

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Faculdade de Educação  
Mestrado Profissional Educação e Docência – PROMESTRE

Angélica Rodrigues Ventura

**FRAGMENTOS DE UMA PESQUISA – DESAFIOS GEOMÉTRICOS, GEOGEBRA  
E “RÉGUA E COMPASSO”:  
estudando Geometria por meio de construções de Mandalas Geométricas**

BELO HORIZONTE  
2022

Angélica Rodrigues Ventura

**FRAGMENTOS DE UMA PESQUISA – DESAFIOS GEOMÉTRICOS, GEOGEBRA  
E "RÉGUA E COMPASSO":  
estudando Geometria por meio de construções de Mandalas Geométricas**

Versão final

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação Mestrado Profissional Educação e Docência da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Educação e Docência.

Linha de pesquisa: Educação Matemática

Orientadora: Dra. Teresinha Fumi  
Kawasaki

BELO HORIZONTE

2022

V468f  
T

Ventura, Angélica Rodrigues, 1981-  
Fragmentos de uma pesquisa – desafios geométricos, geogebra e “régua e compasso”  
[manuscrito] : estudando geometria por meio de construções de mandalas geométricas /  
Angélica Rodrigues Ventura. - Belo Horizonte, 2022.  
127, [186] f. : enc, il., color.

Dissertação -- (Mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de  
Educação.

Orientadora: Teresinha Fumi Kawasaki.

Bibliografia: f. 115-116.

Anexos: f. 117-123.

Apêndices: f. 124-127.

[Inclui apêndice com recurso educacional produzido em conjunto com a dissertação,  
com o título: "Geodaldas [recurso eletrônico] : desafios geométricos -- mandalas com régua,  
compasso e GeoGebra. -- [186 p.] : il., color."].

1. Educação -- Teses. 2. Matemática -- Estudo e ensino -- Teses. 3. Matemática --  
Métodos de ensino Geometria -- Estudo e ensino -- Teses. 4. Geometria -- Ensino auxiliado por  
computador -- Teses. 5. Desenho geométrico -- Estudo e ensino -- Teses. 6. Desenho  
geométrico -- Ensino auxiliado por computador -- Teses. 7. GeoGebra (Recurso eletrônico) --  
Teses. 8. Tecnologia educacional -- Teses. 9. Mandala -- Desenho por computador -- Estudo e  
ensino -- Teses.

I. Título. II. Kawasaki, Teresinha Fumi, 1960-. III. Universidade Federal de Minas Gerais,  
Faculdade de Educação.

CDD- 516.007

**Catálogo da fonte: Biblioteca da FaE/UFMG (Setor de referência)**

Bibliotecário: Ivanir Fernandes Leandro CRB: MG-002576/O



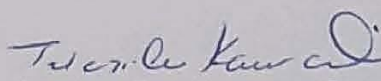
## FOLHA DE APROVAÇÃO

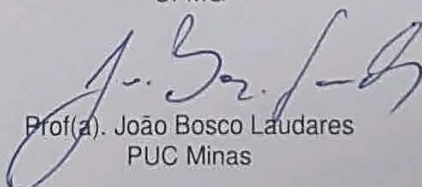
**Fragmentos de uma Pesquisa – Desafios Geométricos, GeoGebra e "régua e compasso": estudando Geometria por meio de construções de Mandalas Geométricas**

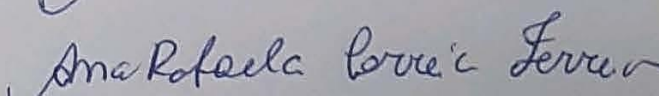
### ANGÉLICA RODRIGUES VENTURA

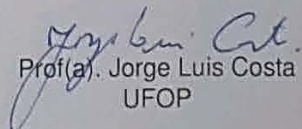
Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA/MP, como requisito para obtenção do grau de Mestre em EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA, área de concentração ENSINO E APRENDIZAGEM.

Aprovada em 30 de setembro de 2022, pela banca constituída pelos membros:

  
Prof(a). Teresinha Fumi Kawasaki - Orientador  
UFMG

  
Prof(a). João Bosco Laudares  
PUC Minas

  
Prof(a). Ana Rafaela Correia Ferreira  
UFMG

  
Prof(a). Jorge Luis Costa  
UFOP

Belo Horizonte, 30 de setembro de 2022.

## AGRADECIMENTOS

Este trabalho é resultado de muita perseverança. Sinto-me realizada ao concluir mais esta etapa, depois da tormenta que nos assolou durante esses dois últimos anos.

Desafio tão grande quanto escrever esta dissertação, foi vivenciar esse momento sem aquela que me ensinou tanto. Sua presença física não foi possível, mas eu não seria quem sou sem seus ensinamentos e dedicação.

Agradeço infinitamente aos meus maiores exemplos, meus pais, Miro e Raquel (*in memoriam*). Divido com vocês esta tão sonhada conquista. Minha eterna gratidão a vocês pelo apoio e amor incondicional. Espero fazer jus aos esforços que me foram depositados durante toda minha vida.

Ao meu amor, Rogério, companheiro nas horas boas e difíceis, sempre pronto a prestar o seu apoio e carinho. Obrigada pelo incentivo, pelo cuidado, paciência e amor durante esta caminhada. Acredite, sem você, o caminho seria mais difícil.

De modo muito especial, meu enorme agradecimento à minha orientadora, Profa. Dra. Teresinha Fumi Kawasaki, pela paciência dedicada à minha orientação. Muito obrigada por não me deixar desistir.

Agradeço imensamente aos professores João Bosco Laudares, Ana Rafaela Correia Ferreira, Jorge Luís Costa e Samira Zaidan pelas grandes contribuições que trouxeram ao participarem das bancas de qualificação e de defesa da dissertação.

A todos os professores do Programa Mestrado Profissional em Educação e Docência (PROMESTRE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) – em especial, aos professores da linha de pesquisa em Educação Matemática, por serem uma constante fonte de motivação e incentivo ao longo de todo o Mestrado. Muito obrigada.

Agradeço também às amigadas que o Mestrado me apresentou. Nosso encontro proporcionou um caminhar mais ameno. Que nossos caminhos se cruzem muitas outras vezes.

Obrigada a todos que, mesmo não estando citados aqui, tanto contribuíram para a conclusão desta etapa.

" A inovação não se decreta. A inovação não se impõe. A inovação não é um produto. É um processo. Uma atitude. É uma maneira de ser e de estar na educação."

Nóvoa,1988

## RESUMO

Nesta dissertação trazemos fragmentos de texto que, em seu conjunto, constroem a narrativa de nossa pesquisa. Conectar fragmentos neste momento, depois de vivenciar a grave crise sanitária causada pela pandemia da covid-19, pareceu-nos a forma mais sincera e honesta de relatar o que vivenciamos. Os fragmentos, interligados, remetem-nos à pesquisa aqui relatada, a qual observou a participação e o movimento de professores, em formação continuada e/ou inicial, envolvidos com o ensino de matemática na Educação Básica, nas oficinas de Construções Geométricas por nós elaboradas. As oficinas foram concebidas antes da pandemia e reformuladas durante ela, de acordo com as constatações feitas e orientadas pelas condições sanitárias vigentes. Da oficina presencial à oficina a ser conduzida de forma remota, buscou-se manter as concepções fundadoras: solucionar desafios, envolvendo participantes em processos exploratórios e investigativos que desencadeassem, no curso da oficina, a mobilização de um rol de saberes e conhecimentos (já adquiridos ou em construção) sobre Construções Geométricas. O ponto de partida foram as Mandalas, que poderiam ser decompostas em Construções Geométricas básicas. A proposta metodológica de ensino apostou na relação dialética complexo-simples – mandala-objetos geométricos básicos –, intrínseca à construção do conhecimento. A pesquisa teve por objetivo observar e buscar compreender a mobilização ou não de saberes e conhecimentos por parte dos participantes das oficinas na resolução dos Desafios Geométricos, aliando o Desenho Geométrico ao uso de ferramentas tradicionais “régua e compasso” e o *software* GeoGebra. Este texto reúne os processos em que as oficinas foram concebidas, sua formulação inicial e reformulações e, finalmente, as observações participantes da pesquisadora das oficinas nos formatos presencial e virtual. Ressalta-se que os experimentos, presenciais e virtuais, mesmo em cenários diferentes e com certas limitações conseguiram promover um ambiente de aprendizagem colaborativa, em que foi possível provocar discussões e notar mobilização, por parte dos participantes, de saberes e conhecimentos sobre os elementos geométricos presentes na construção das Mandalas. Para divulgar parte desse trabalho, elaboramos um livro, o recurso educacional, intitulado *Geodas: Desafios Geométricos – Mandalas com régua, compasso e GeoGebra*, no qual reunimos as Construções Geométricas de Mandalas, suas resoluções e sugestões para professores de Matemática.

**Palavras-chave:** Geometria; Desenho Geométrico; Desafios Geométricos; Mandalas Geométricas; GeoGebra.

## ABSTRACT

In this dissertation we bring text fragments that, as a whole, build the narrative of our research. Connecting fragments at this moment, after experiencing the serious health crisis caused by the COVID-19 pandemic, seemed to us the most sincere and honest way to report what we experienced. The interconnected fragments lead us to the research reported here, that observed the participation and movement of teachers, in continuing and/or initial training, involved with the teaching of mathematics in basic education, in the geometric construction workshops developed by us. The workshops were conceived before the pandemic and reformulated during it, according to the observations we have made and guided by the current sanitary conditions. From the face-to-face workshop to the workshop to be conducted remotely, we sought to maintain the founding concepts: to solve challenges, involving participants in exploratory and investigative processes that would trigger, in the course of the workshop, the mobilization of a list of knowing and knowledge (already acquired or under construction) about geometric constructions. The starting point was the Mandalas that could be decomposed into basic geometric constructions. The teaching methodological proposal bet on the complex-simple dialectic relationship – mandala-basic geometric objects – intrinsic in the construction of knowledge. The research aimed to observe and seek to understand the mobilization or not of knowing and knowledge by the participants of the workshops in solving the geometric challenges, combining Geometric Design with the use of traditional tools “ruler and compass” and GeoGebra software. This text brings together the processes in which the workshops were conceived, their initial formulation and reformulations and, finally, the observations of the researcher of the workshops in face-to-face and virtual formats. It is noteworthy that the experiments, face-to-face and virtual, even in different scenarios and with certain limitations managed to promote a collaborative learning environment where it was possible to provoke discussions and observe mobilization of knowledge about the geometric elements present in the construction of the structures. Mandalas. To publicize part of this work, we prepared a book, the educational resource, entitled *Geodaldas: Desafios Geométricos – Mandalas com régua, compasso e GeoGebra*, where we gathered the Geometric Constructions of Mandalas, their resolutions and suggestions for Mathematics teachers.

**Keywords:** Geometry; Geometric Constructions; Geometric Challenges; Mandalas; Geogebra.



## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Mandala Geométrica: simetria radial.....	32
Figura 2 – Mandala Geométrica: simetria axial .....	32
Figura 3 – Folha de atividades .....	36
Figura 4 – Oficina Presencial: Mandala 1.....	37
Figura 5 – Oficina Presencial: Mandala 2.....	38
Figura 6 – Oficina Presencial: visualização de uma Ceviana na Mandala 2 .....	39
Figura 7 – Oficina Presencial: construção do triângulo equilátero (G3) .....	40
Figura 8 – Oficina Presencial: construção da Mandala 2 (G2) .....	40
Figura 9 – Oficina Presencial: Mandala 3.....	41
Figura 10 – Oficina Presencial: processo de construção da Mandala 3 (a) .....	42
Figura 11 – Oficina Presencial: processo de construção da Mandala 3 – G1 (b).....	43
Figura 12 – Oficina Presencial: construção da Mandala 3 – G1.....	44
Figura 13 – Oficina Presencial: construção da Mandala 3 – G2.....	45
Figura 14 – Oficina Presencial: Mandala 4.....	45
Figura 15 – Oficina Presencial: construção da Mandala 4 .....	46
Figura 16 – Oficina Presencial: consideração de uma aluna sobre a oficina .....	49
Figura 17 – Oficina <i>on-line</i> : Tópico 1.....	55
Figura 18 – Oficina <i>on-line</i> : Tópico 2.....	55
Figura 19 – Oficina <i>on-line</i> : Tópico 3.....	56
Figura 20 – Oficina <i>on-line</i> : Tópico 4.....	57
Figura 21 – Oficina <i>on-line</i> : Tópico 5.....	58
Figura 22 – Oficina <i>on-line</i> : Tópico 6.....	58
Figura 23 – Folder de divulgação da Oficina Desafios Geométricos.....	59
Figura 24 – Oficina <i>on-line</i> : apresentação da participante Md .....	61
Figura 25 – Oficina <i>on-line</i> : Desafio Geométrico I.....	61
Figura 26 – Oficina <i>on-line</i> : intervenção no fórum do Desafio Geométrico I .....	62
Figura 27 – Oficina <i>on-line</i> : contribuição da participante Wa ao Fórum I .....	62
Figura 28 – Oficina <i>on-line</i> : contribuição da participante Ma ao Fórum I .....	63
Figura 29 – Primeiro encontro virtual: Mandala construída .....	64
Figura 30 – Primeiro encontro virtual: esboço de triângulo equilátero.....	66
Figura 31 – Primeiro encontro virtual: desenho efetuado pela participante Md.....	66
Figura 32 – Primeiro encontro virtual: construção de um triângulo equilátero.....	67

Figura 33 – Primeiro encontro virtual: construção de triângulos equiláteros .....	68
Figura 34 – Primeiro encontro virtual: construção de um hexágono .....	69
Figura 35 – Primeiro encontro virtual: construção segundo participante Ma .....	70
Figura 36 – Primeiro encontro virtual: determinando o ponto médio .....	71
Figura 37 – Primeiro encontro virtual: Mandala do Desafio Geométrico I .....	73
Figura 38 – Primeiro encontro virtual: construção de um triângulo equilátero a partir de um de seus lados .....	74
Figura 39 – Primeiro encontro virtual: esboço da Mandala do Desafio I .....	76
Figura 40 – Oficina <i>on-line</i> : reproduzindo Mandalas no GeoGebra .....	77
Figura 41 – Oficina <i>on-line</i> : interação com a participante Wa no Fórum II (a) .....	77
Figura 42 – Oficina <i>on-line</i> : interação com a participante Wa no Fórum II (b) .....	78
Figura 43 – Segundo encontro virtual: 1ª Mandala construída .....	79
Figura 44 – Segundo encontro virtual: construção de um triângulo equilátero pela participante Md .....	81
Figura 45 – Segundo encontro virtual: ponto médio de um dos lados do triângulo ...	82
Figura 46 – Segundo encontro virtual: determinando o ortocentro de um triângulo equilátero.....	84
Figura 47 – Segundo encontro virtual: circunferência traçada por sugestão de Md (1) .....	85
Figura 48 – Segundo encontro virtual: circunferência sobre a Mandala traçada por sugestão de Wa .....	86
Figura 49 – Segundo encontro virtual: circunferência traçada por sugestão de Md (2) .....	86
Figura 50 – Segundo encontro virtual: triângulo traçado por sugestão das participantes .....	87
Figura 51 – Segundo encontro virtual: construindo o hexágono regular .....	87
Figura 52 – Segundo encontro virtual: finalizando a construção da Mandala .....	89
Figura 53 – Segundo encontro virtual: finalizando a Mandala I .....	89
Figura 54 – Segundo encontro virtual: 2ª Mandala construída .....	91
Figura 55 – Segundo encontro virtual: processo para traçar a mediatriz referente ao diâmetro de uma circunferência .....	93
Figura 56 – Segundo encontro virtual: dividindo a circunferência em 4 partes .....	94
Figura 57 – Segundo encontro virtual: mostrando possíveis maneiras para traçar mediatriz.....	95

Figura 58 – Segundo encontro virtual: determinando a bissetriz de um ângulo .....	96
Figura 59 – Segundo encontro virtual: finalizando a construção da Mandala .....	97
Figura 60 – Segundo encontro virtual: finalizando a Mandala II .....	97
Figura 61 – Logo do livro <i>Geodaldas</i> .....	103
Figura 62 – Visual das capas dos vídeos e dos cartões de construção .....	104
Figura 63 – Livro <i>Geodaldas</i> .....	105
Figura 64 – Sumário do livro <i>Geodaldas</i> .....	106
Figura 65 – Desafio Geométrico: <i>Geodaldas</i> .....	106
Figura 66 – Mandalas Geométricas presentes nos Desafios Geométricos .....	107
Figura 67 – Cartões de Construções Geométricas no GeoGebra .....	107
Figura 68 – Folha de atividade Desafio Geométrico .....	108
Figura 69 – Conteúdo interativo da oficina <i>Geodaldas</i> .....	109
Figura 70 – Página 1 do repositório <i>on-line Geodaldas</i> .....	110
Figura 71 – Subpáginas 1: resolvendo os Desafios Geométricos .....	110
Figura 72 – Página 2 do repositório <i>on-line Geodaldas</i> .....	111
Figura 73 – Subpáginas 2: vídeos com as construções .....	111
Figura 74 – Página 3: Mandalas Geométricas .....	112
Figura 75 – Subpáginas 3: resolução no GeoGebra .....	112

## LISTA DE QUADRO

Quadro 1 – Dados dos participantes .....	60
--	----

## LISTA DE SIGLAS

AVA	Ambiente Virtual de Aprendizagem
BNCC	Base Nacional Comum Curricular
ICEI	Instituto de Ciências Exatas e Informática
PAPMEM	Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática do Ensino Médio
PIBID	Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência
PROMESTRE	Programa Mestrado Profissional em Educação e Docência
PUC Minas	Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais
TCLE	Termo de Consentimento Livre e Esclarecido
UFF	Universidade Federal Fluminense
UFJF	Universidade Federal de Juiz de Fora
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
UNESPAR	Universidade Estadual do Paraná
UniBH	Centro Universitário de Belo Horizonte

## SUMÁRIO

APRESENTAÇÃO .....	15
--------------------	----

### FRAGMENTO I: A PROPOSTA INICIAL E A SUA RELAÇÃO COMIGO

<b>1 EU E A PROPOSTA INICIAL DE PESQUISA.....</b>	<b>18</b>
<b>1.1 Reminiscências .....</b>	<b>18</b>
1.1.1 <i>Traçando uma meta .....</i>	<i>19</i>
1.1.2 <i>Desenhando um caminho.....</i>	<i>21</i>
1.1.3 <i>Construindo uma ideia de pesquisa: dos primeiros incômodos à proposta de pesquisa submetida ao Promestre .....</i>	<i>23</i>

### FRAGMENTO II: PRIMEIROS PASSOS

<b>2 PLANEJANDO A PESQUISA E DESENHANDO A OFICINA – ANTES DA PANDEMIA.....</b>	<b>26</b>
<b>2.1 Pensando e desenhando a pesquisa.....</b>	<b>26</b>
2.1.1 <i>O software GeoGebra como recurso didático .....</i>	<i>27</i>
2.1.2 <i>Desenho Geométrico e o ensino da Geometria .....</i>	<i>29</i>
2.1.3 <i>Desafios Geométricos com a construção de “Mandalas Geométricas” ....</i>	<i>31</i>
2.1.3.1 <i>Mandala: conceito e estrutura .....</i>	<i>31</i>
<b>2.2 Delineando a metodologia de pesquisa .....</b>	<b>34</b>
<b>3 EXPERIMENTAÇÕES INICIAIS PRESENCIAIS.....</b>	<b>35</b>
<b>3.1 Relato .....</b>	<b>35</b>
<i>Mandala 1.....</i>	<i>37</i>
<i>Mandala 2.....</i>	<i>38</i>
<i>Mandala 3.....</i>	<i>41</i>
<i>Mandala 4.....</i>	<i>45</i>
<b>3.2 Considerações dos participantes sobre as Oficinas Presenciais.....</b>	<b>47</b>
<i>Oficina Presencial 1.....</i>	<i>47</i>
<i>Oficina Presencial 2.....</i>	<i>48</i>
<b>3.3 Nossas considerações.....</b>	<b>49</b>

### FRAGMENTO III: Desafios em tempos de covid-19

<b>4 DESENHANDO A OFICINA ON-LINE E TRAÇANDO UM NOVO PLANO DE AÇÃO – DURANTE A PANDEMIA .....</b>	<b>51</b>
<b>4.1 Elaboração da “Oficina Desafios Geométricos – Mandalas” na modalidade à distância .....</b>	<b>51</b>
4.1.1 <i>Público-alvo: adesão e inscrição na oficina on-line .....</i>	<i>53</i>

4.1.2	<i>Metodologia das oficinas</i> .....	53
4.1.3	<i>Estrutura curricular e recursos didáticos</i> .....	53
<b>4.2</b>	<b>A organização da oficina <i>on-line</i></b> .....	<b>54</b>
4.2.1	<i>Tópico 1 – Oficina Desafios Geométricos – Mandalas</i> .....	54
4.2.2	<i>Tópico 2 – Dando a largada</i> .....	55
4.2.3	<i>Tópico 3 – Desafio geométrico</i> .....	56
4.2.4	<i>Tópico 4 – Encontro virtual</i> .....	56
4.2.5	<i>Tópico 5 – Desafio geométrico e GeoGebra</i> .....	57
4.2.6	<i>Tópico 6 – Estamos chegando ao fim</i> .....	58
<b>5</b>	<b>EXPERIMENTAÇÕES VIRTUAIS</b> .....	<b>59</b>
<b>5.1</b>	<b>Oficina Desafios Geométricos na plataforma <i>on-line</i></b> .....	<b>59</b>
5.1.1	<i>Momento virtual 1: Desafio Geométrico I</i> .....	61
5.1.2	<i>Momento virtual 2: Encontro Virtual I</i> .....	63
	<i>Mandala construída</i> .....	64
5.1.3	<i>Momento virtual 3: reproduzindo Mandalas no GeoGebra – Fórum II</i> .....	76
5.1.4	<i>Momento virtual 4: segundo encontro virtual</i> .....	79
	<i>1ª Mandala construída</i> .....	79
	<i>2ª Mandala construída</i> .....	91
 <b>FRAGMENTO IV: RECURSO EDUCACIONAL E CONSIDERAÇÕES FINAIS</b>		
<b>6</b>	<b>O RECURSO EDUCACIONAL: UM MOVIMENTO PARALELO</b> .....	<b>100</b>
6.1	<b>Construindo o livro</b> .....	<b>100</b>
6.2	<b>O livro <i>Geodalas</i></b> .....	<b>105</b>
6.3	<b>Conteúdo interativo: repositório <i>on-line Geodalas</i></b> .....	<b>109</b>
	<i>Página 1: Desafios Geométricos</i> .....	109
	<i>Página 2: Construções Fundamentais no GeoGebra</i> .....	110
	<i>Página 3: Mandalas Geométricas</i> .....	111
<b>7</b>	<b>CONSIDERAÇÕES FINAIS</b> .....	<b>113</b>
	<b>REFERÊNCIAS</b> .....	<b>115</b>
	ANEXO A – Formulário de inscrição <i>on-line</i> .....	117
	ANEXO B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE) .....	121
	ANEXO C – Certificado emitido aos participantes da oficina .....	123
	APÊNDICE A – Folha de atividades entregue nas Oficinas Presenciais .....	124
	APÊNDICE B – Página <i>on-line</i> com as informações sobre a oficina.....	124
	APÊNDICE C – Recurso educativo .....	127

## APRESENTAÇÃO

Traremos<sup>1</sup> nesta dissertação a união que chamamos de “fragmentos de uma pesquisa”, que, antes, denominamos “fragmentos de uma pesquisa (talvez) inacabada(?)”. A dupla asserção da incerteza “talvez, inacabada (?)” decorria do fato de que, ao submetermos o estudo à banca de qualificação, convivíamos ainda com a incerteza. Hoje, mediante apontamentos da então banca, considerando que a escrita faz parte do processo de construção, reflexão e reconstrução da investigação, concluímos que, neste momento, chegamos a um fechamento deste texto que relata sim uma pesquisa acabada. Leitores podem estar questionando: “Por que e que caminhos traçados nos levaram a esse ponto de questionamento?” Nossa resposta decorre, a duras penas, desse processo doloroso em que estivemos imersos por quase dois anos – março de 2020 até início de 2022. Definitivamente, **fomos atravessadas** pela pandemia, pela covid-19. Sabemos que todas as pessoas foram, com certeza, e de diferentes formas. Contudo, cada pessoa tem a sua história e nós, definitivamente, temos a nossa.

Em meados de março de 2020, foi decretada uma quarentena na UFMG e na maioria das instituições de ensino de todo o Brasil. Não tínhamos ideia de o que estava por vir e de quando ela se encerraria. Estávamos, à época, planejando iniciar a pesquisa de campo, que consistia em observar a participação de professores da escola básica em oficina com atividades **presenciais** sobre Construções Geométricas. Idealizamos uma oficina em que o ponto de partida era a resolução de Desafios Geométricos, mais especificamente o desenho de Mandalas Geométricas, utilizando de forma articulada as ferramentas tradicionais “régua e compasso” e o *software* GeoGebra<sup>2</sup>.

Nosso objetivo era observar e buscar compreender a mobilização ou não de saberes e conhecimentos por parte dos participantes das oficinas na resolução dos Desafios Geométricos, aliando o Desenho Geométrico ao uso de ferramentas tradicionais “régua e compasso” e *software* GeoGebra. Por sua vez, o objetivo das

---

<sup>1</sup> Utilizarei a primeira pessoa do plural para descrever ações conjuntas que, em geral, envolvem a minha pessoa, Angélica, e a minha orientadora, Teresinha.

<sup>2</sup> *Software* educativo é todo programa de computador desenvolvido com a finalidade de colaborar com o processo ensino-aprendizagem, baseado em análise e conhecimentos das áreas de Educação e de Informática (MIRANDA; REIS, 2010).



oficinas era explorar a Geometria por meio da resolução de desafios que propõem os desenhos (construções) de objetos geométricos – as Mandalas –, lançando mão de conhecimentos básicos de Construções Geométricas.

No *design* da oficina, o papel desempenhado pela pessoa que a ministraria seria de fundamental importância, pois ela coordenaria, interviria e seria a responsável por provocar as interações desejadas. Como ministrante e pesquisadora, caberia a mim observar a participação e o movimento de professores, em formação continuada e/ou inicial, envolvidos com o ensino de matemática na Educação Básica, nas oficinas de Construções Geométricas por nós elaboradas, com atenção especial às situações em que participantes das oficinas mobilizam saberes e conhecimentos na resolução dos Desafios Geométricos propostos. Como mencionado, almejamos realizar a oficina presencialmente, em uma das salas de computadores da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (FaE/UFMG).

Com a crise sanitária e o isolamento social, vimo-nos em situação jamais imaginada e precisamos assim “puxar o freio” e adiar nossos planos. Por ser uma situação inédita, ingenuamente, pensamos de início que duraria algumas semanas. Jamais imaginamos que a pandemia tomaria a dimensão que tomou. Planos foram alterados por mais de uma vez. Ações que parecem desencontradas, planejadas à medida que as situações foram se alterando (altos e baixos), são peças de um quebra-cabeça; portanto, decidimos compor este texto por meio de *fragmentos*. São *fragmentos* que compõem a narrativa desta pesquisa. Esse exercício também nos ajudou na junção das peças e, quiçá, na compreensão de todo o processo. Os fragmentos assim ficaram:

- Fragmento I: A proposta inicial e a sua relação comigo
- Fragmento II: Primeiros passos
- Fragmento III: Desafios em tempos de covid – 19
- Fragmento IV: O recurso educacional e considerações finais

## **FRAGMENTO I: A PROPOSTA INICIAL E A SUA RELAÇÃO COMIGO**

## 1 EU E A PROPOSTA INICIAL DE PESQUISA

A proposta inicial de pesquisa teve origem no processo de minha constituição como educadora. Introduzirei tal projeto e, em seguida, buscarei em minhas reminiscências peças que, unidas, ajudaram-me na construção do planejamento.

Na ótica de um ensino mais dinâmico e interativo, idealizamos um projeto didático visando estudar a Geometria por intermédio de suas Construções Geométricas. Para seu desenvolvimento, a proposta didática articula o Desenho Geométrico tradicional (“régua e compasso”) e o *software* GeoGebra, reunidos em um conjunto de oficinas destinado a professores de Matemática. As oficinas têm como ponto de partida o desafio da construção de Mandalas Geométricas que podem ser decompostas em Construções Geométricas básicas. A metodologia de ensino aposta na relação intrínseca complexo-simples na construção do conhecimento.

A pesquisa consistia, inicialmente, na observação de licenciandos e professores, participantes das oficinas, articulando saberes à manipulação das ferramentas na construção das Mandalas. Questionou-se: (i) “Qual o potencial da articulação entre Desafios Geométricos propostos, uso do GeoGebra e da ‘régua e compasso’ concomitante aos processos de ensino e aprendizagem da Geometria?”; (ii) Como, se e que conceitos emergem da interação – desafios, GeoGebra, “régua e compasso” e provocações?”

Como estudante de Matemática, sempre gostei de Geometria, entretanto a associação Geometria-GeoGebra veio mais tarde, mas, uma vez incorporada, não consigo mais pensar a Geometria dissociada do GeoGebra. Sendo assim, antes de prosseguir, farei um retrospecto de minhas vivências como estudante, desde muito jovem, procurando desvelar a origem das questões que me trouxeram ao Programa Mestrado Profissional em Educação e Docência (PROMESTRE).

### 1.1 Reminiscências

Como mencionado, meu interesse pela Matemática, Geometria e uso do *software* de Geometria dinâmica ocupa parte significativa de minha vida, constituindo-se em fator determinante em minhas escolhas e, conseqüentemente, na minha vida profissional.

### 1.1.1 Traçando uma meta

Nasci e fui criada em Belo Horizonte, sou filha única de meu pai, hoje aposentado, que era artesão, e de minha mãe (*in memoriam*), dona de casa. Desde pequena, foi-me transmitido que a maior herança que me deixariam seria o conhecimento, e, por isso, com muito esforço, tentaram sempre me proporcionar um estudo de qualidade. Sempre fui muito estudiosa e aplicada, e, quando estava no Ensino Médio, me senti desafiada. Chegara a hora de “escolher o meu futuro”; eu tinha algumas aptidões, mas nunca parei para pensar no meu futuro profissional.

Durante o segundo ano do Ensino Médio, a escola nos proporcionou uma manhã de informações sobre cursos universitários, finalizando com um teste de vocação. O meu resultado? Belas-Artes e Matemática. Belas-Artes não foi surpresa, pois sempre gostei de trabalhos manuais, e posso dizer que está na genética: minha mãe, quando jovem, pintava quadros e meu pai, como mencionei, era artesão. Mas e a Matemática? De onde surgiu? Parece tão distante das Belas-Artes...

Na realidade, sempre gostei de Matemática, embora algumas vezes tivesse dificuldades na aprendizagem; era, sem dúvidas, a minha matéria preferida. Foi justamente em uma aula de Matemática, quando meu professor questionou a todos sobre o resultado do teste de vocação do dia anterior, que me senti desafiada. Ao falar que meu teste apontara para Belas-Artes e Matemática, meu professor disse: “escolha Belas-Artes, o curso de Matemática é um curso difícil, você não dará conta”. Parei por dois segundos e retruquei que daria conta sim e que daria conta também dos desafios. Naquele momento, não pensava em me tornar professora, queria fazer a Matemática pela Matemática e pelo desafio que, mais tarde, se mostrou como o amor pela Matemática.

Terminando o Ensino Médio, chegou o temido vestibular. Tinha algumas opções de onde poderia cursar Matemática; escolhi prestar vestibular na Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG) e no Centro Universitário de Belo Horizonte (UniBH). Naquele ano, passei para a segunda etapa do vestibular da Federal, mas não fui aprovada ao final e, infelizmente, a situação financeira não me permitiu cursar Matemática no UniBH. Sonho adiado. Alguns anos se passaram, a vida me levou a tomar outros rumos, mas a paixão e a determinação em cursar Matemática estavam ali, me acompanhando.

Em 2011, por mero acaso, deparei-me com uma propaganda que dizia que a Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais (PUC Minas) já oferecia o curso de Licenciatura em Matemática no Campus Coração Eucarístico. Fiquei animada e então resolvi enfrentar mais um vestibular. Dessa vez o sonho começara a ganhar contorno. Assim, iniciei minha graduação em agosto daquele ano.

Logo no primeiro semestre, com dois amigos e a professora Carina Pinheiro, iniciamos o Projeto Parque da Matemática: Uma Viagem além do Concreto,<sup>3</sup> cujo objetivo foi desenvolver atividades lúdicas relacionadas ao ensino e à aprendizagem da Matemática. Participar desse projeto abriu meus olhos para outras metodologias de ensino da Matemática, pois, durante minha participação, criamos e recriamos jogos que tinham o objetivo o desenvolvimento da criatividade, propiciando ao aluno um pensamento em movimento e possibilitando a verbalização e socialização das ideias e estratégias para solução ou representação dos problemas apresentados.

No percurso da graduação, como estudante, sempre visei ir além do que se era ensinado em sala de aula, e nessa busca participei, como bolsista, do Programa Institucional de Bolsa de Iniciação à Docência (PIBID)<sup>4</sup> durante quatro anos. O PIBID me colocou do outro lado da história, pois não me via mais apenas como aluna, me vi inserida na prática docente, e essa inserção me fez perceber o quão importante é a relação entre teoria e prática.

Quando ingressei no curso de Matemática, não tinha certeza se teria aptidão para ser uma boa professora, se saberia lidar com os questionamentos dos alunos. Contudo, participar do Parque da Matemática e do PIBID foi fundamental para desfazer concepções que eu tinha a respeito de como funcionava de fato uma escola, a dinâmica da sala de aula e o trato com os alunos. Tais vivências me proporcionaram experiências metodológicas riquíssimas que hoje fazem parte da minha prática docente. Hoje, como professora, sempre busco alternativas para oferecer um aprendizado mais significativo aos alunos, sejam elas tecnológicas, interdisciplinares ou com uso de algum material manipulável.

Nessa constante busca para complementar minha formação, participei, em 2015, pela UFMG, do Programa de Aperfeiçoamento para Professores de Matemática

---

<sup>3</sup> Parque da Matemática: Uma Viagem além do Concreto é um projeto extensionista da PUC Minas sob orientação da Professora Me. Carina Pinheiro.

<sup>4</sup> O PIBID é uma iniciativa do Governo Federal para o aperfeiçoamento e a valorização de professores para a educação básica.

do Ensino Médio (PAPMEM)<sup>5</sup> e, em 2016, fiz um curso sobre o *software* GeoGebra pela Universidade Estadual do Paraná (UNESPAR). Além disso, pela Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), fiz o Curso de Tecnologias Digitais para o Ensino de Geometria.

No decorrer dos cursos, discutiu-se muito a inserção dos *softwares* educativos,<sup>6</sup> no caso o GeoGebra, para complementar a aprendizagem dos alunos, e o que mais se consolidou em mim foi a potencialidade de se investigar variações de uma construção geométrica. Outras potencialidades dos *softwares* de Geometria dinâmica foram evidenciadas nesses cursos, como as possibilidades de se chegar a generalizações e a verificações de propriedades com suas múltiplas representações.

Ao finalizar os cursos, percebi ter uma grande aliada na tecnologia para o ensino e aprendizagem da Matemática e, mais que isso, percebi que poderia trabalhar a Geometria de forma dinâmica diversificando a metodologia em relação a seu conteúdo, complementando o que é explorado, de forma estática, nos livros ou com a tecnologia “lápiz e papel”.

### **1.1.2 Desenhando um caminho**

Meu gosto pela Geometria começou bem cedo, ainda no Ensino Fundamental, e durante a graduação se concretizou. Na graduação, durante a disciplina de Geometria Plana, participei de um minicurso de Desenho Geométrico e percebi, ao longo do curso, que alguns colegas tinham muita dificuldade nas Construções Geométricas, dificuldades com conceitos básicos, e alguns nem sequer sabiam manusear corretamente a régua e o compasso. Como estagiária do PIBID e como regente de turma, vi a discrepância de postura dos alunos quando a aula era dada de forma “diferente”, com o auxílio de alguns recursos didáticos. Diante do quadro descrito, comecei a pensar em como trabalhar a Geometria de outra forma que não a tradicional, que nos é apresentada normalmente em sala de aula.

Era chegada a hora de escolher o tema do Trabalho de Conclusão de Curso, várias possibilidades me passaram pela cabeça e só tinha uma única certeza: de

---

<sup>5</sup> O PAPMEM é uma parceria UFMG-IMPA.

<sup>6</sup> *Software* educativo é todo programa de computador desenvolvido com a finalidade de colaborar com o processo ensino-aprendizagem, baseado em análise e conhecimentos das áreas de Educação e de Informática (MIRANDA; REIS, 2010).

alguma forma, envolveria a Geometria. Decidi, então, trabalhar com a interpretação geométrica dos Produtos Notáveis utilizando um material concreto confeccionado com varetas de bambu, cortada em três tamanhos diferentes que representavam segmentos de comprimentos  $a$ ,  $b$  e  $c$  e conectores de borrachas cirúrgicas (látex). Durante a aplicação das atividades, em uma turma do 9º ano, o que mais ouvi dos alunos foi como “o ver” e manipular os objetos geométricos, por meio do material disponibilizado, os auxiliou no aprendizado daquele conteúdo. O retorno dado pelos alunos nesse tipo de atividade é a melhor resposta de que o trabalho teve êxito, o que começou com uma curiosidade se transformou em interesse e motivação para chegar ao fim da atividade.

Em outubro de 2015, participei do VII Encontro Mineiro de Educação Matemática em São João del-Rei, na categoria *banner*, expondo parte do meu TCC, assim como o material concreto confeccionado. Esse trabalho, de Ventura e Laudares (2016), foi publicado posteriormente na revista eletrônica *Abakós*.<sup>7</sup>

Dezembro de 2015: era chegada a grande data, minha colação de grau. Nesse momento, me vi realizando não só meu sonho, mas também os dos meus pais, que tanto se sacrificaram por mim todos esses anos. Terminava uma etapa para dar início a outros sonhos.

Em janeiro de 2016, iniciei a Especialização em Ensino de Matemática: Fundamental II e Ensino Médio, também pela PUC Minas, concluindo em agosto de 2017. Na especialização, desenvolvi um trabalho sobre Construções Geométricas utilizando o GeoGebra, que foi apresentado no VI Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto e no VIII Encontro de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática (VENTURA; NUNES, 2017). Durante esse encontro, apresentei também uma palestra sobre a Ressignificação dos Produtos Notáveis, meu trabalho de conclusão da graduação.

Em maio de 2017, iniciei a Especialização em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática pela Universidade Federal Fluminense (UFF), que finalizei em abril de 2019. Meu Trabalho Final de Curso intitulava-se *Interlocuções entre história da matemática e tecnologias: proposta didática para o estudo das Equações Diofantinas Lineares com o uso do GeoGebra*.

---

<sup>7</sup> *Abakós* – revista eletrônica de responsabilidade do Instituto de Ciências Exatas e Informática (ICEI) da PUC Minas.

Durante a especialização, tive a oportunidade de ministrar oficinas sobre Construções Geométricas das Cônicas e sobre Sólidos de Platão e a Relação de Euler para turmas de graduação em Matemática da PUC Minas. O objetivo das oficinas foi mostrar aos licenciandos a gama de possibilidades que temos em mãos para ensinar um conteúdo matemático de outra forma que não somente a tradicional. Além das oficinas, ministrei palestras sobre o uso de material concreto, auxiliando o estudo de Produtos Notáveis.

### **1.1.3 Construindo uma ideia de pesquisa: dos primeiros incômodos à proposta de pesquisa submetida ao Promestre**

Não foi por acaso que meus trabalhos acadêmicos envolveram ensino-aprendizagem da Geometria aliado à utilização de recursos educativos diversos. Esse olhar para o ensino-aprendizagem da Geometria é capaz de proporcionar um conhecimento mais efetivo. Além disso, temos hoje ao nosso alcance *softwares* educativos gratuitos que possibilitam às aulas de Matemática maior dinamismo, podendo auxiliar no desenvolvimento, por ser adaptável a distintos ritmos de aprendizagem. Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC),<sup>8</sup> os recursos didáticos como jogos, livros, vídeos, calculadoras, planilhas eletrônicas e *softwares* de Geometria dinâmica têm papel essencial para a compreensão e a utilização das noções matemáticas (BRASIL, 2017, p. 276).

O ensino de Geometria tem passado por algumas mudanças no tempo; normalmente ensinada de forma tradicional, explorando conceitos, desenhos e figuras estáticas, hoje tem na tecnologia um suporte ao processo de seu ensino e sua aprendizagem.

Nessa perspectiva, para uma possível melhoria na aprendizagem, são importantes novas estratégias didáticas, e, para isso, faz-se necessário que o professor em formação ou em exercício busque um meio de ampliar e ressignificar seus conhecimentos. Lorenzato (2010, p.11) afirma que cabe ao professor se manter atualizado, além de uma procura constante por informações que possam melhorar sua prática. Essa constante formação refletirá em sua atuação em sala de aula, uma vez

---

<sup>8</sup> A BNCC é um documento de caráter normativo que define o conjunto orgânico e progressivo de aprendizagens essenciais que todos os alunos devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.



que, ao longo de seus estudos, terá a oportunidade de conhecer novos recursos que podem ser utilizados no desenvolvimento de suas aulas.

Com isso em mente, em 2018, submeti ao PROMESTRE-UFMG, na linha de pesquisa Educação Matemática, como recurso educacional, a proposta de um minicurso destinado a professores que ensinam Matemática visando estudar Geometria por intermédio de suas Construções Geométricas utilizando o *software* educativo GeoGebra. Naquele momento, ainda não conseguia discernir ou separar proposta didática da proposta de pesquisa. E, assim, em fevereiro de 2019, chegou a hora de um novo desafio: dei início ao Mestrado em Educação pela UFMG.

## **FRAGMENTO II: PRIMEIROS PASSOS**

## 2 PLANEJANDO A PESQUISA E DESENHANDO A OFICINA – ANTES DA PANDEMIA

Na entrada do PROMESTRE, em 2019, apresentei uma proposta de minicurso de Geometria Plana, utilizando o *software* de matemática dinâmica, o GeoGebra. Como mencionei, na época não conseguia discernir a proposta do recurso educacional da proposta da pesquisa. No primeiro ano, com a realização das disciplinas do curso e com a participação nos seminários de pesquisa da linha de Educação Matemática, aprimoramos a proposta da oficina e, concomitantemente, construímos uma proposta de pesquisa.

### 2.1 Pensando e desenhando a pesquisa

Do ponto de vista da Educação Matemática, integrar o uso de tecnologias ao ensino de matemática faz-se importante porque a informática está cada vez mais presente em nossas vidas, e há estudos que apontam que o uso da informática pode potencializar o aprendizado. Borba e Penteado (2019, p.12) consideram que o uso da tecnologia informática faz parte de um novo cenário educacional e pode ser considerada como a transformação da própria prática educativa.

Segundo Fiorentini e Lorenzato (2010, p.4), o educador matemático tende a conceber a Matemática como um meio ou um instrumento à formação intelectual e social de seus alunos, por isso promove uma Educação Matemática colocando a Matemática a serviço da Educação. Em sua abordagem, o autor sugere que esse posicionamento torna o ensino numa dimensão exploratória e participativa, proporcionando assim uma aprendizagem que chamaremos aqui de significativa.<sup>9</sup>

Em minhas experiências e percepções, para se tentar alcançar uma aprendizagem significativa, é preciso que os alunos tenham “vontade” de aprender, um aprendizado que não deve ser baseado na memorização de conteúdo, o que caracterizaria um aprendizado mecânico. Contudo, é necessário um envolvimento de via dupla: do educador, que detém o conhecimento e cria condições para que esse

---

<sup>9</sup> Utilizaremos o termo “aprendizagem significativa” no senso comum desse termo. Temos ciência que David Ausubel desenvolveu a teoria de aprendizagem em que conceito de “aprendizagem significativa” é central. Contudo, a expressão “aprendizagem significativa” aqui será utilizada em uma compreensão mais simples, de uma aprendizagem que faça sentido ao aprendiz.

conhecimento seja adquirido, e dos estudantes que aprendem. Ou seja, é importante que tanto educadores como estudantes tenham o desejo de participar desse processo.

Assim, como Borba e Penteado (2019), concordamos que o professor não deve deixar sua prática docente cristalizar em uma zona de conforto, em que se é possível prever e controlar as ações, “na verdade, as inovações educacionais, em sua grande maioria, pressupõem mudança na prática docente” (BORBA; PENTEADO, 2019, p. 56). Em busca de favorecer a aprendizagem dos alunos, o professor deve buscar novos caminhos, mesmo que esses caminhos gerem incertezas e imprevisibilidade. Também D’Ambrósio (2009, p.31) ressalta como “é importante a adoção de uma nova postura educacional, a busca de um novo paradigma de educação que substitua o já desgastado ensino-aprendizagem baseado numa relação obsoleta de causa-efeito”. Por isso, nossa proposta metodológica de ensino visa uma mudança de postura por parte dos professores.

Pensando nessas metodologias, é certo que o uso de *softwares* educativos abre um leque de possibilidades para o professor trabalhar e estimular seus alunos. “Os recursos didáticos nas aulas de matemática envolvem uma diversidade de elementos utilizados principalmente como suporte experimental na organização de processo de ensino e aprendizagem”, como afirma Passos (2006, p. 78).

### **2.1.1 O software GeoGebra como recurso didático**

Muitos educadores já ressaltaram a importância do uso de materiais – recursos – didáticos como facilitador na aprendizagem. Para Lorenzato (2006, p. 18), material didático é qualquer instrumento que o professor julgue útil ao processo de ensino-aprendizagem e que interfere fortemente nesse processo, mas ressalva também que deve ser usado conscientemente e com propósito bem definido.

Como aponta Lorenzato (2006, p. 27), os resultados do uso de materiais didáticos “serão mais benéficos à formação dos alunos, porque [...] as observações e reflexões deles são mais profícuas, uma vez que poderão, em ritmos próprios, realizar suas descobertas e, mais facilmente, memorizar os resultados obtidos durante suas atividades”. Prova disso é que o uso de materiais manipulativos, jogos, *softwares* educativos e tantos outros recursos estão cada vez mais presentes como recursos ou suportes para novas metodologias ativas no ensino de Matemática. O uso de materiais

concretos ou digitais, como o GeoGebra, por exemplo, como recurso didático por si só não garante uma aprendizagem eficaz, mas é instrumento útil para potencializar a metodologia de ensino e o processo de aprendizagem.

Esses avanços tecnológicos exigem que o professor busque por uma formação adequada e por propostas inovadoras, pois é preciso entender “por que e como integrar estas na sua prática pedagógica e ser capaz de superar entraves [...] pedagógicos, possibilitando [...] uma abordagem integradora de conteúdo” (MERCADO, 1999, p. 40). Um cuidado a se tomar nesse sentido é a distância existente entre o recurso didático e as relações matemáticas que pretendemos que eles representem bem como sua escolha (PASSOS, 2006). Para isso, faz-se necessário um planejamento bem objetivado para que o uso desses recursos não caia no uso pelo uso.

Uma nova postura ganha o professor numa metodologia horizontalizada – a de mediador –, e passa a desafiar os alunos na busca por caminhos para atingir um conhecimento autônomo. O computador “permite novas formas de trabalho, possibilitando a criação de ambientes de aprendizagem em que os alunos possam pesquisar, fazer antecipações e simulações, confirmar ideias prévias, experimentar, criar soluções” e, principalmente, construir novas formas de representação mental (BRASIL, 1997, p. 141).

Conforme o presente trabalho pretende, entre outros objetivos específicos, articular o Desenho Geométrico ao uso do GeoGebra, justifica-se a escolha de referenciais teóricos como Penteado (1999), “que ao trazer o computador para a sala de aula, o professor passa a contar não só com mais um recurso para a realização das tarefas, mas também abre um novo canal de comunicação com os alunos”. É importante salientar que um não substitui o outro, e é necessário que o professor coloque os alunos em contato com situações variadas com a finalidade de promoverem o próprio desenvolvimento.

Mas por que o GeoGebra? O GeoGebra é um *software* gratuito que integra Geometria (Geo) e Álgebra (Gebra), e com ele é possível traçar, por exemplo, segmentos de retas perpendiculares e retas paralelas, circunferências, ângulos e medir segmentos, além de ser possível construir todas as figuras da Geometria elementar. O dinamismo do *software* se dá pela possibilidade de as figuras poderem ser movimentadas depois de serem construídas, conservando as relações e as propriedades geométricas da construção inicial, possibilitando-nos experimentar e

desenvolver a visualização, bem como compreender melhor alguns conceitos da Geometria; com isso, de alguma forma, acabamos por “dar forma” ao que antes era considerado abstrato, ou seja, uma transição do abstrato para o concreto.

### **2.1.2 Desenho Geométrico e o ensino da Geometria**

A Geometria está presente no nosso dia a dia. Nosso entorno é constituído por infinitas formas e imagens, estando presentes em tudo, na natureza, nas construções civis, nas artes... e, quando paramos para analisar essas formas, estamos lidando com algumas ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, medição e simetria. “As relações do Desenho Geométrico e a Matemática são tão intrínsecas que, geralmente, é impossível entender as leis matemáticas sem os recursos gráficos oferecidos pelo Desenho Geométrico” (RAYMUNDO, 2010, p. 18).

Lorenzato (2010, p. 17) afirma que as “palavras não alcançam o mesmo efeito que conseguem os objetos ou imagens”. Para Raymundo (2010), seria impossível entender as leis matemáticas sem os recursos gráficos que o Desenho Geométrico nos oferece. Em contrapartida, Passos (2006, p. 81) reitera que os conceitos que devemos construir ao longo do processo não “estão em nenhum dos materiais de forma que possam ser abstraídos [...], os conceitos serão formados pela ação interiorizada” através de suas ações. Pelas palavras de Lorenzato, sem estudar Geometria, as pessoas não desenvolveriam o pensar geométrico ou o raciocínio visual e, sem essa habilidade, elas dificilmente conseguiriam resolver situações de vida que fossem geometrizadas (LORENZATO, 1995, p. 5).

Inúmeros são os argumentos sobre a importância de se ensinar e aprender Geometria, por isso o(a) professor(a) de Matemática deve se apropriar de metodologias que propiciem um pensamento exploratório-investigativo, e os *softwares* de Geometria dinâmica estabelecem a mediação desse processo de ensino-aprendizagem.

Sobre a importância de se ensinar Geometria, a BNCC destaca que:

A Geometria envolve o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, [...] estudar posição e deslocamentos no espaço, formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer

conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. (BRASIL, 2017, p. 271).

No que tange à aprendizagem, a BNCC (BRASIL, 2017, p. 276) orienta que a aprendizagem está “intrinsecamente relacionada à compreensão, ou seja, à apreensão de significados dos objetos matemáticos, sem deixar de lado suas aplicações”. Esses documentos sugerem ainda a utilização de recursos didáticos como facilitador, inclusos aqui os “softwares de geometria dinâmica que têm um papel essencial para a compreensão e utilização das noções matemáticas” (BRASIL, 2017, p. 276). Entre as várias possibilidades, esses recursos nos proporcionam a multiplicidade de representações dos objetos geométricos.

Durante nossa pesquisa, buscamos na BNCC orientações sobre desenho, e o documento traz habilidades relacionadas à Geometria e ao desenho de modo geral, como destacamos a seguir.

(EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de  $90^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $45^\circ$  e  $30^\circ$  e polígonos regulares.

(EF04MA16) - Descrever deslocamentos e localização de pessoas e de objetos no espaço, por meio de malhas quadriculadas e representações como desenhos, mapas, planta baixa e croquis, empregando termos como direita e esquerda, mudanças de direção e sentido, intersecção, transversais, paralelas e perpendiculares.

(EF05MA17) - Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e desenhá-los, utilizando material de desenho ou tecnologias digitais.

(EF07MA21) - Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de Geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros.

(EF08MA18) - Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de Geometria dinâmica. (BRASIL, 2017).

Na BNCC não se tem as construções geométricas como um fundamento, daí a escolha deste objeto de pesquisa para contribuir para a formação de professores de Matemática. Dessa forma, a formação inicial e continuada de professores é essencial para conseguirmos uma melhora no nível da Educação Básica, considerando que a prática docente não é construída apenas por conhecimentos teóricos, mas por novos saberes empíricos além dos adquiridos durante a graduação. De certo modo, estamos

promovendo estudos e atividades para ressignificar as disciplinas de Desenho Geométrico.

Partindo do exposto, formalizamos a seguinte questão de estudos e investigações: seria possível potencializar o aprendizado da Geometria adotando uma metodologia de ensino – oficinas – que explore Construções Geométricas desafiadoras por meio do *software* GeoGebra?

D'Ambrósio (2009, p. 31) afirma que, “do ponto de vista de motivação contextualizada, a matemática que se ensina hoje nas escolas é morta”. A diversificação metodológica com metodologias ativas, baseadas em instrumentos didáticos é uma tentativa para mudar esse cenário.

### **2.1.3 Desafios Geométricos com a construção de “Mandalas Geométricas”**

A proposta de ensino que surgirá dos resultados da pesquisa realizada traz uma motivação ou um “atrativo” com a participação das oficinas: os **Desafios Geométricos**, isto é, a construção das Mandalas Geométricas.

#### **2.1.3.1 Mandala: conceito e estrutura**

Mandala é uma palavra do sânscrito e significa “círculo”. As Mandalas se caracterizam por desenhos ou estruturas dispostos(as) de forma concêntrica, ou seja, que se desenvolvem a partir de um mesmo centro. A forma circular na construção de uma Mandala é a regra caracterizada ainda pela simetria e repetição das formas.

Podemos classificá-las a partir da sua origem, finalidade e formação. Fioravanti (2003, p. 9) diz que, quanto a sua origem, elas são classificadas em orientais e ocidentais. As Mandalas ocidentais são normalmente utilizadas como adornos arquitetônicos e em decoração, e sua finalidade nesse caso é o profano. Já as Mandalas orientais são quase sempre de cunho religioso e, nesse caso, são mais conhecidas por Rosáceas, e sua finalidade é o sagrado. Historicamente, as Mandalas se constituem como uma das mais antigas inscrições e grafismo da humanidade. Nosso foco na construção das Mandalas é quanto a sua composição, caracterizada pelas formas geométricas.

As Mandalas Geométricas se constituem por desenhos geométricos que se inscrevem uns aos outros, resultando em um círculo ou em um quadrado, desvelando



em repetição de padrões. Na construção de uma Mandala Geométrica é requerido o conhecimento de vários conceitos da Geometria plana – circunferência, segmento, ponto médio, mediatriz, bissetriz, retas paralelas, retas perpendiculares – além dos princípios das Construções Geométricas, para, por exemplo, dividir uma circunferência em partes iguais que possibilita circunscrever e/ou inscrever polígonos regulares e polígonos estrelados.

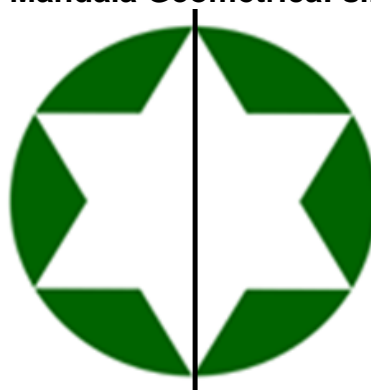
**Figura 1 – Mandala Geométrica: simetria radial**



Fonte: Elaborada pela autora.

As Mandalas Geométricas são, em geral, simétricas, e, embora existam diferentes tipos de simetria, trabalharemos apenas com dois tipos: simetria radial, (Figura 1) e simetria axial (Figura 2). A maioria das Mandalas possui simetria radial, que consiste na rotação de alguns elementos em torno de um certo eixo, ou seja, os elementos se repetem em volta desse eixo, como na Figura 1. Já a simetria axial, Figura 2, acontece quando dividimos a Mandala em seu eixo de simetria e obtemos uma imagem espelhada.

**Figura 2 – Mandala Geométrica: simetria axial**



Fonte: Elaborada pela autora.

A oficina, a que viemos denominar **Desafios Geométricos – Mandalas**, foi pensada de modo a ter como ponto de partida o desafio da reprodução e/ou da criação de Mandalas, por meio das Construções Geométricas – ou Desenho Geométrico. Para isso, foram escolhidas Mandalas Geométricas esteticamente atrativas, que possam instigar a investigação por colocar os alunos diante de Construções Geométricas que podem despertar a curiosidade no “como se faz” e estratégias de investigação devem/podem ser estabelecidas. As Construções Geométricas que fazem parte da oficina foram idealizadas tomando como base o trabalho *Constructions was MUCH better this year!*,<sup>10</sup> de Lisa Bejarano, de 2015. Uma proposta de ensino de Geometria plana que envolve a construção de Mandalas e, segundo as narrativas da autora, pode se considerar bem-sucedida.

A presença das mídias tradicionais – lápis e papel – e uma mais moderna – o *software* GeoGebra – se justifica, pois uma mídia não substitui a outra, sendo seu uso concomitante. O uso de um *software* de Geometria Dinâmica pode dar uma estrutura organizacional à atividade de Construções Geométricas antes realizadas com “lápis e papel” – ou “giz e quadro-negro” – e vice-versa.

Propositalmente, a oficina propõe em seus desafios os desenhos de objetos geométricos considerados complexos – neste caso, as Mandalas. Fica suscitada a necessidade de lançar mão de conhecimentos básicos já adquiridos (e, talvez, adormecidos) sobre Construções Geométricas, procurando inverter o processo de abordagem tradicional do aprendizado de Construções Geométricas que parte da construção de elementos básicos (ou aqueles equivocadamente<sup>11</sup> considerados mais simples) – pontos, retas, segmentos – para os mais complexos. O critério na escolha das Mandalas foi o do estudo de propriedades geométricas envolvidas em sua construção.

Concomitantemente, a proposta da pesquisa foi se constituindo enquanto crescíamos novos elementos à oficina.

---

<sup>10</sup> Disponível em: <https://crazymathteacherlady.wordpress.com/2015/09/16/constructions-was-much-better-this-year/> e <https://crazymathteacherlady.wordpress.com/2014/09/21/maybe-constructions-will-go-better-next-year/>

<sup>11</sup> O termo equivocadamente se insere nesse contexto dada à complexidade dos conceitos de ponto e reta na geometria.

## 2.2 Delineando a metodologia de pesquisa

Optamos por uma metodologia de natureza qualitativa, caracteristicamente multimetodológica, ou seja, usa uma variedade de procedimentos e instrumentos de coleta de dados. Assim, devemos nos organizar de forma a colher e analisar esses dados, “procurando tentativamente identificar temas e relações, construindo interpretações e gerando novas questões e/ou aperfeiçoando as anteriores” (ALVES-MAZZOTTI, 1999, p. 171), se julgarmos necessário.

Devemos nos lembrar que temos que dar credibilidade ao nosso trabalho, dessa forma precisamos respeitar alguns critérios em relação à credibilidade dos dados, sendo um deles a triangulação dos dados colhidos.

A pesquisa foi pensada de modo que os dados seriam (e, de fato, foram) coletados por meio da observação participante, análise de documentos produzidos pelos sujeitos do estudo, captura de tela e gravação de encontros virtuais. Os dados coletados foram predominantemente descritivos, “obtidos no contato direto do pesquisador com a situação estudada, [ênfatisando] mais o processo do que o produto e se [preocupando] em retratar a perspectiva dos participantes” (BOGDAN; BIKLEN, 1982).

As oficinas foram inicialmente pensadas e elaboradas para ocorrerem na forma presencial; seriam cinco encontros a serem realizados nas dependências da FaE/UFMG.

É essencial mencionar que, ao conceber a oficina, pensamos não apenas no material, mas também na função desempenhada por quem a ministrasse. Nesse caso, a pesquisadora ministraria todas as oficinas.

Toda proposta didática tem ganhos com a experimentação. Sendo assim, em 2019, com a oficina ainda em construção, a realizamos em duas ocasiões, ambas, com os alunos do curso de Licenciatura em Matemática da própria UFMG, na disciplina de estágio, ministrada por minha orientadora.

Em seguida, foi feito um relato de como ocorreram tais experimentações.


### 3 EXPERIMENTAÇÕES INICIAIS PRESENCIAIS

Após todo o processo de planejamento e elaboração inicial dos desafios, ministramos a oficina na forma preambular com o objetivo de obter *feedbacks* – observações, reações, *insights*. Foram realizadas, em novembro de 2019, presencialmente, duas oficinas com os alunos da disciplina de estágio do curso de Licenciatura em Matemática da UFMG. Procuramos observar ou averiguar, nessas oficinas-testes, a dinâmica das construções já produzidas e criar novas estratégias de intervenção, se julgássemos necessário. Fazendo jus à proposta de uma observação participante, a pesquisadora/ministrante interveio no andamento da oficina, interagiu com os participantes, provocou e esclareceu questões que emergiram.

#### 3.1 Relato

Em ambas as oficinas, entregamos uma folha de atividades, como apresentamos na Figura 3 e no Apêndice A. Escolhemos, inicialmente, quatro Mandalas Geométricas que possuem semelhança em sua elaboração. Todas possuem relações de proporcionalidade entre os elementos geométricos das construções e trabalham conceitos relativos a triângulos circunscritos e inscritos em circunferências; nos desafios propostos, especificamente, eram triângulos equiláteros.

**Figura 3 – Folha de atividades**



**OFICINA DESAFIOS GEOMÉTRICOS**


**PROMESTRE - MESTRADO PROFISSIONAL EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA**

Mestranda: Angélica Rodrigues Ventura  
Orientadora: Teresinha F. Kawasaki


Hoje vamos explorar a construção de Mandalas.

As Mandalas geométricas se constituem por desenhos geométricos que se inscrevem uns aos outros resultando em um círculo ou quadrado compostos de repetição de padrões.


1




2



3



4



Escolha uma das Mandalas e mãos à obra!

( 1 ) Vamos formar grupos de no máximo 3 pessoas. A tarefa de cada grupo será reproduzir uma Mandala. Como vocês a construiriam?

( 2 ) Exponha suas conclusões com seus colegas.

( 3 ) Vamos reproduzir a Mandala no software de geometria dinâmica?

Fonte: Elaborada pela autora.

As oficinas aconteceram em dois momentos: o primeiro na manhã do dia 12 de novembro de 2019, com a participação de 9 estudantes; o segundo na noite do dia 14 de novembro de 2019, com a participação de 5 estudantes.

O início das oficinas ocorreu de forma semelhante nas duas ocasiões, com a distribuição da folha de atividades e uma breve explicação sobre a dinâmica delas e a utilização do *software* GeoGebra para a realização das atividades. Solicitamos que os estudantes se dividissem em duplas ou trios e que escolhessem uma das construções para trabalhar. A partir da escolha, começaram a discutir entre eles sobre como deveriam construir cada Mandala.

No primeiro momento, que chamaremos de Oficina 1, foram formados 4 grupos e iniciamos com a liberação do uso do GeoGebra; já no segundo momento, o qual chamaremos de Oficina 2, foram formados 3 grupos, e pedimos que começassem as construções utilizando somente régua e compasso e que só depois utilizassem o *software* GeoGebra. Nosso intuito com essa mudança de estratégia foi propor um comparativo entre as construções com régua e compasso e as feitas no GeoGebra.

Ao longo da discussão inicial, nos dois momentos, fomos acompanhando os grupos sem interferir em suas construções, com pequenas intervenções que permitiram auxiliar na alteração e sobreposição das construções quando feitas no GeoGebra.

Com algumas construções já prontas, em ambas turmas, partimos para uma conversa coletiva. Para cada uma das Mandalas, um dos estudantes de cada grupo foi até o quadro e fez um rascunho de como efetuaram a construção da Mandala. Diante das explicações, fomos observando, anotando as dúvidas e os possíveis equívocos e discutindo os conceitos e propriedades que emergiram no decorrer da conversa.

Ao final das oficinas, pedi aos estudantes que nos enviassem por *e-mail* os arquivos contendo suas construções realizadas no GeoGebra. Apenas a turma do dia 12 de novembro o fez, e a partir dessas contribuições extraímos o processo de realizado através do Protocolo de Construção do próprio GeoGebra. A seguir descrevemos parte das construções e interações feitas pelos participantes durante as oficinas. Para identificar os grupos, chamaremos o grupo 1 de G1, o grupo 2 de G2, o grupo 3 de G3 e o grupo 4 de G4.

### ***Mandala 1***

**Figura 4 – Oficina Presencial: Mandala 1**



Fonte: Elaborada pela autora.

Em ambas as oficinas, a Mandala 1 não foi discutida pelas turmas. Aparentemente, os estudantes deram preferência ao que julgaram sendo as Mandalas mais complexas de se construir.

### ***Mandala 2***

**Figura 5 – Oficina Presencial: Mandala 2**



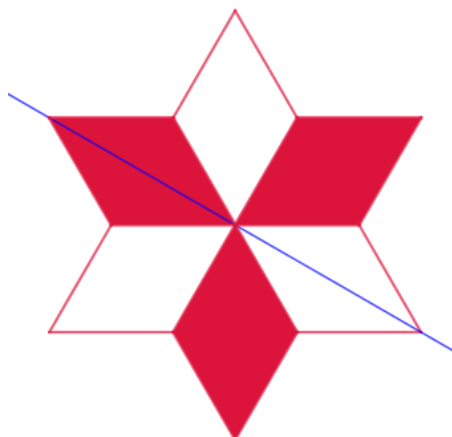
Fonte: Elaborada pela autora.

A Mandala 2, coincidentemente, foi a primeira a ser discutida em ambas as turmas. Logo no início dessas discussões, uma das estudantes mencionou o termo Cevianas, sugerindo que um dos pontos de vértice do triângulo e que dois vértices do losango pertenciam a uma mesma reta.

Nesse momento, demos uma pausa para que a turma toda se inteirasse do que de fato seriam as Cevianas, pois nem todos se recordavam. Sugerimos que todos pesquisássemos na internet esse conceito.

Logo depois, chamamos a atenção para o fato de que não era apenas uma Ceviana, uma vez que, por definição, são segmentos de reta que partem do vértice do triângulo interceptando qualquer ponto do lado oposto, e nessa Mandala a Ceviana em questão intercepta um ponto específico do lado do triângulo, como observamos na Figura 6.

**Figura 6 – Oficina Presencial: visualização de uma Ceviana na Mandala 2**



Fonte: Elaborada pela autora.

Estudantes se manifestaram e inferiram visualmente ser esse o ponto médio do lado oposto ao vértice em questão. A essa altura, os estudantes trouxeram à tona outro elemento importante da Geometria plana, os pontos notáveis do triângulo equilátero.

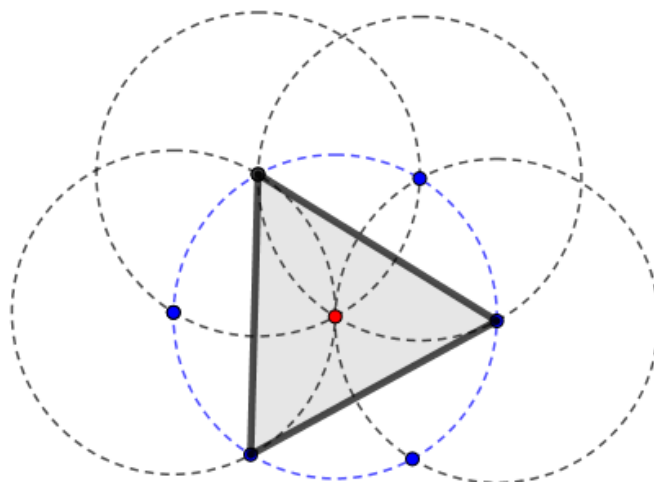
Aqui coube uma complementação de nossa parte, eu e minha orientadora, em relação às Cevianas, uma vez que os segmentos de reta que partem de um vértice do triângulo e interceptam seus pontos notáveis denominam-se Cevianas Notáveis, que são: Bissetriz, Mediana e Altura.

Iniciamos outra discussão em relação às medianas e mediatrizes pelo fato de ambas interceptarem o ponto médio dos lados do triângulo equilátero. Nesse momento foi enfatizado pelos estudantes que ambas, juntamente com a Bissetriz, coincidem, por se tratar de um triângulo equilátero.

Nesse instante indagamos sobre como construir, então, um triângulo equilátero utilizando somente régua e compasso. Para nossa surpresa, a maioria dos estudantes sugeriu que dividíssemos a circunferência em seis partes e uníssemos três pontos alternados, formando assim um triângulo equilátero, como mostra a construção feita por um dos estudantes do G3 (Figura 7). Nossa expectativa era de que construíssem o triângulo partindo de um segmento e raio de duas circunferências centradas, cada uma, nas extremidades desse segmento; determinando os pontos de interseção entre essas circunferências, seria possível traçar o triângulo equilátero.



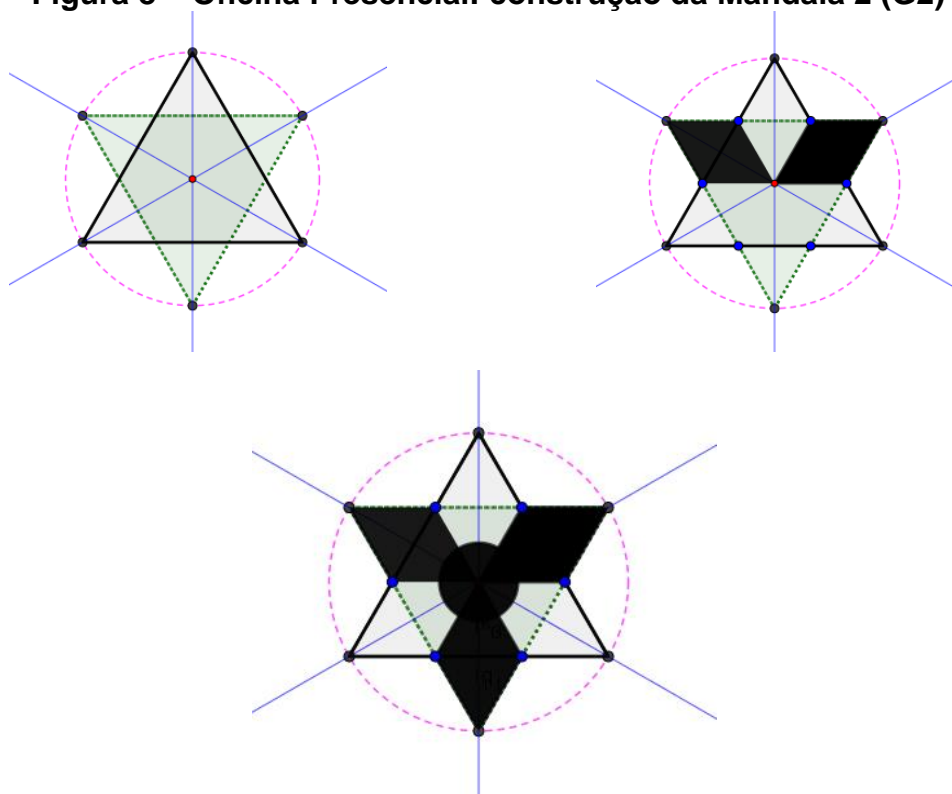
**Figura 7 – Oficina Presencial: construção do triângulo equilátero (G3)**



Fonte: Oficinas Desafios Geométricos – Oficinas Presenciais.

A divisão da circunferência em seis partes congruentes ocorreu de duas formas pelos grupos. Assim, o grupo da ilustração acima o fez com “régua e compasso”. Os outros optaram por construírem dois triângulos equiláteros invertidos inscritos em uma circunferência, como mostramos abaixo (Figura 8), através do processo de construção de um dos estudantes do G2.

**Figura 8 – Oficina Presencial: construção da Mandala 2 (G2)**



Fonte: Oficinas Desafios Geométricos – Oficinas Presenciais.

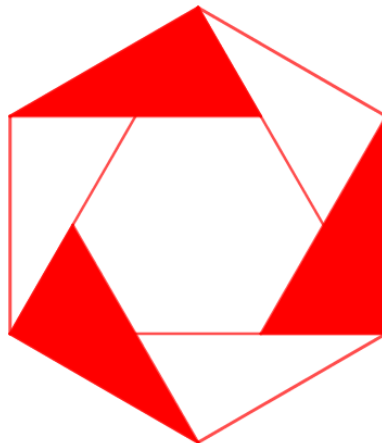
A partir da construção do primeiro triângulo equilátero, utilizando a ferramenta polígono do GeoGebra, o grupo traçou as três mediatrizes referentes aos lados do triângulo e a circunferência a que ele é inscrito, dividindo assim a circunferência em três partes congruentes. Marcando os pontos de interseção entre as mediatrizes e a circunferência, traçaram o segundo triângulo equilátero. Justificaram, assim, a divisão da circunferência em seis partes congruentes.

Para finalizar a Mandala, marcaram os pontos de interseção entre os triângulos e, construindo os losangos alternados, traçaram, for fim, uma circunferência menor ao centro da Mandala com o raio definido visualmente, medindo a metade de um dos lados dos losangos.

A discussão sobre a divisão de uma circunferência em três e em seis partes congruentes deu início às nossas interações sobre a construção da Mandala 3.

### ***Mandala 3***

**Figura 9 – Oficina Presencial: Mandala 3**



Fonte: Elaborada pela autora.

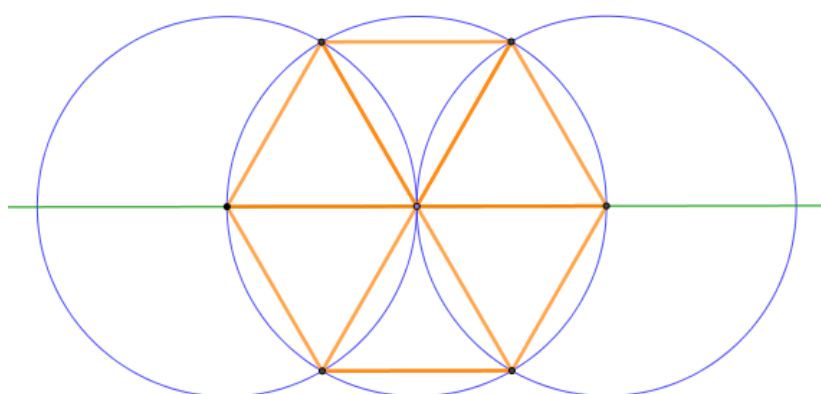
Os dois grupos que construíram essa Mandala começaram traçando o hexágono maior. Cada grupo concluiu de forma diferente, mas ambos foram elaborando os triângulos laterais até que se formasse o hexágono menor no centro da Mandala. Partimos da divisão de uma circunferência em seis partes congruentes para a construção da Mandala 3.

Um dos estudantes, ao explicar o que foi feito, informou que começaria pela construção do hexágono maior. Para a construção do hexágono maior, ele traçou uma reta e definiu o centro da circunferência. A partir do centro, traçou a circunferência e

marcou o ponto de interseção entre a reta e a circunferência, justificando que assim definiria o raio para traçar uma segunda circunferência, com o objetivo de construir um triângulo equilátero com vértices nos pontos de interseção entre as duas circunferências e seus centros.

Nesse momento da construção, não houve intervenção, pelo fato de já termos trabalhado com a divisão de circunferências na Mandala anterior. Prosseguimos com a construção, e o estudante repetiu o processo com a segunda circunferência, traçando uma terceira. Para finalizar, marcou os pontos de interseção entre a segunda circunferência e a primeira e entre a segunda circunferência e a terceira. Definiu-se, assim, cinco pontos de interseção entre as circunferências. Para definir um triângulo, uniu os pontos de interseção entre a segunda circunferência e a primeira, repetiu o mesmo com os pontos de interseção entre a segunda circunferência e a terceira.

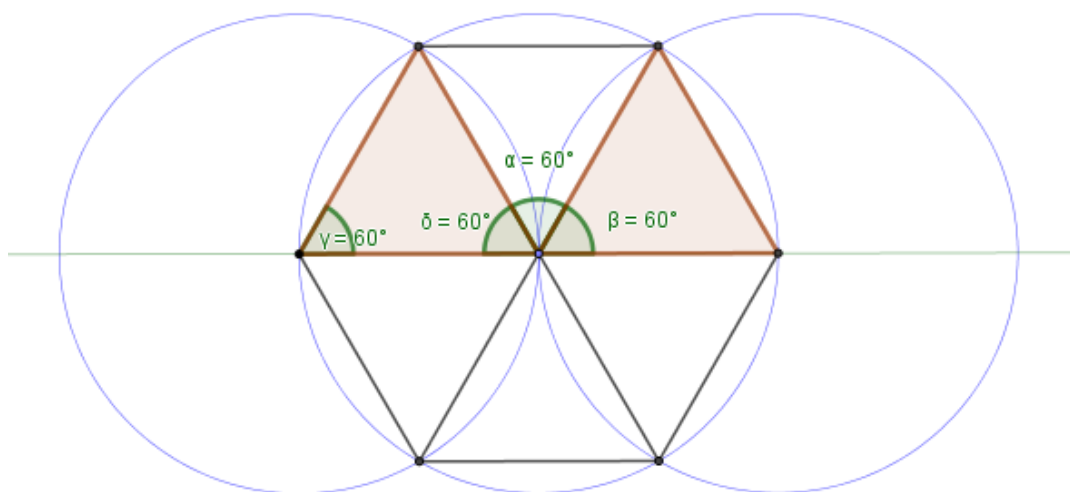
**Figura 10 – Oficina Presencial: processo de construção da Mandala 3 (a)**



Fonte: Oficinas Desafios Geométricos – Oficinas Presenciais.

Aqui coube um questionamento sobre como validar que a construção feita fosse, de fato, de triângulos equiláteros. O estudante justificou sua construção pela propriedade dos ângulos internos de um triângulo equilátero; para isso, exibiu, com o auxílio do GeoGebra, as medidas dos ângulos internos de  $60^\circ$ . Mais uma vez questionados por que fizeram esse processo, argumentaram que assim teriam seis triângulos equiláteros no interior da segunda circunferência, sendo um de seus lados, um dos lados do hexágono. Na Figura 11 observamos esse processo de construção do estudante do G1.

**Figura 11 – Oficina Presencial: processo de construção da Mandala 3 – G1 (b)**

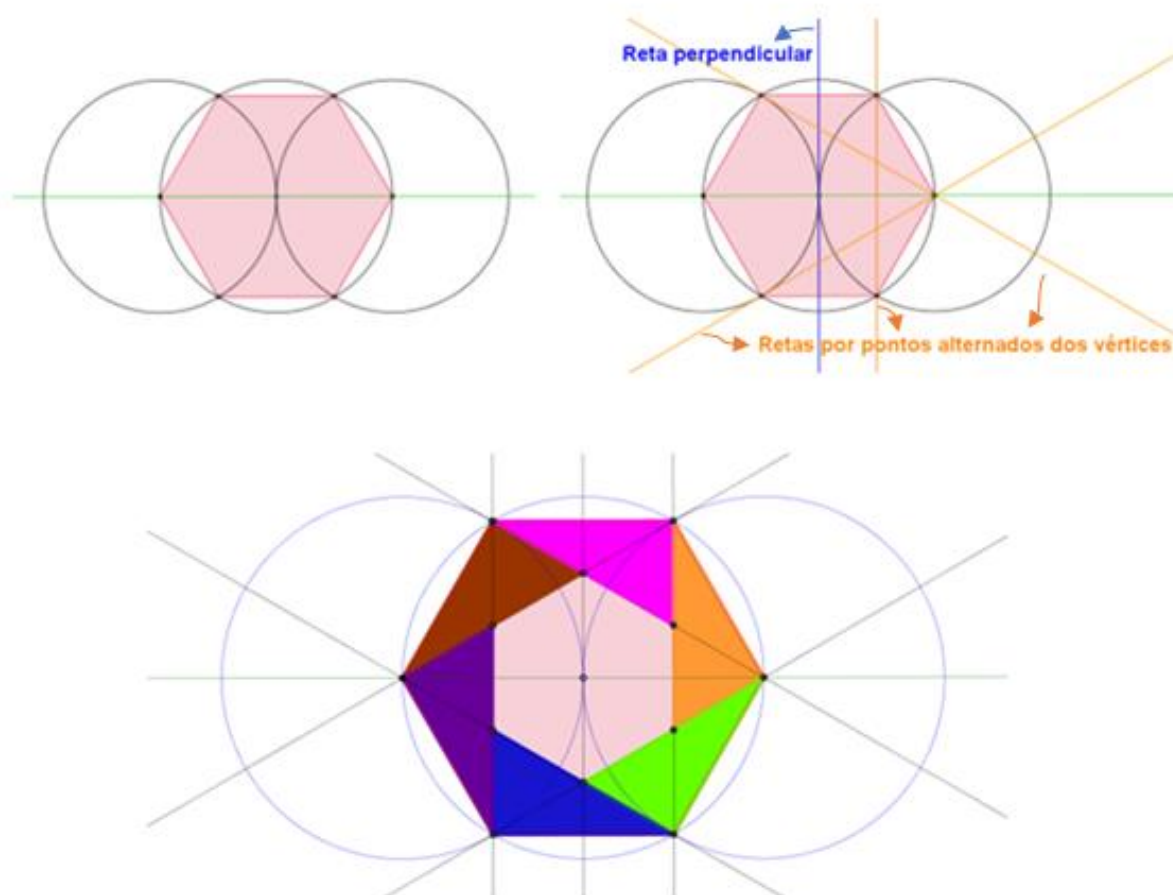


Fonte: Oficinas Desafios Geométricos – Oficinas Presenciais.

Dando continuidade à construção, os estudantes foram questionados sobre os triângulos laterais e qual propriedade poderíamos inferir deles. Eles se manifestaram e disseram que, visualmente, se tratava de um triângulo retângulo, e imediatamente foram perguntados como garantir essa propriedade na construção.

Nesse momento, a maioria deles sugeriu que, para garantir a construção de um triângulo retângulo, se deveria traçar uma reta perpendicular à reta inicial, passando pelo centro da segunda circunferência. Em seguida, se deveria traçar retas pelos pontos alternados dos vértices marcando os pontos de interseção entre as retas e entre as retas e as circunferências, formando assim os triângulos, como visualizamos na Figura 12.

**Figura 12 – Oficina Presencial: construção da Mandala 3 – G1**



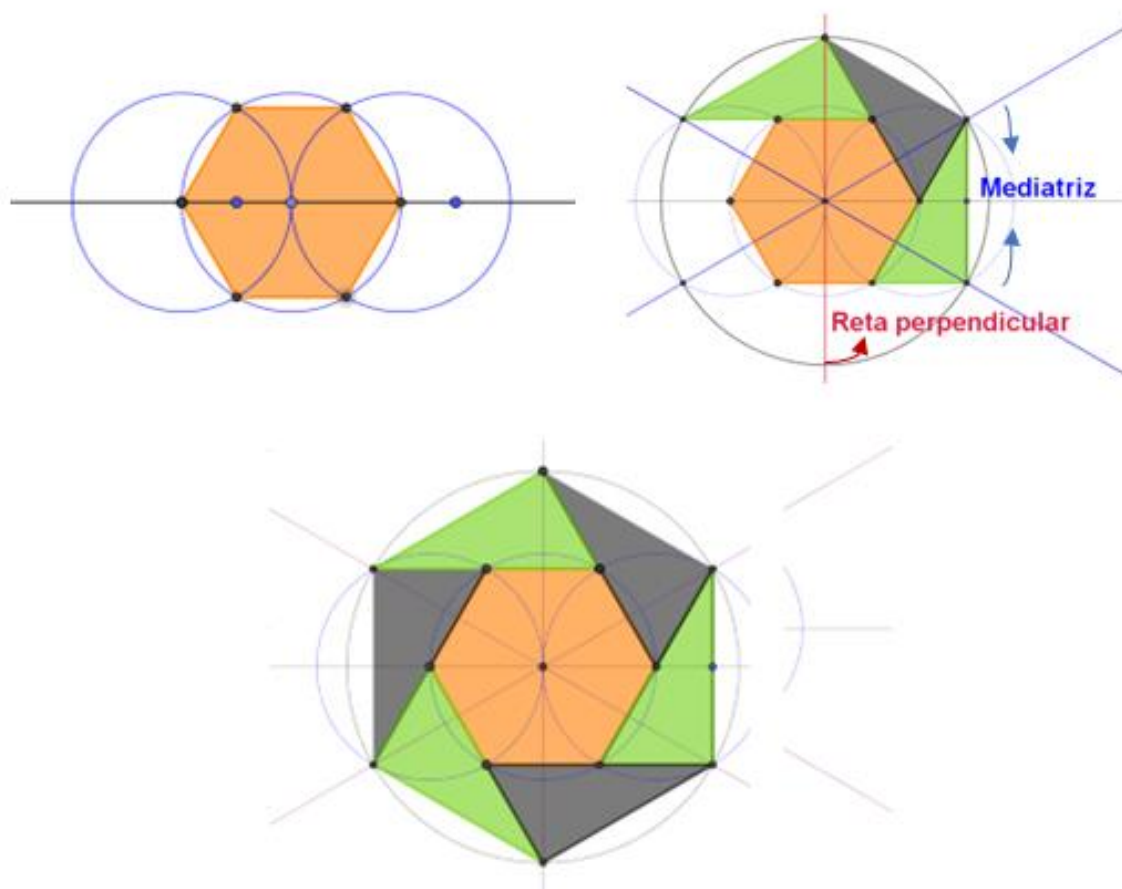
Fonte: Oficinas Desafios Geométricos – Oficinas Presenciais.

O G2 iniciou pela construção do hexágono de modo bem semelhante ao do G1. A diferença foi pelo fato de que dividiram a circunferência em 6 partes iguais e traçaram o hexágono sem traçarem os triângulos equiláteros internos.

Para a construção dos triângulos, o G2 traçou, primeiramente, uma reta perpendicular à reta inicial passando pelo centro da segunda circunferência. A partir da interseção entre as duas retas, foram traçando as mediatrizes referentes aos lados do hexágono. Como os estudantes usaram a ferramenta Mediatriz, do GeoGebra, foram questionados como traçariam essas retas utilizando régua e compasso.

Com as mediatrizes traçadas, marcaram os pontos de interseção entre elas e as circunferências. Definindo como raio a distância entre esse ponto e o centro da segunda circunferência e centro coincidindo com a mesma, traçaram uma quarta circunferência marcando os pontos de interseção com a reta perpendicular. Unindo dois desses pontos e um vértice do hexágono, foram formando os triângulos laterais, conforme mostramos na Figura 13.

**Figura 13 – Oficina Presencial: construção da Mandala 3 – G2**



Fonte: Oficinas Desafios Geométricos – Oficinas Presenciais.

#### ***Mandala 4***

**Figura 14 – Oficina Presencial: Mandala 4**



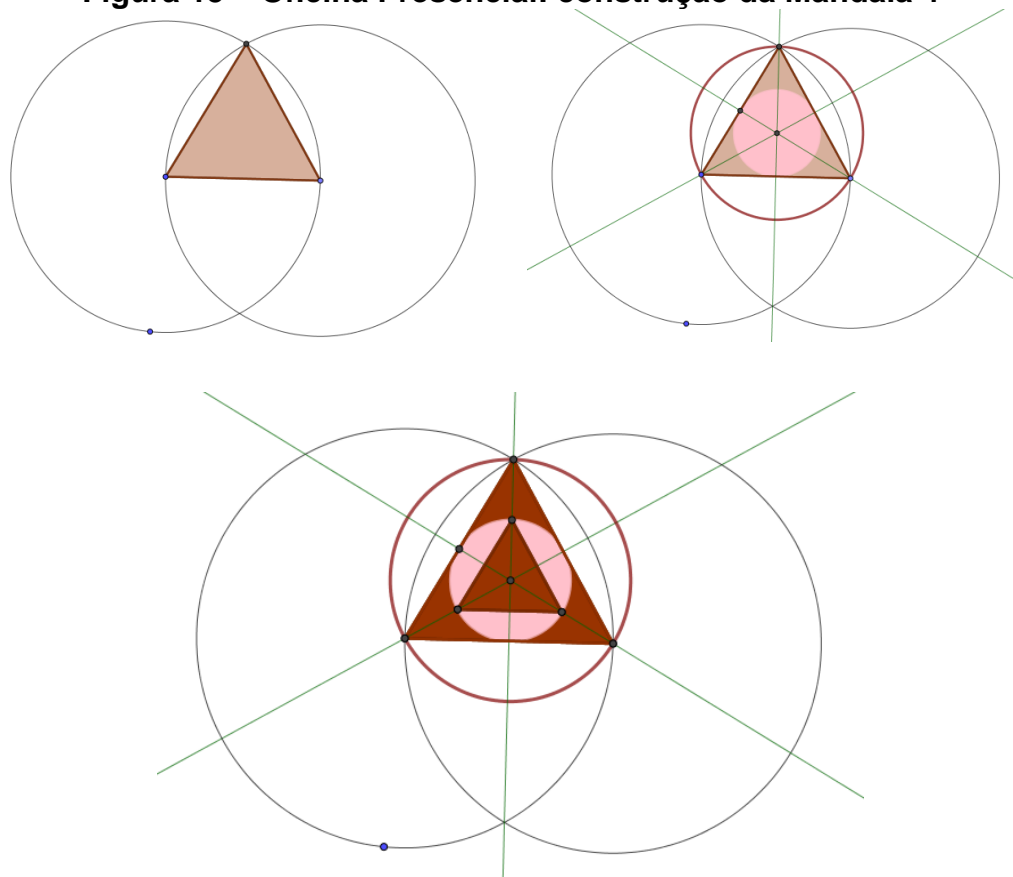
Fonte: Elaborada pela autora.

A última Mandala que construímos foi a Mandala 4. Como o tempo estabelecido já estava se encerrando, fizemos uma breve discussão sobre triângulo inscrito em uma circunferência.

A partir do Protocolo de Construção do GeoGebra, foi apresentada a construção feita por um estudante durante a realização da oficina. Iniciou-se pelo triângulo equilátero a partir das interseções das duas circunferências. Com o triângulo definido, o próximo passo foi encontrar o circuncentro desse triângulo. Pela construção, percebeu-se que o caminho foi traçar as mediatrizes e marcar a interseção entre elas, definindo assim o centro da circunferência circunscrita ao triângulo.

Com a marcação das interseções entre as mediatrizes e os lados do triângulo, definiram o raio da circunferência menor, tendo-se assim o triângulo inscrito na circunferência. Concluíram a Mandala com a marcação dos pontos de interseção entre a circunferência menor e as mediatrizes, e formaram então o triângulo equilátero menor.

**Figura 15 – Oficina Presencial: construção da Mandala 4**



Fonte: Oficinas Desafios Geométricos – Oficinas Presenciais.

Com a finalização das construções, abriu-se uma discussão com as turmas, quando foram feitos alguns apontamentos.

### **3.2 Considerações dos participantes sobre as Oficinas Presenciais**

#### ***Oficina Presencial 1***

Os participantes relataram que, para a aplicação/realização da oficina, seriam necessários alguns conhecimentos básicos sobre, por exemplo, mediatriz, bissetriz; nesse caso, dependendo da turma (de estudantes), a atividade deveria passar por ajustes.

No geral, acharam que foi um trabalho interessante, pois possibilitou colocá-los em ação, permitindo que se criasse, mesmo que não conseguissem fazer de modo certo num primeiro momento, um movimento de alguns aspectos da mente deles no sentido de aprenderem.

Quando indagados se, com essa atividade, seria possível trabalhar em vários níveis, os participantes disseram que quanto antes fossem estimulados seria melhor; portanto, desde que adaptando a atividade, seria possível trabalhar alguns elementos da Geometria.

Perguntamos também se achavam válido o uso de *software* de Geometria dinâmica, e, segundo eles, é mais fácil investigar com o uso do GeoGebra, mas que, se fossem eles a aplicarem esse tipo de atividade, pediriam aos estudantes uma conclusão do que eles fizeram (por exemplo: fiz a construção da bissetriz a partir de tais argumentos – sistematização) ou pediriam que escrevessem com as próprias palavras as propriedades que eles utilizaram. Corroborando os participantes, o ato de registrar o que é feito auxilia o aluno na organização de seus pensamentos e na construção do conhecimento, assim como utilizamos uma linguagem mais clara e compreensiva para o aluno.

Por fim, questionamos se as construções que fizeram tinham algo de dinâmico, e nos relataram que sim, e que, ao mover segmentos ou pontos, as propriedades foram mantidas.



## **Oficina Presencial 2**

Perguntados inicialmente o que acharam da atividade, um dos participantes disse que achou interessante, mas que, ao levar a atividade para o GeoGebra, ele ocultaria algumas ferramentas dos estudantes. Segundo ele, ocultaria, por exemplo, a ferramenta “reta perpendicular”, “ponto médio”, por considerar importante que o estudante saiba fazer essas construções.

Outro participante discordou dessa opinião por pensar que, em algumas atividades, esses elementos podem poluir o desenho, mas que deve ser considerado o objetivo/proposta da atividade. Se for a construção em si, não faz sentido bloquear as ferramentas; segundo ele, saber usar o GeoGebra inclui saber usar os recursos que ele tem para facilitar.

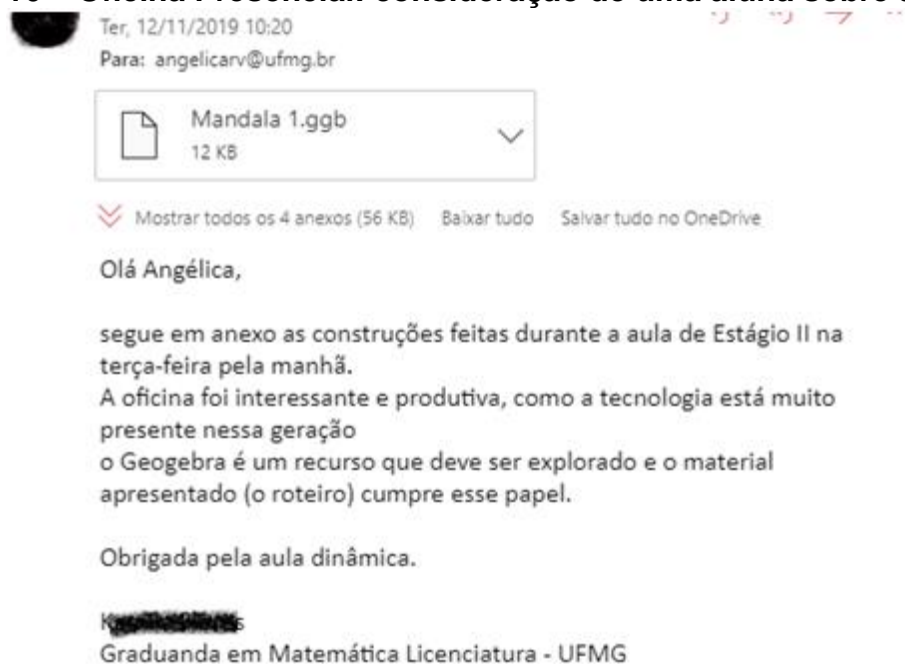
Segundo outra participante, algumas ferramentas agilizam a construção, mas, antes de os estudantes serem liberados a utilizarem todas elas, trabalharia as construções primeiro e somente depois, já sabendo como construir, seria permitido usar os “atalhos” oferecidos pelo GeoGebra. A opinião de todos sobre o GeoGebra é que ele ajuda na comprovação das propriedades geométricas.

Os participantes relataram que, para a aplicação/realização da oficina, é necessária uma estrutura adequada, pois, em algumas escolas, não têm computadores disponíveis. Outro ponto levantado é a generalização que o GeoGebra oferece, possibilitando que padrões sejam percebidos durante a construção e propiciando a formulação dos conceitos estudados.

Por fim, indagamos se eles participariam, como professores, de oficinas com proposta metodológicas utilizando o *software*. Disseram que sim, desde que não fosse um curso de apresentação do GeoGebra, mas sim um curso que mostrasse as funcionalidades do *software* para o ensino da Matemática. No geral, acharam importante ter uma breve apresentação, por existirem alguns professores que não são familiarizados com o uso do GeoGebra, mas não focar no seu uso.

Finalizando nosso encontro, pedimos aos participantes que nos enviassem, via *e-mail*, alguma sugestão, crítica ou elogio relativos à oficina. Abaixo, na Figura 16, apresentamos a consideração de um dos participantes.

**Figura 16 – Oficina Presencial: consideração de uma aluna sobre a oficina**



Fonte: Oficinas Desafios Geométricos – Oficinas Presenciais.

### 3.3 Nossas considerações

Como descrito, após a realização das oficinas com os estudantes de Licenciatura em Matemática, foram discutidas algumas ações e sugestões que pudessem melhorar a dinâmica das atividades. Percebemos que essas deveriam ser adaptadas para abranger um público maior.

As atividades propostas apresentam um certo nível de dificuldade, que, segundo os relatos, não seriam de fácil execução. Por esse motivo, decidimos propor uma variação da oficina: para quem tem conhecimento ou não sobre o GeoGebra, para estudantes da licenciatura (iniciantes e formandos) e para professores já em exercício.

Entretanto, é perceptível que as interações ao longo das oficinas desencadearam a necessidade de discutir alguns conceitos geométricos, ou seja, são situações que provocaram o pensar geometricamente. Foi nesse ponto, quando planejávamos as oficinas para a coleta de dados, que precisamos interromper a nossa pesquisa devido a pandemia.

### **FRAGMENTO III: DESAFIOS EM TEMPOS DE COVID-19**

## **4 DESENHANDO A OFICINA *ON-LINE* E TRAÇANDO UM NOVO PLANO DE AÇÃO – DURANTE A PANDEMIA**

Meados de março de 2020: as atividades do ano letivo mal começaram nas escolas brasileiras e fomos surpreendidos pela pandemia da covid-19. Os impactos da pandemia não se manifestaram apenas como um problema epidemiológico, uma série de atividades cotidianas foram afetadas devido ao isolamento social implementado para o controle da covid-19.

Em decorrência desse isolamento, professores e alunos se viram diante de um dilema: como prosseguir com o ano letivo em meio à pandemia? Em especial, em meio a várias incertezas, surgiu uma pergunta: e, agora, como aplicar a oficina e dar andamento à pesquisa?

O primeiro momento foi de espera, tudo era novo, ninguém tinha certeza do que vinha pela frente, de quanto tempo ficaríamos em isolamento social. Com o passar do tempo, várias notícias iam surgindo e com elas um cenário se apresentou: aulas remotas e ensino à distância.

Nesse momento vimos que nossa pesquisa em campo, presencialmente, estava totalmente descartada. Percebemos, então, a necessidade de mudar nossas estratégias para prosseguir. De imediato, pensamos em oferecer nossas oficinas no formato virtual. Mesmo com dúvidas, (re)construímos nossas estratégias e oferecemos uma versão de nossa oficina em um Ambiente Virtual de Aprendizagem (AVA), dando continuidade à nossa pesquisa.

A partir das observações da dinâmica das construções, reações e *insights* que obtivemos com a oficina presencial, foi preciso ajustar algumas estratégias de intervenção e adequar nossa oficina para a modalidade *on-line*.

### **4.1 Elaboração da “Oficina Desafios Geométricos – Mandalas” na modalidade à distância**

As oficinas, inicialmente presenciais, foram pensadas e desenvolvidas para terem uma carga horária de 12 horas, divididas em 5 encontros semanais presenciais, como já explanamos. Realizamos em 2019 duas aplicações com os alunos de Licenciatura em Matemática da UFMG. Devido à pandemia, reformulamos nossa oficina para a modalidade à distância, com carga horária de 8 horas, no ambiente de

aprendizagem Moodle, na plataforma EnsiOnline.<sup>12</sup> A Oficina Desafios Geométricos foi registrada, junto ao SIEX/UFMG,<sup>13</sup> como Curso de Extensão,<sup>14</sup> na categoria Curso de Atualização, sob o nº 102721.

Compartilhamos da ideia de Ponte, Brocardo e Oliveira (2003), quando definimos a dinâmica de nossa oficina. Nela, não nos será permitido interferir de forma a induzir os participantes a chegarem à finalização de uma construção. Cabe a nós o estímulo para que os sujeitos cheguem ao resultado, conduzindo-o a pensar e a questionar. Ainda segundo esses autores, “numa aula com investigações, o professor deve, sem dúvida, privilegiar uma postura interrogativa [...]”. Ao colocar uma questão, a intenção do professor pode ser, simplesmente, “a de clarificar ideias, quer para a sua própria compreensão, quer para de toda a turma” (PONTE; BROCARD; OLIVEIRA, 2003, p. 52).

## RELATO

A Oficina Desafios Geométricos – Mandalas tem como ponto de partida o desafio da reprodução e/ou criação de Mandalas, por meio das Construções Geométricas, ou Desenho Geométrico. Para isso, foram escolhidas Mandalas Geométricas que pudessem instigar a investigação e colocar os alunos diante de desafios geométricos cujas estratégias de investigação certamente ocorreriam. A oficina foi planejada para trabalhar conteúdo da grade curricular de Geometria de forma contextualizada, utilizando ferramentas como régua e compasso e o *software* GeoGebra. O critério na seleção das Mandalas foi o conjunto de propriedades geométricas envolvidas em sua construção.

---

<sup>12</sup> Plataforma EaD LMS – EnsiOnline. Disponível em: <https://plataformaead.ensineonline.com.br/>

<sup>13</sup> SIEX/UFMG é o sistema de dados e informações da Pró-Reitoria de Extensão da UFMG (PROEX). Ele é um sistema *on-line* que permite o registro e a visualização das ações e produções de extensão da universidade.

<sup>14</sup> Cursos abertos para a sociedade com o objetivo de aprimoramento. As atividades são realizadas pelas unidades acadêmicas da universidade, em todas as áreas do conhecimento, e emitem certificado de participação.

#### **4.1.1 Público-alvo: adesão e inscrição na oficina on-line**

Puderam participar professores de Matemática de todas as redes e níveis de ensino, graduandos em Licenciatura em Matemática ou interessados em estudar Construções Geométricas.

Para participar da Oficina Desafios Geométricos, o interessado preencheu o Formulário de Inscrição via Google Forms (Anexo A), aceitando ou não o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido –TCLE (Anexo B), que fez parte do formulário. Ao final do prazo de registro, os participantes receberam um e-mail confirmando sua inscrição com as instruções de acesso à plataforma do curso. As matrículas ficaram disponíveis no seguinte endereço eletrônico: <https://forms.gle/Zn1tPYrJrv4mVjfQ6>. Ao final da oficina, foi emitido a todos os participantes ativos o certificado de participação (Anexo C).

#### **4.1.2 Metodologia das oficinas**

Um grupo de professores foi convidado a se organizar, de forma coletiva/colaborativa, com o objetivo de se obter engajamento mútuo entre os envolvidos, com troca de experiências e conhecimentos.

Para a realização das oficinas, foram disponibilizados na plataforma do curso um material de apoio e um pequeno manual sobre o uso do GeoGebra.

Inicialmente, foi aberto um fórum de apresentação dos participantes, seguido de fóruns específicos para as construções das Mandalas Geométricas, e, por fim, se fez a socialização entre os participantes.

#### **4.1.3 Estrutura curricular e recursos didáticos**

Para a realização dessas oficinas, utilizamos computadores com o *software* GeoGebra instalado, régua, compasso, lápis, papel.

Ao longo das oficinas, exploramos: construção de circunferências tangentes; ponto médio e mediana; mediatriz e bissetriz; retas perpendiculares; construção de triângulo equilátero; construção de polígonos regulares (quadriláteros, pentágonos, hexágonos, heptágonos e octógonos); divisão de uma circunferência em  $n$  partes iguais.

Os encontros foram mediados pela Professora Angélica Rodrigues Ventura, aluna do PROMESTRE, na linha de Educação Matemática, e por sua orientadora, Professora Teresinha Fumi Kawasaki.

## **4.2 A organização da oficina *on-line***

Como já mencionamos, o AVA escolhido para a realização da oficina foi o Moodle, disponibilizado pela plataforma EnsiOnline, na sua versão gratuita. Apesar da versão utilizada ser a gratuita, tivemos várias ferramentas a nosso dispor. Nossa oficina foi dividida, basicamente, em dois momentos: os assíncronos e os síncronos.

Em nossos momentos assíncronos, utilizamos ferramentas em que a interação entre nós e os participantes fosse conforme o tempo de cada um, sem a necessidade de estarmos *on-line* na mesma hora. Por exemplo: os fóruns de discussão, troca de mensagens na própria plataforma, *e-mails* e recursos de vídeo. Já em nossos momentos síncronos, encontros virtuais, em que há a necessidade de todos estarem no mesmo ambiente em simultâneo, usamos como recurso a webconferência.

Como veremos a seguir, nossa oficina foi dividida em 6 tópicos para melhor organização da plataforma.

### **4.2.1 Tópico 1 – Oficina Desafios Geométricos – Mandalas**

No primeiro tópico, trouxemos as seguintes informações sobre o curso: apresentação da oficina, objetivo, conteúdos explorados, avaliação e certificação. Houve também dois fóruns: um para avisos sobre o curso e outro para tirar dúvidas, se necessário.

## Figura 17 – Oficina *on-line*: Tópico 1

### Oficina Desafios Geométricos II



Painel > Meus cursos > Oficina Desafios Geométricos – Mandalas (II)

#### OFICINA DESAFIOS GEOMÉTRICOS – MANDALAS

Seu progresso

A Oficina Desafios Geométricos tem como ponto de partida o desafio da reprodução e/ou criação de Mandalas. Por se tratar de uma oficina de Construções Geométricas, pretendemos explorar as possibilidades dessas construções na construção das Mandalas. Como ferramentas, os participantes serão introduzidos à utilização da régua e compasso e do *software* GeoGebra. Para mais informações acesso o campo [Apresentando nossa Oficina](#).

[Apresentando nossa Oficina](#)

[Avisos](#)

[Está com alguma dúvida?](#)

Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

#### 4.2.2 Tópico 2 – Dando a largada

O segundo tópico deu início à oficina com o fórum de apresentação “Vamos nos conhecer”. Esse espaço foi usado para os participantes se conhecerem, trocarem experiências e expectativas.

## Figura 18 – Oficina *on-line*: Tópico 2

### DANDO A LARGADA

[Vamos nos conhecer?](#)

#### Sejam bem-vindos ao nosso Ambiente Virtual de Aprendizagem!

Olá! Meu nome é Angelica Rodrigues Ventura e minha orientadora é a Teresinha Fumi Kawasaki. Vou falar um pouco de mim e depois a Teresinha se apresenta.

Bom, vamos lá... Eu sou Mineira, de Belo Horizonte, graduada em Licenciatura em Matemática e Especialista em Ensino de Matemática e em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática, atualmente faço Mestrado em Educação pela UFMG.

Durante a graduação participei de alguns projetos relacionados ao ensino aprendizagem da Matemática que me fizeram pensar muito em como metodologias de ensino, ditas não tradicionais, podem ser utilizadas como alternativas para o ensino da Matemática. Como professora sempre busco oferecer um aprendizado mais efetivo aos alunos, sejam elas tecnológicas, interdisciplinares ou com uso de algum material manipulável.

Esse mini curso faz parte de um projeto de longa data... Sempre gostei de Geometria (em particular, Construções Geométricas) e também do GeoGebra e sua potencialidade de se investigar diferentes variações de uma Construção Geométrica. Da união da Geometria e do GeoGebra surgiu esse mini curso, que faz parte da minha pesquisa do Mestrado.

Agora, quem será a/o próxima/o a se apresentar??

[Continue aqui](#)

Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.



### 4.2.3 Tópico 3 – Desafio geométrico

Neste tópico, apresentamos cada Construção Geométrica lançada como desafio em um fórum de discussão. A dinâmica foi a mesma para todos os desafios: iniciamos o fórum apresentando a Mandala e pedimos aos participantes que discutissem como construir, da maneira que achassem mais conveniente, a princípio, usando Construções Geométricas apenas.

**Figura 19 – Oficina *on-line*: Tópico 3**

## DESAFIO GEOMÉTRICO

Olá pessoal... Vamos começar?

Nosso primeiro desafio é a construção de uma Mandala.

No dia do nosso Encontro virtual vamos nos reunir todos juntos... mãos a obra!

 [Observe a Mandala](#)



- 1) Que figuras geométricas planas podem ser utilizadas para compor essa Mandala?
- 2) De quantas maneiras podemos desenhar essa Mandala, utilizando construções Geométricas com régua e compasso?

Vamos compartilhar nossas ideias?

[Discuta aqui](#)

Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

### 4.2.4 Tópico 4 – Encontro virtual

O quarto tópico foi utilizado para marcação e divulgação dos nossos encontros virtuais. Os encontros foram feitos via Google Meet e todos foram gravados com a autorização dos participantes.

## Figura 20 – Oficina *on-line*: Tópico 4

### ENCONTRO VIRTUAL: VAMOS CONVERSAR AO VIVO?

#### Marcação do nosso encontro virtual

Olá pessoal!

Nosso encontro será dia **X de novembro**, **xxxx** às **19 horas**.

Vamos marcar um melhor horário para todos?

Coloquem **AQUI** suas disponibilidades de horário para o nosso encontro.

#### Acesso ao nosso encontro

Um lembrete a todos:

- **Nosso encontro será gravado.**

Para aqueles que NÃO aceitaram o Termo de Consentimento para a Pesquisa, não se preocupem, seus dados e contribuições serão mantidos em sigilo total.

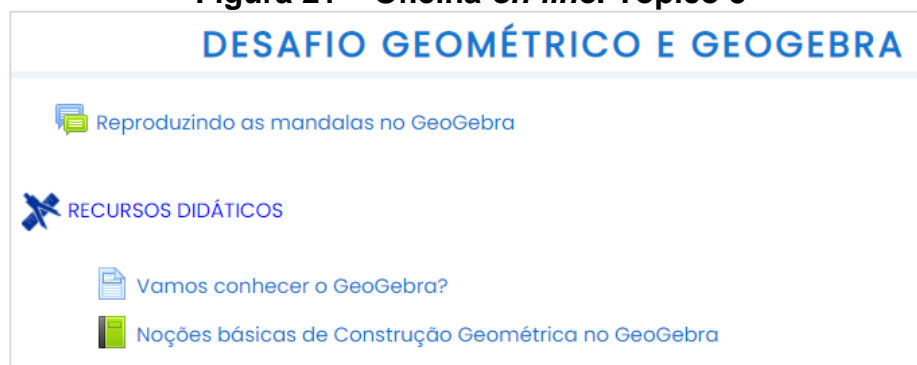
Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

#### 4.2.5 Tópico 5 – Desafio geométrico e GeoGebra

No quinto tópico, os participantes foram instruídos a construírem as Mandalas utilizando o GeoGebra e que compartilhassem suas construções para que todos pudessem visualizar e discutir sobre o conteúdo trabalhado. Nos fóruns também foi disponibilizado um aplicativo do GeoGebra, para que eles pudessem usar o *software* no Moodle.

Neste tópico ainda liberados alguns recursos didáticos para auxiliar os participantes no uso do GeoGebra e em algumas Construções Geométricas básicas. No ícone “Vamos conhecer o GeoGebra?” disponibilizamos um pequeno manual sobre o uso do *software* e também *links* para sua utilização *on-line* ou para seu *download*. No ícone “Noções básicas de Construção Geométrica no GeoGebra”, trouxemos, em formato de livro, algumas construções feitas no GeoGebra, mostrando seu passo a passo escrito e em forma de vídeo, para melhor entendimento do participante.

**Figura 21 – Oficina *on-line*: Tópico 5**

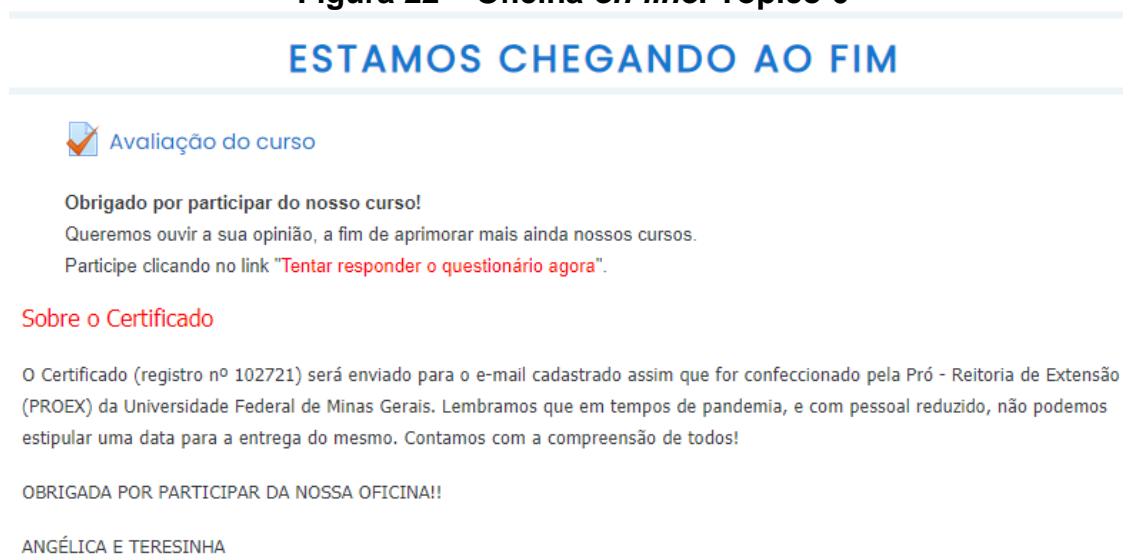


Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

#### **4.2.6 Tópico 6 – Estamos chegando ao fim**

Para finalizar o curso, pedimos aos participantes que avaliassem o curso por meio de um questionário. Aqueles que cumpriram as exigências receberam o certificado de conclusão do curso emitido pela UFMG.

**Figura 22 – Oficina *on-line*: Tópico 6**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

## 5 EXPERIMENTAÇÕES VIRTUAIS

Como foi dito anteriormente, no ano de 2020, marcado pela pandemia, mudamos nossos planos iniciais para a aplicação da oficina. Iniciamos, assim, o ano recriando estratégias e transpondo a oficina para a plataforma EnsigneOnline. Criamos também alguns canais *on-line* para divulgação e inscrição.

### 5.1 Oficina Desafios Geométricos na plataforma *on-line*

O curso foi divulgado em um grupo no Facebook e os interessados foram redirecionados a uma página *on-line* com as informações sobre a oficina e a pesquisa em andamento (Apêndice B) - <https://is.gd/cursodesafiosgeometricos>. Aqueles que mostraram interesse em participar preencheram o formulário de inscrição aceitando ou não o TCLE. Foi informado no formulário que o não aceite do Termo de Consentimento não impediria a realização da oficina.

**Figura 23 – Folder de divulgação da Oficina Desafios Geométricos**



UFMG  
FaE  
Faculdade de Educação  
PROMESTRE  
MESTRADO PROFISSIONAL  
EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA

**OFICINA DESAFIOS GEOMÉTRICOS**  
Construções geométricas com régua e compasso e GeoGebra

A Oficina será realizada via on-line, utilizando a plataforma Moodle.  
Estão previstos dois encontros virtuais durante a Oficina.

Ministrantes: **Angélica Rodrigues Ventura** e **Teresinha Fumi Kawasaki**

Período: **24 de Agosto a 09 de Setembro**

Categoria: **MiniCurso de Extensão com Certificado**, registro nº 102721  
Carga horária: **8 horas**  
Participação gratuita | Vagas limitadas

**INSCRIÇÕES 10 A 20 DE AGOSTO/20**

Para mais informações e inscrição, acesse  
<https://is.gd/cursodesafiosgeometricos>

Fonte: Elaborada pela autora.

As inscrições para a primeira turma, como mostra a figura acima, foi realizada no período de 10 a 20 de agosto e teve seu início adiado para o dia 23 de outubro de 2020. O adiamento para o início da oficina foi informado e explicado a todos que

fizeram inscrição, e aqueles que ainda demonstraram interesse em participar na nova data foram avisados e receberam acesso à plataforma.

Houve matrícula de 10 participantes para essa entrada da oficina, todos aceitaram o TCLE; assim, seus dados (reais) puderam ser usados na pesquisa. O início ocorreu no dia 23 de outubro de 2020.

**Quadro 1 – Dados dos participantes**

<b>Nome do participante</b>	<b>Identificação no texto</b>	<b>Formação acadêmica</b>	<b>Leciona</b>
Ediley da Silva Pena	Ed	Graduando em Licenciatura em Matemática	Ensino Fundamental I
Marilda Fernandes	Md	Licenciado em Pedagogia	Ensino Fundamental I
João L. Barbosa Costa	Jl	Graduando em Licenciatura em Matemática	Curso Técnico em Segurança do trabalho
Munira Assad Simão	Mn	Licenciado em Matemática	Ensino Fundamental II
Waldirene de Alencar Melo	Wa	Licenciado em Matemática	Aulas particulares
Kelly Brandão Maciel	Ke	Graduando em Licenciatura em Matemática	Não
Marcus Vinicius Ferraz Vieira	Mv	Graduando em Licenciatura em Matemática	Não
Samuel Carlos Teles	Sc	Graduando em Licenciatura em Matemática	Não
Mariana de Castro Santos	Ma	Graduando em Licenciatura em Matemática	Não
Vinicius Borovoy de Sant'ana	Vb	Licenciado em Matemática	Ensino Médio

Fonte: Elaborado pela autora.

O acesso à plataforma foi liberado aos participantes no dia 23 de outubro de 2020 com a abertura do fórum de apresentação, havendo participação de 6 professores.

## Figura 24 – Oficina *on-line*: apresentação da participante Md



Re: Vamos nos conhecer?  
por [Marilda Fernandes](#) – sexta, 23 Out 2020, 14:43

Boa tarde! Sou Marilda Fernandes, moro em Contagem, sou formada em pedagogia e leciono a estudantes do 5º ano, fundamental I, trabalho na rede pública de Contagem.

Sou admiradora da disciplina matemática, estou sempre em busca de novas experiências na tentativa de reproduzir em sala de aula os conhecimentos adquiridos e das novas experiências.

Média das avaliações:  Avaliar...

[Link direto](#) | [Mostrar principal](#) | [Editar](#) | [Excluir](#) | [Responder](#)

Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Neste primeiro momento de socialização, todos os professores que responderam ao fórum, além de se apresentarem, também expressaram vontade de adquirirem mais conhecimentos sobre Construções Geométricas no GeoGebra.

### 5.1.1 Momento virtual 1: Desafio Geométrico I

O primeiro Desafio Geométrico foi liberado no dia 26 de outubro de 2020, também disponibilizado em um fórum de discussão. A discussão se iniciou com a apresentação da Mandala que iríamos reproduzir e algumas questões para impulsionar o debate entre os participantes, como mostramos a seguir.

## Figura 25 – Oficina *on-line*: Desafio Geométrico I

Observe a Mandala  
sábado, 17 Out 2020, 10:14



- 1) Que figuras geométricas planas podem ser utilizadas para compor essa Mandala?
- 2) De quantas maneiras podemos desenhar essa Mandala, utilizando construções Geométricas com régua e compasso?

Vamos compartilhar nossas ideias?

[Discuta aqui](#)

Média das avaliações:

[Link direto](#) | [Editar](#) | [Responder](#)



Re: Observe a Mandala  
por [Angelica Rodrigues Ventura](#) – segunda, 26 Out 2020, 20:58

Então... Vamos começar?

Para dar início à nossa Oficina escolhi uma Mandala com poucos elementos geométricos mas que nos permitem algumas construções e várias discussões!

Como vocês construiriam essa Mandala? Começariam por onde?

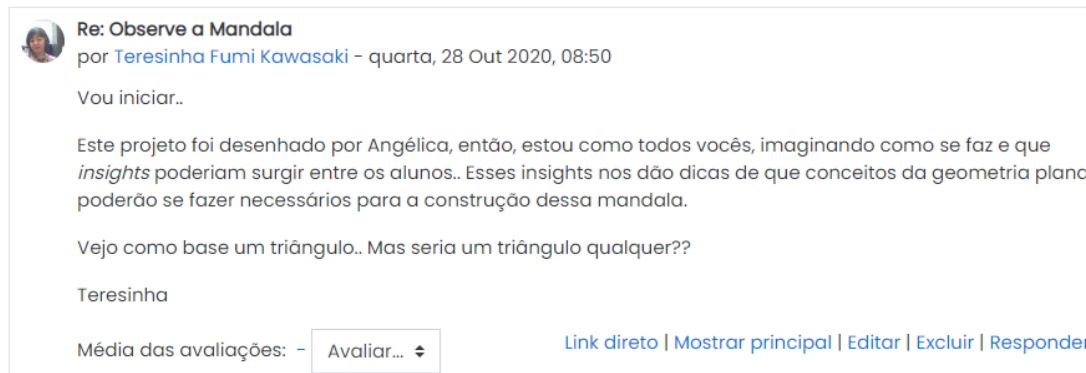
Média das avaliações:

[Link direto](#) | [Mostrar principal](#) | [Editar](#) | [Excluir](#) | [Responder](#)

Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas;

Intervimos em todos os momentos em que sentimos necessidade de provocar maior interação.

**Figura 26 – Oficina *on-line*: intervenção no fórum do Desafio Geométrico I**



Re: Observe a Mandala  
por [Teresinha Fumi Kawasaki](#) - quarta, 28 Out 2020, 08:50

Vou iniciar..

Este projeto foi desenhado por Angélica, então, estou como todos vocês, imaginando como se faz e que *insights* poderiam surgir entre os alunos.. Esses insights nos dão dicas de que conceitos da geometria plana poderão se fazer necessários para a construção dessa mandala.

Vejo como base um triângulo.. Mas seria um triângulo qualquer??

Teresinha

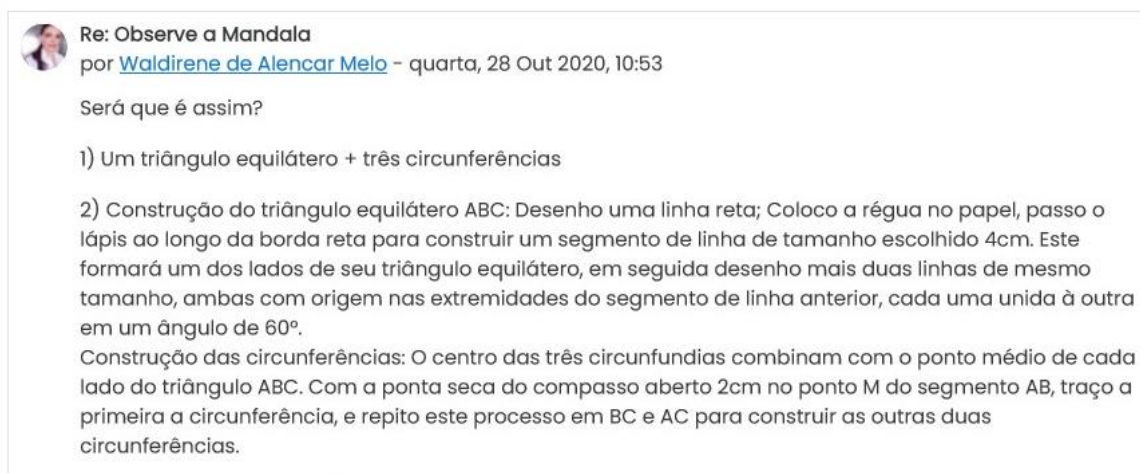
Média das avaliações: - Avaliar... ↕ [Link direto](#) | [Mostrar principal](#) | [Editar](#) | [Excluir](#) | [Responder](#)

Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

A partir desse momento, os participantes começaram a compartilhar suas ideias de construção das Mandalas. Nós, como moderadoras do fórum, optamos, inicialmente, por não apontar erros nas construções enviadas – neste momento nossa intenção era provocar uma discussão.

Podemos ver abaixo um exemplo de participação: não há rigor matemático na construção, mas a contribuição revisitou o triângulo equilátero, o conceito de ponto médio de um lado do triângulo e também menção à construção de uma circunferência pela medida do raio.

**Figura 27 – Oficina *on-line*: contribuição da participante Wa ao Fórum I**



Re: Observe a Mandala  
por [Waldirene de Alencar Melo](#) - quarta, 28 Out 2020, 10:53

Será que é assim?

- 1) Um triângulo equilátero + três circunferências
- 2) Construção do triângulo equilátero ABC: Desenho uma linha reta; Coloco a régua no papel, passo o lápis ao longo da borda reta para construir um segmento de linha de tamanho escolhido 4cm. Este formará um dos lados de seu triângulo equilátero, em seguida desenho mais duas linhas de mesmo tamanho, ambas com origem nas extremidades do segmento de linha anterior, cada uma unida à outra em um ângulo de 60°.

Construção das circunferências: O centro das três circunferências combinam com o ponto médio de cada lado do triângulo ABC. Com a ponta seca do compasso aberto 2cm no ponto M do segmento AB, traço a primeira a circunferência, e repito este processo em BC e AC para construir as outras duas circunferências.

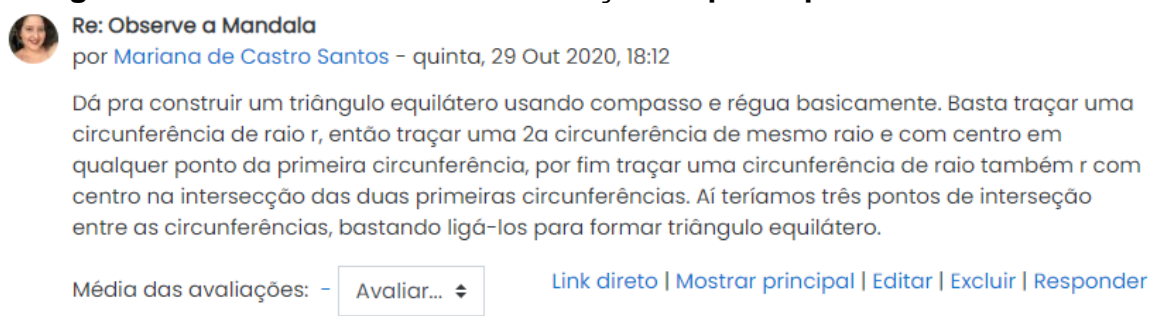
Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Nossa resposta a essa contribuição foi um questionamento: “Existem outras possibilidades para esta construção ou a Matemática não nos permite encontrar outras respostas? Existem condições de existência para a proposta da Waldirene?”

Em resposta, enviaram-nos outra proposta de construção, com outro apontamento, as circunferências tangentes e seus centros serem os vértices de um triângulo equilátero. Houve então outro questionamento sobre a construção de triângulos equiláteros, que até o momento havia sido construído usando segmentos ou retas a partir da medida do ângulo de  $60^\circ$ . Foi perguntado se existiria outra maneira de construir um triângulo equilátero sem usar diretamente a relação dos ângulos internos.

Em resposta, nos foi apresentada a construção de um triângulo equilátero utilizando régua e compasso.

### Figura 28 – Oficina *on-line*: contribuição da participante Ma ao Fórum I



Re: Observe a Mandala  
por Mariana de Castro Santos - quinta, 29 Out 2020, 18:12

Dá pra construir um triângulo equilátero usando compasso e régua basicamente. Basta traçar uma circunferência de raio  $r$ , então traçar uma 2ª circunferência de mesmo raio e com centro em qualquer ponto da primeira circunferência, por fim traçar uma circunferência de raio também  $r$  com centro na intersecção das duas primeiras circunferências. Aí teríamos três pontos de intersecção entre as circunferências, bastando ligá-los para formar triângulo equilátero.

Média das avaliações: - Avaliar... ↕ [Link direto](#) | [Mostrar principal](#) | [Editar](#) | [Excluir](#) | [Responder](#)

Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Tivemos mais uma participação no fórum, mas sua construção não apresentou novos elementos. Todos os pontos levantados durante o Fórum Desafio Geométrico I foram discutidos em nosso encontro virtual, como veremos a seguir.

#### 5.1.2 *Momento virtual 2: Encontro Virtual I*

Nosso primeiro encontro virtual aconteceu no dia 29 de outubro de 2020, utilizando a plataforma Google Meet. A gravação do encontro foi informada aos participantes no início e também na plataforma do curso.

O encontro teve presença de duas participantes, Marilda (Md) e Mariana (Ma), e se iniciou com uma breve socialização, seguimos com a discussão sobre a construção da Mandala apresentada no Fórum Desafio Geométrico I. Os trechos transcritos da gravação serão apresentados em itálico.



### ***Mandala construída***

**Figura 29 – Primeiro encontro virtual: Mandala construída**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Iniciamos a discussão chamando atenção ao fato de a construção apresentar um triângulo e três circunferências específicas. Em seguida, indagamos quais foram as primeiras abordagens sobre a construção.

A participante Md nos disse que iniciaria pelo triângulo, que, visualmente, parecia ser um triângulo isósceles. Afirmou também que as circunferências tinham o mesmo tamanho de raio e estariam sobrepostas. Indagamos nesse momento se, de fato, estavam sobrepostas.

– *T: Sobrepostas?*

– *Md: É, tá sobreposta, elas entre si não, mas entre o, com relação ao triângulo.*

– *A: E essas circunferências, elas são o quê entre si?*

– *Md: Ligadas. Elas tão... Como é que eles falam? Tangenciando né, que fala uma com a outra?*

Após a participante Md identificar que as circunferências eram tangentes entre si, Ma surgiu com o elemento ponto médio relativo ao lado do triângulo. Ma sugeriu que o centro das circunferências fosse o ponto médio relativo a cada um dos lados do triângulo. Esse novo elemento levantou a questão “do jeito certo” de se resolver o desafio. Nesse momento, houve intervenção para esclarecer que não buscávamos uma resposta certa, desde que chegássemos na meta estabelecida, o caminho percorrido poderia ser diferente.

Foi lembrado então que, no Fórum Desafio Geométrico I, a Wd sugeriu a construção de um triângulo equilátero partindo do seu ângulo de  $60^\circ$  (ver Figura 27). Indagamos se existiria outra forma de se construir um triângulo equilátero sem utilizar o ângulo interno de  $60^\circ$ . Tivemos as seguintes contribuições:

– *Ma: Bom tem um jeito que eu aprendi né, assim. Se usa compasso basicamente. E aí você vai fazendo basicamente por segmentos de mesmo tamanho né, então começa com uma circunferência de raio  $R$ . Aí você pega qualquer ponto da circunferência e faz mais uma circunferência de mesmo raio. Aí, vamos ter dois pontos de intersecção, né. Aí você escolhe um desses pontos e constrói mais uma circunferência. De mesmo raio.*

– *Md: Vai ter dois pontos, não?*

– *Ma: Sim, mas então você escolhe qualquer um deles, se você...*

Neste ponto da discussão intervimos com o compartilhamento de uma tela dinâmica, na qual fizemos o passo a passo direcionado pela participante Ma. Relembramos aqui que, nesse momento de interação, não cobramos rigor matemático das participantes, como podemos observar no diálogo a seguir:

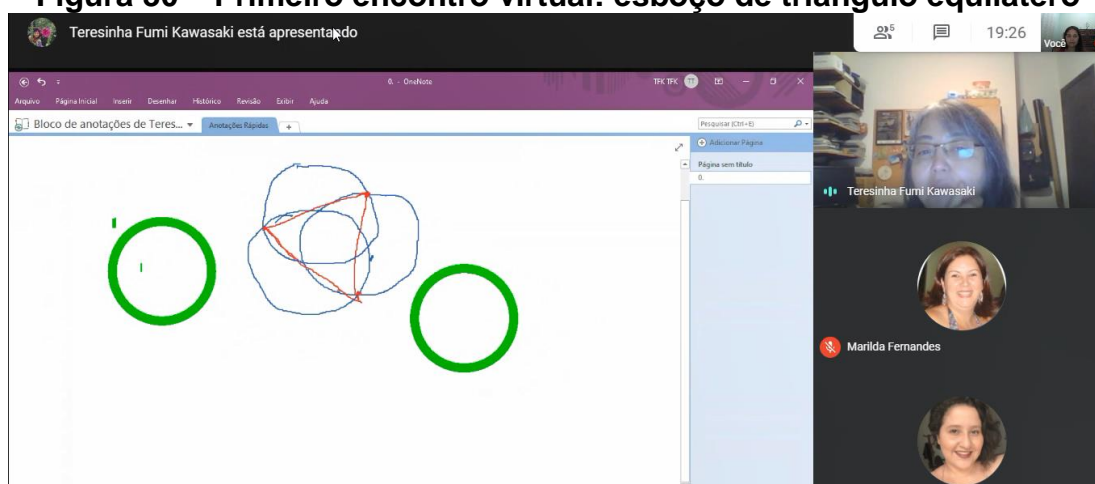
– *Ma: Então primeiro fazer uma circunferência qualquer, de um raio aí. E aí pegar um ponto dessa circunferência e usar como centro, e fazer uma outra circunferência de mesmo raio. [...] Aí depois teria que fazer uma outra circunferência de mesmo raio com o centro em uma dessas intersecções que a gente tem.*

– *Ma: Aí tem três intersecções né, entre essas três circunferências.*

– *T: Para definir uma, definir um triângulo basta três pontos, né?*

– *Ma: Isso. Aí você consegue... na verdade achar vários triângulos equiláteros aí, né? Pequeninhos.*

**Figura 30 – Primeiro encontro virtual: esboço de triângulo equilátero**

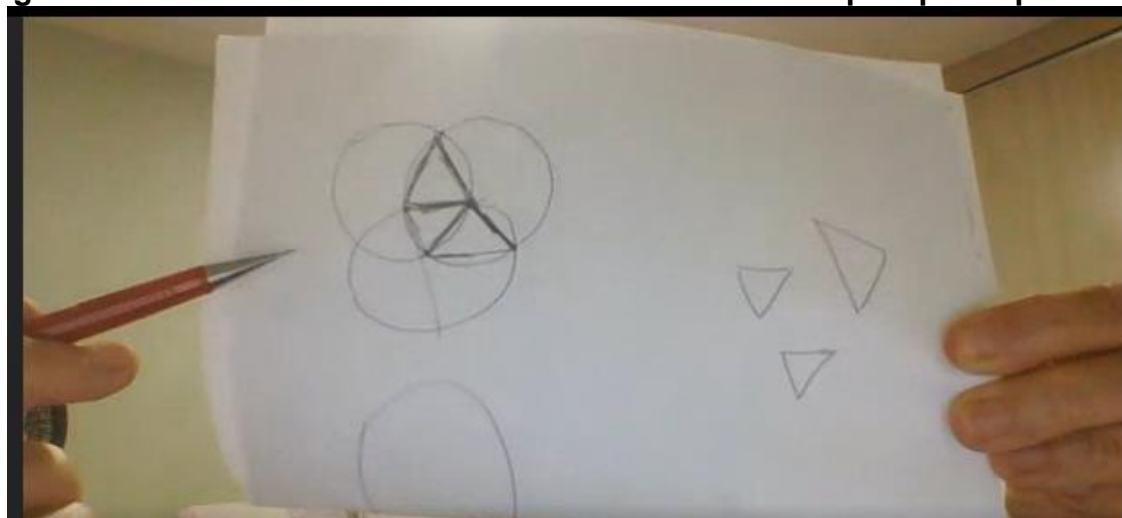


Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Após esse esboço, partimos para o uso do *software* GeoGebra. Seguindo a mesma dinâmica, fomos conduzidas pelas participantes na construção do triângulo equilátero. Prosseguimos a partir do questionamento da participante Md:

– Md: *Só uma pergunta gente. Quando eu montei com as três circunferências eu vou ter vários pontos [...]. Por elas terem o mesmo raio, eu tenho um, dois, três triângulos de acordo com meu desenho. Eles também vão ter a mesma medida ou não? [...] Eu quero saber se esses três triângulos têm o mesmo tamanho, se eles são equiláteros, por elas terem o mesmo raio.*

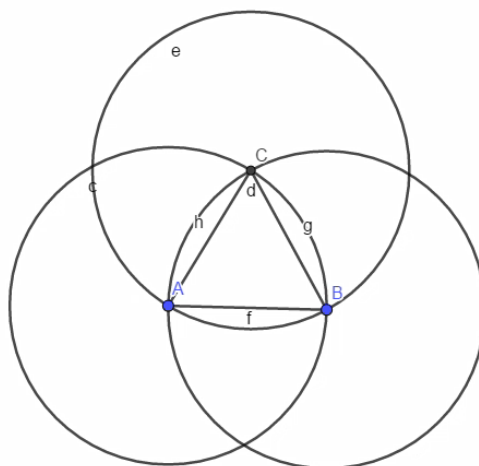
**Figura 31 – Primeiro encontro virtual: desenho efetuado pela participante Md**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Com o auxílio da participante Ma, fomos construindo juntas com o GeoGebra iniciando por uma circunferência de raio qualquer. Por sugestão, tomamos a mesma medida de raio e traçamos outra circunferência no ponto de interseção entre elas, e mantendo o raio traçamos a terceira circunferência. Da união dos pontos de interseção, determinamos o triângulo.

**Figura 32 – Primeiro encontro virtual: construção de um triângulo equilátero**

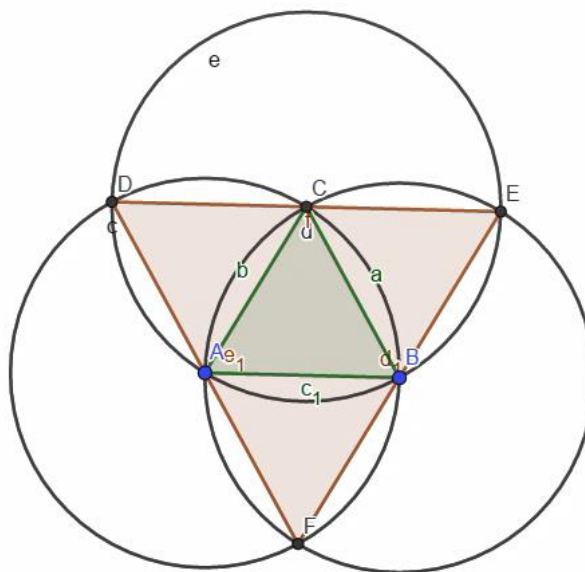


Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos  
– Mandalas.

Prosseguimos interagindo sobre as possibilidades de se traçar triângulos com os pontos de interseção entre as circunferências que podem ser visualizados na Figura 33.

- T: O que a Mariana propôs é outro triângulo né?
- Ma: Então, na verdade, você pode fazer um triângulo grande com quatro triângulos equiláteros dentro ou um grandão equilátero também.
- T: Então, ela falou desse triângulo com esses pontos aqui, ó, maior.
- Md: Os pontos fora da circunferência.
- T: Fora desse centrinho aqui.

**Figura 33 – Primeiro encontro virtual: construção de triângulos equiláteros**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Neste momento houve um questionamento da minha orientadora sobre os triângulos CBE, CAB, ABF, pelo desenho de Md, serem equiláteros e, se fossem, o porquê. Prosseguimos a partir desse questionamento:

- Md: *Por que as circunferências têm o mesmo raio ou não? Ela tem o mesmo raio, teoricamente esses triângulos têm que ter o mesmo tamanho.*
- A: *Foi transferido esse tamanho, né, de segmento na circunferência.*
- Md: *A sensação que eu tenho, a visão que eu tenho, é como se você tivesse pegado o triângulo grande, cortou uma ponta. Pegou de novo, mudou, colocou outra ponta, entendeu... ou não?*

Após a participante Md identificar que estávamos construindo de fato triângulos equiláteros, Ma sugeriu que estávamos na verdade dividindo uma circunferência em partes iguais. Essa era uma das informações que almejávamos durante a construção.

- Ma: *Eu acho que a gente consegue ver também, que a gente meio que tá dividindo uma circunferência... A gente poderia dividir a circunferência em seis partes, a gente só tem três aí, né, de cada uma. Mas, se a gente dividir uma semicircunferência em três partes iguais, a gente vai ter três triângulos equiláteros dentro dessa circunferência né?*

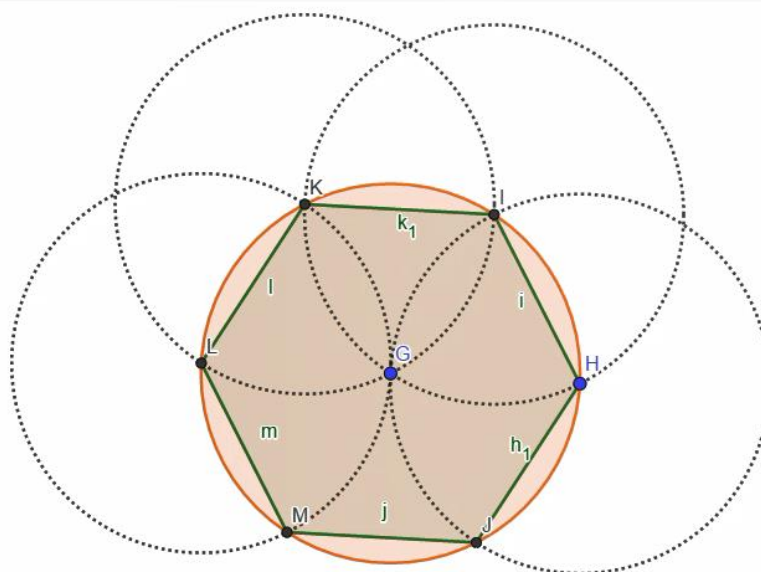
Questionadas se o motivo de termos a certeza de estarmos construindo triângulos equiláteros era pela medida do ângulo de  $60^\circ$  dos vértices, Ma disse não ter essa certeza se esse era o motivo ou se pela medida dos lados (raios) serem iguais. Garantimos que nesse caso poderíamos garantir que se tratavam de triângulos equiláteros por construção, ou seja, mantemos a mesma medida de raio e dividimos a circunferência em seis partes iguais. Nesse momento Ma fez o seguinte comentário (ver Figura 34):

– Ma: *Se pensar bem também, né, uma circunferência tem  $360^\circ$  e a gente divide em seis, tem  $60^\circ$  e vai ter seis triângulos equiláteros dentro dela, é um hexágono.*

– T: *Tá certo, isso mesmo.*

– A: *Pronto. Aqui eu tenho a circunferência dividida em seis pontos, em seis partes iguais. Se eu unir esses pontos [...] tem[os] o hexágono.*

**Figura 34 – Primeiro encontro virtual: construção de um hexágono**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Com a conclusão da construção do hexágono, partimos para a construção da Mandala Geométrica do Desafio I.

Começamos a discutir como construir a Mandala, indagamos se seria possível construir partindo do hexágono. A participante Ma disse que sim, pois as circunferências teriam o raio medindo a metade de cada lado do triângulo maior (diálogo refere-se à Figura 35).

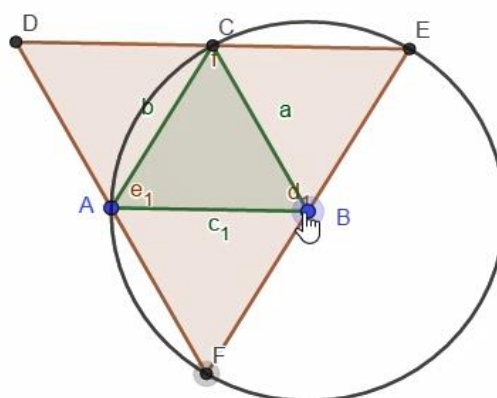
– Ma: Então, o que que eu ia fazer, eu ia fazer uma circunferência com o raio de F até B e centro em B.

– A: Você faria uma circunferência de raio FB?

– Ma: Isso. Raio FB.

Neste ponto da construção, continuei com a construção no GeoGebra e deixamos que as próprias participantes percebessem que não era o raio desejado para traçarmos a circunferência. Como podemos observar, imediatamente, Ma notou que deveríamos obter o ponto médio de um dos lados para então traçar a circunferência.

**Figura 35 – Primeiro encontro virtual: construção segundo participante Ma**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

– Ma: Ah, já não dá. Olha, gente, fixou gigante. Ah, não! Mentira, esse tem que ser o diâmetro. Então tem que ser metade, tem que ser o ponto médio disso, tem que ser o raio.

Houve nesse momento interferência da participante Md com a sugestão de usarmos o triângulo menor,  $\triangle ABC$ , como referência. Questionei, então, como definiríamos o raio, ou seja, como estabelecer o ponto médio de um dos lados desse triângulo sem usar as ferramentas disponíveis no GeoGebra.

A participante Ma nos disse que essa era uma de suas construções mais interessantes, por ter sido a primeira construção que aprendeu na disciplina de Desenho Geométrico, e seguiu nos guiando na construção:

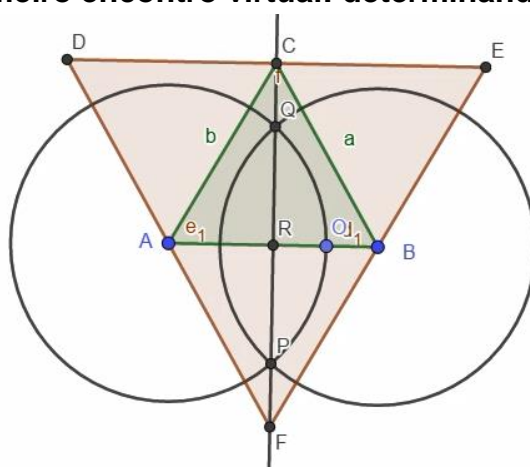
– Ma: [...] você pega uma circunferência no... na extremidade do segmento. Vamos em A, que tem que ser um pouquinho maior que a metade, tem que passar a metade do segmento.

– A: Você quer que trace em quais pontos? [Ma: Pode ser no AB]. A gente vai traçar uma circunferência que seja um pouquinho maior.

– Ma: E aí pega uma outra circunferência com o mesmo raio, e centro em B. Aí esse ponto de intersecção das duas circunferências você pode traçar uma reta.

– Md: Você vai achar o ponto médio, é isso? Que aula, hein? Ah, tô adorando.

– Ma: E aí esses pontinhos de intersecção entre essa reta e esse lado, vai ser o ponto médio.



**Figura 36 – Primeiro encontro virtual: determinando o ponto médio**

Fonte: Oficina on-line Desafios Geométricos – Mandalas.

Nesse ponto da construção, a participante Ma foi instigada a justificar sua construção. Ela o fez apresentado outro elemento, a reta mediatriz.

– Ma: Então, eu lembro mais ou menos. Mas, se você pensar, são... você tá pegando uma, uma circunferência ou seja do ponto AB, do ponto A e do ponto B, até qualquer ponto da circunferência vai ter a mesma distância. Aí quando essas distâncias forem iguais, né, de A até o... nossa, eu não sei explicar direito gente. Mas eu sei que alguma



*coisa assim, mas alguma coisa, né, mas eu não lembro mas eu sei que faz sentido demais.*

*– T: Deixa ver se eu lembro também. É assim, todos os pontos sobre essa reta, como é que se chama essa reta mesmo?*

*– A: Essa reta que a gente traçou agora? Mediatriz.*

*– Ma: É, mediatriz. Ha é, mediatriz.*

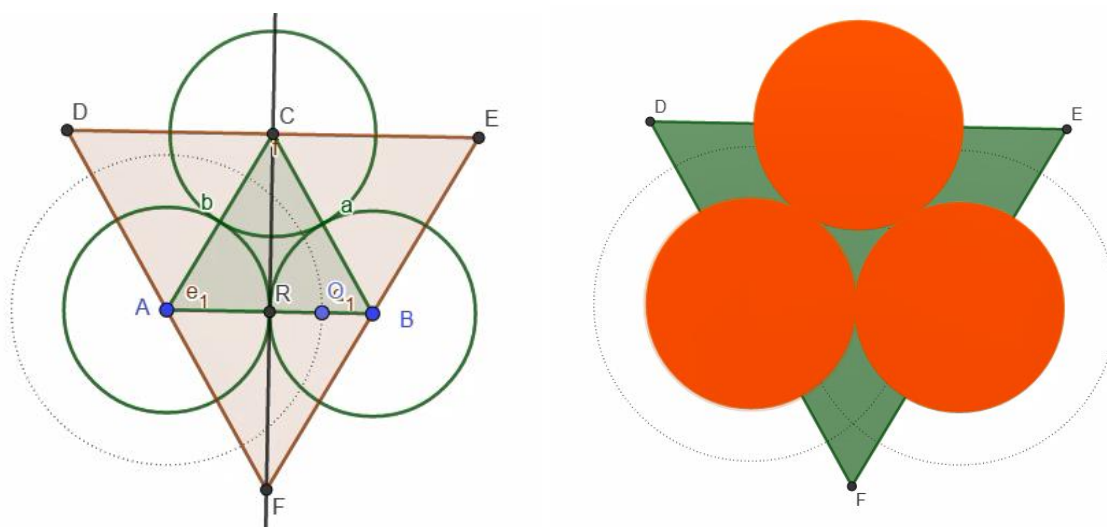
*– T: Mediatriz, é o lugar geométrico dos pontos [...] então é o lugar que todos os pontos da mediatriz elas são equidistantes dos pontos A e B, nesse caso. Equidistantes quer dizer, é a mesma distância.*

Neste momento do nosso diálogo é possível notar como os conceitos foram emergindo durante o processo. Prosseguindo, escolhemos um ponto S sobre a mediatriz e mostramos no GeoGebra que a distância entre o ponto S e os pontos A e B é a mesma.

*– T: Essa mediatriz é o lugar geométrico dos pontos que são equidistantes dos pontos desse segmento AB. Então  $AS = AB$  em qualquer lugar que o S esteja, entendeu? E ele é feito por construção. A gente constrói uma reta especial que tem todos esses pontos aí.*

Finalizando a Mandala, a participante Ma sugeriu que fizéssemos uma circunferência de raio AR e centro em A. Construímos mais duas circunferências de mesmo raio e centro em B e C.

**Figura 37 – Primeiro encontro virtual: Mandala do Desafio Geométrico I**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Aqui, foi enfatizada a quantidade de conceitos que trabalhamos na construção dessa Mandala, e a participante Md enumerou alguns deles:

- T: *Para gente que é professor de Matemática, vocês viram quantos conceitos que surgiram aqui?*
- Md: *Mediatriz, esse aí eu lembrei. Os triângulos isósceles, oh isósceles. Equiláteros...*
- T: *Mas é isóscele. Você tá certa. Todo triângulo equilátero é isóscele, por que tem dois lados iguais.*
- Md: *Conceito de raio, diâmetro, pontos, retas, tangência. Que mais... acho que só.*

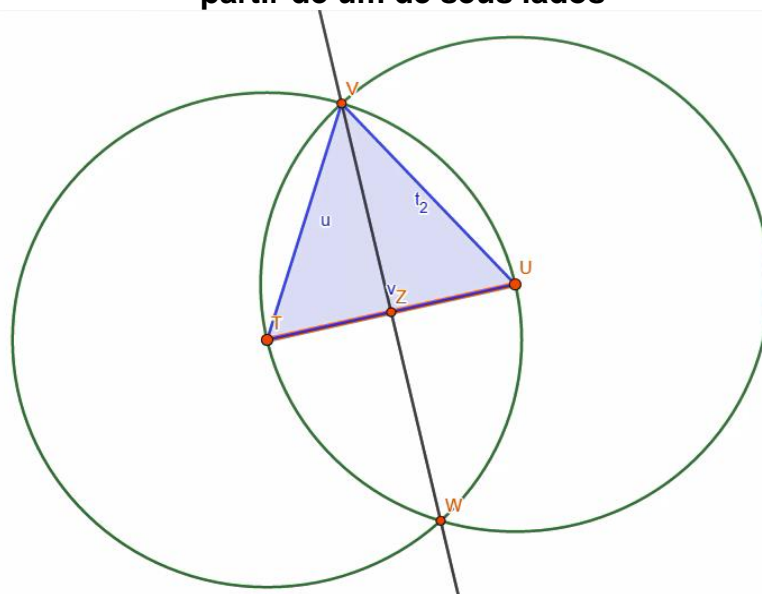
Aqui, reforçamos nossa intenção com as oficinas, que era partir de uma Mandala e ir progredindo até as Construções Geométricas básicas saindo um pouco do usual “ponto é isso, isso e isso”.

Nesse momento da discussão foi proposto que construíssemos um triângulo com um dos lados predeterminado. Para isso, definimos um segmento  $\overline{TU}$  como sendo a medida do lado do triângulo equilátero a ser construído.

A participante Md questionou se poderia utilizar a ferramenta circunferência e prontamente dissemos que sim, pois, no GeoGebra, ela atua como nosso compasso. Ela propôs o seguinte processo:

- Md: *Se a gente fizer o processo ao contrário, eu não sei, tá, gente. Fizer o processo ao contrário do que a Mariana fez, aí você já me deu um lado, se eu pegar esse lado teu, como raio, e traçar essas circunferências a partir de um ponto T, eu consigo fazer?*
- A: *Tenho a circunferência. Onde vai ser o centro da circunferência?*
- Md: *No T. Se você pegar a outra circunferência, do mesmo tamanho e centrar em U. Aí agora você tem não? Três pontos?*
- A: *Aí a gente marca aqui, né, a interseção.*
- Md: *Isso, porque ele é a mediatriz, certo? Agora eu já até sei. VW é a mediatriz, então partindo do pressuposto que ela me disse que a mesma medida quando a gente desenhou S, eu tenho VU e VT. E tem outro do lado de baixo.*
- T: *Prontinho, gente. Mediatriz e triângulo equilátero.*

**Figura 38 – Primeiro encontro virtual: construção de um triângulo equilátero a partir de um de seus lados**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Concluindo a construção do triângulo equilátero partindo de um de seus lados, incentivamos as participantes a construírem a Mandala proposta no desafio.

- T: *E a partir desse triângulo, como é que a gente faria Mandala? [Md: Aquela?] É.*
- Md: *Tem que pensar.*
- [...]

– Md: A gente pode seguir a mesma linha de raciocínio que ela fez a outra na Mandala anterior. Fazendo o ponto médio e desenhando duas, duas circunferências de T até próximo ali de U, uma menorzinha e traçar de novo o ponto médio. Desse ponto médio criar para achar o ponto médio entre Z e U e criar essas Mandalas menores. Mas aí ela vai ficar o contrário, né [T: Não tem problema].

– Ma: Eu acho que dá para fazer basicamente isso, né, achar o ponto médio de T e Z.

– Md: E depois achar o ponto médio de novo. Que aí vai fazer outra menorzinha. Aí você vai conseguir chegar naquele jeito, com triângulo maior. É como se eu tivesse dividindo de T a Z em 4 pedaços e pegar um segmento desse menor.

[...]

– T: Usa agora o ponto médio em vez de usar mediatriz.

Nesse passo da construção, optamos por usar a ferramenta “mediatriz”, por já termos construído a reta anteriormente.

– A: Você quer o ponto médio de TZ?

– Md: TZ. E agora eu quero o ponto médio de novo de TA. Isso, agora eu vou pegar o segmento TB e fazer de raio para minha circunferência.

– A: E a gente vai fazer a circunferência com centro aonde?

– Md: Em A. Ficou muito pequenininho.

– Ma: Eu acho, que só preciso achar o ponto médio uma vez, né. Seria acho que, o raio seria do TA mesmo.

– A: Então vamos, o raio TA.

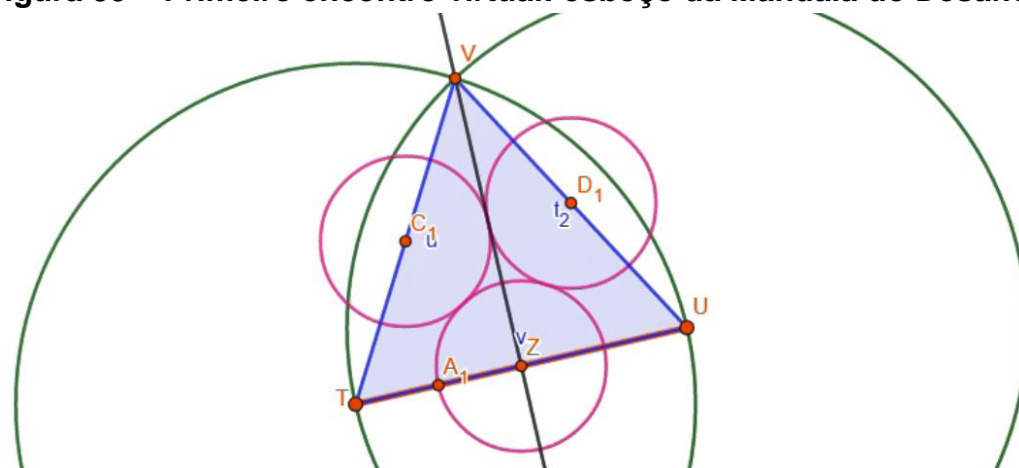
– Md: Centro em Z. Não é assim que tá lá? É isso, centro em Z. E repete isso para esses pontos médios dos outros lados. Você quer... então a gente tem que traçar [T: o ponto médio]. O ponto médio de TV. Agora a gente vai fazer o ponto médio de TV. E aí... ponto médio de novo?

– Md: Não, não, agora ponto médio não. Agora a gente vai traçar circunferência, né, com raio... isso e a mesma coisa pra o VU. Isso.

– T: Muito bem gente. [Md: Ficou certo?] Acho que sim, né. Ficou, né, Mariana?

– Ma: Acho que ficou sim gente, sim.

**Figura 39 – Primeiro encontro virtual: esboço da Mandala do Desafio I**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Com a construção do esboço da Mandala do Desafio Geométrico I, encerramos o encontro virtual explanando que nossa ideia para a oficina tinha sido, em parte, alcançado, pois, durante o encontro, nós todos agimos como alunos e professores. Fomos tirando nossas dúvidas e arriscando durante nossa atividade que podemos classificar como exploratória investigativa. Vários conceitos da geometria foram abordados.

### **5.1.3 Momento virtual 3: reproduzindo Mandalas no GeoGebra – Fórum II**

O segundo Desafio Geométrico, “Reproduzindo as Mandalas no GeoGebra”, foi liberado dia 29 de outubro de 2020, também disponibilizado em um fórum de discussão. Iniciamos o debate apresentando duas Mandalas (Figura 40) que iríamos reproduzir e pedimos que os participantes compartilhassem suas construções feitas no GeoGebra. Para esse fórum, disponibilizamos um aplicativo do GeoGebra, caso quisessem fazer pela própria plataforma.

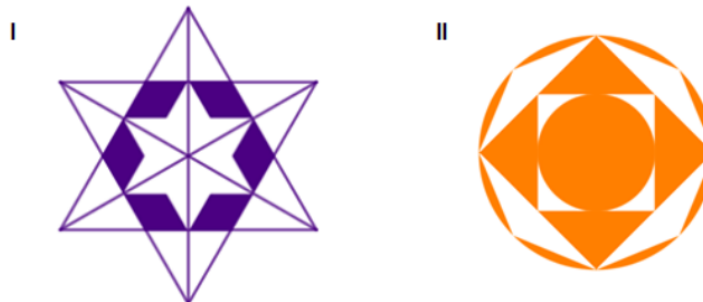
**Figura 40 – Oficina *on-line*: reproduzindo Mandalas no GeoGebra**

## Reproduzindo as mandalas no GeoGebra

Mostrar respostas aninhadas

Reproduzindo as mandalas no GeoGebra

sexta, 14 Ago 2020, 10:50



Vamos reproduzir a Mandala no *software* de geometria dinâmica, o GeoGebra?

Como fariam?

Compartilhem suas construções, vamos trocar experiências!!


Use o App abaixo para compartilhar o link da construção ou compartilhem o arquivo.

Caso tenha dúvidas em como compartilhar a construção [clique aqui](#) e veja o vídeo.

Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

A discussão ocorreu discretamente, e algumas participantes enviaram suas construções, mas não houve compartilhamento de ideias como sugerimos. Em uma das Mandalas enviadas, houve uma breve interação com a participante Wa sobre sua construção, conforme observamos na Figura 41.

**Figura 41 – Oficina *on-line*: interação com a participante Wa no Fórum II (a)**


 Re: Reproduzindo as mandalas no GeoGebra  
 por [Waldirene de Alencar Melo](#) - sábado, 7 Nov 2020, 18:07

Olá...

Segue o link do desafio no encontro online (06/11/2020):

<https://www.geogebra.org/m/rjpupsz7>

Grata!

Média das avaliações: - Avaliar...

[Link direto](#) | [Mostrar principal](#) | [Editar](#) | [Excluir](#) | [Responder](#)

**Re: Reproduzindo as mandalas no GeoGebra**  
por [Angelica Rodrigues Ventura](#) - domingo, 8 Nov 2020, 11:46

Muito bem Waldirene!

Agora divida conosco como fez a construção...

Qual critério usou na construção da reta que usou como base do triângulo?



Média das avaliações: - [Link direto](#) | [Mostrar principal](#) | [Editar](#) | [Excluir](#) | [Responder](#)

Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Analisando sua construção, questionamos o critério para a construção de uma reta que usou como base de um dos triângulos. Em resposta, a participante nos enviou uma gravação de tela nos mostrando sua construção. Ao se analisar o vídeo, foi constatado que ela utilizou a interseção das bissetrizes (incentro) para traçar os triângulos equiláteros (Figura 42).

**Figura 42 – Oficina *on-line*: interação com a participante Wa no Fórum II (b)**

**Re: Reproduzindo as mandalas no GeoGebra**  
por [Waldirene de Alencar Melo](#) - segunda, 9 Nov 2020, 13:00

Eu gravei a tela enquanto eu fazia a mandala...

Link:



**Re: Reproduzindo as mandalas no GeoGebra**  
por [Angelica Rodrigues Ventura](#) - terça, 10 Nov 2020, 16:09

Muito bom seu raciocínio Waldirene!

Agora eu entendi. Você usou a relação do incentro (ponto de encontro das bissetrizes de um triângulo) para traçar os lados do triângulo equilátero.

Média das avaliações: - [Link direto](#) | [Mostrar principal](#) | [Editar](#) | [Excluir](#) | [Responder](#)

Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

#### 5.1.4 Momento virtual 4: segundo encontro virtual

Nosso segundo encontro virtual aconteceu no dia 6 de novembro de 2020, também pela plataforma Google Meet. Os participantes foram informados da gravação no início do encontro e também na plataforma do curso.

A reunião teve, novamente, a presença de duas participantes, Marilda (Md) e Waldirene (Wa). Iniciamos a discussão com a Mandala I do tópico “Reproduzindo Mandalas no GeoGebra”, indagando quais foram os primeiros pensamentos sobre sua construção. Os trechos transcritos da gravação serão apresentados em itálico.

#### 1ª Mandala construída

**Figura 43 – Segundo encontro virtual: 1ª Mandala construída**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Iniciamos a discussão com a participante Md descrevendo que visualizava dois triângulos formando uma estrela de seis lados, ou seja, um hexágono. Md também enfatizou os triângulos menores que estavam em destaque nas pontas do polígono estrelar.

– Md: *Onde tem as pontinhas, né, da estrela maior, são triângulos menores, com medianas aí, né, que você traçou... e só que eu consigo ver.*

– A: *Sim. Você viu todas as figuras que realmente estão aqui.*

Aqui coube um questionamento sobre como ter certeza que, na construção, se tratava de um triângulo equilátero. Md nos disse não ter certeza, mas afirmava visualizar a mediana. Nossa justificativa para as participantes foi que, por estarmos



construindo Mandalas e elas possuem regularidades, simetrias, nós poderíamos afirmar por construção que se tratava de um triângulo equilátero.

– Md: *Ah sim, sim. É porque estou pensando na figura toda. Na realidade, ela é construção da Mandala. É verdade ela tem que ter toda essa simetria mesmo.*

– T: *Exatamente, então tá joia. É que na matemática é assim. A gente tem que ficar provando tudo que a gente faz.*

Partimos, então, para a construção no GeoGebra. Logo de imediato, Md relatou que não conseguiu construir a Mandala com o *software*, que ainda tinha certa dificuldade. Fomos construindo em um ritmo mais lento, para que as participantes acompanhassem. Começamos relembrando como construir um triângulo equilátero.

– A: *Vamos lá, no primeiro encontro a gente construiu o triângulo equilátero. Como é que a gente constrói aqui? Você lembra?*

– Md: *Pegou um raio qualquer, não foi isso? E a partir dele a gente fez uma circunferência.*

– A: *Isso. [...] E agora?*

– Ma: *A partir desse raio você centra em um ponto e faz a circunferência.*

– A: *Então... com o compasso a gente vai definir o raio. E agora?*

[...]

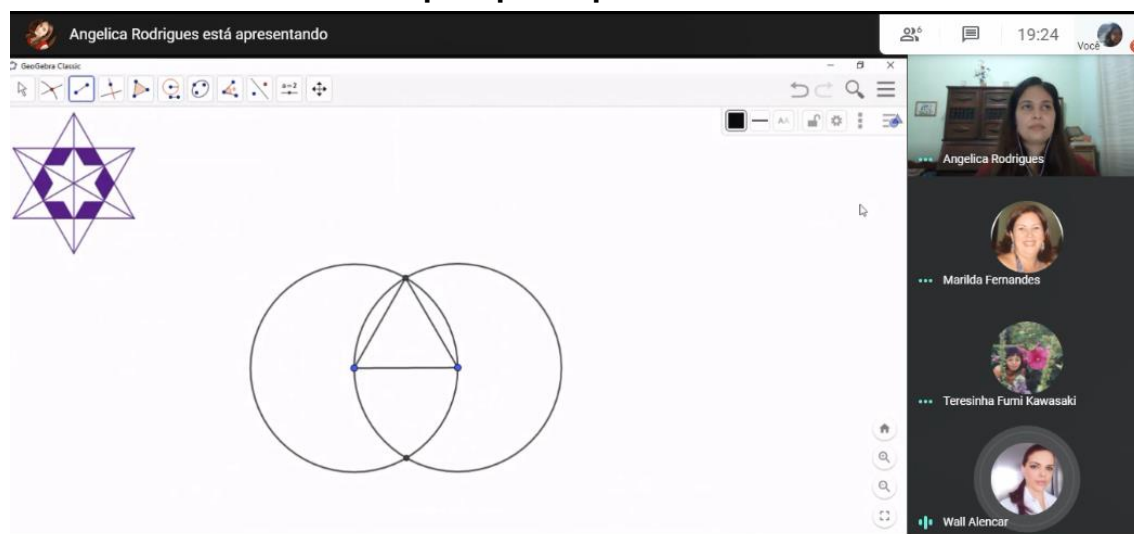
– Md: *Do ponto de interseção lá em cima, ou embaixo tanto faz...*

– A: *Nas duas circunferências. [Md: Isso] Aí a gente faz o triângulo... E agora?*

– Md: *E agora pra fazer o outro, é isso?*

– A: *A gente fez um triângulo... Como, como que a gente constrói essa Mandala?*

**Figura 44 – Segundo encontro virtual: construção de um triângulo equilátero pela participante Md**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Concluindo parte da construção com a participante Md, a participante Wa nos disse que havia feito diferente, partindo inicialmente pela construção de dois segmentos paralelos. A princípio, a construção se mostrou um pouco confusa, então decidimos, em grupo, dar continuidade à construção que já havíamos começado para depois fazer a construção sugerida pela participante Wa.

Dando continuidade à construção, ocultei as circunferências deixando apenas o triângulo para ficar mais limpa a tela de construção. A participante Md, nesse momento, nos questionou se poderia simplesmente copiar o triângulo, observei então que estávamos trabalhando com construção geométrica; assim, deveríamos construir outro e não efetuar uma cópia.

– A: *Vamos lembrar que isso é uma construção geométrica. Eu fiz esse triângulo, tenho que construir outro.*

– T: *É, acho que não existe copiar e colar, é isso?*

– Md: *Não era essa a ideia. Como já tenho todos os seguimentos já definidos, montar eles como se fossem pontos médios, né, alguma coisa do tipo. Mas eu acho que não daria certo.*

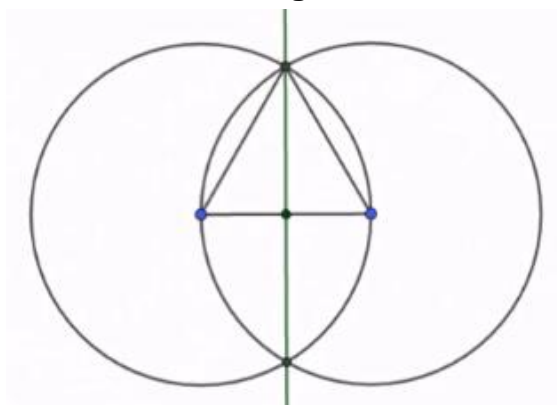
Salientamos que, embora a participante Md não seja da área específica da Matemática, ela conseguiu efetuar a associação do ponto médio corretamente em lembrança ao nosso primeiro encontro.

Prosseguimos com a construção lembrando a marcação do ponto médio referente a um dos lados do triângulo visto no encontro anterior.

– A: [...] Olhando pra figura agora, você consegue enxergar alguma coisa? A gente pode marcar algum ponto médio?

– Md: Sim, as duas extremidades aí, os dois pontinhos pretos.

**Figura 45 – Segundo encontro virtual: ponto médio de um dos lados do triângulo**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Traçamos a reta pelos pontos de interseção e marcamos o ponto médio referente ao lado do triângulo, mostramos que a reta traçada era parte da construção. Md mostrou certa dificuldade em visualizar a construção do triângulo invertido:

– Md: Sim, eu até pensei nisso, mas agora eu não sei como é que eu posso fazer, a não ser que não vou desenhar. O que eu imaginei, dois triângulos sobrepostos, mas a realidade não é essa. Você desenhou... na hora de montar. [...] o que você pode fazer é desenhar um triângulo de cabeça para baixo aí se fosse, né. Sei lá se posso falar assim?

– A: Sim, mas eu tenho que ter algumas informações para desenhar esse triângulo.

– Md: Uai, mas não é só, eu tenho o ponto azul, o ponto preto e o ponto azul, eu não posso traçar?

– Wa: Será que tem como...

Neste momento da construção, a participante Wa sugeriu que determinássemos o ponto central do triângulo já traçado. Segundo o raciocínio de Wa, por ser um triângulo equilátero, através de seu ponto central, seria possível traçar outro triângulo “igual”, com posição invertida. Seguindo o seu raciocínio, prosseguimos e determinamos o ortocentro.

– Wa: *Como que chama o ponto central do triângulo? Eu esqueci. Porque aí colocaria o centro do outro, no mesmo lugar, só que invertido e ambos do mesmo tamanho.*

– A: *A gente está trabalhando com um triângulo equilátero, então ele tem uma particularidade, que é esse ponto que você falou, né. E é nele que a gente tem que chegar.*

– Md: *Essa aula aí eu faltei... Então vai lá Wal.*

– Wa: *É o ponto... tem que traçar mais linhas dessas, só que o ponto médio dos outros. É isso?*

– A: *Exatamente. [...] Pra gente marcar o ponto médio de qualquer um dos lados, né, a gente faria como Marilda?*

– Md: *Tô aqui pensando, o ponto médio que a gente fez na outra aula, a gente fez através de circunferência também. Pegou esse segmento menor, o raio... o ponto médio, não sei como vou te falar. Da onde ele fez o ponto médio embaixo, pegar aquele raio menor e fazer duas circunferências.*

– A: *Você fala... [Md: Esse raio aí... isso] ... Aqui? E agora?*

– Md: *Agora eu vou marcar aquele pontinho, lá onde ela tá fazendo... ali, oh [A: Interseção?] Isso!*

– Md: *Isso. Esse aí é o outro ponto médio. Agora a gente vai fazer o mesmo procedimento do outro lado... e traçar... Aí eu cheguei naquele.*

– A: *Aí a gente chegou naquele ponto que a Wal falou.*

– Md: *Como é que chama esse ponto?*

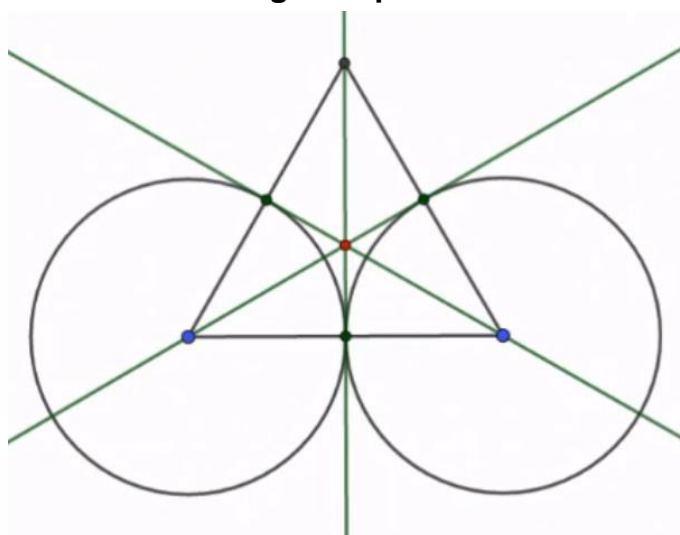
– A: *Esse aqui é o ortocentro.*

– Wa: *Que bonito! É esse nome aí mesmo.*

– A: *Mas ele também é o baricentro, porque a gente está trabalhando com um triângulo equilátero.*

Aqui, podemos perceber que a participante conseguiu assimilar os conceitos que envolvem a determinação do ponto médio de um segmento, guiando-nos corretamente durante esse processo de construção.

**Figura 46 – Segundo encontro virtual: determinando o ortocentro de um triângulo equilátero**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Determinamos os pontos médios por construção geométrica, ou seja, por régua e compasso, no *software* GeoGebra. A participante Wa nos questionou se o GeoGebra teria uma ferramenta que determinasse esse ponto de forma mais direta e se não seria necessário realizarmos todas as construções. Lembramos, então, que nossa intenção era justamente trabalhar essas construções com régua e compasso.

Prosseguimos com a construção da Mandala. Com o baricentro marcado, partimos para a construção do triângulo invertido em relação ao que já construímos.

– A: *Então aqui nós vamos marcar esse ponto. Ok... e agora?*

– Wa: *O outro triângulo da mesma medida, né, e passando pelos mesmos pontos, é isso? Não, pera aí. A gente encontrou [...] os 3 segmentos, e agora pra construir o próximo?... Eu sei onde ele fica.*

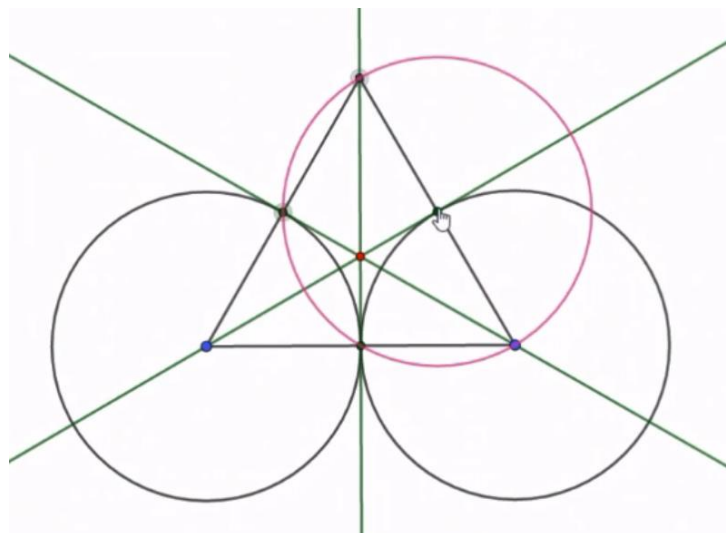
– Md: *Se desenhássemos duas circunferências a partir da interseção ali... não daria pra traçar?*

Chamo a atenção mais uma vez para o raciocínio da participante Md por conseguir visualizar que a construção da circunferência, raio medindo a distância

entre o ponto médio e o vértice do triângulo adjacente ao ponto, poderia determinar o terceiro ponto do triângulo a ser construído.

Traçando a circunferência sugerida por Md, percebemos que o centro escolhido (Figura 47) não era o correto para nosso propósito.

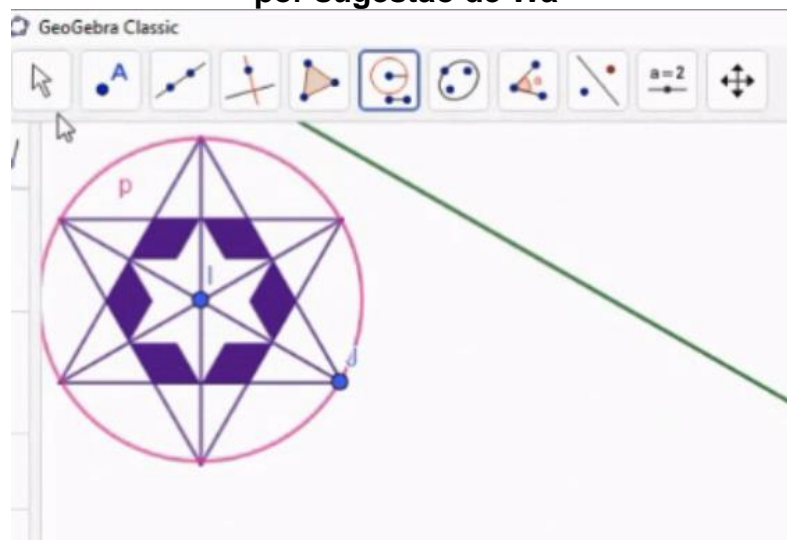
**Figura 47 – Segundo encontro virtual: circunferência traçada por sugestão de Md (1)**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Nesse instante, houve uma intervenção por parte da minha orientadora, chamando a atenção para a Mandala a ser construída. Imediatamente a participante Wa sugeriu que os triângulos estariam “dentro” de uma circunferência. Então, sobre a Mandala, traçamos uma circunferência com centro no centro da Mandala e raio sendo uma das pontas do polígono estrelado.

**Figura 48 – Segundo encontro virtual: circunferência sobre a Mandala traçada por sugestão de Wa**

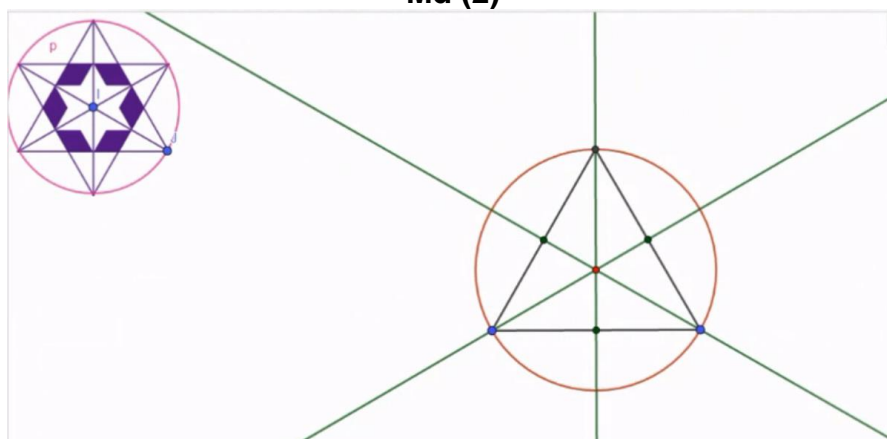


Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Fazer esse processo inverso, em cima da Mandala, possibilitou às participantes visualizarem a posição de cada um dos triângulos em relação um ao outro.

- Wa: A gente já sabe onde termina o próximo triângulo.
- T: Então, se eu fizer a mesma coisa.
- Md: Com o pontinho vermelho, nessa da bicicletinha aí.
- A: Esse ponto vermelho que a gente construiu, é esse ponto aqui?
- Md: Do pontinho do meio, até o pontinho azul.
- T: Esconde essas bicicletinhas.

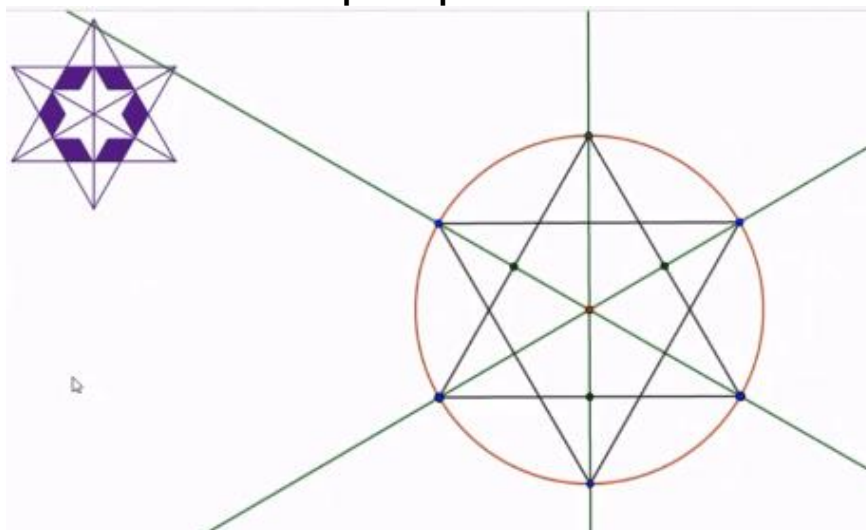
**Figura 49 – Segundo encontro virtual: circunferência traçada por sugestão de Md (2)**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Por sugestão de Wa, marcamos os pontos de interseção entre as retas e a circunferência. A partir desses pontos, traçamos o outro triângulo.

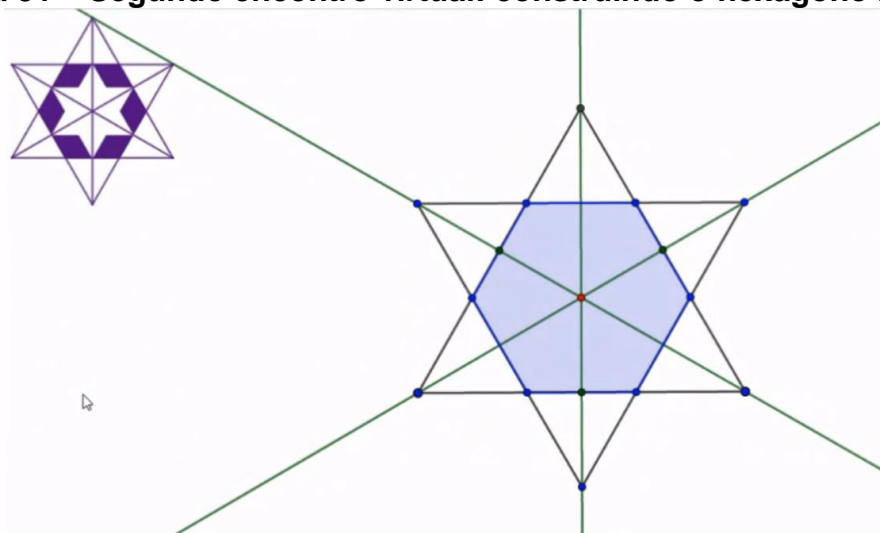
**Figura 50 – Segundo encontro virtual: triângulo traçado por sugestão das participantes**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos Mandalas.

Chamamos a atenção, nesse momento, para o polígono interno, o hexágono. Marcamos os pontos de interseção entre os triângulos e fizemos, com a ferramenta polígono do GeoGebra, o hexágono interno.

**Figura 51 – Segundo encontro virtual: construindo o hexágono regular**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Nessa etapa da construção, as participantes demonstraram ter algumas dúvidas sobre a mudança de cores e sobreposição das figuras. Dando continuidade à



nossa Mandala, a participante Wa pediu para compartilhar conosco o modo que havia feito sua construção.

– *Wa: Tá quase chegando na hora que eu fiquei com dúvida. Na hora que eu fui construir a estrela, essa de seis pontas, eu não conseguia deixar ela branca em cima do outro azul, o azul ficava por cima dela.*

– *A: Então vamos construir que eu vou mostrar como faz.*

– *Wa: Eu posso falar o jeito que eu fiz? Eu consigo ver dois triângulos também, um para cima e outro para baixo. Aí o que eu fiz, eu construí os dois, marquei os pontos e depois eu criei um polígono com estrela. E aí eu botei os dois triângulos que eu criei.*

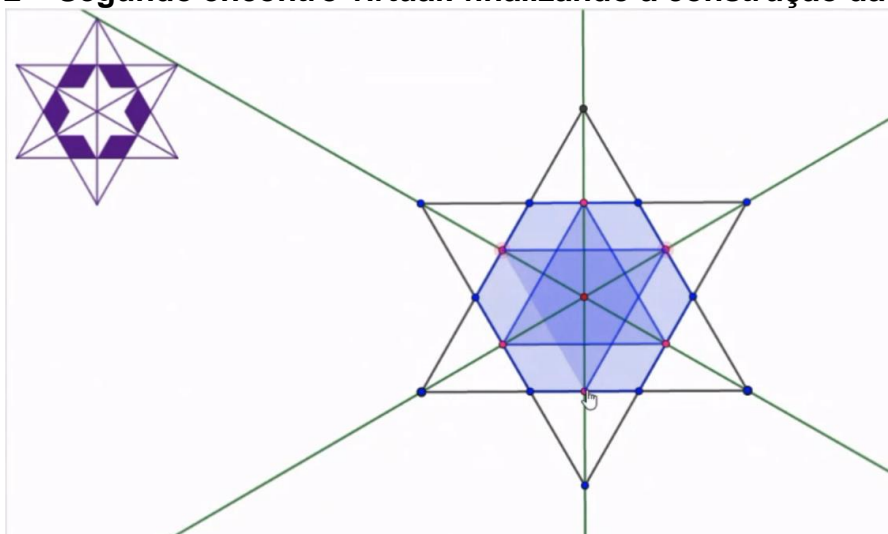
– *Md: Não entendi. [...], mas é porque eu não entendi mesmo.*

– *Wa: Olhando na Mandala original, lá prontinha, né. Quando a gente olha lá pra dentro, naquela estrelinha branquinha que tá lá no meio, eu consigo ver dois triângulos sobrepostos. Aí eu construí os dois triângulos, aí depois eu marquei os pontinhos, os pontos de interseção entre eles, aí eu botei os dois triângulos e criei um polígono para fazer a estrela.*

– *Md: É a mesma imagem de fora, que ela deixa... como é que eu vou explicar. É... os mesmos dois triângulos maiores são os mesmos menores... Agora eu consegui ver.*

Aqui houve uma intervenção de nossa parte para chamar a atenção para um elemento importante do triângulo equilátero, o incentro, que é o ponto de interseção entre as mediatrizes desse triângulo. Complementei dizendo que, em um triângulo equilátero, a distância entre o incentro e o ponto médio de um dos lados do triângulo vale  $\frac{1}{3}$  da altura do triângulo. Demos, então, continuidade à nossa construção: marcamos os pontos de interseção restantes e traçamos os dois triângulos internos.

**Figura 52 – Segundo encontro virtual: finalizando a construção da Mandala**

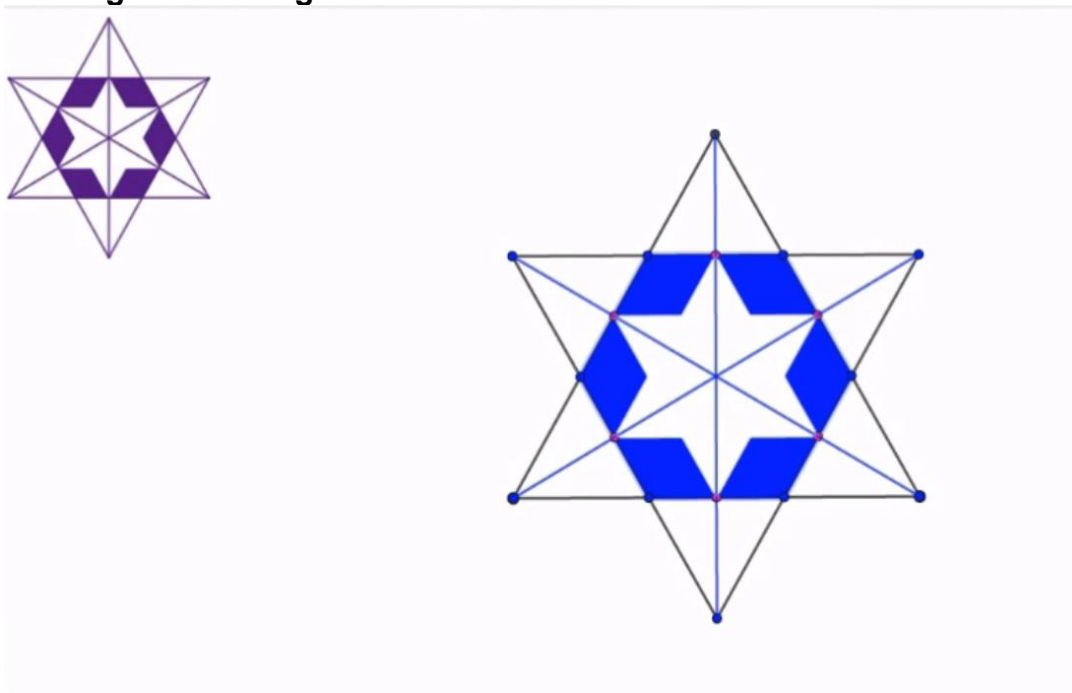


Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Nesta etapa da construção, fui mostrando um passo a passo de como mudar as cores e de como fazer as sobreposições das figuras, alterando suas camadas de construção.

Finalizamos nossa Mandala, mas continuamos nossa discussão com novas sugestões das participantes.

**Figura 53 – Segundo encontro virtual: finalizando a Mandala I**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

- Md: *Mas como você desenhou a estrela, a partir de quê?*
- Wa: *É... eu consegui os pontos, né. A partir do momento que eu fiz uns três triângulos, dois, né, dois triângulos, eu tive a intercessão dele com o... com o..., é um pentágono? Não é um hexágono. Eu tive a interseção com o hexágono e depois a interseção entre eles.*
- T: *São dois triângulos também, pequenos?*
- Wa: *Foram, aí eu fiz o, aí eu fiz essa figura que é um losango, se não me engano, são 6, eu fiz 6... eu fiz os 6.*
- A: *Realmente deu muito trabalho.*
- Wa: *Mas não tá errado.*
- A: *Não.*

Neste momento, é importante ressaltar que as Mandalas têm mais de uma forma de construção, e não certo ou errado. Em nossa oficina, a única imposição é a construção por Desenho Geométrico, mas os passos seguintes podem variar. E essa variação nos leva a diversas discussões sobre as construções e as propriedades envolvidas, objetivando despertar assim um maior interesse dos alunos, como sugeriu a participante Md, além de compartilhar que acredita que no concreto é mais fácil do aluno visualizar certas situações.

- Md: *Eu fico imaginando, a gente dentro da sala de aula, a gente enquanto professor fazer uma construção dessa para um aluno, mesmo sendo de Ensino Médio ele vai ficar louco. [...] Eu acho que no concreto é mais fácil. Você tem opções, claro que quem domina a ferramenta ótimo, e a ferramenta já te dá ali igual, desenhe um polígono, ele já te mostra. Mas para quem não domina a ferramenta e que vai fazer essa construção com régua e compasso, né, ele traçar todas essas mediatrizes, para traçar né esses pontos, é muito difícil gente.*
- A: *Mas é um processo que você pode ir, né, construindo aos poucos.*
- Md: *Você vai ter que ir, assim, em doses bem homeopáticas. Mesmo porque você tem muitas nomenclaturas, você tem que ensinar para ele antes de começar qualquer coisa, que aquela medida é um terço da altura do triângulo.*
- T: *Precisa? Precisa dessa informação?*
- Md: *Porque ela me mostrou.*
- T: *Eu sei, mas precisa? Preciso Angélica?*

- A: Não.
- Md: *Foi só assim, pra eu entender, não foi isso que você disse?*
- A: *Isso. Eu falei por uma curiosidade. Do jeito que a gente fez a construção, a gente não usou. Eu construí, parti dele.*

É importante ressaltar que, nesse caso específico, nós não usamos as relações métricas do triângulo equilátero para a construção, mostrando a possibilidade de que alguns conceitos emergem de forma orgânica durante o processo.

As possibilidades que o GeoGebra proporciona nas construções também fizeram parte de nossas discussões:

- Wa: *O interessante do GeoGebra é que ele tem várias formas de se fazer a mesma coisa.*
- Md: *Eu tô achando fantástico, gente, vocês não têm noção.*
- T: *É interessante da régua e do compasso, né, na verdade, você faria de várias maneiras com a régua compasso.*
- Md: *Com bastante borracha, né. Régua, compasso e bastante borracha.*
- A: *O bom do GeoGebra é não precisar da borracha, né.*

Terminado a construção da Mandala I, tirei um tempo para sanar algumas dúvidas das participantes em relação ao uso do GeoGebra. Logo depois, iniciamos a construção da Mandala II.

## **2ª Mandala construída**

**Figura 54 – Segundo encontro virtual: 2ª Mandala construída**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Demos início à construção da Mandala, como de costume, perguntando quais figuras eram visualizadas. A resposta que obtivemos da participante Md foi que ela visualizava um quadrado maior, um quadrado menor em outra rotação e uma circunferência colorida ao centro. Disse visualizar também uma circunferência maior e um octógono.

Iniciamos, então, com a construção da circunferência maior, seguida da construção do quadrado maior, para isso teríamos que dividir a circunferência em quatro partes. Começamos a discutir então uma forma de dividir uma circunferência em quatro partes iguais. De imediato, a participante Md nos sugeriu o prolongamento do raio e a participante Wa sugeriu que traçássemos a perpendicular ao centro da circunferência. Questionei, então, como traçaríamos essa perpendicular por construção geométrica sem usar as ferramentas do GeoGebra.

– A: *Como posso dividir essa circunferência em quatro partes iguais?*

– Md: *Prolongando aí o raio, não pode não. [A: Podemos] Não sei se existe isso não.*

– A: *Passar aqui uma reta, isso, né?*

– Wa: *Marca o outro ponto, né? [A: Isso, a gente marca a interseção] Faz uma perpendicular no centro.*

– A: *Como que a gente faz uma perpendicular, sem ser usando as ferramentas do GeoGebra?*

Nesse momento começamos a lembrar com as participantes alguns elementos já estudados por nós nas outras Mandalas e enfatizamos, mais uma vez, que não usaríamos as ferramentas do GeoGebra, realizaríamos a tarefa por Desenho Geométrico.

– Wa: *Acho que, se não me engano, tá no quarto quadradinho lá em cima.*

– A: *Não, mas se a gente não quiser usar, como é que a gente faz? Esse ponto aqui, no centro da circunferência, ele é o quê desse segmento aqui?*

– Wa: *Ele é o... tem um nome que corta a circunferência no meio, que tem que passar pelo centro. Tem o raio, são dois raios... ô, memória. O nome do segmento todo?*

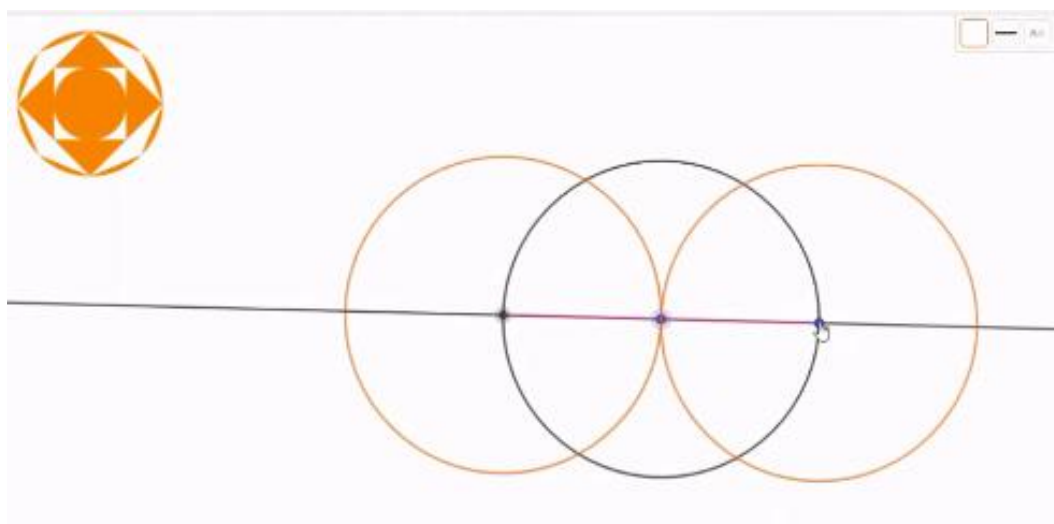
– A: *Não... esse ponto. O centro da circunferência. [...] ele é ponto médio, não é? Desse segmento. [...]*

- Md: Do raio? Não. Como é que chama... diâmetro. O raio é a metade do diâmetro.
- A: Agora a gente tem que pensar na questão de traçar a perpendicular. A Wal, tá certa. A gente vai traçar a perpendicular aqui. Como?

Nesse instante da discussão, houve uma intervenção de minha orientadora sobre as propriedades da perpendicular que traçaríamos em relação ao ponto médio do diâmetro da circunferência, a Mediatriz.

- T: Qual é a regra que a perpendicular a esse segmento que passa pelo centro? Pelo ponto médio. Ele tem um nome especial, tem um nome científico.
- Md: Ah, então nessa aula eu não fui não. [T: Foi!] Fui? [T: qual é essa reta?] Bissetriz... uma [T: Uma me..,] Mediana? [T: Mediatriz].
- T: A Mediatriz ela é sempre perpendicular ao segmento, né, e ela passa pelo ponto médio desse segmento.
- A: Então, aqui a gente vai traçar a mediatriz desse segmento. Traçar mediatriz a gente já sabe.
- Md: Vai pegar a medida do raio e vai traçar duas circunferências. [A: Isso!] Ah, nessa aula eu estava lá.
- Md: Agora você pega o outro raio e marca outro pontinho. Ho, não. Então tem... Eu entendi o que tem que fazer, eu não estou conseguindo visualizar o... onde fazer a interseção.

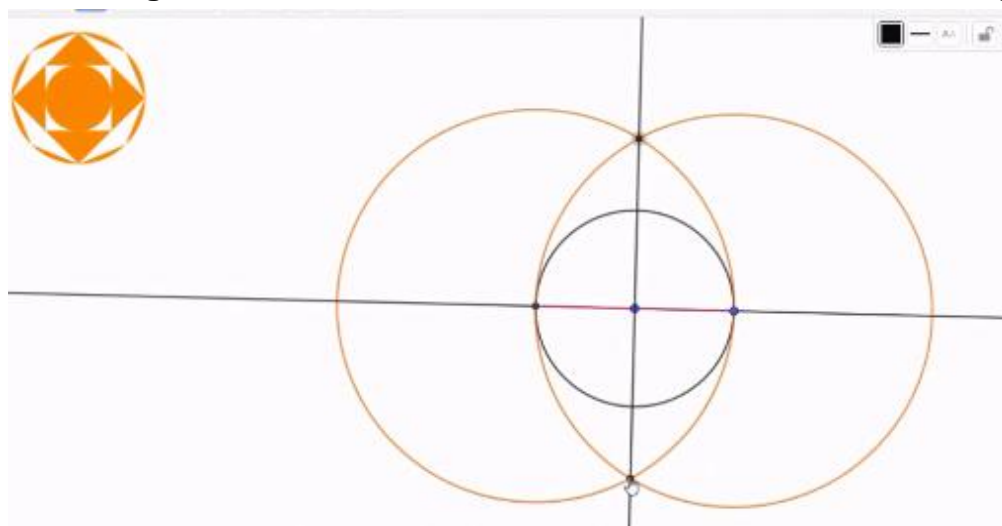
**Figura 55 – Segundo encontro virtual: processo para traçar a mediatriz referente ao diâmetro de uma circunferência**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Aqui foi preciso lembrar como se traçar a mediatriz para sanar algumas dúvidas que surgiram sobre qual raio usar no traçado da circunferência. Podemos ver pela construção acima (Figura 55) que a participante não nos indicou o raio correto para esse processo. Para sanar essa dúvida, tracei um segmento qualquer separado da construção da Mandala e imediatamente a participante Md percebeu que, para traçar a mediatriz, precisaríamos usar como raio a medida do diâmetro da circunferência já traçada.

**Figura 56 – Segundo encontro virtual: dividindo a circunferência em 4 partes**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Nessa etapa da construção, a participante Wa relatou estar com certa dificuldade em usar várias circunferências como compasso no GeoGebra por poluir o desenho. Complementei sua observação explicando o porquê, de algumas vezes, durante o processo, ser necessário ir ocultando algumas construções.

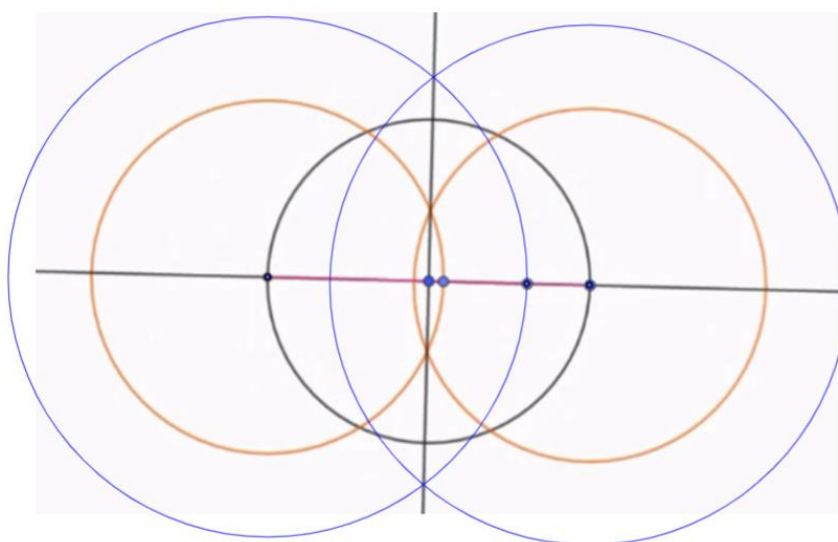
Dando continuidade, a participante Md disse que confundiu como traçar a mediatriz, pois, anteriormente, apresentamos um segmento qualquer, e nessa construção o segmento já estava determinado como diâmetro.

Minha orientadora questionou, então, se poderíamos usar outra circunferência que não tivesse como raio o diâmetro da primeira circunferência. Foi preciso reforçar a pergunta enfatizando se a medida do raio poderia ser qualquer medida maior que o raio e menor ou igual ao diâmetro.

Nesse momento mostramos no GeoGebra que, escolhendo o raio nesse intervalo, seria possível traçar a mediatriz referente ao diâmetro da circunferência inicial.

- A: O raio da circunferência tem que ser maior que a metade.
- Md: Ah, isso você falou na outra aula.
- A: Se eu pegar um ponto aqui dá certo, se pegar aqui dá certo. Se meu raio for esse, eu consigo. [...] Está vendo que coincide? As interseções. A mesma coisa, se eu fizer com este ponto, desde que seja maior que a metade a gente consegue traçar essa perpendicular, a mediatriz.

**Figura 57 – Segundo encontro virtual: mostrando possíveis maneiras para traçar mediatriz**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas (alterado pela autora).

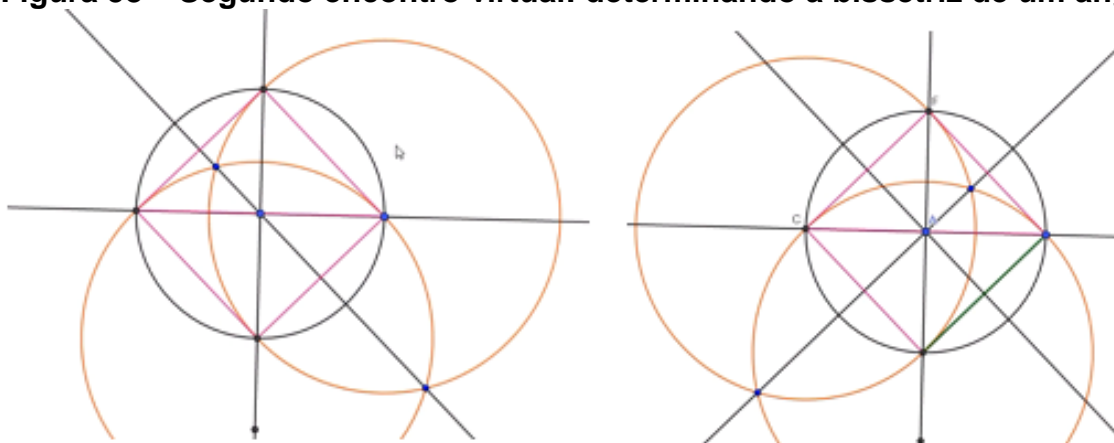
Após essas explicações, marcamos os pontos de interseção entre a circunferência e a mediatriz e demos continuidade à nossa construção traçando um dos quadrados. Prosseguimos seguindo as sugestões das participantes:

- Md: Agora eu passaria um ponto médio de uma dessas laterais rosa, pra fazer o outro quadrado.
- A: Como que a gente faz? Vamos lá.
- Wa: Aonde tá a mãozinha, achar o ponto médio do lado, de um dos lados, né.



- A: Isso. [...] aqui no GeoGebra eu defino o raio com o valor do comprimento pra não ter que criar mais um ponto, só por isso. Aí a gente marca a interseção entre as duas circunferências com a reta. Essa reta ela é mediatriz desse segmento, mas ela é o que... desse ângulo aqui. Essa reta também, a gente pode falar que ela é o quê?
- Wa: Diagonal?
- A: O ângulo... o ângulo  $F\hat{A}C$ .
- Md: [...] Mediatriz, né, não?
- A: Não, ela é mediatriz desse segmento aqui, que a gente começou. Desse segmento verde, ela é a mediatriz desse segmento, mas em relação a esse ângulo  $F\hat{A}C$ , essa reta é o que?
- Wa: Ela corta ao meio, né. Ela corta ao meio do outro.
- Md: Você quer saber só desse ângulo. Como é que chama aquele esqueminha lá que ela é um terço do outro?
- A: Não. Essa reta é a bissetriz, bissetriz desse ângulo. Ela divide esse ângulo  $F\hat{A}C$  em dois ângulos. [Md: Ah, sim.]  $F\hat{A}C$  é um ângulo reto.
- T: Quanta informação, Angélica.
- Wa: Transforma em mais dois ângulos, mais dois triângulos retângulos.

**Figura 58 – Segundo encontro virtual: determinando a bissetriz de um ângulo**

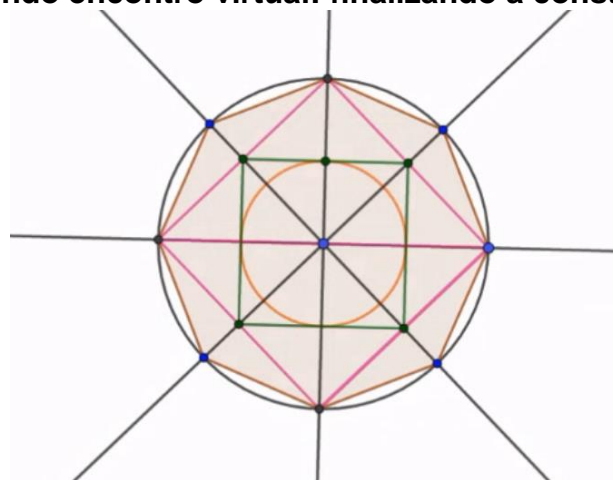


Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Marcamos, então, os pontos de interseção e dividimos a circunferência em 8 partes iguais. Nesse ponto as participantes já visualizaram que seria possível construir o outro quadrado, e assim o fizemos. Por sugestão da participante Md, traçamos segmentos unindo os 8 pontos de interseção determinando o polígono octógono. Para

a construção da circunferência central, definimos o raio como sendo a interseção do quadrado menor com a mediatriz e centro coincidente ao da circunferência.

**Figura 59 – Segundo encontro virtual: finalizando a construção da Mandala**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Nessa etapa da construção, novamente fui mostrando um passo a passo de como mudar as cores e como fazer as sobreposições das figuras alterando suas camadas de construção. Finalizamos nossa Mandala, mas continuamos conversando sobre o *software* GeoGebra.

**Figura 60 – Segundo encontro virtual: finalizando a Mandala II**



Fonte: Oficina *on-line* Desafios Geométricos – Mandalas.

Chegando ao fim da nossa construção, perguntamos se havia restado alguma dúvida sobre a construção e/ou sobre o GeoGebra. Seguem transcritas algumas falas das participantes:

- *Md: Eu ainda chego no seu nível ainda. Por enquanto só sei desenhar circunferência. Eu aprendi muito tá?*
- *Wa: Eu confesso que já fiz dois cursos de GeoGebra, mas aprendi muito mais agora.*
- *A: Que bom, fico feliz.*
- *Md: Assim, eu aprendi muito tanto de GeoGebra quanto de Geometria gente. É fantástico, né? Então, assim, eu só tenho de agradecer, viu, Angélica, pelas suas aulas. Obrigada. [A: Nossa eu que agradeço] Pode deixar que eu vou compartilhar com meus pequititos.*
- *Md: A minha pergunta é: vocês querem no grupo só pessoas que são da área de matemática ou eu posso chamar outras pessoas que... senão eu vou convidar minhas amigas, mesmo para poder assistir ao curso que eu achei extremamente interessante.*

## **FRAGMENTO IV: RECURSO EDUCACIONAL E CONSIDERAÇÕES FINAIS**

## 6 O RECURSO EDUCACIONAL: UM MOVIMENTO PARALELO

Para divulgar parte de nossa pesquisa, elaboramos um livro no qual reunimos as Construções Geométricas das Mandalas, suas resoluções e algumas sugestões. Ele era destinado aos professores de Matemática e foi desenvolvido em parceria com Luiza Oliveira e Marcelo Paiva, alunos do Curso de Design da UFMG.

### 6.1 Construindo o livro

Quando ingressei no PROMESTRE, ciente da exigência da elaboração de um recurso educativo que seria livremente compartilhado, já tinha em mente que elaboraria um material voltado aos professores que ensinam Matemática. Desde o início, nossa intenção foi a de compartilhar uma metodologia que contribuísse, de alguma forma, para melhorar a aprendizagem dos alunos em Geometria Plana.

Inúmeras foram as reuniões com minha orientadora para decidirmos como exploraríamos a Geometria em nossa pesquisa. De início, resolvemos que iríamos tentar aproximar às Construções Geométricas a algo “útil”, e, ao longo das reuniões, chegamos às construções de Mandalas Geométricas, mas faltava estabelecer a forma que abordaríamos essas construções.

Nosso objetivo sempre foi o de apresentar uma proposta de estudo da Geometria em um formato não usual. Com isso, definimos que as construções das Mandalas seriam trabalhadas no estilo de Desafios Geométricos, explorando os conceitos da Geometria Plana. Começamos, então, a pesquisar e escolher quais Mandalas fariam parte dos desafios: selecionamos, inicialmente, 15 Mandalas, das quais 6 fizeram parte dos desafios propostos. Com as Mandalas selecionadas, iniciamos nossas oficinas. Nosso próximo desafio seria a escolha do recurso educativo a ser elaborado.

O PROMESTRE e o curso de graduação em Design, ambos da UFMG, têm uma parceria para o desenvolvimento dos recursos educacionais. Tínhamos em mente, desde o início, que nosso recurso seria no formato de uma cartilha, de um livreto ou de um livro. Essa foi a ideia que apresentei ao Glaucinei Rodrigues, professor da disciplina Design III, em formato de vídeo, explicando brevemente nossa pesquisa e nossa proposta para o recurso educativo. Fui selecionada e demos início

à parceria em dezembro de 2020 com os alunos de Design Luiza Oliveira e Marcelo Paiva.

Em nossa primeira reunião, em 12 de dezembro, conversamos muito a respeito da minha expectativa com o produto que eles iriam elaborar. Expliquei os objetivos com o recurso educativo e o público que queria alcançar. Diante ao que apresentei, para uma segunda reunião, prepararam um cardápio de ideias para possíveis recursos educacionais. Algumas das ideias que me mostraram foram a criação de um *blog* e cartas de desafios geométricos, aplicativo de conteúdo, *blog* matemático e artístico, jogo de cartas, livros, *e-book* interativo, Mandalas 3D, “monte seu origami” e outros. Perante a tantas possibilidades, decidimos, previamente, que faríamos um livro, mas, nesse momento, não chegamos a um denominador comum sobre seu formato.

Para ajudar na elaboração do livro, fizeram entrevistas com três professores de Matemática sobre a utilização do GeoGebra. Segundo eles, essa entrevista é um processo muito comum em um início de projeto no *design*, pois, ao eleger esses potenciais usuários, podem identificar necessidades, problemas e oportunidades para tornar a experiência boa e ter um resultado positivo. Participei de uma entrevista como ouvinte, pois esse processo era parte da disciplina deles. Assim, não houve interferência de minha parte.

Antes de começarem as entrevistas, eles prepararam um pequeno roteiro com questões que pretendiam discutir. Algumas delas foram:

- se havia utilização ativa do GeoGebra em sua prática em sala de aula;
- se havia alguma dificuldade deles no manuseio do *software*;
- qual a forma eles julgavam mais efetiva para ensinar a Geometria Plana: se por meio das ferramentas tradicionais de construção geométrica (régua e compasso) ou através da utilização do *software* GeoGebra;
- a utilização do GeoGebra por seus alunos;
- qual a importância do uso do GeoGebra no momento atual e se já haviam produzido alguma atividade prática de Geometria com seus alunos;
- a preferência por livros *on-line* (*e-books*) ou livros impressos.

Após as entrevistas, os *designers* compartilharam comigo algumas das impressões que tiveram. Segundo eles, todos os professores já utilizaram o GeoGebra

em sala de aula e em aulas particulares. Sobre o *software*, dividiram a afirmação de ele ser intuitivo e fácil de ser utilizado, além do fato de ser de livre compartilhamento.

Quanto à forma mais efetiva de se ensinar Geometria, houve uma divergência entre os professores. Dois deles acham relevante o conhecimento prévio do conteúdo para se utilizar o GeoGebra, sendo importante o uso do tradicional “fazer na mão”. Já o terceiro professor acredita que o ensino de hoje é ultrapassado. Assim, ele é adepto ao uso de tecnologias para se iniciar um conteúdo.

Sobre a utilização do GeoGebra, relataram que acreditam nas suas potencialidades e que seu uso será mais constante no ensino presencial, depois da pandemia. Um dos professores enfatizou ser importante os alunos trabalharem com a Matemática por meios além do lápis e caderno.

Em relação à modalidade livro, fizeram, em paralelo às entrevistas, um questionário *on-line*, no qual a maioria disse preferir livros físicos aos *e-books*. Todas essas informações coletadas foram consideradas para os próximos passos da elaboração da obra, embora, nessa altura da pesquisa, o material bruto para compor o livro já estivesse pronto.

No início de fevereiro de 2021, fizemos uma reunião com a participação dos professores Terezinha e Glaucinei, nossos respectivos orientadores, para fechar a proposta do livro. As ideias de possíveis recursos educativos que já tinham me explicitado foram apresentadas também à minha orientadora, e, a partir das discussões, decidimos unir algumas delas e compor um livro compilando o material já elaborado e aplicado nas oficinas. Ficou determinado que o livro seria elaborado com certa simetria e traria no centro uma “Mandala origami”, que se montaria ao se abrir a página. Traríamos também, junto ao livro, uma seleção de cartões com instruções para Construções Geométricas fundamentais e algumas peças para serem sobrepostas para a montagem de algumas Mandalas.

Uma questão levantada durante essa reunião foi sobre um dos dados coletado pelos *designers*: livro físico ou *e-book*? Diante da possibilidade de termos um livro físico, decidimos que disponibilizaríamos os *links* dos materiais de apoio – vídeos, cartões, peças de montagem e folhas de atividades – em formato de *QR Code*.

Nosso próximo passo foi discutir o título que daríamos ao livro. A princípio, eu estava bem fechada quanto ao título. Na verdade, para mim, deveria ser algo parecido ao título da dissertação, mas, no decorrer das conversas, fui entendendo o processo

de criação e decidimos que teria um título e um subtítulo, dando maior identidade ao livro.

Partimos, então, para as possibilidades dos títulos. A ideia inicial foi ter como base o nome da oficina e o título da dissertação e criar alguns anagramas para o título do livro. As opções que surgiram foram as seguintes:

- GeoÁgono (adjetivo da Geometria que provém do grego);
- GEO<sup>3</sup> (pela abundância do prefixo “geo” no decorrer dos textos);
- GeoDalas (referência ao GeoGebra, à Geometria e às Mandalas);
- Geobrá (referência ao GeoGebra e a parte artística do livro);
- RecomGeo (referência à régua, ao compasso e ao GeoGebra).

Essa foi, sem dúvidas, a parte mais fácil de todo o processo, a escolha por *Geodalas* foi quase de imediato. Definimos, posteriormente, que o subtítulo seria “Desafios Geométricos – Mandalas com régua, compasso e GeoGebra”.

Entramos, então, na parte mais importante do livro: organizar o conteúdo. O conteúdo já estava pronto, mas, para deixar o material mais atrativo e focado na Construção das Mandalas, reformulamos a forma de apresentação dos desafios e reduzimos o número de Mandalas com resolução. Pensando nessa fluidez, montei um repositório para armazenar os vídeos e os PDFs, que seriam disponibilizados no corpo do livro.

Precisávamos, nesse ponto, de uma identidade visual para ser a “cara do nosso livro”. Essa identidade daria um padrão a todo o conteúdo produzido. A primeira etapa foi a elaboração da logomarca, seguida do *thumbnail* para os vídeos do YouTube e do visual dos cartões com as instruções das Construções Fundamentais.

**Figura 61 – Logo do livro *Geodalas***



Fonte: Elaborada pelos *designers* Luiza Oliveira e Marcelo Paiva (2021).



**Figura 62 – Visual das capas dos vídeos e dos cartões de construção**



Fonte: Elaborada pelos *designers* Luiza Oliveira e Marcelo Paiva (2021).

Os *designers* começaram, então, a trabalhar no rascunho da diagramação do livro. Como já tínhamos definido anteriormente, o livro seguiria com certa simetria: “Textos – Desafios – Mandala Origami – Desafios – Textos”. Alguns elementos nos remetem a essa simetria, como as capas de capítulos elaboradas e espelhadas, apontando para o centro do livro, por exemplo. No centro da obra, nossa ideia inicial, para a versão impressa, era apresentar um Kusudama,<sup>15</sup> mas, devido à sua complexidade, seria difícil reproduzi-lo no formato *pop up*, então decidimos recriar uma Mandala origami.

Com o conteúdo finalizado e o miolo do livro previamente definido, partimos para os últimos detalhes e a definição da capa. Começamos pelo subtítulo, o qual, depois de algumas discussões, ficou definido como “Desafios Geométricos – Mandalas com régua, compasso e GeoGebra”. Para a capa, decidimos dar destaque a uma Mandala, manter os tons pastéis e deixar alguns traçados à mostra. Perfeito! O livro estava ganhando vida.

Partimos para os ajustes finais. Os textos, que antes ocupavam a margem justificada da página, foram realinhados à esquerda ficando com menos palavras por linha com a intenção de suavizar a leitura. Com isso, foi possível deixar uma margem à direita para anotações.

Faltava agora fazer a revisão ortográfica, e, para isso, Luiza e Marcelo me ensinaram a usar o programa de edição do livro. Essa correção ficou sob minha responsabilidade.

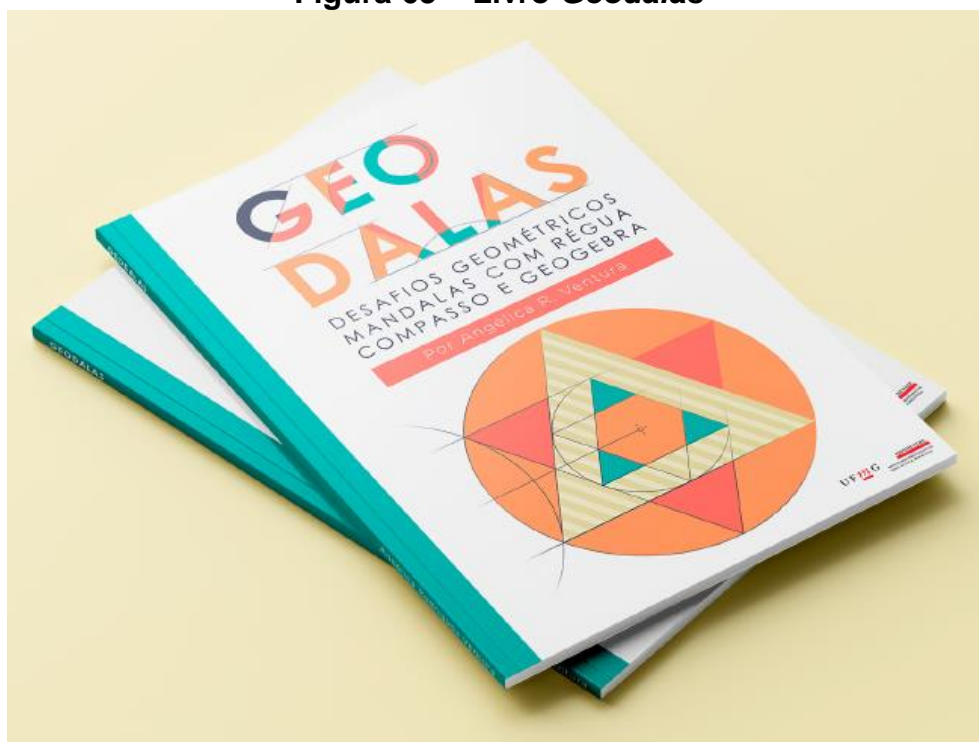
Eis que chegou o grande dia! No dia 27 de março o livro ficou pronto.

<sup>15</sup> O Kusudama é composto por vários módulos (origami modular) separados, mas unidos com simetria e seguindo algum padrão, resultando em uma esfera.

## 6.2 O livro *Geodalas*

O produto educacional é composto pelo livro *Geodalas: Desafios Geométricos – Mandalas com régua, compasso e GeoGebra*<sup>16</sup> e pelos cartões de instruções para Construções Geométricas fundamentais. Como material extra, disponibilizamos um *kit* composto por peças de montagem de algumas Mandalas para o professor aplicar em sala de aula.

**Figura 63 – Livro *Geodalas***



Fonte: Elaborada pelos *designers* Luiza Oliveira e Marcelo Paiva (2021).

O título do livro nos remete a seu conteúdo: *Geo* (Geometria e GeoGebra) e *Dalas* (Mandalas Geométricas). A estrutura dele foi elaborada para dar um aporte aos professores. Ao longo dos capítulos, apresentamos nossa proposta e discorremos brevemente sobre a importância da Geometria e sobre as Mandalas Geométricas.

---

<sup>16</sup> Disponível em: <https://promestre.fae.ufmg.br/recursos-educacionais/> e [https://issuu.com/angelufmg/docs/geodalas\\_-\\_produto\\_educacional\\_angelica\\_r.\\_ventura](https://issuu.com/angelufmg/docs/geodalas_-_produto_educacional_angelica_r._ventura)

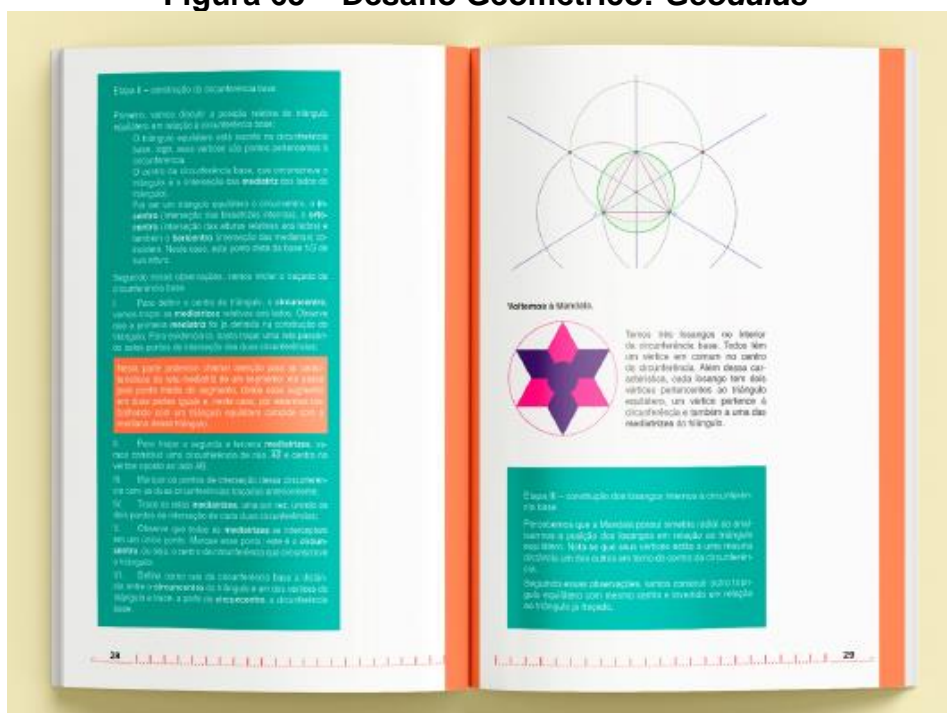
## Figura 64 – Sumário do livro *Geodalas*

<b>APRESENTAÇÃO</b> .....	
1. O PORQUÊ DA GEOMETRIA .....	
2. MAS O QUE SÃO MANDALAS?.....	
3. DESAFIOS GEOMÉTRICOS – GEODALAS .....	
DESAFIO I .....	II. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS NO GEOGEBRA .....
DESAFIO II .....	III. KIT COMPONDO SUA MANDALA .....
DESAFIO III .....	
KUSUDAMA .....	
DESAFIO VI .....	
DESAFIO V.....	
DESAFIO IV.....	
<b>APOIO A(O) PROFESSOR(A)</b> .....	<b>REFERÊNCIA</b> .....
I. CONSTRUINDO NO GEOGEBRA .....	<b>MATERIAL DE APOIO PARA IMPRESSÃO</b> .....
Restringindo ferramentas .....	Desafios Geométricos - Folhas de Atividades.....
Ordenando as construções .....	Construções Geométricas Fundamentais no GeoGebra - Cartões.....
Sobrepondo uma construção a outra .....	Kit Compondo sua Mandala - Peças.....
Alterando a cor e transparência das construções.....	

Fonte: Elaborada pela autora.

As Mandalas Geométricas são apresentadas no capítulo “Desafios Geométricos – Geodalas”, no qual evidenciamos a estrutura metodológica das oficinas e os conteúdos específicos para cada desafio de forma detalhada, além de uma opção de resolução. É mostrada uma sugestão de aplicação, mas fica a cargo do(a) professor(a) adequá-la à realidade da sua sala de aula. Preparamos também alguns vídeos, hospedados no YouTube, que poderão ser acessados por meio do respectivo QR Code disponibilizado em cada Desafio Geométrico.

## Figura 65 – Desafio Geométrico: *Geodalas*



Fonte: Elaborada pelos designers Luiza Oliveira e Marcelo Paiva (2021).

Para compor os Desafios Geométricos, foram escolhidas seis Mandalas (Figura 66). No interior do livro, deixamos outras Mandalas para serem trabalhadas pelos professores em sala de aula.

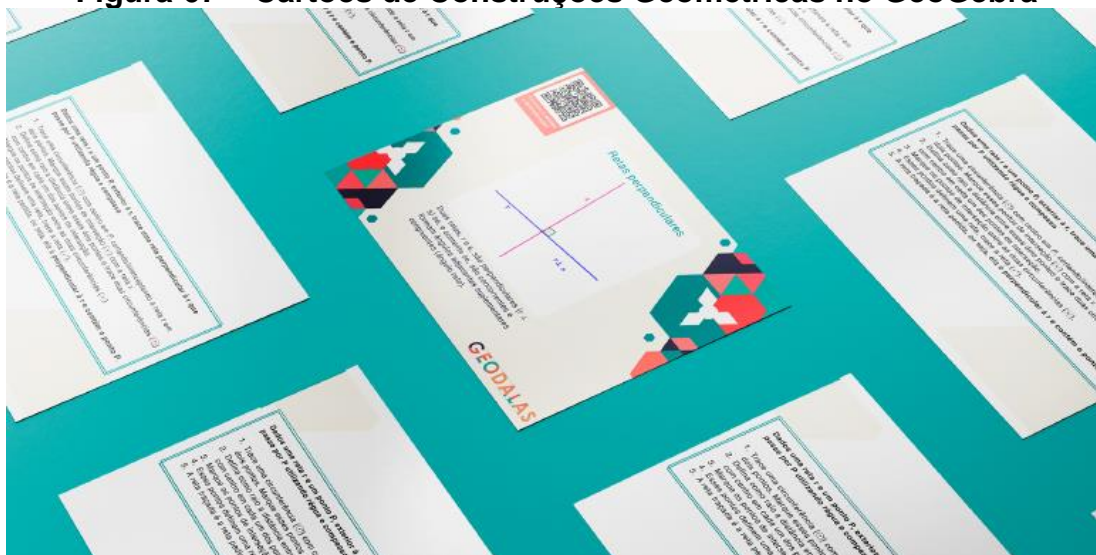
**Figura 66 – Mandalas Geométricas presentes nos Desafios Geométricos**



Fonte: Elaborada pela autora.

Para auxiliar os leitores na construção das Mandalas no GeoGebra, preparei um tópico em que disponibilizamos algumas funcionalidades do GeoGebra e um conjunto de cartões (Figura 67) com certas construções básicas realizadas no GeoGebra para servir de apoio, caso se faça necessário.

**Figura 67 – Cartões de Construções Geométricas no GeoGebra**

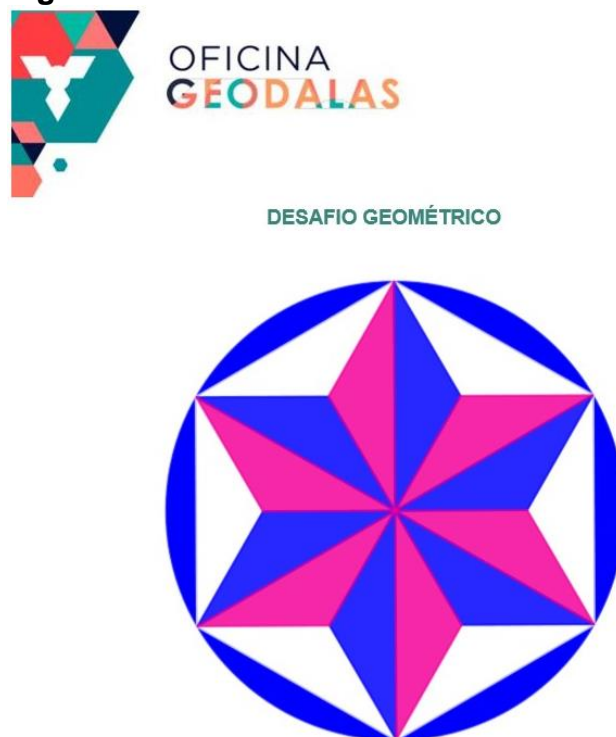


Fonte: Elaborada pelos *designers* Luiza Oliveira e Marcelo Paiva (2021).

Por fim, preparamos um *kit* de figuras geométricas que, sobrepostas, formam algumas Mandalas. Esse material tem o intuito de auxiliar os alunos na execução da oficina ou pode ser utilizado por turmas que ainda não têm um conhecimento de Construções Geométricas de forma mais lúdica.

No último capítulo, disponibilizamos, para impressão, as folhas de atividades dos Desafios Geométricos, os cartões com as Construções Geométricas Fundamentais e as peças do *kit* “Compondo sua Mandala” para o professor utilizar na aplicação das oficinas.

**Figura 68 – Folha de atividade Desafio Geométrico**



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.

Fonte: Elaborada pela autora.

Nosso livro propôs uma abordagem de ensino de Geometria por meio das Construções Geométricas, incorporando o uso das ferramentas tradicionais, de tecnologias computacionais e da investigação matemática na construção de Mandalas. Espera-se que esse material possa ajudar os professores a ter um olhar diferenciado sobre o ensino da Geometria, contribuindo para a aprendizagem desse tema.

### 6.3 Conteúdo interativo: repositório *on-line Geodaldas*

O conteúdo interativo do livro *Geodaldas*, acessado através dos *QR Codes*, está disponível em <https://sites.google.com/view/GEODALAS>.

Para melhor organização do conteúdo, dividimos as construções em três páginas: Desafios Geométricos, Construções Fundamentais e Mandalas Geométricas.

**Figura 69 – Conteúdo interativo da oficina *Geodaldas***



Fonte: Repositório *on-line* Oficina *Geodaldas*.

#### ***Página 1: Desafios Geométricos***

Na página *Desafios Geométricos*, reunimos as seis Mandalas presentes no livro *Geodaldas*. Clicando em cada uma delas, será direcionado a uma subpasta com a resolução em vídeo, a folha de atividades e a resolução no GeoGebra, como observamos nas Figuras 70 e 71.

Figura 70 – Página 1 do repositório *on-line Geodaldas*



GEODALAS

## Desafios Geométricos



Desafio I



Desafio II



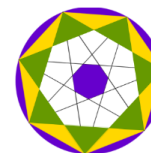
Desafio III



Desafio IV



Desafio V



Desafio VI

Fonte: Repositório *on-line* Oficina Geodaldas.

Figura 71 – Subpáginas 1: resolvendo os Desafios Geométricos



GEODALAS



Fonte: Repositório *on-line* Oficina Geodaldas.

### **Página 2: Construções Fundamentais no GeoGebra**

Na página 2, apresentamos todas as construções que entendemos que darão aporte na construção das Mandalas propostas. Clicando em cada uma delas, será direcionado a uma subpasta com a resolução em vídeo, como observamos nas Figuras 72 e 73.

**Figura 72 – Página 2 do repositório *on-line Geodaldas***



Fonte: Repositório *on-line* Oficina Geodaldas.

**Figura 73 – Subpáginas 2: vídeos com as construções**



Fonte: Repositório *on-line* Oficina Geodaldas.

### **Página 3: Mandalas Geométricas**

Na página 3 compartilhamos mais 5 Mandalas extras, que estão no corpo do livro. Clicando em cada uma delas, será direcionado a uma subpasta com a resolução no GeoGebra e a folha de atividades para uso do professor, como observamos nas Figuras 74 e 75.



Figura 74 – Página 3: Mandalas Geométricas



GEODALAS

### Mandalas Geométricas



Mandala #1



Mandala #2



Mandala #3



Mandala #4



Mandala #5

Fonte: Repositório *on-line* Oficina Geodaldas.

Figura 75 – Subpáginas 3: resolução no GeoGebra

GEODALAS

Mandala #1

Folha de Atividade

Desmarque p/ ocultar a construção

28 / 31 2 s

Entrada...

Fonte: Repositório *on-line* Oficina Geodaldas.

## 7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este texto foi apresentado em FRAGMENTOS, buscando colar/unir partes desenvolvidas e plenamente vivenciadas pela pesquisadora e sua orientadora. Apesar da sequência dos fatos, a narrativa fragmentada reflete os atravessamentos sofridos ao longo desse processo: o mestrado profissional. Jamais imaginávamos que iríamos passar por tanto. Será que eu *passarinho*?<sup>17</sup>

Nossa pesquisa teve como objetivos: 1) observar e buscar compreender as possíveis contribuições e/ou obstáculos da resolução dos Desafios Geométricos – Mandalas – em processos de ensino-aprendizagem da Geometria Plana com o uso de régua, compasso e GeoGebra. Na percepção de professores de Matemática, e que ensinam Matemática; e 2) observar como os conceitos da Geometria Plana emergiram nas interações promovidas por uma oficina. Materializando parte de nossa pesquisa, elaboramos o livro *Geodaldas: Desafios Geométricos – Mandalas com régua, compasso e GeoGebra*, onde reunimos as Construções Geométricas das Mandalas, que será disponibilizado na página do PROMESTRE (FaE/UFMG), no *link* <https://promestre.fae.ufmg.br/recursos-educacionais/>.

Temos de mencionar que nossa oficina, como dito anteriormente, foi planejada, inicialmente, para ser no formato presencial, em que o diálogo, a interação com o participante, ocorreria praticamente em todo o momento, seja entre os participantes ou entre participantes e nós, moderadoras. Acreditamos que o diálogo, a comunicação e a interação entre os participantes têm grande importância em qualquer processo de ensino-aprendizagem. Somos habituados à comunicação presencial, mas, durante a pandemia, fomos adquirindo mais molejo na lida com as pessoas no ambiente virtual.

Nossa ideia de promover esse momento síncrono, na oficina virtual, foi o de propiciar um ambiente de aprendizagem colaborativa, oportunizando a participação e a interação de todos, assim como tivemos em nossas experimentações iniciais. Nossas expectativas eram de que os participantes assumissem um papel colaborativo e ressignificassem seus conhecimentos. Há de se destacar que, embora a participação tenha acontecido com um público limitado, houve interação e muita troca de conhecimentos entre todos.

---

<sup>17</sup> “Todos esses que aí estão... Atravancando meu caminho. Eles passarão... Eu passarinho!” (“Poeminho do Contra”, de Mario Quintana).

Nossa pesquisa assume um caráter qualitativo. Desse modo, nossa avaliação não segue o caminho do “certo e errado”, mas sim da observação e análise de situações no decorrer da oficina.

Durante nossa oficina presencial, alguns participantes relataram acharem importante o registro dos passos feitos pelos alunos no processo de construção das Mandalas. Esse registro vai muito além de enumerar as etapas realizadas; esse exercício auxilia na capacidade de expressão do próprio raciocínio, promovendo uma melhor compreensão da Matemática. Esse foi um dos motivos que, insistentemente, instigamos os participantes, durante os encontros virtuais, a relatarem o que estavam pensando ou o porquê seguirem aquele passo na construção. O que almejamos com essa prática foi que eles conseguissem estabelecer relações entre os passos da construção geométrica, tornando possível que alguns conceitos emergissem dessa interação.

De maneira geral, em ambas as versões da oficina, chegamos ao nosso objetivo inicial, que era provocar algumas discussões sobre certos elementos presentes na Mandala. Na modalidade virtual, sabendo que um fórum de discussão é um espaço de trocas e socialização contínua, ela permaneceu e permanece aberta para novas reflexões, o que não ocorreu da forma esperada. Todos os participantes matriculados puderam acessar e contribuir uns com os outros, mas a interação entre os participantes aconteceu de modo bem discreto em ambos os fóruns.

Fazendo análise como moderadora, creio que o estímulo e a motivação para a participação no fórum não foram suficientes para que todos participassem de forma mais efetiva. Faltou uma aproximação e maior envolvimento dos participantes.

Como dito, um fórum de discussão é local de promover espaços de construção coletiva. Mesmo não contando com todos os participantes, a troca de conhecimentos foi muito satisfatória.

Os fragmentos aqui tratados trazem a ideia inicial da pesquisa: os descaminhos e os caminhos assumidos e o contar dessas histórias traçadas nesse caminhar, sem esquecer dos detalhes técnicos e matemáticos traçados pelos participantes.

Finalmente, a caminhada, embora tortuosa, me fez concluir: “Sim, eu *passarinho*”. Viva Mario Quintana e viva a vida!

## REFERÊNCIAS

ALVES-MAZZOTTI, A. J. O planejamento de pesquisas qualitativas. *In*: ALVES-MAZZOTTI, A. J.; GEWANDSNAJDER, F. (org.). **O método nas ciências naturais e sociais**: pesquisa quantitativa e qualitativa. 2. ed. São Paulo: Pioneira, 1999.

AUSUBEL, D. P. **A aprendizagem significativa**: a teoria de David Ausubel. São Paulo: Moraes, 1982.

BEJARANO, L. **Constructions was MUCH better this year!** Disponível em: <https://crazymathteacherlady.wordpress.com/2015/09/16/constructions-was-much-better-this-year/>. Acesso em: 20 mar. 2019.

BOGDAN, R.; BIKLEN, S.K. **Qualitative Research for Education**. Boston: Allyn and Bacon, Inc., 1982.

BORBA, M. C.; PENTEADO, M. G. **Informática e Educação Matemática**. 6. ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2019.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Brasília: MEC, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** (versão final). Brasília: MEC, 2017.

FIORAVANTI, C. **Mandalas**: como usar a energia dos desenhos sagrados. São Paulo: Pensamento, 2003.

FIorentini, D.; Lorenzato, S. **Investigação em Educação Matemática**: percursos teóricos e metodológicos. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? A Educação Matemática em revista. **Geometria**, Blumenau, n. 4, p. 3-13, 1995.

LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

LORENZATO, S. **Para aprender matemática**. 3. ed. Campinas: Autores Associados, 2010.

MERCADO, L. P. L. **Formação continuada de professores e novas tecnologias**. Maceió: Gráfica e Editora Universitária da Universidade Federal de Alagoas, 1999.

MIRANDA, D. F.; LAUDARES, J. B. Informatização no Ensino da Matemática: investindo no ambiente de aprendizagem. **Revista Zetetiké**, v. 15, n. 27, jan./jun.

2007. Disponível em: <http://ojs.fe.unicamp.br/ged/zetetike/article/viewFile/2421/2183>. Acesso em: 9 out. 2020.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. *In*: LORENZATO, S. (org.). **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PENTEADO, M. G. Novos atores, novos cenários: discutindo a inserção dos computadores na profissão docente. *In*: BICUDO, M. A. V. (org.). **Pesquisa em Educação Matemática: concepções e perspectivas**. São Paulo: UNESP, 1999.

PONTE, J. P.; BROCARD, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações matemáticas na sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RAYMUNDO, M. F. S. M. **Construção de conceitos geométricos**: investigando a importância do ensino de Desenho Geométrico, nos anos finais do Ensino Fundamental. 2010. 120 f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Universidade Severino Sombra, Vassouras, 2010.

VENTURA, A. R.; LAUDARES, J. B. Ressignificação dos produtos notáveis utilizando material concreto. **Abakós**, Belo Horizonte, v. 5, n. 1, p. 34-47, nov. 2016. Disponível em: <http://periodicos.pucminas.br/index.php/abakos/article/view/P.2316-9451.2016v5n1p34>. Acesso em: 9 out. 2020.

VENTURA, A. R.; NUNES, R. R. **VI Encontro de Educação Matemática de Ouro Preto, VIII Encontro de Ensino e Pesquisa em Educação Matemática**. Ouro Preto, maio 2017. p. 1061-1068. Disponível em: <https://www.ppgedmat.ufop.br/images/2017/Anais-VI-EEMOP-VIII-EEPEM.pdf>. Acesso em: 9 out. 2020.

## ANEXO A – Formulário de inscrição *on-line*

# Inscrição: Oficina Desafios Geométricos

Este trabalho é parte integrante da pesquisa do Mestrado Profissional – Educação e Docência – PROMESTRE de autoria de Angélica Rodrigues Ventura, intitulado "Desafios Geométricos, "régua e compasso" e GeoGebra: aprendizagem dos professores de Matemática em Comunidade de Prática Virtual", sob orientação da professora Doutora Teresinha Fumi Kawasaki, realizado na Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais.

A realização dessas oficinas, construção de Mandalas, colocará os sujeitos diante de desafios geométricos onde estratégias de investigação devem ser estabelecidas visando proporcionar a esse sujeito um domínio dos conceitos geométricos. O domínio desses conceitos geométricos será adquirido de forma gradativa, onde o sujeito será estimulado a estabelecer uma sequência lógica de raciocínios conectando as propriedades da Geometria.

A Oficina será realizada via on-line, utilizando a plataforma Moodle.  
Estão previstos dois encontros virtuais durante a Oficina.

Carga horária: 8 horas

Categoria: Mini Curso de Extensão com Certificado, registro nº 102721.

Participação gratuita| Vagas limitadas

**\*Obrigatório**

### 1. E-mail \*

Inscrição: Oficina  
Desafios  
Geométricos

Por se tratar de uma pesquisa com coleta de dados, faz-se necessário o aceite do Termo de Consentimento a seguir. Leia com atenção!

Se seu interesse é apenas na realização do curso, não se preocupe, poderá fazê-lo sem que seus dados sejam usados.

## 2. TCLE - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO \*

**TCLE - TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO**

Prezado(a) Sr.(a),

Eu, Angélica Rodrigues Ventura, Mestranda do PROMESTRE, Mestrado Profissional em Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), convido o(a) Sr(a) a participar da pesquisa intitulada "DESAFIOS GEOMÉTRICOS, "RÉGUA E COMPASSO" E GEOGEBRA: APRENDIZAGEM DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM COMUNIDADE DE PRÁTICA VIRTUAL", sob orientação da Profª. D<sup>ra</sup>. Teresinha Fumi Kawasaki que está sendo desenvolvida pela equipe de pesquisa formada por professores e estudantes de pós-graduação da Faculdade de Educação da UFMG, sob coordenação da Profª. D<sup>ra</sup>. Samira Zaidan. O objetivo de nossa pesquisa é observar e buscar compreender as possíveis contribuições e/ou obstáculos da resolução de desafios geométricos, articulando Desenho Geométrico à utilização das ferramentas tradicionais "régua e compasso" e do *software* GeoGebra, em processos de ensino e aprendizagem da Geometria Plana.

O(a) senhor(a) ao aceitar participar da pesquisa deverá:

1. Eletronicamente aceitar participar da pesquisa, o que corresponderá à assinatura do TCLE, o qual poderá ser impresso se assim o desejar;
2. A participação da pesquisa implicará no consentimento para uso dos registros (*prints* de tela, arquivos, contribuições, gravação de áudio e vídeo) colhidos durante a OFICINA DESAFIOS GEOMÉTRICOS e, se preciso, pediremos para responder a um questionário, que ocupará no máximo um tempo de vinte minutos.

Sabemos que esse projeto poderá oferecer algum incômodo, como por exemplo, a ocupação de seu tempo, a mudança de seus planejamentos, mas estaremos atentos e dispostos a compartilhar as ações para que possamos também te auxiliar ao melhoramento da prática, com atividades com horários flexíveis. Acreditamos ainda que nossa proposta de pesquisa poderá colaborar com sua própria ação na sala de aula, pois nos comprometemos a te apresentar todos os resultados.

Diante das normas do Comitê de Ética da Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados unicamente para fins dessa pesquisa, podendo ser divulgadas em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e nas dissertações dos pós-graduandos. As informações e dados obtidos serão gravados e arquivados pelos pesquisadores pelo prazo de dez (10) anos, sob responsabilidade da pesquisadora principal, que os destruirá ao findar do tempo. Sua identidade ficará preservada por meio do uso de um nome fictício e você não terá nenhuma despesa ou remuneração com a pesquisa. Esclarecemos, ainda, que a qualquer momento você poderá pedir esclarecimentos sobre ela e até mesmo se recusar a continuar participando. Desde já, agradecemos a sua colaboração.

Este projeto foi encaminhado para o Comitê de Ética em Pesquisa – COEP da UFMG, parecer nº 2.993.984, vinculado à Pró-Reitoria de Pesquisa – PRPq, e em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, favor consultar na Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha -

Belo Horizonte - MG - CEP 31270-901 Unidade Administrativa II - 2º Andar - Sala: 2005. Telefone:  
(031) 3409-4592 - E-mail: coep@prpq.ufmg.br

Pesquisadora responsável: Profa. Dra. Teresinha Fumi Kawasaki

Mestranda: Angélica Rodrigues Ventura

Mestrado Profissional em Educação e Docência

Linha de pesquisa: Educação Matemática

Declaro que fui informado(a) pelas responsáveis pelo projeto de pesquisa, e respondi positivamente à sua demanda de realizar a coleta de dados de sua pesquisa por meio da participação da Oficina Desafios Geométricos. Terei liberdade para manifestar minha adesão ou não ao projeto, sem qualquer prejuízo. Entendi as informações fornecidas pelas pesquisadoras e sinto-me esclarecido(a) para participar. Assim sendo, concordo em participar da pesquisa, com meu consentimento livre e esclarecido.

Nome completo: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

Local: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_/\_\_\_/\_\_\_

Agradecemos sua participação.

*Marcar apenas uma oval.*

- Li o termo, quero fazer minha inscrição no curso e aceito o termo para participar da pesquisa
- Li o termo, quero fazer minha inscrição no curso, mas não desejo participar da pesquisa.

Inscrição: Oficina Desafios  
Geométricos

As informações de inscrição não poderão ser editados depois de enviado. Certifique-se de que sua inscrição está correta e completa antes de enviá-la.

3. Nome completo \*

\_\_\_\_\_

4. Informe seu CPF \*

\_\_\_\_\_



5. Telefone para contato \*

---

6. Qual sua formação acadêmica? \*

*Marcar apenas uma oval.*

- Graduando em Licenciatura em Matemática
- Licenciado em Matemática
- Outro curso

7. Leciona no momento? \*

*Marcar apenas uma oval.*

- Sim
- Não

8. Se sua resposta foi "SIM", em qual segmento atua como professor? \*

---

### **Nós agradecemos a sua participação!**

Assim que encerrarem as inscrições nós enviaremos os dados de acesso ao curso em seu e-mail, com todas as orientações de acesso ao Moodle.

Até breve.

Angélica Rodrigues Ventura

---

Este conteúdo não foi criado nem aprovado pelo Google.

Google Formulários

## ANEXO B – Termo de Consentimento Livre e Esclarecido (TCLE)

Prezado(a) Sr.(a),

Eu, Angélica Rodrigues Ventura, Mestranda do PROMESTRE, Mestrado Profissional em Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), convido o(a) Sr(a) a participar da pesquisa intitulada "DESAFIOS GEOMÉTRICOS, "RÉGUA E COMPASSO" E GEOGEBRA: APRENDIZAGEM DOS PROFESSORES DE MATEMÁTICA EM COMUNIDADE DE PRÁTICA", sob orientação da Profª. D<sup>ra</sup>. Teresinha Fumi Kawasaki que está sendo desenvolvida pela equipe de pesquisa formada por professores e estudantes de pós-graduação da Faculdade de Educação da UFMG, sob coordenação da Profª. D<sup>ra</sup>. Samira Zaidan. O objetivo de nossa pesquisa é observar e buscar compreender as possíveis contribuições e/ou obstáculos da resolução de desafios geométricos, articulando Desenho Geométrico à utilização das ferramentas tradicionais "régua e compasso" e do *software* GeoGebra, em processos de ensino e aprendizagem da Geometria Plana.

O(a) senhor(a) ao aceitar participar da pesquisa deverá:

1. Eletronicamente aceitar participar da pesquisa, o que corresponderá à assinatura do TCLE, o qual poderá ser impresso se assim o desejar;
2. A participação da pesquisa implicará no consentimento para uso dos registros colhidos durante a OFICINA DESAFIOS GEOMÉTRICOS e, se preciso, pediremos para responder a um questionário, que ocupará no máximo um tempo de vinte minutos.

Sabemos que esse Projeto poderá oferecer algum incômodo, como por exemplo, a ocupação de seu tempo, a mudança de seus planejamentos, mas estaremos atentos e dispostos a compartilhar as ações para que possamos também te auxiliar ao melhoramento da prática, com atividades com horários flexíveis. Acreditamos ainda que nossa proposta de pesquisa poderá colaborar com sua própria ação na sala de aula, pois nos comprometemos a te apresentar todos os resultados.

Diante das normas do Comitê de Ética da Pesquisa da UFMG, informamos que os dados coletados serão confidenciais e utilizados unicamente para fins dessa pesquisa, podendo ser divulgadas em congressos, simpósios, seminários, revistas, livros e nas dissertações dos pós-graduandos. As informações e dados obtidos serão gravados e arquivados pelos pesquisadores pelo prazo de dez (10) anos, sob responsabilidade da pesquisadora principal, que os destruirá ao findar do tempo. Sua identidade ficará

preservada por meio do uso de um nome fictício e você não terá nenhuma despesa ou remuneração com a pesquisa. Esclarecemos, ainda, que a qualquer momento você poderá pedir esclarecimentos sobre ela e até mesmo se recusar a continuar participando. Desde já, agradecemos a sua colaboração.

Este Projeto foi encaminhado para o Comitê de Ética em Pesquisa – COEP da UFMG, parecer nº 2.993.984, vinculado à Pró-Reitoria de Pesquisa – PRPq, e em caso de dúvidas, com respeito aos aspectos éticos desta pesquisa, favor consultar na Av. Antônio Carlos, 6627, Pampulha - Belo Horizonte - MG - CEP 31270-901 Unidade Administrativa II - 2º Andar - Sala: 2005. Telefone: (031) 3409-4592 - E-mail: [coep@prpq.ufmg.br](mailto:coep@prpq.ufmg.br)

Pesquisadora responsável: Profa. Dra. Teresinha Fumi Kawasaki

Mestranda: Angélica Rodrigues Ventura

Mestrado Profissional em Educação e Docência

Linha de pesquisa: Educação Matemática

Declaro que fui informado(a) pelas responsáveis pelo Projeto de pesquisa, e respondi positivamente à sua demanda de realizar a coleta de dados de sua pesquisa por meio da participação da Oficina Desafios Geométricos. Terei liberdade para manifestar minha adesão ou não ao Projeto, sem qualquer prejuízo. Entendi as informações fornecidas pelas pesquisadoras e sinto-me esclarecido(a) para participar. Assim sendo, concordo em participar da pesquisa, com meu consentimento livre e esclarecido.

Nome completo: \_\_\_\_\_

Assinatura: \_\_\_\_\_

Local: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_/\_\_\_\_/\_\_\_\_

Agradecemos sua participação.

## ANEXO C – Certificado emitido aos participantes da oficina

**CERTIFICADO**

Ministério da Educação  
 Universidade Federal de Minas Gerais  
 Faculdade de Educação  
**ATUALIZAÇÃO**

Certificamos que **ANGELICA RODRIGUES VENTURA** participou como **co-coordenador(a) e organizador(a)** no(a) **curso de atualização** intitulado(a) "Oficina de Desafios Geométricos", da Faculdade de Educação (FaE) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), ocorrido(a) de 23 de outubro a 06 de novembro de 2020, perfazendo a carga horária de 8:00h.

Belo Horizonte, 12 de janeiro de 2021

Prof. (º) Felipe Sales de Oliveira  
 Coordenador(a) do(a) Centro de Extensão

Prof. (º) Daisy Moreira Cunha  
 Diretor(a) do(a) Faculdade de Educação

Código de Autenticidade:

0524586761b045bba9e594dc736fbb5ec7e22443

Este documento dispensa assinatura e pode ser validado pelos seguintes meios:

1) Inserindo-se o **Código de Autenticidade** acima em:

<http://www.certificados.fae.ufmg.br/autenticacao.php>

2) Utilizando-se o **QR code** abaixo:



FACULDADE DE EDUCAÇÃO DA UFMG  
 Centro de Extensão

Acha-se o presente registrado sob  
 Nº 152727, Folha 29, Livro 31  
 Belo Horizonte, 12/01/2021

Prof. (º) Felipe Sales de Oliveira  
 Coordenador(a) do(a) CENEX



**UFMG**

Este certificado foi emitido em 12/01/2021, às 14:16:15h

## APÊNDICE A – Folha de atividades entregue nas Oficinas Presenciais



### PROMESTRE - MESTRADO PROFISSIONAL EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA

Mestranda: Angélica Rodrigues Ventura  
Orientadora: Teresinha F. Kawasaki



Hoje vamos explorar a construção de Mandalas.

As Mandalas geométricas se constituem por desenhos geométricos que se inscrevem uns aos outros resultando em um círculo ou quadrado compostos de repetição de padrões.



Escolha uma das Mandalas e mãos à obra!

- ( 1 ) Vamos formar grupos de no máximo 3 pessoas. A tarefa de cada grupo será reproduzir uma Mandala. Como vocês a construiriam?
- ( 2 ) Exponha suas conclusões com seus colegas.
- ( 3 ) Vamos reproduzir a Mandala no software de geometria dinâmica?

Não esqueça de salvar sua construção e enviar para [angelicarv@ufmg.br](mailto:angelicarv@ufmg.br)

**APÊNDICE B – Página *on-line* com as informações sobre a oficina**

## Página de divulgação da Oficina Desafios Geométricos



**PROMESTRE**  
Início Inscrição  
MESTRADO PROFISSIONAL  
EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA

**UFMG**

**OFICINA  
DESAFIOS GEOMÉTRICOS**

Orientação: Prof<sup>a</sup>. Dr<sup>a</sup>.  
Teresinha Fumi Kawasaki

Angélica Rodrigues Ventura

Quer participar?

Inscrições XX a XX de XXXX de 2020

Conteúdos explorados

Faça sua inscrição!

Estas oficinas compõe o minicurso de extensão, parte integrante da pesquisa do Mestrado Profissional – Educação e Docência – PROMESTRE de autoria de Angélica Rodrigues Ventura, intitulado *“Desafios Geométricos, “régua e compasso” e GeoGebra: aprendizagem dos professores de Matemática em Comunidade de Prática Virtual”*, sob orientação da professora Doutora Teresinha Fumi Kawasaki, realizado na Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais.

No ensino da Matemática, vista por muitos como uma disciplina difícil, uma estratégia que os professores utilizam é a inovação de suas metodologias. Para muitos professores ensinar não é apenas transmitir um conhecimento conteudista, mas sim criar recursos para alterar o processo de ensino e aprendizagem tradicional, em que se pressupõe única e exclusivamente a transmissão do conhecimento. Em busca dessa inovação, nós professores, devemos repensar nossa prática em sala de aula, criar estratégias para despertar o interesse dos alunos pela Matemática. Assim, propomos uma abordagem de ensino das Construções Geométricas (ou Desenho Geométrico) incorporando novos elementos como a inovação e investigação matemática na perspectiva de Ponte (1998).

Neste contexto, as oficinas aqui propostas são direcionadas a Professores de Matemática e Licenciandos em Matemática e têm como ponto de partida o desafio da reprodução e/ou criação de Mandalas. Os “desenhos das mandalas tem quase sempre uma estrutura geométrica, que divide o espaço em porções simétricas” (FIORAVANTI, 2003, p. 8). Mandalas geométricas se constituem por desenhos geométricos que se inscrevem uns aos outros resultando em um círculo ou quadrado compostos de repetição de padrões e a forma como são desenhadas depende de cada indivíduo.

Por se tratar de uma oficina de construções geométricas, pretendemos explorar as possibilidades dessas construções na construção das Mandalas. Como ferramentas, os participantes serão introduzidos à utilização da régua e compasso e do *software* GeoGebra.

O **objetivo** das oficinas será explorar a Geometria por meio da resolução de desafios que propõem os desenhos de objetos geométricos considerados complexos – neste caso, as Mandalas – e que, acreditamos, suscitam a necessidade de lançar mão de conhecimentos básicos de Construções Geométricas, procurando inverter o processo de abordagem tradicional do aprendizado de Construções Geométricas que parte da construção de elementos básicos – pontos, retas, segmentos – .

Faça sua inscrição!!



O minicurso de extensão será à distância em plataforma Moodle e videoconferência\* via Google Meet.

Carga horária: 8 horas por Módulo

Categoria: Mini Curso de Extensão com Certificado, registro nº 102721.

Modalidade: à distância

Participação gratuita | Vagas limitadas

\*Estão previstos encontros virtuais durante o mini curso.

Faça sua inscrição!!

Disponível em: <https://is.gd/cursodesafiosgeometricos>.

Início: a definir

#### Conteúdo Programático:

- Ponto médio e mediana
- Bissetriz e mediatriz
- Reta paralela e reta perpendicular
- Transferência da medida de um segmento
- Construção de triângulo equilátero
- Construção de circunferências tangentes externas
- Divisão de uma circunferência em 4 partes iguais
- Divisão de uma circunferência em 8 partes iguais

#### Carga horária

A carga horária prevista para a realização do mini curso é de 8 horas.

#### Recursos necessários

Para a realização dessas oficinas utilizaremos os seguintes recursos:

- Computador com o *software* GeoGebra;
- Acesso à internet;
- Régua e compasso.

#### Certificado

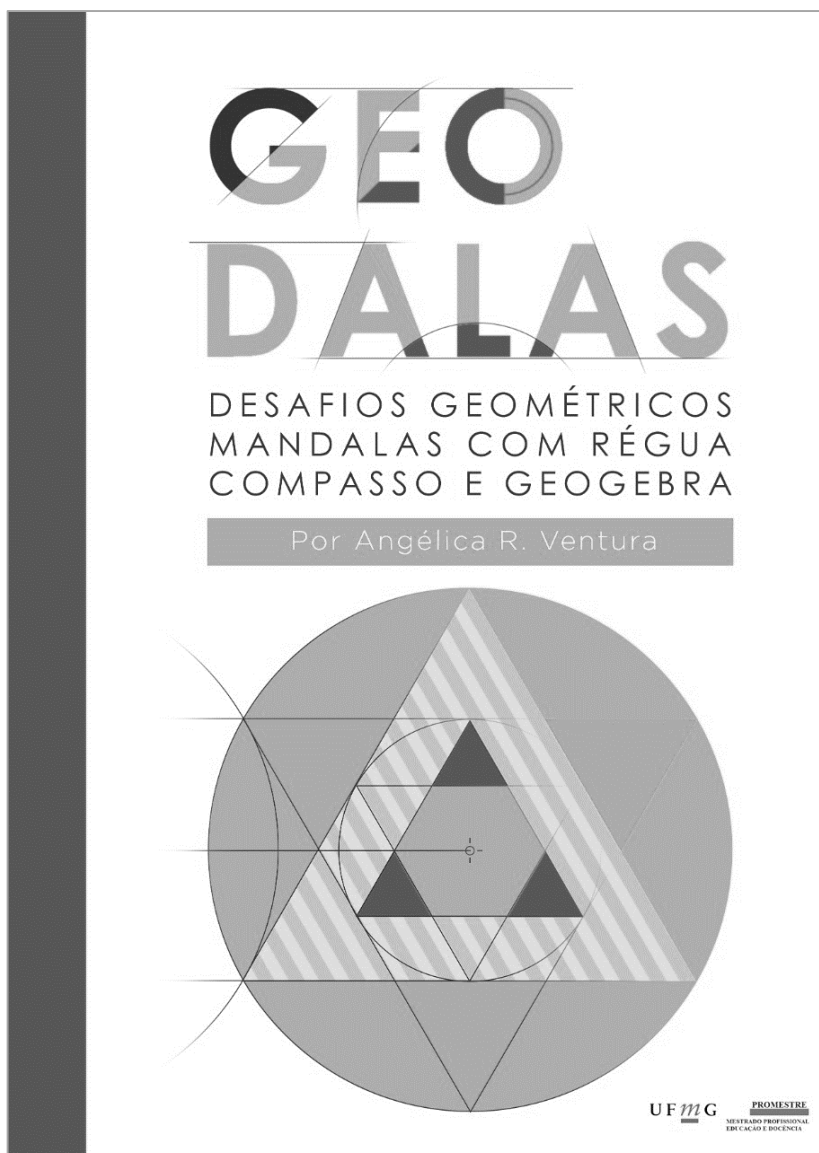
O certificado será emitido mediante aproveitamento mínimo de 75% das atividades propostas.

Faça sua inscrição!!

Ministrantes

Angélica Rodrigues Ventura

Teresinha Fumi Kawasaki

**APÊNDICE C – Recurso educativo**

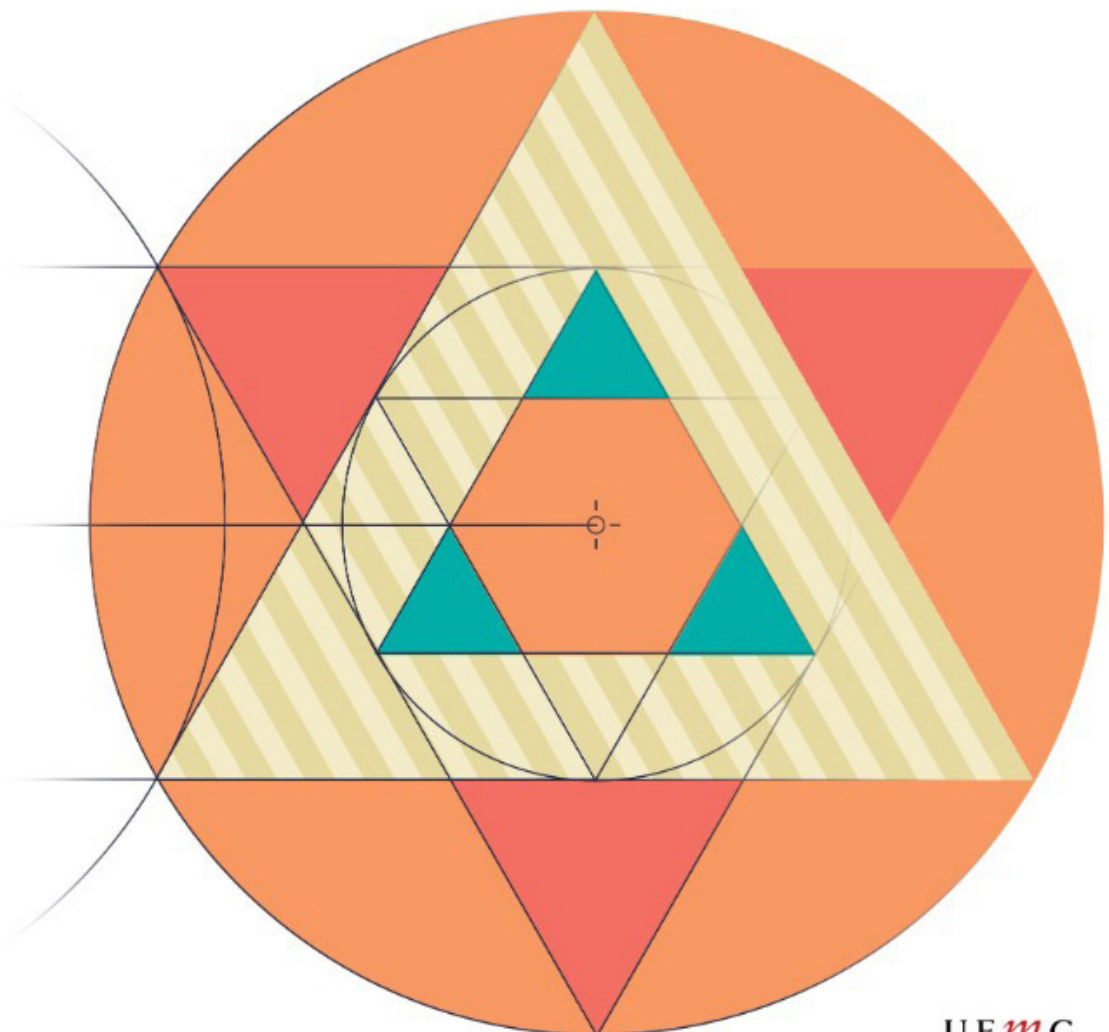


GEO

DALAS

DESAFIOS GEOMÉTRICOS  
MANDALAS COM RÉGUA  
COMPASSO E GEOGEBRA

Por Angélica R. Ventura



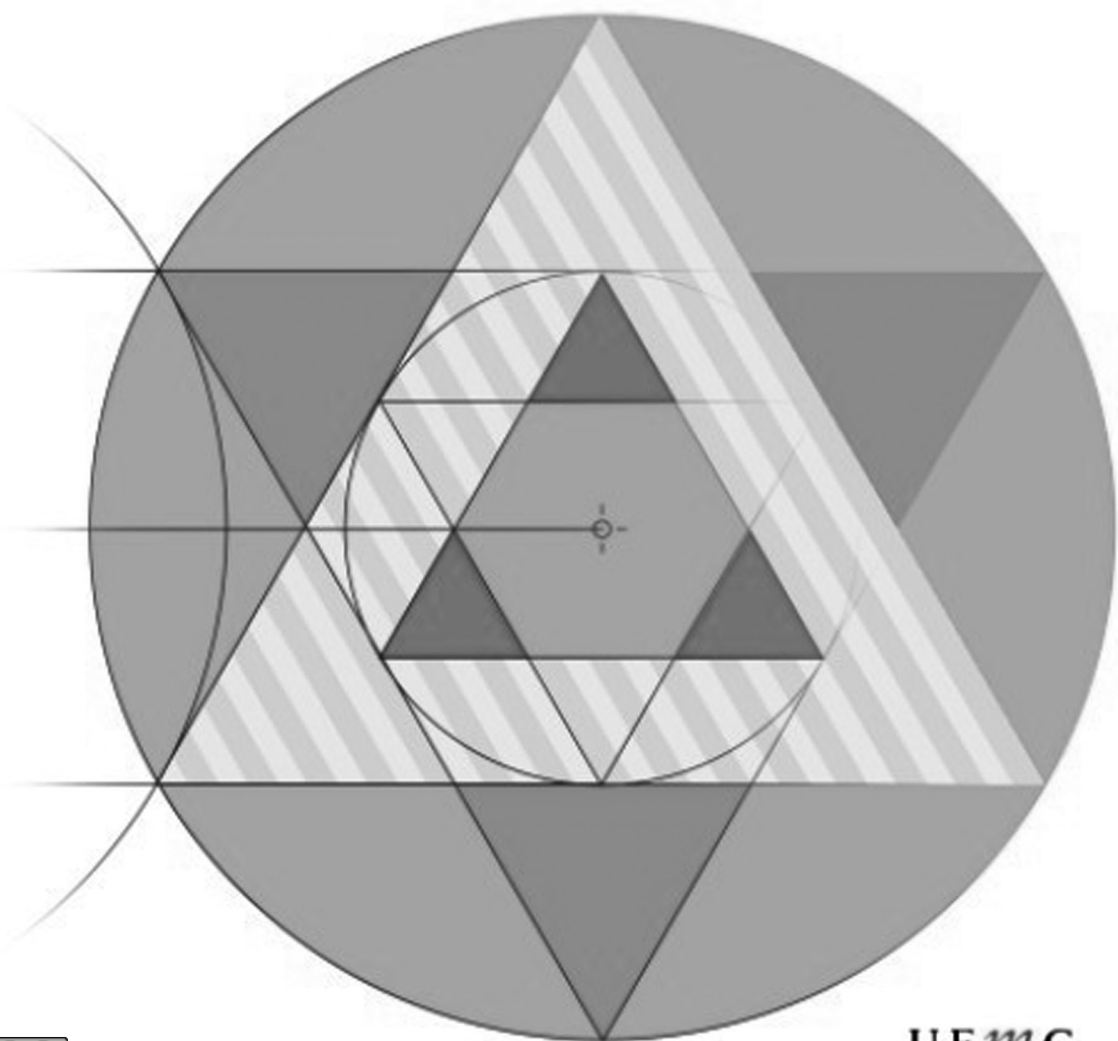


# GEO

# DALAS

DESAFIOS GEOMÉTRICOS  
MANDALAS COM RÉGUA  
COMPASSO E GEOGEBRA

Por Angélica R. Ventura



UFMG

UNIVERSIDADE FEDERAL  
DE MINAS GERAIS

PROMESTRE

GRADUADO EM  
EDUCAÇÃO E DOCÊNCIA



# Ficha técnica

## Recurso Educacional da pesquisa de Mestrado:

Fragmentos de uma Pesquisa - Desafios Geométricos, “régua e compasso” e GeoGebra: estudando Geometria por meio de construções de Mandalas Geométricas

## Universidade Federal de Minas Gerais

Reitora: Sandra Regina Goulart Almeida

Vice-Reitor: Alessandro Fernandes Moreira

## Programa de Mestrado Profissional em Ensino e Docência PROMESTRE – Faculdade de Educação da UFMG

Coordenadora: Teresinha Fumi Kawasaki

Subcoordenadora: Maria Amália de Almeida Cunha

## Linha de pesquisa

Educação Matemática

## Autora

Angélica Rodrigues Ventura

## Orientadora

Teresinha Fumi Kawasaki

## Projeto gráfico e diagramação

Luiza de Oliveira e Marcelo Paiva

V468g

Ventura, Angélica Rodrigues, 1981-  
Geodaldas [recurso eletrônico] : desafios geométricos -- mandalas com régua, compasso e GeoGebra / Angélica Rodrigues Ventura, Teresinha Fumi Kawasaki. - Belo Horizonte, [2022].  
[186 p.] : il., color.

[Recurso Educacional produzido em conjunto com a dissertação de mestrado da autora Angélica Rodrigues Ventura, orientada por Teresinha Fumi Kawasaki, com o título: "Fragmentos de uma pesquisa: [manuscrito] desafios geométricos, GeoGebra e "régua e compasso": estudando Geometria por meio de construções de mandalas geométricas. -- Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação].

Bibliografia: f. 107.  
[Anexos: f. 109-186].

1. Matemática -- Estudo e ensino . 2. Matemática -- Métodos de ensino.  
3. Geometria -- Estudo e ensino. 4. Geometria -- Ensino auxiliado por computador.  
5. GeoGebra (Recurso eletrônico). 6. Tecnologia educacional. 7. Ensino auxiliado por computador. 8. Mandala -- Desenho por computador -- Estudo e ensino.

I. Título. II. Kawasaki, Teresinha Fumi, 1960-. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Faculdade de Educação.

CDD- 516.007

Catálogo da fonte: Biblioteca da FaE/UFMG (Setor de referência)

Bibliotecário: Ivanir Fernandes Leandro CRB: MG-002576/O



# Sumário

<b>APRESENTAÇÃO</b> .....	<b>07</b>
1. O PORQUÊ DA GEOMETRIA .....	11
2. MAS O QUE SÃO MANDALAS? .....	15
3. DESAFIOS GEOMÉTRICOS – GEODALAS .....	19
DESAFIO I .....	23
DESAFIO II .....	33
DESAFIO III .....	43
ORIGAMI .....	52
DESAFIO IV .....	55
DESAFIO V .....	65
DESAFIO VI .....	75
<b>APOIO A(O) PROFESSOR(A)</b> .....	<b>87</b>
I. CONSTRUINDO NO GEOGEBRA .....	91
Restringindo ferramentas .....	92
Ordenando as construções .....	92
Sobrepondo uma construção a outra .....	94
Alterando a cor e transparência das construções .....	94
II. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS NO GEOGEBRA .....	99
III. KIT COMPONDO SUA MANDALA .....	103
<b>AUTORAS</b> .....	<b>105</b>
<b>REFERÊNCIA</b> .....	<b>107</b>
<b>MATERIAL DE APOIO PARA IMPRESSÃO</b> .....	<b>109</b>
Desafios Geométricos - Folhas de Atividades.....	113
Construções Geométricas Fundamentais no GeoGebra - Cartões .....	139
Kit Compondo sua Mandala - Peças.....	171





# APRESENTAÇÃO

## Caros professores e professoras,

No ensino da Matemática, considerada uma disciplina “difícil”, uma boa estratégia é a diversificação das metodologias de ensino. Nesse sentido, ensinar não se restringe à práticas de transmissão de conhecimento, mas pensar, planejar e criar novos recursos procurando alterar o processo de ensino e aprendizagem tradicional. Nessa direção, eu, uma professora de matemática, pesquisadora em formação, passei a repensar a minha prática em sala de aula e procurei criar estratégias para despertar o interesse dos alunos pela aprendizagem de Geometria. Assim, eu e minha orientadora, propomos uma abordagem de ensino de Geometria por meio das Construções Geométricas – ou Desenho Geométrico, incorporando o uso das ferramentas tradicionais – régua e compasso –, de tecnologias computacionais e da investigação matemática na construção de Mandalas, reunidas em algumas atividades aqui designadas por Desafios Geométricos.

Tais Desafios Geométricos intencionam colocar os estudantes diante de situações onde estratégias de investigação devem/podem ser estabelecidas, visando proporcionar ao estudante a experimentação e a visualização de conceitos geométricos. Acreditamos que essa prática fomenta o domínio desses conceitos geométricos de forma gradativa e objetiva estimular o estudante a estabelecer uma sequência lógica de raciocínio procurando conectar as propriedades relacionadas aos conceitos estudados.

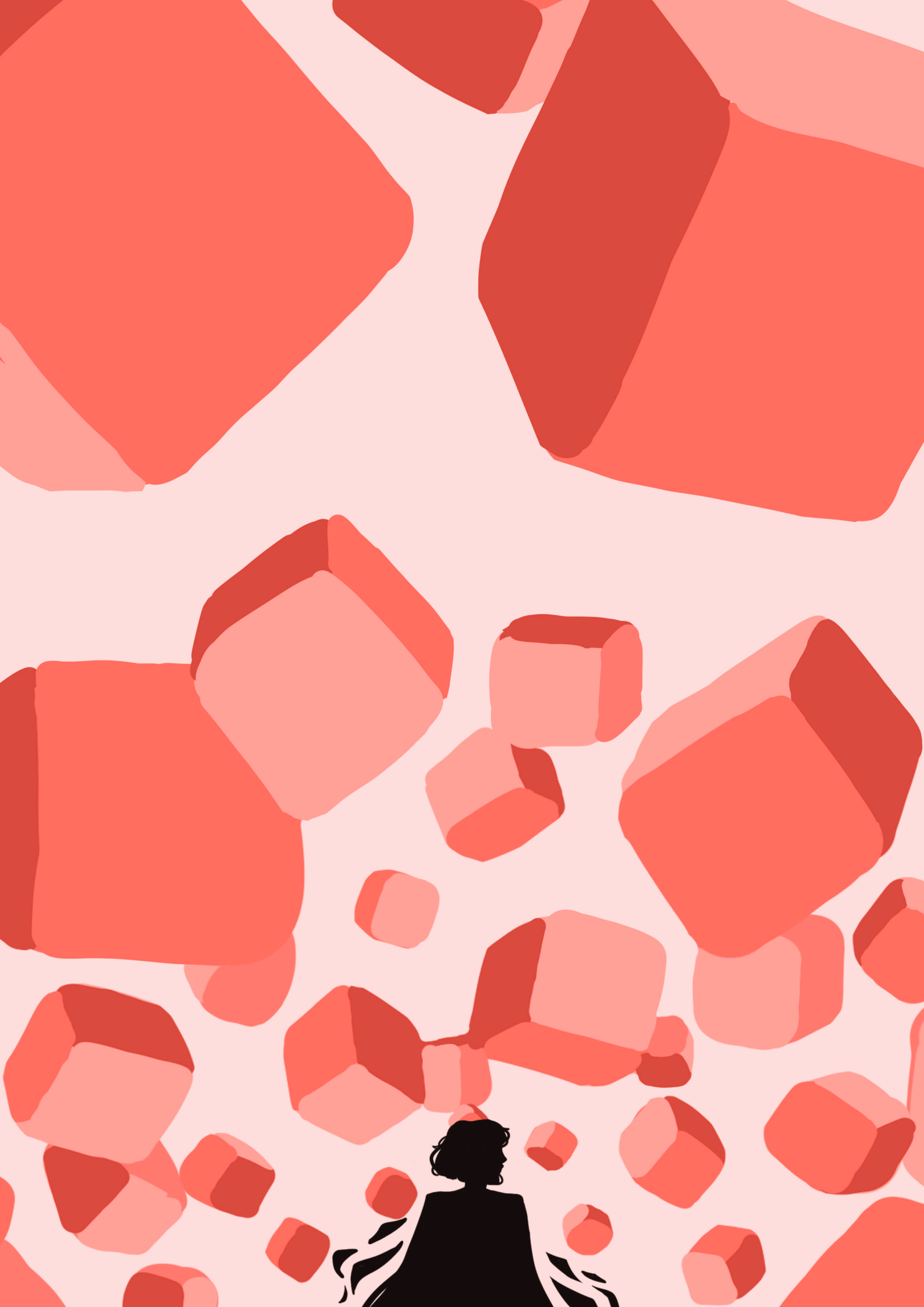
Este livro é fruto da pesquisa **Fragmentos de uma Pesquisa - Desafios Geométricos, “régua e compasso” e GeoGebra: estudando Geometria por meio de construções de Mandalas Geométricas**, realizado no âmbito do Mestrado Profissional em Educação e Docência – PROMESTRE, FaE/UFMG, na linha de pesquisa Educação Matemática sob orientação da Profa. Dra. Teresinha Fumi Kawasaki. Nossos Desafios foram idealizados tomando como base o trabalho *Constructions was MUCH better this year!* de Lisa Bejarano de 2015<sup>1</sup>. Lisa teve por objetivo melhorar o ensino de construções geométricas em suas turmas, e esse também é nosso objetivo, trazer a você professor(a) uma nova possibilidade de abordagem da Geometria.

Os **Desafios Geométricos – GEODALAS** serão apresentados em forma de Oficinas, com uma sugestão de resolução para cada Mandala no GeoGebra, acompanhados de comentários sempre que necessário. Contudo, escolhemos aqui o uso do GeoGebra, utilizando somente as ferramentas **régua e compasso**, pelo fato de que originariamente, todas as construções geométricas da Geometria Plana podem ser feitas utilizando apenas essas duas ferramentas. Com isso, os leitores poderão reproduzir tais construções na mídia “lápis e papel”. Preparamos também alguns vídeos, hospedados no Youtube, arquivos do geoGebra, que poderão ser acessados por meio do respectivo QR Code.

Desejamos que este livro possa ajudar você a ter um olhar diferenciado sobre o ensino da Geometria. Sugerimos que, sempre que julgar necessário, faça adequações do material à realidade da sua sala de aula.

Bom trabalho!  
Angélica Rodrigues Ventura

<sup>1</sup> BEJARANO, L. **Constructions was MUCH better this year!** Crazy math teacher lady. 2015. Disponível em: <https://crazymathteacherlady.wordpress.com/2015/09/16/constructions-was-much-better-this-year/>.





# 1. O PORQUÊ DA GEOMETRIA

“Geometria valoriza o descobrir, o conjecturar e o experimentar” (LORENZATO, 1995, p.6)

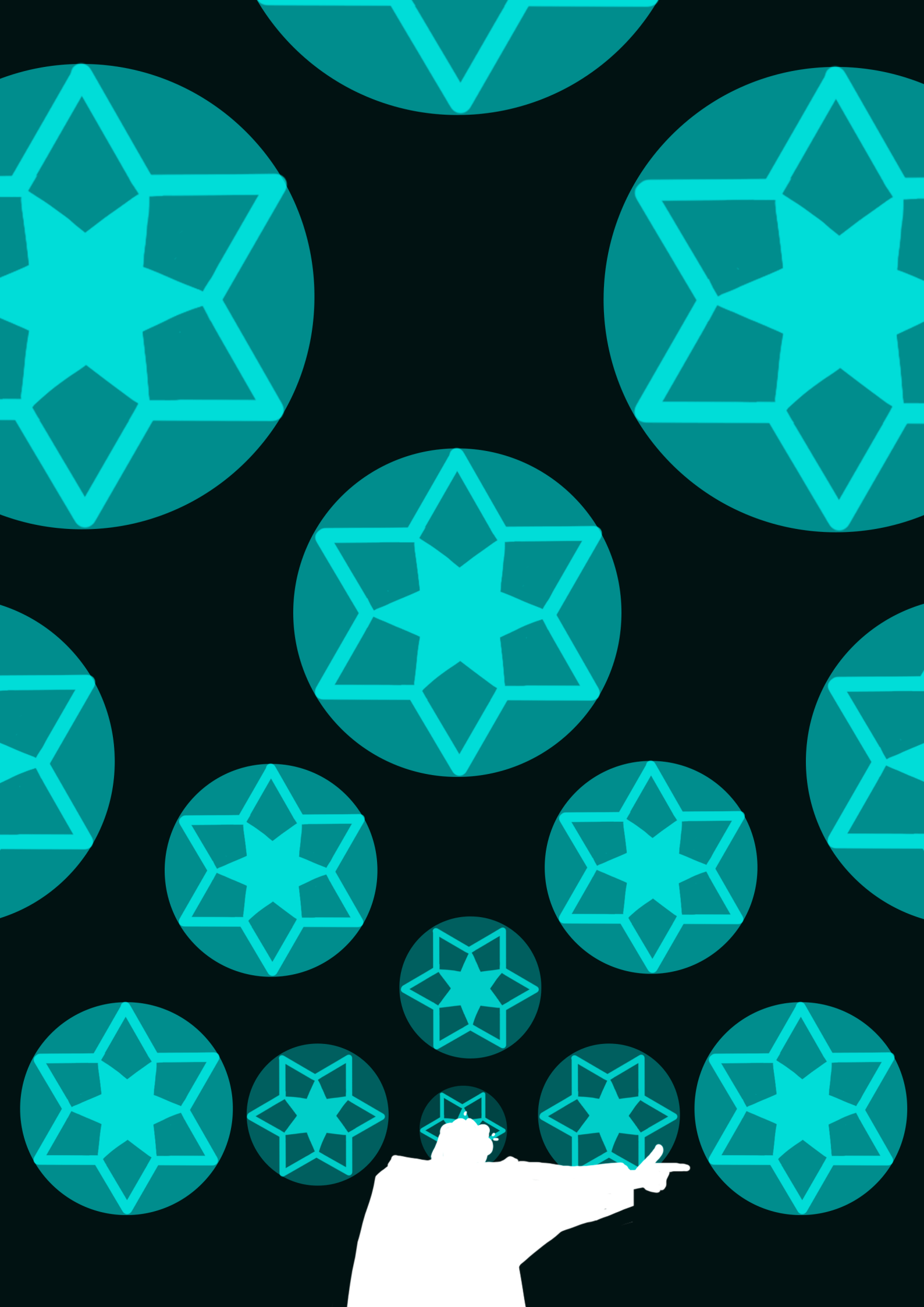
Mesmo não querendo ou percebendo, a Geometria está presente no nosso dia a dia. Nosso entorno é constituído por infinitas formas e imagens, estando presentes em tudo, na natureza, nas construções civis, nas artes... e quando paramos para analisar estas formas estamos lidando com algumas ideias de paralelismo, perpendicularismo, congruência, semelhança, medição e simetria diariamente.

Inúmeros são os argumentos sobre a importância de se ensinar e aprender Geometria, por isso o professor(a) de Matemática deve se apropriar de metodologias que propiciem um pensamento exploratório-investigativo, e os *softwares* de geometria dinâmica mediam esse processo de ensino e aprendizagem. Entre as várias possibilidades, estes recursos nos proporcionam a multiplicidade de representações dos objetos geométricos.

Nesse contexto, este livro apresenta uma proposta de estudo da Geometria, mais especificamente as Construções Geométricas, com o objetivo de estimular um pensamento exploratório. Aliada a essa proposta, proponho o uso do *software* de matemática dinâmica GeoGebra.

**Mas por que o GeoGebra?** O GeoGebra é um *software* de matemática dinâmica, gratuito que integra Geometria (Geo) e Álgebra (Gebra). Com ele é possível traçar objetos geométricos dos mais simples aos mais complexos que possam ser construídos com régua e compasso. Por exemplo, segmentos de retas perpendiculares e retas paralelas, circunferências, ângulos e medir segmentos além de ser possível construir todas as figuras da geometria elementar. O dinamismo do programa nos possibilita experimentar e visualizar alguns conceitos da geometria; com isso, de alguma forma acabamos por “dar forma” ao que antes era considerado abstrato. É um *software* bastante flexível e amigável.









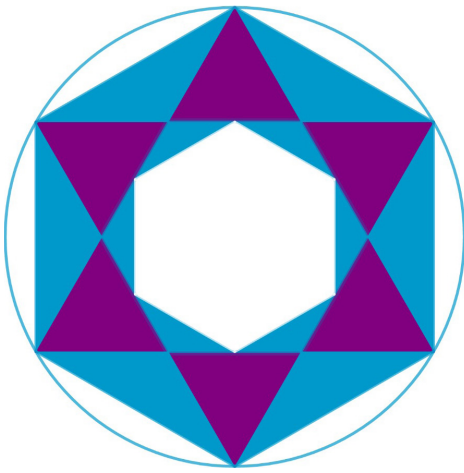
## 2. MAS O QUE SÃO MANDALAS?

Mandala é uma palavra do sânscrito e significa “círculo”. Se caracterizam por desenhos ou estruturas dispostos(as) de forma concêntrica. Ou seja, que se desenvolvem a partir de um mesmo centro. A forma circular na construção de uma Mandala é a regra caracterizada ainda pela simetria e repetição das formas.

Podemos classificar as mandalas a partir da sua origem, finalidade e formação. Fioravanti (2003, p. 9) diz, quanto a sua origem, que elas são classificadas em orientais e ocidentais. As Mandalas ocidentais são normalmente utilizadas como adornos arquitetônicos e em decoração, sua finalidade nesse caso é o profano. Já as Mandalas orientais são quase sempre de cunho religioso, nesse caso são mais conhecidas por Rosáceas, sua finalidade é o sagrado. Historicamente, as Mandalas se constituem como uma das mais antigas inscrições e grafismo da humanidade.

Nosso foco na construção das Mandalas é quanto a sua formação caracterizada pelas formas geométricas.

**Mandalas Geométricas** se constituem por desenhos geométricos que se inscrevem uns aos outros, resultando em um círculo ou em um quadrado, desvelando em repetição de padrões. Na construção de uma Mandala Geométrica é requerido o conhecimento de vários conceitos da geometria plana – circunferência, segmento, ponto médio, mediatriz, bissetriz, retas paralelas, retas perpendiculares – além dos princípios de divisão de uma circunferência em partes iguais que possibilita o desenho de polígonos regulares, inscritos ou circunscritos, e de polígonos estrelados na circunferência.



As Mandalas Geométricas são simétricas e embora existam diferentes tipos de simetria, trabalharemos apenas com dois tipos: simetria radial e simetria axial. A maioria das Mandalas possuem simetria radial, que consiste na rotação de alguns elementos em torno de um certo eixo, ou seja, os elementos se repetem em volta desse eixo. Já a simetria axial acontece quando dividimos a mandala em seu eixo de simetria e obtemos imagem espelhada.



Escaneie e assista a construção de algumas mandalas





### 3. DESAFIOS GEOMÉTRICOS – GEODALAS

A Oficina **Desafios Geométricos – GEODALAS** tem como ponto de partida o desafio da reprodução e/ou criação de Mandalas, por meio das Construções Geométricas – ou Desenho Geométrico. Para isso, foram escolhidas Mandalas Geométricas que, acredito, possam instigar a investigação por colocar os alunos diante de desafios geométricos em que estratégias de investigação devem/podem ser estabelecidas. Por este motivo, sugiro fortemente que os professores(as) no momento da oficina deem espaço para os alunos pensarem e formularem suas próprias respostas de forma coletiva (entre eles) com criatividade e autonomia.

A oficina foi planejada para trabalhar conteúdo da grade curricular de geometria de forma contextualizada, utilizando ferramentas como régua e compasso e, também, o *software* GeoGebra. O critério na escolha das Mandalas foi o conjunto de propriedades geométricas envolvidas em sua construção. Por essa razão, a minha sugestão é que o professor(a) proponha os Desafios em módulos, uma construção de Mandala por vez.

A estrutura metodológica e os conteúdos específicos para cada Desafio estão descritos de forma detalhada na descrição da Oficina. Ressalta-se que apresento uma sugestão de aplicação, mas fica a cargo do professor(a) adequá-la à realidade da sua sala de aula.

## Objetivos dos Desafios

Explorar a Geometria plana por meio da resolução de desafios que suscitam conhecimentos sobre Construções Geométricas;

Estimular o pensamento geométrico e o raciocínio lógico;

Reforçar conceitos de geometria;

Reproduzir e criar Mandalas usando figuras geométricas planas;

Manipular ferramentas de desenho geométrico: régua e compasso e o *software* GeoGebra.

## Recursos necessários

Régua, compasso, lápis, caneta e papel;

Textos impressos com os enunciados dos desafios para realização das atividades;

Computadores com o *software* GeoGebra instalado e acesso à internet.

## Metodologia - Sugestão ao professor(a)

Apresento aqui uma proposta para trabalhar os desafios em sala de aula.

### Momento 1 – Apresentação da oficina e explicação sobre Mandala Geométrica

Explicar a proposta da oficina, além de explicar o que são as Mandalas Geométricas. Pode-se iniciar com os questionamentos: O que são mandalas? O que caracteriza uma mandala geométrica?

### Momento 2 – Organização dos grupos e distribuição das atividades

Após o momento inicial, solicitar aos estudantes que se organizem em grupos de no máximo 5 pessoas sugerindo que trabalhem de forma coletiva/colaborativa, pois, espera-se que haja engajamento mútuo entre os alunos. Distribuir as atividades do Desafio Geométrico.

### Momento 3 – Desafio Geométrico: Régua e compasso

Com os grupos já divididos, propor que os estudantes discutam entre si uma forma de construir a Mandala: que figuras geométricas estão envolvidas? Como elas estão dispostas com relação às outras? Tomar notas dos passos seguidos para posteriormente socializar com a turma.

Neste momento, a expectativa é de que os estudantes exponham em grupo os seus *insights* na resolução do desafio, sem rigor matemático. Com base nesses *insights*, o(a) professor(a) deve orientar para que eles desenvolvam também uma construção geométrica da Mandala utilizando régua e compasso.

#### **Momento 4 – Apresentação das conclusões dos participantes**

Cada grupo apresentará a forma como reproduziu a Mandala. Os alunos deverão descrever o seu entendimento sobre a construção. Neste momento, será aberta à turma um debate sobre as construções realizadas.

#### **Momento 5 – Desafio Geométrico: GeoGebra**

Antes de dar início a essa parte, poderão ser apresentadas algumas funcionalidades do GeoGebra, caso os alunos não tenham familiaridade com o *software*; para isso, foi disponibilizado um mini tutorial com algumas funcionalidades do GeoGebra.

A partir das construções feitas anteriormente partiremos para o uso do GeoGebra. Neste momento, cada grupo deverá reproduzir a Mandala no GeoGebra, utilizando os passos feitos inicialmente ou, se desejarem, partindo de uma nova estratégia de construção.

Solicitar a cada grupo que compartilhe a forma como reproduziu a Mandala no GeoGebra. Neste momento, será aberta à turma uma discussão sobre as construções realizadas fazendo um comparativo com a construção com régua e compasso.









# DESAFIO







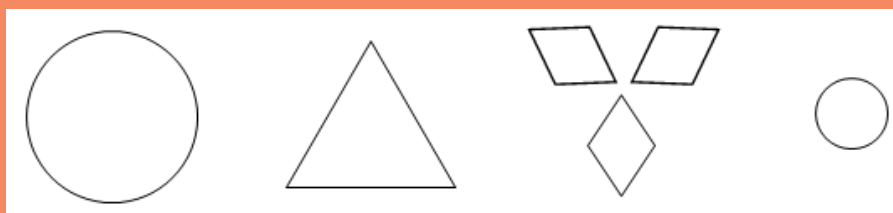
Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?

Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?

Faça você mesmo a composição<sup>2</sup> da Mandala.

<sup>2</sup> Foram disponibilizadas peças para compor esta Mandala (Kit de montagem)

# PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO DESAFIO GEOMÉTRICO I



## Figuras que compõem esta mandala

- uma circunferência grande que é a base desta Mandala, ou seja, circunferência base.
- um triângulo
- três losangos
- uma circunferência menor

O exercício de decompor a Mandala tem como objetivo despertar insights sobre os objetos e conceitos da geometria plana que poderão se fazer necessários para sua construção.

**Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?**

Observamos inicialmente um triângulo inscrito na circunferência base.

Três losangos: cada losango tem um dos vértices sobre a circunferência e o vértice oposto sobre o centro da mesma circunferência.

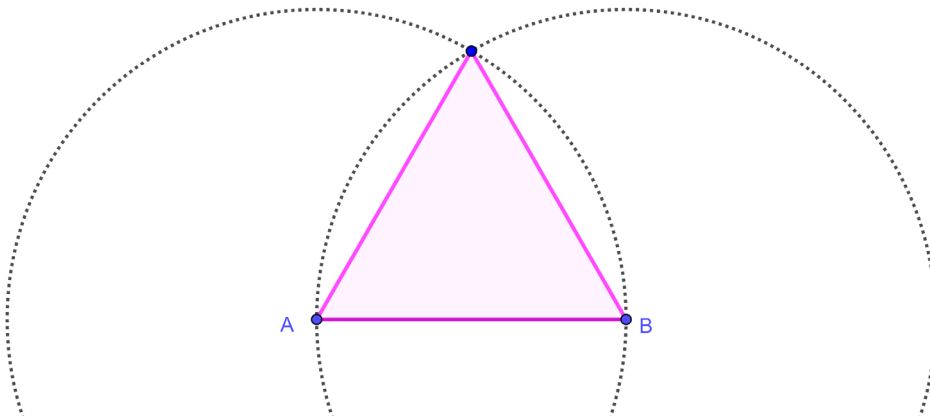
E, por último, uma circunferência menor concêntrica à circunferência maior.

**Com essas informações já podemos começar a construir...**

*Nesta Mandala poderíamos iniciar a construção pela circunferência base, mas o design da Mandala nos inspira a iniciar esse desenho pela construção do triângulo equilátero.*

#### Etapa I – construção do triângulo equilátero

- I. Trace um segmento de reta  $\overline{AB}$ . Este será um dos lados do triângulo inscrito na circunferência base.
- II. Para definir o terceiro vértice, trace duas circunferências com raio  $\overline{AB}$ , uma com centro em  $A$  e outra com centro em  $B$ ;
- III. As circunferências se interceptam em dois pontos. Marque esses pontos;
- IV. Escolha um dos pontos e trace segmentos unindo os pontos  $A, B$  e o ponto de interseção escolhido. Da união desses pontos temos um **triângulo equilátero**.



## Etapa II – construção da circunferência base

- Primeiro, vamos discutir a posição relativa do triângulo equilátero em relação à circunferência base:

O triângulo equilátero está inscrito na circunferência base, logo, seus vértices são pontos pertencentes à circunferência.

O centro da circunferência base, que circunscribe o triângulo, é o **circuncentro** (interseção das **mediatrizes** dos lados do triângulo).

Por ser um triângulo equilátero o **circuncentro**, o **incentro** (interseção das **bissetrizes** internas), o **ortocentro** (interseção das **alturas** relativas aos lados) e também o **baricentro** (interseção das **medianas**) coincidem. Neste caso, este ponto dista da base  $\frac{1}{3}$  de sua altura.

- Seguindo essas observações, vamos iniciar o traçado da circunferência base.

I. Para definir o centro do triângulo, o **circuncentro**, vamos traçar as **mediatrizes** relativas aos lados. Observe que a primeira **mediatriz** foi já definida na construção do triângulo. Para evidenciá-la, basta traçar uma reta passando pelos pontos de interseção das duas circunferências;

Nesta parte podemos chamar atenção para as características da reta mediatriz de um segmento: ela passa pelo ponto médio do segmento, divide esse segmento em duas partes iguais e, neste caso, por estarmos trabalhando com um triângulo equilátero coincide com a mediana desse triângulo.

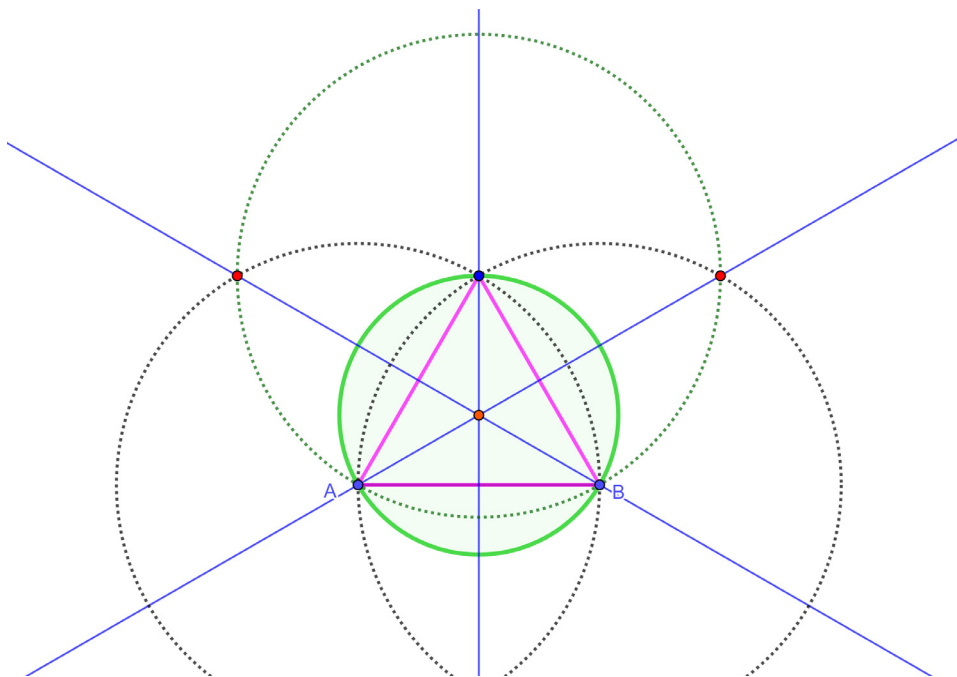
II. Para traçar a segunda e terceira **mediatrizes**, vamos construir uma circunferência de raio  $\overline{AB}$  e centro no vértice oposto ao lado AB;

III. Marque os pontos de interseção dessa circunferência com as duas circunferências traçadas anteriormente;

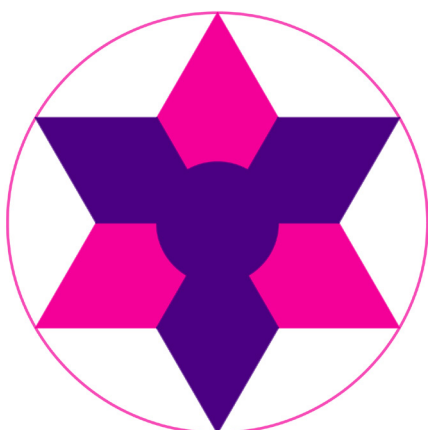
IV. Trace as retas **mediatrizes**, uma por vez, unindo os dois pontos de interseção de cada duas circunferências;

V. Observe que todas as **mediatrizes** se interceptam em um único ponto. Marque esse ponto. Este é o **circuncentro**, ou seja, o centro da circunferência que circunscribe o triângulo;

VI. Defina como raio da circunferência base a distância entre o **circuncentro** do triângulo e um dos vértices do triângulo e trace, a partir do **circuncentro**, a circunferência base.



### Voltemos à Mandala.



Temos três losangos no interior da circunferência base. Todos têm um vértice em comum no centro da circunferência. Além dessa característica, cada losango tem dois vértices pertencentes ao triângulo equilátero, um vértice pertence à circunferência e também a uma das mediatrizes do triângulo.

#### Etapa III – construção dos losangos internos à circunferência base

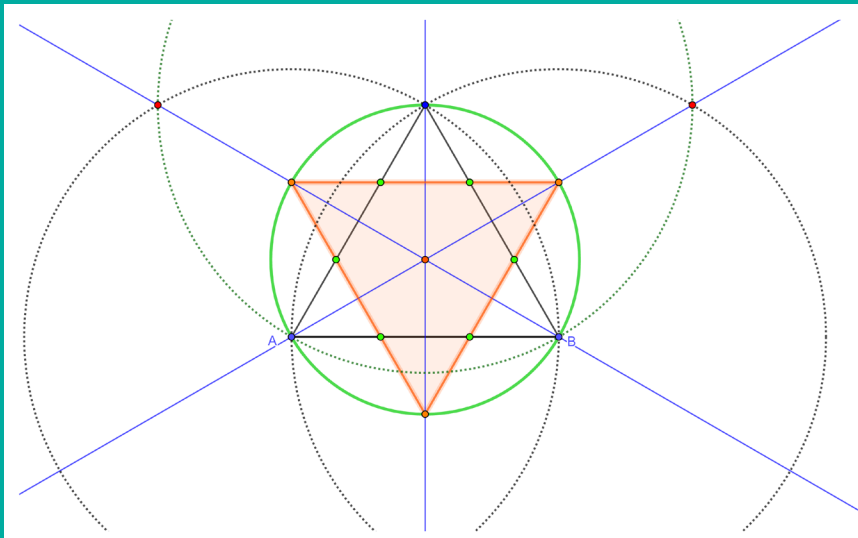
» Percebemos que a Mandala possui simetria radial ao analisarmos a posição dos losangos em relação ao triângulo equilátero. Nota-se que seus vértices estão a uma mesma distância um dos outros em torno do centro da circunferência.

- Seguindo essas observações, vamos construir outro triângulo equilátero com mesmo centro e invertido em relação ao triângulo já traçado.

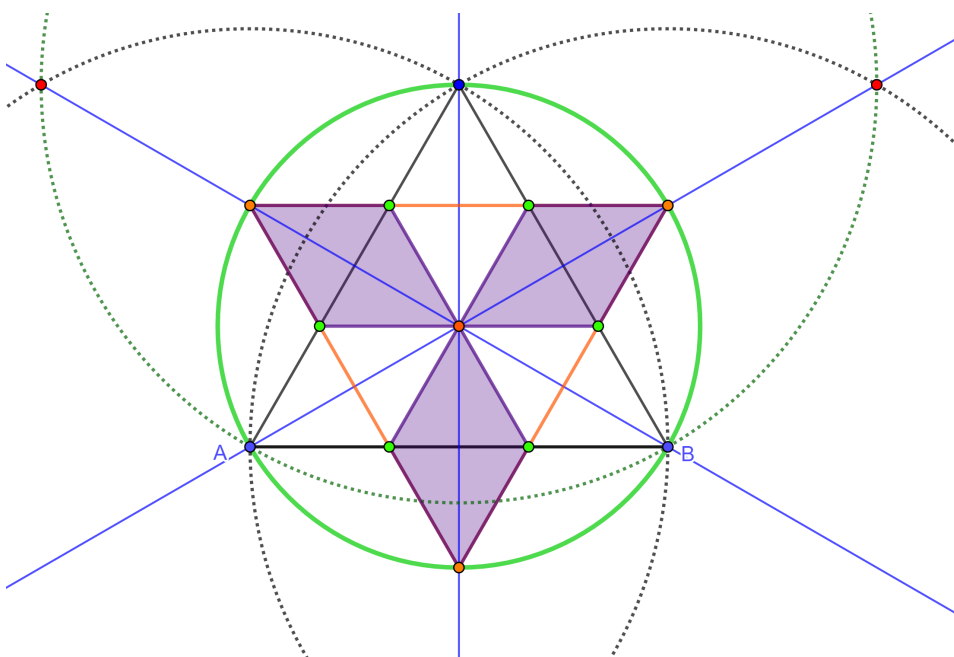
I. Para construirmos este triângulo equilátero vamos marcar os pontos de interseção entre a circunferência base e as três **mediatrizes**. Este ponto será um dos vértices do losango;

II. Trace segmentos unindo esses três pontos formando um triângulo equilátero invertido em relação ao primeiro triângulo traçado;

III. Vamos definir mais dois vértices do losango, os que pertencem aos lados do triângulo equilátero. Para isso, marque os pontos de interseção entre os dois triângulos;



IV. Trace segmentos unindo o vértice do segundo triângulo, os pontos de interseção entre os triângulos e o centro da circunferência (quarto vértice do losango), formando os losangos.





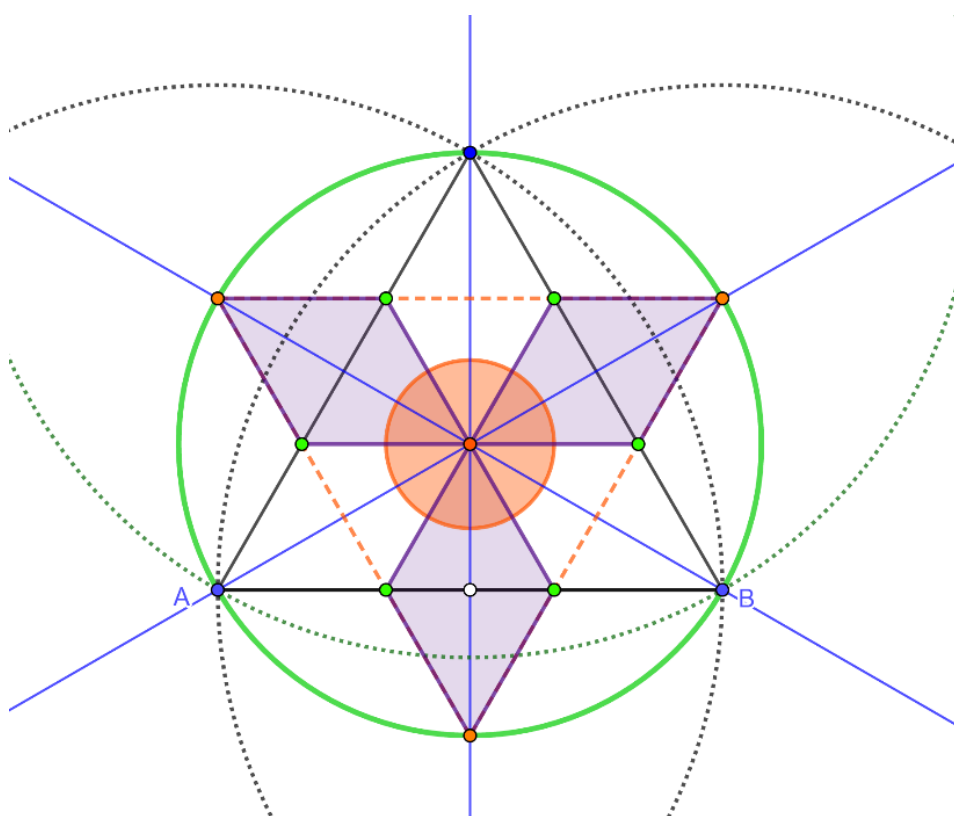
**Pra finalizar nossa construção, vamos construir a circunferência central.**

#### Etapa IV – construção da circunferência central

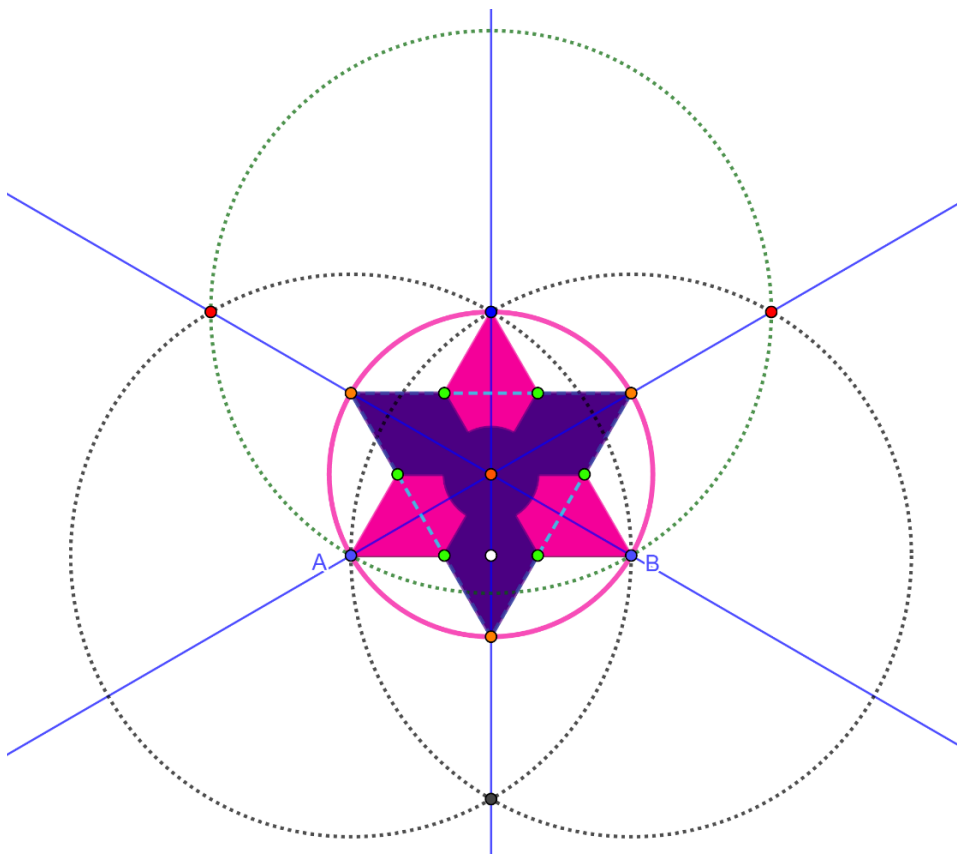
» Como sabemos, as Mandalas Geométricas possuem simetria e são construídas seguindo padrões, desse modo, na construção da circunferência central optamos por padronizar a medida do raio.

I. Para definirmos o raio da circunferência central vamos marcar o **ponto médio** referente a um dos lados do primeiro triângulo equilátero construído. Para isso, vamos marcar o ponto de interseção entre uma das **mediatrizes** e um dos lados desse triângulo;

II. Vamos definir o raio como a distância entre o **ponto médio** e um dos vértices do losango que pertencem ao primeiro triângulo equilátero traçado. O centro dessa circunferência será o **circuncentro** da circunferência base. Trace a circunferência.



Nossa construção está finalizada! Agora vamos mudar as cores, alterar as camadas de construção para sobrepor as figuras e ocultar alguns elementos de construção.



### Na construção desta Mandala exploramos...

- Ponto médio, mediatriz, bissetriz e altura
- Incentro, circuncentro, ortocentro e baricentro
- Triângulo equilátero
- Triângulo equilátero inscrito na circunferência
- Circunferências tangentes
- Divisão de uma circunferência em 3 partes congruentes

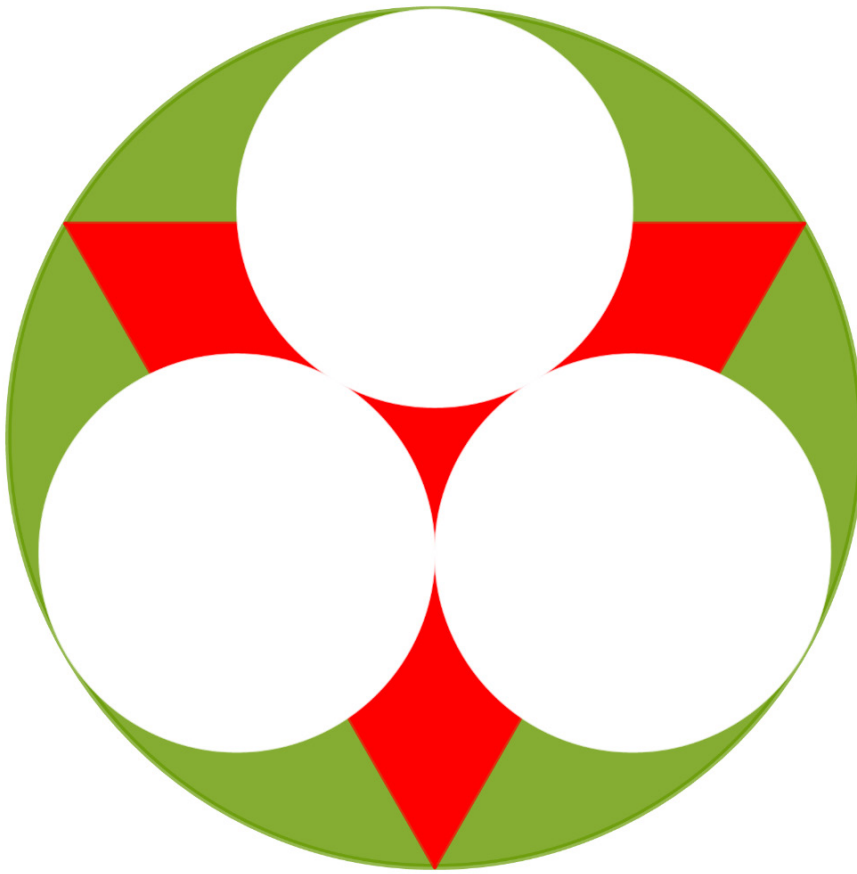


Escaneie e  
assista a  
construção  
desta mandala

The background is a solid orange color. It features several overlapping circles of varying shades of orange, creating a layered effect. Two prominent vertical white bars are positioned in the lower half of the image, one on the left and one on the right, partially overlapping the circles.

**DESAFIO**





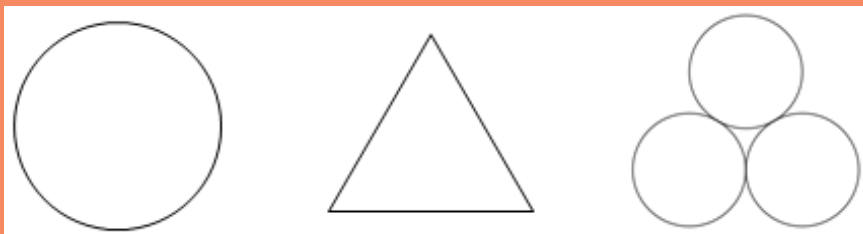
Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?

Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?

Faça você mesmo a composição<sup>3</sup> da Mandala.

<sup>3</sup> Foram disponibilizadas peças para compor esta Mandala (Kit de montagem)

# PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO DESAFIO GEOMÉTRICO II



## Figuras que compõem esta mandala

- uma circunferência grande que é a base desta Mandala, ou seja, circunferência base.
- um triângulo
- três circunferências menores e de mesmo tamanho que se tangenciam

O exercício de decompor a Mandala tem como objetivo despertar insights sobre os objetos e conceitos da geometria plana que poderão se fazer necessários para sua construção.

**Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?**

Observamos inicialmente um triângulo inscrito na circunferência base.

Três circunferências menores tangentes entre si: cada circunferência tangencia a circunferência base internamente.

**Com essas informações já podemos começar a construir...**

*Nesta Mandala poderíamos iniciar a construção pela circunferência base, mas o design da Mandala nos inspira a iniciar esse desenho pelas três circunferências menores que são tangentes entre si.*

Etapa I – construção das três circunferências tangentes entre si

- Primeiro, vamos discutir a posição relativa destas circunferências tangentes em relação ao triângulo e à circunferência base:

As três circunferências menores, tangentes entre si, tangenciam internamente a circunferência base.

Cada circunferência menor está sobre um lado do triângulo.

- Seguindo essas observações, vamos iniciar o traçado das circunferências tangentes.

» Vamos começar construindo um triângulo equilátero, onde seus vértices serão os centros das circunferências tangentes.

I. Trace um segmento de reta  $\overline{AB}$ . Este será um dos lados do triângulo equilátero;

II. Para definir o terceiro vértice, trace duas circunferências com raio  $\overline{AB}$ , uma com centro em  $A$  e outra com centro em  $B$ ;

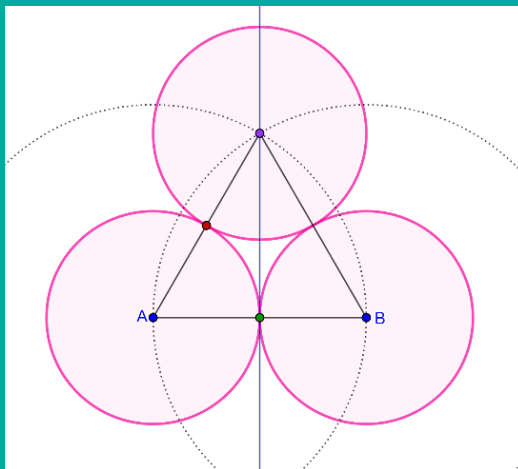
III. As circunferências se interceptam em dois pontos. Marque esses pontos;

IV. Escolha um dos pontos e trace segmentos unindo os pontos  $A$ ,  $B$  e o ponto de interseção escolhido. Da união desses pontos temos um **triângulo equilátero**.

V. Para definir o raio das circunferências, vamos traçar a **mediatriz** referente ao segmento  $\overline{AB}$ . Observe que a **mediatriz** já foi definida na construção do triângulo. Para evidenciá-la, basta traçar uma reta passando pelos pontos de interseção das duas circunferências;

VI. Marque o ponto de interseção entre a **mediatriz** e o segmento  $\overline{AB}$ ;

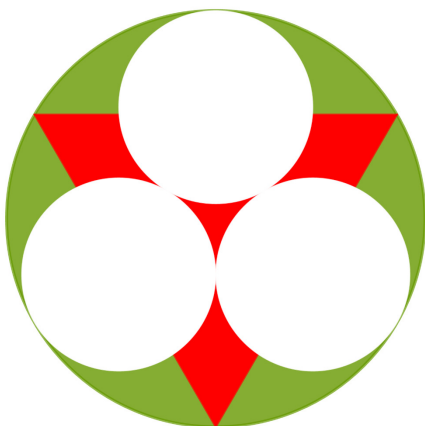
Nesta parte podemos chamar atenção para o fato de o ponto de interseção ser o ponto médio relativo ao segmento  $\overline{AB}$  e por se tratar de um triângulo equilátero a reta traçada desde o vértice à base é também mediana, mediatriz, bissetriz e altura desse triângulo.



VII. Defina como raio a distância entre o ponto médio referente ao segmento  $\overline{AB}$  e seu vértice adjacente, pontos  $A$  e  $B$ ;

VIII. Com centro em cada um dos vértices do triângulo trace três **circunferências tangentes entre si**.

**Voltemos à Mandala.**



Temos um triângulo equilátero inscrito na circunferência base, logo, seus vértices são pontos pertencentes à circunferência, além de seus centros coincidirem.



## Etapa II – construção da circunferência base

» O centro da circunferência base, que circunscreve o triângulo, é o **circuncentro** (interseção das **mediatrizes** dos lados do triângulo).

Nesta parte podemos chamar atenção ao fato de que em um triângulo equilátero, o incentro (interseção das bissetrizes internas), o circuncentro (interseção das mediatrizes dos lados), o ortocentro (interseção das alturas relativas aos lados) e também o baricentro (interseção das medianas) coincidem.

• Seguindo essas observações, vamos iniciar o traçado da circunferência base.

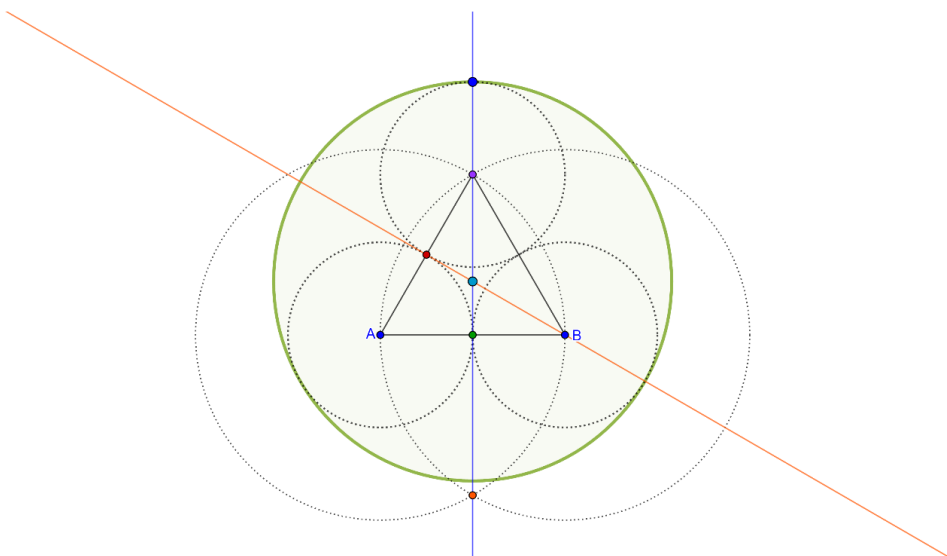
I. Para definir o centro do triângulo equilátero, o **circuncentro**, vamos traçar a segunda **mediatriz** relativa ao lado do triângulo construído anteriormente. Para traçá-la vamos marcar o ponto de interseção entre duas circunferências tangentes, referentes a outro lado do triângulo:

II. Trace a reta **mediatriz** unindo esse ponto de interseção ao vértice oposto;

III. Observe que as **mediatrizes** se interceptam em um único ponto. Marque esse ponto; este é o **circuncentro**, ou seja, o centro da circunferência que circunscreve o triângulo;

IV. Para definir o raio da circunferência base, vamos marcar o ponto interseção, ponto superior, entre uma das circunferências tangentes com a **mediatriz**.

V. Defina como raio da circunferência base a distância entre o **circuncentro** do triângulo e este ponto de interseção e trace, a partir do **circuncentro**, a circunferência base.



Pra finalizar nossa construção, vamos construir o triângulo inscrito na circunferência.

Etapa III – construção do triângulo equilátero inscrito na circunferência

I. Para definir o primeiro vértice do triângulo equilátero vamos marcar o ponto de interseção entre a circunferência base e a **mediatriz** que usamos como referência para definir o raio da circunferência;

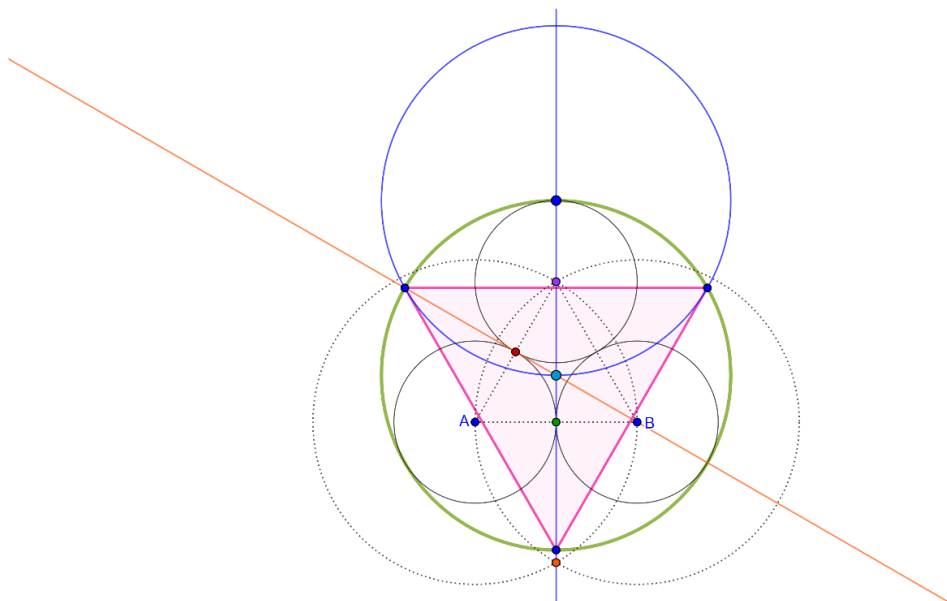
II. Para traçar o segundo e o terceiro vértice, vamos construir uma circunferência com mesma medida de raio da circunferência base e centro no ponto de interseção entre a circunferência base e a **mediatriz**;

III. Marque os pontos de interseção dessa circunferência com a circunferência base;

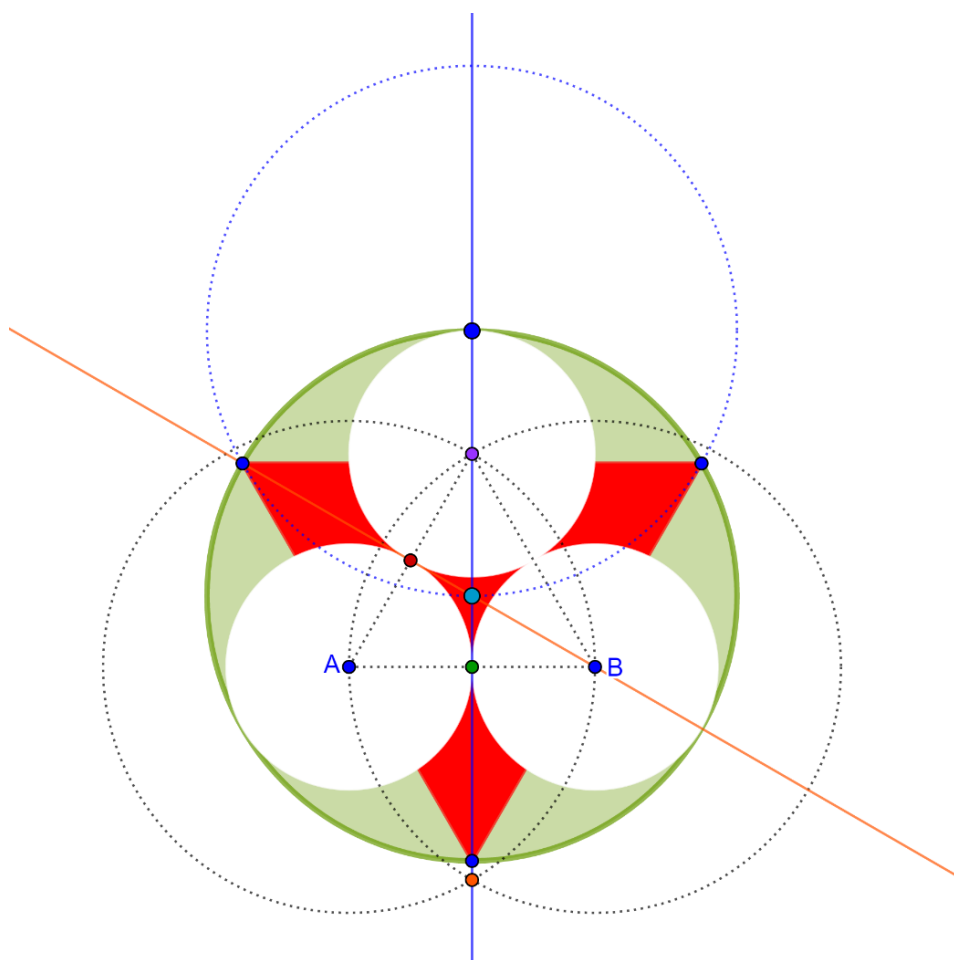
Seguindo esses passos temos uma **circunferência dividida em 3 partes iguais**.

IV. Trace segmentos unindo esses três pontos;

V. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **triângulo inscrito na circunferência**.



Nossa construção está finalizada! Agora vamos mudar as cores, alterar as camadas de construção para sobrepor as figuras e ocultar alguns elementos de construção.



### Na construção desta Mandala exploramos...

- Ponto médio, mediatriz, bissetriz e altura
- Incentro, circuncentro, ortocentro e baricentro
- Triângulo equilátero
- Triângulo equilátero inscrito na circunferência
- Circunferências tangentes
- Divisão de uma circunferência em 3 partes congruentes



Escaneie e  
assista a  
construção  
desta mandala



The background is a solid orange color with a large, semi-transparent orange circle in the upper half. Inside the circle are several overlapping geometric shapes, including triangles and polygons, in various shades of orange. The word "DESAFIO" is written in white, bold, uppercase letters across the middle of the circle. Below the word, the number "111" is written in large, white, bold, sans-serif digits, with each digit being a solid white vertical bar.

**DESAFIO**

**1**

**1**

**1**





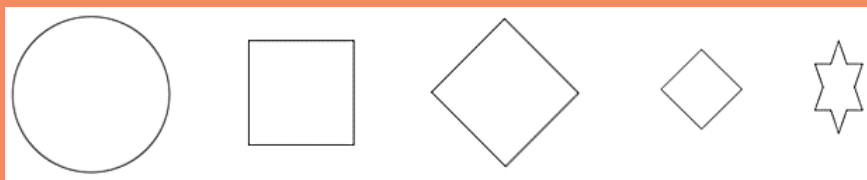
Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?

Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?

Faça você mesma a composição<sup>4</sup> da Mandala.

<sup>4</sup> Foram disponibilizadas peças para compor esta Mandala (Kit de montagem)

# PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO DESAFIO GEOMÉTRICO III



## Figuras que compõem esta mandala

- uma circunferência grande que é a base desta Mandala, ou seja, circunferência base.
- dois quadrados de mesmo tamanho
- um quadrado menor
- um polígono estrelado



O exercício de decompor a Mandala tem como objetivo despertar insights sobre os objetos e conceitos da geometria plana que poderão se fazer necessários para sua construção.

### Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?

Observamos inicialmente dois quadrados de mesmo tamanho inscritos na circunferência base, formando juntas uma estrela regular de oito pontas.

Um quadrado menor inscrito em um dos quadrados maiores.

E, por último, dois triângulos formando um polígono estrelado: cada triângulo tem um vértice coincidente a um dos vértices de um dos quadrados maiores.

### Com essas informações já podemos começar a construir...

*Na construção da circunferência base, iniciaremos pelo diâmetro da circunferência que podemos fazer coincidir com a diagonal de um dos quadrados.*

*Observe que para traçar uma circunferência necessitamos somente do centro e da medida do raio, mas o design da Mandala nos inspira a iniciar esse desenho pelo diâmetro da circunferência ou diagonal de um dos quadrados.*

Etapa I – construção da circunferência base e do primeiro quadrado inscrito na circunferência

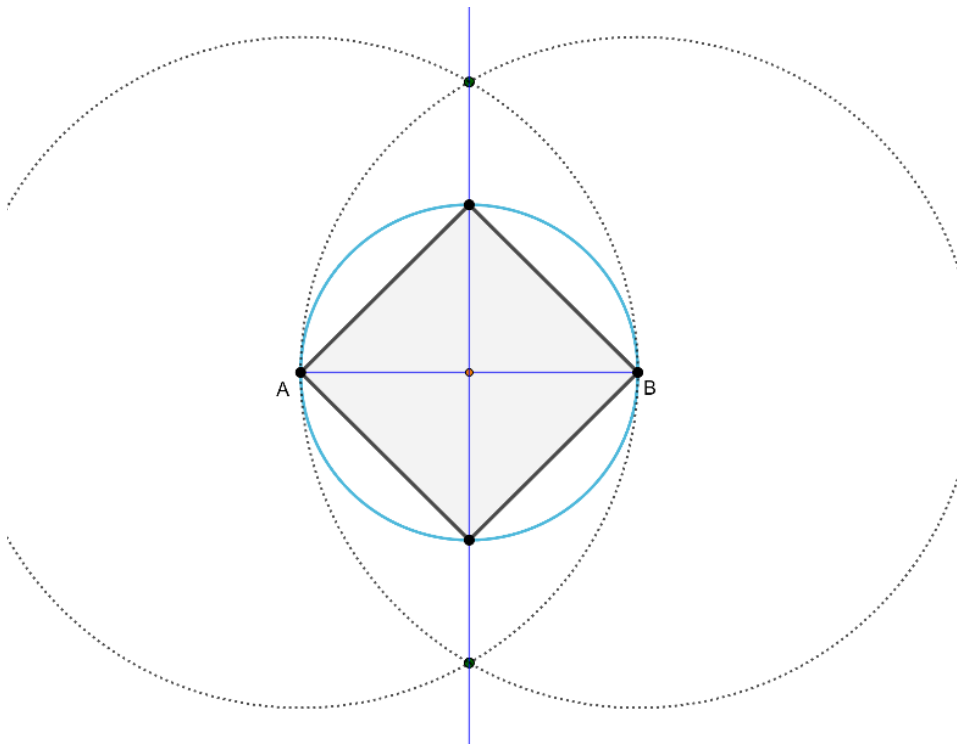
I. Defina o diâmetro da circunferência base traçando um segmento de reta  $\overline{AB}$ ;

II Para definir o centro da circunferência base, vamos marcar o **ponto médio** do segmento  $\overline{AB}$ . O raio será a distância entre o **ponto médio** e um dos pontos,  $A$  ou  $B$ . Trace, a partir do **ponto médio**, a circunferência base;

Nesta parte é importante chamar atenção que ao marcar o ponto médio traçamos a reta mediatriz do segmento  $\overline{AB}$ , esta reta é perpendicular ao segmento  $\overline{AB}$ , por definição.

III. A circunferência base está dividida em duas partes congruentes, ou seja, iguais. Observe que a reta que passa pelo **ponto médio**, **reta mediatriz**, intercepta a circunferência em dois pontos. Marque esses pontos;

IV. Temos então uma **circunferência dividida em 4 partes congruentes**. Trace segmentos unindo esses pontos. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **quadrado inscrito na circunferência**.



Etapa II – construção do segundo quadrado inscrito na circunferência

- Primeiro, vamos discutir a posição relativa deste quadrado em relação ao primeiro quadrado:

Ambos estão inscritos na circunferência base.

Os centros dos quadrados coincidem.

O segundo quadrado tem seus vértices deslocados  $45^\circ$  em sentido horário ou anti-horário.

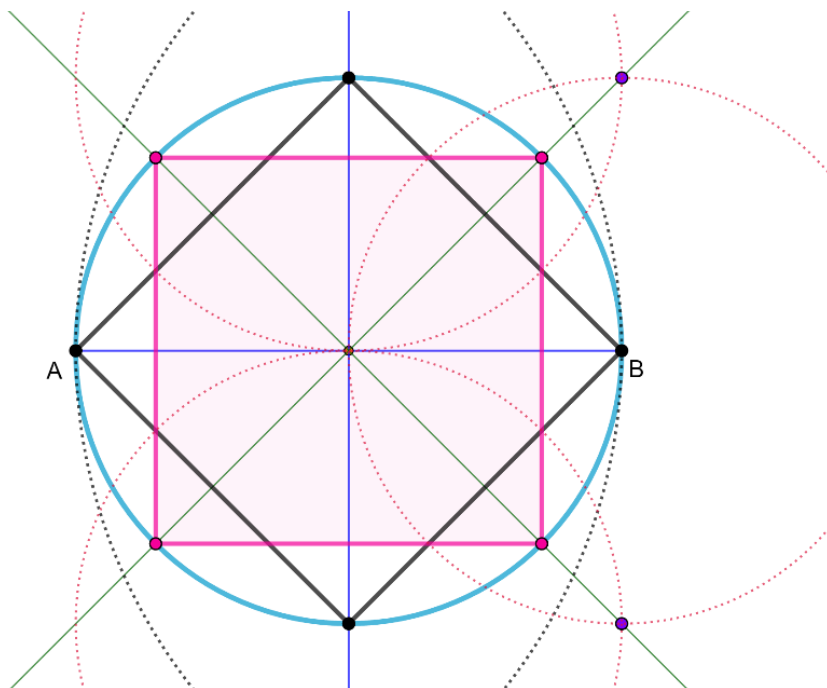
- Seguindo essas observações, vamos iniciar o traçado do segundo quadrado

I. Para traçar o segundo quadrado vamos marcar quatro pontos, deslocados  $45^\circ$  em sentido horário ou anti-horário em relação aos já marcados, sobre a circunferência. Para marcar esses pontos vamos traçar as duas **bissetrizes** referentes ao segmento  $\overline{AB}$  e a **mediatriz**;

II. Observe que as **bissetrizes** interceptam a circunferência em quatro pontos. Marque esses pontos;

III. Trace segmentos unindo esses pontos. Da união desses pontos sob a circunferência temos o segundo quadrado.

IV. Concluindo a construção dos dois quadrados temos uma **circunferência dividida em 8 partes congruentes**.



### Voltemos à Mandala.

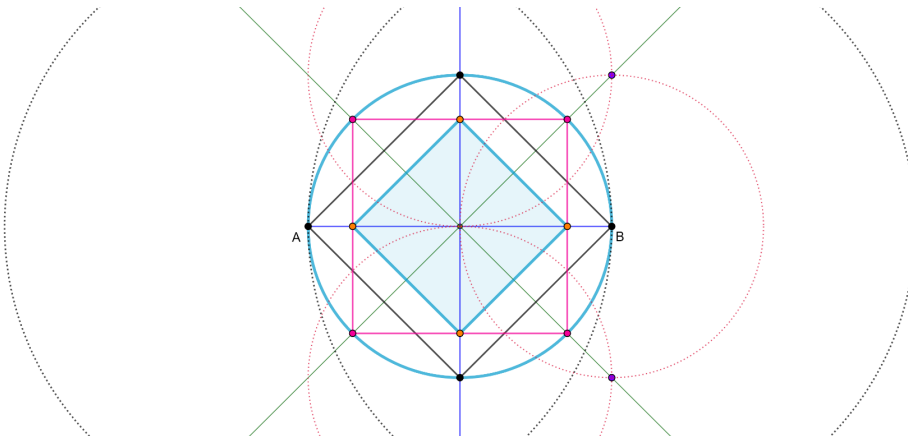


Temos ainda um terceiro quadrado, o menor. Observe que esse quadrado (menor) está inscrito no segundo quadrado traçado e, portanto, seus vértices são pontos pertencentes aos lados do referido quadrado, situados no ponto médio de cada lado.

#### Etapa III – construção do terceiro quadrado

• Observe que os vértices desse quadrado já estão indicados. São eles:

- I. Os dois pontos de interseção do segundo quadrado construído com a **mediatriz** do segmento  $\overline{AB}$ , marque-os;
- II. E os dois pontos de interseção do segundo quadrado com o segmento  $\overline{AB}$ , marque-os;
- III. Trace segmentos unindo esses pontos. Da união desses pontos temos o terceiro quadrado.



Pra finalizar nossa construção, vamos construir o polígono estrelado.

#### Etapa IV – construção do polígono estrelado

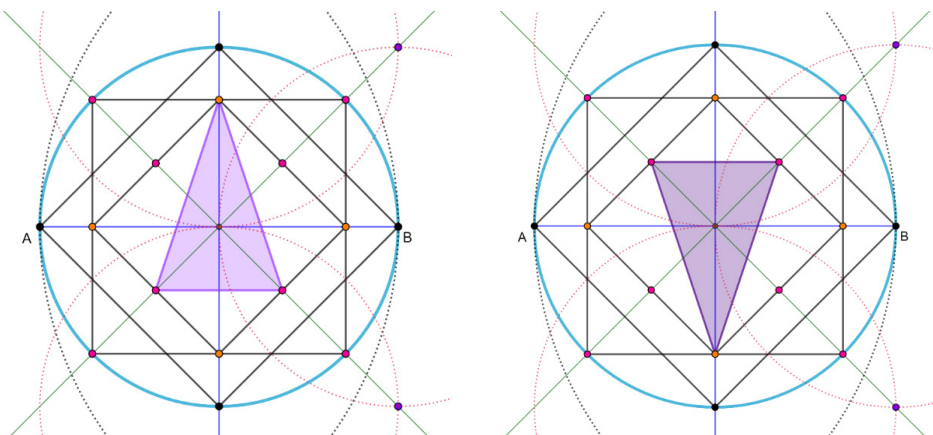
• Observando o polígono estrelado percebemos que ele é constituído por dois triângulos, um deles deslocado  $180^\circ$  em relação ao outro.

I. Para construirmos os triângulos vamos marcar os pontos de interseção entre as **bissetrizes** e o terceiro quadrado. Estes pontos serão seus vértices;

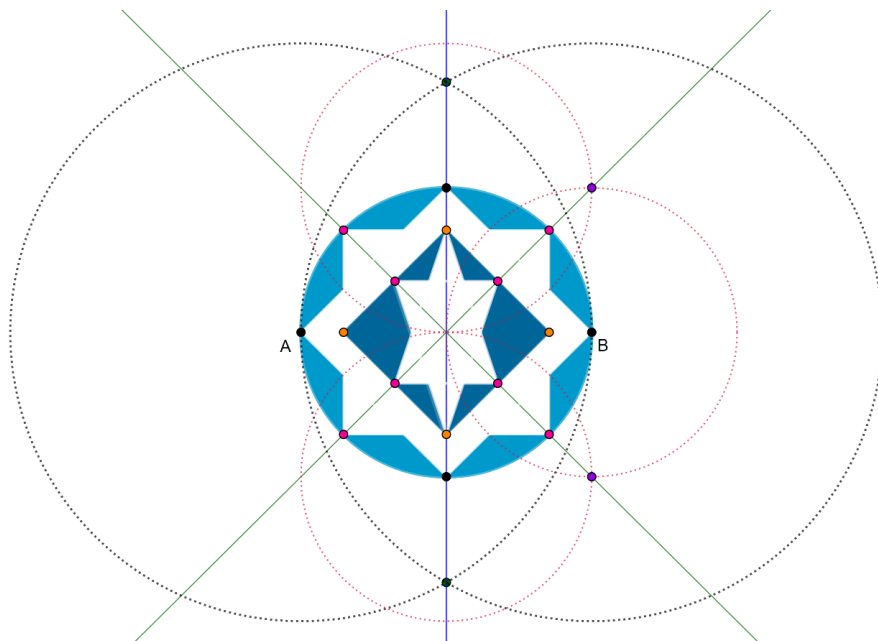
II. Trace segmentos unindo um dos vértices do terceiro quadrado e dois pontos de interseção marcados anteriormente. Temos um triângulo isósceles;

III. Repita o processo com os outros dois pontos e outro vértice. Temos o segundo triângulo invertido em relação ao primeiro;

IV. Para formar o polígono estrelado, sobrepomos os dois triângulos.



Nossa construção está finalizada! Agora vamos mudar as cores, alterar as camadas de construção para sobrepor as figuras e ocultar alguns elementos de construção.



### Na construção desta Mandala exploramos...

- Ponto médio, Mediatriz, Bissetriz
- Reta perpendicular
- Quadrado
- Triângulo isósceles
- Quadrado inscrito na circunferência
- Polígonos estrelados
- Divisão de uma circunferência em 4 e em 8 partes congruentes



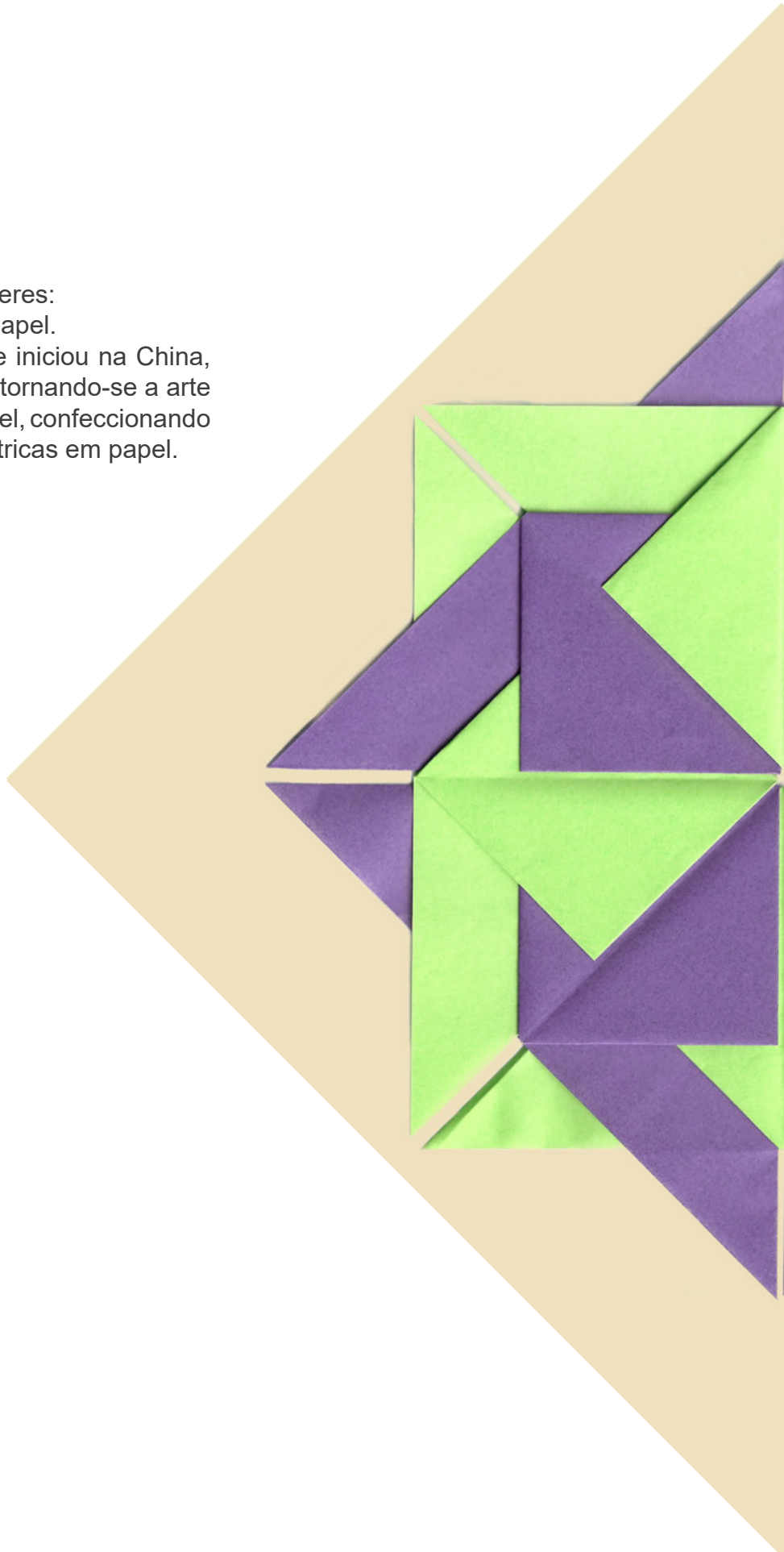
Escaneie e  
assista a  
construção  
desta mandala

# ORIGAMI

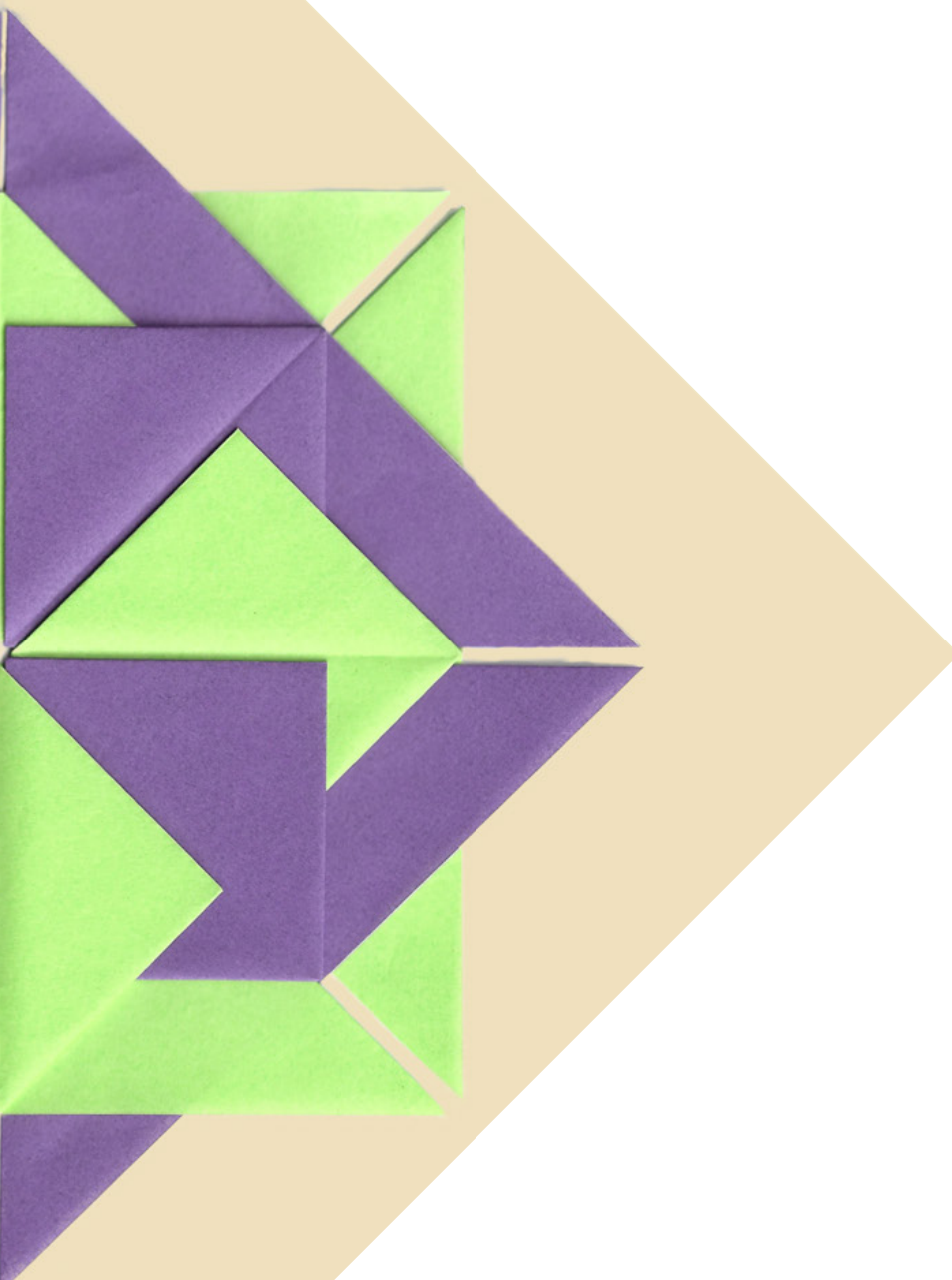
Origami é a junção de dois caracteres:

折り (ori) = dobrar e 紙 (kami) = papel.

Sabe-se que a arte do origami se iniciou na China, mas foi no Japão que se difundiu tornando-se a arte tradicional japonesa de dobrar papel, confeccionando objetos através de dobras geométricas em papel.



# 折紙



Com o passar do tempo, o origami ganhou novas técnicas e formas e o origami modular é uma delas. Com o uso de cortes e colagem temos um leque de possibilidades para criar várias Mandalas Geométricas.





**DESAFIO**

**IV**





Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?

Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?

Faça você mesma a composição<sup>5</sup> da Mandala.

<sup>5</sup> Foram disponibilizadas peças para compor esta Mandala (Kit de montagem)

# PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO DESAFIO GEOMÉTRICO IV



## Figuras que compõem esta mandala

- uma circunferência grande que é a base desta Mandala, ou seja, circunferência base.
- um pentágono
- um polígono estrelado
- e um pentágono menor

O exercício de decompor a Mandala tem como objetivo despertar insights sobre os objetos e conceitos da geometria plana que poderão se fazer necessários para sua construção.

### Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?

Observamos inicialmente um pentágono inscrito na circunferência base.

Um polígono estrelado inscrito no pentágono.

E, por último, uma estrela de cinco pontas que pode ser constituída por cinco triângulos, com um pentágono menor ao centro.

### Com essas informações já podemos começar a construir...

Etapa I – construção da circunferência base e do pentágono regular inscrito na circunferência

I. Defina o raio da circunferência base traçando um segmento de reta  $\overline{AB}$ ;

II. Para definir o centro da circunferência base escolha o ponto  $A$ . Trace, a partir desse ponto, a circunferência base.

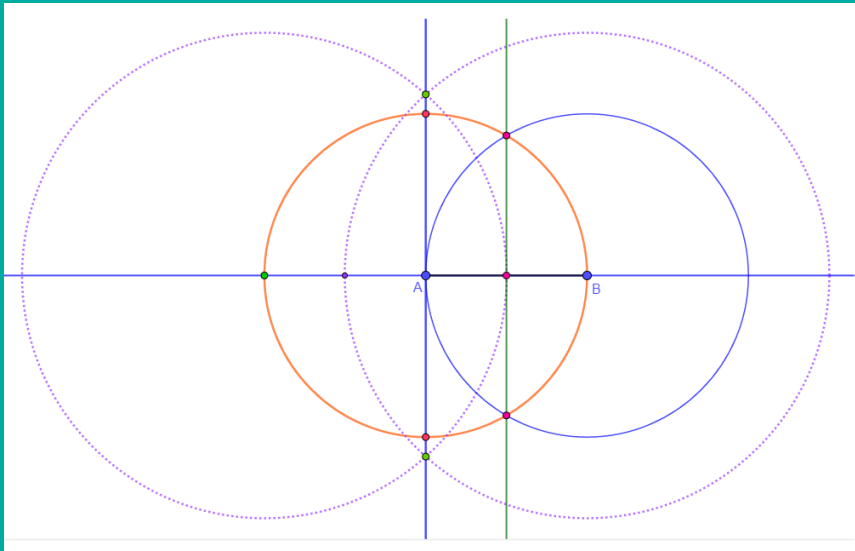
III. Para definirmos o diâmetro da circunferência base vamos traçar uma reta passando pelos pontos  $A$  e  $B$ . Marque os dois pontos de interseção da reta traçada com a circunferência base;

IV. Perceba que temos dois pontos marcados sobre a circunferência base. Precisamos dividir esta circunferência em quatro partes congruentes, para isso, vamos traçar uma **reta perpendicular** que passe pelo ponto  $A$ ;

Nesta parte podemos chamar atenção que ao traçar a reta perpendicular estamos traçando a mediatriz referente ao diâmetro da circunferência base, por definição.

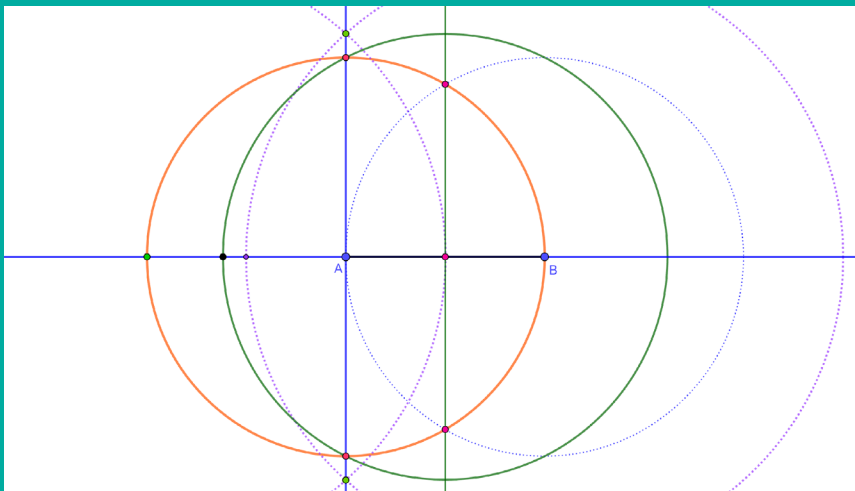
V. A **reta perpendicular** intercepta a circunferência em dois pontos. Marque esses pontos;

VI. O próximo passo é determinar o **ponto médio** do segmento  $\overline{AB}$ ;



VII. Vamos traçar uma circunferência a partir do **ponto médio**. O raio será definido pela distância entre um dos pontos de interseção entre a circunferência base e a **reta perpendicular** ao diâmetro, e o **ponto médio** do segmento  $\overline{AB}$ ;

VIII. Observe que esta circunferência intercepta o diâmetro em um único ponto. Marque este ponto;

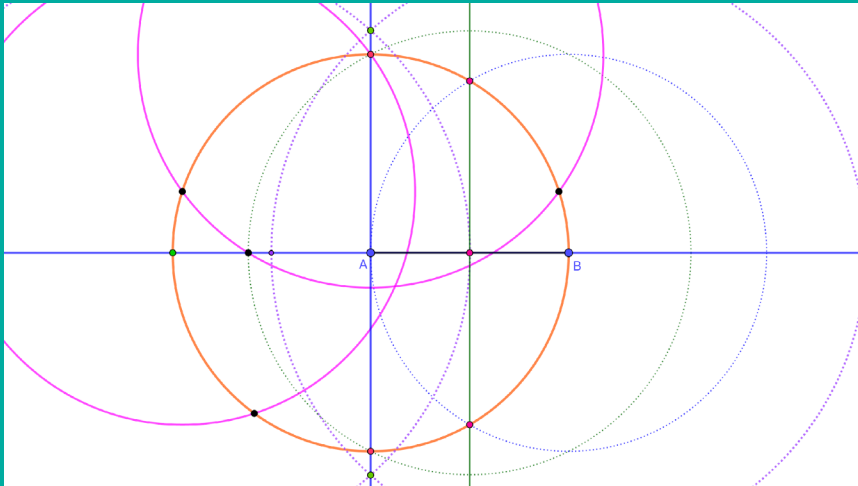


IX. Vamos traçar outra circunferência. Defina como raio a distância deste ponto ao ponto de interseção entre a **reta perpendicular** ao diâmetro e a circunferência base. A partir do ponto de interseção entre a **reta perpendicular** ao diâmetro e a circunferência base trace outra circunferência;

X. Observe que esta circunferência intercepta a circunferência base em dois pontos, marque-os;

XI. Defina um desses pontos como centro e trace outra circunferência de mesmo raio da anterior;

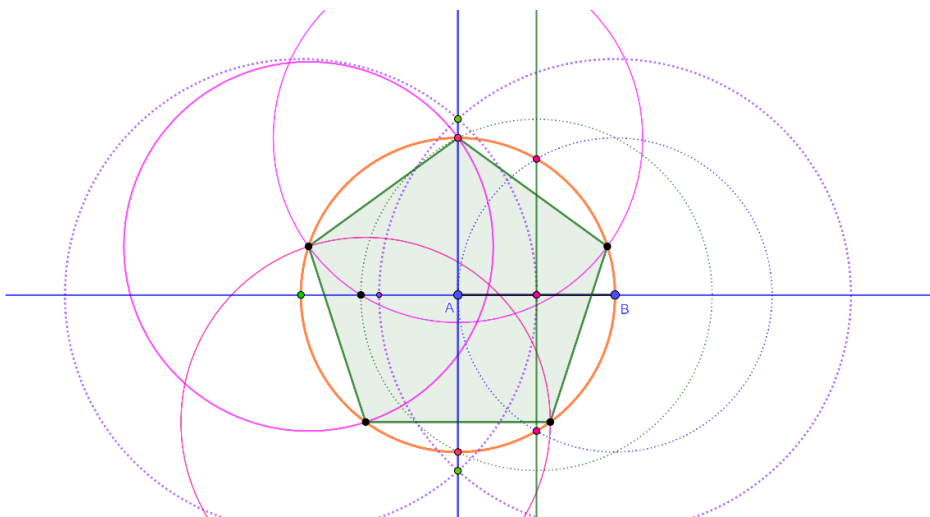
XII. A circunferência traçada interceptará a circunferência base em um ponto, marque-o;



XIII. Trace outra circunferência definindo esse ponto de interseção como centro e a mantenha a mesma medida do raio. Marque o ponto de interseção entre essa circunferência e a circunferência base;

XIV. Observe que a partir destes quatro últimos pontos marcados e o ponto de interseção entre a **reta perpendicular** ao diâmetro e a circunferência base temos uma **circunferência dividida em 5 partes congruentes**;

XV. Trace segmentos unindo esses pontos. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **pentágono inscrito na circunferência**.



## Voltemos à Mandala.

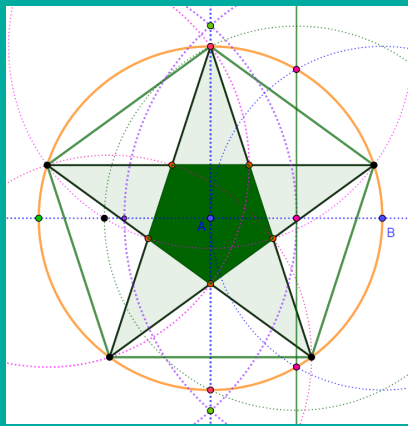
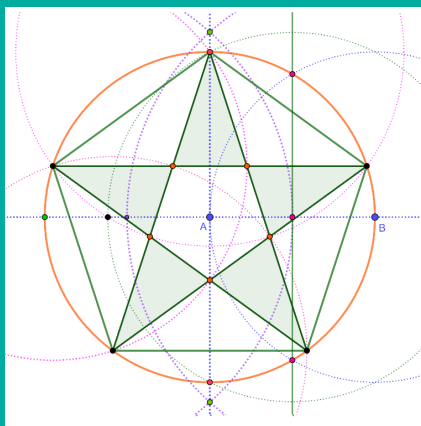


Observando o polígono estrelado percebemos que ele está inscrito no pentágono e na circunferência base. Temos também que seus vértices coincidem com os vértices do pentágono.

Pra finalizar nossa construção, vamos construir o polígono estrelado.

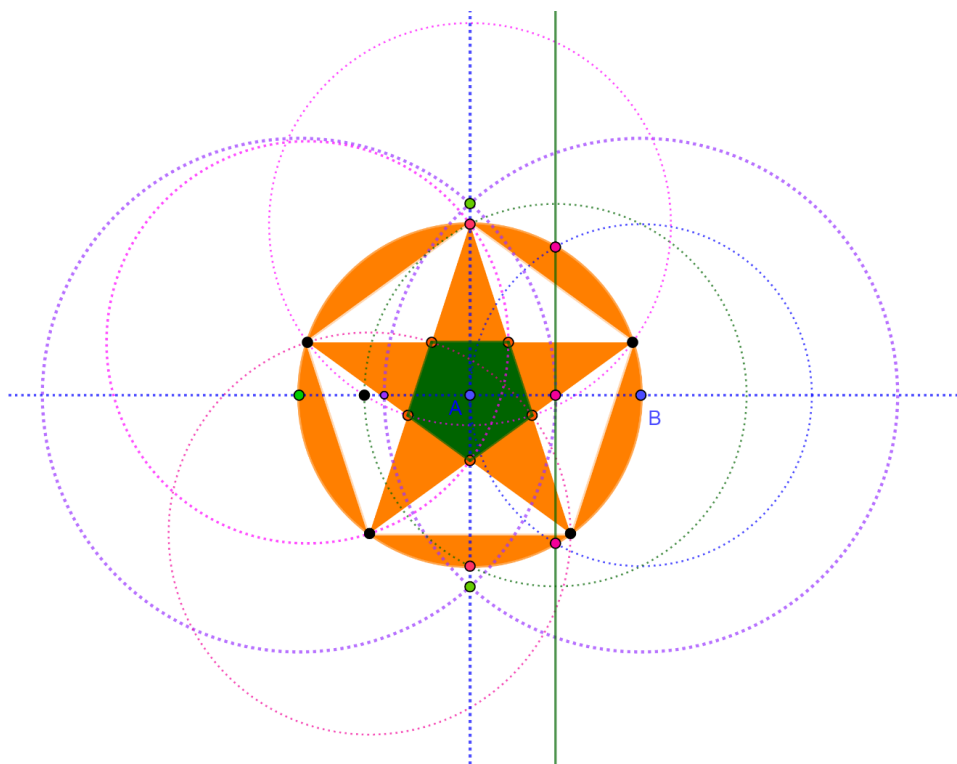
### Etapa II – construção do polígono estrelado

- I. Perceba que o polígono estrelado é formado por triângulos. Para construirmos esses triângulos vamos traçar segmentos partindo de cada um dos vértices do pentágono até os vértices opostos. De cada vértice partirá dois segmentos. Ao todo traçaremos cinco segmentos;
- II. Observe que os segmentos se interceptam. Marque os pontos de interseção entre esses segmentos;
- III. Trace o polígono estrelado unindo de três em três pontos, formando cinco triângulos isósceles;
- IV. Perceba que ao marcarmos os pontos de interseção entre os segmentos temos delimitamos um pentágono menor ao centro. Una esses pontos formando o pentágono e finalize o polígono estrelado.





Nossa construção está finalizada! Agora vamos mudar as cores, alterar as camadas de construção para sobrepor as figuras e ocultar alguns elementos de construção.



### Na construção desta Mandala exploramos...

- Ponto médio, Mediatriz, Bissetriz
- Reta perpendicular
- Triângulo isósceles
- Pentágono regular
- Pentágono inscrito na circunferência
- Polígonos estrelados
- Divisão de uma circunferência em 5 partes congruentes



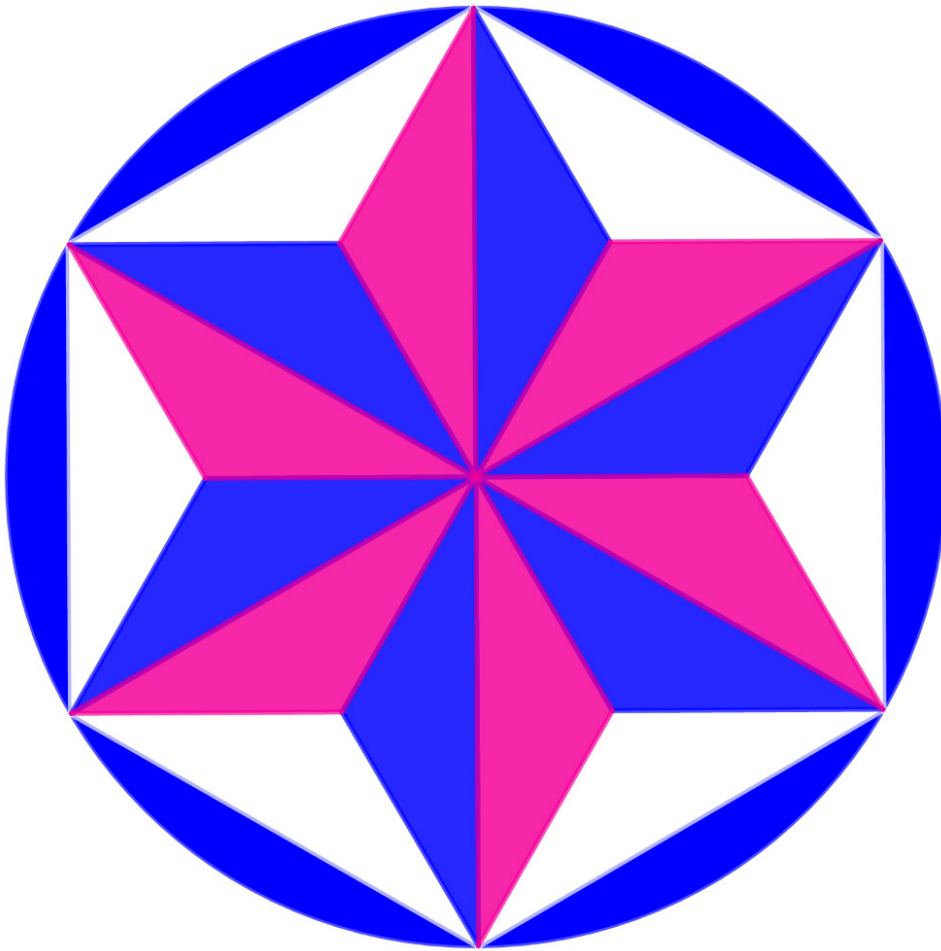
Escaneie e  
assista a  
construção  
desta mandala



DESAFIO

V





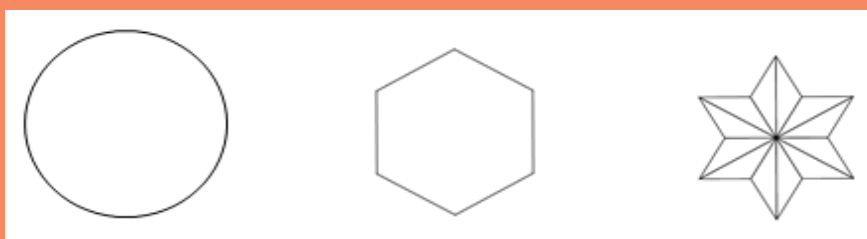
Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?

Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?

Faça você mesma a composição<sup>6</sup> da Mandala.

<sup>6</sup> Foram disponibilizadas peças para compor esta Mandala (Kit de montagem)

# PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO DESAFIO GEOMÉTRICO V



## Figuras que compõem esta mandala

- uma circunferência grande que é a base desta Mandala, ou seja, circunferência base
- um hexágono
- um polígono estrelado

O exercício de decompor a Mandala tem como objetivo despertar insights sobre os objetos e conceitos da geometria plana que poderão se fazer necessários para sua construção.

**Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?**

Observamos inicialmente um hexágono inscrito na circunferência.

Um polígono estrelado inscrito no hexágono: uma estrela de seis pontas que pode ser constituída por seis losangos ou doze triângulos.

**Com essas informações já podemos começar a construir...**

Etapa I – construção da circunferência base e do hexágono inscrito na circunferência

I Defina o raio da circunferência base traçando um segmento de reta  $\overline{AB}$ ;

II. Para definir o centro da circunferência base escolha o ponto  $A$ . Trace, a partir desse ponto, a circunferência base.

III A partir do ponto  $B$  vamos construir outra circunferência de raio  $\overline{AB}$ ;

IV. Observe que esta circunferência intercepta a circunferência base em dois pontos, marque-os;

V. Mantendo a mesma medida de raio  $\overline{AB}$  traçaremos outras duas circunferências com centro nos pontos de interseção marcados anteriormente;

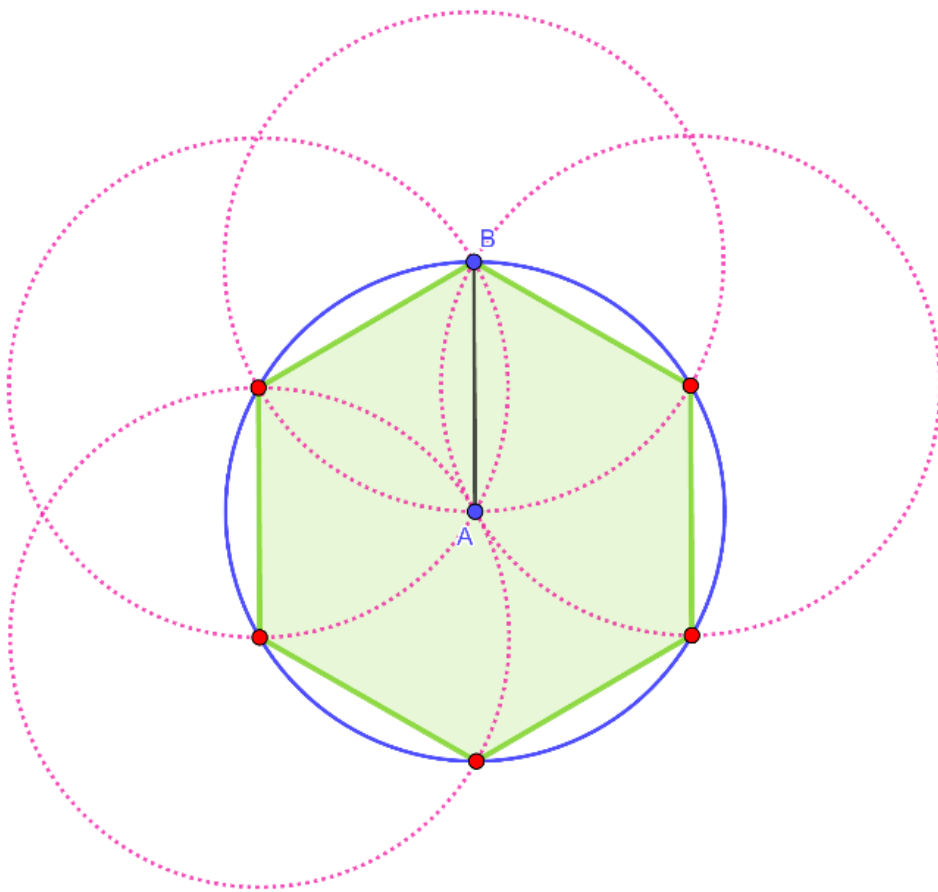
VI. Marque os pontos de interseção entre essas circunferências e a circunferência base;

VII. Por fim traçaremos a quarta circunferência partindo de um dos pontos de interseção marcados acima e mesmo raio  $\overline{AB}$ ;

VIII. Marque o ponto de interseção entre essa última circunferência e a circunferência base;

IX. Observe que a partir destes cinco últimos pontos marcados e o ponto  $B$  temos uma **circunferência dividida em 6 partes congruentes**;

X. Trace segmentos unindo esses pontos. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **hexágono inscrito na circunferência**.



Pra finalizar nossa construção, vamos construir o polígono estrelado.

### Etapa II – construção do polígono estrelado

- Primeiro, vamos discutir a posição relativa do polígono estrelado em relação ao hexágono:

Ambos estão inscritos na circunferência base.

Seus centros coincidem.

As pontas do polígono coincidem com os vértices do hexágono.

- Seguindo essas observações, vamos iniciar o traçado do polígono

I. Vamos começar traçando **retas paralelas** que passem pelos vértices do hexágono. Observe que para traçar as paralelas basta traçar retas por dois pares de vértices opostos;

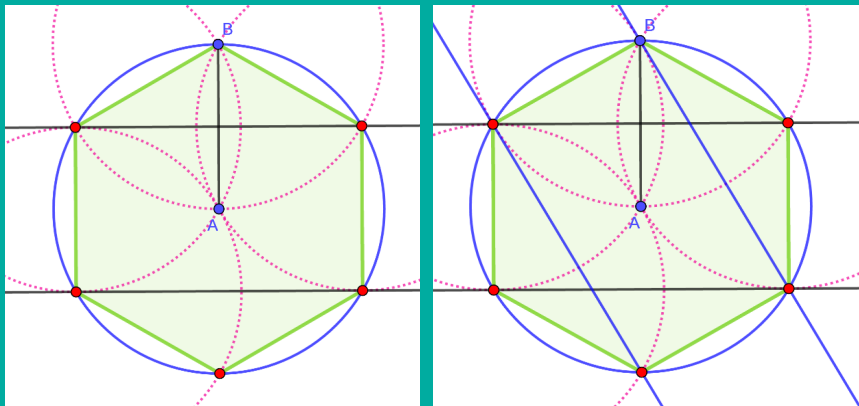
Nesta parte podemos chamar atenção para o fato que em todo hexágono regular seus lados opostos são paralelos. E, assim, ao traçar retas passando por vértices opostos temos retas paralelas, por definição.



II. Perceba que ao traçar as **retas paralelas** formamos um retângulo com a lateral do hexágono. Tome um de seus vértices desse retângulo e passe uma reta de forma que intercepte a outra reta em um ponto;

III. Vamos traçar uma **reta paralela** a essa. Trace uma reta pelos pontos opostos à reta traçada;

IV. Perceba que temos mais um retângulo formado pelas retas e as laterais do hexágono;

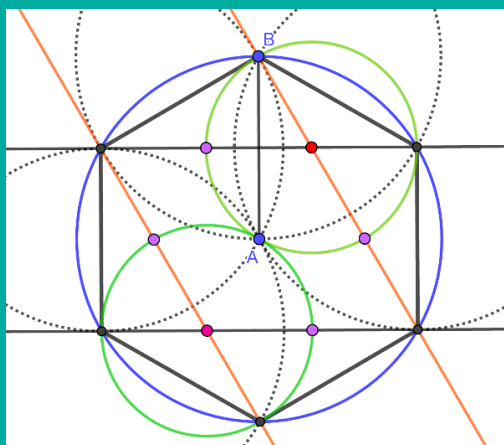


V. Observe que os dois pares de **retas paralelas** se interceptam em quatro pontos, sendo dois deles coincidentes aos vértices do hexágono. Marque os outros dois pontos de interseção entre as retas traçadas. Começamos a definir os vértices do polígono estrelado;

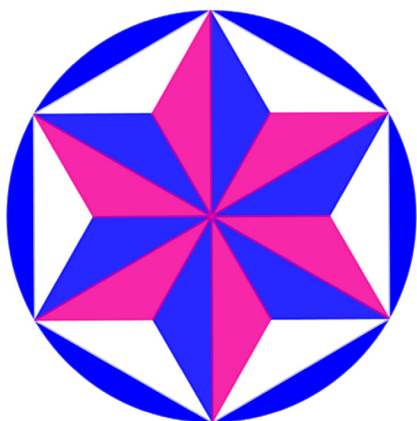
VI. Para definirmos mais dois vértices vamos traçar uma circunferência com o raio sendo a distância entre um dos pontos de interseção e um dos vértices adjacentes a ele que não pertença ao retângulo. A partir do ponto de interseção escolhido trace a circunferência;

VII. Perceba que esta circunferência intercepta cada reta em dois pontos, dois são vértices do hexágono, marque os outros pontos de interseção;

VIII. Repetiremos esta construção para o outro ponto de interseção entre as retas. Definiremos assim mais dois vértices do polígono estrelado;



## Voltemos à Mandala.



Observe que os triângulos que constituem o polígono estrelado possuem, de dois em dois, um lado em comum formando um losango.

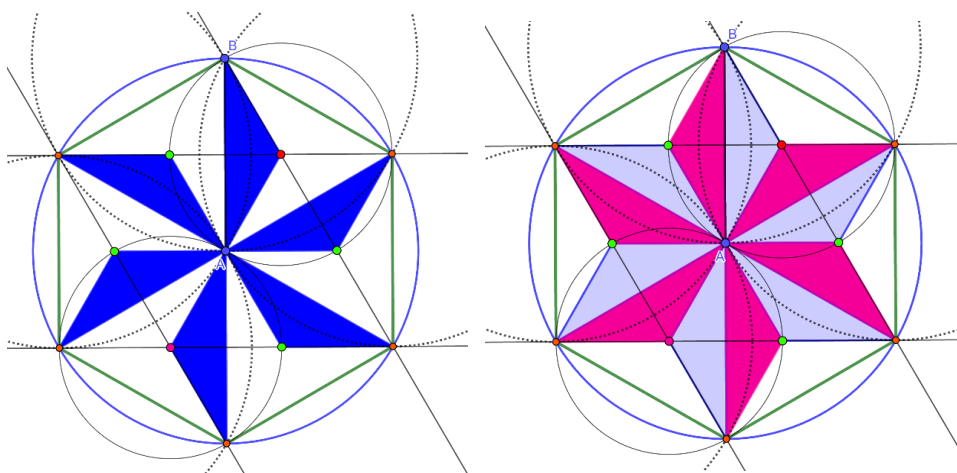
Observe que os vértices desses pares de triângulos, ou losangos, já estão indicados. São eles:

IX. Para o primeiro triângulo do par: um ponto do vértice do hexágono, o ponto de interseção entre a reta e a circunferência base;

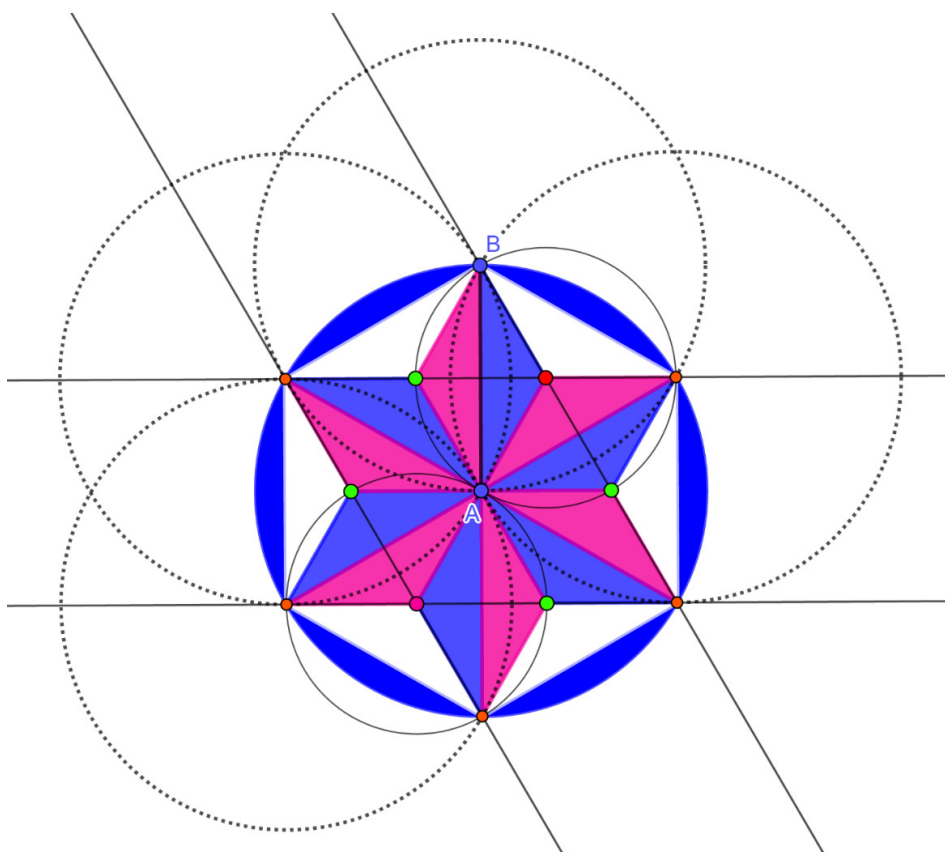
X. Para o segundo triângulo do par: um ponto do vértice do hexágono, o ponto de interseção entre as retas e o centro da circunferência base;

XI. Trace segmentos unindo esses pontos formando um par de triângulos isósceles;

XII. Repita o processo até construir doze triângulos isósceles.



Nossa construção está finalizada! Agora vamos mudar as cores, alterar as camadas de construção para sobrepor as figuras e ocultar alguns elementos de construção.



### Na construção desta Mandala exploramos...

- Triângulo isósceles, losango
- Reta paralela
- Triângulo isósceles
- Hexágono regular
- Hexágono inscrito na circunferência
- Polígonos estrelados
- Divisão de uma circunferência em 6 partes congruentes



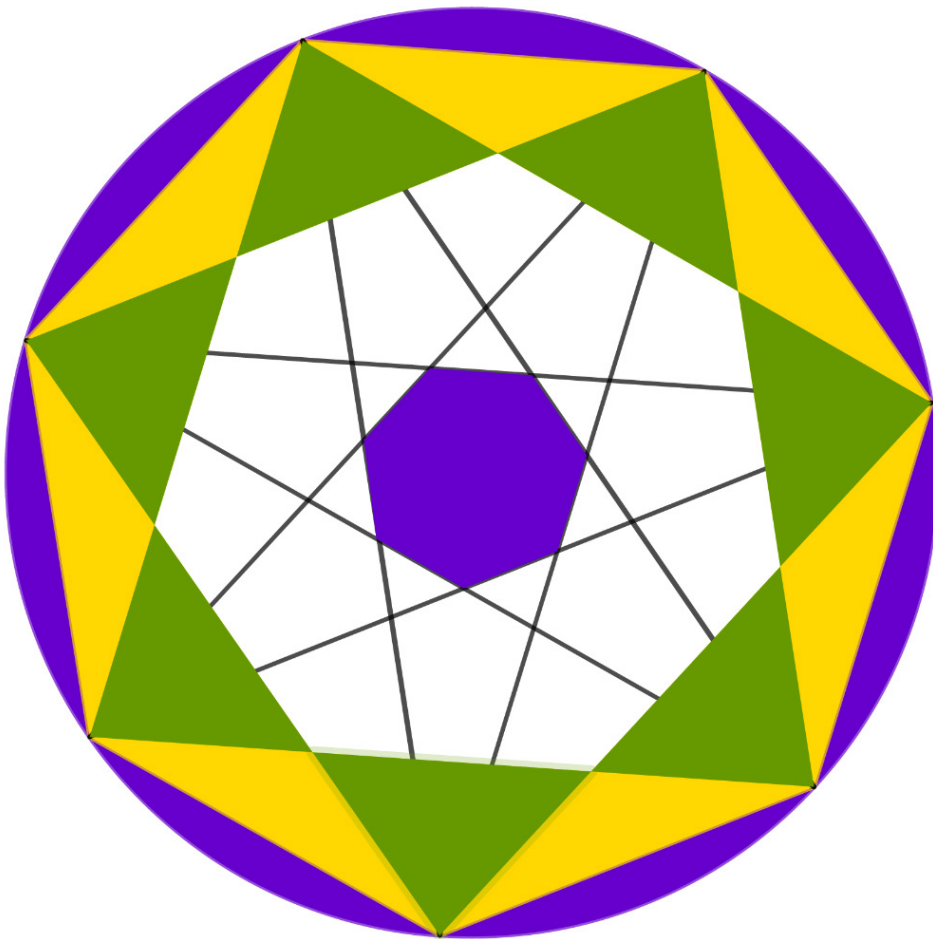
Escaneie e  
assista a  
construção  
desta mandala



DESAFIO

VI





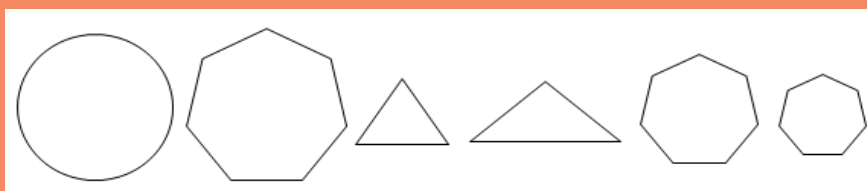
Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?

Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?

Faça você mesma a composição<sup>7</sup> da Mandala.

<sup>7</sup> Foram disponibilizadas peças para compor esta Mandala (Kit de montagem)

# PROPOSTA DE RESOLUÇÃO DO DESAFIO GEOMÉTRICO VI



## Figuras que compõem esta mandala

- uma circunferência grande que é a base desta Mandala, ou seja, circunferência base.
- quatorze triângulos de dois tamanhos diferentes
- um heptágono maior
- um heptágono médio e outro menor



O exercício de decompor a Mandala tem como objetivo despertar insights sobre os objetos e conceitos da geometria plana que poderão se fazer necessários para sua construção.

**Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?**

Observamos inicialmente um heptágono inscrito na circunferência base.

Sete triângulos: cada triângulo tem um dos vértices sobre um dos vértices do heptágono.

Um heptágono mediano: cada lado do heptágono coincide a um lado do triângulo.

E, por último, um heptágono menor formado pela interseção de algumas retas.

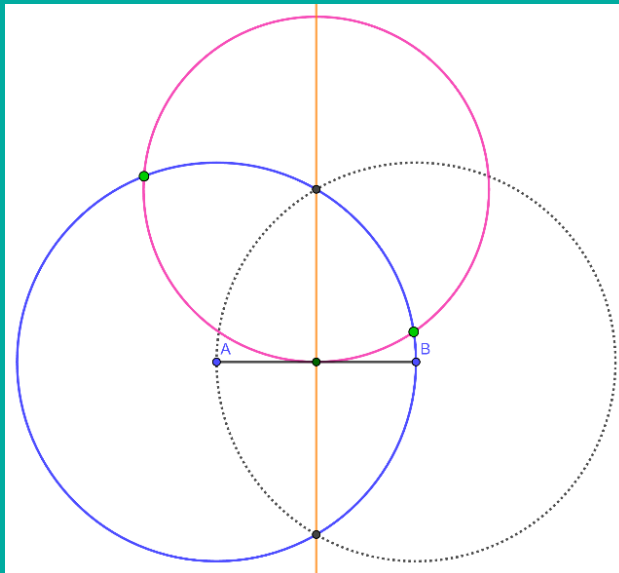
**Com essas informações já podemos começar a construir...**

Etapa I – construção da circunferência base e do heptágono inscrito na circunferência

- I. Defina o raio da circunferência base traçando um segmento de reta  $\overline{AB}$ ;
- II. Para definir o centro da circunferência base escolha o ponto  $A$ . Trace, a partir desse ponto, a circunferência base.
- III. Para definir o primeiro vértice do heptágono vamos traçar a **mediatriz** do segmento  $\overline{AB}$ ;

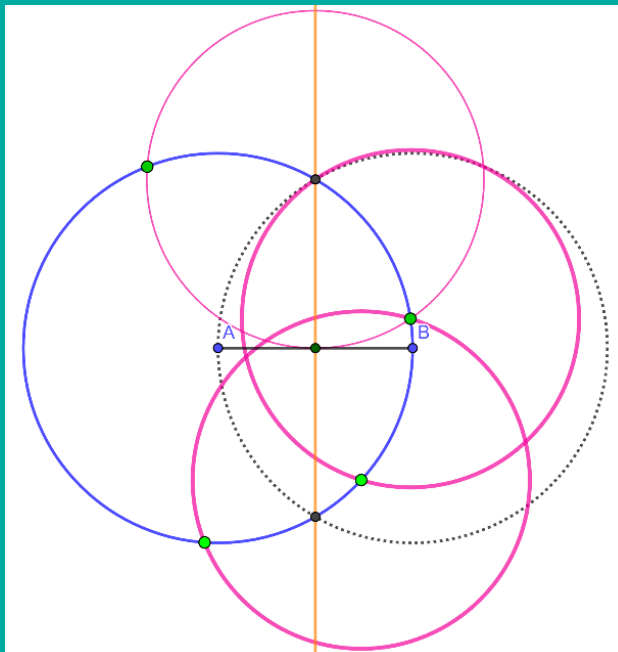
Nesta parte podemos chamar atenção que ao traçar a mediatriz referente ao raio da circunferência base, determinamos o ponto médio do segmento  $\overline{AB}$ , por definição.

- IV. Observe que a **mediatriz** intercepta a circunferência em dois pontos. Marque estes pontos.
- V. A **mediatriz** também intercepta o segmento  $\overline{AB}$  em um ponto, marque-o, este é o **ponto médio** do segmento  $\overline{AB}$ ;
- VI. Para definirmos mais dois vértices vamos traçar uma circunferência. Defina como raio a distância entre um dos pontos de in-terseção com a **mediatriz** e o **ponto médio** do segmento  $\overline{AB}$ . A partir do ponto de interseção com a **mediatriz** trace a circunferência;
- VII. Observe que esta circunferência intercepta a circunferência base em dois pontos, marque-os. Temos três vértices do heptágono definidos;



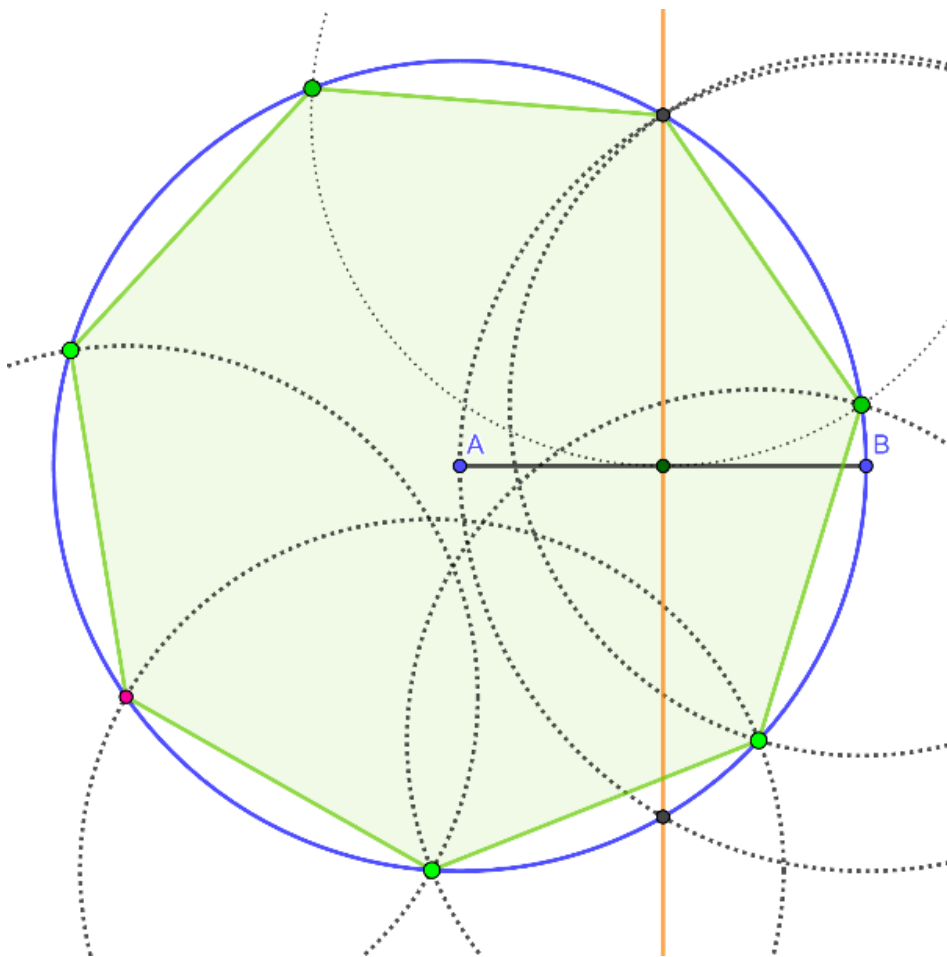
VIII. A partir de um desses pontos de interseção trace outra circunferência de mesmo raio. Marque o ponto de interseção com a circunferência base, este será o quarto vértice do heptágono;

IX. Para determinar os últimos vértices repita o processo de construção mais três vezes marcando os pontos de interseção entre as circunferências e a circunferência base;

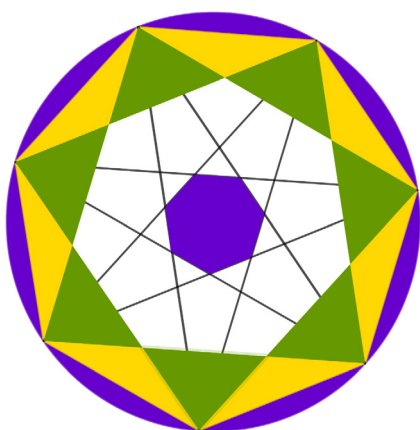


X. Observe que a partir destes seis últimos pontos marcados e o ponto de interseção entre a **mediatriz** e a circunferência base temos uma **circunferência dividida em 7 partes**;

XI. Trace segmentos unindo esses pontos. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **heptágono inscrito na circunferência**.



**Voltemos à Mandala.**



Temos sete triângulos cujo um dos vértices coincide com um dos vértices do heptágono. Além disso, cada triângulo tem dois de seus vértices coincidindo com os vértices dos triângulos adjacentes.

Pra finalizar nossa construção, vamos construir o polígono estrelado.

## Etapa II – construção do polígono estrelado

- Primeiro, vamos discutir a posição relativa deste polígono em relação ao heptágono:

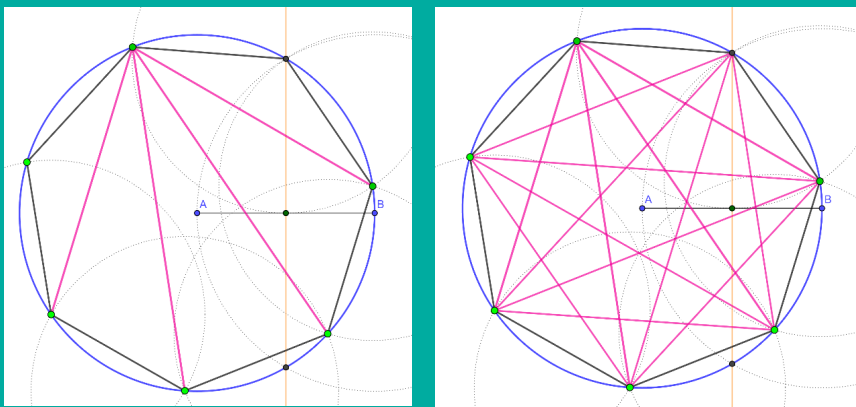
Ambos estão inscritos na circunferência base.

Seus centros coincidem.

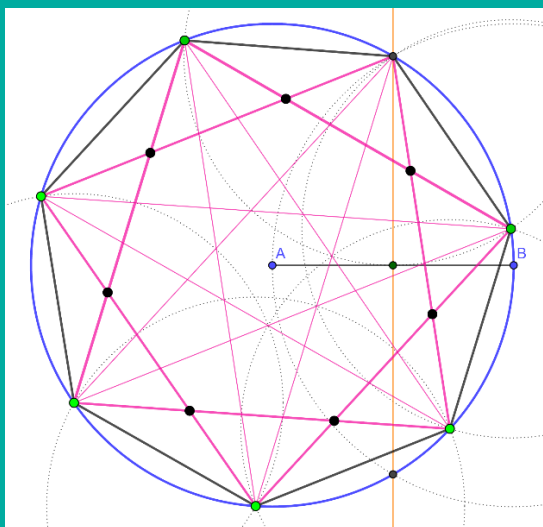
Os vértices do polígono coincidem com os vértices do hexágono.

- Seguindo essas observações, vamos iniciar o traçado do polígono

I. Vamos começar traçando os segmentos que formam o heptágono central. Partindo de cada um dos vértices do heptágono até seus vértices opostos trace segmentos. De cada vértice partirá quatro segmentos;

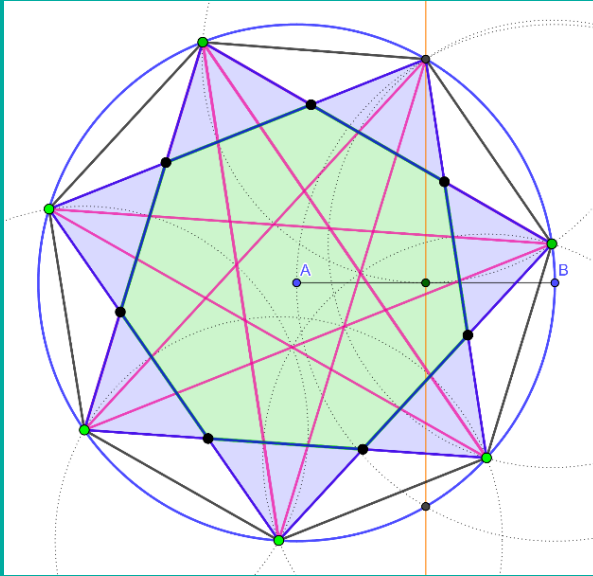


II. Observe que os segmentos se interceptam inúmeras vezes. Vamos definir dois vértices de cada triângulo, para isso, marque os sete pontos de interseção entre os segmentos externos;

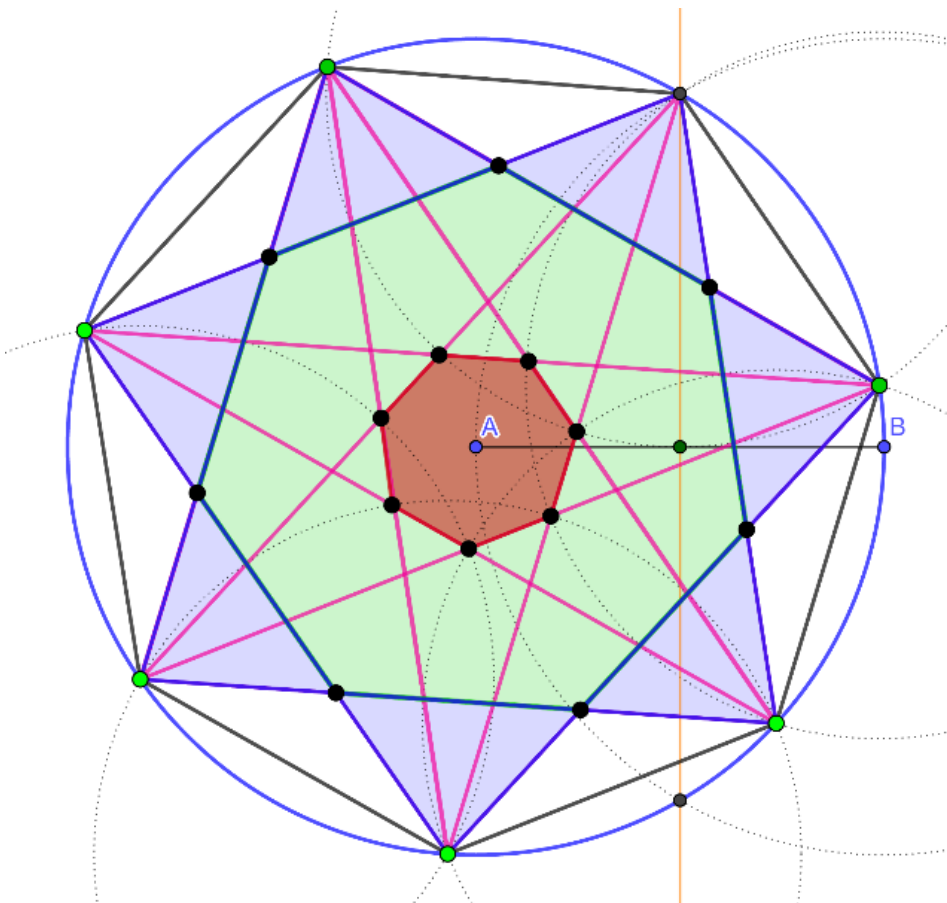


III. Trace segmentos unindo o vértice do heptágono, e dois pontos de interseção entre os segmentos, formando os sete triângulos;

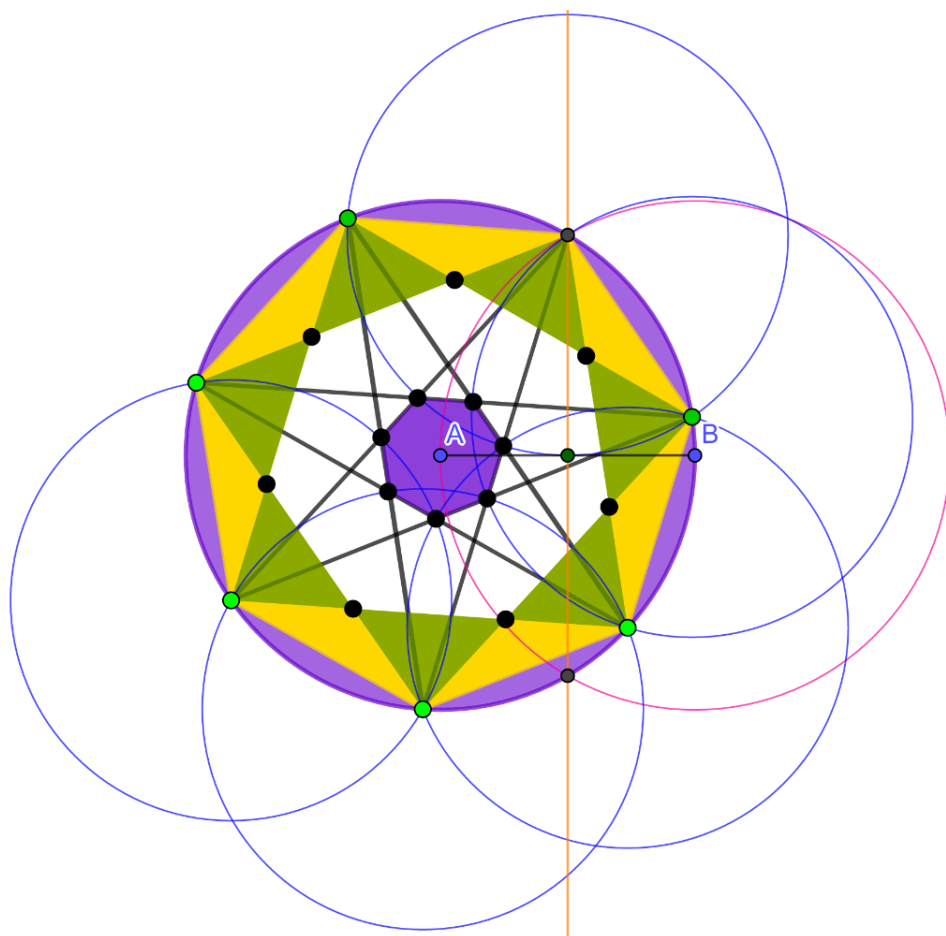
IV. Perceba que para evidenciar o segundo heptágono basta unir os sete pontos de interseção entre os segmentos externos;



V. Observe que os segmentos também se interceptam próximo ao centro da circunferência base. Marque os sete pontos de interseção formando o terceiro heptágono;



Nossa construção está finalizada! Agora vamos mudar as cores, alterar as camadas de construção para sobrepor as figuras e ocultar alguns elementos de construção.



### Na construção desta Mandala exploramos...

- Ponto médio, Mediatriz, Bissetriz
- Reta perpendicular
- Triângulos
- Heptágono
- Heptágono inscrito na circunferência
- Polígonos estrelados
- Divisão de uma circunferência em 7 partes



Escaneie e  
assista a  
construção  
desta mandala



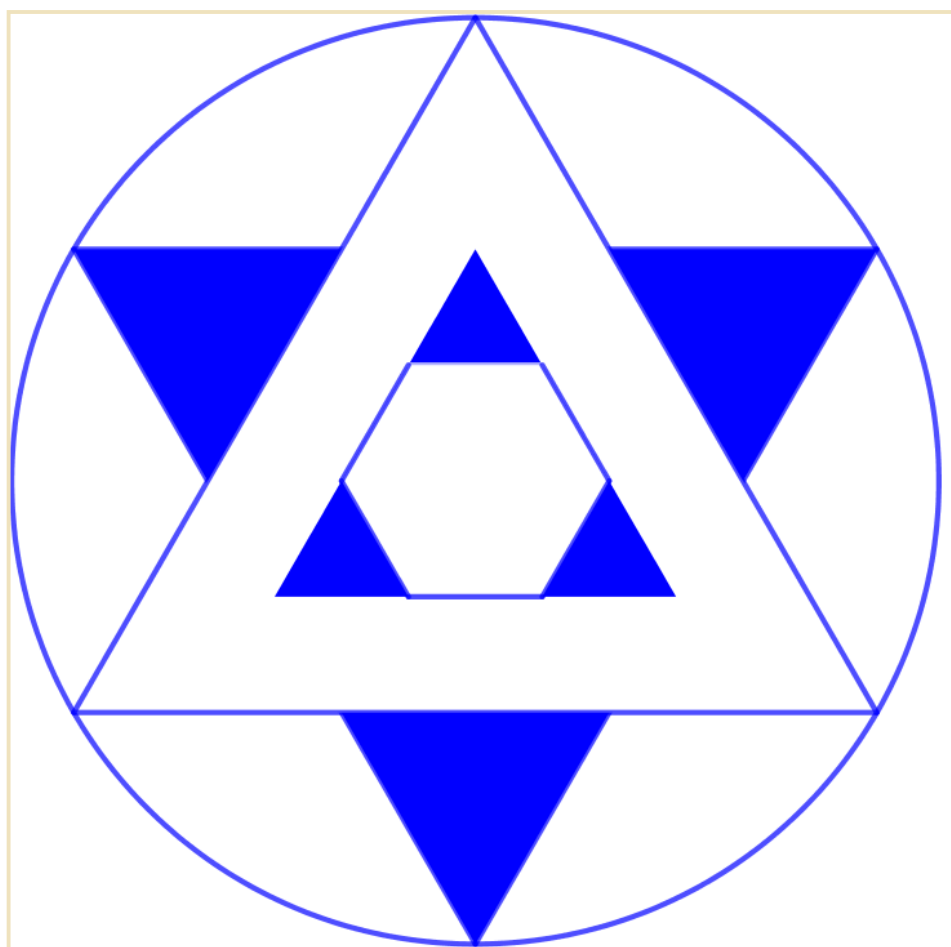




# APOIO AO(A) PROFESSOR(A)

Preparamos esse tópico para auxiliar o professor(a) na construção das Mandalas, assim, disponibilizaremos algumas funcionalidades do GeoGebra e um conjunto de fichas com algumas construções básicas, realizadas no GeoGebra, para servir de apoio caso se faça necessário.

Por fim, preparamos um kit de figuras geométricas que sobrepostas, formam algumas Mandalas. Este kit tem o intuito de auxiliar os alunos na execução da oficina ou poderá ser utilizado por turmas que ainda não têm um conhecimento de construções geométricas de forma mais lúdica.





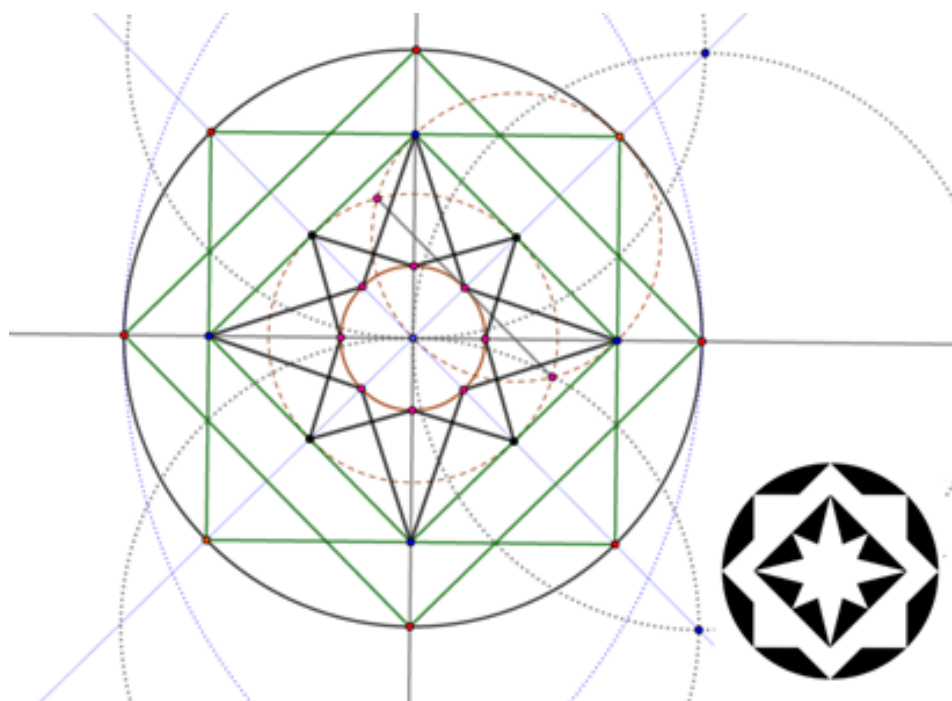




# I. CONSTRUINDO NO GEOGEBRA

Nosso objetivo maior com esse material é explorar a Geometria por meio da resolução de desafios que propõem os desenhos de objetos geométricos considerados complexos – neste caso, as Mandalas – e que, acreditamos, suscitam a necessidade de lançar mão de conhecimentos básicos de Construções Geométricas. Assim, sugerimos que as construções realizadas no GeoGebra sejam feitas através de conhecimentos de Desenho Geométrico. Para isso, algumas ferramentas disponíveis – Retas Perpendiculares, Retas paralelas, Mediatriz, Bissetriz, Ponto Médio – no software devem ser evitadas. Nossa proposta é que as Mandalas sejam construídas no GeoGebra como se fossem feitas com “régua e compasso”.

Vejam abaixo um exemplo de construção no GeoGebra. Não vamos aqui apresentar o passo a passo da construção, vamos mostrar a funcionalidade de algumas ferramentas e o processo de acabamento da Mandala.



## Restringindo ferramentas

Como mencionamos anteriormente algumas ferramentas do GeoGebra devem ser evitadas na construção das Mandalas. O software nos permite restringir a barra de ferramentas selecionando as que queremos permitir o uso, para isso vamos clicar em “Menu”, no ícone em “Ferramentas” vamos em “Configurar Barra de Ferramentas”.

Abrirá uma guia com duas listas.

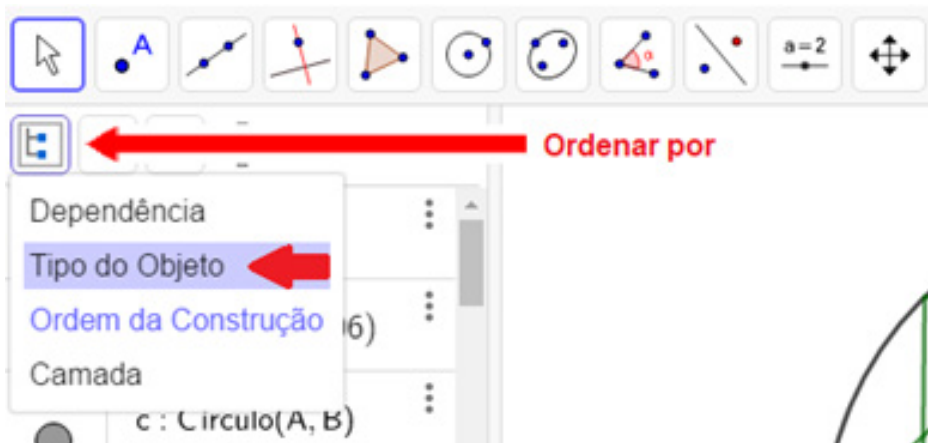
Na lista “Barra de Ferramentas” aparecerá todas as ferramentas visíveis no GeoGebra. Para ocultar as ferramentas que quisermos restringir vamos arrastá-las até a lista “Ferramentas”. Dessa forma, todas as ferramentas deslocadas ficarão ocultas. Para finalizar clicamos em “Aplicar” e a nova barra de ferramentas estará disponível.

Podemos restaurar a qualquer momento a barra de ferramentas bastando seguir esses passos e clicar em “Restaurar Barra de Ferramentas Padrão”.



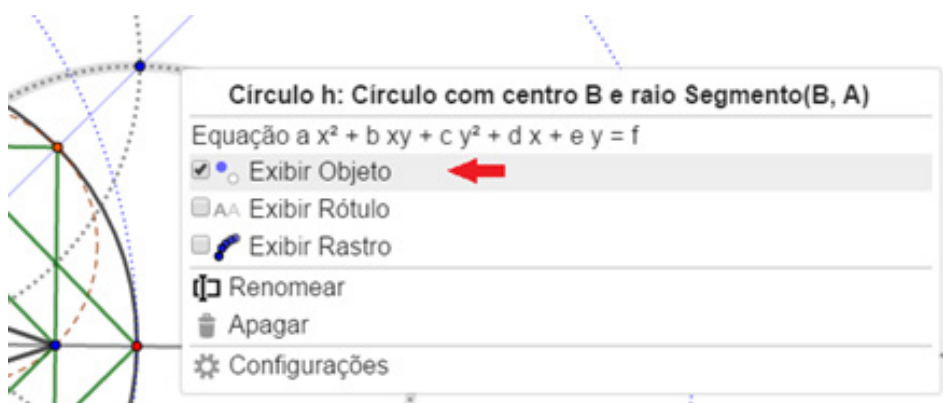
## Ordenando as construções

Com a parte geométrica finalizada, vamos ordenar as construções na “Janela de Álgebra”, para isso vamos clicar em “Ordenar por” e clicar em “Tipo do Objeto”. Dessa forma a lista ficará organizada e ficará mais fácil localizar as construções feitas.

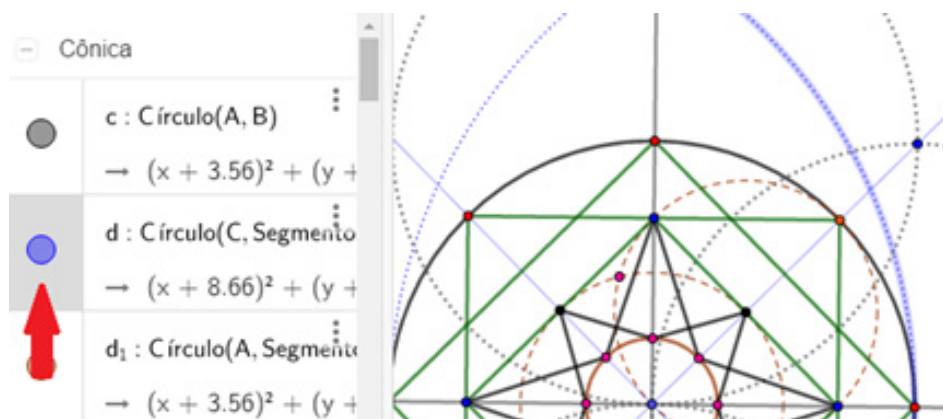


Após organizar a lista vamos ocultar algumas construções para evidenciar a Mandala. Para isso, temos como opções:

1. Clicar com o botão direito do mouse na construção que queremos ocultar e desmarcar a caixa “Exibir Objeto” como mostra a figura abaixo. Repetiremos essa ação em todas as construções que devem ser ocultadas.



2. Outra maneira para ocultar um objeto é selecionar a construção, para evidenciá-la mais fácil, e desmarcar a “bolinha” na parte esquerda da lista de construções que aparece na “Janela de Álgebra”.

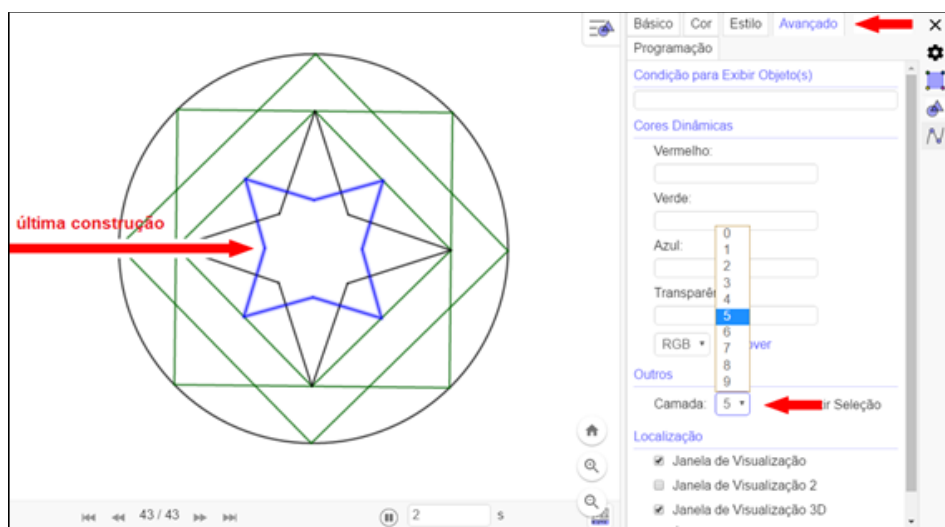


## Sobrepondo uma construção a outra

Nesta Mandala específica temos seis construções – uma circunferência, três quadriláteros e dois polígonos estrelados –, para sobrepô-las, devemos considerar a diferença dos planos entre cada uma. Inicialmente os elementos no GeoGebra são desenhados todos na mesma camada e estas variam de 0 a 9. Para sobrepor uma construção à outra devemos mudar a camada de cada elemento por vez, começando pela última construção. Quanto maior for a camada mais evidência terá o elemento.

Para isso vamos clicar, em uma área que não tenho construção, com o botão direito do mouse na “Janela de Visualização” e selecionar a opção “Configurações”, uma janela lateral a direita será aberta. Vamos então selecionar a última construção feita e abrir a guia “Avançado”. Nessa guia, vamos escolher a “Camada” da construção.

Como dito, nesse exemplo em que estamos trabalhando temos seis construções, então vamos marcar a camada 5 para o último polígono construído. Repetiremos o processo com todas as construções até chegarmos na camada 0. Apenas uma observação, as construções que estiverem em um mesmo plano podem ficar em uma mesma camada.



## Alterando a cor e transparência das construções

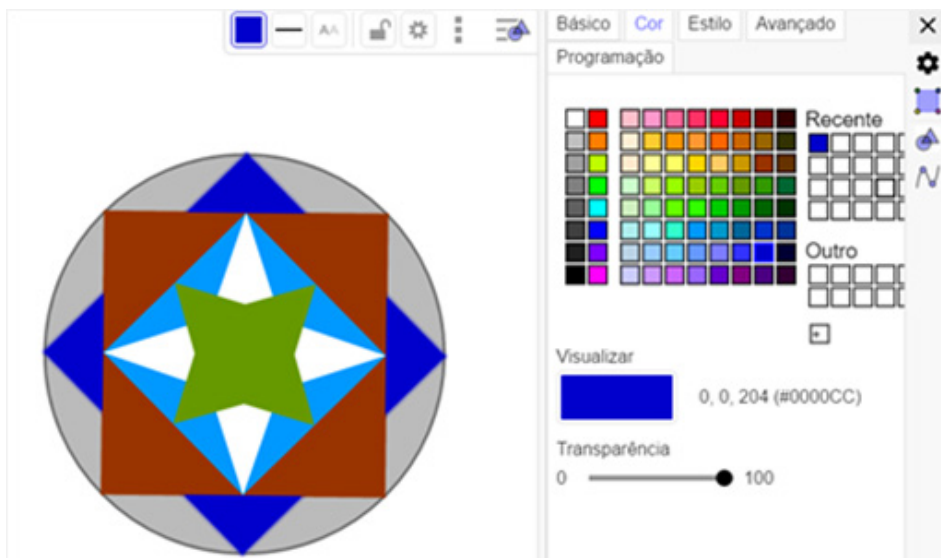
Este processo de alterar a cor e a transparência das construções pode ser feita juntamente com a escolhas das camadas, aqui optamos em fazer depois apenas pela didática.

Com as camadas escolhidas, ainda com a barra lateral a direita aberta, vamos selecionar a construção que desejamos alterar a cor e abrir a guia “Cor”.



Na guia “Cor” podemos alterar também a transparência do objeto, variando de 0% até 100%. Para obtermos uma cor sólida devemos selecionar transparência 100% em todas as construções. Se o objeto escolhido for branco a cor branca deverá ser escolhida na grade de cores.

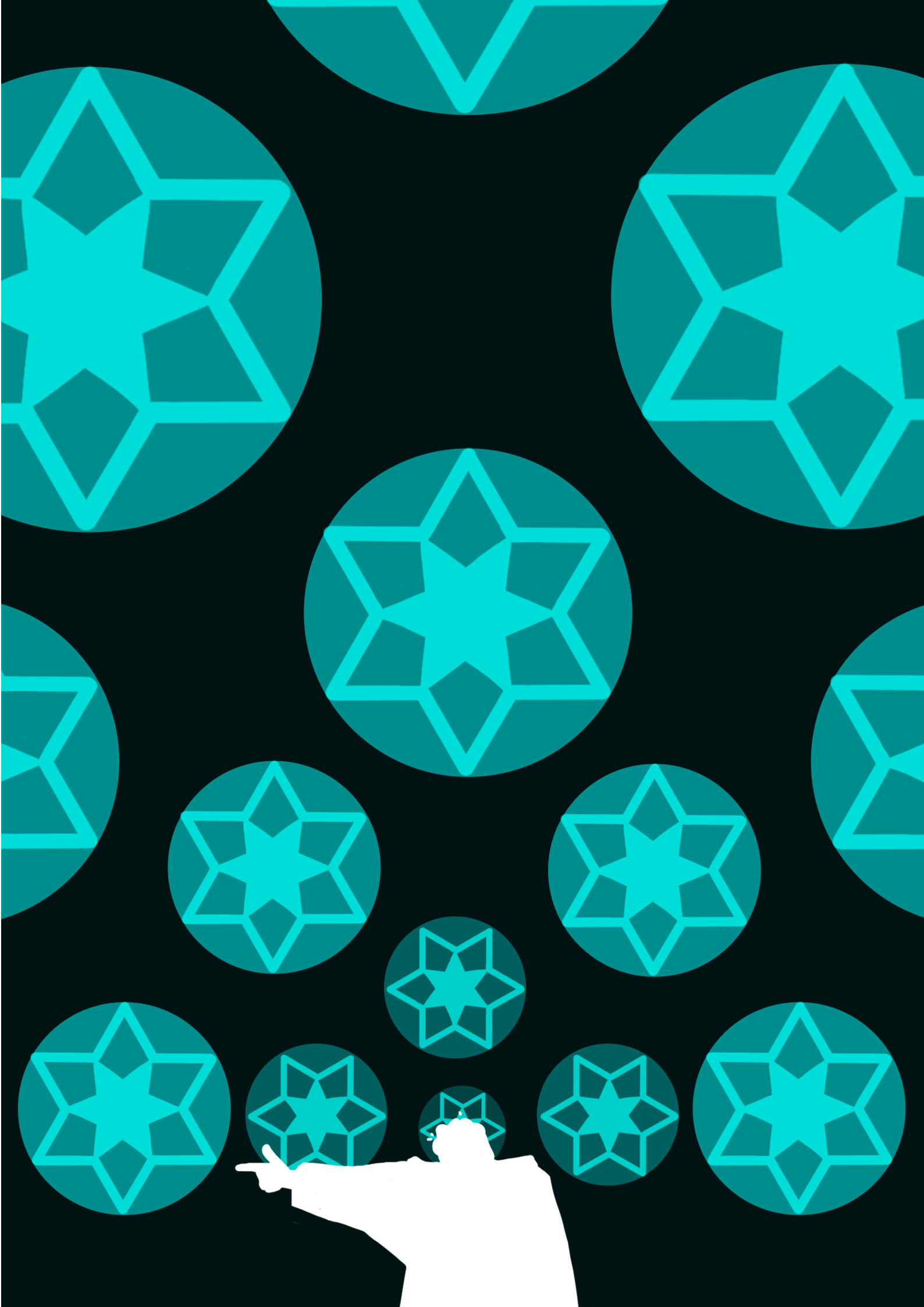
Abaixo apresentamos a Mandala colorida, cada camada de uma cor, para visualizarem o plano de cada construção. Apresentamos também nossa Mandala finalizada.



**Mandala finalizada no GeoGebra**















# II. CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS NO GEOGEBRA

As construções geométricas oriundas do Desenho Geométrico são um recurso que podemos lançar mão para o estudo da Geometria. Como já mencionamos, nas construções geométricas são permitidos apenas o uso de régua (sem graduação) e o compasso.

Na construção das Mandalas no GeoGebra a **régua** será substituída pelas ferramentas “Reta”  e “Segmento” .

O **compasso** substituiremos pelas ferramentas “Círculo dados Centro e um de seus Pontos”  e “Compasso” .

Outras ferramentas podem ser usadas nas construções por estarmos usando um software de geometria, ressaltando que essas ferramentas não interferem na pureza das construções. São elas; “Ponto” , “Interseção de dois Objetos”  e “Polígono” .

Com essas ferramentas, durante as construções, obteremos interseções de retas, de circunferências e de retas com circunferências. Dessas interseções, pontos serão obtidos, e por eles, podemos traçar novas retas e novas circunferências.

Essa sequência nos possibilita construir infinitas Mandalas e também solucionam alguns problemas geométricos, tais como: construção de retas paralelas a uma reta dada, bissetriz de um ângulo, mediatriz e ponto médio de um segmento, a construção de uma reta perpendicular a uma reta dada passando por um ponto dado, entre outras ditas construções geométricas fundamentais ou elementares.

Essas construções fundamentais são bases para a construção das Mandalas, por isso, disponibilizaremos algumas delas dispostas em fichas/cartões que podem/devem ser consultadas sempre que se fizer necessário.









# III. KIT COMPONDO SUA MANDALA

Durante nossa pesquisa, sentimos a necessidade de elaborarmos um material que pudesse ser aplicado também em turmas sem um prévio conhecimento em construções geométricas. Surgiu então um kit de montagem de Mandalas.

Decompomos algumas das Mandalas presentes nos Desafios e disponibilizamos um kit com várias peças.

Usando a criatividade é possível montar as Mandalas dos desafios e tantas outras.



# AUTORAS

## ANGÉLICA RODRIGUES VENTURA



Mestre em Educação Matemática pelo Mestrado Profissional Educação e Docência (PROMESTRE) da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais (2022). Especialista em Ensino de Matemática (2017) e Graduada em Licenciatura em Matemática (2015), ambas pela Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais. Especialista em Novas Tecnologias no Ensino da Matemática pela Universidade Federal Fluminense (2019).

E-mail: [angelicarv.ufmg@gmail.com](mailto:angelicarv.ufmg@gmail.com)

## TERESINHA FUMI KAWASAKI

Licenciada em Matemática e Bacharel em Matemática Aplicada pela Universidade Estadual de Campinas (1990), Master of Arts pelo Departamento de Matemática da Universidade do Texas em Austin (1997). Fez doutorado em Educação pela Universidade Federal de Minas Gerais (2008). Atualmente é professora associada do Departamento de Métodos e Técnicas da Faculdade de Educação da Universidade Federal de Minas Gerais, docente e está coordenadora, gestão 2021-2023, do Mestrado Profissional Educação e Docência (PROMESTRE) da Universidade Federal de Minas Gerais.



# REFERÊNCIAS

BEJARANO, L. **Constructions was MUCH better this year!** Crazy math teacher lady. 2015. Disponível em: <https://crazymathteacherlady.wordpress.com/2015/09/16/constructions-was-much-better-this-year/>. Acesso em 20 mar. 2019.

**BRASIL.** Parâmetros Curriculares Nacionais. Secretaria de Educação Fundamental. Brasília. MEC 1997.

\_\_\_\_\_. Ministério da Educação. Base Nacional Comum Curricular (versão final). 2017.

BOLGHERONI, W.; SILVEIRA, I. F. **Software Livre Aplicado ao Ensino de Geometria e Desenho Geométrico.** In: Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 12 a 18 de julho, Belém do Pará, 2008.

FIORAVANTI, Celina. **Mandalas:** como usar a energia dos desenhos sagrados. São Paulo: Pensamento, 2003.

GIONGO, Affonso Rocha. **Curso de desenho geométrico.** São Paulo: Nobel, 1984.

MARMO, N.; MARMO. C. **Desenho Geométrico.** Rio de Janeiro: Editora Scipione, 1994.

LORENZATO, S. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores.** Campinas: Autores Associados, 2006.

\_\_\_\_\_. **Para aprender matemática.** 3ª ed. São Paulo: Autores Associados, 2010.

PASSOS, C. L. B. **Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática.** In: LORENZATO, Sérgio. Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PUTNOKI, J. C. **Elementos de Geometria e Desenho Geométrico.** 4. ed. São Paulo: Scipione, 1993. v. 1.

RAYMUNDO, M. F. S. M. **Construção de conceitos geométricos:** investigando a importância do ensino de desenho geométrico, nos anos finais do Ensino Fundamental. 2010, 120f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Severino Sombra, Vassouras.

WAGNER, Eduardo. **Uma introdução às construções geométricas.** Rio de Janeiro: PIC, 2009.

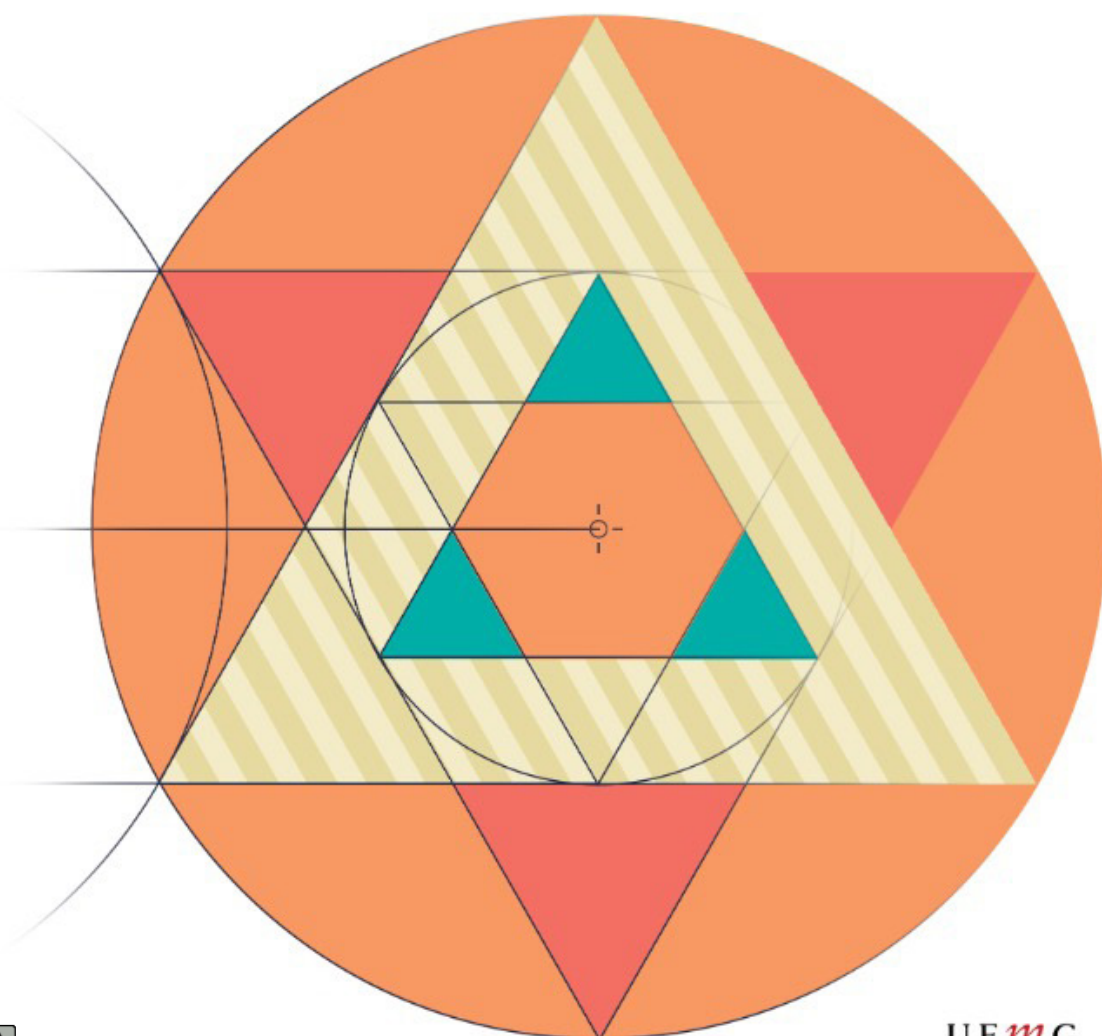


GEO

DALAS

DESAFIOS GEOMÉTRICOS  
MANDALAS COM RÉGUA  
COMPASSO E GEOGEBRA

Por Angélica R. Ventura









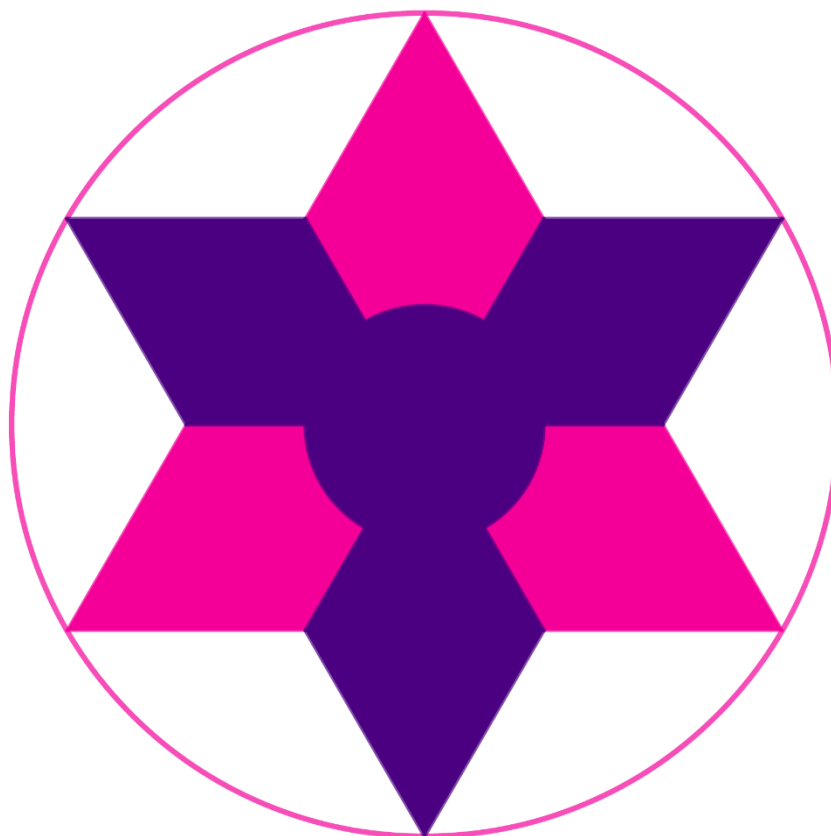




# DESAFIOS GEOMÉTRICOS FOLHAS DE ATIVIDADES



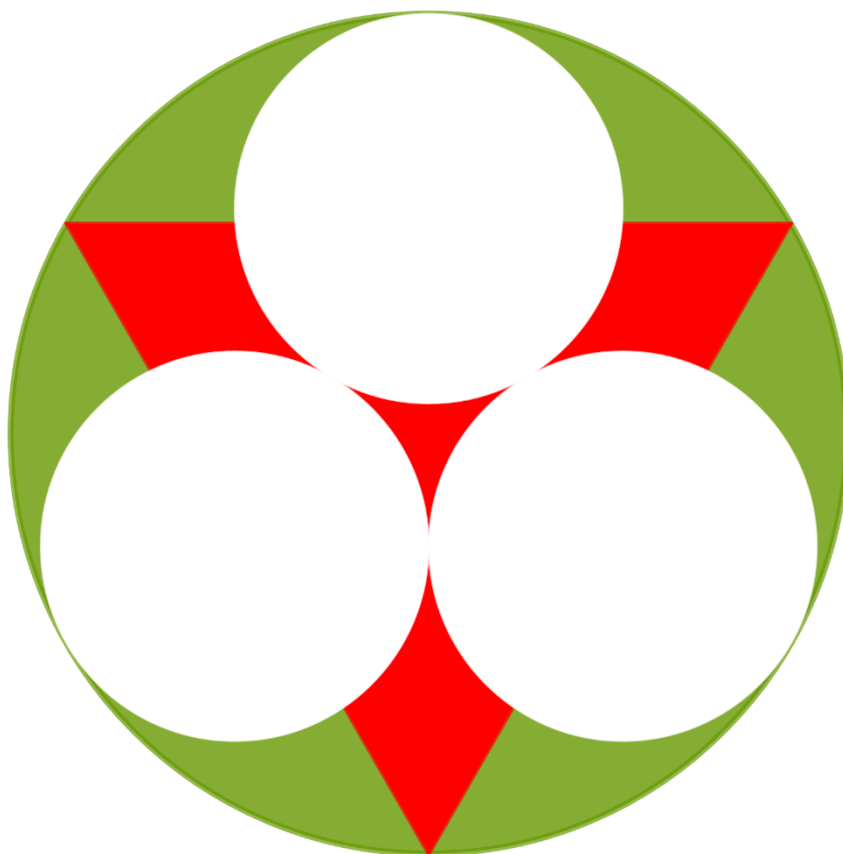
## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.



## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.





## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.



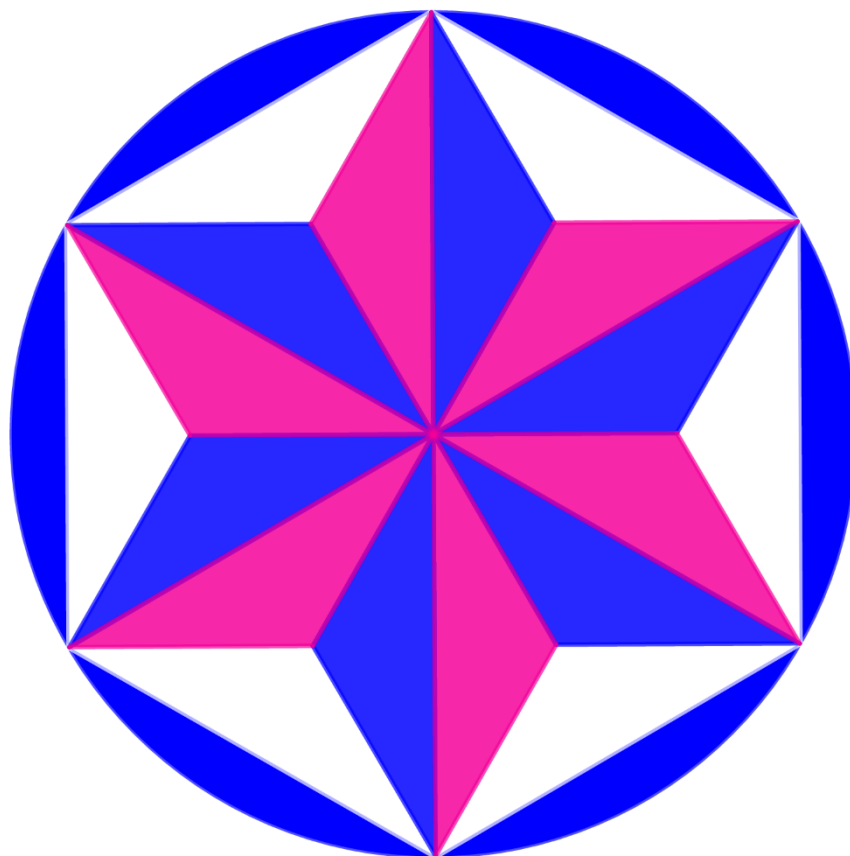
## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.



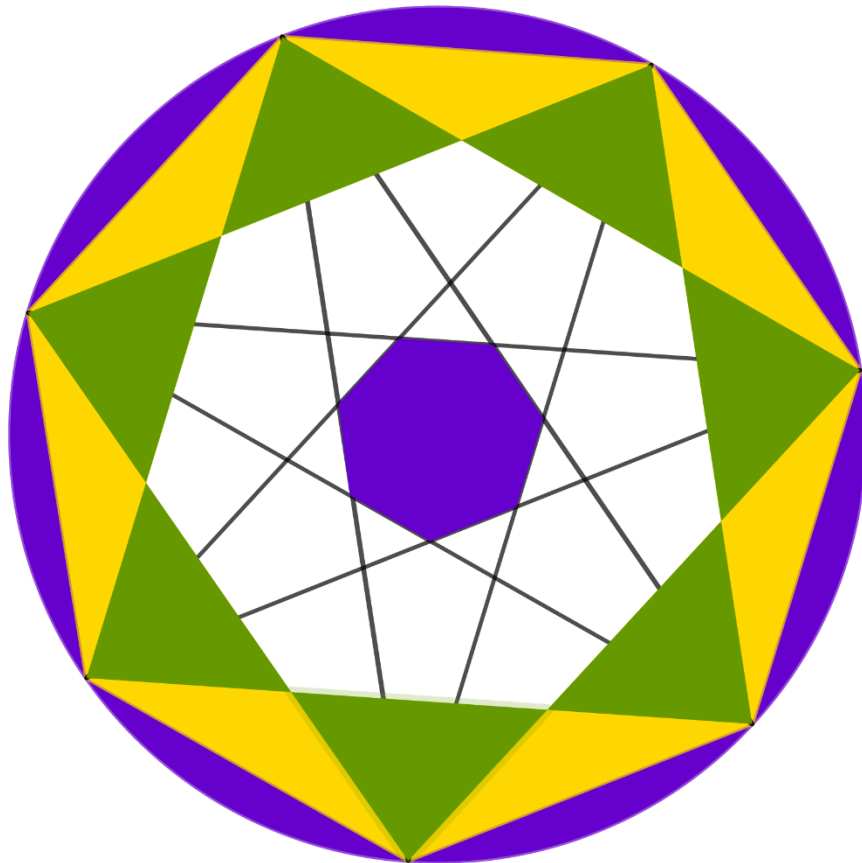
## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.



## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.





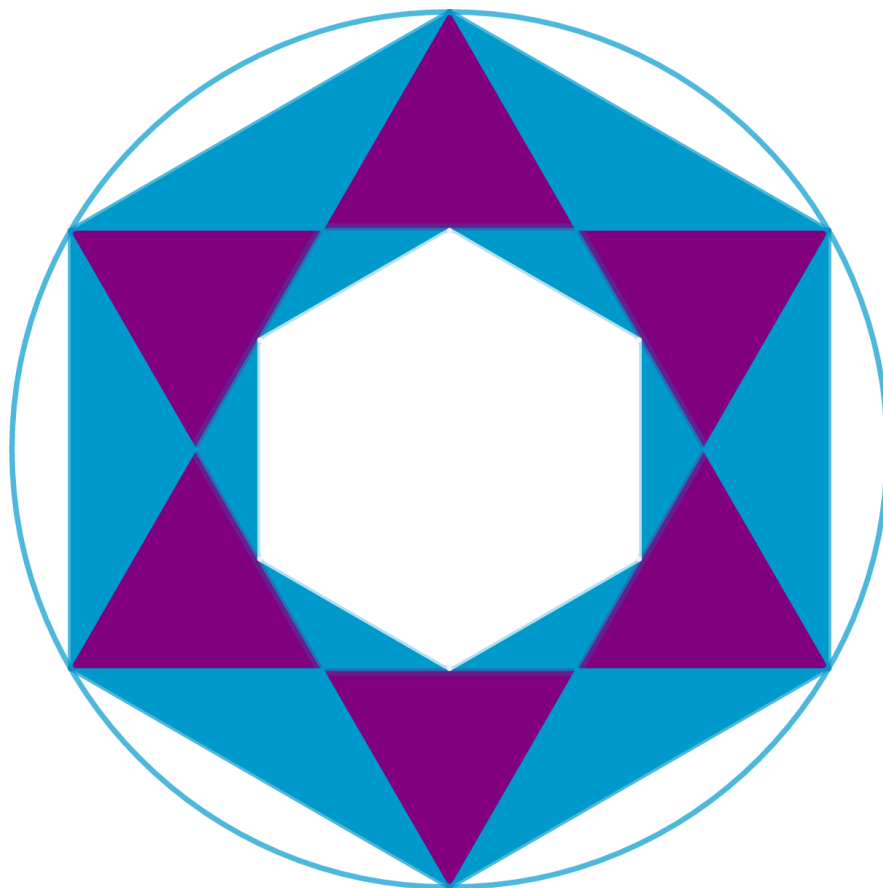
## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.



## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.



## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.



## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.



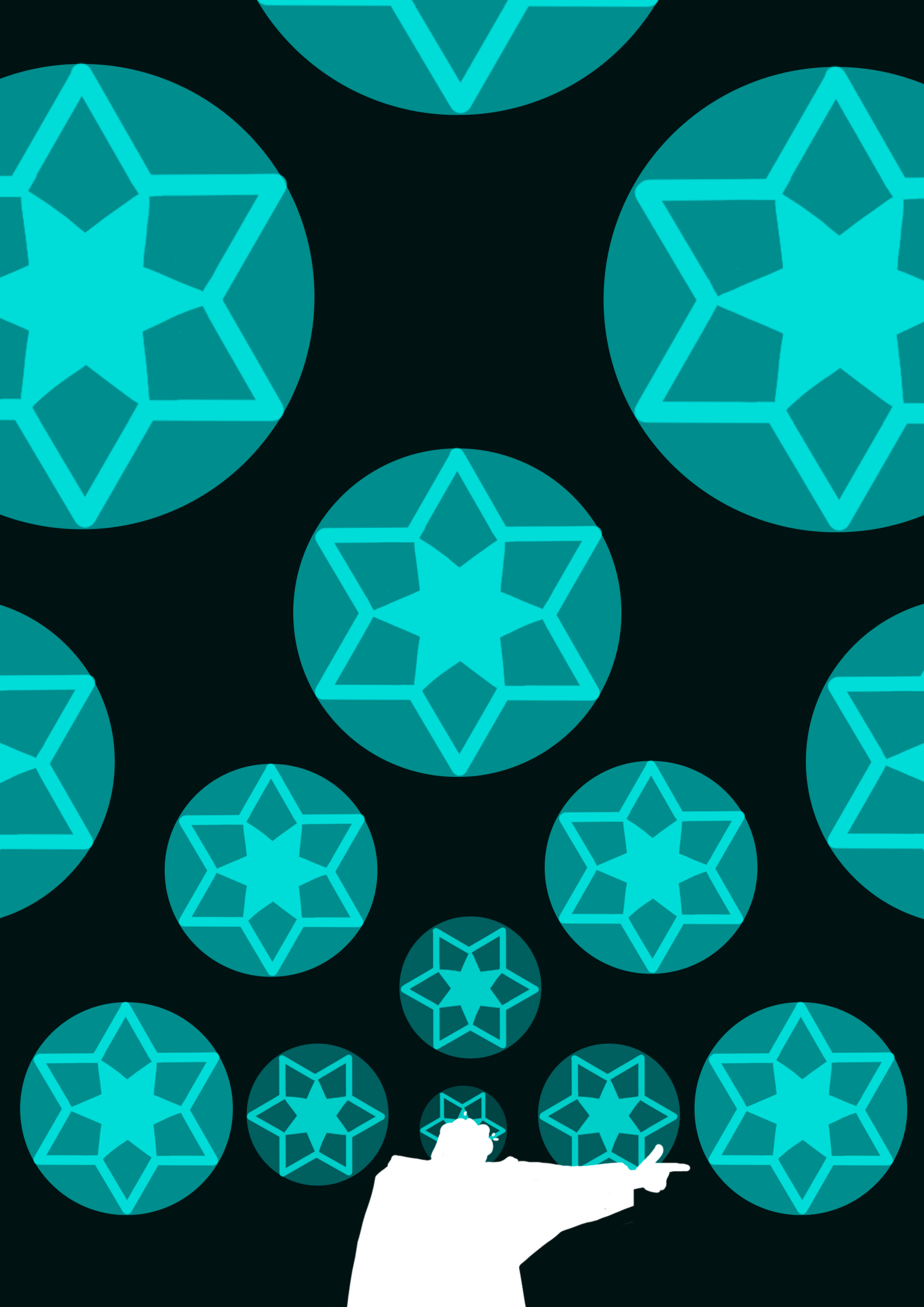


## DESAFIO GEOMÉTRICO



- 1) Que figuras geométricas vocês identificam ao observar a composição desta Mandala?
- 2) Qual é a posição relativa de cada figura em relação à circunferência base ou às outras figuras que compõem a Mandala?
- 3) Faça você mesma a composição da Mandala.









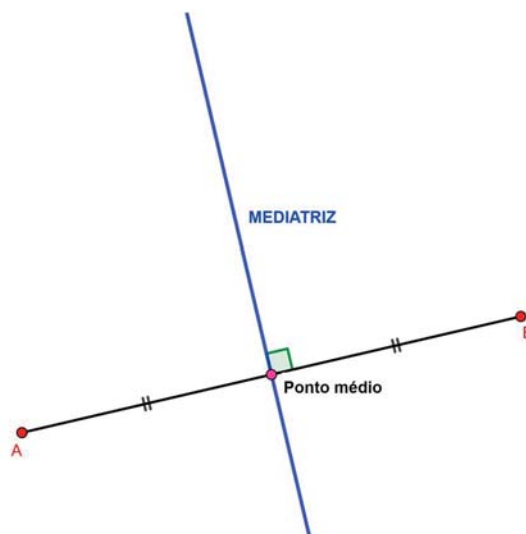
# COSNTRUÇÕES GEOMÉTRICAS FUNDAMENTAIS NO GEOGEBRA CARTÕES





Escaneie e assista  
a construção!

## Reta Mediatrix



Chamamos de **mediatrix** do segmento  $\overline{AB}$  a reta perpendicular a  $\overline{AB}$  que passa pelo seu ponto médio. Ou seja, Mediatrix é o lugar geométrico de todos os pontos que equidistam das extremidades de um segmento.

GEODALAS

**Dado um segmento de reta AB, determine sua mediatrix e o seu ponto médio utilizando régua e compasso**

1. Defina como raio a medida do segmento AB. Trace duas circunferências (📍) com centros em A e B.
2. Marque os pontos de interseção (✂) entre as circunferências.
3. Esses pontos definem uma reta, trace a reta (📏).
4. A reta traçada é a reta pedida, ou seja, ela é a **mediatrix do segmento AB**.
5. Marque o ponto de interseção (✂) entre a reta traçada e o segmento AB.
6. O ponto marcado é o **ponto médio do segmento AB**.

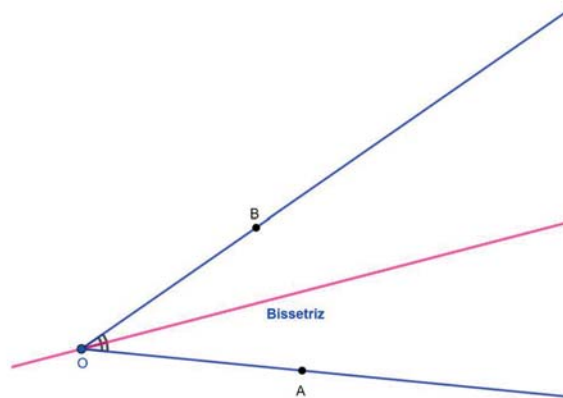






Escaneie e assista  
a construção!

## Bissetriz de um ângulo



Chamamos de bissetriz do ângulo  $A\hat{O}B$  a semirreta  $OC$  tal que  $A\hat{O}C \cong B\hat{O}C$ , ou seja, a bissetriz “divide” o ângulo em dois ângulos com mesma medida. Assim, Bissetriz é o lugar geométrico de todos os pontos que equidistam destas semirretas.

GEODALAS

**Dadas as semirretas  $AO$  e  $OB$  de mesma origem, trace a reta bissetriz do ângulo  $A\hat{O}B$  utilizando régua e compasso**

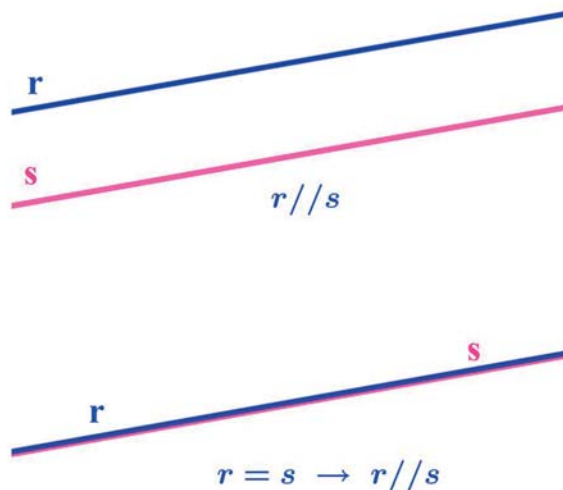
1. Trace uma circunferência (⊙) com centro em  $O$ , cortando/interceptando as duas semir retas. Marque esses pontos de interseção (×) com as semirretas.
2. Defina como raio a distância entre esses dois pontos de interseção e trace uma circunferência (⊙) com centro em um dos pontos de interseção.
3. Com a mesma medida de raio trace outra circunferência (⊙) com centro no outro ponto de interseção.
4. Marque os pontos de interseção (×) entre as duas circunferências.
5. Esses pontos definem uma reta. Trace a reta (↗) passando pelos pontos.
6. A reta traçada é a reta pedida, ou seja, ela **é bissetriz ao ângulo  $A\hat{O}B$** .





Escaneie e assista  
a construção!

## Retas paralelas



Duas retas,  $r$  e  $s$ , são paralelas ( $r \parallel s$ ) se, e somente se, são coincidentes (iguais) ou coplanares e não têm nenhum ponto comum.

GEODALAS

**Dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , exterior à  $r$ , trace uma reta paralela à  $r$  que passe por  $P$  utilizando régua e compasso**

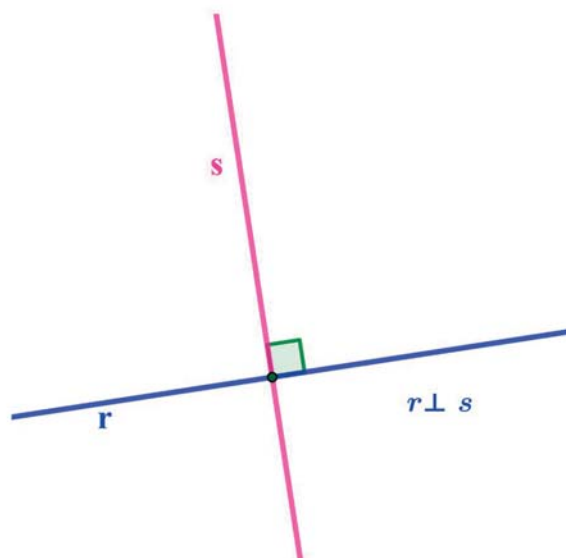
1. Trace uma circunferência ( $\odot$ ) com centro em  $P$ , cortando/interceptando a reta  $r$  em dois pontos. Marque esses pontos de interseção ( $\times$ ) com a reta  $r$ .
2. Defina como raio a distância entre o ponto  $P$  e um dos pontos de interseção e com centro neste ponto trace outra circunferência ( $\odot$ ).
3. Marque os dois pontos de interseção ( $\times$ ) entre a essa circunferência e a reta  $r$ .
4. Com mesma medida de raio trace uma terceira circunferência com centro em um dos pontos de interseção anterior.
5. Marque o ponto de interseção ( $\times$ ) entre esta terceira circunferência com a primeira circunferência.
6. Trace uma reta ( $\rightarrow$ ) passando por este ponto de interseção e por  $P$ . Esses pontos de finem uma reta.
7. A reta traçada é a reta pedida, ou seja, ela é **paralela à reta  $r$  e contém o ponto  $P$** .





Escaneie e assista  
a construção!

## Retas perpendiculares



Duas retas,  $r$  e  $s$ , são perpendiculares ( $r \perp s$ ) se, e somente se, são concorrentes e formam ângulos adjacentes suplementares congruentes (ângulo reto).

GEODALAS

**Dados uma reta  $r$  e um ponto  $P$ , exterior à  $r$ , trace uma reta perpendicular à  $r$  que passe por  $P$  utilizando régua e compasso**

1. Trace uma circunferência (⊙) com centro em  $P$ , cortando/interceptando a reta  $r$  em dois pontos. Marque esses pontos de interseção (×) com a reta  $r$ .
2. Defina como raio a distância entre esses dois pontos e trace duas circunferências (⊙) com centro em cada um dos pontos de interseção.
3. Marque os pontos de interseção entre as duas circunferências (×).
4. Esses pontos definem uma reta, trace a reta (↗).
5. A reta traçada é a reta pedida, ou seja, ela é **perpendicular à  $r$  e contém o ponto  $P$** .

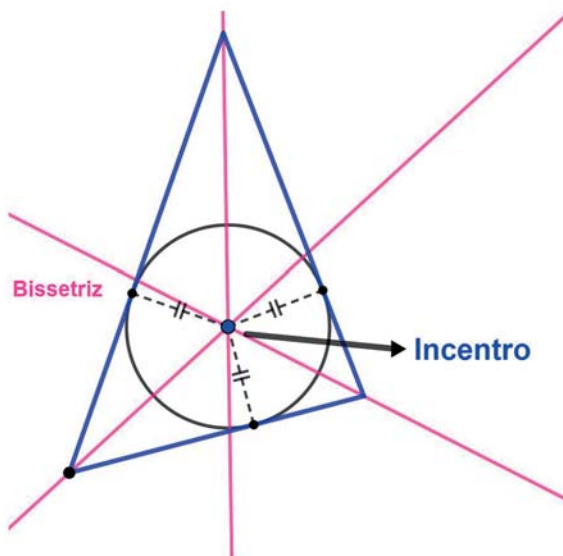




Escaneie e assista  
a construção!

# Pontos notáveis do triângulo

## Incentro

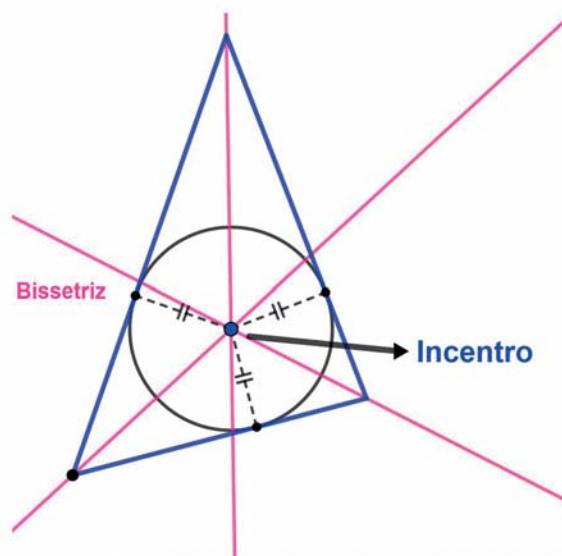


GEODALAS

### Incentro

Chamamos de incentro o ponto de interseção das três bissetrizes internas do triângulo.

O incentro é também o centro de uma circunferência inscrita no triângulo, ou seja, Incentro é o lugar geométrico dos pontos interiores que equidistam dos seus lados.





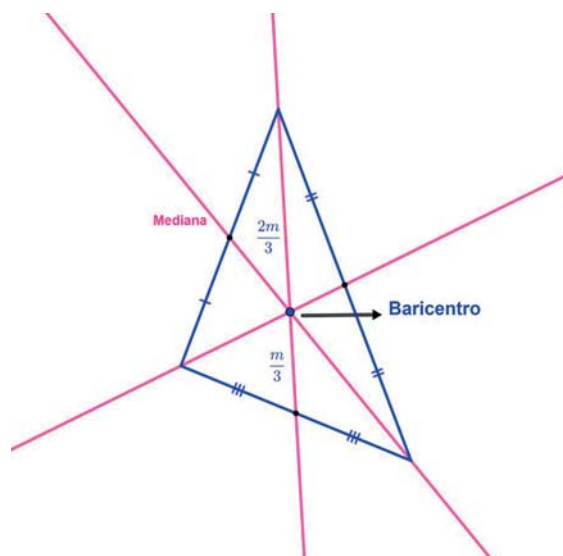




Escaneie e assista  
a construção!

# Pontos notáveis do triângulo

## Baricentro

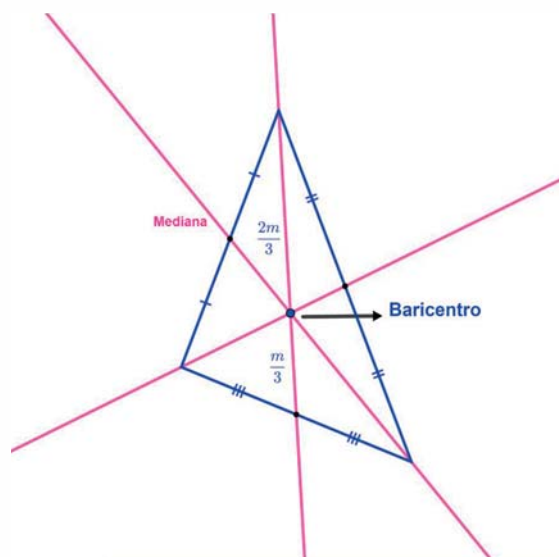


# GEODALAS

## Baricentro

Chamamos de Baricentro o ponto de interseção das três Medianas de um triângulo.

Este ponto tem como propriedade dividir a Mediana na razão de dois pra um, ou seja, a distância do vértice ao Baricentro é duas vezes o comprimento que vai do Baricentro ao ponto médio do lado oposto ao vértice.



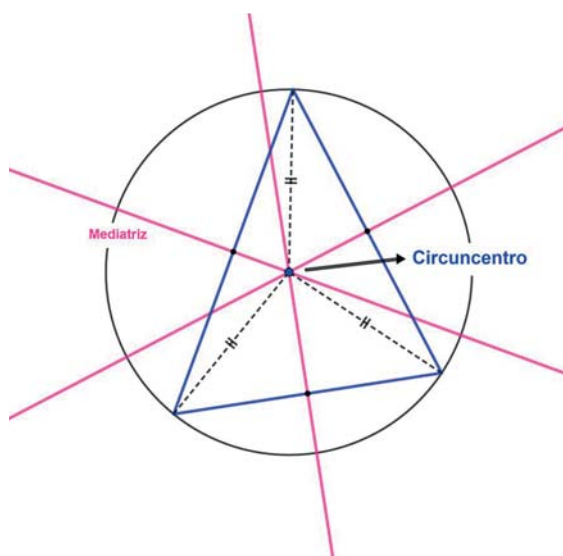




Escaneie e assista  
a construção!

# Pontos notáveis do triângulo

## Circuncentro

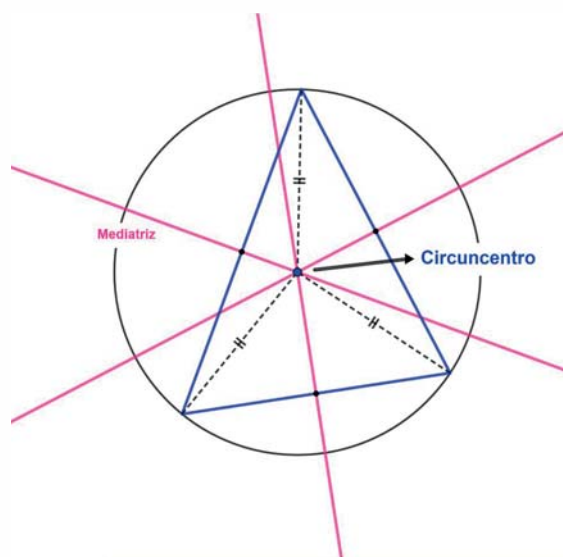


GEODALAS

### Circuncentro

Chamamos de Circuncentro o ponto de interseção das três Mediatrizes de um triângulo.

O Circuncentro é também o centro de uma circunferência circunscrita ao triângulo com raio igual a distância do Circuncentro a um dos vértices.



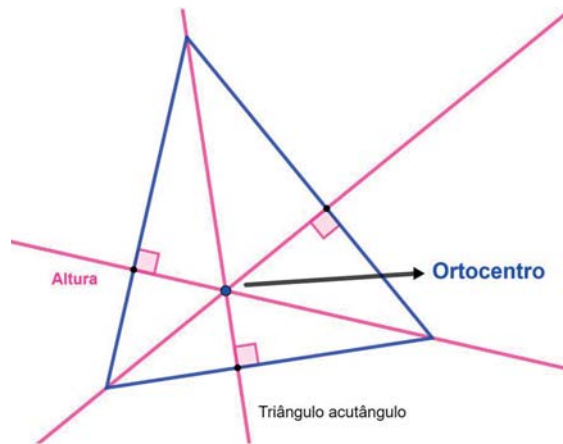




Escaneie e assista a construção!

# Pontos notáveis do triângulo

## Ortocentro

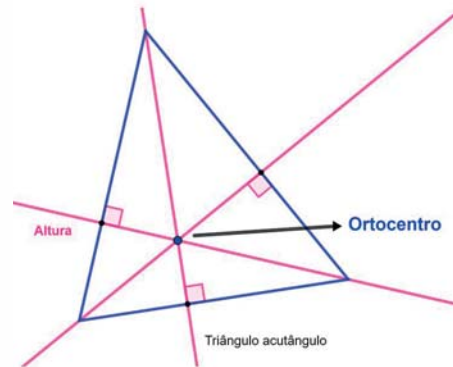


# GEODALAS

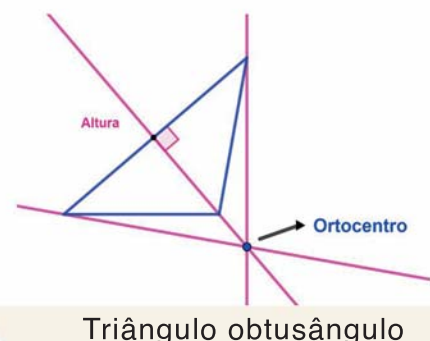
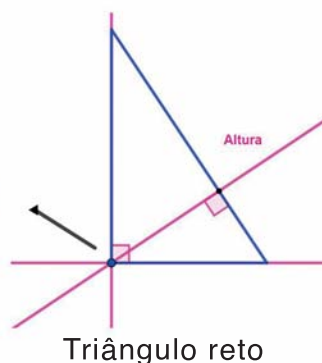
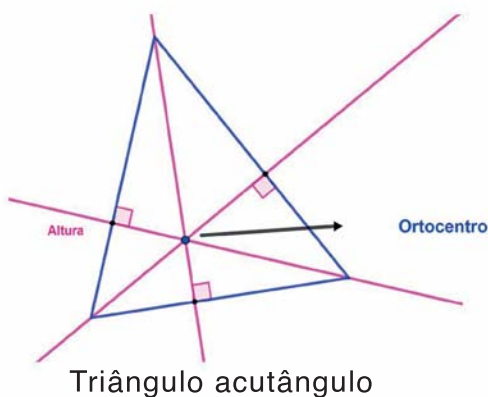
### Ortocentro

Chamamos de Ortocentro o ponto de interseção das três Alturas de um triângulo.

O Ortocentro é interno ao triângulo se ele for acutângulo, coincide com o vértice do ângulo reto se for retângulo e externo ao triângulo se ele for obtusângulo.



### Ortocentros em diferentes triângulos



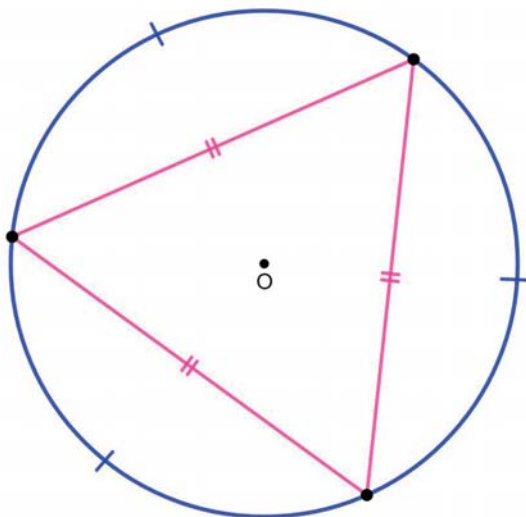




Escaneie e assista  
a construção!

# Dividindo uma circunferência em partes congruentes

## Divisão em 3 partes



GEODALAS

### Dividindo uma circunferência, com centro em $O$ , em 3 partes congruentes utilizando régua e compasso

1. Trace uma reta (📏) passando pelo centro  $O$  cortando/interceptando a circunferência em dois pontos.
2. Marque os pontos de interseção (✂️) entre a circunferência e a reta. Temos o diâmetro da circunferência.
3. Com o mesmo raio da circunferência inicial trace outra circunferência (📏) com centro em uma das extremidades do diâmetro.
4. Marque os pontos de interseção entre as duas circunferências (✂️).
5. Esses dois pontos e o ponto extremo do diâmetro dividem a circunferência em três partes congruentes.
6. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **TRIÂNGULO EQUILÁTREO** inscrito na circunferência.



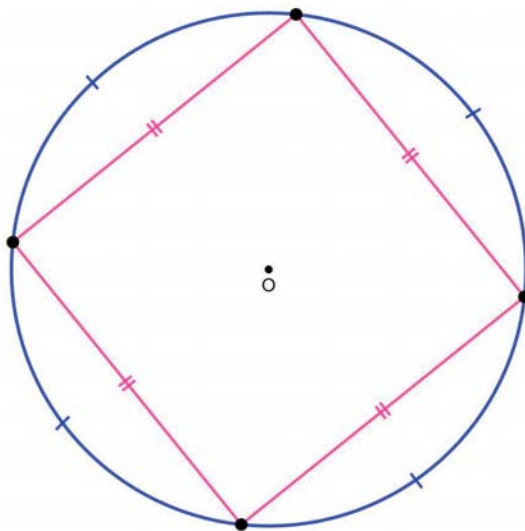




Escaneie e assista  
a construção!

# Dividindo uma circunferência em partes congruentes

## Divisão em 4 partes



GEODALAS

### Dividindo uma circunferência, com centro em $O$ , em 4 partes congruentes utilizando régua e compasso

1. Trace uma reta (✎) passando pelo centro  $O$  cortando/interceptando a circunferência em dois pontos.
2. Marque os pontos de interseção (✂) entre a circunferência e a reta. Temos o diâmetro da circunferência.
3. Trace a mediatriz referente ao diâmetro.
4. Marque os pontos de interseção (✂) entre a circunferência inicial e a mediatriz.
5. Esses quatro pontos dividem a circunferência em quatro partes congruentes.
6. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **QUADRADO** inscrito na circunferência.

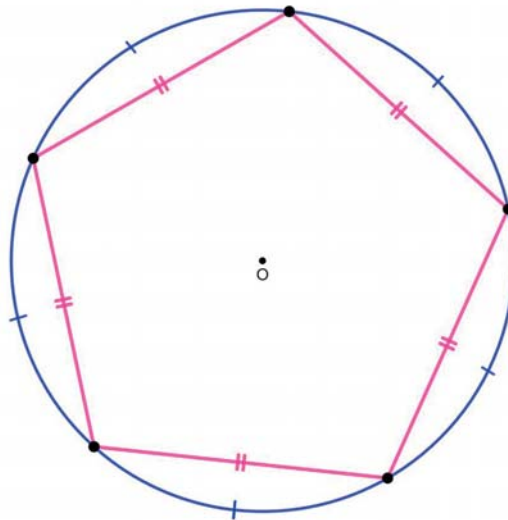




Escaneie e assista  
a construção!

# Dividindo uma circunferência em partes congruentes

## Divisão em 5 partes



GEODALAS

### Dividindo uma circunferência, com centro em $O$ , em 5 partes congruentes utilizando régua e compasso

1. Trace uma reta (📏) passando pelo centro  $O$  cortando/interceptando a circunferência em dois pontos. Marque os pontos de interseção (✂). Temos o diâmetro da circunferência.
2. Trace a mediatriz referente ao diâmetro e marque seus pontos de interseção com a circunferência. Determine o ponto médio e a mediatriz referente ao raio.
3. Defina como raio a distância entre um dos pontos de interseção marcados na mediatriz referente ao diâmetro e o ponto médio referente ao raio da circunferência.
4. Defina o ponto médio como centro e trace (📐) uma circunferência cortando/interceptando o diâmetro da circunferência inicial em um ponto. Marque esse ponto de interseção.
5. Defina como raio a distância deste ponto ao ponto de interseção marcado na mediatriz do diâmetro, defina este ponto como centro e trace outra circunferência.
6. Marque os pontos de interseção com a circunferência. Defina um desses pontos como centro. Repita o processo e trace mais duas circunferências.
7. Estes quatro últimos pontos marcados e o ponto de interseção na mediatriz do diâmetro dividem a circunferência em 5 partes congruentes.
8. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **PENTÁGONO** inscrito na circunferência.

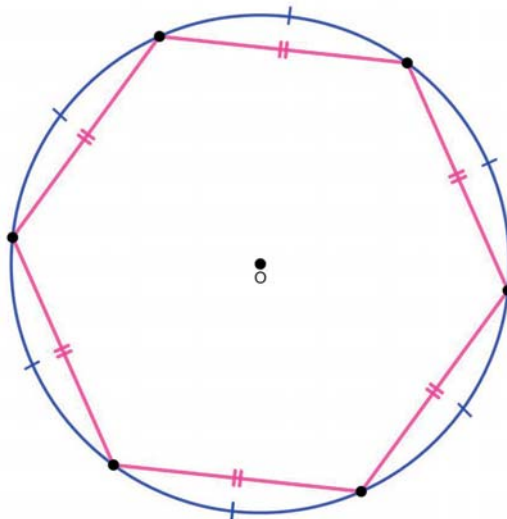




Escaneie e assista  
a construção!

# Dividindo uma circunferência em partes congruentes

## Divisão em 6 partes



GEODALAS

### Dividindo uma circunferência, com centro em $O$ , em 6 partes congruentes utilizando régua e compasso

1. Trace uma reta (📏) passando pelo centro  $O$  cortando/interceptando a circunferência em dois pontos.
2. Marque os pontos de interseção (✂️) entre a circunferência e a reta. Temos o diâmetro da circunferência.
3. Com o mesmo raio da circunferência inicial trace uma circunferência (📐) com centro em uma das extremidades do diâmetro.
4. Mantendo a mesma medida de raio trace outra circunferência com centro na outra extremidade do diâmetro.
5. Marque os pontos de interseção entre essas duas circunferências (✂️) e a circunferência inicial.
6. Esses quatro pontos e os pontos extremos do diâmetro dividem a circunferência em seis partes congruentes.
7. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **HEXÁGONO** inscrito na circunferência.

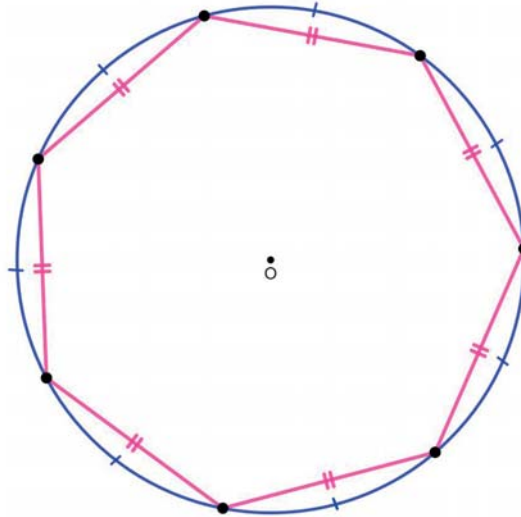




Escaneie e assista  
a construção!

# Dividindo uma circunferência em partes congruentes

## Divisão em 7 partes



GEODALAS

### Dividindo uma circunferência, com centro em $O$ , em 7 partes congruentes utilizando régua e compasso

1. Trace uma reta (↗) passando pelo centro  $O$  cortando/interceptando a circunferência em dois pontos. Marque os pontos de interseção (⊗). Temos o diâmetro da circunferência.
2. Determine o ponto médio e a mediatriz referente ao raio. Marque o ponto de interseção (⊗) entre a mediatriz e a circunferência inicial.
3. Defina como raio a distância entre este ponto de interseção e o ponto médio referente ao raio. Trace uma circunferência (⊙) com centro no ponto de interseção marcado na mediatriz.
4. Marque os pontos de interseção dessa circunferência com a circunferência inicial.
5. Defina um desses pontos como centro e trace outra circunferência de mesmo raio.
6. Marque a interseção. Repita o processo e trace mais quatro circunferências.
7. Estes seis últimos pontos marcados e o ponto de interseção na mediatriz do raio dividem a circunferência em 7 partes.
8. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **HEPTÁGONO** inscrito na circunferência.



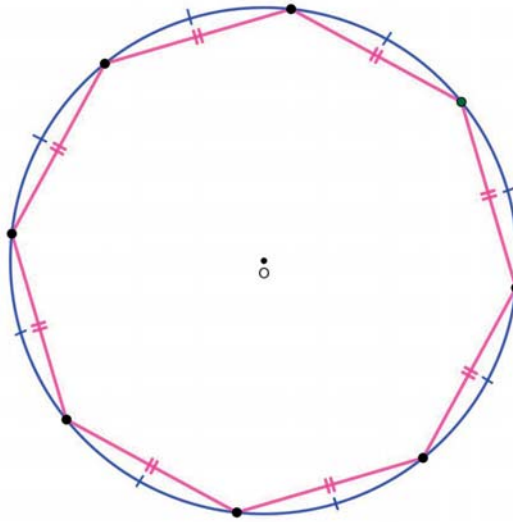




Escaneie e assista  
a construção!

# Dividindo uma circunferência em partes congruentes

## Divisão em 8 partes

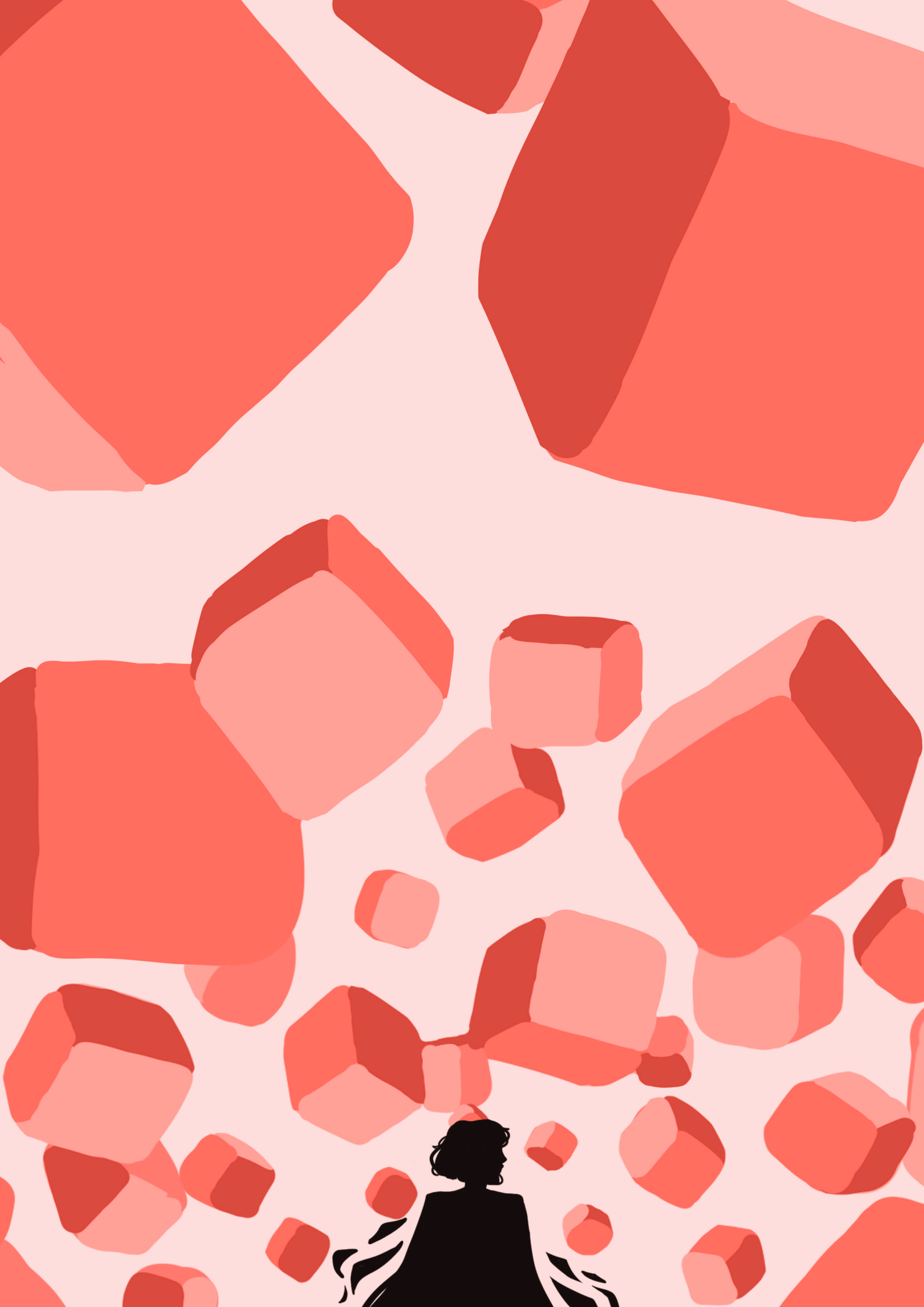


GEODALAS

### Dividindo uma circunferência, com centro em $O$ , em 8 partes congruentes utilizando régua e compasso

1. Trace uma reta (☞) passando pelo centro  $O$  cortando/interceptando a circunferência em dois pontos.
2. Marque os pontos de interseção (⊗) entre a circunferência e a reta. Temos o diâmetro da circunferência.
3. Trace a mediatriz referente ao diâmetro.
4. Marque os pontos de interseção (⊗) entre a circunferência inicial e a mediatriz.
5. Trace as bissetrizes do ângulo formado pela mediatriz e o diâmetro da circunferência.
6. Marque os pontos de interseção (⊗) entre a circunferência inicial e as bissetrizes.
7. Esses oito pontos dividem a circunferência em oito partes congruentes.
8. Da união desses pontos sobre a circunferência temos o **OCTÓGONO** inscrito na circunferência.



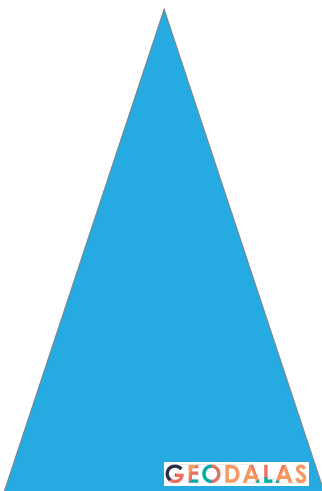
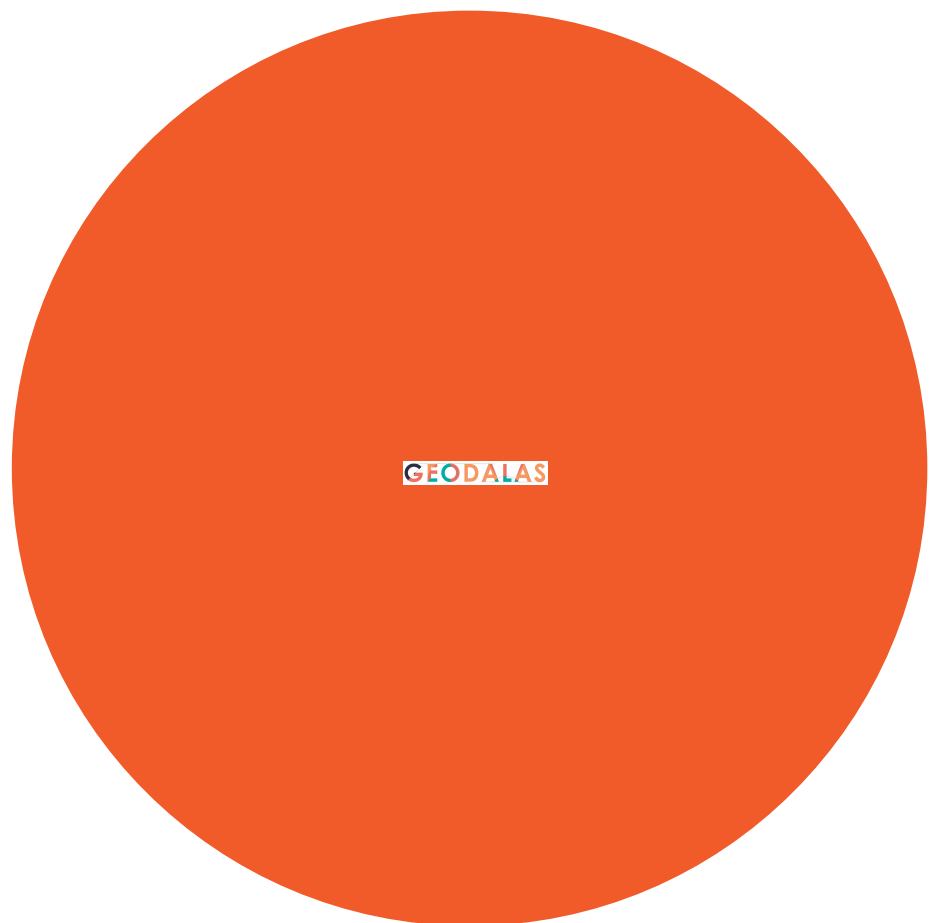
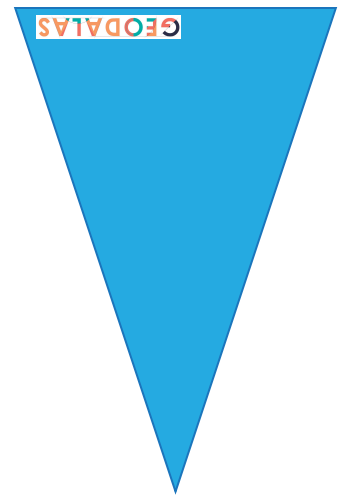
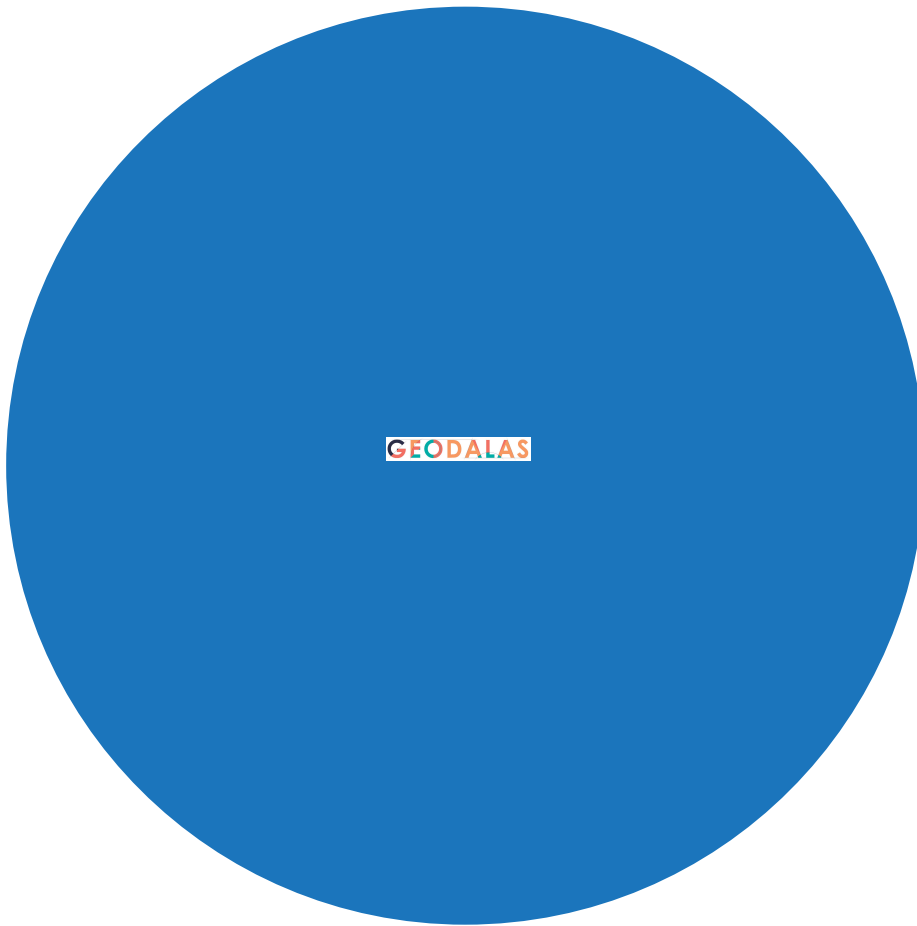






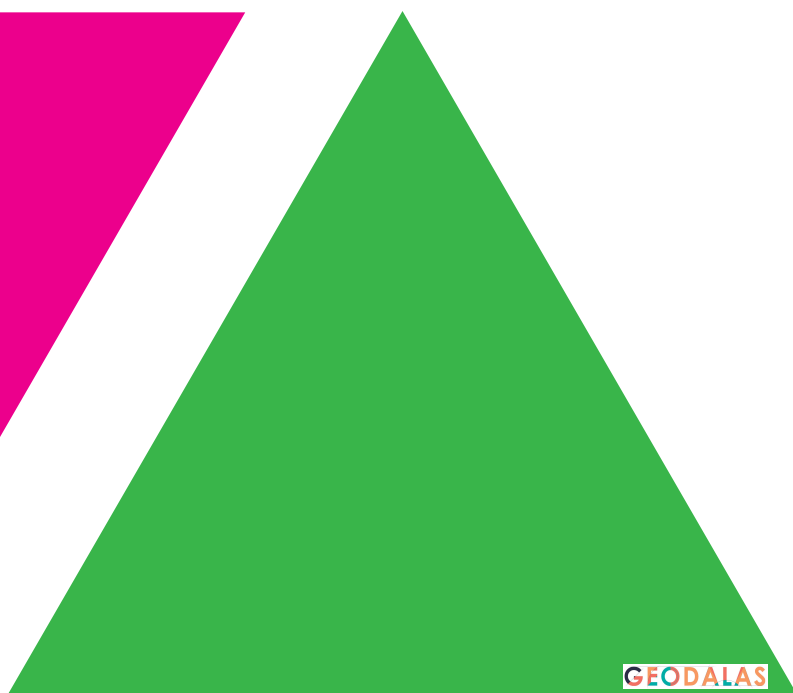
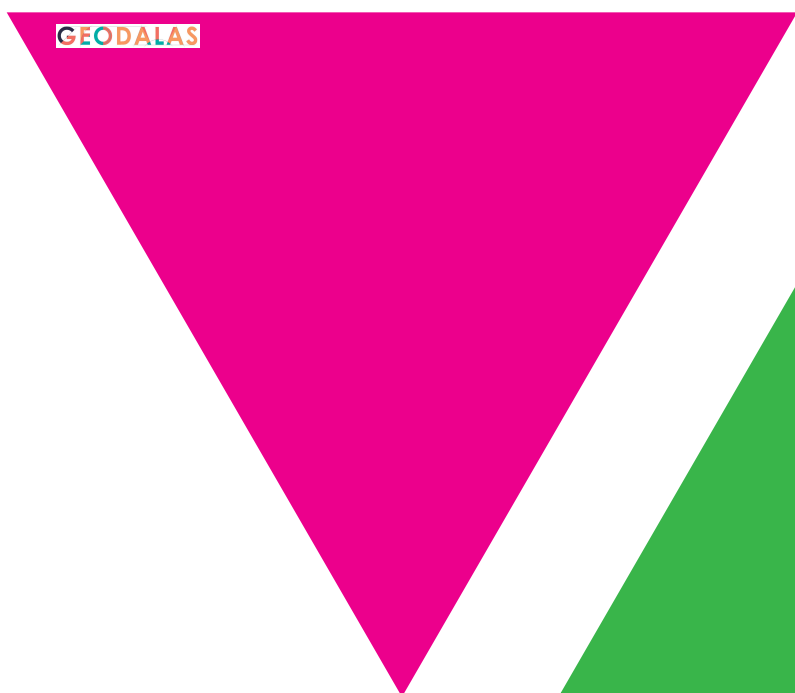
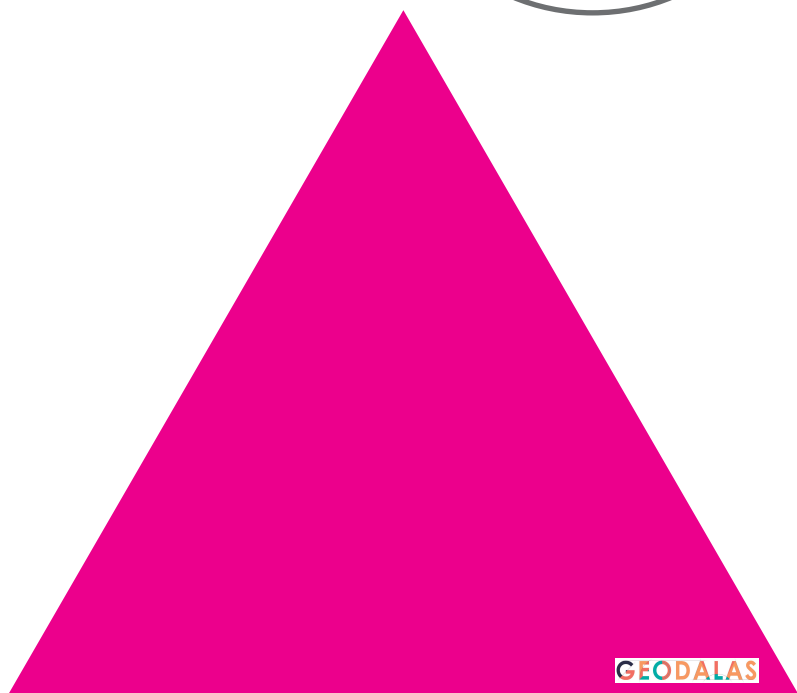
# KIT COMPONDO SUA MANDALA PEÇAS



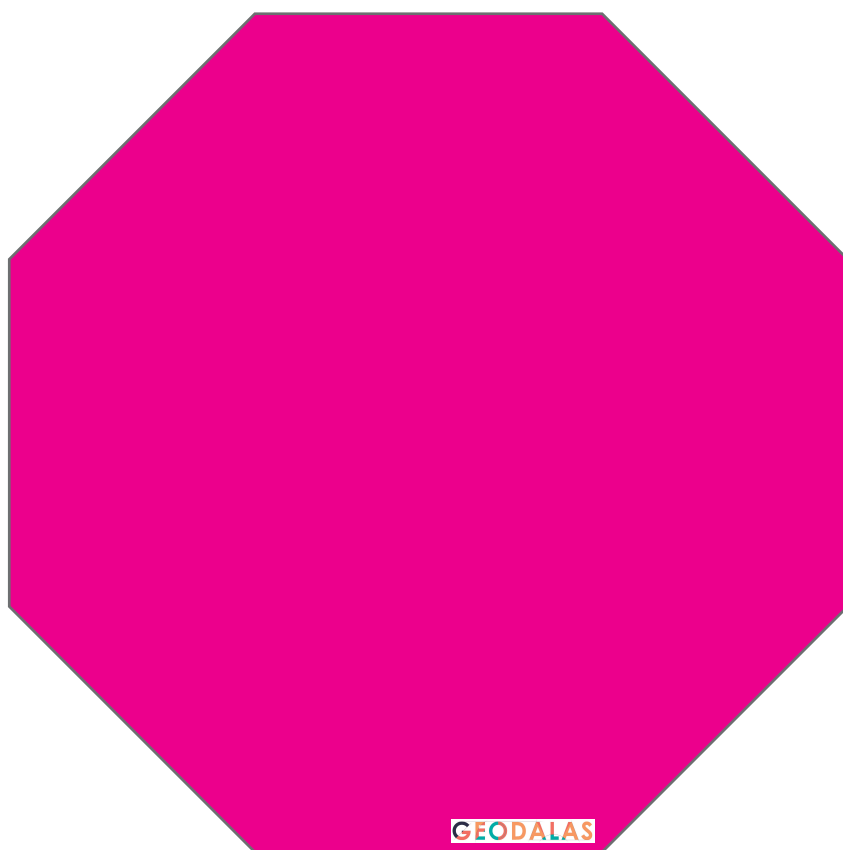
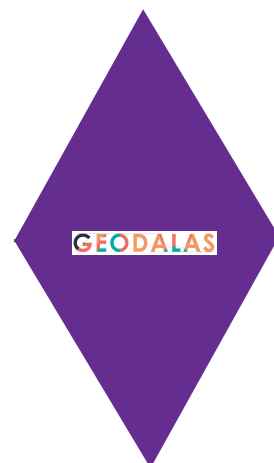
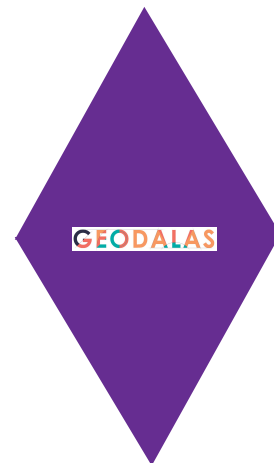




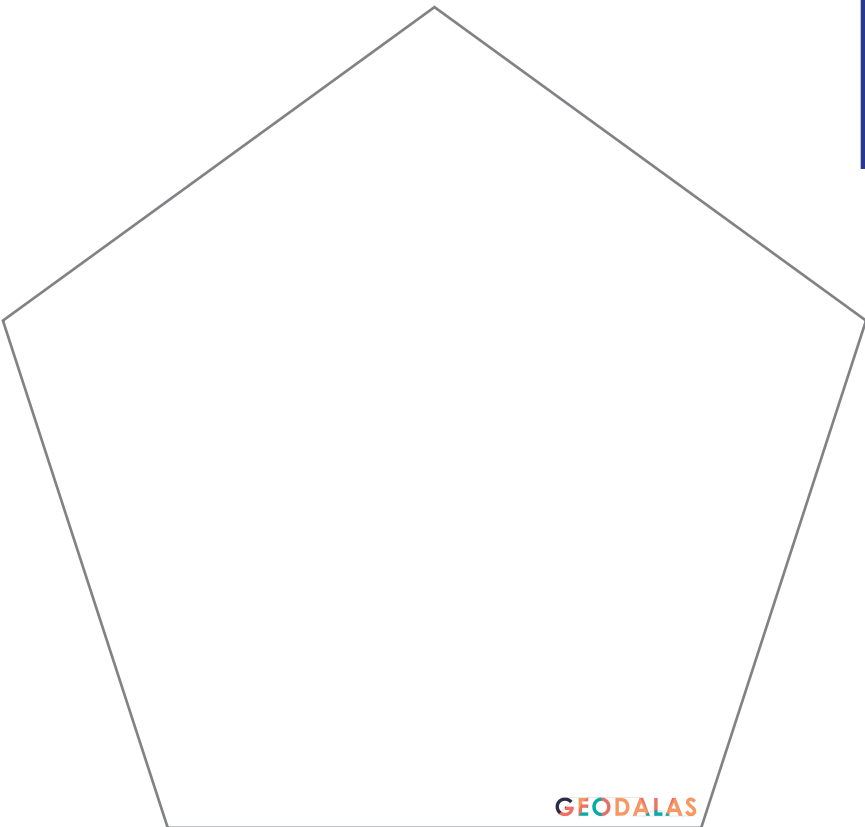
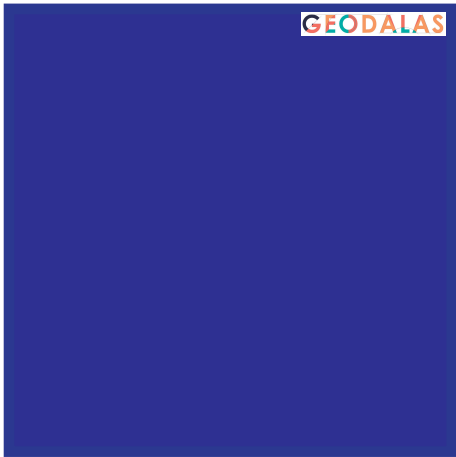
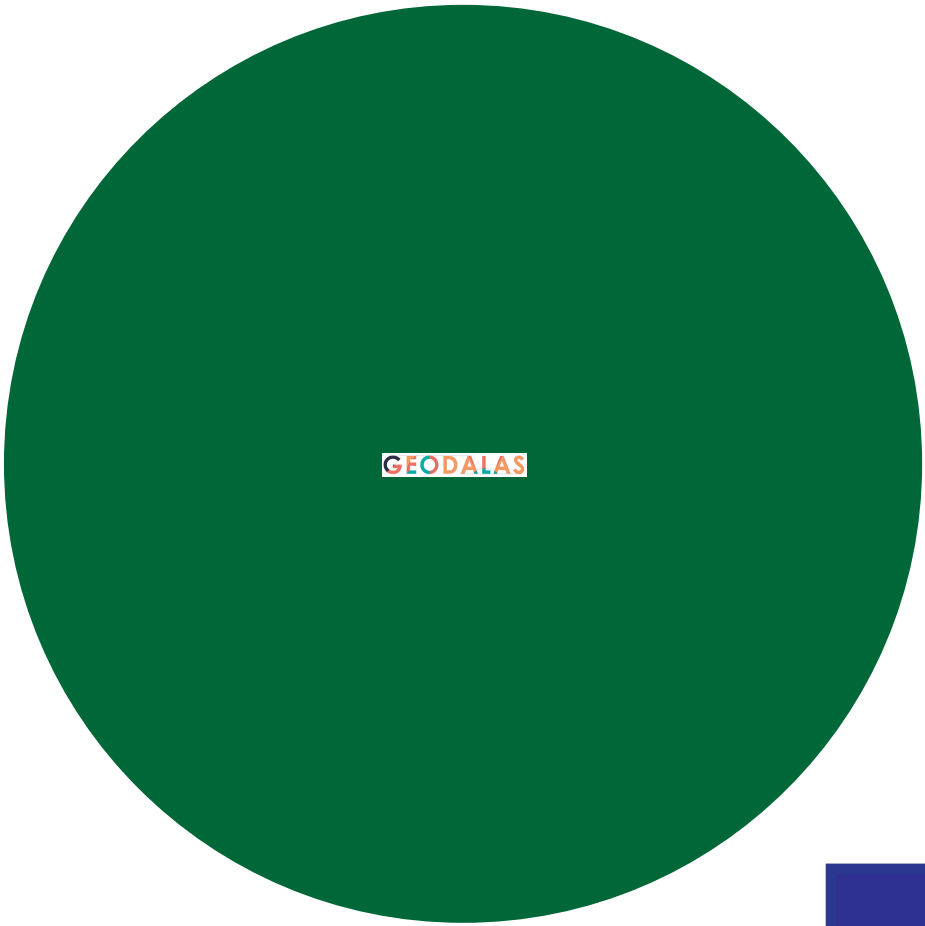




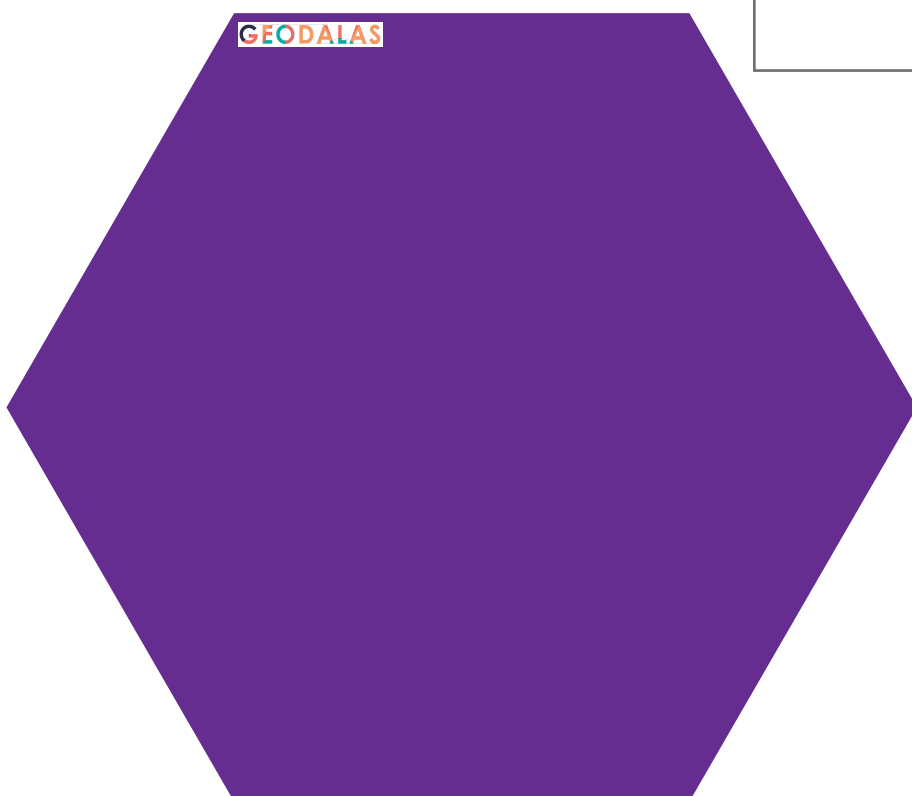
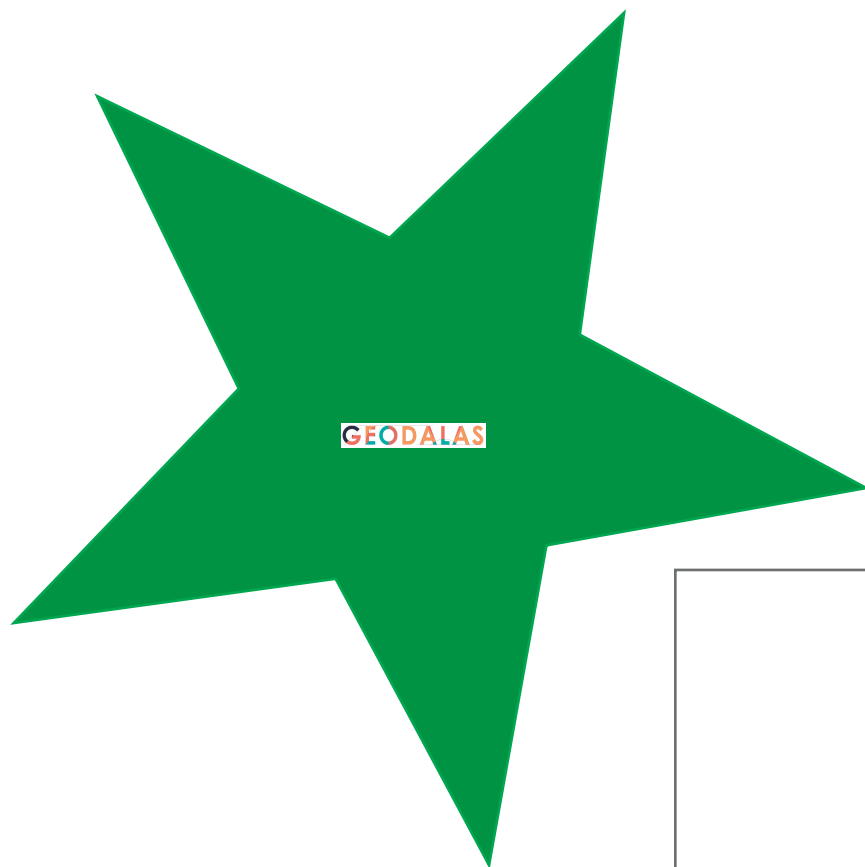






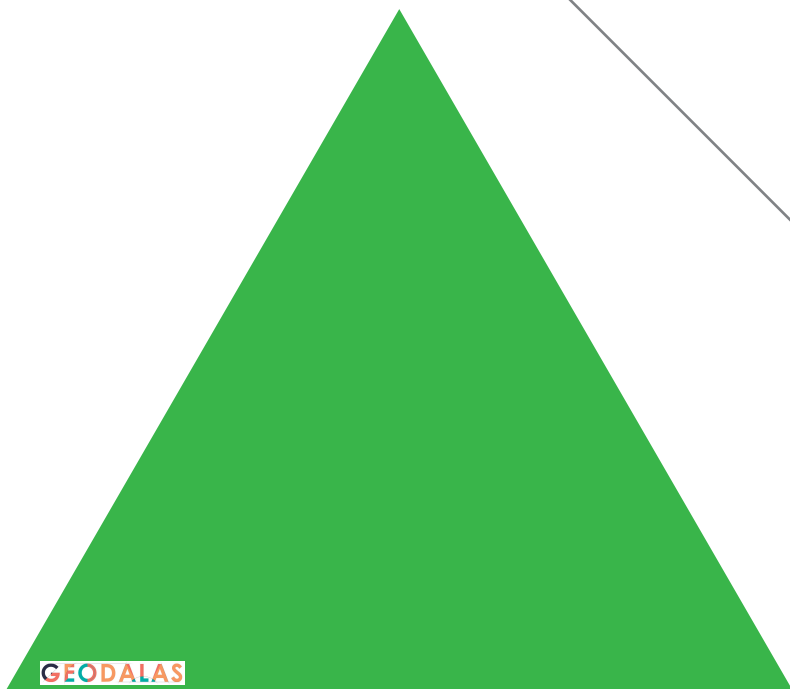
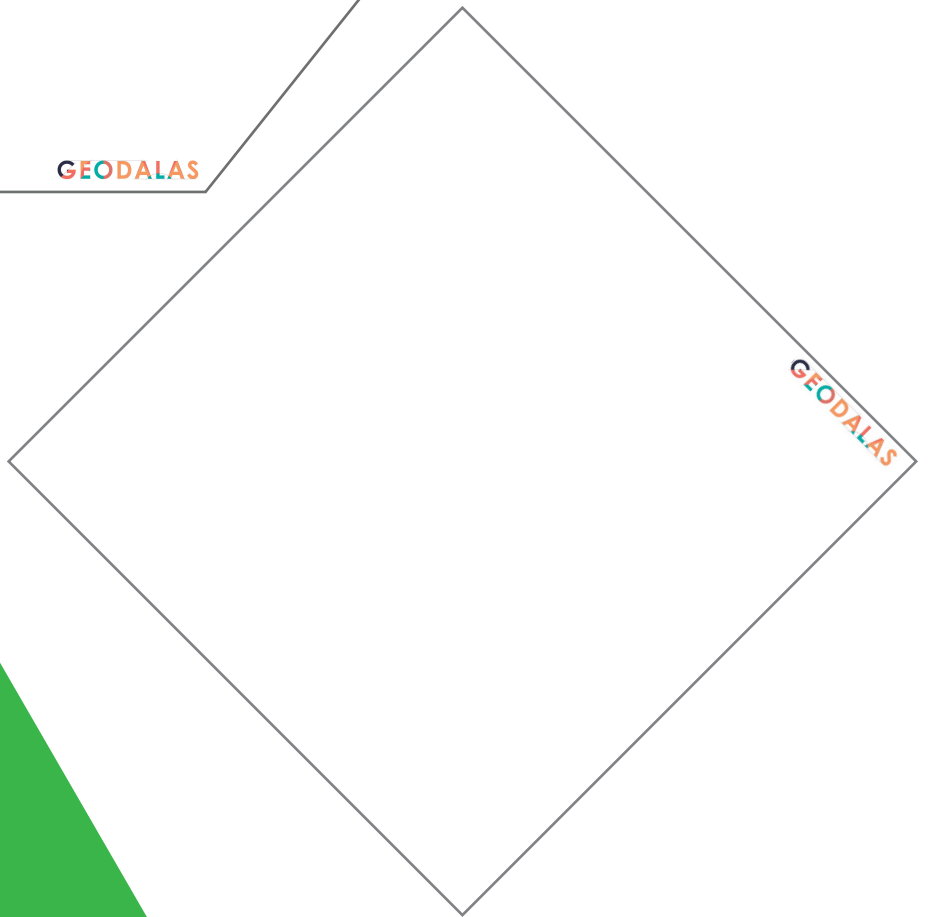
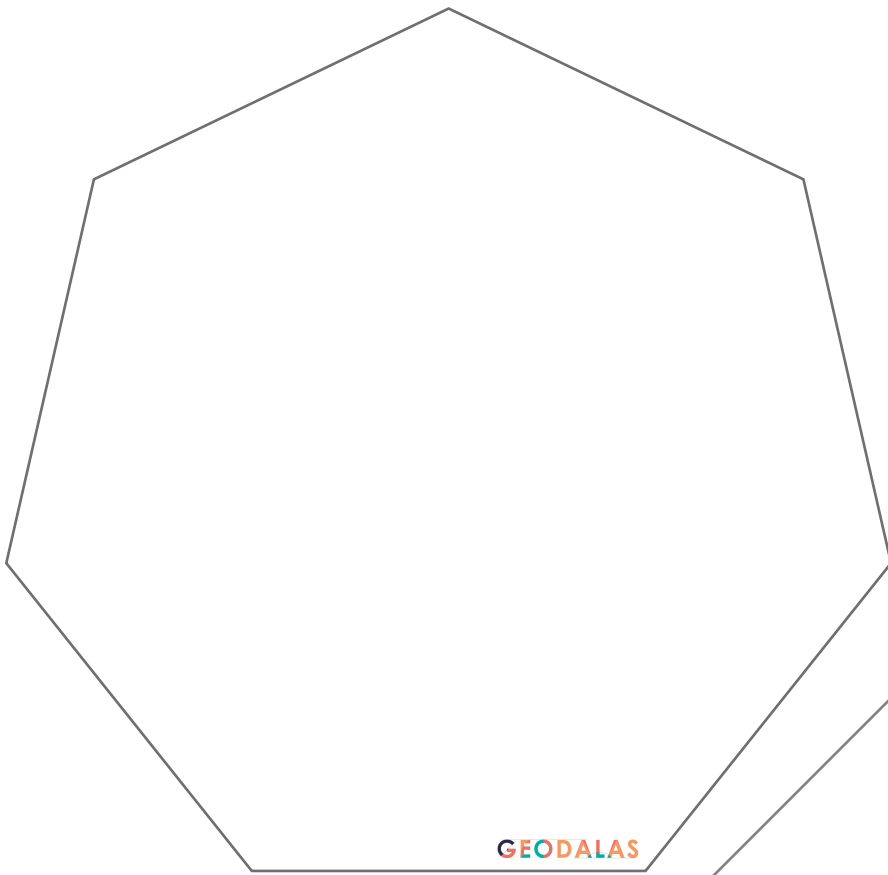
















GEODALAS: Desafios Geométricos – Mandalas com régua, compasso e GeoGebra de [Angélica Rodrigues Ventura](#); [Teresinha Fumi Kawasaki](#) está licenciado com uma [Licença Creative Commons - Atribuição-CompartilhaIgual 4.0 Internacional](#).

Esta obra é fruto da pesquisa Fragmentos de uma Pesquisa - Desafios Geométricos, GeoGebra e “régua e compasso”: estudando Geometria por meio de construções de Mandalas Geométricas, realizada no âmbito do Mestrado profissional em Educação e Docência - PROMESTRE, FaE/UFMG.

Apresenta uma proposta de estudo da Geometria mais especificamente das Construções Geométricas, por meio da resolução de Desafios Geométricos, aliada ao uso do *software* de matemática dinâmica GeoGebra. Tais Desafios são colocados com a intenção de colocar os estudantes diante de situações em que estratégias de investigação podem/devem ser estabelecidas, visando ainda proporcionar a experimentação e a visualização de objetos e conceitos geométricos.