

Universidade Federal de Minas Gerais

Curvas de Preenchimento de Espaço

Jéssica Bruna Miranda Guedes

Belo Horizonte, 2011

Jéssica Bruna Miranda Guedes

Curvas de Preenchimento de Espaço

Monografia apresentada para conclusão do curso de Especialização em Matemática para professores com ênfase em Cálculo da Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientador: Alberto B. Sarmiento

Belo Horizonte
2011

Curvas de Preenchimento de Espaço

Autor: Jéssica Bruna Miranda Guedes

Banca Examinadora:

Prof. Dr. Jorge Sabatucci
Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática

Prof. Dr. Andre Gimenez Bueno
Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática

Prof. Dr. Alberto Berly Sarmiento
Vera (Orientador)
Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática

Universidade Federal de Minas Gerais, Julho de 2011.

Agradecimentos

Minha eterna gratidão a Deus, pela sua presença constante em minha vida. Aos meus pais, pelo apoio e amor incondicionais. Ao meu irmão, pela amizade e companheirismo. Aos amigos e colegas de curso, que me ajudaram na realização deste trabalho. A todos os professores, pela dedicação e incentivo. Em especial, ao meu orientador, professor Alberto Sarmiento, pela receptividade e atenção.

*"O especialista é aquele que sabe
cada vez mais sobre cada vez menos,
e por fim acaba sabendo tudo sobre
nada."*

George Bernard Shaw.

Sumário

Introdução	3
1 Conceitos Básicos	5
1.1 Normas e distância	5
1.2 Sequências de funções - Convergência Simples e Uniforme	8
2 Curvas de Preenchimento de Espaço	12
2.1 Preenchimento do quadrado pelo intervalo	12
2.2 Cantor: preenchimento bijetivo de n-cubos	13
2.3 Peano: preenchimento contínuo de n-cubos	17
2.3.1 A função de Peano	19
2.4 A ideia geométrica da função de Peano	27
2.5 Outros exemplos de SFCs	32
Referências Bibliográficas	35

Introdução

Nesta monografia, estudamos curvas de preenchimento de espaço. Os estudos de Cantor sobre cardinalidade de conjuntos infinitos levaram a questionamentos sobre a noção de dimensão. A dimensão não era um conceito matemático definido, mas uma ideia intuitiva. Acreditava-se que ela estivesse associada ao tamanho do espaço, isto é, um espaço de dimensão maior deveria possuir mais pontos que um espaço de dimensão menor. No entanto, o matemático russo George Cantor mostra que esta é uma ideia equivocada. Introduzindo uma nova teoria, Cantor apresenta um resultado absolutamente surpreendente e contra-intuitivo: o de que o quadrado unitário possui exatamente o mesmo número de pontos que um segmento de reta de comprimento 1.

Esta prova é feita através da construção de uma bijeção entre esses dois conjuntos. Como esta bijeção não era contínua, tentou-se, então, atribuir a incoerência à falta de continuidade da função de Cantor. Isto também não foi possível, uma vez que Peano exhibe uma função contínua que cobre toda uma superfície plana. Surge, assim, a primeira curva de preenchimento de espaço, que foi dita um "monstro matemático", por apresentar uma ideia tão extravagante.

As curvas de preenchimento de espaço possuem várias aplicações, principalmente no âmbito computacional e tecnológico. Entre elas, podemos citar, por exemplo, o melhoramento de imagens digitais, refinamento de malhas e armazenamento e recuperação de dados.

Esta monografia está organizada em 2 capítulos. No primeiro, faz-se uma introdução dos conceitos básicos que serão necessários ao longo deste trabalho, tais como normas, distância e convergência de sequências de funções.

No segundo, faz-se um estudo detalhado das funções de Cantor e Peano, além de uma abordagem geométrica da curva de Peano. Por fim, são apresentados exemplos de outras curvas de preenchimento de espaço.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

1.1 Normas e distância

Definição: Uma norma em \mathbb{R}^n é uma função $\| \cdot \| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ que satisfaz as seguintes condições:

1. $\|x\| \geq 0 \forall x \in \mathbb{R}^n$;
2. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$;
3. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\| \forall x \in \mathbb{R}^n$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$;
4. $\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Exemplo 1.1

Norma euclidiana: Dado $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \| \cdot \| & : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \|x\| & \mapsto \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \end{aligned}$$

Vamos verificar que $\| \cdot \|$ cumpre as condições **1.** **2.** **3.** e **4.**

1. decorre naturalmente da definição de raiz quadrada dos reais.

$$2. \quad \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} = 0 \Leftrightarrow x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$$

3.

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \sqrt{(\alpha x_1)^2 + (\alpha x_2)^2 + \dots + (\alpha x_n)^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 x_2^2 + \dots + \alpha^2 x_n^2} \\ &= \sqrt{\alpha^2 (x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2)} \\ &= \sqrt{\alpha^2} \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ &= |\alpha| \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2} \\ &= |\alpha| \|x\| \end{aligned}$$

4. Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} (\|x + y\|)^2 &= (\|(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\|)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2x_i y_i + y_i^2 \\ &= \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sum_{i=1}^n x_i y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ &\leq \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2 \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} + \sum_{i=1}^n y_i^2 \\ &= \|x\|^2 + 2 \|x\| \|y\| + \|y\|^2 \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

Como temos valores positivos, podemos extrair a raiz quadrada e teremos

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

Exemplo 1.2

Norma da Soma: Dados $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \|\cdot\| &: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \\ \|x\| &\mapsto |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \end{aligned}$$

1. Como cada $|x_i| \geq 0$, é claro que

$$|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| \geq 0 \Rightarrow \|x\| \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

2.

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow |x_1| = |x_2| = \dots = |x_n| = 0 \Leftrightarrow x = 0 \in \mathbb{R}^n$$

3.

$$\begin{aligned} \|\alpha x\| &= \|(\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)\| \\ &= |\alpha x_1| + |\alpha x_2| + \dots + |\alpha x_n| \\ &= |\alpha| |x_1| + |\alpha| |x_2| + \dots + |\alpha| |x_n| \\ &= |\alpha| (|x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|) \\ &= |\alpha| \|x\| \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \|x + y\| &= \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\| \\ \|(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)\| &= |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \dots + |x_n + y_n| \\ |x_1 + y_1| + |x_2 + y_2| + \dots + |x_n + y_n| &\leq |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \dots + |x_n| + |y_n| \\ |x_1| + |y_1| + |x_2| + |y_2| + \dots + |x_n| + |y_n| &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| \\ |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| + |y_1| + |y_2| + \dots + |y_n| &= \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

Definimos a distância entre x e y como o valor da norma do vetor diferença $x - y$.

Por exemplo, se $x = (1, 5, 3)$ e $y = (8, 0, 2)$, temos $x - y = (1 - 8, 5 - 0, 3 - 2) = (-7, 5, 1)$. Então, se a norma considerada é a euclidiana, a distância entre x e

y é $\|x - y\| = \|(-7, 5, 1)\| = \sqrt{(-7)^2 + 5^2 + 1^2} = 5\sqrt{3}$. Mas, se consideramos a norma da soma, temos a distância entre x e y igual a $\|x - y\| = \|(-7, 5, 1)\| = |-7| + |5| + |1| = 13$.

1.2 Sequências de funções - Convergência Simples e Uniforme

Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções $f_n : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que essa sequência **converge simplesmente ou pontualmente** para uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ (e denotamos $f_n \rightarrow f$ ou $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n = f$) se para qualquer $x \in A$ fixado temos que a sequência numérica $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ converge para um valor $f(x)$. Ou seja, $f_n \rightarrow f$ se $\forall \epsilon > 0$ e para $x \in A$ fixado, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ (n_0 dependendo de x e de ϵ) tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon$. Dizemos que f_n **converge uniformemente** para f se dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$, que depende apenas de ϵ e não mais de $x \in A$, tal que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \epsilon \forall x \in A$. Isto é, encontramos n_0 uniforme para todo $x \in A$.

É claro que a convergência uniforme implica na convergência simples. O contrário não acontece, como mostra o exemplo abaixo.

Exemplo 1.3:

Seja $f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $f_n(x) = \frac{x}{n}$. Temos que f_n converge simplesmente para a função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ identicamente nula.

De fato, fixando x_0 em \mathbb{R} , dado $\epsilon > 0$, basta tomar n_0 como o primeiro natural tal que $n_0 > \frac{|x_0|}{\epsilon}$. Desse modo, teremos

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| = \left| \frac{x_0}{n} - 0 \right| < \left| \frac{x_0}{n_0} \right| < \epsilon \forall n \geq n_0$$

o que implica que f_n converge simplesmente para f .

Contudo, note que o fato de x_0 ser fixo é fundamental. Não é possível encontrar um n_0 que dependa apenas de ϵ , pois a propriedade arquimediana de \mathbb{R} nos diz que dado um número real qualquer sempre existe um natural maior que ele. Em especial, dado $\epsilon > 0$ e $n \in \mathbb{N}$, $\exists x \in \mathbb{N}$ tal que $|x| > n\epsilon$ o que implica que

$\frac{|x|}{|n|} > \epsilon \Rightarrow |f_n(x) - 0| > \epsilon$. Assim, f_n não pode convergir uniformemente.

Observação: Quando o tipo de convergência não for especificada ou quando escrevermos apenas $f_n \rightarrow f$ ou $\lim f_n = f$, admite-se que estamos tratando da convergência simples.

Nem sempre determinar o limite de uma sequência é tarefa fácil. Quando isso acontece, uma alternativa para verificar se uma determinada sequência converge ou não, é utilizar o Critério de Cauchy, que diz que se uma sequência é convergente, então, para índices arbitrariamente grandes, a distância entre dois termos da sequência torna-se tão pequena quanto se queira. Assim, é possível analisar a convergência sem que se conheça explicitamente o limite. O teorema abaixo faz exatamente isso, caracteriza a convergência uniforme a partir apenas dos termos da sequência.

Teorema 1 (Critério de Cauchy) Uma sequência $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de funções $f_n : A \rightarrow \mathbb{R}$ converge uniformemente para uma função $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ se, e somente se, dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \forall x \in A$.

Prova:

\Rightarrow) Suponha que f_n converge uniformemente. Então, $\exists n_0$ tal que

$$n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \forall x \in A.$$

Em especial, para $m, n \geq n_0$, podemos escrever

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon/2 \text{ e } |f_m(x) - f(x)| \leq \epsilon/2$$

É claro que $|f_m(x) - f(x)| = |f(x) - f_m(x)|$. Mas

$$\begin{aligned} |f_n(x) - f_m(x)| &= |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| \\ |f_n(x) - f(x) + f(x) - f_m(x)| &\leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \\ |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| &\leq \epsilon/2 + \epsilon/2 = \epsilon \end{aligned}$$

Portanto, $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon \forall x \in A$.

\Leftrightarrow Suponha que dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$.

Fixemos $x \in A$ e vejamos o que acontece com a sequência numérica $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$.

Para $\epsilon = 1$, $\exists n_1 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_1 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq 1$ (*)

Para $\epsilon = \frac{1}{2}$, $\exists n_2 \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq n_2 \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| \leq \frac{1}{2}$

(*) nos diz que existe um intervalo I_1 na reta, de comprimento 1 que contém todos os termos da sequência a partir do termo $f_{n_1}(x)$. Assim, tomando $\epsilon = 1/\alpha; \alpha \in \mathbb{N}$ e fazendo $\alpha \rightarrow \infty$, obtemos uma sequência de intervalos I_α de comprimento $1/\alpha$ e que contém todos os termos da sequência $f_n(x)$ a partir do termo $f_{n_\alpha}(x)$.

É claro que $I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots \supset I_\alpha \supset \dots$. Assim, pelo teorema dos intervalos encaixantes temos que $\exists f(x) \in I_1 \cap I_2 \cap \dots \cap I_\alpha \cap \dots$.

Mas, sabemos que dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 \geq 1/\epsilon$. Daí $1/n_0 \leq \epsilon$. Logo, dado $\epsilon > 0$, $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \Rightarrow I_n \subset I_{n_0}$. Mas, I_{n_0} contém todos os termos da sequência a partir de $f_{n_0}(x)$, $f(x) \in I_{n_0}$ e o comprimento de I_{n_0} é $1/n_0$. Decorre, então, que $n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq 1/n_0 \leq \epsilon$.

Portanto, $(f_n(x))$ converge para qualquer x fixado em A. Assim, como $\lim f_m(x) = f(x)$, fixando $n \geq n_0$ e fazendo $m \rightarrow \infty$, da desigualdade $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \epsilon$, obtemos $|f_n(x) - f(x)| \leq \epsilon \forall n \in \mathbb{N}$ e $\forall x \in A$.

O que prova a convergência uniforme de f_n para f . ■

Pergunta: Será que se tomarmos uma sequência convergente, com cada f_n contínua, seu limite também será uma função contínua? A resposta é não. Considere, por exemplo, $f_n : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}; f_n(x) = x^n$. Temos que $f_n \rightarrow f$, onde $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ é

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \neq 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \end{cases}$$

Isto é, temos uma sequência de funções contínuas que converge para uma função não contínua. Porém, se a convergência é uniforme, a continuidade de cada uma das f_n , nos garante a continuidade do limite.

Teorema 2: Seja I um intervalo da reta e $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções, $f_n : I \rightarrow \mathbb{R}$ que converge uniformemente para $f : I \rightarrow \mathbb{R}$. Se f_n é contínua $\forall n \in \mathbb{N}$, então f também é contínua.

Prova:

Para provar que f é contínua num ponto $x_0 \in I$, devemos mostrar que $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon$.

Assim, dado $\epsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \epsilon/3 \forall x \in I$ (esse n_0 existe, pois f_n converge uniformemente). Mas, f_n é contínua por hipótese, o que significa que é possível obter $\delta > 0$ tal que $|x - x_0| < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leq \epsilon/3$ para um dado $x_0 \in I$.

Mas, $|f(x) - f(x_0)| = |f(x) - f_{n_0}(x) + f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0) + f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \leq \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon$ sempre que $|x - x_0| < \delta$.

Isso prova a continuidade de f em $x_0 \in I$. Mas, como x_0 é arbitrário, temos f contínua em I . ■

Corolário: Se (f_n) é uma sequência de funções contínuas que converge para f não contínua, então a convergência não pode ser uniforme.

Capítulo 2

Curvas de Preenchimento de Espaço

As curvas de preenchimento de espaço são o objeto principal de nosso estudo. Neste capítulo, vamos entender como elas surgiram e por que levam esse nome. Para isso, exibiremos duas formas de se fazer um mapeamento sobrejetivo de um intervalo da reta sobre uma região do plano. O primeiro mapeamento (de Cantor) é uma bijeção, porém não é contínuo. O segundo, (de Peano) é uma função sobrejetiva e contínua.

2.1 Preenchimento do quadrado pelo intervalo

Definição: Se A é um conjunto, definimos a cardinalidade ou o cardinal do conjunto A (e denotamos $|A|$) como o número de elementos que constituem A .

Dado um conjunto A qualquer, defina $S = A \times A = \{(a, b); a, b \in A\}$, ou seja, S é o produto cartesiano de duas cópias de A . Por exemplo, se $A_1 = \{1, 2\}$, então $S_1 = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2)\}$. Nesse caso, $|A_1| = 2$ e $|S_1| = 4$. Mais especificamente, para um conjunto finito, digamos, $|A| = n > 1$, então a cardinalidade do produto cartesiano $S = A \times A$ é $|S| = n^2$. Assim, o conjunto S tem sempre mais elementos que A . Mas no caso do conjunto A ter cardinalidade infinita será que essa relação continua valendo?

Intuitivamente podemos pensar que vale $|S| > |A|$. O que é muito natural, uma vez que cada elemento $a \in A$ é cruzado com todos os infinitos termos

de A e portanto dá origem a uma infinidade de elementos em S .

Por exemplo, se tomarmos A como o intervalo $[0, 1] \subset \mathbb{R}$, a nossa intuição nos leva a crer que o quadrado $S = [0, 1] \times [0, 1]$ possui mais pontos que o segmento $[0, 1]$. Essa presunção parece ainda mais evidente e correta com a ideia geométrica de que é preciso "vários" segmentos empilhados para se preencher totalmente um quadrado (Figura 2.1).

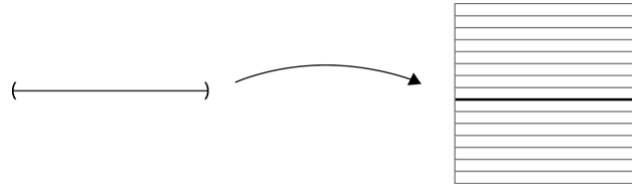


Figura 2.1

No entanto, o trabalho de dois matemáticos, no final do século XIX, vem jogar por terra esta intuição. O primeiro deles é Cantor, que surpreendeu e chocou a comunidade matemática da época ao afirmar que, ao contrário do que indica nosso senso lógico-intuitivo, o quadrado não possui mais e sim a mesma quantidade de pontos que o segmento $[0, 1]$.

2.2 Cantor: preenchimento bijetivo de n-cubos

George Cantor é um matemático de origem russa, nascido em 1845 e uma de suas principais contribuições à ciência foi a criação da Teoria dos Conjuntos. Nela, entre outras coisas, ele define uma forma de comparar a cardinalidade entre conjuntos, sem que se utilize o processo de contagem, pois estamos interessados em conjuntos infinitos. O conceito desse método é muito simples. Dizemos que os conjuntos A e B têm a mesma cardinalidade se podemos criar uma bijeção entre eles. Como já sabemos, uma bijeção $f : A \rightarrow B$ é uma lei de correspondência que associa a cada elemento de A um, e apenas um elemento de B .

É usando esta ideia tão simples quanto genial que Cantor prova o teorema 3. Mas, antes, consideremos a seguinte notação que utilizaremos na demons-

tração do teorema. Dado um número real $0 < x < 1$, consideremos sua expansão decimal com infinitas casas decimais significativas da seguinte forma: ela é clara no caso de x ser irracional ou periódico; no caso de x ser um número racional com um número finito de casas decimais não-nulas, digamos $x = 0,a_1a_2\dots a_k$, então podemos escrever equivalentemente $x = 0,a_1a_2\dots(a_k - 1)999999\dots$. Essa equivalência vem do fato de que a dízima periódica x possui uma fração geratriz do tipo a/b e a divisão $a : b$ resulta exatamente em $x = 0,a_1a_2\dots a_k$. Para que fique mais claro, vejamos um exemplo numérico:

Se $x = 0,145$, por exemplo, podemos escrever $x = 0,1449999\dots$. De fato,

$x = 0,1449999\dots \Rightarrow 10000x = 1449,999\dots$ e $1000x = 144,999\dots$. Subtraindo a segunda equação da primeira obtemos $x = \frac{1449,999\dots - 144,999\dots}{9000} = 0,145$.

Notação: Um vetor (u,v) pertencente a $[0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, tal que $u = 0,a_1a_2\dots$ e $v = 0,b_1b_2\dots$ será representado por $(0.a_1a_2\dots, 0.b_1b_2\dots)$.

Teorema 3: O quadrado $S = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$ possui a mesma quantidade de pontos que o segmento $[0,1] \subset \mathbb{R}$.

Prova:

Pela definição, basta exibir uma bijeção entre esses dois conjuntos. Dado $(x,y) \in S = [0,1] \times [0,1]$, consideremos a expansão decimal de x e y com infinitas casas decimais como visto acima, assim $x = 0,a_1a_2a_3\dots$ e $y = 0,b_1b_2b_3\dots$, definimos $f : [0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ tal que

$$f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{se } (x,y) = (0,0) \\ 0,a_1b_1a_2b_2a_3b_3\dots & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$$

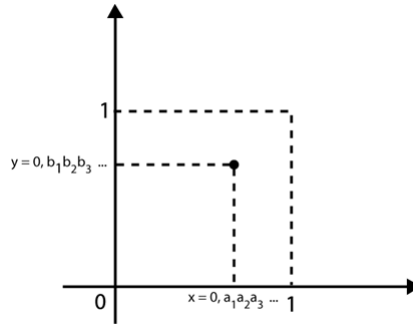


Figura 2.2

É claro que $f(x,y) = 0,a_1b_1a_2b_2\dots a_nb_n\dots = f(x',y') = 0,a'_1b'_1a'_2b'_2\dots a'_nb'_n\dots \Leftrightarrow a_n = a'_n$ e $b_n = b'_n \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow x = x'$ e $y = y' \Rightarrow f$ injetiva.

Além disso, dado $t \in [0,1], t = 0,c_1c_2c_3\dots c_n\dots = f(0.c_1c_3c_5\dots c_{2n-1}\dots, 0.c_2c_4c_6\dots c_{2n}\dots)$ com $n \in \mathbb{N}$. Isto é, $t = f(x,y)$ para algum $(x,y) \in [0,1] \times [0,1] \Rightarrow f$ sobrejetiva.

Portanto, f é bijetiva, e isto prova que esses conjuntos têm a mesma cardinalidade. ■

Proposição 2.1: A função de Cantor não é contínua.

Prova:

Para provar que f não é contínua, basta exibir uma sequência x_n convergindo para $x \in [0,1] \times [0,1]$, tal que a sequência das imagens $f(x_n)$ não converge $f(x)$. Assim, considere a sequência x_n :

$$\begin{aligned}
 x_1 &= (0.98999\dots, 0.0999\dots) = (0.99, 0.1), \\
 x_2 &= (0.908999\dots, 0.00999\dots) = (0.909, 0.01), \\
 x_3 &= (0.9008999\dots, 0.000999\dots) = (0.9009, 0.001), \\
 &\dots \\
 x_n &= (0.9\underbrace{000\dots000}_{(n-1)\text{-zeros}}8999\dots, 0.\underbrace{000\dots000}_{n\text{-zeros}}999\dots) = (0.900\dots009, 0.0\dots01) \\
 &\dots
 \end{aligned}$$

Se $x = (0.9, 0)$, usando a distância induzida pela norma da soma, temos

$$\|x_n - x\| = \left| \underbrace{0.00 \dots 00}_n 9 \right| + \left| \underbrace{0.00 \dots 00}_{n-1\text{-zeros}} 1 \right| = 0. \underbrace{00 \dots 00}_{n-1\text{-zeros}} 19$$

logo, $x_n \rightarrow x$. Mas, temos a sequência de imagens como segue:

$$\begin{aligned} y_1 &= f(x_1) = 0,909 = 0,908999 \dots, \\ y_2 &= f(x_2) = 0,90009 = 0,90008999 \dots, \\ y_3 &= f(x_3) = 0,9000009 = 0,9000008999 \dots, \\ &\dots \\ y_n &= f(x_n) = 0,9 \underbrace{0000 \dots 000}_n 9 = 0,90000 \dots 0008999 \dots \\ &\dots \end{aligned}$$

É claro que $y_n \rightarrow 0,9 \neq 0,80909090\dots = f(x)$. Logo, f não é contínua em $x = (0.9, 0)$, e portanto, temos f não contínua no intervalo $[0,1]$. ■

Note que se, no Teorema 3, ao invés do quadrado $S = [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^2$, tivéssemos o cubo sólido $S_3 = [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \subset \mathbb{R}^3$, então, para cada ponto $(x,y,z) = (0.a_1a_2a_3\dots, 0.b_1b_2b_3\dots, 0.c_1c_2c_3\dots)$ poderíamos definir uma função $f : S_3 \rightarrow [0,1]$ tal que $f(x,y,z) = 0,a_1b_1c_1a_2b_2c_2\dots a_nb_nc_n\dots$

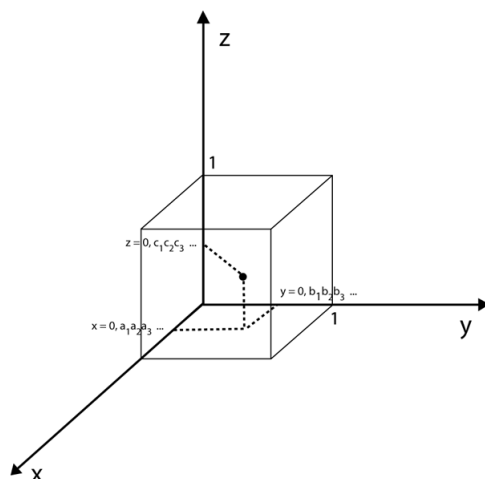


Figura 2.3

É fácil verificar que f é bijeção. E da mesma forma, para $S_n = \underbrace{[0,1] \times [0,1] \times \dots \times [0,1]}_{n \text{ vezes}} \subset \mathbb{R}^n$, chamado de **n-cubo**, constrói-se de maneira análoga, uma bijeção entre S_n e $[0,1]$, provando que $|S_n| = |[0,1]| \forall n \in \mathbb{N}$.

O mais surpreendente é que generalizando este argumento e aplicando a transitividade da bijeção, Cantor demonstra que qualquer espaço n-dimensional possui exatamente o mesmo número de pontos que um espaço p-dimensional, mesmo se $n \neq p$.

Este resultado causou espanto até mesmo ao autor da descoberta, que chegou a declarar: "*Vejo, mas não acredito.*"

E, com isto, Cantor força a sociedade matemática a repensar a noção de dimensão, que agora já não podia mais ser intuída da ideia de "tamanho" ou número de pontos. Era necessário um conceito matemático que permitisse dar uma definição clara e precisa de dimensão, mas que estivesse, contudo, de acordo com a ideia intuitiva e geométrica do termo. Uma forma de querer "driblar" ou contornar esta dificuldade foi justificar à falta da continuidade da função de Cantor, supondo, assim, que a dimensão deveria ser preservada por aplicações contínuas. No entanto, como veremos na seção seguinte, esta situação piorou com o exemplo apresentado por Peano.

2.3 Peano: preenchimento contínuo de n-cubos

O matemático italiano Giuseppe Peano exibe uma função contínua que sai de um segmento de reta e preenche todo o quadrado. Para definir tal função, assim como Cantor, Peano também escreve os números reais entre 0 e 1 em sua representação com infinitos dígitos. No entanto, ao invés do sistema decimal, ao qual estamos acostumados, ele utiliza o sistema de base 3, isto é, aquele em que os números são escritos usando-se apenas 3 algarismos: 0, 1 e 2. Assim, se $0 \leq r \leq 1$,

$$r = 0,t_1t_2t_3\dots = \frac{t_1}{3} + \frac{t_2}{3^2} + \frac{t_3}{3^3} + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{t_i}{3^i}$$

com $t_i \in \{0, 1, 2\}$.

A seguinte função será fundamental para definir a função de Peano. Seja $\sigma : \{0, 1, 2\} \rightarrow \{0, 1, 2\}$ a função permutação que mantém fixo 1, e troca 0 e 2, isto é

$$\begin{aligned}\sigma(1) &= 1 \\ \sigma(0) &= 2 \\ \sigma(2) &= 0\end{aligned}$$

Observe que

$$\begin{aligned}\sigma \circ \sigma(0) &= \sigma(\sigma(0)) = \sigma(2) = 0 = id(0) \\ \sigma \circ \sigma(1) &= \sigma(\sigma(1)) = \sigma(1) = 1 = id(1) \\ \sigma \circ \sigma(2) &= \sigma(\sigma(2)) = \sigma(0) = 2 = id(2)\end{aligned}$$

ou seja, $\sigma \circ \sigma(a) = id(a) \forall a \in \{0, 1, 2\} \Rightarrow \sigma$ é igual à sua própria inversa. Uma função que possui esta propriedade é chamada de **involução**.

Denotamos por σ^t a composição de σ por σ t vezes, ou seja, $\sigma^t = \underbrace{\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma}_{t \text{ vezes}}$. É claro que se σ é uma involução, então σ^t também o é, pois para qualquer $t \in \mathbb{Z}$, $\sigma^t \circ \sigma^t = \sigma^{2t} = \underbrace{\sigma^2 \circ \sigma^2 \circ \dots \circ \sigma^2}_{t \text{ vezes}} = \underbrace{id \circ id \circ \dots \circ id}_{t \text{ vezes}} = id$.

As seguintes notações também serão utilizadas ao longo deste capítulo:

- (1) $\sigma(0, t_1 t_2 \dots t_k \dots) = (0, \sigma(t_1) \sigma(t_2) \dots \sigma(t_k) \dots)$
- (2) $(\sigma^{t_2}, \sigma^{t_1}) \circ (0, \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \dots, 0, \beta_1 \beta_2 \beta_3 \dots) =$
 $= (0, (\sigma^{t_2} \alpha_1) (\sigma^{t_2} \alpha_2) (\sigma^{t_2} \alpha_3) \dots, 0, (\sigma^{t_1} \beta_1) (\sigma^{t_1} \beta_2) (\sigma^{t_1} \beta_3) \dots)$

Observação importante: A partir deste momento, estaremos adotando o sistema de numeração de base 3.

2.3.1 A função de Peano

A função de Peano será denotada por P_E e é definida da seguinte forma: $P_E : [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$, tal que $P_E(r) = P_E(0,t_1t_2t_3\dots) = (0.a_1a_2a_3\dots, 0.b_1b_2b_3\dots)$, onde

$$\begin{cases} a_1 = t_1 \\ a_2 = \sigma^{t_2}t_3 \\ \vdots \\ a_n = \sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2(n-1)}}t_{2n-1} \\ \vdots \end{cases} \quad \begin{cases} b_1 = \sigma^{t_1}t_2 \\ b_2 = \sigma^{t_1+t_3}t_4 \\ \vdots \\ b_n = \sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}}t_{2n} \\ \vdots \end{cases}$$

Vamos verificar que esta função está bem definida, isto é, que cada elemento do domínio $[0,1]$, possui um e apenas um elemento imagem em $[0,1] \times [0,1]$. Mas, para isto, precisaremos do resultado da proposição abaixo, que apresenta uma forma recursiva de calcular $P_E(r)$.

Proposição 2.2: Dado $0,t_1t_2t_3\dots \in [0,1]$, temos

$$P_E(0.t_1t_2t_3\dots) = (0.t_1, 0.\sigma^{t_1}t_2) + \frac{1}{3}[(\sigma^{t_2}, \sigma^{t_1}) \circ P_E(0.t_3t_4t_5\dots)]$$

Prova:

Para verificar a equação, basta desenvolver seu segundo membro e teremos:

$$\begin{aligned} & (0.t_1, 0.\sigma^{t_1}t_2) + \frac{1}{3}[(\sigma^{t_2}, \sigma^{t_1}) \circ P_E(0.t_3t_4t_5\dots)] = \\ & = (0.t_1, 0.\sigma^{t_1}t_2) + \frac{1}{3}[(\sigma^{t_2}, \sigma^{t_1}) \circ (0.(t_3)(\sigma^{t_4}t_5)\dots(\sigma^{t_4+t_6+\dots+t_{2(n-1)}}t_{2n-1})\dots, \\ & 0.(\sigma^{t_3}t_4)(\sigma^{t_3+t_5}t_6)\dots(\sigma^{t_3+t_5+\dots+t_{2n-1}}t_{2n})\dots)] \\ & = (0.t_1, 0.\sigma^{t_1}t_2) + \frac{1}{3}(0.(\sigma^{t_2}t_3)(\sigma^{t_2}(\sigma^{t_4}t_5))\dots(\sigma^{t_2}(\sigma^{t_4+t_6+\dots+t_{2(n-1)}}t_{2n-1}))\dots, \\ & 0.(\sigma^{t_1}(\sigma^{t_3}t_4))(\sigma^{t_1}(\sigma^{t_3+t_5}t_6))\dots(\sigma^{t_1}(\sigma^{t_3+t_5+\dots+t_{2n-1}}t_{2n}))\dots) \\ & = (0.t_1, 0.\sigma^{t_1}t_2) + \frac{1}{3}(0.(\sigma^{t_2}t_3)(\sigma^{t_2+t_4}t_5)\dots(\sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2(n-1)}}t_{2n-1})\dots, \\ & 0.(\sigma^{t_1+t_3}t_4)(\sigma^{t_1+t_3+t_5}t_6)\dots(\sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}}t_{2n})\dots) \end{aligned}$$

$$= (0.t_1, 0.\sigma^{t_1}t_2) + (0.0(\sigma^{t_2}t_3)(\sigma^{t_2+t_4}t_5)\dots(\sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2(n-1)}}t_{2n-1})\dots, \\ 0.0(\sigma^{t_1+t_3}t_4)(\sigma^{t_1+t_3+t_5}t_6)\dots(\sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}}t_{2n})\dots)$$

$$= (0.(t_1)(\sigma^{t_2}t_3)(\sigma^{t_2+t_4}t_5)\dots(\sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2(n-1)}}t_{2n-1})\dots, \\ 0.(\sigma^{t_1}t_2)(\sigma^{t_1+t_3}t_4)\dots(\sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}}t_{2n})\dots)$$

$$= P_E(0.t_1t_2t_3\dots t_n\dots) \quad \blacksquare$$

Lema 2.2: P_E é uma função bem definida.

Prova:

Seja $r \in [0,1]$. Se r é irracional ou periódico, r tem uma única expansão ternária, e portanto, não há dúvida quanto à unicidade da imagem. Porém, no caso de r ser um número racional, ele possui duas representações, digamos $r = 0.t_1t_2t_3\dots t_k$ (com $t_k \neq 0$), e sua forma equivalente $r = 0.t_1t_2t_3\dots(t_k - 1)2222\dots$. Portanto, devemos nos certificar de que a imagem de r seja única, isto é, $P_E(0.t_1t_2t_3\dots t_k) = P_E(0.t_1t_2t_3\dots(t_k - 1)2222\dots)$. Usando a expressão de recorrência enunciada na Proposição 2.2 para calcular a imagem de cada um desses elementos, temos

$$P_E(0.t_1t_2t_3\dots t_k000\dots) = (0.t_1, 0.\sigma^{t_1}t_2) + \frac{1}{3}[(\sigma^{t_2}, \sigma^{t_1}) \circ P_E(0.t_3t_4\dots t_k000\dots)] \\ P_E(0.t_1t_2t_3\dots(t_k - 1)2222\dots) = (0.t_1, 0.\sigma^{t_1}t_2) + \frac{1}{3}[(\sigma^{t_2}, \sigma^{t_1}) \circ P_E(0.t_3t_4\dots(t_k - 1)222\dots)]$$

logo

$$P_E(0.t_1t_2t_3\dots t_k000\dots) = P_E(0.t_1t_2t_3\dots(t_k - 1)2222\dots) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow P_E(0.t_3t_4\dots t_k000\dots) = P_E(0.t_3t_4\dots(t_k - 1)222\dots)$$

mas

$$P_E(0.t_3t_4\dots t_k000\dots) = (0.t_3, 0.\sigma^{t_3}t_4) + \frac{1}{3}[(\sigma^{t_4}, \sigma^{t_3}) \circ P_E(0.t_5t_6\dots t_k000\dots)]$$

$$P_E(0.t_3t_4\dots(t_k - 1)222\dots) = (0.t_3, 0.\sigma^{t_3}t_4) + \frac{1}{3}[(\sigma^{t_4}, \sigma^{t_3}) \circ P_E(0.t_5t_6\dots(t_k - 1)222\dots)]$$

o que implica que

$$\begin{aligned} P_E(0,t_1t_2t_3\dots t_k000\dots) &= P_E(0,t_1t_2t_3\dots(t_k-1)2222\dots) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P_E(0.t_5t_6\dots t_k000\dots) = P_E(0.t_5t_6\dots(t_k-1)222\dots) \end{aligned}$$

E assim, podemos continuar este processo repetidas vezes. Como as primeiras $k-1$ casas decimais são idênticas nas duas representações de r , depois de um certo número de iterações, teremos que

$$\begin{aligned} P_E(0,t_1t_2t_3\dots t_k000\dots) &= P_E(0,t_1t_2t_3\dots(t_k-1)2222\dots) \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow P_E(0.t_k000\dots) = P_E(0.(t_k-1)222\dots) \end{aligned}$$

Como $t_k \neq 0$, só há duas possibilidades:

ou $t_k = 1 \Rightarrow t_k - 1 = 0$

ou $t_k = 2 \Rightarrow t_k - 1 = 1$.

Ou seja, nosso problema, se resume a mostrar que $P_E(0.1000\dots) = P_E(0.0222\dots)$ (no caso de $t_k = 1$), e $P_E(0.2000\dots) = P_E(0.1222\dots)$ (no caso de $t_k = 2$). Aplicando P_E aos números em questão, temos:

$$\begin{aligned} P_E(0.1000\dots) &= (0.1(\sigma^0 0)(\sigma^0 0)\dots, 0.(\sigma^1 0)(\sigma^{(1+0)} 0)\dots) \\ &= (0.1(id 0)(id 0)\dots, 0.(\sigma 0)(\sigma 0)\dots) \\ &= (0.1000\dots, 0.2222\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_E(0.0222\dots) &= (0.0(\sigma^2 2)\dots(\sigma^{2n} 2)\dots, 0.(\sigma^0 2)(\sigma^{(0+2)} 2)\dots) \\ &= (0.0(\sigma(\sigma 2))\dots(\sigma^{(2n-1)}(\sigma 2))\dots, 0.(id 2)(\sigma(\sigma 2))\dots) \\ &= (0.0(\sigma 0)(\sigma 0)\dots, 0.2(\sigma 0)\dots) \\ &= (0.0222\dots, 0.222\dots) \end{aligned}$$

$$P_E(0.2000\dots) = (0.2(\sigma^0 0)(\sigma^{(0+0)} 0)\dots, 0.(\sigma^2 0)(\sigma^{(2+0)} 0)\dots)$$

$$\begin{aligned}
 P_E(0.2000\dots) &= (0.2(id0)(id0)\dots, 0.(\sigma(\sigma 0))(\sigma(\sigma 0))) \\
 &= (0.2000\dots, 0.(\sigma 2)(\sigma 2)\dots) \\
 &= (0.2000\dots, 0.00000\dots)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_E(0.1222\dots) &= (0.1(\sigma^2 2)(\sigma^{(2+2)} 2)\dots, 0.(\sigma^1 2)(\sigma^{(1+2)} 2)\dots) \\
 &= (0.1(\sigma(\sigma 2))(\sigma^3(\sigma 2))\dots, 0.(\sigma 2)(\sigma^3 2)\dots) \\
 &= (0.1(\sigma 0)(\sigma^3 0)\dots, 0.000\dots) \\
 &= (0.1222\dots, 0.000\dots)
 \end{aligned}$$

Pela ambiguidade da expansão ternária, temos

$P_E(0.1000\dots) = P_E(0.0222\dots)$ e $P_E(0.2000\dots) = P_E(0.1222\dots)$. Portanto, P_E é bem definida.

■

Lema 2.3: P_E é sobrejetiva.

Prova:

Vamos mostrar que todo ponto $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$ é imagem de algum $r \in [0, 1]$. Então, considere $(u, v) \in [0, 1] \times [0, 1]$; $(u, v) = (0.c_1c_2c_3\dots, 0.d_1d_2d_3\dots)$. Se existir $r = 0.t_1t_2t_3\dots \in [0, 1]$ tal que $P_E(r) = (u, v)$, devemos ter

$$c_n = \sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2(n-1)}} t_{2n-1} \quad \text{e} \quad d_n = \sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}} t_{2n} \quad \text{para } n = 1, 2, 3, \dots$$

Como σ é uma involução, aplicando a permutação a ambos os lados das equações anteriores, teremos:

$$\begin{aligned}
 \sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2(n-1)}} c_n &= \sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2(n-1)}} \circ \sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2(n-1)}} t_{2n-1} \\
 \sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2(n-1)}} c_n &= id \ t_{2n-1} \\
 t_{2n-1} &= \sigma^{t_2+t_4+\dots+t_{2(n-1)}} c_n
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}}d_n &= \sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}} \circ \sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}}t_{2n} \\ \sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}}d_n &= id t_{2n} \\ t_{2n} &= \sigma^{t_1+t_3+\dots+t_{2n-1}}d_n\end{aligned}$$

Tomando $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$ como especificados acima, teremos $P_E(0, t_1 t_2 t_3 \dots) = (0.c_1 c_2 c_3 \dots, 0.d_1 d_2 d_3 \dots)$, isto é, $P_E(r) = (u, v) \Rightarrow P_E$ sobrejetiva. ■

Lema 2.4: P_E não é injetiva.

Prova:

Temos que $P_E(0.010202020\dots) = (0.022\dots, 0.122\dots)$. Mas, no Lema 2.2, vimos que $P_E(0.02) = (0.022\dots, 0.2000\dots)$. Como $(0.0222\dots, 0.2000\dots) = (0.022\dots, 0.122\dots)$, temos $P_E(0.02) = P_E(0.010202020\dots)$ com $0.02 \neq 0.010202020\dots \Rightarrow P_E$ não é injetiva. ■

Teorema principal: $P_E : [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ é uma função sobrejetiva e contínua.

Prova:

A sobrejetividade fica provada no Lema 2.3. Para provar a continuidade, vamos mostrar que, se uma sequência r_n converge para $r \in [0,1]$, então, a sequência de imagens $P_E(r_n)$ deve convergir para $P_E(r)$. Assim, considere uma sequência $r_n \in [0,1]$, tal que $r_n = 0.r_1^n r_2^n r_3^n \dots$ e $r_n \rightarrow r = 0.r_1 r_2 r_3 \dots \in [0,1]$.

$r_n \rightarrow r$ implica que, a partir de um certo índice, a distância entre os termos de r_n e r se torna tão pequena quanto se queira. Assim, para qualquer N , $\exists M \in \mathbb{N}$ tal que $m \geq M \Rightarrow \|r_m - r\| < 1/3^N$.

Seja $r_m - r = s = 0.s_1^m s_2^m s_3^m \dots$. Usando a norma da soma, temos

$$\begin{aligned} \|r_m - r\| &< 1/3^N \\ \|(0.s_1^m s_2^m s_3^m \dots)\| &< 1/3^N \\ \left\| \frac{s_1^m}{3} + \frac{s_2^m}{3^2} + \frac{s_3^m}{3^3} + \dots \right\| &< 1/3^N \\ \left| \frac{s_1^m}{3} + \frac{s_2^m}{3^2} + \frac{s_3^m}{3^3} + \dots \right| &< 1/3^N \\ \left| \frac{s_1^m}{3} \right| + \left| \frac{s_2^m}{3^2} \right| + \left| \frac{s_3^m}{3^3} \right| + \dots &< 1/3^N \end{aligned}$$

É claro que se tivéssemos algum termo $\left| \frac{s_j^m}{3^j} \right| \neq 0$, com $j \geq N$, a desigualdade seria falsa, isto é, teríamos $\|r_m - r\| \geq 1/3^N$, o que contradiziria a hipótese de r_n convergir para r . Logo,

$$\left| \frac{s_j^m}{3^j} \right| = 0 \quad \forall j \leq N \Rightarrow s_j^m = 0 \Rightarrow r_j^m = r_j$$

para $j = 1, 2, \dots, N$

Dado $\varepsilon > 0$, escolha $N \in \mathbb{N}$, tal que $3^N > 1/3\varepsilon$. Então, $1/3^N < 3\varepsilon$.

Sejam $P_E(r_m) = (0.a_1 a_2 \dots, 0.b_1 b_2 \dots)$, $P_E(r) = (0.c_1 c_2 \dots, 0.d_1 d_2 \dots)$ e $P_E(r_n) - P_E(r) = (0.u_1 u_2 \dots, 0.v_1 v_2 \dots)$.

Por definição de P_E , temos que a_k e b_k dependem exclusivamente de r_1^m, \dots, r_k^m , assim como c_k e d_k dependem exclusivamente de r_1, \dots, r_k . Mas como $r_k^m = r_k$ para todo $k = 1, 2, \dots, N$, teremos $a_k = c_k$ e $b_k = d_k$ para $k = 1, 2, \dots, N$, e consequentemente, $u_k = v_k = 0$ para $k = 1, 2, \dots, N$. Daí,

$$\begin{aligned}
\|P_E(r_n) - P_E(r)\| &= \|(0.u_1u_2\dots, 0.v_1v_2\dots)\| \\
&= \|(0.00\dots 0u_{N+1}u_{N+2}\dots, 0.00\dots 0v_{N+1}v_{N+2}\dots)\| \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{u_i}{3^i} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{v_i}{3^i} \right\| \\
&= \left\| \underbrace{0+0\dots+0}_{N \text{ vezes}} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{u_i}{3^i} + \underbrace{0+0\dots+0}_{N \text{ vezes}} + \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{v_i}{3^i} \right\| \\
&= \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{u_i}{3^i} \right| + \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{v_i}{3^i} \right|
\end{aligned}$$

Mas como estamos escrevendo em base 3, teremos cada $u_i, v_i \leq 2$. Logo

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{u_i}{3^i} \right| + \left| \sum_{i=N+1}^{\infty} \frac{v_i}{3^i} \right| &= \\
\left| \frac{u_{N+1}}{3^{N+1}} + \frac{u_{N+2}}{3^{N+2}} + \dots \right| + \left| \frac{v_{N+1}}{3^{N+1}} + \frac{v_{N+2}}{3^{N+2}} + \dots \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{u_{N+1}}{3^{N+1}} + \frac{u_{N+2}}{3^{N+2}} + \dots \right| + \left| \frac{v_{N+1}}{3^{N+1}} + \frac{v_{N+2}}{3^{N+2}} + \dots \right| &\leq \\
\left| \frac{2}{3^{N+1}} + \frac{2}{3^{N+2}} + \dots \right| + \left| \frac{2}{3^{N+1}} + \frac{2}{3^{N+2}} + \dots \right|
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\left| \frac{2}{3^{N+1}} + \frac{2}{3^{N+2}} + \dots \right| + \left| \frac{2}{3^{N+1}} + \frac{2}{3^{N+2}} + \dots \right| &= \\
\frac{2}{3^{N+1}} \left| 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right| + \frac{2}{3^{N+1}} \left| 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots \right|
\end{aligned}$$

Mas, $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots$ é a soma de uma P.G. infinita cujo primeiro termo é 1 e a razão é igual a $1/3$. Logo,

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots = \frac{1}{1 - 1/3} = 3/2$$

Daí,

$$\begin{aligned} \|P_E(r_n) - P_E(r)\| &\leq \frac{2}{3^{N+1}} \left|1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right| + \frac{2}{3^{N+1}} \left|1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right| \\ &\frac{2}{3^{N+1}} \left|1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right| + \frac{2}{3^{N+1}} \left|1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \dots\right| \leq \frac{2}{3^{N+1}} \frac{3}{2} + \frac{2}{3^{N+1}} \frac{3}{2} \\ &\frac{2}{3^{N+1}} \frac{3}{2} + \frac{2}{3^{N+1}} \frac{3}{2} \leq 2 \frac{3}{2} \frac{2}{3^{N+1}} = 3 \frac{2}{3^{N+1}} = 3 \frac{2}{3} \frac{1}{3^N} < 3 \cdot \frac{1}{3^N} < 3 \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

Isto é,

$$\|P_E(r_m) - P_E(r)\| < \varepsilon \quad \forall m \geq M \Rightarrow P_E(r_m) \rightarrow P_E(r)$$

sempre que $r_n \rightarrow r$. Portanto, P_E é contínua em r . Da arbitrariedade de r , conclui-se a continuidade de P_E .

■

A exemplo do que foi feito com a função de Cantor, o resultado do teorema acima também pode ser generalizado, exibindo-se uma sobrejeção contínua entre \mathbb{R} e \mathbb{R}^n .

P_E ser sobrejetiva significa que seu traço passa, ao menos uma vez, por cada ponto do quadrado e, portanto, fazendo t percorrer todo o domínio, teremos o quadrado inteiramente preenchido. Por esse motivo, ela é chamada de **curva de preenchimento de espaço ou SFC** (do inglês, space filling curve). As SFCs nos oferecem uma maneira ordenada de visitar todos os pontos do quadrado apenas variando t .

Dos Teoremas 3 e principal, concluímos que a bijeção e a continuidade, quando consideradas isoladamente uma da outra, não conseguem gerar uma definição de dimensão que concorde com o nosso senso lógico-intuitivo. O que Cantor demonstra (tal demonstração será omitida aqui), é que basta considerá-las mutuamente para se chegar a um conceito satisfatório de dimensão. Isto é, ele mostra que não pode existir uma bijeção contínua entre dois espaços de dimensões diferentes. Tal maneira de caracterizar a dimensão de um espaço, deu origem à uma

das grandes áreas da Matemática: a Topologia. Se for possível criar uma bijeção contínua entre dois espaços, dizemos que eles são topologicamente equivalentes, isto é, do ponto de vista topológico, são indistinguíveis. Caso não seja possível, esses espaços são considerados distintos, ainda que tenham o mesmo número de pontos (como é o caso de \mathbb{R} e \mathbb{R}^2 ou \mathbb{R}^n e \mathbb{R}^p).

2.4 A ideia geométrica da função de Peano

O trabalho de Peano foi totalmente analítico. Mas, o matemático alemão *David Hilbert*, propõe uma representação geométrica da curva de Peano. Essa representação ilustra e evidencia a ideia do preenchimento completo do quadrado. O método é o seguinte:

1. Considere um quadrado inicial. Divida-o em quatro quadradinhos. Dê início à curva traçando 3 segmentos consecutivos, paralelos aos lados do quadrado inicial e com extremos nos pontos centrais dos 4 quadradinhos gerados.

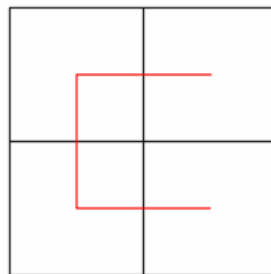


Figura 2.4

2. A cada quadradinho, aplique o passo 1.
3. Gire, no sentido anti-horário, o quadradinho do lado direito superior e, no sentido horário, o quadradinho do lado direito inferior.
4. Traçando 3 segmentos, una as curvas como indicado na figura 2.5.

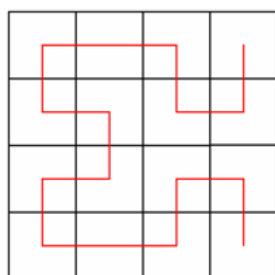


Figura 2.5

Repetindo-se os passos desse algoritmo indefinidamente obtemos a SFC. Este fato é provado por Hilbert, num artigo publicado em 1891, onde ele faz a construção passo-a-passo de uma curva bidimensional, usando uma sequência infinita de curvas finitas. Ele demonstra que a curva obtida é contínua e passa por todos os pontos do quadrado. Como esta curva foi descrita por Peano e geometrizada por Hilbert, ela recebe o nome de Curva de Peano-Hilbert. A figura abaixo mostra a curva de Peano-Hilbert para até 6 iterações.

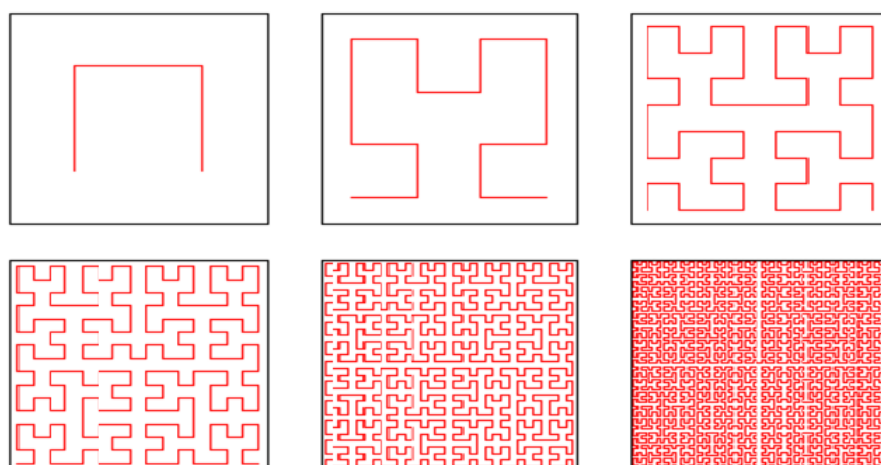


Figura 2.6

A demonstração de Hilbert exige algumas definições além daquelas que já foram apresentadas. Alguns dos resultados utilizados a seguir não foram incluídos no capítulo de noções básicas. Ainda assim, valeremos-nos deles para que o leitor tenha ao menos uma ideia do que foi feito. Ou seja, abandonaremos o rigor matemático e daremos apenas um esboço do procedimento.

Observe que, no algoritmo definido acima, cada iteração faz o mapeamento de alguns pontos do quadrado. Logo, podemos associar a cada iteração uma função, e assim com a repetição do procedimento, obteremos uma sequência de funções. A primeira dessas funções é $f_1 : [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$ cujo traço é a curva representada na Figura 2.4. Sejam I_{00}, I_{01}, I_{10} e I_{11} os quadrados obtidos na primeira divisão. Vemos que a função f_1 faz o mapeamento do intervalo $[0, 1/4]$ no quadrado I_{00} , do intervalo $[1/4, 1/2]$ no quadrado I_{01} , do intervalo $[1/2, 3/4]$ em I_{10} e do intervalo $[3/4, 1]$ no quadrado I_{11} . Mas, assumindo a existência de f_1 , é bastante aceitável que exista também uma função f_2 , tal que, quando dividirmos o quadrado em 16 partes iguais, fará o mapeamento do primeiro intervalo $[0, 1/16]$ no primeiro quadrado $[0, 1/16] \times [0, 1/16]$, do segundo intervalo $[1/16, 2/16]$ no segundo quadrado $[1/16, 2/16] \times [1/16, 2/16]$... e assim por diante. Indutivamente, obtemos uma sequência f_1, f_2, f_3, \dots e é claro que, por construção, cada f_i é contínua. Além disso, dado $t \in [0,1]$, temos que $f_n(t)$ e $f_{n+1}(t)$ pertencem ao quadrado obtido no n -ésimo passo. Logo, a distância entre $f_n(t)$ e $f_{n+1}(t)$ não pode ser maior que a diagonal desse quadrado. Como a cada passo, cada quadrado do estágio anterior é dividido em 4, temos que cada quadrado obtido no n -ésimo passo possui lado $1/2^n$. Logo

$$\|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \leq \sqrt{2} \cdot 1/2^n$$

Assim, pela desigualdade triangular temos

$$\begin{aligned} \|f_{n+m}(t) - f_n(t)\| &= \\ \|f_{n+m}(t) - f_{n+m-1}(t) + f_{n+m-1}(t) + \dots - f_{n+1}(t) + f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_{n+m}(t) - f_{n+m-1}(t) + f_{n+m-1}(t) + \dots - f_{n+1}(t) + f_{n+1}(t) - f_n(t)\| &\leq \\ \|f_{n+m}(t) - f_{n+m-1}(t)\| + \|f_{n+m-1}(t) - f_{n+m-2}(t)\| + \dots + \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \|f_{n+m}(t) - f_{n+m-1}(t)\| + \|f_{n+m-1}(t) - f_{n+m-2}(t)\| + \dots + \|f_{n+1}(t) - f_n(t)\| &\leq \\ \leq \sqrt{2} \cdot 1/2^{n+m-1} + \sqrt{2} \cdot 1/2^{n+m-2} + \dots + \sqrt{2} \cdot 1/2^n \end{aligned}$$

$$\|f_{n+m}(t) - f_n(t)\| \leq \frac{\sqrt{2}}{2^n} (1 + 2^{-1} + \dots + 2^{-(m-1)})$$

temos a soma de uma P.G. e, portanto,

$$\|f_{n+m}(t) - f_n(t)\| \leq 2^{(3/2)-n}$$

ou seja, a sequência $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ é de Cauchy, e portanto, convergente (pois a reta é um espaço completo). Assim, f_n converge para alguma $f : [0,1] \rightarrow [0,1] \times [0,1]$. Mas, a desigualdade acima vale para qualquer valor de t , o que implica que a convergência de f_n é uniforme. Mas, se f_n é uma sequência de funções contínuas que converge uniformemente para f , então, pelo Teorema 2, temos f contínua.

Para entender a sobrejetividade, veja que, por construção, f_i assume valores em todos os quadradinhos obtidos até a i -ésima divisão. Sejam $y \in [0,1] \times [0,1]$ e $f(I)$ o conjunto imagem do intervalo $I = [0,1]$. Tome uma vizinhança de y , isto é, uma bola aberta $B_y(\varepsilon)$ de centro y e raio ε . É claro que podemos construir um quadradinho q inteiramente contido em $B_y(\varepsilon)$ e de lados iguais a $1/2^k$ e paralelos aos lados do quadrado unitário. Se necessário, podemos fazer uma translação de modo que este quadradinho q coincida com um dos quadradinhos obtidos na k -ésima divisão e continue contido em $B_y(\varepsilon)$. Assim, f assumirá algum valor no interior de q . Ou seja, existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) \in q \subset B_y(\varepsilon)$. Portanto, $B_y(\varepsilon) \cap f(I) \neq \emptyset$. Mas, se toda vizinhança de y intersecta $f(I)$, então, y pertence ao fecho de $f(I)$. Mas $I = [0,1]$ é fechado e f é contínua, logo $f(I)$ também é fechado e, portanto, é igual ao seu fecho. Ou seja, y pertence a $f(I)$. Dessa maneira, temos f sobrejetiva.

Como vimos, apesar de Peano ter definido uma função cuja imagem está em \mathbb{R}^2 , ela pode ser facilmente generalizada de modo que sua imagem seja um cubo sólido em \mathbb{R}^3 ou mesmo um hipercubo em \mathbb{R}^n . Abaixo, temos o desenho da curva de Peano-Hilbert num espaço tridimensional.

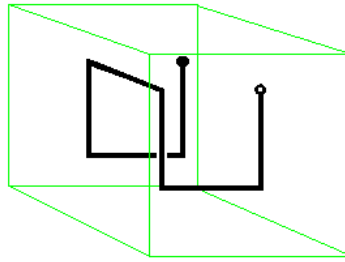


Figura 2.7

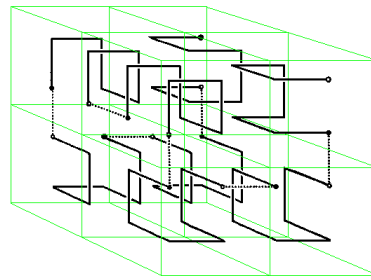


Figura 2.8

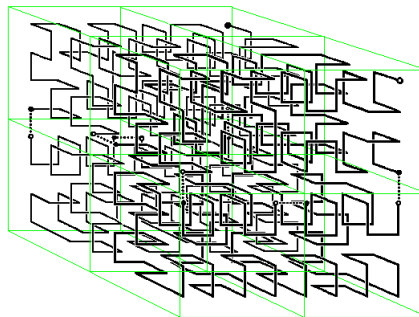
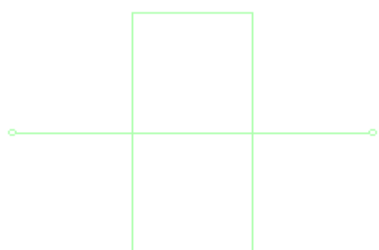


Figura 2.9

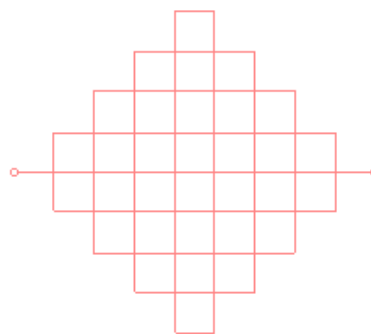
2.5 Outros exemplos de SFCs

O modelo apresentado por Hilbert é apenas uma das formas de se atribuir uma interpretação geométrica à função de Peano. Existem inúmeras outras maneiras de se construir, por meio de processo iterativo, curvas de preenchimento de espaço. Por exemplo, uma segunda forma de se obter a curva de Peano é a seguinte:

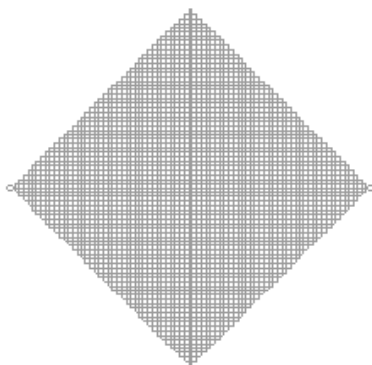
1. Considere um segmento de reta. Divida-o em 3 partes iguais.
2. Sobre o terço médio, construa um retângulo bissectado pelo segmento, formando 2 quadrados de lado igual ao terço que lhes deu origem.
3. Em cada segmento da figura, repita os procedimentos anteriores.



(a) iteração 1



(b) iteração 2



(c) iteração 4

Após Hilbert, muitos outros matemáticos, também desenvolveram SFCs. A seguir, temos alguns exemplos:

Por fim, vejamos também algumas SFCs bidimensionais com suas respectivas correspondentes no espaço.

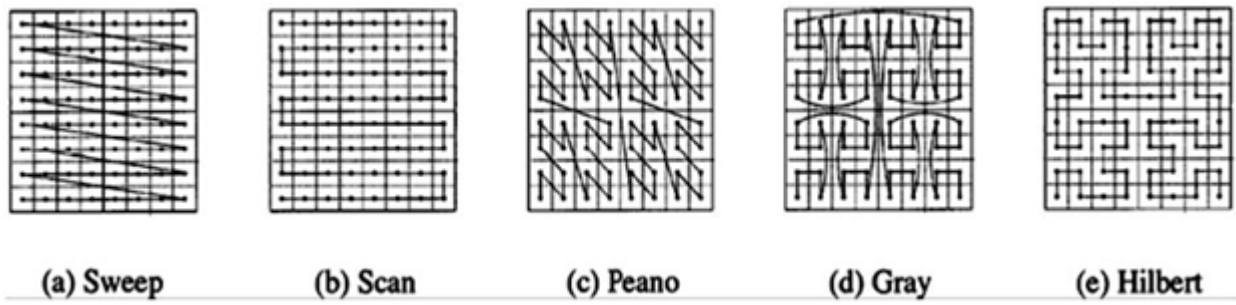


Figura 2.14

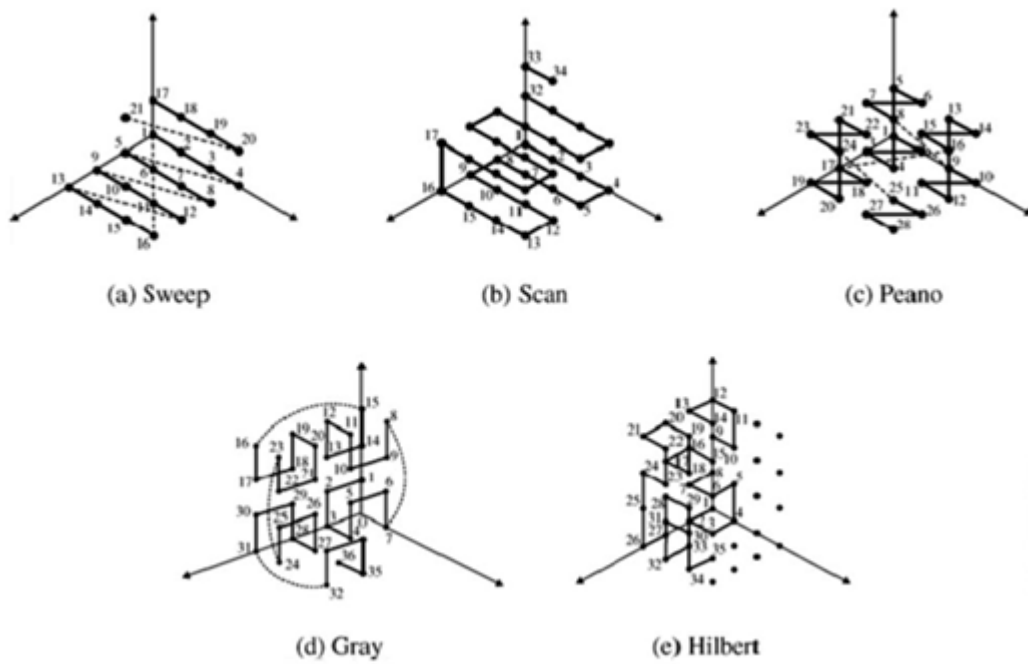


Figura 2.15

Referências Bibliográficas

[1] FIGUEIREDO, Djairo Guedes de. **Análise I**. LTC- Livros Técnicos e Científicos Editora S.A., segunda edição.

[2] McCLEARY, John. **A first course in Topology: continuity and dimension**. Student Mathematical Library, volume 31.

[3] MUNKRES, James. **Topology**. Massachusetts Institute of Technology, segunda edição.

Links relacionados:

[4] <http://www.cut-the-knot.org/doyouknow/hilbert.shtml>

[5] <http://developer.wolframalpha.com/widgets/gallery/view.jsp?id=dce8af15f064d1accb98887a21029b08>

[6] <http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm99/icm14/peano.htm>

[7] <http://www.ic.uff.br/PosGraduacao/Dissertacoes/324.pdf>