UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇOES:
TEOREMA DE KARUSH-KUHN-TUCKER

Nome: Fagner Gonçalves Teixeira

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

OTIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÕES: TEOREMA DE KARUSH-KUHN-TUCKER

Monografia desenvolvida como requisito para aprovação no curso de Especialização em Matemática para Professores da Universidade Federal de Minas Gerais.

Nome: Fagner Gonçalves Teixeira

Orientador: Alberto Berly Sarmiento

Agradecimentos:

À minha família pelo incentivo e por acreditar em mim, a todos os professores, em especial ao meu orientador, o Professor Alberto Berly Sarmiento pela paciência, e dedicação.

E principalmente a Deus.

ÍNDICE

CAPÍTULO 1

CONCEITOS PRELIMINARES

Neste capítulo estudaremos alguns conceitos preliminares como; funções de duas e três variáveis, derivadas parciais, derivadas direcionais e vetor gradiente.

1.1. Funções Reais de Duas Variáveis.

Definição 1.1. *Uma função de duas variáveis, definida na região* $D \subset \Re^2$ *no plano, é uma regra de correspondência* $f : D \to \Re$ *que associa a cada ponto (x, y) de D um único número real, denotado por z = f(x, y).O conjunto D é chamado domínio da função.*

Em geral, define-se uma função *f* de duas variáveis por uma relação que especifique *f(x, y)* em termos de *x* e *y*. Caso o domínio D não seja indicado explicitamente, toma-se como D o conjunto de todos os pontos para os quais a fórmula dada tenha sentido.

<u>EXEMPLO 1:</u> Encontrar o domínio da função $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

A condição que deve satisfazer a *(x, y)* para os quais a relação *f(x, y)* esteja bem definida é que satisfaça $25 - x^2 - y^2 \geq 0$. A região correspondente é limitada pela curva $25 - x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 25$ que é a circunferência C centrada em (0, 0) e raio 5. Os pontos *(x, y)* que satisfazem a desigualdade $25 - x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 < 25$,são os pontos *(x, y)* que pertencem ao interior do disco limitado pela circunferência C.
Ver fig. (1).

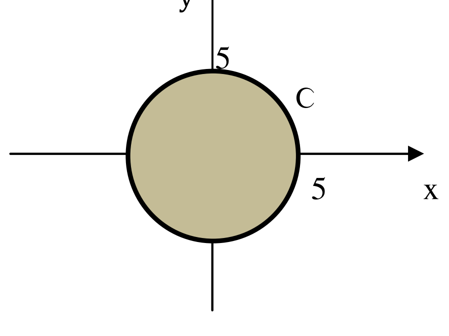


Fig. (1)

EXEMPLO 2: Ache o domínio da função $f(x, y) = \dfrac{y}{\sqrt{x - y^2}}$.

Para *que f(x, y)* esteja definida devemos ter $x - y^2 > 0$ isto é, $x > y^2$. Logo o domínio de f é o conjunto de pontos que estão estritamente a direita da parábola $x = y^2$ .Ver fig. (2).

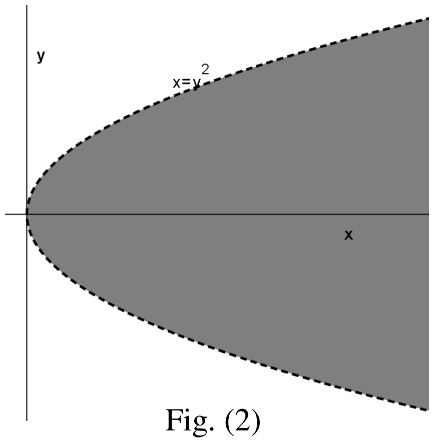


Fig. (2)

1.2. Gráfico de Funções e Curvas de nível.

No caso de uma função de uma variável, o seu gráfico é uma curva no plano, já os gráficos de funções de duas variáveis serão superfícies no espaço, por exemplo, pedaços de planos, cilindros ou superfícies quádricas.

Definição 1.2. *Se* $f : D \subset \Re^2 \to \Re$ *é uma função de duas variáveis, então o gráfico de f é o conjunto de todos os pontos (x, y, z) em* $\Re^3$ *para os quais (x, y) é um ponto no domínio de f e z = f(x, y). Isto é :*

$$Graf(f) = \{(x, y, f(x, y)); (x, y) \in D \subset \Re^2\} \subset \Re^3$$

EXEMPLO 3: Esboce o gráfico da função *f(x, y) = 3.*

Esta função esta definida em todos os pontos do plano. O gráfico são todos os pontos da forma (x, y, f(x, y)) = (x, y, 3). Isto é z = 3 para todo $(x, y) \in \Re^2$ *, esta função é chamada função constante z = 3. Ver Fig. (3).*

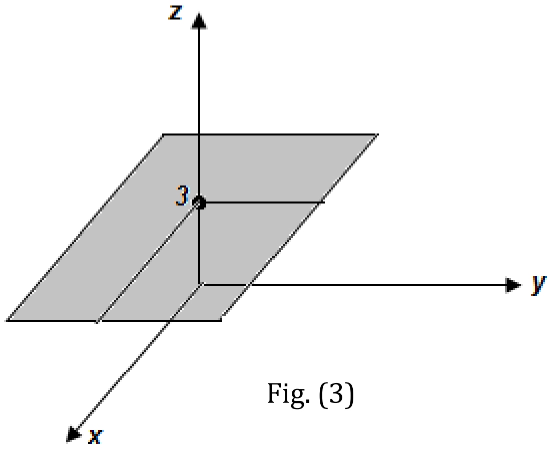


Fig. (3)

Da mesma forma as funções constantes f(x, y) = k ou (z = k) k constante real. Seus gráficos correspondem a planos paralelos ao plano xy interceptando o eixo z em k.

EXEMPLO 4: Esboce o gráfico da função $z = f(x, y) = x^2 + y^2$.

Observemos que o domínio de f é todo $\Re^2$. *O gráfico de f corresponde a pontos que satisfazem a equação* $z = x^2 + y^2$ *.Para identificar o gráfico de f, vamos intercepta-lo com diferentes planos da forma z = k, esse processo é conhecido como método de fatias. A interseção do gráfico com o plano z = 0, obtemos* $x^2 + y^2 = 0$ *que é a origem (0, 0). A interseção do gráfico com o plano z = k com k > 0 corresponde aos pontos* $x^2 + y^2 = k$ *que correspondem a uma circunferência centrada em (0, 0) e raio* $\sqrt{k}$ *sobre plano z = k. Assim podemos notar que o gráfico de f é composto por uma família de circunferências, que a medida que k cresce o raio destas circunferências cresce. Para ver a proporção de crescimento basta interceptar o gráfico de f pelo plano x = 0 e y = 0. Estas interseções são as parábolas* $z = x^2$ *e* $z = y^2$. *Ver Fig. (4).*

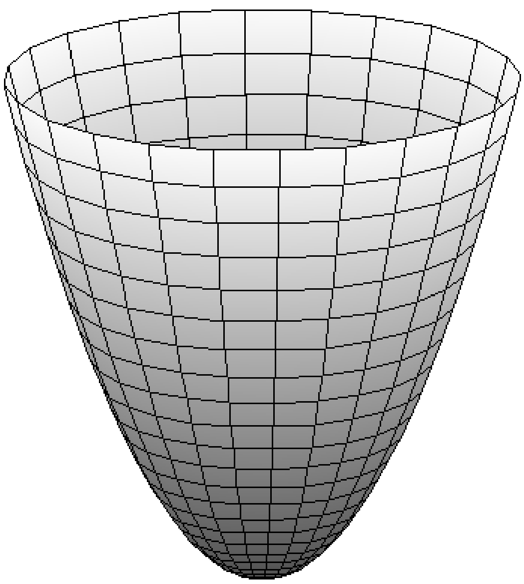


Fig. (4)

1.3. Curvas de nível

Como vimos no exemplo anterior, um método de analisar o gráfico de uma função é fatiar este por diferentes planos de nível *z = k*, projetando estas curvas sobre o plano *xy* obtendo um mapa topográfico (bidimensional). Isto é as curvas de diferentes níveis decompõem o domínio. É claro que duas curvas de nível diferentes não se interceptam.

Definição 1.3. *Seja* $f : D \subset \Re^2 \to \Re$ *uma função de duas variáveis com domínio D. Dado um número (nível)* $k \in \Re$, *definimos a curva de nível k como o conjunto* $C_k = \{(x, y) \in D \subset \Re^2 \mid f(x, y) = k\}$, *isto é, o conjunto de todos os pontos do domínio de f para os quais o valor da função é k.*

Notemos que, sendo *f* uma função, para cada ponto *(x, y)*$\in$ *D* a reta paralela ao eixo *z* passando por *(x, y)* intercepta o gráfico de *f* num único ponto. Logo *(x, y)* pertence a uma única curva de nível.

Cada ponto da curva de nível corresponde a um único ponto da superfície, que esta *k* unidades acima, se *k* for positivo, ou *k* unidades abaixo, se *k* for negativo. Considerando diferentes valores para *k*, obtemos um conjunto de curvas de nível chamado **mapa de contorno.**

<u>EXEMPLO 5 :</u> Esboce o mapa de contorno ou a decomposição em curvas de níveis para função $f(x, y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$.

Primeiramente vamos encontrar o domínio:

Os pontos (x, y) do domínio devem satisfazer:

$25 - x^2 - y^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \leq 5^2$ *que é um disco limitado pela circunferência centrada em (0, 0) e raio 5.*

Notemos que o gráfico de f correspondente aos pontos que satisfazem a equação

$z = \sqrt{25 - x^2 - y^2} \Rightarrow z^2 = 25 - x^2 - y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 25$ *esta equação corresponde aos pontos (x, y, z) que distam da origem (0, 0 0) em 5.. Colocando em evidência z desta equação temos* $z = +\sqrt{25 - x^2 - y^2}$ e $z = -\sqrt{25 - x^2 - y^2}$ *que corresponde a calotas superior(acima do equador) e inferior. Assim o gráfico de f é a calota superior da esfera em* $\Re^3$ *centrada em (0, 0, 0) e raio 5.*

N*otemos que a curva de nível k geradas pela interseção do plano z = k com o gráfico de* f *, é* $k=\sqrt{25-x^2-y^2} \Rightarrow x^2+y^2=25-k^2$ *. Isto é uma circunferência sobre o plano z = k, centrado na origem e raio* $r=\sqrt{25-k^2}$ *. Esta curva projetada no plano xy da lugar a* ***curva de nível*** *de f. Ver Fig. (5).*

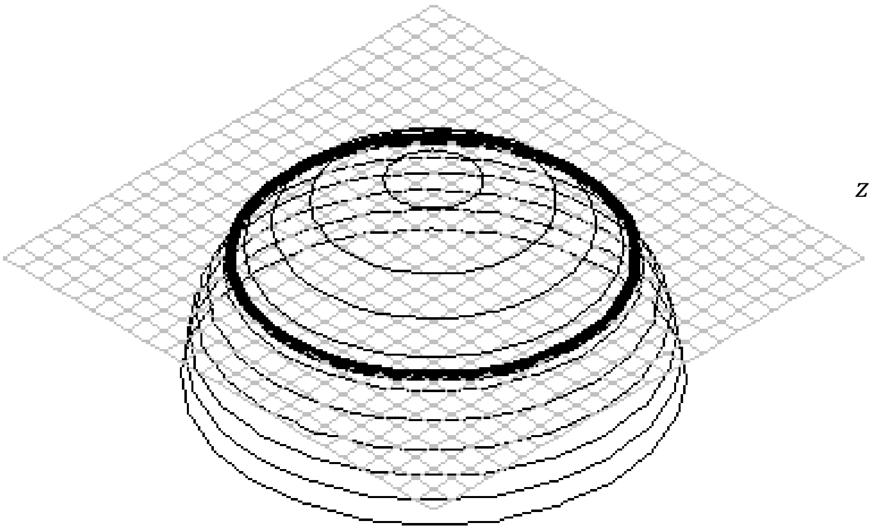


Fig. (5)

Assim as diferentes curvas de níveis C_k satisfazem a equação:
$\sqrt{25-x^2-y^2}=k \Rightarrow x^2+y^2=25-k^2=\sqrt{25-k^2}$,logo o mapa de contorno são circunferências centradas em (0, 0) e raio $r=\sqrt{25-k^2}$, $0 \le k \le 5$. Ver Fig. (6).

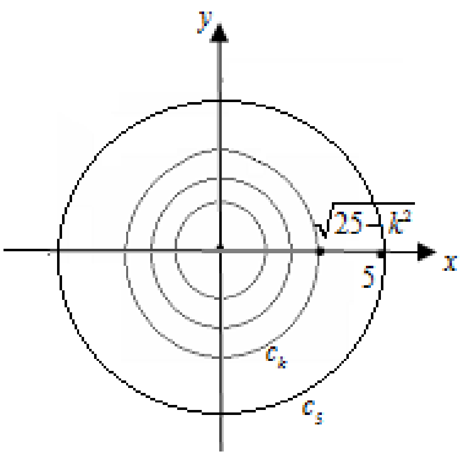


Fig. (6)

1.4. Funções Reais de Três Variáveis e Superfícies de Níveis

Definição 1.4. *Uma função de três variáveis* $g : D \subset \Re^3 \to \Re$, *definida no domínio D do espaço, é uma regra de correspondência g que associa a cada ponto (x, y, z) em D um número real w = g(x, y, z). Finalmente temos que:*

$$Graf(g) = \{(x, y, z, g(x, y)); (x, y, z) \in D\} \subset R^4$$

Uma vez que o domínio de *g* é um subconjunto de $\Re^3$ e o contradomínio de *g* é $\Re$, o gráfico de *g* é um subconjunto de $\Re^4$ e, portanto, ele não pode ser desenhado em nosso mundo tridimensional. Contudo, ainda é possível analisar a representação geométrica de *g* através do método de fatias. Primeiramente a função constante *w = g(x, y, z) = k* corresponde o hiperplano $\Re^4$ que intercepta o 4º eixo *w* em *k.*

Da mesma forma do caso bidimensional, vamos fatiar o gráfico de uma função arbitrária *g(x, y, z)* por hiperplanos *w = k*. A projeção destes sobre o domínio dão origem a superfícies de nível *k* e satisfazem a equação *g(x, y, z) = k.* Que denotamos por:
$S_k = \{(x, y, z) \in D \subset R^3 \mid g(x, y, z) = k\}$

EXEMPLO 6: Considere a função de três variáveis definida pela expressão

$w = f(x, y, z) = \sqrt{9 - x^2 - y^2 - z^2}$. Identifique as superfícies de nível.

Os pontos do domínio satisfazem a desigualdade $9 - x^2 - y^2 - z^2 \geq 0$, *isto é,* $x^2 + y^2 + z^2 \leq 9$. *Assim domínio de* $f = \{(x, y, z) \in \Re^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 9\}$

Notemos que o domínio de f é a bola cheia, limitada pela esfera de centro na origem (0, 0, 0) e raio 3

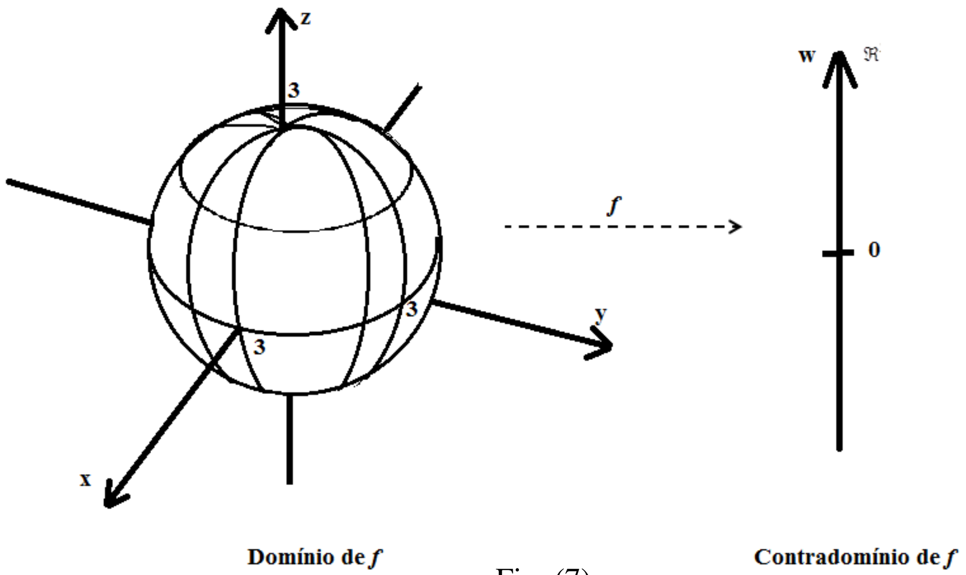


Fig. (7)

A superfície de nível k de f satisfaz
$\sqrt{9-x^2-y^2-z^2}=k \Rightarrow x^2+y^2+z^2=9-k^2=(\sqrt{9-k^2})^2$.*Assim as superfícies de nível são esferas com centro (0, 0, 0) e raio* $\sqrt{9-k^2}$.

Como a função *f(x, y, z)* é sempre positivo, então k varia apenas entre zero e 3, que corresponde a calota superior da esfera tridimensional $x^2+y^2+z^2+w^2=9$.

EXEMPLO 7 : Considere a função de três variáveis definida pela expressão algébrica $w=g(x,y,z)=z-x^2-y^2$. Esboce o mapa de contorno para superfície de nível.

É fácil de ver que domínio de *g* é todo $\Re^3$ e que o contradomínio de *g* é todo $\Re$ .Vamos determinar as superfícies de nível de *g*.

$$w=g(x,y,z)=k \Rightarrow z-x^2-y^2=k \Rightarrow z=x^2+y^2+k,$$

onde *k* é uma constante real.

Para k = 0, temos z = x^2 + y^2 do exemplo 4 temos que isto corresponde a um paraboloide circular: Ver Fig. (8).

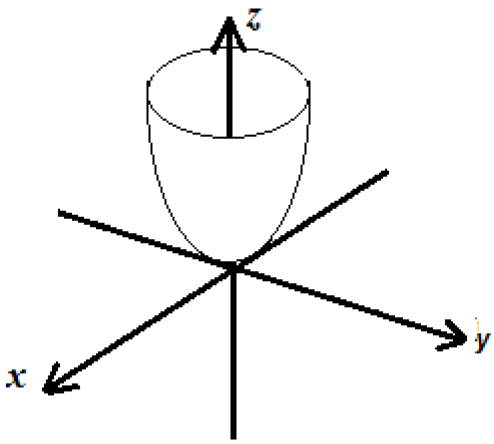


Fig. (8)

Para k = + 2, temos $z=x^2+y^2+2$ que corresponde ao paraboloide anterior, deslocado 2 unidades acima: Ver Fig. (9).

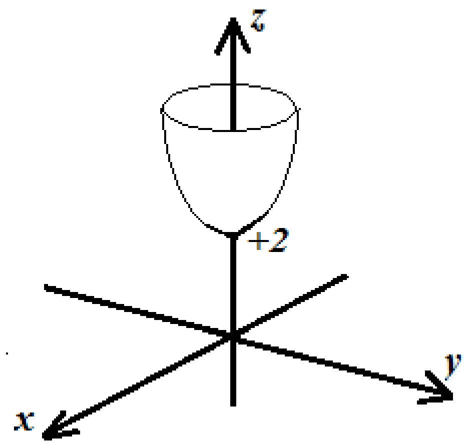


Fig . (9)

Da mesma forma a superfície $z = x^2 + y^2 + k$ corresponde a deslocar verticalmente a superfície S_0 em k unidades, é claro que sendo $k > 0$ a superfície S_0 se desloca na direção do eixo z positivo e para $k < 0$ na direção do eixo z negativo.

Assim as superfícies de níveis é uma família de paraboloides. Ver Fig. (10).

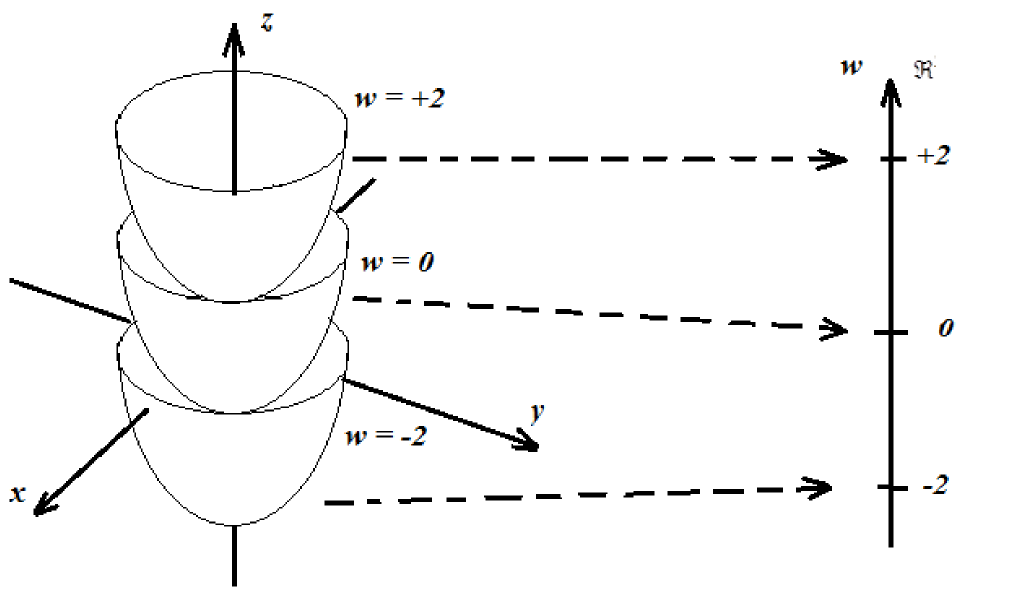


Fig. (10)

1.5. Derivadas Parciais.

No estudo de funções de uma variável, o conceito de derivada, é muito útil para o estudo destas funções e pelas aplicações. Neste capıtulo estudaremos a noção de derivada para funções de duas variáveis.

Antes de prosseguirmos a nossa discussão, lembrando o caso em que *f* é uma função de uma variável. Seja $f : I \rightarrow \Re$, onde *I* é um intervalo aberto da reta. Seja x_0 um ponto de *I*, então ao passarmos deste ponto para outro ponto $x \in I$, a variação de *f* é $\Delta f = f(x) - f(x_0)$. Dividindo esta variação pelo acréscimo na variável independente $\Delta x = x - x_0$.

Obtemos o quociente de Newton

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Se o limite do quociente acima, quando Δx tender a 0 existir, ele é chamado de derivada de *f* no ponto x_0 e será denotado por $f'(x_0)$ ou $\frac{df}{dx}(x_0)$.

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}.$$

Voltando ao caso de funções de duas variáveis, seja $f : D \subset \Re^2 \rightarrow \Re$, fixamos um ponto ***P*** *(a, b)* no interior do domínio. Se fixarmos *y* = *b*, definimos a função de uma variável que denotamos por de *g(x)* = *f(x, b)* para *x* tal que $(x, b) \in D$.

A derivada $g'(a)$:

$$\frac{dg(a)}{dx} = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - g(a)}{x - a} = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a}$$

Supondo que este último limite exista, corresponde a taxa de variação de *f* no ponto *(a, b)* com *y* = *b*. Denotamos este limite por:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim_{x \to a} \frac{f(x,b) - f(a,b)}{x - a},$$

E é chamada de <u>derivada parcial de *f* em relação a *x* no ponto *(a, b)*</u>

A idéia geométrica desta derivada decorre das seguintes observações, *y = b ou (x, b)*, são os pontos sobre a reta paralela ao eixo *x* cortando o eixo *y* em *b*. O gráfico de *g(x)* = *f(x, b)* é a curva sobre o plano vertical ao plano *xy* contendo a reta *y* = *b*.
Ver Fig. (11).

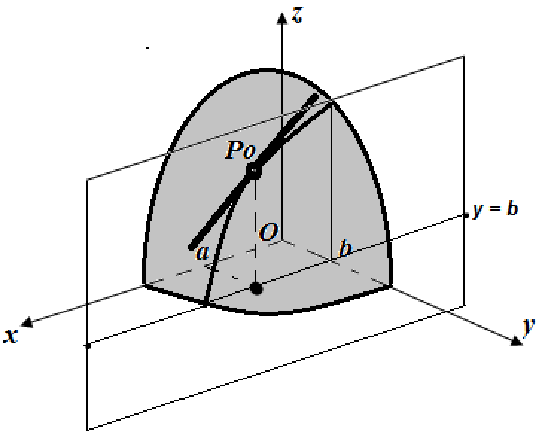


Fig. (11)

Assim concluímos $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}$ que é o coeficiente angular da reta tangente a curva no ponto *(a, b, f(a, b)) =* P_0.

Analogamente consideremos a função *h(y) = f(a, y)* quando variamos *y* e mantemos *x* constante e igual a *a.* Assim *h'(b)* é:

$$\frac{dh(b)}{dy} = \lim_{y \to b} \frac{h(y) - h(b)}{y - a} = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a,b)}{y - b}$$

Se este limite existe denotamos por

Isto é: $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \lim_{y \to b} \frac{f(a, y) - f(a,b)}{y - b}$, e chamamos de derivada parcial de *f* em relação a *y* no ponto *(a, b).*

A interpretação geométrica de $\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}$ (semelhante acima), é o coeficiente angular da reta tangente a curva sobre o plano vertical ao plano *xy* contendo reta *x = a* no ponto *(a, b, f(a, b)).* Ver Fig. (12)

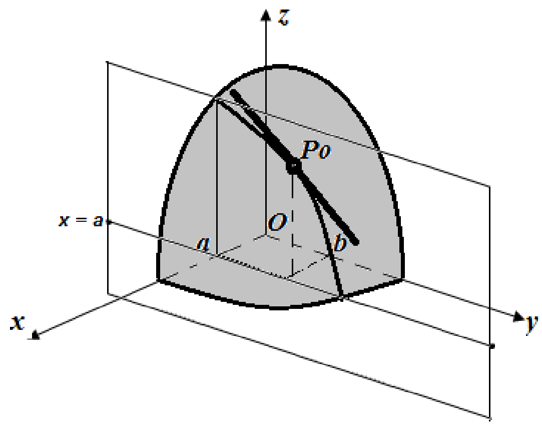


Fig. (12)

Uma forma equivalente de escrever é usar a mudança de variável $\Delta x = x - a$, assim se $x \to a$ então $\Delta x \to o \Rightarrow \dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{f(a+\Delta x, b) - f(a,b)}{\Delta x}$, da mesma forma temos que :

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(a, b+\Delta y) - f(a,b)}{\Delta y}$$

EXEMPLO 8 : Pela definição calcular $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ para $f(x,y) = x^2 + 2xy^2 - y^3$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x+\Delta x)^2 + 2(x+\Delta x)y^2 - y^3 - x^2 - 2xy^2 + y^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2xy^2 + 2\Delta xy^2 - y^3 - x^2 - 2xy^2 + y^3}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2x\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\Delta xy^2}{\Delta x} \Rightarrow \Delta x \frac{(2x + \Delta x + 2y^2)}{\Delta x} \Rightarrow 2x + 2y^2$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x,y)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + 2x(y^2 + 2y\Delta y + (\Delta y)^2) - (y+\Delta y)^3 - x^2 - 2xy^2 + y^3}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{x^2 + 2xy^2 + 4xy\Delta y + 2x(\Delta y)^2 - y^3 - 3y^2\Delta y - 3y(\Delta y)^2 - (\Delta y)^3 - x^2 - 2xy^2 + y^3}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y(4xy + 2x\Delta y - 3y^2 - 3y\Delta y - (\Delta y)^2}{\Delta y} \Rightarrow 4xy - 3y^2$$

Outras notações para $\frac{\partial f}{\partial x}$ são $D_1 f$ e f_1, f_x. Da mesma forma outras notações para $\frac{\partial f}{\partial y}$ são $D_2 f$, f_2 ou f_y .

Na prática para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ é a derivada ordinária de *f* quando *f* for considerada função de uma variável *x* (isto é, considerando *y* constante). Para calcular a $\frac{\partial f}{\partial y}(\mathrm{x}, \mathrm{y})$, basta calcular a derivada ordinária de *f*, quando *f* for considerada uma função de uma variável *y* (isto é, mantendo *x* constante).

<u>EXEMPLO 9 :</u> Calcule as derivadas parciais para *f(x, y) = x*^{2} *+3xy –x*^{4}*:*

Para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ *como uma função de x e manter y constante:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + 3y - 4x^3$$

considerando f como uma função de y e mantendo x constante, temos:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3x$$

1.6. Derivadas Direcionais

Definição 1.4. *Seja f:* $\Re^2 \to \Re$ *uma função de duas variáveis e seja* $\vec{u}$ *um vetor unitário* $\left\|\vec{u}\right\| = 1$, *então a derivada direcional de f na direção de* $\vec{u}$, *denotada por*

$\frac{\partial f(a,b)}{\partial \vec{u}}$, *é dada por* $\frac{\partial f(a,b)}{\partial \vec{u}} = \lim_{t \to 0} \frac{f((a,b) + t\vec{u}) - f(a,b)}{t}$, *Desde que este limite exista.*

Vamos escrever as derivadas parciais na forma vetorial:

Denotando por $\vec{e}_1 = (1,0)$ e $\vec{e}_2 = (0,1)$ os vetores de base canônica de $\Re^2$, vamos começar com $\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(a+t,b) - f(a,b)}{t}$.

$(a+t,b) = (a,b) + (t,0) = (a,b) + t(1,0) = (a+t,b) = (a,b) + t(\vec{e}_1)$

Assim a derivada parcial se escreve na forma vetorial:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f((a,b) + t.e_1) - f(a,b)}{t} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial \vec{e}_1}$$

Que podemos interpretar como é a derivada direcional de *f* na direção de e_1.

De maneira análoga temos que a derivada parcial em relação a *y* é a derivada direcional de *f* em direção de e_2, assim:

$$\frac{\partial f(a,b)}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{f((a,b) + t, e_2) - f(a,b)}{t} = \frac{\partial f(a,b)}{\partial \vec{e}_2}$$

A derivada direcional $\frac{\partial f(a,b)}{\partial \vec{u}}$, pode ser interpretada geometricamente de modo análogo as derivadas parciais. Para isto notemos que $(a,b) + t.\vec{u}$ com $t \in R$, é a equação de uma reta L que passa por *(a, b)* em *t = 0* e segue na direção do vetor *u*. Assim $\frac{\partial f(a,b)}{\partial \vec{u}}$ é o coeficiente angular da reta tangente a curva sobre o plano vertical ao plano *xy* contendo a reta *L*. Ver Fig.(13).

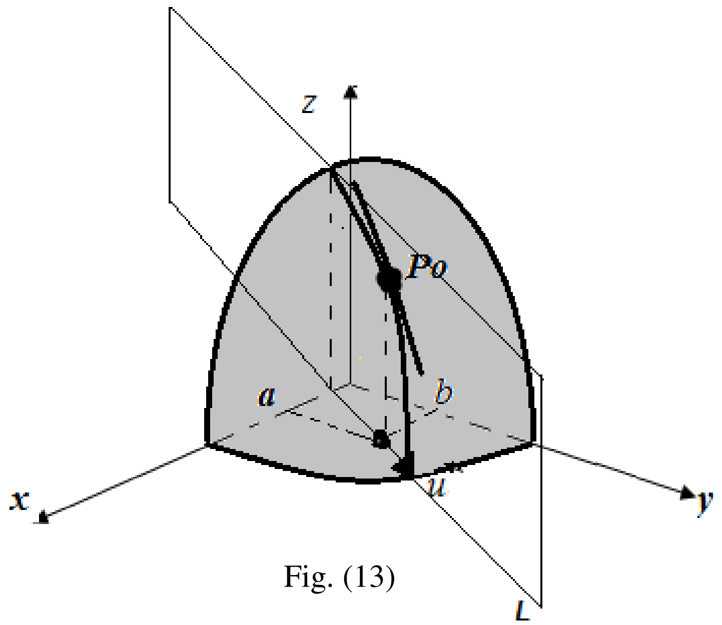


Fig. (13)

As definições anteriores podem se estender a funções de três ou mais variáveis, no caso de uma função de 3 variáveis *(g, x, y, z)*:

$$\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial x}=\lim_{t\to 0}\frac{g(a+t,b,c)-g(a,b,c)}{t}$$
$$\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial y}=\lim_{t\to 0}\frac{g(a,b+t,c)-g(a,b,c)}{t}$$
$$\frac{\partial g(a,b,c)}{\partial z}=\lim_{t\to 0}\frac{g(a,b,c+t)-g(a,b,c)}{t}$$

Da mesma forma se $\vec{u}$ é um vetor unitário em R^3 a derivada direcional na direção do vetor $\vec{u}$: $\dfrac{\partial g(a,b,c)}{\partial \vec{u}}=\lim_{t\to 0}\dfrac{g((a,b,c)+t\,\vec{u})-g(a,b,c)}{t}$

EXEMPLO 10: Determine a derivada direcional de f (x, y) = $x^2y^2 - 4x$, no ponto (1,–1), na direção do vetor $\vec{v}=2\,\vec{i}+4\,\vec{j}$.

Note que $\left\|\vec{v}\right\|=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, logo, $\vec{v}$ não é unitário.

O vetor unitário na direção e sentido de $\vec{v}$ é

$$\vec{n}=\frac{\vec{v}}{\left\|\vec{v}\right\|}=\frac{2}{2\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{2}{2\sqrt{5}}\vec{j}=\frac{1}{\sqrt{5}}\vec{i}+\frac{2}{\sqrt{5}}\vec{j}.$$

Pela definição de derivada direcional temos:

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial \vec{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{f(1+\frac{t}{\sqrt{5}}, -1+\frac{2t}{\sqrt{5}}) - f(1,-1)}{t}$$

Calculando o valor da função nos pontos $(1,-1)$ e $\left(1+\frac{t}{\sqrt{5}}, -1+\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)$:

$\Rightarrow f(1,-1) = (1)^2(-1)^2 - 4(1) = -3$

$\Rightarrow f\left(1+\frac{t}{\sqrt{5}}, -1+\frac{2t}{\sqrt{5}}\right) = \left(1+\frac{t}{\sqrt{5}}\right)^2 . \left(-1+\frac{2t}{\sqrt{5}}\right)^2 - 4\left(1+\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$= \frac{4t^3}{5\sqrt{5}} - \frac{3t^2}{5} - \frac{6t}{\sqrt{5}} + \frac{4t^4}{25} - 3$

Logo,

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial \vec{u}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{4t^3}{5\sqrt{5}} - \frac{3t^2}{5} - \frac{6t}{\sqrt{5}} + \frac{4t^4}{25} - 3}{t} - (-3)\right)$$

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial \vec{u}} = \lim_{t\to 0}\left(\frac{\frac{4t^3}{5\sqrt{5}} - \frac{3t^2}{5} - \frac{6t}{\sqrt{5}} + \frac{4t^4}{25}}{t}\right) \Rightarrow \lim_{t\to 0}\left(\frac{t\,\frac{4t^2}{5\sqrt{5}} - \frac{3t}{5} - \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{4t^3}{25}}{t}\right)$$

$$\frac{\partial f(1,-1)}{\partial \vec{u}} = \lim_{t\to 0} \frac{4t^2}{5\sqrt{5}} - \frac{3t}{5} - \frac{6}{\sqrt{5}} + \frac{4t^3}{25} = \boxed{-\frac{6}{\sqrt{5}}}$$

Definição 1.5: *(Máximos e mínimos) Considere uma função de n variáveis em particular (n = 2 ou n = 3)*

$f: D \subset \Re^n \to \Re$ *definida em D.*

a) Dizemos que $P \in D$ *é um ponto de máximo global de f em D se* $f(x) \leq f(P)$ *para todo* $x \in D$*. Neste caso, o numero real f(P) é denominado valor máximo de f.*
b) Dizemos que $P \in D$ *é um ponto de mínimo global de f em D se* $f(x) \geq f(P)$ *para todo* $x \in D$*. Neste caso, o numero real f(P) é denominado valor mínimo de f.*
c) Dizemos que $P \in D$ *é um ponto de máximo local de f em D se existe uma bola aberta* $B_r(P)$ *de centro em P e raio r >0 tal que* $f(x) \leq f(P)$ para todo $x \in B_r(P) \cap D$.
d) Dizemos que $P \in D$ *é um ponto de mínimo local de f em D se existe uma bola aberta* $B_r(P)$ *de centro em P e raio r >0 tal que* $f(x) \geq f(P)$ para todo $x \in B_r(P) \cap D$.

e) Dizemos que $P \in D$ é um extremo global de f em D se P é um ponto de máximo global ou um ponto de mínimo global de f em D.
f) Dizemos que $P \in D$ é um extremo local de f em D se P é um ponto de máximo local ou um ponto de mínimo local de f em D.

Definição: *Dizemos que uma função $f : D_f \subset \Re^n \to \Re$ é de classe C^1 no ponto $P \in D_f$ se as suas derivadas parciais em P existem e são contínuas.*

1.7. O vetor gradiente

No que segue, definimos os conceitos para funções de três variáveis, sendo que no caso de funções de duas variáveis, basta apagar a terceira coordenada.

Definição 1.6. (O VETOR GRADIENTE) *Considere uma função real $f : D \subset \Re^3 \to \Re$ de classe C^1 e um ponto **P** no interior de D. O vetor gradiente de f no ponto **P** é o vetor*

$$\nabla f(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}, \frac{\partial f(P)}{\partial z} \right)$$

O campo gradiente de f é uma função vetorial $\nabla f : D \subset \Re^3 \to \Re^3$

$$\boldsymbol{P} \mapsto \nabla f(P) = \left(\frac{\partial f(P)}{\partial x}, \frac{\partial f(P)}{\partial y}, \frac{\partial f(P)}{\partial z} \right)$$

EXEMPLO 11: Calcular o gradiente de $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2x \Rightarrow \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2y \Rightarrow \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}.2z \Rightarrow \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Notemos que cada derivada parcial é uma função contínua em $\Re^2 - \{(0,0,0)\}$. Assim f é de classe C^1.

Logo o vetor gradiente de f(x, y, z) é

$$\nabla f(x, y, z) = \left\langle \left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \right) \right\rangle .$$

TEOREMA 1: *(gradiente ortogonal a curva de nível)*

Seja $g : \Re^2 \to \Re$ uma função de classe C^1 *e C é uma curva de nível* k_0 *para g(x, y), então* ∇ *g é ortogonal a* C_k *em todo ponto.*

Demonstração:

Seja r(t) = (x(t) , y(t))uma parametrização da curva de nível C_k*. Então temos que: g(x(t), y(t)) = k.*

Derivando com relação a t ambos os membros da equação acima temos:

$$\frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt}+\frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}=\frac{d(k)}{dt} \quad \Rightarrow \quad \left\langle \left(\frac{\partial g(r(t))}{\partial x}, \frac{\partial g(r(t))}{\partial y} \right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \underbrace{\left(\frac{\partial g(r(t))}{\partial x}, \frac{\partial g(r(t))}{\partial y} \right)}, \underbrace{\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right)} \right\rangle = 0$$

$\langle$ ∇ g(r(t)) , r'(t) $\rangle$ = 0 como *r´(t)* é o vetor tangente a C_k em r(t) o ∇ g(r(t)) $\perp$ r'(t). c.q.d

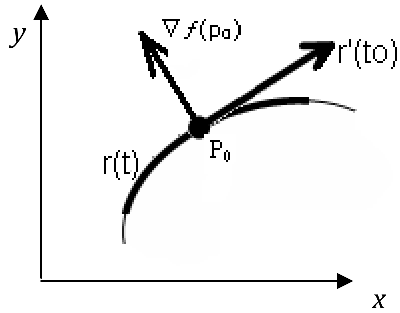
TEOREMA 2:

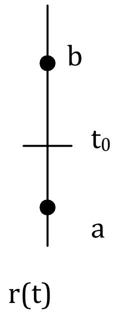
Suponha que f (x, y) seja uma função de classe C^1 *em uma região cujo interior contenha uma curva diferenciável regular:*

C: r(t) = (x(t) , y(t)) e t∈ (a,b)

Se $P_0 = r(t_0)$ *um ponto em C onde f atinge seu máximo restrito a curva C, então* ∇ *f(*P_o*) é ortogonal a C em* P_0*.*

Demonstração:





w: (a,b) $\subset \Re \to \Re$

t $\to$ *f(r(t))*

Os valores de f restrito à curva C são dados pela composta w(t)=f(x(t), y(t)).

Se $P_0 = r(t_0) = (x(t_0), y(t_0))$ com $t_0 \in$ (a, b), é um ponto de máximo ou mínimo de f sobre C ,então a função w: (a, b) $\to$ $\Re$ definida w(t) = f(x(t), y(t)), tem ponto crítico em t_0, logo:

$$\frac{d\text{w}(\text{t}_0)}{\text{dt}} = 0 \Rightarrow \frac{d\text{w}}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} = \left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}\right), \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right) \right\rangle$$

calculando em t_0:

$$\frac{d\text{w}(\text{t}_0)}{\text{dt}} = \left\langle \left(\frac{\partial f(\text{P}_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(\text{P}_0)}{\partial y}\right), \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}\right) \right\rangle = 0 \Rightarrow \langle \nabla f(P_0), r'(t_0)\rangle = 0 \therefore \nabla f(P_0) \perp r'(t_0)$$

c.q.d

Os dois teoremas anteriores podem ser estendidos para funções de três variáveis.

TEOREMA 3: *Se S = {g(x, y, z) = k_1} é uma superfície de nível para a função diferenciável g:* $\Re^3 \to \Re$*, então* ∇ *g (P) é ortogonal a S para todo P pertencente a S.*

Demonstração:

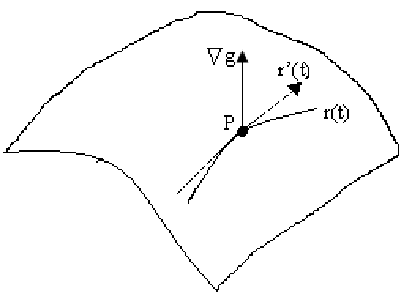


Fig.(14)

Fixado $P \in S$,mostrar que $\nabla g(P)$ é ortogonal a S, significa mostrar que $\nabla g(P)$ é ortogonal a qualquer curva diferenciável sobre S que passe por P.

Seja $r(t) = (x(t),y(t),z(t))$ uma curva regular sobre S passando por P. Então estando r sobre S o que satisfaz a $g(x(t),y(t),z(t)) = k_1$, e suponhamos $r(t_0) = P$,

Derivando a equação $g(x(t),y(t),z(t)) = k_1$ em relação a t:

$$\frac{\partial g(r(t))}{\partial x}\cdot\frac{dx(t)}{dt}+\frac{\partial g(r(t))}{\partial y}\cdot\frac{dy(t)}{dt}+\frac{\partial g(r(t))}{\partial z}\cdot\frac{dz(t)}{dt}=\frac{d(k1)}{dt}$$

Calculando em t_0;

$$\left\langle\left(\frac{\partial g(P)}{\partial x},\frac{\partial g(P)}{\partial y},\frac{\partial g(P)}{\partial z}\right),\left(\frac{dx(t_0)}{dt},\frac{dy(t_0)}{dt},\frac{dz(t_0)}{dt}\right)\right\rangle=0$$

$$\langle \nabla g(P), r'(t_0)\rangle = 0 \quad \therefore \quad \nabla g(P) \perp r'(t_0)$$

Assim $\nabla g(P)$ é ortogonal a todos os vetores tangentes a S no ponto P.

c.q.d

TEOREMA 4:

Suponha que $w = f(x, y, z)$ seja uma função diferenciável numa região cujo interior contenha a superfície diferenciável S .

Se P_0 é um ponto onde f atinge o seu máximo ou mínimo restrito aos valores de f sobre S, então ∇f é ortogonal a S no ponto P_0

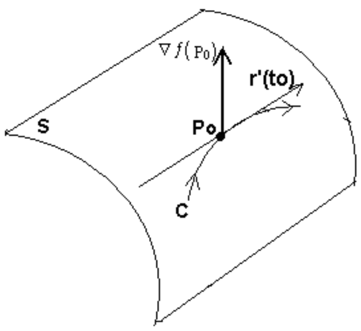
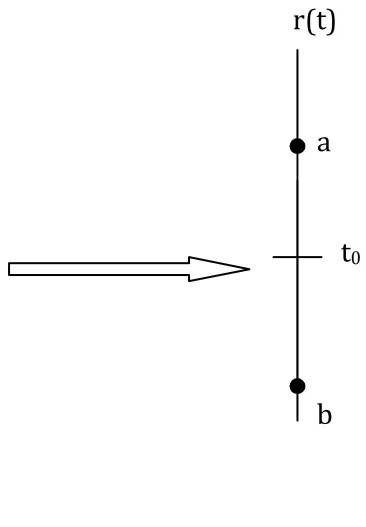


Fig.(15)



Demonstração:

Seja:

C: $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$ com $t \in (a, b)$ curva sobre S.

$P_0 = r(t_0)$, $t_0 \in (a, b)$

Se $P_0 = r(t_0) = (x(t_0),y(t_0),z(t_0))$ com t_0 pertencente ao intervalo*(a, b).*

h: (a, b) $\rightarrow \Re$

h(t) = $f(r(t)) = f(x(t),y(t),z(t))$

Se $P_0 = r(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ com $t_0 \in (a, b)$, é um ponto de máximo ou mínimo de f sobre S , então temos um ponto crítico em t_0, . Logo: $\frac{dh(t_0)}{dt} = 0$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}$$

Calculando em t_0;

$$\frac{dh(t_0)}{dt} = \left\langle \left(\frac{\partial f(P_o)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_o)}{\partial y}, \frac{\partial f(P_o)}{\partial z} \right), \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \right\rangle = 0$$

$$\frac{dh(t_0)}{dt} = \langle \nabla f(P_0), r'(t_0) \rangle = 0 \quad \therefore \quad \nabla f(P_0) \perp r'(t_0)$$

c.q.d

O teorema abaixo garante que em um conjunto fechado, exemplo uma elipse, uma função possui um valor máximo e mínimo absolutos.

TEOREMA 5: (*Teorema de Weierstrass) Seja f uma função contínua sobre um conjunto fechado e limitado D de $\Re^n$, então f atinge um valor máximo absoluto $f(p_1)$ e um valor mínimo absoluto $f(p_2)$ em alguns pontos p_1 e p_2 de D.*

CAPÍTULO 2

MAXIMIZAÇÃO COM RESTRIÇÃO: MULTIPLICADORES DE LAGRANGE

Neste capítulo provaremos os resultados importantes deste trabalho, como o Teorema de Lagrange para 2 ou 3 variáveis e finalizaremos com o teorema de Karush – Kuhn – Tucker.

2.1. Caso de duas variáveis

TEOREMA 6: *Multiplicadores de Lagrange*

Sejam f , g: $\Re^2 \to \Re$ *funções diferenciáveis, tais que suas derivadas parciais sejam contínuas numa região no plano xy, na qual* $\nabla g(x, y) \neq 0$.

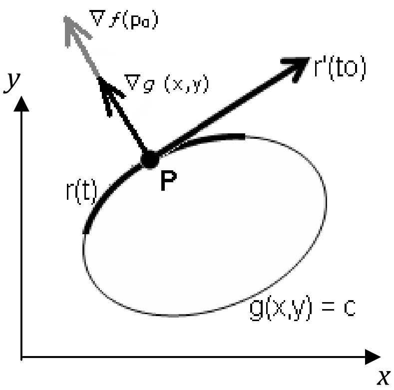
Se f *tem um extremo local* $f(x_0, y_0)$ *sujeito a uma restrição* $g(x, y) = k_0$, *então existe um número real* λ, *chamado multiplicador de Lagrange, tal que* $\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \,.\, \nabla g(x_0,y_0)$.

Demonstração:

Por hipótese temos que, f (x, y) e g(x, y) são de classe C^1 e que P_0 seja um ponto na curva de C = {g(x, y) = k_0}, onde f tem um valor máximo ou mínimo restrito a um ponto da curva C, pelo teorema 2, o $\nabla f(P_0)$ é ortogonal a curva C, por outro lado pelo teorema 1, o $\nabla g(P_0)$ é ortogonal a curva C, portanto em P_0 o ∇f é um múltiplo escalar de ∇g.

Concluímos então que $\nabla f(P_0)$ é paralelo ao $\nabla g(P_0)$, isto é existe um $\lambda \in \Re$ tal que, $\nabla f(P_0) = \lambda \,.\, \nabla g(P_0)$.

Fig.(16)



$$\left.\begin{array}{l}\nabla f(x,y) \perp r'(t) \\ \\ \nabla g(x,y) \perp r'(t)\end{array}\right\}\ Em\ P_0$$

c.q.d

Do teorema 3, temos uma condição necessária para um ponto $P_0 = (x_0, y_0)$ ser ponto de máximo ou mínimo de f restrito a condição C = {g(x, y) = k_0}. Assim, os pontos candidatos a extremos de f restritos a C são aqueles onde

$$\begin{cases} \nabla f\ (x, y) = \lambda \,.\, \nabla g(x, y) \\ \\ g(x, y) = k_0 \end{cases}$$

c.q.d

Este sistema pode ser estudado de modo clássico, para isto definimos o lagrangeano,

L : $\Re^2 \mathbf{x}\ \Re \rightarrow \Re$ **:**

L(x, y, λ) = f (x, y) – λ[g(x, y) – k_0]

Então procuramos os pontos críticos do lagrangeano *L* da maneira clássica, isto é:

Pontos críticos de L:

$$\begin{cases} \left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda \cdot \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda \cdot \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 \end{array}\right\} \Leftrightarrow \nabla f(x,y) = \lambda \cdot \nabla g(x,y) \\ \left.\dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = -(g(x,y) - k_0) = 0 \right\} \Leftrightarrow g(x,y) = k_0 \end{cases}$$

A hipótese de regularidade no teorema 3, isto é $\nabla\ g\ (x,\ y) \neq 0$ é fundamental para encontrarmos os pontos críticos. O exemplo a seguir mostra esta necessidade.

<u>EXEMPLO 12:</u> Maximizar *f(x, y) =* $x^2.y$*, sujeito a restrição g(x, y)=*$2x^2 + y^2 = 3$.

1) *Verificar a condição de regularidade* $\nabla g(x, y) \neq 0$

$\nabla g(x, y) = (4x, 2y)$*, segue-se* $\nabla g(x, y) = 0$ *se e somente se (x, y) = (0, 0), como o ponto (0, 0) não pertence a g(x, y)* segue-se $\nabla g(x, y \neq 0$.

2) *Escrever o lagrangeano.*

L(x, y, λ) = f (x, y) – λ[g(x, y)]

L(x, y, λ) = $x^2.y$ – λ[$2x^2 + y^2 - 3$]

3) *Procurar os pontos críticos do lagrangeano candidatos a máximo.*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{dx} = 0 \Rightarrow 2xy - 4\lambda x = 0 & (1) \\ \\ \dfrac{\partial L}{dy} = 0 \Rightarrow x^2 - 2\lambda y = 0 & (2) \\ \\ \dfrac{\partial L}{d\lambda} = 0 \Rightarrow 2x^2 + y^2 = 3 & (3) \end{cases}$$

De (1) temos que 2x(y - 2 λ) = 0.Logo x = 0 ou y = 2 λ .

Se x = 0 então, de (3), $y^2 = 3$, isto é $y = -\sqrt{3}$ ou $y = +\sqrt{3}$. Sendo assim, de (2), temos $\lambda = 0$. Concluímos que: (0, $-\sqrt{3}$,0) e (0, $+\sqrt{3}$, 0) são soluções do sistema.

Se y = 2 λ , então $y^2 = 4\lambda^2$ e , de (2), $x^2 = 4\lambda^2$. Substituindo em (3) obtemos $8\lambda^2 + 4\lambda^2 - 3 = 0$, isto é, λ^2 = ¼. Assim, λ = -1/2 ou λ = +1/2, então y = +1 e x^2 = 1, isto é, x=$\pm$ 1. Se λ = -1/2, então y = -1 e x^2 = 1, isto é, x = $\pm$ 1. desta maneira, (-1, 1, ½), (1, 1, ½), (-1, -1, -1/2) e (1, -1, -1/2) também são soluções dos sistema.

Para encontra- los substituímos na função *f(x, y)* e selecionamos o de maior valor:

$$f(0,\sqrt{3}) = 0$$
$$f(0,-\sqrt{3}) = 0$$
$$f(-1,1) = \boxed{1}$$
$$f(1,1) = \boxed{1}$$
$$f(-1,-1) = -1$$
$$f(1,-1) = -1$$

Como $2x^2 + y^2 = 3$ é uma elipse, um conjunto fechado e limitado, pelo teorema 5 existem máximos e mínimos globais, temos que (1, 1) e (-1, 1) são soluções do problema.

<u>EXEMPLO 13:</u> Maximizar *f(x, y) = y, sujeito a restrição g(x, y)=* $x^2 + y^3 = 0$

1) *Escrever o lagrangeano:* $L(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda.[g(x, y) - c] = y - \lambda.(x^2 + y^3)$

2) *Procurar os pontos críticos do lagrangeano:*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial x} = o \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial y} = o \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda)}{\partial \lambda} = o \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2\lambda x = 0 & (1) \\ 1 - 3\lambda y^2 = 0 & (2) \\ x^2 + y^3 = 0 & (3) \end{cases}$$

Não existe ponto (x, y, λ) em $\Re^3$ *que satisfaça o sistema. De fato: de (1) temos que λ = 0 ou x = 0. Se λ = 0, de (2) temos que 1 - 2 . 0 . x = 0, isto é, 1 = 0, um absurdo. Por outro lado, se x = 0, de (3) temos que* $y^3 = 0$*, isto é, y = 0. Portanto, de (2), segue-se que 1 - 3 λ(0) = 0* $\Rightarrow 1 = 0$*, isto é, um absurdo.*

Como o sistema associado as condições de primeira ordem não possui solução, podemos então concluir que o problema de otimização também não possui solução?

Isso vai depender da condição de regularidade!

Neste exemplo, o problema de otimização possui solução! Para encontrá-la, basta observar que

$$g(x,y) = x^2 + y^3 = 0 \leftrightarrow y = -\sqrt[3]{x^2}$$

isto é, um ponto (x, y) satisfaz a restrição $x^2 + y^3 = 0$ *se, e somente se,* $x = -\sqrt[3]{x^2}$ *. Uma vez que* $x^2 \geq 0$ *para todo* $x \in \Re$**,** *segue-se que todos os pontos (x, y) do conjunto admissível* $D = \{ (x, y) \in \Re^2 / g(x, y) = x^2 + y^3 \}$

são tais que y ≥ 0. Como nossa função é *f(x, y) = y, resolver problema de otimização consiste em procurar o ponto do conjunto admissível D com a maior ordenada . Desta maneira não é difícil ver que (0, 0) é a solução do problema de otimização. Na figura abaixo temos um desenho com as curvas de nível de f e do conjunto admissível. Os vetores com seta branca indicam o gradiente de f enquanto que os vetores de seta preta indicam o gradiente de g.*

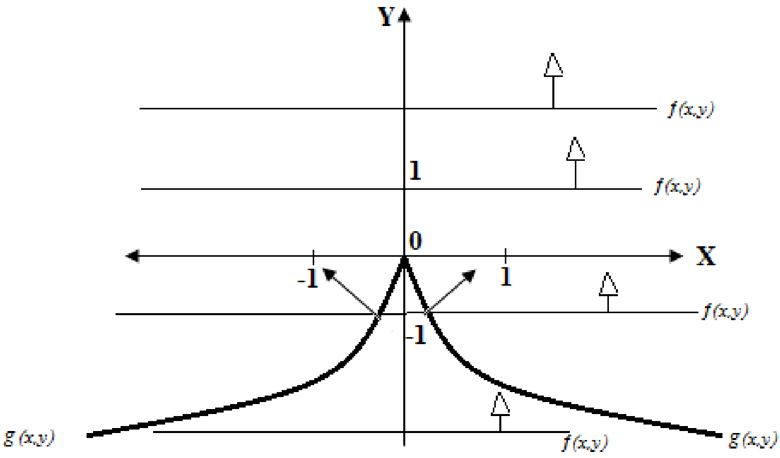


Fig. (17)

Com esta figura é fácil visualizar porque o ponto (0, 0) é máximo global de $f(x, y) = y$ no conjunto admissível D formado pelos pontos que satisfazem a restrição $g(x, y)= x^2 + y^3 =0$. Também é fácil visualizar porque não existem pontos que satisfazem as condições de primeira ordem: não existem pontos (x, y) na curva $x^2 + y^3$ para os quais $\nabla f(x, y) = \lambda . \nabla g(x, y)$. Observe que, na origem (0, 0), $\nabla f(0, 0) = (0, 1)$ enquanto que $\nabla g(0, 0) = (0, 0)$. Desta maneira $\nabla f(0, 0) = (0, 1) \neq (0, 0) = \lambda . (0, 0) = \lambda . (0, 0)$, para todo $\lambda \in \Re$.

O teorema de Lagrange garante que qualquer extremo P de uma função f em um conjunto admissível formado por uma curva de nível de uma função g irá satisfazer as condições de primeira ordem para algum $\lambda \in \Re$ desde que P satisfaça a condição de regularidade, isto é, desde que $\nabla g(P) \neq 0$.

2.2. Caso de três variáveis

Vamos estudar o problema de otimização envolvendo uma função $f(x, y, z)$ que esteja sujeita a uma restrição $g(x, y, z) = k_2$,onde f e g são de classe C^1, e que $\nabla g \neq 0$.

TEOREMA 7: *Multiplicadores de Lagrange para funções f (x, y, z) .*

Sejam f , g: $\Re^3 \to \Re$, funções diferenciáveis, tais que suas derivadas parciais de 1ª ordem sejam contínuas numa região no espaço, na qual $\nabla g (x, y, z) \neq 0$.

Se f tem um extremo local $f(x_0, y_0, z_0)$ sujeito a uma restrição $g(x, y, z) = k_2$, então existe um número real λ, chamado multiplicador de Lagrange, tal que

$$\nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda . \nabla g(x_0, y_0, z_0)$$

Demonstração:

Supondo que $f(x, y, z)$ e $g(x, y, z)$ sejam diferenciáveis definidas em $\Re^3$ e que P_o seja um ponto na superfície de $S = \{g(x, y, z) = k_2\}$, onde f tem um valor máximo ou mínimo restrito a um ponto da curva C, pelo teorema 3, o $\nabla g(P_o)$ é ortogonal a superfície S, por outro lado pelo teorema 4, o $\nabla f(P_o)$ é ortogonal a superfície S, portanto em P_0 o ∇f é um múltiplo escalar de ∇g.

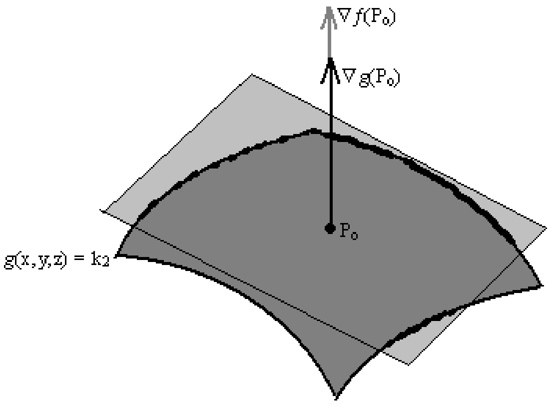


Fig.(18)

Concluímos então que $\nabla f(P_0)$ é paralelo ao $\nabla g(P_0)$, isto é existe um $\lambda \in \Re$ tal que, $\nabla f(P_0) = \lambda . \nabla g(P_0)$.

c.q.d

Do teorema 7, temos uma condição necessária para um ponto $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$ ser ponto de máximo ou mínimo de f restrito a condição $C = \{g(x,y,z) = k_2\}$. Assim, os pontos candidatos a extremos de f restritos a C são aqueles onde

$$\begin{cases} \nabla f(x, y, z) = \lambda . \nabla g(x, y, z) \\ g(x, y, z) = k_2 \end{cases}$$

Se definirmos o lagrangeano; $L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda[g(x, y, z) - k_2]$

Então procuramos os pontos críticos do lagrangeano da maneira clássica, isto é:

Pontos críticos de L:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} - \lambda \cdot \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L(x,y,,z,\lambda)}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} - \lambda \cdot \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} = 0 \\ \\ \dfrac{\partial L(x,y,,z,\lambda)}{\partial z} = \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} - \lambda \cdot \dfrac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \nabla f(x,y,z) = \lambda \cdot \nabla g(x,y,z)$$

$$\dfrac{\partial L(x,y,z,\lambda)}{\partial \lambda} = -(g(x,y,z) - k_2) = 0 \quad \Leftrightarrow g(x,y,z) = k_2$$

EXEMPLO14: Encontre o valor máximo de f(x, y, z) = x - 2y + z sobre uma esfera de equação g(x, y, z) = $x^2 + y^2 + z^2 = 30$.

1) *Verificar a condição de regularidade $\nabla g(x, y) \neq 0$*

$\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0) \rightarrow \nabla g(x, y, z) = (2x, 2y, 2z)$

$\nabla g(x, y, z) = (0, 0, 0)$ *se somente se* $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ *.Como* $g(0, 0, 0) = 0 < 30$ *o gradiente* $\nabla g(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ *para todo* $(x, y, z) \in \Re^3$.

2) *Escrever o lagrangeano.*

$L(x, y, z, \lambda) = f(x, y, z) - \lambda[g(x, y, z)]$

$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 5z - \lambda[x^2 + y^2 + z^2 - 30]$

3) Procurar os pontos críticos do lagrangeano candidatos a máximo.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow 1 - 2x\lambda = 0 \Rightarrow 2x\lambda = 1 \Rightarrow x = \dfrac{1}{2\lambda} & (1) \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow -2 - 2y\lambda = 0 \Rightarrow y = \dfrac{-1}{\lambda} & (2) \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow 5 - 2z\lambda = 0 \Rightarrow 2z\lambda = 5 \Rightarrow z = \dfrac{5}{2\lambda} & (3) \\ \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \Rightarrow -(x^2 + y^2 + z^2 - 30) = 0 & (4) \end{cases}$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{25}{4\lambda^2} - 30\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{1 + 4 + 25 - 120\lambda^2}{4\lambda^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -\left(\frac{30 - 120\lambda^2}{4\lambda^2}\right) = 0$$

$$\Rightarrow -30 + 120\lambda^2 = 0 \Rightarrow 120\lambda^2 = 30 \Rightarrow \lambda^2 = \frac{1}{4} \Rightarrow \lambda = \pm\frac{1}{2}$$

Substituindo λ= ± ½, nas equações (1) e (2) e (3);

para λ= ½ (1) : $x = \dfrac{1}{2\lambda} \Rightarrow x = \dfrac{1}{2.\left(\dfrac{1}{2}\right)} \Rightarrow x = 1$

(2) $y = \dfrac{-1}{\lambda} \Rightarrow y = \dfrac{-1}{\dfrac{1}{2}} \Rightarrow y = -2$

(3) **:** $z = \dfrac{5}{2\lambda} \Rightarrow z = \dfrac{5}{2\left(\dfrac{1}{2}\right)} \Rightarrow z = 5$

para λ= - ½

$$(1): x = \frac{1}{2\lambda} \Rightarrow z = \frac{1}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow x = -1$$

$$(2): y = \frac{-1}{\lambda} \Rightarrow y = \frac{-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow y = 2$$

$$(3): z = \frac{5}{2\lambda} \Rightarrow z = \frac{5}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} \Rightarrow z = -5$$

Logo os candidatos a máximo são: (1, -2, 5, 1/2) (-1, 2, -5, -1/2)

Agora substituímos na função $f(x, y, z) = x - 2y + z$ e selecionamos o de maior valor:

$f(1, -2, 5) = 1 – 2(-2) + 5 = 10$

$f(-1, 2, -5) = -1 – 2(2) - 5 = -10$

Como $x^2 + y^2 + z^2 = 30$ é uma esfera, um conjunto fechado e limitado, pelo teorema 5 existem máximos e mínimos globais, temos que o ponto *(1, -2, 5)* é solução do problema de maximização.

2.3. Maximizando funções sujeitas a duas restrições.

Vimos anteriormente que no caso de uma restrição em igualdade, temos que $\nabla g(P) \neq 0$.

No caso de duas restrições em igualdade, temos agora que o conjunto admissível é formado pela curva gerada pela interseção entre as superfícies $g(x, y, z) = c_1$ e

$h(x, y, z) = c_2$. Assim, os dois planos não devem ser paralelos, mas se interceptando transversalmente, isto é são linearmente independentes, para todo P, interseção de $g(x, y, z) = c_1$ e $h(x, y, z) = c_2$.

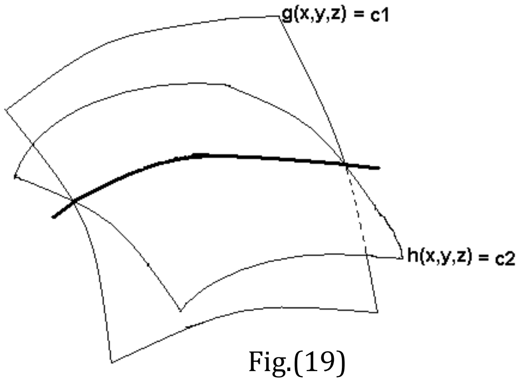


Fig.(19)

TEOREMA 8: *Seja* $f : D \subset \Re^3 \to \Re$, *função de 3 variáveis e seja* P_0 *um ponto de máximo ou mínimo local de f no conjunto admissível* $D=\{x \in \Re^3 \,/\, g(x) = c_1, h(x) = c_2\}$.

Suponha que $P_0 \in D$ *satisfaça a seguinte condição de regularidade: o posto da matriz (número de linhas não nulas da matriz escalonada).*

$$\begin{pmatrix} \nabla g(P_0) \\ \\ \nabla h(P_0) \end{pmatrix}_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial g(P_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial g(P_0)}{\partial y} & \dfrac{\partial g(P_0)}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial h(P_0)}{\partial x} & \dfrac{\partial h(P_0)}{\partial y} & \dfrac{\partial h(P_0)}{\partial z} \end{pmatrix}_{2 \times 3}$$

é igual ao número de restrições. Então existem números reais λ_1 *e* λ_2 *(multiplicadores de Lagrange) tais que*

$$\begin{cases} \nabla f(P_0) = \lambda_1 \cdot \nabla g(P_0) + \lambda_2 \cdot \nabla h(P_0), \\ g(P_0) = c_1 \\ h(P_0) = c_2 \end{cases}$$

isto é, o vetor gradiente $\nabla f(P_0)$ *é uma combinação linear dos vetores gradiente* $\nabla g(P_0)$, $\nabla h(P_0)$.

Demonstração:

Suponhamos uma curva *C* de interseção das superfícies *g* e *h* que pode ser representada, na vizinhança de *P*, por uma curva $r(t) = (x(t),y(t),z(t))$. Seja t_0 o valor de *t* tal que

$r(t_0) = P_0$.

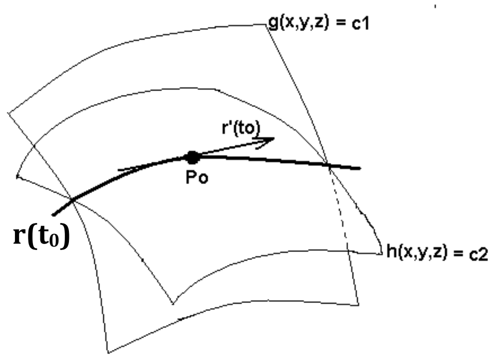


Fig.(20)

(a) Como *r(t)* esta sobre a superfície de nível $g(x, y, z) = c_1$ então do teorema 3 temos:

$$\nabla g(r(t)) \perp r'(t)$$

(b) Analogamente como *r(t)* esta sobre a superfície de nível $h(x, y, z) = c_2$ então do teorema 3 temos:

$$\nabla h(r(t)) \perp r'(t)$$

Se $P_0 = r(t_0) = (x(t_0), y(t_0), z(t_0))$ com $t_0 \in (a, b)$, é um ponto de máximo ou mínimo de f sobre C ,então a função $w: (a, b) \rightarrow \Re$ definida $w(t) = f(x(t), y(t), z(t))$, tem ponto crítico em t_0, logo:

$$\frac{dw(t_0)}{dt} = 0$$

$$\frac{dw}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{dz}{dt}$$

Calculando em t_0;

$$\frac{dw(t_0)}{dt} = \left\langle \left(\frac{\partial f(p_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(p_0)}{\partial y}, \frac{\partial f(p_0)}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right)\right\rangle = 0$$

$$\frac{dw(t_0)}{dt} = \langle \nabla f(P_0), r'(t_0) \rangle = 0, \quad \text{logo} \quad \nabla \boldsymbol{f}(\mathbf{r(t)}) \perp \mathbf{r'(t)} = \mathbf{0} \quad \textbf{(c)}$$

As equações (a), (b) e (c) implicam que todos os três vetores gradientes são perpendiculares a curva C em P_0 .

Mas o como $\nabla g(P_0)$ e $\nabla h(P_0)$ são transversais e assim $\nabla f(P_0)$ é combinação linear de $\nabla g(P_0)$ e $\nabla h(P_0)$.

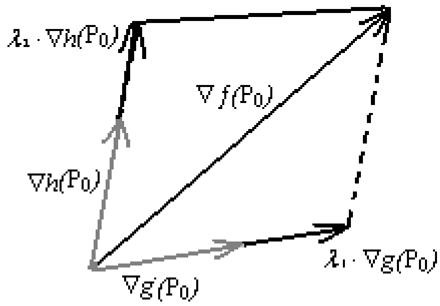


Fig.(21)

$$\nabla f(P_0) = \lambda_1 \cdot \nabla g(P_0) + \lambda_2 \cdot \nabla h(P_0)$$

c.q.d

Então definimos o lagrangeano:

$$L(P_0, \lambda_1, \lambda_2) = f(P_0) - \lambda_1[g(P_0) - c_1] - \lambda_2[h(P_0) - c_2]$$

Então procuramos os pontos críticos do lagrangeano da maneira tradicional:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(P_0,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial x} - \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial g(P_0)}{\partial x} - \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial h(P_0)}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial L(P_0,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial y} = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial y} - \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial g(P_0)}{\partial y} - \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial h(P_0)}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial L(P_0,\lambda_1,\lambda_2)}{\partial z} = \dfrac{\partial f(P_0)}{\partial z} - \lambda_1 \cdot \dfrac{\partial g(P_0)}{\partial z} - \lambda_2 \cdot \dfrac{\partial h(P_0)}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = -(g(P_0) - c_1) = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = -(h(P_0) - c_2) = 0 \end{cases}$$

EXEMPLO15: Maximizar *f(x, y, z) = x . y . z, sujeito a restrição* $g(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ *e* $h(x, y, z) = x + z - 1 = 0$

1) *Verificar a condição de regularidade;*

A condição de regularidade diz que o posto da matriz formada pelas derivadas parciais de primeira ordem das funções do conjunto admissível, deve ser igual a 2(número de restrições).

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial g(x,y,z)}{\partial z} \\ \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial x} & \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial y} & \frac{\partial h(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se $x = 0$*, então* $y^2 = 1$*, isto é,* $y = \pm 1$*. Neste caso a matriz*

$$\begin{pmatrix} 0 & \pm 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \pm 2 & 0 \end{pmatrix}$$

tem posto 2. Se $x \neq 0$*, subtraindo-se 2x vezes a linha 2 da linha 1 da matriz e substituindo o resultado na linha 2, concluímos que*

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sqcup \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 0 & 2y & -2x \end{pmatrix}$$

também tem posto 2. Desta maneira, todos os pontos do conjunto admissível satisfazem a condição de regularidade.

2) *Escrever o lagrangeano;*

$L(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = f\,(\mathrm{x, y, z}) - \lambda_1[g(\mathrm{x, y, z})] - \lambda_2[h(\mathrm{x, y, z})]$

$= x \,.\, y \,.\, z - \lambda_1(x^2 + y^2 - 1) - \lambda_2(x + z - 1)$

3) *Procurar os pontos críticos candidatos a máximo;*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow yz - 2x\lambda_1 - \lambda_2 = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow xz - 2y\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \dfrac{xz}{2y} & (2) \\ \dfrac{\partial L}{\partial z} = 0 \Rightarrow xy - \lambda_2 = 0 \Rightarrow \lambda_2 = xy & (3) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \Rightarrow \left(x^2 + y^2 - 1\right) = 0 \Rightarrow y = \sqrt{1 - x^2} & (4) \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \Rightarrow \left(x + z - 1\right) = 0 \Rightarrow z = 1 - x & (5) \end{cases}$$

Substituindo $y = \sqrt{1-x^2}$ e $z = 1 - x$ nas equações (2) e (3) , temos:

$$\lambda_1 = \frac{x(1-x)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$\lambda_2 = x\sqrt{1-x^2}$$

Substituindo $y = \sqrt{1-x^2}$, $z = 1 - x$, $\lambda_1 = \dfrac{x(1-x)}{2\sqrt{1-x^2}}$, $\lambda_2 = x\sqrt{1-x^2}$ na equação (1), temos:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}.(1-x)}{1} - \frac{2x[x(1-x)]}{2\sqrt{1-x}} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{1} = 0$$

$$2(1-x^2)(1-x) - 2x^2(1-x) - 2x(1-x^2) = 0$$

$$2(1-x)(1+x)(1-x) - 2x^2(1-x) - 2x(1-x)(1+x) = 0$$

$$(1-x)[2(1-x^2) - 2x^2 - 2x(1+x)] = 0$$

$$\Rightarrow 1 - x = 0 \Rightarrow \boxed{x = 1}$$

$$\Rightarrow 2(1-x^2) - 2x^2 - 2x(1+x) = 0$$

$$2 - 2x^2 - 2x^2 - 2x - 2x^2 = 0$$

$$-6x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow 3x^2 - 2x + 2 = 0$$

$$\boxed{x' = \frac{-1+\sqrt{13}}{6}}, \boxed{x'' = \frac{-1-\sqrt{13}}{6}}$$

Para x = 1, temos : (1, 0, 0, 0, 0).

Para $x = \dfrac{-1+\sqrt{13}}{6}$, temos :

$$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{22+2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7-\sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{82-22\sqrt{13}}}{12}, -\frac{\sqrt{16-\sqrt{13}}}{9}\right)$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}, \frac{\sqrt{22+2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7-\sqrt{13}}{6}, +\frac{\sqrt{82-22\sqrt{13}}}{12}, +\frac{\sqrt{16-\sqrt{13}}}{9}\right)$$

Para $x = \dfrac{-1-\sqrt{13}}{6}$, temos:

$$\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7+\sqrt{13}}{6}, +\frac{\sqrt{82+22\sqrt{13}}}{12}, +\frac{\sqrt{16+\sqrt{13}}}{9}\right)$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, +\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7+\sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{82+22\sqrt{13}}}{12}, -\frac{\sqrt{16+\sqrt{13}}}{9}\right)$$

Desta maneira, os pontos candidatos a máximo da função *f(x, y, z) = x . y . z sujeitos às restrições g(x, y , z) e h(x, y, z) estão entre*

(1,0,0)

$$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{22+2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6}, \frac{\sqrt{22+2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, -\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)$$

$$\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6}, \frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{6}, \frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)$$

Agora substituímos na função *f(x, y) = x . y . z* e selecionamos o de maior valor:

f(1,0,0) = 0

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6},\frac{\sqrt{22+2\sqrt{13}}}{6},\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)=0,221...$$

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{13}}{6},-\frac{\sqrt{22+2\sqrt{13}}}{6},\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right)=-0,221...$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6},+\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{6},\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)=-0,869...$$

$$f\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6},-\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{6},\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)=0,869...$$

Como a interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano x + z = 1 é uma elipse, conjunto fechado e limitado,pelo teorema 5 existem máximos e mínimos globais, logo o ponto

$$\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{6},-\frac{\sqrt{22-2\sqrt{13}}}{6},\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)$$

é a solução do problema, isto é ele é ponto de máximo.

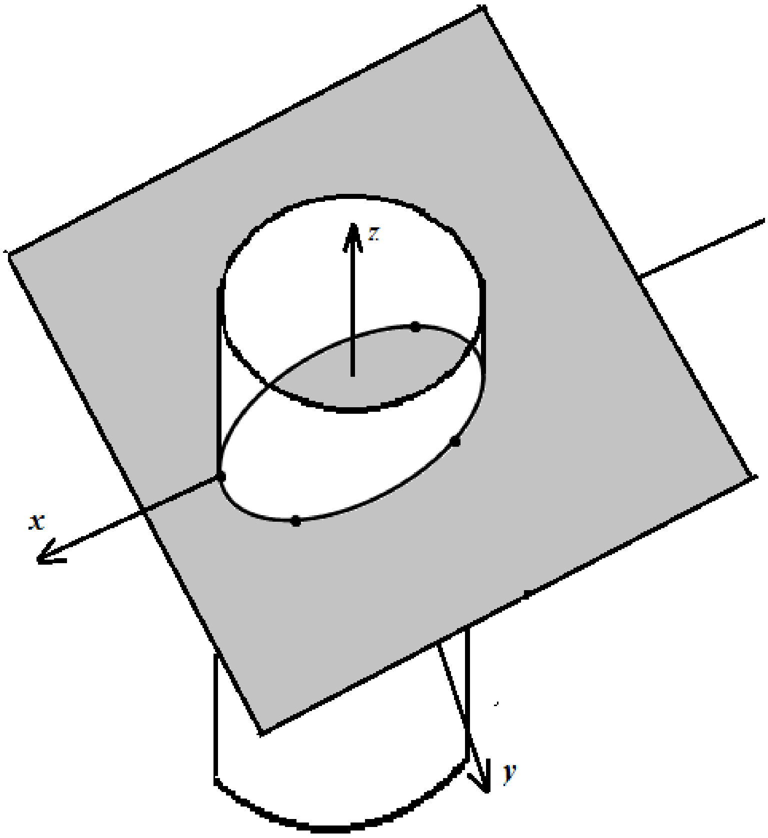


Fig.(22)

O conjunto admissível é a elipse resultante da interseção do cilindro $x^2 + y^2 = 1$ com o plano $x + z = 1$.

CAPÍTULO 3

MAXIMIZAÇÃO COM UMA RESTRIÇÃO EM DESIGUALDADE (KARUSH – KUHN – TUCKER).

Estudaremos neste capítulo mecanismos que permitam resolver problemas de maximização em que a restrição é formada por uma desigualdade.

Maximizar uma função ***f(x, y)*** **sujeito a uma restrição** ***g(x, y)*** $\leq$ ***b.***

O estudo clássico de máximo para uma função *f(x, y) de classe* C^2 restrito a uma região *g(x, y)* $\leq$ *b,* se faz em duas etapas.

(1) Encontrar o máximo de *f(x, y)* sujeito a uma restrição *g(x, y) = b.* Aqui pode-se usar o método de Lagrange.

(2) Encontrar o máximo de *f(x, y)* sujeito a uma restrição *g(x, y) < b*. Para isto calculamos os pontos críticos, e em seguida, classificamos como ponto de mínimo, máximo ou ponto de sela. Usando o critério abaixo:

$$D = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial y^2} \end{pmatrix}$$

onde $D^2 f(P)$ é o determinante da matriz hessiana de *f* no ponto *P*.

Denotemos por $D = det(D^2 f(P))$

(a) $D > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} < 0$ temos um máximo local.

(b) $D > 0$ e $\dfrac{\partial^2 f(P)}{\partial x^2} > 0$ temos um mínimo local.

(c) $D < 0$ temos um ponto de sela.

Finalmente comparamos os máximos de (1) e (2) e então encontramos o máximo da função.

Uma maneira de unificar os dois casos foi proposta por Karush - Kuhn - Tucker:

TEOREMA 9: *Sejam f e g funções de classe* C^1 *de duas variáveis e seja P um ponto de máximo de f(x, y) sujeito a uma restrição g(x, y)* $\leq$ *b, com* $\nabla g(x, y) \neq (0,0)$. *Então existe um número real λ* tal que :*

$$
\begin{cases}
\nabla f(P) = \lambda^{*}.\nabla g(P) & (1) \\
\lambda^{*}.[g(P) - b] = 0 & (2) \\
\lambda^{*} \geq 0 & (3) \\
g(P) \leq b & (4)
\end{cases}
$$

<u>Demonstração:</u>

<u>1º caso: g(x, y) = b</u>

Suponhamos que P seja solução do problema de otimização, isto é, P é um ponto de máximo de f em cima da curva g(x, y) = b.

Neste caso, dizemos que a restrição esta ativa no ponto P. Geometricamente, isto significa dizer que o ponto P esta em cima da curva g.

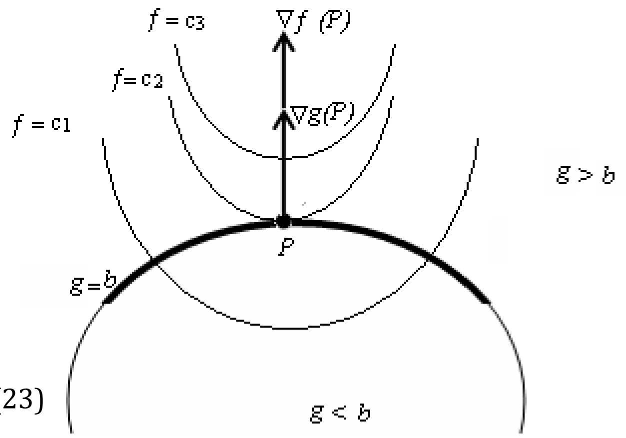


Fig.(23)

Note que o problema agora trata-se de otimização com uma única restrição em igualdade, desta maneira se P é ponto de máximo, então vale o teorema dos multiplicadores de Lagrange, isto é, ∇ f(P) e ∇ g(P) são paralelos:

$\nabla f(P) = \lambda^* . \nabla g(P)$

Se P é um ponto de máximo de f em D, então as curvas de nível de f em uma vizinhança de P devem ser: $c_1 < c_2 < c_3$

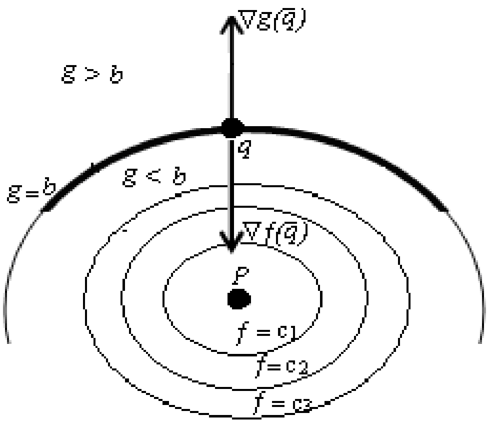
Como o gradiente de uma função quando não nulo fornece a direção de maior crescimento da função, o vetor gradiente de f em P deve apontar para fora do conjunto admissível. Por outro lado, o vetor gradiente de g em P também deverá apontar para fora, já que o valor da função g(P) fora do conjunto admissível é maior que b. Em resumo: os vetores ∇ f(P) e ∇ g(P) tem a mesma direção e o mesmo sentido, logo, $\nabla f(P) = \lambda^* . \nabla g(P)$ *com* $\lambda^* \geq 0$*. Lembrando que, no mesmo caso de uma restrição em* *igualdade, devemos ter $\nabla g(P) \neq 0$. Se P é um máximo ou mínimo local de f em D, então ou g(P) = b, isto é, a restrição esta ativa no ponto P.*

$$(A)\begin{cases} \nabla f(P) = \lambda^* . \nabla g(P) \\ \lambda^* \geq 0 \\ g(P) = b \end{cases}$$

2º caso: g(x, y) < b

Neste caso, dizemos que a restrição esta ativa no interior do conjunto admissível. Desta forma, se P é um ponto de máximo de f em D, então P deve satisfazer $\nabla f(P) = 0$, isto é, P é um ponto crítico de f.

Fig.(24)



Logo, temos:

$$(B)\begin{cases} \nabla f(P) = 0, \\ g(P) < b. \end{cases}$$

Uma forma de verificar as equações (A) e (B) é a seguinte; cria-se a equação $\lambda^*.[g(P)-b]=0$ (2) desta equação temos que: $\lambda^* = 0$ ou $[g(P) - b] = 0$. Se $\lambda^* = 0$ então $\nabla f(P) = 0$ (2º caso). Se $\lambda^* > 0$ então $g(P) = b$ (a restrição g esta ativa em P), portanto, vale $\nabla f(P) = \lambda^* . \nabla g(P)$ com $\lambda^* > 0$ (1º caso). Lembrando que como no caso de restrições em igualdade devemos ter que $\nabla g(P) \neq 0$.

c.q.d

O sistema de equações (1), (2), (3) e (4) pode ser estudado de modo clássico para isto definimos o lagrangeano;

L(x, y, λ) = f(x, y) – λ* . [g(x, y) – b]*

Calculamos os pontos críticos do lagrangeano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x,y,\lambda^*)}{\partial x} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x} - \lambda^* . \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial x} = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial L(x,y,\lambda^*)}{\partial y} = \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y} - \lambda^* . \dfrac{\partial g(x,y)}{\partial y} = 0 & (2) \\ \lambda^* . [g(P) - b] = 0 & (3) \\ \lambda^* \geq 0 & (4) \\ g(P) \leq b & (5) \end{cases}$$

substituímos na função *f* e selecionamos o de maior valor.

Note as diferenças e semelhanças entre o teorema acima e o teorema de Lagrange para restrição em igualdade.

1. Os dois teoremas usam o mesmo Lagrangeano e os dois teoremas pedem que as derivadas parciais de L com relação a *x* e *y* sejam iguais a zero.

2. A condição $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -[g(x,y) - k_0]$ para o caso com uma restrição em igualdade, não vale mas quando consideramos a situação de uma restrição em desigualdade, pois neste caso a restrição não precisa estar ativa no ponto de máximo, neste caso usamos as duas condições

   $$\lambda.[g(x,y) - b] = 0 \text{ e } \frac{\partial L}{\partial \lambda}(x,y,\lambda) = -[g(x,y) - b] \geq 0$$

   sendo que esta segunda nada mais é do que a própria restrição em desigualdade.

3. Os dois teoremas exigem uma condição de regularidade. Contudo, no caso de uma restrição em desigualdade, só precisamos verificá-la para pontos onde a restrição esta ativa

4. Não existem restrições para o sinal do multiplicador no caso de uma restrição em igualdade.Por outro lado em problemas de maximização em que a restrição é uma desigualdade do tipo $g \leq b$, o multiplicador deve ser não-negativo.

5. Para problemas de otimização com restrições em igualdade, as condições de primeira ordem funcionam tanto para maximização como para minimização.Por outro lado, o argumento de que os vetores $\nabla f(P)$ e $\nabla g(P)$ possuem a mesma direção e sentido, só é valido para problemas de maximização com restrição em desigualdade do tipo $g \leq b$. Se ,por exemplo, queremos minimizar uma função f com uma restrição do tipo $g \leq b$, então o $\nabla f(P)$ e $\nabla g(P)$ possuem a mesma direção mas com sentidos opostos em um ponto de mínimo P que é regular e esta na fronteira do conjunto admissível.Fig.(24)

Problemas de minimização

O teorema de karush-kuhn-Tucker só pode ser aplicado em problemas de maximização onde a restrição em desigualdade deve estar na forma $g \leq b$. Se a restrição em desigualdade for do tipo $g \geq b$ pasta multiplicá-la por -1 e teremos uma restrição na forma $g \leq b$ sem alterar o conjunto admissível. Em problemas de minimização se *P* for um ponto de mínimo de *f* em um conjunto admissível ele é um ponto de máximo de *–f* no mesmo conjunto admissível. Assim, para resolver problemas de minimização, basta resolver um problema de maximização trocando a função *f* por *–f.*

<u>EXEMPLO16;</u> Maximizar $f(x, y) = 4xy - 3x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 4$ sujeito a restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 4$

1) *Verificar a condição de regularidade;*

$\nabla g(P) \neq 0 \Leftrightarrow (2x, 2y)$ *que é diferente de zero para todo (x, y) que satisfaz g(x, y) = 4.*

2) *Escrever o lagrangeano* $L(x, y, \lambda) = 4xy - 3x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 4 - \lambda.(x^2 + y^2 - 4)$

3) Procurar os pontos críticos candidatos a máximo

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 0 \Rightarrow 4y - 6x + 4 - 2x\lambda = 0 & (1) \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 0 \Rightarrow 4x - 8y - 8 - 2y\lambda = 0 & (2) \\ \lambda(x^2 + y^2 - 4) = 0 & (3) \\ \lambda \geq 0 & (4) \\ x^2 + y^2 \leq 4 & (5) \end{cases}$$

De (4) temos $\lambda = 0$ *e* $\lambda > 0$*, logo de (1) e (2) temos:*

$$Se\ \lambda = 0 \begin{cases} 4y - 6x = -4 \\ \\ 4x - 8y = 8 \end{cases} \qquad \Rightarrow (0, 1)$$

Se $\lambda > 0$ *de (3) temos* $x^2 + y^2 = 4$. Consequentemente $x \neq 0$.

Porque se x = 0 de (1) teríamos y = -1, portanto $x^2 + y^2$ seria igual a 1 e não igual a 4.

Se y = 0 de (2) temos x = 2, portanto $x^2 + y^2 = 4 \Rightarrow (2)^2 + (0)^2 = 4 \Rightarrow 4 = 4$ ok!

$\Rightarrow (2, 0)$

Desta maneira, os pontos candidatos a máximo da função $f(x, y) = 4xy - 3x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 4$ sujeitos às restrições $g(x, y) = x^2 + y^2 \leq 4$ estão entre

(0, 1) e (2, 0)

Agora substituímos na função $f(x, y) = 4xy - 3x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 4$ e selecionamos o de maior valor;

$$\begin{aligned} f(0, 1) &= 4xy - 3x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 4 \\ &= 4(0)(1) - 3(0)^2 - 4(1)^2 + 4(0) - 8(1) + 4 \\ &= -4 - 8 + 4 \\ &= -8 \end{aligned}$$

$f(2, 0) = 4xy - 3x^2 - 4y^2 + 4x - 8y + 4$

$= 4(2)(0) – 3(2)^2 – 4(0)^2 + 4(2) – 8(0) + 4$

$= - 12 + 8 + 4$

$= 0$

Logo o ponto (2, 0) é a solução do problema.

.

BIBLIOGRAFIA:

Malta, Iaci, *Cálculo a uma variável. Volume 2, 2ª edição*. PUC-RIO(2002)

Thomas, George B., *Cálculo. Volume 2, 10ª edição.* (2003)

Simmons, George F., *Cálculo com Geometria Analítica, Volume 2* (1987)

Cupertino, Paulo, *Cálculo Diferencial e Integral III-EAD*, Editora UFMG

Bortolossi, Humberto J., *Cálculo Diferencial a Várias Variáveis. Volume 1, 2ª edição*