

Bruno Avellar Couto e Silva

Soluções clássicas na teoria quântica de campos e suas implicações

Belo Horizonte

2021

Bruno Avellar Couto e Silva

Soluções clássicas na teoria quântica de campos e suas implicações

Dissertação de Mestrado, em Física de Partículas e Campos, da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Física.

Orientador: Bruce Lehmann Sánchez Vega

Belo Horizonte

2021

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

C871s Couto e Silva, Bruno Avellar.
Soluções clássicas na teoria quântica de campos e suas implicações / Bruno Avellar Couto e Silva. – 2022.
134f., enc. : il.

Orientador: Bruce Lehmann Sánchez Vega.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 111-116.

1. Sólitons. 2. Teoria quântica de campos. 3. Partículas elementares.
I. Título. II. Sánchez Vega, Bruce Lehmann. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.145 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente dissertação, intitulada “Soluções clássicas na teoria quântica de campos e suas implicações”, de autoria de **BRUNO AVELLAR COUTO E SILVA**, submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA** em 10 de março de 2022.

Belo Horizonte, 10 de março de 2022.

Prof. Bruce Lehmann Sánchez Vega

Orientador do estudante

Departamento de Física/UFMG

Prof. Gláuber Carvalho Dorsch

Departamento de Física/UFMG

Prof. Alexis Roa Aguirre

IFQ/UNIFEI



Documento assinado eletronicamente por **Gláuber Carvalho Dorsch, Professor do Magistério Superior**, em 11/03/2022, às 10:07, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexis Roa Aguirre, Usuário Externo**, em 11/03/2022, às 10:39, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruce Lehmann Sanchez Vega, Coordenador(a)**, em 11/03/2022, às 14:50, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1303371** e o código CRC **648B87BC**.

Referência: Processo nº 23072.213328/2022-60

SEI nº 1303371

Agradecimentos

Gostaria de agradecer aos meus pais, Silvana e Raimundo, pelo amor e incentivo constante. Agradeço a minha irmã Luiza por me auxiliar a realizar um trabalho tão esmerado e a minha avó Ilda pela companhia e carinho durante os dias em que escrevia esta dissertação.

Sou grato aos amigos pelo suporte e companhia nos momentos em que mais precisava.

Ao Professor Doutor, Bruce Lehmann Sánchez Vega, que muito além de orientador, foi um amigo. Serei eternamente grato, não só pela oportunidade, mas também pelos ensinamentos que pude adquirir durante o mestrado. Obrigado por acreditar tanto em mim, em momentos que nem mesmo eu acreditei.

Ao Grupo de física de partículas da UFMG pela convivência e intercâmbio de experiências e ensinamentos, os quais carregarei por toda minha formação.

À Universidade e ao corpo docente, que, para mim, sempre foi e sempre será uma referência de conhecimento e acolhimento e, ainda que de forma remota, garantiu aos alunos um ensino de qualidade.

À CAPES, pelo fomento que foi essencial para a realização deste trabalho.

E a todos que de forma direta ou indireta fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“A typical romantic, all you scientists are.”
*Otomo, Katsuhiro; **Akira**, 1988.*

Resumo

Nesta dissertação, serão investigados os sólitons topológicos na teoria clássica de campos, mais especificamente, os kinks, vórtices, monopolos e instantons. Esses objetos emergem na teoria após um padrão de quebra de simetria, em que conseguimos criar um mapa não-trivial entre a variedade do vácuo e a variedade espacial analisada no infinito. Primeiramente, analisaremos as soluções de kink no modelo ϕ^4 e sine-Gordon, encontraremos sua energia clássica e, após isso, faremos as devidas correções quânticas para essas estruturas. Seguindo o processo natural, aumentaremos os graus de liberdade da teoria e seremos levados aos vórtices globais, que apresentam energia infinita. Para solucionar este problema, utiliza-se o teorema de Derrick, em que adiciona-se um termo de gauge na Lagrangiana, para encontrar sólitons topológicos de energia finita, o vórtice de Nielsen-Olesen. Inspirados pelo monopolo de Dirac, o mesmo processo, anteriormente utilizado, será necessário para encontrar o monopolo de 't Hooft-Polyakov, que possui energia finita, entretanto, muito maior do que os colisores atuais conseguem detectar. Seguiremos procurando por essa partícula na teoria eletrofraca, conhecido como monopolo de Cho-Maison, e será feita uma extensão no grupo $U(1)_Y$ da hipercarga para estimarmos a massa dessa partícula. Por fim, finalizaremos a dissertação abordando os instantons, defeitos topológicos que surgem na teoria de Yang-Mills pura, e será visto como essas estruturas solucionam o problema $U(1)$ da QCD.

Palavras chave: Sólitons topológicos, Métodos não-perturbativos, defeitos topológicos, kinks, vórtices, monopolos de Dirac, monopolos de 't Hooft-Polyakov, monopolos eletrofracos, instantons.

Abstract

In this Masters dissertation, topological solitons will be investigated in the classical theory of fields, more specifically, kinks, vortices, monopoles and instantons. These objects emerge in the theory after a symmetry breaking pattern, in which we are able to create a non-trivial map between the vacuum manifold and the spacial manifold analysed at the infinity. Firstly, the kink solution will be found in the ϕ^4 and sine-Gordon model, his classical energy will be derived and calculated and, after that, the appropriate quantum corrections, for the masses of these structures, will be done. Following a natural process, more degrees of freedom will be added to the system, and it will lead us to global vortices, endowed with an infinite energy. To solve this issue, one uses Derrick's theorem, in which a gauge term is added to the Lagrangian, permitting one to find a topological soliton with finite energy, also known as Nielsen-Olesen vortex. Inspired by Dirac's monopole, the same previous process will be applied to derive the 't Hooft-Polyakov monopole solution, that possesses a finite energy configuration. However, the orders of magnitude are way above what modern colliders can detect. We will continue searching for this particle in the Glashow-Weinberg-Salam theory, also known as Cho-Maison monopole, and an extension in the hipercharge sector $U(1)_Y$ will be done, in order to estimate this particle's mass. Lastly, we will conclude this dissertation addressing the instantons, topological defects that arise in the pure Yang-Mills theory, and it will be shown how this structure solve the $U(1)$ -problem in QCD.

Keywords: Topological solitons, non perturbative methods, topological defects, kinks, vortices, Dirac's monopole, 't' Hooft-Polyakov monopole, eletroweak monopoles, instantons.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Uma configuração de campo que não pode ser deformada para uma solução do vácuo.	17
Figura 2 – Gráfico da solução do kink com $x_0 = 0$	19
Figura 3 – A densidade de energia da solução do kink com $x_0 = 0$	19
Figura 4 – O diagrama de Feynman que produz a integral divergente na teoria ϕ^4	35
Figura 5 – Colisão entre kink-kink em que a diferença das linhas representa diferentes tempos. a curva sólida ($t = \pm 20m^{-1}$), a curva tracejada ($t = \pm 10m^{-1}$) e a curva pontilhada ($t = 0$).	46
Figura 6 – Colisão kink-antikink na teoria de sine-Gordon. A curva sólida representa $t = -20m^{-1}$, a curva tracejada representa o tempo $t = -5m^{-1}$ e a curva pontilhada-tracejada representa $t = 20m^{-1}$. Em $t = 0$, $\phi(x) = 0$	47
Figura 7 – Gráfico da solução dos breathers para $s = 0.5$	47
Figura 8 – Gráfico das funções $f(\rho)$, $a(\rho)$ e o campo magnético B para a solução do vórtice.	61
Figura 9 – Representação das cordas de Dirac	65
Figura 10 – Gráfico da solução do monopolo de 't Hooft-Polyakov. Como esperado, vemos o resultado do campo magnético, visto à grandes distâncias, decaindo com $\frac{1}{r^2}$	73
Figura 11 – Gráfico da solução BPS para o monopolo de 't Hooft-Polyakov	75
Figura 12 – Gráfico da solução do monopolo eletrofraco	82
Figura 13 – Solução BPS para o monopolo eletrofraco	85
Figura 15 – Limite de massa para a produção de Drell-Yan independente de β , em procuras realizadas pelo CDF, ATLAS e MoEDAL.	89
Figura 16 – Espalhamento luz-luz por um monopolo	90
Figura 17 – Gráficos da solução do instanton $f(\rho)$, para diferentes valores de a	100
Figura 18 – O diagrama de Biachi	120
Figura 19 – Diagrama de Bianchi comutativo	121
Figura 20 – Diagrama da rede	121
Figura 21 – Projeção estereográfica da esfera unitária, partindo do polo norte até o plano $z = 0$	130
Figura 22 – Compactificação de S^4 em \mathbb{R}^4	138

Sumário

1	Introdução aos Sólitons Topológicos	12
2	Kinks	16
2.1	Correção quântica da massa do Sóliton	23
2.2	Modos zero e coordenadas coletivas	43
2.3	Dinâmica de multi-kinks	45
2.4	Kinks em mais dimensões	48
3	Vórtices	51
3.1	Introdução	51
3.2	Vórtices como sólitons topológicos	54
4	Monopolos magnéticos	62
4.1	Introdução	62
4.2	Monopolos de Dirac	64
4.3	Monopolos como Sólitons Topológicos	66
4.4	Monopolos eletrofracos	76
4.4.1	Introdução	76
4.4.2	A teoria eletrofraca	77
4.4.3	Reinterpretação do vácuo da teoria	78
4.4.4	A solução do monopolo eletrofraco	80
4.5	Formas de detecção do monopolo	85
4.5.1	Ionização e excitação	86
4.5.2	Indução	86
4.5.3	Radiação de Cherenkov	87
4.5.4	A procura em colisores	87
5	Instantons	91
5.1	Introdução	91
5.2	Instantons	97
5.3	O θ -vácuo	101
5.4	QCD e o problema $U(1)$	103
6	Conclusão	108
	Referências	111
A	Transformações de Bäcklund	117
B	Homotopia e Grupo Fundamental	123
C	Projeção estereográfica	130
D	Formas de Chern	132
D.1	Teoria de Yang-Mills na linguagem de formas diferenciais	132
D.2	Formas de Chern para campos de Gauge Abelianos	136

D.3 Formas de Chern para campos de Gauge não-Abelianos	138
--	-----

CAPÍTULO

1

INTRODUÇÃO AOS SÓLITONS TOPOLÓGICOS

Em meados dos anos 60 e início dos anos 70, uma forma inovadora de se analisar a teoria quântica de campos surgiu. Pesquisadores, tanto físicos, quanto matemáticos começaram a estudar as equações não-lineares da teoria clássica de campos. Algo bastante interessante que emerge em algumas dessas teorias de campo são soluções estendidas, que representam configurações estáveis, de energia definida e não-singular. Tais soluções, como serão apresentadas, podem ser consideradas como partículas e são comumente conhecidas como sólitons topológicos.

Regularmente, estamos acostumados a descrever as partículas na teoria de campos utilizando métodos perturbativos, em que as partículas são vistas como oscilações de um dado campo fundamental. Fica evidente que o sólito, apresentado anteriormente, difere das partículas usuais da física de partículas e, por isso, é extremamente interessante estudar essas novas estruturas e como elas podem nos apresentar uma física nova, ou uma forma de dualidade entre as teorias já existentes.

Um dos primeiros modelos que apresentava a existência dos sólitons topológicos foi a teoria de Skyrme [1], formulada em 1961, como uma abordagem topológica para o modelo de Yukawa, modelo este que descreve a interação de núcleons, intermediada por píons. As referências [2, 3] mostram, de maneira ilustre, como Skyrme se inspirou no modelo atômico de vórtice do Lord Kelvin [4], para propor os Skyrmons. Esses sólitons,

que levam o nome do autor, são os bárions, com seus respectivos números bariônicos que garantem a estabilidade topológica, já que este número é conservado. Neste cenário, os píons correspondem às flutuações do campo bariônico e, por outro lado, os férmions não aparecem como um campo fundamental. Em 1980, Witten observou [5] que o modelo de Skyrme aparentava ser uma aproximação apropriada para a teoria efetiva da QCD, a baixas energias. A teoria de Skyrme não será tratada nesta dissertação, entretanto, aos interessados, a referência [6] apresenta um compilado de diversos conspícuos artigos relacionados ao assunto.

Tais métodos semi-clássicos são bastante importantes e aparecem em diversas áreas da Física como a teoria quântica de campos, física de altas energias, cosmologia etc. Nesta dissertação, abordaremos os seguintes sólitons topológicos: kinks, vórtices, monopolos magnéticos e instantons. O objetivo central deste trabalho é compreender a natureza topológica dessas estruturas, como elas surgem, como calculamos sua energia e, de certa forma, como podemos detectá-las. Esses objetos, também conhecidos como defeitos topológicos, já são observados em uma série de experimentos terrestres, alguns exemplos são [7, 8, 9, 10, 11], e isso é uma das motivações para estudar esses defeitos, já que os mesmos, como citado, podem possivelmente ter surgido no Universo primordial.

Pensando nesse caso, em que o Universo iniciou com uma temperatura muito alta e foi gradualmente se esfriando, por consequência, ele passou por uma série de transições de fase e, por isso, as simetrias das partículas elementares foram quebradas em grupos de simetrias menores. Dessa forma, nos primórdios do Universo podemos supor que tenha existido um grupo de gauge G que unifica todas as interações fundamentais e, como dito, cada interação fundamental que temos atualmente eclodiu desse grupo de simetria, durante as transições de fase em diferentes temperaturas. Portanto, a evolução do universo pode ser descrita por uma sequência de quebras de simetria da seguinte forma:

$$G \rightarrow H \rightarrow \dots \rightarrow SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow SU(3)_C \times U(1)_{em}$$

Caso ocorresse uma transição de fase, a partir da sequência de quebra de simetrias, o campo deveria escolher um estado vácuo dos novos estados degenerados. Para regiões separadas por uma distância maior que ct , tecnicamente, essas regiões não seriam conectadas causalmente e a física que ocorre em uma independe da física que acontece na outra, ou seja, a definição de uma teoria local. Dessa maneira, o campo escolhe um vácuo aleatoriamente, logo em regiões distintas do espaço os estados de vácuo são diferentes e, por isso, surgem estruturas solitônicas na fronteira desses domínios. Por mais excêntrica que a ideia pareça, todos os conceitos citados são bem fundamentados pela física de partículas, ou seja, a transição de fase; a quebra de simetria; e o fato desses sólitons serem observados em sistemas terrestres equivalentes, evidenciam que os conceitos utilizados funcionam e além disso, não existe nenhuma razão para que o fenômeno não

aconteça. Ademais, Kibble mostrou [12, 13] que se o fenômeno ocorresse, o aparecimento desses defeitos seria inevitável, o que ficou conhecido como *Mecanismo de Kibble*. Isso tem estimulado pesquisadores a procurarem por essas partículas exóticas e tentarem entender o motivo delas ainda não terem sido detectadas.

Inclusive, veremos nesta dissertação que esses defeitos dependem da estrutura da variedade do vácuo, que por sua vez são definidos pela quebra espontânea de uma dada simetria. Apresentaremos como este fato está relacionado com a homotopia do grupo de simetria quebrado, e como o resultado garante a existência e a estabilidade desses defeitos topológicos.

Começaremos tratando dos kinks, as estruturas mais básicas que podemos descrever unidimensionalmente, que são soluções estáticas da Lagrangiana de $\lambda\phi^4$ e sine-Gordon. Calcularemos a massa para ambos os kinks e faremos as correções quânticas para a mesma. Veremos como utilizando as transformações de Backlund, somos capazes de derivar as diferentes soluções para a teoria de sine-Gordon. Ocorre um fenômeno bastante interessante e particular com esta teoria, já que a mesma é dual ao modelo massivo de Thirring [14], ou seja, são formulações diferentes que descrevem a mesma física. S. Coleman descobriu que nesta formulação, o regime de acoplamento-fraco de uma é dual ao regime de acoplamento-forte da outra, e vemos que as partículas elementares em uma teoria são solitônicas na outra. Isso vai contra ao pensamento tendencioso de que existe uma correspondência um-para-um entre partículas elementares e campos quânticos, e os sólitons e outras estruturas exóticas são tratados como entidades diferentes da teoria. Logo, uma partícula solitônica não é nem mais, nem menos fundamental do que as partículas elementares, nesse caso da dualidade elas são as mesmas, ou seja, um pesquisador não saberia a diferença se o mesmo estava realizando um experimento no regime de acoplamento-fraco na teoria de sine-Gordon ou em um regime de acoplamento-forte no modelo massivo de Thirring. O tema da dualidade não será explorado neste trabalho, entretanto, interessados podem encontrar ótimas explicações em [15].

Aumentaremos a dimensão do sistema e veremos que para obter estruturas de energia finita, precisamos acoplar um termo de gauge na Lagrangiana. Isso é exibido pelo teorema de Derrick, que demonstra que para duas e três dimensões precisamos adicionar um termo de gauge, para quatro dimensões utiliza-se uma ação de Yang-Mills pura e para dimensões maiores que isso não possuímos configurações de energia finita. Para o caso bidimensional, temos estruturas chamadas de vórtices e, como feito para os kinks, calcularemos sua energia. Na Cosmologia, essas estruturas são conhecidas como cordas cósmicas, enquanto os kinks são as “domain walls”.

Para o caso tridimensional, temos os monopolos magnéticos, propostos por Dirac em 1931 [16]. Dirac mostrou [17] que a existência de um único monopolo magnético garantia que a carga elétrica fosse quantizada, uma proposta inovadora e ímpar para o modelo

padrão. Entretanto, a energia e a massa do monopolo de Dirac são infinitas, o que impede sua detecção. Não obstante, em 1974, de forma independente, veremos como t’Hooft e Polyakov [18, 19] encontraram um monopolo magnético como um sóliton topológico de energia finita, na teoria de Georgi-Glashow [20]. Apresentaremos, ainda, o monopolo de Cho-Maison [21], presente na teoria eletrofraca e como, a partir de uma análise mais detalhada do grupo de homotopia da teoria, somos capazes de apresentar a existência dessa partícula. Porém, a mesma possui energia infinita e, com isso, seguindo trabalhos recentes [22, 23] somos motivados a realizar uma extensão do grupo da hipercarga e, fazendo isso, somos capazes de estimar e encontrar uma energia finita para este monopolo. Finalizaremos a seção apresentando formas de detecção e os detectores que procuram pelo monopolo, evidenciando ainda mais o desejo dos pesquisadores de encontrar essa partícula, que traria várias respostas sobre o Universo primordial e, conseqüentemente, a Teoria Final.

Concluiremos esta dissertação com o estudo dos instantons, partículas presentes na teoria de Yang-Mills pura, no espaço quadridimensional Euclidiano. Apresentaremos como esta partícula está relacionada com o θ -vácuo e como elas resolvem o problema $U(1)$ da QCD.

Em resumo, estamos interessados em compreender como esses sólitons topológicos emergem na teoria de campos e como podemos calcular sua energia, a fim de buscarmos uma base sólida de entendimento, para que possamos, futuramente, aplicar o conhecimento adquirido em outras teorias ou em outros cenários na Física.

Esta dissertação tem como público aqueles que já estudaram, ao menos, a teoria clássica de campos, já que neste trabalho não faremos as devidas introduções sobre esse assunto. Aos que desejam referências sobre teoria quântica de campos, de forma geral, é sugerido [24, 25, 26, 27, 28]. Referências que abordam, além disso, sólitons topológicos são [29, 30, 31, 32]. Para aqueles que querem abordar sólitons topológicos de forma direta, sem a introdução de campos são sugeridos [15, 33]. Nesta dissertação, utilizaremos duas referências principais. Para o capítulo 2, seguiremos a referência [15] e, para os demais capítulos, faremos uso do [30].

CAPÍTULO

2

KINKS

Um exemplo clássico de um sóliton unidimensional aparece da densidade Lagrangiana abaixo

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi), \quad (2.1)$$

onde $V(\phi) = -\frac{1}{2}m^2\phi^2 + \frac{\lambda}{4}\phi^4 + \frac{\lambda}{4}v^4 = \frac{\lambda}{4}(\phi^2 - v^2)^2$ e $v = \sqrt{\frac{m^2}{\lambda}}$, m e λ são positivos.

Vemos que a Lagrangiana é invariante sob uma transformação de $\phi \rightarrow -\phi$, mas essa simetria é espontaneamente quebrada quando o potencial assume um dos dois valores degenerados $\phi = \pm v$.

A equação de Euler-Lagrange para essa teoria é:

$$\frac{d^2\phi}{dt^2} - \frac{d^2\phi}{dx^2} = -\lambda(\phi^2 - v^2)\phi. \quad (2.2)$$

Essa é uma equação não-linear, por isso, não é óbvio que exista uma solução não-singular a não ser a solução do vácuo. Mostraremos a seguir que existem outras configurações que são mínimos locais do potencial. Consideraremos que $\phi(\infty) = v$ e $\phi(-\infty) = -v$. Podemos variar essa configuração suavemente, assumindo que ela não é a solução, de forma a reduzir o potencial até encontrarmos seu mínimo, que nos dará a solução estática. Como as variações suaves não mudam o valor de ϕ no infinito, então $\phi(\infty) \neq \phi(-\infty)$ e teremos uma outra solução não-trivial, que é o sóliton que procuramos. Veremos futuramente, o porquê disso acontece, já que a afirmação acima não é um argumento rigoroso.

Podemos avaliar as propriedades dessa solução fazendo uma reescala das variáveis. Se escrevermos $\phi = v f$ e $u = m x$, a equação estática se torna:

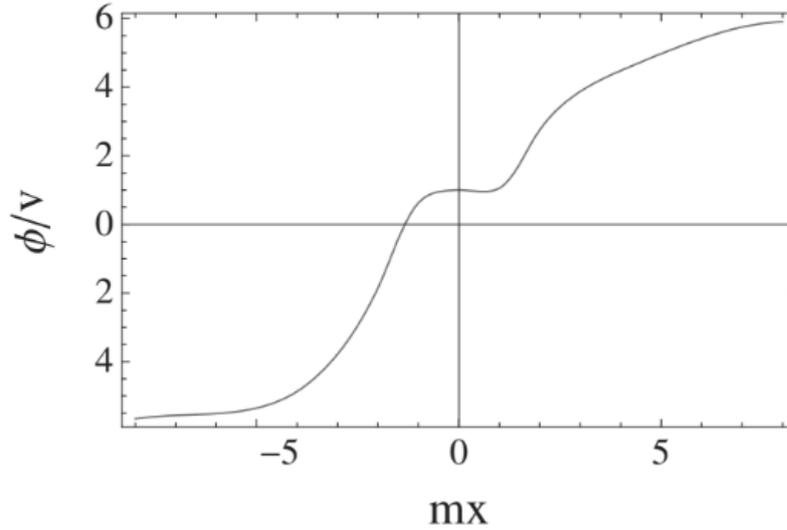
$$v \frac{d^2 f}{dx^2} - \lambda(v^2 f^2 - v^2) v f = 0, \quad (2.3)$$

$$\frac{d^2 f}{dx^2} - m^2(f^2 - 1)f = 0,$$

$$\frac{d^2 f}{du^2} - (f^2 - 1)f = 0, \quad (2.4)$$

em que impusemos a condição de que $f(\pm\infty) = \pm 1$.

Figura 1 – Uma configuração de campo que não pode ser deformada para uma solução do vácuo.



Fonte: WEINBERG, E. Classical solutions in quantum field theory. p.8, fig 2.1.[15].

A energia da solução estática pode ser calculada, sabendo que $\pi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \dot{\phi}$, a densidade Hamiltoniana para o caso estático é dada por:

$$\mathcal{H} = \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right) dx \geq 0. \quad (2.5)$$

Ela pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int \left(\frac{1}{2} v^2 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (f^2 v^2 - v^2)^2 \right) dx, \\ &= \int \left(\frac{1}{2} v^2 \left(\frac{df}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda v^4}{4} (f^2 - 1)^2 \right) dx, \end{aligned} \quad (2.6)$$

e utilizando que $u = mx$,

$$\mathcal{H} = \int \frac{m^3}{\lambda} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{df}{du} \right)^2 + \frac{1}{4} (f^2 - 1)^2 \right) du. \quad (2.7)$$

Vemos da equação estática em termos de f e u que $f(u)$ não possui fatores explícitos de λ ou m . Isso sugere que variações espaciais são medidas unitárias se medidas em termos de u e, então, de ordem $\frac{1}{m}$ se medidas em termos de x . Podemos notar, além disso, que m e λ são constantes, logo, podem ser retiradas da integral, permitindo-nos concluir que a energia possui ordem de $\frac{m^3}{\lambda}$.

Esse valor é muito maior do que a massa da partícula elementar escalar, que é dada por $\sqrt{2}m$, quando o acoplamento é fraco. Quando $\lambda \rightarrow 0$, o termo da massa m é divergente, que explica o motivo de sólitons não serem encontrados quando utilizamos métodos ordinários perturbativos da teoria quântica de campos.

Voltando para a equação de movimento 2.2, no caso estático, podemos multiplicar ambos os lados da equação por $\frac{d\phi}{dx}$, logo

$$0 = \frac{d}{dx} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right] \quad (2.8)$$

Com isso,

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \frac{\lambda}{2} (\phi^2 - v^2)^2 + C, \quad (2.9)$$

onde $C \in \mathbb{R}$. Por construção, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \phi(x) = \pm v$. Então, $C = 0$ e, com isso,

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{2}} (\phi^2 - v^2). \quad (2.10)$$

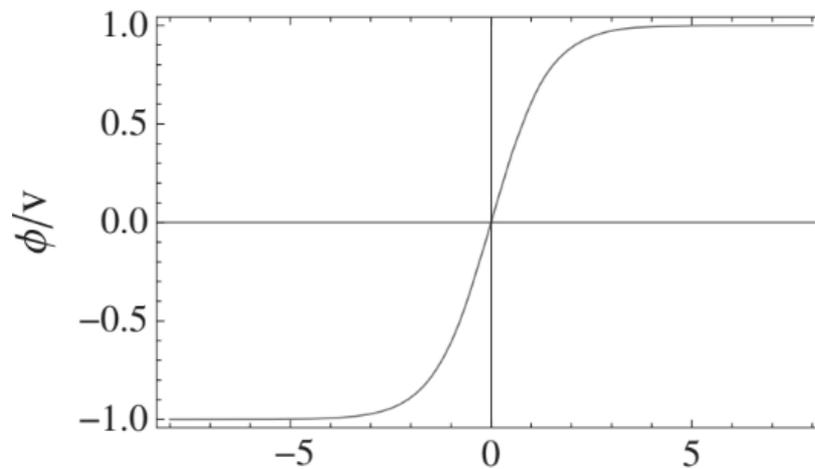
Integrando essa equação, temos que:

$$\boxed{\phi(x) = v \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]}. \quad (2.11)$$

Essa é conhecida como a solução do *kink*, onde x_0 pode ser visto como a posição do kink. Esse resultado é para o sinal positivo da equação anteriormente integrada. A solução para o sinal negativo é conhecida como *antikink*, dada por:

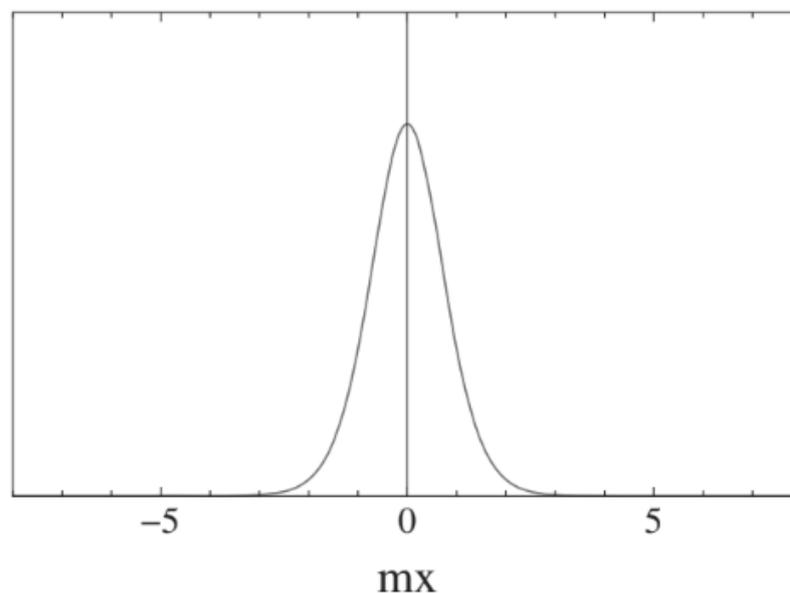
$$\boxed{\phi(x) = -v \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} (x - x_0) \right]}. \quad (2.12)$$

Podemos calcular a densidade de energia, que é a mesma para ambas as soluções. Tal energia é concentrada em uma região de largura m^{-1} , centrada em x_0 . Fora dessa

Figura 2 – Gráfico da solução do kink com $x_0 = 0$.

Fonte: WEINBERG, E. Classical solutions in quantum field theory. p.9, fig 2.2.[15].

região, o campo é indistinguível do vácuo. Apesar de existirem dois vácuos distintos em lados opostos do kink, um observador local não consegue perceber tal diferença.

Figura 3 – A densidade de energia da solução do kink com $x_0 = 0$.

Fonte: WEINBERG, E. Classical solutions in quantum field theory. p.10, fig 2.3.[15].

Esse pico da energia sugere que o kink poderia ser interpretado como uma partícula e podemos calcular a energia da mesma fazendo:

$$\mathcal{H} = \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - v^2)^2 \right) dx, \quad (2.13)$$

substituindo $\phi(x)$ e $\frac{d\phi}{dx}$ do kink, temos

$$\mathcal{H} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda v^4}{4} \frac{dx}{\cosh^4 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right]}. \quad (2.14)$$

O resultado dessa integral, como estamos utilizando unidades naturais ($\hbar = c = 1$), é dado por:

$$M_{cl} = \frac{2\sqrt{2} m^3}{3 \lambda}. \quad (2.15)$$

Veremos na próxima seção a correção quântica para essa massa, já que, por hora, essa massa é apenas uma aproximação clássica.

Se interpretamos o kink como uma partícula, precisamos de uma solução viajante, ou seja, que se propague no tempo. Como existe uma invariância relativística, podemos supor um referencial que se move para a esquerda com velocidade u . Com isso, nossa solução estática se torna uma solução viajante que pode ser escrita da forma:

$$\phi(x, t) = v \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}} \frac{(x - ut - x_0)}{\sqrt{1 - u^2}} \right], \quad (2.16)$$

Podemos reescrever a equação acima como um $\phi(x, t) = \phi_0(\xi; \lambda')$, onde $\xi = x - ut - x_0$ e $\lambda' = \gamma^2 \lambda$, em que $\gamma^2 = (1 - u^2)^{-1}$.

Sabendo que $\ddot{\phi}(x, t) = u^2 \phi_0''(\xi; \lambda')$ e que $\phi(x, t)'' = \phi_0(\xi; \lambda')$, então,

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \lambda(\phi^2 - v^2)\phi = 0, \quad (2.17)$$

$$(u^2 - 1)\phi_0''(\xi; \lambda') + \phi_0(\xi; \lambda')(\phi_0^2(\xi; \lambda') - v^2) = 0. \quad (2.18)$$

Mas sabemos que $\phi_0(\xi; \lambda')$ satisfaz a equação estática 2.10, logo,

$$-\phi_0'' + \lambda'(\phi_0^2 - v^2)\phi_0 = 0. \quad (2.19)$$

Desse modo, substituindo na equação anterior, temos:

$$(u^2 - 1)\lambda'(\phi_0^2 - v^2)\phi_0 + \lambda\phi_0(\phi_0^2 - v^2) = 0, \quad (2.20)$$

$$[(u^2 - 1)\gamma^2 \lambda + \lambda]\phi_0(\phi_0^2 - v^2) = 0. \quad (2.21)$$

Usando que $\gamma^2 = (1 - u^2)^{-1}$, então $\phi(x, t)$ é nossa solução viajante que descreve um kink contraído se movendo com velocidade u . A energia dessa solução pode ser calculada como abaixo, resultando em:

$$\begin{aligned} E &= \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)^2 + V(\phi) \right], \\ &= \frac{M_{cl}}{\sqrt{1 - u^2}}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Esse resultado é extraordinário, já que a energia é a mesma que a esperada para uma partícula de massa M_{cl} e velocidade u .

Vale ressaltar que a existência do kink se baseia puramente no potencial $V(\phi)$ possuir múltiplos vácuos degenerados, e que o campo no infinito se aproxima dos mesmos. Essa relação da topologia do vácuo com a topologia do espaço resulta em sólitons chamados de **sólitons topológicos**.

É crucial entendermos que a existência do sóliton se baseia puramente na topologia do vácuo, mais precisamente na variedade do vácuo, que será definida em capítulos futuros. Com o vácuo sendo mapeado no infinito por ϕ , vemos que teremos quatro classes distintas desse mapeamento:

$$\{(x \rightarrow -\infty) \rightarrow (\phi \rightarrow -v), \quad (x \rightarrow \infty) \rightarrow (\phi \rightarrow -v)\},$$

$$\{(x \rightarrow -\infty) \rightarrow (\phi \rightarrow v), \quad (x \rightarrow \infty) \rightarrow (\phi \rightarrow v)\},$$

$$\{(x \rightarrow -\infty) \rightarrow (\phi \rightarrow -v), \quad (x \rightarrow \infty) \rightarrow (\phi \rightarrow v)\},$$

$$\{(x \rightarrow -\infty) \rightarrow (\phi \rightarrow v), \quad (x \rightarrow \infty) \rightarrow (\phi \rightarrow -v)\}.$$

É impossível transitar por essas classes sem passar por uma configuração de energia infinita, ou seja, precisa-se de uma energia infinita para pular de uma classe para outra, o que sugere uma estabilidade da solução.

As duas primeiras classes são topologicamente triviais¹. Os setores do kink são topologicamente não triviais. O kink pertence à terceira classe e o antikink à quarta. Além disso, como visto, a configuração do campo, com energia mínima, no setor do kink é a solução do sóliton. Como a energia é mínima, pelos mesmos motivos discutidos anteriormente, tal solução é estável. Dessa forma, qualquer configuração de campo, distinta

¹ É importante ressaltar que isso é válido para sólitons topológicos, uma vez que existem sólitons não-topológicos, como os Lumps, que possuem carga topológica nula.

do sóliton, para cada classe, possui uma energia maior do que a do mesmo. Resumindo, pode-se dizer que a existência de sólitons topologicamente estáveis se deve à existência de mapeamentos não triviais do infinito espacial para a variedade do vácuo.

As classes de um mapeamento são uma propriedade topológica, assim como as seguintes definições. Definiremos a seguir a corrente topológica,

$$J_{top}^\mu \equiv \frac{1}{2v} \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi, \quad (2.23)$$

onde $\epsilon^{\mu\nu} = -\epsilon^{\nu\mu}$ e $\epsilon^{01} = 1$. A anti-simetria de $\epsilon^{\mu\nu}$ garante que o divergente da corrente seja nulo, ou seja, $\partial_\mu J_{top}^\mu = 0$.

Por definição, a carga topológica correspondente à essa corrente, é dada por:

$$Q_{top} = \int_{-\infty}^{\infty} dx J^0 = \frac{1}{2v} \int_{-\infty}^{\infty} dx \partial_1 \phi, \quad (2.24)$$

$$= \frac{1}{2v} [\phi(\infty) - \phi(-\infty)], \quad (2.25)$$

que é igual a 1 e -1 para o kink e o antikink, respectivamente. Essa carga topológica não é obtida via o teorema de Noether, ou seja, ela não está associada a uma simetria da Lagrangiana. Essa carga é, na verdade, um certo tipo de propriedade topológica, assim como as definições de compacidade, aberto, fechado, conexo etc. Tal carga é conservada já que nenhum processo de energia finita consegue mudar o valor assintótico do campo, ou seja, seu vácuo.

Esses métodos podem ser aplicados para qualquer potencial $V(\phi)$ que possua dois ou mais vácuos degenerados. Usando o fato que $\phi(\pm\infty)$ precisam ser mínimos do potencial, e usando a equação do campo estático,

$$0 = \frac{d^2\phi}{dx^2} - \frac{dV}{d\phi}. \quad (2.26)$$

Novamente, multiplicando a equação por $\frac{d\phi}{dx}$, temos que

$$\frac{d\phi}{dx} = \pm \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.27)$$

Podemos utilizar a *identidade de virial*,

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \right] = \int_{-\infty}^{\infty} dx V(\phi). \quad (2.28)$$

Dessa forma, podemos integrar a relação, antes encontrada,

$$x = \pm \int_{\phi_0}^{\phi} \frac{d\phi}{\sqrt{2V(\phi)}}, \quad (2.29)$$

onde $\phi(0) = \phi_0$. Para um potencial que varia suavemente, a integral claramente diverge quando $\phi(x)$ aproxima um dos mínimos. Dessa maneira, quando x varia de um infinito para o outro, o potencial precisa variar monotonicamente de um para o seu adjacente. Dessa forma, $\phi(x)$ não pode se aproximar do mesmo mínimo em infinitos diferentes, ou seja, não existem sólitons topológicos para a carga topológica nula. Ou melhor, não existem soluções estáveis para teorias com apenas um vácuo.

Podemos escrever a energia do kink de uma outra forma, denotando ϕ_1 e ϕ_2 como os dois vácuos da teoria, e supondo que $\phi_2 > \phi_1$, temos:

$$E = 2 \int_{-\infty}^{\infty} dx V(\phi) = 2 \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^{-1} V(\phi) = \int_{\phi_1}^{\phi_2} d\phi \sqrt{2V(\phi)}. \quad (2.30)$$

Sóliton de sine-Gordon

Outra teoria que apresenta o surgimento de sólitons é a teoria de sine-Gordon, cujo potencial é dado por

$$V(\phi) = \frac{m^4}{\lambda} \left[\cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{m} \right) - 1 \right]. \quad (2.31)$$

A equação de Euler-Lagrange da mesma é:

$$0 = \frac{d^2\phi}{dt^2} - \frac{d^2\phi}{dx^2} + \frac{m^3}{\sqrt{\lambda}} \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{m} \right). \quad (2.32)$$

Este potencial é periódico, com um mínimo degenerado em $\phi = \left(\frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}} \right) N \equiv Nv$; $N \in \mathbb{Z}$.

Podemos obter as soluções estáticas do kink e do antikink utilizando a equação do campo estático, já apresentada. Dessa forma, a solução do kink entre o vácuo Nv e $(N+1)v$ é:

$$\boxed{\phi(x) = Nv + \frac{2v}{\pi} \arctan[e^{m(x-x_0)}]}, \quad (2.33)$$

e a energia do kink de sine-Gordon é dada por:

$$M_{cl} = \frac{8m^3}{\lambda}. \quad (2.34)$$

2.1 Correção quântica da massa do Sóliton

Na mecânica quântica, costuma-se pensar que uma partícula possui uma posição clássica se existe um estado em que as incertezas na posição e na velocidade são pequenas,

se comparadas a alguma outra escala relevante no problema. Isso acontece, por exemplo, no caso em que a massa dessa partícula é suficientemente grande. Existe uma correspondência similar para a teoria quântica de campos, onde podemos discutir um perfil clássico se existe um estado com pequenas incertezas tanto no campo, quanto na sua derivada temporal, ou seja, se um campo quântico é observado a uma distância muito curta, as flutuações quânticas serão imensas, e divergem a medida que nos aproximamos cada vez mais. Em distâncias macroscópicas, perderíamos o nosso caráter quântico que desejamos, dessa forma, precisamos escolher uma distância que, simultaneamente, obedeça os dois regimes.

Podemos escolher uma distância conveniente L , que é pequena se comparada à escala clássica, mas que é grande o suficiente para que as flutuações quânticas do campo sejam pequenas se comparadas à variação do campo clássico naquela região.

Tanto para os kinks de $\lambda\phi^4$ e de sine-Gordon, a variação do campo ocorre a uma distância da ordem de m^{-1} , então escolheremos a distância L de tal maneira que $L \ll m^{-1}$. Como $\frac{d\phi}{dx} \approx mv \approx \frac{m^2}{\sqrt{\lambda}}$, a variação do campo clássico nesse regime é

$$(\Delta\phi_L)_{cl} \approx L \frac{d\phi}{dx} \approx \frac{m^2 L}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.35)$$

Para o caso quântico, podemos definir um campo em n dimensões por

$$\phi_L(x) = \frac{1}{(2\pi L^2)^{\frac{n}{2}}} \int d^n y e^{-\frac{(y-x)^2}{2L^2}} \phi(x). \quad (2.36)$$

Podemos estimar as flutuações quânticas de ϕ_L fazendo:

$$(\Delta\phi_L)_{qu}^2 \equiv \langle 0 | \phi_L(0)^2 | 0 \rangle \quad (2.37)$$

$$= \frac{1}{(2\pi L^2)^n} \int d^n y d^n z e^{-\frac{y^2}{2L^2}} e^{-\frac{z^2}{2L^2}} \langle 0 | \phi(y)\phi(z) | 0 \rangle. \quad (2.38)$$

Sabemos que o último termo é o propagador, definido por:

$$\langle 0 | \phi(y)\phi(z) | 0 \rangle = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{ik \cdot (y-z)}}{2\sqrt{k^2 + m^2}}, \quad (2.39)$$

Encontramos, então, que:

$$(\Delta\phi_L)_{qu}^2 = \int \frac{d^n k}{(2\pi)^n} \frac{e^{-k^2 L^2}}{2\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (2.40)$$

Como já preestabelecido, estamos interessados no regime de $L \ll m^{-1}$. A integral acima apresenta dois resultados:

$$(\Delta\phi_L)_{qu} \approx \begin{cases} \sqrt{\ln(1/mL)}, & n = 1, \\ L^{-\frac{(n-1)}{2}}, & n \geq 2. \end{cases} \quad (2.41)$$

Nesse caso utilizaremos o kink unidimensional, e além disso queremos que $(\Delta\phi_L)_{qu} \ll (\Delta\phi_L)_{cl}$, então temos

$$\sqrt{\ln(1/mL)} \ll \frac{m^2 L}{\sqrt{\lambda}}. \quad (2.42)$$

Nós conseguimos encontrar um $L \ll m^{-1}$ que satisfaça essa condição enquanto estivermos no regime do acoplamento fraco, ou seja, $\frac{\lambda}{m^2}$ é pequeno. Já para o critério da constante de acoplamento forte, o sóliton clássico ainda é uma solução para as equações de campo, entretanto, suas implicações para a teoria quântica são mais complicadas de resolver, como veremos.

Dessa maneira assumiremos, por hora, que estamos em um regime de acoplamento fraco. Neste limite, a solução do sóliton clássico nos leva a uma família de estados quânticos com energia igual à energia do sóliton clássico. Veremos que os efeitos quânticos dão correções à energia do kink clássico devido a flutuações no campo quântico de ponto zero. Como dito, se assumimos que estamos em um regime de uma constante de acoplamento fraca, essas correções são pequenas. Dessa maneira, quantizar o kink significa avaliar todos os níveis de energia do kink e desenvolver uma estrutura para aplicar a teoria quântica de campos neste cenário. Isso envolve identificar todas as excitações na presença do kink e suas interações. Utilizaremos métodos perturbativos bastante análogos àqueles usados para estudar o vácuo da teoria. Faremos a seguir a forma padrão.

Começaremos encontrando a solução que corresponde ao mínimo do potencial. Como no caso dos vácuos encontrados, que são degenerados, escolhemos um, por exemplo $\phi = v$. Se definirmos $\phi_{vac} \equiv v$, podemos escrever

$$\phi(x, t) = \phi_{vac} + \eta(x, t), \quad (2.43)$$

dessa forma, reescrevemos a Lagrangiana 2.1 em termos de η .

Expandindo o potencial, temos:

$$V(\phi) \approx \frac{V(\phi_{vac})(\eta)^0}{0!} + \frac{V'(\phi_{vac})\eta^1}{1!} + \frac{V''(\phi_{vac})\eta^2}{2!} + \mathcal{O}(\eta^3) + \dots \quad (2.44)$$

Por definição, como ϕ_{vac} é um mínimo do potencial, então $V'(\phi_{vac}) = 0$.

Então, nossa Lagrangiana é reescrita como:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)(\partial^\mu\phi) - V(\phi_{vac}) - \frac{V''(\phi_{vac})\eta^2}{2!} - \mathcal{O}(\eta^3) - \dots \quad (2.45)$$

Dessa forma, a Lagrangiana é escrita como:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}_{quad} + \mathcal{L}_{int}, \quad (2.46)$$

onde

$$\mathcal{L}_{cl} = - \int dx V(\phi_{vac}), \quad (2.47)$$

é a energia clássica,

$$\mathcal{L}_{quad} = \int dx \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \eta)^2 - \frac{1}{2} V''(\phi_{vac}) \eta^2 \right], \quad (2.48)$$

que contém termos quadráticos em η , e o termo \mathcal{L}_{int} , que contém os termos cúbicos ou de maior ordem de η .

Podemos aplicar a equação de Euler-Lagrange no termo \mathcal{L}_{quad} , ficamos com:

$$\left[\partial_\mu \partial^\mu + V''(\phi_{vac}) \right] \eta = 0, \quad (2.49)$$

$$(\square + V''(\phi_{vac})) \eta = 0. \quad (2.50)$$

Essa equação é conhecida equação de Klein-Gordon. Podemos separar a equação acima, em uma parte temporal e outra espacial e, desta forma, temos:

$$\left[- \frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi_{vac}) \right] f_j(x) = \omega_j^2 f_j(x), \quad (2.51)$$

que correspondem a soluções periódicas $\eta(x, t) = f_j(x) e^{-i\omega_j t}$ das equações de campo linearizadas. Como é de praxe, podemos escolher um $f_j(x)$ ortonormal e expandimos campo como,

$$\eta(x, t) = \sum_j [c_j(t) f_j(x) + h.c.], \quad (2.52)$$

dessa maneira podemos repetir o mesmo processo padrão para o campo de Klein-Gordon e encontrar a energia dos infinitos osciladores dada por:

$$E_{quad} = \sum_j \left(n_j + \frac{1}{2} \right) \omega_j. \quad (2.53)$$

De fato, existe um problema imediato, já que a soma das energias de ponto-zero são infinitas. Existem várias maneiras de resolver tal problema, neste caso adotaremos a forma de subtrair um termo constante apropriado da Lagrangiana, δE , cujo valor foi escolhido para deixar a energia do vácuo finita ou zero. Também incluímos os efeitos dos termos de interação na Lagrangiana, que dão uma contribuição à energia do vácuo.

Em geral, esta correção também é infinita, e deve ser compensada pela adição de um contra-termo chamado de L_{ct} , dessa maneira temos:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_{cl} + \mathcal{L}_{quad} + \mathcal{L}_{int} - \delta E + \mathcal{L}_{ct}. \quad (2.54)$$

Logo, a energia do vácuo é dada por

$$E_{vac} = E_{cl}(\phi_{vac}) + \frac{1}{2} \sum_j \omega_j + \delta E + E_{ct}(\phi_{vac}) + \dots, \quad (2.55)$$

as reticências representam termos que são de primeira ordem do acoplamento.

Podemos fazer o mesmo processo anterior e obter as correções quânticas da energia do kink estático e espectro dos estados vizinhos. Dessa maneira, escrevemos

$$\phi(x, t) = \phi_{kink}(x) + \tilde{\eta}(x, t). \quad (2.56)$$

Todas as equações anteriores podem ser trocadas de ϕ_{vac} por ϕ_{kink} , lembrando que o último possui uma dependência não trivial com x . Algo extremamente importante de se ressaltar é que os contra-termos, inclusive o δE , são constantes que já foram fixadas e calculadas no setor do vácuo. Estamos considerando uma única teoria, com uma única Lagrangiana e precisamos que os valores tanto finitos, quanto infinitos, sejam os mesmos tanto no vácuo, como no kink. Dessa maneira, temos que

$$\begin{aligned} M_{kink} &= E_{kink} - E_{vac} \\ &= \Delta E_{cl} + \Delta E_{zp} + \Delta E_{ct} + \mathcal{O}(\lambda), \end{aligned} \quad (2.57)$$

onde

$$\Delta E_{cl} = E_{cl}(\phi_{kink}) - E_{cl}(\phi_{vac}) = M_{cl}, \quad (2.58)$$

$$\Delta E_{zp} = \frac{1}{2} \sum_j \omega_j^{kink} - \frac{1}{2} \sum_j \omega_j^{vac}, \quad (2.59)$$

que nada mais é do que a soma dos osciladores da energia de ponto-zero, e

$$\Delta E_{ct} = E_{ct}(\phi_{kink}) - E_{ct}(\phi_{vac}), \quad (2.60)$$

que é a contribuição dos contra-termos. Apesar de termos algumas quantidades divergentes, mostraremos que o resultado é finito. No setor do vácuo os modos normais são famílias de ondas planares $f_k(x) = e^{ikx}$. O número de ocupação correspondente especifica o número de partículas com momento k , que varia de $-\infty$ até ∞ . Como a partícula de massa elementar tem massa igual a $\sqrt{2}m$, existem um espectro contínuo de frequências

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 + 2m^2}, \quad (2.61)$$

que começam em $\sqrt{2}m$. Podemos substituir essa função em $\eta(x, t) = f_j(x)e^{-i\omega_j t}$, seguir o procedimento padrão e encontrar a teoria de perturbação em termos dos diagramas de Feynman. Para o caso do kink, podemos fazer o análogo com o caso do vácuo e tentaremos encontrar os modos normais, que são soluções da equação do autovalor 2.51, entretanto, neste caso, estaremos interessados na análise com ϕ_{kink} ,

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi_{kink}) \right] f_j(x) = \omega_j^2 f_j(x), \quad (2.62)$$

onde

$$V''(\phi_{kink}) = 3\lambda\phi_{kink}^2 - m^2, \quad (2.63)$$

como $\phi_{kink} = v \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right]$,

$$V''(\phi_{kink}) = 3\lambda \frac{m^2}{\lambda} \tanh^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] - m^2, \quad (2.64)$$

$$= m^2 \left\{ 3 \tanh^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] - 1 \right\}, \quad (2.65)$$

$$= m^2 \left\{ 3 \tanh^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] - 1 + (2 - 2) \right\}, \quad (2.66)$$

$$U(x) = V''(x) = m^2 \left\{ 2 - \frac{3}{\cosh^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right]} \right\}. \quad (2.67)$$

Vemos imediatamente que o espectro dos autovalores incluem um começo contínuo em $U(\pm\infty) = 2m^2$. Também existem autovalores discretos.

Sem mesmo usar uma forma explicita da solução do kink, podemos mostrar que deve existir um “modo zero”, com $\omega = 0$. Lembre-se de que o kink obedece a equação estática 2.26. Com isso, diferenciando esta equação por x temos,

$$0 = -\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\phi_{kink}}{dx} \right) + \frac{d}{dx} V'(\phi_{kink}(x)), \quad (2.68)$$

$$0 = -\frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{d\phi_{kink}}{dx} \right) + V''(\phi_{kink}(x)) \left(\frac{d\phi_{kink}}{dx} \right), \quad (2.69)$$

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V'' \right] \left(\frac{d\phi}{dx} \right) = 0 \cdot \left(\frac{d\phi}{dx} \right), \quad (2.70)$$

ou seja, isso mostra que $f_0(x) = \left(\frac{d\phi}{dx} \right)$ é uma solução da equação, cujo autovalor é $\omega^2 = 0$.

Este resultado gera uma série de consequências interessantes, e ele não deveria ser uma surpresa. A presença do modo zero é devido à arbitrariedade da posição do centro de massa x_0 . Já que $(\frac{d\phi_{\text{kink}}}{dx})$ nunca desaparece, pois o potencial, nesse caso, nunca é nulo, f_0 não tem nós. Com isso, no nosso problema não existem modos com $\omega^2 < 0$. Isso é um fato essencial, já que um ω imaginário corresponderia a uma instabilidade no kink.

Para que fique claro o que vamos fazer a seguir, vale uma exposição e explicação dos resultados que serão apresentados. Estamos interessados em solucionar a equação de autovalor 2.51 para o kink. Essas soluções aparecem utilizando o método de funções hipergeométricas, que não serão abordadas a seguir. Dessa forma, de maneira justa, nos basta provar que os resultados, de fato, são solução da equação.

Existe mais um autovalor discreto para a equação, dado por $\omega_1^2 = \frac{3m^2}{2}$, cuja autofunção é dada por

$$f_1(x) = \frac{\sinh\left[\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right]}{\cosh^2\left[\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right]} \quad (2.71)$$

Prova:

Termo da derivada:

$$-\frac{d^2}{dx^2}f_1(x) = \frac{m^2}{2} \left(5f_1(x) \operatorname{sech}^2\left[\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right] - f_1(x) \tanh^2\left[\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right] \right) \quad (2.72)$$

Termo do Potencial:

$$m^2 \left\{ 2 - \frac{3}{\cosh^2\left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x-x_0)\right]} \right\} f_1(x) \quad (2.73)$$

Somando os dois termos:

$$\begin{aligned} \frac{5m^2}{2}f_1(x) \operatorname{sech}^2\left[\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right] - \frac{m^2}{2}f_1(x) \tanh^2\left[\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right] \\ + 2m^2f_1(x) - 3m^2 \operatorname{sech}^2\left[\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right] \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$-\frac{m^2}{2} \operatorname{sech}^2\left[\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right] - \frac{m^2}{2}f_1(x) \tanh^2\left[\frac{m(x-x_0)}{\sqrt{2}}\right] + 2m^2f_1(x) \quad (2.75)$$

$$f_1(x) \left(-\frac{1}{2}m^2 + 2m^2\right) = \frac{3}{2}m^2f_1(x) \quad (2.76)$$

De fato, vemos que $f_1(x)$ é solução da equação, com o autovalor igual a $\frac{3}{2}m^2$.

Encerrados os modos discretos, temos que analisar os modos contínuos, que são denotados por $\omega_k = \sqrt{k^2 + 2m^2}$ com autofunção igual a

$$f_k(x) = e^{ikx} \left\{ 3m^2 \tanh^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] - m^2 - 2k^2 - 3\sqrt{2}imk \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] \right\}. \quad (2.77)$$

Como feito anteriormente, mostraremos que o resultado acima é solução da equação.

Prova:

Termo da derivada:

$$\begin{aligned} -\frac{d^2}{dx^2} f_k(x) &= k^2 f_k(x) \\ &+ m^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] e^{ikx} \left(-9ikm\sqrt{2} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] \right. \\ &\left. - 6k^2 - 3m^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] + 6m^2 \tanh^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] + 3m^2 - 3m^2 \right), \end{aligned} \quad (2.78)$$

$$\begin{aligned} &= k^2 f_k(x) + m^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] e^{ikx} \left(-9ikm\sqrt{2} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] \right. \\ &\left. - 6k^2 - 3m^2 (\operatorname{sech}^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] - 1) - 3m^2 + 6m^2 \tanh^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] \right), \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\begin{aligned} &= k^2 f_k(x) + m^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] e^{ikx} \left(-9ikm\sqrt{2} \tanh \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] \right. \\ &\left. - 6k^2 - 3m^2 + 9m^2 \tanh^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] \right), \end{aligned} \quad (2.80)$$

$$-\frac{d^2 f_k(x)}{dx^2} = k^2 f_k(x) + 3m^2 \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right] f_k(x). \quad (2.81)$$

Termo do potencial:

$$U(x)f_k(x) = 2m^2 f_k(x) - \frac{3m^2 f_k(x)}{\cosh^2 \left[\frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right]}, \quad (2.82)$$

onde $U(x) = V''(x)$. Fica evidente que $\omega_k^2 = (k^2 + 2m^2)$ é autovalor, cuja autofunção é dada por $f_k(x)$.

Para esta solução, percebemos que quando $x \rightarrow \pm\infty$,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} |f_k(x)| = \left\{ 3m^2 - m^2 - 2k^2 - 3\sqrt{2}imk \right\}, \quad (2.83)$$

$$f_k(x) = \sqrt{4(m^2 - k^2)^2 + 18m^2 k^2} e^{i[kx \pm \frac{1}{2}\delta(k)]}, \quad (2.84)$$

onde a fase $\delta(k)$ é

$$\delta(k) = -2 \arctan \left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{mk}{m^2 - k^2} \right). \quad (2.85)$$

A escolha do arco tangente é conveniente já que quando $|k| \rightarrow \infty, \delta(k) \rightarrow 0$. Para um k positivo, $\delta(k)$ decresce monotonicamente, com $\delta(0^+) = 2\pi$ e $\delta(\infty) = 0$. Para um k negativo, $\delta(-k) = -\delta(k)$. Vale ressaltar que os termos dentro do arco tangente representam a fase, que é a parte imaginária sob a parte real.

Como temos as soluções da equação 2.62, podemos tentar calcular a contribuição da energia de ponto-zero, entretanto, nossa expressão do kink contém integrais divergentes das energias de ponto-zero dos modos contínuos do kink e do vácuo. Podemos regulá-las escolhendo um espaço unidimensional de comprimento a , e impor condições periódicas em $\eta(x)$, com o limite $a \rightarrow \infty$ a ser feito no fim das contas. Isso faz o espectro ser discreto e nossas integrais se transformam em somatórios, ainda assim divergentes. Para torná-los finitos, podemos imaginar o espaço com $2N$ pontos, que consiste em $2N$ modos normais, onde levaremos N para o infinito.

Os modos normais do vácuo se tornaram discretos e obedecem a seguinte propriedade

$$k_n^{vac} a = 2\pi n, \quad n = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \quad (2.86)$$

e os modos “contínuos” do kink obedecem

$$k_n^{kink} a + \delta(k_n^{kink}) = 2\pi n, \quad n = \pm 2, \pm 3, \dots, \pm N. \quad (2.87)$$

Pela convenção da mudança de fase, $k_n^{kink} = -k_{-n}^{kink}$ e que $k_{n+1}^{kink} \approx k_n^{vac}$ para $ma \gg n > 0$, enquanto para $n \gg ma$

$$(k_n^{kink} - k_n^{vac})a = -\delta(k_n^{vac}) + \mathcal{O}(a^{-1}), \quad (2.88)$$

tende a zero.

A diferença das energias do ponto-zero pode ser escrita como

$$\Delta E_{zp} = \frac{1}{2}(\omega_0^{kink} - \omega_{-1}^{vac}) + \frac{1}{2}(\omega_1^{kink} - \omega_1^{vac}) + \sum_{n=2}^N (\omega_n^{kink} - \omega_n^{vac}). \quad (2.89)$$

Os dois primeiros termos nos dão

$$\frac{1}{2}(0 - \sqrt{2}m) + \frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}m - \sqrt{2}m\right) = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \sqrt{2}\right)m. \quad (2.90)$$

O último termo da equação é uma contribuição dos modos contínuos do kink e o restante dos modos do vácuo, onde o prefator $\frac{1}{2}$ foi cancelado já que aparece um fator de 2 quando vamos fazer a soma com apenas os valores positivos de n. Podemos avaliar essa contribuição da seguinte forma

$$\sum_{n=2}^N (\omega_n^{kink} - \omega_n^{vac}) = \sum_{n=2}^N \left[\sqrt{(k_n^{kink})^2 + 2m^2} - \sqrt{(k_n^{vac})^2 + 2m^2} \right]. \quad (2.91)$$

Reescrevendo a relação $(k_n^{kink} - k_n^{vac})a = -\delta(k_n^{vac}) + \mathcal{O}(a^{-1})$ como

$$k_n^{kink} = k_n^{vac} - \frac{\delta(k_n^{vac})}{a} + \mathcal{O}(a^{-2}), \quad (2.92)$$

$$\begin{aligned} (k_n^{kink})^2 &= (k_n^{vac})^2 - \delta^2(k_n^{vac})\mathcal{O}(a^{-2}) + \mathcal{O}(a^{-4}) - \frac{2k_n^{vac}\delta(k_n^{vac})}{a} \\ &+ 2k_n^{vac}\mathcal{O}(a^{-2}) - 2\delta(k_n^{vac})\mathcal{O}(a^{-3}), \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\sqrt{(k_n^{kink})^2 + 2m^2} = \sqrt{(k_n^{vac})^2 + 2m^2 - \frac{2k_n^{vac}\delta(k_n^{vac})}{a} + 2(k_n^{vac} + \delta^2(k_n^{vac})\mathcal{O}(a^{-2})) + \dots}, \quad (2.94)$$

Substituindo essa relação em 2.91, temos

$$\text{LHS de 2.91} = \sum_{n=2}^N \left[\sqrt{(k_n^{vac})^2 + 2m^2 - \frac{2k_n^{vac}\delta(k_n^{vac})}{a} + \dots} - \sqrt{(k_n^{vac})^2 + 2m^2} \right], \quad (2.95)$$

$$= \sum_{n=2}^N \left[\sqrt{(k_n^{vac})^2 + 2m^2} \sqrt{1 - \frac{2k_n^{vac}\delta(k_n^{vac})}{((k_n^{vac})^2 + 2m^2)a} + \dots} - \sqrt{(k_n^{vac})^2 + 2m^2} \right], \quad (2.96)$$

$$= - \sum_{n=2}^N \left[\sqrt{(k_n^{vac})^2 + 2m^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2k_n^{vac}\delta(k_n^{vac})}{((k_n^{vac})^2 + 2m^2)a} + \mathcal{O}(a^{-2})} \right) \right]. \quad (2.97)$$

Utilizando a expansão $\sqrt{1-x} \approx 1 - \frac{1}{2}x$, ficamos com

$$-\sum_{n=2}^N \sqrt{(k_n^{vac})^2 + 2m^2} \left[\frac{k_n^{vac} \delta(k_n^{vac})}{((k_n^{vac})^2 + 2m^2)a} + \mathcal{O}(a^{-2}) \right]. \quad (2.98)$$

Se tomarmos o limite de $N \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow \infty$, ficamos com

$$\frac{1}{a} \sum_{n=2}^N \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk. \quad (2.99)$$

Com isso a equação 2.98 se torna

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{k\delta(k)}{\sqrt{k^2 + 2m^2}}. \quad (2.100)$$

Integrando por partes, sendo $u = \delta(k)$ e $dv = \frac{k}{\sqrt{k^2 + 2m^2}}$, então $du = \frac{d\delta}{dk}$ e $v = \sqrt{k^2 + 2m^2}$, temos dessa forma:

$$-\frac{1}{2\pi} \delta(k) \sqrt{k^2 + 2m^2} \Big|_{k=0}^{k=\infty} (*) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{k^2 + 2m^2} \frac{d\delta}{dk} dk (**). \quad (2.101)$$

Como sabemos que $\delta(k) = -2 \arctan\left(\frac{3\sqrt{2}}{2} \frac{mk}{m^2 - k^2}\right)$, então:

$$\frac{d\delta}{dk} = \frac{-6\sqrt{2}m(k^2 + m^2)}{2k^4 + 5k^2m^2 + 2m^4}. \quad (2.102)$$

Logo, o segundo termo (***) fica da forma

$$-\frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{3\sqrt{2}m(k^2 + m^2)^2}{(2k^2 + m^2)(\sqrt{k^2 + m^2})} dk, \quad (2.103)$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{(k^2 + m^2)}{(k^2 + \frac{1}{2}m^2)\sqrt{k^2 + m^2}}, \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{(k^2 + \frac{1}{2}m^2 - \frac{1}{2}m^2 + m^2)}{(k^2 + \frac{1}{2}m^2)\sqrt{k^2 + m^2}}, \end{aligned} \quad (2.104)$$

$$\begin{aligned} &-\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{m^2 dk}{(k^2 + \frac{1}{2}m^2)\sqrt{k^2 + m^2}}, \\ &= -\frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} - \frac{\sqrt{6}}{6} m. \end{aligned} \quad (2.105)$$

Para a parte superficial da equação (*), temos:

$$-\frac{1}{2\pi} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(k) \sqrt{k^2 + m^2} - \lim_{k \rightarrow 0^+} \delta(k) \sqrt{k^2 + m^2} \right]. \quad (2.106)$$

Como $\delta(\infty) \sqrt{k^2 + m^2} \approx 3\sqrt{2}m$ e $\delta(0^+) \approx 2\pi$, então o resultado a integral é

$$-\frac{1}{2\pi} \left[\lim_{k \rightarrow \infty} \delta(k) \sqrt{k^2 + m^2} - \lim_{k \rightarrow 0^+} \delta(k) \sqrt{k^2 + m^2} \right] = -\frac{3\sqrt{2}m}{2\pi} + \sqrt{2}m. \quad (2.107)$$

Adicionando todas as contribuições antes calculadas dos modos contínuos e dos discretos, já que

$$\Delta E_{zp} = \frac{1}{2}(\omega_0^{kink} - \omega_{-1}^{vac}) + \frac{1}{2}(\omega_1^{kink} - \omega_1^{vac}) + \sum_{n=2}^N (\omega_n^{kink} - \omega_n^{vac}), \quad (2.108)$$

$$\Delta E_{zp} = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \sqrt{2}\right)m + \sum_{n=2}^N (\omega_n^{kink} - \omega_n^{vac}), \quad (2.109)$$

$$\Delta E_{zp} = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \sqrt{2}\right)m - \frac{3\sqrt{2}m}{2\pi} + \sqrt{2}m - \frac{\sqrt{6}m}{6} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi}m \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}}, \quad (2.110)$$

$$\Delta E_{zp} = \left(\frac{\sqrt{6}}{4} - \sqrt{2}\right)m - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi}m \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (2.111)$$

Depois de todos esses passos, encontramos a contribuição dos termos de ponto-zero, entretanto, o resultado ainda é **divergente**. Uma forma conveniente de renormalização é cancelar esta integral incluindo os contra-termos da Lagrangiana, que são dados por

$$\Delta E_{ct} = -\frac{1}{2}\delta m^2 \int dx [\phi_{kink}(x)^2 - \phi_{vac}(x)^2], \quad (2.112)$$

onde δm^2 pode ser calculado como

$$\mathcal{L}_{ct} = \frac{1}{2}\delta m^2 \phi^2, \quad (2.113)$$

sendo que,

$$\delta m^2 = -3i\lambda \int \frac{d^2k}{(2\pi)^2} \frac{1}{k_\mu k^\mu - 2m^2 + i\epsilon}, \quad (2.114)$$

$$= -3i\lambda \int \frac{dk}{(2\pi)^2} \frac{dk_0}{k_0^2 - k^2 - 2m^2 + i\epsilon}, \quad (2.115)$$

$$= -\frac{3i\lambda}{4\pi^2} \int dk (2\pi i) \operatorname{Res}\left(\frac{dk_0}{k_0^2 - k^2 - 2m^2 + i\epsilon}\right). \quad (2.116)$$

Vemos que os pólos da equação são $\sqrt{k^2 + 2m^2} - i\epsilon$ e $-\sqrt{k^2 + 2m^2} + i\epsilon$, então

$$= \frac{3\lambda}{2\pi} \int dk \operatorname{Res}\left(\frac{dk_0}{k_0 - \sqrt{k^2 + 2m^2} + i\epsilon} \frac{1}{k_0 + \sqrt{k^2 + 2m^2} + i\epsilon}\right). \quad (2.117)$$

Dessa maneira, escolhendo o pólo $\sqrt{k^2 + 2m^2} - i\epsilon$ e fazendo $\lim \epsilon \rightarrow 0$, temos

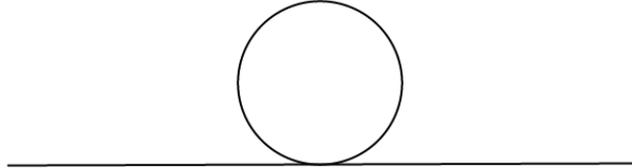
$$\frac{3\lambda}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\sqrt{k^2 + 2m^2}} \quad (2.118)$$

Com isso,

$$\frac{3\lambda}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 2m^2}}, \quad (2.119)$$

$$= \frac{3\lambda}{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{k^2 + 2m^2}}. \quad (2.120)$$

Figura 4 – O diagrama de Feynman que produz a integral divergente na teoria ϕ^4 .



Logo a integral para o contra-termo é calculada como

$$\int dx [\phi_{kink}(x)^2 - \phi_{vac}(x)^2], \quad (2.121)$$

$$= \int dx \left[v^2 \tanh^2 \left[\frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}} \right] - v^2 \right],$$

$$= - \int v^2 \left(\operatorname{sech}^2 \left[\frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}} \right] \right) dx, \quad (2.122)$$

$$= -\frac{2m^2}{\lambda} \int_0^{\infty} \operatorname{sech}^2 \left[\frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}} \right] dx,$$

$$= -\frac{2\sqrt{2}m}{\lambda} \tanh \left[\frac{m(x - x_0)}{\sqrt{2}} \right] \Bigg|_{x=0}^{x=\infty}, \quad (2.123)$$

$$\int dx [\phi_{kink}(x)^2 - \phi_{vac}(x)^2] = \left(-\frac{2\sqrt{2}m}{\lambda} \right). \quad (2.124)$$

Rearranjando todos os resultados encontrados, vemos que,

$$\Delta E_{ct} = \left(-\frac{1}{2} \right) \left[\frac{3\lambda}{2\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}} \right] \left(-\frac{2\sqrt{2}m}{\lambda} \right), \quad (2.125)$$

$$\Delta E_{ct} = \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} m \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}}, \quad (2.126)$$

podemos perceber que ela cancela exatamente o termo divergente da energia de ponto-zero. Somando todos os resultados encontrados anteriormente, finalmente, temos:

$$\boxed{M_{kink} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda} + \left(\frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \right) m + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m}\right)}, \quad (2.127)$$

para a energia do estado fundamental do kink. Esse é o estado em que todos os modos dos osciladores estão no estado fundamental. Entretanto, também existem estados de energia maiores onde os números de ocupação (n_j) são diferente de zero. Para os modos contínuos, eles representam os estados de espalhamento que contêm bósons elementares se movendo na presença do kink. Os quanta do modo discreto com $\omega = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}m$ podem ser interpretados por bósons confinados ao kink. O modo $\omega = 0$, pode representar uma matéria diferente, ou seja, uma excitação interna da partícula kink.

Este modo será tratado de uma melhor maneira a seguir, já que ele leva a algumas patologias a aplicações da nossa teoria. Isso ocorre já que um oscilador com frequência zero não é de fato um oscilador, logo, não poderíamos imaginar que exista uma maneira de definir um número de ocupação a esses estados. Na próxima seção, resolveremos esse problema.

Quantização do kink de sine-Gordon

O mesmo processo feito para o Sóliton da teoria $\lambda\phi^4$ pode ser feito com o de Sine-Gordon, assim como qualquer outro sóliton que viermos a encontrar. Ou seja, da mesma forma, as equações abaixo são válidas.

$$\begin{aligned} M_{kink} &= E_{kink} - E_{vac} \\ &= \Delta E_{cl} + \Delta E_{zp} + \Delta E_{ct} + \mathcal{O}(\lambda), \end{aligned}$$

onde

$$\Delta E_{cl} = E_{cl}(\phi_{kink}) - E_{cl}(\phi_{vac}) = M_{cl},$$

$$\Delta E_{zp} = \frac{1}{2} \sum_j \omega_j^{kink} - \frac{1}{2} \sum_j \omega_j^{vac},$$

é a soma dos osciladores da energia de ponto-zero, e

$$\Delta E_{ct} = E_{ct}(\phi_{kink}) - E_{ct}(\phi_{vac}).$$

Entretanto, as equações, obviamente, serão diferentes. Repetindo-se os mesmos processos podemos tentar encontrar os modos normais que obedecem a equação abaixo,

$$\left[-\frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi_{vac}) \right] f_j(x) = \omega_j^2 f_j(x).$$

Neste caso, precisamos encontrar quem é $V''(\phi_{cl}(x))$. Sabemos que o potencial, para o caso do sine-Gordon é dado por

$$V(\phi) = -\frac{m^4}{\lambda} \left[\cos\left(\frac{\sqrt{\lambda}\phi}{m}\right) - 1 \right], \quad (2.128)$$

logo,

$$V''(\phi) = m^2 \cos\left(\frac{\lambda\phi}{m}\right). \quad (2.129)$$

Como já vimos a solução do kink em 2.33, então

$$V''(\phi_{cl}) = m^2 \cos \left[\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \left(N\nu + \frac{2\nu}{\pi} \arctan[e^{m(x-x_0)}] \right) \right] \quad (2.130)$$

$$= m^2 \left\{ \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} N\nu \right) \cos \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \frac{2\nu}{\pi} \arctan[e^{m(x-x_0)}] \right), \right. \\ \left. - \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} N\nu \right) \sin \left(\frac{\sqrt{\lambda}}{m} \frac{2\nu}{\pi} \arctan[e^{m(x-x_0)}] \right) \right\}. \quad (2.131)$$

Como $\nu = \frac{2\pi m}{\sqrt{\lambda}}$, então temos que

$$= m^2 \left\{ \cos \left(2\pi N \right) \cos \left(4 \arctan[e^{m(x-x_0)}] \right) - \sin \left(2\pi N \right) \sin \left(4 \arctan[e^{m(x-x_0)}] \right) \right\}. \quad (2.132)$$

Por fim,

$$V''(\phi_{cl}) = m^2 \cos \left(4 \arctan[e^{m(x-x_0)}] \right). \quad (2.133)$$

Podemos reescrever esse potencial de uma maneira mais conveniente, utilizando que $\cos(4x) = 2 \cos^2(2x) - 1$ e que $\cos^2(2x) = (-1 + 2 \cos^2(x))^2$, considerando que $u = \arctan[e^{m(x-x_0)}]$, temos que:

$$V''(\phi_{cl}) = m^2(2((-1 + 2 \cos^2(u))^2) - 1), \quad (2.134)$$

expandido os termos, vemos que

$$V''(\phi_{cl}) = m^2(2(4 \cos^4(u) - 4 \cos^2(u) + 1) - 1), \quad (2.135)$$

com isso,

$$V''(\phi_{cl}) = m^2(8 \cos^4(u) - 8 \cos^2(u) + 1). \quad (2.136)$$

Podemos substituir $u = \arctan[e^{m(x-x_0)}]$ e utilizar a identidade $\cos(\arctan(y)) = \frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$, em que $y = e^{mx}$, ficando com

$$V''(\phi_{cl}) = m^2 \left(\frac{8}{(1 + e^{2x})^2} - \frac{8}{(1 + e^{2x})} + 1 \right). \quad (2.137)$$

Os dois primeiros termos podem ser reescritos como:

$$\frac{8}{(1 + e^{2mx})^2} - \frac{8}{(1 + e^{2mx})} = -2 \operatorname{sech}^2(mx). \quad (2.138)$$

Dessa forma, o potencial pode ser reescrito como

$$V''(\phi_{cl}) = m^2 (-2 \operatorname{sech}^2(mx) + 1). \quad (2.139)$$

Como discutido anteriormente, pela arbitrariedade da posição do x_0 , temos que $\omega^2 = 0$ e $f_0(x) = \frac{d\phi}{dx}$ precisam ser uma solução discreta. Para mostrar que o potencial é solução da equação de autovalor, realizaremos a substituição, onde $f_0(x) = \frac{2m^2}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sech}(mx)$ e $\omega_0^2 = 0$.

Termo da derivada:

$$-\frac{d^2}{dx^2} f_0(x) = \frac{2m^4}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sech}^3(mx) - \frac{2m^4}{\sqrt{\lambda}} \tanh^2(mx) \operatorname{sech}(mx).$$

Termo do Potencial:

$$U(x)f_0(x) = \frac{4m^4}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sech}^3(mx) - \frac{2m^4}{\sqrt{\lambda}} \operatorname{sech}(mx).$$

Podemos ver que a soma dos termos é nula e, de fato, o potencial encontrado está correto. Diferente do caso do $\lambda\phi^4$, a equação acima apenas apresenta um único modo

normal discreto. Para o caso contínuo, o resultado é dado por $f_k(x) = e^{ikx} \left(\frac{ik - m \tanh(mx)}{m + ik} \right)$ e $\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}$.

Prova:

Termo da derivada:

$$\frac{d^2}{dx^2} f_k(x) = (2m^2 \operatorname{sech}^2(mx) + k^2) f_k(x).$$

Termo do Potencial:

$$U(x) f_k(x) = (2m^2 \tanh^2(mx) - m^2) f_k(x).$$

Soma dos termos:

$$(2m^2 \operatorname{sech}^2(mx) + k^2) f_k(x) + (2m^2 \tanh^2(mx) - m^2) f_k(x) = \omega_k^2 f_k(x),$$

$$(2m^2 \operatorname{sech}^2(mx) + k^2) + m^2(1 - 2 \operatorname{sech}^2(mx)) = \omega_k^2,$$

$$\omega_k = \sqrt{k^2 + m^2}.$$

Mostrado que essas são as soluções da equação de autovalor, podemos calcular a diferença das energias de ponto-zero, que nesse caso, é dado por:

$$\Delta E_{zp} = \frac{1}{2}(\omega_0^{kink} - \omega_{-1}^{vac}) + \sum_{n=1}^N (\omega_n^{kink} - \omega_n^{vac}), \quad (2.140)$$

$$= \frac{1}{2}(0 - m) + \sum_{n=1}^N (\omega_n^{kink} - \omega_n^{vac}), \quad (2.141)$$

$$\Delta E_{zp} = -\frac{m}{2} + \sum_{n=1}^N (\omega_n^{kink} - \omega_n^{vac}). \quad (2.142)$$

Para a solução de $f_k(x)$, quando $x \rightarrow \pm\infty$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f_k(x) = e^{i[kx \pm \frac{1}{2}\delta(k)]}, \quad (2.143)$$

onde a mudança de fase é

$$\delta(k) = 2 \arctan\left(\frac{m}{k}\right). \quad (2.144)$$

Logo, para encontrar a energia de ponto zero devemos fazer o mesmo processo de discretização dos modos do vácuo e do “contínuo”, resultando na relação, já demonstrada, abaixo

$$-\sum_{n=1}^N \sqrt{(k_n^{vac})^2 + m^2} \left[\frac{k_n^{vac} \delta(k_n^{vac})}{((k_n^{vac})^2 + m^2)a} + \mathcal{O}(a^{-2}) \right]. \quad (2.145)$$

Se tomarmos o limite de $N \rightarrow \infty$ e $a \rightarrow \infty$, ficamos com

$$\frac{1}{a} \sum_{n=1}^N \rightarrow \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk. \quad (2.146)$$

Com isso a equação encontrada acima se torna

$$-\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty dk \frac{k\delta(k)}{\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (2.147)$$

Integrando por partes, sendo $u = \delta(k)$ e $dv = \frac{k}{\sqrt{k^2 + m^2}}$, então $du = \frac{d\delta}{dk}$ e $v = \sqrt{k^2 + m^2}$, temos dessa forma:

$$-\frac{1}{2\pi} \delta(k) \sqrt{k^2 + m^2} \Big|_{k=0}^{k=\infty} (*) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \sqrt{k^2 + m^2} \frac{d\delta}{dk} dk (**). \quad (2.148)$$

Sabemos que $\delta(k) = 2 \arctan\left(\frac{m}{k}\right)$, logo,

$$\frac{d\delta}{dk} = -\frac{2m}{k^2 + m^2}. \quad (2.149)$$

Então, temos que

$$-\frac{1}{2\pi} \delta(k) \sqrt{k^2 + m^2} \Big|_{k=0}^{k=\infty} (*) + \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{-2m}{k^2 + m^2} \sqrt{k^2 + m^2} dk (**), \quad (2.150)$$

$$-\frac{1}{2\pi} \delta(k) \sqrt{k^2 + m^2} \Big|_{k=0}^{k=\infty} (*) - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk (**). \quad (2.151)$$

Como podemos ver o segundo termo (**), já é a nossa integral divergente, que como será mostrada, cancelará com a parte dos contra-termos. Precisamos então avaliar o primeiro termo(*), o termo da superfície, dado por:

$$-\frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow \infty} \delta(k) \sqrt{k^2 + m^2} - \frac{1}{2\pi} \lim_{k \rightarrow 0} \delta(k) \sqrt{k^2 + m^2}, \quad (2.152)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} (2m - m\pi). \quad (2.153)$$

Logo,

$$\sum_{n=1}^N (\omega_n^{kink} - \omega_n^{vac}) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk - \frac{m}{\pi} + \frac{m}{2}. \quad (2.154)$$

Podemos ver, dessa forma, que a diferença nas energias de ponto-zero é dada por:

$$\Delta E_{zp} = -\frac{m}{2} + \sum_{n=1}^N (\omega_n^{kink} - \omega_n^{vac}), \quad (2.155)$$

$$\Delta E_{zp} = -\frac{m}{2} - \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk - \frac{m}{\pi} + \frac{m}{2}, \quad (2.156)$$

$$\Delta E_{zp} = -\frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk - \frac{m}{\pi}. \quad (2.157)$$

Vemos novamente que a integral é divergente, mas ainda não adicionamos as contribuições dos contra-termos, que é dado por:

$$\Delta E_{ct} = -\frac{1}{2} \delta m^2 \int [\phi_{kink}(x)^2 - \phi_{vac}(x)^2] dx. \quad (2.158)$$

Podemos ver que o potencial de $\lambda\phi^4$ e o de sine-Gordon são muito parecidos, exceto por um fator. Logo,

$$-\frac{1}{2} \delta m_{SG}^2 = \frac{1}{4!} \left(-\frac{1}{2} \delta m_{\lambda\phi^4}^2 \right). \quad (2.159)$$

Logo,

$$-\frac{1}{2} \delta m_{SG}^2 = -\frac{\lambda}{32\pi} \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{k^2 + m^2}}. \quad (2.160)$$

Temos, também que,

$$\int [\phi_{kink}(x)^2 - \phi_{vac}(x)^2] dx, \quad (2.161)$$

$$\int [\phi_{kink}(x)^2 - \phi_{vac}(x)^2] dx = \int \left\{ \left[\frac{4\nu^2}{\pi^2} \arctan^2(e^{m(x-x_0)}) \right] - \nu^2 \right\} dx, \quad (2.162)$$

$$\int [\phi_{kink}(x)^2 - \phi_{vac}(x)^2] dx = \int \left\{ \frac{4\pi^2 m^2}{\lambda} \left[\frac{4}{\pi^2} \arctan^2(e^{m(x-x_0)}) - 1 \right] \right\} dx. \quad (2.163)$$

Podemos reescrever o termo dentro da integral, resultando em

$$\int [\phi_{kink}(x)^2 - \phi_{vac}(x)^2] dx = -\frac{32m^2}{\lambda} \int_0^\infty \operatorname{sech}^2(mx) dx, \quad (2.164)$$

$$\int [\phi_{kink}(x)^2 - \phi_{vac}(x)^2] dx = -\frac{32m^2}{\lambda} \frac{\tanh(mx)}{m} \Bigg|_0^\infty, \quad (2.165)$$

$$\int [\phi_{kink}(x)^2 - \phi_{vac}(x)^2] dx = -\frac{32m}{\lambda}. \quad (2.166)$$

Multiplicando esses termos vemos que o resultado era como o esperado:

$$\Delta E_{ct} = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \frac{2m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk. \quad (2.167)$$

Podemos, agora, encontrar o valor da massa do kink de sine-Gordon, como

$$M_{kink} = \Delta E_{cl} + \Delta E_{zp} + \Delta E_{ct} + \mathcal{O}(\lambda), \quad (2.168)$$

$$M_{kink} = \frac{8m^3}{\lambda} - \frac{m}{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{m}{\sqrt{k^2 + m^2}} dk + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m}\right). \quad (2.169)$$

A correção quântica para a massa do kink de sine-Gordon é

$$\boxed{M_{kink} = \frac{8m^3}{\lambda} - \frac{m}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m}\right)}. \quad (2.170)$$

Vimos na primeira seção, que o kink de $\lambda\phi^4$ e de sine-Gordon, a menos de alguns parâmetros, eram extremamente semelhantes. É curioso notar que a correção na massa de ambos também é muito próxima e, além disso, tal correção é negativa, ou seja, a massa do kink analisada dentro dos limites estipulados no início desse capítulo mostram $M_{kink}^{cl} > M_{kink}^{qu}$. Pensando bem, isso não deveria ser uma surpresa já que o tamanho do sóliton é da ordem de $\frac{1}{m}$; Portanto, o comprimento de onda de Compton $\frac{1}{M_{cl}}$ do kink é muito menor que o tamanho clássico. É por esse motivo que as flutuações quânticas da posição sóliton não ‘atrapalham’ a solução clássica. Quando a constante de acoplamento tende a zero ($\lambda \rightarrow 0$) as massas se tornam iguais.

2.2 Modos zero e coordenadas coletivas

Os problemas que $\omega = 0$ nos traz não são uma peculiaridade de ϕ^4 , na verdade a equação para encontrar o modo zero, se repararmos atentamente, não depende da forma do potencial, ou seja, a solução do kink em qualquer potencial tem um modo zero. Por isso, precisamos de uma nova maneira de tratar tal modo. Podemos notar que a excitação do modo zero corresponde a uma mudança na posição do kink. Podemos representar matematicamente da seguinte forma:

$$\frac{d\phi_{kink}}{dx} = -\frac{d\phi_{kink}}{dx_0}. \quad (2.171)$$

Como a teoria é invariante por translações, essa mudança não altera a energia potencial. Já havíamos discutido, anteriormente, que o modo zero não é de fato um modo oscilatório e por isso, podemos trocar seu coeficiente de oscilação $c_0(t)$ por uma coordenada coletiva $z(t)$ que representa a posição do kink. Ao invés da nossa antiga expansão para os modos, podemos reescrever $\phi(x, t)$ como:

$$\phi(x, t) = \phi_{kink}(x - z(t)) + \eta(x - z(t)), \quad (2.172)$$

$$= \phi_{kink}(x - z(t)) + \sum_j' c_j(t) f_j(x - z(t)), \quad (2.173)$$

a linha acima da soma indica que estamos somando sob todos os modos diferentes de do modo zero. Ambos $c_j(t)$ e $z(t)$ são vistos como operadores quânticos. Calcularemos a derivada temporal da equação anterior,

$$\dot{\phi}(x, t) = \dot{z}(t) \frac{d\phi_{kink}(x - z(t))}{dz} + \sum_j' \left[\dot{c}_j(t) f_j(x - z(t)) + \dot{z}(t) c_j(t) \frac{\partial f_j(x - z(t))}{\partial z} \right]. \quad (2.174)$$

Substituiremos esse termo na Lagrangiana, e com isso, teremos o seguinte resultado:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \left[\dot{z}^2(t) \left(\frac{d\phi}{dz}(x - z(t)) \right)^2 + \sum_j' \sum_k' \dot{c}_j(t) \dot{c}_k(t) \delta_{jk} \right. \\ & + \sum_j' \sum_k' \dot{z}^2(t) c_j(t) c_k(t) \left(\frac{\partial f_j(x - z(t))}{\partial z} \right) \left(\frac{\partial f_k(x - z(t))}{\partial z} \right) - \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \Big] \\ & - \frac{1}{2} V''(\phi) \phi^2 + \sum_j' \dot{z} \dot{c}_j \frac{d\phi}{dz}(x - z(t)) f_j(x - z(t)) + \sum_j' \dot{z}^2 c_j \frac{d\phi}{dz}(x - z(t)) \frac{\partial f_j}{\partial z}(x - z(t)) \\ & + \sum_j' \sum_k' \left(\dot{z} \dot{c}_j f_j(x - z(t)) c_k \frac{\partial f_k}{\partial z}(x - z(t)) + \dot{z} \dot{c}_k f_k(x - z(t)) c_j \frac{\partial f_j}{\partial z}(x - z(t)) \right). \end{aligned} \quad (2.175)$$

Fazendo uma integração espacial, perceberemos que os termos quadráticos em c_j e \dot{c}_j são os mesmos que obtidos anteriormente, e essa afirmação será demonstrada. É interessante vermos que os termos cruzados que envolvem $\dot{z}\dot{c}_j$ são nulos, já que:

$$\dot{z}\dot{c}_j \int dx \frac{d\phi(x-z)}{dz} f_j(x-z) = -\dot{z}\dot{c}_j \int dx \frac{d\phi(x-z)}{dx} f_j(x-z), \quad (2.176)$$

e os modos que nós obtivemos são ortogonais a $f_0(x) = \frac{d\phi}{dx}$.

Logo,

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \int dx \left[\dot{z}^2(t) \left(\frac{d\phi}{dz}(x-z(t)) \right)^2 + \sum_j' \dot{c}_j^2(t) f_j^2 - \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - V''(\phi) \phi^2 \right]. \quad (2.177)$$

Podemos reparar que o terceiro termo da equação 2.175 pode ser reescrito como:

$$-\frac{1}{2} \int dx \left[\phi \frac{d^2\phi}{dx^2} + V''(\phi) \phi^2 \right] = \quad (2.178)$$

$$-\frac{1}{2} \int dx \phi \left[\frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi) \right] \phi = -\frac{1}{2} \int dx \phi \omega_k^2 \phi, \quad (2.179)$$

onde $\omega_k^2 = \frac{d^2}{dx^2} + V''(\phi)$. Podemos reescrever ϕ pela expansão e chegar no resultado que:

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 - \frac{1}{2} V''(\phi) \phi^2 = -\frac{1}{2} c_k^2 \omega_k^2. \quad (2.180)$$

Da mesma maneira podemos reescrever o termo quadrático em \dot{z} como:

$$\frac{1}{2} \dot{z}^2 \int dx \left(\frac{d\phi}{dz} \right)^2 = \frac{1}{2} \dot{z}^2 \int dx \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 \equiv \frac{1}{2} A \dot{z}^2. \quad (2.181)$$

Sabendo que: $M_{cl} = \int dx \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \int dx V(\phi)$ e pela *identidade de virial*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx \frac{1}{2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dx V(\phi). \quad (2.182)$$

Então,

$$M_{cl} = \int dx \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2. \quad (2.183)$$

E com isso, agrupando todos os termos antes obtidos, temos

$$L_{quad} = \frac{1}{2} M_{cl} \dot{z}^2 + \sum_j' \left(\frac{1}{2} \dot{c}_j^2 - \frac{1}{2} \omega_j^2 c_j^2 \right). \quad (2.184)$$

Vemos que nossa coordenada coletiva aparece apenas em um único termo, o restante está exatamente como anteriormente. Percebemos que o termo adicional é a energia

cinética padrão não-relativística de uma partícula com massa M_{cl} , cujo momento é dado por:

$$P = M_{cl}\dot{z}, \quad (2.185)$$

que é uma quantidade conservada, ou seja, comuta com o Hamiltoniano. Como z está livre para variar por todo espaço, P possui um espectro contínuo de autovalores. As correções da energia do kink aparecem das energias de ponto zero dos modos oscilatórios. Logo, a correção da energia é dada por:

$$E = M_{kink} + \frac{P^2}{2M_{cl}} + \mathcal{O}(P^4) + \mathcal{O}(\lambda), \quad (2.186)$$

onde M_{kink} foi calculada na seção anterior.

Até a ordem que calculamos, isso representa uma expansão de baixo momento da energia relativística de uma partícula de massa M_{kink} e momento P . Podemos perceber que este resultado depende da identidade de virial, e teremos exemplos futuros onde encontraremos esta mesma identidade, mas em maiores dimensões.

Os modos zero que estudamos resultam de uma invariância translacional da nossa Lagrangiana, que não era uma simetria do kink. Veremos que, geralmente, os modos zero aparecem quando o sóliton quebra uma ou mais simetrias da Lagrangiana.

2.3 Dinâmica de multi-kinks

Um pensamento bastante válido que podemos ter é, se consideramos o kink como uma partícula, como é dada a interação kink-kink ou kink-antikink. O caso mais simples para análise é a teoria de sine-Gordon. Quando dois kinks colidem, pela conservação da carga topológica, o produto da colisão também deve apresentar dois kinks.

Caso o leitor esteja interessado em como obtivemos as soluções apresentadas, o conteúdo pode ser visto no Apêndice A, sobre as transformações de Bäcklund em que, partindo de uma solução inicial, somos capazes de derivar as soluções de N kinks. A solução clássica das equações de campos é exata e é dada por:

$$\phi(x, t) = \frac{2v}{\pi} \tan^{-1} \left\{ u \sinh \left(\frac{mx}{\sqrt{1-u^2}} \right) \left[\cosh \left(\frac{mut}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right]^{-1} \right\}, \quad (2.187)$$

que descreve a interação kink-kink, com velocidade u , colidindo quando $t = 0$. A energia total do sistema, como anteriormente calculado, é:

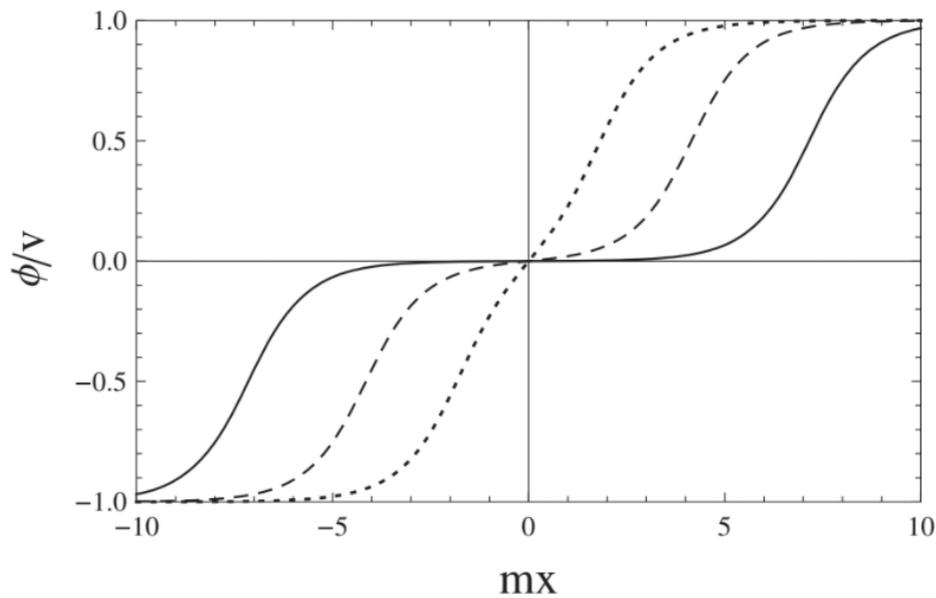
$$E = \frac{16m^3}{\lambda} \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2M_{cl}}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (2.188)$$

Como os sólitons são idênticos, existe uma ambiguidade entre saber se os kinks colidem e se afastam, ou se eles se atravessam e seguem suas direções iniciais. Entretanto, pode ser visto que a força entre essas estruturas é repulsiva, o que significa que os kinks não são capazes de se atravessarem, e na verdade, eles colidem e recuam na direção contrária. Na imagem 5, mostra-se a colisão entre kinks.

Podemos, também, analisar a colisão entre kink-antikink, é possível que neste caso, haja aniquilação entre essas partículas. A solução analítica é dada por

$$\phi(x, t) = \frac{2v}{\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{u} \sinh \left(\frac{mut}{\sqrt{1-u^2}} \right) \left[\cosh \left(\frac{mx}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right]^{-1} \right\}. \quad (2.189)$$

Figura 5 – Colisão entre kink-kink em que as diferença das linhas representa diferentes tempos. a curva sólida ($t = \pm 20m^{-1}$), a curva tracejada ($t = \pm 10m^{-1}$) e a curva pontilhada ($t = 0$).



Fonte: WEINBERG, E. Classical solutions in quantum field theory. p.30, fig. 2.7, [15].

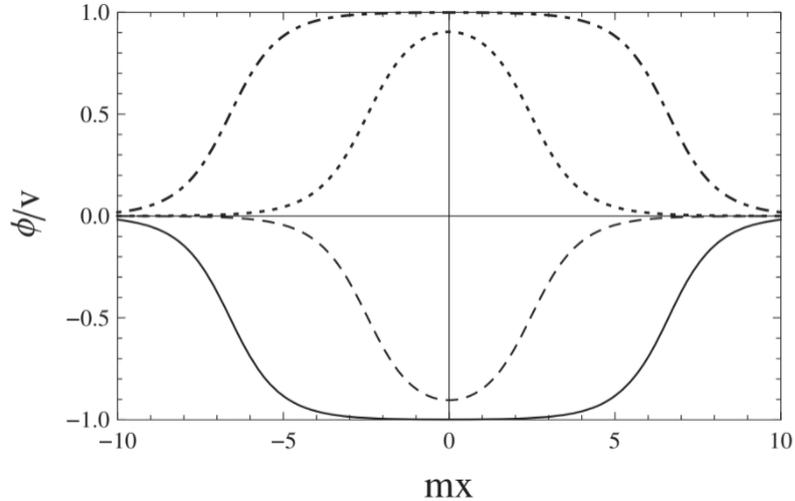
É possível mostrar que a força entre o kink e o antikink é atrativa e a energia do sistema é a mesma do caso anterior, obviamente. O gráfico da solução analítica é apresentado na figura 6.

Como a força entre essas duas estruturas é atrativa, podem existir estados ligados, conhecidos como *breathers*, cuja solução analítica é dada por:

$$\phi(x, t) = \frac{2v}{\pi} \tan^{-1} \left\{ \frac{1}{s} \sin \left(\frac{mst}{\sqrt{1+s^2}} \right) \left[\cosh \left(\frac{mx}{\sqrt{1+s^2}} \right) \right]^{-1} \right\}, \quad (2.190)$$

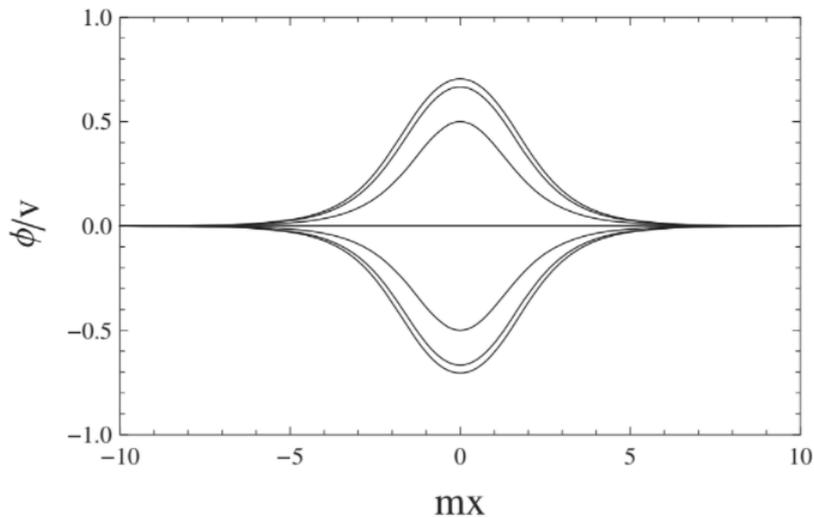
o gráfico desta função, como esperado, é o kink e o antikink acoplados, oscilando juntos.

Figura 6 – Colisão kink-antikink na teoria de sine-Gordon. A curva sólida representa $t = -20m^{-1}$, a curva tracejada representa o tempo $t = -5m^{-1}$ e a curva pontilhada-tracejada representa $t = 20m^{-1}$. Em $t = 0$, $\phi(x) = 0$



Fonte: WEINBERG, E. Classical solutions in quantum field theory. p.31, fig. 2.8, [15].

Figura 7 – Gráfico da solução dos breathers para $s = 0.5$.



Fonte: WEINBERG, E. Classical solutions in quantum field theory. p.31, fig. 2.9, [15].

A energia dessa configuração é dada por

$$E = \frac{2M_{\text{cl}}}{\sqrt{1+s^2}} < 2M_{\text{cl}}. \quad (2.191)$$

A análise da dinâmica de multi-kinks foi realizada na teoria de sine-Gordon, pela falta de distorção ou perda de energia devido as colisões, além de apresentarem a solução dos *breathers*. Isso ocorre porque o sistema é completamente integrável. Ademais, conseguimos encontrar as soluções apresentadas, utilizando as transformações de Bäcklund, um método bastante interessante e útil para entender a dinâmica dessas estruturas. Para

a teoria de ϕ^4 , as soluções de colisão entre os kinks e antikinks devem ser calculadas numericamente, como em [34, 35].

2.4 Kinks em mais dimensões

As soluções do kink em duas dimensões espaciais são, trivialmente, soluções da equações de campo em $D > 2$, com o campo sendo independente de todas, exceto em uma coordenada. Logo, a densidade de energia é localizada em uma direção espacial, mas invariante por translações nas outras direções ortogonais, dessa maneira o kink não pode ser interpretado como uma partícula. Agora, ela representa uma fronteira, conhecida como “domain wall” que separa duas regiões em que o campo aproxima diferentes valores do vácuo. Podemos escrever o tensor de energia-momento como:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu}\mathcal{L}, \quad (2.192)$$

onde $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1)$ é a métrica de Minkowski em um espaço-tempo de dimensão D . Podemos reescrever o termo da forma:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu} \left(\frac{1}{2}(\partial_\rho\phi)(\partial^\rho\phi) - V(\phi) \right). \quad (2.193)$$

Como $\frac{d\phi}{dx} = \pm\sqrt{2V(\phi)}$, e se escolhermos x^{D-1} para ser a direção ortogonal à parede, então:

$$T_{\mu\nu} = \partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \eta_{\mu\nu} \frac{1}{2} \left((\partial_\rho\phi)(\partial^\rho\phi) - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^{D-1}} \right)^2 \right). \quad (2.194)$$

Para uma melhor compreensão do leitor, vamos mostrar explicitamente alguns termos e veremos que por indução, o restante é trivial. Então, para

$$T_{00} = (\partial_0\phi)^2 - \eta_{00} \frac{1}{2} \left((\partial_\rho\phi)(\partial^\rho\phi) - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^{D-1}} \right)^2 \right). \quad (2.195)$$

Como nesse caso ϕ não depende do tempo, pois utilizamos a equação estática, então ficamos com:

$$T_{00} = -\eta_{00} \frac{1}{2} \left(-(\partial_\rho\phi)(\partial^\rho\phi) - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^{D-1}} \right)^2 \right), \quad (2.196)$$

$$T_{00} = -\eta_{00} \frac{1}{2} \left(-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x^{D-1}} \right)^2 - \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^{D-1}} \right)^2 \right). \quad (2.197)$$

Com isso,

$$T_{00} = \left(\frac{\partial\phi}{\partial x^{D-1}} \right)^2. \quad (2.198)$$

Para

$$T_{11} = (\partial_1 \phi)^2 - \frac{1}{2} \eta_{11} \left((\partial_\rho \phi)(\partial^\rho \phi) - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^{D-1}} \right)^2 \right). \quad (2.199)$$

Como ϕ depende apenas da coordenada ortogonal, então:

$$T_{11} = - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^{D-1}} \right)^2. \quad (2.200)$$

Seguimos sucessivamente até a coordenada $D - 1$, onde o resultado será diferente do que foi mostrado anteriormente, já que

$$T_{D-1, D-1} = (\partial_{D-1} \phi)^2 - \eta_{D-1, D-1} \frac{1}{2} \left(- (\partial_{D-1} \phi)^2 - \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^{D-1}} \right)^2 \right) = 0. \quad (2.201)$$

Com isso, podemos reescrever o tensor de energia momento como:

$$T_{\mu\nu} = \hat{\eta}_{\mu\nu} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x^{D-1}} \right)^2, \quad (2.202)$$

onde $\hat{\eta}_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, \dots, -1, 0)$ pode ser vista como a métrica de Minkowski restrita ao espaço-tempo de $D - 1$ dimensões.

Pela expressão de $T_{\mu\nu}$ vemos que existe uma pressão que desaparece na direção x^{D-1} e que é negativa e igual em magnitude nas outras direções. A “domain wall” preserva $SO(D - 2, 1)$ que é subgrupo do original $SO(D - 1, 1)$ que são as simetrias de Lorentz.

A análise dos modos normais da flutuação do campo em torno do kink pode ser estendido para o caso da “domain wall”. Cada modo do kink gera uma família de modos com frequência $\sqrt{\omega^2 + k_T^2}$, onde k_T^2 representa os números de onda nas direções espaciais paralelas à parede. Se o modo estiver em um estado confinado do kink, o modo D -dimensional pode ser interpretado como uma partícula de massa ω cuja dinâmica é confinada à parede.

As estruturas de “domain wall” são extremamente interessantes, mas não serão o escopo deste trabalho. Todas as estruturas que serão discutidas podem sim ter aparecido no Universo primordial e cada uma receberá um nome específico. Aos interessados por esses objetos apresentados nessa seção é recomendada a leitura de [15, 36, 37] que abordam o tema de forma bastante completa.

Esta seção foi dedicada ao entendimento dos kinks, estruturas que aparecem em diversas áreas da física, possuindo inúmeras aplicações. No nosso caso, consideramos o kink como uma partícula e calculamos sua energia clássica e suas correções quânticas. Além disso, encontramos a solução do kink de sine-Gordon e apresentamos suas outras soluções utilizando as transformações de Bäcklund. Salienta-se, também, as discussões

sobre a topologia da nossa teoria e a carga topológica intrínseca aos defeitos topológicos, algo que será recorrente nas próximas seções e que dão origem a todo este trabalho.

CAPÍTULO

3

VÓRTICES

3.1 Introdução

É importante, antes de iniciar este capítulo, comentar que, para os próximos capítulos, utilizaremos uma referência [30] diferente da seção anterior, por isso, o leitor poderá perceber que a métrica utilizada será alterada para $\eta_{\mu\nu} = (-1, +1, +1, +1)$.

Os sólitons calculados na seção anterior não só aparecem em teorias unidimensionais como também podem ser vistos em dimensões maiores. Anteriormente, vimos que para a existência do sóliton em uma dimensão precisávamos fazer um mapa da reta real \mathbb{R} para os dois vácuos no infinito. Para o caso bidimensional, onde nossa fronteira é S^1 , não podemos mapeá-la em apenas dois pontos, mas podemos fazer um mapa não-trivial suave de $S^1 \rightarrow S^1$. Por esse motivo, somos motivados a buscar uma teoria cujo vácuo tenha a topologia de um círculo. Para entender melhor sobre o porquê dessa afirmação, o leitor é convidado a ler o Apêndice B. Então, dada a Lagrangiana de um campo escalar complexo escrita por:

$$\mathcal{L} = -\partial^\mu \varphi^\dagger \partial_\mu \varphi - V(\varphi), \quad (3.1)$$

onde

$$V(\varphi) = \frac{1}{4} \lambda (\varphi^\dagger \varphi - v^2)^2. \quad (3.2)$$

As configurações de vácuo podem ser escritas como:

$$\varphi(x) = v e^{i\alpha}, \quad (3.3)$$

onde α é um ângulo arbitrário. Reescrevendo $\mathbf{x} = r(\cos \phi, \sin \phi)$ implica que o ângulo ϕ representa um ponto no círculo espacial localizado no infinito. Se impusermos que o ângulo α seja uma função dependente de ϕ , então conseguiríamos criar um mapa $S^1_{\text{espacial}} \rightarrow S^1_{\text{vácuo}}$. Para que $\varphi(x)$ tenha um valor único em cada ponto, precisamos da condição de periodicidade em α , ou seja, $\alpha(\phi + 2\pi) = \alpha(\phi) + 2\pi n$, e o n representa a carga topológica ou o *winding number*.

Um exemplo de um mapa com a carga topológica igual a n pode ser escrito como $U(\phi) = e^{in\phi}$. Para $n = 0$ temos um mapeamento trivial, $n = 1$ é a identidade e $n = -1$ é o inverso da identidade.

Dessa forma seja $U(\phi)$ um mapa suave, sua carga topológica pode ser escrita como

$$n = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi U(\phi) \partial_\phi U(\phi)^\dagger. \quad (3.4)$$

Vemos que, para o nosso exemplo anterior, se substituirmos na equação acima temos que

$$\frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi U(\phi) \partial_\phi U(\phi)^\dagger = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi e^{in\phi} (-in) e^{-in\phi} = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi = n. \quad (3.5)$$

Podemos procurar por soluções de energia finita para nossa teoria com a condição de contorno que

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi(r, \phi) = vU(\phi). \quad (3.6)$$

Dessa maneira, fazemos um ansatz da seguinte forma

$$\varphi(r, \phi) = v f(r) e^{in\phi}, \quad (3.7)$$

onde $f(r)$ é uma função real com a condição de que $f(\infty) = 1$. Para que $\nabla\varphi(r, \phi)$ seja bem definido na origem também precisamos que $f(0) = 0$.

Dessa forma, o gradiente do campo é dado por

$$\nabla\varphi = v \left[f'(r) \hat{r} + inr^{-1} f(r) \hat{\phi} \right] e^{in\phi}, \quad (3.8)$$

e o gradiente da densidade de energia é

$$|\nabla\varphi|^2 = v^2 \left[f'(r)^2 + n^2 r^{-2} f(r)^2 \right]. \quad (3.9)$$

Vemos que nesse caso, quando $r \rightarrow \infty$ então $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1$ e por isso a equação acima para grandes valores de r , se torna

$$\int d^2x |\nabla\varphi|^2 \sim 2\pi n^2 v^2 \int^\infty \frac{dr}{r}. \quad (3.10)$$

Vemos que ela diverge logaritmicamente, resultando em uma energia infinita. Para entendermos o porquê disso acontecer e como podemos contornar o problema, invocando o *teorema de Derrick*.

Tal teorema é fundamental para o entendimento e para a existência dos sólitons topológicos, já que ele avalia a estabilidade das soluções estáticas.

Consideremos uma teoria em D dimensões espaciais envolvendo campos escalares ϕ_a . Podemos escrever a Lagrangiana da seguinte forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_b - V(\phi), \quad (3.11)$$

onde o mínimo é quando $V = 0$.

Podemos escrever a equação considerando uma solução estática e escrevendo a energia como $E = I_K + I_V$ onde,

$$I_K[\phi] = \frac{1}{2} \int d^D x \partial_j \phi_a \partial_j \phi_b \quad (3.12)$$

e

$$I_V[\phi] = \int d^D x V(\phi), \quad (3.13)$$

ambas positivas. Suponha que dada um solução $\bar{\phi}(\mathbf{x})$ podemos considerar uma família de soluções escritas como

$$f_\lambda(\mathbf{x}) = \bar{\phi}(\lambda \mathbf{x}) \quad (3.14)$$

que nada mais são do que reescalas dos comprimentos. Logo, a energia pode ser reescrita como

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= I_K[f_\lambda] + I_V[f_\lambda], \\ &= \lambda^{2-D} I_K[\bar{\phi}] + \lambda^{-D} I_V[\bar{\phi}]. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Como temos, por construção, que $f_1 = \bar{\phi}(\mathbf{x})$, então $\lambda = 1$ é um ponto estacionário de $E(\lambda)$, e por isso, derivando-o em função de lambda e igualando a zero, temos:

$$0 = (D - 2)I_K[\bar{\phi}] + DI_V[\bar{\phi}]. \quad (3.16)$$

Quando $D = 1$ temos a conhecida identidade de virial. Para $D = 2$ vemos que $I_V = 0$ o que implicaria que em todo o espaço o campo ϕ estaria no vácuo da teoria. Para $D \geq 3$ a condição de igualdade só será satisfeita se I_K e I_V ambos fossem nulos, o que resultaria no valor constante do vácuo, novamente.

Dessa forma, se queremos encontrar sóliton em duas, três ou mais dimensões precisamos acoplar mais estrutura à nossa Teoria. Uma maneira que funciona é considerar teorias de gauge com a seguinte Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \text{tr} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \frac{1}{2} (D_\mu \phi)^\dagger (D^\mu \phi) - V(\phi). \quad (3.17)$$

Para uma configuração de solução estática a energia do sistema pode ser escrita como

$$E = I_F + I_K + I_V, \quad (3.18)$$

onde,

$$\begin{aligned} I_F[A] &= \frac{1}{2} \int d^D x \operatorname{tr} F_{ij}^2, \\ I_K[\phi, A] &= \frac{1}{2} \int d^D x (D_j \phi)^\dagger (D_j \phi), \\ I_V[\phi] &= \int d^D x V(\phi). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dadas duas soluções $\bar{\phi}(x), \bar{A}_j(x)$, definimos os campos reescalados como

$$\begin{aligned} f_\lambda(x) &= \bar{\phi}(\lambda x), \\ g_{j\lambda}(x) &= \lambda \bar{A}_j(\lambda x). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Analogamente no caso escalar temos que

$$\begin{aligned} E(\lambda) &= I_F[g_\lambda] + I_K[f_\lambda, g_\lambda] + I_V[f_\lambda], \\ &= \lambda^{4-D} I_F[\bar{A}] + \lambda^{2-D} I_K[\bar{\phi}, \bar{A}] + \lambda^{-D} I_V[\bar{\phi}]. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Utilizando o mesmo argumento de que a solução é estacionária para $\lambda = 1$ e fazendo $\frac{dE(\lambda)}{d\lambda} = 0$, ficamos com

$$0 = (D - 4)I_F[\bar{A}] + (D - 2)I_K[\bar{\phi}, \bar{A}] + DI_V[\bar{\phi}]. \quad (3.22)$$

Vemos que existem soluções estáticas para campos de gauge e escalar em $D = 2, 3$. Em $D = 4$ a única possibilidade é na teoria de Yang-Mills pura, ou seja sem campos escalares, dando origem aos instantons. Para dimensões maiores, nossa Lagrangiana já não apresenta soluções estáticas e por consequência, não existe o surgimento de sólitons topológicos para esse caso.

Esse teorema é crucial para realizar a classificação dos sólitons topológicos, em D dimensões. Seguiremos nossa análise com a Lagrangiana 3.17, onde sabemos que conseguimos encontrar configurações estáticas, de energia finita.

3.2 Vórtices como sólitons topológicos

Como visto anteriormente, os vórtices globais têm energia e massa infinita. Para corrigir esse problema podemos introduzir campos de gauge, observando que a Lagrangiana anterior possui uma simetria global $U(1)$, então, nossa nova Lagrangiana se torna

$$\mathcal{L} = - (D^\mu \varphi)^\dagger D_\mu \varphi - V(\varphi) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad (3.23)$$

onde a derivada covariante é definida por $D_\mu\varphi = \partial_\mu\varphi - ieA_\mu\varphi$ e o termo do potencial é dado por $V(\varphi) = \frac{1}{4}\lambda(\varphi^\dagger\varphi - v^2)^2$.

A simetria de gauge é espontaneamente quebrada escolhendo $\varphi(x)$ da seguinte forma

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x))e^{\frac{-i\chi(x)}{v}}$$

Escolhendo o gauge unitário temos:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}(v + \rho(x)). \quad (3.24)$$

Então podemos reescrever

$$-(D^\mu\varphi)^\dagger(D_\mu\varphi) = -\frac{1}{2}((\partial^\mu\varphi^\dagger + ieA^\mu(v + \rho(x)))(\partial_\mu\varphi - ieA_\mu(v + \rho(x)))), \quad (3.25)$$

$$= -\frac{1}{2}\partial^\mu\rho(x)\partial_\mu\rho(x) - \frac{1}{2}e^2A^\mu A_\mu(v + \rho(x))^2. \quad (3.26)$$

Expandindo o último termo vemos que a massa da partícula vetorial é dada por $m_v = ev$. Para o caso do potencial vemos que

$$V(\varphi) = \frac{1}{4}\lambda(\varphi^\dagger\varphi - v^2)^2 = \frac{1}{4}\lambda\left(\frac{1}{2}(v + \rho(x))^2 - v^2\right)^2, \quad (3.27)$$

$$= \frac{1}{4}\lambda\left(-\frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{2}\rho(x)^2 + v\rho(x)\right)^2. \quad (3.28)$$

Expandindo os termos e analisando a parte quadrática, vemos que nossa partícula escalar tem a massa igual a $m_s = \frac{\sqrt{\lambda}v}{2}$.

O gradiente da densidade de energia pode ser visto agora como

$$|\vec{D}\phi|^2 = |(\nabla - ie\mathbf{A})\phi|^2. \quad (3.29)$$

Podemos escolher um \mathbf{A} de tal maneira que ele cancele o termo da energia que, anteriormente, nos levava logaritmicamente para o infinito. Podemos ver isso da seguinte forma. Lembramos que uma transformação de gauge na teoria que estamos trabalhando é dada por

$$\varphi \rightarrow U\varphi, \quad (3.30)$$

$$A_\mu \rightarrow UA_\mu U^\dagger - \frac{i}{e}U\partial_\mu U^\dagger. \quad (3.31)$$

Tal transformação para $A_\mu = 0$ resulta em

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \mathbf{A}(r, \phi) = \frac{i}{e}U\nabla U^\dagger = \frac{n}{er}\hat{\phi} \quad (3.32)$$

Para $n \neq 0$, $U(\phi) = e^{in\phi}$ é uma transformação de gauge *large*, veremos o que significa essa transformação no capítulo 5. De maneira geral, temos uma obstrução do campo na origem e, a partir dessa obstrução e do comportamento dos campos φ e \mathbf{A} ao redor da mesma, temos o surgimento de um sóliton.

Nosso ansatz do sóliton para a Lagrangiana apresentada é dado por

$$\varphi(r, \phi) = v f(r) U(\phi) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{A}(r, \phi) = \frac{i}{e} a(r) U(\phi) \nabla U^\dagger(\phi) \quad (3.34)$$

onde $U(\phi) = e^{in\phi}$ e impomos que $f(\infty) = a(\infty) = 1$ e $f(0) = a(0) = 0$ para que tanto \mathbf{A} quanto φ sejam bem definidos na origem. Para $n = 1$ temos o *Vórtice de Nielsen-Olesen*.

O potencial vetor gera um campo magnético \mathbf{B} na direção perpendicular ao mesmo, dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \nabla \times \mathbf{A}, \\ &= \frac{1}{r} \left(\frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) - \frac{\partial}{\partial \phi} A_r \right) \hat{z}, \\ &= \frac{n a'(r)}{e r} \hat{z}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

e o fluxo do campo magnético pode ser calculado como:

$$\begin{aligned} \Phi &= \int d\mathbf{S} \cdot \mathbf{B} \\ &= \lim_{r \rightarrow \infty} \int d\boldsymbol{\ell} \cdot \mathbf{A}, \\ &= \frac{i}{e} \lim_{r \rightarrow \infty} a(r) \int_0^{2\pi} d\phi U \partial_\phi U^\dagger \\ &= \frac{2\pi n}{e}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Vemos que o fluxo do campo magnético é quantizado, um resultado que é puramente topológico. Podemos encontrar a energia deste sóliton através do Hamiltoniano, ou seja, basta fazermos uma transformação de Legendre na Lagrangiana da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= - (D^\mu \varphi)^\dagger D_\mu \varphi - V(\varphi) - \frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \\ \mathcal{L} &= \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_1; \quad \mathcal{L}_0 = -\frac{1}{4} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}, \quad \mathcal{L}_1 = - (D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) - V(\varphi). \end{aligned} \quad (3.37)$$

$$\begin{aligned} \pi_0^l &= \frac{\partial \mathcal{L}_0}{\partial \partial_0 A_l} = \frac{\partial}{\partial \partial_0 A_l} \left(-\frac{1}{4} (\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu) \right), \\ &= -\frac{1}{2} F^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial \partial_0 A_l} (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu), \end{aligned} \quad (3.38)$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{2}F^{\mu\nu}(\delta_{0\mu}\delta_{l\nu} - \delta_{0\nu}\delta_{l\mu}), \\
&= -\frac{1}{2}(F^{0l} - F^{l0}), \\
&= -F^{0l}.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

Podemos agora, calcular o Hamiltoniano de \mathcal{H}_0 fazendo:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_0 &= \pi^i \dot{A}_i - \mathcal{L}_0 = \pi^i \partial_0 A_i + \frac{1}{4}F^{\mu\nu}F_{\mu\nu}, \\
&= -\pi^i \pi_i + \frac{1}{4}(2F^{0i}F_{0i} + F^{ij}F_{ij}), \\
&= -\frac{1}{2}\pi^i \pi_i + \frac{1}{4}F^{ij}F_{ij}.
\end{aligned} \tag{3.40}$$

Analogamente para \mathcal{H}_1 ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 &= \pi \partial_0 \varphi^\dagger - \mathcal{L}_1, \\
\pi &= \frac{\partial \mathcal{L}_1}{\partial \partial_0 \varphi^\dagger} = -\partial_0 \varphi, \\
\mathcal{H}_1 &= \pi \partial_0 \varphi^\dagger + (D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) + V(\varphi), \\
\mathcal{H}_1 &= -(D_0 \varphi) (D_0 \varphi)^\dagger + (D^\mu \varphi)^\dagger (D_\mu \varphi) + V(\varphi), \\
\mathcal{H}_1 &= |D_i \varphi|^2 + V(\varphi).
\end{aligned} \tag{3.41}$$

Temos que nossa hamiltoniana é escrita como $\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1$, então a energia do sóliton pode ser escrita como:

$$E = \int d^2x \left[|(\nabla - ie\mathbf{A})\varphi|^2 + V(\varphi) + \frac{1}{2}\mathbf{B}^2 \right]. \tag{3.42}$$

Substituindo nosso ansatz 3.33 e 3.34 na equação acima ficamos com

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty dr r \left[|(\nabla - (a(r)U(\phi)\nabla U^\dagger(\phi)))v^2 f(r)U(\phi)|^2 \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4}\lambda(vf(r)U^\dagger(\phi)vf(r)U(\phi) - v^2)^2 + \frac{1}{2}\frac{n^2}{e^2}\frac{a'^2(r)}{r^2} \right].
\end{aligned} \tag{3.43}$$

Abrindo os termos ficamos com

$$E = 2\pi v^2 \int_0^\infty dr r \left[f'^2 + \frac{n^2}{r^2}(a-1)^2 f^2 + \frac{1}{4}\lambda v^2 (f^2 - 1)^2 + \frac{n^2}{e^2 v^2 r^2} a'^2 \right]. \tag{3.44}$$

Podemos definir uma variável $\rho \equiv evr$ e $\beta^2 \equiv \frac{\lambda}{e^2} = \frac{m_s^2}{m_v^2}$. Dessa maneira podemos reescrever a energia como

$$E = 2\pi v^2 \int_0^\infty \frac{d\rho\rho}{e^2 v^2} \left[f'^2 + \frac{e^2 v^2 n^2}{\rho^2} (a-1)^2 f^2 + \frac{1}{4} \beta^2 e^2 v^2 (f^2 - 1)^2 + \frac{n^2}{\rho^2} a'^2 \right]. \quad (3.45)$$

Resultando em

$$\boxed{E = 2\pi v^2 \int_0^\infty d\rho\rho \left[f'^2 + \frac{n^2}{\rho^2} (a-1)^2 f^2 + \frac{1}{4} \beta^2 (f^2 - 1)^2 + \frac{n^2}{\rho^2} a'^2 \right]}. \quad (3.46)$$

Ressaltando que a derivada dos termos na equação 3.46 são em função de ρ . Para encontrar as equações de $f(\rho)$ e $a(\rho)$ podemos utilizar dois métodos. O primeiro é aplicando o princípio variacional na equação da energia ou então podemos substituir nosso ansatz nas equações de movimento. Então, começando pelo primeiro:

Para $f(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial E}{\partial f'} \right) - \frac{\partial E}{\partial f} &= 0, \\ 2f''\rho + 2f' - \frac{2n^2}{\rho} (a-1)^2 f - \rho\beta^2 (f^2 - 1) f &= 0, \\ f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{n^2}{\rho^2} (a-1)^2 f + \frac{1}{2}\beta^2 (1 - f^2) f &= 0. \end{aligned} \quad (3.47)$$

Para $a(\rho)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\rho} \left(\frac{\partial E}{\partial a'} \right) - \frac{\partial E}{\partial a} &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\frac{2n^2 a'}{\rho^2} \right) - \frac{2n^2}{\rho^2} (a-1) f^2 &= 0, \\ \frac{2n^2 a'}{\rho^2} - \frac{4n^2 a'}{\rho^3} - \frac{2n^2}{\rho^2} (a-1) f^2 &= 0, \\ a'' - \frac{2a'}{\rho} + (1-a) f^2 &= 0. \end{aligned} \quad (3.48)$$

Mostramos as equações para os campos. Uma forma mais trabalhosa é substituir o ansatz nas equações de movimento e tais equações de movimento da Lagrangiana são dadas por:

Para $\varphi(x)$:

$$\begin{aligned} \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} &= 0, \\ -\partial_\mu (D^\mu \varphi)^\dagger &= ieA_\mu (D^\mu \varphi)^\dagger - \frac{1}{2} \lambda (\varphi^\dagger \varphi - v^2) \varphi^\dagger, \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned}
\partial_\mu (\partial^\mu \varphi^\dagger + ieA^\mu \varphi^\dagger) + ieA_\mu (\partial^\mu \varphi^\dagger + ieA^\mu \varphi^\dagger) - \frac{1}{2} \lambda (\varphi^\dagger \varphi - v^2) \varphi^\dagger &= 0, \\
\partial_\mu \partial^\mu \varphi^\dagger + ie\partial_\mu A^\mu \varphi^\dagger + ieA^\mu \partial_\mu \varphi^\dagger + ieA_\mu \partial^\mu \varphi^\dagger - e^2 A_\mu A^\mu \varphi^\dagger - \frac{1}{2} \lambda (\varphi^\dagger \varphi - v^2) \varphi^\dagger &= 0, \\
\Box \varphi^\dagger + ie\partial_\mu A^\mu \varphi^\dagger + 2ieA^\mu \partial_\mu \varphi^\dagger - e^2 A_\mu A^\mu \varphi^\dagger - \frac{1}{2} \lambda (\varphi^\dagger \varphi - v^2) \varphi^\dagger &= 0, \\
\nabla^2 \varphi^\dagger + ie\partial_i A^i \varphi^\dagger + 2ieA^i \partial_i \varphi^\dagger - e^2 A_i A^i \varphi^\dagger - \frac{1}{2} \lambda (\varphi^\dagger \varphi - v^2) \varphi^\dagger &= 0.
\end{aligned} \tag{3.50}$$

Podemos separar as contas termo a termo para que os resultados e a substituição do ansatz fique mais clara. Dessa forma, temos:

$$\begin{aligned}
\nabla^2 \varphi &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \phi^2}, \\
\nabla^2 \varphi^\dagger &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} (vf(r)U^\dagger(\phi)) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} (vf(r)U^\dagger(\phi)), \\
&= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr f'(r)U^\dagger(\phi)) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \phi} (-invf(r)U^\dagger(\phi)), \\
&= \frac{vf'(r)U^\dagger(\phi)}{r} + vf''(r)U^\dagger(\phi) + \frac{1}{r^2} (-n^2vf(r)U^\dagger(\phi)).
\end{aligned} \tag{3.51}$$

$$\nabla \cdot A = \frac{1}{r} \frac{\partial (rA_r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\phi}{\partial \phi}. \tag{3.52}$$

$$\begin{aligned}
ie\partial_i A^i \varphi^\dagger &= -\partial_i (a(r)U(\phi)\nabla U^\dagger(\phi)) \varphi^\dagger, \\
&= \partial_i \left(a(r) \frac{in}{r} \hat{\phi} \right) \varphi^\dagger.
\end{aligned} \tag{3.53}$$

Vemos que teremos apenas a componente $\hat{\phi}$ para esse termo e aplicando o divergente, temos:

$$ie\partial_i A^i \varphi^\dagger = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(a(r) \frac{in}{r} \right) \varphi^\dagger = 0. \tag{3.54}$$

Prosseguindo para o próximo termo, temos

$$\begin{aligned}
2ieA^i \partial_i \varphi^\dagger &= 2ie \left(\frac{i}{e} a(r)U(\phi)\nabla U^\dagger(\phi) \right) \left(vf'(r)U^\dagger(\phi)\hat{r} - \frac{inv}{r} f(r)U^\dagger(\phi)\hat{\phi} \right) \\
&= 2 \left(in \frac{a(r)}{r} \hat{\phi} \right) \left(vf'(r)U^\dagger(\phi)\hat{r} - \frac{inv}{r} f(r)U^\dagger(\phi)\hat{\phi} \right) \\
&= \frac{2n^2}{r^2} va(r)f(r)U^\dagger(\phi).
\end{aligned} \tag{3.55}$$

Continuando para o restante dos termos, temos:

$$\begin{aligned}
-e^2 A_i A^i \varphi^\dagger &= a^2(r) U(\phi) U(\phi) (\nabla U^\dagger(\phi)) (\nabla U^\dagger(\phi)) (v f(r) U^\dagger(\phi)) \\
&= -\frac{n^2}{r^2} v a^2(r) f(r) U^\dagger(\phi).
\end{aligned} \tag{3.56}$$

O último termo pode ser escrito como:

$$-\frac{1}{2} \lambda (\varphi^\dagger \varphi - v^2) \varphi^\dagger = +\frac{1}{2} \lambda v^2 (1 - f^2(r)) v f(r) U^\dagger(\phi). \tag{3.57}$$

Multiplicando todos os termos por $\frac{1}{v U^\dagger(\phi)}$ e somando-os, temos nossa primeira equação

$$f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{n^2 f}{\rho^2} (1 - a)^2 + \frac{1}{2} \beta^2 (1 - f^2) f = 0. \tag{3.58}$$

Para A^μ :

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A^\mu)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A^\mu} = 0, \tag{3.59}$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = e^2 (D_\mu \varphi) \varphi^\dagger (D^\mu \varphi)^\dagger \varphi. \tag{3.60}$$

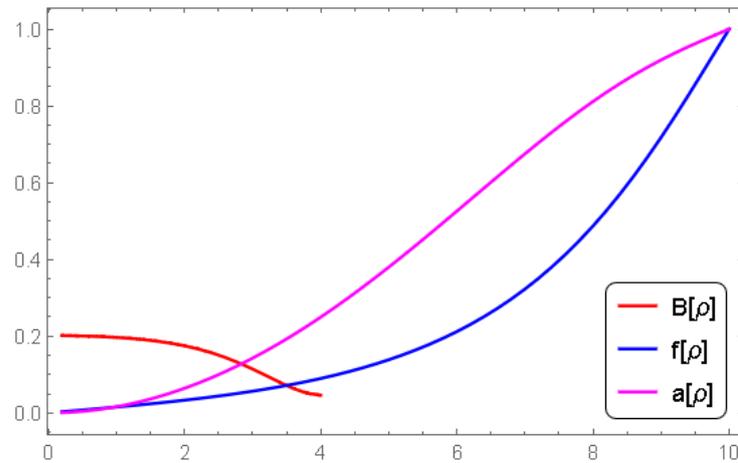
Seguindo os passos similares ao processo anterior, vemos então que realmente os resultados são iguais e as equações para $f(\rho)$ e $a(\rho)$ são dadas por

$$\begin{aligned}
f'' + \frac{f'}{\rho} - \frac{n^2 f}{\rho^2} (1 - a)^2 + \frac{1}{2} \beta^2 (1 - f^2) f &= 0, \\
a'' - \frac{2a'}{\rho} + (1 - a) f^2 &= 0.
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Podemos fazer um gráfico das equações e temos o seguinte resultado apresentado na figura 8.

Como temos nossa solução solitônica, assim como no caso do kink, podemos realizar uma translação ou um boost e possuir a solução viajante. Em duas dimensões espaciais esperamos que esse defeito topológico se comporte como uma partícula e em três dimensões essa estrutura seria localizada em duas dimensões e se estenderia na terceira, dando origem às *Cordas de Nielsen-Olesen*.

No Universo primordial, tais cordas podem ter sido formadas após quebras de simetria e são conhecidas como *Cordas Cósmicas*. Esses objetos teriam uma espessura menor que a de um próton, entretanto poderiam ter o comprimento equivalente ao Universo observável e seriam extremamente massivas e energéticas. Trabalhos na área [38],[39], principalmente [40], que são renomados pesquisadores nesse setor, elucidam bastante sobre a formação e a dinâmica dessas cordas, inclusive existem trabalhos de E. Witten [41] que relacionou as cordas cósmicas à teoria de cordas, gerando as supercordas cósmicas.

Figura 8 – Gráfico das funções $f(\rho)$, $a(\rho)$ e o campo magnético B para a solução do vórtice.

Aos interessados, na referência [33] é feita uma análise bastante completa sobre os vórtices que, basicamente, é uma excelente continuação do assunto tratado nessa seção, entre eles recomenda-se: a força entre vórtices de gauge; a dinâmica dos vórtices de gauge; o espalhamento de dois vórtices; variação da geometria da teoria e mecânica estatística dos vórtices. Percebe-se que os tópicos são bastante interessantes e são uma progressão natural àqueles que se interessarem por estas estruturas.

CAPÍTULO

4

MONOPOLOS MAGNÉTICOS

4.1 Introdução

Antes de começarmos a falar sobre monopolos podemos relembrar das equações clássicas do Eletromagnetismo, que são as *equações de Maxwell*:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t},$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

A terceira equação $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ nos diz que as linhas do campo magnético são fechadas e por isso, não teríamos monopolos magnéticos nesta teoria. Podemos tentar esquecer isso, por hora, e ver as equações de Maxwell em um formato simétrico, já que se estivermos em uma região sem cargas elétricas, então existirá uma dualidade entre o campo elétrico e o magnético. Vemos que essa simetria se perde quando adicionamos uma carga elétrica, então de certa forma, para recuperar a simetria perdida das equações podemos adicionar em conjunto uma densidade de carga magnética ρ_m , nesse caso nossas equações seriam:

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \mu_0 \mathbf{J}_m,$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = \mu_0 \rho_m, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Vemos que as equações são simétricas e que existe uma dualidade¹ entre os campos \vec{E} e \vec{B} . Sabemos da série de problemas que resultam no Eletromagnetismo clássico, após a adição de uma carga magnética. Entretanto, Dirac mostrou [16] que mesmo que as linhas de campo sejam fechadas, ainda há possibilidade da existência de um monopolo magnético e, além disso, a existência de um único monopolo de Dirac, que será apresentado a seguir, mostra [17] que as partículas precisam ter carga elétrica quantizada.

Infelizmente, não somos capazes de estimar um valor para a massa do monopolo de Dirac, já que o mesmo apresenta uma singularidade na origem, fazendo com que sua Energia e, conseqüentemente, sua massa sejam infinitas.

O primeiro monopolo que possuía uma configuração de energia finita foi encontrado em 1974, pelos trabalhos de Gerardus 't Hooft e Alexander Polyakov [18, 19]. O que o diferenciava dos outros que já existiam no momento era a sua origem puramente topológica, que emergia da quebra espontânea da simetria $SU(2)$ para $U(1)$ na teoria de Georgi-Glashow [20]. Iremos discutir melhor sobre esse que ficou conhecido como monopolo de t'Hooft-Polyakov.

Um ano após a descoberta de um monopolo que poderia ser um sólito topológico, Julia e Zee [43] estenderam o ansatz de t'Hooft-Polyakov e encontraram uma partícula introduzida por Meghnad Saha e Julian Schwinger [44, 45] chamada Dyon, que possui tanto a carga elétrica, quanto a magnética. O ansatz proposto por Julia e Zee inspirou Cho e Maison [21] a descreverem um Dyon e, por consequência, um monopolo na teoria eletrofraca, esse monopolo pode ser visto como um híbrido entre o monopolo de Dirac e de t'Hooft-Polyakov. Vale ressaltar que monopolo de t'Hooft-Polyakov era uma tentativa de encontrar essa partícula em uma teoria eletrofraca, entretanto, a teoria de Georgi-Glashow não foi um bom modelo para descrevê-la, já que o modelo proposto, na quebra de simetria, não apresentava o bóson Z e, por isso, a teoria que atualmente consideramos descrever a força eletrofraca é a teoria de Glashow-Weinberg-Salam. Hoje em dia, existem monopolos em Teorias de Grande Unificação (GUT's) cujos grupos de simetria são $SU(5)$ e $SO(10)$ e o assunto aparece também no contexto de Supersimetria, Dualidade e na Teoria de Cordas. A busca por essa partícula, no âmbito experimental, ocorre principalmente no MoEDAL (Monopole and Exotics Detector At the LHC), que como o próprio nome já diz, é um dos experimentos do CERN onde os pesquisadores da área acreditam que possam vir notícias sobre a detecção ou não do monopolo, que de qualquer maneira encontrados

¹ Pode ser visto, na referência [42], que a invariância das equações de Maxwell sob transformações de dualidade evidenciam que, propor uma partícula tenha carga elétrica mas que não tenha carga magnética, não passa de uma convenção. O que, verdadeiramente, importa é se todas as partículas têm a mesma razão entre a carga magnética e elétrica. Se elas têm, então é possível fazer uma transformação de dualidade em que $\rho_m = \mathbf{J}_m = 0$, retornando às equações de Maxwell usuais.

ou não, trazem uma grande informação do Universo primordial e nos aproxima, cada vez mais, da Teoria Final.

4.2 Monopolos de Dirac

Uma carga magnética pontual de força g , em repouso na origem, é por definição um objeto com um campo magnético igual a

$$\vec{B} = \frac{g}{4\pi r^2} \hat{r}. \quad (4.1)$$

Longe da origem, todas as equações usuais de Maxwell no vácuo são satisfeitas, mas há uma função delta para o campo magnético

$$\nabla \cdot \vec{B} = g\delta^3(r), \quad (4.2)$$

e como sabemos podemos utilizar as lei de Gauss para calcular o fluxo do campo magnético, fazendo:

$$\int_S \vec{B} \cdot dS = 4\pi g. \quad (4.3)$$

O argumento de Dirac é puramente matemático, ele argumentava que o potencial vetor para a equação de \vec{B} precisa existir, apesar do mesmo ter uma singularidade na origem. O problema é que para a construção do potencial vetor A , assumimos que o $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, o que não é verdade por hipótese. O argumento aqui é que o potencial vetor não precisa ser definido globalmente, apenas localmente.

Podemos escrever o potencial vetor localmente da seguinte forma

$$A^{li} = -\epsilon^{ij3} \hat{r}^j \frac{g}{z+r}, \quad (4.4)$$

e em componentes esféricas, na forma:

$$A^{(1)} = \frac{g}{4\pi r} \frac{(\cos(\theta) - 1)}{\sin(\theta)} \mathbf{e}_\phi, \quad (4.5)$$

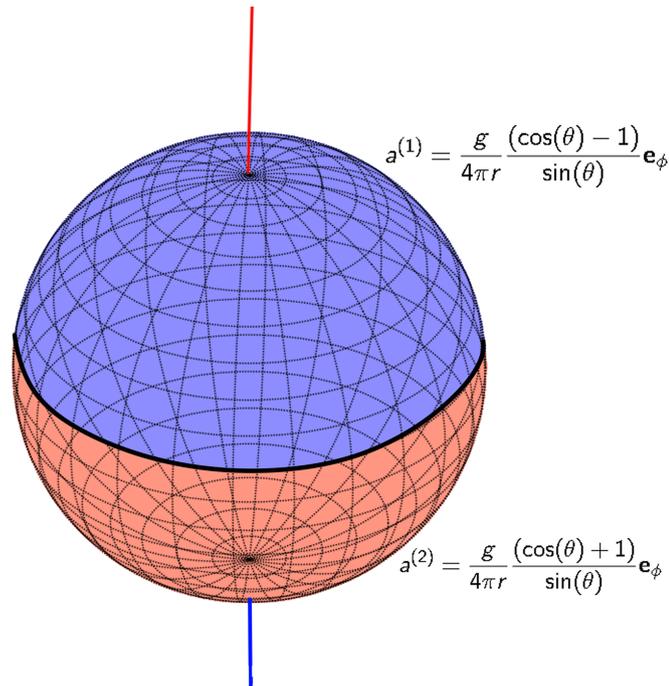
$$A^{(2)} = \frac{g}{4\pi r} \frac{(\cos(\theta) + 1)}{\sin(\theta)} \mathbf{e}_\phi, \quad (4.6)$$

onde $\mathbf{e}_\phi = (-\sin(\phi), \cos(\phi), 0)$ e $a_r = a_\theta = 0$.

Vemos que nossas equações possuem duas indeterminações se estendermos $\theta = \pi$ no segundo ou $\theta = 0$ no primeiro. Essas singularidades são chamadas de **Cordas de Dirac**, cada polo norte magnético está conectado a um polo sul magnético por uma linha de singularidade, que são essas tais Cordas. Podemos imaginá-la efetivamente como um solenoide ideal com espessura zero que carrega o fluxo magnético do polo sul para o polo norte, de forma que as linhas de campo permaneçam contínuas. Na física clássica, tal corda

seria facilmente observável devido ao efeito que teria sobre as partículas eletricamente carregadas. Mas na física quântica, se a carga magnética dos polos tem exatamente um certo valor preciso, as partículas eletricamente carregadas não são afetadas pela presença da corda. Esse valor é dado pela chamada condição de quantização de Dirac.

Figura 9 – Representação das cordas de Dirac



Uma pergunta que nos vem a mente é se nós precisamos nos preocupar com as singularidades no potencial vetor. No caso do eletromagnetismo clássico, não. Apenas a força dos campos é mensurável, os potenciais são quantidades auxiliares, mas que não podem ser medidos. Entretanto, em QFT precisamos nos preocupar com esses potenciais. Para mostrar essa condição, podemos supor que alguém tomasse uma partícula com carga elétrica q (sem carga magnética), em torno de um pequeno caminho fechado C que circunda a corda. A função de onda da partícula seria multiplicada por um fator de fase $I[C] = \exp(2\pi i q \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l})$. Se não houvesse a corda, a integral em torno do loop desapareceria, dando $I = 1$, no limite em que o loop for contraído a um ponto. Se a corda não for observável, devemos obter o mesmo resultado quando o caminho fechado é contraído em um loop infinitesimal ao redor da corda. A integral de linha é avaliada mais facilmente usando coordenadas esféricas. Escolhendo o loop C em um valor constante de θ , e usando nossos potenciais vetores, temos

$$q \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{l} = q \int d\phi A_\phi = 2\pi q g (\cos(\theta) - 1). \quad (4.7)$$

Se nosso loop C for contraído de modo que se torne uma curva infinitesimal em torno da corda, no limite $\theta \rightarrow \pi$ a integral de linha torna-se $4\pi qg$. Inserindo isso na equação I[C], para a corda de Dirac não ser observada, devemos exigir que

$$e^{4\pi i qg} = 1, \quad (4.8)$$

ou melhor que

$$\boxed{qg = \frac{n}{2}}, \quad (4.9)$$

para n um inteiro arbitrário. Essa equação é conhecida como a **condição de quantização de Dirac**. Já que a partícula com carga q poderia ter sido qualquer partícula eletricamente carregada no universo, a condição de quantização deve ser satisfeita por cada carga, (embora não necessariamente com o mesmo inteiro n). Como podemos escolher um valor arbitrário para as cargas, então vamos escrevê-las da seguinte forma:

$$\begin{aligned} q &= kq_{min}, \\ g &= mg_{min}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

onde k, m são inteiros, então temos que

$$q_{min}g_{min} = \frac{1}{2}. \quad (4.11)$$

Assim, a detecção de até mesmo um único monopolo magnético forneceria um explicação para a quantização observada de carga elétrica.

4.3 Monopolos como Sólitons Topológicos

Ao tratarmos de sólitons topológicos em três dimensões espaciais, sabemos que a fronteira desse espaço tem a topologia de S^2 . Dessa forma, precisamos procurar pela mesma topologia para o vácuo. Uma das teorias que apresenta tal propriedade é a da Lagrangiana apresentada abaixo

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\partial^\mu\varphi^a\partial_\mu\varphi^a - V(\varphi), \quad (4.12)$$

onde

$$V(\varphi) = \frac{1}{8}\lambda(\varphi^a\varphi^a - v^2)^2. \quad (4.13)$$

As configurações de vácuo do campo são dadas por

$$\varphi^a(x) = v\hat{\varphi}^a. \quad (4.14)$$

Podemos escrever $\mathbf{x} = (\sin\theta\cos\phi, \sin\theta\sin\phi, \cos\theta)$ em coordenadas esféricas e dessa maneira, um \mathbf{x} arbitrário especifica uma 2-esfera no infinito. Podemos construir um mapa $\hat{\varphi}^a(\theta, \phi) : S^2_{Espacial} \rightarrow S^2_{Vácuo}$.

Como anteriormente, podemos definir um *winding number* n que representa quantas vezes a variedade do vácuo cobre a variedade espacial. Dado um mapa suave $\hat{\varphi}^a(\theta, \phi)$ podemos definir nosso n como

$$n = \frac{1}{8\pi} \int d^2\theta \varepsilon^{abc} \varepsilon^{ij} \hat{\varphi}^a \partial_i \hat{\varphi}^b \partial_j \hat{\varphi}^c, \quad (4.15)$$

onde $d^2\theta = d\theta d\phi$, $\partial_1 = \partial/\partial\theta$, $\partial_2 = \partial/\partial\phi$, e $\varepsilon^{12} = -\varepsilon^{21} = +1$. Podemos verificar essa definição, fazendo $\hat{\varphi}(\theta, \phi) = (\text{sen } \theta \cos n\phi, \text{sen } \theta \text{sen } n\phi, \cos \theta)$, dessa maneira,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \theta} &= (\cos \theta \cos n\phi, \cos \theta \text{sen } n\phi, -\text{sen } \theta), \\ \frac{\partial \hat{\varphi}}{\partial \phi} &= (-n \text{sen } \theta \text{sen } n\phi, n \text{sen } \theta \cos n\phi, 0). \end{aligned} \quad (4.16)$$

Logo,

$$\varepsilon^{abc} \hat{\varphi}^a \partial_\theta \hat{\varphi}^b \partial_\phi \hat{\varphi}^c = \det \begin{pmatrix} \text{sen } \theta \cos n\phi & \text{sen } \theta \text{sen } n\phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos n\phi & \cos \theta \text{sen } n\phi & -\text{sen } \theta \\ -n \text{sen } \theta \text{sen } \phi & n \text{sen } \theta \cos n\phi & 0 \end{pmatrix}, \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} &= n \text{sen}^3 \theta \cos^2 n\phi + \text{sen } \theta \text{sen } n\phi (n \text{sen}^2 \theta \text{sen } n\phi) \\ &+ \cos \theta (n \text{sen } \theta \cos \theta \cos^2 n\phi + n \text{sen } \theta \cos \theta \text{sen}^2 n\phi), \\ &= n \text{sen}^3 \theta \cos^2 n\phi + n \text{sen}^3 \theta \text{sen}^2 \phi + n \text{sen } \theta \cos^2 \theta, \\ &= n \text{sen}^3 \theta + n \text{sen } \theta \cos^2 \theta, \\ &= n \text{sen } \theta (\text{sen}^2 \theta + \cos^2 \theta), \\ &= n \text{sen } \theta. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Substituindo na equação 4.15, temos:

$$\frac{n}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \text{sen } \theta d\theta = \frac{n}{2} [\cos \theta]_0^\pi = n. \quad (4.19)$$

Nota-se que mostramos que nossa definição do *winding number* foi bem sucedida e continuaremos utilizando-a para mostrar mais resultados futuramente.

Para encontrar soluções de energia finita, a partir de experiências anteriores com os vórtices, sabemos que precisamos acoplar e introduzir os campos de gauge e tomamos φ^a na representação adjunta de $SU(2)$ e escrevemos o Higgs como um tripleto. Nossa Lagrangiana pode ser reescrita da seguinte forma

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} (D^\mu \varphi)^a (D_\mu \varphi)^a - V(\varphi) - \frac{1}{4} F^{a\mu\nu} F_{\mu\nu}^a, \quad (4.20)$$

onde

$$\begin{aligned}(D_\mu\varphi)^a &= \partial_\mu\varphi^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu^b\varphi^c, \\ F_{\mu\nu}^a &= \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu^bA_\nu^c, \\ V(\varphi) &= \frac{1}{8}\lambda(\varphi^a\varphi^a - v^2)^2.\end{aligned}\tag{4.21}$$

A simetria de gauge é espontaneamente quebrada para $U(1)$. Quando a configuração de campo do vácuo é $\varphi^a = v\delta^{a3}$:

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}(D_\mu\varphi)^a(D^\mu\varphi)^a &= -\frac{1}{2}(e\varepsilon^{abc}A_\mu^b\varphi^c)(e\varepsilon^{ade}A^{\mu d}\varphi^e), \\ &= -\frac{1}{2}e^2v^2\varepsilon^{abc}\varepsilon^{ade}A_\mu^b\delta^{c3}A^{\mu d}\delta^{e3}, \\ &= -\frac{1}{2}e^2v^2\varepsilon^{ab3}\varepsilon^{ad3}A_\mu^bA^{\mu d}, \\ &= -\frac{1}{2}e^2v^2(\delta_{bd}\delta_{33} - \delta_{b3}\delta_{3d})A_\mu^bA^{\mu d}, \\ &= -\frac{1}{2}e^2v^2(A_\mu^bA^{\mu b} - A_\mu^3A^{\mu 3}) = -\frac{1}{2}e^2v^2(A_\mu^1A^{\mu 1} + A_\mu^2A^{\mu 2}).\end{aligned}\tag{4.22}$$

Por isso podemos escrever os campos vetoriais $W_\mu^\pm = (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2)/\sqrt{2}$ cuja massa é $m_w = ev$. Além disso, vemos que essa teoria não possui o bóson Z que aparece na teoria de Glashow-Weinberg-Salam. Podemos escrever o tensor eletromagnético como $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^3 - \partial_\nu A_\mu^3$. Podemos reescrever este tensor de uma maneira mais generalizada, de modo que, ao utilizarmos a condição de que $\varphi^a = v\delta^{a3}$, voltaremos à equação reduzida apresentada anteriormente. Essa expressão é

$$\begin{aligned}F_{\mu\nu} &= \hat{\varphi}^a F_{\mu\nu}^a - e^{-1}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a(D_\mu\hat{\varphi})^b(D_\nu\hat{\varphi})^c, \\ &= \hat{\varphi}^a(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + e\varepsilon^{abc}A_\mu^bA_\nu^c) - \frac{1}{e}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a(\partial_\mu\hat{\varphi}^b + e\varepsilon^{bde}A_\mu^d\hat{\varphi}^e)(\partial_\nu\hat{\varphi}^c + e\varepsilon^{cfg}A_\nu^f\hat{\varphi}^g), \\ &= \hat{\varphi}^a(\partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a) + e\hat{\varphi}^a\varepsilon^{abc}A_\mu^bA_\nu^c - \frac{1}{e}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a(\partial_\mu\hat{\varphi}^b\partial_\nu\hat{\varphi}^c + e\partial_\mu\hat{\varphi}^b\varepsilon^{cfg}A_\nu^f\hat{\varphi}^g + \\ &\quad e\varepsilon^{bde}A_\mu^d\hat{\varphi}^e\partial_\nu\hat{\varphi}^c + e^2\varepsilon^{bde}A_\mu^d\hat{\varphi}^e\varepsilon^{cfg}A_\nu^f\hat{\varphi}^g).\end{aligned}\tag{4.23}$$

Trataremos dos termos dentro do último parêntesis. Logo podemos escrevê-los como

$$-\frac{1}{e}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a\partial_\mu\hat{\varphi}^b\partial_\nu\hat{\varphi}^c - \varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a\partial_\mu\hat{\varphi}^b\varepsilon^{cfg}A_\nu^f\hat{\varphi}^g - \varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a\varepsilon^{bde}A_\mu^d\hat{\varphi}^e\partial_\nu\hat{\varphi}^c - e\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a\varepsilon^{bde}A_\mu^d\hat{\varphi}^e\varepsilon^{cfg}A_\nu^f\hat{\varphi}^g.\tag{4.24}$$

O primeiro termo não será manipulado, já que ele está em uma forma conveniente, por isso, começaremos pelo segundo.

$$\begin{aligned}\varepsilon^{abc}\hat{\varphi}^a\partial_\mu\hat{\varphi}^b\varepsilon^{cfg}A_\nu^f\hat{\varphi}^g \\ (-\delta_{fa}\delta_{gb} + \delta_{fb}\delta_{ga})\hat{\varphi}^a\partial_\mu\hat{\varphi}^bA_\nu^f\hat{\varphi}^g \\ - \hat{\varphi}^a\partial_\mu\hat{\varphi}^bA_\nu^a\hat{\varphi}^b + \hat{\varphi}^a\partial_\mu\hat{\varphi}^bA_\nu^b\hat{\varphi}^a \\ - \hat{\varphi}^a\partial_\mu\hat{\varphi}^bA_\nu^a\hat{\varphi}^b + \partial_\mu\hat{\varphi}^bA_\nu^b.\end{aligned}\tag{4.25}$$

Continuando com o terceiro, temos que

$$\begin{aligned}
& \varepsilon^{abc} \hat{\varphi}^a \varepsilon^{bde} A_\mu^d \hat{\varphi}^e \partial_\nu \hat{\varphi}^c \\
& (-\delta_{dc} \delta_{ea} + \delta_{da} \delta_{ec}) \hat{\varphi}^a \partial_\nu \hat{\varphi}^c A_\mu^d \hat{\varphi}^e \\
& (-\hat{\varphi}^a \partial_\nu \hat{\varphi}^c A_\mu^c \hat{\varphi}^a + \hat{\varphi}^a \partial_\nu \hat{\varphi}^c A_\mu^a \hat{\varphi}^c) \\
& (-\partial_\nu \hat{\varphi}^c A_\mu^c + \hat{\varphi}^a \partial_\nu \hat{\varphi}^c A_\mu^a \hat{\varphi}^c).
\end{aligned} \tag{4.26}$$

O último pode ser reescrito como

$$\begin{aligned}
& e \varepsilon^{abc} \hat{\varphi}^a \varepsilon^{bde} A_\mu^d \hat{\varphi}^e \varepsilon^{cfg} A_\nu^f \hat{\varphi}^g \\
& = -e (\delta_{ae} \varepsilon^{dfg} - \delta_{ad} \varepsilon^{efg}) \hat{\varphi}^a A_\mu^d \hat{\varphi}^e A_\nu^f \hat{\varphi}^g, \\
& = e (\hat{\varphi}^a A_\mu^a \varepsilon^{efg} \hat{\varphi}^e A_\nu^f \hat{\varphi}^g - \varepsilon^{dfg} A_\mu^d A_\nu^f \hat{\varphi}^g).
\end{aligned} \tag{4.27}$$

Por fim, agrupando todos esses termos é possível reescrever a equação de $F_{\mu\nu}$ como

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu (\hat{\varphi}^a A_\nu^a) - \partial_\nu (\hat{\varphi}^a A_\mu^a) - e^{-1} \varepsilon^{abc} \hat{\varphi}^a \partial_\mu \hat{\varphi}^b \partial_\nu \hat{\varphi}^c. \tag{4.28}$$

Dessa maneira, o campo magnético é dado por

$$B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} F_{jk}, \tag{4.29}$$

$$B^i = \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} \left(\partial_j (\hat{\varphi}^a A_k^a) - \partial_k (\hat{\varphi}^a A_j^a) - \frac{1}{e} \varepsilon^{abc} \hat{\varphi}^a \partial_j \hat{\varphi}^b \partial_k \hat{\varphi}^c \right). \tag{4.30}$$

Como $F^{ij} = -F^{ji}$, então

$$\begin{aligned}
B^i &= \frac{1}{2} \varepsilon^{ijk} (2\partial_j (\hat{\varphi}^a A_k^a)) - \frac{1}{2e} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{abc} \hat{\varphi}^a \partial_j \hat{\varphi}^b \partial_k \hat{\varphi}^c, \\
B^i &= \varepsilon^{ijk} \partial_j (\hat{\varphi}^a A_k^a) - \frac{1}{2e} \varepsilon^{ijk} \varepsilon^{abc} \hat{\varphi}^a \partial_j \hat{\varphi}^b \partial_k \hat{\varphi}^c,
\end{aligned} \tag{4.31}$$

Com isso,

$$\int B \cdot r^2 \sin \theta d\theta d\phi = -\frac{4\pi n}{e} = \Phi. \tag{4.32}$$

Isso implica que qualquer sóliton com *winding number* diferente de zero é um monopolo magnético cuja carga magnética é igual a $Q_M = \Phi$. Para o caso de $n = 1$ temos o *monopolo de 't Hooft-Polyakov*. A condição de fronteira para o campo escalar é dada por

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \varphi^a(\mathbf{x}) = vx^a/r. \tag{4.33}$$

Podemos procurar por uma condição de contorno para o campo de gauge, utilizando que $(D_\mu \varphi)^a = 0$ para valores de r no infinito. Dessa forma, por definição temos

que

$$\partial_i (x^a/r) + e\varepsilon^{abc} A_i^b x^c/r = 0. \quad (4.34)$$

O primeiro termo pode ser escrito como $\partial_i (x^a/r) = (r^2\delta_{ai} - x_a x_i)/r^3$. Se multiplicarmos por $r x_j \varepsilon^{jda}$, e usarmos a identidade $\varepsilon^{jda} \varepsilon^{abc} = \delta^{jb} \delta^{dc} - \delta^{jc} \delta^{db}$ teremos que

$$x_j \varepsilon^{jda} \frac{(r^2\delta_{ai} - x_a x_i)}{r^2} + e \varepsilon^{jda} \varepsilon^{abc} A_i^b x^c = 0, \quad (4.35)$$

$$\varepsilon^{dij} x_j + e (\delta_{jb} \delta_{dc} - \delta_{db} \delta_{jc}) x_j A_i^b x^c = 0$$

$$\varepsilon^{dij} x_j + e (x^d x_j A_i^j - r^2 A_i^d) = 0. \quad (4.36)$$

Se ignorarmos o primeiro termo do parêntesis veremos que $A_i^d = \frac{\varepsilon^{dig} x_j}{er^2}$. Entretanto partindo desta igualdade é evidente que $x_d A_i^d = 0$. Então o primeiro termo do parêntesis some e podemos definir o comportamento assintótico de A_i^a e nosso ansatz como

$$\begin{aligned} \varphi^a(\mathbf{x}) &= v f(r) x^a / r \\ A_i^a(\mathbf{x}) &= a(r) \varepsilon^{aij} x_j / er^2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Nós impomos que $f(\infty) = a(\infty) = 1$ e, além disso queremos que as funções sejam bem comportadas e definidas na origem, por isso fazemos $f(0) = a(0) = 0$.

A energia do monopolo (e consequentemente sua massa) pode ser calculada da mesma forma que a do vórtice, resultando em

$$M = \int d^3x \left[\frac{1}{2} B_i^a B_i^a + \frac{1}{2} (D_i \varphi)^a (D_i \varphi)^a + V(\varphi) \right]. \quad (4.38)$$

O campo magnético pode ser escrito como

$$\begin{aligned} B_i^a &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} F_{jk}^a \\ &= \varepsilon_{ijk} \partial_j A_k^a + \frac{1}{2e} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} A_j^b A_k^c. \end{aligned} \quad (4.39)$$

Se escrevermos $A_i^a = \varepsilon^{aij} K_j$, fazendo a substituição podemos ver que

$$\begin{aligned} B_i^a \cdot \varepsilon_{ijk} \partial_j (\varepsilon^{akj} K_j) &+ \frac{1}{2e} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} (\varepsilon^{bjk} K_k) (\varepsilon^{ckj} K_j), \\ B_i^a &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{akj} (\partial_j K_j) + \frac{1}{2e} \varepsilon_{ijk} \varepsilon^{abc} \varepsilon^{bjk} \varepsilon^{ckj} K_k K_j, \\ B_i^a &= (\delta_i^j \delta_j^a - \delta_{ia}) (\partial_j K_j) + \frac{1}{e} (\delta_{ak} \delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{aj}) K_k K_j. \end{aligned} \quad (4.40)$$

Logo,

$$B_i^a = \partial_a K_i - \delta_{ai} \partial_j K^j + K_a K_i, \quad (4.41)$$

e se substituirmos $K_i = \frac{a(r)x_i}{er^2}$, temos

$$\begin{aligned}\partial_a K_i &= \frac{a'(r)x_i x_a}{er^3} + \frac{a(r)\delta_{ia}}{er^2} - \frac{2a(r)x_i x_a}{e^2 r^4}, \\ -\delta_{a_i} \partial_j K^i &= -\delta_{ai} \left(\frac{a'(r)x_j x_i}{er^3} + \frac{a(r)}{er^2} \right), \\ K_a K_i &= \frac{a^2(r)x_a x_i}{e^2 r^4}.\end{aligned}\tag{4.42}$$

Então, colocando esses termos em B_i^a ,

$$\begin{aligned}\frac{a'(r)\hat{x}_i \hat{x}_a}{er} - \frac{2a(r)\hat{x}_i \hat{x}_a}{er^2} - \frac{a'(r)\delta_{ai}}{er} + \frac{a^2(r)\hat{x}_a \hat{x}_i}{e^2 r^2}, \\ B_i^a = -\frac{1}{e} \left[\frac{a'}{r} (\delta_{ai} - \hat{x}_i \hat{x}_a) + \frac{2ae - a^2}{er^2} \right].\end{aligned}\tag{4.43}$$

Dessa maneira, podemos escrever a energia do campo magnético como

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} B_i^a B_i^a &= \frac{1}{2e^2} \left[\frac{a'}{r} (\delta_{ai} - \hat{x}_a \hat{x}_i) + \frac{2a - a^2}{r^2} \hat{x}_a \hat{x}_i \right]^2, \\ &= \frac{1}{2e^2} \left[\frac{a'^2}{r^2} (\delta_{ai} - \hat{x}_a \hat{x}_i)^2 + \left(\frac{2a - a^2}{r^2} \right)^2 \right], \\ &= \frac{1}{2e^2} \left[\frac{a'^2}{r^2} \underbrace{(\delta_{ii} + 1)}_3 - 2 \underbrace{\delta_{ai} \hat{x}_a \hat{x}_i}_1 + \frac{(2a - a^2)^2}{r^4} \right].\end{aligned}\tag{4.44}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} B_i^a B_i^a = \frac{1}{2e^2 r^4} [2r^2 a'^2 + (2a - a^2)^2]}.\tag{4.45}$$

Analogamente, podemos reescrever a derivada covariante do campo escalar como

$$\begin{aligned}(D_i \varphi)^a &= \partial_i \varphi^a + e \varepsilon^{abc} A_i^b \varphi^c, \\ \partial_i \left(\frac{vf(r)x^a}{r} \right) &+ e \varepsilon^{abc} a(r) \frac{\varepsilon^{bij} x^j}{er^2} vf(r) \frac{x^c}{r}.\end{aligned}\tag{4.46}$$

Analisando os termos separadamente temos que

$$\partial_i \left(\frac{vf(r)x^a}{r} \right) = \frac{vf'(r)x^a x_i}{r^2} + \frac{vf(r)\delta_{ai}}{r} - \frac{vf(r)x^a x^i}{r^3}.\tag{4.47}$$

$$\begin{aligned}e \varepsilon^{abc} a(r) \frac{\varepsilon^{bij} x^j}{er^2} vf(r) \frac{x^c}{r}, \\ = (\delta_{ci} \delta_{aj} - \delta_{ai} \delta_{cj}) \frac{va(r)x^j f(r)x^a}{r^3}, \\ = \frac{\delta_{ci} a(r) f(r) x_i v}{r^2} - \frac{va(r)x^i f(r)x^a}{r^3}.\end{aligned}\tag{4.48}$$

Agrupando esses termos novamente ficamos com a expressão

$$(D_i\varphi)^a = \frac{vf'(r)x^ax^i}{r^2} + \frac{vf(r)\delta_{ai}}{r} - \frac{vf(r)x^ax^i}{r^3} + \frac{\delta_{ai}va(r)f(r)x_i}{r^2} - \frac{va(r)f(r)x^ix^a}{r^3},$$

$$(D_i\varphi)^a = v \left[f'(r)\hat{x}^a\hat{x}^i + \frac{(1-a)f}{r} [\delta_{ai} - \hat{x}^a\hat{x}^i] \right]. \quad (4.49)$$

Podemos, calcular agora a densidade de energia gradiente do campo escalar, dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (D_i\varphi)^a (D_i\varphi)^a &= \frac{1}{2} v^2 \left[f'(r)\hat{x}^a\hat{x}^i + \frac{(1-a)f}{r} [\delta_{ai} - \hat{x}^a\hat{x}^i] \right]^2, \\ &= \frac{1}{2} v^2 \left[f'^2(r) + \frac{(1-a)^2 f^2}{r^2} [\delta_{ai} - \hat{x}^a\hat{x}^i]^2 + 2 \frac{(1-a)ff'}{r} [\delta_{ai} - \hat{x}^a\hat{x}^i] \hat{x}^a\hat{x}^i \right], \\ &= \frac{1}{2} v^2 \left[f'^2(r) + \frac{(1-a)^2}{r^2} f^2 [\delta_{ii} + 1 - 2\delta_{ai}\hat{x}^a\hat{x}^i] + \frac{2(1-a)ff'}{r} (\delta_{ai}\hat{x}^a\hat{x}^i - (\hat{x}^a\hat{x}^i)^2) \right], \\ &= \frac{1}{2} v^2 \left[f'^2(r) + \frac{2(1-a)^2 f^2}{r^2} \right], \end{aligned} \quad (4.50)$$

$$\boxed{\frac{1}{2} (D_i\varphi)^a (D_i\varphi)^a = \frac{v^2}{2r^2} [2(1-a)^2 f^2 + r^2 f'^2]} \quad (4.51)$$

O termo do potencial pode ser escrito como

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= \frac{1}{8} \lambda (\varphi^a \varphi^a - v^2)^2, \\ &= \frac{1}{8} \lambda (v^2 f^2 - v^2)^2, \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$\boxed{V(\varphi) = \frac{1}{8} \lambda v^4 (f^2 - 1)^2}. \quad (4.53)$$

Com isso, somos capazes de calcular a massa do monopolo substituindo os termos encontrados na equação da massa. Por fim, temos que a massa do monopolo é

$$\boxed{M = \frac{1}{2e^2 r^4} [2r^2 a'^2 + (2a - a^2)^2] + \frac{v^2}{2r^2} [2(1-a)^2 f^2 + r^2 f'^2] + \frac{1}{8} \lambda v^4 (f^2 - 1)^2}. \quad (4.54)$$

Para obter as equações que determinam $f(r)$ e $a(r)$, basta utilizarmos o princípio variacional similar ao caso do vórtice. Então,

Para $f(r)$:

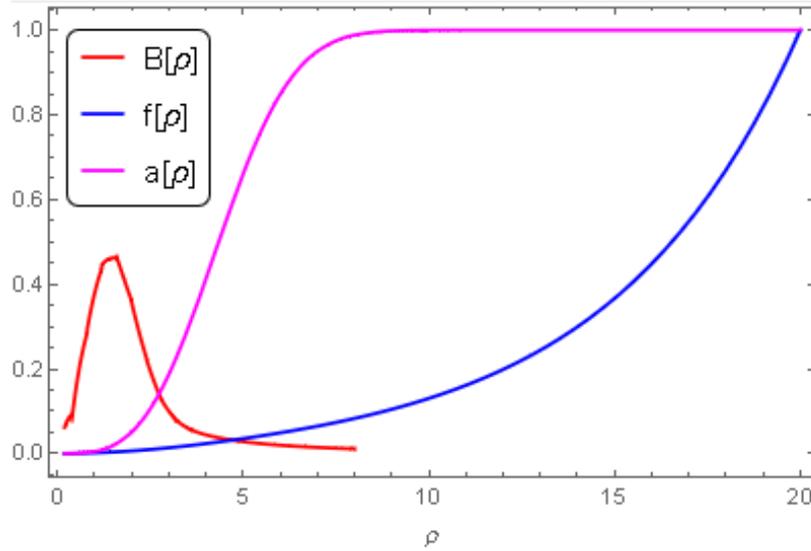
$$\begin{aligned} \partial_r \left(\frac{\partial M}{\partial \partial_r f} \right) - \frac{\partial M}{\partial f} &= 0, \\ \partial_r (v^2 f') - \frac{2v^2}{r^2} (1-a)^2 f - \frac{1}{4} \lambda v^4 f &= 0, \\ f'' - \frac{2}{r^2} (1-a)^2 f - \frac{1}{4} \lambda v^2 f &= 0. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Para $a(r)$:

$$\begin{aligned}
 \partial_r \left(\frac{\partial M}{\partial \partial_r a} \right) - \frac{\partial M}{\partial a} &= 0, \\
 \partial_r \left(\frac{2a'}{e^2 r^2} \right) - \frac{(2a - a^2)(2 - 2a)}{e^2 r^4} + \frac{2v^2(1 - a)f^2}{r^2} &= 0, \\
 \frac{2}{e^2} \left(\frac{a''}{r^2} - \frac{2a'}{r^3} \right) - \frac{(2a - a^2)(2 - 2a)}{e^2 r^4} + \frac{2v^2(1 - a)f^2}{r^2} &= 0, \\
 a'' - \frac{2a'}{r} - \frac{(2a - a^2)(2 - 2a)}{2r^2} + e^2 v^2(1 - a)f^2 &= 0.
 \end{aligned} \tag{4.56}$$

Podemos fazer o gráfico dessa solução, de maneira análoga à seção anterior dos Vórtices.

Figura 10 – Gráfico da solução do monopolo de 't Hooft-Polyakov. Como esperado, vemos o resultado do campo magnético, visto à grandes distâncias, decaindo com $\frac{1}{r^2}$.



Mostraremos agora um resultado interessante e muito importante historicamente para os monopolos, o limite de Bogomolny–Prasad–Sommerfeld ou como é comumente conhecido, limite BPS. Podemos reescrever completando quadrados os termos da energia, exceto a parte do potencial como:

$$\frac{1}{2} B_i^a B_i^a + \frac{1}{2} (D_i \varphi)^a (D_i \varphi)^a = \frac{1}{2} [B_i^a + (D_i \varphi)^a]^2 - B_i^a (D_i \varphi)^a. \tag{4.57}$$

Podemos aplicar a regra distributiva da derivada covariante

$$\begin{aligned}
 [D_\mu(\varphi\chi)]_{iI} &= (D_\mu \varphi)_i \chi_I + \varphi_i (D_\mu \chi)_I, \\
 [D_\mu(\varphi\chi)]_{iI} &= \left[\partial_\mu(\varphi\chi) - ig A_\mu^a (T_{R_1 \otimes R_2}^a)_{iI, jJ} \varphi_j \chi_J \right]
 \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}
&= \left[\partial_\mu \varphi + \partial_\mu \chi - ig A_\mu^a \left((T_{R_1}^a)_{ij} \delta_{IJ} + \delta_{ij} (T_{R_2}^a)_{IJ} \right) \varphi_i \chi_J \right] \\
&= \left[\partial_\mu \varphi + \partial_\mu \chi - ig A_\mu^a \left((T_{R_1}^a \varphi)_i \chi_I + \varphi_i (T_{R_2}^a \chi)_I \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.59}$$

Por definição,

$$[D_\mu(\varphi\chi)]_{iI} = (D_\mu\varphi)_i \chi_I + \varphi_i (D_\mu\chi)_I. \tag{4.60}$$

Logo, podemos escrever o último termo como $B_i^a (D_i\varphi)^a = D_i (B_i^a \varphi^a) - (D_i B_i)^a \varphi^a$. Usando a identidade de Bianchi $(D_i B_i)^a = 0$, ficamos com $B_i^a (D_i\varphi)^a = D_i (B_i^a \varphi^a)$.

Podemos reparar que $(B_i \cdot \varphi)$ é um isoescalar em respeito a transformações de $O(3)$, por isso, sua derivada covariante é apenas a derivada parcial. Dessa maneira, podemos reescrever o último termo como $B_i^a (D_i\varphi)^a = \partial_i (B_i^a \varphi^a)$ e usando o teorema de Gauss temos que

$$\int d^3x \partial_i (B_i^a \varphi^a) = \int dS_i B_i^a \varphi^a. \tag{4.61}$$

a integral é realizada em uma superfície no infinito espacial. Nessa superfície, temos que $\varphi^a = v \hat{x}^a$. Utilizando a equação,

$$F_{\mu\nu} = \hat{\varphi}^a F_{\mu\nu}^a - e^{-1} \varepsilon^{abc} \hat{\varphi}^a (D_\mu \hat{\varphi})^b (D_\nu \hat{\varphi})^c. \tag{4.62}$$

Percebemos que no infinito, a derivada covariante desaparece e por isso temos que $B_i^a \varphi^a = v B_i$. Logo,

$$\int dS_i B_i^a \varphi^a = v \int dS_i B_i = v \Phi, \tag{4.63}$$

onde $\Phi = Q_M = -\frac{4\pi n}{e}$ que é a carga magnética do monopolo. Então a massa do monopolo pode ser reescrita como

$$M = \frac{4\pi |n| v}{e} + \int d^3x \left[\frac{1}{2} [B_i^a + (\text{sign } n) (D_i \varphi)^a]^2 + V(\varphi) \right]. \tag{4.64}$$

Como todos os termos são positivos temos o *limite de Bogomolny*. Dessa maneira, reescrevendo $m_W = ev$ e $\alpha = \frac{e^2}{4\pi}$, podemos estimar um limite inferior para a massa do monopolo como

$$M \geq \frac{m_w}{\alpha} |n|. \tag{4.65}$$

Já que $\alpha \ll 1$, o monopolo é bem mais pesado que os bósons W . Vimos na introdução desta seção que o modelo de Georgi-Glashow não está presente na Natureza, já que ele não descreve por inteiro a força eletrofraca. Veremos que no Modelo Padrão o grupo da carga elétrica é composto por uma combinação linear de um elemento da álgebra de $SU(2)$ e um gerador do grupo $U(1)_Y$, o grupo da hipercarga.

Poderíamos criar um campo que fosse um singlete de $SU(2)$ e com um valor da hipercarga arbitrariamente pequeno, entretanto, a condição de quantização da carga de Dirac resultaria na não existência dos monopolos magnéticos.

A resolução deste problema aparece quando vamos tratar sobre monopolos em teorias de gauge maiores, ou seja, nas ideias da Teoria Unificada nos grupos $SU(5)$, por exemplo. Entretanto, esse monopolo possuem uma massa em torno de 10^{15} GeV, um valor quase doze ordens de grandeza superior ao que conseguimos medir atualmente.

Continuando nossa solução BPS, considerando o limite quando $\lambda \rightarrow 0$, temos que $V(\phi) = 0$. Logo com um pouco de álgebra somos capazes de encontrar as seguintes equações

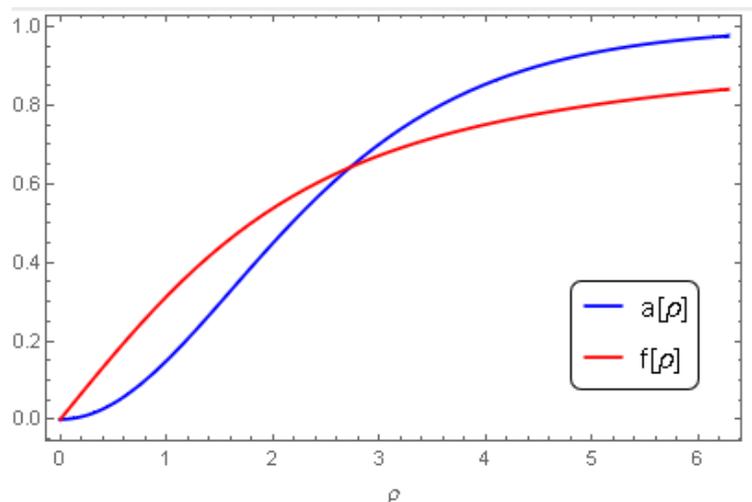
$$\begin{aligned} a' &= (1 - a)f, \\ f' &= (2a - a^2) / \rho^2. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Essas equações possuem uma solução analítica dada por:

$$\begin{aligned} a(\rho) &= 1 - \frac{\rho}{\sinh \rho}, \\ f(\rho) &= \coth \rho - \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \quad (4.67)$$

Essa é a solução BPS e um sóliton que satura, ou melhor, obedece essa solução é conhecido como *sóliton BPS*. Abaixo temos o gráfico desta solução e faremos uma abordagem parecida com os próximos monopolos a serem trabalhados. Estes, de fato, pertencem à teoria de Glashow-Weinberg-Salam e são conhecidos como monopolos eletrofracos.

Figura 11 – Gráfico da solução BPS para o monopolo de 't Hooft-Polyakov



4.4 Monopolos eletrofracos

4.4.1 Introdução

A primeira observação dos efeitos da força nuclear fraca foi na descoberta da radioatividade, em 1896, por Henri Becquerel. A observação em específico foi o decaimento beta, onde a força nuclear fraca faz um nêutron, pertencente a um núcleo atômico, se transformar em um próton, simultaneamente, criando um elétron e um antineutrino. Nenhuma das outras forças da Natureza (a eletromagnética, a força nuclear forte e a força gravitacional) tinham essa capacidade de “transformar” uma partícula em outra. Isso significava para os físicos, que tentavam descrever esse fenômeno, que os mesmos estavam diante de uma nova força da Natureza, a então chamada força nuclear fraca.

Ela ganhou esse nome devido a sua intensidade comparada às outras forças que atuavam nas partículas, além disso o alcance da interação da força fraca decai muito mais rápido e o tempo médio dos processos é bem mais lento. Um exemplo disso é no próprio decaimento beta, onde um decaimento considerado rápido leva, em média, cerca de $10^{-2}s$. Enquanto que um processo causado pela força forte ocorre na escala de $10^{-24}s$.

Em 1933, Enrico Fermi começou a tentar descrever a força fraca assumindo que ela não agia à distância, mas sim, os processos aconteciam no mesmo ponto instantaneamente. Apenas em 1957 a teoria de Fermi foi colocada em uma forma final, onde a lagrangiana de interação era dada por $\mathcal{L} = \frac{G_F}{\sqrt{2}} J_\lambda J^{\lambda\dagger}$, em que J_λ é a corrente de Dirac carregada e $G_F = 1.16637 \pm 0.00001 \times 10^{-5} \text{GeV}^{-2}$ é a constante de Fermi universal. Para mais detalhes da teoria de Fermi é recomendada a leitura de [28].

Existiam uma série de problemas com a teoria de Fermi, todas no âmbito teórico, já que, ao aplicar a teoria em processos que eram exóticos comparados ao decaimento beta, apresentava resultados sem sentido, como por exemplo, ao tentar calcular a probabilidade do espalhamento de um neutrino por um antineutrino o resultado era infinito. Isso poderia não ser um problema porque a Eletrodinâmica Quântica também apresentava tais infinitos, entretanto eles poderiam ser cancelados fazendo uma renormalização da massa e da carga do elétron. O mesmo não pôde ser feito para a teoria de Fermi que não apresentava ser *renormalizável*.

A descrição da força fraca tomou novos rumos em 1967, quando S. Weinberg, enquanto tentava desenvolver uma teoria para a força forte análoga ao eletromagnetismo utilizando o fenômeno da *quebra de simetria*, percebeu que poderia utilizar essas ideias para uma teoria da força nuclear fraca. Weinberg relata em [46] que encontrou uma teoria que era a unificação das forças fraca e eletromagnética, que ficou conhecida como *teoria eletrofraca*.

De forma independente, em 1968, A. Salam encontrou a mesma teoria e junto com Weinberg, tentaram mostrar que a mesma era renormalizável, fato este que foi demons-

trado por G. 't Hooft em 1971 [47], colocando a teoria de Glashow-Weinberg-Salam como um dos artigos mais citados na área de física de partículas elementares.

Sabemos, depois de uma série de confirmações por físicos experimentais no CERN e em outros laboratórios, da existência das partículas W^\pm e Z^0 e, em 2012, do bóson de Higgs previstos pela teoria. Mostraremos nas próximas seções o fenômeno da quebra de simetria e como podemos encontrar um monopolo magnético na teoria eletrofraca.

4.4.2 A teoria eletrofraca

A parte da Lagrangiana da teoria eletrofraca que estamos interessados, é dada por:

$$\mathcal{L}_0 = |D_\mu H|^2 - \frac{\lambda}{2} \left(H^\dagger H - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}, \quad (4.68)$$

sendo que $F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a + g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c$ e $B_{\mu\nu} = \partial_\mu B_\nu - \partial_\nu B_\mu$. A derivada covariante para o grupo $SU(2)_L \times U(1)_Y$ é definida por $D_\mu = \partial_\mu - i \frac{g}{2} A_\mu^a \sigma^a - i \frac{g'}{2} B_\mu Y$, e H é o dubleto de Higgs.

Partindo da definição da derivada covariante para o campo de Higgs H , temos que

$$(D_\mu H)_i = \partial_\mu H_i - i \left[\frac{g}{2} A_\mu^a \sigma^a + \frac{g'}{2} B_\mu Y \right]_i^j H_j, \quad (4.69)$$

em que $Y = -\frac{1}{2} \mathbf{1}$ é o gerador da hipercarga. Podemos reescrever o termo em colchete de uma forma conveniente

$$g A_\mu^a \sigma^a + g' B_\mu Y = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} g A_\mu^3 - g' B_\mu & g (A_\mu^1 - i A_\mu^2) \\ g (A_\mu^1 + i A_\mu^2) & -g A_\mu^3 - g' B_\mu \end{pmatrix}. \quad (4.70)$$

O termo potencial da teoria Eletrofraca apresenta um VEV que pode ser escrito como

$$\langle 0 | H(x) | 0 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} v \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.71)$$

O termo cinético do campo escalar H é $-(D^\mu H)^\dagger D_\mu H$ e no caso em que tomamos o valor esperado do vácuo, a Lagrangiana de massa é escrita como

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -\frac{1}{8} v^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g A_\mu^3 - g' B_\mu & g (A_\mu^1 - i A_\mu^2) \\ g (A_\mu^1 + i A_\mu^2) & -g A_\mu^3 - g' B_\mu \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.72)$$

Podemos fazer definições que serão úteis para descrever as partículas da teoria, primeiramente o ângulo de Weinberg ou ângulo de mistura fraco definido por

$$\theta_w \equiv \tan^{-1}(g'/g), \quad (4.73)$$

e podemos definir novos campos

$$\begin{aligned} W_\mu^\pm &\equiv \frac{1}{\sqrt{2}} (A_\mu^1 \mp iA_\mu^2), \\ Z_\mu &\equiv c_W A_\mu^3 - s_W B_\mu, \\ A_\mu &\equiv s_W A_\mu^3 + c_W B_\mu, \end{aligned} \quad (4.74)$$

em que $s_W \equiv \sin \theta_W$ e $c_W \equiv \cos \theta_W$, logo substituindo na Lagrangiana da massa temos que

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -\frac{1}{8}g^2v^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{c_W}Z_\mu & \frac{\sqrt{2}W_\mu^+}{c_W} \\ \sqrt{2}W_\mu^- & -\frac{A_\mu^3c_W + s_W B_\mu}{c_W} \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (4.75)$$

$$\mathcal{L}_{\text{massa}} = -\frac{1}{8}g^2v^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{Z_\mu Z^\mu}{c_W^2} + 2W^{+\mu}W_\mu^- & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.76)$$

Resultando em

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{massa}} &= -(gv/2)^2 W^{+\mu}W_\mu^- - \frac{1}{2}(gv/2c_W)^2 Z^\mu Z_\mu \\ &= -M_W^2 W^{+\mu}W_\mu^- - \frac{1}{2}M_Z^2 Z^\mu Z_\mu, \end{aligned} \quad (4.77)$$

em que

$$\begin{aligned} M_W &= gv/2, \\ M_Z &= M_W/c_W. \end{aligned} \quad (4.78)$$

As massas para as partículas W^\pm e Z^0 são, respectivamente, $M_W = 80.4$ GeV e $M_Z = 91.2$ GeV, isso implica que $\sin^2 \theta_W = 0.223$. O campo A_μ continua sem massa, o que é um lado positivo da teoria já que, como esperado, existe um subgrupo de $U(1)$ que não é quebrado, ou seja, o eletromagnetismo. Com isso, o padrão da quebra de simetria da teoria eletrofraca é $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{em}}$.

Além disso, é interessante perceber que, como citado anteriormente, na teoria de Georgi-Glashow onde podemos encontrar o monopolo de 't Hooft-Polyakov, após a quebra de simetria temos os bósons W^\pm , entretanto não temos o bóson neutro Z^0 .

Poderíamos continuar com as contas e estimar a massa para o bóson de Higgs e escrever a Lagrangiana em termo dos novos campos definidos, mas esse não é o escopo desse trabalho, aos interessados, o término das contas pode ser encontrado em [30, 28, 26]. Agora, veremos como podemos redefinir o vácuo e encontrar o monopolo eletrofraco.

4.4.3 Reinterpretação do vácuo da teoria

Da seção anterior sabemos que o campo de Higgs possui um VEV quando $H_{\text{vac}}^\dagger H_{\text{vac}} = \frac{v^2}{2}$. Isso implica que podemos escrever uma família de soluções que obedecem a mesma

equação acima.

$$H_{\text{vac}} = e^{i\theta_0} \mathbf{U} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{v}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}, \quad (4.79)$$

em que $\mathbf{U} \in SU(2)$ e pode ser escrito como

$$\mathbf{U} = e^{i\frac{\vec{\tau}}{2} \cdot \vec{\theta}}, \quad (4.80)$$

que podem ser reescritos na forma de Euler

$$\mathbf{U} = e^{i\frac{\tau_3}{2}\eta_1} e^{i\frac{\tau_2}{2}\eta_2} e^{i\frac{\tau_3}{2}\eta_3}. \quad (4.81)$$

Se utilizarmos que $e^{i\tau\theta} = \mathbf{I} \cos \theta + i(\tau \cdot \hat{n}) \sin \theta$ e substituirmos na equação 4.79, vemos que

$$H_{\text{vac}} = \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i(\theta' + \eta_1)} \sin \eta_2 \\ e^{i(\theta' - \eta_1)} \cos \eta_2 \end{pmatrix}, \quad (4.82)$$

em que $\theta' = \theta_0 - \eta_3$. Uma forma mais interessante de utilizaremos essa expressão é:

$$H_{\text{vac}} = i \frac{v}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{-i\phi} \sin \eta_2 \\ \cos \eta_2 \end{pmatrix}. \quad (4.83)$$

Podemos perceber que não existe nada que impeça que o vácuo da teoria seja escrito dessa maneira, já que a condição de que $H_{\text{vac}}^\dagger H_{\text{vac}} = \frac{v^2}{2}$ ainda é respeitada.

Pensava-se que na teoria eletrofraca e no modelo padrão, em geral, não poderiam existir monopolos magnéticos. Isso acontece já que o grupo dessa teoria $SU(2)_L \times U(1)_Y$ é quebrado em $U(1)_{\text{em}}$ por um dubleto de Higgs e ao fazer a análise do espaço do vácuo e o comportamento do campo de Higgs no infinito, temos que

$$H^\dagger H \equiv \phi_1^2 + \phi_2^2 + \phi_3^2 + \phi_4^2 \stackrel{r \rightarrow \infty}{\equiv} \rho_0^2, \quad (4.84)$$

logo, podemos ver que a variedade de vácuo é uma 3-esfera, ou melhor, S^3 . Dessa maneira, a configuração do Higgs para a solução do monopolo é um mapa que parte de S^2 , ou seja, nossa fronteira espacial no infinito, até S^3 a variedade do vácuo. Sabemos que esse mapa é trivial já que $\pi_2(S^3) = 0$.

Entretanto, se olharmos cuidadosamente para o ansatz dessa teoria vemos que existe uma singularidade ao longo do eixo z onde $\theta = \pi$. Logo, a análise do mapa e da topologia das variedades deve ser levada com cautela.

As componentes do dubleto de Higgs podem ser escritas como coordenadas do plano complexo \mathbb{C}^2 escritas na forma $z_1 \equiv \phi_1 + i\phi_2$ e $z_2 \equiv \phi_3 + i\phi_4$. Necessitamos que $(z_1, z_2)^T \neq 0$ e elas são relacionadas por uma transformação de gauge, ou seja, $(z_1, z_2)^T \equiv (\lambda z_1, \lambda z_2)^T$, onde $\lambda \in U(1)_Y$.

Da mesma forma que separamos nosso campo para o monopolo de Dirac, podemos fazer o mesmo aqui e dividir nosso espaço em duas partes distintas.

$$H_N = i \frac{\rho(r)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(\theta/2)e^{-i\phi} \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \quad B_\phi^N = -\frac{1}{g'} \frac{1 - \cos \theta}{r \sin \theta}, \quad (4.85)$$

para $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$, e

$$H_S = i \frac{\rho(r)}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \sin(\theta/2) \\ -\cos(\theta/2)e^{i\phi} \end{pmatrix}, \quad B_\phi^S = \frac{1}{g'} \frac{1 + \cos \theta}{r \sin \theta}, \quad (4.86)$$

para $\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \pi$, onde um cobre a parte norte, outro a parte sul e o equador ($\theta = \frac{\pi}{2}$) é relacionado por uma transformação de gauge. Podemos redefinir essas novas coordenadas complexas como $\mathbb{C} : \zeta_N = (z_1^N/z_2^N, 1)^T = (-\tan(\theta/2)e^{-i\phi}, 1)$ e $\zeta_S = (1, z_2^S/z_1^S)^T = (1, -\cot(\theta/2)e^{i\phi})^T$, quando $z_2^N, z_1^S \neq 0$.

Essas coordenadas a partir de resultados da geometria projetiva são, por definição, uma esfera de Riemann que pode ser vista como \mathbb{CP}^1 . A razão disso pode ser vista no apêndice em que é tratado sobre a projeção estereográfica em específico. Dessa maneira, a solução do monopolo não representa mais um mapa entre $\pi_2(S^3)$, mas sim, $\pi_2(\mathbb{CP}^1) = \pi_2(S^2) = \mathbb{Z}$.

Com isso, temos uma carga topológica não nula e a existência de monopolos magnéticos estáveis na teoria de Glashow-Weinberg-Salam.

4.4.4 A solução do monopolo eletrofraco

Como apresentado anteriormente, a Lagrangiana da teoria eletrofraca é escrita como

$$\mathcal{L}_0 = |D_\mu H|^2 - \frac{\lambda}{2} \left(H^\dagger H - \frac{\mu^2}{\lambda} \right)^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}. \quad (4.87)$$

A partir da mesma somos capazes de encontrar as equações de movimento para os campos

$$\begin{aligned} D_\mu D^\mu H &= -\lambda \left(H^\dagger H - \frac{\mu^2}{\lambda} \right) H \\ D_\mu F_a^{\mu\nu} &= -i \frac{g}{2} (H^\dagger \sigma_a D^\nu H - D^\nu H^\dagger \sigma_a H) \\ \partial_\mu B^{\mu\nu} &= -i \frac{g'}{2} (H^\dagger D^\nu H - D^\nu H^\dagger H), \end{aligned} \quad (4.88)$$

em que $D_\mu F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu F_{\mu\nu}^a - g f^{abc} A_\mu^c F_{\mu\nu}^b$. Podemos escrever um *ansatz* esfericamente simétrico (t, r, θ, φ) que seria a solução conhecida como *dyon*. Essa partícula já proposta por J. Schwinger e M. Saha [44, 45], possui tanto a carga elétrica quanto a carga magnética e a quantização da carga feita pelo Dirac pode se generalizada para o dyon. O *ansatz* é

dado por:

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho(r), \quad \xi = i \begin{pmatrix} \sin(\theta/2)e^{-i\varphi} \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix}, \\
H &= \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\xi, \\
\vec{A}_\mu &= \frac{1}{g}A(r)\partial_\mu t \hat{r} + \frac{1}{g}(f(r) - 1)\hat{r} \times \partial_\mu \hat{r}, \\
B_\mu &= \frac{1}{g'}B(r)\partial_\mu t - \frac{1}{g'}(1 - \cos\theta)\partial_\mu \varphi.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Essa seria a solução para o dyon, como queremos apenas analisar o caso do monopolo na teoria eletrofraca, vamos retirar a parte Coulombiana do ansatz, parte esta que está associada com a carga elétrica, ou seja, fazemos $A(r) = B(r) = 0$. Com isso, nosso ansatz para o monopolo eletrofraco é dado por

$$\begin{aligned}
\rho &= \rho(r), \quad \xi = i \begin{pmatrix} \sin(\theta/2)e^{-i\varphi} \\ -\cos(\theta/2) \end{pmatrix} \\
H &= \frac{1}{\sqrt{2}}\rho\xi, \\
\vec{A}_\mu &= \frac{1}{g}(f(r) - 1)\hat{r} \times \partial_\mu \hat{r}, \\
B_\mu &= -\frac{1}{g'}(1 - \cos\theta)\partial_\mu \varphi.
\end{aligned} \tag{4.90}$$

Dadas as equações acima, podemos substituí-las nas equações de movimento dos campos, para simplificá-las em termos de ρ e f da seguinte forma

$$\begin{aligned}
\ddot{\rho} + \frac{2}{r}\dot{\rho} - \frac{f^2}{2r^2}\rho &= \frac{\lambda}{2} \left(\rho^2 - \frac{2\mu^2}{\lambda} \right) \rho; \\
\ddot{f} - \frac{(f^2 - 1)}{r^2}f &= \frac{fg^2}{4}\rho^2.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

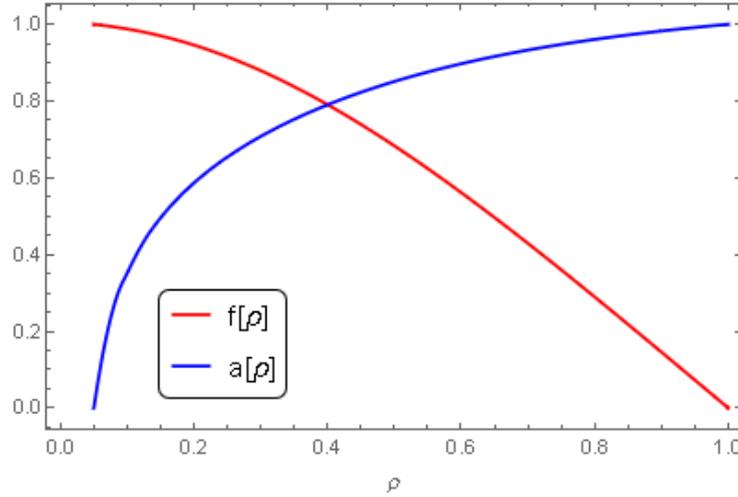
Usando as seguintes condições de fronteira nosso ansatz para o monopolo possui uma solução

$$\rho(0) = 0, \rho(\infty) = \rho_0, f(0) = 1, f(\infty) = 0, \tag{4.92}$$

onde definimos $\rho_0 = \sqrt{\frac{2\mu^2}{\lambda}}$.

Podemos fazer o gráfico da solução das equações de movimento como mostrado na figura abaixo.

Figura 12 – Gráfico da solução do monopolo eletrofraco



A energia da configuração do monopolo é dada por

$$E = 4\pi \int_0^\infty dr r^2 \left[\frac{\dot{\rho}^2}{2} + \frac{\rho^2 f^2}{4} \frac{1}{r^2} + \frac{\lambda}{8} (\rho^2 - \rho_0^2)^2 + \frac{\dot{f}^2}{g^2} \frac{1}{r^2} + \frac{(f^2 - 1)^2}{2g^2} \frac{1}{r^4} + \frac{1}{2g'^2} \frac{1}{r^4} \right], \quad (4.93)$$

essa configuração de energia é divergente e analisando termo a termo vemos que quem contribui para a divergência da energia é o último termo. Podemos separá-lo dos outros termos finitos e escrever a energia da seguinte forma

$$E = E_1 + E^*, \quad (4.94)$$

onde o termo divergente é dado por

$$E^* = 4\pi \int_0^\infty dr \frac{1}{2g'^2 r^2}. \quad (4.95)$$

Existem distintos métodos de como anular o termo divergente que pode ser visto em [48, 49, 50]. Iremos focar em um trabalho desenvolvido em [22] onde os autores fazem uma extensão não-linear do grupo da hipercarga fraca $U(1)_Y$ no intuito de cancelar o termo divergente da energia.

Os autores propuseram a seguinte extensão para a Lagrangiana eletrofraca:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + f(\mathcal{F}, \mathcal{G}), \quad (4.96)$$

em que $\mathcal{F} = \frac{1}{4} B_{\mu\nu} B^{\mu\nu}$ e $\mathcal{G} = \frac{1}{4} B_{\mu\nu} \tilde{B}^{\mu\nu}$ são os objetos invariantes de Lorentz e de gauge para $U(1)_Y$, onde $\tilde{B}^{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} B_{\rho\sigma}$.

As equações de movimento para o setor da hipercarga serão modificadas assim como a corrente. Colocando o ansatz anteriormente construído nas novas equações, implica-se em novos vínculos para \mathcal{F} e \mathcal{G} . É possível acompanhar as contas realizadas no artigo para obter o tensor de energia-momento e perceber que nossos objetos invariantes, após aplicado o ansatz, obedecem

$$\begin{aligned}\mathcal{F}|_{\text{ansatz}} &= \frac{1}{2g'^2} \frac{1}{r^4}, \\ \mathcal{G}|_{\text{ansatz}} &= 0.\end{aligned}\tag{4.97}$$

Com isso, a energia do monopolo para o cenário estendido é

$$E = E_1 + \int_0^\infty dr 4\pi r^2 \left[\frac{1}{2g'^2} \frac{1}{r^4} - f(\mathcal{F}|_{\text{ansatz}} ; \mathcal{G}|_{\text{ansatz}}) \right].\tag{4.98}$$

A extensão $f(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ pode ser escrita na forma mais simples e óbvia possível, tomaremos $f(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathcal{F} + \phi(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, já que desta maneira tomaremos conta do termo divergente, subtraindo-o do cálculo da energia. Além disso, podemos impor que a função ϕ dependa de \mathcal{F} e de \mathcal{G}^2 . A razão para a dependência quadrática é que o termo $\frac{1}{4}B_{\mu\nu}\tilde{B}^{\mu\nu}$ viola a paridade e além disso a contribuição deste termo não é de importância física, já que após a integração espacial, \mathcal{G} se tornará um termo de superfície avaliado no infinito e sabemos que não existe nenhuma estrutura na QED que permita que esse termo seja não nulo. Os autores ainda propõem que em aproximações de primeira ordem, eles gostariam de recuperar o termo usual $\frac{1}{4}B_{\mu\nu}B^{\mu\nu}$ do Modelo Padrão.

No artigo citado, uma classe restrita de possíveis extensões é analisada, considerando que ϕ dependa de X , em que $X = \frac{\mathcal{F}}{\beta^2} - \frac{\mathcal{G}}{2\beta^4}$, em que β é uma parâmetro de massa ao quadrado. Podemos modificar o setor da hipercarga considerando termos da Eletrodinâmica não-linear $\phi_1 = -\beta^2 \log[1 + X]$, $\phi_2 = \beta^2 [e^{-X} - 1]$ e $\phi_3 = \beta^2 [1 - \sqrt{1 + 2X}]$, que respectivamente são as versões Logarítmicas, Exponencial, e de Born-Infeld. A motivação para utilizar termos da Eletrodinâmica não-linear partiu de um experimento realizado no ATLAS que mediu o espalhamento luz-luz, [51] um fenômeno que não é previsto pela eletrodinâmica clássica e apenas a nível de loop na QED e pela eletrodinâmica não-linear.

Seguindo as contas feitas no artigo vemos que cada uma das extensões apresenta um valor aproximado para a energia do monopolo, que variará de acordo com o valor designado a β .

$$\begin{aligned}E &\approx 4.1\text{TeV} + 51.87\sqrt{\beta} && \text{Logarítmica,} \\ E &\approx 4.1\text{TeV} + 42.33\sqrt{\beta} && \text{Exponencial,} \\ E &\approx 4.1\text{TeV} + 72.81\sqrt{\beta} && \text{Born-Infeld.}\end{aligned}\tag{4.99}$$

Por fim, os autores procuram por limites inferiores para a energia do monopolo, aqueles análogos ao limite BPS já discutido anteriormente. Então, se usarmos a equação

da energia para o monopolo fazendo $\lambda \rightarrow 0$ enquanto $\rho \rightarrow \rho_0$, os autores foram capazes de encontrar um limite BPS dado por

$$E \geq -\frac{4\pi}{g} \int_0^\infty dr \left[\dot{\rho} (f^2 - 1) + \dot{f} f \rho \right]. \quad (4.100)$$

A fim de saturar o limite e encontrar configurações que minimizam a energia, precisa-se encontrar configurações que obedeçam o sistema de equações

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(r) + \frac{(f(r)^2 - 1)}{gr^2} &= 0, \\ \dot{f}(r) + \frac{gf(r)\rho(r)}{2} &= 0. \end{aligned} \quad (4.101)$$

Se não fosse por um valor de $\frac{1}{2}$ na segunda equação, seria possível encontrar uma solução analítica assim como no monopolo de 't Hooft-Polyakov. Tal solução seria como

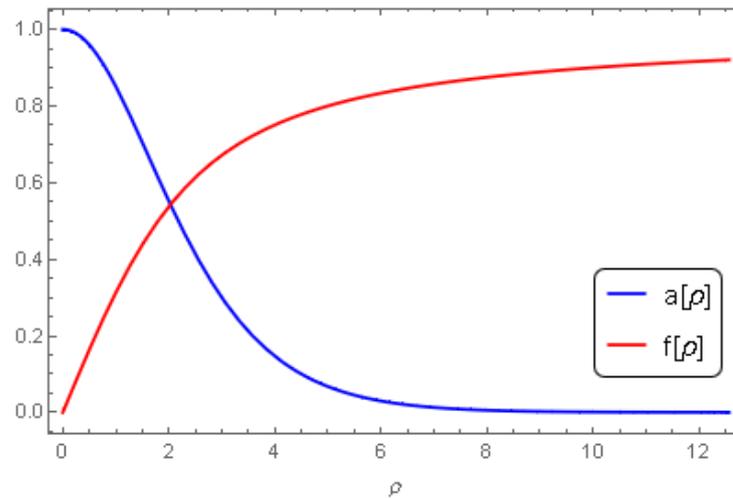
$$f(r) = \frac{g\rho_0 r}{\sinh(g\rho_0 r)}; \quad \rho(r) = \frac{\rho_0}{\tanh(g\rho_0 r)} - \frac{1}{gr}, \quad (4.102)$$

o gráfico dessa solução é mostrado abaixo e em um trabalho recente [52], mesmo os autores utilizando configurações para a regularização da energia do monopolo distintas do que fora apresentado, a expressão do limite BPS foi a mesma. O resultado obtido foi de $E \geq 2.98\text{TeV}$, entretanto foi ignorando não apenas a contribuição do potencial escalar, mas também o termo cinético do setor da hipercarga. Levando em consideração o resultado obtido para o setor da hipercarga em cada uma das extensões não-lineares que foram mostradas, encontra-se uma estimativa para a energia do monopolo,

$$\begin{aligned} E &\geq 7.58\text{TeV} && \text{(Logarítmico)}, \\ E &\geq 6.78\text{TeV} && \text{(Exponencial)}, \\ E &\geq 10.48\text{TeV} && \text{(Born-Infeld)}. \end{aligned} \quad (4.103)$$

Esse resultado é bastante interessante, já que o valor está próximo à escala que pode ser medida pelo LHC, algo que diferencia este monopolo dos outros apresentados que possuem massa infinita ou uma ordem de grandeza que jamais poderia ser alcançada pelos detectores atuais.

Figura 13 – Solução BPS para o monopolo eletrofraco



Veremos na próxima seção as formas de detectar o monopolo e os principais grupos de pesquisa que estão à procura dessa partícula, além das expectativas para os anos seguintes, posto que o LHC passou pela fase LS2 (Long Shutdown 2), onde os aparatos são refinados para que o detector possa atingir maiores espectros de energia.

4.5 Formas de detecção do monopolo

Após o trabalho seminal de Dirac, em 1931, sobre a possível existência de monopolos magnéticos, Tuve, em 1934, foi o primeiro a propor possíveis experimentos [53] na tentativa de detectar a tal partícula. Como pode ser visto, o autor afirma que a forma mais promissora de detecção seria utilizando uma câmara de Blackett and Occhialini, um aparato que, basicamente, é uma câmara de nuvens acoplada a um contador Geiger, o que permitiu a fotografia de uma série de eventos na física de partículas e, além disso, concedeu à comunidade científica um melhor entendimento sobre os raios cósmicos.

Nesta seção apresentaremos uma série de formas de como detectar o monopolo e os detectores que são utilizados. Obviamente, um maior enfoque será dado aos detectores mais importantes, que são o ATLAS e o MoEDAL.

As técnicas de detecção do monopolo dependem da interação dessa partícula com a matéria, independente da sua origem. Assim como todas as partículas carregadas, que sofrem processos de ionização e excitação dos átomos ao passar pela matéria, o monopolo também perde energia para o meio. Existem três maneiras principais de como a energia do monopolo seria dissipada e a importância de cada uma varia de acordo com a velocidade da partícula.

4.5.1 Ionização e excitação

- **Ionização**

A energia fornecida pelo monopolo produz elétrons livres. A energia perdida pode ser escrita pela fórmula de Bethe–Bloch que pode ser vista em [54]. Como mostrado na referência, a perda de energia de partículas carregadas pela distância percorrida, $-\frac{dE}{dx}$ que é proporcional $(ze)^2$, onde z é o número atômico e e a carga elétrica. Podemos analisar o mesmo para o monopolo apenas substituindo $ze \rightarrow g\beta$, onde β é a velocidade do monopolo no meio.

O monopolo é uma partícula altamente ionizante, por isso, cintiladores líquidos ou de plástico, detectores gasosos e detectores de caminho nucleares são alguns dos aparelhos para se detectar o monopolo. Geralmente essa perda de energia é dominante para monopolos com alta velocidade.

- **Excitação atômica**

A energia do monopolo é transferida para estados de energia maior dos átomos e geralmente é predominante a velocidades menores do que a apresentada acima, i.e. $10^{-3} \leq \beta \leq 10^{-2}$.

- **Colisões elásticas com átomos**

Para monopolos com velocidades menores entre $10^{-4} \leq \beta \leq 10^{-3}$ a energia cinética do monopolo é transferida para o recuo de átomos e núcleos.

4.5.2 Indução

Essa forma de detecção é interessante pois ela independe da velocidade do monopolo. Ela consiste, basicamente, em fazer um monopolo passar por um loop de um fio supercondutor, o que induziria uma corrente elétrica que pode ser medida. Isso acontece já que o fluxo magnético do monopolo é, como anteriormente apresentado, $4\pi g$. Em um supercondutor o fluxo de um campo magnético passando por um loop é quantizado, dado por $\phi_0 = \frac{hc}{2e}$, a corrente elétrica induzida Δi em uma espira com N voltas e indutância L é $\Delta i = 4\pi N g / L$.

A grande desvantagem dessa forma de detecção é que ela é extremamente sensível e é necessário realizar uma blindagem do experimento com o campo magnético terrestre, o que acarreta em detectores mais caros. Com isso, esses tipos de detectores não são mais utilizados para detectar monopolos de origens cósmicas, entretanto ainda são utilizados

para a procura do monopolo em estados ligados à matéria.

4.5.3 Radiação de Cherenkov

A passar por um meio como gelo ou água, monopolos relativísticos perderiam parte da energia como radiação Cherenkov. Esse fenômeno deu a Pavel Cherenkov, em 1958, o prêmio Nobel quando ele percebeu que partículas carregadas, ao passarem por um meio dielétrico, emitem uma radiação eletromagnética quando a velocidade da partícula é maior que a velocidade de propagação da luz no meio. Esse tipo de fenômeno é bastante utilizado em telescópios de neutrino que procuram por monopolos, tais como: AMANDA, ANTARES, IceCube, Baikal e etc. Mais descrições sobre esses detectores pode ser vista em [55], não vamos focar nos mesmos e na próxima seção abordaremos a detecção dos monopolos em colisores.

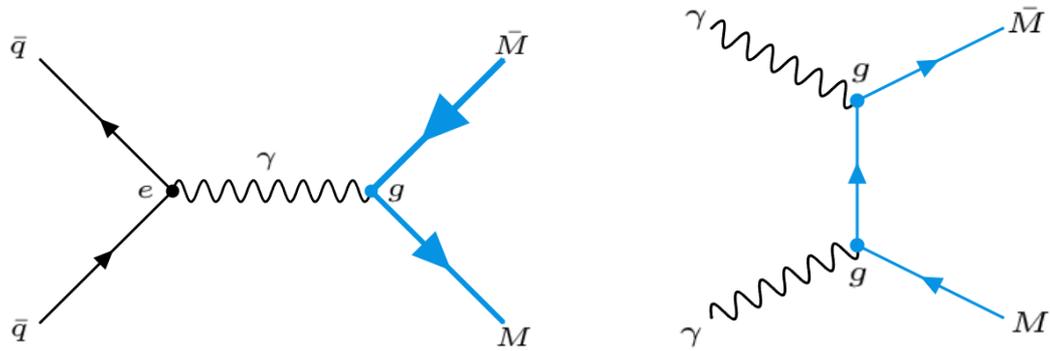
4.5.4 A procura em colisores

Como discutido anteriormente, a procura por monopolos derivados das GUT's é praticamente impossível para os detectores atuais, já que a massa desse monopolo estaria a 10^{12} ordens de grandeza acima da energia máxima atingida pelos colisores, entretanto, existe a procura por outros monopolos iguais aos citados anteriormente. Vamos focar em dois colisores, ambos no LHC, que procuram pelo monopolo, o ATLAS e MoEDAL.

O ATLAS (A Toroidal LHC ApparatuS) é um dos maiores detectores do LHC, em que ao invés das medições serem focadas em um único processo, o colisor é projetado para medir uma variada gama de sinais. O colisor, em colaboração com o CMS, fez em 2012, uma das grandes descobertas da física de partículas, a detecção do bóson de Higgs. A procura por monopolos no ATLAS foi realizada em 2012 [56], 2016 [57] e 2020 [58] nos níveis energéticos de 7 TeV, 8 TeV e 13 TeV, respectivamente. Como sabemos, o monopolo não foi detectado, o que não descarta sua existência, inclusive no ano de 2022 após os instrumentos e detectores do LHC terem passado por um refinamento, a busca pela partícula será feita em maiores espectros de energia.

O detector mais prestigiado, sem dúvidas, é o MoEDAL (Monopole and Exotics Detector at the LHC) que é exclusivamente dedicado à procura de monopolos magnéticos, dyons e outras partículas ionizantes. A primeira publicação do MoEDAL foi feita em 2016 [59] e outras publicações que procuram o monopolo e o dyon foram feitas nos anos seguintes [60, 61, 62, 63, 64].

O MoEDAL consiste de três tipos de detectores principais, o detector de caminho nuclear que consiste de dez filmes de plástico empilhados e após a colisão de prótons, a



(a) Produção de Drell-Yan do monopolo

(b) Produção via fusão de fótons de um monopolo

energia poderia produzir um par de monopolo-antimonopolo que ao atravessar o detector, quebraria as ligações moleculares do plástico e fariam um caminho que seria revelado por um processo de gravura, após os filmes de plástico serem mergulhados em uma solução de hidróxido de sódio.

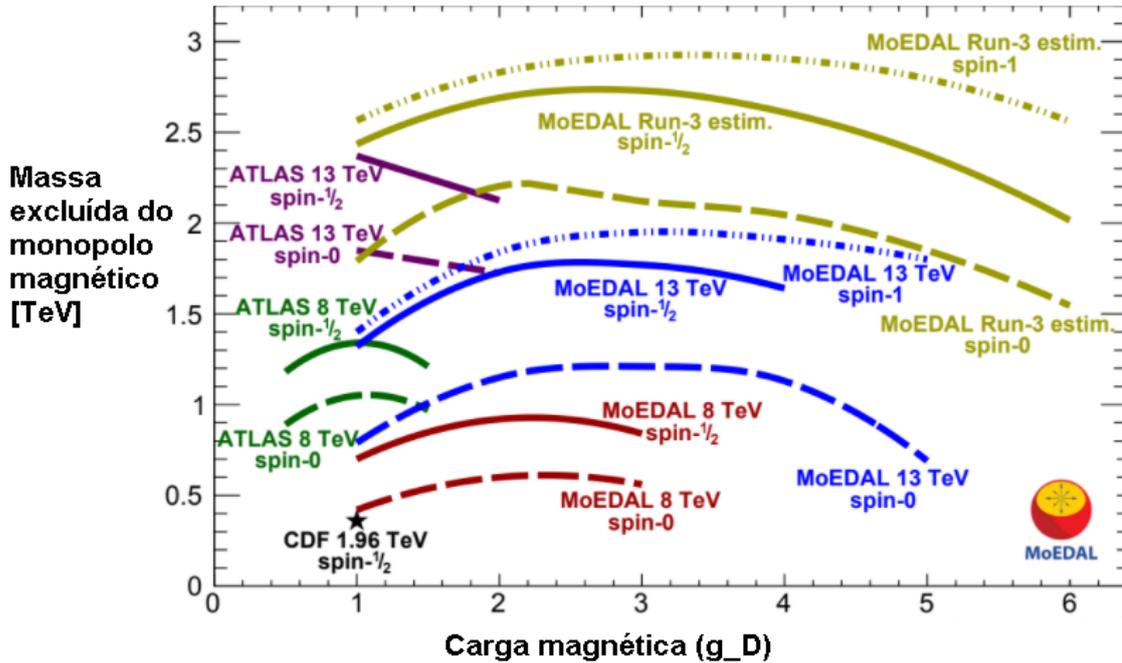
Outra forma de detecção seriam as armadilhas magnéticas, os monopolos poderiam ser retardados por este dispositivo que consiste de 800 kg de detectores de alumínio que atuam como uma armadilha. Os núcleos de alumínio têm um grande momento magnético anômalo, que facilita o aprisionamento do monopolo. O mesmo, preso, sinalizaria sua presença posteriormente quando um magnetômetro “varress” os detectores procurando uma carga magnética.

Por fim, ainda existem os monitores de radiação TimePix que são os únicos sub detectores do MoEDAL não-passivos que formam um sistema de monitoramento de radiação em tempo real. A operação permite um mapeamento 3D da carga espalhada no volume do sensor de silício, dessa maneira é possível diferenciar entre várias espécies de partículas e medir sua deposição de energia.

Vale ressaltar que existem diferentes mecanismos de produção dos monopolos nos colisores de partículas, o primeiro como mostrado na figura 14a é um processo de Drell-Yan intermediado por um fóton e o segundo 14b uma fusão de fótons no canal t intermediado por um monopolo. O acoplamento entre o fóton e o monopolo é muito forte, o que invalida o tratamento perturbativo para estimar a seção de choque.

Existe uma forma de possivelmente resolver esse problema, utilizando o mecanismo de Schwinger, descoberto em 1951. Schwinger mostrou que partículas eletricamente carregadas podem ser produzidas em um campo elétrico forte, tunelando a barreira de potência de Coulomb. O mesmo pode acontecer para o caso de um monopolo em um campo magnético muito forte[65]. Nesse caso, podemos utilizar técnicas semi clássicas para estimar a seção de choque.

Figura 15 – Limite de massa para a produção de Drell-Yan independente de β , em pro- curas realizadas pelo CDF, ATLAS e MoEDAL.

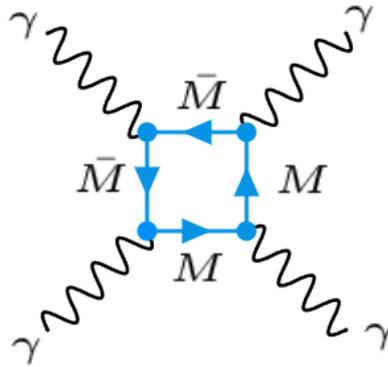


Fonte: Nick E. Mavromatos; Vasiliki A. Mitsou. Magnetic monopoles revisited: Models and searches at colliders and in the cosmos. p.68, fig. 21, [54].

O monopolo magnético ainda não foi detectado, entretanto, esse fato ainda é bastante útil e interessante para o vínculo de modelos com os resultados experimentais. Isso se deve ao fato de que pode-se encontrar os limites energéticos para o monopolo, como pode ser visto no gráfico 15. Nessa figura, temos o limite de massa para o monopolo magnético advindo da produção de Drell-Yan, em termo da carga de Dirac ($g_D = 68,5e$). Vemos que os limites do ATLAS, para $|g| \leq 2g_D$, é melhor que o do MoEDAL, graças ao primeiro receber maior luminosidade (20 vezes mais), mas o caso se inverte para cargas maiores.

Por fim, mostraremos algo bastante interessante que está relacionado aos monopolos eletrofracos apresentados na última seção. Pode-se analisar os monopolos como partículas virtuais, que claramente não serão medidas mas que, como no caso abaixo, apresenta um diagrama de espalhamento luz-luz por um loop de monopolo, o mesmo espalhamento que motivou os autores em [22] a estender o grupo da hipercarga fraca. Um fenômeno similar ocorre quando considera-se um *monopolia*, que é um estado ligado de um monopolo e um anti-monopolo confinados por uma forças magnéticas muito elevadas. Esse objeto foi proposto por Dirac na tentativa de explicar uns dos motivos de ainda não haverem detectado um monopolo. O monopolia poderia ter sido criado naturalmente no início do Universo e existem pesquisadores que tentam detectá-lo em laboratório [66, 67, 68, 69, 70].

Figura 16 – Espalhamento luz-luz por um monopolo



Antes de seguirmos com nossa abordagem usual e aumentarmos uma dimensão da teoria para encontrar novos defeitos topológicos, é interessante revisarmos o que foi apresentado nessa seção.

Dirac, em seu trabalho de 1931, alavancou a pesquisa e a procura por monopolos magnéticos, partícula esta, ainda desacreditada por alguns constituintes da comunidade científica. Em 1974, t'Hooft e Polyakov encontram o monopolo como um sólito topológico na teoria de Georgi-Glashow, cuja massa seria em torno de 100 GeV. Os autores, além disso, perceberam que a estrutura da teoria grande unificada de grupo $SU(5)$ era similar à teoria de Georgi-Glashow e, por isso, podemos encontrar uma solução de monopolo na mesma, entretanto sua massa seria da ordem de 10^{15} GeV, um valor que torna a detecção dessas partículas, praticamente, improvável.

Apresentamos ainda monopolos na teoria eletrofraca, que apesar de, à primeira vista não poder, topologicamente, existir, vimos que com uma reinterpretação do vácuo, somos capazes de conceber o monopolo na teoria. Apesar de a massa ser infinita, mostramos como podemos fazer uma extensão do grupo da hipercarga para a massa ser finita e mensurável. O ato da extensão é bastante interessante e pode ser abordada em trabalhos futuros.

Mostramos ainda as formas de detecção do monopolo e os principais detectores em sua busca, evidenciando a incessante busca dos pesquisadores que tanto apostam e acreditam na existência da partícula. Vale ressaltar que no ano de 2022, o LHC volta a realizar medidas em espectros de energia maiores, tornando o momento propício para o estudo e a procura de monopolos magnéticos.

CAPÍTULO

5

INSTANTONS

5.1 Introdução

Na física, descobrimos que nossa descrição do mundo é baseada em um tipo especial de teoria de campos clássicos, a chamada *Teoria de Yang-Mills*. Todas as teorias importantes para a física moderna, exceto a gravitação, são teorias de Yang-Mills com grupos de gauge distintos. Temos o exemplo da QCD cujo grupo é $SU(3)_C$, a teoria eletrofraca de Glashow-Weinberg-Salam cujo grupo é $SU(2)_L \times U(1)_Y$, o modelo padrão da física de partículas cujo grupo é $SU(3)_C \times SU(2)_L \times U(1)_Y$ e para as possíveis *GUT'S* cujo grupo pode ser $SU(5)$, $SO(10)$ e etc.

A primeira teoria de Yang-Mills que surgiu na física é a teoria de Maxwell para o Eletromagnetismo. Claramente, na época em que a teoria foi desenvolvida não era sabido que se tratava dessas classes de teorias e as equações da maneira que veremos, não eram vistas. Só depois que o estudo sobre simetrias de gauge foi formulado que fora percebido que o Eletromagnetismo obedecia tais simetrias. Pouco depois as teorias de Yang-Mills foram apresentadas como uma grande classe de teorias que satisfazem as simetrias de gauge.

Em 1954, a teoria foi proposta por Yang e Mills como uma extensão do conceito das simetrias de gauge de grupos abelianos para grupos não-abelianos para fornecer uma explicação sobre a interação da força forte. No início algumas pessoas criticaram a teoria, um deles o próprio Pauli, argumentando que os quanta da teoria não poderiam adquirir

massa, entretanto, o porquê dessa massa só foi entendido em 1960 com a teoria de Nambu-Goldstone.

Existem trabalhos sobre as teorias de Yang-Mills tanto na Física quanto na Matemática, onde o segundo observa a teoria por um lado mais topológico e geométrico utilizando a Geometria Diferencial e alguns resultados de Topologia Algébrica. Veremos nesta seção que a análise na perspectiva da Matemática é interessante para a compreensão dessas teorias e do surgimento dos Instantons de uma maneira mais profunda.

Sem mais delongas, escrevemos a ação de Yang-Mills:

$$S^{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} (F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}), \quad (5.1)$$

onde

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu + i [A_\mu, A_\nu], \quad (5.2)$$

e

$$A_\mu(x) = A_\mu^a(x) T^a. \quad (5.3)$$

Os T^a são matrizes que geram a álgebra de Lie de um certo grupo G :

$$[T^a, T^b] = i f^{abc} T^c \quad (a, b, c = 1, \dots, k), \quad (5.4)$$

onde o k é a dimensão da álgebra e f^{abc} é a constante de estrutura. Além disso,

$$\operatorname{Tr}[T^a] = 0, \quad (5.5)$$

$$\operatorname{Tr}[T^a T^b] = \frac{\delta^{ab}}{2}. \quad (5.6)$$

Podemos escrever a ação independentemente das matrizes T^a , da seguinte forma:

$$S^{YM} = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} [F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}] \quad (5.7)$$

$$= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} [F_{\mu\nu}^a T^a F^{\mu\nu b} T^b] \quad (5.8)$$

$$= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \operatorname{Tr} [T^a T^b] \quad (5.9)$$

$$= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu b} \frac{1}{2} \delta^{ab}. \quad (5.10)$$

$$S^{YM} = -\frac{1}{4g^2} \int dx^4 F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}. \quad (5.11)$$

Onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (5.12)$$

Substituindo $F_{\mu\nu}^a$ na equação anterior ficamos com

$$g^2 S^{YM} = \int d^4x \left[-\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^a \partial^\mu A^{\nu a} + \frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu^a \partial^\nu A^{\mu a} \right. \\ \left. g f^{abc} A_\mu^b A_\nu^c \partial^\mu A^{\nu a} - \frac{g^2}{4} f^{abc} f^{ade} A_\mu^b A_\nu^c A^{\mu d} A^{\nu e} \right]. \quad (5.13)$$

Os primeiros dois termos estão presentes nas teorias abelianas, já os dois últimos são próprios das teorias não abelianas, e trazem interações cúbicas e quárticas entre os próprios campos $A_\mu(x)$.

Fazendo uma variação na ação e forçando-a a ser zero, podemos encontrar as equações de movimento para essa teoria, então

$$\delta S = -\frac{1}{2g^2} \delta \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) \quad (5.14)$$

$$= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x (\text{Tr}(\delta F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}) + \text{Tr}(F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu})) \\ = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \{ \text{Tr}(F^{\mu\nu} \delta F_{\mu\nu}) + \text{Tr}(F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) \}, \quad (5.15)$$

$$= -\frac{1}{2g^2} \int d^4x \{ \text{Tr}(F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) + \text{Tr}(F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}) \} \\ = -\frac{1}{2g^2} \int d^4x 2 \text{Tr}(F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}), \quad (5.16)$$

$$\delta S = -\frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu} \delta F^{\mu\nu}), \quad (5.17)$$

onde

$$\delta F^{\mu\nu} = \delta(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu + i[A^\mu, A^\nu]), \quad (5.18)$$

$$= \partial_\mu(\delta A^\nu) - \partial^\nu(\delta A^\mu) + i[\delta A^\mu, A^\nu] + i[A^\mu, \delta A^\nu], \quad (5.19)$$

$$= \partial^\mu(\delta A^\nu) + i\delta A^\mu \cdot A^\nu + iA^\mu \delta A^\nu - (\mu \leftrightarrow \nu), \quad (5.20)$$

Logo, substituindo o resultado acima em 5.17, temos:

$$\delta S = -\frac{1}{g^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu} (\partial^\mu(\delta A^\nu) + i\delta A^\mu \cdot A^\nu + iA^\mu \delta A^\nu - (\mu \leftrightarrow \nu))). \quad (5.21)$$

Como $F_{\mu\nu} = -F_{\nu\mu}$, então

$$\delta S = -\frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} (F_{\mu\nu} (\partial^\mu (\delta A^\nu) + i\delta A^\mu \cdot A^\nu + iA^\mu \delta A^\nu)), \quad (5.22)$$

$$\delta S = -\frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} (F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A^\nu) + iF_{\nu\mu} \delta A^\nu \cdot A^\mu + iF_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu). \quad (5.23)$$

Utilizando da mesma propriedade anterior de $F_{\mu\nu}$, então

$$\delta S = -\frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} (F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A^\nu) - iF_{\mu\nu} \delta A^\nu \cdot A^\mu + iF_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu). \quad (5.24)$$

Pela propriedade cíclica do traço, vemos que

$$\delta S = -\frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} (F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A^\nu) - i\delta A^\nu \cdot F_{\mu\nu} A^\mu + iF_{\mu\nu} A^\mu \delta A^\nu). \quad (5.25)$$

Podemos reescrever da seguinte forma

$$\delta S = -\frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} (F_{\mu\nu} \partial^\mu (\delta A^\nu) - i[A^\mu, F_{\mu\nu}] \delta A^\nu). \quad (5.26)$$

Logo, integrando por partes temos

$$\delta S = -\frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} (-\partial^\mu F_{\mu\nu}) \delta A^\nu - i[A^\mu, F_{\mu\nu}] \delta A^\nu + \text{termo da superfície}. \quad (5.27)$$

Dessa forma, como estamos sempre querendo encontrar um extremo da ação, logo $\delta S = 0$ e por isso,

$$\delta S = \frac{2}{g^2} \int d^4x \operatorname{Tr} \{ (\partial^\mu F_{\mu\nu} - i[A^\mu, F_{\mu\nu}]) \delta A^\nu \} = 0. \quad (5.28)$$

Como δA^ν é arbitrário, então teremos que

$$\partial^\mu F_{\mu\nu} - i[A^\mu, F_{\mu\nu}] = 0. \quad (5.29)$$

Vemos que por definição, as equações de movimento podem ser reescritas como

$$D^\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.30)$$

Sabemos que $F_{\mu\nu}$ satisfaz a identidade de Bianchi e por isso

$$D_\mu F_{\rho\sigma} + D_\rho F_{\sigma\mu} + D_\sigma F_{\mu\rho} = 0, \quad (5.31)$$

e além disso,

$$D^\mu \tilde{F}_{\mu\nu} = 0, \quad (5.32)$$

onde $\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}F^{\rho\sigma}$. Vale ressaltar que esse resultado para o tensor dual aparece graças à *identidade de Bianchi*, logo não podemos considerá-lo como uma equação de movimento do sistema.

A partir da equação de movimento podemos definir uma corrente conservada j_ν da seguinte forma

$$j_\nu \equiv -\partial^\mu F_{\mu\nu} = i[A^\mu, F_{\mu\nu}], \quad (5.33)$$

já que

$$\partial^\nu j_\nu = -\partial^\nu \partial^\mu F_{\mu\nu} = 0, \quad (5.34)$$

porque $F_{\mu\nu}$ é anti-simétrico em $\nu\mu$. As cargas conservadas para essa corrente são:

$$Q = \int d^3x j_0, \quad (5.35)$$

$$Q = \int d^3x (-\partial^i F_{i0}). \quad (5.36)$$

Usando o Teorema de Gauss,

$$Q = \int d^2\sigma^i F_{i0}, \quad (5.37)$$

onde a integração é realizada em uma superfície no infinito.

A princípio podemos acoplar os campos A_μ a fontes externas $\mathcal{J}_\mu(x)$, para isto basta adicionar o seguinte termo na ação de Yang-Mills:

$$\frac{2}{g} \int d^4x \text{Tr}(A^\mu \mathcal{J}_\mu), \quad (5.38)$$

onde $\mathcal{J}_\mu(x) = \mathcal{J}_\mu^a(x)T^a$. Logo, as novas equações de movimento seriam

$$D^\mu F_{\mu\nu} = \mathcal{J}_\nu. \quad (5.39)$$

Para preservar a covariância da equação de movimento, podemos exigir que \mathcal{J}_ν se transforme de maneira covariante, ou seja,

$$\mathcal{J}_\nu \rightarrow U \mathcal{J}_\nu U^\dagger. \quad (5.40)$$

A corrente de Noether nesse caso será dada por

$$j_\mu = -\partial^\rho F_{\rho\mu} + \mathcal{J}_\mu. \quad (5.41)$$

Podemos fazer uma análise do termo que adicionamos na nossa ação, fazendo uma transformação de gauge no mesmo, então

$$\delta_G \left[\frac{2}{g} \int d^4x \operatorname{Tr} (A^\mu \cdot \mathcal{J}_\mu) \right] \quad (5.42)$$

$$= \frac{2}{g} \int d^4x \delta_G (\operatorname{Tr} (A^\mu \mathcal{J}_\mu))$$

$$= \frac{2}{g} \int d^4x \operatorname{Tr} (\delta_G A^\mu \mathcal{J}_\mu + A^\mu \delta_G \mathcal{J}_\mu). \quad (5.43)$$

Temos que $\delta A_\mu = -D_\mu \omega$ e que $\delta \mathcal{J}_\mu = i\omega^a [T^a, \mathcal{J}_\mu]$, com isso

$$(5.43) = \frac{2}{g} \int d^4x \operatorname{Tr} (-D_\mu \omega \mathcal{J}_\mu + A^\mu i\omega^a [T^a, \mathcal{J}_\mu]). \quad (5.44)$$

Podemos utilizar as definições de D_μ e que $\omega^a T^a = \omega$ para reescrever equação como

$$(5.44) = -\frac{2}{g} \int d^4x \operatorname{Tr} ((\partial^\mu \omega + i[A^\mu, \omega]) \cdot \mathcal{J}_\mu + iA^\mu [\omega, \mathcal{J}_\mu]), \quad (5.45)$$

$$= \frac{2}{g} \int d^4x -\operatorname{Tr} (\partial^\mu \omega \cdot \mathcal{J}_\mu + i[A^\mu, \omega] \cdot \mathcal{J}_\mu - iA^\mu [\omega, \mathcal{J}_\mu]), \quad (5.46)$$

$$= -\frac{2}{g} \int d^4x \{ \operatorname{Tr} (\partial^\mu \omega \cdot \mathcal{J}_\mu) + i \operatorname{Tr} ([A^\mu, \omega] \cdot \mathcal{J}_\mu + A^\mu [\mathcal{J}_\mu, \omega]) \}, \quad (5.47)$$

$$= -\frac{2}{g} \int d^4x \{ \operatorname{Tr} (\partial^\mu \omega \cdot \mathcal{J}_\mu) + i \operatorname{Tr} ([A^\mu \mathcal{J}_\mu, \omega]) \}, \quad (5.48)$$

Logo temos que

$$-\frac{2}{g} \int d^4x \{ \operatorname{Tr} (\partial^\mu \omega \cdot \mathcal{J}_\mu) + i \operatorname{Tr} ([A^\mu \mathcal{J}_\mu, \omega]) \}, = -\frac{2}{g} \int d^4x \operatorname{Tr} (\partial^\mu \omega \cdot \mathcal{J}_\mu). \quad (5.49)$$

E integrando por partes e descartando o termo da superfície que se anula nos extremos, temos

$$\delta_G \left[\frac{2}{g} \int d^4x \operatorname{Tr} (A^\mu \cdot \mathcal{J}_\mu) \right] = \frac{2}{g} \int d^4x \operatorname{Tr} (\omega \cdot \partial^\mu \mathcal{J}_\mu). \quad (5.50)$$

Podemos ver que a única forma que o acoplamento de um campo de gauge A^μ com uma corrente externa \mathcal{J}_μ seja invariante por uma transformação de gauge é se

$$\partial^\mu \mathcal{J}_\mu = 0. \quad (5.51)$$

Para a teoria de Maxwell, a equação acima não é um problema já que \mathcal{J}_μ não transforma sob uma mudança de gauge. Para o caso de Yang-Mills temos um porém,

porque exigimos que \mathcal{J}_μ transformasse de forma covariante, ou seja, $\mathcal{J}_\mu \rightarrow U\mathcal{J}_\mu U^\dagger$. Dessa forma, $\partial^\mu \mathcal{J}_\mu = 0$ não é covariante, implicando que para a nossa teoria, o acoplamento $\frac{2}{g} \int d^4x \text{Tr}(A^\mu J_\mu)$ quebra a simetria de gauge.

5.2 Instantons

Nesta seção trataremos sobre os Instantons, que são basicamente sólitons topológicos na teoria de Yang-Mills pura. Entretanto, essas soluções não estão presentes no espaço de Minkowski, mas sim no espaço Euclidiano quadridimensional, \mathbb{R}^4 . A motivação física para escolher o espaço Euclidiano é que em uma teoria quântica no espaço-tempo de Minkowski de dimensão $(3 + 1)$ precisamos calcular integrais de caminho que sejam analiticamente contínuas, para que sejam bem definidas. Podemos fazer uma extensão analítica realizando uma *rotação de Wick*, que trocará nossa coordenada do tempo por $t \leftrightarrow i\tau$ que converte a métrica de Minkowski em uma métrica Euclidiana. Somos levados a imaginar que o espaço Euclidiano é uma estrutura bem mais simples e por isso não faz muito sentido produzirmos essa rotação e buscarmos por alguma solução. Entretanto, veremos mais motivos para adotar essa estrutura e o porquê dela ser essencial para o surgimento dos instantons.

Seguiremos com as mesmas equações para a teoria de Yang-Mills sem acoplamento, fazendo pequenos ajustes, já que agora estamos utilizando a métrica Euclidiana com assinatura $(++++)$ e por isso não faz diferença como escrevemos nossos índices. Dessa forma, nossa ação é definida como

$$S^{YM} = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}). \quad (5.52)$$

Variar essa ação, como já feito anteriormente, nos dá o mesmo resultado

$$D_\mu F_{\mu\nu} = 0. \quad (5.53)$$

Definimos novamente o tensor de força do campo como $F_{\mu\nu}$, assim como seu dual $*F_{\mu\nu}$. Em componentes, podemos defini-la como

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, \quad (5.54)$$

onde $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ é o símbolo de Levi-Civita e adotamos a convenção de que $\epsilon_{1234} = -1$. Utilizando que $\text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) = \text{Tr}(*F_{\mu\nu}*F_{\mu\nu})$, podemos reescrever a ação como

$$2S = -\frac{1}{4g^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) - \frac{1}{4g^2} \int d^4x \text{Tr}(*F_{\mu\nu}*F_{\mu\nu}), \quad (5.55)$$

$$S = -\frac{1}{8g^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + *F_{\mu\nu}*F_{\mu\nu}). \quad (5.56)$$

Vemos que este termo é sempre nulo ou positivo, ou seja,

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu} + {}^*F_{\mu\nu}{}^*F_{\mu\nu}) \geq 0. \quad (5.57)$$

Podemos completar quadrados e reescrever a expressão da seguinte forma

$$\{\text{Tr}((F_{\mu\nu} \mp {}^*F_{\mu\nu})(F_{\mu\nu} \mp {}^*F_{\mu\nu})) \pm 2 \text{Tr}(F_{\mu\nu}{}^*F_{\mu\nu})\} \geq 0. \quad (5.58)$$

Logo, temos que

$$\text{Tr}((F_{\mu\nu} \mp {}^*F_{\mu\nu})(F_{\mu\nu} \mp {}^*F_{\mu\nu})) \geq \mp 2 \text{Tr}(F_{\mu\nu}{}^*F_{\mu\nu}) \quad (5.59)$$

$$\text{Tr}((F_{\mu\nu} \mp {}^*F_{\mu\nu})^2) \geq \mp 2 \text{Tr}(F_{\mu\nu}{}^*F_{\mu\nu}) \quad (5.60)$$

Assumindo que os campos são duais ou anti-duais, ou seja, $F_{\mu\nu} = \pm {}^*F_{\mu\nu}$, vemos que

$$\text{Tr}(F_{\mu\nu}F_{\mu\nu}) \geq \frac{1}{2} \text{Tr}(F_{\mu\nu}{}^*F_{\mu\nu}). \quad (5.61)$$

Logo reescrevendo em termos da ação

$$S_{YM}^E \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |N|, \quad (5.62)$$

onde

$$|N| = -\frac{1}{64\pi^2} \int d^4x \text{Tr}(F_{\mu\nu}{}^*F_{\mu\nu}). \quad (5.63)$$

Podemos ver que encontramos um limite inferior para a ação e nossa condição para que ela exista, é que precisa valer as equações de campo para o instanton $F_{\mu\nu} = \pm {}^*F_{\mu\nu}$. Essa simples equação, que parecia uma exigência para conseguirmos escrever o limite inferior da ação, representa muito mais que isso. Ela é o real motivo para estarmos adotando o espaço Euclidiano, já que essa configuração de auto-dualidade só é possível já que na assinatura da métrica Euclidiana $*^2 = 1$. No espaço de Minkowski $*^2 = -1$, então nosso limite inferior para a ação seria satisfeito somente se $F_{\mu\nu} = \pm i {}^*F_{\mu\nu}$, que não possui soluções reais. As soluções reais apenas aparecem no espaço Euclidiano.

Além disso, podemos perceber que o limite inferior é exatamente o nosso segundo número de Chern para um gauge $SU(2)$ em \mathbb{R}^4 , dado por

$$c_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{\mathbb{R}^4} (F \wedge F). \quad (5.64)$$

Nosso N é um invariante topológico, ou seja, independe da métrica do espaço. Antes de começarmos a trabalhar com instantons efetivamente, devemos mostrar como esses sólitons aparecem graças à topologia da nossa teoria. Vimos no Apêndice B que

para a existência dos sólitons topológicos na variedade do vácuo \mathcal{M} , se a dimensão dessa variedade é d , precisamos mostrar que $\pi_{d-1}(\mathcal{M}) = \mathbb{Z}$. Olhando para o espaço Euclidiano de quatro dimensões que estamos trabalhando possui um grupo $\pi_3(\mathbb{R}^4) = 0$. Entretanto, campos de gauge puro na esfera S^n podem ser classificados pelos mapas das funções de transição, S^{n-1} pra o grupo de gauge G , $\pi_{n-1}(G)$.

De qualquer forma, qual é o sentido de adotarmos o espaço euclidiano se sólitons topológicos não podem surgir no mesmo? Pode ser visto no Apêndice D para o número de Chern para campos de gauge não-Abelianos que existe um mapeamento de um elemento do grupo de gauge no infinito, dado por

$$U_\infty : S^3 \rightarrow SU(2), \quad (5.65)$$

dessa forma vemos que existe um mapeamento que vai de $S^3 \rightarrow S^3$ que é de fato a mesma coisa que fazer $\pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$. Logo, percebemos que os instantons emergem desse mapeamento.

Chegamos na parte de mostrar explicitamente as soluções do tipo instanton, cuja equação de movimento é $F_{\mu\nu} = \pm^* F_{\mu\nu}$. Para fazer isso, podemos construir este mapa citado na equação 5.65.

$$\begin{aligned} U(\hat{x}) &= \frac{x_4 + i\vec{x} \cdot \vec{\sigma}}{\rho}, \\ &= \begin{pmatrix} \cos \chi + i \sin \chi \cos \psi & i \sin \chi \sin \psi e^{-i\phi} \\ i \sin \chi \sin \psi e^{+i\phi} & \cos \chi - i \sin \chi \cos \psi \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Seguindo os passos anteriores que fizemos para os outros sólitons, podemos propor um ansatz escrito como:

$$A_\mu(x) = \frac{i}{g} f(\rho) U(\hat{x}) \partial_\mu U^\dagger(\hat{x}), \quad (5.67)$$

em que $f(\infty) = 1$ e $f(0) = 0$. Usando a definição de $F_{\mu\nu}$ em 5.2, vemos que tal tensor pode ser escrito como

$$\begin{aligned} F_{\mu\nu} &= \frac{i}{g} [(\partial_\mu f) U \partial_\nu U^\dagger + f \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger + f^2 (U \partial_\mu U^\dagger) (U \partial_\nu U^\dagger) \\ &\quad - (\mu \leftrightarrow \nu)] \end{aligned} \quad (5.68)$$

Sabendo que U é unitário, então $(\partial_\mu U^\dagger) U = -U^\dagger \partial_\mu U$, utilizando isso no terceiro termo da equação 5.68, temos

$$F_{\mu\nu} = \frac{i}{g} [(\partial_\mu f) U \partial_\nu U^\dagger + f(1-f) \partial_\mu U \partial_\nu U^\dagger - (\mu \leftrightarrow \nu)]. \quad (5.69)$$

Podemos reescrever a equação acima em coordenadas esféricas quadridimensionais, definindo

$$\partial \equiv \hat{\rho} \partial_\rho + \hat{\chi} \rho^{-1} \partial_\chi + \hat{\psi} (\rho \operatorname{sen} \chi)^{-1} \partial_\psi + \hat{\phi} (\rho \operatorname{sen} \chi \operatorname{sen} \psi)^{-1} \partial_\phi. \quad (5.70)$$

Como f é uma função de ρ e U é função de (χ, ψ, ϕ) , temos:

$$\begin{aligned} F_{\rho\chi} &= \frac{i}{g} f' \rho^{-1} U \partial_\chi U^\dagger, \\ F_{\psi\phi} &= \frac{i}{g} f(1-f) (\rho^2 \operatorname{sen}^2 \chi \operatorname{sen} \psi)^{-1} (\partial_\psi U \partial_\phi U^\dagger - \partial_\phi U \partial_\psi U^\dagger). \end{aligned} \quad (5.71)$$

Utilizando a definição do dual 5.54, podemos observar que ${}^*F_{\rho\chi} = -F_{\psi\phi}$, mas pela solução do instanton ${}^*F_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}$, logo, $F_{\rho\chi} = -F_{\psi\phi}$. Com isso, fazendo uso dessa igualdade na equação anterior e fazendo a separação de variáveis, temos

$$\rho f' = c f(1-f), \quad (5.72)$$

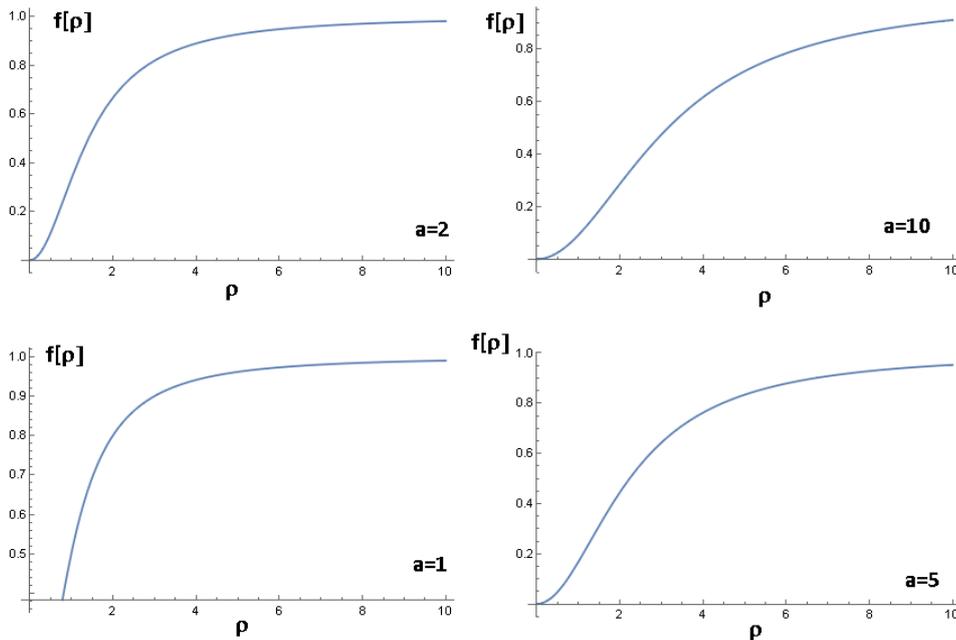
$$U \partial_\chi U^\dagger = -c^{-1} (\operatorname{sen}^2 \chi \operatorname{sen} \psi)^{-1} (\partial_\psi U \partial_\phi U^\dagger - \partial_\phi U \partial_\psi U^\dagger), \quad (5.73)$$

em que c é uma constante, que aparece pelo método de separação de variáveis. Substituindo a equação 5.66 na 5.73, verificamos que a solução só é satisfeita se $c = 2$. Para a equação 5.72, a solução é:

$$f(\rho) = \frac{\rho^2}{\rho^2 + a^2}, \quad (5.74)$$

em que a é o tamanho do instanton.

Figura 17 – Gráficos da solução do instanton $f(\rho)$, para diferentes valores de a .



5.3 O θ -vácuo

Todas essas contas envolvidas são bastante interessantes mas, até agora, não passaram de uma curiosidade matemática sobre a teoria de Yang-Mills. Tentaremos, nesta seção, entender um pouco mais sobre o significado dos instantons.

Podemos discutir quem é o real vácuo da nossa teoria, ou seja, o estado de mínima energia. Inclusive, para esta teoria, temos infinitos vácuos. Essa ideia não deveria ser uma surpresa, já que vimos o mesmo acontecendo para a teoria de sine-Gordon. No instante em que compactificamos o nosso espaço, colocando um ponto em cada infinito, criamos os vácuos degenerados para a teoria de Yang-Mills. Na verdade, não devemos nos preocupar muito com a teoria ter infinitos vácuos, já que, como em outras teorias já abordadas, consideraremos os vácuos com os números de instantons N e M . Existem estados de vácuo diferentes nessa teoria para cada *número de winding* diferente, ou seja, cada um pertence a uma classe de homotopia distinta.

Dessa maneira, somos levados a pensar que esses vácuos são desconexos, mas veremos que o instanton consegue tunelar por estes estados de vácuo, ou seja, dado um estado $|n\rangle$ e um estado $|n'\rangle$, o instanton consegue fazer um caminho de $|n\rangle \rightarrow |n+n'\rangle$, e se $n' = 1$, temos o chamados instantons-BPS.

Podemos calcular a amplitude de transição para esses dois estados. Em $SU(2)$, é dada por

$$\langle n'|H|n\rangle \sim e^{-|n'-n|S_1}, \quad (5.75)$$

onde $S_1 = \frac{8\pi^2}{g^2}$. Esses elementos de matriz dependem apenas de $n' - n$ e por isso podemos definir o vácuo real da nossa teoria, o θ -vácuo, da forma

$$|\theta\rangle = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-in\theta}|n\rangle. \quad (5.76)$$

Como existe um tunelamento entre os estados $|n\rangle$ e, o fato de $\langle n'|H|n\rangle$ depender apenas de $|n' - n|$ nos diz que os estados $|n\rangle$ não são autoestados do Hamiltoniano. Podemos observar que o θ -vácuo é o real vácuo da teoria calculando o operador de evolução entre os dois θ -vácuos.

$$\langle \theta' | e^{-iHt} | \theta \rangle = \sum_{n',n} e^{in'\theta'} e^{-in\theta} \langle n' | e^{-iHt} | n \rangle, \quad (5.77)$$

$$= \sum_{n',n} e^{in'(\theta'-\theta)} e^{i(n'-n)\theta} \langle n' | e^{-iHt} | n \rangle, \quad (5.78)$$

$$\langle \theta' | e^{-iHt} | \theta \rangle = \sum_{n',k} e^{in'(\theta'-\theta)} e^{ik\theta} \langle k | e^{-iHt} | 0 \rangle, \quad (5.79)$$

$$= 2\pi\delta(\theta - \theta') \sum_k e^{ik\theta} \langle k | e^{-iHt} | 0 \rangle. \quad (5.80)$$

Então, vemos que um θ -vácuo não pode evoluir para outro diferente. Se nós supomos que vivemos em um estado de θ definido, então estados com outros valores de θ são inacessíveis para nós, então, de certa forma, θ é efetivamente uma constante da natureza. Para entender melhor o papel do parâmetro θ , imagine um estado com número de winding n_- em $x_4 = -\infty$ e terminar com um número de winding n_+ , considerando a integral de caminho euclidiana, as únicas configurações de campo que contribuirão são as que possuem o número de winding $n_+ - n_-$. Dessa forma podemos escrever tal integral de caminho como

$$Z_{n_+ \leftarrow n_-}(J) = \int \mathcal{D}A_{n_+ \leftarrow n_-} e^{-S + \int d^4x \text{Tr}(J^\mu A_\mu)}. \quad (5.81)$$

Vemos que a integral depende apenas na diferença de caminho $n_+ - n_-$. Podemos escrever essa integral em termos do θ -vácuo, em particular começando de $|\theta\rangle$ e terminando em $|\theta'\rangle$, assim, utilizando a equação 5.76, temos que

$$Z_{\theta' \leftarrow \theta}(J) = \sum_{n_-, n_+} e^{i(n_+ \theta' - n_- \theta)} Z_{n_+ \leftarrow n_-}(J). \quad (5.82)$$

Seja $n_+ = n_- + n$, então $n_+ \theta' - n_- \theta = n_-(\theta' - \theta) + n\theta'$. Já que $Z_{n_+ \leftarrow n_-}(J)$ não depende de n_- , mas sim, de n , n_- aparecerá na equação com um fator de $e^{in_-(\theta' - \theta)}$. Somando sob todos os n_- fará o mesmo que na equação 5.80, ou seja, temos o surgimento de um $\delta(\theta' - \theta)$, o que mostra que o valor de θ é independente do tempo. Com isso, temos que

$$Z_\theta(J) \equiv \sum_n e^{in\theta} \int \mathcal{D}A_n e^{-S + \int d^4x \text{Tr}(J^\mu A_\mu)}. \quad (5.83)$$

Utilizando do fato de que $n = \frac{g^2}{64\pi^2} \int d^4x \text{Tr}(\tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu})$, podemos reescrever essa integral na seguinte forma

$$Z_\theta(J) = \int \mathcal{D}A \exp \int d^4x \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{ig^2\theta}{64\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \right]. \quad (5.84)$$

Vemos que aparece um termo extra na nossa Lagrangiana de Yang-Mills e tal termo é acompanhado pelo θ . Colocando $x_4 = it$, conseguimos escrever essa integral no espaço de Minkowski, então

$$Z_\theta(J) = \int \mathcal{D}A \exp i \int d^4x \text{Tr} \left[-\frac{1}{2} F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} - \frac{g^2\theta}{64\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + J^\mu A_\mu \right]. \quad (5.85)$$

Classicamente, tal termo não teria efeito, uma vez que adiciona uma divergência total para a densidade Lagrangiana deixando assim as equações de Euler-Lagrange inalteradas. Até quanticamente, isso não tem efeito na teoria das perturbações: Se pensarmos

neste termo dando origem a um novo tipo de vértice nos diagramas de Feynman, a derivada dá um fator do momento total entrando no vértice que é zero. É por isso que este termo geralmente é omitido nas discussões introdutórias da Teoria de Yang-Mills e o motivo da importância ou, até mesmo, a possibilidade de tal termo existir não foi apreciado até a descoberta das soluções de instantons de Yang-Mills.

É recomendado ao leitor que leia o apêndice, caso o mesmo deseje entender melhor sobre o θ -vácuo e as discussões topológicas da teoria de Yang-Mills pura. Inclusive, podemos oferecer uma melhor explicação àqueles que compreenderam as contas apresentadas na seção anterior.

Como discutido, na teoria em que estamos trabalhando, estamos mapeando nossa simetria do vácuo com o nosso espaço no infinito. Existem mapas que podem ser continuamente deformados para a identidade, enquanto outros não. Já que $\pi_3(SU(2)) = \mathbb{Z}$ os mapas que não podem ser deformados para a identidade formam classes de equivalência. Elementos que pertencem à mesma classe de equivalência geram *small* transformações de gauge, ou seja, relacionam diferentes representações para o mesmo estado físico, enquanto que para mapas que pertencem a diferentes classes de equivalência, existe uma transformação de gauge *large* que relacionam ambos os mapas, entretanto, os mesmos são topologicamente desiguais já que cada um possui um número de *Chern-Simons* distinto. A leitura da referência [71] é bastante recomendada, por apresentar excelentes analogias, àqueles que desejam aprofundar melhor sobre a diferença entre uma transformação de gauge dita *small* ou *large*, além de relacionar o assunto com o θ -vácuo.

Até agora, estávamos trabalhando em $SU(2)$. O que acontece para grupos de gauge maiores? Veremos que para grupos de ordem maior G , se $SU(2)$ for um subgrupo do mesmo, então as soluções do tipo instantons ainda serão válidas. Vemos que isso não acontece para $U(1)$. Tendo isso em mente, veremos o que acontece se trabalharmos com $SU(3)$ o grupo da QCD e a partir disso mostraremos como a solução dos instantons resolve o famoso problema $U(1)$ do Modelo Padrão.

5.4 QCD e o problema $U(1)$

Para entender o problema $U(1)$ vamos primeiro introduzir nossa teoria de Yang-Mills com o grupo $SU(3)_C$, mais conhecido como a QCD. A Cromodinâmica quântica (QCD) é a teoria da interação forte entre quarks e glúons, as partículas fundamentais que constituem os hádrons, como o próton, o nêutron e o pión. O análogo QCD da carga elétrica é uma propriedade chamada cor, os glúons são os portadores de força da teoria, assim como os fótons são para a força eletromagnética na eletrodinâmica quântica (QED). A Lagrangiana da QCD pode ser escrita como

$$\mathcal{L}_{\text{QCD}} = i\bar{\chi}^{\dagger\alpha i}\bar{\sigma}^\mu(D_\mu)_\alpha^\beta\chi_{\beta i} + i\xi_{i\alpha}^\dagger\bar{\sigma}^\mu(\bar{D}_\mu)_\beta^\alpha\xi^{\beta i} - \frac{1}{4}G^{a\mu\nu}G_{\mu\nu}^a, \quad (5.86)$$

onde $D_\mu = \partial_\mu - ig\lambda^a A_\mu^a$ e $\bar{D}_\mu = \partial_\mu - ig\bar{\lambda}^a A_\mu^a$ com $(\bar{\lambda}^a)_\beta^\alpha = -(\lambda^a)_\beta^\alpha$ que são as derivadas covariantes. λ^a são as matrizes de Gell-Mann do grupo de cor $SU(3)$. O $\alpha, \beta = 1, 2, 3$ e $i = 1, 2, 3$ são índices de cor e sabor, respectivamente. Os $\xi^{\alpha i}$ são campos de Weyl canhotos. Neste caso consideramos a teoria com apenas três sabores de quarks, u, d e s . Vamos assumir também que a massa desses quarks é nula, que faz sentido já que as massas m_u, m_d, m_s são muito pequenas, se comparada às energias envolvidas na QCD.

Além da simetria $SU(3)$ a Lagrangiana têm uma simetria, aproximada, de sabor definida globalmente $U(3) \times U(3)$, representada por

$$\chi_{\alpha i} \rightarrow L_i^j \chi_{\alpha j}, \quad (5.87)$$

$$\xi^{\alpha \bar{i}} \rightarrow (R^*)_{\bar{j}}^{\bar{i}} \xi^{\alpha \bar{j}}, \quad (5.88)$$

onde L e R^* são matrizes 3×3 unitárias. Em termos do campo de Dirac

$$\Psi_{\alpha i} = \begin{pmatrix} \chi_{\alpha i} \\ \xi_{\alpha \bar{i}}^\dagger \end{pmatrix}. \quad (5.89)$$

Podemos reescrever as equações da forma:

$$\begin{aligned} P_L \Psi_{\alpha i} &\rightarrow L_i^j P_L \Psi_{\alpha j} \\ P_R \Psi_{\alpha \bar{i}} &\rightarrow R_{\bar{i}}^{\bar{j}} P_R \Psi_{\alpha \bar{j}}, \end{aligned} \quad (5.90)$$

onde $P_{L,R} = \frac{1}{2}(1 \mp \gamma^5)$. Por isso essa simetria de sabor é chamada de $U(3)_L \times U(3)_R$. Uma simetria que trata as partes destras e canhotos de um campo de Dirac de maneira diferente é considerada quiral. Outras simetrias como as simetrias vetoriais (também chamadas de simetrias diagonais) significam que a mesma transformação é aplicada nas duas quiralidades. Simetrias axiais são aquelas em que uma transformação é aplicada nas partículas canhotos e a inversa nas partículas destras.

Essa simetria com três sabores e com as massas dos quarks desprezível é $U(3)_L \times U(3)_R \sim SU(3)_L \times SU(3)_R \times U(1)_V \times U(1)_A$. Na quebra espontânea de simetria queremos evitarmos a quebra da invariância de Lorentz e a quebra da simetria $SU(3)_c$, precisamos de um escalar de Lorentz e de um singlete de cor. Entretanto, não temos campos escalares fundamentais na teoria, logo, o candidato mais simples é um condensado de quark-antiquark, dado por:

$$\langle 0 | \chi_{\alpha i a} \xi_b^{\beta \bar{j}} | 0 \rangle = -\frac{1}{6} \Lambda^3 \delta_\alpha^\beta \delta_i^{\bar{j}} \epsilon_{ab}, \quad (5.91)$$

onde $\alpha, \beta = 1, 2$ são os índices spinoriais conjugados; ϵ_{ab} é o símbolo de Levi-Civita; e Λ é um parâmetro com dimensão de massa. Quando especificamos $R = L$ vemos que o condensado não varia por transformações do subgrupo $SU(3)_V$. Logo, $SU(3)_L \times SU(3)_R$ é espontaneamente quebrado para $SU(3)_V$. Podemos mostrar essa afirmação fazendo

$$\langle 0 | \chi_{\alpha i a} \xi_b^{\beta \bar{j}} | 0 \rangle \rightarrow L_i^k (R^*)_{\bar{j}}^{\bar{n}} \bar{n} \langle 0 | \chi_{\alpha k a} \xi_b^{\beta \bar{n}} | 0 \rangle, \quad (5.92)$$

$$\rightarrow -\frac{1}{6}\Lambda^3\delta_{\alpha\beta}\epsilon_{ab}(LR^\dagger)_i^{\bar{j}}. \quad (5.93)$$

Logo, quando $L = R$, que corresponde à transformação $SU(3)_V$. Essa invariância mostra que a simetria citada não é quebrada. Entretanto, para uma transformação mais geral onde $L \neq R$, não existirá essa invariância e isso nos sugere que os geradores axiais são quebrados.

Uma Lagrangiana efetiva de baixa energia, também conhecida como Lagrangiana quiral, para os nove bósons NG esperados, pode ser construída [72] para calcular a massa teórica dos bósons carregados, que são:

$$m_{\pi^\pm}^2 = 2\Lambda^3 f_\pi^{-2} (m_u + m_d), \quad (5.94)$$

$$m_{K^\pm}^2 = 2\Lambda^3 f_\pi^{-2} (m_u + m_s), \quad (5.95)$$

$$m_{K^0\bar{K}^0}^2 = 2\Lambda^3 f_\pi^{-2} (m_d + m_s), \quad (5.96)$$

onde f_π é a constante de decaimento do méson π^0 . Para os bósons neutros as massas são

$$m_{\pi^0}^2 \equiv m_{\pi^3}^2 = 4m\Lambda^3/f_\pi^2, \quad (5.97)$$

$$m_\eta^2 = \frac{8}{3}m_s\Lambda^3 f_\pi^{-2} \left(1 + \frac{3}{4}r^2\right), \quad (5.98)$$

$$m_{\pi^9}^2 = \frac{9r^2}{4 + 3r^2}m_{\pi^0}^2, \quad (5.99)$$

onde $r \equiv \frac{f_\pi}{f_9}$, foi utilizado, a fim de simplificação, $m_u = m_d \equiv m \ll m_s$ e f_9 é a constante de decaimento do méson π^9 .

Vemos na equação para m_π^9 que quando $r \rightarrow \infty$, ou seja, $f_9 \rightarrow 0$ atingiremos um máximo $\sqrt{3}m_{\pi^0}$. Entretanto, essa partícula não aparece na natureza. Essa discrepância entre a teoria e experimento é chamado de problema $U(1)$.

Entretanto, existe uma solução para esse problema que é a anomalia de Adler-Bell-Jackiw. Como a divergência da corrente axial J_5^μ associada a esta simetria obtém correções quânticas nos diagramas de Feynman da forma

$$\partial_\mu \langle 0 | J_5^\mu | A^a(p) A^a(q) \rangle = -\frac{g^2 N}{64\pi^2} \langle 0 | G^{a\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}^a | A^a(p) A^a(q) \rangle, \quad (5.100)$$

onde N é o número de quarks sem massa. Essa anomalia também altera a ação da seguinte forma

$$\delta S = \alpha \int d^4x \partial_\mu J_5^\mu = -\alpha \frac{g^2 N}{64\pi^2} \int d^4x \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} [G_{\mu\nu} G_{\alpha\beta}], \quad (5.101)$$

vemos que a corrente não é conservada, então a simetria axial $U(1)_A$ não seria uma simetria verdadeira da QCD e, por isso, não precisaríamos esperar nenhum bóson de NG proveniente do mesmo. Entretanto, como

$$\begin{aligned} -\frac{g^2 N}{64\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} [G_{\mu\nu} G_{\alpha\beta}] &= -\frac{g^2 N}{16\pi^2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\mu \text{Tr} \left[A_\nu \partial_\alpha A_\beta - \frac{2}{3} ig A_\nu A_\alpha A_\beta \right], \\ &\equiv -\frac{g^2 N}{16\pi^2} \partial_\mu W^\mu, \end{aligned} \quad (5.102)$$

onde

$$W^\mu = \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \text{Tr} \left[A_\nu \partial_\alpha A_\beta - \frac{2}{3} ig A_\nu A_\alpha A_\beta \right], \quad (5.103)$$

que é conhecida como a forma, ou melhor, a corrente de Chern-Simons. Podemos reescrever a equação da corrente como

$$\partial_\mu \langle 0 | J_5^\mu | A^a(p) A^a(q) \rangle = \frac{g^2 N}{16\pi^2} \partial_\mu W^\mu. \quad (5.104)$$

Por causa dessas identidades δS é uma integral de superfície pura

$$\delta S = -\alpha \frac{g^2 N}{16\pi^2} \int d^4x \partial_\mu W^\mu = -\alpha \frac{g^2 N}{16\pi^2} \int d\sigma_\mu W^\mu. \quad (5.105)$$

Logo, podemos pensar que o termo $\int d\sigma_\mu W^\mu = 0$ e a simetria $U(1)$ axial retornaria, trazendo de volta o problema $U(1)$. Entretanto, graças aos instantons, vemos que $\int d\sigma_\mu W^\mu \neq 0$. Já vimos pelas formas de Chern-Simons que a integral referida representa a carga de Chern-Simons, que é o número de winding. Como sabemos que diferentes números de winding podem ser alcançados por meio de instantons, chegamos a duas conclusões importantes.

A primeira é que a simetria axial não é mais uma simetria da Lagrangiana da QCD, já que a existência dos instantons afeta na carga $Q_5 = \int d^4x \partial_\mu J_5^\mu$, no sentido que a carga depois do instanton difere da carga antes como

$$\begin{aligned} \Delta Q_5 &= \int d^4x \partial_\mu J_5^\mu, \\ &= \frac{g^2 N}{32\pi^2} \int d^4x \text{Tr} [G^{\mu\nu} \tilde{G}_{\mu\nu}], \\ &= \pm 2N. \end{aligned} \quad (5.106)$$

Além disso, na Lagrangiana da QCD, graças ao efeito dos instantons, surge um termo que não é invariante por transformações CP , originando em um novo problema, o problema CP , que é solucionado pelos Áxions, partículas hipotéticas propostas por S. Weinberg e F. Wilczek [73, 72]. Os defeitos topológicos vistos nas duas primeiras seções, *domain walls* e *cordas cósmicas* são produzidos em modelos que contém o áxion, já que após as sucessivas transições de fase do Universo primordial, as cordas cósmicas

podem ser criadas e uma vez produzidas elas podem vibrar e produzir áxions estáveis. O mesmo acontece com os domain walls, após a quebra da simetria $U(1)_{PQ}$ de Peccei-Quinn subgrupos abelianos discretos, tais como o \mathbb{Z}_N , podem gerar domain walls estáveis ou que decaiam em áxions. Não exibiremos os detalhes, que podem ser vistos em [74].

CAPÍTULO

6

CONCLUSÃO

No presente trabalho, estudamos sólitons topológicos na teoria de campos. Começamos com a teoria de um único campo escalar em um modelo unidimensional e, com isso, encontramos as soluções estáticas chamadas de kink e anti-kink, calculamos sua energia clássica e a correção quântica tanto para o modelo ϕ^4 , quanto para o modelo sine-Gordon, e os valores encontrados são: $M_{kink_{\phi^4}} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \frac{m^3}{\lambda} + \left(\frac{\sqrt{6}}{12} - \frac{3\sqrt{2}}{2\pi} \right) m + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$ e $M_{kink_{SG}} = \frac{8m^3}{\lambda} - \frac{m}{\pi} + \mathcal{O}\left(\frac{\lambda}{m}\right)$, respectivamente. Vale ressaltar que os cálculos realizados nesta seção foram apresentados com um alto grau de detalhamento até a correção da massa do kink, cálculos estes, omitidos em todas as literaturas. No fim desta seção, apresentamos ainda a dinâmica de multi-kinks e como podemos obter essas soluções através das transformações de Bäcklund, um assunto bastante interessante, mas que saía do escopo do trabalho e teve de ser abordado de maneira corriqueira.

Para descrever os vórtices, vimos que pelo teorema de Derrick, precisamos adicionar um termo de gauge na Lagrangiana para encontrar o sóliton topológico com energia finita. Assim como no caso do kink, as contas também foram bastante detalhadas, apresentando duas maneiras distintas de como encontrar as equações de movimento, partindo da energia, tais cálculos auxiliaram bastante no capítulo seguinte dos monopolos magnéticos. Os vórtices, como defeitos topológicos na Cosmologia, são estruturas extremamente interessantes por apresentarem um caráter bastante exótico. Como brevemente citado, essas estruturas teriam massas enormes e seriam facilmente detectáveis. Entretanto, o modelo precisa de alterações, já que essas cordas não foram detectadas, o que sugere que

o limite energético das mesmas deve ser bem menor do que o previsto.

Seguimos estudando os monopolos magnéticos, estruturas esfericamente simétricas, propostas por Dirac, em 1931. Demonstramos como podemos resolver o problema do $\nabla \cdot \vec{B} = 0$, definindo as cordas de Dirac e, partindo das mesmas, demonstramos como a existência de um único monopolo garante que a carga elétrica é quantizada. Os monopolos, como sólitons topológicos, só foram propostos em 1974 e, nessa dissertação, ao apresentarmos a análise topológica, encontramos as equações de movimento e derivamos a massa para esse monopolo. Encontramos, ainda, a solução BPS para essa partícula, assim como o limite BPS, que estima o limite inferior para a massa do monopolo, demonstrado como $M \geq \frac{m_w}{\alpha} |n|$, uma massa muito maior que os bósons W . Procuramos, também, o monopolo na teoria eletrofraca, que são vistos como uma solução particular do Dyon de Cho-Maison. Primeiramente, acreditava-se que o monopolo magnético não poderia aparecer nessa teoria, dados alguns argumentos topológicos. Vimos como poderíamos redefinir o vácuo do modelo, de maneira que a teoria comportasse essas partículas, ou seja, não teríamos mais uma teoria com $\pi_2(S^3)$, mas sim, $\pi_2(\mathbb{C}\mathbb{P}^1)$. Apresentamos como, durante o cálculo da energia para essa partícula, a integral exibiu um termo divergente, que só foi controlado após realizarmos uma extensão não-linear do grupo da hipercarga $U(1)_Y$. Dessa maneira, utilizando novamente o limite BPS, foi estimada a energia e, conseqüentemente, a massa para o monopolo na teoria de Glashow-Weinberg-Salam, dadas as seguintes extensões da eletrodinâmica não-linear, a menos do fator β : $E_{(\text{Logarítmico})} \geq 7.58$ TeV, $E_{(\text{Exponencial})} \geq 6.78$ TeV, $E_{(\text{Born-Infeld})} \geq 10.48$ TeV. As massas ainda são maiores do que os detectores conseguem atingir, mas já encham de esperança os pesquisadores da área, que tanto buscam por esta partícula. Finalizamos o capítulo mencionando, brevemente, algumas formas de detecção do monopolo, ressaltando sua propriedade de ser uma partícula altamente ionizante. Demos um enfoque principal ao ATLAS e ao MoEDAL, detectores no LHC que buscam por essa partícula de diversas formas, que são pertencentes ao centro de pesquisa onde os pesquisadores esperam receber notícias sobre o monopolo. Além disso, resalto a importância e relevância do estudo dessa partícula no ano de 2022, ano este em que o LHC retorna a realizar medições, após passar por um período de refinamento dos equipamentos, em virtude de alcançar maiores espectros de energia.

Por fim, tratamos dos instantons, pseudo-partículas que aparecem na teoria de Yang-Mills pura, no espaço Euclidiano quadridimensional. Mostramos que para encontrar o limite inferior para a ação $S_{YM}^E \geq \frac{8\pi^2}{g^2} |N|$, precisamos impor a seguinte equação, que é a equação de movimento dada por $F_{\mu\nu} = \pm^* F_{\mu\nu}$. Vimos como o real vácuo da teoria é, na verdade, o θ -vácuo e por isso temos um termo na Lagrangiana $-\frac{g^2\theta}{64\pi^2} \tilde{F}^{\mu\nu} F_{\mu\nu}$, que depende de θ . Além disso, vimos que na QCD esperava-se nove bósons de Nambu-Goldstone, entretanto, foram detectados apenas oito e, a partir do termo anterior, mostramos que a simetria axial $U(1)$ não é uma simetria verdadeira da Cromodinâmica quântica. Com

isso, os instantons resolvem o problema $U(1)$ da QCD, entretanto, pelo termo adicionado depender de θ e, por consequência, temos a origem de um novo problema, a violação CP , que é solucionada pelos Áxions.

Existem diversos caminhos para seguir em futuros projetos, já que nesta área existe bastante espaço para trabalhos criativos. De início, podemos seguir estudando esses sólitons topológicos aplicados na Cosmologia, de uma forma, assim como abordado nessa dissertação, bastante detalhada. É possível também continuar estudando diferentes estruturas topológicas aqui citadas, como os Skyrmons, Sphalerons e os Áxions. Ainda, há a possibilidade de estudarmos os monopolos magnéticos em diferentes teorias ou extensões do modelo padrão, podemos construir diferentes *ansatz* ou trabalhar com essas partículas em variados espaços topológicos. Outro assunto interesse é o estudo dos instantons na abordagem da geometria diferencial, uma linguagem mais moderna das teorias de gauge, outra linha possível de continuação desse trabalho.

Encerramos essa dissertação de mestrado cumprindo o objetivo, anteriormente, proposto. Conseguimos descrever e compreender os sólitons topológicos colocados, apresentando todos os passos para chegarmos aos resultados. Acreditamos que, com esse trabalho, seremos capazes de aplicar o conhecimento adquirido nos eventuais projetos e linhas de pesquisa a serem seguidas nos revelando cada vez mais, os segredos do Cosmos.

REFERÊNCIAS

- [1] T. H. R. Skyrme. A Nonlinear field theory. *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 260:127–138, 1961.
- [2] Ian J. R. Aitchison. Tony Skyrme and the Origins of Skyrmions. *arXiv: Physics.Hist-ph - Theory*, 2019.
- [3] Valery I. Sanyuk. Genesis and evolution of the Skyrme model from 1954 to the present. *Int. J. Mod. Phys. A*, 7:1–40, 1992.
- [4] Lord Kelvin (Sir William Thomson). On Vortex Atoms. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 6:94–105, 1867.
- [5] Edward Witten. Baryons in the $1/n$ Expansion. *Nucl. Phys. B*, 160:57–115, 1979.
- [6] G. E. Brown. *Selected papers, with commentary, of Tony Hilton Royle Skyrme*. World Scientific Publishing Company, 1994.
- [7] Chad N. Weiler, Tyler W. Neely, David R. Scherer, Ashton S. Bradley, Matthew J. Davis, and Brian P. Anderson. Spontaneous vortices in the formation of Bose–Einstein condensates. *Nature*, 455(7215):948–951, 2008.
- [8] Ryoichiro; Sano Masaki. Kawaguchi, Kyogo; Kageyama. Topological defects control collective dynamics in neural progenitor cell cultures. *Nature*, 455(7215), 2017.
- [9] Louis Brézin, Thomas Risler, and Jean-François Joanny. Spontaneous flow created by active topological defects. *arXiv: Cond-Mat.Soft*, 2022.
- [10] Wojciech H. Zurek. The shards of broken symmetry. *Nature*, 382, 1996.

-
- [11] V G Bar'yakhtar, B A Ivanov, and Mikhail V Chetkin. Dynamics of domain walls in weak ferromagnets. *Soviet Physics Uspekhi*, 28(7):563–588, 1985.
- [12] T W B Kibble. Topology of cosmic domains and strings. *Journal of Physics A: Mathematical and General*, 9(8):1387–1398, aug 1976.
- [13] T. W. B. Kibble. Some Implications of a Cosmological Phase Transition. *Phys. Rept.*, 67:183, 1980.
- [14] Walter E Thirring. A soluble relativistic field theory. *Annals of Physics*, 3(1):91–112, 1958.
- [15] E. Weinberg. *Classical Solutions in Quantum Field Theory: Solitons and Instantons in High Energy Physics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.
- [16] P. A. M. Dirac. Quantised singularities in the electromagnetic field. *Phys. Rev.*, 133, 1931.
- [17] P. A. M. Dirac. The theory of magnetic poles. *Phys. Rev.*, 74:817–830, 1948.
- [18] G.'t Hooft. Magnetic monopoles in unified gauge theories. *Nuclear Physics B*, 79(2):276–284, 1974.
- [19] Alexander M. Polyakov. Particle Spectrum in Quantum Field Theory. *JETP Lett.*, 20:194–195, 1974.
- [20] Howard Georgi and S. L. Glashow. Unity of all elementary-particle forces. *Phys. Rev. Lett.*, 32:438–441, 1974.
- [21] Y.M. Cho and D. Maison. Monopole configuration in weinberg-salam model. *Physics Letters B*, 391(3-4), 1997.
- [22] P. De Fabritiis and J. A. Helayël-Neto. Electroweak monopoles with a non-linearly realized weak hypercharge. *The European Physical Journal C*, 81(9), 2021.
- [23] P. De Fabritiis, P.C. Malta, and J.A. Helayël-Neto. Phenomenology of a born-infeld extension of the $u(1)_y$ sector at lepton colliders. *Physical Review D*, 105(1), 2022.
- [24] S. Weinberg. *The quantum theory of fields*. Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [25] Michael E Peskin and Daniel V Schroeder. *An introduction to quantum field theory*. Westview, 1995.
- [26] Matthew D. Schwartz. *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

-
- [27] A. Duncan. *The Conceptual Framework of Quantum Field Theory*. Oxford University Press, Oxford, 2012.
- [28] Sidney Coleman. *Lectures of Sidney Coleman on Quantum Field Theory*. WSP, Hackensack, 2018.
- [29] S. Weinberg. *The quantum theory of fields, Volume 2*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [30] M. Srednicki. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.
- [31] Lewis H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2 edition, 1996.
- [32] A. Nivaldo Lemos. *Mecânica Analítica*. Livraria da Física, 2007.
- [33] P. Manton, N. Sutcliffe. *Topological Solitons*. Cambridge University Press, Cambridge, 2004.
- [34] T. Sugiyama. Kink - Antikink collisions in the two-dimensional ϕ^4 model. *Prog. Theor. Phys.*, 61:1550–1563, 1979.
- [35] Mohammad Mohammadi and Rayhaneh Dehghani. Kink-antikink collisions in the periodic 4 model. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 94:105575, 2021.
- [36] Tanmay Vachaspati. Domain wall solutions. *arXiv: High Energy Physics - Theory*, pages 367–379, 2003.
- [37] M. Shifman. Simple models with non-abelian moduli on topological defects. *Physical Review D*, 87(2), 2013.
- [38] T. M. Samols. Vortex scattering. *Commun. Math. Phys.*, 145:149–180, 1992.
- [39] Edward Witten. Superconducting Strings. *Nucl. Phys. B*, 249:557–592, 1985.
- [40] Edmund J. Copeland and T. W. B. Kibble. Cosmic strings and superstrings. *Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, 466(2115):623–657, 2010.
- [41] Edward Witten. Cosmic Superstrings. *Phys. Lett. B*, 153:243–246, 1985.
- [42] John David Jackson. *Classical electrodynamics; 2nd ed*. Wiley, New York, NY, 1975.
- [43] B. Julia and A. Zee. Poles with both magnetic and electric charges in non-abelian gauge theory. *Phys. Rev. D*, 11:2227–2232, 1975.

- [44] M. N. Saha. Note on Dirac's theory of magnetic poles. *Phys. Rev.*, 75:1968–1968, 1949.
- [45] Julian Schwinger. Magnetic charge and quantum field theory. *Phys. Rev.*, 144:1087–1093, 1966.
- [46] S. Weinberg. *Dreams of a final theory*. New York : Pantheon Books, 1992.
- [47] Gerard 't Hooft. Renormalizable Lagrangians for Massive Yang-Mills Fields. *Nucl. Phys. B*, 35:167–188, 1971.
- [48] Ibrahim Gullu and S Habib Mazharimousavi. Double-logarithmic nonlinear electrodynamics. *Physica Scripta*, 96(4):045217, 2021.
- [49] S. I. Kruglov. Dyonic black holes with nonlinear logarithmic electrodynamics. *Gravitation and Cosmology*, 25(2):190–195, 2019.
- [50] S. I. Kruglov. More on superconductors via gauge/gravity duality with nonlinear maxwell field. *Journal of Gravity*, 25(2), 2013.
- [51] G. Aad, B. Abbott, D.C. Abbott, O. Abdinov, A. Abed Abud, K. Abeling, D.K. Abhayasinghe, S.H. Abidi, O.S. AbouZeid, N.L. Abraham, H. Abramowicz, H. Abreu, Y. Abulaiti, and et al. Observation of light-by-light scattering in ultraperipheral pb+pb collisions with the ATLAS detector. *Physical Review Letters*, 123(5), 2019.
- [52] Liping; Cho Y. M. Zhang, Pengming; Zou. Regularization of electroweak monopole by charge screening and bps energy bound. *The European Physical Journal C*, 80:1087–1093, 2020.
- [53] M.A. Tuve. Search by deflection-experiments for the dirac isolated magnetic pole. *Physical Review*, 43, 1933.
- [54] Nick E. Mavromatos and Vasiliki A. Mitsou. Magnetic monopoles revisited: Models and searches at colliders and in the cosmos. *International Journal of Modern Physics A*, 35(23), 2020.
- [55] M. A. Lindell. *Magnetic Monopole Searches : with AMANDA and other detectors*. PhD thesis, Uppsala University, Department of Physics and Astronomy, 2010.
- [56] G. Aad, T. Abajyan, B. Abbott, J. Abdallah, S. Abdel Khalek, A. A. Abdellim, O. Abdinov, R. Aben, B. Abi, M. Abolins, O. S. AbouZeid, H. Abramowicz, H. Abreu, and et al. Search for magnetic monopoles in $\sqrt{s} = 7$ TeV pp collisions with the ATLAS detector. *Physical Review Letters*, 109(26), 2012.

- [57] M. Aaboud, G. Aad, B. Abbott, O. Abdinov, B. Abeloos, D.K. Abhayasinghe, S.H. Abidi, O.S. AbouZeid, N.L. Abraham, H. Abramowicz, H. Abreu, Y. Abulaiti, B.S. Acharya, and et al. Search for four-top-quark production in the single-lepton and opposite-sign dilepton final states in pp collisions at $s=13$ TeV with the ATLAS detector. *Physical Review D*, 99(5), 2019.
- [58] G. Aad, B. Abbott, D.C. Abbott, O. Abdinov, A. Abed Abud, K. Abeling, D.K. Abhayasinghe, S.H. Abidi, O.S. AbouZeid, N.L. Abraham, H. Abramowicz, H. Abreu, Y. Abulaiti, and et al. Search for magnetic monopoles and stable high-electric-charge objects in 13 TeV proton-proton collisions with the ATLAS detector. *Physical Review Letters*, 124(3), 2020.
- [59] B. Acharya, J. Alexandre, S. Baines, P. Benes, B. Bergmann, J. Bernabéu, H. Branzas, M. Campbell, L. Caramete, S. Cecchini, M. de Montigny, A. De Roeck, J.R. Ellis, and et al. Search for magnetic monopoles with the MoEDAL forward trapping detector in 13 TeV proton-proton collisions at the LHC. *Physical Review Letters*, 118(6), 2017.
- [60] Nick E. Mavromatos and Vasiliki A. Mitsou. Physics reach of MoEDAL at LHC: magnetic monopoles, supersymmetry and beyond. *EPJ Web of Conferences*, 164, 2017.
- [61] Vasiliki A Mitsou. The MoEDAL experiment at the LHC: status and results. *Journal of Physics: Conference Series*, 873:012010, 2017.
- [62] B. Acharya, J. Alexandre, S. Baines, P. Benes, B. Bergmann, J. Bernabéu, A. Bevan, H. Branzas, M. Campbell, L. Caramete, S. Cecchini, M. de Montigny, A. De Roeck, and et al. Search for magnetic monopoles with the MoEDAL forward trapping detector in 2.11 fb⁻¹ of 13 TeV proton–proton collisions at the lhc. *Physics Letters B*, 782:510–516, 2018.
- [63] B. Acharya, J. Alexandre, S. Baines, P. Benes, B. Bergmann, J. Bernabéu, A. Bevan, H. Branzas, M. Campbell, S. Cecchini, Y.M. Cho, M. de Montigny, A. De Roeck, and et al. Magnetic monopole search with the full MoEDAL trapping detector in 13 TeV pp collisions interpreted in photon-fusion and Drell-Yan production. *Physical Review Letters*, 123(2), 2019.
- [64] B. Acharya, J. Alexandre, P. Benes, B. Bergmann, J. Bernabéu, A. Bevan, H. Branzas, P. Burian, M. Campbell, S. Cecchini, Y.M. Cho, M. de Montigny, A. De Roeck, and et al. First search for dyons with the full MoEDAL trapping detector in 13 TeV pp collisions. *Physical Review Letters*, 126(7), 2021.
- [65] B. Acharya, J. Alexandre, P. Benes, B. Bergmann, S. Bertolucci, A. Bevan, H. Branzas, P. Burian, M. Campbell, Y. M. Cho, M. de Montigny, A. De Roeck, J. R. Ellis,

- and et al. Search for magnetic monopoles produced via the Schwinger mechanism. *Nature*, 602(7895):63–67, 2022.
- [66] L.N. Epele, H. Fanchiotti, C.A. García Canal, and V. Vento. Monopolium: the key to monopoles. *The European Physical Journal C*, 56(1):87–95, 2008.
- [67] Luis N. Epele, Huner Fanchiotti, Carlos A. García Canal, and Vicente Vento. Monopolium production from photon fusion at the Large Hadron Collider. *The European Physical Journal C*, 62(3):587–592, 2009.
- [68] Neil D. Barrie, Akio Sugamoto, and Kimiko Yamashita. Construction of a model of monopolium and its search via multiphoton channels at lhc. *Progress of Theoretical and Experimental Physics*, 2016(11):113B02, 2016.
- [69] J.T. Reis and W.K. Sauter. Production of magnetic monopoles and monopolium in peripheral collisions. *Physical Review D*, 96(7), 2017.
- [70] H. Fanchiotti, C. A. García Canal, and V. Vento. Multiphoton annihilation of monopolium. *International Journal of Modern Physics A*, 32(35):1750202, 2017.
- [71] Valery A Rubakov. *Classical theory of gauge fields*. Princeton Univ., Princeton, NJ, 2002.
- [72] B. L. SÁNCHEZ VEGA. *Áxions, májorons e neutrinos em extensões do modelo padrão*. PhD thesis, Universidade Estadual Paulista, 2011.
- [73] Steven Weinberg. A new light boson? *Phys. Rev. Lett.*, 40:223–226, 1978.
- [74] Masahiro Kawasaki, Ken’ichi Saikawa, and Toyokazu Sekiguchi. Axion dark matter from topological defects. *Physical Review D*, 91(6), 2015.
- [75] W.K Rogers, C; Schief. *Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [76] E. L. Lima. *Grupo Fundamental e espaços de recobrimento*. IMPA, Rio de Janeiro, 2018.
- [77] M. Nakahara. *Geometry, Topology and Physics*. Institute of Physics Publishing, 2003.
- [78] J. R. Munkres. *Topology; a First Course*. Englewood Cliffs, 1974.
- [79] Antônio S.T. Pires. *Geometria Diferencial para Físicos*. Livraria da Física, 2015.
- [80] Horaiu Năstase. *Classical Field Theory*. Cambridge University Press, 3 2019.

APÊNDICE

A

TRANSFORMAÇÕES DE BÄCKLUND

Para conseguirmos encontrar as soluções obtidas na seção 2.6 precisamos entender sobre as transformações de Bäcklund, isso porquê a partir de uma solução, podemos utilizá-la como uma semente, e aplicar uma transformação de Bäcklund para chegar em outra solução da mesma equação. Ou melhor, as soluções da equação de sine-Gordon corresponde a uma superfície em \mathbb{R}^3 com curvatura Gaussiana constante negativa ($\kappa = -\frac{1}{\rho^2}$), e Bäcklund mostrou como obter uma hierarquia de soluções a partir de uma solução inicial.

Este trabalho envolve uma série de grandes matemáticos como Darboux, Bianchi, entre outros, logo, para interessados no assunto é recomendada a leitura da referência principal para este tópico [75]. Vale ressaltar que aqui não será abordado todo o assunto e muitas demonstrações serão deixadas de lado, mostraremos as definições e contas necessárias para encontrar as soluções dos breathers de sine-Gordon.

Começaremos pelo caso mais simples, com as coordenadas luz cone, mostrando como chegamos na solução do sóliton a partir da solução do vácuo. Para fazer isso, nossa equação de sine-Gordon é dada por:

$$\omega'_{\mu\nu} = \frac{1}{\rho^2} \sin \omega', \quad (\text{A.1})$$

onde $\mu = \frac{x+t}{2}$ e $\nu = \frac{x-t}{2}$.

A transformação de Bäcklund \mathbb{B}_β para tal equação é dada por:

$$\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right)_\mu = \frac{\beta}{\rho} \sin\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right), \quad (\text{A.2})$$

$$\left(\frac{\omega' + \omega}{2}\right)_\nu = \frac{\beta}{\rho} \sin\left(\frac{\omega' - \omega}{2}\right). \quad (\text{A.3})$$

Sabemos que o vácuo é uma solução $\omega = 0$, logo usaremos ela como uma semente. Logo, podemos utilizar as transformações para encontrar uma nova solução não-trivial. Com isso, temos

$$\omega'_\mu = \frac{2\beta}{\rho} \sin\left(\frac{\omega'}{2}\right), \quad (\text{A.4})$$

$$\omega'_\nu = \frac{2}{\beta\rho} \sin\left(\frac{\omega'}{2}\right). \quad (\text{A.5})$$

Podemos comprovar que de fato esta transformação obedece a equação de sine-Gordon, basta derivar a primeira equação em função de ν , ficamos com:

$$\omega'_{\mu\nu} = \frac{2\beta}{\rho} \cos\left(\frac{\omega'}{2}\right) \frac{\omega'_\nu}{2}. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo ω'_ν , temos:

$$\omega'_{\mu\nu} = \frac{2\beta}{\rho} \cos\left(\frac{\omega'}{2}\right) \frac{1}{\beta\rho} \sin\left(\frac{\omega'}{2}\right). \quad (\text{A.7})$$

Resultando em

$$\omega'_{\mu\nu} = \frac{1}{\rho^2} \sin \omega'.$$

Então, para encontrar nossa solução não-trivial basta integral os ω' 's encontrados. Com isso,

$$\omega'_\mu = \frac{2\beta}{\rho} \sin\left(\frac{\omega'}{2}\right), \quad (\text{A.8})$$

$$\int \frac{d\omega'}{\sin\left(\frac{\omega'}{2}\right)} = \int \frac{2\beta}{\rho} d\mu. \quad (\text{A.9})$$

Similarmente para ν ,

$$\omega'_\nu = \frac{2}{\beta\rho} \sin\left(\frac{\omega'}{2}\right), \quad (\text{A.10})$$

$$\int \frac{d\omega'}{\sin\left(\frac{\omega'}{2}\right)} = \int \frac{2}{\beta\rho} d\nu. \quad (\text{A.11})$$

Integrando as equações acima temos para μ e ν respectivamente,

$$\frac{2\beta\mu}{\rho} = 2 \ln \left(\csc \left(\frac{1}{2\omega'} \right) - \cot \left(\frac{1}{2\omega'} \right) \right) + f(\nu), \quad (\text{A.12})$$

$$\frac{2\nu}{\beta\rho} = 2 \ln \left(\csc \left(\frac{1}{2\omega'} \right) - \cot \left(\frac{1}{2\omega'} \right) \right) + g(\mu). \quad (\text{A.13})$$

Subtraindo essas duas equações podemos encontrar quem são $f(\nu)$ e $g(\mu)$, então, temos:

$$\frac{2\beta\mu}{\rho} - \frac{2\nu}{\beta\rho} = f(\nu) - g(\mu). \quad (\text{A.14})$$

Para C uma constante arbitrária,

$$f(\nu) = C - \frac{2\nu}{\beta\rho}, \quad g(\mu) = -\frac{2\beta\mu}{\rho}. \quad (\text{A.15})$$

Colocando este resultado em uma das soluções temos,

$$\frac{2\beta\mu}{\rho} = 2 \ln \left(\csc \left(\frac{1}{2\omega'} \right) - \cot \left(\frac{1}{2\omega'} \right) \right) + C - \frac{2\nu}{\beta\rho}, \quad (\text{A.16})$$

$$K e^{\frac{\nu+\mu\beta^2}{\beta\rho}} = \csc \left(\frac{1}{2\omega'} \right) - \cot \left(\frac{1}{2\omega'} \right), \quad (\text{A.17})$$

$$K e^{\frac{\nu+\mu\beta^2}{\beta\rho}} = \tan \left(\frac{1}{4\omega'} \right). \quad (\text{A.18})$$

Que nos leva a solução:

$$\omega' = 4 \arctan \left(K e^{\frac{\nu+\mu\beta^2}{\beta\rho}} \right). \quad (\text{A.19})$$

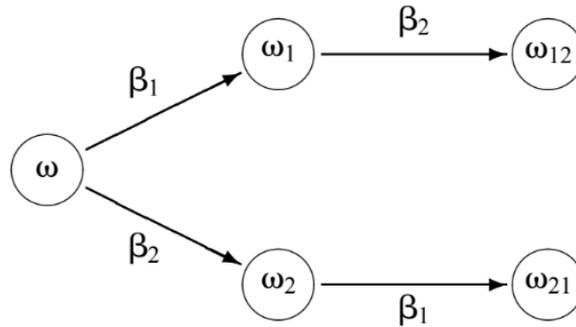
Para o leitor atento, essa equação já foi vista, obviamente com parâmetros diferentes, entretanto, é a mesma solução do sóliton de sine-Gordon. Esse resultado é bastante interessante já que vimos que é possível, partindo de uma solução, chegar em outra. Isso nos estimula a querer procurar outras soluções, o que será feito a seguir, mas podemos nos fazer a seguinte pergunta: se conseguimos chegar em uma solução partindo de uma solução semente, isso significa que nossa equação pode ter infinitas soluções? A resposta para essa pergunta é **não**, (não necessariamente). O que queremos dizer, é que utilizar esse método recursivo pode não nos levar em infinitas soluções, mas sim em soluções repetidas.

Para entendermos mais soluções além de um único sóliton, precisamos introduzir os diagramas de Bianchi que serão essenciais para nos mostrar um princípio, mais especificamente o teorema da permutabilidade, que será o ponto de partida para encontrar as soluções que desejamos.

Teorema de integrabilidade de Bianchi

Suponha que ω seja nossa solução inicial, ou seja, nossa semente da equação de sine-Gordon e que ω_1 e ω_2 são transformadas de Bäcklund de ω via \mathbb{B}_{β_1} e \mathbb{B}_{β_2} , ou seja, $\omega_1 = \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega)$ e $\omega_2 = \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega)$. Seja $\omega_{12} = \mathbb{B}_{\beta_2}(\omega_1)$ e $\omega_{21} = \mathbb{B}_{\beta_1}(\omega_2)$, podemos montar um diagrama de Bianchi para a relação acima.

Figura 18 – O diagrama de Bianchi



Fonte: Rogers, C; Schief, W.K. Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory. p.29, fig 1.1

Podemos nos perguntar se é possível que $\omega_{12} = \omega_{21}$ e em que condições isso se aplica. Podemos escrever os ω 's do diagrama, explicitamente, da seguinte forma:

$$\omega_{1,\mu} = \omega_\mu + \frac{2\beta_1}{\rho} \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega}{2}\right), \quad (\text{A.20})$$

$$\omega_{2,\mu} = \omega_\mu + \frac{2\beta_2}{\rho} \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega}{2}\right), \quad (\text{A.21})$$

$$\omega_{12,\mu} = \omega_{1,\mu} + \frac{2\beta_2}{\rho} \sin\left(\frac{\omega_{12} + \omega_1}{2}\right), \quad (\text{A.22})$$

$$\omega_{21,\mu} = \omega_{2,\mu} + \frac{2\beta_1}{\rho} \sin\left(\frac{\omega_{21} + \omega_2}{2}\right). \quad (\text{A.23})$$

Se colocarmos que $\omega_{12} = \omega_{21}$, então fazendo (A.20)–(A.21) + (A.22)–(A.23), ficamos com

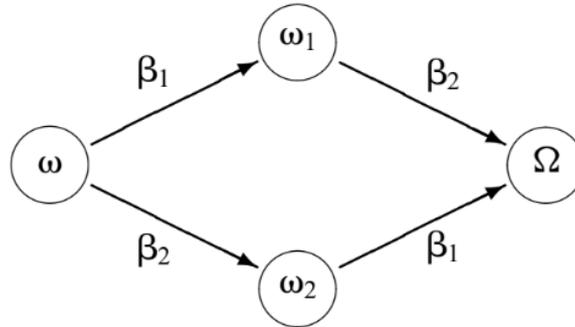
$$0 = \frac{2}{\rho} \left[\beta_1 \left\{ \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega}{2}\right) - \sin\left(\frac{\Omega + \omega_2}{2}\right) \right\} + \beta_2 \left\{ \sin\left(\frac{\Omega + \omega_1}{2}\right) - \sin\left(\frac{\omega_2 + \omega}{2}\right) \right\} \right]. \quad (\text{A.24})$$

Por fim, podemos chegar ao resultado de que

$$\Omega = \omega + 4 \arctan \left[\frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1} \tan\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{4}\right) \right]. \quad (\text{A.25})$$

Como pode ser visto no diagrama da figura 19.

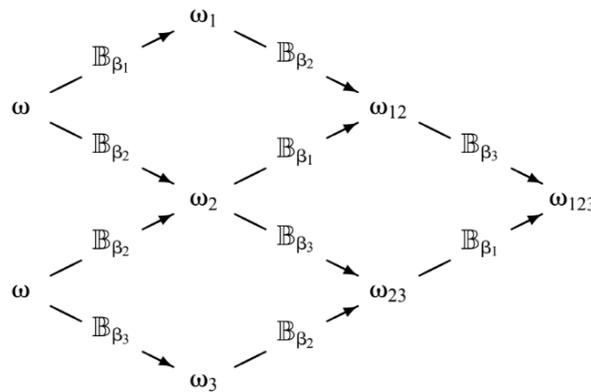
Figura 19 – Diagrama de Bianchi comutativo



Fonte: Rogers, C; Schief, W.K. Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory. p.30, fig 1.2

Chegamos então à solução cuja condição $\omega_{12} = \omega_{21}$. Essa propriedade comutativa é bastante interessante e importante, já que com a mesma é possível criar uma rede de N soluções para a equação de sine-Gordon. Isso representa uma superposição não linear das soluções do sóliton com parâmetros $\beta = \beta_1, \dots, \beta_N$, como pode ser visto na figura 20.

Figura 20 – Diagrama da rede



Fonte: Rogers, C; Schief, W.K. Bäcklund and Darboux Transformations: Geometry and Modern Applications in Soliton Theory. p.31, fig 1.3

Solução dos Breathers

A equação de sine-Gordon que conhecemos para as coordenadas x e t , ou seja, em $(1 + 1)$ dimensões é dada por:

$$\theta_{tt} - \theta_{xx} = \frac{1}{\rho^2} \sin(\theta) \cos(\theta). \tag{A.26}$$

As transformações de Bäcklund para essas coordenadas é dado por:

$$\theta'_t - \theta_t = \frac{1}{\rho \sin \zeta} (\cos \theta' \sin \theta - \cos \zeta \sin \theta' \cos \theta), \tag{A.27}$$

$$\theta'_x - \theta_x = \frac{1}{\rho \sin \zeta} (\sin \theta' \cos \theta - \cos \zeta \cos \theta' \sin \theta), \quad (\text{A.28})$$

onde o $\beta = \tan(\frac{\zeta}{2})$.

O princípio da comutação encontrado na seção passada, nessas novas coordenadas é dada por:

$$\tan\left(\frac{\theta_{12} - \theta_0}{2}\right) = \frac{\sin\left(\frac{\zeta_2 + \zeta_1}{2}\right) \tan\left(\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right)}, \quad (\text{A.29})$$

onde θ_0 é a solução semente, $\theta_1 = \mathbb{B}_{\beta_1}(\theta_0)$, $\theta_2 = \mathbb{B}_{\beta_2}(\theta_0)$ e $\theta_{12} = \mathbb{B}_{\beta_2}(\theta_1) = \theta_{21} = \mathbb{B}_{\beta_1}(\theta_2)$. Se escolhermos $\theta_0 = 0$ que é a solução do vácuo, então,

$$\theta_i = 2 \arctan\left(\exp\left(\frac{1}{\rho \sin \zeta_i}(t - x \cos \zeta_i)\right)\right), \quad (\text{A.30})$$

onde $i = 1, 2$ e $\zeta_1 \neq \zeta_2$.

Com isso, a solução para dois sólitons é dada por:

$$\Theta^\pm = \pm 2 \arctan\left[\frac{\sin\left(\frac{\zeta_2 + \zeta_1}{2}\right) \sinh\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\zeta_2 - \zeta_1}{2}\right) \cosh\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)}\right], \quad (\text{A.31})$$

onde $\chi_i = \frac{1}{\rho \sin \zeta_i}(t - x \cos \zeta_i)$.

Logo os breathers nada mais são do que uma subclasse de soluções periódicas de dois sólitons, colocando nosso parâmetro de Bäcklund $\beta_i = \tan\left(\frac{\zeta_i}{2}\right)$, Θ^+ se torna:

$$\Theta^+ = 2 \arctan\left[\left(\frac{\beta_2 + \beta_1}{\beta_2 - \beta_1}\right) \frac{\sinh\left(\frac{\chi_1 - \chi_2}{2}\right)}{\cosh\left(\frac{\chi_1 + \chi_2}{2}\right)}\right]. \quad (\text{A.32})$$

Podemos ver que esse é exatamente o resultado encontrado, a meios de parâmetros. Vemos que realmente, a compreensão das transformações de Bäcklund são essenciais para a compreensão da solução dos breathers e eles podem se propagar ou serem estáticos. Não cobriremos mais soluções da equação de sine-Gordon, caso interessados, basta aplicar o mesmo processo iterativo na equação anterior para encontrar a interação de 3,...,N sólitons. Como dito, a referência [75] é extremamente completa e para mais curiosidades e informações sobre o assunto basta analisar este livro.

APÊNDICE

B

HOMOTOPIA E GRUPO FUNDAMENTAL

Nesta apresentação mostraremos o básico sobre a ideia de homotopia e, consequentemente, sobre o grupo fundamental. Futuramente essa ideia será útil para o estudo das estruturas solitônicas, e por isso a necessidade do seu estudo. De forma geral, veremos que uma homotopia é uma relação de equivalência e a partir de uma classe de equivalência, poderemos construir o grupo fundamental. A referência principal a ser seguida é [76], mas também utilizaremos alguns argumentos de [15].

Sem mais delongas, uma **relação de equivalência** \sim é uma relação que obedece os seguintes requisitos:

- (i) $a \sim a$ (reflexiva)
- (ii) Se $a \sim b$, então $b \sim a$. (simétrica)
- (iii) Se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$. (transitiva)

Dado um conjunto \mathbb{X} e uma relação de equivalência \sim , temos uma partição natural desse conjunto em subconjuntos disjuntos chamados de **classe de equivalência**. A classe $[a]$ é composta por todos os elementos $x \in \mathbb{X}$, tal que $x \sim a$.

Vale ressaltar que $[a]$ não pode ser um conjunto vazio já que $a \sim a$. Se $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, então $[a] = [b]$. O conjunto de todas as classes de equivalência é chamado de **espaço quociente**, denotado por \mathbb{X}/\sim .

Para podermos definir a homotopia, precisamos antes definir caminhos e loops.

Definição B.0.1 (Caminho) *Seja \mathbb{X} um espaço topológico e $I = [0, 1]$. Um **caminho** é um mapa contínuo $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}$, com um ponto inicial $x_0 = \alpha(0)$ e final $x_1 = \alpha(1)$. Se $\alpha(0) = \alpha(1) = x_0$ o caminho é chamado de **loop**. Um caminho $c_x : I \rightarrow \mathbb{X}$, onde $c_x(s) = x, \forall s$ é chamado de **caminho constante**.*

Podemos definir uma 'multiplicação' de caminhos, mais conhecida como concatenação.

Definição B.0.2 (Concatenação) *Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{X}$, onde $\alpha(1) = \beta(0)$. A concatenação é denotada por $\alpha * \beta$, que também é um caminho em \mathbb{X} , definido por:*

$$\alpha * \beta(s) = \begin{cases} \alpha(2s), & 0 \leq s \leq \frac{1}{2} \\ \beta(2s - 1), & \frac{1}{2} \leq s \leq 1 \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

Continuando com nossa série de definições, podemos continuar definindo o caminho inverso.

Definição B.0.3 (Caminho inverso) *Seja $\alpha : I \rightarrow \mathbb{X}$ um caminho de x_0 até x_1 , o caminho inverso α^{-1} de α é definido por:*

$$\alpha^{-1}(s) \equiv \alpha(1 - s), \quad s \in I. \quad (\text{B.2})$$

Poderíamos pensar que todas essas definições nos levariam à ideia de um grupo, entretanto isso não é verdade, já que apesar de c_x parecer o elemento da identidade, $\alpha * \alpha^{-1} \neq c_x$.

Após tantas definições, podemos, finalmente introduzir a ideia e a definição de homotopia. Como dito anteriormente, a homotopia é uma relação de equivalência, nesse caso, uma equivalência entre caminhos, ou seja, se tivermos dois caminhos e se pudermos deformar continuamente um no outro, eles são homotópicos, na forma matemática,

Definição B.0.4 (Homotopia) *Sejam $\alpha, \beta : I \rightarrow \mathbb{X}$ curvas que possuam a mesma fronteira, ou seja, $\alpha(0) = \beta(0)$ e $\alpha(1) = \beta(1)$. Eles são chamados de homotópicos, $\alpha \sim \beta$, se $\exists H : I \times I \rightarrow \mathbb{X}$, contínuo, tal que:*

$$H(s, 0) = \alpha(s); \quad H(s, 1) = \beta(s), \forall s \in I$$

$$H(0, t) = \alpha(0); \quad H(1, t) = \alpha(1), \forall t \in I$$

O mapa H é chamado de **homotopia** entre α e β .

Deixamos para o leitor mostrar que a homotopia é uma relação de equivalência, ou seja, que obedeça todas as condições citadas de reflectividade, simetria e transitividade.

As definições acima poderiam ser feitas para loop's, obviamente. Aqui não escolhemos fazer isso já que o caso do loop é particular para os dois caminhos.

A classe de equivalência para esses caminhos (e a partir de agora, estaremos tratando com loops, já que essas estruturas serão fundamentais para os estudos futuros), são denotadas por $[\alpha]$ e são chamadas de a classe de homotopia de α .

Definição B.0.5 *Seja X um espaço topológico. O conjunto de classes de homotopias de loops em $x_0 \in X$ é denotado por $\pi_1(X, x_0)$ e é chamado de **grupo fundamental** ou primeiro grupo de homotopia de X em x_0 . O produto de classes de homotopia $[\alpha]$ e $[\beta]$ é definido por:*

$$[\alpha] * [\beta] = [\alpha * \beta].$$

Obs: O produto das classes é bem definido, ou seja, independe do representante da classe.

O grupo fundamental é um grupo, onde os elementos são as classes de homotopia, que respeitam as propriedades de grupo:

$$(1) \quad ([\alpha] * [\beta]) * [\gamma] = [\alpha] * ([\beta] * [\gamma]) \quad (\text{Associatividade})$$

$$(2) \quad [\alpha] * [c_x] = [\alpha]; [c_x] * [\alpha] = [\alpha] \quad (\text{Elemento unitário})$$

$$(3) \quad [\alpha] * [\alpha^{-1}] = [c_x] \rightarrow [\alpha]^{-1} = [\alpha^{-1}] \quad (\text{Inversa})$$

Obs: Se X é conexo por caminhos, então nós não precisamos especificar o ponto base já que $\pi_1(X, x_0) \simeq \pi_1(X, x_1), \forall x_0, x_1 \in X$ e por isso, escrevemos simplesmente $\pi_1(X)$. Além disso, se todos os loops de um espaço podem ser deformados para o loop trivial, existe apenas uma classe de homotopia e denotamos isso por $\pi_1(X) = 0$, e o espaço é dito como simplesmente conexo.

Exemplos de grupos fundamentais

(i) Qualquer loop em \mathbb{R}^n pode ser deformado a um ponto, logo, \mathbb{R}^n é simplesmente conexo, então

$$\pi_1(\mathbb{R}^n) = 0. \quad (\text{B.3})$$

(ii)

$$\pi_1(S^1) = \mathbb{Z}. \quad (\text{B.4})$$

(iii) Considere a seguir uma esfera S^2 . Pode ser óbvio que qualquer loop neste esfera pode ser reduzida a um ponto. Se não for, imagine excluir da esfera algum ponto através do qual o loop não passa. A esfera com um ponto excluído é topologicamente equivalente ao plano, então o resultado segue do Exemplo (i). Argumentos semelhantes aplicados em dimensões superiores mostram que:

$$\pi_1(S^n) = 0; \quad \forall n \geq 2. \quad (\text{B.5})$$

Existem vários outros exemplos, mas esses citados serão fundamentais para entender a próxima seção.

Grupos fundamentais de grupos de Lie

No apêndice temos as definições mais formais do que é um grupo topológico e mais informações sobre os grupos de Lie. Aqui, nos conteremos em descrever de forma rápida essas estruturas. Grupos de Lie podem ser vistos como uma variedade, e o grupo fundamental da mesma é do nosso interesse, já que a distinção entre grupos que compartilham da mesma Álgebra de Lie é crucial. O exemplo mais comum são os grupos $SU(2)$ e $SO(3)$.

$SU(2)$ é o grupo das matrizes 2×2 unitárias com determinante, também, unitário. Toda matriz desse tipo pode ser escrita como:

$$U = b_0 + i\mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (\text{B.6})$$

onde $\sigma_j (j = 1, 2, 3)$ são as matrizes de Pauli e

$$b_0^2 + b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 1. \quad (\text{B.7})$$

Por essas equações podemos perceber que existe um isomorfismo entre $SU(2)$ e S^3 . Sabemos que $SO(3)$ é o grupo de rotações em três dimensões e que, como uma variedade, pode ser mapeada em uma esfera de raio π . Existe um mapeamento entre esses dois grupos, que pode ser escrito como:

$$U = \cos\left(\frac{\psi}{2}\right) + i\hat{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma} \sin\left(\frac{\psi}{2}\right). \quad (\text{B.8})$$

A relação entre os dois grupos também pode ser entendida a partir de um mais ponto de vista algébrico. O centro de um grupo é definido como o conjunto do grupo elementos que comutam com todos os elementos do grupo, ou como mais conhecemos, Casimir; este é na verdade um subgrupo. O centro de $SU(2)$ consiste em dois elementos, a matriz de identidade I e a matriz $z = -I$, com a última correspondendo a uma rotação de 2π em torno de qualquer eixo. Estes formam o grupo cíclico com dois elementos, \mathbb{Z}_2 . Agora suponha que definimos uma relação de equivalência onde cada matriz U de $SU(2)$ é equivalente a $zU = -U$. Porque z comuta com todos os elementos do grupo, esta equivalência é compatível com a multiplicação do grupo, e as próprias classes de equivalência formam um grupo, $SU(2)/\mathbb{Z}_2$, que é apenas o próprio $SO(3)$.

Além disso, porque $SU(2)$ é topologicamente uma esfera em 4 dimensões, sabemos do Exemplo (iii) da seção anterior que o grupo é simplesmente conexo, ou seja, todo loop pode ser continuamente contraído até um ponto. O que isso nos diz sobre o $SO(3)$? Usando o mapeamento de elementos de $SU(2)$ para $SO(3)$, qualquer caminho em $SU(2)$ pode ser mapeado para um caminho em $SO(3)$. Se o caminho for um loop em $SU(2)$, é obviamente, um circuito fechado em $SO(3)$; uma vez que é contrátil em $SU(2)$, deve também ser contrátil e homotópico ao caminho trivial em $SO(3)$. Mas considere um caminho em $SU(2)$ que começa em algum U_0 e termina no ponto antipodal, zU_0 . Isto é, não é um loop em $SU(2)$, mas porque U_0 e zU_0 são mapeados para o mesmo elemento de $SO(3)$, então temos um caminho fechado em $SO(3)$. No entanto, isso não pode ser um loop contrátil em $SO(3)$, porque isso implicaria que poderia ser suavemente deformado em um loop trivial, que deve corresponder, por consequência, a um loop trivial em $SU(2)$. Portanto, $SO(3)$ deve ter pelo menos duas classes de homotopia. Percorrer este loop duas vezes em $SO(3)$ corresponde a um caminho em $SU(2)$ que vai de U_0 a zU_0 e depois volta a U_0 . Este é um circuito fechado em $SU(2)$, e portanto, deve ser contrátil. Assim, temos:

$$\pi_1(SU(2)) = 0, \quad (\text{B.9})$$

$$\pi_1(SO(3)) = \pi_1(SU(2)/\mathbb{Z}_2) = \mathbb{Z}_2. \quad (\text{B.10})$$

Podemos estender essa ideia para outros grupos de Lie em geral. Para toda álgebra de Lie, existe um único grupo simplesmente conexo, chamado de grupo de recobrimento universal. Seja G este grupo, e K ser o centro ou um subgrupo do centro. Se G é semi-simples, K é um grupo finito. Nesse caso, definindo os elementos g e kg como equivalentes, onde $g \in G$ e $k \in K$, temos o grupo G/K que não é simplesmente conexo. Isso exprime basicamente o que fizemos anteriormente com $SU(2)$ e $SO(3)$,

$$\pi_1(G/K) = K. \quad (\text{B.11})$$

Se K é, de fato, o centro de G , então G/K é conhecido como grupo adjunto.

Outro grupo interessante para analisarmos o exemplo é o $U(1)$, que sabemos que topologicamente corresponde ao grupo do círculo, e com isso, temos:

$$\pi_1(U(1)) = \mathbb{Z}, \quad (\text{B.12})$$

então, apesar de ser conexo, $U(1)$ não é simplesmente conexo. O espaço de recobrimento simplesmente conexo é \mathbb{R} , onde $U(1) = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

Nenhum dos grupos ortogonais é simplesmente conexo. $SO(2)$ é idêntico a $U(1)$, logo sabemos o seu grupo fundamental. Para $SO(N)$, com $N \geq 3$, temos:

$$\pi_1(SO(N)) = \mathbb{Z}_2. \quad (\text{B.13})$$

Sabemos que isso precisa acontecer graças ao grupo de recobrimento de $SO(N)$ que é conhecido como $Spin(N)$. Teremos uma melhor compreensão quando formos discutir sobre grupos de homotopia de ordens maiores e como essas ideias surgem.

Tipo de Homotopia

A equivalência homotópica de caminhos e loops é facilmente generalizada para mapas. Sejam $f, g : X \rightarrow Y$ mapas contínuos. Se existe um mapa contínuo $F : X \times I \rightarrow Y$ tal que $F(x, 0) = f(x)$ e $F(x, 1) = g(x)$, f é dito ser homotópico a g , denotado por $f \sim g$. O mapa F é chamado de homotopia entre f e g .

Definição B.0.6 *Sejam X e Y espaços topológicos. X e Y são do mesmo tipo de homotopia, escrito como $X \simeq Y$, se houver mapas contínuos $f : X \rightarrow Y$ e $g : Y \rightarrow X$ tal que $f \circ g \sim id_Y$ e $g \circ f \sim id_X$. O mapa é chamada de **equivalência homotópica** e g , seu inverso homotópico. Observação: Se X for homeomórfico a Y , X e Y são do mesmo **tipo de homotopia**, mas o inverso não é necessariamente verdade. Por exemplo, um ponto p e a reta real são do mesmo tipo de homotopia, mas p não é homeomórfico a \mathbb{R} .*

Dizemos que um espaço topológico X é contráctil quando ele tem a mesma homotopia de um ponto. Na definição formal temos:

Definição B.0.7 *X é contráctil se, e somente se, a aplicação da identidade $id_X : X \rightarrow X$ é homotópica a uma aplicação constante.*

Demonstração: Se $f : X \rightarrow \{p\}$ é uma equivalência homotópica e $g : p \rightarrow X$ é a inversa de f , então $g \circ f \simeq id_X$. Percebe-se que $g \circ f$ é uma aplicação constante. Do mesmo modo, se $id_X \simeq constante$, então, id_X e a *constante* são equivalentes homotópicas, uma inversa da outra.

Proposição 1 *Um espaço contráctil X é conexo por caminhos.*

Teorema 1 *O grupo fundamental de um espaço contráctil X é trivial, ou seja, $\pi_1(X, x_0) = 0$.*

Prova:

A prova é simples, sabemos que um espaço contráctil possui o mesmo grupo fundamental de um ponto p , e o ponto tem grupo fundamental trivial.

APÊNDICE

C

PROJEÇÃO ESTEREOGRÁFICA

Vimos que o conceito principal para a existência do monopolo na teoria eletrofraca é a projeção estereográfica, que nada mais é do que um mapa de uma esfera para o plano. Todos os pontos podem ser projetados exceto o ponto da projeção, que nos caso foi o polo Norte e o polo Sul. Esse mapa consiste em traçar uma reta do ponto da projeção até o ponto a ser projetado e estendendo a reta até a interseção com o plano.

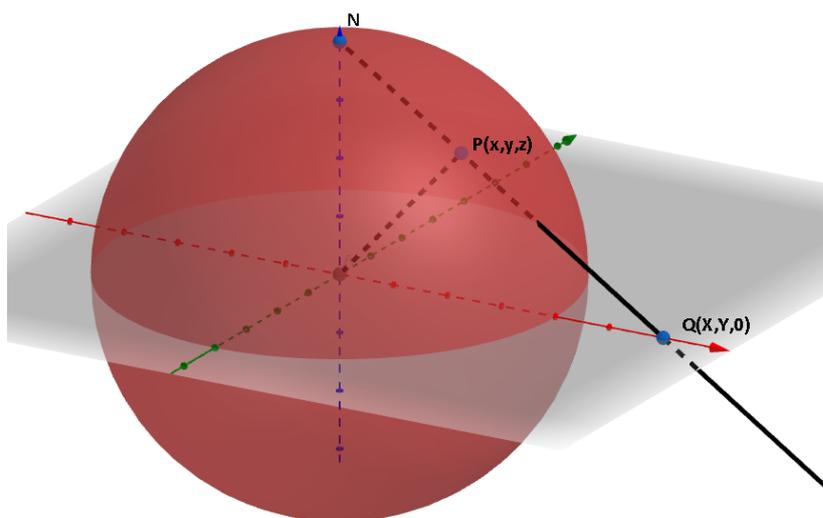


Figura 21 – Projeção estereográfica da esfera unitária, partindo do polo norte até o plano $z = 0$.

A reta que sai do polo Norte no ponto $N = (0, 0, 1)$ e intersecta um ponto na esfera $P = (x, y, z)$ e segue em linha reta intersectando o plano ($z = 0$) no ponto $Q = (X, Y, 0)$ pode ser escrita como

$$X = \frac{x}{1-z}, \quad Y = \frac{y}{1-z}, \quad (\text{C.1})$$

em coordenadas esféricas podemos escrever da seguinte forma

$$X = \frac{\text{sen } \theta \cos \phi}{1 - \cos \theta}, \quad Y = \frac{\text{sen } \theta \text{sen } \phi}{1 - \cos \theta}. \quad (\text{C.2})$$

Utilizando que $\text{sen}(\theta) = 2 \text{sen}(\frac{\theta}{2}) \cos(\frac{\theta}{2})$ e que $1 - \cos \theta = 2 \text{sen}^2(\frac{\theta}{2})$, então temos que as coordenadas da projeção estereográfica podem ser escritas como

$$X = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos \phi, \quad Y = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen } \phi. \quad (\text{C.3})$$

Podemos repetir o processo e fazer uma projeção partindo do ponto no polo Sul onde $\mathcal{P} = (0, 0, -1)$ e tomamos um ponto $\mathcal{Q} = (U, V, 0)$. Dessa maneira, temos que

$$U = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos \phi, \quad V = -\tan\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{sen } \phi. \quad (\text{C.4})$$

Podemos definir coordenadas complexas Z e W da forma

$$Z \equiv X + iY, \quad Z^* \equiv X - iY, \quad W \equiv U + iV, \quad W^* \equiv U - iV, \quad (\text{C.5})$$

que por definição pode ser visto como

$$Z = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi}, \quad Z^* = \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}, \quad W = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{-i\phi}, \quad W^* = \tan\left(\frac{\theta}{2}\right) e^{i\phi}. \quad (\text{C.6})$$

Logo, podemos identificar a esfera de Riemann como S^2 ou como o plano complexo estendido $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

APÊNDICE

D

FORMAS DE CHERN

D.1 Teoria de Yang-Mills na linguagem de formas diferenciais

Mostraremos uma outra forma de obter a ação e as equações de movimento da teoria de Yang-Mills, faremos uma abordagem mais interessante que utilizará Teoria de Grupos e Geometria, e que por fim, chegará às mesmas equações de movimento já conhecidas.

Começaremos por um grupo de gauge G e um elemento desse grupo U , ou seja, uma transformação:

$$U = e^{ig\alpha^a T_a} \simeq 1 + g\alpha^a T_a + \dots \quad (\text{D.1})$$

Queremos que essa simetria seja de gauge, ou seja, local. Dessa forma, precisamos que $\alpha^a = \alpha^a(x)$, acoplando-o a um campo de gauge.

A transformação aplicada em um campo pode ser definida como

$$\begin{aligned} \psi(x) &\rightarrow U(x)\psi(x), \\ \bar{\psi}(x) &\rightarrow \bar{\psi}(x)U^\dagger(x). \end{aligned} \quad (\text{D.2})$$

Podemos, agora, tentar construir e definir a derivada covariante não-Abeliana, a propriedade que queremos para a derivada covariante é que ela se transforme assim como o campo, então

$$D_\mu \psi(x) = D'_\mu \psi(x). \quad (\text{D.3})$$

Podemos impor um resultado, demandando que

$$D'_\mu \psi'(x) = U(x)D_\mu \psi(x). \quad (\text{D.4})$$

Podemos introduzir um novo objeto na teoria, ou seja, um campo de gauge não-abeliano $A_\mu^a(x)$, onde $a \in \mathfrak{g}$. Logo, podemos definir a derivada covariante como

$$D_\mu \psi(x) \equiv (\partial_\mu - igA_\mu^a(x)T^a)\psi(x). \quad (\text{D.5})$$

Logo,

$$D'_\mu \psi'(x) = (\partial_\mu - igA_\mu'^a(x)T^a)U(x)\psi(x), \quad (\text{D.6})$$

$$= (\partial_\mu U(x))\psi(x) + U(x)\partial_\mu \psi(x) - igA_\mu'^a T^a U(x)\psi(x), \quad (\text{D.7})$$

e pela imposição que fizemos no início, queremos que isso se iguale a

$$D'_\mu \psi'(x) \equiv U(x)(\partial_\mu - igA_\mu^a T^a)\psi(x). \quad (\text{D.8})$$

Logo, precisamos que

$$\partial_\mu U(x) - igA_\mu'^a T^a U(x) = U(x)(-igA_\mu^a T^a). \quad (\text{D.9})$$

Resolvendo para $A_\mu'^a$, ficamos com uma das fórmulas mais importantes para a compreensão das contas que iremos fazer futuramente, que é como esse campo não-abeliano se transforma, dado por

$$A_\mu'^a T^a = U(x)A_\mu^a T^a U^\dagger - \frac{i}{g}(\partial_\mu U)U^\dagger. \quad (\text{D.10})$$

Com isso, para uma transformação infinitesimal (usando que $(T_a)^\dagger = T_a$) temos:

$$\begin{aligned} U(x) &\simeq 1 + ig\alpha^a(x)T_a, \\ U^{-1}(x) &\simeq 1 - ig\alpha^a(x)T_a. \end{aligned} \quad (\text{D.11})$$

Logo o campo de gauge se transforma da seguinte forma:

$$\delta(A_\mu^a(x)T_a) \simeq (1 + ig\alpha^b T_b)(A_\mu^a T_a)(1 - ig\alpha^a T_a) - A_\mu^a T_a - \frac{i}{g}\partial_\mu(1 + ig\alpha^a T_a)U^{-1}, \quad (\text{D.12})$$

$$\simeq \partial_\mu \alpha^a T_a + ig[\alpha^b T_b, A_\mu^a T_a]. \quad (\text{D.13})$$

Podemos definir $\alpha \equiv \alpha^a T_a$, dessa maneira

$$\delta A_\mu = \partial_\mu \alpha - ig[A_\mu, \alpha] \equiv D_\mu \alpha, \quad (\text{D.14})$$

em componentes temos,

$$\delta A_\mu^a(x) = \partial_\mu \alpha^a - ig f_{bc}^a A_\mu^b \alpha^c \equiv D_\mu \alpha^a. \quad (\text{D.15})$$

Podemos reescrever na linguagem de formas, que resultará na mesma equação de movimento, entretanto, de uma maneira mais rápida. Podemos então definir

$$A \equiv A_\mu dx^\mu, \quad F \equiv \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu, \quad (\text{D.16})$$

em que \wedge é definido como:

Definição D.1.1 (Produto Exterior) *Em um campo K , seja e_1, \dots, e_n base de um espaço vetorial V , de dimensão n . Dadas f e g , p - e q -formas, então:*

$$\begin{aligned} f &= f^{i_1 \dots i_p} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_p}, \\ g &= g^{j_1 \dots j_q} e_{j_1} \otimes \dots \otimes e_{j_q}. \end{aligned} \quad (\text{D.17})$$

O produto exterior dessas duas formas, resulta em uma $(p+q)$ -forma, denotada e definida como:

$$f \wedge g = h^{k_1 \dots k_{p+q}} = \frac{1}{p!q!} \delta_{i_1 \dots i_p j_1 \dots j_q}^{k_1 \dots k_{p+q}} f^{i_1 \dots i_p} g^{j_1 \dots j_q}. \quad (\text{D.18})$$

As propriedades do produto exterior são:

- i) *Associatividade:* $f \wedge (g \wedge h) = (f \wedge g) \wedge h$,
- ii) *Homogeneidade:* $(cf) \wedge g = c(f \wedge g) = f \wedge (cg)$, $c \in K$,
- iii) *Distributividade:* Se $f \in \Omega^p(\mathcal{M})$ e $g \in \Omega^q(\mathcal{M})$, então:

$$(f + g) \wedge h = (f \wedge h) + (g \wedge h).$$

- iv) *Anticomutatividade:* Se $f \in \Omega^p(\mathcal{M})$ e $g \in \Omega^q(\mathcal{M})$, então:

$$g \wedge f = (-1)^{pq} f \wedge g,$$

em que $\omega^p(\mathcal{M})$ é o espaço das p -formas em uma variedade suave \mathcal{M} . Podemos encontrar que,

$$F = dA - ig(A \wedge A), \quad (\text{D.19})$$

em que d é a derivada exterior, definida por:

Definição D.1.2 (Derivada Exterior) *Existe um único operador linear $d : \Omega^p(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{p+1}(\mathcal{M})$ tal que:*

- i) *se $f \in \Omega^0(\mathcal{M}) = C^\infty(\mathcal{M})$, então, df é o igual ao diferencial de f .*
- ii) *se $\omega \in \Omega^p(\mathcal{M})$ e $\eta \in \Omega^l(\mathcal{M})$, então*

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega) \wedge \eta + (-1)^p \omega \wedge (d\eta).$$

$$iii) \quad d^2 = 0.$$

Tomando a derivada exterior de F , temos:

$$dF = d^2 A - igd(A \wedge A). \quad (D.20)$$

Como por definição $d^2 = 0$, então:

$$dF = -ig((dA \wedge A) - (A \wedge dA)). \quad (D.21)$$

Como $A \wedge B = -B \wedge A$, temos:

$$dF = -2ig(dA \wedge A), \quad (D.22)$$

dessa forma podemos fazer:

$$DF \equiv dF + 2ig(dA \wedge A) = 0. \quad (D.23)$$

Podemos reescrever nossa ação para a teoria de Yang-Mills na linguagem de formas

$$S^{YM} = -\frac{1}{4} \int d^4x \operatorname{Tr}(F \wedge *F), \quad (D.24)$$

onde $*$ é a estrela de Hodge, definida como

Definição D.1.3 (Estrela de Hodge) *A estrela de Hodge é um operador linear $*$: $\Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^{n-k}(\mathcal{M})$, definindo a identidade*

$$\alpha \wedge * \beta = (\alpha \mid \beta) \operatorname{vol}_g, \quad \forall \alpha, \beta \in \Omega^k(\mathcal{M}),$$

em que vol_g é uma forma volume e $(- \mid -) : \Omega^k(\mathcal{M}) \otimes \Omega^k(\mathcal{M}) \rightarrow \Omega^0(\mathcal{M})$.

De maneira geral, a estrela de Hodge transforma uma k -forma em uma $(n - k)$ -forma, onde n é a dimensão espacial. Veremos que ela será utilizada na construção do dual, e como F é uma 2-forma, aplicar a estrela de Hodge em F nos dará, novamente, uma 2-forma.

Não cobrimos essas definições de forma geral e rigorosa, aos interessados [77, 78, 79] são ótimas referências para entender melhor essas construções.

Nas teorias de gauge, os números de Chern classificam os sólitons. Estes são encontrados integrando as formas Chern, sobre todo o espaço, que são formas diferenciais invariantes de gauge de grau par, construídas algebricamente a partir do tensor de campo.

Os mais simples são as 2-formas e as 4-formas. O primeiro pode ser integrado sobre um plano ou uma superfície, e o último sobre \mathbb{R}^4 ou em uma Variedade de dimensão 4. Como estamos interessados na aplicação de sólitons em até quatro dimensões, então não discutiremos as formas de Chern de graus maiores.

D.2 Formas de Chern para campos de Gauge Abelianos

A primeira forma de Chern para campos de Gauge abelianos é uma 2-forma definida por

$$C_1 = \frac{F}{2\pi}. \quad (\text{D.25})$$

Considerando nosso campo no plano \mathbb{R}^2 , o primeiro número de Chern é a integral da forma no espaço, ou seja,

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} F. \quad (\text{D.26})$$

Precisamos mostrar que essa quantidade é um inteiro. Podemos imaginar um campo escalar que se transforma por $U(1)$ na seguinte forma

$$\phi \rightarrow e^{i\alpha} \phi. \quad (\text{D.27})$$

Esse exemplo representa o caso dos monopolos magnéticos. Logo, na nossa interseção dos conjuntos que fizemos em S^2 , separando-a em hemisfério Norte e Sul, vimos que no equador relacionávamos os dois campos por uma transformação de gauge na forma

$$\phi^{(2)} = e^{-i\alpha^{(21)}} \phi^{(1)}, \quad (\text{D.28})$$

$$a^{(2)} = a^{(1)} - d\alpha^{(21)}. \quad (\text{D.29})$$

Como $\phi^{(1)}$ e $\phi^{(2)}$ são bem definidos em suas regiões, $e^{-i\alpha^{(21)}}$ precisa ter um único valor, ou seja,

$$e^{-i\alpha^{(21)}}(\theta, 2\pi) = e^{-i\alpha^{(21)}}(\theta, 0). \quad (\text{D.30})$$

Dessa forma,

$$\int_{S^2} F = \int_{Equador} a^{(1)} - \int_{Equador} a^{(2)}. \quad (\text{D.31})$$

Então,

$$\int_{S^2} F = \int_{Equador} d\alpha^{(21)}, \quad (\text{D.32})$$

$$\int_{S^2} F = \alpha^{(21)}(2\pi) - \alpha^{(21)}(0). \quad (\text{D.33})$$

Logo,

$$\int_{S^2} F = 2\pi N, \quad (\text{D.34})$$

$$c_1 = \frac{1}{2\pi} \int_{S^2} F = N \quad (\text{D.35})$$

Esse número representa a quantização do fluxo do campo magnético para o monopolo. A partir desta análise podemos deduzir a quantização da carga assim como outras propriedades. A segunda forma de Chern para um campo de gauge abeliano é dada por

$$C_2 = \frac{1}{8\pi^2} (F \wedge F). \quad (\text{D.36})$$

Vemos que essa é uma 4-forma, fechada, já que $dF = 0$ e localmente exata,

$$C_2 = \frac{1}{8\pi^2} d(F \wedge A). \quad (\text{D.37})$$

Em \mathbb{R}^4 , o número de Chern para este caso é dado por

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}^4} C_2 = \int_{S_\infty^3} \frac{1}{8\pi^2} d(F \wedge A). \quad (\text{D.38})$$

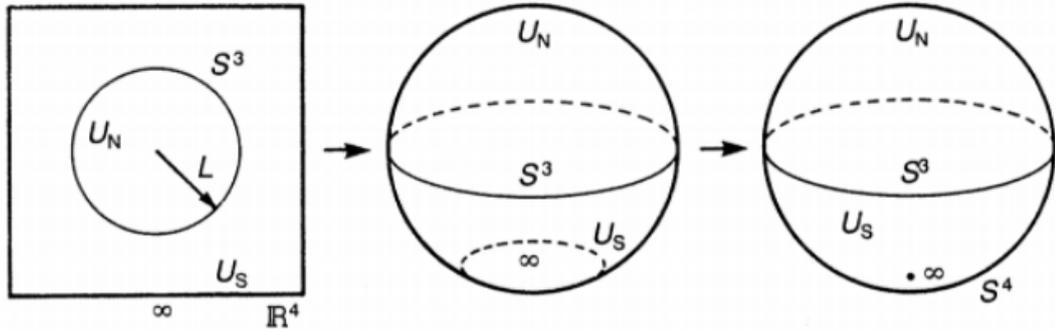
Se $F \rightarrow 0$ quando $|x| \rightarrow \infty$, essa integral desaparece, ou seja, nosso número é zero. Logo para essas condições de contorno e para um campo abeliano em \mathbb{R}^4 o resultado não é tão interessante.

Vale ressaltar um passo muito importante, e que para a existência dos Instantons é crucial. Quando passamos a integral de \mathbb{R}^4 para um integral em S_∞^3 , esse passo pode parecer trivial já que existe um teorema que afirma que S^{n-1} é *fronteira de qualquer variedade compacta e simplesmente conexa de dimensão n* . Entretanto, este não é o caso, já que \mathbb{R}^4 apesar de ser simplesmente conexo não é compacto.

Dessa maneira, somos levados a precisar compactificar \mathbb{R}^4 . Sem entrar em detalhes, podemos escrever $S^4 = \mathbb{R}^4 \cup \{\infty\}$, adicionando um ponto no infinito, a chamada *compactificação por um ponto*. Mesmo assim as equações de Yang-Mills são conformalmente invariantes e as soluções podem ser estendidas de \mathbb{R}^4 para S^4 .

Agora, podemos utilizar o teorema antes citado, já que S^4 é compacto e simplesmente conexo e dessa forma, sua borda é S^3 . Por isso, no infinito, colocando os campos indo para zero, podemos fazer a integral em S_∞^3 . Veremos que o número de instanton está relacionado com a diferença entre os números de winding nos dois pontos em $\pm\infty$.

Figura 22 – Compactificação de S^4 em \mathbb{R}^4



Nastase. H, Classical Field Theory. [80]

D.3 Formas de Chern para campos de Gauge não-Abelianos

Como nosso F não é um invariante de gauge, não podemos usá-lo como anteriormente para o caso Abeliano. Entretanto, podemos fazer uma manipulação interessante para uma teoria de gauge com um grupo $U(n)$ ou para um grupo G que é um subgrupo de matrizes unitárias $n \times n$, então temos a generalização da primeira forma de Chern, dada por

$$C_1 = \frac{1}{2\pi} \text{Tr}(F). \quad (\text{D.39})$$

O traço pegara apenas a parte abeliana, ou seja, $U(1)$. Para matrizes de $SU(n)$ além de possuírem determinante igual a 1, ou seja, $1 = \det M = \exp\{\text{Tr}(\ln M)\}$ temos que uma matriz $M \in SU(n)$ foi definida por $M = e^{i\alpha^a T_a}$, então temos que $1 = \det M = e^{i\alpha^a \text{Tr}(T_a)}$, com isso $\text{Tr}(T_a) = 0$, e apenas $U(1)$ contribuem para o traço diferente de 0.

Com isso, o primeiro número de Chern é dado por

$$c_1 = \int_{\mathcal{M}_2} C_1. \quad (\text{D.40})$$

Para o caso de $SU(n)$, como o que estamos tratando na teoria de Yang-Mills, esse número é zero. Entretanto, a segunda forma de Chern é dada por

$$C_2 = \frac{1}{8\pi^2} (\text{Tr}(F \wedge F) - \text{Tr}(F) \wedge \text{Tr}(F)). \quad (\text{D.41})$$

Assumindo que F não tenha a parte $U(1)$, logo só o termo $\text{Tr}(F \wedge F)$ contribuirá para o resultado. Vemos que tal termo é uma 4-forma e além disso é invariante de gauge, já que

$$\text{Tr}(gFg^{-1} \wedge gFg^{-1}). \quad (\text{D.42})$$

Como g é uma 0-forma e F uma 2-forma que comutam, então podemos utilizar a propriedade cíclica do traço e fazer

$$\text{Tr}(gF \wedge Fg^{-1}) = \text{Tr}(F \wedge F). \quad (\text{D.43})$$

Podemos mostrar que nossa 4-forma é fechada, ou seja, $dC_2 = 0$.

$$dC_2 = \frac{1}{8\pi^2} d(\text{Tr}(F \wedge F)) = \frac{1}{8\pi^2} (\text{Tr}(dF \wedge F) - \text{Tr}(F \wedge dF)), \quad (\text{D.44})$$

e como $A \wedge B = -B \wedge A$, então

$$dC_2 = \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr}(dF \wedge F). \quad (\text{D.45})$$

Utilizando a identidade de Bianchi que $dF + A \wedge F - F \wedge A = 0$, então ficamos com

$$dC_2 = \frac{1}{4\pi^2} \text{Tr}((-A \wedge F + F \wedge A) \wedge F), \quad (\text{D.46})$$

$$dC_2 = \frac{1}{4\pi^2} (-\text{Tr}(A \wedge F \wedge F) + \text{Tr}(F \wedge A \wedge F)). \quad (\text{D.47})$$

Utilizando a ciclicidade do traço, vemos que

$$dC_2 = 0. \quad (\text{D.48})$$

Também podemos escrever C_2 como uma forma exata

$$C_2 = d\left(\frac{1}{8\pi^2} \text{Tr}(F \wedge A - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A)\right). \quad (\text{D.49})$$

Podemos, agora, fazer uma análise mais específica para o problema que desejamos, que é um grupo de gauge $SU(2)$ definido em \mathbb{R}^4 , e dessa forma definiremos

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}^4} C_2 = N \in \mathbb{Z}, \quad (\text{D.50})$$

como nosso segundo número de Chern. Esse número topológico é chamado de número de instanton ou índice de Pontryagin. Diferentemente do caso abeliano, quando $|x| \rightarrow \infty$ e $|F| \rightarrow 0$ a integral é finita e não nula. Podemos escrever esse decaimento rápido como $F^\infty = 0$.

Lembramos que em uma transformação de gauge para A^U temos que

$$A^U = UAU^{-1} - \frac{i}{g}(dU)U^{-1}. \quad (\text{D.51})$$

Para um campo puro, onde $A = 0$, ficamos com

$$A_\infty = -dU_\infty U_\infty^{-1}. \quad (\text{D.52})$$

Logo vemos que um elemento do grupo de gauge é definido em uma 3-esfera no infinito, S_∞^3 e toma valores em $SU(2)$ que também é uma 3-esfera. Logo, temos um mapa

$$U_\infty : S_\infty^3 \rightarrow SU(2). \quad (\text{D.53})$$

Logo, podemos obter o segundo número de Chern fazendo

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}^4} C_2. \quad (\text{D.54})$$

Utilizando a fórmula de Stokes

$$\int_C d\omega = \int_{\partial C} \omega, \quad (\text{D.55})$$

onde ω é uma p -forma e C uma $(p+1)$ -cadeia.

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}^4} C_2 = \frac{1}{8\pi^2} \int_{S_\infty^3} \text{Tr} \left(F \wedge A - \frac{1}{3} A \wedge A \wedge A \right). \quad (\text{D.56})$$

Como $F_\infty = 0$, então

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}^4} C_2 = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} \text{Tr} \left(A_\infty \wedge A_\infty \wedge A_\infty \right). \quad (\text{D.57})$$

Podemos reexpressar em termo dos elementos do grupo, ou seja,

$$c_2 = \int_{\mathbb{R}^4} C_2 = -\frac{1}{24\pi^2} \int_{S_\infty^3} \text{Tr} \left(-dU_\infty U_\infty^{-1} \wedge -dU_\infty U_\infty^{-1} \wedge -dU_\infty U_\infty^{-1} \right). \quad (\text{D.58})$$

Essa é exatamente a fórmula de como obter o grau de um mapa de S^3 para $SU(2)$. Então, o segundo número de Chern é o grau de U_∞ , logo, um inteiro. Veremos que este também é conhecido como número de winding para os instantons.