UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICEX

Daniela Alves da Silveira Moura

UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO:

SUPERFÍCIE DO CILINDRO INSCRITO EM UM CONE

Monografia apresentada á comissão julgadora do curso de Especialização da Universidade Federal de Minas Gerais-Instituto de Ciências Exatas – ICEX sob orientação do professor Doutor Antônio Zumpano Pereira Santos, em atendimento a exigência parcial para obtenção do certificado de Especialista em Matemática: Ênfase em Cálculo.

Belo Horizonte

2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICEX

Daniela Alves da Silveira Moura

Agradeço a Deus, aos meus filhos Yuri e Giovanna, ao meu marido Christian e em especial aos professores Alberto Sarmiento, Jussara Loyola e Antônio Zumpano que muito contribuíram para meu crescimento.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICEX

Daniela Alves da Silveira Moura

A matemática é o mais maravilhoso instrumento criado pelo gênio homem para a descoberta da verdade.
LAISANT

FOLHA DE AVALIAÇÃO

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

DANIELA ALVES DA SILVEIRA MOURA

TÍTULO DA MONOGRAFIA: UM PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO:

SUPERFÍCIE DO CILINDRO INSCRITO EM UM CONE

DATA DE ENTREGA: 02/12/2010

AVALIADO POR:

____

Dr. Antônio Zumpano Pereira Santos
Universidade Federal de Minas Gerais

____

Dr. José Antônio Gonçalves Miranda
Universidade Federal de Minas Gerais

____

Dr. Viktor Bekkert
Universidade Federal de Minas Gerais

ATA DA 96ª MONOGRAFIA DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES, APRESENTADA PELA ALUNA DANIELA ALVES DA SILVEIRA MOURA.

Aos dois dias do mês de dezembro de 2010, às 15h45, na Sala 3109, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Matemática para Professores, para julgar a apresentação da monografia da aluna **Daniela Alves da Silveira Moura**, intitulada: *"Um problema de otimização: superfície do cilindro inscrito em um cone"*, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Matemática, na Ênfase em Cálculo. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Antônio Zumpano Pereira Santos, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra à aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada **Aprovada**, por unanimidade, com nota 80 e conceito B. O resultado final foi comunicado publicamente à aluna pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 02 de dezembro de 2010.

Prof. Antônio Zumpano Pereira Santos
Orientador

Prof. José Antônio Gonçalves Miranda
Examinador

Prof. Viktor Bekkert
Examinador

RESUMO

Este trabalho vem discorrer sobre uma situação problema, um modelo matemático, que pode surgir no cotidiano de um engenheiro, um tecnólogo ou até mesmo em sala de aula. Mostrar que através da Matemática pode-se solucionar fenômenos ou acontecimentos do mundo físico usando conceitos básicos do Ensino Médio ou do Ensino Superior.

É importante ressaltar que o cálculo diferencial e integral foi criado como instrumento pra investigar movimentos, então, primeiramente, foram introduzidas algumas idéias do cálculo neste trabalho.

O problema matemático que é abordado neste estudo, **"Dado um cone qualquer e um cilindro inscrito neste mesmo cone, qual é a área máxima do cilindro em função deste cone?"**, a princípio se apresenta muito simples, porém se desvenda em situações e ou condições bem complexas e interessantes, exigindo inclusive um maior aprofundamento.

Propus então, escrever esta monografia sobre um problema clássico do cálculo, mas que ainda não havia sido tratado sobre a perspectiva na qual foi desenvolvida neste estudo.

Para desenvolver o tema deste estudo, foram feitos experimentos e análises baseados em dados arbitrários e aleatórios, visando alguma regularidade, fazendo uso de recursos do cálculo diferencial, baseando em referências essências e conceitos básicos do Ensino Médio e posteriormente, estudos buscando uma generalização.

Acreditando na importância da investigação matemática e dos benefícios que uma pesquisa traz para a comunidade acadêmica e consequentemente para alunos e apreciadores da matemática, este trabalho tem como objetivo discutir uma situação problema buscando alternativas distintas, agregando conceitos do cálculo diferencial e do Ensino Médio.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Esta monografia trata do estudo de uma situação problema que envolve cálculo diferencial, derivada, máximos e mínimos, e equação do segundo grau.

A atuação do cálculo diferencial e integral é bem ampla. Foi desenvolvido no século XVII com o intuito de investigar problemas envolvendo movimentos. Mas suas aplicações atuais abrangem outras áreas do conhecimento como física, química, biologia, medicina, engenharia, economia e outras, como por exemplo: previsão de resultados de reações químicas, desenvolvimento de modelos econômicos, investigação de taxa de crescimento de bactérias, maximização do lucro na fabricação de um produto.

O cálculo diferencial e integral tem como origem e fundamentação na solução de dois problemas geométricos: cálculo das tangentes e o cálculo das áreas. Então, no primeiro capítulo será tratado de conceitos fundamentais do cálculo, falando sobre a derivada de uma função, mostrando algumas regras que servirão como subsídio para melhor entendimento dos próximos capítulos.

Algumas vezes faz-se necessário o uso de experimentos, então para desenvolver o tema deste estudo, no primeiro momento foi tratado sobre um problema semelhante ao do tema de estudo, **"Determine as dimensões de um cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto de raio 5cm e altura 12cm"**, fazendo inferências, atribuindo valores arbitrários.

No segundo momento é retomado o problema tema desta monografia: **"Dado um cone qualquer e um cilindro inscrito neste mesmo cone, qual é a área**

máxima do cilindro em função deste cone?", mas também, fazendo uso de atribuições aleatórias e arbitrárias, visando analisar alguma proporcionalidade, que na verdade trouxe certas inquietações.

Baseado nas situações apontadas no segundo momento, partimos para o terceiro momento buscando uma generalização.

O interesse no desenvolvimento deste trabalho teve a origem na apreciação pelo cálculo, trazendo um maior aprofundamento em um problema clássico de otimização, visando buscar meios interessantes e crítico para solucioná-lo.

Espera-se que este trabalho sirva de fonte ou até mesmo inspiração para estudos futuros.

1.CONSIDERAÇÕES GERAIS

1.1 Conceitos Fundamentais

> **Para estudar objetos que se movem com velocidade constante e ao longo de trajetórias retilíneas ou circulares, a álgebra e a trigonometria podem ser suficientes, mas, se a velocidade varia ou se a trajetória é irregular, o cálculo torna-se necessário. Uma descrição cuidadosa do movimento exige definições precisas de velocidade (espaço percorrido, por unidade de tempo) e aceleração (taxa de variação da velocidade) (Swokowski 1994, p.25)**

Então para o estudo destas definições utiliza-se uma ferramenta da matemática, a derivada.

> **O conceito de derivada é o conceito fundamental do cálculo, pois fornece o instrumento mais poderoso para o estudo do comportamento de funções reais. Sua formulação foi feita independentemente por Issac Newton e Geottfried Leibniz no século XVII e, podemos dizer, de maneira simples, que o conceito de derivada nasceu da necessidade de se quantificar a variação de uma função, isto é, o modo como a função varia. (Iaci Malta, 2002, p.21)**

A derivada atua em várias áreas, não somente para resolver problemas de física, mas também na previsão do tempo, estimativas de colheita de determinado cultivo como o café, auxilia em áreas de custo benefício como fabricação de caixas envolvendo máximos e mínimos, evitando prejuízos.

Assim, para dar continuidade ao estudo do tema faz-se necessário ressaltar a importância de algumas definições do cálculo diferencial.

1.2 A Derivada

i. Definição

Dada uma função $f(x): I \subset R \to R$ uma função definida no intervalo aberto I, então a função $f'(x)$ definida por $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ é denominada a derivada de $f(x)$ no ponto $x_0 \in I$, desde que exista o limite. O x_0 é considerado um número real arbitrário e o limite quando h tende a zero.

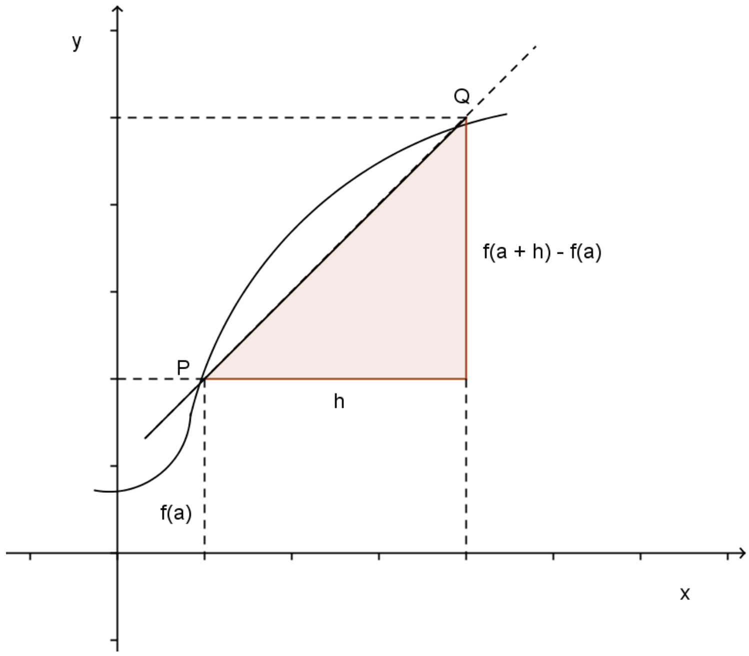
ii. Interpretação geométrica

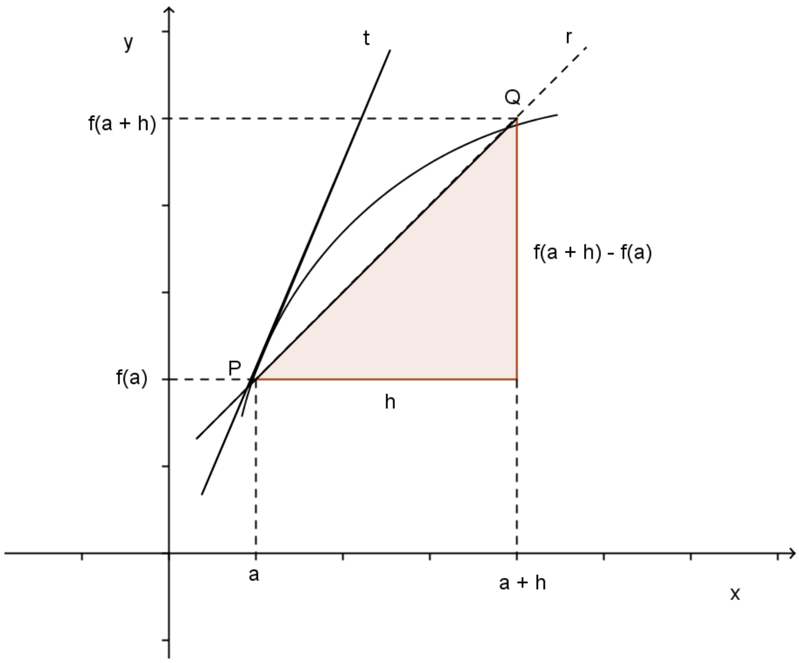
Dada uma função $f(x): R \to R$ uma função diferenciável em $x_0 = a$, tal que $\exists$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Seja P$(x_{0,} f(x_0))$ e Q dista h unidades de P, ou seja as coordenadas de Q são $(x_0 + h, f(x_0 + h))$, assim o coeficiente angular da reta secante que passa por P e Q é:

$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{(x_0 + h) - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$. Fazendo Q se mover para perto de P, ao longo da curva, teremos h se aproximando de zero, a reta secante se aproximando da reta tangente. Logo tomando h suficiente pequeno, a reta secante torna-se tão próxima da reta tangente quanto desejarmos, $\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ aproxima-se de $f'(x)$.





1.2.1 Derivada de uma função linear

Se $f(x) = mx + b$, então $f'(x) = m$.

1.2.2 Derivada de uma função Constante

Se $f(x) = c$, então $f'(c) = 0$.

1.2.3 Regra da potência

Seja n um número inteiro positivo. Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.

1.2.4 Valor Máximo, Mínimo e Pontos Críticos

A partir de algumas regras, a derivada pode fornecer informações sobre o comportamento de uma função.

Valor Máximo 1.2.4.1

Dada a função $f(x)$. Dizemos que f admite valor máximo se, e somente se, existe x_0, $x_0 \in D(f)$, tal que $f(x_0) \geq f(x)$, $\forall x$, $x \in D(f)$. Então dizemos que $f(x_0)$ é chamado de valor máximo de $f(x)$.

Dizemos que x_0 é um ponto máximo local de $f(x)$ se existe um intervalo aberto $I \subset D(f)$ tal que $x_0 \in I$ e $f(x) \leq f(x_0)$, $\forall x \in I$.

Consideremos $x_0 = x_m$.

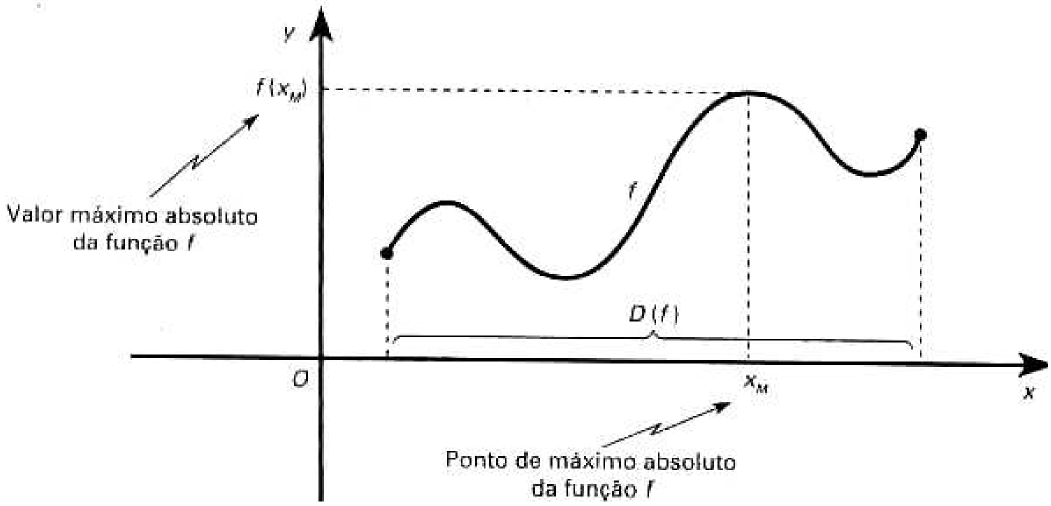


Figura 01 - **PAIVA**, **Matemática**, Volume 3, p.566.

Valor Mínimo 1.2.4.2

Dada a função $f(x)$. Dizemos que f admite valor mínimo se, e somente se, existe x_0, $x_0 \in D(f)$, tal que $f(x_0) \leq f(x)$, $\forall x$, $x \in D(f)$. Então dizemos que $f(x_0)$ é chamado de valor mínimo de $f(x)$.

Dizemos que x_0 é um ponto mínimo local de $f(x)$ se existe um intervalo aberto $I \subset D(f)$ tal que $x_0 \in I$ e $f(x) \geq f(x_0)$, $\forall x \in I$.

Consideremos $x_0 = x_m$.

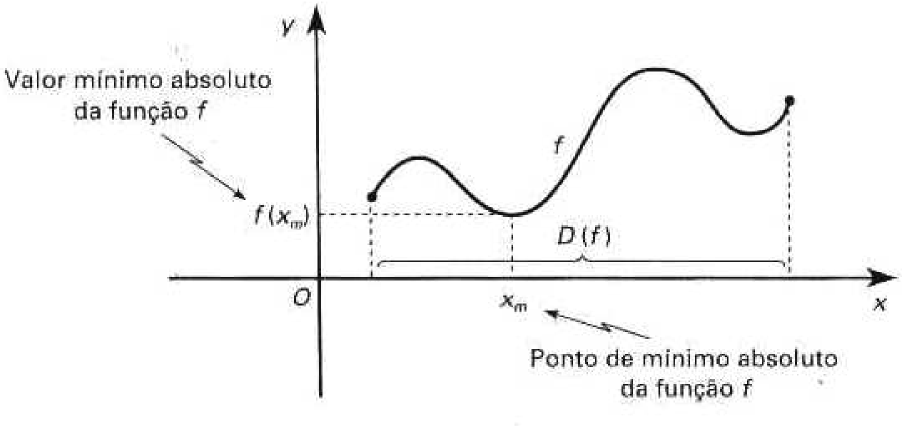


Figura 02 - **PAIVA**, **Matemática**, Volume 3, p.585.

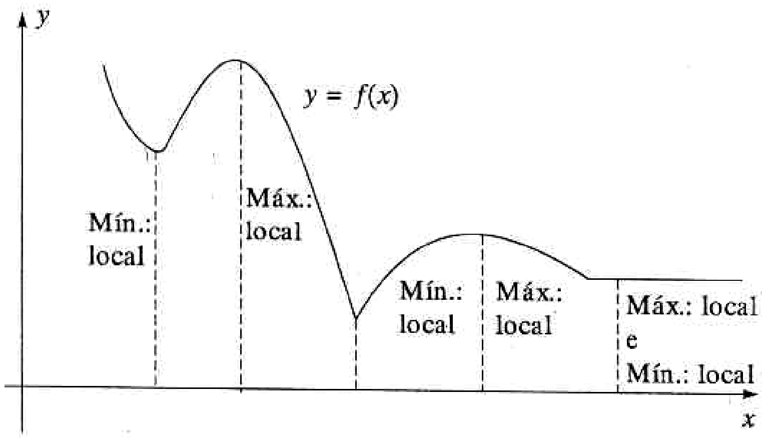


Figura 03 - **SWOKOWSKI**, **Cálculo com Geometria Analítica**, Volume 1, p.217.

Extremo Local 1.2.4.3

Se uma função $f(x)$ tem um extremo local em um número a em um intervalo aberto, então $f'(a)=0$ ou $f'(a)$ não existe.

Número Crítico 1.2.4.4

Um número x_0 no domínio de uma função $f(x)$ diferenciável é um número crítico de $f(x)$ se $f'(x_0)=0$ ou $f'(x_0)$ não existe.

1.3 SÓLIDOS GEOMÉTRICOS

1.3.1Cone: planificação e fórmula de área e volume

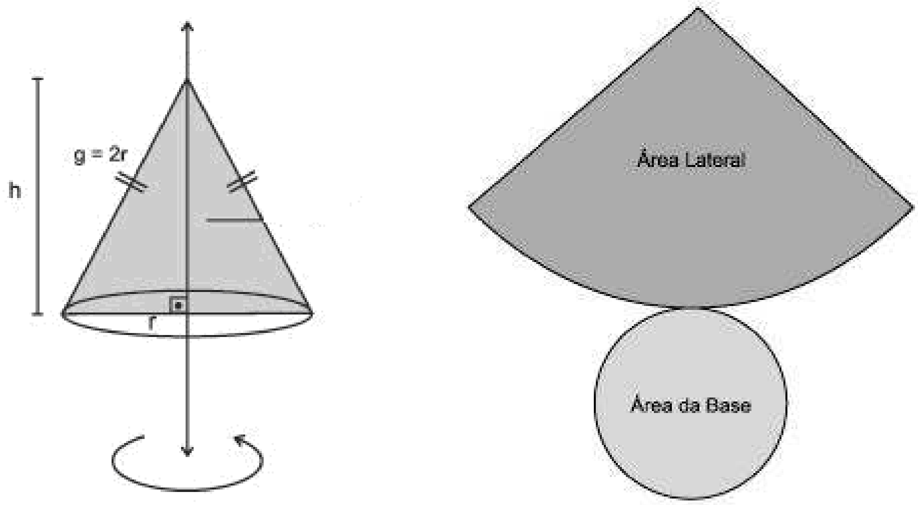


Figura 04 e 05 - http://www.colegioweb.com.br/matematica/areas-e-volumes

Área total = área lateral + área da base (círculo)

A área lateral de um cone circular é um setor circular. N este setor circular o raio (r) é g (geratriz do cone) e cujo comprimento do arco é $2\pi r$ (perímetro da base). Então, considerando A_l = área lateral, temos: $A_l = \pi r g$.

A_T = área total e A_b = área da base, logo:

$A_b = \pi r^2 \quad \Rightarrow \quad A_t = A_b + A_l \quad \Rightarrow \quad A_t = \pi r^2 + \pi r g$

Volume: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

1.3.2 Cilindro: planificação e fórmula de área e volume

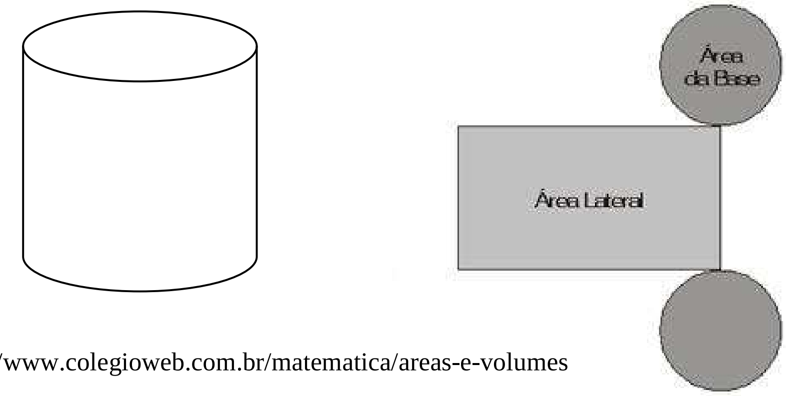


Figura 06-http://www.colegioweb.com.br/matematica/areas-e-volumes

Área(total) = Área(lateral) + 2 Área(base)

A área lateral de um cilindro circular reto planificada é um retângulo de dimensões 2r (comprimento da circunferência da base) e **h** (altura do cilindro).

Considerando A_T = área total, A_b = área da base e A_l = área lateral, temos:

$A_t = A_l + 2A_b \quad \Rightarrow \quad A_t = 2\pi r (h + r)$

Volume

$V = A_b.h \quad \Rightarrow \quad V = \pi r^2 h$

2 ESTUDO DO PROBLEMA

2.1 Primeiro Momento - Análise do problema do volume do cilindro

Dado um cone qualquer e um cilindro inscrito neste mesmo cone, qual é a área máxima do cilindro em função deste cone?

Baseado na discussão deste problema surge então o estudo descrito nesta monografia.

No primeiro momento da pesquisa, diante de algumas inquietações o estudo é iniciado tomando outro problema clássico do cálculo diferencial que envolve volume.

Determine as dimensões de um cilindro circular reto de maior volume que pode ser inscrito em um cone circular reto de raio 5cm e altura 12cm.

Para a resolução deste problema vamos considerar r o raio dado em centímetros, h a altura em centímetros e v o volume em centímetros cúbicos. Tomando a representação geométrica do problema abaixo e recorrendo as questões básicas citadas anteriormente, temos:

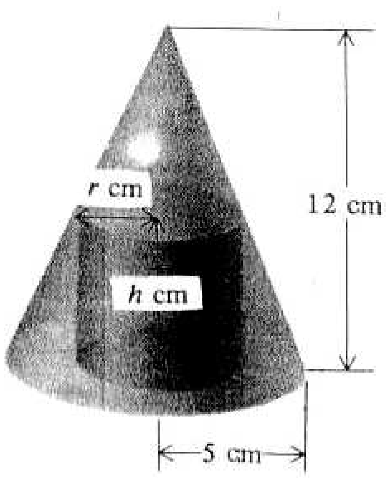


Figura 7 - **LEITHOLD**, **O Cálculo com Geometria Analítica**, Volume 1, p. 160.

O volume do cilindro é dado pela fórmula: $V = \pi r^2 h \Rightarrow V = A_{base} h$

Pela semelhança de triângulos, pela figura da secção, temos:

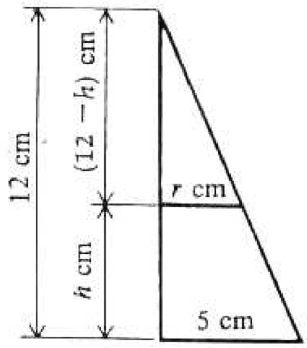


Figura 8 - **LEITHOLD**, **O Cálculo com Geometria Analítica**, Volume 1, p. 160.

$$\frac{12-h}{r} = \frac{12}{5} \Rightarrow 5(12-h) = 12r \Rightarrow h = \frac{60-12r}{5}$$

Substituindo na fórmula do volume:

$$V(r) = \pi r^2 \left(\frac{60-12r}{5} \right) \Rightarrow V(r) = \frac{12\pi}{5}\left(sr^2 - r^3\right)$$

Temos então três condições:

i. Se $r = 0$ e $h = 12$ não temos um cilindro.

ii. Se $r = 5$ e $h = 0$ não temos um cilindro.

iii. Como $V(r)$ é uma função contínua no intervalo $[0, 5]$, V tem um valor máximo neste intervalo, pelo teorema do valor extremo.

$$V'(r) = \frac{12\pi}{5}\left(10r - 3r^2\right)$$

Fazendo $V'(r) = 0$, teremos os pontos críticos:

$$r(10 - 3r) = 0$$

$$r = 0$$

$$r = \frac{10}{3}$$

$V'(r)$ existe para todos os valores de r, então os únicos pontos críticos são:

0 e $\frac{10}{3}$.

Determinando o valor máximo de V em $[0, 5]$:

$V(0) = 0$ e $V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{12}{5}\pi\left[5\left(\frac{10}{3}\right)^2 - \left(\frac{10}{3}\right)^3\right] = \frac{400}{9}\pi$.

Logo podemos concluir que o valor máximo absoluto é $V\left(\frac{10}{3}\right) = \frac{400}{9}\pi$ e substituindo em $h = \frac{60 - 12r}{5}$ teremos $h = 4$, raio$= \frac{10}{3}$, altura = 4cm e volume $= \frac{400}{9}\pi$.

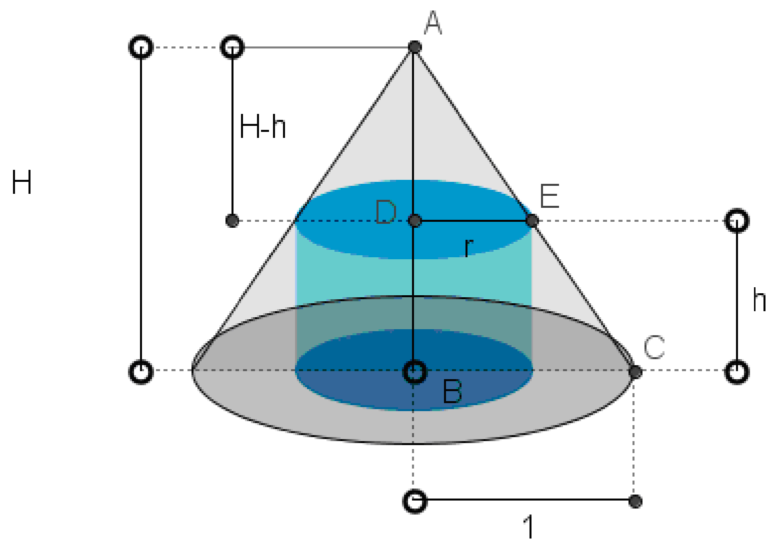
A partir desta resolução foram feitos outros cálculos para determinar raio e altura do cilindro em função das dimensões do cone, de acordo com os dados da tabela abaixo:

Altura do cone	Raio da base do cone	Raio do cilindro	Altura do cilindro
8	6	4	$\frac{8}{3}$
4	3	2	$\frac{4}{3}$
16	12	8	$\frac{16}{3}$

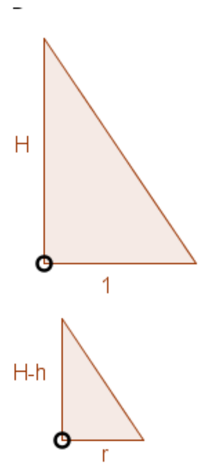
Baseado nas informações da tabela pode-se concluir que as dimensões do cilindro são proporcionais às dimensões do cone.

2.2 Segundo Momento – O problema da área do cilindro: experimentos.

No segundo momento é retomado o problema tema desta monografia: Qual é a área máxima do cilindro em função do cone?



Pela semelhança de triângulos temos:



Para a resolução recorremos às questões básicas citadas anteriormente.

Seja $S = 2\pi rh + 2\pi r^2$ área do cilindro. Vamos calcular as possíveis dimensões do cilindro em função do cone fixando o raio do cone igual a 1 e tomando alguns valores arbitrários para a altura do cone:

1º caso

Raio igual a 1 e altura igual a 1.

Pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{1}{1-h} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 1 - h &= r \\ -h &= r - 1 \\ h &= 1 - r \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula da área do cilindro:

$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$S(r) = 2\pi r(1 - r) + 2\pi r^2$

$S(r) = 2\pi r - 2\pi r^2 + 2\pi r^2$

$S(r) = 2\pi$

Determinado os pontos críticos:

$S'(r) = 0$

Logo não existe raio e consequentemente cilindro.

2º caso

Raio igual a 1 e altura igual a 2.

Pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{2}{2-h} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 2 - h &= 2r \\ -h &= 2r - 2 \\ h &= 2 - 2r \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula da área do cilindro:

$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$

$S(r) = 2\pi r(2 - r) + 2\pi r^2$

$S(r) = 4\pi r - 4\pi r^2 + 2\pi r^2$

$S(r) = 4\pi r - 2\pi r^2$

Determinado os pontos críticos:

$S'(r) = 4\pi - 4\pi r$

$S'(r) = 0$

$4\pi - 4\pi r = 0$

$-4\pi r = -4\pi$

$r = 1$

Determinando a altura:

$h = 2 - 2r$
$h = 2 - 2(1)$
$h = 0$

Logo como $h = 0$, não existe cilindro.

3º caso

Raio igual a 1 e altura igual a 3.

Pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{3}{3-h}=\frac{1}{r} \Rightarrow \begin{array}{l} 3-h=3r \\ -h=3r-3 \\ h=3-3r \end{array}$$

Substituindo na fórmula da área do cilindro:

$$S=2\pi rh+2\pi r^2$$

$$S(r)=2\pi r(3-r)+2\pi r^2$$

$$S(r)=6\pi r-6\pi r^2+2\pi r^2$$

$$S(r)=6\pi r-4\pi r^2$$

Determinado os pontos críticos:

$$S'(r)=6\pi-8\pi r$$

$$S'(r)=0$$

$$6\pi-8\pi r=0$$

$$-8\pi r=-6\pi$$

$$r=\frac{6}{8}$$

Determinando a altura:

$$h = 3 - 3r$$
$$h = 3 - 3\left(\frac{6}{8}\right)$$
$$h = \frac{24 - 18}{8}$$
$$h = \frac{6}{8}$$

Logo, neste caso existe cilindro de $r = \frac{6}{8}$, $h = \frac{6}{8}$ e área $S = \frac{9\pi}{4}$.

4º caso

Raio igual a 1 e altura igual a $\frac{1}{2}$.

Pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2} - h} = \frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} - h &= \frac{1}{2}r \\ -h &= \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} \\ h &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}r \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula da área do cilindro:

$$S = 2\pi rh + 2\pi r^2$$
$$S(r) = 2\pi r\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}r\right) + 2\pi r^2$$

$S(r) = \pi r - \pi r^2 + 2\pi r^2$

$S(r) = \pi r + \pi r^2$

Determinado os pontos críticos:

$S'(r) = \pi + 2\pi r$

$S'(r) = 0$

$\pi + 2\pi r = 0$

$2\pi r = -\pi$

$r = -\frac{1}{2}$

Logo, como o raio é negativo não existe cilindro.

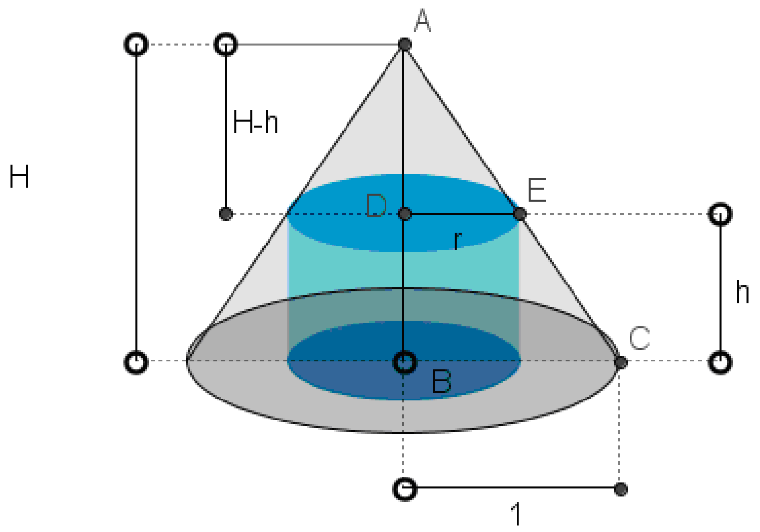
Analisando os dados obtidos e descritos na tabela abaixo, pode se observar que há algumas restrições para que exista a área do cilindro em função do cone.

Altura do cone	Raio da base do cone	Raio do cilindro	Altura do cilindro
1	1	Não existe	
2	1	1	0
3	1	$\frac{6}{8}$	$\frac{6}{8}$
$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	

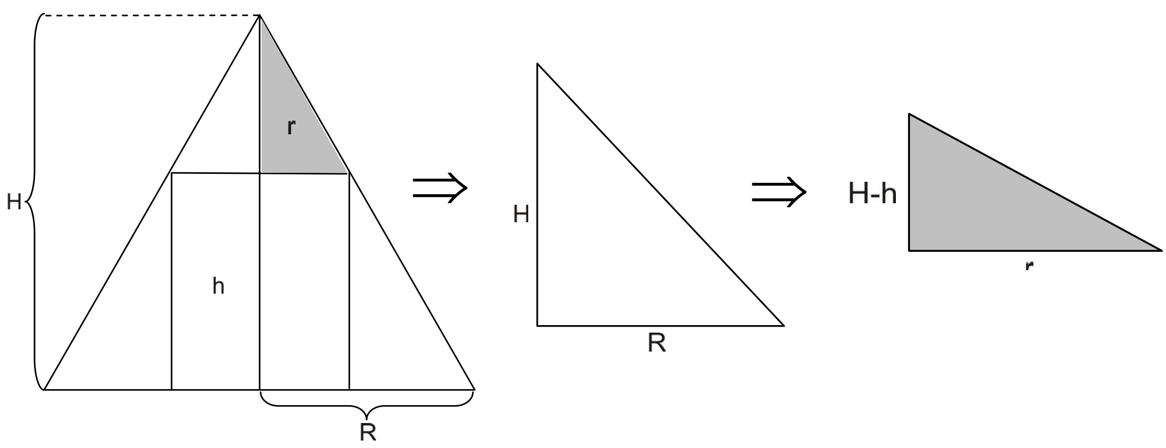
Portanto no terceiro momento serão analisadas tais restrições.

2.3 Terceiro Momento - O problema da área do cilindro: análise geral

Qual é a área máxima do cilindro em função do cone?



Considerando o raio do cone fixo igual a 1, a altura do cone H, queremos determinar as possíveis dimensões do cilindro raio (r) e altura (h), para que o cilindro tenha área máxima em função do cone.



Pela semelhança de triângulos, temos:

$$\frac{H}{H-h}=\frac{1}{r} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} &H-h=Hr \\ &-h=Hr-H \\ &h=H(1-r) \end{aligned}$$

Substituindo na fórmula da área do cilindro:

$$S(r)=2\pi rH(1-r)+2\pi r^2$$

$$S(r)=2\pi rH-2\pi r^2H+2\pi r^2$$

Determinado os pontos críticos:

$$S(r)=2\pi rH-2\pi r^2H+2\pi r^2 \quad \div 2\pi$$

$$S(r)=rH-r^2H+r^2$$

Derivando em função de r:

$$S'(r)=H-2Hr+2r$$

$$S'(r)=0$$

$$H-2Hr+2r=0$$

$$-2Hr+2r=-H$$

$$r(-2H+2)=-H$$

$$r = \frac{-H}{2-2H}$$

Encontramos r em função H.

Retomando a área em função de r, $S(r) = 2\pi rH - 2\pi r^2 H + 2\pi r^2$, temos uma equação do segundo grau e dividindo por 2π temos:

$S(r) = rH - r^2 H + r^2$

$S(r) = rH + r^2(1-H)$, onde o coeficiente $a = (1-H)$ e $b = H$.

Resolvendo a equação do segundo grau:

$rH + r^2(1-H) = 0$

$r = 0$ ou

$H + r(1-H) = 0$

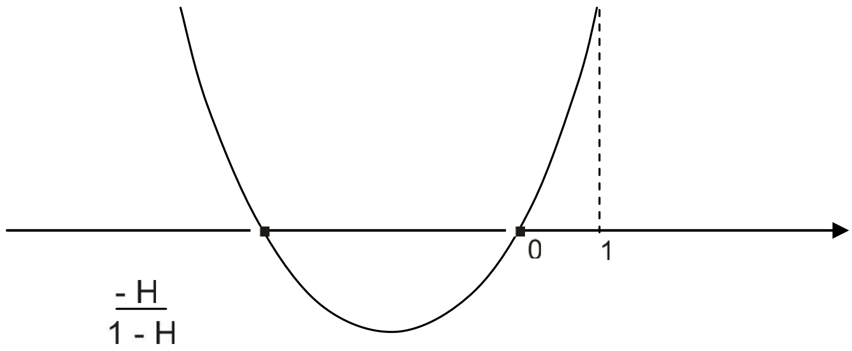
$$r = \frac{-H}{1-H}$$

Temos então cinco condições:

i. $H < 1$
ii. $H = 1$
iii. $1 < H < 2$
iv. $H = 2$
v. $H > 2$

Analisando o primeiro caso, $H < 1$, temos uma parábola com concavidade voltada para cima, cujas raízes são:

$r = 0$ e $r = \frac{-H}{1 - H}$



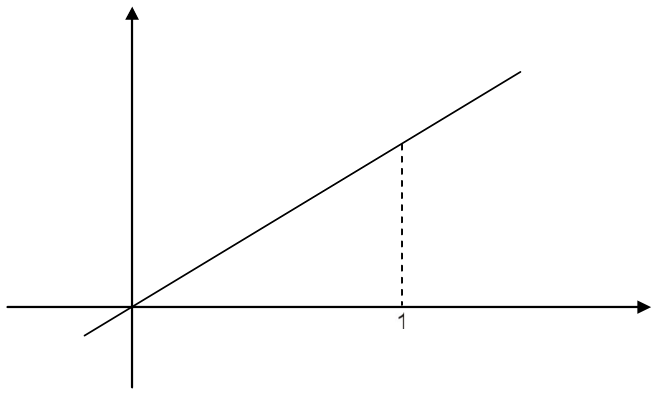
Neste caso não tem máximo e há um crescimento acelerado.

Na segunda situação, se $H = 1$, não teremos equação do segundo grau, mas um crescimento linear com velocidade constante. Neste caso há máximo, porém o cilindro está degenerado neste ponto.

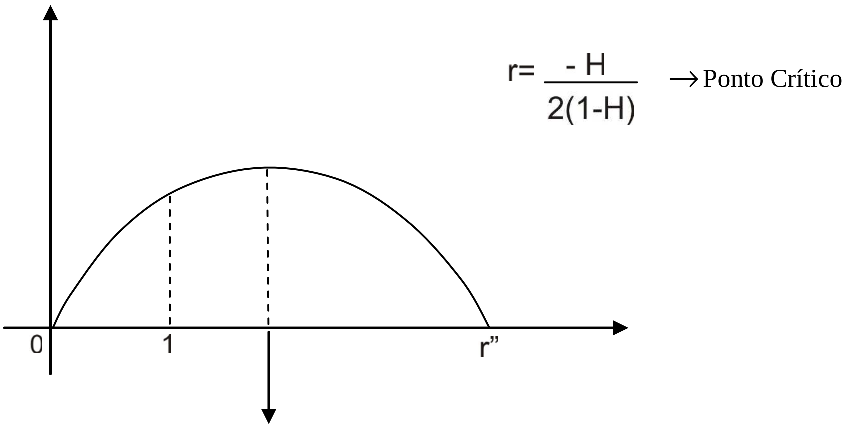
$rH + r^2(1 - H) = 0$

Se $H = 1$, temos: $rH + r^2(1 - 1) = 0$

Logo $rH = 0$, então $r = 0$.



Se $1 < H < 2$, temos uma equação do segundo grau com concavidade voltada para baixo, cujas raízes são: $r = 0$ e $r = \dfrac{-H}{1-H}$



Ponto médio

$$r = \frac{-H}{2(1-H)}$$

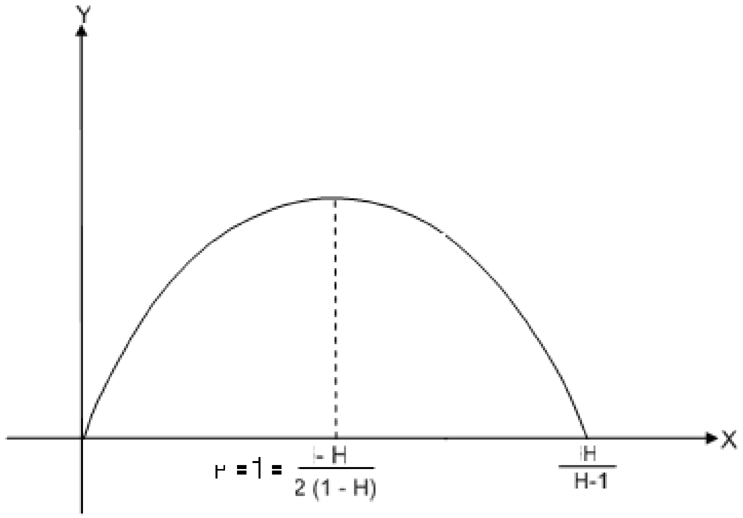
Podemos perceber que r'' é a segunda raiz do gráfico e sabemos que $r'' = \dfrac{H}{H-1}$. Como $1 < H < 2$, o ponto máximo tem que pertencer ao intervalo aberto $[0,1]$, logo neste caso também não há máximo, sendo assim não teríamos um cilindro inscrito pois suas dimensões estariam ultrapassando às dimensões do cone.

Notamos também que a área da base cresce mais rápido que a área lateral.

Se $H = 2$

Temos uma equação do segundo grau com coeficiente $a = (1-H) = (1-2) = -1$, negativo, ou seja, temos concavidade voltada para baixo.

As raízes são: $r = 0$ e $r = \dfrac{-H}{1-H}$

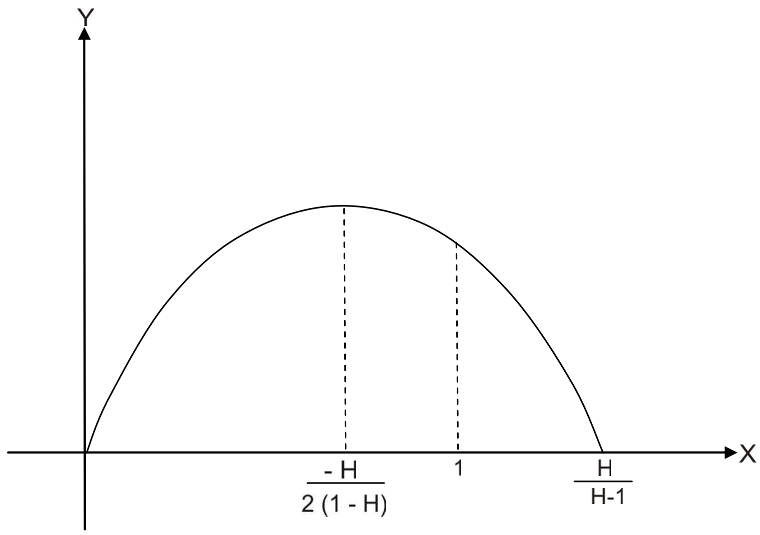


Deste modo, teríamos como ponto máximo $r = 1$, que é ponto médio das raízes $r = 0$ e $r = \dfrac{H}{H-1}$, ou seja, 1 = $r = \dfrac{H}{2(H-1)}$, mas se $r = 1$ o cilindro estaria degenerado, pois teríamos $h = 0$ e portanto seria somente um disco.

Se $H > 2$, temos uma equação do segundo grau com concavidade voltada para baixo, cujas raízes são:

$r = 0$ e $r = \dfrac{-H}{1-H}$

Verificando o gráfico abaixo:



É fácil perceber que 1 < $r = \dfrac{H}{H-1}$, ou seja, $r = \dfrac{H}{2(H-1)} \in [0,1]$ e é o ponto máximo.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com esta monografia pode-se ter um novo olhar, uma nova perspectiva do cálculo, em especial sobre o problema de otimização tão discutidos no Ensino Médio e no Ensino Superior.

Para a realização desta pesquisa fez se necessário falar um pouco sobre o cálculo, sua atuação, sobre algumas definições fundamentais e regras.

A princípio, ao deparar com o problema tema deste estudo, partimos da análise de um problema semelhante, posteriormente tomando o problema original através de valores arbitrários e pudemos perceber que havia algumas restrições.

O interessante é que mesmo sendo um problema de cálculo e discutido através de suas regras, foi justificado e analisado usando teorias básicas de funções do segundo grau. Assim, ressaltando a idéia do cálculo diferencial, usando conceitos fundamentais da diferenciação, podemos concluir que existem formas simples do interlocutor compreender este estudo, podendo adotar metodologias do Ensino Médio sem muito formalismo aliado as teorias do cálculo.

Contudo, espera-se que este estudo seja fonte de contribuição para a comunidade acadêmica ou até instigue colegas e apreciadores da matemática.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

SWOKOWSKI, Earl w. **Cálculo com Geometria Analítica**, Volume 1, 2ª Edição. Makron Books (1994)

STEWART, James., **Cálculo**, Volume 1, 4ª Edição. Pioneira (2001)

MALTA, Iaci, PESCO, Sinésio, LOPES, Hélio., **Cálculo a uma variável**, Volume 1, 2ª Edição. Puc- Rio (2002)

SIMMONS, George F., **Cálculo com Geometria Analítica**, Volume 1, McGraw-Hill (1987)

LEITHOLD, Louis., **O Cálculo com Geometria Analítica**, Volume 1, 2ª Edição. Harbra (1981)

PAIVA, Manoel R., **Matemática**, Volume 3. Moderna (1995)

http://www.colegioweb.com.br/matematica/areas-e-volumes

ANEXO

LISTA DE FIGURAS