

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

**Ensino individualizado da matemática: estudo  
comparativo dos recursos Método Kumon e Khan  
Academy**

Flávia Sampaio Gondim Coutinho

Belo Horizonte – MG  
2015

FLÁVIA SAMPAIO GONDIM COUTINHO

**Ensino individualizado da matemática: estudo comparativo dos recursos Método Kumon e Khan Academy**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo, Instituto de Ciências Exatas - ICEx, Departamento de Matemática, da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Matemática com Ênfase em Cálculo.

Orientadora: Jussara Moreira

Belo Horizonte – MG  
2015

## RESUMO

Os avanços no ensino da Matemática, embora significativos, ainda não colocam o Brasil numa situação de positivo destaque. Pelo contrário, pesquisas de órgãos voltados para Educação registram que a Matemática configura uma das disciplinas de pior desempenho dos alunos brasileiros. Ela permeia desde ações rotineiras, como unidades de medida culinária, até pesquisas de opinião que podem influenciar escolhas presidenciais no país.

No contexto da chamada sociedade da informação em que a velocidade de mudanças, inclusive as associadas a ensino e aprendizagem, é de um “*click*”, os professores enfrentam o desafio de trabalhar o conteúdo da matemática de forma prática, se manter atualizados quanto às novas metodologias que podem ser aplicadas ao ensino e manter os alunos motivados e interessados.

Dentre o fazer pedagógico adotado por diferentes profissionais da matemática está o uso dos recursos didáticos que atuam como mediadores no processo de aprendizagem. Eles, por si somente, não são os maiores responsáveis pela aprendizagem do aluno, mas tem importância no desenvolvimento do trabalho do professor. Maior enfoque vem sendo dado aos recursos que prezam pela aprendizagem individualizada, que respeitam as limitações e potencialidades.

Entre as estratégias de ensino que ganham notoriedade nesta área da matemática, são mencionados o Método Kumon e o Khan Academy. Ambos são pautados no atendimento individualizado de acordo com o ritmo de aprendizagem de cada aluno e com metas a serem atingidas. Neste trabalho relato duas experiências feitas com 16 alunos do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Francisco Campos em que são abordados os recursos Khan Academy, desenvolvido por Salman Khan, que tem como proposta a disponibilização de vídeos que tratam de maneira didática de assuntos de matemática, ciências e economia e cujo uso tem alcançado bons resultados e o Método Kumon.

Esses alunos fazem um curso para prestar a prova do CEFET-MG em novembro de 2015. Entre eles há alunos aplicados e outros com mais dificuldades em matemática.

## SUMÁRIO

RESUMO .....	3
SUMÁRIO .....	4
1 INTRODUÇÃO .....	5
2 JUSTIFICATIVA .....	7
3 REFERENCIAL TEÓRICO .....	7
3.1 A matemática de cada dia: contextualizando a situação do ensino .....	7
3.2 Recursos didáticos usados no ensino da matemática .....	10
3.3 Aplicação das tecnologias de informação e comunicação para o ensino .....	13
3.4 O ensino individualizado .....	13
3.5 O método Kumon .....	13
3.5.1 A metodologia Kumon para ensino da Matemática .....	16
3.6 Khan Academy .....	21
4 EXPERIÊNCIAS .....	25
4.1 A resolução de uma Equação do 2º Grau pelo Trinômio Quadrado Perfeito pela plataforma Khan Academy e pelo método Kumon .....	22
5 CONSIDERAÇÕES FINAIS .....	30
REFERÊNCIAS .....	31
APÊNDICE .....	35

## 1 INTRODUÇÃO

A matemática ocupa um papel de destaque tanto na contribuição para o desenvolvimento tecnológico, quanto na formação de cidadãos capazes e qualificados para tomada de decisão na vida pessoal e profissional. “Um sujeito ativo é um sujeito que compara, exclui, ordena, categoriza, reformula, comprova, formula hipóteses, reorganiza etc. em ação interiorizada (pensamento) ou em ação efetiva (segundo seu nível de desenvolvimento)”. (PIAGET, 1989, p.29).

As dificuldades no ensino-aprendizagem da Matemática no Brasil são históricas. Para Camargo (2009, p.2) há pelo menos duas ordens de questões: as metodológicas, ou seja, aquelas relacionadas a o quê e como ensinar, e outras diretamente ligadas a um preconceito socialmente difundido de que matemática é para "iluminados".

No que tange às questões metodológicas, no contexto da chamada sociedade da informação em que a velocidade de mudanças, inclusive as associadas a ensino e aprendizagem, é de um “click”, os professores enfrentam o desafio de trabalhar o conteúdo da matemática de forma prática, se manter atualizados quanto às novas metodologias que podem ser aplicadas ao ensino e manter os alunos motivados e interessados.

As discussões acerca das melhorias no ensino da matemática vêm sendo objeto de vários trabalhos. Até em função dos resultados dos níveis de aprendizagem da matemática divulgados pela mídia e por instituições que medem esta aprendizagem. Estes são preocupantes, haja vista os registros recentes de que, conforme levantamento divulgado em 2013 pela ONG Todos pela Educação, o percentual de estudantes com rendimento adequado em matemática na rede pública do país caiu de 22% no quinto ano, em 2007, para 12%, quando ela chegou ao último, em 2011. (TAKAHASHI, 2013, p.1).

Estes dados sinalizam a necessidade de aperfeiçoar e buscar novos mecanismos didáticos e pedagógicos que possam contribuir para estimular o ensino e aprendizagem da matemática nas instituições escolares, em especial as públicas.

Estudos sinalizam que o uso de metodologias, para solução de problemas, aliadas às tecnologias da informação e comunicação e auxílio de recursos didáticos

como softwares matemáticos ou jogos didáticos, contribuem positivamente para o processo de aprendizagem da matemática. Maior enfoque vem sendo dado aos recursos que prezam pela aprendizagem individualizada, que respeita as limitações e potencialidades.

Voltando aos conceitos básicos, educação significa construção e participação. Uma aula expositiva não faz isso. "Ao contrário, induz a cópia, porque é cópia". (DEMO, 1996, p. 95).

Dentre as estratégias de ensino que ganham notoriedade nesta área da matemática, são mencionados o método Kumon e o Khan Academy. Ambos são pautados no atendimento individualizado de acordo com o ritmo de aprendizagem de cada aluno e com metas a serem atingidas.

O uso de recursos didáticos não anula o papel do professor, mas pode criar condições para que este atue como mediador na condução do aluno ao aprendizado, estimulando o desenvolvimento de suas potencialidades.

Neste trabalho serão abordados com maior ênfase os métodos Kumon e Khan Academy.

A Khan Academy é uma organização não governamental que tem como objetivo contribuir para a melhoria da educação por meio de vídeo-aulas online disponibilizadas gratuitamente. Inicialmente, o projeto foi implementado no estado de São Paulo em 200 escolas, em parceria com a Fundação Lemann.

O Kumon, além de apoiar-se em um estudo individualizado, proclama o "autodidatismo", o "estudo diário", o "tempo de resolução por bloquinhos", a "auto-correção" e o "estudo com metas", como características essenciais do método. (WILKINS E ARAUJO, 2009, p. 8).

O trabalho é estruturado nos seguintes tópicos: capítulo introdutório em que são abordados os objetivos e a justificativa de desenvolvimento do trabalho. Na sequência, tem-se o levantamento bibliográfico onde são abordados: uma breve contextualização da situação do ensino da matemática no Brasil; os recursos didáticos usados no ensino da matemática, em que inclusive são apresentadas as definições que norteiam os recursos didáticos (neste capítulo é destacada a importância do uso destes recursos pelos professores bem como a importância das tecnologias de informação e comunicação); o ensino personalizado, sua característica e diferencial e apresenta os conceitos e características dos recursos Kumon e Khan Academy.

## 2 JUSTIFICATIVA

A proposta aqui é a de contextualizar a situação do ensino da matemática no Brasil, abordar os recursos didáticos que podem ser usados pelos professores de matemática, apresentar uma visão geral das tecnologias de comunicação e informação que podem ser adotadas pelos profissionais da educação no ensino da matemática e finalmente analisar as vantagens e desvantagens do Método Kumon e Khan Academy aplicados ao ensino da matemática.

O Método Kumon tem objetivos similares ao Khan Academy, mas o método adotado por cada um os diferencia. Este trabalho se justifica pois se propõe a contribuir para elucidar as vantagens e desvantagens destes dois métodos, de modo a auxiliar que profissionais da área de matemática possam ter uma visão crítica acerca destas ferramentas. Além disso, apresenta uma experiência com alunos de escolas públicas procurando identificar o método através do qual eles sentem que conseguem um entendimento mais rápido da matéria. Ambos os métodos podem se apresentar como opção de ensino individualizado na educação matemática.

## 3 REFERENCIAL TEÓRICO

### 3.1 A matemática de cada dia: contextualizando a situação do ensino

Inegavelmente, várias mudanças vêm sendo implementadas para solucionar os problemas do ensino da matemática. Do ponto de vista teórico, Brum (2012, p. 5-8) num trabalho respaldado pela teoria de Fiorentini (1995) destaca as tendências que sinalizam essas mudanças:

**Formalista clássica:** didaticamente, o ensino nessa tendência pedagógica foi livresco e centrado no professor como transmissor do conteúdo.

**Tendência Empírico-Ativista:** surge a pedagogia como negação da escola tradicional. Na pedagogia nova o professor deixa de ser o elemento fundamental do ensino. Torna-se orientador da aprendizagem e aluno centro da aprendizagem.

**Tendência Formalista Moderna:** não há registro de grandes mudanças nessa tendência quanto a relação professor-aluno e o processo de ensino/aprendizagem. O ensino continua autoritário e centrado no professor. Essa proposta visa à formação do especialista matemático.

**Tendência Tecnicista:** a finalidade do ensino da Matemática nessa tendência constituía desenvolver habilidades e atitudes computacionais e manipulativas, capacitando o aluno para a resolução de exercícios ou de problemas-padrão.

**Tendência Construtivista:** na teoria construtivista, a Matemática é uma construção humana constituída por estruturas e relações abstratas entre formas e grandezas reais ou possíveis, ou seja, é um construto resultante da interação dinâmica do homem com o meio físico e social. (FIORENTINI, 1995. p.20).

**Tendência Socioetnocultural:** esta tendência apresenta duas correntes. A primeira procura priorizar discussões e atividades em torno dos temas socioeconômicos e políticos, deixando de lado a efetiva preocupação com o ensino dos conceitos e com o desenvolvimento de pensamentos e habilidades matemáticas. A segunda corrente ampara-se na etnomatemática, onde a Matemática perde aquela visão de ciência pronta e acabada, desconectada do mundo real, como propunha a tendência formalista. Agora ela passa ser vista como um saber prático, relativo, não tão universal - mas dinâmico - produzido histórico-culturalmente nas diferentes práticas sociais.

Do ponto de vista prático, embora tenham ocorrido mudanças significativas no ensino da Matemática elas não foram suficientes para suprir as dificuldades enfrentadas pelos estudantes dessa disciplina. A Matemática ainda é uma das disciplinas que mais elimina e exclui qualquer indivíduo dos concursos e vestibulares, bem como registra baixo desempenho segundo pesquisa desenvolvida pelo Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB). Na figura 1 são apresentados os dados analisados entre 1995 e 2005.

Tabela – Abrangência da amostra do SAEB – Brasil – 1995-2005

Ciclo	Escolas	Alunos			
		4ª série EF	8ª série EF	3ª série EM	Total
1995	2.839	30.749	39.482	26.432	96.663
1997	1.933	70.445	56.490	40.261	167.196
1999	6.798	107.657	89.671	82.436	279.764
2001	6.935	114.512	100.792	72.415	287.719
2003	5.598	92.198	73.917	52.406	218.521
2005	5.940	83.929	66.353	44.540	194.822

Tabela 1 - Brasil - Proficiências do SAEB 1995 - 2005

Série	Disciplinas	1995	1997	1999	2001	2003	2005
4ª Ensino Fundamental <sup>(a)</sup>	Português	188.3	186.5	170.7	165.1	169.4	172.3
	Matemática	190.6	190.8	181.0	176.3	177.1	182.4
8ª Ensino Fundamental <sup>(b)</sup>	Português	256.1	250.0	232.9	235.2	232.0	231.9
	Matemática	253.2	250.0	246.4	243.4	245.0	239.5
3ª Ensino Médio <sup>(b)</sup>	Português	290.0	283.9	266.6	262.3	266.7	257.6
	Matemática	281.9	288.7	280.3	276.7	278.7	271.3

(a) Inclui escolas federais e rurais. As federais nos anos de 1995, 2003 e 2005. As rurais em todos os anos, porém em 1997 não inclui as da Região Norte e em 1999 e 2001 apenas as dos Estados do Nordeste, Minas Gerais e Mato Grosso

(b) Não inclui rurais, inclui federais em 1995, 2003 e 2005

Figura 01 - Fonte: Ministério da Educação:  
[http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/saeb\\_tabelas.pdf](http://portal.mec.gov.br/arquivos/pdf/saeb_tabelas.pdf)

Evidentemente vários fatores contribuíram e contribuem para isto: “pré-conceito de que a Matemática é difícil, formação inadequada dos professores, uso da metodologia tradicional, pouco incentivo à utilização de novos recursos pedagógicos, falta de contextualização e dificuldades no uso da linguagem matemática”. (SILVA, 2005, p.4).

Cunha (1993, p.178) destaca ainda a influência dos aspectos sociais do ensino de Matemática no Brasil:

O exame dos textos que tratam da Educação Matemática mostra que eles não levam em conta as condições concretas da educação nem dos destinatários principais — os alunos das escolas públicas. Talvez por esta razão, acabam por se polarizar em torno de questões epistemológicas ou de questões didáticas e psicopedagógicas... Sem pretender esgotar o assunto, o conhecimento a que se chegou das práticas escolares, em nosso país, permite afirmar com segurança que a desconsideração das dimensões sociais do ensino, (...) impedirá o sucesso de soluções didáticas e psicopedagógicas, por mais engenhosas que sejam.

A Matemática desempenha importante papel no desenvolvimento cultural da criança e na sua inserção no sistema de referências do grupo ao qual pertence. Contudo, a forma como vem sendo ensinada nas escolas, em geral, através de treinos artificiais e mecânicos, tem provocado grandes danos em relação ao seu aprendizado. (SILVA, 2004, p.2)

O desenvolvimento das tecnologias de comunicação e informação vem revolucionando também a forma de transmissão e recepção do conhecimento nos ambientes escolares, haja vista o crescente número de instituições escolares voltadas para o ensino à distância.

Acerca da formação dos profissionais que hoje atuam no ensino da matemática, destaca-se que os atuais professores, em geral, foram formados em um contexto social e tecnológico diferente, são da geração “rádio/TV”, em que interação sujeito/tecnologia era restrita, e hoje atuam profissionalmente na formação de alunos da geração “internet”, com perfil diferente, acostumados a interagir com a tecnologia. (BORBA E PENTEADO, 2001)

Paulo Freire (1990, p.65) diz que “o ato educativo deve ser sempre um ato de recriação, de re-significação de significados”. Conhecer e entender os recursos didáticos que podem ser aplicados à educação pode contribuir para que os professores consigam despertar em seus alunos maior interesse pela matemática, rompendo com o “estigma” de que se trata de uma disciplina complexa e de difícil aprendizagem, bem como recriando novas formas de educar.

### **3.2 Recursos didáticos usados no ensino da matemática**

Os recursos didáticos envolvem os elementos e as estratégias que podem ser utilizados pelo professor para mediar e estimular o processo de ensino e de aprendizagem. Os recursos didáticos podem ser enquadrados num grupo de “componentes pedagógicos”, que respaldam a atuação do professor. Freitas (2007, p.15) apresenta as seguintes definições:

- O termo “**didática:**” encontra duas definições distintas, bastante usuais. A primeira, que situa a didática como uma das disciplinas da Pedagogia, estuda os componentes do processo: conteúdos, ensino e aprendizagem. Outra definição, é a que considera a didática como o conjunto de princípios e técnicas que se aplicam ao ensino de qualquer componente curricular, estabelecendo normas gerais para o trabalho docente, a fim de conduzir a aprendizagem.

- **Recursos didáticos:** recursos que podem tornar a ação educativa mais fácil: são os materiais e equipamentos didáticos (ou tecnologias educacionais);

- **Os materiais e equipamentos didáticos** são todo e qualquer recurso utilizado em um procedimento de ensino, visando à estimulação do aluno e à sua aproximação do conteúdo.

- O **método** é, em linhas gerais, um conjunto de técnicas de ensino, cuidadosamente organizadas com um fim específico (objetivo).

- A **técnica** é um tipo de saber que se aplica, normalmente, com instrumentos e ferramentas úteis ao processo ensino e aprendizagem.

- As **estratégias** de ensino são o modo de organizar o saber didático, apresentando diversas técnicas e recursos que possibilitem o alcance dos objetivos propostos para a atividade.

Acerca do uso destes “componentes pedagógicos” apresentados por Freitas, Piletti (1988, p. 281) destaca que o uso isolado ou em conjunto dos diferentes materiais didáticos existentes na escola, podem oferecer ricos estímulos aos alunos para a aprendizagem, do ponto de vista da motivação, facilidade de fixação e compreensão, desenvolvimento de processos mentais, experimentação concreta. Destaca-se que todas estas menções são fundamentais no processo de aprendizagem da matemática, já que, por meio do ensino da Matemática, desenvolvem-se o raciocínio lógico, a criatividade e a capacidade do aluno de resolver problemas. Na Figura 2 são apresentados alguns materiais e equipamentos que são mais amplamente usados nas escolas brasileiras e em todos os componentes curriculares e em todas as modalidades do ensino, além de terem um custo relativamente baixo.

CLASSIFICAÇÃO BRASILEIRA DOS RECURSOS AUDIOVISUAIS		
Recursos visuais	Recursos auditivos	Recursos audiovisuais
- Álbum seriado	- Aparelho de som	- Filmes
- Cartazes	- Discos	- Diapositivos e diafilmes com som
- Exposição	- Fitas cassete	- Cinema sonoro
- Fotografias	- CDs	- Televisão
- Flanelógrafo	- Rádio	- Videocassete
- Gráficos	- CD-ROM	- Programas para computadores com som
- Gravuras		- Aparelho de DVD
- Mapas		- Computador
- Modelos		
- Mural		
- Museus		
- Objetos		
-Quadro de giz		
- Quadros		
- Transparências		

Fonte: Maria Rosângela Mello – CRTE Telêmaco Borba

Figura 02 - Fonte: Ministério da Educação:  
<http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/profunc/equipamentos.pdf>

Santos (2005) alerta que na manipulação de um material didático a ênfase não recai sobre os objetos e sim sobre as operações que com eles possam ser realizadas e que eles sozinhos não “revolucionam” o ensino, mas aliados à educação como um todo e dependendo de como eles forem utilizados pelos docentes e discentes no processo educativo, podem contribuir para um resultado positivo.

O Parâmetro Curricular Nacional de Matemática (1997) complementa que os recursos têm um papel importante no processo de ensino aprendizagem. Contudo, eles precisam estar integrados a situações que levem ao exercício da análise e da reflexão, em última instância, a base da atividade Matemática.

O uso inadequado de um recurso didático pode resultar no que se chama, “inversão didática”, isso acontece quando o material utilizado passa a ser visto como algo por si mesmo e não como instrumento que auxilia o processo de ensino e de aprendizagem, um exemplo disso, seria um professor que deve ensinar matemática com o uso do ábaco apenas deixar as crianças brincarem com o objeto sem resgatar a historicidade do mesmo e sua importância para o ensino da matemática. (SOUZA, 2007, p.113).

Sob esta ótica, os recursos didáticos são mediadores já que possibilitam uma efetiva relação pedagógica de ensino-aprendizagem. Eles não substituem o papel do

professor. Esta visão tem que ser entendida pelos profissionais da educação e ser transmitida aos alunos.

### **3.3 Aplicação das tecnologias de informação e comunicação para o ensino**

O desenvolvimento das tecnologias de comunicação e informação, impulsionadas a partir da década de 90, pela expansão do uso da internet, passando pelo desenvolvimento da área de telefonia móvel e redes sociais, tem ocasionado mudanças que abrangem desde a economia até padrão de comportamento e educação.

No âmbito da Educação, o uso dos recursos tecnológicos sempre esteve presente, entretanto, no contexto atual de intenso compartilhamento de informações, o ensino e aprendizagem ganha um viés diferente, demandando reestruturações e adaptações que vão além do espaço físico das instituições escolares, passam também pela didática dos profissionais da educação.

“As Tecnologias da Informação e da Comunicação e a nova situação mundial exigem a chamada Educação Continuada, recorrendo a uma reformulação da Educação de forma a possibilitar a adaptação do educando às novas tecnologias e às necessidades de mercado, de modo muito ágil e em curto prazo”. (GUIMARÃES, 2007, p.141).

Dentre o fazer pedagógico adotado por diferentes profissionais da matemática está o uso dos recursos midiáticos, das tecnologias de informação que contribuem para o aprender colaborativo e interativo. É a sala de aula se estendendo para fora da escola com o emprego de novas tecnologias que qualificam e respaldam a aprendizagem.

### **3.4 O ensino individualizado**

A forma de ensino que, em sua maioria, vigora nas escolas brasileiras é voltada para aprendizagem direcionada de um grupo diversificado de alunos. Há instituições, inclusive, em que os professores lecionam numa mesma sala de aula com alunos de séries diferentes. Não se pode negar que fica difícil para os alunos

progredirem numa mesma velocidade, num contexto de grandes diferenças.

O método de ensino é o meio, o caminho para se alcançar objetivos. Na educação há linhas metodológicas diferentes e que, por conseguinte, trazem resultados diferentes. A adoção do método está atrelada à tendência pedagógica definida por cada instituição de ensino. De acordo com Vilarinho (1985, p. 52) os métodos de ensino apresentam três modalidades básicas:

- *Métodos de ensino individualizado*: a ênfase está na necessidade de se atender às diferenças individuais, como por exemplo: ritmo de trabalho, interesses, necessidades, aptidões, etc., predominando o estudo e a pesquisa, o contato entre os alunos é acidental.
- *Métodos de ensino socializado*: o objetivo principal é o trabalho de grupo, com vistas à interação social e mental proveniente dessa modalidade de tarefa. A preocupação máxima é a integração do educando ao meio social e a troca de experiências significativas em níveis cognitivos e afetivos.
- *Métodos de ensino sócio-individualizado*: procura equilibrar a ação grupal e o esforço individual, no sentido de promover a adaptação<sup>1</sup> do ensino ao educando e o ajustamento deste ao meio social.

Para Turra et al (1989) "as técnicas de ensino representam maneiras particulares de organizar as condições externas à aprendizagem, com a finalidade de provocar modificações comportamentais desejáveis no aluno". A autora classifica em: técnicas de ensino em grupo e técnicas de ensino individualizado.

Pimentel (1998, p.3) define estes métodos como:

- Individual: é dirigido a um único indivíduo. Em sentido puro, este método de ensino ocorre quando um professor se ocupa de um único aluno. Um exemplo do ensino individual é o preceptor.
- Ensino Massivo: É planeado em função de um hipotético aluno médio, considerando-se a classe como um todo homogêneo.
- Ensino Personalizado: é a adequação das ações educativas às condições físicas, mentais, afetivas e sociais de cada indivíduo, diferenciado dos restantes pelos caracteres da sua singularidade.

Para Not (1993) individualizar o ensino é adaptá-lo a cada indivíduo, isto é, ao conjunto dos traços que o definem.

Quando o ensino é comum a todos, ele é adaptado à classe, isto é, a uma coletividade de crianças da mesma idade física. As tarefas são as mesmas para todos, sem possibilidade de escolha pelos indivíduos, nem de adaptação a cada um: um trabalho individual não é o mesmo de trabalho individualizado. Trata-se um ensino indiferenciado dado um grupo de alunos mais ou menos arbitrária e empiricamente constituído. (NOT, 1993, p.113)

A análise da prática pedagógica tem demonstrado que só serão possíveis mudanças significativas na educação brasileira, à medida que o professor compreender a razão de ser da sua prática e uma clara opção política acerca do seu ato pedagógico.

### **3.5 O Método Kumon**

Segundo registro na literatura, o Método Kumon foi criado no Japão em um cenário de pós-guerra na década de 1950 pelo professor de matemática Toru Kumon, com uma justificativa, segundo ele, de ajudar seu filho na disciplina de matemática.

Atualmente as escolas de Kumon estão presentes nos cinco continentes e seu método é aplicado em 45 países para mais de 4 milhões de alunos. A expansão do método se deu a partir de 1956, quando foi aberta a primeira unidade do Kumon, na cidade de Moriguchi (Osaka), tendo como orientadora a Sra. Teiko, sua esposa. Foi então que em 1958 fundou o Kumon - Instituto de Educação, que através do seu método de estudo individualizado contribuiu para desenvolver um grande número de alunos brilhantes.

No Brasil, as atividades pedagógicas desse método iniciaram-se em 1977, na cidade de Londrina/PR, sendo a primeira unidade da América do Sul. Atualmente, há no Brasil 1.700 unidades oferecendo o curso de matemática.

De acordo com informações do site Kumon Brasil 2013 o Método Kumon possui quatro características:

- ✓ Individualizado, conforme a capacidade: o Método Kumon não se prende à idade ou série escolar. O aluno estuda no ponto mais adequado à sua capacidade, podendo avançar além dos conteúdos da sua série escolar.
- ✓ Avançar pelo autodidatismo: o que se valoriza é a capacidade de aprender por si. O aluno estuda lendo, pensando, resolvendo o material com as próprias forças, avançando por meio do estudo autodidata. A capacidade de chegar sozinho às respostas se transformará, por fim, na capacidade de desafiar-se e buscar seus sonhos e metas.

- ✓ Material didático que evolui em ritmo suave: o material didático do Método Kumon é basicamente composto por exercícios e está estruturado para que o início seja feito com conteúdos fáceis e o grau de dificuldade avance de modo suave. Tendo conteúdo adequado à sua capacidade, o aluno é estimulado a resolver sozinho as questões, refletindo e pensando sobre os questionamentos, usando como base seu próprio conhecimento.
- ✓ O papel do orientador é o de descobrir o que cada um consegue fazer e expandir o potencial ao máximo. Ele observa a habilidade acadêmica, a personalidade e o sentimento de cada aluno para oferecer o estudo mais adequado a cada um, estimulando sempre o desenvolvimento de sua autonomia e capacidade.

### **3.5.1 A metodologia Kumon para o ensino da Matemática**

Para o ensino da matemática, o método é estruturado a partir da divisão do conteúdo em estágios. O primeiro é o 7A e o último é O.

Ao chegar a uma unidade, o aluno é submetido a um Teste Diagnóstico elaborado pelo Kumon para avaliar qual será o seu ponto de partida, o qual oscila de acordo com a idade e os conhecimentos já adquiridos. O aluno realiza o teste correspondente a uma série anterior à sua se estiver no primeiro semestre e se estiver no segundo semestre deve fazer o teste equivalente à sua série atual. O aluno começa estudando em um “ponto de partida fácil”, ou seja, a partir de conteúdos que domina e conhece. Isto lhe permite sentir o prazer de aprender e a ter autoconfiança.

O estudante deve anotar o horário de início do teste e procurar resolvê-lo sozinho. O professor-orientador da Unidade, com o gabarito do Teste em mãos, corrige e o mostra ao aluno o resultado.

Como critério de avaliação dos estágios, aplica-se o chamado Teste de Assimilação para todos os alunos, da pré-escola aos adultos.

O Teste abrange todos os conteúdos trabalhados no estágio e há um gráfico com o tempo gasto para resolução e a quantidade de acertos do aluno, classificando o desempenho do estudante em Grupos 1, 2, 3 ou "Abaixo". É exigido que o aluno

alcance os Grupos 1 ou 2, caso contrário, o professor-orientador da Unidade verifica quais questões não foram bem compreendidas e sugere ao aluno que refaça os bloquinhos referentes a esses conteúdos.

Caso a classificação do estudante seja abaixo dos Grupos 1, 2 ou 3, é preciso revisar metade do estágio ou aplicar novamente o Teste num outro momento. Se o aluno tiver uma boa pontuação no Teste, significa que está apto para iniciar o próximo estágio. O professor-orientador explica quais conteúdos serão trabalhados e "prepara" o aluno para mais uma etapa de seu estudo. O site do Kumon Brasil 2013 relata a rotina de estudo nas unidades Kumon:

- Periodicidade: duas vezes por semana;
- Distribuição do material: ao entrar na unidade, o aluno irá retirar sua pasta individual com o material didático;
- Entrega das lições feitas em casa: o aluno entregará o material estudado em casa para que o orientador (ou o auxiliar) da unidade verifique as lições. É analisado o progresso do estudo feito na unidade até a última aula e as lições feitas em casa. A partir destas informações é entregue ao aluno material na quantidade e no grau de complexidade mais adequado à capacidade percebida naquele momento;
- Estudo do material didático: o aluno passará, então, a resolver os exercícios do material;
- Atribuição de notas: depois de resolvido o material, o orientador (ou o auxiliar) fará a verificação e atribuirá notas aos exercícios realizados. Caso haja erros, ao invés de ensinar como a questão deve ser resolvida, o orientador irá direcionar o aluno para que ele mesmo consiga perceber a maneira de corrigi-los sozinho;
- Nova tentativa de resolução dos exercícios errados, até chegar à nota 100: o aluno tentará resolver o exercício errado para conseguir a nota máxima: 100. A conquista da nota 100 e solução dos exercícios faz com que o aluno se

sinta realizado, seguro de que conseguiu pela sua própria capacidade.

- Direcionamento do orientador: finalizada a lição do dia, o aluno será aconselhado pelo orientador (ou auxiliar) sobre os estudos seguintes.

Na figura 3, vemos exercícios dos estágios 4A e 3A que são dados para alunos da pré-escola.

4A101

4A101a KUMON Números até 30

Nome: \_\_\_\_\_ Idade: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_

1 Qual o número de maçãs? Escreva no quadro.



Quantas?



Orientação aos pais:

- Invenção dos 10a e 20a
- 10) usar completar a tabela ilustrada de 50 peças em até 7 minutos;
- 20) usar completar a tabela ilustrada de 100 peças antes de terminar o estágio 4A.
- Estimular a prática a contagem oral, gradualmente, até no mínimo 200 antes de terminar o estágio 4A.

3A14

3A14a KUMON Adicionando | Parte I (até 14 + 1)

Nome: \_\_\_\_\_ Idade: \_\_\_\_\_ Data: \_\_\_\_\_ Nome: \_\_\_\_\_

Escreva os números nos quadros:

(1)  $2 \longrightarrow \boxed{3}$

$2 + 1 = \boxed{3}$

Dois mais um é igual a três.

(2)  $3 \longrightarrow \boxed{4}$

$3 + 1 = \boxed{4}$

Tês mais um é igual a quatro.

(3)  $5 \longrightarrow \boxed{\phantom{0}}$

$5 + 1 = \boxed{\phantom{0}}$

© 2008 Kumon Institute of Education. Printed in Brazil

Figura 03 - Fonte: Método Kumon:

<http://estimulacaoinfantil.blogspot.com.br/2012/12/matematica-kumon-para-pre-escolares.html>

Na figura 4, vemos exercícios dos estágios 3A, 2A e A que são dados para alunos a partir do 1º ano do Ensino Fundamental ou mesmo para alunos menores que já tenham capacidade para resolvê-los.

The figure shows three Kumon worksheets. The first, 2A131a, is titled 'Subtraindo 1' and includes an example  $2 - 1 = 1$  and six subtraction problems:  $3 - 1 = 2$ ,  $4 - 1 = 3$ ,  $5 - 1 =$ ,  $6 - 1 =$ ,  $7 - 1 =$ , and  $8 - 1 =$ . The second, 3A81a, is titled 'Adição 1 - Parte 2 (AM 18 + 1)' and includes six addition problems:  $2 + 1 =$ ,  $3 + 1 =$ ,  $5 + 1 =$ ,  $6 + 1 =$ ,  $8 + 1 =$ , and  $9 + 1 =$ . The third, A24a, is titled 'Adição 3 (Soma até 15)' and includes ten addition problems:  $7 + 2 =$ ,  $5 + 4 =$ ,  $4 + 6 =$ ,  $8 + 4 =$ ,  $6 + 5 =$ ,  $3 + 7 =$ ,  $5 + 8 =$ ,  $6 + 6 =$ ,  $4 + 9 =$ , and  $8 + 5 =$ .

Figura 04 - Fonte: Método Kumon: <http://estimulacaoinfantil.blogspot.com.br/2012/12/matematica-kumon-para-pre-escolares.html>

Na figura 5, há exercícios de conteúdos desde os estágios iniciais, até de nível superior.

The figure shows four Kumon worksheets. The first, 4A8B, is titled 'Exercícios de traçado dos números 1' and features a cartoon monkey and the number 8. The second, B91a, is titled 'Adição de números de 3 algarismos-3' and includes six addition problems:  $235 + 149$ ,  $376 + 131$ ,  $235 + 180$ ,  $376 + 138$ ,  $298 + 315$ , and  $345 + 587$ . The third, K43a, is titled 'Máximo e Mínimo de Funções Quadráticas 1' and includes a graph of a parabola and a table of values. The fourth, M111a, is titled 'Teorema de Adição 1' and includes a diagram of a triangle and a table of values.

Figura 05 - Fonte: Método Kumon: <http://metodokumon.com.br>

Na figura 6 há exercícios de conteúdos equivalentes ao 7º ano (estágio E), ao 9º ano (estágio G) e ao 1º ano do nível médio (estágio H).

**E4 | a** KUMON Adição de Frações 3

Nome \_\_\_\_\_ Data \_\_\_\_\_

(5 pontos)

Transforme as seguintes frações usando os denominadores indicados observando os exemplos:

Ex.  $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$      $\frac{2}{5} = \frac{6}{15}$

(1)  $\frac{1}{2} = \frac{\quad}{4}$     (8)  $\frac{1}{2} = \frac{\quad}{8}$

(2)  $\frac{1}{3} = \frac{\quad}{12}$     (9)  $\frac{1}{3} = \frac{\quad}{9}$

(3)  $\frac{1}{4} = \frac{\quad}{8}$     (10)  $\frac{2}{3} = \frac{\quad}{9}$

(4)  $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{8}$     (11)  $\frac{1}{5} = \frac{\quad}{10}$

(5)  $\frac{1}{5} = \frac{\quad}{20}$     (12)  $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{10}$

(6)  $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{20}$     (13)  $\frac{3}{4} = \frac{\quad}{12}$

(7)  $\frac{4}{5} = \frac{\quad}{20}$     (14)  $\frac{1}{6} = \frac{\quad}{12}$

**E4 | b**

Adicione observando os exemplos:

Ex.  $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{2}{8} = \frac{3}{8}$

Para efetuar a adição de frações, reescreva as frações de modo que os denominadores fiquem iguais.

(1)  $\frac{3}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8} + \frac{\quad}{8} = \frac{\quad}{8}$

(2)  $\frac{5}{8} + \frac{1}{4} = \frac{\quad}{8} + \frac{\quad}{8} = \frac{\quad}{8}$

(3)  $\frac{1}{8} + \frac{3}{4} = \frac{1}{8} + \frac{\quad}{8} = \frac{\quad}{8}$

(4)  $\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{1}{9} + \frac{\quad}{9} = \frac{\quad}{9}$

(5)  $\frac{2}{9} + \frac{1}{3} = \frac{\quad}{9} + \frac{\quad}{9} = \frac{\quad}{9}$

(6)  $\frac{1}{9} + \frac{2}{3} = \frac{1}{9} + \frac{\quad}{9} = \frac{\quad}{9}$

**G43a** KUMON Números positivos e negativos - 3

Nome \_\_\_\_\_ Data \_\_\_\_\_

(10 pontos)

Efetue observando os exemplos. Preencha os quadros com + ou -

Ex.  $-1\frac{1}{4} + (-\frac{3}{5}) = -1\frac{1}{4} - \frac{3}{5} = -1\frac{5}{20} - \frac{12}{20} = -1\frac{17}{20} = -1\frac{17}{20}$

$-1\frac{1}{4} - (-\frac{3}{5}) = -1\frac{1}{4} + \frac{3}{5} = -1\frac{5}{20} + \frac{12}{20} = -\frac{25}{20} + \frac{16}{20} = -\frac{9}{20}$

(1)  $-1\frac{1}{3} + (-\frac{1}{6}) = -1\frac{\quad}{6} - \frac{1}{6} = -1\frac{\quad}{6}$

(2)  $-1\frac{1}{3} - (-\frac{1}{6}) = -1\frac{\quad}{6} + \frac{1}{6} = -1\frac{\quad}{6}$

(3)  $\frac{1}{3} + (-\frac{1}{6}) = \frac{\quad}{6} - \frac{1}{6} = \frac{\quad}{6}$

(4)  $\frac{1}{3} - (-\frac{1}{6}) = \frac{\quad}{6} + \frac{1}{6} = \frac{\quad}{6}$

(5)  $-1\frac{1}{2} + (-\frac{2}{3}) = -1\frac{\quad}{6} - \frac{4}{6} = -1\frac{\quad}{6}$

(6)  $-1\frac{1}{2} - (-\frac{2}{3}) = -1\frac{\quad}{6} + \frac{4}{6} = -1\frac{\quad}{6}$

(7)  $1\frac{1}{2} + (-\frac{2}{3}) = 1\frac{\quad}{6} - \frac{4}{6} = 1\frac{\quad}{6}$

(8)  $1\frac{1}{2} - (-\frac{2}{3}) = 1\frac{\quad}{6} + \frac{4}{6} = 1\frac{\quad}{6}$

**H2 | a** KUMON Equações literais - 1

Nome \_\_\_\_\_ Data \_\_\_\_\_

(8 pontos)

Resolva as equações abaixo sendo  $x$  a incógnita. Observe os exemplos.

Ex.  $x + 3 = b$      $a = b - x$  (Adicione  $x - x$  aos dois membros.)

[Res.]  $x = b - 3$     [Res.]  $x = -a + b$

(Atenção!) A incógnita é o valor desconhecido da equação. As outras letras representam números quaisquer que devem ser considerados como conhecidos.

(1)  $x + 5 = b$     (6)  $3 = a - x$

[Res.]  $x = b - 5$     [Res.]  $x = a - 3$

(2)  $x - 4 = b$     (7)  $b = a - x$

[Res.]  $x = b + 4$     [Res.]  $x =$

(3)  $x + b = a$     (8)  $-b = a - x$

[Res.]  $x = a - b$     [Res.]  $x =$

(4)  $x + a = b$     (9)  $-a = b - x$

[Res.]  $x = -a + b$

(5)  $x - a = b$     (10)  $0 = a - x$

Figura 06 - Fonte: Método Kumon: <http://metodokumon.com.br>

Conforme Valino (2010) o curso de Matemática por meio do Kumon, compõem-se em 21 estágios, que vão do 7A ao O, sendo que cada estágio é composto por 200 folhas de exercícios, que abordam conteúdos que vão desde o ensino de

quantidade, de sequência numérica (fase pré-escolar) até aplicações de derivadas e integrais (nível superior).

Na Figura 7 é possível ver em resumo os estágios que compõem o curso.



Figura 07 –  
Fonte: [www.kumon.com.br](http://www.kumon.com.br)

### 3.6 Khan Academy

A Khan Academy é uma organização sem fins lucrativos, que hoje é um sistema inovador de ensino, testado internacionalmente. (GALASTRI, 2013). É um projeto educacional, desenvolvido por um norte-americano, Salman Khan, cujo objetivo, nas palavras de seu fundador, é: “Queremos oferecer ensino de classe

mundial, de graça, a qualquer pessoa, em qualquer lugar” (Revista Exame CEO, 2011).

De acordo com informações dos sites Khan Academy e Fundação Lemann, a Khan Academy é sediada no estado da Califórnia, nos EUA, e conta com uma equipe de cerca de 40 pessoas. O conteúdo do site se organiza em três segmentos:

- Biblioteca de vídeos: em português, há aulas de matemática, biologia, química e física, disponíveis gratuitamente no canal oficial do Youtube. Em inglês, são mais de 4 mil vídeos, de vários outros campos do conhecimento.
- Exercícios: plataforma de exercícios de matemática, que conta com um mapa do conhecimento para orientar os estudantes em seu percurso. Em português, a plataforma ainda é restrita para os alunos que trabalham com ela nas escolas e estará aberta, traduzida e gratuita para todos em 2014.
- Relatórios: dados para monitoramento de aprendizagem e desenvolvimento dos alunos, que podem ser visualizados em tempo real pelo professor.

### **3.6.1 Khan Academy nas escolas brasileiras**

No Brasil a adoção da Khan Academy nas escolas públicas se deu por meio da parceria com a Fundação Lemann num projeto voltado para o ensino de matemática para alunos do 3º, 4º e 5º anos de escolas públicas.

A adoção da plataforma pelas escolas públicas brasileiras iniciou-se em São Paulo, Paraná e Ceará, que ensinam matemática por meio da plataforma de exercícios, vídeos e relatórios, adaptada ao português. São mais de 10 mil alunos aprendendo matemática com a ajuda da Khan Academy. Em 2013, a Fundação Lemann firmou uma parceria com a Khan Academy para a tradução da plataforma como um todo. A plataforma estará aberta e disponível em português para o ano letivo de 2014.

Conforme informação do site da Fundação Lemann, para implantação deste projeto, foi criada uma plataforma online de acesso restrito, similar à da Khan Academy em inglês ([www.khanacademy.org](http://www.khanacademy.org)), com vídeos e exercícios em um ambiente de jogo, no qual cada aluno tem um perfil. As atividades realizadas pelos alunos ficam armazenadas em um banco de dados, e os professores podem acessar informações da sua turma por meio de relatórios gerados em tempo real.

O princípio norteador do Khan Academy nas Escolas, com esse conjunto de ferramentas – vídeos, exercícios e relatórios – é a personalização do ensino. Os professores são formados e orientados para utilizar a tecnologia para ensinar os alunos, respeitando o tempo e nível de aprendizagem de cada um, considerando as dificuldades e as demandas individuais. Assim, os professores podem intervir com aqueles que apresentam mais dificuldade ou estimular quem já pode avançar para o próximo assunto.

Na Figura 08 são descritas as etapas para implantação, com ações que passam pela seleção das escolas, sua estruturação física, a formação dos professores, até a implantação de métodos de avaliação dos resultados.



Figura 08 – Fonte: Fundação Lemann  
www.fundacaolemann.org.br

De acordo com Bertolini (2013, p.2) o estágio inicial da aprendizagem na Khan Academy é assistir aos vídeos tutoriais. Estes são divididos em diversas matérias, como Matemática, Química, Economia e até História da Arte. Diferentemente do que ocorre no ensino tradicional, essa etapa não é feita em sala de aula, e sim fora do horário da escola, na casa do aluno.

Os exercícios propostos são interativos e as aulas, interessantes. A tela do computador substitui o quadro negro e a linguagem, leve e divertida, atrai a atenção dos alunos. A nova estratégia já conquistou cerca de 43 milhões de estudantes em todo o mundo, de acordo com dados da Khan Academy, a organização não governamental fundada em 2010 pelo educador. (FRANZIN, 2013, p.2)

No site é oferecida uma série de exercícios interativos a serem realizados em sala, com o professor. Na medida em que o exercício vai sendo concluído, o aluno passa para a próxima fase, como um videogame. Na Figura 09 é feito um resumo do funcionamento da ferramenta.

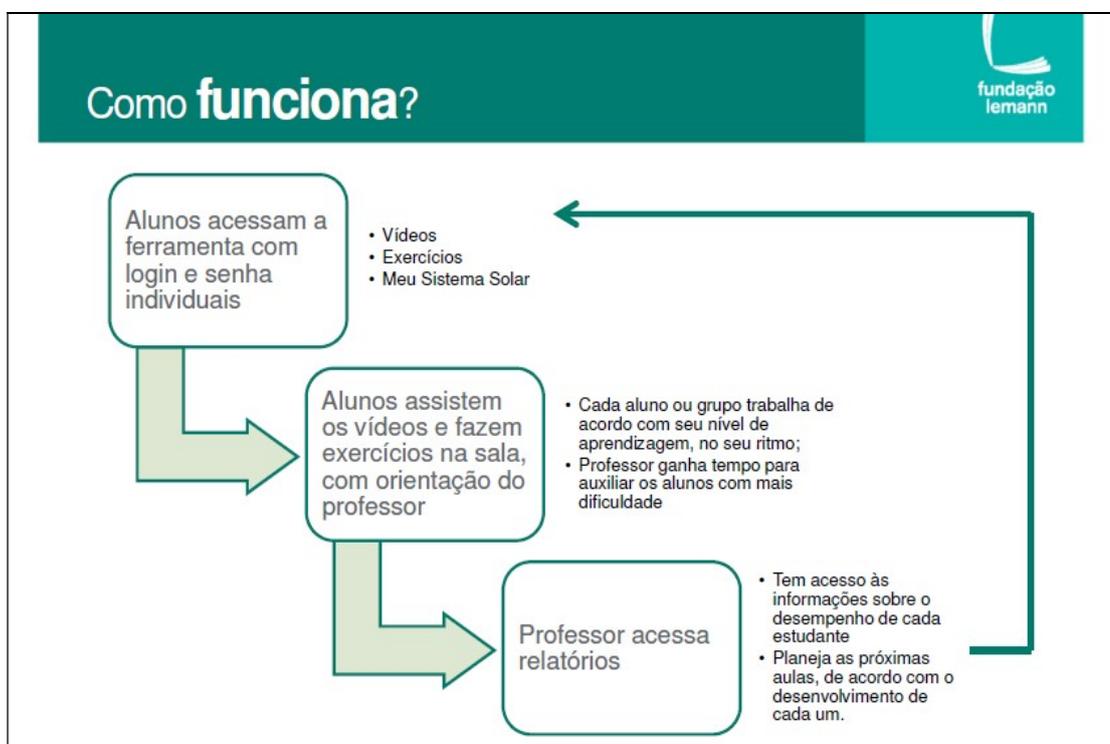


Figura 09 – Fonte: Fundação Lemann  
www.fundacaolemann.org.br

É importante frisar que o Khan Academy nas Escolas não se resume ao uso dos vídeos. Há também uma plataforma de exercícios, onde cada aluno avança de acordo com seu nível de aprendizagem. Os professores e as escolas utilizam a plataforma aliada ao currículo e ao planejamento de aula. Na plataforma, os professores podem monitorar a aprendizagem de cada um dos alunos, para que todos aprendam. Na Figura 10 são apresentados a potencialidade do uso da plataforma Khan Academy.



Figura 10 – Fonte: Fundação Lemann  
[www.fundacaolemann.org.br/khanportugues/perguntas-frequentes/#faq-3681](http://www.fundacaolemann.org.br/khanportugues/perguntas-frequentes/#faq-3681)

Os estudantes desenvolvem suas habilidades ao longo das fases e não necessariamente ao mesmo tempo, o que leva em consideração as particularidades de aprendizagem de cada estudante. Em contrapartida, a ação do professor ocorre durante a fase de exercícios, o qual tem condições de acompanhar e verificar os erros cometidos por cada aluno, suas principais dificuldades e facilidades.

## 4 EXPERIÊNCIA

### 4.1 A resolução de uma Equação do 2º Grau pelo Trinômio Quadrado Perfeito pela plataforma Khan Academy e pelo método Kumon

Com o intuito de comparar uma matéria nos dois métodos, Kumon e Khan Academy, resolvi testá-los com alunos do 9º ano do Ensino Fundamental da Escola Municipal Francisco Campos o tópico Resolução de Equações do 2º Grau utilizando o Quadrado Perfeito.

Primeiro, pedi a 16 alunos que me acompanhassem à Sala de Informática para assistirem a um vídeo, já traduzido pela Fundação Lemann, de uma aula da

Khan Academy. Nas Figuras 11, 12 e 13 são apresentadas partes da aula, em forma de exemplo, da matéria em questão.

Resolver equações de 2.º grau completando o quadrado - Khan Academy em Português (9.º ano)

Completa o quadrado

$$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4$$

$$a = -2$$

$$x^2 - 4x + ? = (x + \frac{a}{2})^2$$

$$2ax \quad a^2 = 4 \quad x^2 + 2ax + a^2$$

$$a = -2$$

Figura 11 – Fonte: Fundação Lemann  
[www.youtube.com/watch?v=VGKwJuO\\_2w4](http://www.youtube.com/watch?v=VGKwJuO_2w4)

Resolver equações de 2.º grau completando o quadrado - Khan Academy em Português (9.º ano)

Completa o quadrado

$$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4 \Leftrightarrow$$

$$a = -2$$

$$x^2 - 4x + 4 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)(x - 2) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x - 2)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \pm 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \quad \vee \quad x = -1$$

www.youtube.com está agora no modo de tela inteira. Sair do modo tela cheia (Esc)

Figura 12 – Fonte: Fundação Lemann  
[www.youtube.com/watch?v=VGKwJuO\\_2w4](http://www.youtube.com/watch?v=VGKwJuO_2w4)

Resolver equações de 2.º grau completando o quadrado - Khan Academy em Português (9.º ano)

Completa o quadrado

$$x^2 - 4x + 4 = 5 + 4 \Leftrightarrow$$

$$a = -2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)(x-2) = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x-2 = \pm 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 2 \pm 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$

$$x^2 - 4x + ? = (x + \frac{a}{2})^2$$

$$2ax \quad a^2 = 4 \quad x^2 + 2ax + a^2$$

$$a = -2$$

$$x^2 - 4x = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x+1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 5 \vee x = -1$$

4:58 / 13:23

Figura 13 – Fonte: Fundação Lemann  
[www.youtube.com/watch?v=VGKwJuO\\_2w4](http://www.youtube.com/watch?v=VGKwJuO_2w4)

Os alunos assistiram com atenção e pediram para assistir novamente, pausando quando acharam necessário.

Pedi que eles resolvessem sozinhos o 1º exemplo dado no vídeo e eles resolveram sem muita dificuldade.

Perguntei se gostaram do vídeo e se voltariam a acessar a ferramenta em outros momentos e em casa. Eles responderam que sim. Que poderiam acessar em casa a qualquer aula e que pausar era muito interessante.

Depois, na aula do dia seguinte, pedi aos mesmos 16 alunos que resolvessem os exercícios propostos nas páginas 133a, 134b, 135b e 136a do bloco do Estágio I do Método Kumon. Nas Figuras 14, 15, 16 e 17 são apresentados os exercícios resolvidos pela aluna Francielle.

I 133a

14. Equação do 2º grau II (8 Pontos)

Resolva as equações, utilizando-se do quadrado perfeito.

(1)  $x^2 + 3x + 1 = 0$   
 [Sol]  $x^2 + 3x = -1$   
 $x^2 + 3x + \frac{9}{4} = -1 + \frac{9}{4}$   
 $(x + \frac{3}{2})^2 = \frac{5}{4}$   
 $x + \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{5}{4}}$   
 $x = \frac{-3 \pm \sqrt{5}}{2}$

(2)  $x^2 - 3x - 3 = 0$   
 $x^2 - 3x + \frac{9}{4} = 3 + \frac{9}{4}$   
 $(x - \frac{3}{2})^2 = \frac{21}{4}$   
 $x - \frac{3}{2} = \pm \sqrt{\frac{21}{4}}$   
 $x = \frac{3 \pm \sqrt{21}}{2}$

(3)  $x^2 + 5x - 2 = 0$   
 $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 2$   
 $(x + \frac{5}{2})^2 = \frac{17}{4}$   
 $x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{17}{4}}$   
 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{17}}{2}$

(4)  $x^2 + x - 6 = 0$   
 $x^2 + x + \frac{1}{4} = 6 + \frac{1}{4}$   
 $(x + \frac{1}{2})^2 = \frac{25}{4}$   
 $x + \frac{1}{2} = \pm \frac{5}{2}$   
 $x = 2, -3$

(5)  $x^2 + 5x - 6 = 0$   
 $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 6$   
 $(x + \frac{5}{2})^2 = \frac{1}{4}$   
 $x + \frac{5}{2} = \pm \frac{1}{2}$   
 $x = -1, -6$

(6)  $x^2 - 7x + 8 = 0$   
 $x^2 - 7x + \frac{49}{4} = \frac{49}{4} - 8$   
 $(x - \frac{7}{2})^2 = \frac{9}{4}$   
 $x - \frac{7}{2} = \pm \frac{3}{2}$   
 $x = \frac{4 \pm 3}{2}$

Figura 14 – Fonte: Método Kumon Estágio I

I 134b

(7)  $x^2 + 4x - 7 = 0$   
 $x^2 + 4x + 4 = 4 - 7$   
 $(x + 2)^2 = -3$   
 $x = -2 \pm \sqrt{-3}$

(8)  $x^2 + 5x - 11 = 0$   
 $x^2 + 5x + \frac{25}{4} = \frac{25}{4} - 11$   
 $(x + \frac{5}{2})^2 = \frac{69}{4}$   
 $x + \frac{5}{2} = \pm \sqrt{\frac{69}{4}}$   
 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{69}}{2}$

(9)  $3x^2 + 5x - 3 = 0$   
 $x^2 + \frac{5}{3}x - 1 = 0$   
 $x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{25}{36} = \frac{25}{36} - 1$   
 $(x + \frac{5}{6})^2 = \frac{61}{36}$   
 $x + \frac{5}{6} = \pm \sqrt{\frac{61}{36}}$   
 $x = \frac{-5 \pm \sqrt{61}}{6}$

(10)  $x^2 + 2ax = b$   
 [Sol]  $x^2 + 2ax + a^2 = a^2 + b$   
 $(x + a)^2 = a^2 + b$   
 $x + a = \pm \sqrt{a^2 + b}$   
 $x = -a \pm \sqrt{a^2 + b}$

(11)  $x^2 + ax = b$   
 [Sol]  $x^2 + ax + (\frac{a}{2})^2 = (\frac{a}{2})^2 + b$   
 $(x + \frac{a}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + b$   
 $x + \frac{a}{2} = \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$   
 $x = -\frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} + b}$

(12)  $x^2 + \frac{b}{a}x = 1$   
 [Sol]  $x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 + 1$   
 $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2}{4a^2} + 1$   
 $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + 1}$   
 $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2}{4a^2} + 1}$

Figura 15 – Fonte: Método Kumon Estágio I

I 135b

(7)  $3x^2 - 7x + 2 = 0$   
 $x^2 - \frac{7}{3}x = -\frac{2}{3}$   
 $x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} = \frac{49}{36} - \frac{2}{3}$   
 $(x - \frac{7}{6})^2 = \frac{25}{36}$   
 $x = \frac{7 \pm 5}{6}$

(8)  $3x^2 - 7x + 1 = 0$   
 $x^2 - \frac{7}{3}x = -\frac{1}{3}$   
 $x^2 - \frac{7}{3}x + \frac{49}{36} = \frac{49}{36} - \frac{1}{3}$   
 $(x - \frac{7}{6})^2 = \frac{37}{36}$   
 $x = \frac{7 \pm \sqrt{37}}{6}$

(9)  $3x^2 - 7x = 0$   
 $x^2 - \frac{7}{3}x = 0$   
 $(x - \frac{7}{6})^2 = \frac{49}{36}$   
 $x = \frac{7 \pm 7}{6}$

(10)  $9x^2 - 12x = 5$   
 $x^2 - \frac{4}{3}x = \frac{5}{9}$   
 $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{4}{9} = \frac{4}{9} + \frac{5}{9}$   
 $(x - \frac{2}{3})^2 = 1$   
 $x = \frac{2}{3} \pm 1$

(11)  $5x^2 + 9x + 3 = 0$   
 $x^2 + \frac{9}{5}x = -\frac{3}{5}$   
 $x^2 + \frac{9}{5}x + \frac{81}{100} = \frac{81}{100} - \frac{3}{5}$   
 $(x + \frac{9}{10})^2 = \frac{21}{100}$   
 $x = -\frac{9 \pm \sqrt{21}}{10}$

(12)\*  $ax^2 + bx + c = 0$  ( $a \neq 0$ )  
 [Sol]  $ax^2 + bx = -c$   
 $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$   
 $x^2 + \frac{b}{a}x + (\frac{b}{2a})^2 = (\frac{b}{2a})^2 - \frac{c}{a}$   
 $(x + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$   
 $x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$   
 $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Figura 16 – Fonte: Método Kumon Estágio I

I 136a

dia \_\_\_\_\_ : as \_\_\_\_\_

nome \_\_\_\_\_

§ 14. Equação do 2º grau II (8 Pontos)

Fórmula Resolutiva da equação do 2º grau

$ax^2 + bx + c = 0 \Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$  Fórmula de Baskara

Utilizando-se da fórmula, resolva as equações do 2º grau.

(1)  $3x^2 + 9x + 2 = 0$   
 [Sol]  $a = 3, b = 9, c = 2$   
 $\therefore x = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4 \times 3 \times 2}}{2 \times 3}$   
 $= \frac{-9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6}$

(2)  $3x^2 + 9x - 2 = 0$   
 $x = \frac{-9 \pm \sqrt{81 + 24}}{6}$   
 $x = \frac{-9 \pm \sqrt{105}}{6}$

(3)  $3x^2 - 9x - 2 = 0$   
 $x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6}$   
 $x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$

(4)  $3x^2 - 9x + 2 = 0$   
 $x = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 24}}{6}$   
 $x = \frac{9 \pm \sqrt{57}}{6}$

(5)  $2x^2 + 7x + 1 = 0$   
 $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 8}}{4}$   
 $x = \frac{-7 \pm \sqrt{41}}{4}$

(6)  $2x^2 - 7x - 1 = 0$   
 $x = \frac{7 \pm \sqrt{49 + 8}}{4}$   
 $x = \frac{7 \pm \sqrt{57}}{4}$

Figura 17 – Fonte: Método Kumon Estágio I

Os alunos resolveram com dificuldade, precisando da minha intervenção com frequência, mas ficaram satisfeitos consigo mesmos, por terem conseguido.

No exercício número 12 da página 135b, os alunos, também, tiveram grande satisfação em perceber que deduziram a fórmula de Bhaskara.

## **5 CONSIDERAÇÕES FINAIS**

Com base nos resultados aqui apresentados podemos inferir que os alunos se identificaram mais com o método Khan Academy, que tem a internet como ferramenta e o acesso rápido e fácil pelo *YouTube*, ferramentas conhecidas e usadas pelos jovens alunos. Como eles podem parar o vídeo, voltar onde não entenderam e verificar como foi realizada a solução do problema, foi mais fácil o entendimento.

O método Kumom, por ser repetitivo, usar ainda lápis e papel, apesar de ser excelente, não é compatível com a realidade com a qual os jovens alunos vivem hoje: acesso rápido, o mundo a um click, games, etc.

De qualquer forma, qualquer um dos métodos pode ser utilizado por professores para propiciar um estudo individualizado de acordo com a faixa etária dos seus alunos, o método Kumom para crianças e o método Khan Academy para adolescentes, porque esses métodos de ensino e aprendizagem da matemática oferecem condições para formar alunos autodidatas, desenvolvendo-lhes potencial e habilidades para resolver conteúdos matemáticos de nível superior à série escolar do educando.

## REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUER, Célia Sandra Carvalho de. **A utilização dos jogos como recurso didático no processo ensino – aprendizagem da matemática nas séries iniciais no estado do Amazonas**. 2009. Dissertação (Mestrado em ensino de ciências na Amazônia). Universidade do Estado do Amazonas, Manaus, 2009. Disponível em: <http://www.pos.uea.edu.br/data/area/titulado/download/14-8.pdf>. Acesso em: 18 jun 2013.

BERTOLINI, Isadora. Por dentro da Khan Academy. 16/01/2013. **Educar para Crescer**. Disponível em: <http://educarparacrescer.abril.com.br/aprendizagem/salman-khan-faz-palestra-brasil-731189.shtml>. Acesso em: 12 maio 2013.

BEZERRA, Francisco Tiago Coelho; ARAÚJO, Leandro Moscoso; BORGES, Péricles de Farias. Monitoria para o ensino e contextualização da matemática para os cursos de agronomia, ciências biológicas e zootecnia do CCA-UFPB. In: **Anais... Encontro de Iniciação à Docência**. Cidade Universitária, 11., 2008 - João Pessoa, PB: Universidade Federal da Paraíba, 2008. p. 1-5. Disponível em: [http://www.prac.ufpb.br/anais/xenex\\_xienid/xienid/monitoriapet/ANAIS/Area4/4CCADCFSM\\_T05.pdf](http://www.prac.ufpb.br/anais/xenex_xienid/xienid/monitoriapet/ANAIS/Area4/4CCADCFSM_T05.pdf). Acesso em: 20 maio 2011.

Brasil. Secretaria da Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática 5ª a 8ª séries – Volume 3** Brasília, MEC, 1997. Disponível em [http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com\\_content&view=article&id=12657:parametros-curriculares-nacionais-5o-a-8o-series&catid=195&Itemid=164](http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_content&view=article&id=12657:parametros-curriculares-nacionais-5o-a-8o-series&catid=195&Itemid=164). Acesso em: 18 jun 2013.

BRUM, Mariza de Andrade. Tendência pedagógica na educação matemática escolar: segundo estudos de Fiorentini. **III EIMAT – Escola de Inverno de Educação Matemática**, 2012. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/sbembrasil/>. Acesso em: 10 Ago 2013.

BULHÕES, Paulo Ney Silva. **Avaliando o processo de ensino/aprendizagem: uma experiência com o estudo individualizado em cursos de graduação na UFRN**. Natal: UFRN - DEPADE/PPGA. Disponível em: [http://www.angrad.org.br/resources/files/modules/producao/producao\\_584\\_201212051834\\_228e9c.pdf](http://www.angrad.org.br/resources/files/modules/producao/producao_584_201212051834_228e9c.pdf). Acesso em: 12 nov. 2013.

D' AMBROSIO, Ubiratan. **Educação Matemática: da teoria à prática**. Campinas: Papirus, 1996.

FIORENTINI, Dario. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. **Zetetiké**. Campinas, UNICAMP, ano 3, n. 4, p. 1-38, nov. 1995.

FIORENTINI, Dario. MIORIM, Maria Ângela – **Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no ensino da matemática**. Boletim SBEM-SP - Ano 4, nº 7. Disponível em: [http://www.matematicahoje.com.br/telas/sala/didaticos/recursos\\_didaticos.asp?aux=C](http://www.matematicahoje.com.br/telas/sala/didaticos/recursos_didaticos.asp?aux=C). Acesso em: 18 jun 2013.

FRANZIN, Adriana. Método Khan propõe revolução no ensino por meio de aulas disponibilizadas na internet. **Portal do Professor**, 2013. Disponível em: <http://www.ebc.com.br/infantil/para-educadores/2013/01/metodo-khan-inova-o-ensino-de-matematica-fisica-quimica-e-biologia> . Acesso em: 12 maio 2013.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da autonomia: saberes necessários a prática educativa**. São Paulo: Paz e Terra, 1996.

FREITAS, Olga. **Equipamentos e materiais didáticos**. Brasília: Universidade de Brasília, 2007.

FUNDAÇÃO LEMANN. Projeto Khan Academy nas escolas. Disponível em: [www.fundacaolemann.com.br](http://www.fundacaolemann.com.br)

GALASTRI, Luciana. A tecnologia pode reinventar a educação? **Revista Galileu**. Disponível em: <http://revistagalileu.globo.com/Revista/Common/0,,EMI328773-17770,00.html>> Acesso em 12 maio 2013.

GRANDO, Regina. Célia; MARCO, Fabiana. F. de. O Movimento da Resolução de Problemas em Situações com Jogo na Produção do Conhecimento Matemática. In: MENDES, Jackeline Rodrigues; GRANDO, Regina Célia. **Múltiplos Olhares: matemática e produção de conhecimento**. São Paulo: Musa Editora, 2007. p. 95-119.

GRANDO, Regina Célia. Recursos didáticos na educação matemática. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. [Anais eletrônicos] Curitiba: SBEM, 2013. Disponível em: [http://sbem.esquiroykinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3239\\_2173\\_ID.pdf](http://sbem.esquiroykinghost.net/anais/XIENEM/pdf/3239_2173_ID.pdf) . Acesso em: 12 maio 2013.

MENDES, Iran Abreu. **Tendências metodológicas no ensino de matemática**. Belém: EdUFPA, 2008.

MOREIRA, M.A. Observações e comentários sobre dois sistemas de instrução individualizada. **Revista Brasileira de Física** , São Paulo, 3(1), p.157-171, 1973.

MELLO, Rosângela Menta. (org). **Metodologia de ensino Colégio Estadual Wolff Klabin**. Disponível em <http://pt.scribd.com/doc/49125815/METODOLOGIA-DE-ENSINO> . Acesso em: 20 maio 2013.

MIGUEL, José Carlos. O processo de formação de conceitos em matemática: implicações pedagógicas. **Educação Matemática**, n.19, São Paulo: UNESP, S.d. Disponível em: <http://www.unesp.br/prograd/PDFNE2005/artigos/capitulo5/alfabetizacaoemmatematica.pdf> . Acesso em: 12 maio 2013.

NOT, Louis. **Ensinando a aprender: elementos de psicodidática geral**. São Paulo: Summus, 1993.

PIMENTEL, JOÃO NOGUEIRA. Revista Millenium online, n. 10, Abril de 1998. Disponível em: [http://www.ipv.pt/millenium/Millenium\\_10.htm](http://www.ipv.pt/millenium/Millenium_10.htm). Acesso em: 12 nov. 2013.

PONTE, J. Pedro. Investigar, ensinar e aprender. Actas do ProfMat 2003 (CD-ROM, pp.25-39). Lisboa: APM. Disponível em: <http://www.ime.usp.br/~iole/GEN5711/Ponte,%20J.P.%20Investigar,%20Ensinar%20e%20aprender.pdf>. Acesso em: 12 Ago de 2013.

PONTE, J, Brocardo, J. e Oliveira, H. **Investigações Matemáticas na Sala de Aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2003.

RANGEL, Mary. **Método de ensino para a aprendizagem e a dinamização das aulas**. São Paulo: Papirus, 2005.

SANTOS, Marcos Pereira dos. **Recursos didático-pedagógicos no processo educativo da matemática: uma análise crítico-reflexiva sobre sua presença e utilização no ensino médio**. Ponta Grossa: UEPG, 2005. Disponível em: [http://www.pitangui.uepg.br/profesp/ppge/dissertacoes/Marcos\\_santos.pdf](http://www.pitangui.uepg.br/profesp/ppge/dissertacoes/Marcos_santos.pdf). Acesso em: 12 Ago de 2013

SILVA, José Augusto Florentino da. **Refletindo sobre as dificuldades de aprendizagem: algumas considerações**. Disponível em: <http://www.ucb.br/sites/100/103/tcc/22005/joseaugustoflorentinodasilva.pdf>. Acesso em: 12 Ago 2013.

SILVA, Vera Lúcia Rodrigues da. A contextualização e a valorização da matemática: representações sociais de alunos do ensino médio. In: **ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**, 8, 2004, Recife, [Anais eletrônicos] Recife: SBEM, 2004. Disponível em: <http://www.sbembrasil.org.br/files/viii/pdf/03/CC52299708804.pdf>. Acesso em: 12 maio 2013.

SOARES, Luís Havelange. **Aprendizagem significativa na educação matemática: uma proposta para a aprendizagem de geometria básica**. 2009. 137f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Centro de Educação, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, 2009.

SOUZA, Jonimar da Silva. A Utilização de Recursos Didáticos no Ensino da Matemática: Uma Experiência Vivenciada nas Séries Iniciais. **Revista Olhar Científico** – Faculdades Associadas de Ariquemes – V. 01, n.2, Ago./Dez. 2010.

SOUZA, Salete Eduardo de. O uso de recursos didáticos no ensino escolar. In: ENCONTRO DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO, 3 [IV JORNADA DE PRÁTICA DE ENSINO, XII SEMADA DE PEDAGOGIA DA UEM], 1, 2007. Universidade Fereal de Maringá, Arq Mudi. 2007; 11(Supl.2): 110-4.

TAKAHASHI, Fábio. Rendimento dos alunos de matemática piora entre o 5º e o 9º ano. **Jornal Folha de São Paulo**, 01/04/2013. Disponível em <http://www1.folha.uol.com.br/educacao>>. Acesso em: 12 jul. 2013.

TURRA, Clódia M. G. et al. **Planejamento de ensino avaliação**. Porto Alegre: Sagra, 1990.

VILARINHO, Lúcia Regina Goulart. **Didática: Temas Selecionados**. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 1985.

## APÊNDICE A

### Relação de sites

<http://www.fundacaolemann.org.br/khanportugues/>

<http://www.kumon.com.br>

<http://porvir.org/porfazer/mais-600-videos-da-khan-academy-em-portugues/20130520>

<http://veja.abril.com.br/acervodigital/?edicao=2254&pg=64>

[https://www.youtube.com/watch?v=VGKwJuO\\_2w4](https://www.youtube.com/watch?v=VGKwJuO_2w4)