

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

JOÃO PEDRO CARVALHO CORRÊA

Matéria Escura e a Anomalia do Momento Magnético do Múon
no Modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$

BELO HORIZONTE
2022

João Pedro Carvalho Corrêa

**Matéria Escura e a Anomalia do Momento Magnético do
Múon no Modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Bruce Lehmann Sánchez Vega

Belo Horizonte

2022

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C824m Corrêa, João Pedro Carvalho.
Matéria Escura e a Anomalia do Momento Magnético do Múon no Modelo
U(1)L μ -L τ / João Pedro Carvalho Corrêa. – 2022.
142 f. : il.

Orientador: Bruce Lehmann Sánchez Vega.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 115-120.

1. Física de Partículas. 2. Matéria Escura. 3. Momento Magnético Anômalo do Múon. I. Título. II. Vega, Bruce Lehmann Sánchez. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 539.12 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente dissertação, intitulada “**Matéria Escura e a Anomalia do Momento Magnético do Múon no Modelo $U(1)_{[L_{\mu\text{on}}-L_{\text{tau}}]}$** ”, de autoria de **JOÃO PEDRO CARVALHO CORRÊA**, submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA** em cinco de setembro de 2022.

Belo Horizonte, 05 de setembro de 2022.

Prof. Bruce Lehmann Sánchez Vega
Departamento de Física/UFMG

Prof. Nelson de Oliveira Yokomizo
Departamento de Física/UFMG

Prof. Juan Carlos Montero Garcia
Instituto de Física Teórica/Unesp



Documento assinado eletronicamente por **Bruce Lehmann Sanchez Vega, Coordenador(a)**, em 06/09/2022, às 11:28, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Nelson de Oliveira Yokomizo, Professor do Magistério Superior**, em 06/09/2022, às 21:08, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **JUAN CARLOS MONTERO GARCIA, Usuário Externo**, em 21/09/2022, às 14:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1739052** e o código CRC **AA561993**.

Referência: Processo nº 23072.253538/2022-91

SEI nº 1739052

Aos meus pais, Ju e Brandão, que me apoiaram desde o momento que dei adeus a nossa cidade no interior e vim para a capital estudar física.

Agradecimentos

Aos meus pais Ju e Brandão por sempre me incentivarem a estudar e me apoiarem nas decisões que tomei na minha vida, e por terem me recebido na casa deles durante a pandemia no início do meu mestrado.

Aos membros da minha família como um tomo por sempre perguntarem como eu estava, se importarem com minha pesquisa e mostrarem interesse nos tópicos que eu estava estudando.

Ao meu orientador Bruce Vega por ter me aceitado como aluno no meio da pandemia, por ter continuado comigo com muita paciência, compreensão e apoio, e por ter me ensinado tanto. Por ter também virado um amigo, um torcedor e um dos maiores incentivadores. Espero ter deixado ele orgulhoso.

Ao grupo de Física de Partículas e Cosmologia da UFMG por ter me dado companheiros de pesquisa e amigos que sempre estiveram lá para me apoiar e entender tudo que eu sentia.

Ao departamento de física da UFMG por estar comigo desde quando iniciei minha graduação e por ter gerado as oportunidades certas para engrandecer o meu ensino, seja com professores, disciplinas e biblioteca.

Aos meus queridos amigos Pedro (Bruni), Bruna e Ana que seguiram comigo desde a época da graduação até esse momento do mestrado e sempre estiveram lá para me apoiar, dividir angustias e desvendar os mistérios da física e da matemática.

A todos os amigos que fiz em Belo Horizonte desde quando mudei até ter passado para o Mestrado por sempre mostrarem interesse em como eu estava e por sempre mostrarem estarem felizes pelo andamento da minha vida.

A duas pessoas próximas e especiais que mesmo não sendo da física estiveram comigo durante todo tempo do mestrado. A Amanda, que ao dividir apartamento comigo, esteve presente a cada evolução da pesquisa, ouviu cada problema meu e sempre deu conselhos excelentes. A Marcell, que ao estar do meu lado desde antes de eu entrar no programa de pós graduação, mostrou apoio nos momentos mais difíceis, me incentivou a buscar toda oportunidade possível e felizmente me fez feliz durante esse período.

Aos professores Juan Carlos Montero Garcia e Nelson de Oliveira Yokomizo por terem feito parte da minha banca de defesa com críticas construtivas que me ajudaram imensamente a melhorar o meu trabalho.

A CAPES pelo suporte financeiro.

Resumo

Existem pelo menos dois problemas em aberto na física de partículas elementares que desafiam nossa compreensão da composição e das interações fundamentais no universo. A primeira é a evidência da existência de um tipo diferente de matéria, conhecida como Matéria Escura, e a segunda é a discordância entre o valor experimental e teórico previsto do momento magnético do múon, conhecido como anomalia do $g - 2$ do múon. Ambos os problemas podem ser resolvidos considerando uma extensão do grupo de simetria de gauge das interações eletrofracas do Modelo Padrão para a simetria $SU(2)_L \otimes U(1)_L \otimes U(1)_{L_\mu - L_\tau}$. O ingrediente chave para resolver esses dois problemas é que o modelo considerado possui uma partícula fermiônica neutra e estável, que produz uma abundância de relíquias de matéria escura de acordo com os experimentos. Esta partícula acopla-se às partículas do Modelo Padrão através de um bóson de gauge Z' que faz uma contribuição extra para a anomalia do $g - 2$ do múon. Desta forma, ambos os problemas estão conectados neste modelo. Nesta dissertação estudamos como os acoplamentos e as massas do modelo podem ser fixados usando resultados experimentais recentes. Ao fazermos isso, concluímos que as massas da matéria escura e do bóson Z' estão na faixa de $1 - 50$ MeV, o que nos dá uma solução mínima para esses problemas intrigantes. Finalmente, o modelo também nos dá uma contribuição para ΔN_{eff} que pode aliviar a tensão na constante de Hubble.

Palavras-chave: Matéria Escura, Momento Magnético Anômalo do Múon, Física Além do Modelo Padrão.

Abstract

There are at least two open problems in elementary particle physics that challenge our understanding of the composition and fundamental interactions in the universe. The first is evidence for the existence of a different type of matter, known as Dark Matter, and the second is the disagreement between the experimental and theoretical predicted value of the muon's magnetic moment, known as the $g - 2$ muon anomaly. Both problems can be solved by considering an extension of the gauge symmetry group of electroweak interactions of the Standard Model to the symmetry $SU(2)_L \otimes U(1)_L \otimes U(1)_{L_\mu - L_\tau}$. The key ingredient to solve these two problems is that the considered model has a neutral and stable fermionic particle, which produces an abundance of dark matter relics according to the experiments. This particle couples to the Standard Model particles through a gauge boson Z' that makes an extra contribution to the muon's $g - 2$ anomaly. In this way, both problems are connected in this model. In this thesis we study how couplings and model masses can be fixed using recent experimental results. In doing so, we conclude that the masses of dark matter and boson Z' are in the range of $1 - 50$ MeV, which gives us a minimal solution to these puzzling problems. Finally, the model also gives us a contribution to ΔN_{eff} that can relieve the tension on the Hubble constant.

Keywords: Dark Matter, Muon's Anomalous Magnetic Moment, Physics Beyond the Standard Model

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	O PROBLEMA DA MATÉRIA ESCURA	17
2.1	Introdução	17
2.2	Evidências	17
2.2.1	Evidências Clássicas	18
2.2.1.1	Zwicky e o Teorema do Virial	18
2.2.1.2	Rubin e o Problema de Rotação das Galáxias	19
2.2.2	O Aglomerado Bala e Raios X de Halos	20
2.2.3	Lentes Gravitacionais	21
2.2.4	Radiação Cósmica de Fundo e a Quantidade de Densidade de Matéria Existente no Universo	23
2.2.5	Tempo para Formação de Estruturas Não Lineares	24
2.3	Candidatos	25
2.3.1	Bárions Escuros	26
2.3.1.1	MACHOs (Massive Compact Halo Objects)	27
2.3.1.2	Buracos Negros Primordiais	27
2.3.2	Matéria Escura como Partícula	27
2.3.2.1	Neutrino	28
2.3.2.2	Supersimetria	28
2.3.2.3	Áxions	29
2.3.2.4	WIMPs	30
2.4	Detecção de Matéria Escura	31
2.4.1	Detecção Direta	31
2.4.2	Experimentos de Detecção Direta	33
2.4.3	Detecção Indireta e seus Experimentos	36
3	COSMOLOGIA E TERMODINÂMICA DO INÍCIO DO UNIVERSO	37
3.1	Introdução	37
3.2	Cosmologia	37
3.2.1	A Métrica FLRW (Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker)	37
3.2.2	Equações de Einstein para a Métrica FLRW	38
3.3	Termodinâmica do Início do Universo	40
3.3.1	Densidades de Partículas, de Energia e de Pressão	40
3.3.2	Número Efetivo de Espécies Relativísticas	43
3.3.3	Entropia	44

3.3.4	Desacoplamento Térmico	45
4	EQUAÇÃO DE BOLTZMANN	47
4.1	Introdução	47
4.2	Equação de Boltzmann	47
4.3	Média Térmica	52
5	A ANOMALIA DO MOMENTO MAGNÉTICO DO MÚON	57
5.1	Introdução	57
5.2	O problema do $g - 2$	57
5.2.1	Valor de a_μ de acordo com o Modelo Padrão	59
5.2.2	Colaboração E821 em Brookhaven	59
5.2.3	Colaboração do Fermilab	60
5.3	Campos de Spin 1/2	61
5.4	O Cálculo da Anomalia feito por Schwinger	63
5.4.1	O Valor de g para Dirac e a Maneira como a Anomalia é Calculada	63
5.4.2	O Resultado Obtido por Schwinger	65
5.5	Cálculo da Anomalia Vinda do Bóson Z	68
6	MODELO $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$	73
6.1	Introdução	73
6.2	O Modelo Padrão	73
6.3	O Modelo Padrão Envolvendo os Léptons	77
6.4	Modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$	82
7	DENSIDADE DE RELÍQUIA E ANOMALIA DO MOMENTO MAGNÉTICO DO MÚON NO MODELO $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$	91
7.1	Introdução	91
7.2	Contribuição do Bóson Z' para a Anomalia do Momento Magnético do Múon	91
7.3	Densidade de Relíquia de Matéria Escura	93
7.4	O Número Efetivo de Espécies de Neutrino	103
8	CONCLUSÃO	111
	REFERÊNCIAS	113
	APÊNDICE A – BASE PARA O CÁLCULO DO ACRÉSCIMO PARA A ANOMALIA (Δa_μ) GERADO PELO BÓSON Z	119
A.1	Denominador	119
A.1.1	Primeiro Denominador	120

A.1.2	Segundo Denominador	121
A.1.3	Terceiro Denominador	122
A.1.4	Quarto Denominador	123
A.2	Numerador	124
A.2.1	Primeiro Numerador	124
A.2.2	Segundo Numerador	128
A.2.3	Terceiro Numerador	135
A.2.4	Quarto Numerador	135
A.3	Integrais	137
A.3.1	Primeira Integral	138
A.3.2	Segunda Integral	138
A.3.3	Terceira Integral	139
A.3.4	Quarta Integral	139

1 Introdução

O Modelo Padrão (MP) da física de partículas vem sendo desenvolvido desde o início do século passado. Ele descreve com bastante sucesso quase toda fenomenologia das interações forte, fracas e eletromagnéticas. Várias previsões feitas por ele foram comprovadas em aceleradores mostrando um bom acordo entre experimento e teoria. Porém existem algumas questões fundamentais, teóricas e experimentais, não respondidas satisfatoriamente pelo Modelo Padrão. Essas questões incluem evidências experimentais que apontam para neutrinos com massa, existência de um tipo de matéria que é nem luminosa e nem bariônica, chamada de matéria escura, e para uma discordância no valor do fator giro magnético do múon g , conhecido como anomalia no momento magnético do múon. Existem também evidências teóricas como o chamado problema CP forte. Dentre todas essas evidências duas delas nos chamam a atenção, a da matéria escura e a anomalia do momento magnético do múon. Ambos problemas são atuais e motivam toda comunidade científica tanto no contexto experimental como no teórico.

O problema da matéria escura surge quando pensamos em uma escala astrofísica e cosmológica. Nesta escala temos a indicação da existência de uma forma de matéria que foge daquela esperada pelo Modelo Padrão, ela não é nem luminosa e nem bariônica. Observações cosmológicas como as da colaboração Planck [1] mostram uma relação em que a quantidade dessa nova forma de matéria representa 25% da composição do Universo e que ela é cinco vezes maior que a composição do Universo representada pela forma de matéria que conhecemos, a bariônica. Então, $\approx 85\%$ da matéria do Universo é feita de um componente não luminoso e pouco interagente chamado de matéria escura.

O interesse por essa nova forma de matéria vem crescendo desde a década de 30 quando Fritz Zwicky [2] ao fazer observações no aglomerado de Coma percebeu que existia ali uma forma de matéria extra que ele não tinha conhecimento, e que por não interagir de maneira eletromagnética não exibia luminosidade. A partir daquele momento essa nova forma de matéria recebeu o nome de matéria escura. Tal nome se popularizou no meio acadêmico e se tornou o nome de um tópico em aberto e de grande destaque da física atual.

Ao longo dos anos muitas outras evidências apareceram e foram dando forma ao conhecimento sobre matéria escura. Uma das vertentes possíveis seria considerar a matéria escura como uma nova partícula que pudesse explicar satisfatoriamente a natureza da matéria escura. Muitos candidatos foram estudados e apresentados, tanto na forma de partículas como também na forma de corpos massivos. Assim como o desenvolvimento de experimentos capazes de fazer a detecção desses candidatos. Porém, um dos pontos

centrais para o estudo da matéria escura é o do estudo de densidade de relíquia, $\Omega_{\text{ME}}h^2$, que possui como apoio as observações da colaboração Planck, $\Omega_{\text{ME}}h^2 = 0.1198 \pm 0.0012$ [1].

A matéria escura será o primeiro ponto desenvolvido nessa dissertação. Começando com uma apresentação de evidências para sua existência, alguns candidatos possíveis e formas de detecção. Em seguida, será tomado um foco na busca do estudo de densidade de relíquias que primeiro precisará de um entendimento de conceitos chaves de cosmologia e termodinâmica. Seguido do entendimento da equação de Boltzmann como forma de estudo de relíquias.

O segundo tópico em aberto envolve certa discordância entre o esperado pelo Modelo Padrão para o que é visto pelo experimento. O Modelo Padrão mostrou sucesso em diversos pontos apresentando uma certa concordância entre teoria e experimento. Porém, esse não é o caso do momento magnético. Quando pensamos no momento magnético de uma partícula ele é relacionado ao seu spin e a um fator giro magnético g . A divergência da teoria e experimento se encontra na medida do fator g . A diferença toma uma forma $\Delta a = a^{\text{exp}} - a^{\text{mp}}$, em que $a_\mu = (g - 2)/2$ é calculado para o Modelo Padrão (mp) e experimentalmente (exp). Essa diferença é chamada de anomalia do momento magnético.

A anomalia do momento magnético vem sendo estudada desde o desenvolvimento da teoria quântica de campos. Esse valor ao longo do tempo foi mudando de acordo com o entendimento de interações entre algumas partículas com outras. Sempre mostrando uma concordância com o valor experimental. Tais experimentos também foram evoluindo de acordo com o desenvolvimento de técnicas experimentais. Hoje em dia essa anomalia está em alta quando estudada para o múon. Ele se mostrou um ponto de partida interessante para o estudo da anomalia pela facilidade do uso dele em experimentos. Como a anomalia apresenta uma dependência da massa da partícula envolvida o uso do múon se mostrou melhor do que a do elétron, já que a massa do múon é bem maior que a do elétron, $m_\mu \approx 200m_e$. Já por causa de seu tempo de vida ser bem maior que o do tau, ele também se mostrou mais propício para a realização de experimentos.

A busca pelo entendimento da teoria teve um apoio experimental maior com dados recentes vindos do Fermilab [3]. Ao estudarmos o valor encontrado para a anomalia pelo Fermilab em conjunto com o valor encontrado por um experimento mais antigo feito pela colaboração E821 do laboratório de Brookhaven [4], encontramos uma discordância com o valor teórico. Sendo a combinação dos valores da anomalia encontrada pelos dois experimentos $\Delta a_\mu = (251 \pm 59) \times 10^{-11}$. Esses experimentos mostraram uma discrepância de 4.2σ que é um valor interessante para começar a busca por algo novo.

O estudo da anomalia do momento magnético do múon é o tópico da segunda parte dessa dissertação. Primeiro veremos como o estudo da anomalia foi evoluindo. Passando pelos experimentos já citados. Por último, fazendo o cálculo feito por Julian Schwinger e Steven Weinberg com Roman Jackiw que mostram como o cálculo da contribuição para a

anomalia é feito.

Uma maneira de conectar esses dois tópicos em aberto seria a abordagem de uma extensão do Modelo Padrão que contasse com a existência de uma partícula de matéria escura e a interação do múon com outras partículas que pudesse gerar a anomalia esperada. A extensão escolhida envolve o estudo de um modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ [5] que contém uma partícula candidata ao papel de matéria escura e também a existência de um bóson Z' que ao interagir com o múon poderia ser responsável pela anomalia encontrada experimentalmente.

Usando o modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ podemos desenvolver o cálculo para a anomalia do momento magnético do múon e também o cálculo de densidade de relíquias. Esses valores quando comparados com os da colaboração Planck [1] e do FermiLab [3] juntamente com Brookhaven [4] irão limitar alguns parâmetros do modelo como as massas da matéria escura e do bóson Z' , assim como o valor de g . Isso permitirá uma construção mais detalhada do modelo e um ponto de busca para o entendimento dos dois tópicos. Além de que pelo fato da teoria ter poucos parâmetros, que podem ser limitados por dados experimentais, ela se mostra com uma alta previsibilidade e interessante para o estudo.

2 O Problema da Matéria Escura

2.1 Introdução

O estudo sobre a matéria escura pode ser feito observando a evolução do conceito de uma maneira histórica [6]. Ao entendermos as evidências que deram base ao conceito podemos entender melhor o surgimento de candidatos e também de experimentos para a detecção.

Primeiro, precisamos entender algumas evidências que foram fundamentais para justificar o estudo da matéria escura. Temos desde evidências astrofísicas e cosmológicas como também envolvendo o estudo da teoria gravitacional. Vamos desde o começo do século passado, com algumas primeiras evidências astrofísicas como a de Fritz Zwicky [2] em 1930, passaremos para outras evidências astrofísicas na segunda metade do século, como a do grupo de Vera Rubin [7] em 1970, e iremos até observações cosmológicas mais recentes como a da colaboração Planck [1].

Em seguida, iremos abordar alguns candidatos ao papel de matéria escura. Passaremos por candidatos bariônicos massivos, como MACHOs e buracos negros primordiais. Abordaremos também candidatos na forma de partículas. Começando com alguns candidatos na forma de novas partículas como WIMPs, áxions e partículas da extensão do modelo padrão na supersimetria, e também partículas já existentes como neutrinos. Ao estudarmos esses candidatos poderemos ver como algumas das novas partículas são desenvolvidas visando resolver outros problemas em aberto e acabam funcionando também para a questão da matéria escura.

Por último, abordaremos alguns exemplos de técnicas de detecção da matéria escura. Começaremos falando da detecção direta. Desde a base para essa técnica de detecção, como também alguns experimentos e seus princípios. Falaremos brevemente também da detecção indireta.

2.2 Evidências

Um das principais motivações para o estudo da matéria escura é baseada em evidências que foram surgindo desde o início do século passado até observações mais atuais. Elas vão desde o uso da mecânica e astrofísica, passando por estudo de teoria gravitacional e indo até observações cosmológicas. Essas evidências são importantes porque foram elas que deram a entender a existência de um problema que viria a ser o da matéria escura, e foram elas também que foram formulando melhor as características desse problema. Para

o estudo dessas evidências usaremos de base o livro de Stefano Profumo [8].

2.2.1 Evidências Clássicas

Quando falamos em uma abordagem histórica da evolução do conceito de matéria escura, é preciso partir do ponto de algumas evidências que chamaremos de clássicas porque surgem com o uso da mecânica e astrofísica. Elas nos mostram como o conceito foi surgindo na comunidade e também permitem entender melhor sobre a motivação para o estudo da matéria escura.

2.2.1.1 Zwicky e o Teorema do Virial

Um dos primeiros acontecimentos que levaram à ideia da existência de matéria escura envolve o estudo de Fritz Zwicky na década de 30 sobre o aglomerado de Coma [2]. O que ele fez foi aplicar o teorema do virial no movimento das galáxias no aglomerado Coma para assim entender o movimento dentro do aglomerado e sua massa. Para isso consideramos a galáxia i na posição \vec{r}_i e de massa M_i . Se fizermos o produto escalar da segunda lei de Newton, $F = ma$, com \vec{r}_i temos:

$$\vec{r}_i \left(M_i \frac{d^2 \vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i \right). \quad (2.1)$$

Em seguida fazemos a soma da expressão sob todas as galáxias no aglomerado (sob i) teremos:

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \Theta}{dt^2} = \text{Vir} + 2K, \quad (2.2)$$

em que $\Theta = \sum_i M_i r_i^2$ é o momento de inércia polar, $\text{Vir} = \sum_i \vec{r}_i \cdot \vec{F}_i$ é o virial e K é a energia cinética total.

Se o aglomerado for estacionário, o momento de inércia polar irá flutuar ao redor de um valor constante, então a média temporal da derivada no tempo zera. Então, teremos o teorema do virial:

$$\langle \text{Vir} \rangle_t = -2 \langle K \rangle_t. \quad (2.3)$$

Em seguida podemos usar a lei de gravitação de Newton, escrita como

$$\text{Vir} = U = - \sum_{i < j} G_N \frac{M_i M_j}{r_{ij}}, \quad (2.4)$$

em que G_N é a constante gravitacional de Newton e $r_{ij} = |\vec{r}_j - \vec{r}_i|$.

Se escrevermos o teorema do virial da seguinte maneira

$$-\langle U \rangle_t = 2 \langle K \rangle_t = \left\langle \sum_i M_i v_i^2 \right\rangle_t = \sum_i M_i \langle v_i^2 \rangle_t. \quad (2.5)$$

Se considerarmos também que a massa total M_{tot} é distribuída uniformemente em uma esfera de raio R_{tot} , podemos calcular $dU = -G_N m dm / r$, em que $dm = \rho 4\pi r^2 dr$ e $\rho = m/V = M_{\text{tot}} / (4\pi R_{\text{tot}}^3 / 3)$. Então, teremos:

$$\begin{aligned}
 dU &= - \frac{G_N m dm}{r} \\
 &= - \frac{G_N}{r} \frac{4}{3} \rho \pi r^3 (4\pi r^2 \rho dr) \\
 U &= - G_N \frac{16}{3} \pi^2 \int_0^{R_{\text{tot}}} \rho^2 r^4 dr \\
 &= - G_N \frac{16}{3} \pi^2 \rho^2 \frac{r^5}{5} \Big|_0^{R_{\text{tot}}} \\
 &= - G_N 3 \left(\frac{4}{3} \pi R_{\text{tot}}^3 \rho \right)^2 \frac{1}{R_{\text{tot}}} \\
 U &= - G_N \frac{3M_{\text{tot}}^2}{5R_{\text{tot}}}.
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Ao tomarmos a média temporal e também a média da velocidade,

$$\sum_i M_i \langle v_i^2 \rangle_t = M_{\text{tot}} \langle v^2 \rangle_{t,v}, \tag{2.7}$$

teremos uma expressão para a massa total

$$M_{\text{tot}} = \frac{5R_{\text{tot}} \langle v^2 \rangle_{t,v}}{3G_N}. \tag{2.8}$$

O que Zwicky fez em seguida foi usar $U = -5G_N M_{\text{tot}}^2 / R_{\text{tot}}$ para encontrar :

$$M_{\text{tot}} \gtrsim \frac{R_{\text{tot}} \langle v^2 \rangle_{t,v}}{5G_N}. \tag{2.9}$$

Ao substituirmos valores como a média da velocidade quadrática observada ($\langle v_s^2 \rangle_{t,v} \approx 5 \times 10^{15} \text{ cm}^2 \text{ s}^{-2}$, em que $\langle v_s^2 \rangle_{t,v} = \langle v^2 \rangle_{t,v} / 3$) temos $M_{\text{tot}} > 9 \times 10^{43} \text{ Kg}$, ou aproximadamente $4.5 \times 10^{13} M_{\odot}$, em que M_{\odot} é a massa do Sol. Através de observações era esperado que uma nébula possuísse $8.5 \times 10^7 L_{\odot}$, Zwicky então ao relacionar a massa encontrada com a luminosidade observada conseguiu estudar a razão entre massa e luminosidade. Ele fez isso utilizando a relação $M_{\text{encontrada}} / L_{\text{observada}} = 1390h M_{\odot} / L_{\odot}$ em que L_{\odot} é a luminosidade do Sol e $h = 0.70 \pm 0.03$. Ao substituir as massas em questão, ele concluiu que a razão da massa para luz no aglomerado de Coma era em torno de 500. Foi assim que ele deixou o termo matéria escura famoso para indicar a massa faltante do sistema.

2.2.1.2 Rubin e o Problema de Rotação das Galáxias

Uma outra evidência que contribuiu para o entendimento da matéria escura surge na década de 70 com a observação da curva de rotação de galáxias realizado por Vera Rubin e Kent Ford ao observar a galáxia de Andrômeda [7]. Uma técnica importante é

a de poder medir a velocidade, como função do raio, de galáxias através de observações astronômicas (normalmente feitas usando o efeito Doppler da transição hiperfina 21cm do hidrogênio neutro). A velocidade circular v_c de uma galáxia simétrica nos eixos é esperada para ser uma função da distância r do eixo dessa galáxia (medido usando a linha do desvio para o vermelho ou para o azul) do tipo:

$$v_c^2(r) = \frac{G_N M(r)}{r}, \quad (2.10)$$

em que $M(r)$ é a massa total dentro de uma esfera de raio r . Logo, a velocidade circular é uma ferramenta para calcular a massa total dentro da esfera. Certos potenciais gravitacionais de alguns sistemas indicam que um comportamento assintótico é esperado para $v_c(r)$. Usando o segundo teorema de Newton podemos considerar o problema como uma massa pontual M

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{G_N M}{r}}, \quad (2.11)$$

em que a relação $v_c \sim r^{-1/2}$ é chamada de queda Kleperiana.

Agora, se considerarmos que a galáxia é uma esfera homogênea de raio R e que possui uma densidade constante ρ ($M(r) = 4\pi\rho r^3/3$, para $r < R$), a velocidade circular é linear dentro da galáxia

$$v_c(r) = \sqrt{\frac{4\pi G_N \rho}{3}} r, \quad (r \leq R) \quad (2.12)$$

e $v_c(r) \sim r^{-1/2}$ para $r > R$.

A distribuição de matéria em uma galáxia a ser observada não é a mesma de uma esfera homogênea, ela é de uma forma que apenas as aproximações feitas não são suficientes para o estudo do comportamento da curva de rotação. Mas mesmo usando técnicas mais rigorosas o que encontramos são duas propriedades interessantes: (1) uma subida linear para r pequeno e (2) uma queda Kleperiana para raios grandes.

Observações de curvas de rotação realmente mostraram uma subida linear na região interna, seguido por um raio onde $v_c(r)$ atinge seu máximo. Mas a relação seguinte que seria a queda Kleperiana não foi observada. Foi a partir de 1970 com equipamento aprimorado que foi possível determinar que em nenhum tipo de galáxia era observada tal queda e que $v_c(r)$ exibia um comportamento plano ou com um decrescimento devagar para r grande. A interpretação disso feita em 1970 por Freeman [9] foi pensar na existência de uma massa faltante na forma de um halo galáctico escuro ao redor das galáxias espirais. Isso pode ser observado na Fig.(1).

2.2.2 O Aglomerado Bala e Raios X de Halos

Grandes sistemas astrofísicos são compostos, em abundância, por matéria bariônica que não brilha (ex: gás interestelar). Quando partículas carregadas interagem com o

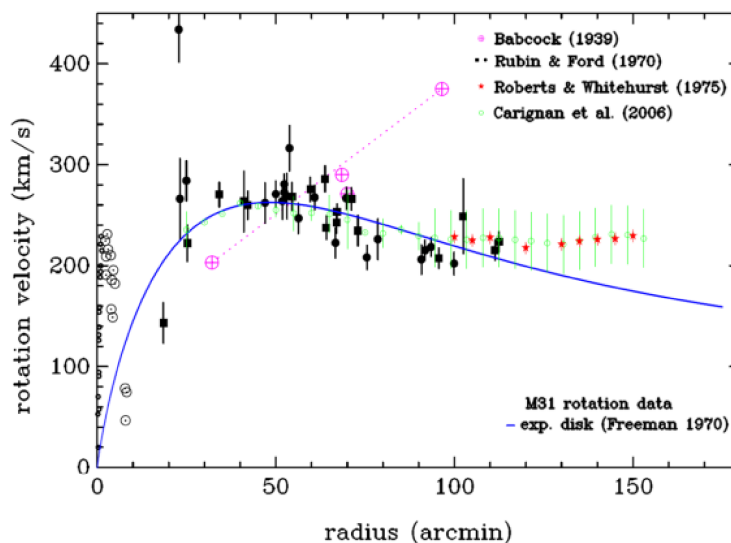


Figura 1 – Velocidade de rotação na galáxia Andrômeda (M31), em função da distância para o centro [6]. Os dados são de artigos como de Rubin e Ford [7], Babcock [10], Roberts e Whitehurst [11], Carignan [12] e Freeman [9].

campo elétrico de núcleos de número atômico elevado ou com a eletrosfera, elas reduzem a energia cinética, mudam de direção e emitem a diferença de energia sob a forma de ondas eletromagnéticas, denominadas de raios X de freamento ou '*bremssstrahlung*'. Se esse gás for quente ele emite fótons de '*bremssstrahlung*' térmico na frequência de raios X e podem ser detectados. Para o lado de matéria escura esses raios X são interessantes pois ajudam a distinguir gás que não emite luz de matéria escura bariônica.

Raios X são opticamente finos, por isso a densidade da luminosidade é proporcional ao quadrado da densidade física. Com boas observações de raios X é possível determinar a temperatura através da forma do espectro contínuo de raios X, ou da largura das linhas de raios X, e também a partir da densidade do gás.

Com essa técnica foi possível fazer as primeiras determinações da distribuição de massa ao redor de galáxias elípticas (ex. M87), e para a localização de matéria colisional em sistemas como o aglomerado Bala ('*Bullet cluster*' ou 1E 0657-558). Isso pode ser visto na Fig.(2).

2.2.3 Lentes Gravitacionais

Uma nova forma de observar corpos celestes se desenvolveu graças ao surgimento da relatividade geral. Baseada no fato de que massa distorce a trajetória da luz, curvando-a. Vários corpos no espaço, como galáxias e aglomerados, podem ser usados como lentes gravitacionais. Isso é uma ferramenta útil para se observar melhor fontes de luz distantes ao fundo (ex. Galáxias). Podendo produzir várias imagens da mesma fonte (lente gravitacional forte) ou distorcer a imagem da fonte (lente gravitacional fraca).

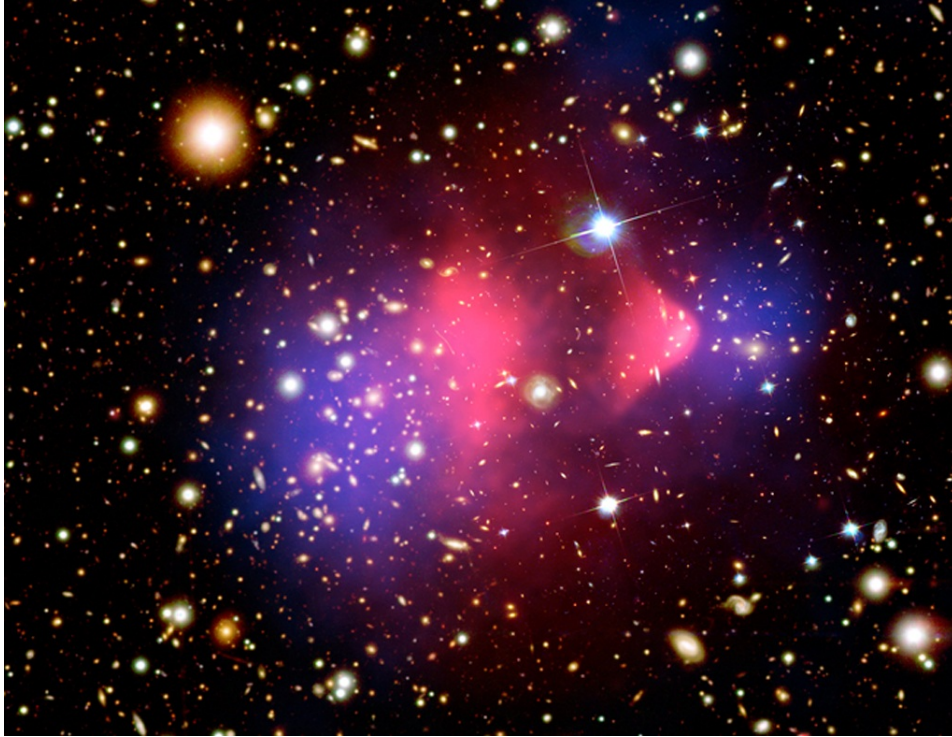


Figura 2 – Aglomerado Bala (1E 0657-558), o vermelho representa onde está a matéria colisional observada em frequências de raios X; a região azul é a densidade de massa reconstruída a partir do uso de lentes gravitacionais e de outras cores é a parte visível.

Através da medição do ângulo de deflexão é possível fazer uma relação com a massa do corpo que está sendo destorcido pela lente gravitacional. Através da seguinte expressão:

$$\alpha = \frac{4G_N M}{c^2 b} \quad (2.13)$$

em que b é um parâmetro de impacto. Existe também uma expressão para separação angular, entre duas imagens da mesma fonte, envolvendo o ângulo de deflexão:

$$\Delta\theta = 2\alpha \frac{D_{fl}}{D_f} \quad (2.14)$$

em que D_{fl} é a distância entre fonte e lente e D_f a distância entre o observador e a fonte. Sendo assim o uso das lentes gravitacionais é excelente para o entendimento do perfil de massa em corpos no cosmos. A parte em azul na Fig.(2) representa a matéria escura no aglomerado Bala observada através do uso de lente gravitacional. Um dos primeiros exemplos em que a ferramenta foi utilizada foi na observação do quasar Q0957 + 561. Com resultados desse tipo de observação é possível trabalhar com um dos primeiros candidatos para matéria escura, que será estudado mais a frente, os MACHOs (*‘Massive Compact Halo Objects’*).

Um dos maiores impactos do uso de lente gravitacionais, na questão de matéria escura como partícula, vem da possibilidade de termos uma ferramenta para ajudar na

exploração das propriedades de colisão da mesma, como por exemplo no aglomerado de Bala visto na Fig.(2). No caso do uso das lentes ajuda a construir um perfil para a densidade de massa, que juntamente com raios X ajudam a entender melhor a sua composição.

Usando dados de raios X para estudar colisões recentes entre aglomerados, juntamente com simulações hidrodinâmicas detalhadas, permitem limitar a seção de choque de auto-interações de matéria escura $\sigma_{\chi\chi}$ pela massa de matéria escura M_χ [13] na ordem de

$$\frac{\sigma_{\chi\chi}}{M_\chi} \lesssim 1\text{cm}^2/\text{g}. \quad (2.15)$$

Essas auto-interações podem afetar a forma do halo deixando-o mais arredondado.

2.2.4 Radiação Cósmica de Fundo e a Quantidade de Densidade de Matéria Existente no Universo

A densidade de matéria, do modelo padrão, é essencialmente em bárions (matéria bariônica). Uma maneira de entender a existência da matéria escura é usando o valor que sabemos de densidade de matéria total e o de densidade de matéria bariônica e fazer uma subtração de um pelo outro.

A densidade de matéria bariônica é dada por:

$$\Omega_b = \frac{\rho_b(\text{hoje})}{\rho_c}, \quad (2.16)$$

em que ρ_c é a densidade crítica e será definida no próximo capítulo. Ou quando considerado o desvio para o vermelho, teremos:

$$\frac{\rho_b}{\rho_c} = \Omega_b a^{-3}. \quad (2.17)$$

em que a é o fator de escala.

Podemos encontrar o resultado da densidade bariônica de quatro formas, como feito no livro de Stefano Profumo [8]:

1. A maior parte dos bárions no universo se encontra na forma de gás em grupos de galáxias. Através de raios X é possível medir quanto de gás há lá fora, o que nos leva ao valor de $\Omega_b h^2 \sim 0.02$ (em que h é a constante de Hubble em unidade de $100\text{Km s}^{-1} \text{Mpc}^{-1}$, em prática $h^2 \simeq 0.5$);
2. Bárions ficam no caminho da luz emitida por fontes distantes (ex.quasares). A observação de como a luz desses quasares é absorvida depende da quantidade de bárions no caminho. Por mais que exista uma certa incerteza, o resultado também é $\Omega_b h^2 \sim 0.02$;

3. Usando o espectro da RCF (Radiação Cósmica de Fundo), já que o tamanho relativo dos picos pares e ímpares na anisotropia do espectro de potência (e também a posição dos picos) depende de Ω_b . Pelos resultados da colaboração Planck [1], temos $\Omega_b h^2 = 0.02233 \pm 0.00015$;
4. A abundância de bárions pode ser estimada através da comparação com previsões para a abundância de elementos leves sintetizados na nucleossíntese do Big-Bang. Usando medições da abundância de deutério, o resultado é $\Omega_b h^2 = 0.0205 \pm 0.0018$ [14].

O que falta é encontrar o valor da densidade de matéria total $\Omega_m = \rho_m/\rho_c$. Que também pode ser feito através de quatro maneiras:

1. Compilando medições da razão entre massa e luz. Essa razão é observada saturando em um valor constante maior que a escala de tamanho de aglomerados (1 Mpc) implicando $\Omega_m \sim 0.3$ [15];
2. Observações de alta escala podem ser usadas para quantificar o espectro de potência de distribuição de galáxias. Esse espectro de potência depende de $\Omega_m h$, dados indicam que $\Omega_m h \sim 0.2$ [16]. O campo de velocidade cósmica em relação a distribuição de galáxias também apontam para $\Omega_m \sim 0.3$ [17];
3. A anisotropia na amplitude do espectro de potência da RCF em diferentes amplitudes angulares também depende de $\Omega_m h^2$. Os dados da RCF indicam valores de $\Omega_m h^2$ consistentes com outras observações. Os resultados de Planck [1] indicam $\Omega_m = 0.3147 \pm 0.0074$ ($\Omega_m h^2 = 0.1428 \pm 0.0011$);
4. Também é possível encontrar esse valor de maneira menos direta, como olhando para razão Ω_b/Ω_m . Por exemplo, usando a razão entre massa de gás em um aglomerado para a massa total, isso sendo feito olhando para emissão de raios X vindo da distorção da RCM induzida pelos elétrons aquecidos dentro do aglomerado, e assumindo que essa razão seja próxima da entre bárions e massa total.

O resultado dessas observações é que a densidade bariônica é apenas 5% da densidade crítica e que a densidade de matéria total seja 30%. Sendo assim, a diferença diz que um quarto da densidade crítica do universo está na forma de matéria escura não bariônica.

2.2.5 Tempo para Formação de Estruturas Não Lineares

É possível questionar se há necessidade da existência de matéria escura para explicar fenômenos como os discutidos até então. Uma possibilidade é de que o problema poderia ser resolvido com teorias gravitacionais modificadas. Mas um bom argumento para firmar

a necessidade da existência de matéria escura, com a observação da RCF, é o de que é quase impossível explicar o tempo de formação de estruturas não lineares no universo a não ser que bárions caiam em um poço de potencial gravitacional pré-existente semeado por matéria escura.

Dado um padrão inicial de perturbações de densidade, tal padrão deve ser compartilhado entre bárions fortemente acoplados e fluidos de fótons desde o início do universo até o seu desacoplamento mútuo, que acontece na recombinação, ou no desacoplamento da RCF. É possível medir diretamente o tamanho dessas não homogeneidades medindo anisotropias angulares nas flutuações de temperatura do céu da RCF (as flutuações de densidade bariônica $\delta\rho/\rho$ na recombinação são calculadas para serem proporcionais às flutuações de temperatura de fótons $\delta T/T$). Essas flutuações de densidade possuem um pico em $1/10^4$ ($\delta\rho/\rho \lesssim 10^{-4}$). Pela relatividade geral temos que para matéria em um regime linear, as não homogeneidades crescem como $\delta\rho/\rho \sim a$, em que a é o fator de escala. O fator de escala vem crescendo desde a recombinação com um fator igual ao desvio para o vermelho na recombinação, $z_{\text{rec}} \sim 1100$. Se há apenas bárions, então não passou tempo suficiente para as estruturas observadas ($\delta\rho/\rho \gg 1$) serem formadas.

Então, a RCF mostra que em um universo de apenas bárions não há tempo suficiente para estruturas entrarem no regime não linear, como ilustrado pela linha pontilhada na Fig.(3). Estruturas têm tempo para chegarem no regime não linear apenas se tiver outro tipo de partícula que desacopla do fluido bárion-fóton bem antes da recombinação, criando sementes de não homogeneidade (que servem como poço de potencial gravitacional) bem mais fundo que os bariônicos (i.e. $(\delta\rho/\rho)_{\text{ME}} \gg 10^{-4}$ na recombinação). Então para formação de estrutura a tempo é necessário uma espécie de matéria escura que seja ao mesmo tempo eletricamente neutra (escura) e não relativística (fria) o suficiente para não se soltar do poço de potencial gravitacional do início.

A necessidade do tempo para formação de estruturas exclui boa parte das versões simples de teoria gravitacional modificada. Na realidade, certas teorias como o modelo Tensor-Vetor-Escalar (TeVeS) conseguem prever suficientemente as não homogeneidades, Fig.(3), para que estruturas sejam formadas a tempo. Entretanto, tais modelos conseguem prever oscilações acústicas bariônicas a mais e o espectro de potência de matéria previsto por elas contradiz o esperado por dados observados.

2.3 Candidatos

Usando algumas dessas evidências como apoio, uma busca por um candidato viável para representar a matéria escura começou. Iremos abordar desde a existência de partículas já conhecidas e que poderiam servir como candidatos, até partículas novas que a existência permitiria explicar a matéria escura. Começaremos com corpos massivos na forma de

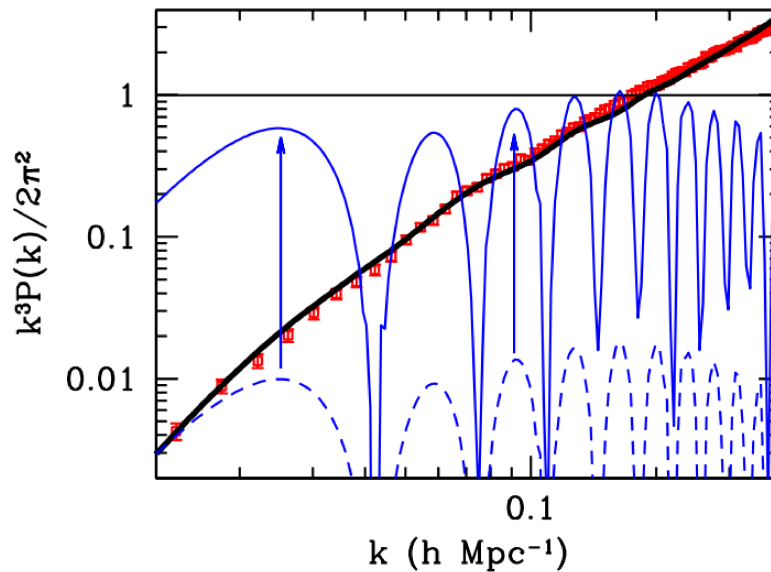


Figura 3 – Espectro de potência de flutuações de densidade de matéria [18]; os pontos, com barra de erro, são de Sloan Digital Sky Survey, a linha preta é a previsão para um modelo cosmológico com matéria escura fria mais constante cosmológica; a linha pontilhada corresponde a um modelo sem matéria escura, com toda a densidade de matéria (20% da densidade crítica) em bárions. A linha contínua é uma tentativa de formulação covariante de gravidade modificada (MOND) conhecida como modelo Tensor-Vetor-Escalar (TeVeS): a amplitude pode atingir 1, mas o espectro, com grandes oscilações acústicas bariônicas, é bem diferente de dados.

bárions escuros, passaremos pelos neutrinos e suas modificações, e terminaremos com algumas partículas novas.

2.3.1 Bárions Escuros

Existe a possibilidade de um candidato a matéria escura ser os chamados bárions escuros, no caso seriam corpos que não brilham. Por mais que existam candidatos interessantes, o impacto deles na quantidade total de matéria escura existente é baixo e indiferente.

Até então já foi visto que a nucleossíntese do Big-Bang limita a densidade cosmológica de bárions em uma fração da densidade de matéria e não é interessante pensar que os bárions faltantes tenham aparecido mais tarde. Além disso, como visto na Fig.(3), a formação de estrutura não funciona com apenas bárions. A questão do bárion escuro entra ao tentar entender a possibilidade de halos escuros serem formados por corpos massivos.

2.3.1.1 MACHOs (Massive Compact Halo Objects)

A melhor maneira de procurar por objetos massivos e compactos presentes em halos, MACHOs, é através de um fenômeno chamado micro-lente gravitacional. A ideia é observar o maior número de estrelas possíveis, por exemplo nas Nuvens de Magalhães, pelo maior tempo possível, e tentar detectar uma pequena magnificação, usando micro-lente, do brilho da estrela.

Se for monitorado um grande número de estrelas, na ordem de milhão, na Grande Nuvem de Magalhães por um ano, seriam observados 5 eventos de micro-lente, se matéria escura estiver na forma de MACHOs. Na realidade, as observações de OGLE-III [19] na Pequena Nuvem de Magalhães incluíram quase 6 milhões de estrelas, com um total de tempo de observação de 2870 dias. Acabaram observando três candidatos de evento de micro-lente. Esse resultado indica que MACHOs de massa $1M_{\odot}$ podem providenciar apenas uma fração $\lesssim 10\%$ da massa de matéria escura no halo.

2.3.1.2 Buracos Negros Primordiais

Um bom candidato para matéria escura, que poderia ser formado de matéria comum, seria buracos negros formados no início do universo, conhecidos como buracos negros primordiais (BNP). Se a massa dentro do horizonte excede a massa de Chandrasekhar ($1,44 M_{\odot}$), um buraco negro é formado. Na cosmologia basta uma intensificação na densidade de uma pequena porcentagem para formar um buraco negro, praticamente em qualquer ponto da história do universo. Tais intensificações são possíveis em diversos cenários como: colisões de bolhas; certos cenários inflacionários; transição de fase; etc.

Não há uma previsão clara para a massa do BNP, mas dependendo de quão leve ele for, ele já teria evaporado através da emissão de radiação cósmica ($5 \times 10^{-19} M_{\odot}$, ou 6×10^{38} GeV). Já massas no intervalo de $6 \times 10^{40} \lesssim m/\text{GeV} \lesssim 6 \times 10^{43}$ criariam um padrão de interferência no espectro de rajada de raios gama chamado ‘*femtolensing*’ [20]. Já massas superiores a 6×10^{48} GeV são limitadas por observações de micro-lente.

Se BNP são capturados gravitacionalmente por estrelas de nêutrons, eles rapidamente agregam ou rompem a estrela. A existência de velhas estrelas de nêutrons na região com grande densidade de matéria escura sugerem que BNP são componentes subdominantes de matéria escura no intervalo entre 6×10^{40} GeV e 6×10^{47} GeV, em que limites de micro-lente também atuam.

2.3.2 Matéria Escura como Partícula

Uma solução para a matéria escura seria olhar para ela como uma partícula, seja na tentativa de usar as já existentes no Modelo Padrão ou desenvolver uma ideia nova.

2.3.2.1 Neutrino

Uma primeira ideia quando falamos sobre uma partícula de matéria escura seria usar os três neutrinos que temos no Modelo Padrão. O que geraria o interesse em relacionar os neutrinos com a matéria escura seria a lista de propriedades em comum. Diferente de outras partículas do Modelo Padrão, os neutrinos são estáveis e não interagem de maneira eletromagnética ou forte.

Neutrinos também são matéria não bariônica e até poderiam ser candidatos a fazer parte da densidade de matéria não bariônica. Mas isso implicaria um problema na formação de estruturas. Se neutrinos contribuíssem em grande escala para a matéria escura não bariônica, eles atrapalhariam a formação de halos e isso não condiz com o observado. Também de acordo com a colaboração Planck [1], $\Omega_\nu h^2 < 0.0027$, o que essencialmente é um valor irrelevante para Ω_{ME} . Eles seriam uma opção ideal caso os existentes no modelo padrão não contribuíssem tão pouco para a quantidade de matéria escura observada. O que acontece é que eles servem de base para a construção de outros candidatos, desde partindo de algo semelhante até algo diferente, mas com uma base semelhante.

Por mais que neutrinos seriam leves demais para compor a quantidade de matéria escura e quente demais para servir como relíquia térmica da maneira esperada para matéria escura, não era excluída a possibilidade da existência de uma partícula parecida com o neutrino. Em 1993, Scott Dodelson e Lawrence Widrow [21] propuseram uma espécie de neutrino adicional, que diferentemente dos neutrinos do Modelo Padrão eles não fariam parte de interações eletro-fracas, poderiam ser produzidos no início do universo e serviriam como candidato a matéria escura. Essas partículas interagem gravitacionalmente e através de um pequeno grau de mistura com os neutrinos do modelo padrão. Tais partículas não estariam em equilíbrio térmico no início do universo e seriam produzidas através de oscilações de outras espécies de neutrino. Esse neutrino estéril, dependendo de sua massa, poderiam ser produzidos com um grande intervalo de temperatura, e poderia ser um candidato a matéria escura tanto quente ($m_{\nu_s} \sim \text{KeV}$) ou frio ($m_{\nu_s} \gg \text{KeV}$). Essa ideia foi o suficiente para gerar outros candidatos parecidos.

2.3.2.2 Supersimetria

Os neutrinos seriam as únicas opções dentro do Modelo Padrão que poderiam se candidatar ao papel de matéria escura, mas visto que eles não se encaixam totalmente seria necessário pensar em uma partícula nova. Então, uma ideia seria que a natureza possuiria uma simetria de espaço-tempo relacionando férmions com bósons, a supersimetria [22]. Supersimetria requer que para cada férmion, um bóson deve existir com o mesmo número quântico, assim como para cada bóson deve existir um férmion. Então ela prevê a existência de várias novas partículas interagentes de maneira eletricamente neutra e não forte (parceiros dos neutrinos, fótons, bóson Z , bóson de Higgs, e gráviton). Se algum desses

parceiros forem estáveis, eles poderiam ser abundantes e servir para solucionar algumas questões.

Uma teoria que surgiu baseada no conceito de supersimetria foi a de Modelo Padrão Mínimo Supersimétrico (MPMS). Já existiam algumas considerações sobre o parceiro do gráviton, o gravitino, como candidato a matéria escura. Mas com o MPMS, os parceiros do fóton, do bóson Z , e dois bósons neutros escalares de Higgs se juntam para formar quatro partículas conhecidas como neutralinos. Os neutralinos passaram a ser candidatos a matéria escura, mas para isso precisaria ter algo que estabilizasse o neutralino mais leve, para impedir que essas partículas decaíssem logo após criadas.

Em algumas extensões supersimétricas do modelo padrão, existem interações que violam a conservação do número bariônico (B) e leptônico (L). Essas interações fariam o próton decair em uma escala de tempo inaceitável. Isso poderia ser resolvido ao colocar uma simetria conhecida como paridade R . Essa paridade faria com que parceiros só poderiam ser criados ou destruídos em pares. Um parceiro pesado pode decair em um leve, junto com outras partículas do modelo padrão, mas o parceiro leve não pode decair. Então, se o parceiro do MPMS for um neutralino ou um sneutrino (parceiro do neutrino), a paridade R irá estabilizar ele e gerar um candidato viável para matéria escura.

É importante ressaltar que esses tipos de teoria começam com a vontade de desenvolver outras áreas da física de partículas mas acabam trazendo um olhar para o problema de matéria escura.

2.3.2.3 Áxions

Um candidato interessante, que também surge do estudo de outros pontos da física, é o áxion. A cromodinâmica quântica (CDQ) tem sido uma teoria que sempre vem sendo incrementada e que descreve a força forte para os quarks e os glúons com forte precisão. Mas a CDQ possui um problema conhecido como problema da violação CP nas interações fortes. Ele surge pelo fato da Lagrangiana de CDQ possuir o termo $\mathcal{L}_{\text{CDQ}} \supset \Theta \frac{g^2}{32\pi^2} G^{\alpha\mu\nu} \tilde{G}_{\alpha\mu\nu}$, em que $G^{\alpha\mu\nu}$ é o tensor de força do campo do glúon e Θ é uma quantidade relacionada a fase do vácuo da CDQ. Se Θ for da ordem de uma unidade, esse termo introduziria um grande efeito de violação de carga paridade (CP), fazendo com que o momento de dipolo elétrico do nêutron seja $\approx 10^{10}$ vezes maior que o limite experimental. Então, para que seja consistente com observação, a quantidade de Θ deve ser menor que $\approx 10^{-10}$. Isso gera uma indicação da necessidade de algo novo para explicar o motivo de Θ ser tão pequeno. Uma primeira explicação seria a introdução de uma nova simetria global $U(1)$ que é quebrada espontaneamente e a quantidade de Θ é levada a quase zero. Tal quebra de simetria implica a existência de um pseudo-bóson de Nambu-Goldstone chamado áxion [23]. O áxion adquire massa como resultado da anomalia quiral da simetria $U(1)$, na ordem de $m_a \approx \lambda_{\text{CDQ}}^2 / f_{\text{PQ}}$, em que f_{PQ} é a escala em que a simetria é quebrada

e $\lambda_{\text{CDQ}} \approx 200\text{MeV}$ é a escala da CDQ.

Um áxion leve e invisível pode ter consequências cosmológicas. Se ele for estável em escala de tempo cosmológica, esses áxions produzidos no início do universo sobreviveriam e poderiam ser suficientes para constituir a matéria escura.

Existem alguns mecanismos que podem ser considerados para a produção desses áxions no início do universo. Eles podem ser produzidos termicamente, mas para áxions leves a abundância de relíquia é muito pequena e só serviria para explicar uma pequena fração da densidade de relíquia. Um outro mecanismo seria o envolvendo o campo de Peccei-Quinn, conhecido como ‘*misalignment*’ (ou desalinhamento). Nesse mecanismo a quantidade Θ é levada a zero mas seu valor inicial é esperado ser um valor muito maior. Enquanto a temperatura do universo é levada a abaixo de $T \approx \lambda_{\text{CDQ}}$ e o valor de Θ é levado a zero, a energia armazenada no campo de Peccei-Quinn é transferida para a produção de áxions não térmicos. Para condições iniciais típica, esse processo leva a produção de densidade de áxion próxima a de matéria escura para massas da ordem $m_a \approx 10^{-5}\text{eV}$, para efeito de comparação a massa do elétron é $m_e \approx 0.5\text{MeV}$.

Existem algumas formas de detecção de áxions [24] como a produção de áxions em laboratório através de uma oscilação fóton-áxion, observação da abundância cosmológica dos áxions e também através da observação de fluxo de áxions vindo do Sol.

2.3.2.4 WIMPs

Para que uma partícula passe pelo *freeze-out* do equilíbrio térmico no início do universo e vire uma relíquia fria, ela não deve ser leve (maior que $\approx 1 - 100\text{KeV}$). A fim de que a abundância de relíquia térmica prevista se encaixe na densidade observada de matéria escura, a partícula deve auto-aniquilar com uma seção de choque de ordem $\sigma v \approx 10^{-26} \text{ cm}^3/\text{s}$ (em que v é a velocidade relativa entre as partículas aniquiladas). É um número similar com a seção de choque que surge com a força fraca. Isso aplica para neutrinos e vários candidatos na escala eletro-fraca (incluindo partículas estáveis com massas MeV-TeV e interações mediadas pela troca de partículas na escala eletro-fraca). Juntando isso com argumentos favoráveis a existência de nova física na escala eletro-fraca, levaram WIMPs (‘*weakly interacting massive particles*’ ou partículas massivas que interagem fracamente) [25] a liderarem a classe de candidatos a matéria escura.

Os WIMPs motivaram a expansão de programas experimentais com advento do LHC no CERN e outros experimentos astrofísicos. Tal evolução ajudaria definir a utilidade dos WIMPs como uma teoria para explicar a existência de matéria escura [26].

2.4 Detecção de Matéria Escura

Um passo importante no estudo de matéria escura é poder trabalhar com a parte experimental da física. Ter em mãos alguns exemplos de experimentos voltados para detecção de matéria escura é importante para poder confirmar ou excluir algum modelo. Assim como trazer melhorias para os modelos. Isso ocorre através do uso de limites impostos por esses tipos de experimentos. Podemos trabalhar com algumas formas de detecção, como a direta e indireta, usando WIMPs como base [27].

2.4.1 Detecção Direta

Um primeiro formato de detecção de matéria escura é através da detecção direta. Por mais que WIMPs interajam apenas fracamente com bárions, eles podem espalhar com núcleos atômicos, oferecendo assim um potencial para detecção. A ideia é medir a energia de recuo de tais interações. No caso as interações podem ser classificadas como dependentes do spin ou independentes do spin.

No caso independente do spin o WIMP espalha com o núcleo inteiro levando a uma seção de choque que depende do quadrado do número atômico do núcleo alvo. Já no caso dependente do spin o WIMP acopla com o spin do núcleo alvo. Para saber qual tipo de espalhamento irá ocorrer dependerá da forma de interação. Por enquanto focaremos no caso independente do spin já que as restrições vindas de experimentos de detecção direta são mais abundantes para esse tipo de espalhamento.

A seção de choque para o espalhamento elástico WIMP-núcleo independente do spin é dada por:

$$\sigma_{\chi N} = \frac{4}{\pi} \frac{M_\chi^2 m_N^2}{(M_\chi + m_N)^2} [Z f_p + (A - Z) f_n]^2, \quad (2.18)$$

em que A é a massa atômica e Z o número atômico do núcleo alvo, e m_N é a massa do núcleon que é igual a $m_p \simeq 938.27$ GeV para o próton e $m_n \simeq 939.57$ GeV para o nêutron.

Já o acoplamento efetivo com prótons e nêutrons, $f_{p,n}$, pode ser escrito em termos do acoplamento dos WIMPs com quarks. No caso da interação escalar

$$f_{p,n} = \sum_{q=u,d,s} \frac{G_q}{\sqrt{2}} f_{Tq}^{(p,n)} \frac{m_{p,n}}{m_q} + \frac{2}{27} f_{TG}^{(p,n)} \sum_{q=c,b,t} \frac{G_q}{\sqrt{2}} \frac{m_{p,n}}{m_q}, \quad (2.19)$$

em que G_q é o acoplamento da matéria escura com uma certa espécie de quark. O primeiro termo é voltado para o espalhamento com quarks leves, enquanto o segundo para interações com glúons através de um loop de quark pesado. Os valores de $f_{Tq}^{(p,n)}$ medidos são: para o próton no primeiro termo $f_{Tu}^p = 0.020$, $f_{Td}^p = 0.026$, $f_{Ts}^p = 0.118$ o que leva a $\sum_{q=u,d,s} f_{Tq}^p = 0.164$ [28]; para o nêutron no primeiro termo $f_{Tu}^n = 0.014$, $f_{Td}^n = 0.036$, $f_{Ts}^n = 0.118$ o que leva a $\sum_{q=u,d,s} f_{Tq}^n = 0.168$ [28]; e para prótons e nêutrons no segundo

termo $f_{\text{TG}}^{\text{p}} = 1 - \sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{\text{p}} = 0.836$ e $f_{\text{TG}}^{\text{n}} = 1 - \sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{\text{n}} = 0.832$ em que $f_{\text{TG}}^{\text{p,n}}$ está relacionado aos glúons e é dado por $f_{\text{TG}}^{(\text{p,n})} = 1 - \sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{(\text{p,n})}$, que é aproximadamente 0.84 e 0.83 para prótons e nêutrons respectivamente.

Podemos usar um acoplamento com quarks do tipo $G_q = G_0 \times m_q$, o que possibilita simplificar $f_{\text{p,n}}$ como

$$\begin{aligned}
f_{\text{p,n}} &= \frac{G_0 m_{\text{p,n}}}{\sqrt{2}} \sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{(\text{p,n})} + \frac{2}{27} f_{\text{TG}}^{(\text{p,n})} \frac{G_0 m_{\text{p,n}}}{\sqrt{2}} \sum_{q=c,b,t} 1 \\
&= \frac{G_0 m_{\text{p,n}}}{\sqrt{2}} \left[\sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{(\text{p,n})} + \frac{2}{9} f_{\text{TG}}^{(\text{p,n})} \right] \\
&= \frac{G_0 m_{\text{p,n}}}{\sqrt{2}} \left[\sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{(\text{p,n})} + \frac{2}{9} \left(1 - \sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{(\text{p,n})} \right) \right] \\
&= \frac{G_0 m_{\text{p,n}}}{\sqrt{2}} \left[\left(1 - \frac{2}{9} \right) \sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{(\text{p,n})} + \frac{2}{9} \right] \\
&= \frac{G_0 m_{\text{p,n}}}{9\sqrt{2}} \left[2 + 7 \sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{(\text{p,n})} \right].
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Como $\sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{\text{p}} \simeq \sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{\text{n}}$, conseqüentemente $f_{\text{p}} \simeq f_{\text{n}}$, podemos escrever de uma maneira aproximada:

$$\begin{aligned}
\sigma_{\chi\text{N}} &= \frac{4}{\pi} \frac{m_{\text{N}}^2 M_{\chi}^2}{(m_{\text{N}} + M_{\chi})^2} [(A - Z)f_{\text{n}} + Zf_{\text{p}}]^2 \\
&\simeq \frac{4}{\pi} \frac{m_{\text{N}}^2 M_{\chi}^2}{(m_{\text{N}} + M_{\chi})^2} A^2 f_{\text{p}}^2.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Podemos ainda definir a seção de choque por núcleo como

$$\sigma_{\chi,\text{p}} \equiv \frac{\sigma_{\chi\text{N}}}{A^2} = \frac{4}{\pi} \frac{m_{\text{N}}^2 M_{\chi}^2}{(m_{\text{N}} + M_{\chi})^2} f_{\text{p}}^2, \tag{2.22}$$

em que

$$\begin{aligned}
f_{\text{p}} &= \frac{G_0 m_{\text{p}}}{9\sqrt{2}} \left[2 + 7 \sum_{q=u,d,s} f_{\text{Tq}}^{\text{p}} \right] \\
f_{\text{p}} &\simeq \frac{938 \times 10^{-3}}{9\sqrt{2}} [2 + 7 \times 0.164] \times G_0 \\
f_{\text{p}} &\simeq 0.23 \times G_0 \text{ GeV}^{-1}.
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Usando para $1\text{pb} = 10^{-36}\text{cm}^2 = 2.5681 \times 10^{-9}\text{GeV}^{-2}$ para converter em pb e substituindo na expressão para seção de choque, encontramos

$$\sigma_{\chi,\text{p}} \simeq 2.7 \times 10^7 \frac{m_{\text{N}}^2 M_{\chi}^2}{(m_{\text{N}} + M_{\chi})^2} G_0^2 \text{ pb}. \tag{2.24}$$

Com isso, no fim temos uma seção de choque por núcleon dependente do acoplamento G_0 , que por sua vez irá depender do acoplamento de cada tipo de interação. Então os experimentos de detecção direta irão restringir o acoplamento de uma maneira que a seção de choque por núcleon irá ficar abaixo dos limites impostos por eles.

2.4.2 Experimentos de Detecção Direta

A ideia é usar essa teoria de detecção direta e aplicar como limite para a construção do modelo, é interessante olharmos para experimentos do gênero que já existem na física experimental. Alguns exemplos interessantes de experimentos, são:

1. **XENON1T**: Esse é um tipo de experimento que faz o uso xenônio líquido (LXe) em uma câmara de projeção do tempo (TPC), subterrânea para reduzir ruído de fundo induzido por raios cósmicos. O XENON1T é uma TPC com xenônio de duas fases (líquida e gasosa) a uma profundidade de 3600m abaixo do nível do mar no INFN Laboratori Nazionali del Gran Sasso in L'Aquila na Itália. A TPC usa a combinação de campos elétricos e magnéticos que juntamente com o gás e líquido dentro conseguem reconstituir a trajetória de uma partícula. Com o uso de tubos fotomultiplicadores (PMT) nas extremidades da câmara é possível detectar a luz criada pelas interações da partícula de matéria escura com um núcleon. A disposição da montagem da TPC pode ser visto na Fig.(4). Outros experimentos do gênero são: LUX [29] e PandaX-II [30].

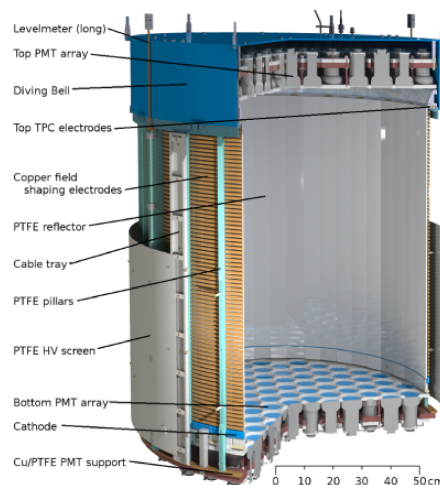


Figura 4 – Montagem da Câmara de Projeção do Tempo (TPC) [31].

2. **SuperCDMS (Super Cryogenic Dark Matter Search)**: O SuperCDMS é uma colaboração que faz experimentos com intuito de realizar uma detecção direta de matéria escura e entender sua natureza. O CDMS é realizado no subterrâneo para que se tenha um escudo contra partículas de alta energia da radiação cósmica que

podem servir de ruído de fundo. Os detectores do SuperCDMS são feitos com função primária de detectar fônons e ionização geradas dentro do cristal através de colisões elásticas entre núcleo do detector e partículas de baixa energia de matéria escura como mostrado na Fig.(5). A energia depositada no detector por uma matéria escura interagente pode ser tão baixa quanto décimos de elétron volts (eV). Detecção de um evento desses a um nível tão baixo de energia requer um aparato experimental sensível. O requerimento então é que o detector seja mantido a uma temperatura bem baixa para que seja possível distinguir a energia depositada da energia térmica do núcleo do detector. O que pode ser feito usando um sistema criogênico. Os detectores necessitam de tecnologia avançada de filme supercondutor. Cada cristal de germânio e silício (com 100m de diâmetro e 33mm de espessura) tem cerca de 1000 sensores depositados em ambas as faces do detector. O sensor de fônons consiste de uma disposição de pequenos sensores supercondutores que consistem de tiras microscópicas de tungstênio acoplado a alumínio para coletar a energia de fônon do cristal. Alguns dos detectores também coletam sinais de ionização com uma pequena voltagem aplicada através do cristal enquanto outros convertem a ionização para fônons usando uma voltagem aplicada muito maior [32].

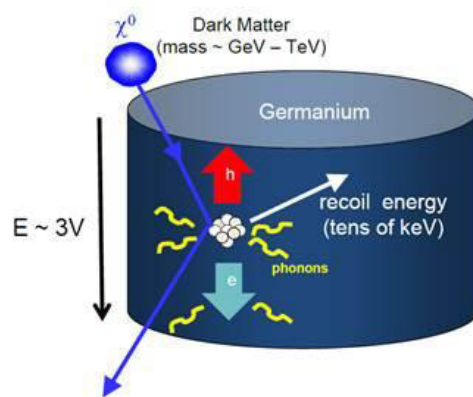


Figura 5 – Esquema da interação da matéria escura com um núcleo, mostrando a energia que gera a ionização e os sinais de fônon [32].

3. **PICO-60:** Aqui é utilizado um detector super aquecido, que utiliza emissão acústica de formação de bolha. Localizado no laboratório subterrâneo SNOLAB com uma profundidade de 6000m abaixo do nível do mar, a câmara de bolha do PICO-60 é a maior do gênero procurando matéria escura. A câmara é imersa em um fluido hidráulico e preenchido com CF_3I . Para ter um escudo contra fontes externas de radiação e ainda controlar a temperatura o aparato conta com um tanque de água, que também contém um vaso de pressão. O tanque de água, o vaso de pressão, o fluido hidráulico e a câmara de bolhas estão todos em contato térmico. Câmeras CMOS são usadas para fotografar a câmara. As imagens das câmeras são usadas

para identificar as bolhas e fazer a reconstrução de suas coordenadas espaciais dentro da câmara [33]. A montagem do experimento pode ser visto na Fig.(6).

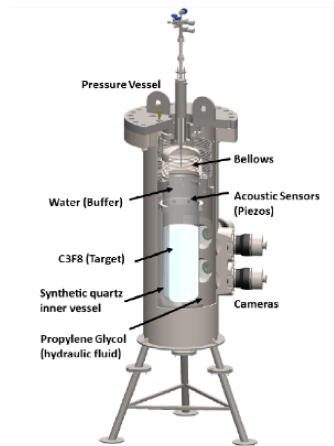


Figura 6 – Detector do Pico-60 que utiliza C_3F_8 [33].

Um exemplo da maneira como as restrições que tais experimentos podem proporcionar está na Fig.(7). No gráfico conseguimos ver limites impostos pelos experimentos que citamos anteriormente assim como uma leva de outros experimentos que também fazem busca de forma similar.

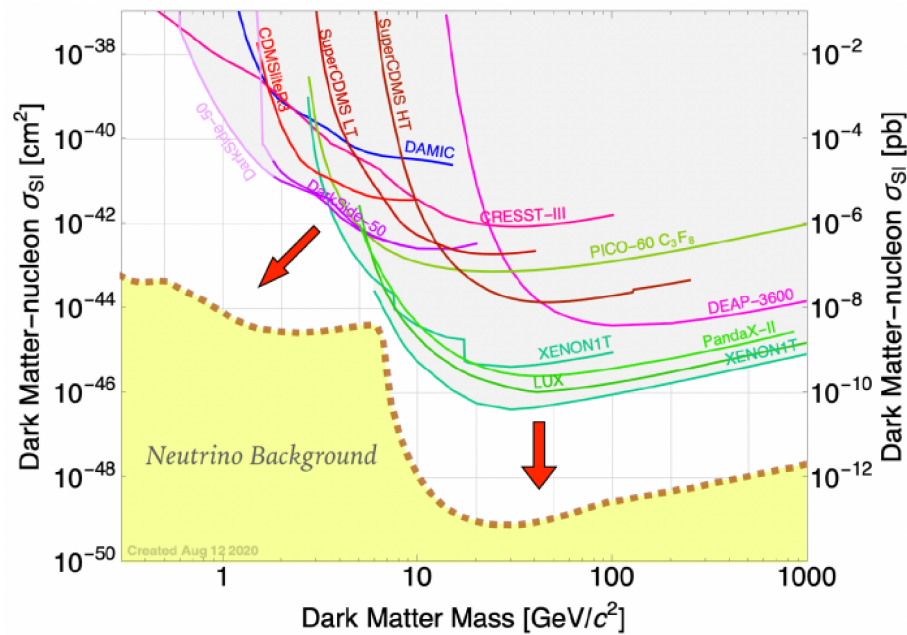


Figura 7 – Limites vindos de experimentos como XENON1T [34], LUX [29], SuperCDMS [32], PandaX-II [30] e PICO-60 [33] já citados anteriormente, além de outros experimentos [35].

2.4.3 Detecção Indireta e seus Experimentos

A detecção indireta de matéria escura procura identificar possíveis produtos visíveis de interações envolvendo matéria escura, originando da matéria escura já presente no cosmos. Em particular, buscas indiretas normalmente focam em procurar por partículas do modelo padrão produzidas pelo decaimento ou aniquilação de matéria escura, ou seus efeitos secundários. A detecção indireta se aproveita da grande quantidade de matéria escura que existe no universo (com a densidade de energia cinco vezes a da matéria bariônica, sob um volume cosmológico), e a existência de telescópios que provem sensibilidade para fontes exóticas de partículas do modelo padrão. Entretanto, detecção indireta sofre com alguns desafios já que a matéria escura interage apenas de forma fraca com partículas do modelo padrão, então a taxa de produção de partículas é esperada para ser pequena, e muitos dos canais para possível detecção sofrem de um potencial ruído de fundo vindo de produção astrofísica de partículas. Mas a técnica possibilita ainda pensar em responder alguns pontos como sobre a estabilidade da matéria escura e a explicação de sua abundância observada.

Esse tipo de detecção normalmente buscam sinais dessas aniquilações e decaimentos através de observar elas em fluxos de raios cósmicos como: 1) neutrinos com a colaboração ‘*Antarctic Muon And Neutrino Detector Array*’ (AMANDA) [36]; 2) partículas carregadas como elétrons e pósitrons com a colaboração ‘*Payload for Antimatter Matter Exploration and Light-nuclei Astrophysics*’ (PAMELA) [37] feito com pósitrons; e 3) fótons em radiação gama com a colaboração ‘*Fermi Large Area Telescope*’ (Fermi-LAT) [38]. Colaborações como Planck [1] também são dessa leva de detecção indireta já que ele aborda a observação de eventos na radiação cósmica de fundo.

3 Cosmologia e Termodinâmica do Início do Universo

3.1 Introdução

Um das maneiras de estudar a matéria escura é fazendo o uso de densidade de relíquia térmica. Para esse estudo precisamos ter conhecimento sobre cosmologia, termodinâmica e mecânica estatística. Antes de partirmos para o estudo de relíquias iremos introduzir alguns conceitos importantes dos três ramos citados.

O primeiro passo será estudar um pouco de cosmologia. Começaremos estudando a métrica FLRW e o uso da relatividade para o estudo dela. Com a métrica podemos trabalhar com algumas relações envolvendo o fator de escala $a(t)$, densidade de energia ρ e a pressão P . Essas relações envolvendo $a(t)$ podem nos dizer o comportamento dele em alguns cenários de composição dominante no Universo.

Em seguida, usando de base a termodinâmica e a mecânica estatística é possível estudar o equilíbrio termodinâmico no universo e as transições dos domínios de composição do universo. Também podemos entender melhor como funciona a densidade de matéria, o número efetivo de espécies de partículas, a entropia e processos de desacoplamento.

Os tópicos levantados nesse capítulo irão auxiliar no estudo da densidade de relíquia, desde o desenvolvimento do mesmo até o uso dele para o estudo de uma partícula de matéria escura.

3.2 Cosmologia

O primeiro passo será o estudo da cosmologia com a apresentação da métrica. Passaremos para o uso da relatividade geral, com as equações de campo de Einstein, nessa métrica, para então entendermos algumas relações envolvendo o fator de escala $a(t)$, a densidade de energia ρ e a pressão P . Terminando com o estudo de alguns cenários de composição dominante para eras do Universo. Esse estudo será feito tendo como base o livro de Bailin & Love [39].

3.2.1 A Métrica FLRW (Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker)

A descrição padrão do universo envolve considerá-lo em grande escala (100Mpc/h [40]) como homogêneo (todos os pontos do espaço são equivalentes) e isotrópico (em cada ponto do espaço, todas as direções são equivalentes). Essa descrição é feita atra-

vés de uma métrica envolvendo um fator de escala $a(t)$. A métrica apropriada é a de Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker:

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t) \left(\frac{dr^2}{1 - kr^2} + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\phi^2 \right), \quad (3.1)$$

em que as coordenadas comóveis (t, r, θ, ϕ) são as coordenadas de um observador em queda livre no campo gravitacional do universo. O parâmetro k está relacionado à curvatura do universo podendo ser $-1, 0, +1$ (aberto, plano, fechado). De acordo com os dados da colaboração Planck [1] podemos considerar que vivemos em um universo plano.

3.2.2 Equações de Einstein para a Métrica FLRW

Um próximo passo é o estudo das equações de campo de Einstein usando a métrica FLRW. As equações de campo de Einstein estão reunidas na seguinte expressão:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G_N T_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu}, \quad (3.2)$$

em que G_N é a constante gravitacional de Newton, $T_{\mu\nu}$ o tensor de energia-momento, $R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}$ o escalar de curvatura. Com

$$R_{\mu\nu} = \partial_k \Gamma_{ij}^k - \partial_j \Gamma_{ik}^k + \Gamma_{ij}^k \Gamma_{km}^m - \Gamma_{im}^k \Gamma_{jk}^m, \quad (3.3)$$

sendo o tensor de Ricci escrito em função dos símbolos de Christoffel que por sua vez são escritos como:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} g^{km} (\partial_j g_{mi} + \partial_i g_{mj} - \partial_m g_{ij}), \quad (3.4)$$

e Λ a constante cosmológica $\Lambda = (4.24 \pm 0.11) \times 10^{-66} \text{ eV}^2$ de acordo com a colaboração Planck [1].

Para encontrarmos uma solução para as equações de campo é preciso usar a métrica e achar os tensores referentes a ela. Para o tensor de Ricci, os únicos símbolos de Christoffel diferentes de zero serão:

$$\begin{aligned} \Gamma_{ij}^0 &= -\frac{\dot{a}}{a} g_{ij} & \Gamma_{j0}^i &= \frac{\dot{a}}{a} \delta_{ij} = \Gamma_{0j}^i \\ \Gamma_{jk}^i &= \frac{1}{2} (\partial_k g_{lj} + \partial_j g_{lk} - \partial_l g_{jk}) = \tilde{\Gamma}_{jk}^i. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Deixando assim o tensor de Ricci com as seguintes componentes diferente de zero

$$R_{00} = -3 \frac{\ddot{a}}{a} \quad \text{e} \quad R_{ij} = - \left[\frac{\ddot{a}}{a} + 2 \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{2k}{a^2} \right] g_{ij}, \quad (3.6)$$

e o escalar de curvatura

$$R = -6 \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{k}{a^2} \right]. \quad (3.7)$$

Por último é necessário o tensor de energia-momento. E para um fluido perfeito com densidade de energia ρ e pressão P , as componentes diferentes de zero são

$$T_{00} = \rho \quad \text{e} \quad T_{ij} = -P \delta_{ij} \quad (3.8)$$

Com isso encontramos as seguintes resoluções para as equações de campo de Einstein. Primeiro para a componente 00,

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = \frac{8\pi G_N}{3}\rho + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.9)$$

também conhecida como equação de Friedmann. E para as componentes $i - j$

$$2\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{k}{a^2} = -8\pi G_N p + \Lambda. \quad (3.10)$$

Subtraindo a Eq.(3.9) da Eq.(3.10) teremos uma equação para \ddot{a}

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G_N}{3}(\rho + 3p) + \frac{\Lambda}{3} \quad (3.11)$$

conhecida como equação de Raychaudhuri.

Já que o Universo pode ser considerado um universo plano ($k = 0$) e que constante cosmológica, no início do universo em uma época que ela não era dominante, é bem pequena quase igual a zero ($\Lambda = 0$). Nesse caso, a Eq.(3.9) é

$$\rho \equiv \rho_c = \frac{3H^2}{8\pi G_N} = 3M_{\text{Planck}}^2 H^2, \quad (3.12)$$

em que $H \equiv \dot{a}/a$ é o parâmetro de Hubble e $M_{\text{Planck}}^2 = 1/8\pi G_N = m_{\text{Planck}}^2/8\pi$ é a massa reduzida de Planck, com m_{Planck} a massa de Planck ($m_{\text{Planck}} \simeq 1.22 \times 10^{19} \text{GeV}$).

Assim como o parâmetro de Hubble varia com o tempo, ρ_c também varia. O parâmetro de densidade Ω é definido como

$$\Omega \equiv \frac{\rho}{\rho_c}. \quad (3.13)$$

E a medida da densidade é a razão com a densidade crítica ρ_c .

Podemos também estudar a equação de conservação de energia usando o tensor de energia-momento

$$D_\nu T^{\mu\nu} = 0, \quad (3.14)$$

em que

$$D_\lambda V^\mu = \partial_\lambda V^\mu + \Gamma_{\lambda\rho}^\mu V^\rho \quad (3.15)$$

é a derivada covariante. A componente $\mu = 0$ leva a equação de continuidade

$$\dot{\rho} + 3(\rho + P)\frac{\dot{a}}{a} = 0. \quad (3.16)$$

Podemos relacionar a densidade de energia ρ e o fator de escala $a(t)$ se escrevermos:

$$P = w\rho. \quad (3.17)$$

Então a Eq.(3.16) leva a

$$\rho \propto a^{-3(1+w)}. \quad (3.18)$$

Com isso é possível estudar certos cenários e suas dominâncias:

$$\left\{ \begin{array}{ll} w = 0, P = 0, \rho \propto a^{-3} & \text{matéria bariônica (poeira), matéria escura fria,} \\ w = \frac{1}{3}, P = \frac{1}{3}\rho, \rho \propto a^{-4} & \text{radiação (luz, matéria relativística),} \\ w = -1, P = -\rho, \rho = \text{cte} & \text{constante cosmológica (energia escura).} \end{array} \right.$$

Já usando a Eq.(3.12), com $H \equiv \dot{a}/a$, teremos a relação

$$a(t) \propto t^{\frac{2}{3(1+w)}}. \quad (3.19)$$

Nos cenários particulares já estudados, teremos:

$$\left\{ \begin{array}{ll} a \propto t^{2/3}, H = \frac{2}{3}t^{-1} & \text{matéria bariônica (poeira), matéria escura fria,} \\ a \propto t^{1/2}, H = \frac{2}{3}t^{-1} & \text{radiação (luz, matéria relativística).} \end{array} \right.$$

Essas relações terão importância ao estudarmos a evolução do fator de escala na conservação de entropia.

3.3 Termodinâmica do Início do Universo

Para continuarmos desenvolvendo as ferramentas para o estudo da densidade de relíquia, é preciso um entendimento sobre a termodinâmica do início do Universo. Dessa vez com base no livro de Oliver Piattella [41]. Nesse estudo iremos aplicar o que vimos até então de cosmologia. Principalmente a consideração de que o Universo funciona como um universo isotrópico e homogêneo caracterizado pela métrica FLRW.

Também faremos o uso da mecânica estatística para estudar fluidos em estado de equilíbrio, bem no início. Para isso faremos o uso de funções de distribuição, $f(\vec{x}, \vec{p}, t)$ aplicadas nas considerações feitas sobre o Universo.

3.3.1 Densidades de Partículas, de Energia e de Pressão

Para podermos construir a densidade de partículas, de energia e de pressão precisaremos trabalhar com uma função de distribuição $f(\vec{x}, \vec{p}, t) \in \mathbb{R}$. A densidade de partículas é dada por:

$$n(\vec{x}, \vec{p}, t) = g \frac{1}{(2\pi)^3} f(\vec{x}, \vec{p}, t), \quad (3.20)$$

em que g é o fator de degenerescência da espécie partícula (por exemplo para os léptons $g = 2$, para os bósons W^\pm e Z $g = 3$ e para o fóton $g = 2$).

É possível encontrar a densidade espacial de partículas integrando no momento:

$$n(\vec{x}, t) = g \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} f(\vec{x}, \vec{p}, t). \quad (3.21)$$

O número total de partículas vem quando integramos a densidade espacial nas variáveis espaciais:

$$N(t) = \int d^3\vec{x} n(\vec{x}, t). \quad (3.22)$$

Uma vez que consideramos o universo como um universo isotrópico e homogêneo, temos $f(\vec{x}, \vec{p}, t) = f(p, t)$.

Podemos escrever também expressões para densidade de energia e de pressão. A densidade de energia é dada por:

$$\rho(t) = g \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} f(p, t) E(p). \quad (3.23)$$

Já a de pressão é dada por:

$$P = g \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} f(p, t) \frac{p^2}{3E(p)}. \quad (3.24)$$

Em que a expressão da energia depende se estamos no limite não relativístico ou relativístico, e é dada por:

$$E(p) = \begin{cases} m + \frac{p^2}{2m} & \text{não relativística.} \\ \sqrt{p^2 + m^2} & \text{relativística.} \end{cases} \quad (3.25)$$

Podemos considerar uma distribuição de um gás de partículas em equilíbrio cinético, dada pela distribuição de Fermi-Dirac para férmions e Bose-Einstein para bósons:

$$f_{\text{FD,BE}}(p, t) = \frac{1}{\exp((E - \mu)/T) \pm 1}, \quad (3.26)$$

com $+1$ para férmions e -1 para bósons, e μ o potencial químico. Se as partículas estiverem em equilíbrio químico encontramos uma situação em que os potenciais químicos das partículas envolvidas em uma reação estão correlacionados.

$$1 + 2 \longleftrightarrow 3 + 4,$$

$$\mu_1 + \mu_2 = \mu_3 + \mu_4,$$

Iremos considerar um gás de partículas fracamente interagentes ($\mu = 0$).

$$f_{\text{FD,BE}}(p) = \frac{1}{\exp(E/T) \pm 1}. \quad (3.27)$$

Se usarmos o cenário relativístico $E = \sqrt{p^2 + m^2}$, teremos a função distribuição:

$$f_{\text{FD,BE}}(p) = \frac{1}{\exp((\sqrt{p^2 + m^2})/T) \pm 1}. \quad (3.28)$$

Agora podemos calcular a densidade de partículas

$$\begin{aligned} n &= \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} g f(p) = \frac{g}{(2\pi)^3} \int_0^\infty \frac{p^2 d\Omega dp}{\exp((\sqrt{p^2 + m^2})/T) \pm 1} \\ &= \frac{g}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{p^2 dp}{\exp((\sqrt{p^2 + m^2})/T) \pm 1}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Aqui usamos $d^3p = p^2 d\Omega dp$ e $d\Omega = 4\pi$.

Se fizermos mudanças de variável, usando $\xi = p/T$, $d\xi = dp/T$ e $x = m/T$

$$n = \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2 d\xi}{\exp(\sqrt{\xi^2 + x^2}) \pm 1}. \quad (3.30)$$

Podemos usar alguns resultados já conhecidos para resolver a integral:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{\xi^n}{e^\xi - 1} d\xi &= \zeta(n+1)\Gamma(n+1), \\ \int_0^\infty \xi^n e^{-\xi^2} d\xi &= \frac{1}{2}\Gamma[(n+1)/2]. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Em que Γ e ζ as funções gamma e zeta respectivamente.

Então podemos resolver para o caso no limite ultrarrelativístico e no limite não relativístico:

1) No limite ultrarrelativístico, $p \gg m \Rightarrow \xi \gg x$:

a) **bósons:**

$$n = \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2}{e^\xi - 1} d\xi = \frac{gT^3}{2\pi^2} \zeta(3)\Gamma(3). \quad (3.32)$$

b) **férmions:**

$$n = \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2}{e^\xi + 1} d\xi = \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \xi^2 \left(\frac{1}{e^\xi - 1} - \frac{2}{e^{2\xi} - 1} \right) d\xi = \frac{3}{4} \frac{gT^3}{2\pi^2} \zeta(3)\Gamma(3). \quad (3.33)$$

2) No limite não relativístico, $m \gg T \Rightarrow x \gg 1$

$$\begin{aligned} n &= \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2}{\exp(\sqrt{\xi^2 + x^2})} d\xi \simeq \frac{gT^3}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2}{\exp(x + \frac{\xi^2}{2x})} d\xi \\ &= \frac{gT^3}{2\pi^2} e^{-x} \int_0^\infty \xi^2 \exp\left(-\frac{\xi^2}{2x}\right) d\xi = \frac{gT^3}{2\pi^2} (2x)^{\frac{3}{2}} e^{-x} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} e^{-\frac{m}{T}}. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Com uma expressão para a densidade de partículas, podemos calcular a densidade de energia e de pressão. Usamos as expressões dadas anteriormente Eq.(3.23) e Eq.(3.24), substituindo a energia por $E = \sqrt{p^2 + m^2}$. Resolvemos da mesma maneira que acabamos de resolver.

Primeiro fazemos para a densidade de energia.

$$\begin{aligned} \rho &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} g f(p) \sqrt{p^2 + m^2} = \frac{g}{(2\pi^2)} \int_0^\infty \frac{p^2 \sqrt{p^2 + m^2}}{\exp(\sqrt{p^2 + m^2}/T) \pm 1} dp \\ &= \frac{gT^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^2 \sqrt{\xi^2 + x^2}}{\exp(\sqrt{\xi^2 + x^2}) \pm 1} d\xi. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Seguido para a pressão.

$$\begin{aligned}
 P &= \int \frac{d^3\vec{p}}{(2\pi)^3} g f(p) \frac{p^2}{3\sqrt{p^2 + m^2}} = \frac{1}{3} \frac{g}{(2\pi^2)} \int_0^\infty \frac{p^4 / \sqrt{p^2 + m^2}}{\exp(\sqrt{p^2 + m^2}/T) \pm 1} dp \\
 &= \frac{1}{3} \frac{gT^4}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{\xi^4 / \sqrt{\xi^2 + x^2}}{\exp(\sqrt{\xi^2 + x^2}) \pm 1} d\xi.
 \end{aligned} \tag{3.36}$$

Mais uma vez para resolvermos as integrais utilizamos os resultados prontos e fazemos os limites ultrarrelativístico e não relativístico.

1) Ultrarrelativístico:

$$\begin{aligned}
 \rho &= \frac{gT^4\pi^2}{30} * \begin{cases} 1 & \text{bósons,} \\ \frac{7}{8} & \text{férmions,} \end{cases} \\
 P &= \frac{\rho}{3}.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

2) Não relativístico:

$$\begin{aligned}
 \rho &= mn, \\
 P &= nT \ll \rho.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

3.3.2 Número Efetivo de Espécies Relativísticas

A densidade de energia total em forma de radiação pode ser escrita para uma mistura de partículas i da seguinte forma:

$$\rho_r = \sum \rho_i = \frac{\pi^2 T^4}{30} g_*(T), \tag{3.39}$$

em que $g_*(T)$ é o número efetivo de espécies relativística e T a temperatura dos fótons.

Existem duas situações para $g_*(T)$:

1) Partículas em equilíbrio térmico com os fótons:

$$g_*(T) = \sum_{\text{bósons}} g_i + \frac{7}{8} \sum_{\text{férmions}} g_i. \tag{3.40}$$

2) Partículas com temperatura T_i , já desacopladas do banho térmico de fótons:

$$g_*(T) = \sum_{\text{bósons}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4 + \frac{7}{8} \sum_{\text{férmions}} g_i \left(\frac{T_i}{T} \right)^4. \tag{3.41}$$

Para as partículas do Modelo Padrão em equilíbrio térmico teremos para os bósons os valores de g como $8 \times 2 = 16$ para os glúons, 3 para os bósons W^\pm e Z , 2 para o fótons e 1 para o bóson de Higgs, então $g_{*\text{bósons}} = 16 + 3 + 3 + 3 + 2 + 1 = 28$. Já para os férmions teremos g como $2 \times 2 \times 3 = 12$ para as duplas de quarks t e \bar{t} , b e \bar{b} , c e \bar{c} , s e \bar{s} , d e \bar{d} e u e \bar{u} , $2 \times 2 = 4$ para as duplas de léptons e e \bar{e} , μ e $\bar{\mu}$ e τ e $\bar{\tau}$ e $2 \times 1 = 2$ para as duplas de neutrinos

ν_e e $\bar{\nu}_e$, ν_μ e $\bar{\nu}_\mu$ e ν_τ e $\bar{\nu}_\tau$, então $g_{*\text{férmions}} = 12+12+12+12+12+12+4+4+4+2+2+2 = 90$. Substituindo em Eq.(3.40), teremos:

$$g_* = 28 + \frac{7}{8}90 = 106.75. \quad (3.42)$$

O número efetivo de espécies será útil mais a frente quando formos estudar ele com base nos neutrinos.

3.3.3 Entropia

Podemos trabalhar também com a entropia de uma distribuição térmica e a conservação de sua densidade. Um passo importante para entender algumas evoluções de partículas e o estudo de alguns processos. Podemos fazer partindo de resultados já obtidos, com o uso de argumentos termodinâmicos. Usando a primeira lei da termodinâmica e considerando $U = \rho V$, teremos:

$$\begin{aligned} TdS &= dU + PdV = Vd\rho + (P + \rho)dV \\ &= V \frac{d\rho}{dT} dT + (P + \rho)dV \\ dS &= \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT} dT + \frac{P + \rho}{T} dV. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Escrevendo dS como:

$$dS = \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V dT + \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T dV, \quad (3.44)$$

e comparando ela com a Eq.(3.43), teremos:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_V &= \frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT}, \\ \left(\frac{\partial S}{\partial V} \right)_T &= \frac{P + \rho}{T}. \end{aligned} \quad (3.45)$$

Uma condição imposta a S para que dS seja um diferencial exato é que as suas segundas derivadas sejam iguais, ou seja,

$$\frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} = \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V}. \quad (3.46)$$

Escrevendo as segundas derivadas da entropia:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S}{\partial V \partial T} &= \frac{\partial}{\partial V} \left(\frac{V}{T} \frac{d\rho}{dT} \right) = \frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT}, \\ \frac{\partial^2 S}{\partial T \partial V} &= \frac{\partial}{\partial T} \left(\frac{P + \rho}{T} \right) = -\frac{(P + \rho)}{T^2} + \frac{1}{T} \frac{dP}{dT} + \frac{1}{T} \frac{d\rho}{dT}. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Podemos igualar as duas e obter:

$$\frac{\partial P}{\partial T} = \frac{P + \rho}{T}. \quad (3.48)$$

Com esse resultado podemos expressar a variação da entropia como:

$$\begin{aligned} dS &= \frac{1}{T}[d[(P + \rho)V] - VdP] \\ &= \frac{1}{T}d[(P + \rho)V] - \frac{V}{T^2}(P + \rho)dT = d\left[\frac{P + \rho}{T}V\right]. \end{aligned} \quad (3.49)$$

O que nos deixa com a seguinte expressão para a densidade de entropia:

$$s = \frac{S}{V} = \frac{P + \rho}{T}. \quad (3.50)$$

Podemos ainda verificar que a expressão obtida para a densidade de entropia de fato leva à conservação da mesma em um volume comóvel constante, $a^3s = cte$.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(sa^3) &= \frac{d}{dt}\left[\frac{\rho + P}{T}a^3\right] \\ &= \frac{a^3}{T}\left[\dot{\rho} + \dot{P} - \frac{\rho + P}{T}\dot{T} + 3H(\rho + P)\right] \\ &= \frac{a^3}{T}\left[\dot{\rho} + \left(\frac{dP}{dT} - \frac{\rho + P}{T}\right)\dot{T} + 3H(\rho + P)\right]. \end{aligned} \quad (3.51)$$

Utilizando a equação da continuidade Eq.(3.16) e que $\frac{dP}{dT} = \frac{\rho + P}{T}$ teremos:

$$\frac{d}{dt}(sa^3) = 0. \quad (3.52)$$

Esse resultado também será importante para quando estudarmos o número efetivo de espécies de neutrinos já que a conservação da densidade de entropia será usada para estudarmos a mudança de temperatura antes e depois de processos chaves.

3.3.4 Desacoplamento Térmico

Ao considerarmos um fluido com densidade de partículas n . A taxa de interações é definida como:

$$\Gamma = n\sigma v, \quad (3.53)$$

em que σ a seção de choque e v a velocidade média das partículas.

O tempo médio entre colisões em um universo estático associado a Γ é $t_v = \frac{1}{\Gamma}$. Existe também uma escala de tempo associada à taxa de expansão H que é $t_H = \frac{1}{H}$. Para o equilíbrio ocorrer, as interações devem ocorrer a uma taxa superior à da expansão do universo $\Gamma \gg H \Leftrightarrow t_v \ll t_H$. Com a expansão do universo, Γ , diminui e diferentes tipos de partículas desacoplam do banho térmico quando:

$$\Gamma \sim H. \quad (3.54)$$

As interações dos neutrinos com outras partículas são medidas com a força fraca. Para as interações fracas $\sigma \sim G_F^2 T^2$, em que $G_F = 1.1663787 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ é a constante de Fermi. Então, $\Gamma \sim n_\nu \sigma \sim G_F^2 T^5$ já que $n_\nu \sim T^3$.

Quando comparamos com a taxa de expansão do universo ($H^2 \sim \rho/m_{\text{Planck}}^2 \sim T^4/m_{\text{Planck}}^2$) vemos que $\frac{\Gamma}{H} \sim m_{\text{Planck}} G_F^2 T^3 \rightarrow (\frac{T}{1\text{Mev}})^3 \sim 10^{10}\text{K}$. Então, quando $T \sim 1\text{Mev}$ os neutrinos se desacoplam do banho térmico.

Mais uma vez temos um ponto importante para o estudo que faremos do número efetivo de espécies de neutrinos já que no cenário que estudaremos precisaremos considerar processos que ocorrem após o desacoplamento dos neutrinos.

4 Equação De Boltzmann

4.1 Introdução

Um ponto importante no estudo de matéria escura é o estudo de densidade de relíquia, pois ao estudá-la podemos relacionar seu valor com dados obtidos por observações como a da colaboração Planck [1]. Seu estudo pode ser feito através da equação de Boltzmann e do uso do conteúdo apresentado no Cap.(3).

Nosso estudo começará com a dedução da equação de Boltzmann que pode ser feita com base nos livros de Oliver Piattella [41] e de Kolb & Turner [42]. Mas para trabalharmos com a essa equação precisamos fazer um estudo dos itens importantes que usaremos para o cálculo da mesma. O primeiro passo é usar a densidade do número de partículas em equilíbrio n^{eq} que é encontrada como feito na Seção.(3.3). Seguindo da seção de choque, σ , junto com a média térmica da seção de choque vezes a velocidade relativa, $\langle\sigma|v|\rangle$ [43].

4.2 Equação de Boltzmann

Uma importante ferramenta matemática para lidar com relíquias térmicas é a equação de Boltzmann. Podemos escrever ela de uma maneira genérica da seguinte maneira:

$$\hat{L}[f] = \hat{C}[f], \quad (4.1)$$

em que $f = f(\vec{p}, \vec{x}, t)$ é a função de distribuição, \hat{L} é o operador de Liouville que descreve a mudança no tempo da função distribuição, e \hat{C} é o operador de colisão que descreve o número de partículas perdido, ou ganhado, por unidade de tempo no sistema.

Primeiro vamos cuidar do operador de Liouville que é escrito na sua forma covariante usando o fato de que escrevendo o operador como uma derivada total em função de um parâmetro afim λ , temos

$$\hat{L}_{\text{cov}} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} + \frac{\partial}{\partial p^\mu} \frac{dp^\mu}{d\lambda} \quad (4.2)$$

ao longo da geodésica $x^\alpha(\lambda)$. Temos λ de modo que $p^\alpha = dx^\alpha/d\lambda$, então podemos pegar a equação da geodésica

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha \frac{dx^\beta}{d\lambda} \frac{dx^\delta}{d\lambda} = 0, \quad (4.3)$$

e escrever como

$$\frac{dp^\alpha}{d\lambda} + \Gamma_{\beta\delta}^\alpha p^\beta p^\delta = 0 \rightarrow \frac{dp^\alpha}{d\lambda} = -\Gamma_{\beta\delta}^\alpha p^\beta p^\delta. \quad (4.4)$$

Voltando na expressão para \hat{L} em Eq.(4.2) e substituindo ficamos com a forma covariante igual a

$$\hat{L}_{\text{cov}} = p^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} - \Gamma_{\beta\delta}^\alpha p^\beta p^\delta \frac{\partial}{\partial p^\alpha}. \quad (4.5)$$

Essa expressão na sua forma não relativística é:

$$\hat{L}_{\text{NR}} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{d\vec{x}}{dt} \vec{\nabla}_x + \frac{d\vec{v}}{dt} \vec{\nabla}_v, \quad (4.6)$$

que é a derivada temporal total.

Em um universo homogêneo e isotrópico, podemos escrever

$$f(\vec{x}, \vec{p}, t) \rightarrow f(|\vec{p}|, t) \text{ ou } f(E, t). \quad (4.7)$$

Substituindo em \hat{L}_{cov} na Eq.(4.5) com $x^\alpha = (t, x, y, z)$, $p^\alpha = (E, |\vec{P}|)$ e $\Gamma_{ij}^0 = (\dot{a}/a)g_{ij}$ (símbolo de Christoffel dado em Eq.(3.5) para a métrica FRLW), e considerando um cenário sem colisões ($\hat{C}[f] = 0$, mas como $\hat{L}[f] = \hat{C}[f]$ teremos $\hat{L}[f] = 0$), temos

$$\hat{L}[f] = E \frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p^2 \frac{\partial f}{\partial E}. \quad (4.8)$$

Como o interesse aqui é relacionado a densidade do número de partículas, é interessante usar (como vimos na Seção.(3.3))

$$n(t) = g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(E, t). \quad (4.9)$$

Para fazermos o cálculo envolvendo \hat{L} , temos

$$\begin{aligned} \int \hat{L}[f] g \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} &= E \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p^2 \frac{1}{E} \frac{\partial f}{\partial E} \right) g \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \\ &= E \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p^2 \frac{1}{E} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial E} \right) g \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Nesse momento usaremos

$$\begin{aligned} p &= \sqrt{E^2 - m^2}, \\ \frac{\partial p}{\partial E} &= \frac{1}{2} 2E \frac{1}{\sqrt{E^2 - m^2}} = \frac{E}{p}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Substituindo, temos

$$\int \hat{L}[f] g \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = E \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} p^2 \frac{1}{E} \frac{\partial f}{\partial p} \frac{E}{p} \right) g \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} = E \int \left(\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\dot{a}}{a} \frac{\partial f}{\partial p} \right) g \frac{d^3 p}{(2\pi)^3}. \quad (4.12)$$

Agora basta resolvermos a integral. O primeiro termo é

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f(E, t) \right] = \frac{\partial n}{\partial t} = \dot{n}. \quad (4.13)$$

Já o segundo termo é preciso primeiro substituir $d^3p = p^2 d\Omega dp = 4\pi p^2 dp$ e fazer uma integração por partes

$$\begin{aligned} g \int \frac{dp}{(2\pi)^3} 4\pi p^2 \frac{\dot{a}}{a} p \frac{\partial f}{\partial p} &= \frac{\dot{a}}{a} g \frac{1}{2\pi^2} \int dp p^3 \frac{\partial f}{\partial p} = -\frac{\dot{a}}{a} g \frac{1}{2\pi^2} \int 3p^2 dp f \\ &= -3 \frac{\dot{a}}{a} g \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} f(E, t) = -3 \frac{\dot{a}}{a} n. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Aqui na integração por partes nós só colocamos o segundo termo pois o primeiro vai para zero nos limites de integração utilizados. Juntando tudo e usando $H = \dot{a}/a$, temos

$$E(\dot{n} + 3Hn) = 0. \quad (4.15)$$

Note que podemos ainda escrever o lado direito de outra forma

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(na^3)}{dt} = \dot{n} + 3Hn = 0. \quad (4.16)$$

No próximo passo iremos preocupar com o lado da expressão envolvendo o operador de colisão. Iremos considerar uma interação do tipo

$$1 + 2 \leftrightarrow 3 + 4. \quad (4.17)$$

Iremos continuar a dedução da equação de Boltzmann usando uma das partículas como ponto de partida, a partícula 1. Podemos escrever:

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - Hp_1 \frac{\partial f_1}{\partial p_1} = \frac{1}{p_1^0} \hat{C}[f], \quad (4.18)$$

e poderemos usar o resultado da Eq.(4.16) para o lado envolvendo \hat{L} . Então, teremos:

$$\frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} = \int \hat{C}[f] g \frac{1}{E_1} \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} \quad (4.19)$$

O operador de colisão tem uma expressão geral que nos permite escrever a equação da seguinte maneira

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^3} \frac{d(n_1 a^3)}{dt} &= \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \\ &\times (2\pi)^4 \delta^{(3)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2 \\ &\times [f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4)], \end{aligned} \quad (4.20)$$

Sumimos com g porque agora incorporamos ele nas funções de distribuição. A integração é feita nos momentos das partículas e também temos as funções deltas de Dirac por causa da conservação do quadrimomento. A parte fundamental da interação está representada pela amplitude do processo, $|\mathcal{M}|^2$. Por fim temos $f_3 f_4 - f_1 f_2$ representando um balanço, aqui como referência a partícula 1, já que quanto mais partículas 3 e 4 nós temos, mais

elas reagem e produzem partículas 1 e 2 e o mesmo vale para o inverso. As contribuições do tipo $1 + f$ e $1 - f$ são relacionados a função de distribuição dependendo das partículas envolvidas e representam o fato de que é mais fácil produzir um bóson que um férmion, por causa do princípio de exclusão de Pauli.

O próximo passo é tentar simplificar nossa expressão. Podemos assumir equilíbrio térmico e temperaturas suficientemente pequenas de maneira que $E - \mu \gg k_B T$ para que possamos usar as funções de distribuição Fermi-Dirac e Bose-Einstein como uma versão simplificada (a distribuição de Maxwell-Boltzmann)

$$f \approx e^{-E/(k_B T)} e^{\mu/k_B T} \quad (4.21)$$

Usando essa distribuição, lembrando que $E_3 + E_4 = E_1 + E_2$ e ignorando as partes envolvendo $1 + f$ e $1 - f$. Podemos reescrever o termo final da nossa expressão como

$$\begin{aligned} & f_3 f_4 (1 \pm f_1)(1 \pm f_2) - f_1 f_2 (1 \pm f_3)(1 \pm f_4) \\ & \approx e^{-(E_1+E_2)/(k_B T)} [e^{(\mu_3+\mu_4)/(k_B T)} - e^{(\mu_1+\mu_2)/(k_B T)}]. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Com a aproximação da função de distribuição podemos dar uma nova cara para a densidade do número de partículas

$$n = g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} f \approx g e^{\mu/(k_B T)} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E/(k_B T)}, \quad (4.23)$$

em que foi possível colocar o potencial químico para fora da integral uma vez que ele não depende do momento da partícula mas sim da temperatura do banho térmico. Ainda podemos definir uma situação de equilíbrio $\mu = 0$ como

$$n^{\text{eq}} = g \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-E/(k_B T)}. \quad (4.24)$$

Antes de aplicarmos tudo isso na nossa expressão para a equação de Boltzmann, podemos fazer uma última consideração. Podemos definir a média térmica do produto da seção de choque com a velocidade relativa como

$$\begin{aligned} \langle \sigma v_{\text{rel}} \rangle & \equiv \frac{1}{n_1^{\text{eq}} n_2^{\text{eq}}} \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \int \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \\ & \times (2\pi)^4 \delta^{(3)}(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \delta(E_1 + E_2 - E_3 - E_4) |\mathcal{M}|^2 e^{-(E_1+E_2)/(k_B T)}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Juntando tudo isso na Eq.(4.20), ficamos com a seguinte equação de Boltzmann:

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = n_1^{\text{eq}} n_2^{\text{eq}} \langle \sigma v_{\text{rel}} \rangle \left(\frac{n_3 n_4}{n_3^{\text{eq}} n_4^{\text{eq}}} - \frac{n_1 n_2}{n_1^{\text{eq}} n_2^{\text{eq}}} \right). \quad (4.26)$$

Na situação de relíquias térmicas consideramos que as partículas 3 e 4 se encontram em equilíbrio térmico, o que nos permite assumir $n_3 = n_3^{\text{eq}}$ e $n_4 = n_4^{\text{eq}}$. Nos deixando com a equação de Boltzmann escrita como:

$$\dot{n}_1 + 3Hn_1 = \langle \sigma v_{\text{rel}} \rangle (n_1^{\text{eq}} n_2^{\text{eq}} - n_1 n_2). \quad (4.27)$$

Temos que n_1 e n_2 representam uma partícula de matéria escura e sua anti-partícula. O que nos permite escrever $n_1 = n_2 = n_\chi$ e $n_1^{\text{eq}} = n_2^{\text{eq}} = n_\chi^{\text{eq}}$. O que nos deixa com a versão final da equação de Boltzmann como

$$\dot{n}_\chi + 3Hn_\chi = \langle \sigma v_{\text{rel}} \rangle [n_{\chi^{\text{eq}}}^2 - n_\chi^2]. \quad (4.28)$$

A realidade é que o uso da velocidade relativa na média da seção de choque com essa velocidade não é tão preciso para partículas relativísticas. Isso foi mostrado por Gondolo e Gelmini [43]. O jeito para deixarmos a expressão propícia para partículas relativísticas é através do uso da velocidade de Møller para o termo de seção de choque como veremos a seguir.

Escrevendo o termo envolvendo a seção de choque para um processo $1 + 2 \rightarrow 3 + 4$ como

$$\sum_{\text{spins}} \int |\mathcal{M}_{12 \rightarrow 34}|^2 (2\pi)^4 \delta^4(p_1 + p_2 - p_3 - p_4) \frac{d^3 p_3}{(2\pi)^3 2E_3} \frac{d^3 p_4}{(2\pi)^3 2E_4} = 4F g_1 g_2 \sigma_{12 \rightarrow 34}, \quad (4.29)$$

em que $F = [(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2]^{1/2}$ e g_1 e g_2 são fatores do spin que aparecem da média dos spins iniciais.

Para incluir todos os canais finais acessíveis basta substituir $\sigma_{12 \rightarrow 34}$ com a seção de choque de aniquilação total: $\sigma = \sum_{\text{todos } f} \sigma_{12 \rightarrow f}$. Com isso é possível escrever:

$$g_1 \int C[f_1] \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} = - \int \sigma v_{\text{Møll}} (dn_1 dn_2 - dn_1^{\text{eq}} dn_2^{\text{eq}}). \quad (4.30)$$

Aqui, escrevemos

$$v_{\text{Møll}} = \frac{F}{E_1 E_2}, \quad (4.31)$$

ou considerando $v_1 = p_1/E_1$ e $v_2 = p_2/E_2$ temos

$$v_{\text{Møll}} = [|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|^2 - |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2|^2]^{1/2}, \quad (4.32)$$

note que essa expressão é a raiz da velocidade relativa $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ ao quadrado menos um segundo fator ao quadrado. A velocidade de Møller é definida desse jeito que possibilita a multiplicação dela com as densidades de número de partícula ($v_{\text{Møll}} n_1 n_2$) seja invariante sob uma transformação de Lorentz e igual ao produto da velocidade relativa v_{rel} com as densidade n_1 e n_2 no referencial de repouso de uma dessas partículas.

Fazendo os mesmos tipos de abordagem feitos anteriormente, concluímos que

$$g_1 \int C[f_1] \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3} = - \langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle [n^2 - n_{\text{eq}}^2]. \quad (4.33)$$

Sendo a média térmica do produto da seção de choque com a velocidade de Møller definida como

$$\langle \sigma v_{M\phi l} \rangle = \frac{\int \sigma v_{M\phi l} dn_1^{\text{eq}} dn_2^{\text{eq}}}{\int dn_1^{\text{eq}} dn_2^{\text{eq}}}. \quad (4.34)$$

Nos deixando com a seguinte forma para a equação de Boltzmann

$$\dot{n} + 3Hn = \langle \sigma v_{M\phi l} \rangle [n_{\text{eq}}^2 - n^2] \quad (4.35)$$

Para resolver essa equação são necessários alguns itens. Primeiro iremos precisar da densidade do número de partículas em equilíbrio. Para isso basta usarmos o resultado encontrado na Seção.(3.3). O que vai nos importar aqui será o caso $E - \mu \gg k_B T$, portanto a nossa densidade do número de partículas em equilíbrio será

$$n^{\text{eq}} = g \left(\frac{mT}{2\pi} \right)^{\frac{3}{2}} \exp \left(\frac{-m}{T} \right). \quad (4.36)$$

Precisaremos também da média térmica da seção de choque vezes a velocidade. É isso que faremos a seguir na próxima seção.

4.3 Média Térmica

Um item importante para resolver a equação de Boltzmann é a média térmica do produto seção de choque com a velocidade de Møller $\langle \sigma v_{M\phi l} \rangle$. Ela é definida como,

$$\langle \sigma v_{M\phi l} \rangle = \frac{\int \sigma v_{M\phi l} e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} d^3 p_1 d^3 p_2}{\int e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} d^3 p_1 d^3 p_2}, \quad (4.37)$$

em que E_1 e E_2 são as energias das partículas que estão colidindo e \vec{p}_1 e \vec{p}_2 seus trimomentos. É possível escrever o elemento de volume de momento como

$$d^3 p_1 d^3 p_2 = 4\pi p_1 dE_1 4\pi p_2 dE_2 \frac{1}{2} d\cos\theta, \quad (4.38)$$

em que θ é o ângulo entre \vec{p}_1 e \vec{p}_2 , $p_1 = |\vec{p}_1|$, $p_2 = |\vec{p}_2|$, e foi usada a relação $p dp = E dE$. Em seguida fazemos uma mudança de variável do tipo

$$\begin{aligned} E_+ &= E_1 + E_2; \\ E_- &= E_1 - E_2; \\ s &= 2m^2 + 2E_1 E_2 - 2p_1 p_2 \cos\theta. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Para fazer a modificação do elemento de volume, é preciso calcular o Jacobiano dessa transformação. Isso é feito da seguinte forma

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial E_1}{\partial E_+} & \frac{\partial E_1}{\partial E_-} & \frac{\partial E_1}{\partial s} \\ \frac{\partial E_2}{\partial E_+} & \frac{\partial E_2}{\partial E_-} & \frac{\partial E_2}{\partial s} \\ \frac{\partial \cos\theta}{\partial E_+} & \frac{\partial \cos\theta}{\partial E_-} & \frac{\partial \cos\theta}{\partial s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\partial \cos\theta}{\partial E_+} & \frac{\partial \cos\theta}{\partial E_-} & -\frac{1}{2p_1 p_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{4p_1 p_2}. \quad (4.40)$$

Assim é possível reescrever o elemento de volume em função das novas variáveis:

$$\begin{aligned}
 d^3p_1 d^3p_2 &= 4\pi p_1 dE_1 4\pi p_2 dE_2 \frac{1}{2} d\cos\theta \\
 &= 8\pi^2 p_1 p_2 E_1 E_2 \left(\frac{1}{4p_1 p_2} dE_+ dE_- ds \right) \\
 &= 2\pi^2 E_1 E_2 dE_+ dE_- ds.
 \end{aligned} \tag{4.41}$$

Mas antes de resolver as integrais, é necessário montar os novos limites de integração. Como já existe uma expressão para s é conveniente começar pelos limites da variável s . Usando as expressões $E_1 = \sqrt{p_1^2 + m^2}$ e $E_2 = \sqrt{p_2^2 + m^2}$, podemos reescrever s da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 s &= (p_1 + p_2)^2 = (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \geq (E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 \\
 (E_1 + E_2)^2 - (p_1 + p_2)^2 &= \left(\sqrt{p_1^2 + m^2} + \sqrt{p_2^2 + m^2} \right)^2 - (p_1 + p_2)^2 \\
 &= 2m^2 + 2\sqrt{p_1^2 + m^2}\sqrt{p_2^2 + m^2} - 2p_1 p_2 \\
 &= 4m^2 + 2\sqrt{p_1^2 + m^2}\sqrt{p_2^2 + m^2} - 2p_1 p_2 - 2m^2.
 \end{aligned} \tag{4.42}$$

Um bom exercício para estabelecer um limite final para s é trabalhar com a parte final da expressão $2\sqrt{p_1^2 + m^2}\sqrt{p_2^2 + m^2} - 2p_1 p_2 - 2m^2$ já que é possível mostrar que ela é maior ou igual a zero.

$$\begin{aligned}
 2\sqrt{p_1^2 + m^2}\sqrt{p_2^2 + m^2} - 2p_1 p_2 - 2m^2 &\geq 0 \\
 \sqrt{p_1^2 + m^2}\sqrt{p_2^2 + m^2} &\geq p_1 p_2 + m^2. \\
 \text{(Elevando os dois lados ao quadrado)} \\
 (p_1^2 + m^2)(p_2^2 + m^2) &\geq p_1^2 p_2^2 + m^4 + 2m^2 p_1 p_2 \\
 (p_1^2 + p_2^2)m^2 + p_1^2 p_2^2 + m^4 &\geq p_1^2 p_2^2 + m^4 + 2m^2 p_1 p_2 \\
 (p_1^2 + p_2^2)m^2 - 2m^2 p_1 p_2 &\geq 0 \\
 (|\vec{p}_1| + |\vec{p}_2|)^2 m^2 &\geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.43}$$

Com isso teremos o seguinte limite para s

$$s \geq 4m^2. \tag{4.44}$$

Continuando com a expressão para s é fácil encontrar um limite para E_+ . Lembrando que $E_+ = E_1 + E_2$, é possível escrever

$$\begin{aligned}
 s &= (E_1 + E_2)^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 = E_+^2 - (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \\
 E_+^2 &= s + (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 \\
 \text{Como } (\vec{p}_1 + \vec{p}_2)^2 &\geq 0, \text{ então} \\
 E_+^2 &\geq \sqrt{s}.
 \end{aligned} \tag{4.45}$$

Resta agora encontrarmos o limite para E_- . Isso pode ser feito trabalhando mais uma vez com a expressão de s . Como $E_- = E_1 - E_2$, teremos

$$\begin{aligned} s &= 2m^2 + 2E_1E_2 - 2p_1p_2 \cos \theta \\ s &= 2m^2 + \frac{1}{2}(E_+^2 - E_-^2) - 2p_1p_2 \cos \theta \\ s - 2m^2 - \frac{1}{2}(E_+^2 - E_-^2) &= -2p_1p_2 \cos \theta. \end{aligned} \quad (4.46)$$

Considerando que $\cos \theta$ encontra-se dentro de um limite $+1 \geq \cos \theta \geq -1$. Podemos escrever a expressão anterior dentro do seguinte limite

$$\begin{aligned} s - 2m^2 - \frac{1}{2}(E_+^2 - E_-^2) &\geq -2p_1p_2, \\ s - 2m^2 - \frac{1}{2}(E_+^2 - E_-^2) &\leq 2p_1p_2. \end{aligned} \quad (4.47)$$

Como $p_1 = \sqrt{E_1^2 - m^2}$ e $p_2 = \sqrt{E_2^2 - m^2}$, podemos escrever p_1p_2 como

$$p_1p_2 = \sqrt{E_1^2 - m^2} \sqrt{E_2^2 - m^2} = \sqrt{\frac{(E_+ + E_-)^2}{4} - m^2} \sqrt{\frac{(E_+ - E_-)^2}{4} - m^2}. \quad (4.48)$$

Usando esse resultados e aplicando para resolver as desigualdade, chegamos aos seguintes limites

$$-\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \sqrt{E_+^2 - s} \leq E_- \leq +\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \sqrt{E_+^2 - s} \quad (4.49)$$

Com os limites bem estabelecidos podemos resolver as integrais e chegar no resultado.

Começaremos com o numerador da expressão para $\langle \sigma v_{M\phi} \rangle$:

$$\begin{aligned} \int \sigma v_{M\phi} e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} d^3p_1 d^3p_2 &= 2\pi^2 \int dE_+ \int ds \int dE_- \sigma v_{M\phi} E_1 E_2 e^{-E_+/T} \\ &= 2\pi^2 \int dE_+ \int ds \left[2\sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \sqrt{E_+^2 - s} \right] \sigma v_{M\phi} E_1 E_2 e^{-E_+/T} \\ &= 4\pi^2 \int ds \sigma v_{M\phi} E_1 E_2 \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \int dE_+ e^{-E_+/T} \sqrt{E_+^2 - s}. \end{aligned} \quad (4.50)$$

Agora precisamos usar as seguintes relações:

$$\begin{aligned} F &= v_{M\phi} E_1 E_2, \\ F &= ((p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2)^{1/2}. \end{aligned} \quad (4.51)$$

Mas a expressão para F ainda pode ser reescrita em função de s o que vai possibilitar a resolução da integral.

$$F = \frac{1}{2} \sqrt{s(s - 4m^2)}. \quad (4.52)$$

Agora fica mais fácil de resolver a expressão para o numerador

$$\begin{aligned}
\int \sigma v_{\text{Mol}} e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} d^3 p_1 d^3 p_2 &= 4\pi^2 \int ds \sigma F \sqrt{1 - \frac{4m^2}{s}} \int dE_+ e^{-E_+/T} \sqrt{E_+^2 - s} \\
&= 2\pi^2 \int ds \sigma (s - 4m^2) \int dE_+ e^{-E_+/T} \sqrt{E_+^2 - s} \\
&= 2\pi^2 \int ds \sigma (s - 4m^2) \left[\sqrt{s} T K_1 \left(\frac{\sqrt{s}}{T} \right) \right] \\
&= 2\pi^2 T \int ds \sigma (s - 4m^2) \sqrt{s} K_1 \left(\frac{\sqrt{s}}{T} \right),
\end{aligned} \tag{4.53}$$

em que K_1 é uma função de Bessel modificada de segunda espécie, K_n , com $n = 1$.

Ainda precisamos fazer a mesma coisa para o denominador. Mas para ele não será necessário realizar as mudanças de variáveis. Podemos usar $d^3 p_1 d^3 p_2 = (4\pi)^2 p_1 E_1 dE_1 p_2 E_2 dE_2$. Então, precisamos resolver

$$\begin{aligned}
\int e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} d^3 p_1 d^3 p_2 &= (4\pi)^2 \int e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} p_1 E_1 dE_1 p_2 E_2 dE_2 \\
&= (4\pi)^2 \int e^{-E_1/T} e^{-E_2/T} \sqrt{E_1^2 - m^2} E_1 dE_1 \sqrt{E_2^2 - m^2} E_2 dE_2 \\
&= (4\pi)^2 \left[\int_m^\infty dx e^{-x/T} x \sqrt{x^2 - m^2} \right]^2 = (4\pi)^2 \left[m^2 T K_2 \left(\frac{m}{T} \right) \right]^2 \\
&= \left[4\pi m^2 T K_2 \left(\frac{m}{T} \right) \right]^2.
\end{aligned} \tag{4.54}$$

Em que mais uma vez foi utilizada uma função de Bessel modificada de segunda espécie, mas dessa vez com $n = 2$.

Com isso a expressão para a média térmica fica

$$\begin{aligned}
\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle &= \frac{2\pi^2 T \int_{4m^2}^\infty ds \sigma (s - 4m^2) \sqrt{s} K_1 \left(\frac{\sqrt{s}}{T} \right)}{[4\pi m^2 T K_2 \left(\frac{m}{T} \right)]^2}, \\
\langle \sigma v_{\text{Mol}} \rangle &= \frac{1}{8m^4 T [K_2 \left(\frac{m}{T} \right)]^2} \int_{4m^2}^\infty ds \sigma (s - 4m^2) \sqrt{s} K_1 \left(\frac{\sqrt{s}}{T} \right).
\end{aligned} \tag{4.55}$$

5 A Anomalia do Momento Magnético do Múon

5.1 Introdução

Um próximo problema que iremos abordar é o da anomalia do momento magnético do múon. É um tópico que vem tomando cada vez mais espaço na física de partículas com a evolução dos aparatos experimentais na medida da mesma.

Quando o valor da anomalia é medido experimentalmente encontra-se uma certa discrepância para o valor dado pelo Modelo Padrão. A cada desenvolvimento do estudo de interações entre partículas do modelo padrão, no nosso caso com múon, o valor da anomalia, a , dado pela teoria vai mudando, mas experimentalmente ainda não há uma boa concordância entre os valores. Essa diferença pode ser compreendida no estudo da interação do múon com uma nova partícula e que poderia ser responsável por essa anomalia.

Iremos começar com uma abordagem histórico sobre a mudança do valor de a [44], onde falaremos também sobre experimentos e os valores atuais tanto experimentais quanto do modelo padrão [45]. Falaremos também sobre os experimentos da colaboração E821 em Brookhaven [4] e FermiLab [3]. Então passaremos para o estudo de ferramentas básicas para o entendimento de cálculos envolvendo a , com uma abordagem semelhante à feita no livro de Matthew Schwartz [46]. Em seguida, faremos o cálculo que gera o resultado encontrado por Julian Schwinger [47] da eletrodinâmica quântica, seguido do resultado de Steven Weinberg e Roman Jackiw [48] com a contribuição do bóson Z e que será útil para o modelo que estudaremos mais a frente.

5.2 O problema do $g - 2$

O momento magnético anômalo é um tópico discutido por muito tempo na física, e que vem tomando cada vez mais espaço com os avanços tecnológicos dos experimentos. Por isso é interessante fazer uma abordagem histórica [44]. Ele teve seu primeiro momento de estudo com o experimento de Stern & Gerlach [49] por volta de 1922. Eles foram os primeiros a terem uma medida do g do elétron, mas até então, sem o conhecimento sobre spin e sem o ainda por vir desenvolvimento da mecânica quântica, não era possível ter um total entendimento do que aquilo representava. Foi graças a Dirac [50] em 1928 com seu artigo introduzindo a equação de onda relativística que foi possível ter um vislumbre melhor do problema. Foi assim que se teve um entendimento de que o magneton de Bohr

medido por Stern-Gerlach era o momento magnético de um elétron atômico na prata:

$$\vec{\mu} = g \left(\frac{Qe}{2m_e} \right) \vec{S}_e, \quad (5.1)$$

em que $Q = \pm 1$, $e > 0$ e $g = 2$ previsto pela teoria de Dirac.

Em 1948, Julian Schwinger, movido pelo fato de que as medições da estrutura hiperfina do hidrogênio serem maiores que a esperada pela teoria de Dirac, mostrou que essas diferenças podem ser oriundas de um pequeno aumento do momento magnético do elétron associado ao spin do elétron e com um valor de $\alpha/(2\pi) \simeq 0.001162$ [47]. Esse cálculo foi o primeiro na ordem de 1-loop na teoria quântica de campos.

Uma boa maneira de escrever o momento magnético é:

$$\mu = (1 + a) \frac{e\hbar}{2m}, \quad (5.2)$$

com

$$a = \frac{(g - 2)}{2}. \quad (5.3)$$

Sendo o primeiro termo em unidades do magneton $e\hbar/2m$ e o segundo seria o momento magnético anômalo, em que a quantidade adimensional a é a chamada anomalia. No caso de Schwinger $a = \alpha/(2\pi)$.

Toda essa temática sobre momento magnético anômalo vai tomando uma forma mais atual ainda quando o múon é colocado na mesa. Por causa de seu tempo de vida relativamente longo de $\simeq 2.2\mu\text{s}$ é possível medir com precisão sua meia vida, seu momento magnético e modos de decaimento. Um tipo de medição relacionada ao momento magnético é a junção da produção de múons polarizados por decaimento fraco $\pi^- \rightarrow \mu^- \bar{\nu}_\mu$ com o decaimento fraco de três corpos $\mu^- \rightarrow e^- \nu_\mu \bar{\nu}_e$, que gera informação sobre a direção do spin do múon no momento do decaimento. Um dos primeiros experimentos com esse foco, no caso envolvendo rotação de spin, foi no ciclotron de Nevis [51] que observou uma violação de paridade no decaimento do múon e também que g era consistente com o $g = 2$ de Dirac. Já com alguns experimentos após, não só em Nevis [52] mas também no CERN [53], mostraram que $a_\mu \approx \alpha/(2\pi)$, implicando que em questão de momento magnético, o múon tinha o comportamento de um elétron mais pesado. Após foi preciso que contribuições de ordem mais alta da eletrodinâmica quântica, assim como contribuições de hádrons virtuais, fossem incluídas na teoria para que tivesse um melhor acordo entre teoria e experimento.

O que viria a seguir seriam experimentos mais modernos e atuais que ao medir a_μ mostrariam uma certa diferença entre experimento e teoria. Isso daria forma a problemática do $g - 2$ da maneira que queremos abordar. Para entender melhor tudo isso nós precisamos juntar três pontos importantes: 1) o entendimento do valor de a_μ dado pelo Modelo Padrão; 2) o experimento da colaboração E821 feito em Brookhaven [4] e sua discrepância com o valor do Modelo Padrão; e também 3) o experimento da colaboração do FermiLab [3] e

sua também discrepância com o Modelo Padrão. Com tudo isso em mente é possível ter um apelo maior para o estudo e entendimento de $g - 2$ e seu lugar como nova física.

5.2.1 Valor de a_μ de acordo com o Modelo Padrão

Para o valor do Modelo Padrão teremos três tipos de contribuições vindas de processos radiativos: o de loops da QED contendo fótons e léptons (e, μ, τ); loops hadrônicos (Had) contendo hádrons em loops de polarização do vácuo; e loops de interação fraca (Weak) envolvendo os bósons W, Z e de Higgs. A anomalia no modelo padrão é dada pela expressão

$$a_\mu^{\text{MP}} = a_\mu^{\text{QED}} + a_\mu^{\text{Had}} + a_\mu^{\text{Weak}}. \quad (5.4)$$

A contribuição da QED é dada pela junção de loops até ordem $\mathcal{O}(\alpha^5)$ e tem o valor igual a:

$$a_\mu^{\text{QED}} = (116584718.931 \pm .104) \times 10^{-11}. \quad (5.5)$$

Já contribuição eletro-fraca é na ordem de 2-loops e tem valor igual a:

$$a_\mu^{\text{Weak}} = (153.6 \pm 1.0) \times 10^{-11}. \quad (5.6)$$

A contribuição do setor hadrônico é um pouco mais complicada e envolve a somas de diversos itens e abordagens diferentes. Mas ela vem principalmente de duas formas (*'hadronic vacuum polarization'* HVP e *'hadronic light by light scattering'* HLbL) e possui os seguintes valores:

$$\begin{aligned} a_\mu^{\text{HVP,LO}} + a_\mu^{\text{HVP,NLO}} + a_\mu^{\text{HVP,NNLO}} &= (6845 \pm 40) \times 10^{-11}, \\ a_\mu^{\text{HLbL}} + a_\mu^{\text{HLbL,NLO}} &= (92 \pm 18) \times 10^{-11}. \end{aligned} \quad (5.7)$$

em que LO significa *'leading order'*, NLO *'next to leading order'* e NNLO *'next to next to leading order'*.

O que nos leva ao valor do Modelo Padrão [45], calculado pela soma de todas essas contribuições, como:

$$a_\mu^{\text{MP}} = (116591810 \pm 43) \times 10^{-11}. \quad (5.8)$$

A partir de agora a ideia é comparar os valores vindos de experimentos com esse valor do modelo padrão.

5.2.2 Colaboração E821 em Brookhaven

O primeiro experimento que devemos levar em conta é a colaboração E821 [4] feita no *'Brookhaven National Laboratory'* (BNL). O experimento faz o uso de múons sendo injetados em um anel com um campo magnético uniforme dentro. A ideia é centrada em estudar frequências de precessão da partícula. No caso, para um múon movendo em um

plano horizontal do campo magnético armazenado no anel possui frequências de ciclotron ω_c e da precessão do spin ω_s , elas são dadas por:

$$\vec{\omega}_c = -\frac{q\vec{B}}{m_\mu\gamma}, \quad \vec{\omega}_s = -g\frac{q\vec{B}}{2m_\mu} - (1-\gamma)\frac{q\vec{B}}{\gamma m_\mu}, \quad (5.9)$$

em que γ é o fator de Lorentz.

Agora com essas duas expressões em mente é possível tirar uma frequência de precessão anômala ω_a que é calculada através da diferença entre as frequências

$$\vec{\omega}_a = \vec{\omega}_s - \vec{\omega}_c = -\left(\frac{g-2}{2}\right)\frac{q\vec{B}}{m_\mu} = -a_\mu\frac{q\vec{B}}{m_\mu}. \quad (5.10)$$

O resultado de E821 para a anomalia é de

$$a_\mu^{E821} = (116592080 \pm 63) \times 10^{-11}. \quad (5.11)$$

Quando comparado ao nosso valor para o modelo padrão Eq.(5.8), temos

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{E821} - a_\mu^{MP} = (270 \pm 76) \times 10^{-11}. \quad (5.12)$$

com uma discrepância de $2.2 - 2.7\sigma$ [4].

5.2.3 Colaboração do Fermilab

Nosso próximo experimento é mais recente e foi realizado no ‘*Fermi National Accelerator Laboratory*’ (FNAL) [3]. Ele foi realizado de uma maneira bem semelhante com o feito na colaboração E821, sendo baseado no estudo da precessão anômala do múon dentro de um anel com campo magnético. Sendo assim ele usa os mesmos tipos de equação e montagem. Os resultados dele são bem próximos daquele encontrado pelo E821.

Foi encontrado uma anomalia de

$$a_\mu^{FNAL} = (116592040 \pm 54) \times 10^{-11}. \quad (5.13)$$

Quando comparado ao valor para o modelo padrão Eq.(5.8), temos

$$\Delta a_\mu = a_\mu^{FNAL} - a_\mu^{MP} = (230 \pm 69) \times 10^{-11}. \quad (5.14)$$

Ao se fazer uma média dos resultados encontrados pelas duas colaborações é encontrado um valor para discrepância entre experimento e teoria igual a:

$$\Delta a_\mu = (251 \pm 59) \times 10^{-11}. \quad (5.15)$$

que constitui uma discrepância de 4.2σ [5]. Esse valor dá certa confiança para o experimento realizado e no caso do valor encontrado é uma confiança relativamente alta.

5.3 Campos de Spin 1/2

Um primeiro passo para se entender melhor os cálculos feito por Schwinger é entender um pouco sobre o trabalho de Dirac envolvendo campos de spin 1/2. Faremos isso tendo de base o já citado livro de Schwartz [46].

É possível ainda escrever na forma de um espinor de Dirac que é um objeto de quatro componentes que combina dois campos, um destro e um canhoto, nele:

$$\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Com

$$\bar{\psi} = \left(\psi_R^\dagger \quad \psi_L^\dagger \right). \quad (5.17)$$

Se pegarmos as matrizes de Dirac ou matrizes γ :

$$\gamma^\mu = \begin{pmatrix} & \sigma^\mu \\ \bar{\sigma}^\mu & \end{pmatrix}. \quad (5.18)$$

em que $\sigma^\mu = (\mathbb{1}, \sigma^i)$ e $\bar{\sigma}^\mu = (\mathbb{1}, -\sigma^i)$, com σ^i escrito em função das matrizes de Pauli:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.19)$$

Tendo tudo isso em mão ficamos com a seguinte Lagrangiana de Dirac:

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi. \quad (5.20)$$

Dela ainda temos a equação de movimento conhecida como equação de Dirac:

$$(i\gamma^\mu \partial_\mu - m)\psi = 0. \quad (5.21)$$

Sob uma transformação de gauge, ψ transforma da mesma forma de um campo escalar. Para um spinor com carga $Q = -1$ como o elétron,

$$\psi \rightarrow e^{-i\alpha}\psi. \quad (5.22)$$

Então é possível usar a mesma derivada covariante de um escalar $\partial_\mu + ieA_\mu$. O que nos deixa com:

$$D_\mu\psi = (\partial_\mu + ieA_\mu)\psi. \quad (5.23)$$

Deixando a equação de Dirac da seguinte forma:

$$(i\cancel{\partial} - e\cancel{A} - m)\psi = 0. \quad (5.24)$$

em que $\not{D} \equiv \gamma^\mu \partial_\mu$ assim como $\not{A} \equiv \gamma^\mu A_\mu$.

A ideia agora é multiplicar ambos os lados da equação por $(i\not{D} - e\not{A} + m)$ dando

$$\begin{aligned} 0 &= (i\not{D} - e\not{A} + m)(i\not{D} - e\not{A} - m)\psi \\ &= [(i\partial_\mu - eA_\mu)(i\partial_\nu - eA_\nu)\gamma^\mu\gamma^\nu - m^2]\psi \\ &= \left(\frac{1}{4}\{i\partial_\mu - eA_\mu, i\partial_\nu - eA_\nu\}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} + \frac{1}{4}[i\partial_\mu - eA_\mu, i\partial_\nu - eA_\nu][\gamma^\mu, \gamma^\nu] - m^2 \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Em que $\{a, b\} = ab + ba$ é o anticomutador e $[a, b] = ab - ba$ é o comutador.

Na primeira parte nós podemos usar a seguinte relação:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}. \quad (5.26)$$

O que nos deixa com:

$$\frac{1}{4}\{i\partial_\mu - eA_\mu, i\partial_\nu - eA_\nu\}\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = (i\partial_\mu - eA_\mu)^2. \quad (5.27)$$

Já na segunda, usando a seguinte relação:

$$\sigma^{\mu\nu} = \frac{i}{2}[\gamma^\mu, \gamma^\nu], \quad (5.28)$$

nós podemos escrever como:

$$\frac{1}{4}[i\partial_\mu - eA_\mu, i\partial_\nu - eA_\nu][\gamma^\mu, \gamma^\nu] = -ei[\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu]\frac{2}{i}\sigma^{\mu\nu} = -\frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}, \quad (5.29)$$

em que $F_{\mu\nu}$ é o tensor de força dos campos.

Então temos:

$$\left((i\partial_\mu - eA_\mu)^2 - \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} - m^2 \right)\psi = 0. \quad (5.30)$$

E isso pode ser colocado em uma identidade útil:

$$\not{D}^2 = D_\mu^2 + \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}. \quad (5.31)$$

que mostra a diferença entre uma derivada covariante atuando em um campo escalar e em spinores.

Se pegarmos a Eq.(5.30) e compararmos com a expressão para um campo escalar $[((\partial_\mu - eA_\mu)^2 - m^2)\phi = 0]$, vemos a existência de um termo extra para a versão dos spinores, $S^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\sigma^{\mu\nu}$, que na representação de Weyl é:

$$S_{ij} = \frac{1}{2}\varepsilon_{ijk} \begin{pmatrix} \sigma_k & \\ & \sigma_k \end{pmatrix}, \quad S_{0j} = -\frac{i}{2} \begin{pmatrix} \sigma_j & \\ & -\sigma_j \end{pmatrix}, \quad (5.32)$$

em que ε_{ijk} é o símbolo de Levi-Civita e é: 1 se (i, j, k) for $(1, 2, 3)$ ou $(2, 3, 1)$ ou $(3, 1, 2)$, -1 se (i, j, k) for $(3, 2, 1)$ ou $(1, 3, 2)$ ou $(2, 1, 3)$ e 0 se $i = j$ ou $i = k$ ou $j = k$. Como $F_{0i} = E_i$ e $F_{ij} = -\varepsilon_{ijk}B_k$, nós temos:

$$\left[(\partial_\mu + ieA_\mu)^2 + m^2 - e \begin{pmatrix} (\vec{B} + i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} & \\ & (\vec{B} - i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix} \right]\psi = 0. \quad (5.33)$$

Ele corresponde ao momento de dipolo magnético. O tamanho do momento magnético é $\mu_B = \frac{e}{2m_e}$. Mas experimentalmente, o momento é $1.002\mu_B$. Esse 0.002 será calculado mais tarde.

5.4 O Cálculo da Anomalia feito por Schwinger

5.4.1 O Valor de g para Dirac e a Maneira como a Anomalia é Calculada

Usando a equação de Dirac na forma $(i\mathcal{D} - m)\psi = 0$ e multiplicando ambos os lados por $(i\mathcal{D} + m)$ podemos então deixar a equação de Dirac com a derivada covariante dada por Eq.(5.31) como $(\mathcal{D}^2 + m^2)\psi = 0$. A equação então é escrita como:

$$(D_\mu^2 + m^2 + \frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu})\psi = 0. \quad (5.34)$$

Já sabemos que $\frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$ é a diferença para o caso escalar, sendo dada na representação de Weyl como

$$\frac{e}{2}F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu} = -e \begin{pmatrix} (\vec{B} + i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} & \\ & (\vec{B} - i\vec{E}) \cdot \vec{\sigma} \end{pmatrix}. \quad (5.35)$$

Se formos para o espaço de momento, $(\mathcal{D}^2 + m^2)\psi = 0$ implica

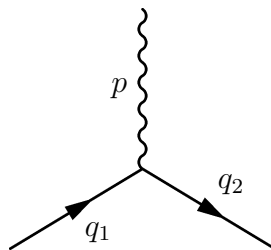
$$\frac{(H - eA_0)^2}{2m}\psi = \left(\frac{m}{2} + \frac{(\vec{p} - e\vec{A})^2}{2m} - 2\frac{e}{2m}\vec{B} \cdot \vec{S} \pm i\frac{e}{m}\vec{E} \cdot \vec{S} \right)\psi. \quad (5.36)$$

Se pegarmos essa expressão e compararmos a Hamiltoniana produzida pela equação de Dirac na presença de um campo magnético externo:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} + V(r) + \frac{e}{2m}\vec{B} \cdot (\vec{L} + g\vec{S}), \quad (5.37)$$

podemos pegar g da interação do dipolo magnético $ge\vec{B} \cdot \vec{S}$. Como $\vec{S} = \frac{\vec{\sigma}}{2}$ para spin $\frac{1}{2}$, chegamos a $g = 2$. Isso acontece porque temos $-\vec{\mu} \cdot \vec{B}$ como energia de interação envolvendo o dipolo magnético, e temos $\vec{\mu} = g\frac{e}{2m}\vec{S}$. Então, uma maneira de encontrar as correções para g é olhar para loops que tenham o mesmo efeito que o de um termo adicional $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$.

Uma ideia seria pensarmos na interação entre fótons e spinores. Um processo a ser analisado é $e^-(q_1)A_\mu(p) \rightarrow e^-(q_2)$, com vetor de polarização $\varepsilon_\mu(p)$ e dois estados de spinor $\bar{u}(q_2)$ e $u(q_1)$. No nível árvore, o elemento de matriz é apenas $\varepsilon_\mu\mathcal{M}_0^\mu$, em que



$$i\mathcal{M}_0^\mu = -ie\bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1), \quad (5.38)$$

com a seta contínua representando férmions e a ondulada representando fótons, e com $p^\mu = q_2^\mu - q_1^\mu$ por causa da conservação de momento. Esperamos um termo extra equivalente ao termo $F_{\mu\nu}\sigma^{\mu\nu}$, que deveria parecer com $\bar{u}(q_2)p_\nu\sigma^{\mu\nu}u(q_1)$. Para encontrarmos esse termo podemos manipular o que temos utilizando a identidade de Gordon:

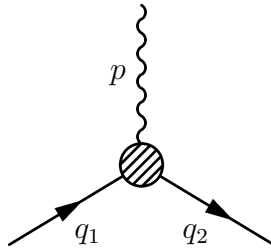
$$\bar{u}(q_2)(q_1^\mu + q_2^\mu)u(q_1) = 2m\bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1) + i\bar{u}(q_2)\sigma^{\mu\nu}(q_1^\nu - q_2^\nu)u(q_1). \quad (5.39)$$

Isso nos deixa com

$$\mathcal{M}_0^\mu = -e\left(\frac{q_1^\mu + q_2^\mu}{2m}\right)\bar{u}(q_2)u(q_1) - \frac{e}{2m}i\bar{u}(q_2)p_\nu\sigma^{\mu\nu}u(q_1) \quad (5.40)$$

O primeiro termo é um termo de interação assim como no caso escalar. O fóton se acopla ao momento do campo. Já o segundo termo é dependente de spin e do momento magnético. Já é possível identificar g como $\frac{4m}{e}$ vezes o coeficiente de $ip_\nu\bar{u}\sigma^{\mu\nu}u$. Por isso para calcular g é preciso ver como esse coeficiente muda no nível de loop.

Essas correções para o momento magnético podem ser generalizadas no seguinte diagrama para o envolvimento entre um fóton e elétrons:



$$i\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(q_2)(f_1\gamma^\mu + f_2p^\mu + f_3q_1^\mu + f_4q_2^\mu)u(q_1), \quad (5.41)$$

em que f_i são os coeficientes dos possíveis termos que poderiam aparecer na expressão, e eles não são totalmente independentes. Eles podem depender de contrações de momentos, como $p \cdot q$ ou p^2 , assim como contrações com matrizes γ , como \not{p} . Se usarmos a conservação de momento $p^\mu = q_2^\mu - q_1^\mu$, então $f_2 = 0$ pois podemos juntar ele em f_3 e f_4 , e livramos de toda dependência em p^μ . A dependência de f_i com q_1 ou q_2 pode ser resolvida usando equação de Dirac da forma $q_1 u(q_1) = m u(q_1)$ e $\bar{u}(q_2)q_2 = m\bar{u}(q_2)$. Então, é possível afirmar que f_i são funções reais que podem depender apenas de $q_1 \cdot q_2$ e m , mais convenientemente $p^2 = 2m^2 - 2q_1 \cdot q_2$ e m^2 . Deixamos a dependência de f_i como função de $\frac{p^2}{m^2}$.

Em seguida usamos a identidade de Ward:

$$p_\mu \mathcal{M}^\mu(p) = 0. \quad (5.42)$$

Então podemos escrever:

$$\begin{aligned}
0 &= p_\mu \bar{u}(f_1 \gamma^\mu + f_3 q_1^\mu + f_4 q_2^\mu)u \\
&= f_1 \bar{u} \not{p} u + (p \cdot q_1) f_3 \bar{u} u + (p \cdot q_2) f_4 \bar{u} u \\
&= f_1 \bar{u}(q_2 - q_1)u + (p \cdot q_1) f_3 \bar{u} u + (p \cdot q_2) f_4 \bar{u} u \\
&= f_1 \bar{u}(m - m)u + (p \cdot q_1) f_3 \bar{u} u + (p \cdot q_2) f_4 \bar{u} u \\
&= (p \cdot q_1) f_3 \bar{u} u + (p \cdot q_2) f_4 \bar{u} u.
\end{aligned} \tag{5.43}$$

Fazendo o uso de que $p \cdot q_1 = q_2 \cdot q_1 - m^2 = -p \cdot q_2$ temos $f_3 = f_4$. Então, a Eq.(5.41) fica com apenas dois termos:

$$i\mathcal{M}^\mu = \bar{u}(q_2)[f_1 \gamma^\mu + f_3(q_1^\mu + q_2^\mu)]u(q_1). \tag{5.44}$$

Se usarmos a identidade de Gordon como fizemos anteriormente, ficamos com

$$i\mathcal{M}^\mu = (-ie)\bar{u}(q_2) \left[F_1 \left(\frac{p^2}{m^2} \right) \gamma^\mu + \frac{i\sigma^{\mu\nu} p_\nu}{2m} F_2 \left(\frac{p^2}{m^2} \right) \right] u(q_1). \tag{5.45}$$

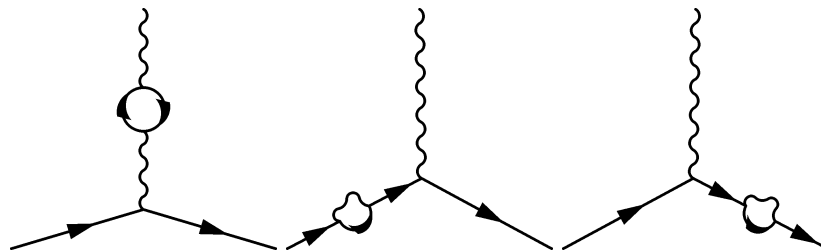
Nessa nossa expressão final podemos pensar em F_1 como um fator que modifica o acoplamento original $eA_\mu \bar{\psi} \gamma^\mu \psi$ e serve para renormalizar a carga. Já F_2 realmente tem a estrutura de momento magnético. Como a Eq.(5.45) sem F_2 da $g = 2$ concluímos que $F_2(\frac{p^2}{m^2})$ modifica o momento, $g \rightarrow 2 + 2F_2(\frac{p^2}{m^2})$. Já que o momento magnético é medido com energias não relativísticas com $|\vec{p}| \ll m$ o momento comparado aos dados medidos é

$$g = 2 + 2F_2(0). \tag{5.46}$$

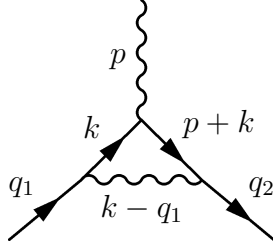
Então a questão é calcular $F_2(0)$.

5.4.2 O Resultado Obtido por Schwinger

Existem quatro possibilidades de diagramas a 1-loop que podem contribuir para \mathcal{M}^μ . Sendo que três deles só apresentam contribuições com termos proporcionais a γ^μ e por isso contribuem apenas a F_1 , sem efeito no momento magnético. Isso ocorre porque esses diagramas só possuem correção para os propagadores das respectivas partículas. Esses três diagramas estão representados a seguir:



O quarto diagrama será o único de interesse para $g - 2$. Aplicando as regras de Feynman e considerando $p^\mu = q_2^\mu - q_1^\mu$, ele será dado por



$$\begin{aligned}
 i\mathcal{M}_2^\mu &= (-ie)^3 \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{-ig_{\nu\alpha}}{(k - q_1)^2 + i\varepsilon} \bar{u}(q_2) \gamma^\nu \frac{i(\not{p} + \not{k} + m)}{(p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon} \\
 &\quad \times \gamma^\mu \frac{i(\not{k} + m)}{k^2 - m^2 + i\varepsilon} \gamma^\alpha u(q_1) \\
 &= -e^3 \bar{u}(q_2) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{\gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu}{[(k - q_1)^2 + i\varepsilon][(p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon][k^2 - m^2 + i\varepsilon]} u(q_1).
 \end{aligned} \tag{5.47}$$

Aqui já fazendo uma contração com $g_{\nu\alpha} \gamma^\alpha$. Mas ainda é possível simplificar mais a expressão. Primeiro usando a seguinte identidade:

$$\frac{1}{ABC} = 2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \frac{1}{[xA + yB + zC]^3}. \tag{5.48}$$

No caso da nossa expressão temos: $A = k^2 - m^2 + i\varepsilon$, $B = (p + k)^2 - m^2 + i\varepsilon$ e $C = (k - q_1)^2 + i\varepsilon$. O denominador fica como:

$$\begin{aligned}
 xA + yB + zC &= (x + y + z)k^2 + 2k(y p - z q_1) + y p^2 + z q_1^2 \\
 &\quad - (x + y)m^2 + (x + y + z)i\varepsilon \\
 &= (k^\mu + y p^\mu - z q_1^\mu)^2 - \Delta + i\varepsilon
 \end{aligned} \tag{5.49}$$

Usando $\delta(x + y + z - 1)$ para fazer $x + y + z = 1$, junto com as relações $p = q_2 - q_1 \rightarrow q_1 = q_2 - p$ e $p^2 = -2q_1 q_2 + 2m^2 \rightarrow q_1 q_2 = -\frac{p^2}{2} + m^2$ e também que $q_1^2 = m^2$ podemos reduzir o denominador para uma expressão mais simples. Escrevendo $\Delta = -x y p^2 + (1 - z)^2 m^2$ e fazendo a mudança $k^\mu - y p^\mu + z q_1^\mu \rightarrow l^\mu$ terminamos com o denominador como $(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3$.

Agora precisamos tratar do numerador da Eq.(5.47) que é:

$$\begin{aligned}
 N^\mu &= \bar{u}(q_2) \gamma^\nu (\not{p} + \not{k} + m) \gamma^\mu (\not{k} + m) \gamma_\nu u(q_1) \\
 &= -2\bar{u}(q_2) [\not{k} \gamma^\mu \not{p} + \not{k} \gamma^\mu \not{k} + m^2 \gamma^\mu - 2m(2k^\mu + p^\mu)] u(q_1)
 \end{aligned} \tag{5.50}$$

Aqui tendo usado as seguintes propriedades de multiplicação de matrizes γ : $\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma_\nu = -2\gamma^\mu$ e $\gamma^\nu \gamma^\mu \gamma^\rho \gamma_\nu = 4g^{\mu\rho}$.

Ainda é preciso fazer a transformação citada anteriormente $l^\mu \rightarrow k^\mu - y p^\mu + z q_1^\mu$

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{2} N^\mu &= \bar{u}(q_2) [(\not{k} - y \not{p} + z \not{q}_1) \gamma^\mu \not{p} + (\not{k} - y \not{p} + z \not{q}_1) \gamma^\mu (\not{k} - y \not{p} + z \not{q}_1)] u(q_1) \\
 &\quad + \bar{u}(q_2) [m^2 \gamma^\mu - 2m(2k^\mu - 2y p^\mu + 2z q_1^\mu + p^\mu)] u(q_1)
 \end{aligned} \tag{5.51}$$

A primeira coisa que podemos fazer é isolar os termos envolvendo l (especificamente $k \rightarrow l + yp - zq_1$) em uma expressão só, fazemos isso utilizando a relação $l^\mu l^\nu = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}l^2$ e ainda tendo em mente as relações envolvendo as matrizes γ . Isso nos deixa com

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}N^\mu &= \bar{u}(q_2)\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 + (-y\not{p} + z\not{q}_1)\gamma^\mu((1-y)\not{p} + z\not{q}_1)\right. \\ &\quad \left.+ m^2\gamma^\mu - 2m((1-2y)p^\mu + 2zq_1^\mu)\right]u(q_1) \\ &= \bar{u}(q_2)\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu l^2 - y(1-y)\not{p}\gamma^\mu\not{p} - yz\not{p}\gamma^\mu\not{q}_1 + z(1-y)\not{q}_1\gamma^\mu\not{p} + z^2\not{q}_1\gamma^\mu\not{q}_1\right. \\ &\quad \left.+ m^2\gamma^\mu - 2m((1-2y)p^\mu + 2zq_1^\mu)\right]u(q_1). \end{aligned} \quad (5.52)$$

A partir daqui é necessário fazer o uso de uma série de relações para assim podermos reduzir o nosso numerador a uma expressão com termos mais simples e necessários. Essas relações são:

$$\begin{aligned} p &= q_2 - q_1 \rightarrow \not{p} = \not{q}_2 - \not{q}_1, \\ \not{p}\not{p} &= p^2, \\ \not{q}_1 u(q_1) &= mu(q_1) \text{ e } \bar{u}(q_2)\not{q}_2 = \bar{u}(q_2)m, \\ \bar{u}(q_2)\not{p}u(q_1) &= 0, \\ \gamma^\mu\not{q}_2 &= 2q_2^\mu - \not{q}_2\gamma^\mu, \\ \not{q}_1\gamma^\mu &= 2q_1^\mu - \gamma^\mu\not{q}_1, \\ \not{q}_1\not{q}_2 &= 2q_1^\mu q_{2\mu} - \not{q}_2\not{q}_1. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Usando todas elas e juntando novamente ao fato de que $x + y + z = 1$ e também a útil identidade de Gordon dada pela Eq.(5.39), podemos deixar o nosso numerador com o seguinte formato:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}N^\mu &= \left[-\frac{1}{2}l^2 + (1-x)(1-y)p^2 + (1-4z+z^2)m^2\right]\bar{u}(q_2)\gamma^\mu u(q_1) \\ &\quad + imz(1-z)p_\nu\bar{u}(q_2)\sigma^{\mu\nu}u(q_1) + m(z-2)(x-y)p^\mu\bar{u}(q_2)u(q_1). \end{aligned} \quad (5.54)$$

Como o único termo que será importante para o calculo do momento magnético é o termo com $\sigma^{\mu\nu}$. Então, temos:

$$\begin{aligned} i\mathcal{M}_2^\mu &= p_\nu\bar{u}(q_2)\sigma^{\mu\nu}u(q_1)\left[4ie^3m\int_0^1 dx dy dz\delta(x+y+z-1)\right. \\ &\quad \left.\times\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{z(1-z)}{(l^2-\Delta+i\varepsilon)^3}\right] + \dots \end{aligned} \quad (5.55)$$

O que queremos é $F_2(p^2)$ que é o coeficiente desse operador, normalizado por $\frac{2m}{e}$, então temos

$$F_2(p^2) = \frac{2m}{e}(4ie^3m)\int_0^1 dx dy dz\delta(x+y+z-1)\int\frac{d^4l}{(2\pi)^4}\frac{z(1-z)}{(l^2-\Delta+i\varepsilon)^3} + \mathcal{O}(e^4). \quad (5.56)$$

Usando a rotação de Wick podemos resolver a ultima integral

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta + i\varepsilon)^3} &= i \int \frac{d^4 L_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-L_E^2 - \Delta)^3} \\ &= (-1)^3 \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty dL_E \frac{L_E^3}{(L_E^2 + \Delta)^3} = \frac{-i}{32\pi^2 \Delta}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

em que L_E é a representação no plano euclidiano. Ficamos com

$$F_2(p^2) = \frac{e^2}{4\pi^2} m^2 \int_0^1 dx dy dz \delta(x + y + z - 1) \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{z(1-z)}{(1-z)^2 m^2 - xy p^2}. \quad (5.58)$$

Fazendo $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$ e $p^2 = 0$, teremos

$$\begin{aligned} F_2(0) &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^1 dy \int_0^1 dx \delta(x + y + z - 1) \frac{z}{(1-z)} \\ &= \frac{\alpha}{\pi} \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dy \frac{z}{(1-z)} = \frac{\alpha}{2\pi}. \end{aligned} \quad (5.59)$$

Colocando nosso resultado na Eq.(5.46), teremos

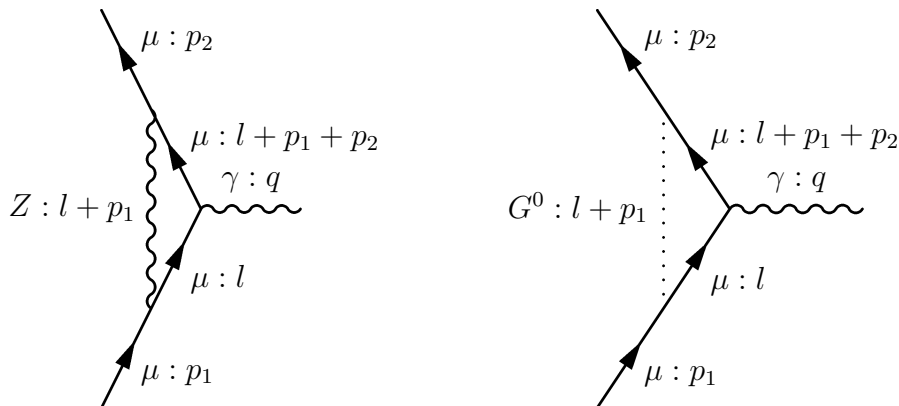
$$g = 2 + \frac{\alpha}{\pi} = 2.00232, \quad (5.60)$$

com a próxima correção de ordem α^2 .

Esse foi o resultado obtido por Schwinger em 1948 [47]. Ao mesmo tempo tanto Feynman e Tomonaga fizeram os mesmos cálculos e ao juntar os três trabalhos que foi possível chegar nessa correção final como a correção ao nível de 1-loop.

5.5 Cálculo da Anomalia Vinda do Bóson Z

A ideia é fazer algo muito parecido com a seção anterior, mas envolvendo o bóson Z , uma correção eletro-frac. Essa será a anomalia que importará para nós. Diferentemente do cálculo anterior, dessa vez não poderemos fazer ele no gauge unitário considerando apenas um diagrama envolvendo o bóson Z . O gauge unitário não é próprio para esse cálculo a 1-loop por causa de divergências que irá acarretar no resultado final. Por isso faremos o uso do gauge R_ξ que nos trará um diagrama extra envolvendo um bóson de Nambu-Goldstone que será responsável por nos levar a um resultado finito. Então, para fazer esse cálculo iremos considerar os seguintes diagramas:



O primeiro representando o bóson Z e o segundo representando o bóson de Nambu-Goldstone G^0 . Todo processo ocorre envolvendo, além dos bósons, múons e fóton com $q = p_2 - p_1$.

Primeiro vamos escrever nossas amplitudes para cada um dos diagramas. Sendo para o primeiro diagrama:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_1^\mu = & \bar{u}(p_2) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} i(V\gamma^\sigma - A\gamma^\sigma\gamma^5) \frac{i(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)}{(l+p_1+p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon} \\
& \times (ie\gamma^\mu) \frac{i(-\not{l} + m_\mu)}{l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon} i(V\gamma^\rho - A\gamma^\rho\gamma^5) \\
& \times \left[\frac{i(-g_{\rho\sigma} + \frac{(l_\rho+p_{1\rho})(l_\sigma+p_{1\sigma})}{(l+p_1)^2})}{(l+p_1)^2 - M_Z^2 + i\varepsilon} - \frac{i\xi \frac{(l_\rho+p_{1\rho})(l_\sigma+p_{1\sigma})}{(l+p_1)^2}}{(l+p_1)^2 - \xi M_Z^2 + i\varepsilon} \right] u(p_1),
\end{aligned} \tag{5.61}$$

em que A e V são o acoplamento vetorial e axial da interação, e ξ um parâmetro arbitrário vindo do gauge R_ξ . No Modelo Padrão eles são dados por $V = g(1 - 4\sin^2\theta)/4\cos\theta$ e $A = g/4\cos\theta$. Deixaremos a substituição para o resultado final.

Agora para o segundo:

$$\begin{aligned}
i\mathcal{M}_2^\mu = & \bar{u}(p_2) \int \frac{d^4l}{(2\pi)^4} C \frac{m_\mu}{M_Z} \gamma^5 \frac{i(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)}{(l+p_1+p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon} (ie\gamma^\mu) \\
& \times \frac{i(-\not{l} + m_\mu)}{l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon} C \frac{m_\mu}{M_Z} \gamma^5 \frac{i}{(l+p_1)^2 - \xi M_Z^2 + i\varepsilon} u(p_1),
\end{aligned} \tag{5.62}$$

em que C também é um acoplamento e que no Modelo Padrão é dado por $C = g/2\cos\theta$. Também deixaremos a substituição para o resultado final.

As contas dessa vez são muito mais longas e complexas que no cálculo feito por Schwinger. Por isso colocamos a simplificação de cada parte do denominador e do numerador da amplitudes, assim como a simplificações das partes das integrais da amplitude, no Apêndice A. Dentro dessas expressões ao todo temos o envolvimento de quatro partes e integrais diferentes que podemos resolver uma de cada vez.

As quatro integrais após a simplificação dos numeradores e denominadores nos permite retirar apenas a parte que usamos para o cálculo da anomalia, as partes que dão alguma contribuição para o momento magnético. Serão quatro partes que usaremos para o resultado final, sendo três referentes ao diagrama envolvendo Z (I_Z^1 , I_Z^2 e I_Z^3) e uma parte

envolvendo o bóson de Nambu-Goldstone (I_G). Essas partes são:

$$\begin{aligned}
I_Z^1 &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{m_\mu^2 ((1 - 4 \sin^2 \theta)^2 (x_2^2 - x_2) + (x_2^2 + 3x_2))}{((x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2)} dx_2 dx_1, \\
I_Z^2 &= -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \left[\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3)}{(x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^4 2(x_1 + x_3)^3}{((x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2)^2} \right] dx_3 dx_2 dx_1, \\
I_Z^3 &= \xi \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \left[\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3)}{(x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 \xi M_Z^2} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^4 2(x_1 + x_3)^3}{((x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 \xi M_Z^2)^2} \right] dx_3 dx_2 dx_1, \\
I_G &= -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{g^2 m_\mu^4 (x_2 - 1)^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta ((x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + \xi x_2 M_Z^2)} dx_2 dx_1.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Para ver um pouco mais detalhado como é feito cada uma das simplificações até chegar nos resultados apresentados na Eq.(5.63), recomendo uma leitura do Apêndice A. Lá cada passo está detalhado assim como os resultados da Eq.(5.63) estão bem explicados. Nós chegamos a eles fazendo de forma muito similar a feita para Schwinger mas com um pouco mais de trabalho matemático.

O resultado final que gera um acréscimo para anomalia é dado por $F_2(0)$ que é dado pela soma dessas quatro partes citadas anteriormente, temos

$$F_2(0) = I_Z^1 + I_Z^2 + I_Z^3 + I_G. \tag{5.64}$$

Olhando para as integrais podemos notar que duas partes do resultado possuem uma dependência aparente de ξ , as partes I_Z^3 e I_G dadas pela Eq.(5.64). Podemos então estudar essa dependência aparente a fundo antes de chegarmos a um acréscimo final para a anomalia, precisamos ver o que a variável ξ irá acarretar em nosso resultado. Então vamos resumir a dependência em $I(\xi) = I_Z^3 + I_G$ e estudar ela resolvendo as integrais:

$$\begin{aligned}
I(\xi) &= \xi \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \left[\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3)}{(x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 \xi M_Z^2} \right. \\
&\quad \left. - \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^4 2(x_1 + x_3)^3}{((x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 \xi M_Z^2)^2} \right] dx_3 dx_2 dx_1 \\
&\quad - \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{g^2 m_\mu^4 (x_2 - 1)^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta (x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + \xi x_2 M_Z^2} dx_2 dx_1.
\end{aligned} \tag{5.65}$$

O primeiro passo será integrar em x_3 :

$$\begin{aligned}
I(\xi) = & \frac{g^2}{128 \cos^2 \theta M_Z \pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \left[\frac{1}{\sqrt{x_2}} \left(4m_\mu \sqrt{\xi} \arctan \left(m_\mu x_1 / M_Z \sqrt{x_2 \sqrt{\xi}} \right) \right. \right. \\
& - 3M_Z \xi \log(m_\mu^2 x_1^2 + M_Z^2 x_2 \xi) \sqrt{x_2} - \sqrt{\xi} (-4m_\mu \arctan \left(\frac{m_\mu (1-x_2)}{M_Z \sqrt{x_2 \sqrt{\xi}}} \right) \\
& \left. \left. - \sqrt{\xi} (3M_Z \sqrt{x_2} \sqrt{\xi} \log(m_\mu^2 (-1+x_2)^2 + M_Z x_2 \xi)) \right) \right. \\
& \left. - \xi M_Z \left(\frac{M_Z^2 x_2 \xi}{m_\mu^2 x_1^2 + M_Z^2 x_2 \xi} + \log(m_\mu^2 x_1^2 + M_Z^2 x_2 \xi) \right) \right. \\
& \left. - \frac{M_Z^2 x_2 \xi}{m_\mu^2 (-1+x_2)^2 + M_Z^2 x_2 \xi} + \log(m_\mu^2 (-1+x_2)^2 + M_Z^2 x_2 \xi) \right) \Big] dx_2 dx_1 \\
& - \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{g^2 m_\mu^4 (x_2 - 1)^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta (x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + \xi x_2 M_Z^2} dx_2 dx_1.
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Agora iremos fazer a integral em x_1 :

$$\begin{aligned}
I(\xi) = & \int_0^1 \left[\frac{g^2 \xi \log(M_Z^2 x_2 \xi)}{64 \cos^2 \theta \pi^2} + \frac{g^2}{128 \cos^2 \theta \pi^2} \left(4(1-x_2) \xi \right. \right. \\
& - \frac{4m_\mu^4 (1-x_2)(-1+x_2)^2}{M_Z^2 (m_\mu^2 (-1+x_2)^2 + M_Z^2 x_2 \xi)} - \frac{3M_Z \sqrt{x_2} \xi^{\frac{3}{2}} \arctan \left(\frac{m_\mu (1-x_2)}{M_Z \sqrt{x_2} \sqrt{\xi}} \right)}{m_\mu} \\
& \left. \left. - 2\xi \log(m_\mu^2 (1-x_2)^2 + M_Z^2 x_2 \xi) - (1-x_2) \xi \frac{M_Z^2 x_2 \xi}{m_\mu^2 (-1+x_2)^2 + M_Z^2 x_2 \xi} \right) \right] dx_2.
\end{aligned} \tag{5.67}$$

E para terminar basta integrarmos em x_2 :

$$I(\xi) = -\frac{g^2 m_\mu^2}{64 \cos^2 \theta M_Z^2 \pi^2} \tag{5.68}$$

Podemos então perceber que o resultado final não depende de ξ , o que é esperado já que o parâmetro ξ era um parâmetro matemático e não físico. Por isso deveríamos esperar que nosso resultado final seria independente dele. Esse resultado vai nos permitir atribuir qualquer valor para o parâmetro matemático ξ .

Para termos a anomalia total basta calcularmos $F_2(0)$:

$$\begin{aligned}
F_2(0) = & -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{m_\mu^2 ((1 - 4 \sin^2 \theta)^2 (x_2^2 - x_2) + (x_2^2 + 3x_2))}{((x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2)} dx_2 dx_1 \\
& -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \left[\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3)}{(x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2} \right. \\
& \left. - \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^4 2(x_1 + x_3)^3}{((x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2)^2} \right] dx_3 dx_2 dx_1 \\
& + \xi \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \left[\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3)}{(x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 \xi M_Z^2} \right. \\
& \left. - \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^4 2(x_1 + x_3)^3}{((x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 \xi M_Z^2)^2} \right] dx_3 dx_2 dx_1 \\
& - \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{g^2 m_\mu^4 (x_2 - 1)^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta ((x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + \xi x_2 M_Z^2)} dx_2 dx_1.
\end{aligned} \tag{5.69}$$

Uma vez que vimos que as integrais são independentes de ξ faremos ele igual a 1 por conveniência já que uma parte do resultado é multiplicado por $(\xi - 1)$, ao fazer $\xi = 1$ estaremos zerando essa parte e facilitando nosso cálculo. Podemos também fazer a mudança de variável do tipo $x_1 = y$ e $x_2 = 1 - x$. Então podemos fazer o cálculo do acréscimo para a anomalia dado por $\Delta a_\mu = F_2(0)$. Então, teremos:

$$\begin{aligned}
\Delta a_\mu = & -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \int_0^1 \int_0^x \frac{m_\mu^2 ((1 - 4 \sin^2 \theta)^2 (x^2 - x) + (x^2 - 5x + 4))}{(x^2 m_\mu^2 + (1 - x) M_Z^2)} dx dy \\
& - \frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^x \frac{g^2 m_\mu^4 x^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta (x^2 m_\mu^2 + (1 - x) M_Z^2)} dx dy \\
= & \frac{m_\mu^2 g^2}{64\pi^2 \cos^2 \theta} \int_0^1 \int_0^x \frac{((1 - 4 \sin^2 \theta)^2 (x^2 - x) + (x^2 - 5x + 4)) - 2 \frac{m_\mu^2}{M_Z^2} x^2}{(x^2 m_\mu^2 + (1 - x) M_Z^2)} dx dy
\end{aligned} \tag{5.70}$$

Esse foi o resultado encontrado por Weinberg e Jackiw em [48].

Esse resultado será de extrema importância para nós no momento em que calcularmos o acréscimo para a anomalia dado por um novo bóson Z' . O cálculo será o mesmo mas com a mudança das massas e dos acoplamentos A , V e C .

6 Modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$

6.1 Introdução

Uma solução para o problema de matéria escura e da anomalia do momento magnético do múon seria pensar em uma extensão do Modelo Padrão da física de partículas. Podemos fazer a construção dessa extensão com o ideal de ser plausível obter dela ferramentas para a solução dos problemas. Porém primeiro é importante fazermos uma revisão do Modelo Padrão de partículas. Para depois entrarmos na extensão.

Começaremos revisando o que o Modelo Padrão oferece no campo das partículas existentes e suas interações. Em seguida, passaremos a estudar a base matemática do Modelo Padrão com foco em sua parte leptônica. Faremos isso porque nossa extensão é baseada em número leptônico e na interação de certos léptons. Por último, faremos a construção da extensão.

6.2 O Modelo Padrão

O modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ irá funcionar como uma extensão do Modelo Padrão de partículas. Para isso, um breve estudo do Modelo Padrão será bem vindo. O Modelo Padrão vem sendo aprimorado desde o início do século passado. Ele descreve a existência das partículas e suas interações.

Aos poucos foi desenvolvido o conhecimento sobre a existência de partículas elementares como os férmions envolvendo os léptons (e , μ e τ e seus neutrinos), os quarks (u , d , c , s , b e t), assim como também suas anti-partículas. Foi necessário também o desenvolvimento do estudo das forças, fora a gravitacional, que regem a natureza e a existência de bósons para servirem de partículas que irão intermediar diferentes tipos de interação. Temos a força eletromagnética intermediada pelo fóton (γ), a força fraca intermediada pelos bósons fracos (W^+ , W^- e Z^0) e também a força forte intermediada pelos glúons (g). Além disso também tivemos o desenvolvimento de um mecanismo que é responsável por gerar massa para as partículas e para os bósons fracos, o mecanismo de Higgs, e com isso a existência de um bóson escalar que seria o responsável por isso acontecer, o bóson de Higgs (H). Toda essa gama de partículas está resumida na Fig.(8).

O conteúdo sobre as partículas e suas interações se encontra no formato da seguinte lagrangiana (uma lagrangiana simplificada do modelo padrão mas útil para se ter uma ideia de como ela funciona):

$$\mathcal{L}_{\text{MP}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + i\bar{\psi}\not{D}\psi + \psi_i y_{ij} \psi_j \phi + |D_\mu\phi|^2 - V(\phi). \quad (6.1)$$

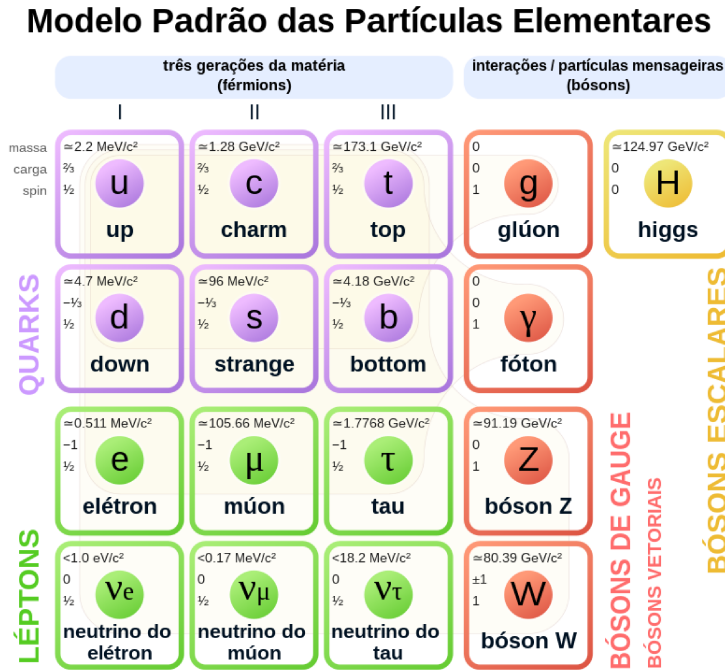


Figura 8 – Modelo Padrão de partículas elementares: Partículas que compõem o modelo padrão. Separadas em quarks, léptons, bósons de gauge e o bóson escalar (bóson de Higgs) [54].

Essa lagrangiana ainda conta com os conjugados hermitianos de seus termos para que ela seja uma função real. Também para que contemple não só interações de partículas mas também de suas antipartículas.

O estudo de cada termo dessa lagrangiana pode ser feito de uma maneira simples como em [55]. Cada termo na lagrangiana é responsável por agrupar a matemática necessária para entendermos cada tipo de interação envolvendo as partículas, sendo eles:

1) $-\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$: esse termo utiliza o tensor, $F_{\mu\nu}$ (sendo os índices de Lorentz μ e ν os representantes das componentes de espaço-tempo), para descrever a existência e a forma de como interagem os bósons que mediam interações, menos o bóson de Higgs. O conteúdo dessa parte muda dependendo das propriedades das partículas de interação. Fótons não interagem entre eles por não possuírem carga elétrica e por isso a contribuição da interação eletromagnética consiste de apenas um termo cinético. Já o glúon e os bósons fracos possuem termos de interação em adição ao termo cinético. Glúons possuem ainda cor o que permite que interajam entre eles. Todas essas interações estão representadas na Fig.(9);

2) $i\bar{\psi}\not{D}\psi$: é responsável para descrever a interação entre as partículas de interação com as de matéria. Sendo os férmions representados por ψ e as partículas de interação, fora o bóson de Higgs, estão representados na derivada covariante \not{D} . Dessa vez não contamos

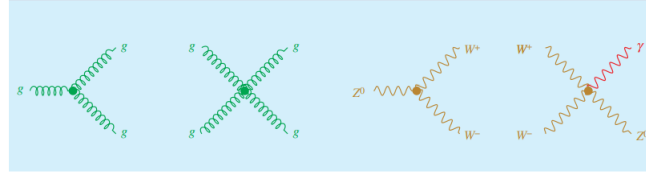


Figura 9 – Exemplos de diagramas de Feynman incluídos no termo (1): interação glúon-glúon (g) (vértices de 3 glúons e de 4 glúons), interação bóson fraco-bóson fraco (Z , W^+ e W^-), e interação bóson fraco-fóton (Z , W^+ , W^- e γ) [55].

com interações entre partículas de interação. Nesse termo estão representados os três tipos de interação, já que contém descrição da interação eletromagnética, fraca e forte. Alguns exemplos de cada uma dessas interações estão representados na Fig.(10): Começamos com a interação eletromagnética, no primeiro quadro da Fig.(10).(a) temos a aniquilação de um elétron e um pósitron, o quadro em seguida representa uma produção de pares, o terceiro a absorção de um fóton por um elétron e o último um diagrama de emissão de fótons (*Bremsstrahlung*). Passando agora para a interação forte, no primeiro quadro Fig.(10).(b) temos um antiquark e seu quark correspondente transformando em um glúon em um processo de aniquilação, já no seguinte temos uma criação de pares com um glúon transformando em quark e seu antiquark correspondente, o terceiro temos uma absorção de glúon e o último uma emissão de glúon. Por fim temos a interação fraca representada pelos quadros da Fig.(10).(c), ela se difere das interações eletromagnética e forte no fato de transformar uma partícula de matéria em outra. Então na Fig.(10).(c) temos processos envolvendo o elétron e e o antineutrino do elétron $\bar{\nu}_e$ no primeiro quadro num tipo de aniquilação e criação de pares e no segundo quadro o elétron e e o neutrino do elétron ν_e em tipos de absorção e emissão;

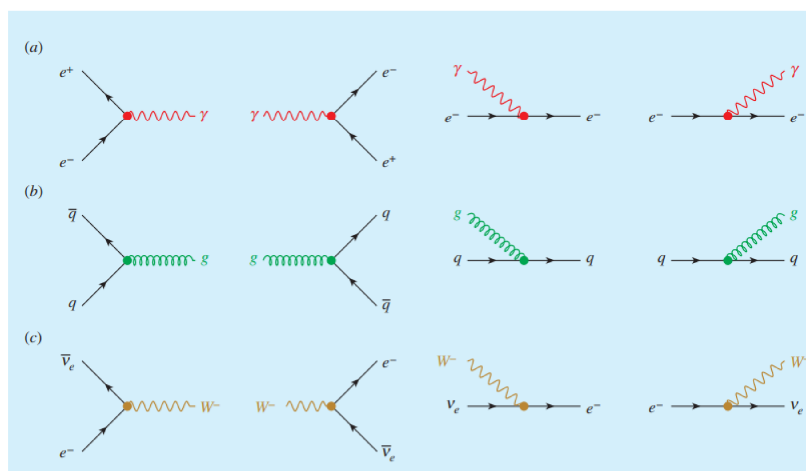


Figura 10 – Vértices da interação eletromagnética (a), interação forte (b), e interação fraca (c). Da esquerda para a direita: exemplos de aniquilação, produção de pares, absorção, e emissão [55].

3) $\psi_i y_{ij} \psi_j \phi$: é o termo que descreve como partículas de matéria interagem com o campo de Higgs, ϕ , e é como essas partículas obtêm sua massa. As entradas da matriz de Yukawa y_{ij} representam os parâmetros de acoplamento com o campo de Higgs e estão relacionadas à massa da partícula em questão. O bóson de Higgs se transforma em pares de partícula e antipartícula em aproximadamente 10^{-22} s. Dependendo de sua massa (seu parâmetro de acoplamento no caso) certos pares de partículas e antipartículas são mais prováveis de serem observados que outros. Isso é por causa do parâmetro de acoplamento, que descreve o acoplamento com o bóson de Higgs, é simplesmente a massa da própria partícula. Por isso o bóson de Higgs é mais provável de transformar em pares de partícula e antipartícula mais massivos como é o exemplo da Fig.(11) com o bóson de Higgs e o tau;

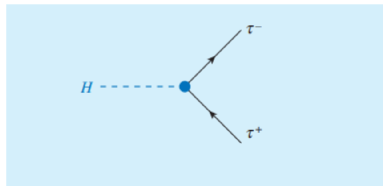


Figura 11 – Um bóson de Higgs se transforma em um par de tau e antitau [55].

4) $|D_\mu \phi|^2$: esse termo descreve como as partículas de interação interagem com o campo de Higgs. No caso apenas bósons de interação fraca que ganham massa através dessa interação. Fótons não obtêm massa pelo mecanismo de Higgs e glúons não possuem massa já que não acoplam com o campo de Higgs. Na Fig.(12) podemos ver a transformação do bóson de Higgs em pares de bósons fracos W^- e W^+ ;

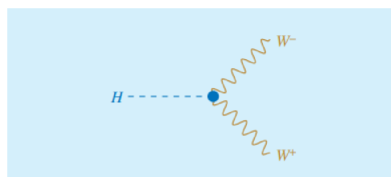


Figura 12 – Um bóson de Higgs se transformando em um par de bósons W^- e W^+ [55].

5) $-V(\phi)$: esse termo envolve a função do potencial do campo de Higgs. Esse potencial não possui um único mínimo em 0 e leva a uma quebra espontânea de simetria. Ele descreve também como o bóson de Higgs interage com outro bóson de Higgs como pode ser visto na Fig.(13).

Nessa seção fizemos um estudo mais geral sobre o Modelo Padrão, porém como o modelo que iremos abordar no final do capítulo tem como base os léptons, daremos um enfoque maior para essa área do Modelo Padrão. Usaremos de base o livro de Chris Quigg [56] para dar esse enfoque extra à parte do Modelo Padrão que envolve os léptons.

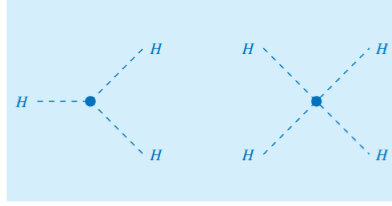


Figura 13 – Diagramas de interação de um bóson de Higgs com outros bósons de Higgs (vértices de 3 Higgs e de 4 Higgs) [55].

6.3 O Modelo Padrão Envolvendo os Léptons

Temos três gerações de léptons: o elétron, o múon e o tau. Cada uma dessas gerações englobam partícula, anti-partícula, neutrino e anti-neutrino. Sua representação é dada pelos dubletos de isospin-fraco:

$$L_1 = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, L_2 = \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, L_3 = \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad (6.2)$$

$$R_1 = e_R, \quad R_2 = \mu_R, \quad R_3 = \tau_R.$$

Em que L e R são as representações canhotas e destrás com 1, 2 e 3 representando cada geração.

Por hora basta focarmos no dubleto do elétron. Seus estados canhotos são dados por: $L_\nu = \nu_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\nu$ e $L_e = e_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)e$. O estado destro é dado por apenas $R_e = e_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)e$, pois aqui consideramos o neutrino como um partícula sem massa.

Para a teoria incluir o eletromagnetismo é necessário definir um parâmetro Y que é a hipercarga fraca. Esse parâmetro pode ser relacionado a carga elétrica com a relação de Gell-Mann-Nishijima dada por: $Q = I_3 + \frac{1}{2}Y$. Para satisfazer essa relação é necessário termos $Y_L = -1$ e $Y_R = -2$. A projeção do isospin fraco I_3 com a hipercarga fraca Y são observáveis que comutam ($[I_3, Y] = 0$).

É interessante utilizar o grupo das transformações geradas por I e Y para ser o grupo de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ da teoria. Para construir a teoria são introduzidos os bósons de gauge

$$b_\mu^1, b_\mu^2, b_\mu^3 \quad \text{para } SU(2)_L, \quad (6.3)$$

$$A_\mu \quad \text{para } U(1)_Y.$$

A lagrangiana do sistema pode ser escrita como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\text{gauge}} + \mathcal{L}_{\text{léptons}}, \quad (6.4)$$

em que o termo cinético para os campos de gauge é

$$\mathcal{L}_{\text{gauge}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^l F^{l\mu\nu} - \frac{1}{4}f_{\mu\nu} f^{\mu\nu}, \quad (6.5)$$

e temos como tensor de campo para o campo de gauge $SU(2)_L$:

$$F_{\mu\nu}^l = \partial_\nu b_\mu^l - \partial_\mu b_\nu^l + g\epsilon_{jkl}b_\mu^j b_\nu^k, \quad (6.6)$$

em que $\epsilon_{i,jk}$ é o símbolo de Levi-Civita. Já o tensor de campo para o campo de gauge $U(1)_Y$ é:

$$f_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu, \quad (6.7)$$

O termo de matéria é

$$\mathcal{L}_{\text{léptons}} = \bar{R}i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu Y \right) R + \bar{L}i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu Y + \frac{ig}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{b}_\mu \right) L. \quad (6.8)$$

O acoplamento do grupo de isospin fraco $SU(2)_L$ é chamado de g , assim como na teoria de Yang-Mills, e a constante de acoplamento do grupo de hipercarga fraca é $\frac{g'}{2}$ (o fator $\frac{1}{2}$ é para facilitar a simplificação).

Existem dois motivos para a teoria até então não ser satisfatória. Ela contém quatro bósons sem massa ($b_\mu^1, b_\mu^2, b_\mu^3, A_\mu$), enquanto na natureza só há um, o fóton. Também a expressão para a lagrangiana representa um elétron sem massa, falta o termo $m_e\bar{e}e$ da lagrangiana tradicional de QED. Um termo de massa de férmions liga as componentes canhota e destra ($\bar{e}e = \frac{1}{2}\bar{e}(1 - \gamma_5)e + \frac{1}{2}\bar{e}(1 + \gamma_5)e = \bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R$). Essas componentes transformam de maneira diferente sob $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$, então um termo explícito desses iria quebrar a invariância de gauge $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$ da teoria, por isso um termo de massa é proibido. A tarefa é modificar a teoria para que exista apenas uma quantidade conservada (a carga elétrica) correspondente a um bóson de gauge sem massa (o fóton), e o elétron obtenha massa.

Para isso, é interessante introduzir um dubleto complexo de campos escalares,

$$\phi = \begin{pmatrix} \phi^+ \\ \phi^0 \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

que transforma como um dubleto de $SU(2)_L$ e portanto deve ter a hipercarga fraca $Y_\phi = +1$, por causa da relação de Gell-Mann-Nishijima. Então é acrescentado a lagrangiana o seguinte termo

$$\mathcal{L}_{\text{escalar}} = (\mathcal{D}^\mu \phi)^\dagger (\mathcal{D}_\mu \phi) - V(\phi^\dagger \phi), \quad (6.10)$$

em que a derivada covariante de gauge é

$$\mathcal{D}_\mu = \partial_\mu + \frac{ig'}{2}A_\mu Y + \frac{ig}{2}\vec{\sigma}\cdot\vec{b}_\mu, \quad (6.11)$$

e o potencial é

$$V(\phi^\dagger \phi) = \mu^2(\phi^\dagger \phi) + |\lambda|(\phi^\dagger \phi)^2. \quad (6.12)$$

Também é possível acrescentar um termo de interação, que envolve o acoplamento de Yukawa de escalares e férmions,

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\zeta_e[\bar{R}(\phi^\dagger L) + (\bar{L}\phi)R], \quad (6.13)$$

que é um escalar de Lorentz simétrico sob rotações locais de $SU(2)_L \otimes U(1)_Y$.

Quando procuramos um mínimo para o potencial (sendo $\mu^2 < 0$) percebemos que esse mínimo é diferente de zero e temos uma quebra espontânea de simetria. Então escolhemos como valor no vácuo do campo escalar:

$$(\phi)_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (6.14)$$

em que $\nu = \sqrt{-\mu^2/|\lambda|}$, que quebra ambas simetrias de $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$ mas preserva uma invariância sob a simetria $U(1)_{EM}$ gerada pelo operador de carga elétrica.

O vácuo é deixado invariante pelo gerador \mathcal{G} se $e^{i\alpha\mathcal{G}}(\phi)_0 = (\phi)_0$. Para uma transformação infinitesimal isso vira $(1 + i\alpha\mathcal{G})(\phi)_0 = (\phi)_0$, então a condição para \mathcal{G} deixar o vácuo invariante é $\mathcal{G}(\phi)_0 = 0$.

É simples observar que

$$\begin{aligned} \sigma_1(\phi)_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \nu/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ Quebra!} \\ \sigma_2(\phi)_0 &= \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i\nu/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix} \neq 0, \text{ Quebra!} \\ \sigma_3(\phi)_0 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\nu/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0, \text{ Quebra!} \\ Y(\phi)_0 &= Y_\phi(\phi)_0 = +1(\phi)_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \nu/\sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0, \text{ Quebra!} \end{aligned} \quad (6.15)$$

Entretanto, se analisarmos o efeito do operador de carga elétrica, \mathcal{Q} , no estado de vácuo (eletricamente neutro), percebemos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\phi)_0 &= \frac{1}{2}(\sigma_3 + Y)(\phi)_0 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} Y_\phi + 1 & 0 \\ 0 & Y_\phi - 1 \end{pmatrix} (\phi)_0 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \nu/\sqrt{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ Não Quebra!} \end{aligned} \quad (6.16)$$

Com isso conseguimos perceber que todos os quatro geradores quebram, mas a combinação linear correspondente a carga elétrica não. Isso significa que conseguiremos fazer com que o fóton permaneça sem massa, enquanto os outros três bósons irão adquirir.

O próximo passo é expandir a Lagrangiana pelo potencial de Higgs V mínimo, escrevendo

$$\phi = \exp\left(\frac{i\zeta\sigma}{2\nu}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ (\nu + H)/\sqrt{2} \end{pmatrix}, \quad (6.17)$$

e transformar de vez para gauge U: $\phi \rightarrow \phi' = \exp\left(-i\frac{\zeta\sigma}{2\nu}\right) \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ (\nu + H)/\sqrt{2} \end{pmatrix}$, $\vec{\sigma} \cdot \vec{b}_\mu \rightarrow \vec{\sigma} \cdot \vec{b}'_\mu$, $A_\mu \rightarrow A_\mu$, $R \rightarrow R$ e $L \rightarrow L' = \exp\left(-i\frac{\zeta\sigma}{2\nu}\right) L$. Então, a Lagrangiana pode ser

reescrita em termos dos campos de gauge U e as consequências da quebra de simetria espontânea podem ser estudadas.

O termo escalar na Lagrangiana fica como

$$\mathcal{L}_{\text{escalar}} = \frac{\nu^2}{8}[g^2|b_\mu^1 - ib_\mu^2|^2 + (g'A_\mu - gb_\mu^3)^2] + \frac{1}{2}[(\partial^\mu H)(\partial_\mu H) - 2\mu^2 H^2] + \dots \quad (6.18)$$

mais os termos de interação.

Se definirmos os campos carregados de gauge como

$$W_\mu^\pm \equiv \frac{b_\mu^1 \mp ib_\mu^2}{\sqrt{2}}, \quad (6.19)$$

temos o termo proporcional a $g^2\nu^2$ como um termo de massa para os bósons vetoriais carregados:

$$\frac{g^2\nu^2}{4}(|W_\mu^+|^2 + |W_\mu^-|^2), \quad (6.20)$$

que corresponde às massas dos bósons intermediários carregados

$$M_{W^\pm} = \frac{g\nu}{2}. \quad (6.21)$$

Se definirmos a combinação ortogonal

$$Z_\mu = \frac{-g'A_\mu + gb_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (6.22)$$

e

$$A_\mu = \frac{gA_\mu + g'b_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (6.23)$$

consequimos ver que o bóson intermediário neutro, Z^0 , adquire massa

$$M_{Z^0} = \sqrt{g^2 + g'^2}\nu/2 = M_W\sqrt{1 + g'^2/g^2}, \quad (6.24)$$

e que o campo A_μ continua sendo um bóson de gauge sem massa.

Se examinarmos a segunda parte da lagrangiana que envolve o campo H é possível ver que ele adquiriu uma (massa)²,

$$M_H^2 = -2\mu^2 > 0; \quad (6.25)$$

ele é o bóson de Higgs físico.

O termo de Yukawa da Lagrangiana vira

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = -\zeta_e \frac{(\nu + H)}{\sqrt{2}}(\bar{e}_R e_L + \bar{e}_L e_R) = -\frac{\zeta_e \nu}{\sqrt{2}}\bar{e}e - \frac{\zeta_e H}{\sqrt{2}}\bar{e}e, \quad (6.26)$$

então o elétron adquire massa

$$m_e = \frac{\zeta_e \nu}{\sqrt{2}}. \quad (6.27)$$

O elétron e outros férmions adquirem massa da sua interação com o campo η .

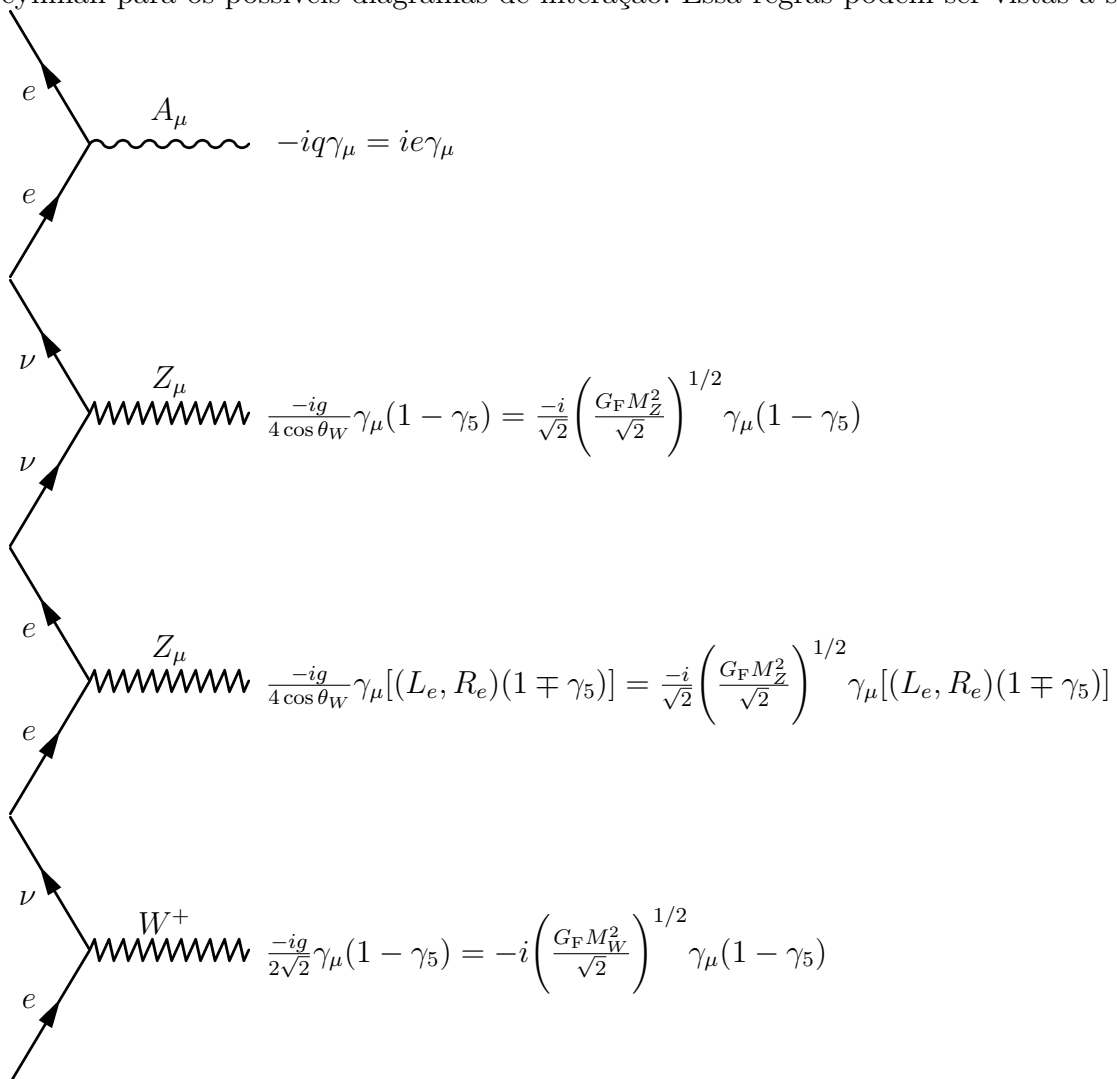
As interações entre bósons de gauge e léptons são lidas da $\mathcal{L}_{\text{léptons}}$. Para o bóson de gauge carregado, W , temos:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{W:l} &= -\frac{g}{\sqrt{2}}(\bar{\nu}_L\gamma^\mu e_L W_\mu^+ + \bar{e}_L\gamma^\mu \nu_L W_\mu^-) \\ &= -\frac{g}{2\sqrt{2}}[\bar{\nu}\gamma^\mu(1-\gamma_5)eW_\mu^+ + \bar{e}\gamma^\mu(1-\gamma_5)\nu W_\mu^-].\end{aligned}\quad (6.28)$$

De maneira similar, o acoplamento do bóson de gauge neutro, Z , com os léptons é dado por

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{Z^0:l} &= \frac{gg'}{\sqrt{g^2+g'^2}}\bar{e}\gamma^\mu e A_\mu - \frac{\sqrt{g^2+g'^2}}{2}\bar{\nu}_L\gamma^\mu \nu_L Z_\mu \\ &+ \frac{1}{\sqrt{g^2+g'^2}}\left[-g'^2\bar{e}_R\gamma^\mu e_R + \frac{(g^2-g'^2)}{2}\bar{e}_L\gamma^\mu e_L\right]Z_\mu.\end{aligned}\quad (6.29)$$

A partir dessas lagrangianas de interação é possível retirar algumas regras de Feynman para os possíveis diagramas de interação. Essa regras podem ser vistas a seguir:



em que $(L_e = 2\sin^2\theta_W - 1; R_e = 2\sin^2\theta_W)$.

Então de fato é possível identificarmos o A_μ como o fóton, contanto que seja estabelecido

$$\frac{gg'}{\sqrt{g^2 + g'^2}} = Q_e. \quad (6.30)$$

É conveniente introduzirmos um ângulo de mistura fraco θ_W para parametrizar a combinação de bósons de gauge. Definimos

$$g' = g \tan \theta_W, \quad (6.31)$$

sendo

$$\sqrt{g^2 + g'^2} = \frac{g}{\cos \theta_W}, \quad (6.32)$$

e assim as expressões para Z_μ e A_μ serão

$$\begin{aligned} Z_\mu &= -A_\mu \sin \theta_W + b_\mu^3 \cos \theta_W, \\ A_\mu &= Z_\mu \cos \theta_W + b_\mu^3 \sin \theta_W, \end{aligned} \quad (6.33)$$

que pode ser invertido para ficar

$$\begin{aligned} A_\mu &= A_\mu \cos \theta_W - Z_\mu \sin \theta_W, \\ b_\mu^3 &= A_\mu \sin \theta_W + Z_\mu \cos \theta_W. \end{aligned} \quad (6.34)$$

Agora as constantes de acoplamento dos grupos de gauge $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$ podem ser escritas como

$$\begin{aligned} g &= \frac{e}{\sin \theta_W} \geq e, \\ g' &= \frac{e}{\cos \theta_W} \geq e, \end{aligned} \quad (6.35)$$

fazendo com que as interações fracas e eletromagnéticas estejam relacionadas por um único parâmetro. E ainda ficamos com a relação $M_Z^2 = \frac{M_W^2}{\cos^2 \theta_W} \geq M_W^2$. Os valores atuais medidos para as massas e para o ângulo de mistura cinético são: $M_W = (80.379 \pm 0.012)\text{GeV}/c^2$, $M_Z = (91.1876 \pm 0.0021)\text{GeV}/c^2$ e $\sin^2(\theta_W) = 0.23121 \pm 4$. Dados provenientes do PDG [57].

A razão das interações fracas em baixa energia terem esse nome é então relacionada a grande massa dos bósons intermediários e não a uma constante de acoplamento pequena intrínseca.

6.4 Modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$

O modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ [5] tem como base o fato de que a lagrangiana do Modelo Padrão (MP) é invariante sob as três simetrias globais da família do número leptônico: $U(1)_{L_e}$, $U(1)_{L_\mu}$ e $U(1)_{L_\tau}$. Podemos ver isso olhando para a parte da lagrangiana que

envolve os léptons. A mesma que já usamos anteriormente na Eq.(6.8) mas dessa vez não a deixaremos escrita apenas para o elétron e sim envolvendo as três gerações de léptons:

$$\mathcal{L}_{\text{léptons}} = \sum_m^3 \bar{R}_m i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu Y \right) R_m + \bar{L}_m i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu Y + \frac{ig}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{b}_\mu \right) L_m. \quad (6.36)$$

Se fizermos uma transformação do tipo $L_i \rightarrow L'_m = U_{mn} L_n$ e $R_m \rightarrow R'_m = V_{mn} R_n$, sendo U_{mn} e V_{mn} matrizes unitárias 3×3 , na lagrangiana, ficaremos com a seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{léptons}} &= \sum_{m,n,l}^3 V_{mn} R_n^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu Y \right) V_{lm}^\dagger R'_l \\ &\quad + U_{mn} L_n^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu Y + \frac{ig}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{b}_\mu \right) U_{lm}^\dagger L_l \\ &= \sum_{m,n,l}^3 R_n^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu Y \right) V_{mn} V_{lm}^\dagger R'_l \\ &\quad + L_n^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu Y + \frac{ig}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{b}_\mu \right) U_{mn} U_{lm}^\dagger L_l \\ &= \sum_{n,l}^3 R_n^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu Y \right) \delta_{nl} R'_l \\ &\quad + L_n^\dagger \gamma^0 i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu Y + \frac{ig}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{b}_\mu \right) \delta_{nl} L_l \\ &= \sum_n^3 \bar{R}'_n i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu Y \right) R'_n + \bar{L}'_n i\gamma^\mu \left(\partial_\mu + \frac{ig'}{2} A_\mu Y + \frac{ig}{2} \vec{\sigma} \cdot \vec{b}_\mu \right) L'_n. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Percebemos que a lagrangiana permanece invariante. Isso é verdade para as três gerações de família leptônica. Mas podemos ver ainda como essa transformação afeta outras partes da lagrangiana, como a de interação de Yukawa que já escrevemos anteriormente em função apenas do elétron na Eq.(6.26), mas agora escrevemos de forma geral para as três gerações de léptons.

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_m^3 [\zeta_{mn}^{[e]} \bar{R}_m (\phi^\dagger L_m) + (\zeta_{mn}^{[e]})^\dagger (\bar{L}_m \phi) R_m]. \quad (6.38)$$

Em que ζ_{ij} é o acoplamento de Yukawa no formato de uma matriz complexa. Sem perda de generalidade nós podemos escrever uma matriz como o produto de uma matriz unitária vezes uma matriz diagonal real vezes outra matriz unitária. Podemos fazer isso com a matriz de Yukawa: $\zeta^{[e]} = V_e^\dagger M^{[e]} U_e$ em que M^e é uma matriz diagonal real e U_e e V_e são matrizes unitárias (com a propriedade de $V_e V_e^\dagger = U_e U_e^\dagger = \mathbb{1}$). Se aplicarmos essas mudanças ficamos com:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_m^3 [V_e^\dagger M^{[e]} U_e R_m^\dagger \gamma^0 (\phi^\dagger L_m) + U_e^\dagger M^{[e]} V_e (L_m^\dagger \gamma^0 \phi) R_m]. \quad (6.39)$$

Podemos unir as matrizes unitárias U_e e V_e com os campos fazendo a seguinte redefinição $L' = U_e L$ e $R' = V_e R$ sem afetar o restante das lagrangianas escalar e de Yukawa. Então,

ficamos com uma nova expressão para lagrangiana de Yukawa com a seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = - \sum_m^3 [m_{mm} \bar{R}_m (\phi^\dagger L_m) + m_{mm} (\bar{L}_m \phi) R_m]. \quad (6.40)$$

Note que agora temos uma expressão em função de m_{mm} que são os elementos da diagonal da matriz M_{mn} e isso quebra a simetria global leptônica para três mudanças de fase do tipo:

$$L_m \rightarrow e^{i\alpha_m} L_m, R_m \rightarrow e^{-i\alpha_m} R_m. \quad (6.41)$$

interpretados como três números leptônicos, um para cada tipo de família (elétron, múon, e tau).

Houve um certo esforço para se encontrar experimentalmente processos que envolvessem a violação da conservação do número leptônico de família. Por exemplo, os processos $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$ e $\mu^- \rightarrow e^- e^- e^+$ possuem um limite superior em sua razão de ramificação de 4.2×10^{-13} e 10^{-12} respectivamente. Dados oriundos do experimento MEG [58] para o caso de $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$ e da colaboração SINDRUM [59] para $\mu^- \rightarrow e^- e^- e^+$. O que gera um apoio experimental para a conservação do número leptônico de família.

Nós podemos também ver como esse processo é visto pela teoria. O estudo do processo $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$ no ponto de vista do Modelo Padrão é um exemplo interessante de cálculo a um loop feito usando o gauge de R_ξ . De uma forma relativamente parecida com o que fizemos anteriormente no cálculo de $g-2$, no Cap.(5), envolvendo cálculo de diagramas e o uso de bósons de Goldstone. O processo é descrito por um diagrama de forma semelhante ao da Fig.(14).

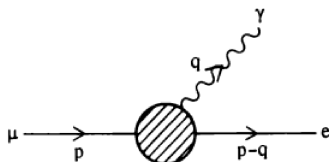


Figura 14 – Esboço do tipo de diagrama da interação $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$.

Sabemos que esse é um tipo de interação que viola a conservação do número leptônico de família. A maneira para resolver isso é estudar o processo considerando neutrinos massivos e que $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$ seja mediado pela mistura e oscilação desses neutrinos. Isso pode ser visto na Fig.(15), onde os diagramas a serem estudados estão representados. Quando estudamos a amplitude do processo chegamos a conclusão que a amplitude possui uma expressão relacionada a um termo magnético. Então no mesmo formato de abordagem feito para $g-2$ precisamos procurar termos que podem ser reduzidos ao termo magnético e podemos descartar o restante. Isso nos permite descartar o diagrama da Fig.(15).(e) e focar nos representados nos quadros de Fig.(15).(a)-(d). Neles podemos ver o envolvimento de neutrinos e bóson de Goldstone gerado pelo nosso conhecimento do Modelo Padrão.

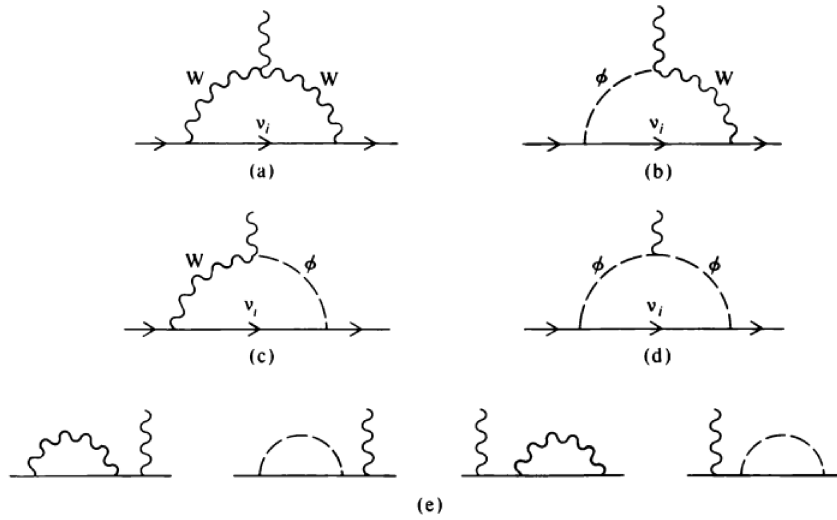


Figura 15 – Os vários tipos de diagramas que representam a interação $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$.

Ao estabelecermos os momentos para os diagramas da Fig.(15)(a)-(d) no formato da Fig.(16), basta calcularmos as integrais de uma maneira bastante semelhante ao que fizemos anteriormente para o cálculo de $g - 2$.

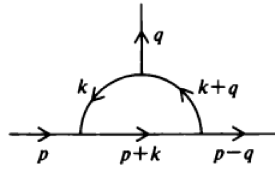


Figura 16 – Diagrama com momentos designados para a interação $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$.

Todo esse procedimento para o cálculo está bem desenvolvido no livro de Ta-Pei Cheng & Ling-Fong Li [60]. Seguindo todas as etapas do cálculo conseguimos escrever expressões para a taxa de decaimento $\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \gamma)$ e $\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \nu \bar{\nu})$. Assim podemos chegar a uma expressão para a razão de ramificação, dada por:

$$B(\mu^- \rightarrow e^- \gamma) = \frac{\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \gamma)}{\Gamma(\mu^- \rightarrow e^- \nu \bar{\nu})} = \frac{3\alpha}{32\pi} \delta_\nu^2, \quad (6.42)$$

em que α é a constante de estrutura fina e $\delta_\nu = \sum_i U_{ei}^* U_{\mu i} (m_i^2/M^2)$ (sendo este termo um valor relacionado a mistura dos neutrinos envolvidos no processo e com M sendo a massa do boson intermediário). Tal resultado foi encontrado e desenvolvido por Cheng & Li em 1977. Quando estudamos um cenário em que a massa dos neutrinos ultrapassa limites cosmológicas $\sum_i m_{\nu_i} > 0.12\text{eV}$ [1], nós chegamos a um limite de $B(\mu^- \rightarrow e^- \gamma) < 10^{-40}$. Como já vimos anteriormente temos através de dados experimentais um valor para o limite superior dessa expressão que está dentro da teoria e restringe bastante a existência de tal processo.

Um conceito interessante, que é necessário abordarmos antes de pensarmos na estrutura do modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$, é o da questão de simetrias globais e locais. Simetrias globais possuem a propriedade que campos em pontos bem distantes de espaço-tempo são transformados pela mesma quantidade. Enquanto simetrias locais, por outro lado, permitem que mudanças no campo variem com as coordenadas de espaço-tempo, e então o subconjunto das possíveis transformações de simetria local estejam de acordo com noções intuitivas de localidade. Essas definições nos permitem ter uma noção de que simetrias locais seriam mais fundamentais que as globais. Isso nos permite postular que toda simetria global deveria em última instância estar contida em uma simetria local, e então todas as correntes de simetria deveriam acoplar a campos de gauge associados.

Então, a ideia seguinte é pensar sobre a possibilidade das correntes de simetria da invariância do número leptônico de família serem acopladas a campos de gauge. Teorias de gauge só são viáveis se elas forem livres de anomalias de gauge, isso implica no espectro de férmions da teoria. Continuando com a ideia de que simetrias globais estão contidas em simetrias locais, podemos considerar que o subconjunto dessas simetrias globais, que são livres de anomalia dado um espectro de férmions pré-existente, deveria ser possível fazer um gauge com ele. Não podemos fazer um gauge com as simetrias globais restantes, que são anômalas em respeito aos férmions existentes, sem estender o espectro de férmions.

As simetrias de uma teoria são de extrema importância para o entendimento da estrutura da teoria. Na maioria dos casos, uma simetria de uma teoria clássica é também uma simetria da teoria quântica baseada na mesma lagrangiana. Mas quando isso não acontece, encontramos uma simetria anômala. Uma simetria desse formato também é de extrema importância para o estudo da estrutura da teoria.

Através do teorema de Noether sabemos que simetrias contínuas globais implicam em correntes conservadas. Mas isso não acontece quando estamos trabalhando com uma simetria anômala, a conservação da corrente não ocorre. Esse fato desenvolve consequências para teorias como a QED e de Yang-Mills, pois envolvem um acoplamento entre corrente e uma partícula não massiva de spin 1. Se essa corrente não é conservada, algumas consequências acontecem, como: a violação da identidade de Ward, produção de polarização longitudinal não física e a violação da propriedade unitária. Por isso, em uma teoria quântica unitária, simetrias com gauge devem ser livres de anomalia.

Essas anomalias de simetria quando associadas a bósons de gauge são chamadas de anomalia de gauge. Quando falamos de livre de anomalia o enfoque é em anomalias de gauge e não anomalias globais.

Uma maneira de entender anomalias é fazendo um estudo através de diagramas de Feynman. Famosos diagramas triangulares que geram o entendimento matemático para essa teoria. Isso está bem desenvolvido no livro de Schwartz [46] e no nosso caso iremos direto ao resultado que terá implicação na teoria.

A corrente associada a um campo de gauge é escrita da seguinte maneira:

$$J_\mu^a = \sum_\psi \bar{\psi}_i T_{ij}^a \gamma^\mu \psi_j, \quad (6.43)$$

em que T_{ij}^a são os geradores do grupo que podem ser escritos em qualquer representação arbitrária. Os diagramas triângulo geram fatores de T^a nos vértices. Dois deles representados na Fig.(17). Podemos escrever o grupo de traços como a soma de tensores simétricos e

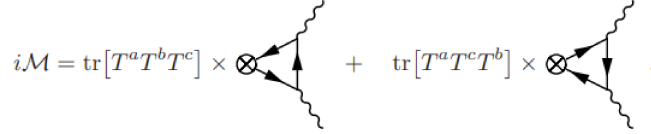


Figura 17 – Diagramas Triângulo e sua contribuição

antissimétricos como

$$\text{Tr}[T^a T^b T^c] = \frac{1}{2} \text{Tr}[[T^a, T^b] T^c] + \frac{1}{2} \text{Tr}[\{T^a, T^b\} T^c] = i \frac{1}{2} T_R f^{abc} + \frac{1}{4} d_R^{abc}. \quad (6.44)$$

em que f^{abc} é a constante de estrutura, T_R gerador do grupo com R sendo o índice da representação. A parte que queremos é a envolvendo d_R^{abc} , já que a parte com f^{abc} , que da a diferença entre os dois loops, é removida através da renormalização sem violar a invariância de gauge. Já d_R^{abc} é um tensor simétrico dado por:

$$d_R^{abc} = 2 \text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}]. \quad (6.45)$$

Podemos escrever

$$\text{Tr}[T_R^a \{T_R^b, T_R^c\}] = A(R) \text{Tr}[T^a \{T^b, T^c\}] = A(R) d^{abc}, \quad (6.46)$$

em que $A(R)$ é o coeficiente de anomalia e d^{abc} (sem o subíndice) é definido usando a representação fundamental ($A(\text{fund}) = 1$).

A contribuição proporcional a constante de anomalia d^{abc} soma os dois diagramas triangulares. Então, ficamos com uma expressão para a conservação da corrente do tipo:

$$\partial_\alpha J_\alpha^a = \left(\sum_{\text{canhoto}} A(R_l) - \sum_{\text{destro}} A(R_r) \right) \frac{g^2}{128\pi^2} d^{abc} \varepsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu}^a F_{\alpha\beta}^a, \quad (6.47)$$

em que a soma canhota é sob as partículas canhotas, com $A(R_l)$ sendo o coeficiente de anomalia associado com a representação R_l , da mesma forma temos o lado destro.

Usando essa teoria toda como base conseguimos agora estudar melhor a forma que a corrente pode ser conservada para alguns grupos diferentes. Para isso iremos estabelecer a combinação linear dos números leptônicos escrita como $\chi = \alpha L_e + \beta L_\mu + \gamma L_\tau$. Vamos fazer um cenário por vez:

1)[SU(3)]²U(1)_χ: Nesse cenário nós não teríamos contribuição por parte dos léptons, pois a soma é feita com base em cor que é uma propriedade dos quarks. Por isso em relação ao número leptônico seguiríamos com 0.

2)[SU(2)_L]²U(1)_χ: Agora nós temos um cenário em que dependemos apenas das partículas de campo canhoto:

$$\left(\sum_{\text{canhoto}} \chi \right) = \alpha L_e + \beta L_\mu + \gamma L_\tau. \quad (6.48)$$

Desse cenário nós tiramos a seguinte expressão:

$$\alpha L_e + \beta L_\mu + \gamma L_\tau = 0. \quad (6.49)$$

3)[U(1)_Y]²U(1)_χ: Agora teremos uma mistura da hipercarga Y e o número leptônico dado por:

$$\left(\sum_{\text{canhoto}} Y_l^2 \chi_l - \sum_{\text{destro}} Y_r^2 \chi_r \right) = Y_e^2 \alpha L_e + Y_\mu^2 \beta L_\mu + Y_\tau^2 \gamma L_\tau = \alpha L_e + \beta L_\mu + \gamma L_\tau. \quad (6.50)$$

No último passo fizemos o uso de $Y_e = Y_\mu = Y_\tau = -1$. Com isso teremos a expressão:

$$\alpha L_e + \beta L_\mu + \gamma L_\tau = 0. \quad (6.51)$$

4)[U(1)_χ]³: Essa última será totalmente em relação a nossa combinação linear envolvendo os números leptônicos e será dada por:

$$\left(\sum_{\text{canhoto}} \chi_l^3 - \sum_{\text{destro}} \chi_r^3 \right) = \alpha^3 L_e^3 + \beta^3 L_\mu^3 + \gamma^3 L_\tau^3. \quad (6.52)$$

Isso nos rende uma última expressão para construirmos a teoria. Ela é da seguinte forma:

$$\alpha^3 L_e^3 + \beta^3 L_\mu^3 + \gamma^3 L_\tau^3 = 0. \quad (6.53)$$

Agora podemos juntar as três expressões e ver como podemos construir a teoria.

$$\begin{aligned} \text{Expressão 1 : } E_1 &: \alpha L_e + \beta L_\mu + \gamma L_\tau, \\ \text{Expressão 2 : } E_2 &: \alpha L_e + \beta L_\mu + \gamma L_\tau, \\ \text{Expressão 3 : } E_3 &: \alpha^3 L_e^3 + \beta^3 L_\mu^3 + \gamma^3 L_\tau^3. \end{aligned} \quad (6.54)$$

Considerando que $L_e = L_\mu = L_\tau = 1$ o que podemos variar é o valor de α , β e γ . É interessante passarmos por diferentes cenários, mesmo alguns funcionando e outros não. Esse cenários estão resumidos na seguinte tabela:

Conseguimos tirar algumas considerações interessantes da Tab.(1). A primeira é que o MP não permite que qualquer simetria de número leptônico dada por $L = L_e + L_\mu + L_\tau$

Possibilidades de teorias				
Teoria	α	β	γ	Hipóteses
L_e	1	0	0	$E_1 : 1, E_2 : 1, E_3 : 1$
L_μ	0	1	0	$E_1 : 1, E_2 : 1, E_3 : 1$
L_τ	0	0	1	$E_1 : 1, E_2 : 1, E_3 : 1$
$L_e + L_\mu + L_\tau$	1	1	1	$E_1 : 3, E_2 : 3, E_3 : 3$
$L_e + L_\mu$	1	1	0	$E_1 : 2, E_2 : 2, E_3 : 2$
$L_e + L_\tau$	1	0	1	$E_1 : 2, E_2 : 2, E_3 : 2$
$L_\mu + L_\tau$	0	1	1	$E_1 : 2, E_2 : 2, E_3 : 2$
$L_e - L_\mu$	1	-1	0	$E_1 : 0, E_2 : 0, E_3 : 0$
$L_e - L_\tau$	1	0	-1	$E_1 : 0, E_2 : 0, E_3 : 0$
$L_\mu - L_\tau$	0	1	-1	$E_1 : 0, E_2 : 0, E_3 : 0$

Tabela 1 – Possibilidades de teorias.

ou por $L = L_e$, $L = L_\mu$ e $L = L_\tau$ seja feito um gauge, devido a anomalias não nulas. Mas existem três simetrias livres de anomalia no MP geradas por

$$L_1 = L_e - L_\mu \quad L_2 = L_e - L_\tau \quad \text{e} \quad L_3 = L_\mu - L_\tau,$$

em que é possível fazer um gauge. Mas não é possível fazer um em duas delas simultaneamente, já que anomalias do tipo $L_i^2 L_j$ ($i, j = 1, 2, 3$ e $i \neq j$) não são necessariamente nulas.

Então podemos desenvolver a teoria com base nesses modelos que são livres de anomalias e não possuem a necessidade de mudança no espectro de férmions do MP.

Usando de base o grupo de gauge $G_{\text{MP}} \otimes U(1)_{L_{1,2,3}}$, em que G_{MP} é dado por $G_{\text{MP}} = \text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(2)_L \otimes U(1)_Y$, chegamos a três teorias diferentes definidas por ele, em que a maior consequência dessa extensão é um segundo bóson de gauge neutro (Z'_1, Z'_2 ou Z'_3). Vimos que um dos pontos positivos do modelo é que não existe necessidade de outros férmions, fora os do MP com três gerações, para a existência do bóson Z' . Que é algo que não acontece em outros modelos envolvendo Z' .

Podemos notar que na realidade estamos trabalhando com 3 modelos diferentes já que nenhum deles pode acontecer simultaneamente. Os dois primeiros modelos, com envolvimento da primeira geração de léptons (L_e) e com a existência de Z'_1 ou Z'_2 , são bastante interessantes para experimentos em aceleradores, já que acoplam com elétrons. Mas o nosso foco será para o terceiro modelo com a existência de Z'_3 . Como ele não acopla com partículas de primeira geração não possui a mesma gama de experimentos para gerar limites a teoria. Porém, ele é de extrema utilidade para o estudo de $g - 2$ como veremos posteriormente.

A simetria local de $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ é quebrada espontaneamente, e o bóson Z' se torna massivo através do mecanismo de Higgs. Isso acontece com a introdução do campo escalar de Higgs S neutro sob $\text{SU}(3)_C \otimes \text{SU}(2)_L \otimes U(1)_Y$ mas não sob $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ local. Um valor

esperado de vácuo diferente de zero para S quebra $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ local e gera massa para Z' dada por $M_{Z'} = g'\langle S \rangle$. É importante notar que $\langle S \rangle \neq 0$ quebra $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ local (que atua nos léptons e em S) para a simetria global usual e $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ (que atua em apenas léptons). Então a conservação do número leptônico continua como um princípio mesmo na presença do bóson massivo Z' . Esse mecanismo de quebra de simetria não induz a mistura entre Z' e o bóson Z do Modelo Padrão.

A lagrangiana de interação entre o bóson Z' com partículas de segunda e terceira geração do modelo padrão e partículas de matéria escura é dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g' Z'_\mu (J_{\text{MP}}^\mu + J_{\text{ME}}^\mu), \quad (6.55)$$

em que g' será o acoplamento universal de gauge e Z' o bóson de gauge Z'_3 do modelo envolvendo $L_\mu - L_\tau$. As correntes do modelo padrão (MP) e de matéria escura (ME) são dadas por:

$$\begin{aligned} J_{\text{MP}}^\nu &= \bar{\mu}\gamma^\nu\mu + \bar{\nu}_\mu\gamma^\nu P_L\nu_\mu - \bar{\tau}\gamma^\nu\tau - \bar{\nu}_\tau\gamma^\nu P_L\nu_\tau, \\ J_{\text{ME}}^\nu &= \bar{\chi}\gamma^\nu\chi. \end{aligned} \quad (6.56)$$

Em que P_L é o projetor quiral canhoto já visto anteriormente como L e a partícula de matéria escura χ é considerada um férmion de Dirac.

7 Densidade de Relíquia e Anomalia do Momento Magnético do Múon no Modelo

$$U(1)_{L_\mu - L_\tau}$$

7.1 Introdução

No capítulo anterior vimos a possibilidade de realizarmos uma extensão do Modelo Padrão baseada no número leptônico do múon menos o do tau. Usando a lagrangiana de interação como base, podemos realizar o cálculo do acréscimo para a anomalia do momento magnético do múon, vinda do bóson Z' , e o cálculo da densidade de relíquia da partícula de matéria escura envolvida no modelo. Esses cálculos serão possíveis graças ao fato de que a lagrangiana de interação contém termos envolvendo a interação entre partícula de matéria escura, os léptons múon e tau e o novo bóson Z' .

O primeiro passo que iremos dar será utilizar a parte da lagrangiana envolvendo a interação entre o bóson Z' com o múon para calcularmos a contribuição dessa interação para a anomalia do momento magnético. Em seguida, utilizaremos a parte envolvendo a interação do bóson Z' com o múon (sua antipartícula, seus neutrinos), o tau (sua antipartícula, seus neutrinos) e com a partícula de matéria escura (sua antipartícula) para calcularmos a expressão para o decaimento do bóson nos férmions. Esse cálculo será útil para o passo seguinte, que será o desenvolvimento da seção de choque de interações da partícula de matéria escura com os léptons da família do múon e da do tau. Obtendo a seção de choque poderemos realizar o cálculo da densidade de relíquia de matéria escura e compararmos com o observado pela colaboração Planck [1]. Por último, faremos um estudo do número efetivo de espécies de neutrino e a contribuição que esse valor recebe do bóson Z' e da partícula de matéria escura.

7.2 Contribuição do Bóson Z' para a Anomalia do Momento Magnético do Múon

O primeiro cálculo que iremos realizar é envolvendo a contribuição do bóson Z' para a anomalia do momento magnético do múon. Ele será bastante semelhante ao feito envolvendo o bóson Z do Modelo Padrão, feito na Seção.(5.5). O resultado é da seguinte forma:

$$\frac{-e}{2m_\mu} F_2(0) = \frac{4em_\mu}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{(V^2(x_2^2 - x_2) + A^2(x_2^2 + 3x_2))}{((x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + x_2 M_{Z'}^2)} dx_2 dx_1$$

$$\begin{aligned}
 & + (1 - \xi) \frac{6em_\mu}{96\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} A^2 \left[\frac{2(-2 + 3x_1 + 3x_3)}{(x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 M_{Z'}^2} \right. \\
 & \left. - \frac{m_\mu^2 2(x_1 + x_3)^3}{((x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 M_{Z'}^2)^2} \right] dx_3 dx_2 dx_1 \\
 & + \left(C \frac{m_\mu}{M_{Z'}} \right)^2 \frac{2em_\mu}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{(x_2 - 1)^2}{(x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + \xi x_2 M_{Z'}^2} dx_2 dx_1 \\
 & = \frac{4em_\mu}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{g'^2 (x_2^2 - x_2)}{((x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + x_2 M_{Z'}^2)} dx_2 dx_1. \tag{7.1}
 \end{aligned}$$

Aqui fizemos a substituição dos parâmetros de acoplamento $V \rightarrow g'$, $A \rightarrow 0$ e $C \rightarrow 0$ pelos valores do modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$.

O valor da contribuição para a anomalia é $\Delta a_\mu = F_2(0)$, então ainda precisamos isolar $F_2(0)$ no resultado anterior. Assim teremos a contribuição, e também fazer a substituição das variáveis $x_1 = y$ e $x_2 = x$. Então temos:

$$\begin{aligned}
 F_2(0) & = -\frac{g'^2}{4\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x} \frac{m_\mu^2 x(x-1)}{(x-1)^2 m_\mu^2 + x M_{Z'}^2} dx dy \\
 & = -\frac{g'^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{m_\mu^2 x(x-1)(1-x)}{(x-1)^2 m_\mu^2 + x M_{Z'}^2} dx. \tag{7.2}
 \end{aligned}$$

Então o acréscimo na anomalia, Δa_μ , será:

$$\Delta a_\mu = \frac{g'^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{m_\mu^2 x(1-x)^2}{(1-x)^2 m_\mu^2 + x M_{Z'}^2} dx. \tag{7.3}$$

Podemos expandir essa expressão para um cenário em que a massa do bóson Z' seja bem menor que a do múon ($M_{Z'} \ll m_\mu$). Então temos:

$$\Delta a_\mu = \frac{g'^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{m_\mu^2 x(1-x)^2}{m_\mu^2 ((1-x)^2 + x (\frac{M_{Z'}}{m_\mu})^2)} dx. \tag{7.4}$$

Fazendo $\varepsilon = \frac{M_{Z'}}{m_\mu}$ e expandindo em função de ε , teremos:

$$\begin{aligned}
 \Delta a_\mu & = \frac{g'^2}{4\pi^2} \int_0^1 \frac{x(1-x)^2}{((1-x)^2 + x(\varepsilon)^2)} dx \\
 & = \frac{g'^2}{4\pi^2} \int_0^1 \left(x - \frac{x^2 \varepsilon^2}{(x-1)^2} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \right) dx \\
 & = \frac{g'^2}{4\pi^2} \int_0^1 x dx + \mathcal{O}(\varepsilon^2). \tag{7.5}
 \end{aligned}$$

O que nos leva a uma expressão final da forma:

$$\Delta a_\mu = \frac{g'^2}{8\pi^2}. \tag{7.6}$$

Se deixarmos esse resultado em função do valor da anomalia encontrado experimentalmente em Eq.(5.15), teremos $\Delta a_\mu = 251 \times 10^{-11} = g'/8\pi^2 \rightarrow g' = \sqrt{8\pi^2 251} \times 10^{-11} = 4.5 \times 10^{-4}$. Então um $g \sim 4.5 \times 10^{-4}$ seria interessante para termos a contribuição necessária para a abundância.

Usando a Eq.(7.4) podemos fazer um gráfico de valores de g' e $M_{Z'}$ que dão o valor de Δa_μ experimental dentro do intervalo da incerteza (± 59), Fig.(18). Podemos notar que o intervalo de g' está dentro de 10^{-4} como vimos anteriormente.

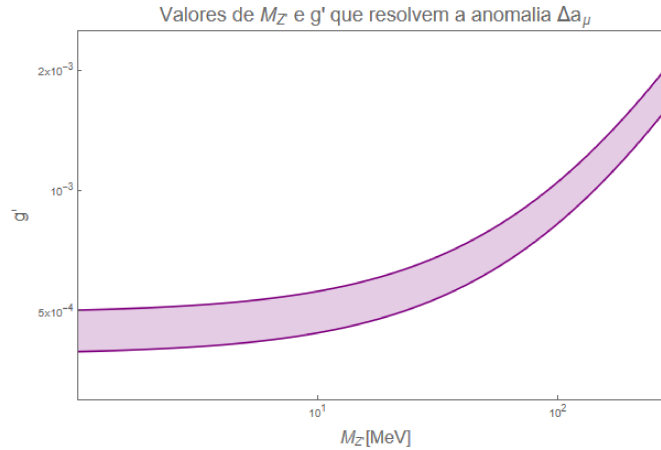


Figura 18 – Gráfico feito usando a Eq.(7.4) relacionando a massa do bóson Z' , $M_{Z'}$, com o acoplamento g' . A faixa em roxo é a região em que a anomalia, Δa_μ , é coerente com o valor experimental.

7.3 Densidade de Relíquia de Matéria Escura

O cálculo da densidade de relíquia pode ser feito através da equação de Boltzmann, como visto no Cap.(4). Ele é feito utilizando a seção de choque que pode ser calculada ao estudar um processo de interação entre partículas. A base para esses cálculos é a lagrangiana de interação dada pelas Eq.(6.55) e Eq.(6.56). Já vimos anteriormente que no universo primordial a densidade de número de partículas de matéria escura total ($n = n_\chi + n_{\bar{\chi}}$) é dado pela equação de Boltzmann, que em sua forma simplificada é:

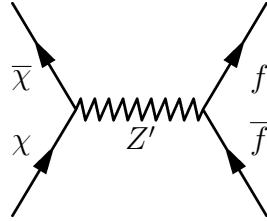
$$\frac{dn}{dt} + 3Hn = \frac{1}{2} \langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle (n_{\text{eq}}^2 - n^2), \quad (7.7)$$

em que H é a taxa de Hubble e n_{eq} é a densidade do número de partículas em equilíbrio. A média térmica do produto da seção de choque de aniquilação com a velocidade de Møller, como também já visto, é dado por:

$$\langle \sigma v_{\text{Møll}} \rangle = \frac{1}{8m_\chi^4 T K_2^2\left(\frac{M_\chi}{T}\right)} \int_{4M_\chi^2}^{\infty} ds \sigma \sqrt{s} (s - 4M_\chi^2) K_1\left(\frac{\sqrt{s}}{T}\right), \quad (7.8)$$

em que K_n são funções de Bessel modificadas de segundo tipo.

Podemos fazer o cálculo da seção de choque do processo $\chi\bar{\chi} \rightarrow \bar{f}f$ que ocorre pelo seguinte diagrama:



Para o cálculo da seção de choque iremos começar designando momentos para as partículas envolvidas e estudar a cinemática do problema. Isso pode ser feito utilizando a Fig.(19) com o esboço da cinemática do problema feito no referencial do centro de massa (cm).

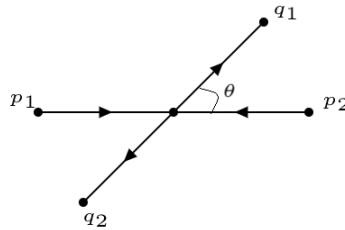


Figura 19 – Cinemática do problema no referencial do centro de massa.

Partindo da Fig.(19) podemos denotar os quadrimomentos das partículas envolvidas no processo da seguinte forma:

$$\begin{cases} \chi : p_1, \\ \bar{\chi} : p_2, \\ \bar{f} : q_1, \\ f : q_2. \end{cases}$$

No referencial do centro de massa, o quadrimomento pode ser convenientemente escrito em termos da energia de centro de massa e as massas da partícula. Levando em consideração que $E_{\text{cm}} = E_\chi + E_{\bar{\chi}} = E_f + E_{\bar{f}}$. Mas como $E_\chi = E_{\bar{\chi}}$ e $E_f = E_{\bar{f}}$, então temos $E_{\text{cm}} = 2E_\chi = 2E_f \rightarrow E_\chi = E_f = E_{\text{cm}}/2$. Ainda podemos rescrever essa energia do centro de massa em função da variável de Mandelstam, s . Basta considerarmos $s = (p_1 + p_2)^2 = E_{\text{cm}}^2 \rightarrow E_{\text{cm}} = \sqrt{s}$.

Então podemos escrever os quadrimomento como

$$\begin{cases} p_1^\mu &= (\frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\sqrt{s - 4M_\chi^2}), \\ p_2^\mu &= (\frac{\sqrt{s}}{2}, 0, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{s - 4M_\chi^2}), \\ q_1^\mu &= (\frac{\sqrt{s}}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m_f^2} \sin \theta, 0, \frac{1}{2}\sqrt{s - 4m_f^2} \cos \theta), \\ q_2^\mu &= (\frac{\sqrt{s}}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{s - 4m_f^2} \sin \theta, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{s - 4m_f^2} \cos \theta), \end{cases}$$

Em seguida precisamos da amplitude de espalhamento:

$$\mathcal{M} = g' \bar{v}_\chi(p_2) \gamma^\mu u_\chi(p_1) \frac{g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{M_{Z'}}}{s - M_{Z'}^2 + iM_{Z'} \Gamma_{Z'}} g' \bar{u}_f(q_2) \gamma^\nu v_f(q_1), \quad (7.9)$$

em que $P^\mu = p_1^\mu + p_2^\mu$.

O propagador foi escrito dessa maneira envolvendo $\Gamma_{Z'}$ pelo fato de estarmos estudando um processo que envolve partículas instáveis que podem decair. Em que $\Gamma_{Z'} = \Gamma_{Z' \rightarrow \chi\bar{\chi}} + \sum_f \Gamma_{Z' \rightarrow f\bar{f}}$ com $f = \mu, \tau, \nu_\mu, \tau$ será a largura do decaimento, que iremos calcular no final.

O que queremos é $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}$. Para esse caso temos

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= g' \bar{v}_f(q_1) \gamma^\alpha u_f(q_2) \frac{g_{\alpha\beta} - \frac{P_\alpha P_\beta}{M_{Z'}}}{s - M_{Z'}^2 + iM_{Z'} \Gamma_{Z'}} g' \bar{u}_\chi(p_1) \gamma^\beta v_\chi(p_2) \\ &\times g' \bar{v}_\chi(p_2) \gamma^\mu u_\chi(p_1) \frac{g_{\mu\nu} - \frac{P_\mu P_\nu}{M_{Z'}}}{s - M_{Z'}^2 + iM_{Z'} \Gamma_{Z'}} g' \bar{u}_f(q_2) \gamma^\nu v_f(q_1) \\ &= \frac{g'^4}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2} \\ &\times \left(\bar{v}_f(q_1) \gamma^\alpha u_f(q_2) \bar{u}_\chi(p_1) \gamma_\alpha v_\chi(p_2) \times \bar{v}_\chi(p_2) \gamma^\mu u_\chi(p_1) \bar{u}_f(q_2) \gamma_\mu v_f(q_1) \right. \\ &- \frac{1}{M_{Z'}} \left(\bar{v}_f(q_1) \gamma^\alpha u_f(q_2) \bar{u}_\chi(p_1) \gamma_\alpha v_\chi(p_2) \times \bar{v}_\chi(p_2) \gamma^\mu u_\chi(p_1) P_\mu P_\nu \bar{u}_f(q_2) \gamma^\nu v_f(q_1) \right. \\ &+ \left. \bar{v}_f(q_1) \gamma^\alpha u_f(q_2) P_\alpha P_\beta \bar{u}_\chi(p_1) \gamma^\beta v_\chi(p_2) \times \bar{v}_\chi(p_2) \gamma^\mu u_\chi(p_1) \bar{u}_f(q_2) \gamma_\mu v_f(q_1) \right) \\ &+ \left. \frac{1}{M_{Z'}^2} \bar{v}_f(q_1) \gamma^\alpha u_f(q_2) P_\alpha P_\beta \bar{u}_\chi(p_1) \gamma^\beta v_\chi(p_2) \times \bar{v}_\chi(p_2) \gamma^\mu u_\chi(p_1) P_\mu P_\nu \bar{u}_f(q_2) \gamma^\nu v_f(q_1) \right). \end{aligned} \quad (7.10)$$

Em seguida precisamos realizar a soma sobre os spins das partículas. Primeiro temos a soma sobre os spins iniciais. Essa soma será envolvendo χ e $\bar{\chi}$. Essa soma é escrita com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned} &\sum_{s_\chi, s_{\bar{\chi}}} \bar{u}_\chi(p_1) \gamma^\alpha v_\chi(p_2) \bar{v}_\chi(p_2) \gamma^\mu u_\chi(p_1), \\ &\sum_{s_\chi, s_{\bar{\chi}}} \bar{u}_\chi(p_1) \gamma^\beta v_\chi(p_2) \bar{v}_\chi(p_2) \gamma^\mu u_\chi(p_1). \end{aligned} \quad (7.11)$$

Usando as relações:

$$\begin{aligned}\sum_{s_\chi} u_\chi(p)\bar{u}_\chi(p) &= (\not{p} + M_\chi \mathbb{1}), \\ \sum_{s_{\bar{\chi}}} v_\chi(p)\bar{v}_\chi(p) &= (\not{p} - M_\chi \mathbb{1}),\end{aligned}\quad (7.12)$$

Então podemos realizar a soma sob spins. Primeiro consideramos a partícula de momento p_2 . Então, temos:

$$\begin{aligned}\sum_{\chi} \bar{u}_{s_\chi}(p_1)\mathcal{O}_1^i \left\{ \sum_{s_\chi} v_\chi(p_2)\bar{v}_\chi(p_2) \right\} \mathcal{O}_2 u_\chi(p_1) &= \sum_{s_\chi} \bar{u}_\chi(p_1)\mathcal{O}_1^i (\not{p}_2 - M_\chi \mathbb{1}) \mathcal{O}_2 u_\chi(p_1) \\ &= \sum_{s_\chi} \bar{u}_\chi(p_1) Q u_\chi(p_1), \quad Q = \mathcal{O}_1^i (\not{p}_1 - M_\chi \mathbb{1}) \mathcal{O}_2, \quad \mathcal{O}_1^i = (\gamma^\alpha, \gamma^\beta), \quad \mathcal{O}_2 = \gamma^\mu.\end{aligned}\quad (7.13)$$

Agora nos resta calcular o mesmo para a partícula de momento p_1 :

$$\sum_{s_\chi} \bar{u}_\chi(p_1) Q u_\chi(p_1). \quad (7.14)$$

Escrevendo a multiplicação matricial explicitamente (i e j são somados de 1 a 4):

$$\begin{aligned}\sum_{s_\chi} \bar{u}_\chi(p_1) Q u_\chi(p_1) &= \left\{ \sum_{s_\chi} u_\chi(p_1)\bar{u}_\chi(p_1) \right\}_{ji} Q_{ij} \\ &= (\not{p}_1 + M_\chi I_d)_{ji} Q_{ij} = \text{Tr}((\not{p}_1 + M_\chi)Q),\end{aligned}\quad (7.15)$$

juntando com o resultado de Q , temos

$$\begin{aligned}\text{Tr}[(\not{p}_1 + M_\chi)\gamma^\alpha(\not{p}_2 - M_\chi)\gamma^\mu], \\ \text{Tr}[(\not{p}_1 + M_\chi)\gamma^\beta(\not{p}_2 - M_\chi)\gamma^\mu].\end{aligned}\quad (7.16)$$

Agora fazemos o mesmo para a soma sobre os spins finais, dessa vez envolvendo f e \bar{f} . Ficamos com as seguintes expressões:

$$\begin{aligned}\sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \bar{v}_f(q_1)\gamma^\alpha u_f(q_2)\bar{u}_f(q_2)\gamma^\mu v_f(q_1), \\ P_\mu P_\nu \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \bar{v}_f(q_1)\gamma^\alpha u_f(q_2)\bar{u}_f(q_2)\gamma^\nu v_f(q_1), \\ P_\alpha P_\beta \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \bar{v}_f(q_1)\gamma^\alpha u_f(q_2)\bar{u}_f(q_2)\gamma^\mu v_f(q_1), \\ P_\alpha P_\beta P_\mu P_\nu \sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \bar{v}_f(q_1)\gamma^\alpha u_f(q_2)\bar{u}_f(q_2)\gamma^\nu v_f(q_1),\end{aligned}\quad (7.17)$$

usando as mesmas relações que utilizamos anteriormente, mas agora com m_f , obtemos

$$\begin{aligned}\text{Tr}[(\not{q}_2 + m_f)\gamma^\alpha(\not{q}_1 - m_f)\gamma^\mu], \\ P_\mu P_\nu \text{Tr}[(\not{q}_2 + m_f)\gamma^\alpha(\not{q}_1 - m_f)\gamma^\nu],\end{aligned}\quad (7.18)$$

$$P_\alpha P_\beta \text{Tr}[(q_2 + m_f)\gamma^\alpha(q_1 - m_f)\gamma^\mu],$$

$$P_\alpha P_\beta P_\mu P_\nu \text{Tr}[(q_2 + m_f)\gamma^\alpha(q_1 - m_f)\gamma^\nu].$$

Usando as Eq.(7.16) e Eq.(7.18), podemos calcular os traços e voltarmos para a amplitude

$$\begin{aligned} & \text{Tr}[p_{1\delta}p_{2\zeta}\gamma^\delta\gamma^\alpha\gamma^\zeta\gamma^\mu - M_\chi^2\gamma^\alpha\gamma^\mu] \\ &= 4(p_1^\alpha p_2^\mu - p_2 \cdot p_1 g^{\alpha\mu} + p_1^\mu p_2^\alpha - M_\chi^2 g^{\alpha\mu}), \\ & \text{Tr}[p_{1\delta}p_{2\zeta}\gamma^\delta\gamma^\beta\gamma^\zeta\gamma^\mu - M_\chi^2\gamma^\beta\gamma^\mu] \\ &= 4(p_1^\beta p_2^\mu - p_2 \cdot p_1 g^{\beta\mu} + p_1^\mu p_2^\beta - M_\chi^2 g^{\beta\mu}), \\ & \text{Tr}[q_{2\delta}q_{1\zeta}\gamma^\delta\gamma^\alpha\gamma^\zeta\gamma^\mu - m_f^2\gamma^\alpha\gamma^\mu] \\ &= 4(q_2^\alpha q_1^\mu - q_2 \cdot q_1 g^{\alpha\mu} + q_2^\mu q_1^\alpha - m_f^2 g^{\alpha\mu}), \\ & P_\mu P_\nu \text{Tr}[q_{2\delta}q_{1\zeta}\gamma^\delta\gamma^\alpha\gamma^\zeta\gamma^\nu - m_f^2\gamma^\alpha\gamma^\nu] \\ &= 4P_\mu P_\nu (q_2^\alpha q_1^\nu - q_2 \cdot q_1 g^{\alpha\nu} + q_2^\nu q_1^\alpha - m_f^2 g^{\alpha\nu}), \\ & P_\alpha P_\beta \text{Tr}[q_{2\delta}q_{1\zeta}\gamma^\delta\gamma^\alpha\gamma^\zeta\gamma^\mu - m_f^2\gamma^\alpha\gamma^\mu] \\ &= 4P_\alpha P_\beta (q_2^\alpha q_1^\mu - q_2 \cdot q_1 g^{\alpha\mu} + q_2^\mu q_1^\alpha - m_f^2 g^{\alpha\mu}), \\ & P_\alpha P_\beta P_\mu P_\nu \text{Tr}[q_{2\delta}q_{1\zeta}\gamma^\delta\gamma^\alpha\gamma^\zeta\gamma^\nu - m_f^2\gamma^\alpha\gamma^\nu] \\ &= 4P_\alpha P_\beta P_\mu P_\nu (q_2^\alpha q_1^\nu - q_2 \cdot q_1 g^{\alpha\nu} + q_2^\nu q_1^\alpha - m_f^2 g^{\alpha\nu}). \end{aligned} \tag{7.19}$$

Para esse resultado foram usadas propriedades do traço como $\text{Tr}[\gamma^\nu\gamma^\mu] = 4g^{\nu\mu}$ e $\text{Tr}[\gamma^\alpha\gamma^\nu\gamma^\beta\gamma^\mu] = 4(g^{\alpha\nu}g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta}g^{\nu\mu} + g^{\alpha\mu}g^{\nu\beta})$.

Voltamos agora para calcular $|\mathcal{M}|^2$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= \frac{16g^4}{M_{Z'}^2((s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2\Gamma_{Z'}^2)} \left[M_{Z'}^2(p_1^\alpha p_2^\mu - p_2 \cdot p_1 g^{\alpha\mu} + p_1^\mu p_2^\alpha - M_\chi^2 g^{\alpha\mu}) \right. \\ & \times (q_2^\alpha q_1^\mu - q_2 \cdot q_1 g^{\alpha\mu} + q_2^\mu q_1^\alpha - m_f^2 g^{\alpha\mu}) \\ & - M_{Z'} \left((p_1^\alpha p_2 \cdot P - p_2 \cdot p_1 P^\alpha + p_1 \cdot P p_2^\alpha - M_\chi^2 P^\alpha) \right. \\ & \times (q_2^\alpha q_1 \cdot P - q_2 \cdot q_1 P^\alpha + q_2 \cdot P q_1^\alpha - m_f^2 P^\alpha) \\ & \left. \left. + (p_1 \cdot P p_2^\mu - p_2 \cdot p_1 P^\mu + p_1^\mu p_2 \cdot P - M_\chi^2 P^\mu)(q_2 \cdot P q_1^\mu - q_2 \cdot q_1 P^\mu + q_2^\mu q_1 \cdot P - m_f^2 P^\mu) \right) \right. \\ & \left. + (p_1 \cdot P p_2 \cdot P - p_2 \cdot p_1 P \cdot P + p_1 \cdot P p_2 \cdot P - M_\chi^2 P \cdot P) \right. \\ & \left. \times (q_2 \cdot P q_1 \cdot P - q_2 \cdot q_1 P \cdot P + q_2 \cdot P q_1 \cdot P - m_f^2 P \cdot P) \right] \\ &= \frac{16g^4}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2\Gamma_{Z'}^2} \left(2(p_1 \cdot q_2 p_2 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_1 p_2 \cdot q_2 + p_1 \cdot p_2 m_f^2 + q_2 \cdot q_1 M_\chi^2 + 2M_\chi^2 m_f^2) \right) \end{aligned} \tag{7.20}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2}{M_{Z'}}(q_2 \cdot p_1 p_2 \cdot P q_1 \cdot P - 2q_2 \cdot q_1 P \cdot p_1 p_2 \cdot P + q_2 \cdot P q_1 \cdot p_1 p_2 \cdot P - 2m_f^2 P \cdot p_1 p_2 \cdot P \\
 & - 2p_2 \cdot p_1 P \cdot q_2 q_1 \cdot P + q_2 \cdot q_1 p_2 \cdot p_1 P \cdot P + m_f^2 p_2 \cdot p_1 P \cdot P + p_1 \cdot P p_2 \cdot q_2 q_1 \cdot P + q_2 \cdot P p_1 \cdot P p_2 \cdot q_1 \\
 & - 2M_\chi^2 P \cdot q_2 q_1 \cdot P + q_2 \cdot q_1 M_\chi^2 P \cdot P + m_f^2 M_\chi^2 P \cdot P) \\
 & + \frac{1}{M_{Z'}^2}(2p_1 \cdot P p_2 \cdot P - p_2 \cdot p_1 P \cdot P - M_\chi^2 P \cdot P)(2q_2 \cdot P q_1 \cdot P - q_2 \cdot q_1 P \cdot P - m_f^2 P \cdot P) \Big).
 \end{aligned}$$

Nessa etapa já deixamos calculadas as contrações.

Depois temos que fazer a média das possíveis configurações de spins iniciais e juntar com soma sob spins de $|\overline{\mathcal{M}}|^2$ para completar o truque de Casimir. Temos então

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{1}{4}|\mathcal{M}|^2. \quad (7.21)$$

Isso nos deixa com

$$\begin{aligned}
 |\overline{\mathcal{M}}|^2 &= \frac{4g'^4}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2} \left(2(p_1 \cdot q_2 p_2 \cdot q_1 + p_1 \cdot q_1 p_2 \cdot q_2 + p_1 \cdot p_2 m_f^2 + q_2 \cdot q_1 M_\chi^2 + 2M_\chi^2 m_f^2) \right. \\
 & - \frac{2}{M_{Z'}}(q_2 \cdot p_1 p_2 \cdot P q_1 \cdot P - 2q_2 \cdot q_1 P \cdot p_1 p_2 \cdot P + q_2 \cdot P q_1 \cdot p_1 p_2 \cdot P - 2m_f^2 P \cdot p_1 p_2 \cdot P \\
 & - 2p_2 \cdot p_1 P \cdot q_2 q_1 \cdot P + q_2 \cdot q_1 p_2 \cdot p_1 P \cdot P + m_f^2 p_2 \cdot p_1 P \cdot P + p_1 \cdot P p_2 \cdot q_2 q_1 \cdot P + q_2 \cdot P p_1 \cdot P p_2 \cdot q_1 \\
 & - 2M_\chi^2 P \cdot q_2 q_1 \cdot P + q_2 \cdot q_1 M_\chi^2 P \cdot P + m_f^2 M_\chi^2 P \cdot P) \\
 & \left. + \frac{1}{M_{Z'}^2}(2p_1 \cdot P p_2 \cdot P - p_2 \cdot p_1 P \cdot P - M_\chi^2 P \cdot P)(2q_2 \cdot P q_1 \cdot P - q_2 \cdot q_1 P \cdot P - m_f^2 P \cdot P) \right).
 \end{aligned} \quad (7.22)$$

Para resolvermos só falta fazermos os produtos dos quadrimomentos:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 p_1 \cdot q_1 = p_2 \cdot q_2 = \frac{s}{4} - \frac{1}{4}[(s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2)]^{1/2} \cos \theta, \\
 p_1 \cdot q_2 = p_2 \cdot q_1 = \frac{s}{4} + \frac{1}{4}[(s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2)]^{1/2} \cos \theta, \\
 p_1 \cdot p_2 = \frac{s}{2} - M_\chi^2, \\
 q_1 \cdot q_2 = \frac{s}{2} - m_f^2, \\
 p_1 \cdot p_1 = p_2 \cdot p_2 = M_\chi^2, \\
 q_1 \cdot q_1 = q_2 \cdot q_2 = m_f^2, \\
 P \cdot P = (p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_2) = p_1 \cdot p_1 + 2p_1 \cdot p_2 + p_2 \cdot p_2 = s, \\
 P \cdot p_1 = (p_1 + p_2) \cdot p_1 = p_1 \cdot p_1 + p_1 \cdot p_2 = \frac{s}{2}, \\
 P \cdot p_2 = (p_1 + p_2) \cdot p_2 = p_1 \cdot p_2 + p_2 \cdot p_2 = \frac{s}{2}, \\
 P \cdot q_1 = (p_1 + p_2) \cdot q_1 = q_1 \cdot p_1 + q_1 \cdot p_2 = \frac{s}{2}, \\
 P \cdot q_2 = (p_1 + p_2) \cdot q_2 = p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_2 = \frac{s}{2}.
 \end{array} \right.$$

Substituindo esses produtos na Eq.(7.22), temos

$$|\overline{\mathcal{M}}|^2 = \frac{8g'^4}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2} \left(\frac{s^2}{16} + \frac{1}{16}(s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2) \cos^2 \theta \right)$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{s}{8} [(s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2)]^{1/2} \cos \theta + \frac{s^2}{16} + \frac{1}{16} (s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2) \cos^2 \theta \\
& - \frac{s}{8} [(s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2)]^{1/2} \cos \theta + \frac{s}{2} m_f^2 - M_\chi^2 m_f^2 + \frac{s}{2} M_\chi^2 - M_\chi^2 m_f^2 + 2M_\chi^2 m_f^2 \\
& - \frac{1}{M_{Z'}} \left(\frac{s^3}{16} + \frac{s^2}{16} [(s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2)]^{1/2} \cos \theta - \frac{s^3}{4} + \frac{s^2}{2} m_f^2 \right) \\
& + \frac{s^3}{16} - \frac{s^2}{16} [(s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2)]^{1/2} \cos \theta - m_f^2 \frac{s^2}{2} - \frac{s^3}{4} + \frac{s^2}{2} M_\chi^2 + \frac{s^3}{4} - \frac{s^2}{2} M_\chi^2 \\
& - \frac{s^2}{2} m_f^2 + M_\chi^2 m_f^2 s + m_f^2 \frac{s^2}{2} - m_f^2 M_\chi^2 s + \frac{s^3}{16} - \frac{s^2}{16} [(s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2)]^{1/2} \cos \theta \\
& + \frac{s^3}{16} + \frac{s^2}{16} [(s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2)]^{1/2} \cos \theta - M_\chi^2 \frac{s^2}{2} + M_\chi^2 \frac{s^2}{2} - m_f^2 M_\chi^2 s + m_f^2 M_\chi^2 s \\
& + \frac{1}{2M_{Z'}} \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{2} + M_\chi^2 s - M_\chi^2 s \right) \left(\frac{s^2}{2} - \frac{s^2}{2} + m_f^2 s - m_f^2 s \right) \\
& = \frac{g^4}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2} \left(s^2 + (s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2) \cos^2 \theta + 4sM_\chi^2 + 4sm_f^2 \right). \quad (7.23)
\end{aligned}$$

Então aplicamos esse resultado na seguinte expressão da seção de choque diferencial para o referencial de centro de massa:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{cm}}} = \frac{|\vec{p}_f| |\overline{\mathcal{M}}|^2}{|\vec{p}_i| 64\pi^2 s}. \quad (7.24)$$

Usando que $E_i = E_\chi$, $s = (E_\chi + E_{\bar{\chi}})^2$, com $E_\chi = E_{\bar{\chi}}$ então $s = 4E_i^2 \rightarrow E_i^2 = s/4$. Também que $E_f = E_{\bar{f}}$, $s = (E_f + E_{\bar{f}})^2$, com $E_f = E_{\bar{f}}$ então $s = 4E_f^2 \rightarrow E_f^2 = s/4$. Podemos escrever

$$\begin{aligned}
|\vec{p}_i| &= \sqrt{E_i^2 - M_\chi^2} = \sqrt{\frac{s}{4} - M_\chi^2} = \frac{1}{2} \sqrt{s - 4M_\chi^2}, \\
|\vec{p}_f| &= \sqrt{E_f^2 - m_f^2} = \sqrt{\frac{s}{4} - m_f^2} = \frac{1}{2} \sqrt{s - 4m_f^2}.
\end{aligned} \quad (7.25)$$

Voltando e substituindo na Eq.(7.24), temos

$$\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{cm}}} = \sqrt{\frac{s - 4m_f^2}{s - 4M_\chi^2}} \frac{|\overline{\mathcal{M}}|^2}{64\pi^2 s}. \quad (7.26)$$

O próximo passo é usar a amplitude dada pela Eq.(7.23) na expressão e realizar sua integral.

$$\begin{aligned}
\frac{d\sigma}{d\Omega_{\text{cm}}} &= \sqrt{\frac{s - 4m_f^2}{s - 4M_\chi^2}} \frac{g^4}{64\pi^2 s} \frac{1}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2} \\
&\times \left(s^2 + (s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2) \cos^2 \theta + 4sM_\chi^2 + 4sm_f^2 \right) \\
d\sigma &= \sqrt{\frac{s - 4m_f^2}{s - 4M_\chi^2}} \frac{g^4}{64\pi^2 s} \frac{1}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2} \\
&\times \left(s^2 + (s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2) \cos^2 \theta + 4sM_\chi^2 + 4sm_f^2 \right) d\Omega_{\text{cm}}.
\end{aligned} \quad (7.27)$$

Usando $d\Omega_{\text{cm}} = 2\pi d\cos \theta$, teremos:

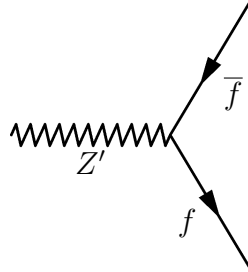
$$\sigma = \sqrt{\frac{s - 4m_f^2}{s - 4M_\chi^2}} \frac{g^4}{32\pi s} \frac{1}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{-1}^1 d \cos \theta \left(s^2 + (s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2) \cos^2 \theta + 4sM_\chi^2 + 4sm_f^2 \right) \\
 &= \sqrt{\frac{s - 4m_f^2}{s - 4M_\chi^2}} \frac{g'^4}{16\pi s} \frac{1}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2} \left(s^2 + \frac{(s - 4M_\chi^2)(s - 4m_f^2)}{3} + 4sM_\chi^2 + 4sm_f^2 \right) \\
 &= \sqrt{\frac{s - 4m_f^2}{s - 4M_\chi^2}} \frac{g'^4}{16\pi s} \frac{1}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2} \left(\frac{4(s + 2M_\chi^2)(s + 2m_f^2)}{3} \right) \\
 \sigma &= \sqrt{\frac{s - 4m_f^2}{s - 4M_\chi^2}} \frac{g'^4}{12\pi} \frac{1}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2} \left(\frac{(s + 2M_\chi^2)(s + 2m_f^2)}{s} \right). \tag{7.28}
 \end{aligned}$$

Podemos deixar nossa expressão mais geral para as diferentes partículas existentes no modelo, colocando um somatório em f em que $f = \mu, \tau, \nu_\mu, \nu_\tau$ e adicionando um fator que depende do lépton envolvido, k_f , sendo 1 para μ, τ e $1/2$ para ν_μ, ν_τ . Assim ficamos com

$$\sigma(s) = \sum_f \frac{k_f g'^4}{12\pi s} \sqrt{\frac{s - 4m_f^2}{s - 4M_\chi^2}} \frac{(s + 2M_\chi^2)(s + 2m_f^2)}{(s - M_{Z'}^2)^2 + M_{Z'}^2 \Gamma_{Z'}^2}. \tag{7.29}$$

Ainda precisamos fazer o cálculo da largura de decaimento $\Gamma_{Z'}$. Ela pode ser calculada considerando o processo $Z' \rightarrow f\bar{f}$. Esse processo é representado pelo seguinte diagrama:



Podemos fazer a conta da taxa de decaimento de uma partícula em outras duas partículas $\alpha \rightarrow (1, 2) \equiv \beta$, como:

$$\frac{d\Gamma_{\beta\alpha}}{d\Omega_{\text{cm}}} = \frac{|\mathcal{M}_{\beta\alpha}|^2 S_{12}}{64\pi^2 m_\alpha^3} S. \tag{7.30}$$

Em que $\mathcal{M}_{\beta\alpha}$ é a amplitude do processo, S é um valor relacionado ao número de partículas idênticas no estado final $S = \prod_k \frac{1}{n_k!}$ e S_{12} é dado por:

$$S_{12} = [m_\alpha^2 - (m_1 + m_2)^2]^{1/2} [m_\alpha^2 - (m_1 - m_2)^2]^{1/2}. \tag{7.31}$$

Se quisermos escrever em função do decaimento proposto, basta considerarmos $\alpha = Z'$, $\beta = (f, \bar{f})$ e as massas $m_1 = m_2 = m_f$. Então teremos:

$$\frac{d\Gamma_{Z' \rightarrow f\bar{f}}}{d\Omega_{\text{cm}}} = \frac{|\mathcal{M}_{Z' \rightarrow f\bar{f}}|^2 [M_{Z'}^2 - (m_f + m_f)^2]^{1/2} [M_{Z'}^2 - (m_f - m_f)^2]^{1/2}}{64\pi^2 M_{Z'}^3}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{|\mathcal{M}_{Z' \rightarrow f\bar{f}}|^2 [M_{Z'}^2 - 4m_f^2]^{1/2} M_{Z'}}{64\pi^2 M_{Z'}^3} \\
&= \frac{|\mathcal{M}_{Z' \rightarrow f\bar{f}}|^2}{64\pi^2 M_{Z'}} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_{Z'}^2}}.
\end{aligned} \tag{7.32}$$

O próximo passo é calcularmos a amplitude do processo. Fazemos isso olhando para a lagrangiana de interação, escrita da seguinte forma:

$$\mathcal{L}_{\text{int}} = g' Z'_\mu \bar{f} \gamma^\mu f, \tag{7.33}$$

em que $f = \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau, \chi$.

Podemos escrever nossa amplitude da seguinte maneira:

$$\mathcal{M} = g' \epsilon_\mu \bar{u}_f(p) \gamma^\mu v_f(q), \tag{7.34}$$

em que ϵ^μ é o vetor de polarização do bóson.

O que queremos é calcular $|\mathcal{M}|^2 = \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}$. Para nosso caso teremos:

$$|\mathcal{M}|^2 = g'^2 \bar{v}_f(q) \gamma^\nu u_f(p) \epsilon_\nu^* \times \epsilon_\mu \bar{u}_f(p) \gamma^\mu v_f(q). \tag{7.35}$$

O próximo passo é realizar a soma sobre os spins finais:

$$\sum_{s_f, s_{\bar{f}}} \bar{v}_f(q) \gamma^\nu u_f(p) \epsilon_\nu^* \epsilon_\mu \bar{u}_f(p) \gamma^\mu v_f(q), \tag{7.36}$$

usando as relações

$$\begin{aligned}
\sum_{s_f} u_f(p) \bar{u}_f(p) &= (\not{p} + m_f \mathbb{1}), \\
\sum_{s_f} v_f(q) \bar{v}_f(q) &= (\not{q} - m_f \mathbb{1}).
\end{aligned} \tag{7.37}$$

Quando aplicamos essas relações chegamos a seguinte expressão a ser calculada

$$\text{Tr}[(\not{q} - m_f) \epsilon_\nu^* \gamma^\nu (\not{p} + m_f) \epsilon_\mu \gamma^\mu]. \tag{7.38}$$

Usando algumas propriedades do traço como: $\text{Tr}[\gamma^\nu \gamma^\mu] = 4g^{\nu\mu}$ e $\text{Tr}[\gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu] = 4(g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta})$, conseguimos resolver a expressão da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&\text{Tr}[q_\alpha p_\beta \gamma^\alpha \gamma^\nu \gamma^\beta \gamma^\mu \epsilon_\nu^* \epsilon_\mu - m_f^2 \gamma^\nu \gamma^\mu \epsilon_\nu^* \epsilon_\mu] \\
&= 4[q_\alpha p_\beta (g^{\alpha\nu} g^{\beta\mu} - g^{\alpha\beta} g^{\nu\mu} + g^{\alpha\mu} g^{\nu\beta}) \epsilon_\nu^* \epsilon_\mu - m_f^2 g^{\nu\mu} \epsilon_\nu^* \epsilon_\mu] \\
&= 4[q^\alpha p^\beta \epsilon_\alpha^* \epsilon_\beta - q \cdot p \epsilon^* \cdot \epsilon + q^\alpha p^\beta \epsilon_\beta^* \epsilon_\alpha - m_f^2 \epsilon^* \cdot \epsilon] \\
&= 4[q \cdot \epsilon^* p \cdot \epsilon - q \cdot p \epsilon^* \cdot \epsilon + q \cdot \epsilon p \cdot \epsilon^* - m_f^2 \epsilon^* \cdot \epsilon].
\end{aligned} \tag{7.39}$$

Em seguida, precisamos entender os momentos das partículas e a polarização do bóson, para assim conseguirmos substituir os produtos e chegarmos a uma resolução final para a

nossa amplitude do processo.

Podemos escrever os quadrimomentos das nossas partículas do estado final usando de base a Fig.(20):

$$\begin{aligned} p &= \left(\frac{M_{Z'}}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{M_{Z'}^2 - 4m_f^2} \cos \theta, 0, \frac{1}{2}\sqrt{M_{Z'}^2 - 4m_f^2} \sin \theta \right), \\ q &= \left(\frac{M_{Z'}}{2}, -\frac{1}{2}\sqrt{M_{Z'}^2 - 4m_f^2} \cos \theta, 0, -\frac{1}{2}\sqrt{M_{Z'}^2 - 4m_f^2} \sin \theta \right). \end{aligned} \quad (7.40)$$

A largura do decaimento deve ser independente da polarização da partícula que decai, por

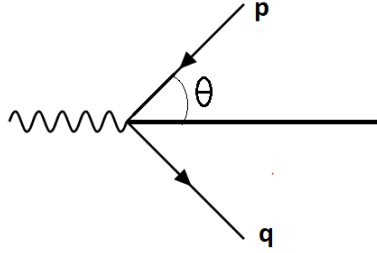


Figura 20 – Cinemática do problema no referencial do centro de massa.

isso podemos escolher uma polarização mais simples como a longitudinal com helicidade zero da forma:

$$\epsilon^\mu = (0, 0, 0, 1) = \epsilon^{*\mu}. \quad (7.41)$$

Agora que temos os momentos das partículas e a polarização podemos calcular os produtos envolvendo elas. Lembrando que aqui teremos uma multiplicação da forma $v \cdot w = v_0 \cdot w_0 - v_1 \cdot w_1 - v_2 \cdot w_2 - v_3 \cdot w_3$ já que a multiplicação entre dois quadrivetores é $V^\mu g_{\mu\nu} W^\nu$ e estamos trabalhando com uma métrica do tipo $(+---)$. Então, nossos produtos são:

$$\begin{aligned} \epsilon^* \cdot \epsilon &= -1, \\ p \cdot q &= \frac{M_{Z'}^2}{4} + \frac{1}{4}(M_{Z'}^2 - 4m_f^2)(\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) = \frac{M_{Z'}^2}{2} - m_f^2, \\ q \cdot \epsilon &= q \cdot \epsilon^* = \frac{1}{2}\sqrt{M_{Z'}^2 - 4m_f^2} \sin \theta, \\ p \cdot \epsilon &= p \cdot \epsilon^* = -\frac{1}{2}\sqrt{M_{Z'}^2 - 4m_f^2} \sin \theta, \end{aligned} \quad (7.42)$$

Voltamos agora para calcular $|\mathcal{M}|^2$:

$$\begin{aligned} |\mathcal{M}|^2 &= 4g'^2 \left(-\frac{1}{4}(M_{Z'}^2 - 4m_f^2) \sin^2 \theta + \frac{M_{Z'}^2}{2} - m_f^2 - \frac{1}{4}(M_{Z'}^2 - 4m_f^2) \sin^2 \theta + m_f^2 \right) \\ &= 4g'^2 \left(-\frac{1}{2}(M_{Z'}^2 - 4m_f^2) \sin^2 \theta + \frac{M_{Z'}^2}{2} \right) \\ &= 4g'^2 \left(2m_f^2(1 - \cos^2 \theta) + \frac{M_{Z'}^2}{2} \cos^2 \theta \right). \end{aligned} \quad (7.43)$$

Agora que temos a amplitude do nosso processo calculada podemos substituir na nossa expressão para a taxa de decaimento e chegar a um resultado final:

$$\frac{d\Gamma}{d\Omega_{\text{cm}}} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{64\pi^2 M_{Z'}} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_{Z'}^2}} = \frac{g'^2}{16\pi^2 M_{Z'}} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_{Z'}^2}} (2m_f^2(1 - \cos^2 \theta) + \frac{M_{Z'}^2}{2} \cos^2 \theta). \quad (7.44)$$

Como próximo passo basta resolvermos a integral substituindo $d\Omega_{\text{cm}} = 2\pi d\cos \theta$:

$$\begin{aligned} \Gamma_{Z' \rightarrow f\bar{f}} &= \frac{2\pi g'^2}{16\pi^2 M_{Z'}} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_{Z'}^2}} \int_{-1}^1 (2m_f^2(1 - \cos^2 \theta) + \frac{M_{Z'}^2}{2} \cos^2 \theta) d\cos \theta \\ &= \frac{g'^2}{8\pi M_{Z'}} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_{Z'}^2}} \left(2m_f^2(\cos \theta - \frac{\cos^3 \theta}{3}) + \frac{M_{Z'}^2}{2} \frac{\cos^3 \theta}{3} \right) \Big|_{-1}^1 \\ &= \frac{g'^2}{4\pi M_{Z'}} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_{Z'}^2}} \left(2m_f^2(1 - \frac{2}{3}) + \frac{M_{Z'}^2}{2} \frac{2}{3} \right) \\ &= \frac{g'^2}{4\pi M_{Z'}} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_{Z'}^2}} \left(\frac{M_{Z'}^2}{3} + \frac{2m_f^2}{3} \right) = \frac{g'^2}{12\pi M_{Z'}} \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_{Z'}^2}} (M_{Z'}^2 + 2m_f^2). \quad (7.45) \end{aligned}$$

Como último passo, precisamos deixar expressão um fator que indique quais as partículas fermiônicas envolvidas no processo. Fazemos isso colocando o fator k_f , sendo $k_f = 1$ para $f = \mu, \tau, \chi$ e $k_f = 1/2$ para $f = \nu_\mu, \nu_\tau$. Podemos ainda simplificar um pouco nossa expressão para chegarmos a taxa de decaimento da forma:

$$\Gamma_{Z' \rightarrow f\bar{f}} = \frac{k_f g'^2 m_{Z'}}{12\pi} \left(1 + \frac{2m_f^2}{M_{Z'}^2} \right) \sqrt{1 - \frac{4m_f^2}{M_{Z'}^2}}. \quad (7.46)$$

Agora temos tudo que é necessário para usarmos a expressão da seção de choque. Podemos utilizar essa expressão para calcularmos a densidade de relíquia $\Omega_{\text{ME}} h^2$. Faremos isso utilizando o programa DRAKE [61]. Utilizando os valores gerados pelo programa podemos fazer um gráfico, Fig.(21), relacionando a densidade de relíquia e relação entre a massa do bóson Z' , $M_{Z'}$, a massa de matéria escura, M_χ .

Podemos notar que para um valor de M_χ fixo temos dois valores de $M_{Z'}$ que dão um valor de relíquia satisfatório para o observado pela colaboração Planck [1]. Isso pode ser melhor observado na Fig.(22). Nesse gráfico podemos ver a relação entre a massa de matéria escura, M_χ , e a razão das massas, $M_{Z'}/M_\chi$. Para cada valor de M_χ temos dois valores de $M_{Z'}$ que dão a densidade de relíquia com g' satisfatório para resolver a anomalia Δa_μ .

7.4 O Número Efetivo de Espécies de Neutrino

Uma consequência cosmológica que o modelo $U(1)_{L_\mu - L_\tau}$ irá acarretar é envolvendo o número efetivo de espécies de neutrino. Antes de pensarmos no que o modelo irá implicar nesse ponto precisamos entender um pouco melhor sobre esse número.

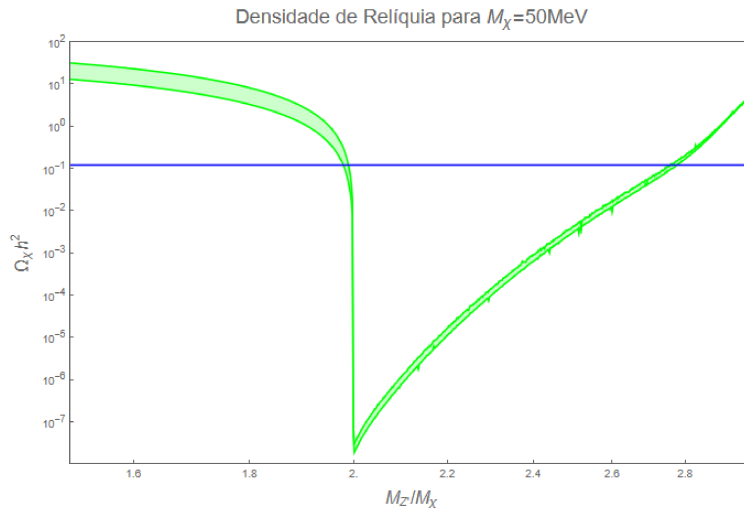


Figura 21 – Densidade de relíquia em função da relação $M_{Z'}/M_\chi$, para um valor fixo de $M_\chi = 50\text{MeV}$ e com valores de g' que dão um resultado satisfatório para Δa_μ . A faixa em azul é a de densidade de relíquia prevista pela colaboração Planck [1].

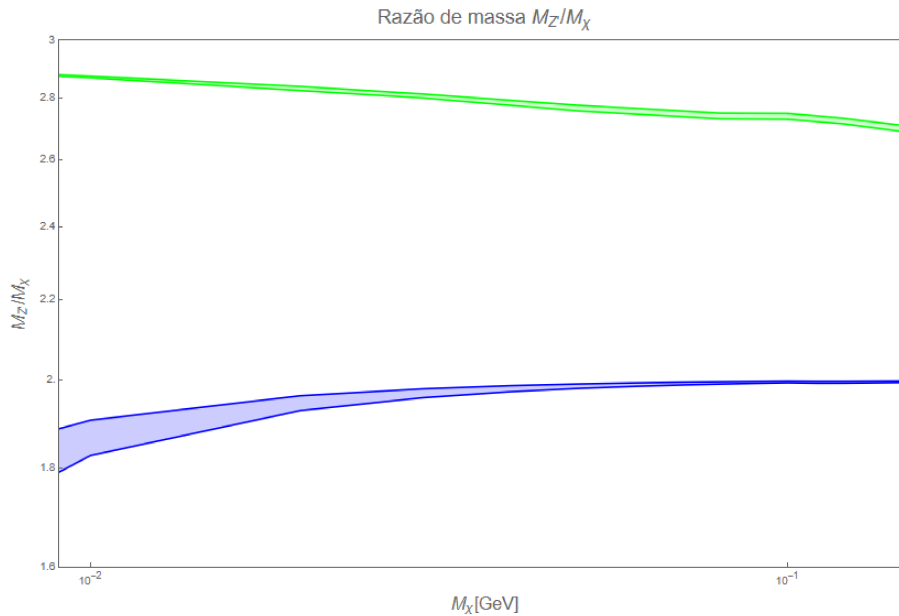


Figura 22 – Relação entre a massa de matéria escura, M_χ , e a razão das massas, $M_{Z'}/M_\chi$. Para cada valor de M_χ temos dois valores de $M_{Z'}$ que dão a densidade de relíquia com g' satisfatório para resolver a anomalia Δa_μ .

Ao estudarmos a termodinâmica do universo no capítulo 3, nós vimos que temos a conservação da entropia em um volume comóvel ($\frac{d}{dt}(sa^3) = 0 \rightarrow s \propto \frac{1}{a^3}$). Podemos ver também que se a espécie é relativística, sua temperatura é proporcional ao inverso do fator de escala $T \propto \frac{1}{a} \rightarrow s \propto T^3$.

Considerando uma evolução aproximadamente adiabática, a maneira como a tem-

peratura muda pode ser vista usando a conservação da entropia Eq.(3.52) e a equação de Friedmann Eq.(3.9) (com $\Lambda = 0$ e $k = 0$).

$$\begin{aligned} \frac{ds}{dt}a^3 + 3\frac{1}{a}\frac{da}{dt}a^3s &= 0 \Rightarrow \frac{1}{a}\frac{da}{dt} = -\frac{1}{3s}\frac{ds}{dT}\frac{dT}{dt} = \sqrt{\frac{8\pi G}{3}}\rho \\ dt &= -\frac{s'(T)}{s\sqrt{24\pi G\rho(T)}}dT \\ t &= -\int \frac{s'(T)}{s(T)\sqrt{24\pi G\rho(T)}}dT. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Utilizando do fato que:

$$\rho = \frac{\pi^2}{30}T^4g_* \text{ e } P = \frac{\rho}{3}. \quad (7.48)$$

E utilizando Eq.(3.50), teremos

$$s = \frac{2\pi^2}{45}T^3g_* \Rightarrow s' = \frac{ds}{dT} = \frac{3}{T}s. \quad (7.49)$$

Se colocarmos que g_* é constante, chegaremos a:

$$t = -\int \frac{3/T}{\sqrt{24\pi G\frac{\pi^2}{30}T^4g_*}} \Rightarrow t = \frac{1}{T^2}\sqrt{\frac{45}{16\pi^3Gg_*}} + \text{cte}. \quad (7.50)$$

Fixando $t_{\text{Big Bang}} = 0$ e observando que $T \rightarrow \infty$ no Big Bang, é possível fazer $\text{cte} = 0$. Em um universo dominado por radiação, $a \propto t^{\frac{1}{2}}$, teremos:

$$T \propto \frac{1}{a}. \quad (7.51)$$

Utilizando essas relações como base, podemos estudar o número efetivo de neutrinos. Neutrinos e fótons não interagem, mas podemos pensar sobre a relação entre o banho térmico de um com o outro. Quando a temperatura do banho térmico do fóton é alta o suficiente, processos como aniquilação pósitron-elétron e produção de pares pósitron-elétron são reações balanceadas:

$$\begin{aligned} \gamma + \gamma &\rightarrow e^+ + e^- \text{ produção de pares,} \\ e^+ + e^- &\rightarrow \gamma + \gamma \text{ aniquilação de pares.} \end{aligned} \quad (7.52)$$

Para o processo de produção de pares os fótons precisam ter uma temperatura de ordem 1MeV (já que temos $m_e \approx 0.5\text{MeV}$ e precisamos ter conservação de energia). Então, quando a temperatura do banho térmico de fótons está abaixo dessa valor as reações deixam de ser balanceadas e mais fótons são injetados no banho térmico, porque temos mais aniquilação de pares acontecendo que produção. Podemos estudar as mudanças que ocorrem referentes a esses processos usando a conservação de sa^3 .

Como temos as seguintes relações:

$$\begin{aligned} \rho &= \frac{gT^4\pi^2}{30} * \begin{cases} 1 & \text{bósons,} \\ \frac{7}{8} & \text{férmions,} \end{cases} \\ P &= \frac{\rho}{3}, \\ s &= \frac{\rho + P}{T}. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Poderemos escrever uma expressão para entropia do fóton (bóson), do neutrino (férmion) e do elétron com o pósitron (férmion):

$$\begin{aligned} s_{\text{bóson}} &= \frac{4\rho_{\text{bóson}}}{3T} = \frac{g4T^4\pi^2}{90T} = g\frac{2\pi^2}{45}T^3, \\ s_{\text{férmion}} &= \frac{4\rho_{\text{férmion}}}{3T} = \frac{7g4T^4\pi^2}{8\cdot 90T} = \frac{7}{8}g\frac{2\pi^2}{45}T^3. \end{aligned}$$

em que g é específico para cada partícula. Antes de acontecer a aniquilação $e^- + e^+$, para um fator de escala a_i , teremos a densidade de entropia:

$$s(a_i) = \frac{2\pi^2}{45}T_i^3 \left[2 + \frac{7}{8}(2+2) + \frac{7}{8}N_\nu(g_\nu + g_\nu) \right], \quad (7.54)$$

em que usamos $g_\gamma = g_{e^+} = g_{e^-} = 2$ e $N_\nu g_\nu$ que N_ν é o número de famílias dos neutrinos, e T_i foi usada como a mesma temperatura para todas as partículas pois ela vem do banho térmico original do Big-Bang.

Já após a aniquilação, com um fator de escala a_f , a densidade de entropia é:

$$s(a_f) = \frac{2\pi^2}{45} \left[2T_\gamma^3 + \frac{7}{8}N_\nu(g_\nu + g_\nu)T_\nu^3 \right]. \quad (7.55)$$

Usando o fato da conservação da entropia por volume comóvel $s(a_i)a_i^3 = s(a_f)a_f^3$, teremos

$$(a_i T_i)^3 \left[2 + \frac{7}{4}(N_\nu g_\nu + 2) \right] = (a_f T_\nu)^3 \left[2 \left(\frac{T_\gamma}{T_\nu} \right)^3 + \frac{7}{4}N_\nu g_\nu \right]. \quad (7.56)$$

Já que a temperatura dos neutrinos continua com um comportamento $\propto 1/a$ teremos $(a_i T_i)^3 = (a_f T_\nu)^3$, o que nos leva a seguinte relação:

$$\frac{T_\nu}{T_\gamma} = \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{1}{3}}. \quad (7.57)$$

Usando essa relação juntamente com as expressões:

$$\begin{aligned} \rho_\gamma &= \frac{2\pi^2}{30}T_\gamma^4, \\ \rho_\nu &= \frac{7}{8} \frac{N_\nu g_\nu \pi^2}{30} T_\nu^4, \end{aligned} \quad (7.58)$$

podemos mostrar a seguinte expressão:

$$\frac{\rho_\nu}{\rho_\gamma} = \frac{7 N_\nu g_\nu}{8 \cdot 2} \left(\frac{T_\nu}{T_\gamma} \right)^4 = \frac{7 N_\nu g_\nu}{8 \cdot 2} \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \rightarrow \rho_\nu = \frac{7 N_\nu g_\nu}{8 \cdot 2} \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \rho_\gamma, \quad (7.59)$$

em que g_ν é o grau de liberdade do neutrino e N_ν o número de famílias do neutrino. Podemos escrever esses valores como $N_{\text{eff}} = g_\nu N_\nu$, o número efetivo de espécies de neutrino. Então, temos a seguinte relação:

$$\rho_\nu = \rho_{\bar{\nu}} = \frac{7 N_{\text{eff}}}{8 \cdot 2} \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \rho_\gamma. \quad (7.60)$$

Podemos escrever a densidade de energia radiativa total como

$$\rho_r = \rho_\gamma + \rho_\nu + \rho_{\bar{\nu}} = \left[1 + \frac{7}{8} N_{\text{eff}} \left(\frac{4}{11} \right)^{\frac{4}{3}} \right] \rho_\gamma. \quad (7.61)$$

A contribuição do modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ atua com a junção de dois processos:

$$\begin{aligned} \chi \bar{\chi} &\rightarrow \bar{\nu} \nu, \\ Z' &\rightarrow \bar{\nu} \nu. \end{aligned}$$

Podemos reescrever a densidade de energia total utilizando a conservação de entropia, teremos a seguinte expressão:

$$\frac{4}{3T_{\text{des}}^4} \rho_{\text{tot}} = \frac{4}{3T_{\text{des}}^4} [\rho_\nu + \rho_{\bar{\nu}} + \rho_\chi + \rho_{\bar{\chi}} + \rho_{Z'}], \quad (7.62)$$

em que estamos considerando as partículas de neutrinos que vieram dos processos anteriormente e as duas conservações de energia nos processos que são $\rho_\nu + \rho_{\bar{\nu}} = \rho_\chi + \rho_{\bar{\chi}}$ e $\rho_\nu + \rho_{\bar{\nu}} = \rho_{Z'}$.

Podemos escrever o número efetivo de espécies de neutrino inicial como aquele que tínhamos antes da introdução das novas partículas, com apenas neutrinos do modelo padrão e sem os gerados pelo bóson Z' e partículas de matéria escura χ . Escrevemos da seguinte maneira:

$$N_{\text{eff}}^i = \frac{8}{7} \left(\frac{11}{4} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{\rho_{\text{tot}}}{\rho_\gamma}. \quad (7.63)$$

Em seguida, podemos escrever uma versão final envolvendo as novas partículas da extensão:

$$N_{\text{eff}}^f = \frac{8}{7} \left(\frac{11}{4} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{(2\rho_\nu + \rho_\chi + \rho_{\bar{\chi}} + \rho_{Z'})}{\rho_\gamma}.$$

Subtraindo o número efetivo de espécies de neutrino inicial do final iremos obter o aumento desse número de acordo com as novas adições.

$$\begin{aligned}\Delta N_{\text{eff}} &= N_{\text{eff}}^f - N_{\text{eff}}^i = \frac{8}{7} \left(\frac{11}{4} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{(2\rho_\nu + \rho_\chi + \rho_{\bar{\chi}} + \rho_{Z'})}{\rho_\gamma} - \frac{8}{7} \left(\frac{11}{4} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{2\rho_\nu}{\rho_\gamma} \\ &= \frac{8}{7} \left(\frac{11}{4} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{(\rho_\chi + \rho_{\bar{\chi}} + \rho_{Z'})}{\rho_\gamma}.\end{aligned}\quad (7.64)$$

O que falta é escrevermos expressões para as densidades de energia da partícula de matéria escura (férmion) e da partícula Z' (bóson). Teremos:

$$\begin{aligned}\rho_\chi &= \rho_{\bar{\chi}} = 2 \int \frac{d^3 \vec{p}_\chi}{(2\pi)^3} \frac{E_\chi}{\exp\left(\frac{E_\chi}{T_{\text{des}}}\right) + 1}, \\ \rho_{Z'} &= 3 \int \frac{d^3 \vec{p}_{Z'}}{(2\pi)^3} \frac{E_{Z'}}{\exp\left(\frac{E_{Z'}}{T_{\text{des}}}\right) - 1}.\end{aligned}\quad (7.65)$$

Então o incremento de N_{eff} será dado por:

$$\delta_\rho = \rho_\chi + \rho_{\bar{\chi}} + \rho_{Z'} = \int \frac{d^3 \vec{p}_\chi}{(2\pi)^3} \frac{4E_\chi}{\exp\left(\frac{E_\chi}{T_{\text{des}}}\right) + 1} + \int \frac{d^3 \vec{p}_{Z'}}{(2\pi)^3} \frac{E_{Z'}}{\exp\left(\frac{3E_{Z'}}{T_{\text{des}}}\right) - 1}.\quad (7.66)$$

E teremos:

$$\Delta N_{\text{eff}} = \frac{8}{7} \left(\frac{11}{4} \right)^{\frac{4}{3}} \frac{\delta_\rho}{\rho_\gamma}.\quad (7.67)$$

Com os dados da colaboração Planck [1] temos um limite $\Delta N_{\text{eff}} \lesssim 0.3$. O N_{eff} esperado pelo Modelo Padrão seria 3 por causa das três famílias de neutrinos. Então, esse ≈ 0.3 seria a mais que 3 e daria o ΔN_{eff} .

Esse valor de ΔN_{eff} pode gerar uma contribuição para a tensão envolvendo a constante de Hubble H_0 . Ela é uma tensão entre o valor medido no início do universo (considerando apenas as suposições do modelo cosmológico) e o medido recentemente por observações, a colaboração Planck [1] coloca um valor para a constante de Hubble igual a $H_0 = (69.32 \pm 0.97) \text{ Km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$. A contribuição de ΔN_{eff} vem porque com o aumento de N_{eff} estamos considerando um valor extra de radiação que vai mudar o valor no momento da recombinação na história do universo e irá afetar o valor de H_0 que é medido por observações. A colaboração Planck [1] juntamente com os dados de R18 de Riess [62] coloca de contribuição como $N_{\text{eff}} = 3.27 \pm 0.15$, o que coloca um limite de $\Delta N_{\text{eff}} \approx 0.1 - 0.4$. Então, podemos colocar como limite $\Delta N_{\text{eff}} \lesssim 0.5$ e no intervalo $\Delta N_{\text{eff}} = 0.2 - 0.5$ existe um potencial cenário para aliviar a tensão envolvendo H_0 .

Na Fig.(23) podemos ver uma relação entre a massa da matéria escura, M_χ , e a massa do bóson Z' . Temos as linhas verde e azul para relação das massas que dão certo com a densidade de relíquia e com a anomalia. Também temos sombreado as regiões com contribuição para N_{eff} que no caso tem a contribuição para H_0 com a região laranja e a parte que não gera contribuição para N_{eff} com a cinza em que $N_{\text{eff}} > 0.5$.

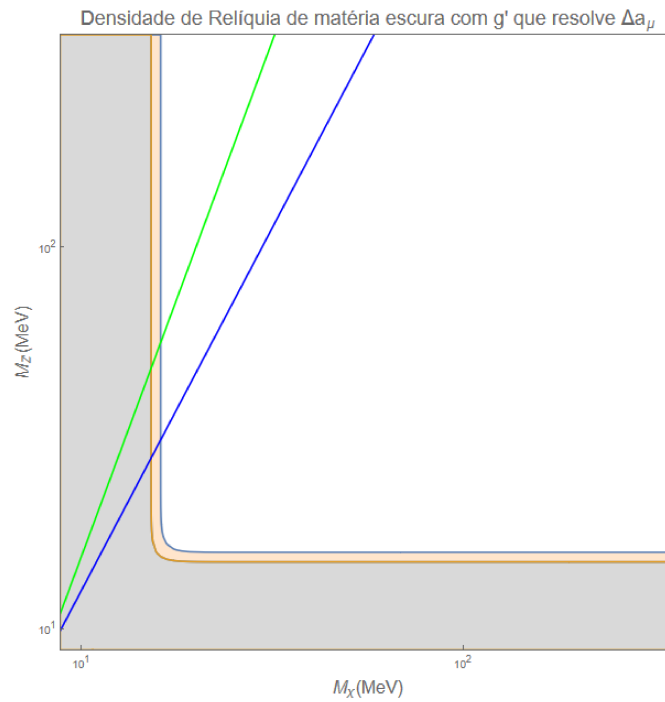


Figura 23 – Nas linhas verde e azul temos a relação entre as massas M_χ e $M_{Z'}$ que dão certo com os dados de relíquia $\Omega_{\text{ME}}h^2 = 0.1198 \pm 0.0012$ [1], para valores de g' que resolvem $g - 2$. Sendo a linha azul $M_{Z'} = 1.9M_\chi$ e a verde $M_{Z'} = 2.7M_\chi$. Nas regiões sombreadas temos: 1) Na cinza valores para $\Delta N_{\text{eff}} > 0.5$ e que estão fora do intervalo; 2) Na laranja com valores $0.2 < \Delta N_{\text{eff}} < 0.5$ que contribuem para H_0 .

8 Conclusão

O estudo da física além do Modelo Padrão se mostrou cada vez mais interessante quando pensamos na evolução da tecnologia empregada por experimentos e observações. Dois problemas que estão nesse escopo chamam a atenção por estarem em alta e terem um bom embasamento experimental e observacional. O primeiro tópico é o da matéria escura como matéria desconhecida do Universo. O segundo é o da anomalia no momento magnético do múon. Ambos os problemas podem ser estudados através do entendimento de interações entre partículas.

Existem várias evidências que contribuíram para a construção da busca por matéria escura como vimos no Cap.(2). O estudo dela na forma de partícula gera alguns bons candidatos e é uma abordagem interessante de se fazer. Uma boa maneira de realizar seu estudo é através de densidade de relíquia, que pode ser feito com o uso da equação de Boltzmann como vimos no Cap.(4) e é feita com base na cosmologia e termodinâmica apresentadas no Cap.(3). Ao calcularmos a densidade de relíquia podemos comparar seu valor com o observado pela colaboração Planck [1].

Já o estudo da anomalia do momento magnético do múon começamos o entendimento dele ao estudarmos os experimentos que servem de norte para a busca de uma contribuição para a anomalia, o do E821 [4] e o do Fermilab [3]. Vimos como esse cálculo pode ser feito desde uma contribuição simples até uma mais complexa como a contribuição dada pela interação com o bóson Z . Então a contribuição para a anomalia pode ser calculada ao estudar um processo interação do múon com outra partícula. Esse foi o conteúdo visto no Cap.(5).

Tanto a densidade de relíquia quanto a contribuição para a anomalia podem ser estudadas usando como base um modelo que sirva de extensão para o Modelo Padrão. O modelo $U(1)_{L_\mu-L_\tau}$ inclui, além da família do múon e a do tau, uma partícula de matéria escura χ , e um bóson Z' . Esse foi o modelo escolhido para ser o ponto de partida do estudo dos tópicos abordados. A apresentação e o desenvolvimento do modelo estão feitos no Cap.(6).

Ao estudarmos a interação entre o múon e o bóson Z' podemos encontrar uma contribuição para a anomalia do momento magnético do múon. Já fazendo o estudo de processos envolvendo partículas da matéria escura podemos encontrar a seção de choque do processo e com ela resolver a equação de Boltzmann para obter a densidade de relíquia.

O estudo da contribuição para a anomalia do momento magnético do múon foi feito com base na interação com o bóson Z' . Ao comparar o resultado com os dados dos experimentos do Fermilab [3] e da colaboração E821 [4] é possível limitar o acoplamento

g' da teoria de uma forma que o valor experimental seja obtido. O resultado foi que g' possui um valor próximo de 4.5×10^{-4} .

Já o estudo da densidade de relíquia foi feito estudando processos envolvendo a partícula de matéria escura e as outras partículas do modelo. Com a seção de choque foi possível resolver a equação de Boltzmann e achar um valor para a densidade de relíquia. Isso feito com g' tomando um valor que resolva a anomalia. Ao observar o resultado da densidade de relíquia com um valor de massa da partícula de matéria escura fixo pudemos ver que para dois valores de massa do bóson Z' encontrávamos um valor da densidade igual àquele encontrado em observações da colaboração Planck [1]. Então observamos para diferentes valores de massa da partícula de matéria escura que a razão entre massa do bóson Z' e da partícula de matéria escura era $M_{Z'} = 1.9M_\chi$ e $M_{Z'} = 2.7M_\chi$ para que o valor de densidade de relíquia encontrado por Planck fosse alcançado.

Por último vimos que o modelo ainda trazia uma contribuição para um problema cosmológico envolvendo a medição de H_0 . Pudemos fazer isso ao estudar o número efetivo de espécies de neutrinos N_{eff} que possui um aumento graças a processos envolvendo Z' , χ e neutrinos. De acordo com a colaboração Planck [1] juntamente com os dados de R18 de Riess [62] temos $N_{\text{eff}} = 3.27 \pm 0.15$, o que coloca um limite de $\Delta N_{\text{eff}} \sim 0.1 - 0.4$. Então, temos o limite $\Delta N_{\text{eff}} \lesssim 0.5$ e no intervalo $\Delta N_{\text{eff}} = 0.2 - 0.5$ existe um potencial cenário para aliviar a tensão envolvendo H_0 . Vemos que ao colocar a razão entre massa de matéria escura e massa do bóson Z' vemos uma preferência de massas entre $1 - 50\text{MeV}$ para valores parecidos com o da colaboração Planck [1].

Então, vimos que graças a valores experimentais e observacionais podemos colocar limites no acoplamento da teoria, g' , assim como nas massas da partícula de matéria escura, M_χ , e na massa do bóson Z' , $M_{Z'}$. Isso faz com que o modelo fique simples e direto no ponto de busca. Um passo interessante para o futuro e que poderia limitar mais ainda a teoria é olhar limites experimentais de detecção e como eles podem limitar mais ainda o modelo e deixar com intervalos propícios para busca. Por causa do jeito com que os atuais experimentos conseguem limitar o modelo nos seus poucos parâmetros, nós acabamos deparando com um modelo simples e de fácil previsibilidade. No sentido de que temos bons intervalos limitados para facilitar na busca. É nesse sentido que os limites de experimentos ajudariam a estabelecer melhor os cenários em que o modelo funcionaria.

Referências

- [1] Planck Collaboration, Aghanim, N. *et. al.*: *Planck 2018 results - VI. Cosmological parameters*. *A&A*, 641:A6, 2020. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833910>. Citado 17 vezes nas páginas 13, 14, 15, 17, 24, 28, 36, 38, 47, 85, 91, 103, 104, 108, 109, 111 e 112.
- [2] Zwicky, F.: *On the Masses of Nebulae and of Clusters of Nebulae*. *Astrophys. J.*, 86:217–246, 1937. Citado 3 vezes nas páginas 13, 17 e 18.
- [3] Albahri, T. e *et. al.*: *Measurement of the anomalous precession frequency of the muon in the Fermilab Muon $g - 2$ Experiment*. *Phys. Rev. D*, 103:072002, Apr 2021. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.103.072002>. Citado 6 vezes nas páginas 14, 15, 57, 58, 60 e 111.
- [4] Bennett, G. W. e *et. al.*: *Final report of the E821 muon anomalous magnetic moment measurement at BNL*. *Phys. Rev. D*, 73:072003, Apr 2006. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.73.072003>. Citado 7 vezes nas páginas 14, 15, 57, 58, 59, 60 e 111.
- [5] Holst, Ian, Dan Hooper e Gordan Krnjaic: *Simplest and Most Predictive Model of Muon $g - 2$ and Thermal Dark Matter*. *Phys. Rev. Lett.*, 128:141802, Apr 2022. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.128.141802>. Citado 3 vezes nas páginas 15, 60 e 82.
- [6] Bertone, G. e D. Hooper: *History of dark matter*. *Rev. Mod. Phys.*, 90:045002, Oct 2018. <https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.90.045002>. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 21.
- [7] Rubin, V. C. e W. K. Ford Jr.: *Rotation of the Andromeda Nebula from a Spectroscopic Survey of Emission Regions*. *Astrophys. J.*, 159:379, fevereiro 1970. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1970ApJ...159..379R>. Citado 3 vezes nas páginas 17, 19 e 21.
- [8] Profumo, S.: *An Introduction to Particle Dark Matter*. World Scientific Publishing Europe, (Ltd.), 2017. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 23.
- [9] Freeman, K. C.: *On the Disks of Spiral and S0 Galaxies*. *Astrophys. J.*, 160:811, junho 1970. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1970ApJ...160..811F>. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 21.

- [10] Babcock, H. W.: *The rotation of the Andromeda Nebula*. Lick Observatory Bulletin, 498:41–51, janeiro 1939. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1939LicOB...19...41B>. Citado na página 21.
- [11] Roberts, M. S. e R. N. Whitehurst: *The rotation curve and geometry of M31 at large galactocentric distances*. *Astrophys. J.*, 201:327–346, outubro 1975. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/1975ApJ...201..327R>. Citado na página 21.
- [12] Carignan, C., L. Chemin, W. Huchtmeier e F. Lockman: *Extended HI Rotation Curve and Mass Distribution of M31*. *The Astrophysical Journal*, 641, março 2006. Citado na página 21.
- [13] Randall, S. W., M. Markevitch, D. Clowe, A. H. Gonzalez e M. Bradač: *Constraints on the Self-Interaction Cross Section of Dark Matter from Numerical Simulations of the Merging Galaxy Cluster 1E 0657-56*. *Astrophys. J.*, 679(2):1173–1180, junho 2008. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2008ApJ...679.1173R>. Citado na página 23.
- [14] O’Meara, J. M., D. Tytler, D. Kirkman, N. Suzuki, J. X. Prochaska, D. Lubin e A. M. Wolfe: *The Deuterium to Hydrogen Abundance Ratio toward a Fourth QSO: HS 0105+1619*. *Astrophys. J.*, 552(2):718–730, maio 2001. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2001ApJ...552..718O>. Citado na página 24.
- [15] Bahcall, N., R. Cen, R. Davé, J. Ostriker e Q. Yu: *The Mass-to-Light Function: Antibias and Ω_m* . *The Astrophysical Journal*, 541, setembro 2000. Citado na página 24.
- [16] Dodelson, S. *et al.*: *The Three-Dimensional Power Spectrum from Angular Clustering of Galaxies in early SDSS Data*. *Astrophys. J.*, 572:140–156, 2001. Citado na página 24.
- [17] Strauss, M. A. e J.A. Willick: *The density and peculiar velocity fields of nearby galaxies*. *Physics Reports*, 261:271–431, 1995. Citado na página 24.
- [18] Dodelson, S.: *The real problem with MOND*. *International Journal of Modern Physics D - INT J MOD PHYS D*, 20, dezembro 2011. Citado na página 26.
- [19] Wyrzykowski, L. *et al.*: *The OGLE view of microlensing towards the Magellanic Clouds - IV. OGLE-III SMC data and final conclusions on MACHOs*. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, junho 2011. Citado na página 27.
- [20] Ricotti, M., J. Ostriker e K. Mack: *Effect of Primordial Black Holes on the Cosmic Microwave Background and Cosmological Parameter Estimates*. Em *APS April Meeting Abstracts*, volume 2017 de *APS Meeting Abstracts*, página U5.004, janeiro

2017. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017APS..APR.U5004R>. Citado na página 27.
- [21] Dodelson, S. e L. M. Widrow: *Sterile neutrinos as dark matter*. Phys. Rev. Lett., 72:17–20, Jan 1994. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.72.17>. Citado na página 28.
- [22] Gervais, J. L. e B. Sakita: *Field theory interpretation of supergauges in dual models*. Nuclear Physics B, 34(2):632–639, 1971, ISSN 0550-3213. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321371903518>. Citado na página 28.
- [23] Peccei, R. D. e H. R. Quinn: *Constraints imposed by CP conservation in the presence of pseudoparticles*. Phys. Rev. D, 16:1791–1797, Sep 1977. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.16.1791>. Citado na página 29.
- [24] Sikivie, P.: *Experimental Tests of the "Invisible" Axion*. Phys. Rev. Lett., 51:1415–1417, Oct 1983. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.51.1415>. Citado na página 30.
- [25] Steigman, G. e M. S. Turner: *Cosmological constraints on the properties of weakly interacting massive particles*. Nuclear Physics B, 253:375–386, 1985, ISSN 0550-3213. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321385905371>. Citado na página 30.
- [26] Bertone, G.: *The moment of truth for WIMP dark matter*. Nature, 468(7322):389–393, novembro 2010. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2010Natur.468..389B>. Citado na página 30.
- [27] Beltran, M., D. Hooper, E. W. Kolb e Z. A. C. Krusberg: *Deducing the nature of dark matter from direct and indirect detection experiments in the absence of collider signatures of new physics*. Phys. Rev. D, 80:043509, Aug 2009. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.80.043509>. Citado na página 31.
- [28] Ellis, J., A. Ferstl e Keith A. O.: *Re-evaluation of the elastic scattering of supersymmetric dark matter*. Physics Letters B, 481(2-4):304–314, may 2000. <https://doi.org/10.1016%2Fs0370-2693%2800%2900459-7>. Citado na página 31.
- [29] Akerib, D. S. *et. al.*: *Effective field theory analysis of the first LUX dark matter search*. Physical Review D, 103(12):122005, junho 2021. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2021PhRvD.10312005A>. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.
- [30] Cheng, C, P Xie e *et al.* Abdukerim: *Search for Light Dark Matter–Electron Scattering in the PandaX-II Experiment*. Physical Review Letters, 126, maio 2021. Citado 2 vezes nas páginas 33 e 35.

- [31] Aprile, E. e *et. al.*: *The XENON1T dark matter experiment*. European Physical Journal C, 77(12):881, dezembro 2017. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2017EPJC...77..881A>. Citado na página 33.
- [32] Laboratory, SLAC National Accelerator: *SuperCDMS-Super Cryogenic Dark Matter Search. Experiment Overview*, 2021. <https://supercdms.slac.stanford.edu/overview>. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 35.
- [33] Amole, C. e M. *et al.* Ardid: *Dark matter search results from the PICO-60 CF 3 I bubble chamber*. outubro 2015. Citado na página 35.
- [34] Aprile, E. *et al.*: *Constraining the spin-dependent WIMP-nucleon cross sections with XENON1T*. Phys. Rev. Lett., 122(14):141301, 2019. Citado na página 35.
- [35] Cooley, J.: *Dark Matter direct detection of classical WIMPs*. outubro 2021. Citado na página 35.
- [36] Hulth, P e *et. al.*: *The AMANDA experiment*. janeiro 1997. Citado na página 36.
- [37] Galper, A. M. e *et. al.*: *The PAMELA experiment: a decade of Cosmic Ray Physics in space*. Journal of Physics: Conference Series, 798:012033, jan 2017. <https://doi.org/10.1088/1742-6596/798/1/012033>. Citado na página 36.
- [38] Ackermann, M. e *et. al.*: *Dark matter constraints from observations of 25 Milky Way satellite galaxies with the Fermi Large Area Telescope*. Physical Review D, 89(4), feb 2014. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.89.042001>. Citado na página 36.
- [39] Bailin, D. e A. Love: *Cosmology in Gauge Field Theory and String Theory*. IOP Publishing Lt, 2004. Citado na página 37.
- [40] Labini, F. S. e Y. V. Baryshev: *Testing the Copernican and Cosmological Principles in the local universe with galaxy surveys*. Journal of Cosmology and Astroparticle Physics, 2010(06):021–021, jun 2010. <https://doi.org/10.1088/1475-7516/2010/06/021>. Citado na página 37.
- [41] Piattella, O.: *Lectures Notes in Cosmology*. Springer International Publishing AG, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 40 e 47.
- [42] Kolb, E. W. e M. S Turner: *The Early Universe*. Westview, Boulder, 1994. Citado na página 47.
- [43] Gondolo, P. e G. Gelmini: *Cosmic abundances of stable particles: improved analysis*. Nuclear Physics B, 360(1):145–179, agosto 1991. Citado 2 vezes nas páginas 47 e 51.

- [44] Miller, J. P., R. Eduardo de, B. L. Roberts e D. Stöckinger: *Muon ($g - 2$): Experiment and Theory*. Annual Review of Nuclear and Particle Science, 62:237–264, novembro 2012. <https://ui.adsabs.harvard.edu/abs/2012ARNPS..62..237M>. Citado na página 57.
- [45] Aoyama, T. e *et. al.*: *The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model*. Physics Reports, 887:1–166, dec 2020. <https://doi.org/10.1016%2Fj.physrep.2020.07.006>. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 59.
- [46] Schwartz, M.: *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, 2014. Citado 3 vezes nas páginas 57, 61 e 86.
- [47] Schwinger, J.: *Quantum Electrodynamics. III. The Electromagnetic Properties of the Electron—Radiative Corrections to Scattering*. Phys. Rev., 76:790–817, Sep 1949. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.76.790>. Citado 3 vezes nas páginas 57, 58 e 68.
- [48] Jackiw, R. e S. Weinberg: *Weak interaction corrections to the muon magnetic moment and to muonic atom energy levels*. Phys. Rev. D, 5:2396–2398, 1972. Citado 2 vezes nas páginas 57 e 72.
- [49] W, Gerlach e Stern O. A.: *Phys.* 74:673, 1924. Citado na página 57.
- [50] Dirac, P. A. M.: *The Principles of Quantum Mechanics*. 4th Edition, Oxford University Press, London, 1958. Citado na página 57.
- [51] Garwin, R. L., L. M. Lederman e M. Weinrich: *Observations of the Failure of Conservation of Parity and Charge Conjugation in Meson Decays: the Magnetic Moment of the Free Muon*. Phys. Rev., 105:1415–1417, Feb 1957. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.105.1415>. Citado na página 58.
- [52] Garwin, R. L., D. P. Hutchinson, S. Penman e G. Shapiro: *Accurate Determination of the μ^+ Magnetic Moment*. Phys. Rev., 118:271–283, Apr 1960. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.118.271>. Citado na página 58.
- [53] Charpak, G., F. J. M. Farley, R. L. Garwin, T. Muller, J. C. Sens, V. L. Telegdi e A. Zichichi: *Measurement of the Anomalous Magnetic Moment of the Muon*. Phys. Rev. Lett., 6:128–132, Feb 1961. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.6.128>. Citado na página 58.
- [54] Wikipedia: *Standard model of elementary particles: the 12 fundamental fermions and 5 fundamental bosons.*, 2019. https://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model. Citado na página 74.

- [55] Woithe, J., G. J Wiener e F. F V. der Veken: *Let's have a coffee with the Standard Model of particle physics!* Physics Education, 52(3):034001, mar 2017. <https://doi.org/10.1088/1361-6552/aa5b25>. Citado 4 vezes nas páginas 74, 75, 76 e 77.
- [56] Quigg, C.: *Gauge Theories of the Strong, Weak, and Electromagnetic Interactions*. Princeton University Press, 2013. Citado na página 76.
- [57] Workman, R. L. e Others: *Review of Particle Physics*. PTEP, 2022:083C01, 2022. Citado na página 82.
- [58] Baldini, A. e *et. al.*: *Search for the lepton flavour violating decay $\mu^+ \rightarrow e^+ \gamma$ with the full dataset of the MEG experiment: MEG Collaboration*. The European Physical Journal C, 76, agosto 2016. Citado na página 84.
- [59] Eichler, R. e C. Grab: *The SINDRUM-I Experiment*. SciPost Physics Proceedings, setembro 2021. Citado na página 84.
- [60] Cheng, T. P. e L. F. Li: *Gauge theory of elementary particle physics*. Oxford University Press, 1988. Citado na página 85.
- [61] Binder, T., T. Bringmann, M. Gustafsson e A. Hryczuk: *DRAKE: Dark matter Relic Abundance beyond Kinetic Equilibrium*. <https://doi.org/10.1140%2Fepjc%2Fs10052-021-09357-5>. Citado na página 103.
- [62] Riess, Adam G. e *et. al.*: *New Parallaxes of Galactic Cepheids from Spatially Scanning the Hubble Space Telescope: Implications for the Hubble Constant*. The Astrophysical Journal, 855(2):136, mar 2018. <https://dx.doi.org/10.3847/1538-4357/aaadb7>. Citado 2 vezes nas páginas 108 e 112.

APÊNDICE A – Base para o Cálculo do Acréscimo para a Anomalia (Δa_μ) Gerado pelo Bóson Z

Nesse apêndice estão reunidos os cálculos feitos para a contribuição do bóson Z para o problema da anomalia do momento magnético do múon. Temos separados em partes cada um dos quatro denominadores e numeradores envolvidos nas duas amplitudes uma envolvendo Z e outra o bóson de Nambu-Goldstone. Em seguida também deixaremos as integrais prontas para poder aplicar no acréscimo da anomalia. Os resultados finais geram as contribuições necessárias dadas pelas amplitudes dadas pelas Eq.(5.61) e Eq.(5.62).

A.1 Denominador

Teremos três denominadores dados pela amplitude da Eq.(5.61) (D_Z^1 , D_Z^2 e D_Z^3) e um da amplitude dada pela Eq.(5.62) (D_G). Eles possuem a seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 D_Z^1 &= \frac{1}{((l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon)(l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon)((l + p_1)^2 - M_Z^2 + i\varepsilon)}, \\
 D_Z^2 &= \frac{1}{((l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon)(l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon)((l + p_1)^2 - M_Z^2 + i\varepsilon)((l + p_1)^2)}, \\
 D_Z^3 &= \frac{1}{((l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon)(l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon)((l + p_1)^2 - \xi M_Z^2 + i\varepsilon)((l + p_1)^2)}, \\
 D_G &= \frac{1}{((l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon)(l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon)((l + p_1)^2 - \xi M_Z^2 + i\varepsilon)}.
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

Para podermos simplificar esses denominadores, nós usaremos a parametrização de Feynman. No caso teremos ela de duas formas:

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{ABC} &= 2 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 \delta(x_1 + x_2 + x_3 - 1) \frac{1}{[x_1 A + x_2 B + x_3 C]^3} \\
 &= 2 \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{dx_2 dx_1}{[C + x_1(A - C) + x_2(B - C)]^3}, \\
 \frac{1}{ABCD} &= 6 \int_0^1 dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \delta(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 1) \frac{1}{[x_1 A + x_2 B + x_3 C + x_4 D]^4} \\
 &= 6 \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{dx_3 dx_2 dx_1}{[D + (A - D)x_1 + (B - D)x_2 + (C - D)x_3]^4}.
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

A.1.1 Primeiro Denominador

Vamos começar trabalhando com o primeiro denominador D_Z^1 em Eq.(A.1). Precisamos escrever ele da forma:

$$D_Z^1 = C + x_1(A - C) + x_2(B - C). \quad (\text{A.3})$$

Em que:

$$\begin{aligned} A &= l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon, \\ B &= (l + p_1)^2 - M_Z^2 + i\varepsilon, \\ C &= (l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Então temos o denominador escrito como:

$$\begin{aligned} D_Z^1 &= (l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon + (l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon - (l + p_1 + p_2)^2 + m_\mu^2 - i\varepsilon)x_1 \\ &\quad + ((l + p_1)^2 - M_Z^2 + i\varepsilon - (l + p_1 + p_2)^2 + m_\mu^2 - i\varepsilon)x_2 \\ &= l^2 + 2l((1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2) + (1 - x_1 - x_2)(p_1 + p_2)^2 \\ &\quad + x_2p_1^2 + (x_2 - 1)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Podemos notar que nosso denominador está escrito de uma forma parecida com $\alpha l^2 + 2\beta l + \gamma$, sendo $\alpha = 1$, $\beta = ((1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)$ e $\gamma = +(1 - x_1 - x_2)(p_1 + p_2)^2 + x_2p_1^2 + (x_2 - 1)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon$. Isso nos permite escrever completando quadrado da forma $(l + \beta)^2 - \beta^2 + \gamma$. Assim o nosso denominador toma a seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_Z^1 &= (l + (1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)^2 - ((1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)^2 \\ &\quad + (1 - x_1 - x_2)(p_1 + p_2)^2 + x_2p_1^2 + (x_2 - 1)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= (l + (1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)^2 + [(1 - x_1 - x_2) + x_2 - (1 - x_1)^2]p_1^2 \\ &\quad + 2[(1 - x_1 - x_2) - (1 - x_1)(1 - x_1 - x_2)]p_1p_2 \\ &\quad + [(1 - x_1 - x_2) - (1 - x_1 - x_2)^2]p_2^2 + (x_2 - 1)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= (l + (1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)^2 + x_1(1 - x_1)p_1^2 + 2x_1(1 - x_1 - x_2)p_1p_2 \\ &\quad + (x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2)p_2^2 + (x_2 - 1)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

O que precisaremos fazer é utilizar das seguintes relações: $p_1^2 = m_\mu^2$, $p_2^2 = m_\mu^2$ e $p_1 \cdot p_2 = -m_\mu^2$. Também usando uma mudança de variável do tipo $k \rightarrow (l + (1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)$. Isso nos permite manipular mais um pouco nosso denominador e deixar ele da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_Z^1 &= (l + (1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)^2 + x_1(1 - x_1)m_\mu^2 - 2x_1(1 - x_1 - x_2)m_\mu^2 \\ &\quad + (x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2)m_\mu^2 + (x_2 - 1)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= k^2 + [x_1(1 - x_1) - 2x_1(1 - x_1 - x_2) + (x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2) \\ &\quad + (x_2 - 1)]m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= k^2 + (x_2(2 - x_2) - 1)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Se escrevermos $\Delta^2 = -(x_2(2 - x_2) - 1)m_\mu^2 + x_2M_Z^2$, então nosso denominador final fica:

$$D_Z^1 = k^2 - \Delta^2 + i\varepsilon. \quad (\text{A.8})$$

A.1.2 Segundo Denominador

De forma similar, vamos agora para o segundo denominador D_Z^2 na Eq.(A.1). Precisamos escrever ele da forma:

$$D_Z^2 = D + (A - D)x_1 + (B - D)x_2 + (C - D)x_3. \quad (\text{A.9})$$

Em que:

$$\begin{aligned} A &= l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon, \\ B &= (l + p_1)^2 - M_Z^2 + i\varepsilon, \\ C &= (l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon, \\ D &= (l + p_1)^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

Então temos o denominador escrito como:

$$\begin{aligned} D_Z^2 &= (l + p_1)^2 + i\varepsilon + x_1(l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon - (l + p_1)^2 - i\varepsilon) \\ &\quad + x_2((l + p_1)^2 - M_Z^2 + i\varepsilon - (l + p_1)^2 - i\varepsilon) \\ &\quad + x_3((l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon - (l + p_1)^2 - i\varepsilon) \\ &= l^2 + 2lp_1 + p_1^2 + i\varepsilon - x_1(2lp_1 + p_1^2 + m_\mu^2) - x_2M_Z^2 \\ &\quad + x_3(2lp_2 + 2p_1p_2 + p_2^2 - m_\mu^2) \\ &= l^2 + 2l((1 - x_1)p_1 + x_3p_2) + (1 - x_1)p_1^2 + x_3p_2^2 \\ &\quad + 2x_3p_1p_2 - (x_1 + x_3)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.11})$$

Dessa vez ao completar quadrado termos $\beta = ((1 - x_1)p_1 + x_3p_2)$. Então escrevemos da forma $(l + \beta)^2 - \beta^2 + \gamma$. Assim o nosso denominador fica:

$$\begin{aligned} D_Z^2 &= (l + (1 - x_1)p_1 + x_3p_2)^2 - ((1 - x_1)p_1 + x_3p_2)^2 + (1 - x_1)p_1^2 \\ &\quad + x_3p_2^2 + 2x_3p_1p_2 - (x_1 + x_3)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= (l + (1 - x_1)p_1 + x_3p_2)^2 - (1 - x_1)^2p_1^2 - 2x_3(1 - x_1)p_1p_2 - x_3^2p_2^2 \\ &\quad + (1 - x_1)p_1^2 + x_3p_2^2 + 2x_3p_1p_2 - (x_1 + x_3)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Agora o que precisaremos fazer é utilizar as relações envolvendo p_1 e p_2 já utilizadas anteriormente e também uma mudança de variável do tipo $k \rightarrow (l + (1 - x_1)p_1 + x_3p_2)$. Podemos manipular mais um pouco nosso denominador e deixar ele da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_Z^2 &= (l + (1 - x_1)p_1 + x_3p_2)^2 - (1 - x_1)^2m_\mu^2 + 2x_3(1 - x_1)m_\mu^2 - x_3^2m_\mu^2 \\ &\quad + (1 - x_1)m_\mu^2 + x_3m_\mu^2 - 2x_3m_\mu^2 - (x_1 + x_3)m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= k^2 + (-x^2 - y^2 - 2xy)m_\mu^2 - zM_Z^2 + (1 - w)i\varepsilon \\ &= k^2 + (2x_3(1 - x_1) - (1 - x_1)^2 - x_3^2 + (1 - x_1) + x_3 \\ &\quad - 2x_3 - (x_1 + x_3))m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= k^2 - (x_1 + x_3)^2m_\mu^2 - x_2M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Se escrevermos $\Delta^2 = (x_1 + x_3)^2m_\mu^2 + x_2M_Z^2$, então nosso denominador final fica:

$$D_Z^2 = k^2 - \Delta^2 + i\varepsilon. \quad (\text{A.14})$$

A.1.3 Terceiro Denominador

Fazendo o uso do procedimento feito anteriormente passaremos para o terceiro denominador D_Z^3 na Eq.(A.1). Precisamos escrever ele da forma:

$$D_Z^3 = D + (A - D)x_1 + (B - D)x_2 + (C - D)x_3. \quad (\text{A.15})$$

Em que:

$$\begin{aligned} A &= l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon, \\ B &= (l + p_1)^2 - \xi M_Z^2 + i\varepsilon, \\ C &= (l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon, \\ D &= (l + p_1)^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Então temos o denominador escrito como:

$$\begin{aligned} D_Z^3 &= (l + p_1)^2 + i\varepsilon + x_1(l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon - (l + p_1)^2 - i\varepsilon) \\ &\quad + x_2((l + p_1)^2 - \xi M_Z^2 + i\varepsilon - (l + p_1)^2 - i\varepsilon) \\ &\quad + x_3((l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon - (l + p_1)^2 - i\varepsilon) \\ &= l^2 + 2lp_1 + p_1^2 + i\varepsilon - x_1(2lp_1 + p_1^2 + m_\mu^2) - x_2\xi M_Z^2 \\ &\quad + x_3(2lp_2 + 2p_1p_2 + p_2^2 - m_\mu^2) \\ &= l^2 + 2l((1 - x_1)p_1 + x_3p_2) + (1 - x_1)p_1^2 + x_3p_2^2 + 2x_3p_1p_2 \\ &\quad - (x_1 + x_3)m_\mu^2 - x_2\xi M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Teremos $\beta = ((1 - x_1)p_1 + x_3p_2)$ para escrever completando quadrado da forma $(l + \beta)^2 - \beta^2 + \gamma$. Assim o nosso denominador fica:

$$\begin{aligned} D_Z^3 &= (l + (1 - x_1)p_1 + x_3p_2)^2 - ((1 - x_1)p_1 + x_3p_2)^2 + (1 - x_1)p_1^2 \\ &\quad + x_3p_2^2 + 2x_3p_1p_2 - (x_1 + x_3)m_\mu^2 - x_2\xi M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= (l + (1 - x_1)p_1 + x_3p_2)^2 - (1 - x_1)^2p_1^2 - 2x_3(1 - x_1)p_1p_2 - x_3^2p_2^2 \\ &\quad + (1 - x_1)p_1^2 + x_3p_2^2 + 2x_3p_1p_2 - (x_1 + x_3)m_\mu^2 - x_2\xi M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.18})$$

Agora o que precisaremos fazer é utilizar as relações envolvendo p_1 e p_2 já utilizadas anteriormente. Juntamente com $k \rightarrow (l + (1 - x_1)p_1 + x_3p_2)$. Isso nos permite manipular mais um pouco nosso denominador e deixar ele da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_Z^3 &= (l + (1 - x_1)p_1 + x_3p_2)^2 - (1 - x_1)^2m_\mu^2 + 2x_3(1 - x_1)m_\mu^2 - x_3^2m_\mu^2 \\ &\quad + (1 - x_1)m_\mu^2 + x_3m_\mu^2 - 2x_3m_\mu^2 - (x_1 + x_3)m_\mu^2 - x_2\xi M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= k^2 + (2x_3(1 - x_1) - (1 - x_1)^2 - x_3^2 + (1 - x_1) + x_3 \\ &\quad - 2x_3 - (x_1 + x_3))m_\mu^2 - x_2\xi M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= k^2 - (x_1 + x_3)^2m_\mu^2 - x_2\xi M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

Se escrevermos $\Delta^2 = (x_1 + x_3)^2m_\mu^2 + x_2\xi M_Z^2$, então nosso denominador final fica:

$$D_Z^3 = k^2 - \Delta^2 + i\varepsilon. \quad (\text{A.20})$$

A.1.4 Quarto Denominador

Vamos agora para o quarto e último denominador D_G na Eq.(A.1). Mais uma vez precisaremos seguir o procedimento anterior. Começando escrevendo ele da forma:

$$D_G = C + x_1(A - C) + x_2(B - C). \quad (\text{A.21})$$

Em que:

$$\begin{aligned} A &= l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon, \\ B &= (l + p_1)^2 - \xi M_Z^2 + i\varepsilon, \\ C &= (l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

Então temos o denominador escrito como:

$$\begin{aligned} D_G &= (l + p_1 + p_2)^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon + (l^2 - m_\mu^2 + i\varepsilon - (l + p_1 + p_2)^2 + m_\mu^2 - i\varepsilon)x_1 \\ &\quad + ((l + p_1)^2 - \xi M_Z^2 + i\varepsilon - (l + p_1 + p_2)^2 + m_\mu^2 - i\varepsilon)x_2 \\ &= l^2 + 2l((1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2) + (1 - x_1 - x_2)(p_1 + p_2)^2 \\ &\quad + x_2p_1^2 + (x_2 - 1)m_\mu^2 - \xi x_2 M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.23})$$

Usando $\beta = ((1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)$ podemos completar quadrado da forma $(l + \beta)^2 - \beta^2 + \gamma$, ele ficará:

$$\begin{aligned} D_G &= (l + (1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)^2 - ((1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)^2 \\ &\quad + (1 - x_1 - x_2)(p_1 + p_2)^2 + x_2p_1^2 + (x_2 - 1)m_\mu^2 - \xi x_2 M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= (l + (1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)^2 + [(1 - x_1 - x_2) + x_2 - (1 - x_1)^2]p_1^2 \\ &\quad + 2[(1 - x_1 - x_2) - (1 - x_1)(1 - x_1 - x_2)]p_1p_2 \\ &\quad + [(1 - x_1 - x_2) - (1 - x_1 - x_2)^2]p_2^2 + (x_2 - 1)m_\mu^2 - \xi x_2 M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= (l + (1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)^2 + x_1(1 - x_1)p_1^2 + 2x_1(1 - x_1 - x_2)p_1p_2 \\ &\quad + (x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2)p_2^2 + (x_2 - 1)m_\mu^2 - \xi x_2 M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

Utilizando novamente as relações envolvendo p_1 e p_2 já utilizadas anteriormente. Com $k \rightarrow (l + (1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)$. Deixamos ele da seguinte forma:

$$\begin{aligned} D_G &= (l + (1 - x_1)p_1 + (1 - x_1 - x_2)p_2)^2 + x_1(1 - x_1)m_\mu^2 \\ &\quad - 2x_1(1 - x_1 - x_2)m_\mu^2 + (x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2)m_\mu^2 \\ &\quad + (x_2 - 1)m_\mu^2 - \xi x_2 M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= k^2 + [x_1(1 - x_1) - 2x_1(1 - x_1 - x_2) + (x_1 + x_2)(1 - x_1 - x_2) \\ &\quad + (x_2 - 1)]m_\mu^2 - \xi x_2 M_Z^2 + i\varepsilon \\ &= k^2 + (x_2(2 - x_2) - 1)m_\mu^2 - \xi x_2 M_Z^2 + i\varepsilon. \end{aligned} \quad (\text{A.25})$$

Se escrevermos $\Delta^2 = -(x_2(2 - x_2) - 1)m_\mu^2 + \xi x_2 M_Z^2$, então nosso denominador final fica:

$$D_G = k^2 - \Delta^2 + i\varepsilon. \quad (\text{A.26})$$

A.2 Numerador

Agora estudaremos os numeradores de maneira semelhante com a que fizemos para os denominadores. Teremos três numeradores dados pela amplitude da Eq.(5.61) (N_Z^1 , N_Z^2 e N_Z^3) e um da amplitude dada pela Eq.(5.62) (N_G). Os numeradores inicialmente são:

$$\begin{aligned}
N_Z^1 &= \bar{u}(p_2)[(V\gamma^\sigma - A\gamma^\sigma\gamma^5)(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu) \\
&\quad \times (V\gamma^\rho - A\gamma^\rho\gamma^5)g_{\rho\sigma}]u(p_1), \\
N_Z^2 &= -\bar{u}(p_2)[(V\gamma^\sigma - A\gamma^\sigma\gamma^5)(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)(V\gamma^\rho - A\gamma^\rho\gamma^5), \\
&\quad \times (l_\rho + p_{1\rho})(l_\sigma + p_{1\sigma})]u(p_1) \tag{A.27} \\
N_Z^3 &= \bar{u}(p_2)[(V\gamma^\sigma - A\gamma^\sigma\gamma^5)(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)(V\gamma^\rho - A\gamma^\rho\gamma^5), \\
&\quad \times \xi(l_\rho + p_{1\rho})(l_\sigma + p_{1\sigma})]u(p_1) \\
N_G &= \bar{u}(p_2)[\gamma^5(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)\gamma^5]u(p_1).
\end{aligned}$$

Lembrando que A e V são os acoplamentos vetorial e axial da interação e serão substituídos ao final dos cálculos.

A.2.1 Primeiro Numerador

Vamos trabalhar com um numerador de cada vez, começando pelo primeiro N_Z^1 em (A.27).

$$\begin{aligned}
N_Z^1 &= \bar{u}(p_2)[(V\gamma^\sigma - A\gamma^\sigma\gamma^5)(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu) \\
&\quad \times (V\gamma^\rho - A\gamma^\rho\gamma^5)g_{\rho\sigma}]u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)[(V\gamma^\sigma - A\gamma^\sigma\gamma^5)(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu) \\
&\quad \times (V\gamma_\sigma - A\gamma_\sigma\gamma^5)]u(p_1) \\
&= \bar{u}(p_2)[V\gamma^\sigma(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)V\gamma_\sigma]u(p_1) \\
&\quad - \bar{u}(p_2)[V\gamma^\sigma(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)A\gamma_\sigma\gamma^5]u(p_1) \tag{A.28} \\
&\quad - \bar{u}(p_2)[A\gamma^\sigma\gamma^5(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)V\gamma_\sigma]u(p_1) \\
&\quad + \bar{u}(p_2)[A\gamma^\sigma\gamma^5(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)A\gamma_\sigma\gamma^5]u(p_1) \\
&= V^2\bar{u}(p_2)[\gamma^\sigma(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)\gamma_\rho]u(p_1) \\
&\quad - VA\bar{u}(p_2)[\gamma^\sigma(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)\gamma_\sigma\gamma^5]u(p_1) \\
&\quad - AV\bar{u}(p_2)[\gamma^\sigma\gamma^5(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)\gamma_\sigma]u(p_1) \\
&\quad + A^2\bar{u}(p_2)[\gamma^\sigma\gamma^5(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)\gamma_\sigma\gamma^5]u(p_1).
\end{aligned}$$

Podemos agora fazer o uso de algumas relações como: $\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma_\nu = -2\gamma^\mu$, $\gamma^\nu\gamma^\mu\gamma^\rho\gamma_\nu = 4g^{\mu\rho}$, $\gamma^\mu\gamma^\nu = -\gamma^\nu\gamma^\mu$, $\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$ e $\gamma^5\gamma^5 = 1$. E por último vamos escrever o termo envolvendo γ^5 como $\mathcal{O}(\gamma^5)$ pois ele não será importante para o nosso cálculo.

$$N_Z^1 = -2V^2\bar{u}(p_2)[(\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu(2l^\mu + p_1^\mu + p_2^\mu)]u(p_1)$$

$$\begin{aligned}
& + 2VA\bar{u}(p_2)[(l + p_1 + p_2)\gamma^\mu l + m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu(2l^\mu + p_1^\mu + p_2^\mu)]\gamma^5 u(p_1) \\
& - 2VA\bar{u}(p_2)[(l + p_1 + p_2)\gamma^\mu l + m_\mu^2\gamma^\mu - 2m_\mu(2l^\mu + p_1^\mu + p_2^\mu)]\gamma^5 u(p_1) \quad (\text{A.29}) \\
& - 2A^2\bar{u}(p_2)[(l + p_1 + p_2)\gamma^\mu l + m_\mu^2\gamma^\mu - 2m_\mu(2l^\mu + p_1^\mu + p_2^\mu)]\gamma^5\gamma^5 u(p_1) \\
& = -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p_2)[(l + p_1 + p_2)\gamma^\mu l + m_\mu^2\gamma^\mu]u(p_1) \\
& - 2(V^2 - A^2)\bar{u}(p_2)[2m_\mu(2l^\mu + p_1^\mu + p_2^\mu)]u(p_1) + \mathcal{O}(\gamma^5).
\end{aligned}$$

E também faremos a seguinte mudança de variável: $p_1' \rightarrow p$, $p_1 \rightarrow p$, $p_2' \rightarrow -p'$ e $p_2 \rightarrow -p'$. Vamos isolar os termos envolvendo k , $\mathcal{O}(k)$ (usando $l \rightarrow k - (1 - x_1)p + (1 - x_1 - x_2)p'$) em uma expressão só, fazemos isso utilizando as relações: $\gamma^\mu \not{k} = 2k^\mu - \not{k}\gamma^\mu$ e $k^\mu k^\nu = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}k^2$, e ainda tendo em mente as relações envolvendo as matrizes γ . Isso nos deixa com

$$\begin{aligned}
N_Z^1 & = -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')[\not{k}k^\mu - \not{k}\not{k}\gamma^\mu + \mathcal{O}(k) + m_\mu^2\gamma^\mu + (-(1 - x_1)\not{p} \\
& + (1 - x_1 - x_2)\not{p}' + \not{p} - \not{p}')\gamma^\mu(-(1 - x_1)\not{p} + (1 - x_1 - x_2)\not{p}')]u(p) \\
& - 2(V^2 - A^2)\bar{u}(p')[2m_\mu(-2(1 - x_1)p + 2(1 - x_1 - x_2)p' + p^\mu - p'^\mu)]u(p_1) + \mathcal{O}(\gamma^5) \\
& = \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k) - 2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')[2k^\mu k^\nu \gamma_\nu - \gamma^\mu k^2 + ((x_1 - 1)\not{p} \\
& + (1 - x_1 - x_2)\not{p}')\gamma^\mu(x_1\not{p} - (x_1 + x_2)\not{p}')]u(p) \\
& - 2V^2\bar{u}(p')[m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu((2x_1 - 1)p^\mu + (1 - 2x_1 - 2x_2)p'^\mu)]u(p) \\
& - 2A^2\bar{u}(p')[m_\mu^2\gamma^\mu - 2m_\mu((2x_1 - 1)p^\mu + (1 - 2x_1 - 2x_2)p'^\mu)]u(p) \quad (\text{A.30}) \\
& = -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')[\frac{2}{4}g^{\mu\nu}\gamma_\nu k^2 - \gamma^\mu k^2 + x_1(x_1 - 1)\not{p}\gamma^\mu\not{p} - (x_1 - 1)(x_1 + x_2)\not{p}\gamma^\mu\not{p}' \\
& + x_1(1 - x_1 - x_2)\not{p}'\gamma^\mu\not{p} - (1 - x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\not{p}'\gamma^\mu\not{p}']u(p) \\
& - 2V^2\bar{u}(p')[m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu((2x_1 - 1)p^\mu + (1 - 2x_1 - 2x_2)p'^\mu)]u(p) \\
& - 2A^2\bar{u}(p')[m_\mu^2\gamma^\mu - 2m_\mu((2x_1 - 1)p^\mu + (1 - 2x_1 - 2x_2)p'^\mu)]u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k).
\end{aligned}$$

Aqui foi usado o fato que $\not{p}\not{p} = a^2$. Em seguida, usaremos as relações $\not{p}u(p) = m_\mu u(p)$ e $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m_\mu$, que $\gamma^\mu\not{p}' = 2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu$ ou $\not{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu\not{p}$ e também que $\not{p}\not{p}' = 2m_\mu^2 - \not{p}'\not{p}$, escrevemos:

$$\begin{aligned}
N_Z^1 & = -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + 2x_1(x_1 - 1)p^\mu\not{p} - x_1(x_1 - 1)\gamma^\mu\not{p}\not{p} \\
& - 2(x_1 - 1)(x_1 + x_2)\not{p}\not{p}' + (x_1 - 1)(x_1 + x_2)\not{p}\not{p}'\gamma^\mu + x_1(1 - x_1 - x_2)m_\mu^2\gamma^\mu \\
& - 2(1 - x_1 - x_2)(x_1 + x_2)p'^\mu\not{p}' + (1 - x_1 - x_2)(x_1 + x_2)\gamma^\mu\not{p}'\not{p}']u(p) \\
& - 2V^2\bar{u}(p')[m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu((2x_1 - 1)p^\mu + (1 - 2x_1 - 2x_2)p'^\mu)]u(p) \\
& - 2A^2\bar{u}(p')[m_\mu^2\gamma^\mu - 2m_\mu((2x_1 - 1)p^\mu + (1 - 2x_1 - 2x_2)p'^\mu)]u(p) \\
& + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k) \\
& = -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + 2m_\mu x_1(x_1 - 1)p^\mu - x_1(x_1 - 1)m_\mu^2\gamma^\mu \\
& - 2m_\mu(x_1 - 1)(x_1 + x_2)p'^\mu + (x_1 - 1)(x_1 + x_2)\not{p}\not{p}'\gamma^\mu \\
& + x_1(1 - x_1 - x_2)m_\mu^2\gamma^\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & -2m_\mu(1-x_1-x_2)(x_1+x_2)p'^\mu + (1-x_1-x_2)(x_1+x_2)m_\mu^2\gamma^\mu]u(p) \\
 & -2V^2\bar{u}(p')[m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu((2x_1-1)p^\mu + (1-2x_1-2x_2)p'^\mu)]u(p) \\
 & -2A^2\bar{u}(p')[m_\mu^2\gamma^\mu - 2m_\mu((2x_1-1)p^\mu + (1-2x_1-2x_2)p'^\mu)]u(p) \\
 & + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k) \\
 = & -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (1-x_1(x_1-1) + x_1(1-x_1-x_2) \\
 & + (1-x_1-x_2)(x_1+x_2))m_\mu^2\gamma^\mu \\
 & + 2(x_1-1)(x_1+x_2)m_\mu^2\gamma^\mu - (x_1-1)(x_1+x_2)\not{p}'\not{p}\gamma^\mu]u(p) \\
 & -2\bar{u}(p')[2m_\mu(V^2(2x_1-1+x_1(x_1-1))p^\mu - A^2(2x_1-1 \\
 & -x_1(x_1-1))p^\mu)]u(p) \\
 & -2\bar{u}(p')[2m_\mu(V^2(1-2x_1-2x_2-(x_1-1) \\
 & - (1-x_1-x_2)(x_1+x_2))p'^\mu) \\
 & - A^2(1-2x_1-2x_2+(x_1-1)(x_1+x_2) + (1-x_1-x_2)(x_1+x_2))p'^\mu)]u(p) \quad (\text{A.31}) \\
 & + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k) \\
 = & -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 - 2(x_1-1)(x_1+x_2)\not{p}'p^\mu \\
 & + (x_1-1)(x_1+x_2)\not{p}'\gamma^\mu\not{p} \\
 & + (1-3x_1^2+3x_1-3x_1x_2+x_2-x_2^2+2(x_1-1)(x_1+x_2))m_\mu^2\gamma^\mu]u(p) \\
 & -2\bar{u}(p')[2m_\mu(V^2(x_1^2+x_1-1)p^\mu - A^2(3x_1-x_1^2-1)p^\mu)]u(p) \\
 & -2\bar{u}(p')[2m_\mu(V^2(1-2x_1-2x_2+x_2^2+x_1x_2)p'^\mu \\
 & - A^2(1-2x_1-x_2^2-2x_2-x_1x_2)p'^\mu)]u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k) \\
 = & -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (1-x_1^2+x_1-x_1x_2-x_2-x_2^2 \\
 & + (x_1-1)(x_1+x_2))m_\mu^2\gamma^\mu]u(p) - 2\bar{u}(p')[2m_\mu(V^2(x_1^2+x_1-1 \\
 & - (x_1-1)(x_1+x_2))p^\mu \\
 & - A^2(3x_1-x_1^2-1+(x_1-1)(x_1+x_2))p^\mu)]u(p) \\
 & -2\bar{u}(p')[2m_\mu(V^2(1-2x_1-2x_2+x_2^2+x_1x_2)p'^\mu \\
 & - A^2(1-2x_1-x_2^2-2x_2-x_1x_2)p'^\mu)]u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k) \\
 = & -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (1-2x_2-x_2^2)m_\mu^2\gamma^\mu]u(p) \\
 & -2\bar{u}(p')[2m_\mu(V^2(2x_1+x_2-1-x_1x_2)p^\mu \\
 & - A^2(2x_1-1-x_2+x_1x_2)p^\mu)]u(p) \\
 & -2\bar{u}(p')[2m_\mu(V^2(1-2x_1-2x_2+x_2^2+x_1x_2)p'^\mu \\
 & - A^2(1-2x_1-x_2^2-2x_2-x_1x_2)p'^\mu)]u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k).
 \end{aligned}$$

Para deixarmos de uma forma melhor nós podemos fazer a seguinte mudança $p \rightarrow (p_+ - p_-)/2$ e $p' \rightarrow (p_+ + p_-)/2$, em que $p_+ = p' + p$ e $p_- = p' - p = q$:

$$\begin{aligned}
N_Z^1 &= -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (1 - 2x_2 - x_2^2)m_\mu^2\gamma^\mu\right]u(p) \\
&\quad - 2\bar{u}(p')\left[2m_\mu(V^2(2x_1 + x_2 - 1 - x_1x_2)\frac{(p_+ - p_-)^\mu}{2}\right. \\
&\quad \left. - A^2(2x_1 - 1 - x_2 + x_1x_2)\frac{(p_+ - p_-)^\mu}{2}\right)]u(p) \\
&\quad - 2\bar{u}(p')\left[2m_\mu(V^2(1 - 2x_1 - 2x_2 + x_2^2 + x_1x_2)\frac{(p_+ + p_-)^\mu}{2}\right. \\
&\quad \left. - A^2(1 - 2x_1 - x_2^2 - 2x_2 - x_1x_2)\frac{(p_+ + p_-)^\mu}{2}\right)]u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k) \\
&= -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (1 - 2x_2 - x_2^2)m_\mu^2\gamma^\mu\right]u(p) \\
&\quad - 2V^2\bar{u}(p')\left[2m_\mu\left(\frac{1}{2}(2x_1 + x_2 - 1 - x_1x_2 + 1 - 2x_1 - 2x_2 + x_2^2 + x_1x_2)p_+\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{2}(1 - 2x_1 - 2x_2 + x_2^2 + x_1x_2 - 2x_1 - x_2 + 1 + x_1x_2)p_-\right)\right]u(p) \quad (\text{A.32}) \\
&\quad + 2A^2\bar{u}(p')\left[2m_\mu\left(\frac{1}{2}(2x_1 - 1 - x_2 + x_1x_2 + 1 - 2x_1 - x_2^2 - 2x_2 - x_1x_2)p_+\right.\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{2}(1 - 2x_1 - x_2^2 - 2x_2 - x_1x_2 - 2x_1 + 1 + x_2 - x_1x_2)p_-\right)\right]u(p) \\
&\quad + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k) \\
&= -2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (1 - 2x_2 - x_2^2)m_\mu^2\gamma^\mu\right]u(p) \\
&\quad - 2V^2\bar{u}(p')\left[2m_\mu\left(\frac{1}{2}(x_2^2 - x_2)p_+ + \frac{1}{2}(2 - 4x_1 - 3x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2)p_-\right)\right]u(p) \\
&\quad + 2A^2\bar{u}(p')\left[2m_\mu\left[-\frac{1}{2}(3x_2 + x_2^2)p_+ + \frac{1}{2}(2 - 4x_1 - x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2)p_-\right)\right]u(p) \\
&\quad + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k).
\end{aligned}$$

Para finalizar vamos voltar com $q^\mu = p'^\mu - p^\mu = p_-$ e usar a identidade de Gordon $\bar{u}(p')(p^\mu + p'^\mu)u(p) = \bar{u}(p')p_+u(p) = 2m\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) - i\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}q^\nu u(p)$. Assim temos:

$$\begin{aligned}
N_Z^1 &= -2\bar{u}(p')\left[(V^2(1 - 4x_2 + x_2^2) + A^2(1 + 4x_2 + x_2^2))m_\mu^2\gamma^\mu\right]u(p) \\
&\quad + 2\bar{u}(p')\left[m_\mu(V^2i(x_2^2 - x_2)\sigma^{\mu\nu}q^\nu + iA^2(x_2^2 + 3x_2)\sigma^{\mu\nu}q^\nu)\right]u(p) \\
&\quad - 2\bar{u}(p')\left[2m_\mu(V^2\frac{1}{2}(2 - 4x_1 - 3x_2 + 2x_1x_2 + x_2^2)q^\mu\right. \\
&\quad \left. - A^2\frac{1}{2}(2 - 4x_1 - x_2 - 2x_1x_2 - x_2^2)q^\mu) - 2(V^2 + A^2)\bar{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2\right]u(p)\right. \\
&\quad \left. + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k)\right]. \quad (\text{A.33})
\end{aligned}$$

Então chegamos a expressão final igual a:

$$\begin{aligned}
N_Z^1 &= +2\bar{u}(p')\left[m_\mu(V^2i(x_2^2 - x_2)\sigma^{\mu\nu}q^\nu + iA^2(x_2^2 + 3x_2)\sigma^{\mu\nu}q^\nu)\right]u(p) \\
&\quad + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k) + \mathcal{O}(\gamma^\mu) + \mathcal{O}(q). \quad (\text{A.34})
\end{aligned}$$

O que vai nos importar a seguir é o termo envolvendo $q^\nu \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} u(p)$, então nosso numerador final é:

$$N_Z^1 = i2m_\mu(V^2(x_2^2 - x_2) + A^2(x_2^2 + 3x_2)) \quad (\text{A.35})$$

Deixaremos a substituição de A e V para quando formos juntar denominador e numerador e montar a integral.

A.2.2 Segundo Numerador

Vamos trabalhar com o segundo numerador agora de forma similar, N_Z^2 na Eq.(A.27):

$$\begin{aligned} N_Z^2 &= -\bar{u}(p_2)[(V\gamma^\sigma - A\gamma^\sigma\gamma^5)(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu)(V\gamma^\rho - A\gamma^\rho\gamma^5) \\ &\quad \times (l_\rho + p_{1\rho})(l_\sigma + p_{1\sigma})]u(p_1) \\ &= -\bar{u}(p_2)[(V + A\gamma^5)(\not{l} + \not{p}_1)(-\not{l} - \not{p}_1 - \not{p}_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-\not{l} + m_\mu) \\ &\quad \times (\not{l} + \not{p}_1)(V - A\gamma^5)]u(p_1) \\ &= -\bar{u}(p_2)[(V + A\gamma^5)(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \\ &\quad - m_\mu(\not{l}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{l} + \not{p}_1\gamma^\mu + \not{p}_2\gamma^\mu))(\not{l} + \not{p}_1)(V - A\gamma^5)]u(p_1) \\ &= -V^2\bar{u}(p_2)[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \\ &\quad - m_\mu(\not{l}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{l} + \not{p}_1\gamma^\mu + \not{p}_2\gamma^\mu))(\not{l} + \not{p}_1)]u(p_1) \\ &\quad + VA\bar{u}(p_2)[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \\ &\quad - m_\mu(\not{l}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{l} + \not{p}_1\gamma^\mu + \not{p}_2\gamma^\mu))(\not{l} + \not{p}_1)]\gamma^5u(p_1) \\ &\quad - VA\bar{u}(p_2)\gamma^5[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \\ &\quad - m_\mu(\not{l}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{l} + \not{p}_1\gamma^\mu + \not{p}_2\gamma^\mu))(\not{l} + \not{p}_1)]u(p_1) \\ &\quad + A^2\bar{u}(p_2)\gamma^5[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \\ &\quad - m_\mu(\not{l}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{l} + \not{p}_1\gamma^\mu + \not{p}_2\gamma^\mu))(\not{l} + \not{p}_1)]\gamma^5u(p_1) \\ &= -V^2\bar{u}(p_2)[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \\ &\quad - m_\mu(\not{l}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{l} + \not{p}_1\gamma^\mu + \not{p}_2\gamma^\mu))(\not{l} + \not{p}_1)]u(p_1) \\ &\quad + VA\bar{u}(p_2)[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \\ &\quad - m_\mu(\not{l}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{l} + \not{p}_1\gamma^\mu + \not{p}_2\gamma^\mu))(\not{l} + \not{p}_1)]\gamma^5u(p_1) \\ &\quad + VA\bar{u}(p_2)[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \\ &\quad + m_\mu(\not{l}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{l} + \not{p}_1\gamma^\mu + \not{p}_2\gamma^\mu))(\not{l} + \not{p}_1)]\gamma^5u(p_1) \\ &\quad - A^2\bar{u}(p_2)\gamma^5\gamma^5[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \\ &\quad + m_\mu(\not{l}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{l} + \not{p}_1\gamma^\mu + \not{p}_2\gamma^\mu))(\not{l} + \not{p}_1)]u(p_1) \\ &= -V^2\bar{u}(p_2)[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \\ &\quad - m_\mu(\not{l}\gamma^\mu + \gamma^\mu\not{l} + \not{p}_1\gamma^\mu + \not{p}_2\gamma^\mu))(\not{l} + \not{p}_1)]u(p_1) \\ &\quad + 2VA\bar{u}(p_2)[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu)(\not{l} + \not{p}_1)]\gamma^5u(p_1) \\ &\quad - A^2\bar{u}(p_2)[(\not{l} + \not{p}_1)((\not{l} + \not{p}_1 + \not{p}_2)\gamma^\mu\not{l} + m_\mu^2\gamma^\mu \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_\mu(l\gamma^\mu + \gamma^\mu l + p_1\gamma^\mu + p_2\gamma^\mu)(l + p_1)u(p_1) \\
= & - V^2\bar{u}(p')[(l + \not{p})(l + \not{p} - \not{p}')\gamma^\mu l + m_\mu^2\gamma^\mu - 2m_\mu l^\mu \\
& - m_\mu(\not{p}\gamma^\mu - \not{p}'\gamma^\mu)(l + \not{p})]u(p) \\
& - A^2\bar{u}(p')[(l + \not{p})(l + \not{p} - \not{p}')\gamma^\mu l + m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu l^\mu \\
& + m_\mu(\not{p}\gamma^\mu - \not{p}'\gamma^\mu)(l + \not{p})]u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5). \tag{A.36}
\end{aligned}$$

Aqui fizemos o uso das mesmas relações: $\gamma^\mu\gamma^5 = -\gamma^5\gamma^\mu$, $\gamma^5\gamma^5 = 1$ e $\gamma^\mu l = 2l^\mu - l\gamma^\mu$. Realizamos uma mudança de variável do tipo: $p_1 \rightarrow \not{p}$, $p_1 \rightarrow p$, $p_2 \rightarrow -\not{p}'$ e $p_2 \rightarrow -p'$ e ainda isolamos os fatores envolvendo um γ^5 sozinho no termo $\mathcal{O}(\gamma^5)$.

Realizando as multiplicações ficamos com:

$$\begin{aligned}
N_Z^2 = & - V^2\bar{u}(p')[(l + \not{p})(l\gamma^\mu l + \not{p}\gamma^\mu l - \not{p}'\gamma^\mu l + m_\mu^2\gamma^\mu - 2m_\mu l^\mu - m_\mu\not{p}\gamma^\mu \\
& + m_\mu\not{p}'\gamma^\mu)(l + \not{p})]u(p) \\
& - A^2\bar{u}(p')[(l + \not{p})(l\gamma^\mu l + \not{p}\gamma^\mu l - \not{p}'\gamma^\mu l + m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu l^\mu + m_\mu\not{p}\gamma^\mu \\
& - m_\mu\not{p}'\gamma^\mu)(l + \not{p})]u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) \\
= & - V^2\bar{u}(p')[l l\gamma^\mu l l + l\not{p}\gamma^\mu l l - l\not{p}'\gamma^\mu l l + m_\mu^2 l\gamma^\mu l - 2m_\mu l^\mu l l - m_\mu l\not{p}\gamma^\mu l \\
& + m_\mu l\not{p}'\gamma^\mu l + l l\gamma^\mu l\not{p} + l\not{p}\gamma^\mu l\not{p} - l\not{p}'\gamma^\mu l\not{p} + m_\mu^2 l\gamma^\mu\not{p} - 2m_\mu l^\mu l\not{p} \\
& - m_\mu l\not{p}\gamma^\mu\not{p} + m_\mu l\not{p}'\gamma^\mu\not{p} + \not{p} l\gamma^\mu l l + \not{p}\not{p}\gamma^\mu l l - \not{p}\not{p}'\gamma^\mu l l + m_\mu^2\not{p}\gamma^\mu l \\
& - 2m_\mu l^\mu\not{p} l - m_\mu\not{p}\not{p}\gamma^\mu l + m_\mu\not{p}\not{p}'\gamma^\mu l + \not{p} l\gamma^\mu l\not{p} \\
& + \not{p}\not{p}\gamma^\mu l\not{p} - \not{p}\not{p}'\gamma^\mu l\not{p} + m_\mu^2\not{p}\gamma^\mu\not{p} - 2m_\mu l^\mu\not{p}\not{p} - m_\mu\not{p}\not{p}\gamma^\mu\not{p} + m_\mu\not{p}\not{p}'\gamma^\mu\not{p}]u(p) \\
& - A^2\bar{u}(p')[l l\gamma^\mu l l + l\not{p}\gamma^\mu l l - l\not{p}'\gamma^\mu l l + m_\mu^2 l\gamma^\mu l + 2m_\mu l^\mu l l + m_\mu l\not{p}\gamma^\mu l \\
& - m_\mu l\not{p}'\gamma^\mu l + l l\gamma^\mu l\not{p} + l\not{p}\gamma^\mu l\not{p} - l\not{p}'\gamma^\mu l\not{p} + m_\mu^2 l\gamma^\mu\not{p} + 2m_\mu l^\mu l\not{p} + m_\mu l\not{p}\gamma^\mu\not{p} \\
& - m_\mu l\not{p}'\gamma^\mu\not{p} + \not{p} l\gamma^\mu l l + \not{p}\not{p}\gamma^\mu l l - \not{p}\not{p}'\gamma^\mu l l + m_\mu^2\not{p}\gamma^\mu l + 2m_\mu l^\mu\not{p} l + m_\mu\not{p}\not{p}\gamma^\mu l \\
& - m_\mu\not{p}\not{p}'\gamma^\mu l + \not{p} l\gamma^\mu l\not{p} + \not{p}\not{p}\gamma^\mu l\not{p} - \not{p}\not{p}'\gamma^\mu l\not{p} + m_\mu^2\not{p}\gamma^\mu\not{p} + 2m_\mu l^\mu\not{p}\not{p} \\
& + m_\mu\not{p}\not{p}\gamma^\mu\not{p} - m_\mu\not{p}\not{p}'\gamma^\mu\not{p}]u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5). \tag{A.37}
\end{aligned}$$

Agora vamos fazer o uso de algumas relações para poder simplificar nossa expressão. Primeiro o fato de que $\not{p}\not{p} = a^2$ e as relações do tipo: $\not{p}u(p) = m_\mu u(p)$, $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m_\mu$, $\gamma^\mu\not{p}' = 2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu$ ou $\not{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu\not{p}$, $\not{p}\not{p}' = 2m_\mu^2 - \not{p}'\not{p}$, $\gamma^\mu l = 2l^\mu - l\gamma^\mu$, $l\not{p}' = 2l.p' - \not{p}' l$ e $\not{p} l = 2l.p - l\not{p}$.

$$\begin{aligned}
N_Z^2 = & - V^2\bar{u}(p')[l^4\gamma^\mu + l\not{p}\gamma^\mu l^2 - l\not{p}'\gamma^\mu l^2 + m_\mu^2 l\gamma^\mu l - 2m_\mu l^\mu l^2 - m_\mu l\not{p}\gamma^\mu l \\
& + m_\mu l\not{p}'\gamma^\mu l + m_\mu l^2\gamma^\mu l + m_\mu l\not{p}\gamma^\mu l - m_\mu l\not{p}'\gamma^\mu l + m_\mu^3 l\gamma^\mu - 2m_\mu^2 l^\mu l \\
& - m_\mu^2 l\not{p}\gamma^\mu + m_\mu^2 l\not{p}'\gamma^\mu + \not{p} l\gamma^\mu l^2 + m_\mu^2\gamma^\mu l^2 - \not{p}\not{p}'\gamma^\mu l^2 + m_\mu^2\not{p}\gamma^\mu l - 2m_\mu l^\mu\not{p} l \\
& - m_\mu^3\gamma^\mu l + m_\mu\not{p}\not{p}'\gamma^\mu l + m_\mu\not{p} l\gamma^\mu l + m_\mu^3\gamma^\mu l - m_\mu\not{p}\not{p}'\gamma^\mu l + m_\mu^3\not{p}\gamma^\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2m_\mu^3 l^\mu - m_\mu^4 \gamma^\mu + m_\mu^2 \not{p} \not{p}' \gamma^\mu] u(p) \\
& - A^2 \bar{u}(p') [l^4 \gamma^\mu + \not{l} \not{p} \gamma^\mu l^2 - \not{l} \not{p}' \gamma^\mu l^2 + m_\mu^2 \not{l} \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu l^\mu l^2 + m_\mu \not{l} \not{p} \gamma^\mu \not{l} \\
& - m_\mu \not{l} \not{p}' \gamma^\mu \not{l} + m_\mu l^2 \gamma^\mu \not{l} + m_\mu \not{l} \not{p} \gamma^\mu \not{l} - m_\mu \not{l} \not{p}' \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^3 \not{l} \gamma^\mu + 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} \\
& + m_\mu^2 \not{l} \not{p} \gamma^\mu - m_\mu^2 \not{l} \not{p}' \gamma^\mu + \not{p} \not{l} \gamma^\mu l^2 + m_\mu^2 \gamma^\mu l^2 - \not{p} \not{p}' \gamma^\mu l^2 + m_\mu^2 \not{p} \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu l^\mu \not{p} \not{l} \\
& + m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} - m_\mu \not{p} \not{p}' \gamma^\mu \not{l} + m_\mu \not{p} \not{l} \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} - m_\mu \not{p} \not{p}' \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^3 \not{p} \gamma^\mu + 2m_\mu^3 l^\mu \\
& + m_\mu^4 \gamma^\mu - m_\mu^2 \not{p} \not{p}' \gamma^\mu] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) \\
= & - V^2 \bar{u}(p') [l^4 \gamma^\mu + 2l^2 p^\mu \not{l} - m_\mu l^2 \not{l} \gamma^\mu - 2l \cdot p' l^2 \gamma^\mu + m_\mu l^2 \not{l} \gamma^\mu + 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} \\
& - m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu - 2m_\mu l^\mu l^2 - 2m_\mu l^2 p^\mu + m_\mu \not{l} \gamma^\mu \not{p} \not{l} + 2m_\mu l \cdot p' \gamma^\mu \not{l} - m_\mu^2 \not{l} \gamma^\mu \not{l} \\
& + m_\mu l^2 \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu l^2 p^\mu - m_\mu \not{l} \gamma^\mu \not{p} \not{l} - 2m_\mu l \cdot p' \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^2 \not{l} \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^3 \not{l} \gamma^\mu \\
& - 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} - 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} + m_\mu^3 \not{l} \gamma^\mu + 2m_\mu^2 l \cdot p' \gamma^\mu - m_\mu^3 \not{l} \gamma^\mu \\
& + 2l^2 l \cdot p \gamma^\mu - \not{l} \not{p} \gamma^\mu l^2 + l^2 m_\mu^2 \gamma^\mu - 2m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu + m_\mu l^2 \not{p} \gamma^\mu + 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} - m_\mu^2 \gamma^\mu \not{p} \not{l} \\
& - 4m_\mu l^\mu l \cdot p + 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} - m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} - m_\mu^2 \not{p} \gamma^\mu \not{l} \\
& + 2m_\mu l^\mu \not{p} \not{l} - m_\mu l^2 \not{p} \gamma^\mu + m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} - 2m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^2 \not{p} \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu^3 p^\mu - m_\mu^4 \gamma^\mu \\
& - 2m_\mu^3 l^\mu - m_\mu^4 \gamma^\mu + 2m_\mu^4 \gamma^\mu - m_\mu^3 \not{p} \gamma^\mu] u(p) \\
& - A^2 \bar{u}(p') [l^4 \gamma^\mu + 2l^2 p^\mu \not{l} - m_\mu l^2 \not{l} \gamma^\mu - 2l \cdot p' l^2 \gamma^\mu + m_\mu l^2 \not{l} \gamma^\mu + 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} \\
& - m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu + 2m_\mu l^\mu l^2 + 2m_\mu l^2 p^\mu - m_\mu \not{l} \gamma^\mu \not{p} \not{l} - 2m_\mu l \cdot p' \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^2 \not{l} \gamma^\mu \not{l} \\
& + m_\mu l^2 \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu l^2 p^\mu - m_\mu \not{l} \gamma^\mu \not{p} \not{l} - 2m_\mu l \cdot p' \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^2 \not{l} \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^3 \not{l} \gamma^\mu \\
& + 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} + 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} - m_\mu^3 \not{l} \gamma^\mu - 2m_\mu^2 l \cdot p' \gamma^\mu + m_\mu^3 \not{l} \gamma^\mu \\
& + 2l^2 l \cdot p \gamma^\mu - \not{l} \not{p} \gamma^\mu l^2 + l^2 m_\mu^2 \gamma^\mu - 2m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu + m_\mu l^2 \not{p} \gamma^\mu + 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} - m_\mu^2 \gamma^\mu \not{p} \not{l} \\
& + 4m_\mu l^\mu l \cdot p - 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} + m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} - 2m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^2 \not{p} \gamma^\mu \not{l} \\
& + 2m_\mu l^\mu \not{p} \not{l} - m_\mu l^2 \not{p} \gamma^\mu + m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} - 2m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^2 \not{p} \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu^3 p^\mu - m_\mu^4 \gamma^\mu \\
& + 2m_\mu^3 l^\mu + m_\mu^4 \gamma^\mu - 2m_\mu^4 \gamma^\mu + m_\mu^3 \not{p} \gamma^\mu] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) \\
= & - V^2 \bar{u}(p') [l^4 \gamma^\mu + 2l^2 p^\mu \not{l} - 2l \cdot p' l^2 \gamma^\mu + 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} - m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu \\
& - 2m_\mu l^\mu l^2 - 2m_\mu l^2 p^\mu + 2m_\mu l \cdot p \not{l} \gamma^\mu + 2m_\mu l \cdot p' \gamma^\mu \not{l} - 2m_\mu^2 \not{l} \gamma^\mu \not{l} \\
& + m_\mu l^2 \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu l^2 p^\mu - 2m_\mu l \cdot p \not{l} \gamma^\mu - 2m_\mu l \cdot p' \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu^2 \not{l} \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^3 \not{l} \gamma^\mu \\
& - 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} - 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} + 2m_\mu^2 l \cdot p' \gamma^\mu \\
& + 2l^2 l \cdot p \gamma^\mu - 2l \cdot p^\mu l^2 + m_\mu \not{l} \gamma^\mu l^2 - 2m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu + 2m_\mu l^2 p^\mu + 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} - 2l \cdot p m_\mu^2 \gamma^\mu \\
& + m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} - 4m_\mu l^\mu l \cdot p + 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} - m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} - 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} + 2l \cdot p m_\mu^2 \gamma^\mu \\
& - m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + 4m_\mu l \cdot p l^\mu - 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} - 2m_\mu l^2 p^\mu + m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu + 2m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} \\
& - 2m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} - 2m_\mu^2 l \cdot p \gamma^\mu + 2m_\mu^3 p^\mu - m_\mu^4 \gamma^\mu \\
& - 2m_\mu^3 l^\mu - m_\mu^4 \gamma^\mu + 2m_\mu^4 \gamma^\mu - 2m_\mu^3 p^\mu + m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) \\
& - A^2 \bar{u}(p') [l^4 \gamma^\mu + 2l^2 p^\mu \not{l} - 2l \cdot p' l^2 \gamma^\mu + 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} - m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu \\
& + 2m_\mu l^\mu l^2 + 2m_\mu l^2 p^\mu - 2m_\mu l \cdot p \not{l} \gamma^\mu - 2m_\mu l \cdot p' \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu^2 \not{l} \gamma^\mu \not{l} \\
& + m_\mu l^2 \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu l^2 p^\mu - 2m_\mu l \cdot p \not{l} \gamma^\mu - 2m_\mu l \cdot p' \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu^2 \not{l} \gamma^\mu \not{l} + m_\mu^3 \not{l} \gamma^\mu
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} + 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} - 2m_\mu^2 l.p' \gamma^\mu \\
& + 2l^2 l.p \gamma^\mu - 2\not{l} p^\mu l^2 + m_\mu \not{l} \gamma^\mu l^2 - 2m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu + 2m_\mu l^2 p^\mu + 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} - 2l.p m_\mu^2 \gamma^\mu \\
& + m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + 4m_\mu l^\mu l.p - 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} + m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} - 2m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} - 2l.p m_\mu^2 \gamma^\mu \\
& + m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + 4m_\mu l.p l^\mu - 2m_\mu^2 l^\mu \not{l} - 2m_\mu l^2 p^\mu + m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu + 2m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} \\
& - 2m_\mu^3 \gamma^\mu \not{l} + 2m_\mu^2 p^\mu \not{l} - 2m_\mu^2 l.p \gamma^\mu + 2m_\mu^3 p^\mu - m_\mu^4 \gamma^\mu \\
& + 2m_\mu^3 l^\mu + m_\mu^4 \gamma^\mu - 2m_\mu^4 \gamma^\mu + 2m_\mu^3 p^\mu - m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) \\
= & - V^2 \bar{u}(p') [l^4 \gamma^\mu - 2l.p' l^2 \gamma^\mu + 2m_\mu^2 l.p' \gamma^\mu + 2l^2 l.p \gamma^\mu \\
& - 2m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu - 2m_\mu^2 l.p \gamma^\mu + m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) \\
& - A^2 \bar{u}(p') [l^4 \gamma^\mu - 2l.p' l^2 \gamma^\mu - 6m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu + 4m_\mu l^\mu l^2 + 4m_\mu l.p \gamma^\mu \not{l} - 4m_\mu l.p' \gamma^\mu \not{l} \\
& + 8m_\mu^2 \not{l} l^\mu + 8m_\mu^2 p^\mu \not{l} - 2m_\mu^2 l.p' \gamma^\mu + 2l^2 l.p \gamma^\mu - 6l.p m_\mu^2 \gamma^\mu + 4m_\mu^3 p^\mu + 4m_\mu^3 l^\mu \\
& + 4m_\mu l^2 p^\mu - 3m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) \\
= & - V^2 \bar{u}(p') [l^4 \gamma^\mu - 2(l.p' - l.p) l^2 \gamma^\mu + 2m_\mu^2 (l.p' - l.p) \gamma^\mu \\
& - 2m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu + m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) \\
& - A^2 \bar{u}(p') [l^4 \gamma^\mu - 2(l.p' - l.p) l^2 \gamma^\mu - 6m_\mu^2 l^2 \gamma^\mu + 4m_\mu (l.p - l.p') \gamma^\mu \not{l} \\
& + 4m_\mu l^\mu l^2 + 8m_\mu^2 \not{l} l^\mu + 8m_\mu^2 p^\mu \not{l} - 2m_\mu^2 l.p' \gamma^\mu - 6l.p m_\mu^2 \gamma^\mu \\
& + 4m_\mu^3 p^\mu + 4m_\mu^3 l^\mu + 4m_\mu l^2 p^\mu - 3m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5). \tag{A.38}
\end{aligned}$$

Para concluirmos o numerador é preciso fazer a seguinte transformação: $l^\mu \rightarrow k^\mu - (1 - x_1)p^\mu + x_3 p'^\mu$ ($\not{l} \rightarrow \not{k} - (1 - x_1)\not{p} + x_3 \not{p}'$). Isso nos dá as seguintes relações:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(p') [\not{l}] u(p) &= \bar{u}(p') [\not{k} - (1 - x_1)\not{p} + x_3 \not{p}'] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [\not{k} - (1 - x_1)m_\mu + x_3 m_\mu] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [\not{k} + (x_1 + x_3 - 1)m_\mu] u(p) \\
\bar{u}(p') [\gamma^\mu \not{l}] u(p) &= \bar{u}(p') [\gamma^\mu \not{k} - (1 - x_1)\gamma^\mu \not{p} + x_3 \gamma^\mu \not{p}'] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [\gamma^\mu \not{k} - (1 - x_1)m_\mu \gamma^\mu + 2x_3 p'^\mu - x_3 m_\mu \gamma^\mu] u(p) \\
&= \bar{u}(p') [\gamma^\mu \not{k} - (1 - x_1 + x_3)m_\mu \gamma^\mu + 2x_3 p'^\mu] u(p) \\
l^\mu \not{l} &= (k^\mu - (1 - x_1)p^\mu + x_3 p'^\mu) (\not{k} - (1 - x_1 - x_3)m_\mu) \\
&= \frac{1}{4} k^2 \gamma^\mu - (1 - x_1 - x_3)m_\mu k^\mu - (1 - x_1)p^\mu \not{k} \\
&\quad + x_3 p'^\mu \not{k} + (1 - x_1)(1 - x_1 - x_3)m_\mu p^\mu - x_3(1 - x_1 - x_3)m_\mu p'^\mu \\
l^2 &= (k^\mu - (1 - x_1)p^\mu + x_3 p'^\mu) (k_\mu - (1 - x_1)p_\mu + x_3 p'_\mu) \\
&= k^2 - (1 - x_1)k.p + x_3 k.p' - (1 - x_1)k.p + (1 - x_1)^2 p^2 \\
&\quad - x_3(1 - x_1)p.p' + x_3 k.p' - x_3(1 - x_1)p.p' + x_3^2 p'^2 \\
&= k^2 - 2(1 - x_1)k.p + 2x_3 k.p' + (x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 \\
l^\mu l^2 &= (k^\mu - (1 - x_1)p^\mu + x_3 p'^\mu) (k^2 - 2(1 - x_1)k.p + 2x_3 k.p' \\
&\quad + (x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= k^\mu k^2 - 2(1 - x_1)k^\mu k \cdot p + 2x_3 k^\mu k \cdot p' + (x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k^\mu \\
 &\quad - (1 - x_1)k^2 p^\mu + 2(1 - x_1)^2 k \cdot p p^\mu - 2x_3(1 - x_1)k \cdot p' p^\mu \\
 &\quad - (1 - x_1)(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 p^\mu \\
 &\quad + x_3 k^2 p'^\mu - 2x_3(1 - x_1)k \cdot p' p'^\mu + 2x_3^2 k \cdot p' p'^\mu + x_3(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 p'^\mu \\
 l^4 &= (k^2 - 2(1 - x_1)k \cdot p + 2x_3 k \cdot p' + (x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2)^2 \\
 &= k^4 - 2(1 - x_1)k^3 p + 2x_3 k^3 p' + (x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k^2 \\
 &\quad - 2(1 - x_1)k^3 p + 4(1 - x_1)^2 m_\mu^2 k^2 - 4x_3(1 - x_1)m_\mu^2 k^2 \\
 &\quad - 2(1 - x_1)(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k \cdot p \\
 &\quad + 2x_3 k^3 p' - 4x_3(1 - x_1)m_\mu^2 k^2 + 4x_3^2 k^2 m_\mu^2 + 2x_3(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k \cdot p' \\
 &\quad + (x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k^2 - 2(1 - x_1)(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k \cdot p \\
 &\quad + 2x_3(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k \cdot p' + (x_1 + x_3 - 1)^4 m_\mu^4 \\
 &= k^4 - 4(1 - x_1)k^3 p + 4x_3 k^3 p' + 6(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k^2 \\
 &\quad - 2(1 - x_1)(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k \cdot p + 2x_3(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k \cdot p' \\
 &\quad + (x_1 + x_3 - 1)^4 m_\mu^4 \\
 l \cdot p &= (k^\alpha - (1 - x_1)p^\alpha + x_3 p'^\alpha) \cdot p^\alpha = k \cdot p + (x_1 + x_3 - 1)m_\mu^2 \\
 l \cdot p' &= (k^\alpha - (1 - x_1)p^\alpha + x_3 p'^\alpha) \cdot p'^\alpha = k \cdot p' + (x_1 + x_3 - 1)m_\mu^2.
 \end{aligned}$$

Mas antes de aplicarmos essas relações no nosso numerador, podemos excluir os termos que envolvem k com um expoente ímpar. Isso por causa do formato de nossa integral. Então, nossas relações ficam da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 \bar{u}(p')[l]u(p) &= \bar{u}(p')[(x_1 + x_3 - 1)m_\mu]u(p) \\
 \bar{u}(p')[\gamma^\mu l]u(p) &= \bar{u}(p')[\gamma^\mu \not{k} - (1 - x_1 + x_3)m_\mu \gamma^\mu + x_3 p'^\mu]u(p) \\
 l^\mu l &= \frac{1}{4}k^2 \gamma^\mu + (1 - x_1)(1 - x_1 - x_3)m_\mu p^\mu - x_3(1 - x_1 - x_3)m_\mu p'^\mu \\
 l^2 &= k^2 + (x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 \\
 l^\mu l^2 &= -2(1 - x_1)k^\mu k \cdot p + 2x_3 k^\mu k \cdot p' - (1 - x_1)k^2 p^\mu \\
 &\quad - (1 - x_1)(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 p^\mu + x_3 k^2 p'^\mu + x_3(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 p'^\mu \\
 l^4 &= k^4 + 6(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k^2 + (x_1 + x_3 - 1)^4 m_\mu^4 \tag{A.39} \\
 l \cdot p &= (x_1 + x_3 - 1)m_\mu^2 \\
 l \cdot p' &= (x_1 + x_3 - 1)m_\mu^2 \\
 (k \cdot p)(k \cdot p) &= (k \cdot p')(k \cdot p') = (k \cdot p)(k \cdot p') = \frac{1}{4}k^2 m_\mu^2 \\
 (k \cdot p)\not{k} &= \frac{1}{4}k^2 \not{p} \\
 (k \cdot p')\not{k} &= \frac{1}{4}k^2 \not{p}' \\
 k^\mu k \cdot p &= \frac{1}{4}k^2 p^\mu
 \end{aligned}$$

$$k^\mu k \cdot p' = \frac{1}{4} k^2 p'^\mu.$$

Podemos fazer as substituições dessas relações no nosso numerador:

$$\begin{aligned}
N_Z^2 &= -V^2 \bar{u}(p') [(k^4 + 6(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k^2 + (x_1 + x_3 - 1)^4 m_\mu^4) \gamma^\mu \\
&\quad + 2(2(1 - x_1 + x_3)(k \cdot p)(k \cdot p') - 2x_3(k \cdot p')(k \cdot p') - 2(1 - x_1)(k \cdot p)(k \cdot p)) \gamma^\mu \\
&\quad - 2m_\mu^2 (k^2 + (x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2) \gamma^\mu + m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) \\
&\quad - A^2 \bar{u}(p') [(k^4 + 6(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k^2 + (x_1 + x_3 - 1)^4 m_\mu^4) \gamma^\mu \\
&\quad + 2(2(1 - x_1 + x_3)(k \cdot p)(k \cdot p') - 2x_3(k \cdot p')(k \cdot p') - 2(1 - x_1)(k \cdot p)(k \cdot p)) \gamma^\mu \\
&\quad - 6m_\mu^2 (k^2 + (x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2) \gamma^\mu + 4m_\mu (-\frac{3}{2}(1 - x_1)k^2 p^\mu + \frac{3}{2}x_3 k^2 p'^\mu \\
&\quad - (1 - x_1)(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 p^\mu + x_3(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 p'^\mu) \\
&\quad + 4m_\mu (k \cdot p - k \cdot p') (\gamma^\mu \not{k}) + 8m_\mu^2 (\frac{1}{4} k^2 \gamma^\mu + (1 - x_1)(1 - x_1 - x_3) m_\mu p^\mu \\
&\quad - x_3(1 - x_1 - x_3) m_\mu p'^\mu) + 8m_\mu^2 p^\mu ((x_1 + x_3 - 1) m_\mu) - 8m_\mu^4 (x_1 + x_3 - 1) \gamma^\mu \\
&\quad + 4m_\mu^3 p^\mu - 4m_\mu^3 ((1 - x_1) p^\mu - x_3 p'^\mu) + 4m_\mu (k^2 + (x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2) p^\mu \\
&\quad - 3m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) \\
&= -V^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + 6(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu + (x_1 + x_3 - 1)^4 m_\mu^4 \gamma^\mu \\
&\quad - 2m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu - 2(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^4 \gamma^\mu + m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) \\
&\quad - A^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + 6(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu + (x_1 + x_3 - 1)^4 m_\mu^4 \gamma^\mu \\
&\quad - 6m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu - 6(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^4 \gamma^\mu - 6m_\mu (1 - x_1) k^2 p^\mu + 6m_\mu x_3 k^2 p'^\mu \\
&\quad - 4(1 - x_1)(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^3 p^\mu + 4x_3(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^3 p'^\mu \\
&\quad + 2m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu - 2m_\mu k^2 p'^\mu + 2m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu + 8m_\mu^3 (1 - x_1)(1 - x_1 - x_3) p^\mu \\
&\quad - 8m_\mu^3 x_3 (1 - x_1 - x_3) p'^\mu + 8m_\mu^3 p^\mu (x_1 + x_3 - 1) - 8m_\mu^4 (x_1 + x_3 - 1) \gamma^\mu \\
&\quad + 4m_\mu^3 p^\mu - 4m_\mu^3 (1 - x_1) p^\mu + 4m_\mu^3 x_3 p'^\mu + 4m_\mu k^2 p^\mu + 4(x_1 + x_3 - 1)^2 m_\mu^3 p^\mu \\
&\quad - 3m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) \\
&= -V^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 2) m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu + ((x_1 + x_3 - 1)^4 \\
&\quad - 2(x_1 + x_3 - 1)^2 + 1) m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) \\
&\quad - A^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 2) m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu + ((x_1 + x_3 - 1)^4 \\
&\quad - 6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 8(x_1 + x_3 - 1) - 3) m_\mu^4 \gamma^\mu + (4 - 6(1 - x_1)) m_\mu k^2 p^\mu \\
&\quad + (4(x_1 + x_3 - 1)^2 + 8(x_1 + x_3 - 1) - 8(1 - x_1)(x_1 + x_3 - 1) - 4(1 - x_1) \\
&\quad - 4(1 - x_1)(x_1 + x_3 - 1)^2 + 4) m_\mu^3 p^\mu + (+6x_3 - 2) m_\mu k^2 p'^\mu + m_\mu^3 p'^\mu (4x_3 \\
&\quad + 8x_3(x_1 + x_3 - 1) + 4x_3(x_1 + x_3 - 1)^2)] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k, k^3) \\
&= -V^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 2) m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu + ((x_1 + x_3 - 1)^4 \\
&\quad - 2(x_1 + x_3 - 1)^2 + 1) m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) \\
&\quad - A^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 2) m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu + ((x_1 + x_3 - 1)^4
\end{aligned} \tag{A.40}$$

$$\begin{aligned}
 & -6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 8(x_1 + x_3 - 1) - 3)m_\mu^4 \gamma^\mu + (-2 + 6x_1))m_\mu k^2 p^\mu \\
 & + 4x_1(x_1 + x_3)^2 m_\mu^3 p^\mu + (6x_3 - 2)m_\mu k^2 p'^\mu + 4x_3(x_1 + x_3)^2 m_\mu^3 p'^\mu]u(p) \\
 & + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k, k^3).
 \end{aligned}$$

Em seguida, nós podemos fazer a seguinte mudança $p \rightarrow (p_+ - p_-)/2$ e $p' \rightarrow (p_+ + p_-)/2$, em que $p_+ = p' + p$ e $p_- = p' - p = q$:

$$\begin{aligned}
 N_Z^2 &= -V^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 2)m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu \\
 &+ ((x_1 + x_3 - 1)^4 - 2(x_1 + x_3 - 1)^2 + 1)m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) \\
 &- A^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 2)m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu + ((x_1 + x_3 - 1)^4 \\
 &- 6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 8(x_1 + x_3 - 1) - 3)m_\mu^4 \gamma^\mu + (-2 + 6x_1))m_\mu k^2 \frac{(p_+ - p_-)}{2} \\
 &+ 4x_1(x_1 + x_3)^2 m_\mu^3 \frac{(p_+ - p_-)}{2} + (6x_3 - 2)m_\mu k^2 \frac{(p_+ + p_-)}{2} \\
 &+ 4x_3(x_1 + x_3)^2 m_\mu^3 \frac{(p_+ + p_-)}{2}] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k, k^3) \\
 &= -V^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 2)m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu + ((x_1 + x_3 - 1)^4 \\
 &- 2(x_1 + x_3 - 1)^2 + 1)m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) \\
 &- A^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 2)m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu + ((x_1 + x_3 - 1)^4 \\
 &- 6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 8(x_1 + x_3 - 1) - 3)m_\mu^4 \gamma^\mu + m_\mu k^2 (-2 + 3x_1 + 3x_2)p_+ \\
 &+ m_\mu k^2 (-3x_1 + 3x_2)p_- + 2m_\mu^3 (x_1 + x_3)^3 p_+ \\
 &+ 2m_\mu^3 (x_3 - x_1)(x_1 + x_3)^2 p_-] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k, k^3). \tag{A.41}
 \end{aligned}$$

Para finalizar vamos voltar com $q^\mu = p'^\mu - p$ e usar a identidade de Gordon $\bar{u}(p')(p^\mu + p'^\mu)u(p) = 2m\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) - i\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}q^\nu u(p)$. Assim temos:

$$\begin{aligned}
 N_1^2 &= -V^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 2)m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu \\
 &+ ((x_1 + x_3 - 1)^4 - 2(x_1 + x_3 - 1)^2 + 1)m_\mu^4 \gamma^\mu] u(p) \\
 &- A^2 \bar{u}(p') [k^4 \gamma^\mu + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 6 + 6x_1 + 6x_2)m_\mu^2 k^2 \gamma^\mu \\
 &+ ((x_1 + x_3 - 1)^4 + 4(x_1 + x_3)^3 - 6(x_1 + x_3 - 1)^2 \\
 &- 8(x_1 + x_3 - 1) - 3)m_\mu^4 \gamma^\mu - im_\mu k^2 (-2 + 3x_1 + 3x_2)\sigma^{\mu\nu} q^\nu \\
 &+ m_\mu k^2 (-3x_1 + 3x_2)q^\mu - i2m_\mu^3 (x_1 + x_3)^3 \sigma^{\mu\nu} q^\nu \\
 &+ 2m_\mu^3 (x_3 - x_1)(x_1 + x_3)^2 q^\mu] u(p) + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k, k^3). \tag{A.42}
 \end{aligned}$$

Então chegamos a expressão final igual a:

$$\begin{aligned}
 N_Z^2 &= -V^2 [k^4 + (6(x_1 + x_3 - 1)^2 - 2)m_\mu^2 k^2 \\
 &+ ((x_1 + x_3 - 2)^2 (x_1 + x_3)^2)m_\mu^4] \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \\
 &- A^2 [k^4 + 6(x_1 + x_3 - 1)(x_1 + x_3)m_\mu^2 k^2 + (x_1 + x_3)^4 m_\mu^4] \bar{u}(p') \gamma^\mu u(p) \\
 &- im_\mu k^2 (-2 + 3x_1 + 3x_2) q^\nu \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} u(p) - i2m_\mu^3 (x_1 + x_3)^3 q^\nu \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} u(p) \tag{A.43}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + m_\mu k^2 (-3x_1 + 3x_2) \bar{u}(p') u(p) + 2m_\mu^3 (x_3 - x_1) (x_1 + x_3)^2 q^\mu \bar{u}(p') u(p) \\
& + \mathcal{O}(\gamma^5) + \mathcal{O}(k, k^3).
\end{aligned}$$

O que vai nos importar a seguir é o termo envolvendo $q^\nu \bar{u}(p') \sigma^{\mu\nu} u(p)$, então nosso numerador final é:

$$N_Z^2 = im_\mu k^2 A^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3) + 2iA^2 m_\mu^3 (x_1 + x_3)^3. \quad (\text{A.44})$$

O valor de A será substituído na montagem da integral.

A.2.3 Terceiro Numerador

O nosso terceiro denominador N_Z^3 em (A.27), é dado por:

$$\begin{aligned}
N_Z^3 = & \bar{u}(p_2) [(V\gamma^\sigma - A\gamma^\sigma\gamma^5)(-l - p_1 - p_2 + m_\mu)\gamma^\mu(-l + m_\mu)(V\gamma^\rho - A\gamma^\rho\gamma^5) \\
& \times \xi(l_\rho + p_{1\rho})(l_\sigma + p_{1\sigma})] u(p_1).
\end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

Mas podemos notar que ele é igual ao nosso segundo denominador, sendo a única diferença que agora ele é multiplicado por $-\xi$, ou seja:

$$N_Z^3 = -\xi N_Z^2. \quad (\text{A.46})$$

Por isso não precisaremos repetir as contas, ficando com o seguinte resultado:

$$N_Z^3 = -i\xi m_\mu k^2 A^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3) - 2i\xi m_\mu^3 A^2 (x_1 + x_3)^3. \quad (\text{A.47})$$

A.2.4 Quarto Numerador

Vamos trabalhar com nosso último numerador, o quarto numerador, N_G na Eq.(A.27).

$$\begin{aligned}
N_G = & \bar{u}(p_2) [\gamma^5 (-l - p_1 - p_2 + m_\mu) \gamma^\mu (-l + m_\mu) \gamma^5] u(p_1) \\
= & -\bar{u}(p_2) [\gamma^5 \gamma^5 (l + p_1 + p_2 + m_\mu) \gamma^\mu (l + m_\mu)] u(p_1) \\
= & -\bar{u}(p_2) [(l + p_1 + p_2 + m_\mu) \gamma^\mu (l + m_\mu)] u(p_1) \\
= & -\bar{u}(p') [(l + \not{p} - \not{p}') \gamma^\mu l + m_\mu^2 \gamma^\mu + m_\mu (l \gamma^\mu + \gamma^\mu l + \not{p} \gamma^\mu - \not{p}' \gamma^\mu)] u(p) \\
= & -\bar{u}(p') [(l + \not{p} - \not{p}') \gamma^\mu l + m_\mu^2 \gamma^\mu + m_\mu (l \gamma^\mu - l \gamma^\mu + 2l^\mu + \not{p} \gamma^\mu - \not{p}' \gamma^\mu)] u(p) \\
= & -\bar{u}(p') [(l + \not{p} - \not{p}') \gamma^\mu l + m_\mu^2 \gamma^\mu + 2m_\mu (l^\mu) + m_\mu (\not{p} \gamma^\mu - \not{p}' \gamma^\mu)] u(p).
\end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

Mais uma vez fizemos o uso das relações $\gamma^\mu \gamma^5 = -\gamma^5 \gamma^\mu$, $\gamma^5 \gamma^5 = 1$ e $\gamma^\mu l = 2l^\mu - l \gamma^\mu$. Realizamos também uma mudança de variável do tipo: $p_1 \rightarrow \not{p}, p_1 \rightarrow p, p_2 \rightarrow -\not{p}'$ e $p_2 \rightarrow -p'$.

A primeira coisa que podemos fazer é isolar os termos envolvendo l (especificamente $l \rightarrow k - (1 - x_1)p + (1 - x_1 - x_2)p'$) em uma expressão só, fazemos isso utilizando a relação

$l^\mu l^\nu = \frac{1}{4}g^{\mu\nu}l^2$ e ainda tendo em mente as relações envolvendo as matrizes γ . Isso nos deixa com

$$\begin{aligned}
N_G &= -\bar{u}(p')[(\not{k} - (1-x_1)\not{p} + (1-x_1-x_2)\not{p}' + \not{p} - \not{p}')\gamma^\mu(\not{k} - (1-x_1)\not{p} \\
&\quad + (1-x_1-x_2)\not{p}') + m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu(k^\mu - (1-x_1)p^\mu + (1-x_1-x_2)p'^\mu) \\
&\quad + m_\mu(\not{p}\gamma^\mu - \not{p}'\gamma^\mu)]u(p) \\
&= -\bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (x_1\not{p} - (x_1+x_2)\not{p}')\gamma^\mu((x_1-1)\not{p} - (x_1+x_2-1)\not{p}') \\
&\quad + m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu((x_1-1)p^\mu + (1-x_1-x_2)p'^\mu) \\
&\quad + m_\mu(\not{p}\gamma^\mu - \not{p}'\gamma^\mu)]u(p) + \mathcal{O}(k). \tag{A.49}
\end{aligned}$$

Usando o fato que $\not{p}\not{p} = a^2$, as relações $\not{p}u(p) = m_\mu u(p)$ e $\bar{u}(p')\not{p}' = \bar{u}(p')m_\mu$, que $\gamma^\mu\not{p}' = 2p'^\mu - \not{p}'\gamma^\mu$ ou $\not{p}\gamma^\mu = 2p^\mu - \gamma^\mu\not{p}$ e também que $\not{p}\not{p}' = 2m_\mu^2 - \not{p}'\not{p}$, escrevemos:

$$\begin{aligned}
N_G &= -\bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + x_1(x_1-1)\not{p}\gamma^\mu\not{p} - x_1(x_1+x_2-1)\not{p}\gamma^\mu\not{p}' \\
&\quad - (x_1-1)(x_1+x_2)\not{p}'\gamma^\mu\not{p} + (x_1+x_2)(x_1+x_2-1)\not{p}'\gamma^\mu\not{p}' + m_\mu^2\gamma^\mu \\
&\quad + 2m_\mu((x_1-1)p^\mu + (1-x_1-x_2)p'^\mu) + m_\mu\not{p}\gamma^\mu - m_\mu^2\gamma^\mu]u(p) + \mathcal{O}(k) \\
&= -\bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + 2x_1(x_1-1)p^\mu\not{p} - x_1(x_1-1)\gamma^\mu\not{p}\not{p} - 2x_1(x_1+x_2-1)p'^\mu\not{p} \\
&\quad + x_1(x_1+x_2-1)\not{p}\not{p}'\gamma^\mu - (x_1-1)(x_1+x_2)m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu p^\mu - m_\mu\gamma^\mu\not{p} \\
&\quad + 2(x_1+x_2)(x_1+x_2-1)\not{p}'p'^\mu - (x_1+x_2)(x_1+x_2-1)\not{p}'\not{p}'\gamma^\mu \\
&\quad + 2m_\mu((x_1-1)p^\mu + (1-x_1-x_2)p'^\mu)]u(p) + \mathcal{O}(k) \\
&= +\mathcal{O}(k) - \bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (-1-x_1(x_1-1) - (x_1-1)(x_1+x_2) \\
&\quad - (x_1+x_2)(x_1+x_2-1))m_\mu^2\gamma^\mu + 2x_1(x_1+x_2-1)m_\mu^2\gamma^\mu \\
&\quad - x_1(x_1+x_2-1)\not{p}'\not{p}\gamma^\mu + 2m_\mu(((x_1-1) + x_1(x_1-1) + 1)p^\mu \\
&\quad - ((x_1+x_2-1) + x_1(x_1+x_2-1) - (x_1+x_2)(x_1+x_2-1))p'^\mu)]u(p) \\
&= +\mathcal{O}(k) - \bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (-1+3x_1-3x_1^2-3x_1x_2-x_2^2+2x_2 \\
&\quad + 2x_1(x_1+x_2-1))m_\mu^2\gamma^\mu - 2x_1(x_1+x_2-1)\not{p}'p^\mu + x_1(x_1+x_2-1)\not{p}'\gamma^\mu\not{p} \\
&\quad + 2m_\mu((x_1^2)p^\mu + (x_2^2+x_1x_2-2x_2-x_1+1)p'^\mu)]u(p) \\
&= +\mathcal{O}(k) - \bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (-1+3x_1-3x_1^2-3x_1x_2-x_2^2+2x_2 \\
&\quad + 3x_1(x_1+x_2-1))m_\mu^2\gamma^\mu + 2m_\mu((x_1^2-x_1(x_1+x_2-1))p^\mu \\
&\quad + (x_2^2+x_1x_2-2x_2-x_1+1)p'^\mu)]u(p) \\
&= +\mathcal{O}(k) - \bar{u}(p')[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 - (x_2-1)^2m_\mu^2\gamma^\mu \\
&\quad + 2m_\mu((x_1-x_1x_2)p^\mu + (x_2^2+x_1x_2-2x_2-x_1+1)p'^\mu)]u(p). \tag{A.50}
\end{aligned}$$

Partes envolvendo apenas k possuem a integral da forma que queremos igual a zero, por isso iremos excluir a partir de agora o termo $\mathcal{O}(k)$.

Para ficar com uma cara melhor nós podemos fazer as mudanças $p \rightarrow (p_+ - p_-)/2$ e $p' \rightarrow (p_+ + p_-)/2$, em que $p_+ = p' + p$ e $p_- = p' - p = q$:

$$\begin{aligned}
N_G &= -\bar{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 - (x_2 - 1)^2 m_\mu^2 \gamma^\mu + 2m_\mu((x_1 - x_1 x_2)\frac{1}{2}(p_+ - p_-)^\mu \right. \\
&\quad \left. + (x_2^2 + x_1 x_2 - 2x_2 - x_1 + 1)\frac{1}{2}(p_+ + p_-)^\mu\right]u(p) \\
&= -\bar{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 - (x_2 - 1)^2 m_\mu^2 \gamma^\mu + m_\mu((x_1 - x_1 x_2 + x_2^2 + x_1 x_2 \right. \\
&\quad \left. - 2x_2 - x_1 + 1)p_+ + (x_2^2 + x_1 x_2 - 2x_2 - x_1 + 1 - x_1 + x_1 x_2)p_-)\right]u(p) \\
&= -\bar{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 - (x_2 - 1)^2 m_\mu^2 \gamma^\mu \right. \\
&\quad \left. + m_\mu((x_2^2 - 2x_2 + 1)p_+ + (x_2^2 + 2x_1 x_2 - 2x_2 - 2x_1 + 1)p_-)\right]u(p).
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Para finalizar vamos voltar com $q^\mu = p'^\mu - p$ e usar a identidade de Gordon $\bar{u}(p')(p^\mu + p'^\mu)u(p) = 2m\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) - i\bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu}q^\nu u(p)$. Assim temos:

$$\begin{aligned}
N_G &= -\bar{u}(p')\left[-\frac{1}{2}\gamma^\mu k^2 + (x_2 - 1)^2 m_\mu^2 \gamma^\mu - m_\mu(x_2 - 1)^2 i\sigma^{\mu\nu}q^\nu \right. \\
&\quad \left. + m_\mu(x_2 - 1)(x_2 + 2x_1 - 1)q^\mu\right]u(p).
\end{aligned} \tag{A.52}$$

Então chegamos a expressão final igual a:

$$\begin{aligned}
N_G &= \left[\frac{1}{2}k^2 - (x_2 - 1)^2 m_\mu^2\right]\bar{u}(p')\gamma^\mu u(p) + im_\mu(x_2 - 1)^2 q^\nu \bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu} u(p) \\
&\quad + m_\mu(x_2 - 1)(x_2 + 2x_1 - 1)q^\mu \bar{u}(p')u(p).
\end{aligned} \tag{A.53}$$

O que vai nos importar a seguir é o termo envolvendo $q^\nu \bar{u}(p')\sigma^{\mu\nu} u(p)$, então nosso numerador final é:

$$N_G = im_\mu(x_2 - 1)^2. \tag{A.54}$$

A.3 Integrais

A última parte que precisamos trabalhar é envolvendo as integrais. Teremos três integrais dadas pela amplitude da Eq.(5.61) (I_Z^1 , I_Z^2 e I_Z^3) e uma da amplitude dada pela Eq.(5.62) (I_G). As quatro serão dadas por:

$$\begin{aligned}
I_Z^1 &= e \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} 2 \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \left(C \frac{m_\mu}{M_Z}\right)^2 \frac{N_1^1}{[D_1^1]^3} dx_2 dx_1, \\
I_Z^2 &= e \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} 6 \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{N_1^2}{[D_1^2]^4} dx_3 dx_2 dx_1, \\
I_Z^3 &= e \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} 6 \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{N_1^3}{[D_1^3]^4} dx_3 dx_2 dx_1, \\
I_G &= e \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} 2 \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \left(C \frac{m_\mu}{M_Z}\right)^2 \frac{N_2}{[D_2]^3} dx_2 dx_1.
\end{aligned} \tag{A.55}$$

Em que D_Z^1, D_Z^2, D_Z^3 e D_G serão dados por Eq.(A.8), Eq.(A.14), Eq.(A.20) e Eq.(A.26) respectivamente. Já N_Z^1, N_Z^2, N_Z^3 e N_G serão dados por Eq.(A.35), Eq.(A.44), Eq.(A.47) e Eq.(A.54) respectivamente.

No final o valor importante para o acréscimo na anomalia será dado por:

$$F_2(0) = I_Z^1 + I_Z^2 + I_Z^3 + I_G. \quad (\text{A.56})$$

Então vamos fazer cada item de uma vez.

A.3.1 Primeira Integral

Começamos a trabalhar com nossa primeira integral, que é:

$$I_Z^1 = 4iem_\mu \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{(V^2(x_2^2 - x_2) + A^2(x_2^2 + 3x_2))}{[l^2 - \Delta^2 + i\varepsilon]^3} dx_2 dx_1. \quad (\text{A.57})$$

Usando a rotação de Wick:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^3} &= i \int \frac{d^4 L_E}{(2\pi)^4} \frac{1}{(-L_E^2 - \Delta^2)^3} \\ &= (-1)^3 \frac{i}{8\pi^2} \int_0^\infty dL_E \frac{L_E^3}{(L_E^2 + \Delta^2)^3} = \frac{-i}{32\pi^2 \Delta^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.58})$$

podemos resolver a parte envolvendo l . Nossa integral fica como:

$$I_Z^1 = \frac{4em_\mu}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{(V^2(x_2^2 - x_2) + A^2(x_2^2 + 3x_2))}{((x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2)} dx_2 dx_1. \quad (\text{A.59})$$

Faremos a substituição de V e A do Modelo Padrão dados por $V = g(1 - 4 \sin^2 \theta)/4 \cos \theta$ e $A = g/4 \cos \theta$. Nosso resultado também precisa ser normalizado por $-\frac{2m}{e}$. Então temos:

$$I_Z^1 = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{m_\mu^2 ((1 - 4 \sin^2 \theta)^2 (x_2^2 - x_2) + (x_2^2 + 3x_2))}{((x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2)} dx_2 dx_1. \quad (\text{A.60})$$

A.3.2 Segunda Integral

Agora passaremos para a segunda integral, que é:

$$\begin{aligned} I_Z^2 &= ie \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} 6 \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \\ &\quad \times A^2 \frac{m_\mu l^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3) + 2m_\mu^3 (x_1 + x_3)^3}{(l^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^4} dx_3 dx_2 dx_1. \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

Mais uma vez usaremos a rotação de Wick, mas dessa vez ela será um pouco diferente.

Usando ela podemos resolver a parte envolvendo l , tanto com e sem l^2 , ela é:

$$\begin{aligned} \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{1}{(l^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^4} &= \frac{i}{96\pi^2 \Delta^4}, \\ \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \frac{l^2}{(l^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^4} &= \frac{-i}{48\pi^2 \Delta^2}. \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

Nossa integral fica como:

$$I_Z^2 = \frac{6em_\mu}{96\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} A^2 \left[\frac{2(-2 + 3x_1 + 3x_3)}{(x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2} - \frac{m_\mu^2 2(x_1 + x_3)^3}{((x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2)^2} \right] dx_3 dx_2 dx_1. \quad (\text{A.63})$$

Nosso resultado também precisa ser normalizado por $-\frac{2m}{e}$, juntamente com a substituição de A do Modelo Padrão que é $A = g/4 \cos \theta$. Então, temos:

$$I_Z^2 = -\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \left[\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3)}{(x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2} - \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^4 2(x_1 + x_3)^3}{((x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 M_Z^2)^2} \right] dx_3 dx_2 dx_1. \quad (\text{A.64})$$

A.3.3 Terceira Integral

Nossa terceira integral é dada por:

$$I_Z^3 = -\xi i e \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} 6 \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \times A^2 \frac{m_\mu l^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3) + 2m_\mu^3 (x_1 + x_3)^3}{(l^2 - \Delta^2 + i\varepsilon)^4} dx_3 dx_2 dx_1. \quad (\text{A.65})$$

Usando Eq.(A.62) nossa integral fica como:

$$I_Z^3 = -\xi \frac{6em_\mu}{96\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} A^2 \left[\frac{2(-2 + 3x_1 + 3x_3)}{(x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 \xi M_Z^2} - \frac{m_\mu^2 2(x_1 + x_3)^3}{((x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 \xi M_Z^2)^2} \right] dx_3 dx_2 dx_1. \quad (\text{A.66})$$

Normalizamos nosso resultado por $-\frac{2m}{e}$ e usando $A = g/4 \cos \theta$, teremos:

$$I_Z^3 = \xi \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{4 \cos \theta} \right)^2 \left[\int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^2 (-2 + 3x_1 + 3x_3)}{(x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 \xi M_Z^2} - \int_0^1 \int_0^{1-x_1} \int_0^{1-x_1-x_2} \frac{m_\mu^4 2(x_1 + x_3)^3}{((x_1 + x_3)^2 m_\mu^2 + x_2 \xi M_Z^2)^2} \right] dx_3 dx_2 dx_1. \quad (\text{A.67})$$

A.3.4 Quarta Integral

Agora iremos trabalhar com nossa última integral, que é dada:

$$I_G = i2em_\mu \left(C \frac{m_\mu}{M_Z} \right)^2 \int \frac{d^4 l}{(2\pi)^4} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{(x_2 - 1)^2}{[l^2 - \Delta^2 + i\varepsilon]^3} dx_2 dx_1. \quad (\text{A.68})$$

Usando Eq.(A.58) nossa integral fica como:

$$I_G = \left(C \frac{m_\mu}{M_Z} \right)^2 \frac{2em_\mu}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{(x_2 - 1)^2}{(x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + \xi x_2 m_z^2} dx_2 dx_1. \quad (\text{A.69})$$

Normalizando por $-\frac{2m}{e}$ junto com a substituição de C do modelo padrão que é $C = g/2 \cos \theta$, temos:

$$I_G = -\frac{1}{32\pi^2} \int_0^1 \int_0^{1-x_2} \frac{g^2 m_\mu^4 (x_2 - 1)^2}{M_Z^2 \cos^2 \theta ((x_2 - 1)^2 m_\mu^2 + \xi x_2 M_z^2)} dx_2 dx_1. \quad (\text{A.70})$$