UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Departamento de Matemática

O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Priscilla Alves Ferreira

Belo Horizonte
2011

Priscilla Alves Ferreira

O PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Monografia apresentada ao programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a orientação do título de Especialista em Matemática para Professores do Ensino Básico.

Professora Orientadora: Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Belo Horizonte
2011

Agradeço a Deus pelo dom da vida e a minha orientadora Viviane Ribeiro Tomaz da Silva pela paciência, pelos conselhos, correções e sugestões que tornaram possível a realização deste trabalho.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A Análise Combinatória é considerada, por muitos, um dos temas mais difíceis da Matemática, porém existem alguns recursos que podem facilitar a resolução de vários problemas e o Princípio da Casa dos Pombos é um deles. Esse princípio, muitas vezes usado por nós de forma intuitiva, é formalmente pouco conhecido, mas pode ser uma ferramenta importante na hora de resolver exercícios.

O Princípio da Casa dos Pombos foi utilizado pela primeira vez por G. Lejeune Dirichlet em 1834 com o nome de *Schubfachprinzip* ("princípio das gavetas"), por esse motivo esse princípio também é conhecido como Princípio das Gavetas de Dirichlet.

Descendente de família francesa, Dirichlet nasceu em 1805 na Alemanha, estudou na Universidade de Paris e ocupou cargos na Universidade de Breslau e na Universidade de Berlim. Em 1855, ele foi escolhido para ser sucessor de Gauss na Universidade de Göttingen. Dirichlet morreu em 1859 deixando importantes contribuições em diversas áreas da matemática com destaque para o estudo da Teoria dos Números.

O Princípio da Casa dos Pombos pode ser anunciado em sua versão mais simples da seguinte forma: *"Se tivermos $n+1$ pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter, pelo menos, dois pombos"*. Essa afirmação parece óbvia uma vez que se tivermos um grupo de $n+1$ pombos voando para dentro de n casas, então, na pior das hipóteses, se todas as casas contiverem no máximo um pombo, no máximo n pombos (um por casa) poderão ser acomodados, assim fica claro que pelo menos uma casa deverá conter pelo menos dois pombos.

Vemos assim que a ideia desse princípio é bem simples, porém algo que pode ser um tanto quanto desafiador é, ao utilizar este princípio na resolução de problemas de Análise Combinatória, deixar claro quem são os "pombos", quem são as "casas" e qual a relação entre ambos. Responder a este desafio é a maior motivação para este trabalho.

A principal referência utilizada é o artigo "Princípio da casa dos pombos" do autor João Bosco Pitombeira. Procuramos resolver todos os exemplos apresentados pelo autor bem como os principais exercícios propostos pelo mesmo, buscando sempre, atendendo ao nosso desafio, evidenciar quem são os "pombos", quem são as "casas" e qual a relação entre ambos, generalizando sempre que possível os resultados obtidos.

Além deste artigo, foram utilizados como referência os livros “Introdução à Análise Combinatória” dos autores José Plínio O. Santos, Margarida P. Melo e Idani T. C. Murari, “Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções de exercícios” dos autrores Augusto César de Oliveira Morgado, João Bosco Pitombeira, Paulo Cesar Pinto Carvalho e Pedro Fernandes, e “Matemática discreta e suas aplicações” do autor Kenneth H. Rosen; também foi utilizado o artigo “O Princípio das Gavetas” de Paulo Cezar Pinto Carvalho publicado na Revista Eureka n° 5. Dessas referências também foram retirados alguns exemplos apresentados neste trabalho.

O primeiro capítulo deste texto é dedicado ao entendimento do Princípio da Casa dos Pombos. Buscamos apresentar o que é esse princípio e como ele funciona ilustrando o mesmo através de exemplos de aplicação direta e indireta com suas respectivas generalizações, quando foi possível.

No segundo capítulo apresentamos duas generalizações para o Princípio da Casa dos Pombos, o que nos possibilita trabalhar problemas mais elaborados como mostram os exemplos e as generalizações do mesmo.

No terceiro capítulo, apresentamos o Teorema 3.1 e um exemplo de sua aplicação retirado de nossa referência principal. Esse teorema é enunciado na configuração de “gavetas” e “objetos” e em sua aplicação podemos observar, na resolução proposta pelo autor, que a identificação das “casas” e “pombos” não é evidente o que nos remete ao nosso desafio inicial. Para responder a tal desafio, utilizamos recursos mais engenhosos que nos permitiram a explicitação dos “pombos” e das “casas”. Situação semelhante ocorre no último exemplo deste capítulo.

O texto termina com algumas considerações finais e as referências bibliográficas.

1. PRINCÍPIO DA CASA DOS POMBOS

Segue abaixo a versão mais simples do teorema principal deste trabalho.

Teorema 1.1 (Princípio da Casa dos Pombos): *Se tivermos* $n + 1$ *pombos para serem colocados em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter, pelo menos, dois pombos.*

<u>Demonstração</u>: Se temos n casas para $n + 1$ pombos, é obvio que, na pior das hipóteses, se distribuirmos exatamente um pombo para cada casa, sobrará um pombo para ser colocado em qualquer casa. Logo uma das casas deverá conter pelo menos dois pombos.

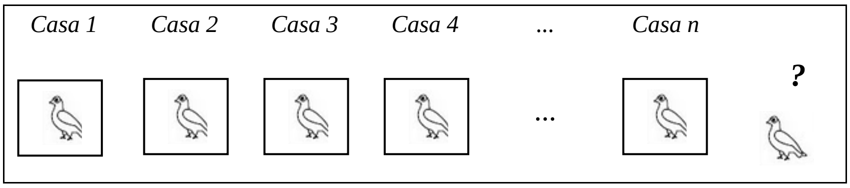


Figura 1

Esse teorema também é conhecido como Princípio das Gavetas e pode ser reenunciado da seguinte forma: "*Temos n objetos para serem guardados em m gavetas. Se* $n > m$, *então pelo menos uma gaveta deverá conter mais de um objeto*".

Veremos a seguir alguns exemplos de aplicações do Princípio da Casa dos Pombos. Em cada um deles, procuramos identificar quem são as "casas", quem são os "pombos" e a relação existente entre ambos.

Exemplo 1.2: Mostre que, em um ano não bissexto, em qualquer conjunto com 366 pessoas há pelo menos duas que farão aniversário no mesmo dia.

<u>Demonstração</u>: Neste caso temos:

- <u>Casas</u>: dias do ano (365);
- <u>Pombos</u>: pessoas (366);
- <u>Relação</u>: Cada pessoa está associada ao dia do seu aniversário.

Pelo Princípio da Casa dos pombos, para $n = 365$, temos que pelo menos uma "casa" deverá conter pelo menos dois "pombos", isto é, pelo menos duas pessoas farão aniversário no mesmo dia.

Generalização 1.3: Mostre que em um calendário qualquer com n dias e um conjunto contendo $n + 1$ pessoas, há pelo menos duas pessoas deste conjunto que farão aniversário no mesmo dia.

Demonstração: Neste caso temos:

- Casas: dias do ano;
- Pombos: pessoas;
- Relação: Cada pessoa está associada ao dia do seu aniversário.

Pelo Princípio da Casa dos pombos, $n + 1$ "pombos" para serem distribuídos em n "casas", logo uma casa deverá conter pelo menos dois "pombos", isto é, pelo menos duas pessoas farão aniversário no mesmo dia.

No Exemplo **1.4** e na Generalização **1.5** a seguir, usaremos como ideia fundamental o fato de que qualquer número inteiro a se escreve sob a forma $a = 2^k b$, onde k é um número inteiro não negativo e b um inteiro ímpar.

Exemplo 1.4: Escolha dentre os inteiros $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, quatro números quaisquer. Mostre que, entre os números escolhidos, há dois números tais que um deles é divisível pelo outro.

Demonstração: Escrevendo todos os inteiros do conjunto na forma $a = 2^k b$, temos:

$1= 2^0.1$	$3=2^0.3$	$5=2^0.5$
$2=2^1.1$	$4=2^2.1$	$6=2^1.3$

Note que b é um dos números inteiros ímpares 1, 3, 5. A importância de tal número fica evidente ao listarmos todas as $\binom{6}{4} = 15$ possibilidades[1] de escolha dos quatro números e destacarmos, em cada caso, aqueles que possuem a mesma parte ímpar. Vejamos:

1, **2**, 3, **4**	**1**, **2**, 5, 6	**2**, 3, **4**, 5
1, **2**, 3, 5	**1**, 3, **4**, 5	**2**, 3, **4**, 6
1, **2**, 3, 6	**1**, 3, **4**, 6	2, 3, 5, 6
1, **2**, **4**, 5	1, 3, 5, 6	**2**, **4**, 5, 6
1, **2**, **4**, 6	**1**, **4**, 5, 6	3, 4, 5, 6

Podemos observar que, em todas as opções listadas acima, existem pelo menos dois números que ao serem escritos na forma $a = 2^k b$, possuem suas partes ímpares iguais e, consequentemente, um deles é divisível pelo outro e assim é natural associar cada situação acima com uma configuração de "pombos" em "casas" da seguinte forma:

- Casas: valores para b quando $a = 2^k b$ (n=3);
- Pombos: quatro números escolhidos em {1, 2,..., 6};
- Relação: Cada número está associado a sua parte ímpar.

Por exemplo, para as três primeiras possibilidades de escolha citadas acima, temos:

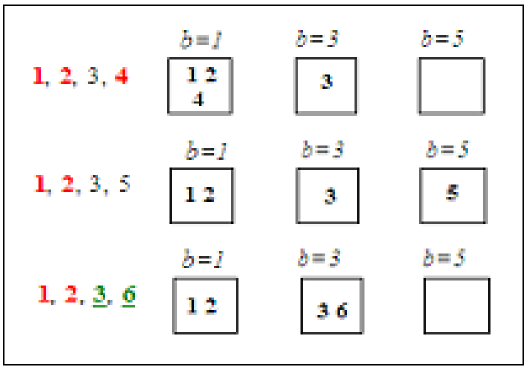


Figura 2

[1] O número de maneiras de escolher p elementos de um conjunto com m elementos (isto é, o número de combinações de m elementos tomados p a p) será aqui denotado por $\binom{m}{p} = \frac{m!}{p!(m-p)!}$.

Logo, temos quatro pombos para serem distribuídos em três casas, o que nos garante que pelo menos uma casa deverá conter pelo menos dois pombos. Em outras palavras, quando escolhemos quatro números do conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, pelo menos dois deles terão suas partes ímpares iguais e, portanto, um deles será divisível pelo outro. Para mais detalhes, veja a generalização logo abaixo.

Generalização 1.5: Mostre que se do conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ retiramos $(n + 1)$ números ao acaso, então um deles dividirá um outro.

<u>Demonstração:</u> Analogamente ao exemplo anterior, chamamos de a qualquer número inteiro pertencente ao conjunto $\{1, 2, \ldots, 2n\}$. Sabemos que a pode ser escrito na forma $a = 2^k b$ e que b é um dos números ímpares $1, 3, \ldots, 2n - 1$. Podemos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos da seguinte forma:

- <u>Casas</u>: valores para b quando $a = 2^k b$ (note que temos n valores para b, já que $b \in \{1, 3, \ldots, 2n - 1\}$);
- <u>Pombos</u>: $(n + 1)$ números escolhidos em $\{1, 2, \ldots, 2n\}$;
- <u>Relação</u>: Cada número está associado a sua parte ímpar.

Logo, pelo Princípio da Casa dos Pombos, ao escolhermos, ao acaso, $(n + 1)$ números deste conjunto, dois destes números, digamos a_1 e a_2, terão suas partes ímpares (b) iguais.

Assim, $a_1 = 2^{k_1} b$ e $a_2 = 2^{k_2} b$, com $k_1 \neq k_2$. Suponha, sem perda de generalidade, que $k_1 < k_2$. Então $\frac{a_2}{a_1} = \frac{(2^{k_2}.b)}{(2^{k_1}.b)} = \frac{2^{k_2}}{2^{k_1}} = 2^{k_2 - k_1}$ e, como $k_2 - k_1 > 0$, concluímos que a_1 divide a_2.

No Exemplo 1.6 e na Generalização 1.7 a seguir, utilizaremos a convenção que se a pessoa A conhece a pessoa B então B conhece A, ou seja, conhecer é uma relação simétrica.

Exemplo 1.6: Mostre que em um conjunto de três pessoas {A, B, C} há duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.

Demonstração: Observando que uma pessoa do conjunto conhece no mínimo zero e no máximo duas pessoas, para resolver este problema iremos dividi-lo em dois casos:

1° Caso: Todas as pessoas do conjunto {A, B, C} conhecem pelo menos uma pessoa do mesmo conjunto. Note que temos quatro situações possíveis:

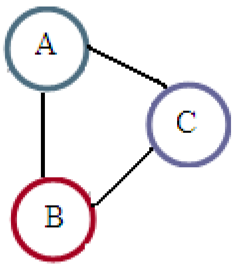
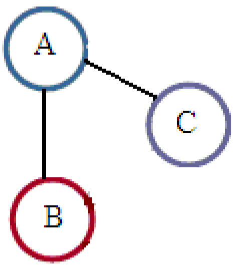
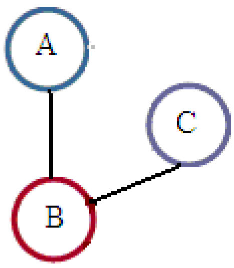
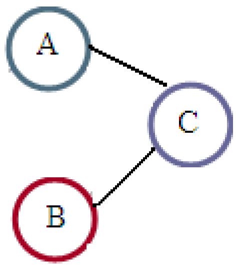
Situação 1	Situação 2	Situação 3	Situação 4
			
A $\mapsto$ conhece duas pessoas B $\mapsto$ conhece duas pessoas C $\mapsto$ conhece duas pessoas	A $\mapsto$ conhece duas pessoas B $\mapsto$ conhece uma pessoa C $\mapsto$ conhece uma pessoa	A $\mapsto$ conhece uma pessoa B $\mapsto$ conhece duas pessoas C $\mapsto$ conhece uma pessoa	A $\mapsto$ conhece uma pessoa B $\mapsto$ conhece uma pessoa C $\mapsto$ conhece duas pessoas

Figura 3

Como podemos observar em todas as situações possíveis, há pelo menos duas pessoas de {A, B, C} que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas deste conjunto. Este mesmo resultado seria obtido aplicando o Princípio da Casa dos Pombos para n=2, onde:

- Casas: número de pessoas que cada um dos indivíduos do conjunto conhece (note que as casas são rotuladas de 1 a 2);
- Pombos: indivíduos do conjunto;
- Relação: Cada pessoa está associada ao número de pessoas que ela conhece.

Note que, neste caso, para cada uma das situações supracitadas teríamos a seguinte configuração:

Situação 1		Situação 2		Situação 3		Situação 4	
Conhece 1 pessoa	*Conhece 2 pessoas*	*Conhece 1 pessoa*	*Conhece 2 pessoas*	*Conhece 1 pessoa*	*Conhece 2 pessoas*	*Conhece 1 pessoa*	*Conhece 2 pessoas*
	A B C	B C	A	A C	B	A B	C

Figura 4

2° Caso: Há pessoas no conjunto que não conhecem ninguém.

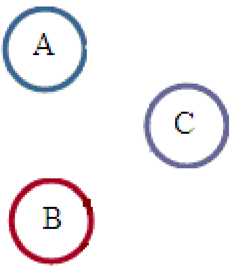
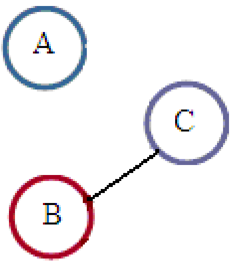
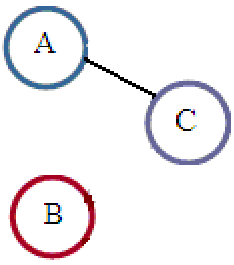
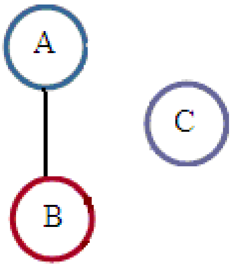
Situação 1	Situação 2	Situação 3	Situação 4
			
A $\mapsto$ não conhece ninguém B $\mapsto$ não conhece ninguém C $\mapsto$ não conhece ninguém	A $\mapsto$ não conhece ninguém B $\mapsto$ conhece uma pessoa C $\mapsto$ conhece uma pessoa	A $\mapsto$ conhece uma pessoa B $\mapsto$ não conhece ninguém C $\mapsto$ conhece uma pessoa	A $\mapsto$ conhece uma pessoa B $\mapsto$ conhece uma pessoa C $\mapsto$ não conhece ninguém

Figura 5

Observando todas as situações possíveis vemos que em cada uma delas há pelo menos duas pessoas de {A, B, C} que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas deste conjunto, conforme obteríamos aplicando o Princípio da Casa dos Pombos para $n = 2$, onde:

- Casas: número de pessoas que cada um dos indivíduos do conjunto conhece (note que as casas são rotuladas de 0 a 1);
- Pombos: indivíduos do conjunto;
- Relação: Cada pessoa está associada ao número de pessoas que ela conhece.

Note que, neste caso, para cada uma das situações supracitadas teríamos a seguinte configuração:

Situação 1		Situação 2		Situação 3		Situação 4	
Conhece 0 pessoa	Conhece 1 pessoa	Conhece 0 pessoa	Conhece 1 pessoa	Conhece 0 pessoa	Conhece 1 pessoa	Conhece 0 pessoa	Conhece 1 pessoa
A B C		A	B C	B	A C	C	A B

Figura 6

Comparando os Casos 1 e 2 vemos que, em ambos, há situações que garantem o resultado; o que muda de um caso para outro são os rótulos das casas. Logo há pelo menos duas pessoas do conjunto que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.

Generalização 1.7: Mostre que em um conjunto de *n* pessoas há duas pessoas que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.

<u>Demonstração:</u> Sabendo que qualquer pessoa do conjunto pode conhecer no mínimo zero e no máximo n-1 pessoas, dividiremos a solução deste problema em dois casos, analogamente a que foi feito no exemplo anterior.

<u>1° Caso</u>: Todas as pessoas conhecem pelo menos outra pessoa do conjunto.

Se todas as pessoas do conjunto conhecem pelo menos uma pessoa do conjunto, cada pessoa tem um número de conhecidos que varia de 1 a n-1 (pois uma pessoa não conhece a si mesma). Podemos assim aplicar o Princípio da Casa dos Pombos da seguinte forma:

- <u>Casas:</u> número de pessoas que cada um dos indivíduos do conjunto conhece (note que as casas são rotuladas de 1 a n-1);
- <u>Pombos:</u> indivíduos do conjunto;
- <u>Relação:</u> Cada pessoa está associada ao número de pessoas que ela conhece.

Logo, pelo Princípio da Casa dos Pombos há pelo menos duas pessoas do conjunto que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.

2°Caso: Há uma pessoa no conjunto que não conhecem ninguém.

Se há uma pessoa do conjunto que não conhece ninguém, cada pessoa tem um número de conhecidos que varia de 0 a n-2 (pessoas que não conhecem ninguém, pessoas que conhecem exatamente uma pessoa, pessoas que conhecem exatamente 2 pessoas, até pessoas que conhecem exatamente n-2 pessoas), pois ao considerarmos que uma pessoa não conhece ninguém, obrigatoriamente estamos excluindo a possibilidade de alguém conhecer n-1 pessoas. Sendo assim, podemos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos de modo análogo ao que foi feito no caso anterior, com a diferença de que agora as casas são rotuladas de 0 a n-2. Assim procedendo, concluímos que também neste caso há pelo menos duas pessoas do conjunto que conhecem exatamente o mesmo número de pessoas do conjunto.

Exemplo 1.8: Considere o conjunto A= {2, 3, 5, 9} e denote a_1=2, a_2=3, a_3=5 e a_4=9. Então existem k, $\ell \in \mathbb{N}$, com $1 \leq k \leq \ell$, tais que $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_\ell$ é múltiplo de 4.

Demonstração: A fim de ilustrarmos o método que será usado no caso geral a seguir, escreveremos explicitamente as somas para todos os subconjuntos de elementos consecutivos do conjunto A, separando-as em dois grupos, aquelas que começam com a_1 (denotadas por S_i) e as demais denotadas por $S_{i,j}$ já que podem ser obtidas através das diferenças $S_j - S_i$ (para $j > i$).

Somas S_i's	*Somas $S_{i,j}$*	
$S_1 = 2$	$S_{1,2} = 3$	$S_{2,3} = 5$
$S_2 = 2 + 3 = 5$	$S_{1,3} = 3 + 5 = 8$	$S_{2,4} = 5 + 9 = 14$
$S_3 = 2 + 3 + 5 = 10$	$S_{1,4} = 3 + 5 + 9 = 17$	$S_{3,4} = 9$
$S_4 = 2 + 3 + 5 + 9 = 19$		

Figura 7: Quadro

Vemos que nenhuma das somas $S_i's$ é múltipla de 4. No entanto, observando o resto na divisão por 4 de cada uma das $S_i's$, obtemos:

$$S_1 = 4.0 + 2$$
$$S_2 = 4.1 + 1$$
$$S_3 = 4.2 + 2$$
$$S_4 = 4.4 + 3$$

E assim vemos que duas $S_i's$ (S_1 e S_3) deixam o mesmo resto na divisão por 4 e, portanto, sua diferença é um múltiplo de 4. Note que provamos assim que a soma $a_2 + a_3 = S_3 - S_1$ é um múltiplo de 4 a qual corresponde ao elemento $S_{1,3}$ listado acima.

Observando com mais cuidado o raciocínio feito acima neste caso em que nenhuma das S_i's é múltipla de 4, vemos que ele pode ser reformulado em função do Princípio da Casa dos Pombos considerando:

- <u>Casas</u>: Restos possíveis nas divisões das somas por 4 (1≤ r_i ≤ 3);
- <u>Pombos</u>: Todas as somas $S_i's$ possíveis;
- <u>Relação</u>: Cada soma está associada ao seu resto na divisão por 4.

E obtemos assim que existem, pelo menos, duas somas que deixam o mesmo resto na divisão por 4 e, portanto, sua diferença é um múltiplo de 4.

Generalização 1.9: Sejam dados um inteiro *m* e o conjunto $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$ de números inteiros; existem então *k*, $\ell \in \mathrm{N}$, com $1 \le k \le \ell$, tais que $a_k + a_{k+1} + \ldots + a_\ell$ é múltiplo de *m*.

<u>Demonstração</u>: Analogamente ao Exemplo 1.8, vamos considerar todas as *m* somas possíveis que começam com a_1:

$S_1 = a_1$

$S_2 = a_1 + a_2$

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$

....

$S_m = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_m$

Considerando as somas acima, vamos dividir a resolução em dois casos.

1° Caso: Pelo menos uma das somas, digamos S_j, é múltipla de *m*:

Neste caso basta tomar k=1 e $\ell = j$ e a demonstração está concluída.

2° Caso: Nenhuma das somas acima é múltipla de *m*.

Neste caso, pelo Algoritmo da Divisão (de Euclides), ao dividimos cada soma por *m* obteremos um resto r_i tal que $1 \leq r_i \leq m - 1$ (já que $r_i \neq 0$). Assim podemos aplicar o Princípio da Casa dos Pombos com:

- Casas: Restos possíveis nas divisões das somas por *m* ($1 \leq r_i \leq m - 1$);
- Pombos: As somas $S_1, S_2, \ldots, S_m$
- Relação: Cada soma está associada ao seu resto na divisão por *m*.

Obtemos que há pelo menos uma casa com dois pombos, isto é, existem *i* e *j* tais que S_i e S_j deixam o mesmo resto na divisão por *m*. Logo, supondo que, sem perda de generalidade, $j > i$, temos $S_j - S_i$ é múltiplo de *m* e:

$$\begin{aligned} S_j - S_i &= \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_i + a_{i+1} + \cdots + a_j\right) - (a_1 + a_2 + \cdots + a_i) \\ &= a_{i+1} + a_{i+2} + \cdots + a_j. \end{aligned}$$

Logo o resultado está demonstrado com $k = i+1$ e $\ell = j$.

Nos próximos exemplos veremos duas aplicações do Princípio da Casa dos Pombos em questões de Geometria.

Exemplo 1.10: Mostre que, se escolhermos 5 pontos ao acaso sobre a superfície de um quadrado de lado 2, pelo menos um dos segmentos que eles determinam tem comprimento menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Demonstração: Podemos dividir este quadrado em 4 quadrados menores de lado 1, determinando os pontos médios de cada lado do quadrado e traçando as retas que ligam os pontos médios de lado opostos, como mostra a figura8.

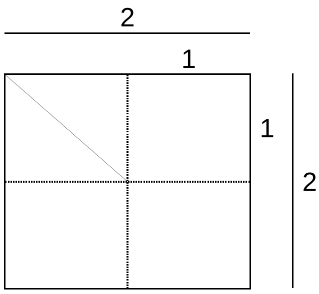


Figura 8: Quadrado

Podemos então aplicar o Princípio da Casa dos Pombos (para *n*=4), da seguinte forma:

- Casas: 4 quadrados menores;
- Pombos: 5 pontos;
- Relação: Cada ponto está associado ao quadrado onde ele está (se um ponto estiver na fronteira entre dois quadrados ele pode "escolher" a qual quadrado quer pertencer).

Distribuindo os 5 pontos entre os 4 quadrados menores, teremos necessariamente, um quadrado com pelo menos dois pontos. Agora, como a distância máxima entre dois pontos de um quadrado de lado ℓ é a sua diagonal ($\ell\sqrt{2}$), e a aresta de cada quadrado menor mede 1, temos que a maior distância possível entre dois pontos deste quadrado é $\sqrt{2}$. Assim, o comprimento de segmento determinado pelos dois pontos que estão em um mesmo quadrado é menor ou igual a $\sqrt{2}$.

Exemplo 1.11: Mostre que, dentre 9 pontos quaisquer de um cubo de aresta 2, existem pelo menos dois pontos que se encontram a uma distância menor do que ou igual a $\sqrt{3}$ um do outro.

<u>Demonstração</u>: De forma análoga ao exemplo anterior, seccionando cada aresta do cubo ao meio, conforme a Figura 9, obteremos oito cubos menores cada qual com aresta 1.

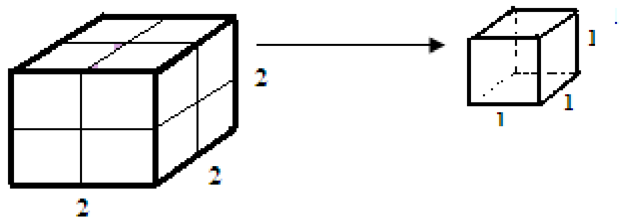


Figura 9: Cubo

Podemos então aplicar o Princípio da Casa dos Pombos (para n=8) da seguinte forma:

- <u>Casas:</u> 8 cubos menores;
- <u>Pombos:</u> 9 pontos;
- <u>Relação</u>: Cada ponto está associado ao cubo onde ele está (se um ponto estiver na fronteira entre dois cubos menores "ele pode escolher" a qual deles quer pertencer).

E obtemos assim que há pelo menos um cubo menor com dois pontos. Como a maior distância possível entre dois pontos de um cubo de aresta ℓ é $\ell\sqrt{3}$ (diagonal desse cubo), e a aresta de cada cubo menor mede 1, temos que a maior distância possível entre dois pontos deste cubo é $\sqrt{3}$.

2. PRINCÍPIO GERAL DA CASA DOS POMBOS

Muitas vezes é interessante enunciarmos o Princípio da Casa dos Pombos de maneira mais geral, a saber:

Teorema 2.1: *Se n casas são ocupadas por* $(nk+1)$ *pombos, então pelo menos uma casa deverá conter pelo menos* $(k+1)$ *pombos.*

Demonstração: A demonstração é óbvia. Se temos n casas e cada casa contiver no máximo k pombos, então teremos $n.k$ pombos distribuídos. Como temos $(nk+1)$ pombos, então pelo menos uma casa conterá pelo menos $(k+1)$ pombos.

Abaixo segue alguns exemplos da aplicação do Teorema 2.1.

Exemplo 2.2: Numa festa de aniversário com 37 crianças, mostre que pelo menos quatro nasceram no mesmo mês.

Demonstração: Neste caso, temos:

- Casas: meses dos anos (12 meses);
- Pombos: crianças (37 crianças);
- Relação: Cada criança está associada ao mês de seu aniversário.

Assim, temos n casas para serem ocupadas por $(nk+1)$ pombos, onde $n=12$ e $nk+1=37$. Se $12k+1=37$ então $k=3$. Logo, pelo Teorema 2.1 temos que pelo menos quatro crianças nasceram no mesmo mês.

Exemplo 2.3: Uma urna contém 5 bolas pretas, 4 bolas vermelhas, 6 bolas amarelas, 7 bolas verdes e 9 bolas azuis. Qual o menor número de bolas que devem ser retiradas (sem olhar) para que possamos ter certeza de termos tirado pelo menos 4 bolas de uma mesma cor?

Demonstração: Neste caso, temos:

- Casas: cores (5);
- Pombos: bolas retiradas;
- Relação: Cada bola está associada a sua cor.

Queremos, utilizando o Teorema 2.1 para $n = 5$, garantir que em uma “casa” tenha, pelo menos, $4 = k + 1$ “pombos” (bolas de uma mesma cor). Assim, basta tomar $k = 3$. De fato, pelo Teorema 2.1, se tivermos $nk + 1 = 5.3 + 1 = 16$ retiradas, então podemos garantir que retiramos pelo menos 4 bolas de uma mesma cor.

Note que 16 é o número mínimo de retiradas. De fato, se retiramos menos que 16 bolas, é possível sempre considerar uma situação na qual não tenhamos obtido pelo menos 4 bolas de uma mesma cor. Por exemplo, a retirada de 15 bolas pode ser feita de modo a obtermos 3 bolas pretas, 3 bolas vermelhas, 3 bolas amarelas, 3 bolas verdes e 3 bolas a-zuis.

Exemplo 2.4: Quantas cartas devem ser escolhidas de um baralho de 52 cartas para garantir que pelo menos três cartas do mesmo naipe sejam escolhidas?

Demonstração: Como este exemplo é análogo ao anterior resolveremos de forma mais direta. Sabendo que um baralho possui quatro naipes diferentes, temos:

- Casas: Naipes (4);
- Pombos: Cartas do baralho escolhidas;
- Relação: Cada carta está associada ao seu naipe.

Pelo Teorema 2.1, para $n = 4$, queremos que em uma das “casas” tenha, pelo menos, 3 “pombos” (cartas do mesmo naipe), então $k + 1 = 3$, logo $k = 2$. Assim o Teorema 2.1 garante que a retirada de $nk + 1 = 4.2 + 1 = 9$ cartas é suficiente para garantir que pelo menos 3 cartas de mesmo naipe foram retiradas. Além disso, analogamente ao exemplo anterior, se considerarmos um número de bolas retiradas menor que 9 então é sempre possível considerar uma situação na qual não saiam 3 cartas de mesmo naipe. Portanto 9 é o número mínimo de retiradas.

Note que o Teorema 2.1 envolve uma espécie de minimalidade do número de pombos para termos a garantia de que, se os distribuirmos em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter pelo menos $k+1$ pombos. Uma versão mais geral de tal teorema é dada pelo Teorema 2.5. No mesmo denotaremos por $\lfloor x \rfloor$ o maior inteiro, menor do que ou igual a x.

Teorema 2.5 (Princípio Geral da Casa dos Pombos): *Se distribuirmos t pombos em n casas, então pelo menos uma casa deverá conter pelo menos* $\left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor + 1$ *pombos.*

<u>Demonstração:</u> Sabendo que $\lfloor x \rfloor$ é o maior inteiro, menor do que ou igual a x, é certo afirmar que $\left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor \leq \frac{t-1}{n}$. Se cada casa contiver no máximo $\left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor$ pombos, teremos no máximo $n\left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor$ pombos no total. Porém, $n\left\lfloor \frac{t-1}{n} \right\rfloor \leq n\left(\frac{t-1}{n}\right) = t-1 < t$, o que é uma contradição, uma vez que temos t pombos.

Exemplo 2.6: Em qualquer grupo de 20 pessoas, pelo menos três nasceram no mesmo dia da semana.

<u>Demonstração</u>: Neste caso, temos:

- <u>Casas</u>: Dias da semana;
- <u>Pombos</u>: Pessoas;
- <u>Relação:</u> Cada pessoa está associada ao dia da semana do seu nascimento.

Aplicando o Teorema 2.5, para n=7 (uma semana tem 7 dias) e t=20 (número de pessoas), temos que, como $\left\lfloor \frac{20-1}{7} \right\rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$, pelo menos 3 pessoas terão nascido no mesmo dia da semana.

Exemplo 2.7: Dados 8 números naturais distintos, sendo que nenhum deles é maior do que 15, mostre que pelo menos três pares deles têm a mesma diferença positiva (os pares não precisam ser disjuntos como conjuntos).

Demonstração: Neste caso podemos tentar aplicar o Teorema 2.5 com:

- Casas: possíveis resultados para as diferenças positivas;
- Pombos: pares de números;
- Relação: cada par está associado ao resultado de sua diferença.

Como queremos formar pares utilizando 8 números com valores entre 1 a 15, existem $\binom{8}{2} = 28$ possíveis pares. Logo temos 28 "pombos" para serem distribuídas em 14 "casas" (já que as diferenças variam de 1 a 14). Se aplicarmos o Princípio Geral da Casa dos Pombos para n=28 e t=14 conseguimos garantir apenas que pelo menos dois pares de números têm a mesma diferença positiva. A fim de obtermos o resultado desejado, note que, na casa 14 só pode ter o par {15, 1}, já que o número 14 só pode ser escrito de uma única maneira: 15-1=14. Assim temos duas situações possíveis:

Situação 1: Tanto o número 1 como o 15 aparecem dentre os 8 números naturais dados. Neste caso, retirando os "pombos" {15,1} e a "casa" 14, restam 27 "pombos" para serem distribuídos em 13 "casas". Assim, pelo menos uma "casa" será ocupada por, pelo menos, $\left\lfloor \frac{27-1}{13} \right\rfloor + 1 = 3$ "pombos".

Situação 2: Pelo menos um dos números 1 e 15 não aparece dentre os 8 números naturais dados. Neste caso, a casa 14 nunca pode ser ocupada, logo temos 28 "pombos" para serem distribuídos em 13 "casas". Assim, pelo menos uma casa será ocupada por, pelo menos, $\left\lfloor\frac{28-1}{13}\right\rfloor + 1 = 3$ "pombos".

Logo, pelo Teorema 2.5, para n=13, t=27 ou t=28, temos que pelo menos uma "casa" será ocupada por 3 "pombos", ou seja, pelo menos três pares têm a mesma diferença positiva como queríamos demonstrar.

Exemplo 2.8: Considere 6 pontos no espaço, não havendo 3 numa mesma linha. Cada dois pontos são ligados por um segmento de reta e cada um desses 15 segmentos pintado de uma cor dentre duas, azul e vermelho. Provar que qualquer que seja a escolha destas duas cores na pintura dos segmentos sempre existirá um triângulo com todos os lados de uma mesma cor.

Demonstração: Qualquer um dos 6 pontos no espaço está ligado a 5 outros pontos por 5 segmentos de retas, como mostra a Figura 10.

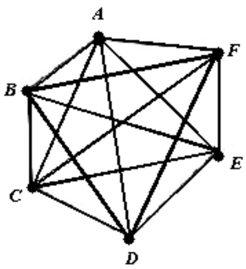


Figura 10

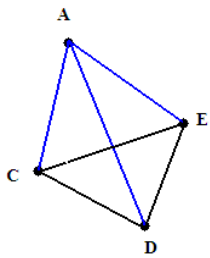


Figura 11

Fixando o ponto A, podemos aplicar o Teorema 3 com n=2 e t=5, onde:

- Casas: Cores (azul e vermelho);
- Pombos: Segmentos;
- Relação: Cada segmento está associado a uma das duas cores.

Então devemos ter pelo menos $\left\lfloor \frac{5-1}{2} \right\rfloor + 1 = 2 + 1 = 3$ segmentos com a mesma cor.

Sendo assim, temos 3 segmentos partindo de A de uma mesma cor (suponha que seja azul), indo digamos para os pontos C, D e E, como mostra a Figura 11. Podemos observar que se o triângulo CDE tem pelo menos um de seus lados azul, então temos pelo menos um triângulo azul. Se nenhum desses lados é azul, então temos um triângulo (CDE) vermelho. Em todos os casos temos pelo menos um triângulo com todos os lados de uma mesma cor, como queríamos provar.

3. DISTRIBUINDO OBJETOS EM GAVETAS – QUEM SÃO OS POMBOS?

No artigo “Princípio da casa dos pombos” do João Bosco Pitombeira, aparece o seguinte teorema sobre a distribuição de objetos em gavetas:

Teorema 3.1: Considere *n* gavetas e *r* um inteiro positivo dado. Coloquemos a_1 objetos na primeira gaveta, a_2 objetos na segunda, e assim sucessivamente, até a_n objetos na *n*-ésima gaveta. Então, se a média $\dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ for maior que $r - 1$, uma das gavetas conterá pelo menos *r* objetos.

<u>Demonstração</u>: Se todos os a_i's forem menores que *r*, teremos:

$$\begin{array}{ll} 1^{\text{a}} \text{ gaveta:} & a_1 \leq r - 1 \\ 2^{\text{a}} \text{ gaveta:} & a_2 \leq r - 1 \\ 3^{\text{a}} \text{ gaveta:} & a_3 \leq r - 1 \\ \vdots & \vdots \\ n\text{-ésima gaveta:} & a_n \leq r - 1. \end{array}$$

Somando todos os a_i's, temos $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n \leq n(r - 1)$. Como consequência $\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \leq r - 1$ o que é uma contradição.

Exemplo 3.2: São dados dois discos A e B, cada um deles dividido em 200 setores iguais. Os setores dos discos são pintados de branco ou preto. Sabe-se que no disco A há 100 setores brancos e 100 pretos, em ordem desconhecida. O número de setores brancos de B é arbitrário e desconhecido por nós.

Coloquemos o disco A sobre o disco B de modo que cada setor de A fique exatamente sobre um setor de B (obs.: sempre que dissermos que o disco A foi colocado sobre o disco B, fica convencionado que há esta coincidência de setores).

É então possível escolher a posição de A de maneira que existam pelo menos 100 setores de A que tenham a mesma cor que os correspondentes setores de B.

Demonstração: João Bosco Pitombeira, em seu artigo, apresenta a seguinte demonstração para o exercício:

Colocando o disco A sobre o disco B, chamaremos de a_1 o número de coincidências de cores dos setores sobrepostos. Fixando o disco B e girando o disco A $\frac{2\pi}{200} rad$ no sentido horário (girando o equivalente a um setor), chamaremos de a_2 o número de coincidências de cores dos setores sobrepostos e assim sucessivamente até completarmos um giro de 2π .

Se fixarmos um setor do disco B (preto, por exemplo), como o disco A tem exatamente 100 setores pretos, haverá 100 posições em que este setor de B terá a mesma cor que o setor correspondente de A, assim o número total de correspondências será o número de setores de B (200) vezes o número de coincidências por setor (100) após um giro completo, e assim $a_1 + a_2 + \cdots + a_{200} = 200 \times 100$. Logo $\frac{a_1 + a_2 + \cdots a_{200}}{200} = 100 > 100 - 1$ e portanto, pelo Teorema 4, pelo menos um dos a_i*'s* deve ser igual ou maior do que 100, ou seja, para uma das posições o número de coincidências é de pelo menos 100.

A demonstração do autor prova o que o enunciado propõe, porém não responde alguns questionamentos. É possível resolver este exercício usando diretamente o Princípio da Casa dos Pombos? Em caso positivo, quem são as casas? Quem são os pombos?

Como neste trabalho nos propomos a explicitar quem são as casas e quem são os pombos em todos os exemplos, apresentaremos a seguir uma nova proposta para solucionar problemas semelhantes ao anterior. Vejamos um exemplo mais simples:

Exemplo 3.3: Enunciado análogo ao do Exemplo 3.2, considerando agora que os discos A e B estão divididos em 6 setores iguais.

<u>Demonstração:</u> Sabemos que o disco A possui três setores brancos e três setores pretos; já no disco B a divisão por cores é desconhecida, e então a quantidade de setores pretos no disco B pode variar de 0 a 6. Agora, entre os pontos chaves em nossa resolução deste exercício está a fixação de rótulos tanto para os setores de A como os de B. A fim de organizarmos algumas ideias, suponha que o disco A e o disco B estejam pintados e rotulados como mostra as figuras abaixo:

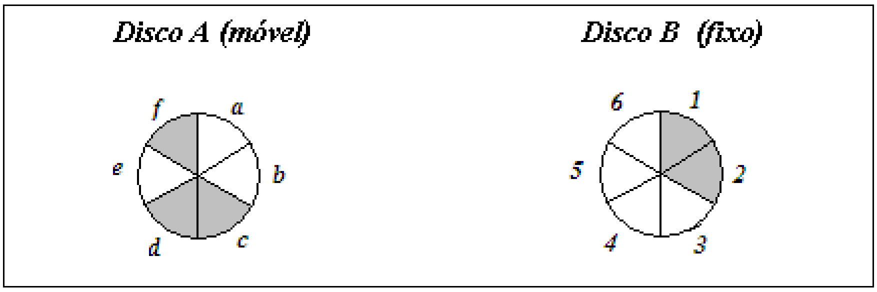


Figura 12

Colocando o disco A sobre o disco B, vamos escrever todas as coincidências de cores em forma de par ordenado (i, j), onde i é a letra que corresponde a cada setor do disco A e j é o número que corresponde ao setor do disco B. Mantendo o disco B fixo e girando o disco A de um setor $\left(\frac{2\pi}{6}rad\right)$ no sentido horário, vamos anotar, em forma de par ordenado, todas as coincidências de cores obtidas após este primeiro giro. Procedendo desta forma, sempre girando o disco A de $\frac{2\pi}{6}rad$, no sentido horário, obteremos o seguinte resultado:

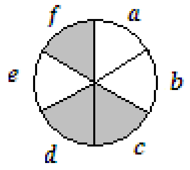
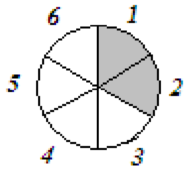
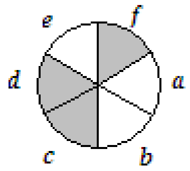
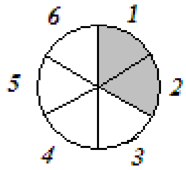
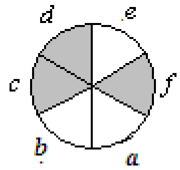
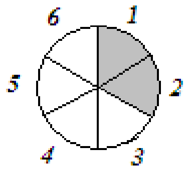
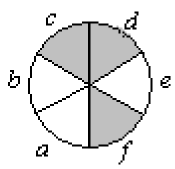
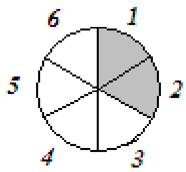
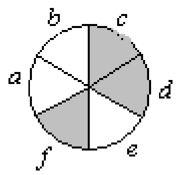
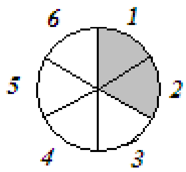
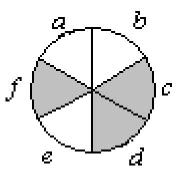
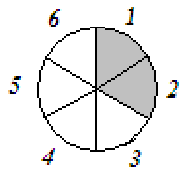
	Disco A (Móvel)	*Disco B (Fixo)*	*Coincidências*	*Número de Coincidências*
Posição 1			(*e*, 5)	1
Posição 2			(*f*, 1) (*b*, 3) (*e*, 6)	3
Posição 3			(*f*, 2) (*a*, 3) (*b*, 4)	3
Posição 4			(*d*, 1) (*a*, 4) (*b*, 5)	3
Posição 5			(*c*, 1) (*d*, 2) (*e*, 3) (*a*, 5) (*b*, 6)	5
Posição 6			(*c*, 2) (*e*, 4) (*a*, 6)	3

Figura 13

Como podemos observar, há 5 posições para o disco A que nos fornece, pelo menos, três setores de A com a mesma cor que os correspondentes setores de B. Podemos formular este problema em termos de Princípio da Casa dos Pombos da seguinte forma:

- Casas: As possíveis posições para o disco A;
- Pombos: Os pares ordenados (i, j) de coincidências;
- Relação: Cada par ordenado está associado à posição do disco A para a qual esta coincidência de cores ocorre.

Vemos assim que o número de casas é $n = 6$ e o número de pombos é $t = 3.6 = 18$ (já que j varia de 1 a 6 e a cor de cada j coincide com a cor de exatamente 3 setores do disco A). Note que esta quantidade de "pombos" independe da disposição dos setores pretos do disco A e também da quantidade e disposição dos setores pretos do disco B. E assim, este raciocínio é válido nas condições do enunciado deste exemplo em que desconhecemos o modo como os discos A e o B são pintados. Logo, pelo Princípio Geral da Casa dos Pombos para $n = 6$ e $t = 18$, obtemos que há pelo menos uma posição do disco A que apresenta pelo menos três coincidências de cores.

Generalização 3.4: Enunciado análogo ao do Exemplo 3.2, considerando agora que os discos A e B estão divididos em $2p$ setores iguais, e que o disco A tem p setores brancos e p setores pretos.

Demonstração: Pelo Princípio Geral da Casa dos Pombos temos:

- Casas: As possíveis posições para o disco A;
- Pombos: Os pares ordenados (i, j) de coincidências;
- Relação: Cada par ordenado está associado à posição do disco A para a qual esta coincidência de cores ocorre.

Sabendo que o número de casas é $n = 2p$ e o número de pombos é $t = p.2p = 2p^2$ (já que j varia de 1 a $2p$ e a cor de cada j coincide com a cor de exatamente p setores do disco A). Logo, pelo Princípio Geral da Casa dos Pombos para $n = 2p$ e $t = 2p^2$, obtemos que há pelo menos uma posição do disco A que apresenta pelo menos p coincidências de cores.

Exemplo 3.5: Suponhamos que os números de 1 a 15 sejam distribuídos de modo aleatório em torno de um círculo. Mostrar que a soma dos elementos de pelo menos um subconjunto de cinco elementos consecutivos do círculo tem que ser maior do que ou igual a 40.

<u>Demonstração</u>: Suponha, apenas para fixarmos ideias, que os números de 1 a 15 estejam dispostos como mostra a Figura 14.

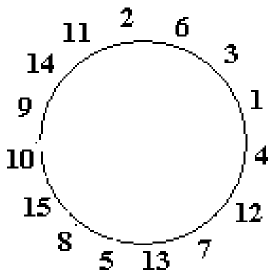


Figura 14

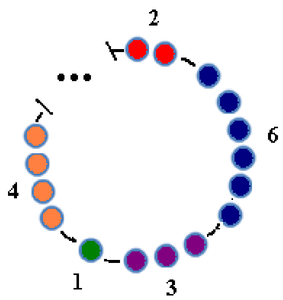


Figura 15

Figura 16

Como estamos interessados em <u>somas</u> de cinco números consecutivos do círculo, podemos imaginar que a Figura 14 é um cordão no qual, no lugar em que aparece o número a_i, temos exatamente a_i contas, como mostra a Figura 15. E mais, podemos distinguir entre estas a_i contas nomeando-as por $a_i^{(1)}, a_i^{(2)}, \dots, a_i^{(a_i)}$ como mostra a Figura 16.

Voltemos aos nossos subconjuntos[2]. Note que cada número a_i aparecerá em exatamente cinco subconjuntos distintos, sendo que em um deles ele aparece como primeiro elemento, em outro como segundo elemento, assim por diante, até que no último conjunto ele aparecerá como quinto elemento. Desta maneira podemos formar pares ordenados da forma $\left(p, a_i^{(j)}\right)$, onde p é a posição ocupada pelo número a_i no subconjunto (note que $p = 1, \dots, 5$) e $a_i^{(j)}$ refere-se à conta considerada (note que $j = 1, \dots, a_i$ e $i = 1, \dots, 15$).

Por exemplo, se considerarmos o subconjunto $(3,1,4,12,7)$ teremos, relacionado ao número 4, quatro pares $\left(3, 4^{(1)}\right)$, $\left(3,4^{(2)}\right)$ e $\left(3,4^{(3)}\right)$ e $\left(3, 4^{(4)}\right)$ todos eles tendo o número 3 na primeira entrada (que é exatamente a posição ocupada pelo número 4 no subconjunto em questão).

[2] Como estamos interessados em subconjuntos de cinco elementos consecutivos do círculo, utilizaremos a notação de 5-uplas, mais conveniente neste caso.

Note que podemos formular este problema em termos do Princípio Geral da Casa dos Pombos da seguinte forma:

- <u>Casas</u>: Subconjuntos de cinco elementos consecutivos do círculo;
- <u>Pombos</u>: Pares ordenados $\left(p, a_i^{(j)}\right)$ definidos acima $(p = 1, \ldots, 5;\ j = 1, \ldots, a_i, i = 1, \ldots, 15)$
- <u>Relação</u>: Cada par está relacionado com um subconjunto de acordo com a posição que o número a_i ocupa no subconjunto.

Distribuindo os "pombos" em "casas", queremos garantir que pelo menos uma das "casas" tenha, pelo menos, 40 "pombos". Observe que o número de "pombos" em uma "casa" é exatamente a soma dos elementos do subconjunto que dá nome à "casa". Vejamos um exemplo de uma casa com seus respectivos "pombos":

Casa	Pombos					Total de pombos
	$(1, 3^{(1)})$	$(2,1^{(1)})$	$(3,4^{(1)})$	$(4,12^{(1)})$	$(5,7^{(1)})$	
	$(1, 3^{(2)})$		$(3,4^{(2)})$	$(4,12^{(2)})$	$(5,7^{(2)})$	
	$(1, 3^{(3)})$		$(3,4^{(3)})$	$(4,12^{(3)})$	$(5,7^{(3)})$	
$(3,1,4,12,7)$			$(3,4^{(4)})$	$(4,12^{(4)})$	$(5,7^{(4)})$	27
				$(4,12^{(5)})$	$(5,7^{(5)})$	
				$\vdots$	$(5,7^{(6)})$	
				$(4,12^{(12)})$	$(5,7^{(7)})$	

Figura 16: Quadro

Procedendo dessa maneira para todos os casos veremos que, por exemplo, na "casa" $(1,4,12,7,13)$ teremos 41 "pombos". Note que em geral a existência de pelo menos uma "casa" com pelo menos 40 "pombos" é garantida pelo Princípio Geral da Casa dos Pombos, já que temos 15 "casas" (a quantidade de subconjuntos de cinco elementos consecutivos do círculo) e $5(1 + 2 + \cdots + 15) = 600$ "pombos" (a quantia de pares ordenados existentes) e, portanto, pelo menos uma "casa" terá pelo menos $\left\lfloor \frac{600-1}{15} \right\rfloor + 1 = 40$ "pombos", o que equivale a dizer que a soma dos elementos de pelo menos um subconjunto de cinco elementos consecutivos do círculo é maior ou igual a 40.

É importante ressaltar que a quantidade de “casas” e “pombos” independe da posição dos números em torno do círculo e assim este raciocínio é válido em geral nas condições do enunciado deste exemplo em que desconhecemos a ordem dos números.

Generalização 3.6: Seja *n* um número ímpar. Suponhamos que os números de 1 a *n* sejam distribuídos de modo aleatório em torno de um círculo. Mostrar que a soma dos elementos de pelo menos um conjunto de k elementos consecutivos tem que ser maior do que ou igual a $\frac{k(n+1)}{2}$.

Demonstração: Usando a notação introduzida no exemplo anterior, temos:

- Casas: Subconjuntos de k elementos consecutivos do círculo;
- Pombos: Pares ordenados $\left(p, a_i^{(j)}\right)$ definidos acima ($p = 1, \ldots, k$; $j = 1, \ldots, a_i$ e $i = 1, \ldots, n$)
- Relação: Cada par está relacionado com um subconjunto de acordo com a posição que o número a_i ocupa no subconjunto.

O resultado é garantido pelo Princípio Geral da Casa dos Pombos já que temos *n* “casas” (a quantidade de subconjuntos de k elementos consecutivos do círculo) e $k(a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = k(1 + 2 + \cdots + n) = \frac{kn(n+1)}{2}$ “pombos” (a quantia de pares ordenados existentes) e, portanto, pelo menos uma “casa” terá pelo menos:

$$\left\lfloor \frac{\frac{kn(n+1)}{2} - 1}{n} \right\rfloor + 1 = \left\lfloor \frac{k(n+1)}{2} - \frac{1}{n} \right\rfloor + 1 = \left(\frac{k(n+1)}{2} - 1\right) + 1 = \frac{k(n+1)}{2}$$ “pombos”, o que equivale a dizer que a soma dos elementos consecutivos do circulo é maior ou igual a $\frac{kn(n+1)}{2}$.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, procuramos explicitar em todos os exemplos quem são os "pombos", quem são as "casas" e qual a relação existente entre ambos. Isto foi feito sem grandes dificuldades nos dois primeiros capítulos nos quais trabalhamos com diversas versões de Princípio da Casa dos Pombos, utilizando diversos exemplos com um grau crescente de dificuldade. No entanto algo realmente desafiador se deu ao realizarmos tal explicitação no Capítulo 3.

Neste capítulo, trabalhamos o Princípio da Casa dos Pombos sob uma nova perspectiva, utilizando "gavetas" e "objetos", enunciamos uma generalização na qual o conceito de média se faz presente. No Exemplo 3.1 utilizamos a resolução apresentada por João Bosco Pitombeira e em seguida confrontamos com uma nova proposta para solução do problema (Exemplo 3.2), onde explicitamos quem são os "pombos", quem são as "casas" e a relação existente entre ambos e deixando evidente em que momento o Princípio Geral da Casa dos Pombos é utilizado. Para ressaltar a eficiência do método fizemos a Generalização 3.2.a. Vale mencionar que o mesmo exemplo pode ser reenunciado de forma ainda mais geral, a saber:

São dados dois discos A e B, cada um deles dividido em nk setores iguais. Os setores dos discos são pintados de k cores distintas. Sabe-se que o disco A é pintado de tal forma que cada cor aparece em exatamente n setores. Coloquemos o disco A sobre o disco B de modo que cada setor de A fique exatamente sobre um setor de B. É então possível escolher a posição de A de maneira que existam pelo menos n setores de A que tenham a mesma cor que os correspondentes setores de B. Claramente tal resultado pode ser demonstrado de modo análogo à Generalização 3.2.a.

O Exemplo 3.3 também segue o mesmo modelo de resolução do Exemplo 3.2, porém foi necessário usar recursos um pouco mais engenhosos na hora de montar os pares ordenados e assim trabalharmos a ideia de "pombos".

Pessoalmente, esse trabalho foi desafiador, uma vez que sempre tive dificuldade ao trabalhar com alguns tópicos da Análise Combinatória, porém foi gratificante ver o resultado final. Esperamos que este trabalho ajude profissionais da educação e estudantes que buscam o entendimento do Princípio da Casa dos Pombos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARVALHO, Paulo Cezar Pinto. **O PRINCÍPIO DAS GAVETAS**. Revista Eureka, Rio de Janeiro, n5, p. 27, 1999.

HEFEZ, Abramo. **Indução Matemática. Programa de Iniciação Científica da OBMEP 2007.** Sociedade Brasileira de Matemática, 2007.

MORGADO, Augusto César de Oliveira; CARVALHO, João Bosco Pitombeira; CARVALHO, Paulo Cezar Pinto; FERNANDEZ, Pedro. **Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios**. Coleção do Professor de Matemática. Nona edição. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.

PITOMBEIRA, João Bosco. **Princípio da casa dos pombos.** Revista do Professor de Matemática, número 8. São Paulo: Sociedade Brasileira de Matemática, 1986.

ROSEN, Kenneth H. **Matemática discreta e suas aplicações.** Sexta edição. São Paulo: McGraw-Hill, 2009.

SANTOS, José Plínio de Oliveira. **Introdução à Teoria dos Números**. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 1998.

SANTOS, José Plínio de Oliveira; MELLO, Margarida P.; Murari, Idani T.C.. **Introdução à Analise Combinatória**. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.