 \right] \tilde{M}_{\varepsilon\eta} (\tilde{M}_{\varepsilon\varepsilon} + \tilde{M}_{\eta\eta}) \\ & - \frac{\mu+\alpha+\delta}{\omega_c} (\tilde{M}_{\varepsilon\varepsilon}^2 - \tilde{M}_{\eta\eta}^2), \end{aligned} \quad (4.18)$$

onde, como em [1]

$$\begin{aligned}
\widetilde{M}_{\varepsilon\varepsilon\varepsilon}(0, 0; \nu^c) &= \left\{ Q_{11}^3 M_{xxx} + 3Q_{11}^2 Q_{21} M_{xxy} + 3Q_{11} Q_{21}^2 M_{xyy} + Q_{21}^3 M_{yyy} \right\} \Big|_{(0,0;\nu^c)} \\
\widetilde{M}_{\eta\eta\eta}(0, 0; \nu^c) &= Q_{22}^3 M_{yyy} \Big|_{(0,0;\nu^c)}, \\
\widetilde{M}_{\varepsilon\eta}(0, 0; \nu^c) &= Q_{22} \left\{ Q_{11} M_{xy} + Q_{21} M_{yy} \right\} \Big|_{(0,0;\nu^c)}, \\
\widetilde{M}_{\varepsilon\eta\eta}(0, 0; \nu^c) &= Q_{22}^2 \left\{ Q_{11} M_{xyy} + Q_{21} M_{yyy} \right\} \Big|_{(0,0;\nu^c)}, \\
\widetilde{M}_{\eta\eta}(0, 0; \nu^c) &= Q_{22}^2 M_{yy} \Big|_{(0,0;\nu^c)}, \\
\widetilde{M}_{\varepsilon\varepsilon\eta}(0, 0; \nu^c) &= Q_{22} \left\{ Q_{11}^2 M_{xxy} + 2Q_{11} Q_{21} M_{xyy} + Q_{21}^2 M_{yyy} \right\} \Big|_{(0,0;\nu^c)}, \\
\widetilde{M}_{\varepsilon\varepsilon}(0, 0; \nu^c) &= \left\{ Q_{11}^2 M_{xx} + 2Q_{11} Q_{21} M_{xy} + Q_{21}^2 M_{yy} \right\} \Big|_{(0,0;\nu^c)},
\end{aligned}$$

com $Q_{11} = (b + \delta)$, $Q_{21} = (-b + \mu + \alpha)$, e $Q_{22} = (-\omega_c)$, sendo as entradas da matriz \mathbf{Q} . Ao usarmos essas expressões na equação (4.18), nós teremos o seguinte teorema.

Teorema 4.4.3. *Se $\sigma_1 \neq 0$, então a curva de solução periódica bifurca do ponto de equilíbrio endêmico E^* tal que*

1. *para $\sigma_1 < 0$, o modelo sofre uma bifurcação de Hopf supercrítica se $dB/(d\nu)|_{\nu=\nu^c} < 0$ e uma bifurcação de Hopf supercrítica inversa se $dB/(d\nu)|_{\nu=\nu^c} > 0$;*
2. *para $\sigma_1 > 0$, o modelo sofre uma bifurcação de Hopf subcrítica se $dB/(d\nu)|_{\nu=\nu^c} < 0$ e uma bifurcação de Hopf subcrítica inversa se $dB/(d\nu)|_{\nu=\nu^c} > 0$.*

Uma bifurcação de Hopf supercrítica inversa ou subcrítica inversa, leva ao desaparecimento do ciclo limite quando ν assumir o valor ν^c .

4.5 Bifurcação de Sela-Nó

Na área da teoria de bifurcações, uma bifurcação de Sela-nó é uma bifurcação local em que dois pontos de equilíbrio de um sistema dinâmico, uma sela (instável) e um nó (estável) se colidem. Essa bifurcação está associada ao aparecimento de um autovalor nulo $\lambda = 0$. Dessa forma, estamos interessados em encontrar um valor de bifurcação ρ_0 que nos permitirá verificar a quantidade de pontos de equilíbrio do sistema (4.2) para valores menores e maiores que ρ_0 ,

podendo existir nenhum, um ou dois pontos equilíbrio. Vale aqui observamos que assim como a bifurcação de Hopf, a bifurcação de Sela-Nó também é analisada ao estudarmos a variação de um único parâmetro.

Um exemplo típico de uma equação diferencial com uma bifurcação de Sela-Nó tendo μ como parâmetro de bifurcação é dado a seguir.

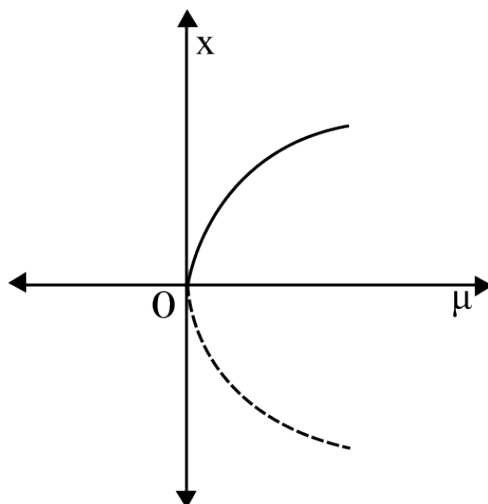
Exemplo 4.5.1.

$$\dot{x} = \mu - x^2. \quad (4.19)$$

- Se $\mu > 0$ existem dois pontos de equilíbrio, um ponto de equilíbrio instável em $-\sqrt{\mu}$ e um estável em $+\sqrt{\mu}$, pois ao calcularmos a derivada da função f temos $Df(x, \mu) = -2x$, logo $Df(-\sqrt{\mu}, \mu) = +2\sqrt{\mu}$ e $Df(\sqrt{\mu}, \mu) = -2\sqrt{\mu}$;
- Se $\mu = 0$ (o valor de bifurcação) há exatamente um ponto de equilíbrio em $x = 0$ não hiperbólico. Nesse caso, ele é chamado de ponto de equilíbrio de Sela-Nó;
- Se $\mu < 0$ não há pontos de equilíbrio.

Todas as informações pertinentes sobre a bifurcação que ocorre neste sistema em $\mu = 0$ é capturada no diagrama de bifurcação (13), adaptado de [15, p.335]. A curva $\mu - x^2 = 0$ determina a posição dos pontos críticos do sistema, uma curva sólida é usada para indicar uma família de pontos críticos estáveis enquanto uma curva tracejada é usada para indicar uma família de pontos críticos instáveis. Este tipo de bifurcação é chamada de bifurcação sela-nó.

Figura 13 – Diagrama de bifurcação Sela-Nó do exemplo (4.5.1)



Fonte: Adaptado pela autora.

Consideraremos que o sistema 4.2 tenha um ponto de equilíbrio em $\rho = \rho_0$ e $x = x_0^*$, com um autovalor nulo, de forma, que esse autovalor seja um zero simples. Nessa situação, o teorema da variedade central para fluxos permite reduzir o estudo deste tipo de problema de bifurcação a um sistema onde x é unidimensional.

Teorema 4.5.1. (*Teorema da Variedade central para fluxos*) *Seja f um campo vetorial C^r no \mathbb{R}^n nulo na origem ($f(0) = 0$) e seja $\mathbf{A} = Df(0)$. Divida-se o espectro de A em três partes, $\sigma_s, \sigma_c, \sigma_u$ com*

$$Re(\lambda) \begin{cases} < 0, & \text{se } \lambda \in \sigma_s, \\ = 0, & \text{se } \lambda \in \sigma_c, \\ > 0, & \text{se } \lambda \in \sigma_u, \end{cases}$$

sendo que λ representa os autovalores de \mathbf{A} . Considere o espaço gerado pelos autovetores de σ_s, σ_c e σ_u como E^s, E^c e E^u , respectivamente. Então, existem variedades estáveis e instáveis W^s, W^u de classe C^r tangentes a E^s e E^u em 0, e uma variedade central W^c de classe C^{r-1} , tangente a E^c em 0. As variedades W^u, W^c e W^s são invariantes ao fluxo de f . As variedades estáveis e instáveis são únicas, mas a variedade central não o é necessariamente.

Demonstração. Consulte [10] □

O teorema da variedade central permite formular propriedades que descrevem a estrutura qualitativa das trajetórias que permanecem próximos de (x_0, ρ_0) . Em [6], demonstra-se que existe uma variedade central $W^c \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, passando através de (x_0, ρ_0) tal que

1. O espaço tangente de W^c em (x_0, ρ_0) é gerado por um autovetor de 0 para $Df(x_0, \rho_0)$ e um vetor paralelo ao eixo- ρ ;
2. Para algum r finito, W^c é C^r se restrito a uma pequena vizinhança de (x_0, ρ_0) ;
3. o campo vetorial de 4.2 é tangente a W^c ;
4. Existe uma vizinhança U de (x_0, ρ_0) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$, tal que todas as trajetórias do sistema estão contidas inteiramente em U para todo t .

Restringindo (4.2) a W^c , obtemos uma família de equações de um parâmetro nas curvas unidimensionais W_ρ^c em W^c obtidas pela fixação de ρ . Essa família de um parâmetro é a nossa redução do problema da bifurcação.

Vamos agora formular condições de transversalidade para um sistema (4.2), com $n = 1$, que produzam a bifurcação sela-nó. Nós temos que $(df/dx)|_{(x_0, \rho_0)} = 0$, mas teremos $(\partial f/\partial \rho)|_{(x_0, \rho_0)} \neq 0$ como condição de transversalidade. O teorema da função implícita implica que os pontos de equilíbrio de (4.2) formam uma curva que será tangente à linha $\rho = \rho_0$. Uma condição adicional de transversalidade $(d^2f/dx^2)|_{(x_0, \rho_0)} \neq 0$ implica que a curva de equilíbrio tem uma tangência quadrática em $\rho = \rho_0$ e localmente se encontra de um lado dessa linha.

Essa informação já é suficiente para implicar que os retratos de fase local desse sistema são topologicamente equivalentes aos de uma família

$$\dot{x} = \pm(\rho - \rho_0) \pm (x - x_0^*)^2. \quad (4.20)$$

No entanto, também podemos formular essas condições de transversalidades para um sistema n -dimensional sem usarmos o recurso de redução para as equações diferenciais da variedade central. Dessa forma, o seguinte teorema estabelece as condições necessárias para a transversalidade.

Para mostrarmos as condições em que se ocorre uma bifurcação de Sela-Nó usaremos o Teorema de Sotomayor [6, p.148], onde esse classifica bifurcações através de certas hipóteses.

Teorema 4.5.2. (Sotomayor) *Seja $\dot{x} = f(x, \rho)$ um sistema de equações diferenciais em \mathbb{R}^n que depende de um único parâmetro $\mu \in \mathbb{R}$. Quando $\rho = \rho_0$, assuma que exista um equilíbrio p para o qual a matriz jacobiana $\mathbf{A}_{n \times n} \equiv D_x f(p, \rho_0)$ tenha um único autovalor nulo $\lambda = 0$, com autovetor correspondente v e \mathbf{A}^T possua um autovetor w correspondente ao autovalor nulo. Além disso suponhamos que \mathbf{A} possua k autovalores com parte real negativa e $n - k - 1$ autovalores com parte real positiva. Se ocorrer*

$$\begin{aligned} (i) \quad & w^T \cdot ((\partial f(x, \rho)/\partial \rho)(p, \rho_0)) \neq 0; \\ (ii) \quad & w^T \cdot [D_x^2 f(p, \rho_0)(v, v)] \neq 0, \end{aligned} \quad (4.21)$$

então a condição (i) garante que existe uma curva suave de pontos de equilíbrios de (4.2) em $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ passando por (p, ρ_0) tangente ao hiperplano $(\mathbb{R}^n \times \{\mu_0\})$. Em termos geométricos isso

significa que a variedade de equilíbrio ($f(x^*, \rho) = 0$) intercepta a linha $x = p$ transversalmente. A condição (ii) implica que a variedade de equilíbrio $f(x_0^*, \rho) = 0$ permanece localmente de um lado do hiperplano $\rho = \rho_0$. Dependendo do sinal das expressões (4.21), não existem pontos de equilíbrio de (4.2) próximos de x_0 quando $\rho < \rho_0$ (ou quando $\rho > \rho_0$) e existem dois pontos de equilíbrio de (4.2) próximos de x_0 quando $\rho > \rho_0$ (ou quando $\rho < \rho_0$). Os dois pontos de equilíbrio próximos de x_0 são hiperbólicos e possuem variedades estáveis de dimensão k e $k + 1$ respectivamente, i.e., o sistema (4.2) possui uma bifurcação Sela-Nó no ponto de equilíbrio p , em que o parâmetro ρ assume o valor de bifurcação $\rho = \rho_0$.

É importante realçarmos que esse teorema apenas formalmente expressa o fato de que a bifurcação de sela-nó é qualitativamente como a família de equações

$$\dot{x} = \pm(\rho - \rho_0) \pm (x - x_0^*)^2$$

na direção do autovalor nulo, com comportamento hiperbólico nas direções complementares. Conforme [6, p.148] "As hipóteses (4.21) são as condições de transversalidade que controlam a não degeneração do comportamento em relação ao parâmetro e o efeito dominante do termo quadrático não-linear".

Para decidirmos sobre os sinais da equação (4.20), basta lembrarmos de uma aplicação do Teorema da Aplicação aberta; O Lema de Morse [9]. Esse lema nos diz que próximo a um ponto de equilíbrio não degenerado podemos encontrar coordenadas locais adequadas tais que a função f seja uma forma quadrática, ou seja, a forma da equação (4.20). Assim, se temos as condições (i) > 0 e (ii) < 0 , temos que a bifurcação de sela-nó será qualitativamente como a equação

$$\dot{x} = (\rho - \rho_0) - (x - x_0^*)^2.$$

4.5.1 Bifurcação Sela–Nó no modelo reduzido

Ao considerarmos o modelo (3.29), e \mathcal{R}_0 (3.11) como o parâmetro de bifurcação, segue do teorema (3.3.2) que em $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}^*$ o modelo tem um único ponto de equilíbrio endêmico $E_0^* = (S_0^*, I_0^*)$ para o qual a matriz jacobiana $J_{(\mathcal{R}^*)}^*(E_0^*)$ tem um autovalor simples nulo e outro $\lambda = -B_{\mathcal{R}^*}(E_0^*)$, uma vez que $\partial\phi/\partial I|_{I=I_0^*} = 1$, e portanto da expressão de C , em (3.38), temos

$C_{\mathcal{R}^*}(E_0^*) = 0$ e o polinômio característico se torna $P(\lambda) = \lambda^2 + B\lambda = \lambda(\lambda + B)$. Sejam $\mathbf{V} = (v_1, v_2)^T$ e $\mathbf{W} = (w_1, w_2)^T$ autovetores direito e esquerdo de $J_{(\mathcal{R}^*)}^*(E_0^*)$ respectivamente, correspondente ao autovalor zero. Então, um cálculo simples resulta

$$\mathbf{V} = [b + \delta, -a - (\mu + \delta)]^T, \quad \mathbf{W} = [a, a + \mu + \delta].$$

Seja $\Lambda = (h_1, h_2)$, onde h_1 e h_2 são, respectivamente, o lado direito do sistema (4.17). Ao considerarmos o parâmetro β como uma função de R_0 , conforme a equação (3.11), e S^P como em (3.5), teremos que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &\equiv \mathbf{W} \cdot \frac{\partial \Lambda}{\partial \mathcal{R}_0} \Big|_{(E_0^*, \mathcal{R}^*)} = \mathbf{W} \left[\left(-\frac{\mu}{\Pi} (1+f) IS^p \frac{\partial \beta}{\partial \mathcal{R}_0} \right), \left(\frac{\mu}{\Pi} (1+f) IS^p \frac{\partial \beta}{\partial \mathcal{R}_0} \right) \right] \Big|_{(E_0^*, \mathcal{R}^*)} \\ &= (\mu + \delta) \left(\frac{\mu}{\Pi} (1+f) IS^p \frac{\partial \beta}{\partial \mathcal{R}_0} \right) \Big|_{(E_0^*, \mathcal{R}^*)} \\ &= \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \delta) I_0^*}{\beta} \frac{\partial \beta}{\partial \mathcal{R}_0} \\ &= \frac{(\mu + \alpha)(\mu + \delta) I_0^*}{\mathcal{R}^*} > 0 \end{aligned} \tag{4.22}$$

Ao usarmos (3.5), o parâmetro \mathcal{L}_2 , é definido a seguir como,

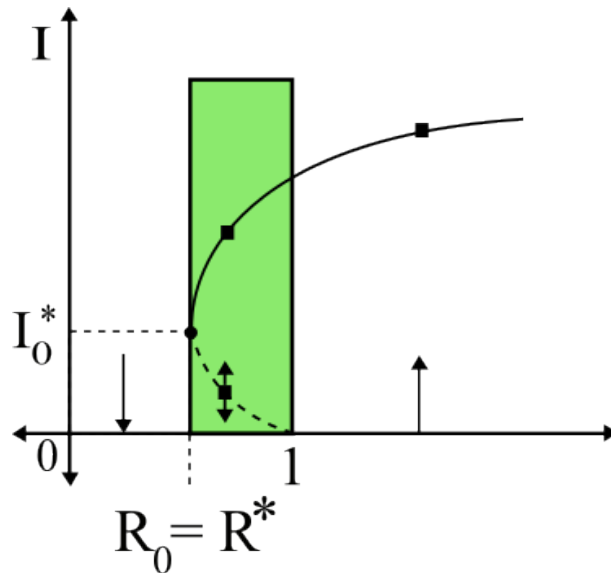
$$\begin{aligned} \mathcal{L}_2 &\equiv \mathbf{W} \cdot [D_{(S,I)}^2 \Lambda(\mathbf{V}, \mathbf{V})] \Big|_{(E_0^*, \mathcal{R}^*)} = (w_1 - w_2) \left[\frac{\partial^2 h_1}{\partial S^2} v_1^2 + \frac{\partial^2 h_1}{\partial I^2} v_2^2 + 2 \frac{\partial^2 h_1}{\partial S \partial I} v_1 v_2 \right] \\ &= -(\mu + \delta) \frac{\mu \delta}{\Pi} \left\{ -p(p-1)[1 + f(I_0^*; \nu)] I_0^* S_0^{p-2} (b + \delta)^2 \right. \\ &\quad - [2f_I(I_0^*; \nu) + I_0^* f_{II}(I_0^*; \nu)] (a + \mu + \delta)^2 S_0^{*p} \\ &\quad \left. + 2p[1 + f(I_0^*; \nu) + I_0^* f_I(I_0^*; \nu)] (b + \delta)(a + \mu + \delta) S_0^{*p-1} \right\}. \end{aligned}$$

Então, desde que $C_{\mathcal{R}^*}(E_0^*) = 0$, depois de algumas manipulações, segue da propriedade A_4 que

$$\begin{aligned} S_0^* \mathcal{L}_2 &= -(\mu + \delta) \left\{ a(1+p)(b + \delta)^2 - \left(\frac{\mu \beta}{\Pi} \right) I_0^* S_0^{*p+1} f_{II}(I_0^*; \nu) (a + \mu + \delta)^2 \right\} \\ &< -a(1+p)(\mu + \delta)(b + \delta)^2 < 0 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Então, tendo em visto o teorema de Sotomayor (4.5.2), existe uma curva de pontos de equilíbrio em \mathbb{R}^2 passando através de E_0^* , tangente a linha $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}^*$, conforme a figura 14, adaptada do artigo [1, p.1802].

Figura 14 – Diagrama de bifurcação Sela-Nó



Fonte: Adaptada pela autora.

Ao termos que $\mathcal{L}_1 > 0$ e $\mathcal{L}_2 < 0$, obteremos que o retrato de fase local do modelo (3.29) é topologicamente equivalente ao da equação quadrática $\dot{v} = (\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}^*) - (v - I_0^*)^2$. Assim, não existe um ponto de equilíbrio perto de E_0^* quando $\mathcal{R}_0 < \mathcal{R}^*$ e existem dois pontos de equilíbrio quando $\mathcal{R}_0 > \mathcal{R}^*$. Portanto, temos o seguinte teorema

Teorema 4.5.3. *Se $f_I(0, \nu) < p/k$, então o modelo sofre uma bifurcação de Sela-Nó em E_0^* quando \mathcal{R}_0 passa através do valor de bifurcação \mathcal{R}^* .*

Antes de estudarmos a bifurcação de Bogdanov-Takens, apresentaremos a bifurcação homoclínica.

4.6 Bifurcação Homoclínica

Nas seções anteriores apresentamos duas bifurcações locais. "A teoria desenvolvida ali dependia de transformações coordenadas que trazem sistemas gerais para formas normais, das quais a informação dinâmica pode ser deduzida da série de Taylor de um campo vetorial ou mapa

em um único ponto."[6]. Nesta seção apresentaremos uma bifurcação global, ou seja, algumas propriedades para o seu estudo não podem ser deduzidas de informações locais.

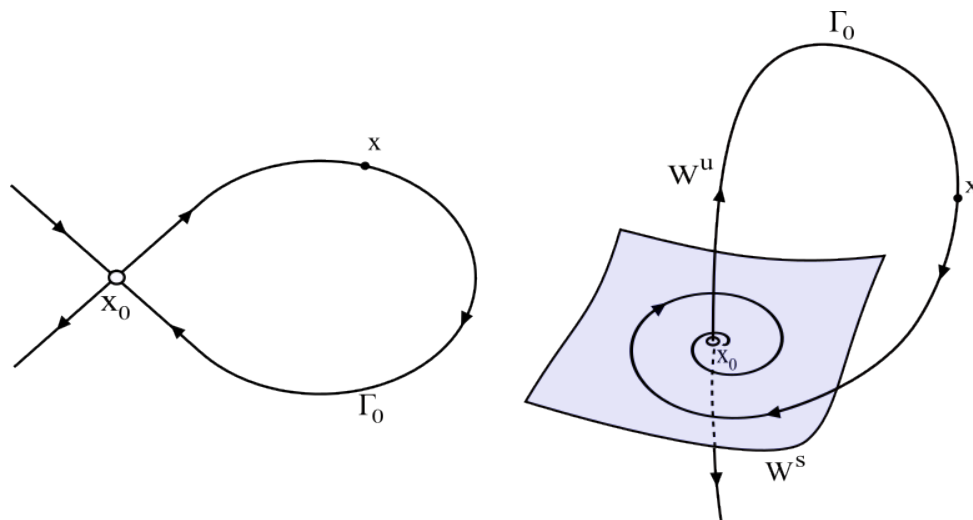
4.6.1 Órbita Homoclínica

Uma órbita homoclínica é uma trajetória de um fluxo de um sistema dinâmico que une um ponto de equilíbrio de sela a si mesmo. Mais precisamente, uma órbita homoclínica está na interseção da variedade estável e da variedade instável de um equilíbrio. Formalmente, como em [8, p.195], ao considerarmos o sistema (4.1) com x_0 sendo um ponto de equilíbrio do sistema, temos que

Definição 4.6.1. *Uma órbita Γ_0 começando em um ponto $x \in \mathbf{R}^n$ é chamada homoclínica no ponto de equilíbrio x_0 do sistema (4.1) se sua trajetória vai para x_0 quando $t \rightarrow \pm\infty$.*

Para ilustrarmos, segue a figura (15) adaptada de [8, p.196]

Figura 15 – Órbita homoclínica no plano e órbita homoclínica no espaço tridimensional



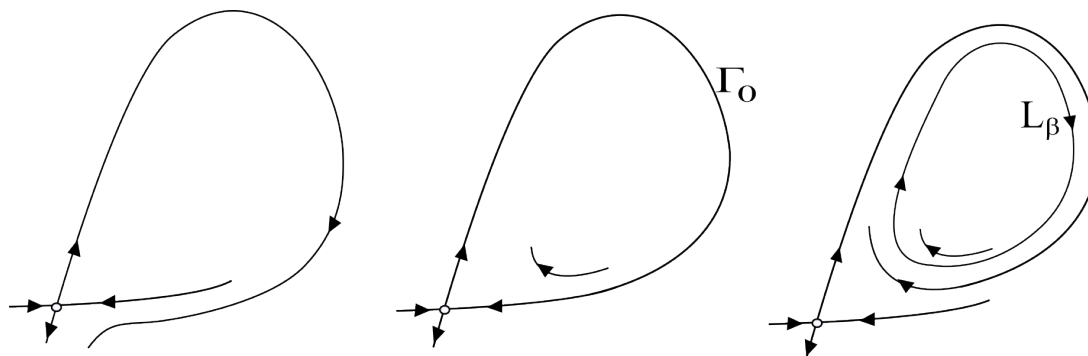
Fonte: Adaptada pela autora.

4.6.2 Bifurcação Homoclínica

Uma bifurcação homoclínica é uma bifurcação global que ocorre quando uma órbita periódica intersecta com um ponto de sela. Ao variarmos o parâmetro μ , para valores suficientemente pequenos, do sistema (4.2), uma bifurcação homoclínica leva ao aparecimento (cf.fig(16)) adaptada de [8, p.201]) ou desaparecimento (cf.fig.(17)) adaptada de [8, p.201]) de um ciclo

limite.

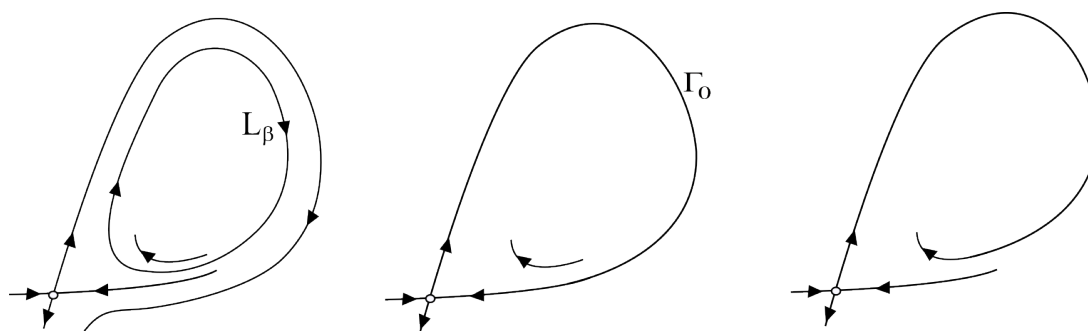
Figura 16 – Aparecimento de um ciclo limite L_β



Fonte: Adaptada pela autora.

Na figura (17), temos que para ρ pequeno, há um ponto de sela e um ciclo limite. À medida que o parâmetro de bifurcação ρ aumenta, o ciclo limite cresce até intersectar o ponto de sela, produzindo uma órbita homoclínica. Quando ρ aumenta mais um pouco, o ciclo limite desaparece completamente.

Figura 17 – Desaparecimento de um ciclo limite L_β



Fonte: Adaptada pela autora.

No estudo da bifurcação seguinte, teremos existência de uma bifurcação homoclínica.

4.7 Bifurcação de Bogdanov-Takens

Na teoria da bifurcação, uma bifurcação Bogdanov-Takens é um exemplo bem estudado de uma bifurcação com codimensão dois, o que significa que dois parâmetros devem ser variados para que a bifurcação ocorra. É nomeada por Rifkat Bogdanov e Floris Takens, que de forma independente e simultânea descreveram essa bifurcação.

Um sistema

$$\dot{x} = F(x, \rho), \quad (4.24)$$

onde $\rho \in \mathbb{R}^m$ é um vetor de parâmetros, $x \in \mathbf{R}^m$ e $F = (F_1, \dots, F_m)$, sofre uma bifurcação de Bogdanov–Takens se tem um ponto de equilíbrio e a linearização de F em torno desse ponto tem um autovalor duplo em zero (assumindo que algumas condições técnicas de não degenerescência são satisfeitas).

Três bifurcações de codimensão um ocorrem nas proximidades: uma bifurcação sela-nó, uma bifurcação de Hopf e uma bifurcação homoclínica. Todas as curvas de bifurcação associadas encontram-se na bifurcação Bogdanov-Takens.

4.7.1 Forma Normal da Bifurcação de Bogdanov-Takens

Existem várias formas normais (equivalentes) para a bifurcação de Bogdanov-Takens. A forma normal

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \alpha + \beta x + x^2 \pm xy + \mathcal{O}(\| (x, y) \|^3) \end{cases} \quad (4.25)$$

foi introduzida por Bogdanov, enquanto Takens obteve a forma normal equivalente

$$\begin{cases} \dot{x} = y + \beta x + x^2 + \mathcal{O}(\| (x, y) \|^3), \\ \dot{y} = \alpha \pm x^2 + \mathcal{O}(\| (x, y) \|^3) \end{cases} \quad (4.26)$$

Vejamos um exemplo de um sistema em uma forma normal de Bogdanov sem os termos $\mathcal{O}(\| (x_1, x_2) \|^3)$:

Exemplo 4.7.1. *Ao considerarmos o sistema*

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = \alpha + \beta y + x^2 \pm xy \end{cases} \quad (4.27)$$

o ponto de equilíbrio de (4.27) ocorre em $y = 0$ e $x^2 + \alpha = 0$, ou seja, em $(\pm\sqrt{-\alpha}, 0)$. Ao calcularmos a matriz jacobiana em $(0, 0)$, $J_f(0, 0) \equiv Df(0, 0)$, teremos

$$J_f(0,0) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 2x + 2y & \beta + x \end{array} \right) \Big|_{(0,0)} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ 0 & \beta \end{array} \right).$$

Dessa forma, $J_f(0,0)$ tem como autovalores $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = \beta$. Assim, uma bifurcação de Bagdanov-Takens poderá ocorrer na origem somente para $\beta = 0$. Para a ocorrência, precisaremos analisar os outros pontos de equilíbrio próximos. A matriz jacobiana calculada em um ponto de equilíbrio $(\pm\sqrt{-\alpha}, 0)$ será dada por

$$J_f(\pm\sqrt{-\alpha}, 0) = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \pm 2\sqrt{-\alpha} & \beta \pm \sqrt{-\alpha} \end{array} \right),$$

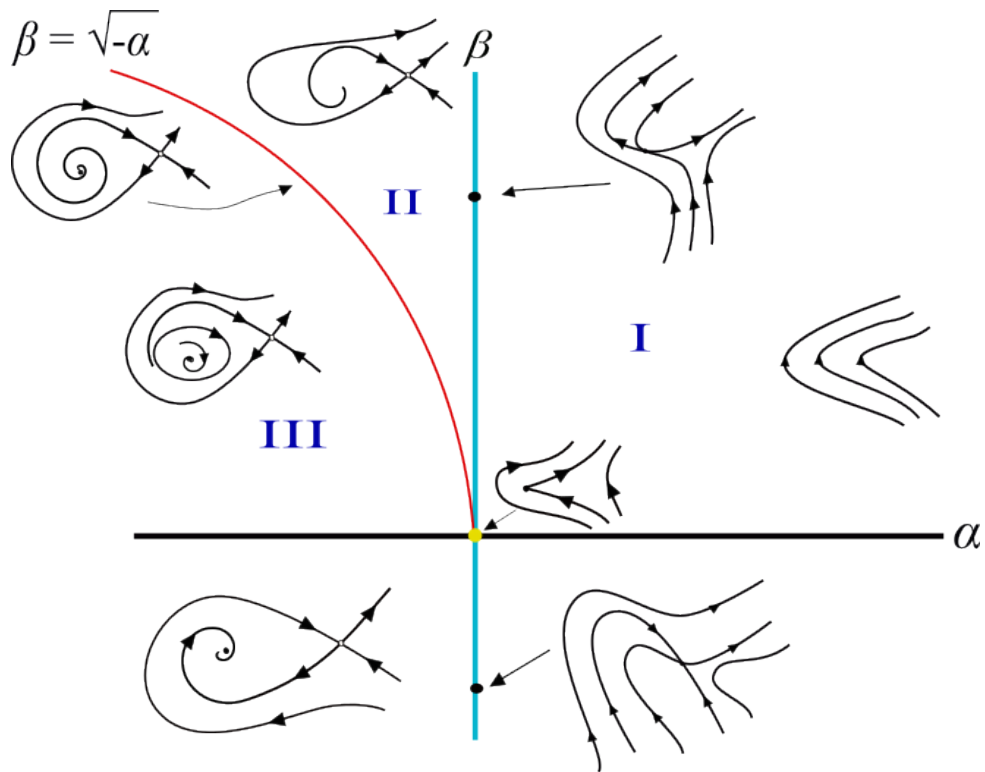
onde temos

$$\text{traço } J_f(\pm\sqrt{-\alpha}, 0) = \beta \pm \sqrt{-\alpha};$$

$$\det J_f(\pm\sqrt{-\alpha}, 0) = \pm 2\sqrt{-\alpha}.$$

Logo, $(+\sqrt{-\alpha}, 0)$ é uma sela para $\alpha < 0$ e $\forall \beta$, enquanto que $(-\sqrt{-\alpha}, 0)$ é uma espiral instável para $\{\beta > \sqrt{-\alpha}, \alpha < 0\}$ e uma espiral estável para $\{\beta < \sqrt{-\alpha}, \alpha < 0\}$. Ao conferimos as condições, temos que uma bifurcação de Hopf ocorre na curva $\beta = \sqrt{-\alpha}$, enquanto que uma bifurcação de sela-nó ocorre em $\alpha = 0$ e $\beta \neq 0$. As situações podem ser encontradas na figura (18), adaptada de [6, p.367].

Figura 18 – O conjunto de bifurcação parcial e retratos de fase da equação (4.27).



Fonte: Adaptada pela autora.

Dessa forma, iremos transformar o modelo reduzido (3.29) em (4.25) para estudarmos a Bifurcação de Bogdanov–Takens. Antes de obtermos a forma normal, enunciaremos teoremas e lemas que garantem a existência das três curvas de bifurcações (Hopf, sela–nó e homoclínicas) em uma bifurcação de Bogdanov–Takens, conforme em [8, p.323].

Teorema 4.7.1. *Forma normal de Bogdanov–Takens*

Qualquer sistema planar

$$\dot{x} = F(x, \rho), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \rho \in \mathbb{R}^2$$

tendo em $\rho = 0$, um equilíbrio que exhibe uma bifurcação de Bogdanov–Takens, é localmente topologicamente equivalente a alguma das seguintes formas normais próximo a e esse ponto de equilíbrio:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = \beta_1 + \beta_2\theta_1 + \theta_1^2 \pm \theta_1\theta_2 + \mathcal{O}(\|(\theta_1, \theta_2)\|^3) \end{cases} \quad (4.28)$$

Demonstração. Consulte [8, p.322] □

Analisaremos o sistema (4.28) sem o termo $\mathcal{O}(\|(\theta_1, \theta_2)\|)^3$ e com $\theta_1\theta_2$ negativo:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \theta_2, \\ \dot{\theta}_2 = \beta_1 + \beta_2\theta_1 + \theta_1^2 - \theta_1\theta_2 \end{cases} \quad (4.29)$$

Qualquer equilíbrio do sistema (4.29) está localizado no eixo horizontal, $\theta_2 = 0$, e satisfaz a equação

$$\theta_1^2 + \beta_2\theta_1 + \beta_1 = 0. \quad (4.30)$$

A equação (4.30) pode ter entre zero e duas raízes reais. Ao termos o discriminante $\Delta = 0$, nessa equação do segundo grau, teremos a curva de bifurcação de sela–nó:

$$SN = \{(\beta_1, \beta_2) : 4\beta_1 - \beta_2^2 = 0\}. \quad (4.31)$$

Ao longo da curva SN , o sistema (4.29) tem um equilíbrio com autovalor nulo. Se $\beta_2 \neq 0$, então a bifurcação sela–nó é não degenerada e atravessa SN da direita para a esquerda implicando no aparecimento de dois pontos de equilíbrio. Denotaremos o ponto de equilíbrio esquerdo por E_1 e o direito por E_2 , onde:

$$E_{1,2} = \left(\frac{-\beta_2 \pm \sqrt{\beta_2^2 - 4\beta_1}}{2}, 0 \right). \quad (4.32)$$

O ponto $\beta = (\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ separa a curva SN em dois ramos:

1. T_- , correspondendo a $\beta_2 < 0$, na qual representa o surgimento de dois pontos de equilíbrio, com E_1 sendo um nó estável e E_2 uma sela, e
2. T_+ , correspondendo a $\beta_2 > 0$, na qual representa o surgimento de dois pontos de equilíbrio, com E_1 sendo um nó instável e E_2 uma sela, quando passarmos por T_+ .

O eixo vertical $\beta_1 = 0$ é uma reta na qual a linearização em torno do ponto de equilíbrio E_1 tem um par de autovalores com soma nula: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. A curva

$$H = \{(\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = 0, \beta_2 < 0\} \quad (4.33)$$

corresponde a uma bifurcação de Hopf com $\lambda_{1,2} = \pm iw$.

O sistema (4.29) possui uma bifurcação homoclínica, conforme o seguinte lema:

Lema 4.7.1. *Existe uma única curva suave P correspondendo a uma bifurcação homoclínica no sistema (4.29) que é originado em $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ e tem a seguinte representação local:*

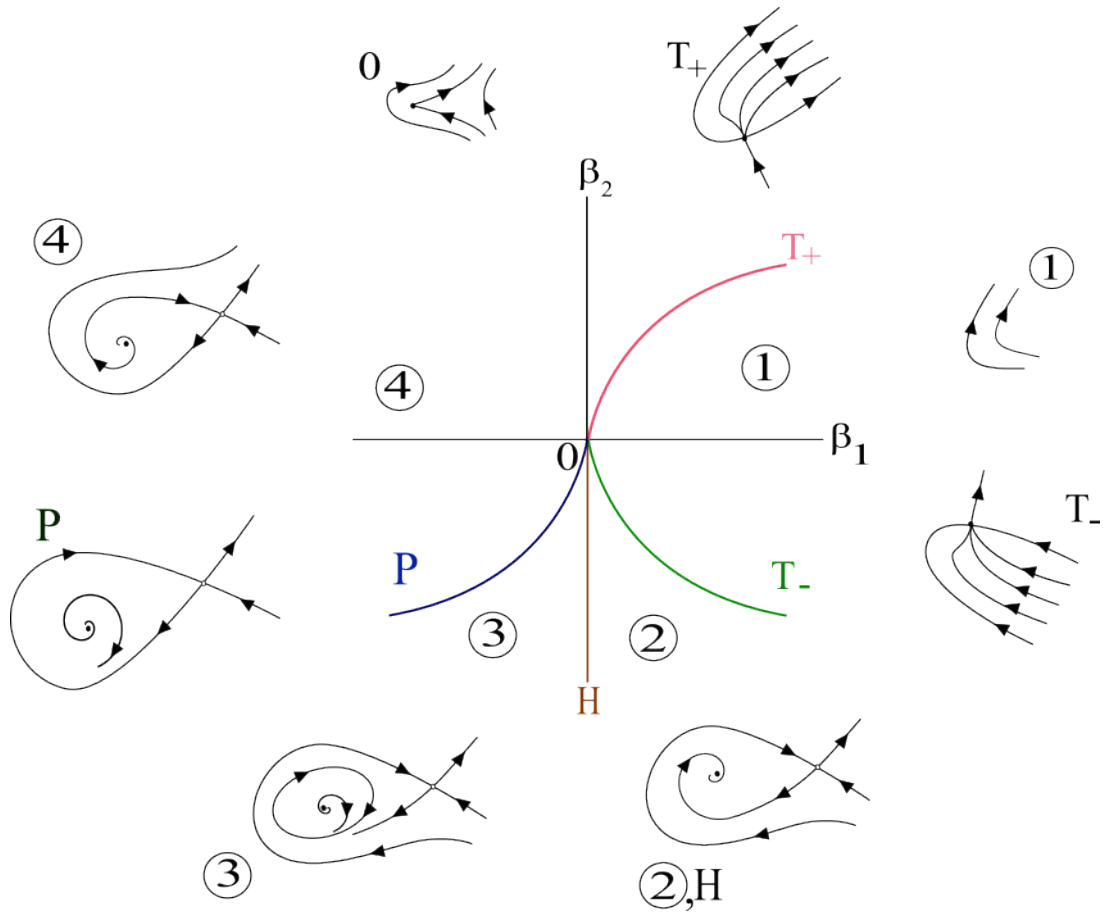
$$P = \left\{ (\beta_1, \beta_2) : \beta_1 = -\frac{6}{25}\beta_2^2 + o(\beta_2^2), \beta_2 < 0 \right\}. \quad (4.34)$$

Também, quando $\|\beta\|$ é pequeno, o sistema (4.29) tem um ciclo hiperbólico estável para valores de parâmetros dentro da região limitada pela curva da bifurcação de Hopf H e pela curva de bifurcação homoclínica P , e não existem ciclos fora desta região.

Demonstração. Consulte [8, p. 325]. □

A seguir, podemos ver as três curvas de bifurcação no diagrama de bifurcação do sistema (4.29) baseado em [8, p.324]:

Figura 19 – Bifurcação de Bogdanov–Takens



Fonte: Adaptada pela autora

4.7.2 Bifurcação de Bogdanov-Takens no modelo (3.4)

Sejam \mathcal{R}_{BT} e ν_{BT} os parâmetros de bifurcação nos quais o modelo (3.29) sofre simultaneamente uma bifurcação de Sela-Nó e uma bifurcação de Hopf. Consideramos agora, as condições para determinarmos \mathcal{R}_{BT} e ν_{BT} . Usando as equações (3.31) (3.32) e as igualdades definidas na seção (3.3) teremos que

$$\text{traço } J^*(\nu) = p(\mu + \alpha)(\mu + \delta)(\mu - 1) \left(1 - \frac{\partial \phi}{\partial I} \right), \quad (4.35)$$

$$\det J^*(\nu) = p(\mu + \alpha)(\mu - 1) \frac{\partial \phi}{\partial I} - (\mu + \delta) \left(1 + \frac{p(\mu + \alpha)(\mu - 1)}{\mu + \alpha + \delta} \right) \quad (4.36)$$

onde $u = \mathcal{R}_0^{(1/p)} [1 + f(I, \nu)]^{1/p}$. Um simples cálculo produz que se o traço $J^*(\nu) = \det J^*(\nu) = 0$, então

$$u = 1 + \frac{(\mu + \delta)(\mu + \alpha + \delta)}{p\alpha(\mu + \alpha)}. \quad (4.37)$$

Para o cálculo de (u) (4.37), isolaremos $p(\mu + \alpha)(u - 1)(\partial\phi/\partial I)$ da equação (4.35), e substituímos na equação (4.36).

Assim, segue de (3.13) que $I_0^* = k(1 - 1/u)$. Ao observarmos que $\partial\phi/\partial I = 1$ no ponto de Bogdanov (S_0^*, I_0^*) e ao reescrevermos f_I , dada a propriedade (2) da seção (3.3), pode-se concluir que

$$I_0^* f_I(I_0^*, \nu_{BT}) = \frac{p(u - 1)u^p}{\mathcal{R}_{BT}}. \quad (4.38)$$

Então, para cada forma funcional de $f(I, \nu)$, as equações (4.35) e (4.36) fornece condições para determinarmos \mathcal{R}_{BT} e ν_{BT} .

Continuaremos a análise da Bifurcação Homoclínica pela derivada da forma normal no ponto de Bogdanov. Neste ponto, como temos um zero duplo, então $B = C = 0$. Logo, segue de (3.35) e (3.36) que

$$\begin{aligned} a\alpha &= -a(\mu + \delta) + b(\mu + \delta) - (\mu + \alpha)(\mu + \delta) \\ &= (\mu + \delta)(-a + b - \mu - \alpha) \\ &= (\mu + \delta)^2. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Como em [1], ao usarmos as transformações $S = S_0^* + \varepsilon$ e $I = I_0^* + \eta$ (em $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{BT}, \nu = \nu_{BT}$), o modelo (3.29) se escreve como

$$\begin{pmatrix} \dot{\varepsilon} \\ \dot{\eta} \end{pmatrix} = J^*(E_0^*) \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \eta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -M(\varepsilon, \eta; \nu_{BT}) \\ M(\varepsilon, \eta; \nu_{BT}) \end{pmatrix}, \quad (4.40)$$

onde, por (4.39) e (3.35),

$$J^*(E_0^*) = \frac{1}{\alpha} \begin{pmatrix} -(\mu + \delta)(\mu + \alpha + \delta) & -(\mu + \alpha + \delta)^2 \\ (\mu + \delta)^2 & (\mu + \delta)(\mu + \alpha + \delta) \end{pmatrix}. \quad (4.41)$$

Desde que o $J(E_0^*) \neq 0$, existem vetores reais linearmente independentes \mathbf{x}_1 e \mathbf{x}_2 tais $J(E_0^*)\mathbf{x}_1 = 0$ e $J(E_0^*)\mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1$. Esses vetores são dados por

$$\mathbf{x}_1 = [-(\mu + \alpha + \delta), \mu + \delta]^T, \quad \mathbf{x}_2 = [-1, 1]^T.$$

Similarmente, existem vetores \mathbf{y}_1 e \mathbf{y}_2 tal que $[J(E_0^*)]^T \mathbf{y}_1 = 0$ e $[J(E_0^*)]^T \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_1$. Esses vetores podem ser expressos por

$$\mathbf{y}_1 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)[\mu + \delta, \mu + \alpha + \delta]^T, \quad \mathbf{y}_2 = \left(\frac{1}{\alpha}\right)[-1, -1]^T.$$

É fácil verificar que $\mathbf{x}_1 \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_2 \mathbf{y}_1 = 1$ e $\mathbf{x}_2 \mathbf{y}_2 = \mathbf{x}_1 \mathbf{y}_1 = 0$. Ao definirmos $\tilde{Q} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$, algum $(\varepsilon, \eta)^T$ pode ser unicamente representado por $(\varepsilon, \eta)^T = \tilde{Q}(\theta_1, \theta_2)^T$ para alguns $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}$, a partir do qual as novas coordenadas (θ_1, θ_2) são obtidas como

$$\theta_1 = -\frac{\varepsilon + \eta}{\alpha}, \quad \theta_2 = \frac{\mu + \delta}{\alpha}\varepsilon + \frac{\mu + \alpha + \delta}{\alpha}\eta. \quad (4.42)$$

Consideraremos o sistema (4.41) para todo R_0 e ν com $|\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_{BT}|$ e $|\nu - \nu_{BT}|$ pequenos (é importante lembrarmos que $B = C = 0$ em $\mathcal{R}_0 = \mathcal{R}_{BT}$ e $\nu = \nu_{BT}$), e ao expandirmos o lado direito como série de Taylor em função de θ_1, θ_2 em $(0, 0)$ temos

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = -C\theta_1 - B\theta_2 \\ \quad + [r^2 d_{11}(I^*, S^*) - r s d_{12}(I^*, S^*) + s^2 d_{22}(I^*, S^*)]\theta_1^2 \\ \quad + [d_{11}(I^*, S^*) - d_{12}(I^*, S^*) + d_{22}(I^*, S^*)]\theta_2^2 \\ \quad + [2r d_{11}(I^*, S^*) - (r + s)d_{12}(I^*, S^*) + 2s d_{22}(I^*, S^*)]\theta_1 \theta_2 \\ \quad + \mathcal{O}(\|(\theta_1, \theta_2)\|^3), \end{array} \right. \quad (4.43)$$

onde $r = \mu + \alpha + \delta$, $s = \mu + \delta$, e

$$\begin{aligned} d_{11}(I^*, S^*) &= \frac{1}{2} \frac{\mu\beta}{\Pi} p(p-1)[1 + f(I^*; \nu)]I^* S^{*p-2}, \\ d_{12}(I^*, S^*) &= \frac{\mu\beta}{\Pi} p[1 + f(I^*; \nu) + I^* f_I(I^*; \nu)]S^{*p-1}, \\ d_{22}(I^*, S^*) &= \frac{1}{2} \frac{\mu\beta}{\Pi} [2f_I(I^*; \nu) + I f_{II}(I^*; \nu)]S^{*p}. \end{aligned}$$

Por conveniência, definiu-se em [1, p.1804]

$$\mathcal{K}_{11} = r^2 d_{11}(I^*, S^*) - r s d_{12}(I^*, S^*) + s^2 d_{22}(I^*, S^*),$$

$$\mathcal{K}_{12} = 2r d_{11}(I^*, S^*) - (r + s) d_{12}(I^*, S^*) + 2s d_{22}(I^*, S^*),$$

$$\mathcal{K}_{22} = d_{11}(I^*, S^*) - d_{12}(I^*, S^*) + d_{22}(I^*, S^*)$$

Assim como em [1], usaremos que $\mathcal{K}_{12} \neq 0$ no ponto de Bogdanov. Então, existe uma vizinhança de $(S_0^*, I_0^*; R_{BT}, \nu_{BT})$ na qual $\mathcal{K}_{12} \neq 0$. Definindo $\Theta_1 = \theta_1 - \chi$ onde $\chi = B/\mathcal{K}_{12}$, denotando Θ_1 como θ_1 , e usando uma reparametrização do tempo $dt = (1 - k_{22}\theta_1)d\tau$, não é difícil verificar que (4.43) se reescreve como

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{d\tau} = (1 - \mathcal{K}_{22}\theta_1)\theta_2, \\ \frac{d\theta_2}{d\tau} = (1 - \mathcal{K}_{22}\theta_1) \left\{ -\chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi) - (C - 2\mathcal{K}_{11}\chi)\theta_1 \right. \\ \left. + \mathcal{K}_{11}\theta_1^2 + \mathcal{K}_{22}\theta_2^2 + \mathcal{K}_{12}\theta_1\theta_2 + \mathcal{O}(\|(\theta_1, \theta_2)\|^3) \right\} \end{cases} \quad (4.44)$$

introduzindo novas variáveis $\Theta_1 = \theta_1$ e $\Theta_2 = (1 - \mathcal{K}_{22}\theta_1)\theta_2$ e renomeando Θ_1, Θ_2 como θ_1, θ_2 , respectivamente. Então, como em [1, p.1805], (4.44) se reescreve como

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{d\tau} = \theta_2, \\ \frac{d\theta_2}{d\tau} = -\chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi) + [2\chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{K}_{22} - (C - 2\mathcal{K}_{11}\chi)]\theta_1 + \mathcal{K}_{12}\theta_1\theta_2 \\ - \left[\chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{K}_{22}^2 - 2(C - 2\mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{K}_{22} - \mathcal{K}_{11} \right] \theta_1^2 + \mathcal{O}(\|(\theta_1, \theta_2)\|^3) \end{cases} \quad (4.45)$$

Seja $\mathcal{J} = \chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{K}_{22}^2 - 2(C - 2\mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{K}_{22} - \mathcal{K}_{11}$. Desde que $\chi \rightarrow 0, C \rightarrow 0$, como $\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_{BT}$ e $\nu \rightarrow \nu_{BT}$, segue da propriedade A_4 que

$$\lim_{\mathcal{R}_0 \rightarrow \mathcal{R}_{BT} \text{ e } \nu \rightarrow \nu_{BT}} \mathcal{J} > \frac{1}{2S_0^*}(\mu + \alpha + \delta) \left[(\mu + \alpha + \delta)a + p(\mu + \delta)(a + \mu + \delta) \right] > 0$$

Então, como $\mathcal{K}_{22} \neq 0$, fazendo a mudança de variáveis $\Theta_1 = \mathcal{K}_{12}^2\theta_1/\mathcal{J}$, $\Theta_2 = \mathcal{K}_{12}^3\theta_2/\mathcal{J}^2$, e $t = \mathcal{J}\tau/\mathcal{K}_{12}$ em uma pequena vizinhança da origem e renomeando Θ_1, Θ_2 como θ_1, θ_2 , respectivamente, nós temos que

$$\begin{cases} \frac{d\theta_1}{dt} = \theta_2, \\ \frac{d\theta_2}{dt} = -\mathcal{K}_{12}^4 \chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi)/\mathcal{J}^3 + \mathcal{K}_{12}^2 [2\chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{K}_{22} - (C - 2\mathcal{K}_{11}\chi)]\theta_1/\mathcal{J}^2 \\ - \theta_1^2 + \theta_1\theta_2 + \mathcal{O}(\|(\theta_1, \theta_2)\|^3). \end{cases} \quad (4.46)$$

Ou seja, o sistema (4.46) está na forma normal (4.25). Então, do teorema (4.7.1), do lema (4.7.1) e das equações (4.31) e (4.33), assim como em [1, p.1805], temos o seguinte teorema para o modelo reduzido (3.4), :

Teorema 4.7.2. *Suponha $\mathcal{K}_{12} \neq 0$ no ponto de Bogdanov. Então, o modelo reduzido (3.29) tem o seguinte comportamento de bifurcação em uma pequena vizinhança de E_0^* :*

1. *Existe uma curva de bifurcação de sela-nó*

$$SN = \left\{ (R_0, \nu) : 4\chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{J} + [2\chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{K}_{22} - (C - 2\mathcal{K}_{11}\chi)]^2 = 0 \right\};$$

2. *Existe uma curva de bifurcação de Hopf*

$$H = \left\{ (\mathcal{R}_0, \nu) : (\chi = 0 \Leftrightarrow B = 0), C > 0 \right\};$$

3. *Existe uma curva de bifurcação homoclínica*

$$P = \left\{ (R_0, \nu) : \begin{aligned} &2\chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{K}_{22} < C - 2\mathcal{K}_{11}\chi, \\ &25 \chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{J} - 6[2\chi(C - \mathcal{K}_{11}\chi)\mathcal{K}_{22} - (C - 2\mathcal{K}_{11}\chi)]^2 \\ &= \mathcal{O}(\|(\mathcal{R}_0 - \mathcal{R}_{BT}, \nu - \nu_{BT})\|^2) \end{aligned} \right\}.$$

Dessa forma, temos a existência de três curvas de bifurcação na vizinhança do ponto de Bogdanov.

5 Uma simulação numérica tendo $f(I; \nu)$

Neste capítulo, conforme em [1], detalharemos os resultados de uma análise para uma taxa de incidência específica. Simulações numéricas usando o software *MATLAB* também serão apresentadas para ilustrar esses resultados.

Seja $f(I, \nu) = \nu I^q (\nu > 0, 0 < q \leq 1)$. Ao considerarmos $p = 1$, teremos o seguinte sistema

$$\begin{cases} \frac{dS}{dt} = \Pi - \left(\frac{\mu}{\Pi}\right)\beta[1 + \nu I^q]IS - \mu S + \delta\left(\frac{\Pi}{\mu} - S - I\right), \\ \frac{dI}{dt} = \left(\frac{\mu}{\Pi}\right)\beta[1 + \nu I^q]IS - (\mu + \alpha)I. \end{cases} \quad (5.1)$$

Ao termos $p = 1$, e usarmos (3.5) para S , teremos de (3.35), após substituições que, em um equilíbrio endêmico positivo

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu}{\Pi}\beta[1 + f]I^* - \frac{\mu}{\Pi}\beta[1 + f + I^*qI^{*q-1}]\frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f]}\frac{\Pi}{\mu} + 2\mu + \alpha + \delta \\ &= \frac{\mu}{\Pi}\beta[1 + f]k\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0[1 + f]}\right) - \frac{\mu}{\Pi}\beta[1 + f + qf]\frac{\mu + \alpha}{\beta[1 + f]}\frac{\Pi}{\mu} + 2\mu + \alpha + \delta \end{aligned} \quad (5.2)$$

Ao usarmos (3.11) para β , e $k = (\mu + \delta)\Pi/[\mu(\mu + \alpha + \delta)]$, teremos

$$\begin{aligned} B &= R_0(\mu + \alpha)\left[1 + f\right]\frac{(\mu + \delta)}{(\mu + \alpha + \delta)}\left(1 - \frac{1}{\mathcal{R}_0[1 + f]}\right) \\ &\quad - \left[1 + f + qf\right]\frac{(\mu + \alpha)}{[1 + f]} + 2\mu + \alpha + \delta. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Assim, após colocarmos $\frac{1}{(\mu + \alpha + \delta)(1 + f)}$ em evidência e fazermos alguns cálculos, teremos

$$B = \frac{1}{(\mu + \alpha + \delta)(1 + f)}\tilde{B}, \quad (5.4)$$

onde, como em [1]

$$\begin{aligned} \tilde{B} = & (\mu + \alpha)(\mu + \delta)\mathcal{R}_0 f^2 + \left\{ (\mu + \delta) \left[2(\mu + \alpha)\mathcal{R}_0 + \delta \right] - q(\mu + \alpha)(\mu + \alpha + \delta) \right\} f \\ & + (\mu + \delta) \left[(\mu + \alpha)\mathcal{R}_0 + \delta \right]. \end{aligned} \quad (5.5)$$

é uma equação quadrática. Então, $B(f) = 0$ se e somente se $\tilde{B} = 0$. Dessa forma, B terá duas raízes reais para f (incluindo o caso de multiplicidade 2) se e somente se o discriminante da equação quadrática for $\Delta \geq 0$, ou seja

$$\begin{aligned} \Delta = & \left\{ (\mu + \delta) \left[2(\mu + \delta)\mathcal{R}_0 + \delta \right] - q(\mu + \alpha)(\mu + \alpha + \delta) \right\}^2 \\ & - 4(\mu + \alpha)(\mu + \delta)^2 \mathcal{R}_0 \left[(\mu + \alpha)\mathcal{R}_0 + \delta \right] \geq 0; \end{aligned}$$

se e somente se

$$\mathcal{R}_0 \leq \frac{(\mu + \delta)^2 \delta^2 - 2(\mu + \delta)(\mu + \alpha + \delta)\delta q + q^2(\mu + \alpha)^2(\mu + \alpha + \delta)^2}{4q(\mu + \delta)(\mu + \alpha)^2(\mu + \alpha + \delta)}$$

ou seja

$$\mathcal{R}_0 \leq \frac{(z_0 - 1)^2}{4z_1} \equiv l_0, \quad (5.6)$$

onde

$$z_0 = \frac{\delta(\mu + \delta)}{q(\mu + \alpha)(\mu + \alpha + \delta)}, \quad z_1 = \frac{\mu + \alpha}{\delta} z_0. \quad (5.7)$$

Se $z_0 < 1$ teremos $q(\mu + \alpha)(\mu + \alpha + \delta) > \delta(\mu + \delta)$. Assim, as raízes da equação (5.4) serão positivas se e somente se $z_0 < 1$, pois assim, o termo que acompanha f , na equação quadrática (5.5), será negativo. Sendo $z_0 < 1$, temos de forma equivalente

$$q > \frac{\delta(\mu + \delta)}{(\mu + \alpha)(\mu + \alpha + \delta)}. \quad (5.8)$$

Ao supormos (5.6) e (5.8) válidos, teremos que existem valores positivos ν_1, ν_2 tais que $B(\nu_1) = B(\nu_2) = 0$. Diferenciando β com respeito a ν em $\nu_{1,2}$ e usando a equação (3.13), temos

$$\left. \frac{dB}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_i} = \frac{1}{(\mu + \alpha + \delta)(1 + f)} \left. \frac{d\tilde{B}}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_i}, \quad i = 1, 2, \quad (5.9)$$

onde, ao derivarmos $\left. \frac{d\tilde{B}}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_i}$, teremos

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\tilde{B}}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_i} &= \left\{ 2(\mu + \alpha)(\mu + \delta)\mathcal{R}_0(1 + f) - q(\mu + \alpha)(\mu + \alpha + \delta) + \delta(\mu + \delta) \right\} \left. \frac{df}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_i} \\ &= \left\{ 2(\mu + \alpha)(\mu + \delta)\mathcal{R}_0(1 + f) - q(\mu + \alpha)(\mu + \alpha + \delta) + \delta(\mu + \delta) \right\} \left. I^q \right|_{\nu=\nu_i} \\ &= \frac{2\delta(\mu + \delta)z_1^2\mathcal{R}_0}{z_0} \left\{ f + 1 - \frac{1 - z_0}{2z_1\mathcal{R}_0} \right\} \left(\frac{\mathcal{R}_0(1 + f)^2 f I^*}{k\nu[\mathcal{R}_0(1 + f)^2 - (1 + f) - qf]} \right) \Big|_{\nu=\nu_i}. \end{aligned}$$

Como em [1], ao considerarmos $h_0 = (1 - z_0)/(2z_1\mathcal{R}_0) - 1$ e $g = \mathcal{R}_0(1 + f)^2 - (1 + f) - qf$.

Se $\mathcal{R}_0 = 1$, teremos

$$\begin{aligned} g &= 1 + 2f + f^2 - 1 - f - fq \\ &= f^2 + f(1 - q). \end{aligned} \quad (5.10)$$

Assim, se $\mathcal{R}_0 \geq 1$, então $g \geq f^2 + (1 - q)f > 0$, e então,

$$\text{sign} \left(\left. \frac{dB}{d\nu} \right|_{\nu=\nu_i} \right) = \text{sign}(f - h_0) \Big|_{\nu=\nu_i}, \quad i = 1, 2, \quad (5.11)$$

pois os outros termos da derivada serão positivos.

Seja f_1 e f_2 (com $f_1 < f_2$) as raízes positivas de (5.4) quando (5.6) e (5.8) são válidos. Então, se $R_0 < l_0$, segue que

$$\tilde{B}(h_0) = (\mu + \alpha)(\mu + \delta) \left[1 - \frac{(1 - z_0)^2}{4z_1\mathcal{R}_0} \right] < (\mu + \alpha)(\mu + \delta) \left[1 - \frac{(1 - z_0)^2}{4z_1l_0} \right] = 0 \quad (5.12)$$

e, portanto $f_1 < h_0 < f_2$. Assim, $\nu_1 - h_0 < 0$ e $\nu_2 - h_0 > 0$, logo, de (5.11) teremos que $dB/d\nu < 0$ em ν_1 e $dB/d\nu > 0$ em ν_2 . Portanto, do teorema (4.4.3), temos que no ponto de equilíbrio endêmico E_2^* (onde $C > 0$), o modelo sofre uma bifurcação de Hopf em ν_1 e uma bifurcação Hopf inversa em ν_2 . Dessa forma, teremos o seguinte teorema:

Teorema 5.0.1. *Suponha $1 \leq \mathcal{R}_0 < l_0$ e $z_0 < 1$. Então, o modelo sofre uma bifurcação de Hopf em ν_1 e uma bifurcação de Hopf inversa em ν_2 . Essa bifurcação é supercrítica se $\sigma < 0$ e subcrítica se $\sigma > 0$.*

Suponhamos agora que $\mathcal{R}_0 < 1$, logo

$$\begin{aligned} g &= \mathcal{R}_0(1+f)^2 - (1+f) - qf \\ &= \mathcal{R}_0 f^2 + f(2\mathcal{R}_0 - 1 - q) + (\mathcal{R}_0 - 1), \end{aligned} \quad (5.13)$$

é uma equação quadrática cujo o gráfico tem concavidade voltada para cima, intersecta o eixo $-g$ na parte negativa e decrescendo. Dessa forma, g terá uma única raiz positiva, nomeada como f_0 , tal que $g < 0$ para $0 < f < f_0$ e $g > 0$ para $f > f_0$. Assim,

$$\text{sign}\left(\frac{dB}{d\nu}\Big|_{\nu=\nu_i}\right) = \text{sign}\left[(f - h_0)g\right]\Big|_{\nu=\nu_i}, \quad i = 1, 2. \quad (5.14)$$

Ao termos a desigualdade (5.12) e analisarmos o sinal de g para $0 < f < f_0$ e $f > f_0$, temos o seguinte teorema

Teorema 5.0.2. *Suponha $\mathcal{R}^* < \mathcal{R}_0 < \min(l_0, 1)$ e $z_0 < 1$.*

1. *Se f_i estiver no intervalo entre f_0 e h_0 , então $\frac{dB}{d\nu} < 0$, e o modelo sofre uma bifurcação de Hopf supercrítica (subcrítica) se $\sigma < 0$ (se $\sigma > 0$).*
2. *Se f_i não estiver no intervalo entre f_0 e h_0 , então $\frac{dB}{d\nu} > 0$, e o modelo sofre uma bifurcação de Hopf inversa supercrítica (subcrítica) se $\sigma < 0$ (se $\sigma > 0$).*

Ao darmos sequência, encontraremos condições para que ocorra simultaneamente uma bifurcação sela-nó e uma bifurcação de Hopf no modelo. Ao derivarmos a nossa função $f(I, \nu) = \nu I^q$ ($\nu > 0, 0 < q \leq 1$), temos que $I f_I(I, \nu_{BT}) = q f(I, \nu_{BT})$, e da definição de u em (4.38), nos temos que

$$q\left(\frac{u^p}{\mathcal{R}_{BT}} - 1\right) = \frac{p}{\mathcal{R}_{BT}}(u-1)u^p, \quad (5.15)$$

na qual,

$$\mathcal{R}_{BT} = \frac{w^p}{q}(p + q - pu). \tag{5.16}$$

Então, de (3.13), usando a expressão $I = k\left(1 - \frac{1}{u}\right)$, encontramos

$$\nu_{BT} = \frac{f(I, \nu)}{I^q} = \frac{1}{I^q} \left(\frac{w^p}{\mathcal{R}_{BT}} - 1 \right). \tag{5.17}$$

Conforme [1], para ilustrarmos numericamente a análise dos resultados dessa bifurcação, o modelo foi simulado com os parâmetros estimados para uma infecção por sarampo dados a seguir

$$\Pi = 1050, \quad \mu = 0,02, \quad \alpha = 26, \quad \delta = 0,1, \quad q = 0,05, \quad p = 1, \quad \mathcal{R}_0 = 0,95.$$

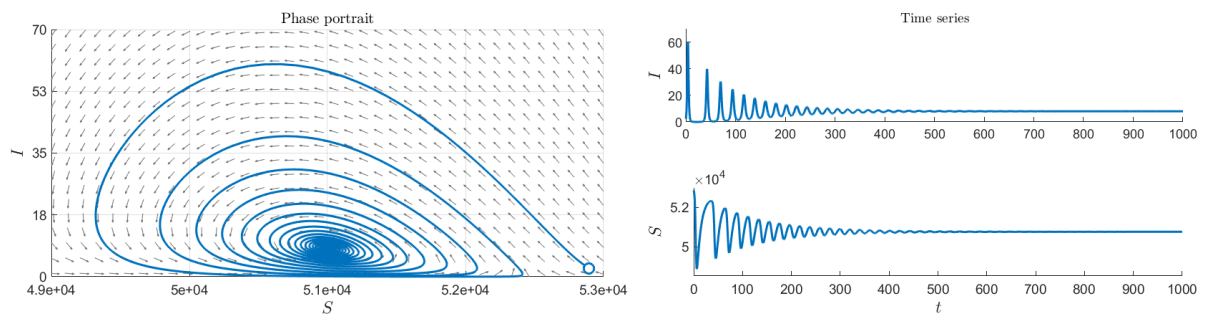
Com esses dados, da equação (3.11), teremos $\beta = \mathcal{R}_0(\mu + \alpha) = 24,719$, e os valores

$$\nu_1 = 9,49167 \times 10^{-2} \quad \text{e} \quad \nu_2 = 7,14126 \tag{5.18}$$

corresponderão a dois pontos de bifurcação de Hopf. Através de cálculos, temos que $dB/d\nu < 0, \sigma < 0$ em ν_1 , e $dB/d\nu > 0, \sigma < 0$ em ν_2 , para o qual a bifurcação de Hopf é supercrítica em ν_1 e supercrítica inversa em ν_2 .

Vejamos os retratos de fase a seguir onde ilustrarmos o aparecimento de um ciclo limite estável.

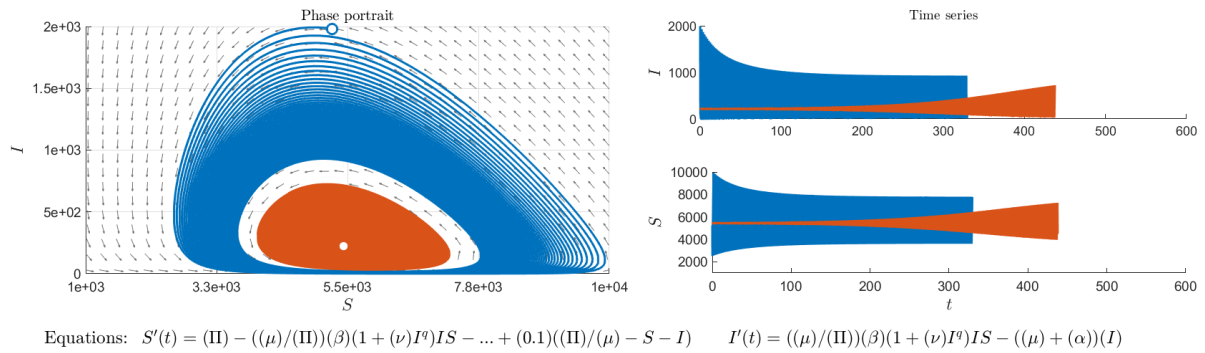
Figura 20 – Retrato de fase do modelo numérico para $\nu = 0.08 < \nu_1$



$$\text{Equations: } S'(t) = (\Pi) - ((\mu)/(\Pi))(\beta)(1 + (\nu)I^q)IS - \dots + (0.1)((\Pi)/(\mu) - S - I) \quad I'(t) = ((\mu)/(\Pi))(\beta)(1 + (\nu)I^q)IS - ((\mu) + (\alpha))(I)$$

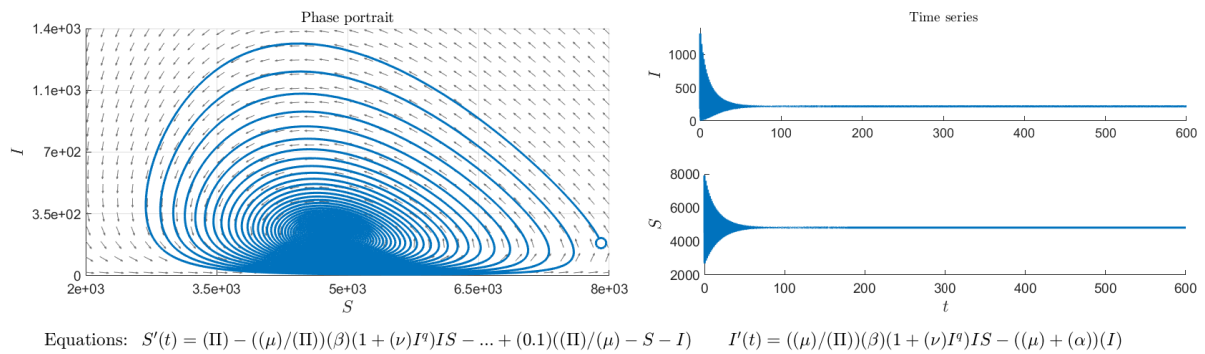
Fonte: Elaborado pela autora.

Figura 21 – Retrato de fase do modelo numérico para $\nu_1 < \nu = 7 < \nu_2$



Fonte: Elaborado pela autora.

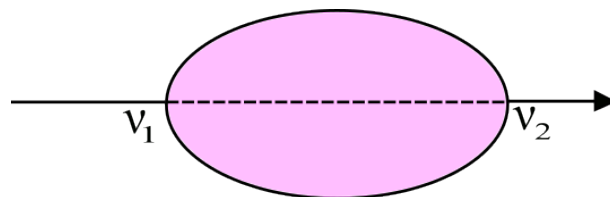
Figura 22 – Retrato de fase do modelo numérico para $\nu = 8 > \nu_2$



Fonte: Elaborado pela autora.

As figuras (20), (21) e (22) mostram os retratos de fase do modelo numérico para $\nu_0 = 0.08 < \nu_1$, na qual aparece um ponto de equilíbrio estável, $\nu_1 < \nu = 7 < \nu_2$, onde aparece um ciclo limite estável, e para $\nu = 8 > \nu_2$ teremos novamente um ponto de equilíbrio estável. O ciclo limite gerado pela bifurcação de Hopf em ν_1 , desaparece quando ν intersectar ν_2 , conforme o diagrama de bifurcação (23), adaptado de [1, p.1809]. Tal fato também pode ser observado nas figuras (20), (21) e (22).

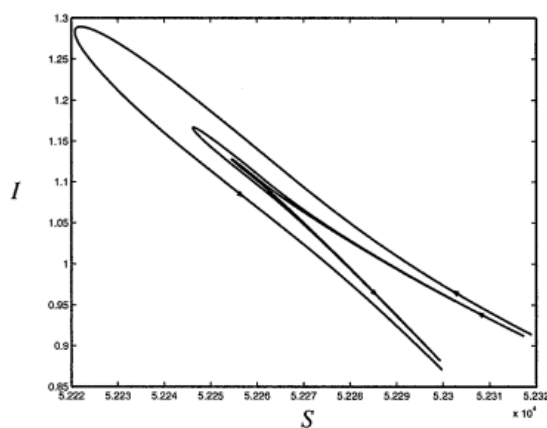
Figura 23 – Diagrama de bifurcação de Hopf em ν_1 e ν_2



Fonte: Adaptado pela autora.

A figura seguinte nos mostra o retrato de fase no ponto de Bogdanov-Takens; $(\mathcal{R}_{BT}, \nu_{BT}) = (0.9115413570, 0.1015835081)$.

Figura 24 – Retrato de fase em um ponto de Bogdanov–Takens com $(\mathcal{R}_{BT}, \nu_{BT})$

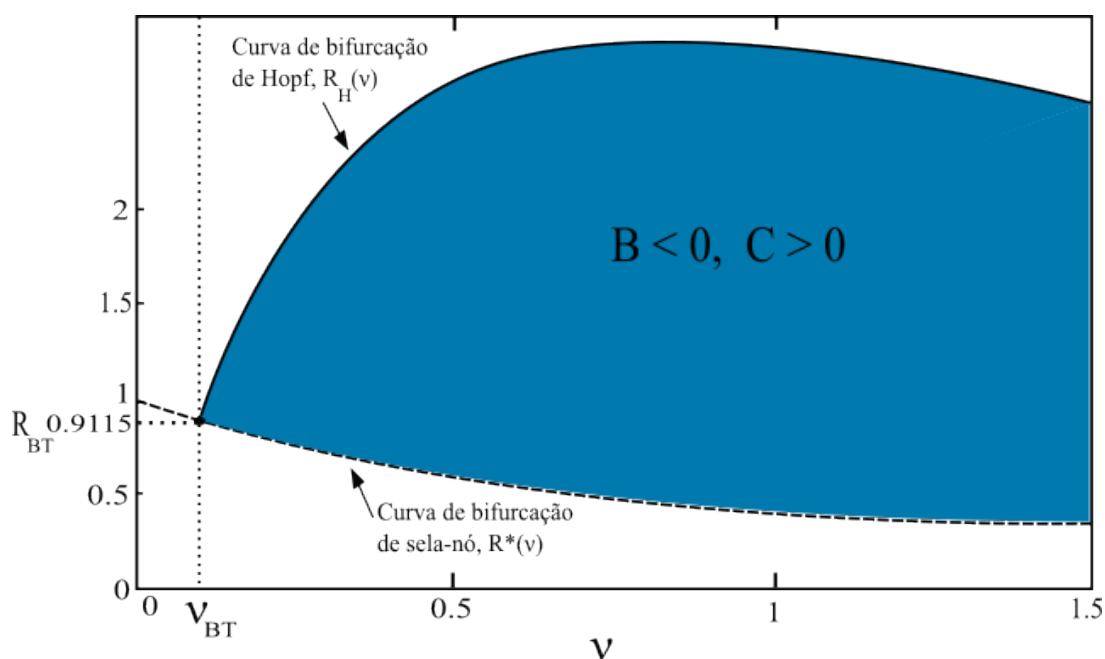


Fonte: [1, p.1808]

Ao observarmos o retrato de fase (24), é nítido o aparecimento cúspides.

Para ilustrarmos a análise teórica do modelo numérico com um função função f específica, curvas de bifurcações são mostradas na figura (25), adaptada de [1, p.1809], onde usamos os mesmos valores de parâmetros.

Figura 25 – Curvas de bifurcação do modelo numérico



Fonte: Adaptado pela autora.

Essa figura mostra as curvas de bifurcações de sela-nó ($\mathcal{R}^*(\nu)$) e de Hopf ($\mathcal{R}_H(\nu)$) para um intervalo de valores do parâmetro de bifurcação ν , ao longo do qual bifurcações de sela-nó e Hopf, respectivamente, ocorrem.

6 Considerações finais

6.1 Considerações finais

Nesta dissertação, focamos na análise de bifurcações de um modelo epidemiológico com incidência não-linear geral. O estudo da obtenção e estabilidade dos pontos de equilíbrio, que nos levou ao comportamento das bifurcações, nos permitiu o aprendizado de teoremas e resultados importantes da área de sistemas dinâmicos e da teoria de bifurcações.

A ocorrência de bifurcações em modelos epidemiológicos depende da taxa de incidência (transmissão de uma doença por unidade de tempo), e essa, depende intrinsecamente de ações governamentais, mudanças de comportamento da população, questões sazonais, entre outros fatores. Dessa forma, a não uniformidade da taxa de transmissão pode ocasionar trocas da estabilidade do sistema gerando bifurcações, ou seja picos no número de infectados. Logo, saber encontrar os valores de bifurcações de um modelo epidemiológico, se faz necessário para termos o controle da doença. Um fato relevante do nosso trabalho, é que mesmo sendo o número básico de reprodução (\mathcal{R}_0) menor que uma unidade, surtos da doença ainda podem aparecer, ou seja, bifurcações poderão ocorrer. E claro, isso se deve ao fato da taxa de incidência ser não-linear.

Referências

- [1] M. E. Alexander and S. M. Moghadas. Bifurcation analysis of an sirs epidemic model with generalized incidence. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 65(5):1794–1816, 2005. Citado 24 vezes nas páginas [11](#), [13](#), [14](#), [15](#), [20](#), [21](#), [24](#), [29](#), [34](#), [35](#), [47](#), [48](#), [49](#), [56](#), [65](#), [66](#), [67](#), [68](#), [69](#), [70](#), [71](#), [73](#), [74](#) e [75](#).
- [2] D. E. Barroso, D. M. de Carvalho, S. A. Nogueira, and C. A. Solari. Doença meningocócica: epidemiologia e controle dos casos secundários. *Revista de Saúde Pública*, 32(1):89–97, FEVEREIRO 1998. Citado na página [20](#).
- [3] A. Báez-Sánchez and N. Bobko. On equilibria stability in an epidemiological sir model with recovery-dependent infection rate. *TENDÊNCIAS EM MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL (TEMA)*, (3):409–424, Abril 2020. Citado na página [14](#).
- [4] D. Diekmann, A. P. Heesterbeek, and J. A. Metz. On the definition and the computation of the basics reproduction ratio r_0 in models for infectious diseases in heterogeneous populations. *Journal of Mathematical Biology*, 28:365–382, 1990. Citado na página [20](#).
- [5] P. Driessche and J. Watmough. Reproduction numbers and sub–threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180:29–48, November-December 2002. Citado na página [20](#).
- [6] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, New York, first edition edition, 1986. Citado 10 vezes nas páginas [18](#), [43](#), [44](#), [45](#), [47](#), [52](#), [53](#), [54](#), [57](#) e [60](#).
- [7] Z. Hu, P. Bi, W. Ma, and S. Ruan. Bifurcations of an sirs epidemic model with nonlinear incidence rate. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 15(1):93–112, 2011. Citado 2 vezes nas páginas [13](#) e [14](#).
- [8] Y. A. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Springer, 2013. Citado 5 vezes nas páginas [39](#), [57](#), [61](#), [62](#) e [63](#).
- [9] E. Lima. *Curso de Análise*. John Wiley, 12 edition, 2020. Citado na página [54](#).

- [10] J. E. Marsden and M. McCracken. *The Hopf Bifurcation and Its Applications*. Springer-Verlag, Nova York, 1976. Citado na página 52.
- [11] M. Martcheva. *An Introduction to Mathematical Epidemiology*, volume 61. Springer, 2015. Citado 4 vezes nas páginas 11, 14, 20 e 21.
- [12] H. N. Moreira and W. Yuquan. Global stability in an $s \rightarrow i \rightarrow r \rightarrow i$ model. *SIAM Rev.*, 1997. Disponível em: <<https://bityli.com/XyVCgV>> Acesso em: marco de 2020. Citado na página 21.
- [13] J. A. P. H. O. Diekmann and M. G. Roberts. The construction of next-generation matrices for compartmental epidemic models. *J. R. Soc. Interface*, 7:873–885, 2009. Citado na página 20.
- [14] J. W. P. Van Den Driessche. Reproduction numbers and sub-threshold endemic equilibria for compartmental models of disease transmission. *Mathematical Biosciences*, 180:29–48, 2002. Citado na página 21.
- [15] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, third edition edition, 1996. Citado 7 vezes nas páginas 14, 17, 40, 45, 46, 47 e 51.
- [16] J. Sotomayor. *Equações Diferenciais Ordinárias*. Livraria da Física, Janeiro 2011. Citado 4 vezes nas páginas 14, 19, 39 e 40.
- [17] W. Wang and S. Ruan. Dynamical behavior of an epidemic model with a nonlinear incidence rate. *Journal of Differential Equations*, page 135–163, 2003. Citado na página 13.
- [18] J. A. Yorke and W. London. Recurrente outbreaks of measles, chickenpox and mumps ii. *Amer. J. Epidemiol.*, 98:469–482, 1973. Citado na página 11.