

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-graduação em Física

Rodrigo Silva Amorim

**DESENVOLVIMENTO E CARACTERIZAÇÃO DE  
Q-PLATES: geração de feixes helicoidais e vetoriais**

BELO HORIZONTE  
2023

Rodrigo Silva Amorim

# **DESENVOLVIMENTO E CARACTERIZAÇÃO DE Q-PLATES: geração de feixes helicoidais e vetoriais**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Carlos Henrique Monken

Coorientadora: Larissa Vertchenko

Belo Horizonte

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

A524d Amorim, Rodrigo Silva.

Desenvolvimento e caracterização de q-plates: geração de feixes helicoidais e vetoriais / Rodrigo Silva Amorim. – 2023.

82f. : il.

Orientador: Carlos Henrique Monken.

Coorientadora: Larissa Vertchenko.

Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,  
Departamento de Física.

Bibliografia: f. 71-75.

1. Óptica. 2. Momentos angulares. 3. Feixes vetoriais. I. Título. II. Monken, Carlos Henrique. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 535 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

### **ATA DE DEFESA DE DISSERTAÇÃO**

**ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 692ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA, DEFENDIDA POR RODRIGO SILVA AMORIM**, orientado pelo professor Carlos Henrique Monken e coorientado pela doutora Larissa Vertchenko, para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 13 horas de nove de fevereiro de 2023, por videoconferência, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Carlos Henrique Monken** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Larissa Vertchenko** (Coorientadora - Universidade Técnica da Dinamarca), **Luiz Gustavo de Oliveira Lopes Cançado** (Departamento de Física/UFMG) e **Leonardo Teixeira Neves** (Departamento de Física/UFMG), para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o bacharel **RODRIGO SILVA AMORIM** à arguição de seu trabalho de dissertação, que recebeu o título de **“Desenvolvimento e caracterização de q-plates: geração de feixes helicoidais e vetoriais”**. O candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosequiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho, concluindo pela aprovação do candidato.

Belo Horizonte, 09 de fevereiro de 2023.

Prof. Carlos Henrique Monken  
Orientador do estudante  
Departamento de Física/UFMG

Dra. Larissa Vertchenko  
Coorientadora do estudante  
Universidade Técnica da Dinamarca

Prof. Luiz Gustavo de Oliveira Lopes Cançado  
Departamento de Física/UFMG



Departamento de Física/UFMG

Prof. Leonardo Teixeira Neves

Departamento de Física/UFMG

**Candidato:** Rodrigo Silva Amorim



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Silva Amorim, Usuário Externo**, em 10/02/2023, às 11:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Larissa Vertchenko, Usuária Externa**, em 10/02/2023, às 12:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Henrique Monken, Professor do Magistério Superior**, em 10/02/2023, às 12:12, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Teixeira Neves, Professor do Magistério Superior**, em 10/02/2023, às 12:22, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Luiz Gustavo de Oliveira Lopes Cancado, Professor do Magistério Superior**, em 10/02/2023, às 16:05, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2077126** e o código CRC **06891D7E**.

# Agradecimentos

Gostaria de começar agradecendo à minha família. Em especial aos meus pais, Simone e Hamilton, pelo apoio, incentivo e amor. Ao meu irmão, Hamilton Jr., por me ajudar na confecção de algumas imagens, sem sua ajuda esse trabalho teria menos vida.

Ao meu orientador, Carlos Henrique Monken, pela excelente orientação e dedicação. À minha coorientadora, Larissa Vertchenko, pela paciência e disponibilidade em me ajudar muito além desse trabalho.

Aos professores da pós-graduação em Física pelo empenho e preocupação com o ensino.

Ao Dr. Radu Malureanu da Universidade Técnica da Dinamarca pela fabricação das q-plates.

Aos meus professores de graduação, Adriana Dickman, Bruno Lourenço, Joice Araújo, José Faleiro, Kelly Faêda e Lev Vertchenko, pelas excelentes aulas e ensinamentos que me levaram a seguir a carreira de físico.

Aos meus amigos de graduação, Erick, Júlio, Mateus e Victor, pelas horas de jogatina que fizeram o mestrado mais leve. É sempre um prazer carregar vocês no CS e doutrinar no Brew.

À CAPES pela ajuda financeira, essencial para realização deste trabalho.

Por fim, agradeço ao amor da minha vida, Thainá, por ser minha companheira, por me fazer amar e me sentir amado. Você me faz sentir que posso mais, que sou mais.

# Resumo

As q-plates são placas de onda capazes de transformar o estado de polarização e a frente de onda da luz. A orientação do eixo rápido de uma q-plate varia ao longo de sua seção transversal possibilitando a geração de feixes de luz com momento angular orbital e que possuem polarização não homogênea, os chamados feixes vetoriais. O objetivo desta dissertação é apresentar a caracterização de placas q-plates, fornecidas por colaboradores da Universidade Técnica da Dinamarca, constituídas de nano-pilares de silício amorfo, distribuídos periodicamente, no intuito de gerar o fenômeno de birrefringência de forma. Mostramos, teoricamente, os mecanismos de funcionamento das q-plates que permitem a geração de todos os feixes vetoriais presentes na esfera de Poincaré de ordem superior, uma representação geométrica que engloba os perfis espaciais e o estado de polarização desses tipos de feixes. Visando caracterizar as placas produzidas, realizamos experimentos capazes de mostrar a geração dos feixes vetoriais e dos modos Laguerre-Gaussianos, conhecidos por possuírem momento angular orbital. Para os feixes vetoriais, analisamos o perfil de intensidade do feixe após atravessar um polarizador. Foi possível notar que o perfil se altera, mostrando o caráter não homogêneo do estado de polarização. No caso dos feixes com momento angular orbital, suas frentes de onda apresentam uma forma helicoidal, por isso usamos um interferômetro de Mach-Zhender para fazer sua análise. Na saída do interferômetro, obtivemos um padrão de interferência em formato de pétalas, característicos dos feixes helicoidais. Com isso, concluímos que as q-plates fabricadas conseguem gerar as transformações previstas teoricamente.

**Palavras-chave:** Q-plate. Feixes vetoriais. Birrefringência de forma. Momento angular orbital.

# Abstract

Q-plates are wave plates capable of transforming the polarization state and wavefront of light. The orientation of the fast axis of a q-plate varies along its cross section enabling the generation of light beams with orbital angular momentum and that have inhomogeneous polarization, the so-called vector beams. The goal of this dissertation is to present the characterization of q-plates, provided by collaborators from the Technical University of Denmark, composed of amorphous silicon nanopillars, periodically distributed, in order to generate the phenomenon of form birefringence. We theoretically show the functioning mechanisms of the q-plates that allow the generation of all vector beams present on the higher order Poincaré sphere, a geometric representation that encompasses the spatial profiles and the polarization state of these types of beams. To characterize the produced plates, we conducted experiments that could show vector beam generation and Laguerre-Gaussian modes known for its orbital angular momentum. For vector beams, we have analyzed the intensity profile of the beam after crossing a polarizer. It was possible to notice that the profile changes, showing the inhomogeneous character of the polarization state. In the case of beams with orbital angular momentum, their wavefronts have a helical shape, so we used a Mach-Zhender interferometer to analyze them. At the output of the interferometer, we obtained an interference pattern in the shape of petals, characteristic of helical beams. Hence, we conclude that the manufactured q-plates can generate the theoretically predicted transformations.

**Keywords:** Q-plate, Vector beams. Orbital angular momentum. Form birefringence.

# Lista de ilustrações

Figura 1	– Representação da propagação de um feixe paraxial. Para um ângulo $\theta$ suficientemente pequeno o feixe diverge pouco do eixo $z$ . O formato do perfil transversal do feixe é dado pela função $u(r)$ . . . . .	17
Figura 2	– Perfil de intensidade dos modos a) Hermite-Gaussianos com índices $(mn)$ e b) Laguerre-Gaussianos com os índices $(pl)$ . . . . .	20
Figura 3	– Frente de onda de feixes que possuem o termo de fase $e^{il\phi}$ com a) $l = 1$ , b) $l = 2$ e por último c) $l = 3$ . . . . .	20
Figura 4	– Representação da elipse de polarização traçada pelo vetor campo elétrico para coordenada $z$ constante. $\Psi$ representa o ângulo que o eixo maior da elipse faz com o eixo $x$ . . . . .	22
Figura 5	– Polarização linear a) horizontal, b) vertical, c) e d) à $45^\circ$ e $-45^\circ$ respectivamente. . . . .	23
Figura 6	– Polarização circular a) esquerda e b) direita. . . . .	23
Figura 7	– Ilustração da elipse de polarização e seus parâmetros geométricos. Os ângulos $\Psi$ e $\chi$ são os ângulos de orientação e elipsidade, respectivamente, $a_M$ e $a_m$ representam os semi-eixos maior e menor, respectivamente. . . . .	24
Figura 8	– Esfera de Poincaré. Cada ponto na sua superfície representa um estado de polarização. Para diferentes coordenadas angulares $\Psi$ e $\chi$ teremos mudanças na orientação e elipsidade da elipse de polarização, respectivamente. Os polos representam as polarizações circular, no equador temos as linear e nos restante temos polarização elíptica direita e esquerda, nos hemisférios norte e sul, respectivamente. . . . .	28
Figura 9	– a) Representação do perfil espacial e estado de polarização de alguns CVB. I é dado pela equação (2.48). II é obtido fazendo $l_1 = -l_2 = 1$ e $\delta = \pi$ , III fazendo $l_1 = -l_2 = 2$ e $\delta = 0$ e IV fazendo $l_1 = -l_2 = 3$ e $\delta = \frac{-\pi}{2}$ na equação (2.45). Já em b) a linha vermelha no equador da esfera de Poincaré representa todos os estados de polarização presentes no perfil de um feixe radial. . . . .	31
Figura 10	– A figura representa o perfil espacial e estado de polarização de dois FPB obtidos da equação (2.49) fazendo $\gamma = \frac{\pi}{4}$ , sendo em a) $\hat{e}_1 = \hat{e}_R$ e $\hat{e}_2 = \hat{e}_L$ e em b) $\hat{e}_1 = \hat{e}_x$ e $\hat{e}_2 = \hat{e}_y$ . Os círculos e elipses vermelhas e azuis representam a polarização circular e elíptica esquerda e direita, respectivamente. . . . .	32

Figura 11 – Representação da esfera de Poincaré de ordem superior para $l = 1$ . No equador da esfera estão os CVB. Já nos polos estão os feixes de polarização circular. No restante dos pontos da esfera temos polarização elíptica de variadas orientação e elipsidades. . . . .	33
Figura 12 – Geometria de uma q-plate de LC. Os seguimentos de reta representam a orientação do eixo ótico em cada ponto da q-plate. Imagem retirada da referência [1] . . . . .	34
Figura 13 – Orientação do eixo rápido em cada ponto de uma q-plate de $q = 1/2$ . O vetor em vermelho liga o centro da placa a um ponto qualquer. Como se trata de uma placa com $q = 1/2$ a orientação do eixo rápido é dada pelo ângulo $\alpha = \frac{\phi}{2}$ formado entre o vetor e o eixo $x$ como representado pela equação (3.9). . . . .	37
Figura 14 – Esquema representando a ação de uma q-plate de $q = 1$ como conversor spin-orbital. Uma onda plana de polarização circular esquerda é transformada em um feixe helicoidal com $L=2\hbar$ e polarização circular direita. A transformação conserva o momento angular total da luz ( $\Delta J = 0$ ). . . . .	39
Figura 15 – Simulação de feixes vetoriais gerados por três tipos de q-plate. Os feixes vetoriais de I) - III) foram gerados ao incidir luz horizontalmente polarizada nas q-plates $q = 1/2$ , $q = 1$ e $q = 3/2$ , respectivamente. De IV) - IX) luz com polarização elíptica. As cores azul e vermelho nas polarização representam polarização à direita e à esquerda, respectivamente. . . . .	43
Figura 16 – Gráfico da entropia de emaranhamento que quantifica o grau de emaranhamento dos feixes que atravessam uma q-plate otimizada. . . . .	46
Figura 17 – Representação do grau de emaranhamento de cada feixe vetorial presente na esfera de Poincaré de ordem superior. . . . .	47
Figura 18 – a) Ilustração de um nano-pilar que compõe a q-plate, sendo $q\phi$ o ângulo que a face maior do pilar faz com a horizontal. Em b) os seguimentos de reta representam a orientação do eixo lento de uma q-plate de $q=1$ . . . . .	48
Figura 19 – Orientação dos pilares de a-Si para a formação de q-plates como o parâmetro $q$ valendo a) $1/2$ , b) $1$ , c) $3/2$ e d) $2$ . . . . .	49
Figura 20 – Ilustração de uma placa de onda uniaxial em que um campo elétrico propaga na direção $z$ . . . . .	50
Figura 21 – Representação de uma estrutura periódica formada por paralelepípedos de permissividade elétrica $\epsilon_1$ . $\Lambda$ representa o período espacial da estrutura, $t_1$ a largura da placa, $\epsilon_2$ e $t_2$ a permissividade do meio entre as placas e a sua largura, respectivamente. . . . .	52
Figura 22 – Esquema ilustrando as principais etapas do processo de fabricação de uma q-plate. . . . .	56

Figura 23 – Máscara utilizada pela maquina de EBL para criar os padrões de uma q-plate de $q = 1$ . . . . .	57
Figura 24 – Representação da organização das 45 q-plates em um chip. b) Fotografia do chip, cada quadrado corresponde a uma q-plate. . . . .	58
Figura 25 – Fotografia obtida de um microscópio eletrônico de varredura (SEM). As retas vermelhas e azuis representam os eixos lento e rápido locais, respectivamente. . . . .	58
Figura 26 – Imagem de uma q-plate retirada usando um SEM indicando o comprimento $t_1$ e o período espacial $\Lambda$ da estrutura. . . . .	59
Figura 27 – Experimento utilizado para o teste das q-plates. As flechas em preto e os círculos em azul e vermelho representam o estado de polarização linear, circular direita e esquerda, respectivamente. L representa as lentes de foco 10 cm, $\lambda/4$ as placas de quarto de onda e PBS o divisor de feixe polarizador. . . . .	60
Figura 28 – Perfil de intensidade, capturado pela CCD, do feixe na saída do aparato representado na figura 27. Em a) o feixe passou pela q-plate de $q = 1/2$ em b) de $q = 1$ e em c) de $q = 3/2$ . . . . .	61
Figura 29 – Interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico, utilizado na análise da frente de onda do feixe helicoidal. As retas pontilhadas de cores diferentes representam os dois braços do interferômetro. M representa os espelhos, BS os divisores de feixe e P um prisma. . . . .	62
Figura 30 – a) - c) são os perfis de intensidade obtidos na saída do interferômetro e capturadas pela CCD para as placas de ordem $q = 1/2$ , $q = 1$ e $q = 3/2$ , respectivamente. d) - f) perfis de intensidade das superposições $LG_{0,1} + LG_{0,-1}$ , $LG_{0,2} + LG_{0,-2}$ e $LG_{0,3} + LG_{0,-3}$ , respectivamente. . . . .	62
Figura 31 – Imagens dos padrões de interferência obtidas ao variarmos o comprimento de um dos braços do interferômetro. A seta auxilia a visualização do movimento de rotação dos perfis de intensidade. . . . .	63
Figura 32 – Esquema utilizado na análise de feixes vetoriais. $\lambda/2$ representa uma placa de meia onda. L são lentes convergentes de foco 10 cm e PBS um divisor de feixes polarizador. . . . .	64
Figura 33 – À esquerda de cada imagem mostra a representação do estado de polarização e do perfil de intensidade de um feixe vetorial produzido pelos três tipos de q-plates, ao incidir luz com polarização a)-c) horizontal e d)-e) diagonal. À direita os respectivos perfis de intensidade, obtidos pela CCD, após o feixe passar pelo PBS. A flexa nos informa qual saída do PBS foi analisada. . . . .	65
Figura 34 – Imagens obtidas por um microscópio eletrônico de varredura de uma q-plate da quinta coluna de placas. . . . .	66

Figura 35 – Imagem de uma q-plate obtida por um microscópio eletrônico de varredura. Os retângulos em cinza representam as estruturas efetivas que levam ao fenômeno de birrefringência de forma. . . . .	67
Figura 36 – Representação da elipse de polarização, contendo dois sistemas de coordenadas, um padrão $(x, y)$ e o $(u, v)$ ao longo dos eixos da elipse. .	78



# Sumário

1	INTRODUÇÃO . . . . .	13
2	MODOS TRANSVERSAIS E FEIXES VETORIAIS . . . . .	15
2.1	Equação de onda e Modos Transversais . . . . .	16
2.2	Estado de Polarização . . . . .	21
2.3	Parâmetros de Stokes e a Esfera de Poincaré . . . . .	25
2.4	Feixes Vetoriais . . . . .	29
3	Q-PLATES . . . . .	34
3.1	Ação de uma q-plate . . . . .	35
3.2	Feixes com momento angular orbital . . . . .	37
3.3	Geração de feixes vetoriais . . . . .	41
3.4	Emaranhamento clássico nos feixes vetoriais . . . . .	43
3.5	Padrão geométrico das q-plates . . . . .	47
3.6	Birrefringência de forma . . . . .	50
4	FABRICAÇÃO E CARACTERIZAÇÃO DAS Q-PLATES . . . . .	55
4.1	Fabricação . . . . .	55
4.2	Caracterização das q-plates . . . . .	59
4.3	Geração de feixes vetoriais usando as q-plates . . . . .	63
4.4	Eficiência e funcionamento das q-plates . . . . .	65
5	CONSIDERAÇÕES FINAIS . . . . .	69
	REFERÊNCIAS . . . . .	71
	APÊNDICES . . . . .	76
	APÊNDICE A – PARÂMETROS GEOMÉTRICOS DA ELIPSE DE POLARIZAÇÃO . . . . .	77
	APÊNDICE B – MATRIZ DE JONES DE UMA PLACA DE ONDA . . . . .	81

# 1 Introdução

Até onde se sabe, as primeiras tentativas de explicar a natureza da luz de forma racional e analítica se deu com os filósofos da Grécia antiga, motivados pela correlação entre visão e luz [2]. Ao longo desses mais de 2000 anos a luz já foi descrita como partícula, como onda e atualmente entende-se que a luz possui um caráter dual entre essas duas interpretações. Embora ainda haja discussão acerca da natureza fundamental da luz, que cabe mais ao campo da filosofia, não devemos achar que não a entendemos. Com a teoria do eletromagnetismo clássico que unifica a ótica e o eletromagnetismo, conseguimos compreender uma grande variedade de fenômenos óticos, como por exemplo, a refração, difração, interferência, entre outros. Além disso, com o desenvolvimento da teoria quântica entendemos também como a luz interage com a matéria, possibilitando a compreensão de fenômenos como a emissão de luz estimulada, que proporcionou a criação dos lasers (*light amplification by stimulated emission of radiation*). Todo esse conhecimento acerca da luz não foi produzido por uma única pessoa e nem do dia pra noite, e sim, pelo esforço de uma comunidade científica ao redor do mundo, que busca entender o universo em que estamos inseridos. Com este trabalho, gostaríamos de adicionar mais uma contribuição e, quem sabe, ajudar no avanço do conhecimento da luz.

Começamos esta dissertação apresentando, a partir das equações de Maxwell [3], os chamados modos transversais eletromagnéticos (TEM) que são soluções da equação de onda da luz na aproximação paraxial. Em coordenadas cilíndricas os modos transversais são chamados de Laguerre-Gaussianos. As frentes de onda desses modos possuem formato helicoidal, indicando que esses feixes possuem momento angular orbital [4]. Abordamos também os estados de polarização da luz, mostrando como representar e entender as formas mais comuns de polarização, que são as homogêneas. Em seguida, passamos para os feixes de luz que possuem polarização não homogênea, chamados de feixes vetoriais [5]. Esse tipo de luz, ainda não muito conhecida, apresenta diversos estados de polarização diferentes em seu perfil transversal. Mostramos que existem vários tipos de feixes vetoriais, sendo esses classificados pelos seus padrões de polarização. Exemplos interessantes são os *full Poincaré beams* [6] que possuem todos os estados de polarização possíveis em seu perfil transversal e os *cylindrical vector beams* (CVB) [7] que possuem simetria cilíndrica em sua polarização. Exemplos de CVBs são os feixes radial e azimutal que, focalizados, conseguem gerar um intenso campo longitudinal elétrico e magnético, respectivamente [8].

Já no capítulo 3, apresentamos uma categoria de placas de onda chamadas q-plates [9]. A orientação do eixo lento dessas placas varia com o ângulo azimutal ao longo de sua seção transversal. Normalmente, uma placa de onda transforma apenas o estado de polarização da luz, entretanto, as q-plates conseguem modificar, além da polarização, o

seu modo transversal e, por isso, são chamadas de conversores de modo eletromagnético. Dependendo do estado de polarização incidido sobre uma q-plate, podem-se gerar modos Laguerre-Gaussianos e diferentes feixes vetoriais, sendo este um versátil equipamento para se ter em laboratórios de ótica. As primeiras q-plates foram fabricadas utilizando moléculas de cristal líquido [1]. Tais moléculas são birrefringentes e podem ser orientadas localmente na placa, gerando a variação do eixo lento necessário para a formação da q-plate. O desafio ao utilizar o cristal líquido é a baixa resistência a lasers de alta potência. Nesta dissertação, mostramos a geração de q-plates que utilizam o fenômeno de birrefringência de forma. Como o próprio nome sugere, esse tipo de birrefringência é gerada pela forma das estruturas que compõem a placa. No caso, utilizamos nano-pilares retangulares de silício amorfo orientados de forma periódica, gerando a birrefringência e a variação no eixo lento da placa. A vantagem desse método é que, diferente do cristal líquido, o silício amorfo é resistente a laser de alta potência e por se tratar de um processo de fabricação mais preciso, possibilita a criação de placas para variados comprimentos de onda.

No capítulo 4 apresentamos todo o processo de fabricação das q-plates providenciadas por nossos colaboradores da Universidade Técnica da Dinamarca. A técnica empregada se baseia na litografia de feixes de elétrons, gerando padrões no silício amorfo em escala nanométrica. Foram fabricadas três tipos de q-plates, capazes de gerar modos Laguerre-Gaussianos de ordem diferentes e variados padrões de feixes vetoriais. Através de métodos experimentais mostramos que as q-plates fabricadas conseguem produzir as transformações na luz previstas e demonstradas no capítulo anterior. Para isso foram utilizadas técnicas de interferometria e polarimetria para analisar os perfis de intensidade da luz. Já no último capítulo, fizemos nossas considerações finais sobre os resultados obtidos ao longo desta dissertação.

## 2 Modos transversais e feixes vetoriais

James Clerk Maxwell revolucionou a Física ao mostrar que campos eletromagnéticos são soluções da equação de onda, com velocidade de propagação igual à velocidade da luz. Com isso, ele conclui que a luz é, na verdade, uma onda eletromagnética.

Com a criação dos lasers em 1960 [10], foi possível a geração de ondas eletromagnéticas que se propagam em uma direção bem determinada e que apresentam comprimento de onda bem definido<sup>1</sup>. Esse tipo de radiação é chamada de modo transversal eletromagnético (TEM); esse nome se dá pois os campos elétrico e magnético estão contidos em um plano transversal à direção de propagação da luz.

Os modos transversais, também chamados de modos espaciais, são padrões de intensidade que o feixe imprime no plano transversal à propagação. Exemplos mais conhecidos são os modos Laguerre-Gaussianos e Hermite-Gaussianos que são soluções da equação de onda em coordenadas cilíndricas e cartesianas, respectivamente. Em ambos os casos é utilizada a aproximação paraxial, que diz respeito à condição de um feixe de luz pouco divergente (i.e., modos transversais).

Usualmente, os modos espaciais possuem uma polarização homogênea em todo o plano transversal. Porém, existe uma categoria de feixes chamados de feixes vetoriais, cujo estado de polarização varia em cada ponto do plano. Conseqüentemente, o grau de liberdade espacial e de polarização, do feixe, se encontram em um estado não separável. Exemplos de feixes vetoriais que tiveram grande destaque são os feixes de polarização radial e azimutal [7].

Na primeira seção deste capítulo deduzimos, a partir das equações de Maxwell, a equação de onda eletromagnética e mostramos que no regime paraxial, os modos transversais Laguerre-Gaussianos (LG) e Hermite-Gaussianos (HG) são soluções dessa equação em diferentes sistemas de coordenadas. Posteriormente, estudamos o estado de polarização de uma onda eletromagnética. Serão apresentados dois métodos de caracterização da polarização da luz, sendo que o primeiro consiste em determinar a elipse de polarização e o segundo se baseia em uma representação geométrica, usando a esfera de Poincaré. Por fim, usando os conhecimentos obtidos sobre os modos espaciais e sobre a polarização da luz, definimos uma outra categoria de ondas transversais eletromagnética, chamada de feixes vetoriais. Mostraremos como esse tipo de onda eletromagnética pode ser obtida e suas principais características.

---

<sup>1</sup> Radiação composta por um único comprimento de onda é chamada de monocromática.

## 2.1 Equação de onda e Modos Transversais

As equações de Maxwell no vácuo, ou seja, na ausência de fontes de radiação (i.e., onde não há corrente nem carga elétrica), são dadas por

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}, \quad (2.4)$$

onde  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  e  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  são os campos elétrico e magnético, respectivamente, na posição dada por  $\mathbf{r}$  e no tempo  $t$ . As constantes  $\epsilon_0$  e  $\mu_0$  são a permissividade elétrica do vácuo e permeabilidade magnética do vácuo, respectivamente. Foi Maxwell que mostrou que as equações acima teriam solução na forma de ondas planas [11]. Ao aplicar o rotacional na equação (2.2), ficamos com

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{B}(\mathbf{r}, t). \quad (2.5)$$

Substituindo a equação (2.4) em (2.5), obtemos

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.6)$$

Aplicando a seguinte identidade do cálculo vetorial  $\nabla \times [\nabla \times \mathbf{v}] = \nabla[\nabla \cdot \mathbf{v}] - \nabla^2 \mathbf{v}$  na equação (2.6), chegamos na seguinte expressão para o campo elétrico

$$\nabla[\nabla \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)] - \nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2}. \quad (2.7)$$

Como o divergente do campo elétrico, na ausência de carga, é zero, obtemos finalmente a equação:

$$\nabla^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)}{\partial t^2} = 0, \quad (2.8)$$

onde  $v = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$ . A equação (2.8) é conhecida como equação da onda<sup>2</sup>, pois, como o nome sugere, ela descreve uma onda se propagando no espaço e tempo. A constante  $v$  é a sua velocidade de propagação. Maxwell, ao calcular o valor de  $v$ , mostra que a onda eletromagnética se propaga com a mesma velocidade da luz, concluindo que a luz constitui-se de campos eletromagnéticos propagantes.

Para uma luz monocromática, o campo elétrico pode ser expresso como a parte real de uma função complexa

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)] = \frac{1}{2} [\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) + \mathcal{E}^*(\mathbf{r}, t)], \quad (2.9)$$

<sup>2</sup> Existe uma equação similar para o campo magnético.

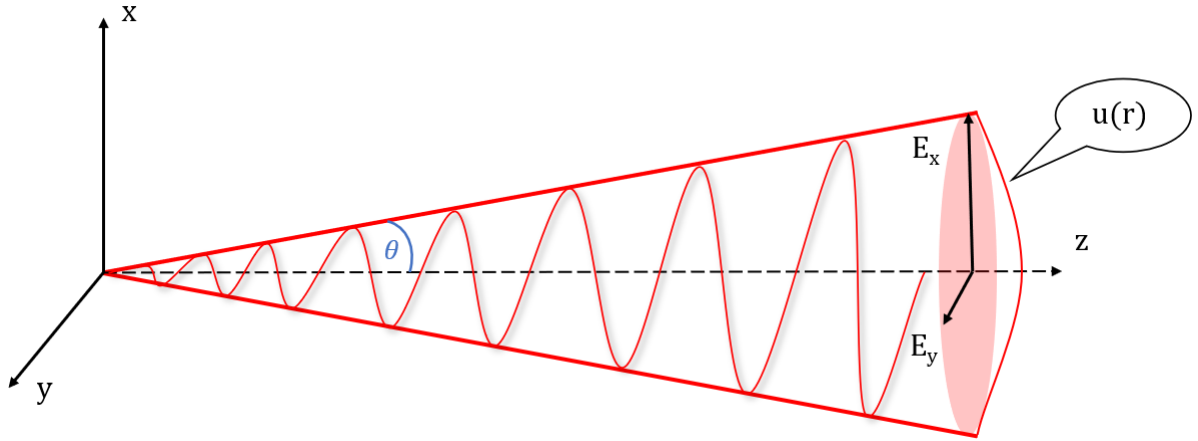


Figura 1 – Representação da propagação de um feixe paraxial. Para um ângulo  $\theta$  suficientemente pequeno o feixe diverge pouco do eixo  $z$ . O formato do perfil transversal do feixe é dado pela função  $u(\mathbf{r})$ .

sendo

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}, \quad (2.10)$$

onde  $\mathbf{u}(\mathbf{r})$  é um vetor que depende apenas da posição e que contém a informação da parte espacial do campo e  $\omega$  é a frequência angular. A função  $\mathcal{E}(\mathbf{r}, t)$  também deve ser solução da equação de onda. Assim, substituindo a equação (2.10) em (2.8), obtemos a equação

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.11)$$

sendo  $k = \frac{\omega}{c}$  o número de onda e  $c$  a velocidade da luz no vácuo. A equação acima é conhecida como equação vetorial de Helmholtz para o campo elétrico.

No decorrer da dissertação vamos usar laser como fonte de luz, portanto é de interesse estudar soluções para a equação da onda para campos elétricos pouco divergentes, ou seja, feixes que se propagam preferencialmente ao longo de um único eixo, assim, podemos fazer uso da aproximação paraxial. Nesse regime uma expressão conveniente para um campo elétrico que se propaga na direção  $z$  é dada por

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = u(\mathbf{r})e^{ikz}e^{-i\omega t} \hat{\mathbf{e}}. \quad (2.12)$$

A expressão acima representa uma onda plana se propagando ao longo do eixo  $z$ , onde  $u(\mathbf{r})e^{ikz}$  é uma função escalar complexa que determina a amplitude dessa onda e o termo  $\hat{\mathbf{e}}$  é um vetor unitário que representa o estado de polarização. Por se tratar de um vetor espacialmente homogêneo, o feixe apresenta a mesma polarização em todos os pontos do plano transversal à propagação. A figura 1 ilustra, de forma simplificada, a propagação de um feixe paraxial. Se o ângulo  $\theta$  for pequeno o feixe é pouco divergente e podemos considerar sua propagação apenas ao longo do eixo  $z$ .

A equação (2.12) tem a forma da equação (2.10), portanto o termo  $u(\mathbf{r})e^{ikz}\hat{\mathbf{e}}$  deve ser solução da equação de Helmholtz. Como o vetor de polarização  $\hat{\mathbf{e}}$  não depende da

posição, a própria função  $u(\mathbf{r})e^{ikz}$  é solução da equação de Helmholtz. Substituindo esse termo na equação (2.11), temos

$$(\nabla^2 + k^2)u(\mathbf{r})e^{ikz} = 0, \quad (2.13)$$

que é a equação de Helmholtz escalar. Atuando com o operador Laplaciano na equação acima, obtemos a seguinte expressão

$$e^{ikz} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(\mathbf{r}) + \left( 2ike^{ikz} \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial z} + e^{ikz} \frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right) = 0. \quad (2.14)$$

Como estamos lidando com campos na aproximação paraxial a função  $u(\mathbf{r})$  varia lentamente na direção de propagação do feixe (ao longo do eixo  $z$ ). Assim, podemos considerar que

$$k \left| \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial z} \right| \gg \left| \frac{\partial^2 u(\mathbf{r})}{\partial z^2} \right|. \quad (2.15)$$

Portanto, podemos descartar o termo que envolve a derivada segunda de  $u$  da equação (2.14), ficando com

$$\nabla_{\perp}^2 u(\mathbf{r}) + 2ik \frac{\partial u(\mathbf{r})}{\partial z} = 0, \quad (2.16)$$

onde  $\nabla_{\perp}^2$  é o operador Laplaciano atuando apenas nas coordenadas transversais  $x$  e  $y$ .

A função  $u(\mathbf{r})$  caracteriza o modo transversal da onda eletromagnética dada pela equação (2.12), pois contém nela a informação do padrão espacial da onda. A solução da equação (2.16) em coordenadas cartesianas é chamada de modo Hermite-Gaussiano (*HG*), e a função  $u(\mathbf{r})$  é dada por [12]

$$u_{m,n}(x, y, z) = b_{nm} H_m\left(\frac{\sqrt{2}x}{w(z)}\right) H_n\left(\frac{\sqrt{2}y}{w(z)}\right) \exp\left[-\frac{x^2 + y^2}{w^2(z)} + \frac{ik(x^2 + y^2)}{2R(z)} - i\varphi_{n,m}(z)\right], \quad (2.17)$$

sendo  $H_i(v)$  os polinômios de Hermite de ordem  $i = (0, 1, 2, \dots)$ . Além disso temos:

$$b_{nm} = \sqrt{\frac{2^{1-N}}{\pi n! m!}}, \quad (2.18a)$$

$$w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_R^2}}, \quad (2.18b)$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad (2.18c)$$

$$\varphi_{n,m}(z) = (1 + N) \arctan \frac{z}{z_R}, \quad (2.18d)$$

$$R(z) = z \left( 1 + \frac{z_R^2}{z^2} \right). \quad (2.18e)$$

O valor de  $N = n + m$  define a ordem do modo eletromagnético em questão. O termo  $b_{nm}$  é uma constante de normalização,  $w_0$  é a largura do feixe em  $z = 0$ ,  $w(z)$  é a largura do feixe ao longo de  $z$ ,  $z_R$  é a distância da origem que o feixe aumenta sua largura em  $\sqrt{2}$ ,

também conhecido como comprimento de Rayleigh, a função  $\varphi_{n,m}(z)$  é a fase de Gouy, e por fim, a função  $R(z)$  é o raio de curvatura do feixe.

Ao desenvolver o Laplaciano da equação de onda de Helmholtz escalar nós usamos o sistema de coordenadas cartesiano e após aplicar a aproximação paraxial chegamos na solução para  $u(x, y, z)$ . Contudo, ao utilizar o Laplaciano em coordenadas cilíndricas, a equação de Helmholtz escalar se torna

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} \right) = 0. \quad (2.19)$$

Considerando a aproximação paraxial dada pela equação (2.15), obtemos a seguinte expressão para a equação de Helmholtz em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial u}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2.20)$$

As soluções da equação acima são chamadas de modos Laguerre-Gaussianos (*LG*) e sua expressão é dada por

$$u_{p,l}(\rho, \phi, z) = \frac{a_{p,l}}{w(z)} \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2\rho^2}{w(z)^2} \right) \exp \left( -\frac{\rho^2}{w(z)^2} + ik \frac{\rho^2}{2R(z)} \right) e^{il\phi} e^{-i\varphi_{p,l}(z)}, \quad (2.21)$$

onde  $w(z)$  e  $R(z)$  são as funções dadas pelas equações (2.18b) e (2.18e), respectivamente,  $l$  e  $p$  são os índices azimutal e radial, respectivamente ( $l$  sendo um número inteiro e  $p$  um inteiro positivo) e  $L_p^{|l|}$  são os polinômios de Laguerre. A função  $\varphi_{p,l}(z)$  é a fase de Gouy e  $a_{p,l}$  uma constante de normalização, expressas por:

$$a_{p,l} = p! \left( \frac{2}{\pi p!(|l| + p)!} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (2.22)$$

$$\varphi_{p,l}(z) = (2p + |l| + 1) \arctan \left( \frac{z}{z_R} \right). \quad (2.23)$$

Os modos Hermite-Gaussianos e Laguerre-Gaussianos têm esse nome pois ambos apresentam um perfil Gaussiano, representado pela exponencial do quadrado das coordenadas transversais<sup>3</sup>, modulado pelos polinômios de Hermite e os polinômios de Laguerre. Portanto, feixes Laguerre e Hermite Gaussianos de ordem zero ( $n = m = 0$  ou  $p = l = 0$ ) são modos puramente Gaussianos.

Na figura 2 apresentamos o perfil de intensidade ( $u(\mathbf{r})^2$ ) de alguns modos Hermite-Gaussianos e Laguerre-Gaussianos, de diferentes ordens. Como já mencionado, podemos observar que ambos os modos de ordem zero possuem um perfil de intensidade Gaussiano.

A única dependência da coordenada  $\phi$  no modo Laguerre-Gaussiano (2.21) é dada pelo termo  $e^{il\phi}$ , ou seja, um termo que apenas imprime uma fase na frente de onda do

<sup>3</sup> O termo  $\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{w^2(z)}\right)$  para o modo *HG* e  $\exp\left(-\frac{\rho^2}{w(z)^2}\right)$  para o modo *LG*.



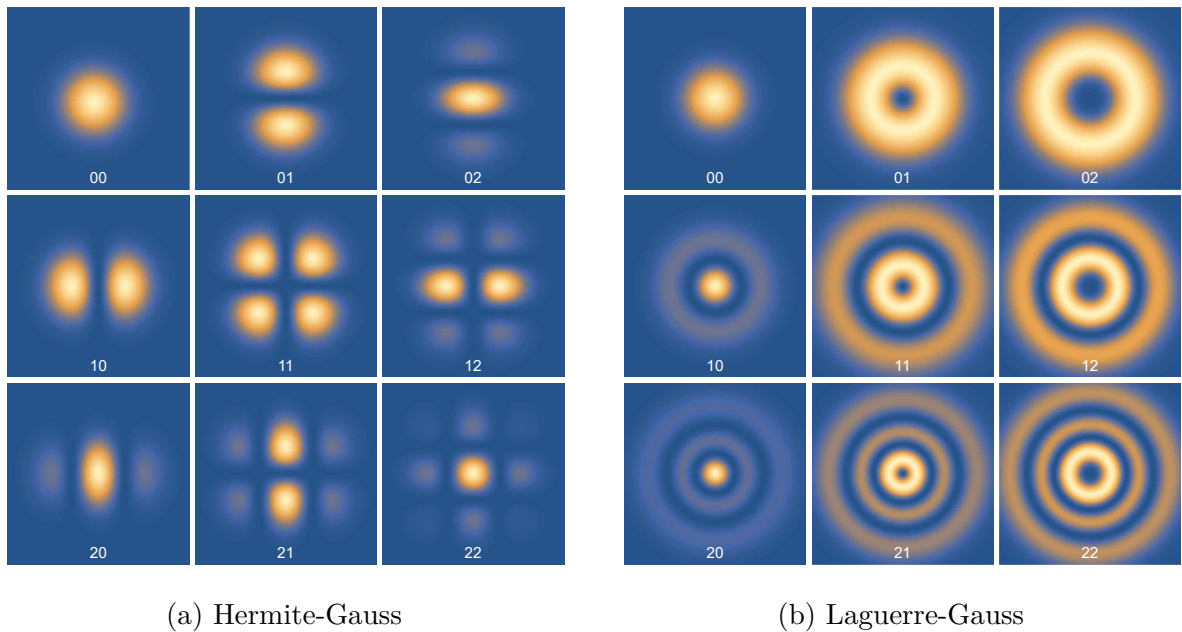


Figura 2 – Perfil de intensidade dos modos a) Hermite-Gaussianos com índices  $(mn)$  e b) Laguerre-Gaussianos com os índices  $(pl)$

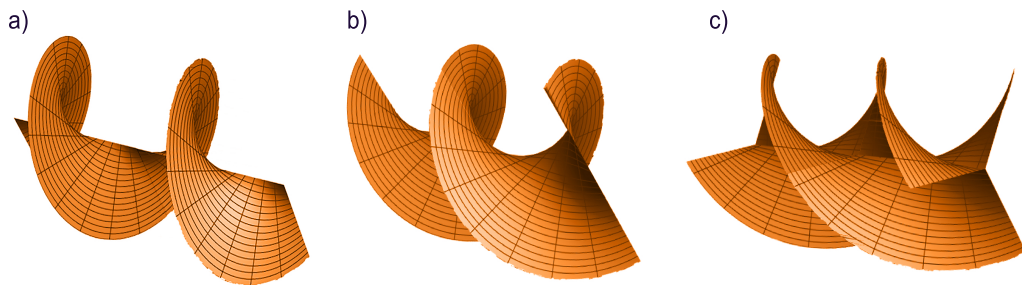


Figura 3 – Frente de onda de feixes que possuem o termo de fase  $e^{il\phi}$  com a)  $l = 1$ , b)  $l = 2$  e por último c)  $l = 3$ .

feixe. Porém essa fase varia com o ângulo  $\phi$ , e isso tem grandes consequências no formato da frente de onda. Para  $l = 0$  a fase se anula e a frente de onda é esférica, podendo ser aproximada como uma onda plana para pontos próximos ao eixo  $z$ . Já para  $l \neq 0$  essa fase transforma a frente de onda em helicoidal [4](Ver figura 3). O parâmetro  $l$  é conhecido como carga topológica e seu valor nos informa quantas hélices (ou vórtices) existem na frente de onda.

Diferente de uma onda plana, onde se tem uma fase homogênea, ondas helicoidais apresentam variação de fase para diferentes coordenadas azimutais de sua seção transversal, apresentando uma diferença de fase de  $2\pi l$  em torno da origem.

Por conta dessa mudança de fase na frente de onda, o feixe possui, ao longo do eixo  $z$ , fase indeterminada (para  $l \neq 0$ ), apresentando uma singularidade de fase [13]. Logo,

feixes LG possuem um zero de intensidade no centro do perfil espacial.

Em 1992 L. Allen *et al.* [14] demonstraram, teoricamente, que modos transversais Laguerre-Gaussianos são auto-funções do operador momento angular orbital, carregando um momento angular orbital de  $l\hbar$ , por fóton. Feixes que carregam momento angular orbital possuem diversas aplicações [15], alguns exemplos são na área de comunicação ótica [16] e pinças óticas [17].

## 2.2 Estado de Polarização

Na seção anterior, nosso objetivo foi encontrar a solução para a equação de onda, levando em conta a aproximação paraxial. Para isso consideramos, como solução, um campo elétrico cujo o estado de polarização é espacialmente homogêneo (ver equação (2.12)). Assim, foi possível separar o modo espacial  $u(\mathbf{r})$  do estado de polarização.

Nesta seção vamos apresentar como caracterizamos o estado de polarização de uma onda eletromagnética transversal. Para isso, devemos conhecer alguns parâmetros do campo, como as amplitudes de cada componente transversal e a diferença de fase entre elas.

Considerando uma onda eletromagnética transversal e monocromática que se propaga ao longo do eixo  $z$ , podemos expressar o campo elétrico real dessa onda, como

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[\mathbf{E}_0(\mathbf{r})e^{i(kz - \omega t)}]. \quad (2.24)$$

Como estamos tratando de uma onda transversal, o campo elétrico possui apenas componentes  $x$  e  $y$ , dadas por

$$E_x(\mathbf{r}, t) = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x), \quad (2.25a)$$

$$E_y(\mathbf{r}, t) = E_{0y} \cos(\tau + \delta_y), \quad (2.25b)$$

onde  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$  são amplitudes reais,  $\tau = kz - \omega t$ ,  $\delta_x$  e  $\delta_y$  são fases das componentes  $x$  e  $y$ , respectivamente. As equações (2.25) são equações paramétricas da elipse [18]

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \cos \delta \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} = \sin^2 \delta, \quad (2.26)$$

onde  $\delta = \delta_y - \delta_x$  é a diferença de fase entre as componentes  $x$  e  $y$  do campo elétrico.

A equação (2.26) nos diz que, para  $z$  fixo o vetor campo elétrico traça no plano  $xy$  uma elipse. Falamos então que a onda eletromagnética representada por essa equação possui polarização elíptica ilustrada na figura 4. Veremos que na verdade, todos os tipos de polarização (e.g., polarização linear e circular) derivam da equação (2.26) para diferentes valores dos parâmetros  $\delta$ ,  $E_{0x}$  e  $E_{0y}$ .

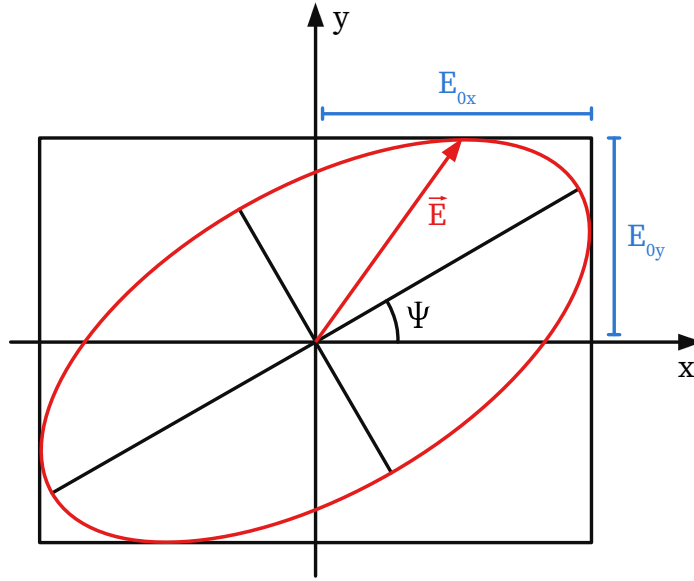


Figura 4 – Representação da elipse de polarização traçada pelo vetor campo elétrico para coordenada  $z$  constante.  $\Psi$  representa o ângulo que o eixo maior da elipse faz com o eixo  $x$ .

### Polarização linear

Fazendo  $\delta = n\pi$  ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) na equação da elipse, obtemos a seguinte expressão

$$\left( \frac{E_x}{E_{0x}} - (-1)^n \frac{E_y}{E_{0y}} \right)^2 = 0, \quad (2.27)$$

que resolvendo para  $E_y$ , ficamos com a equação de uma reta

$$E_y = (-1)^n \frac{E_{0y}}{E_{0x}} E_x. \quad (2.28)$$

Ou seja, o vetor campo elétrico descreve uma reta no plano  $xy$  como ilustrado da figura 5. Dizemos que a luz está linearmente polarizada. A inclinação da reta nos diz a orientação da polarização linear; essa inclinação é dada pela razão das amplitudes (coeficiente angular da equação (2.28)). Se essa razão entre as amplitudes for unitária, nós temos uma luz linearmente polarizada a  $\pm 45^\circ$ . Caso uma das amplitudes  $E_{0x}$  ou  $E_{0y}$  sejam nulas, a onda é dita verticalmente ou horizontalmente polarizada, respectivamente.

### Polarização Circular

Fazendo  $\delta = (n + \frac{1}{2})\pi$  sendo ( $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) e as amplitudes das componentes do campo elétrico iguais, ou seja,  $E_{0y} = E_{0x} = E_0$ , na equação da elipse (2.26), ficamos com a seguinte expressão

$$\frac{E_x^2}{E_0^2} + \frac{E_y^2}{E_0^2} = 1, \quad (2.29)$$

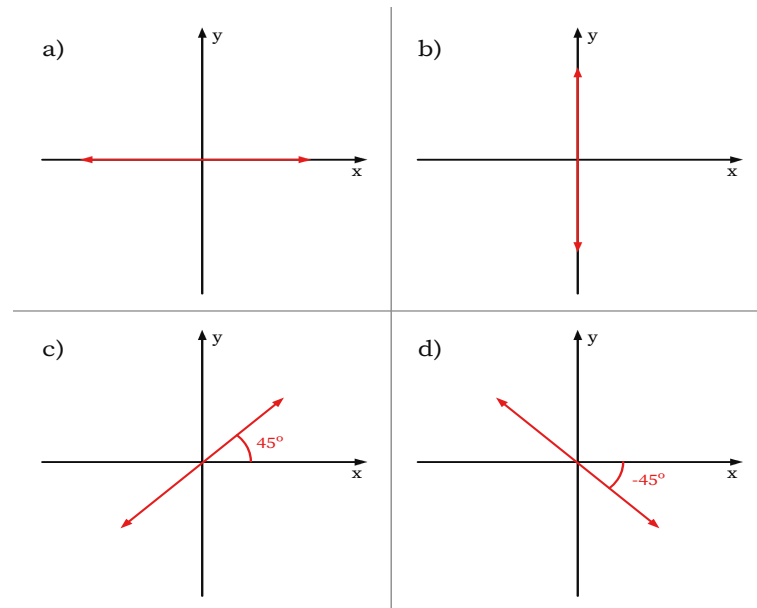


Figura 5 – Polarização linear a) horizontal, b) vertical, c) e d) à  $45^\circ$  e  $-45^\circ$  respectivamente.

que é a equação de um círculo. Isso significa que enquanto o tempo passa a representação gráfica do vetor campo elétrico rotaciona no plano  $xy$ , formando uma circunferência (ver figura 6). O sentido com que o vetor rotaciona é determinado pela diferença de fase  $\delta$ . Se o vetor gira no sentido horário, dizemos que a luz é circularmente polarizada à direita e  $\delta = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ . Se o vetor gira no sentido anti-horário a luz possui uma polarização circular esquerda e  $\delta = -\frac{\pi}{2} + 2n\pi$ .

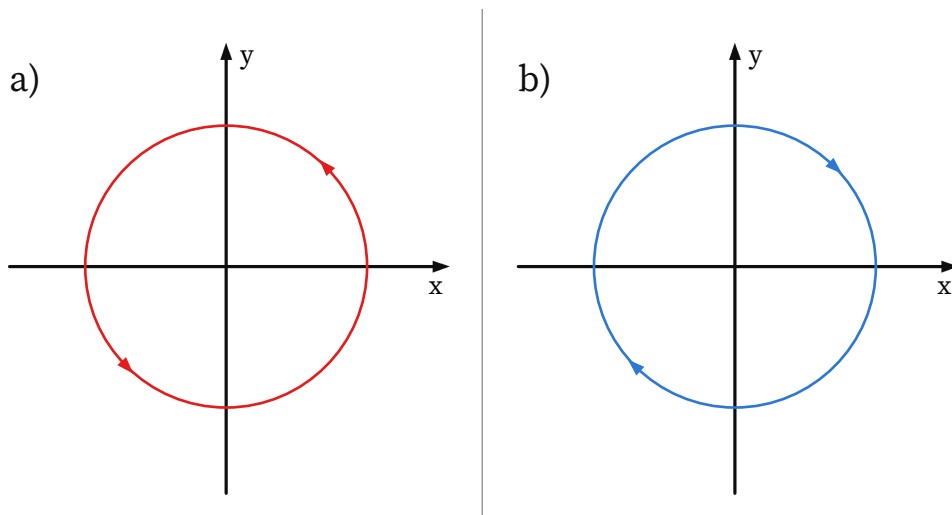


Figura 6 – Polarização circular a) esquerda e b) direita.

Devemos notar que a equação acima não faz distinção sobre qual valor de  $\delta$  foi usado ( $\frac{\pi}{2}$  ou  $-\frac{\pi}{2}$ , por exemplo), ou seja, não nos informa se a polarização é esquerda ou direita. Essa informação pode ser obtida a partir das equações (2.25).

O estado de polarização da onda eletromagnética transversal é dado pela equação da elipse (2.26). Logo, em geral, essa polarização é elíptica, sendo a polarizações linear

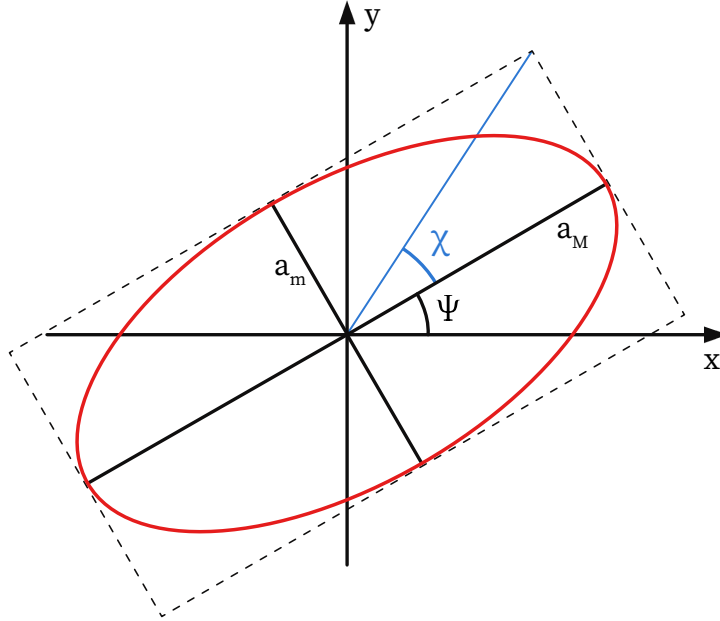


Figura 7 – Ilustração da elipse de polarização e seus parâmetros geométricos. Os ângulos  $\Psi$  e  $\chi$  são os ângulos de orientação e elipsidade, respectivamente,  $a_M$  e  $a_m$  representam os semi-eixos maior e menor, respectivamente.

quando o eixo menor da elipse é nulo e a polarização circular quando os eixos maior e menor da elipse possuem o mesmo comprimento.

Para que possamos caracterizar completamente o estado de polarização de uma certa onda, devemos saber qual a sua orientação, ou seja, o ângulo  $\Psi$  entre o eixo maior da elipse e o eixo  $x$  e sua elipsidade, que é a razão entre os comprimentos desses eixos menor e maior. Esses parâmetros estão representados na figura 7.

Mostramos no Apêndice A que esses parâmetros se relacionam com as amplitudes e as fases do campo elétrico segundo as seguintes equações:

$$a_M^2 = E_{0x}^2 \cos^2 \Psi + E_{0y}^2 \sin^2 \Psi + E_{0x} E_{0y} \sin(2\Psi) \cos \delta, \quad (2.30a)$$

$$a_m^2 = E_{0x}^2 \sin^2 \Psi + E_{0y}^2 \cos^2 \Psi - E_{0x} E_{0y} \sin(2\Psi) \cos \delta, \quad (2.30b)$$

$$\tan(2\Psi) = \frac{2E_{0x} E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}, \quad 0 \leq \Psi \leq \pi, \quad (2.30c)$$

$$\sin(2\chi) = \frac{2E_{0x} E_{0y} \sin \delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi \leq \frac{\pi}{4}, \quad (2.30d)$$

onde  $a_M$  e  $a_m$  são os comprimentos dos eixos maior e menor da elipse, respectivamente. A tangente do ângulo  $\chi$  é a própria elipsidade, como mostrado na figura.

## 2.3 Parâmetros de Stokes e a Esfera de Poincaré

Na seção anterior mostramos que, para uma onda plana, as componentes transversais do campo elétrico são soluções da equação da elipse. Assim, enquanto a onda propaga o vetor campo elétrico traça uma elipse no plano transversal em um intervalo de tempo que depende da frequência da onda. No caso da radiação dentro do espectro visível esse intervalo é da ordem de  $10^{-15}$  segundos. Por se tratar de um período de tempo muito curto é quase impossível seguir o caminho do vetor campo elétrico a fim de determinar qual o estado de polarização da luz. Além disso, o formalismo da elipse de polarização só é aplicável para luz completamente polarizada, onde a diferença de fase entre as componentes do campo elétrico não variam com o tempo.

Foi em 1852 que o Físico e Matemático G. G. Stokes [19] propôs uma forma de descrever o estado de polarização de uma onda eletromagnética plana, usando apenas quatro quantidades reais, que podem ser facilmente medidas. Essas quantidades são chamadas de parâmetros de Stokes sendo obtidas através de medições de intensidade da luz. Para se encontrar a intensidade de uma onda basta calcular a média temporal do quadrado de sua amplitude.

Para que possamos determinar os quatro parâmetros de Stokes, comecemos considerando o campo elétrico de uma onda plana, localizado no plano  $z = 0$ , em sua forma complexa

$$\mathbf{E}(t) = E_x(t) \hat{\mathbf{x}} + E_y(t) \hat{\mathbf{y}}, \quad (2.31)$$

onde

$$E_x(t) = E_{0x} e^{i\delta_x} e^{i\omega t}, \quad (2.32a)$$

$$E_y(t) = E_{0y} e^{i\delta_y} e^{i\omega t}. \quad (2.32b)$$

Os quatro parâmetros de Stokes são obtidos fazendo as seguintes operações

$$S_0 = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle, \quad (2.33a)$$

$$S_1 = \langle E_x E_x^* \rangle - \langle E_y E_y^* \rangle, \quad (2.33b)$$

$$S_2 = \langle E_x E_y^* \rangle + \langle E_y E_x^* \rangle, \quad (2.33c)$$

$$S_3 = i(\langle E_x E_y^* \rangle - \langle E_y E_x^* \rangle). \quad (2.33d)$$

O símbolo  $\langle \dots \rangle$  representa a média temporal<sup>4</sup> e  $*$  representa a operação de complexo conjugado. Para luz completamente polarizada é fácil mostrar que

$$\langle E_i E_j^* \rangle = E_i E_j^*, \quad i, j = x, y. \quad (2.34)$$

<sup>4</sup> A média temporal é dada por  $\langle E_x E_x^* \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \left[ \frac{1}{T} \int_0^{\infty} E_x(t) E_x(t)^* dt \right]$ .

Assim, usando a relação acima junto com as equações (2.32), os parâmetros de Stokes podem ser escritos como

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (2.35a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad (2.35b)$$

$$S_2 = 2E_{0x}E_{0y} \cos \delta, \quad (2.35c)$$

$$S_3 = 2E_{0x}E_{0y} \sin \delta. \quad (2.35d)$$

Logo, se soubermos os valores dos parâmetros de Stokes conseguimos informação das amplitudes e das fases das componentes do campo, possibilitando a total caracterização da polarização da luz (i.e., adquirimos conhecimento da elipse de polarização).

A questão é: como podemos descobrir os valores dos quatro parâmetros? Como abordado anteriormente, essas quantidades são observáveis, ou seja, conseguimos medir experimentalmente. Mostraremos que usando apenas medições de intensidades conseguimos obter os quatro parâmetros de Stokes.

Olhando para as equações (2.33), podemos ver que a quantidade  $S_0$  é simplesmente a intensidade total do campo e o valor de  $S_1$  é a diferença entre as intensidades das componentes  $x$  e  $y$ , já as quantidades  $S_2$  e  $S_3$  não têm uma interpretação direta. Para que possamos entender esses o significado de  $S_2$  e  $S_3$  devemos fazer duas mudanças de base. Usando a base diagonal, que representa polarização  $\pm 45^\circ$ , dada por

$$\hat{\mathbf{e}}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} + \hat{\mathbf{y}}), \quad (2.36a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_- = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}). \quad (2.36b)$$

Podemos mostrar que a quantidade  $S_2$  é a diferença entre as intensidades das componentes  $E_+$  e  $E_-$ , que são as amplitudes do campo na base diagonal (e.g.,  $E_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x + E_y)$ ). Já para o parâmetro  $S_3$  devemos usar a base circular, que representa a polarização circular direita ( $R$ ) e esquerda ( $L$ ), dada por

$$\hat{\mathbf{e}}_L = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} + i\hat{\mathbf{y}}), \quad (2.37a)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_R = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{\mathbf{x}} - i\hat{\mathbf{y}}). \quad (2.37b)$$

O parâmetro  $S_3$  representa a diferença das intensidades das componentes  $E_R$  e  $E_L$  do campo, que são as amplitudes na base circular (e.g.,  $E_R = \frac{1}{\sqrt{2}}(E_x - iE_y)$ ). Para resumir o que foi discutido nos últimos parágrafos podemos reescrever as equações (2.33) da seguinte

forma

$$S_0 = \langle E_x E_x^* \rangle + \langle E_y E_y^* \rangle = \mathbf{I}_0, \quad (2.38a)$$

$$S_1 = \langle E_x E_x^* \rangle - \langle E_y E_y^* \rangle = \mathbf{I}_x - \mathbf{I}_y, \quad (2.38b)$$

$$S_2 = \langle E_+ E_+^* \rangle - \langle E_- E_-^* \rangle = \mathbf{I}_+ - \mathbf{I}_-, \quad (2.38c)$$

$$S_3 = i(\langle E_R E_R^* \rangle - \langle E_L E_L^* \rangle) = \mathbf{I}_R - \mathbf{I}_L, \quad (2.38d)$$

onde  $\mathbf{I}_0$  é a intensidade total e  $\mathbf{I}_i$  são as intensidades das componentes  $i$  do campo.

As equações acima deixam explícito que os parâmetros de Stokes que caracterizam o estado de polarização da luz são obtidos a partir de medições de intensidade. Para se obter essas quantidades, a luz a ser estudada deve passar por uma série de elementos óticos, como polarizadores e placas de onda, afim de medir as intensidades das componentes do campo nas diferentes bases [20].

Levando em consideração um feixe linearmente polarizado, ou seja, em que  $\delta = 0$  ou  $\delta = \pi$ . Os parâmetros de Stokes podem ser escritos como

$$S_0 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2, \quad (2.39a)$$

$$S_1 = E_{0x}^2 - E_{0y}^2, \quad (2.39b)$$

$$S_2 = \pm 2E_{0x}E_{0y}, \quad (2.39c)$$

$$S_3 = 0, \quad (2.39d)$$

onde o sinal de mais e menos em  $S_2$  aparece se usarmos  $\delta = 0$  ou  $\pi$ , respectivamente. Já para a polarização circular nós temos as condições  $E_{0x} = E_{0y} = E_0$  e  $\delta = \frac{\pi}{2}$  para polarização circular direita ou  $\delta = \frac{3\pi}{2}$  para polarização circular esquerda, portanto

$$S_0 = 2E_0^2, \quad (2.40a)$$

$$S_1 = 0, \quad (2.40b)$$

$$S_2 = 0, \quad (2.40c)$$

$$S_3 = \pm 2E_0^2, \quad (2.40d)$$

o sinal positivo equivale a polarização circular direita e o sinal negativo a polarização circular a esquerda.

Como os parâmetros de Stokes caracterizam qualquer estado de polarização, deve haver uma forma de descobirmos como essas quantidades se relacionam com os parâmetros geométricos da elipse de polarização, como o ângulo de inclinação  $\Psi$  e o ângulo de elipsidade  $\chi$ . Usando as equações (2.30c) e (2.30d) junto com os parâmetros de Stokes das equações (2.35), obtemos

$$\tan(2\Psi) = \frac{S_2}{S_1}, \quad (2.41a)$$

$$\text{sen}(2\chi) = \frac{S_3}{S_0}. \quad (2.41b)$$



Além disso, usando a relação

$$S_0^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2, \quad (2.42)$$

que pode ser obtida a partir das equações (2.35), podemos rescrever  $S_1$ ,  $S_2$  e  $S_3$  em função dos parâmetros geométricos e de  $S_0$ , obtendo

$$S_1 = S_0 \cos(2\Psi) \cos(2\chi), \quad (2.43a)$$

$$S_2 = S_0 \sin(2\Psi) \cos(2\chi), \quad (2.43b)$$

$$S_3 = S_0 \sin(2\chi). \quad (2.43c)$$

As equações (2.43) se assemelham com as equações que relacionam as coordenadas cartesianas com coordenadas esféricas

$$x = r \cos(\phi) \sin(\theta), \quad (2.44a)$$

$$y = r \sin(\phi) \sin(\theta), \quad (2.44b)$$

$$z = r \cos(\theta), \quad (2.44c)$$

onde  $\phi$  e  $\theta$  são os ângulos azimutal e polar, respectivamente. De fato, as equações (2.43) e (2.44) são idênticas se  $r = S_0$ , o ângulo  $\phi = 2\Psi$  e  $\theta = \frac{\pi}{2} - 2\chi$ . Ou seja, podemos representar os parâmetros de Stokes na superfície de uma esfera de raio  $S_0$ , sendo as coordenadas  $x, y, z$  de um ponto na esfera, as quantidades  $S_1, S_2, S_3$ , respectivamente.

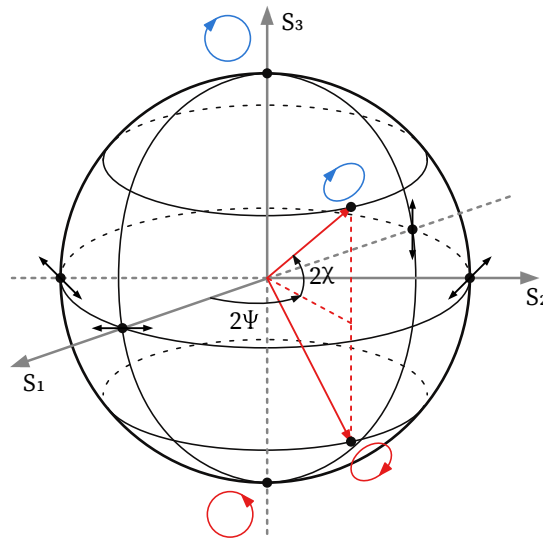


Figura 8 – Esfera de Poincaré. Cada ponto na sua superfície representa um estado de polarização. Para diferentes coordenadas angulares  $\Psi$  e  $\chi$  teremos mudanças na orientação e elipsidade da elipse de polarização, respectivamente. Os polos representam as polarizações circular, no equador temos as linear e nos restante temos polarização elíptica direita e esquerda, nos hemisférios norte e sul, respectivamente.

Essa esfera é chamada de esfera de Poincaré, pois foi Henri Poincaré em 1892 [21] o primeiro a perceber essa ligação entre os ângulos que caracterizam a elipse de polarização e os ângulos polar e azimutal de uma esfera.

Cada ponto na superfície da esfera de Poincaré determina, simultaneamente, os parâmetros de Stokes e os parâmetros geométricos da elipse de polarização<sup>5</sup>. Com isso, conseguimos caracterizar qualquer estado de polarização. Na figura 8 podemos ver como essas quantidades se relacionam com pontos na esfera de Poincaré.

O sinal do ângulo  $\chi$  informa qual o sentido da elipse de polarização. Se  $\chi$  for positivo (negativo) será a polarização à direita (esquerda). Olhando para equação (2.43c), podemos ver que as polarizações à direita são representadas por pontos acima do equador da esfera (i.e., para  $S_3 > 0$ ) e polarização à esquerda abaixo do equador. Fazendo  $\delta = 0$  ou  $\pi$  (condição para polarizações linear) em (2.35d) o parâmetro  $S_3$  é nulo, portanto para pontos no equador da esfera se encontram as polarizações lineares. Nos polos norte e sul da esfera  $2\chi = \frac{\pi}{2}$  e  $-\frac{\pi}{2}$ , respectivamente, isso implica em  $S_1 = S_2 = 0$  e  $S_3 = \pm S_0$  que são os mesmos parâmetros de Stokes para polarização circular direita e esquerda (ver equação (2.40)), respectivamente.

## 2.4 Feixes Vetoriais

Nas seções anteriores discutimos sobre os modos transversais e os estados de polarização da luz de forma independente. Isso só foi possível porque na equação (2.12) definimos que o feixe teria a mesma polarização em todos os pontos de sua seção transversal. Esse tipo de onda eletromagnética possui um estado de polarização homogêneo que, como vimos, pode ser representado por um único ponto na esfera de Poincaré.

Nesta seção, vamos estudar feixes cujo estado de polarização varia ao longo de sua seção transversal, chamados de feixes vetoriais (*Vector Beams*) [22]. Por causa da não homogeneidade do estado de polarização, feixes vetoriais precisam de um conjunto de pontos na esfera de Poincaré para que possamos caracteriza-los (i.e., cada ponto em seu perfil espacial corresponde a um ponto na esfera de Poincaré).

Embora os feixes vetoriais apareçam como solução da equação de Helmholtz vetorial [23], a forma mais comum de obtê-los é através de uma superposição coaxial de dois feixes com modo espacial e estado de polarização ortogonais. Como exemplo, vamos superpor dois modos LG com polarização ortogonal de índices  $p_1, p_2$  e  $l_1, l_2$ . A expressão matemática para o campo elétrico desse feixe é dada por

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( LG_{p_1 l_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + LG_{p_2 l_2} e^{i\delta} \hat{\mathbf{e}}_2 \right), \quad (2.45)$$

<sup>5</sup> Pontos no interior da esfera de Poincaré representam estados parcialmente polarizados, não considerados nesta dissertação.

onde as funções  $LG_{pl}$  são modos Laguerre-Gaussianos dados pela equação (2.21),  $\delta$  é uma fase e os vetores unitários  $\hat{\mathbf{e}}_1$  e  $\hat{\mathbf{e}}_2$  representam as polarizações ortogonais.

Uma classe de feixes vetoriais muito estudada é chamada de *Cylindrical Vector Beam* (CVB) [7]. Esse nome se dá pois seus estados de polarização são simétricos em relação a direção de propagação. Os modos radiais e azimutais são exemplos de CVBs, ambos possuem polarização linear cuja orientação varia, em relação a posição, de tal forma que sempre se alinham com a direção radial e azimutal, respectivamente.

Quando  $\hat{\mathbf{e}}_1$  e  $\hat{\mathbf{e}}_2$  representam o estado de polarização circular direita e esquerda, respectivamente, e os índices  $p_1 = p_2 = 0$ ,  $l_1 = -l_2 = 1$  e  $\delta = 0$ , podemos reescrever a equação (2.45) da seguinte maneira

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \frac{f_{01}(\rho, z)}{\sqrt{2}} \left[ e^{i\phi} \hat{\mathbf{e}}_R + e^{-i\phi} \hat{\mathbf{e}}_L \right], \quad (2.46)$$

onde a função  $f_{pl}$  é dada por

$$f_{pl}(\rho, z) = \frac{a_{p,l}}{w(z)} \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{w(z)} \right) L_p^l \left( \frac{2\rho^2}{w(z)^2} \right) \exp \left( -\frac{\rho^2}{w(z)^2} + i \frac{\rho^2}{R(z)} \right) e^{-i\varphi_{p,l}(z)}. \quad (2.47)$$

Usando as equações (2.37) podemos representar o estado de polarização desse campo nas coordenadas cartesianas. Fazendo isso ficamos com

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \phi, z) &= \frac{f_{01}(\rho, z)}{2} \left[ e^{i\phi} (\hat{\mathbf{e}}_x - i\hat{\mathbf{e}}_y) + e^{-i\phi} (\hat{\mathbf{e}}_x + i\hat{\mathbf{e}}_y) \right] \\ &= f_{01}(\rho, z) (\cos \phi \hat{\mathbf{e}}_x + \sin \phi \hat{\mathbf{e}}_y). \end{aligned} \quad (2.48)$$

Podemos reparar que o estado de polarização da equação (2.48) é determinado apenas pela expressão entre parênteses, que por sua vez, é exatamente a representação, em coordenadas cartesianas, do versor radial das coordenadas polares. Temos então um CVB de polarização radial. Na figura 9a), representamos o perfil transversal junto com o estado de polarização de alguns CVB. Os segmentos de reta em preto representam o estado de polarização linear em cada ponto do perfil transversal do feixe.

O feixe radial mostrado é apenas um exemplo de diversos padrões de polarização não homogênea que podemos gerar com a equação (2.45). Diversos exemplos podem ser encontrados em [24], onde os autores fizeram a superposição de modos Laguerre-Gaussianos de várias ordens.

Podemos representar o estado de polarização de feixes vetoriais na esfera de Poincaré. Porém, precisamos de mais pontos para realmente cobrir cada estado de polarização presente no perfil do feixe. Como exemplo, na figura 9 b) representamos o feixe radial da equação (2.48) onde ele expande todo o equador da esfera.

Outra classe de feixes vetoriais muito interessantes são os chamados *Full Poincaré Beams* (FPB) [6]. Esse tipo de radiação possui, como o nome sugere, todos os estados de

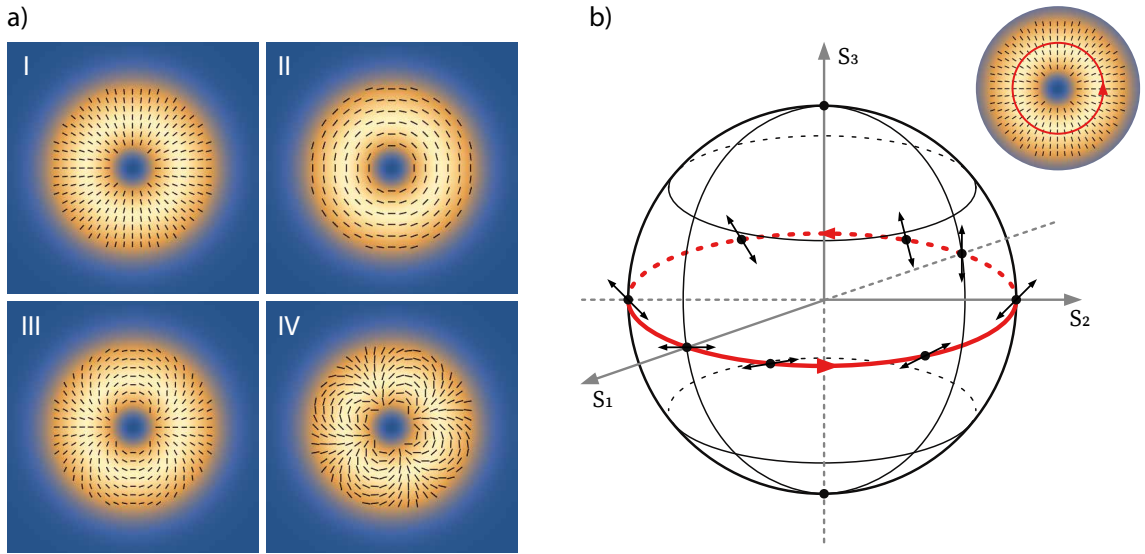


Figura 9 – a) Representação do perfil espacial e estado de polarização de alguns CVB. I é dado pela equação (2.48). II é obtido fazendo  $l_1 = -l_2 = 1$  e  $\delta = \pi$ , III fazendo  $l_1 = -l_2 = 2$  e  $\delta = 0$  e IV fazendo  $l_1 = -l_2 = 3$  e  $\delta = \frac{-\pi}{2}$  na equação (2.45). Já em b) a linha vermelha no equador da esfera de Poincaré representa todos os estados de polarização presentes no perfil de um feixe radial.

polarização presentes na esfera de Poincaré em sua seção transversal. Eles também podem ser obtidos por meio de superposição da forma

$$E(\rho, \phi, z) = \cos \gamma LG_{00} \hat{\mathbf{e}}_1 + \sin \gamma LG_{01} \hat{\mathbf{e}}_2$$

$$= \left( \hat{\mathbf{e}}_1 + e^{i(\phi - \varphi_{0,0}(z))} \sqrt{2} \frac{\rho}{w(z)} \tan \gamma \hat{\mathbf{e}}_2 \right) \frac{a_{0,0}}{w(z)} \exp \left( -\frac{\rho^2}{w(z)^2} + i \frac{\rho^2}{R(z)} \right). \quad (2.49)$$

Uma onda eletromagnética representada pela equação acima possui todos os estados de polarização em seu perfil transversal. Na figura 10 representamos o estado de polarização e perfil espacial de dois FPB. No centro do perfil de intensidade de ambos os feixes temos a polarização  $\hat{\mathbf{e}}_1$ . Ao se afastar do centro a polarização vai se aproximando de  $\hat{\mathbf{e}}_2$ . Porém, só temos de fato a polarização  $\hat{\mathbf{e}}_2$  no infinito. Podemos contornar esse problema, se fizermos  $\tan \gamma$  unitária. Com isso, a maioria dos estados de polarização se encontrarão em uma área onde a intensidade do feixe ainda é considerável.

Como ficará claro nos próximos capítulos, é interessante estudar feixes produzidos por superposição de modos Laguerre-Gaussianos de índices azimutal opostos, ou seja,  $l_1 = -l_2$  e radial nulos. Podemos representar seu campo elétrico da seguinte forma

$$\mathbf{E}(\rho, \phi, z) = \Psi_R^l \mathbf{R}_l + \Psi_L^l \mathbf{L}_l, \quad (2.50)$$

onde

$$\mathbf{R}_l = LG_{0l} \hat{\mathbf{e}}_R, \quad (2.51a)$$

$$\mathbf{L}_l = LG_{0-l} \hat{\mathbf{e}}_L, \quad (2.51b)$$

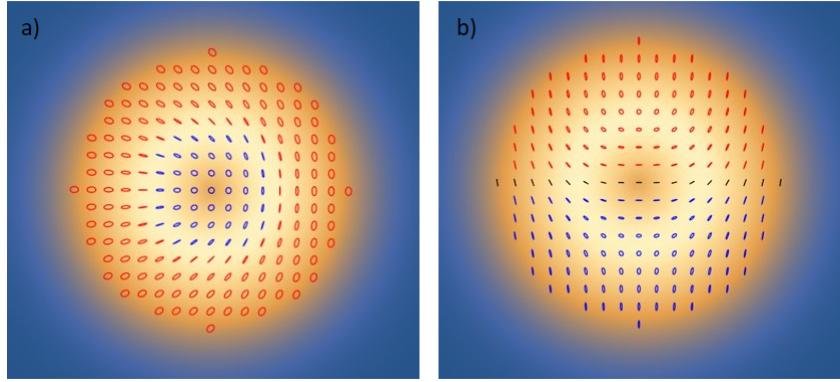


Figura 10 – A figura representa o perfil espacial e estado de polarização de dois FFB obtidos da equação (2.49) fazendo  $\gamma = \frac{\pi}{4}$ , sendo em a)  $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_R$  e  $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_L$  e em b)  $\hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_x$  e  $\hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_y$ . Os círculos e elipses vermelhas e azuis representam a polarização circular e elíptica esquerda e direita, respectivamente.

representam modos LG de carga topológica oposta com polarização circular direita e esquerda, respectivamente. Os termos  $\Psi_R^l$  e  $\Psi_L^l$  representam as amplitudes das componentes  $\mathbf{R}_l$  e  $\mathbf{L}_l$  do feixe vetorial. Podemos definir parâmetros de Stokes usando como base as equações (2.51), sendo eles

$$S_0^l = |\Psi_R^l|^2 + |\Psi_L^l|^2, \quad (2.52a)$$

$$S_1^l = 2|\Psi_R^l||\Psi_L^l| \cos \delta, \quad (2.52b)$$

$$S_2^l = 2|\Psi_R^l||\Psi_L^l| \sin \delta, \quad (2.52c)$$

$$S_3^l = |\Psi_R^l|^2 - |\Psi_L^l|^2, \quad (2.52d)$$

onde  $\delta = \arg(\Psi_L^l) - \arg(\Psi_R^l)$  é a diferença de fase entre as componentes  $R_l$  e  $L_l$  do campo. Essas quantidades recebem o nome de parâmetros de Stokes de ordem superior. Como na esfera de Poincaré para polarização homogênea, os parâmetros de Stokes de ordem superior representam as coordenadas cartesianas de uma nova esfera chamada de esfera de Poincaré de ordem superior (*Higher-Order Poincaré Sphere* - HOPS) [25], valendo as relações

$$\tan(2\theta) = \frac{S_2^l}{S_1^l}, \quad (2.53a)$$

$$\sin(2\chi) = \frac{S_3^l}{S_0^l}, \quad (2.53b)$$

sendo  $(2\theta, 2\chi)$  as coordenadas angulares na HOPS. Um ponto nessa esfera não só representa o estado de polarização de um feixe vetorial mas também seu modo espacial. Na figura 11 mostramos a HOPS para  $l = 1$ . Podemos ver que os polos (i.e.,  $S_3^l = S_0^l$ ) da esfera representam os modos Laguerre-Gaussianos com polarização circular homogênea, já no equador (i.e.,  $S_3^l = 0$ ) estão os feixes vetoriais com polarização linear, sendo que o ponto  $(0, 0)$  representa o CVB radial da equação (2.48). Os outros pontos da esfera representam polarização elíptica, cuja orientação varia na seção transversal do feixe.

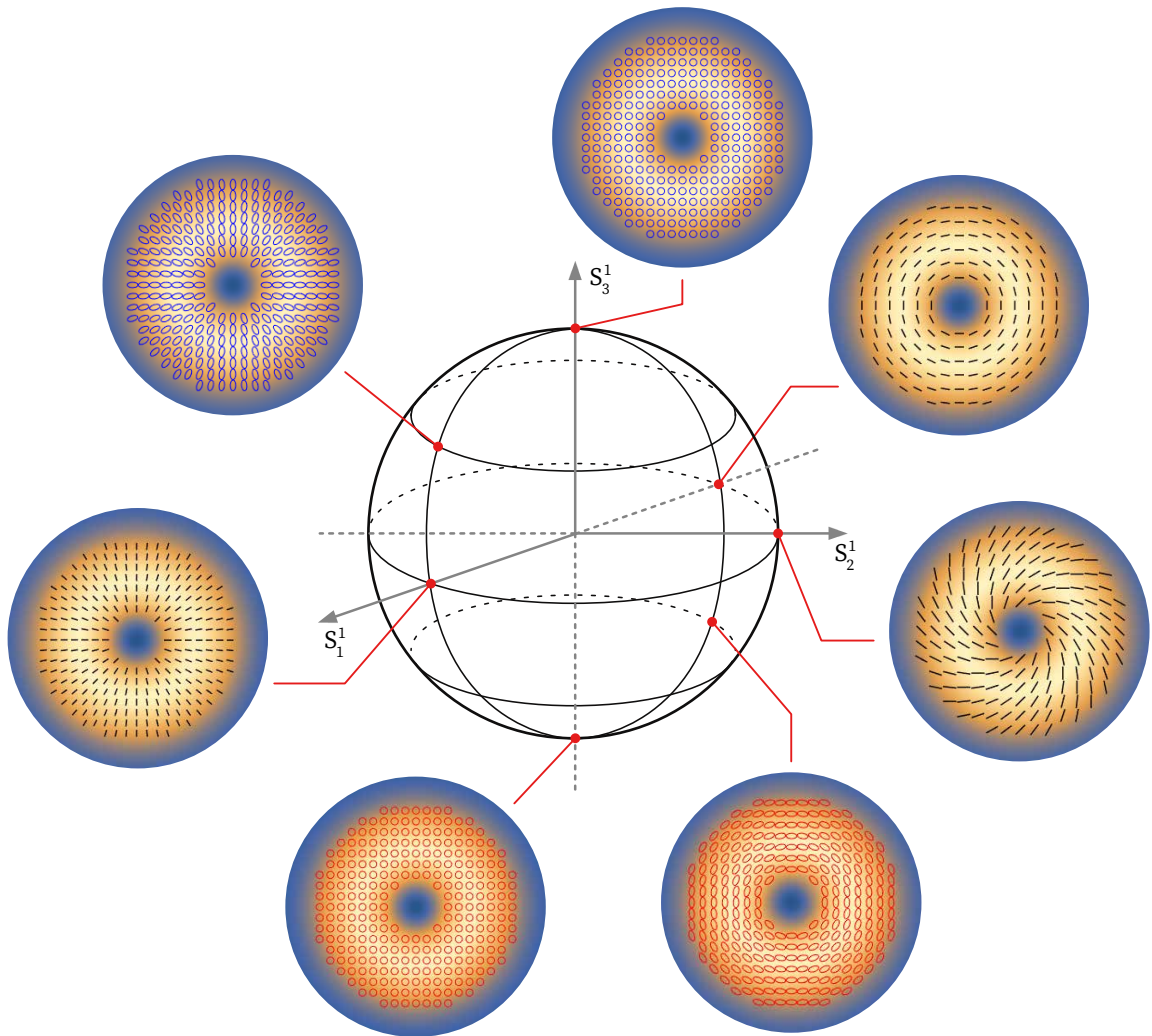


Figura 11 – Representação da esfera de Poincaré de ordem superior para  $l = 1$ . No equador da esfera estão os CVB. Já nos polos estão os feixes de polarização circular. No restante dos pontos da esfera temos polarização elíptica de variadas orientação e elipsidades.

Diferente da esfera de Poincaré para polarização homogênea, não existe apenas uma HOPS que represente todos os diferentes feixes vetoriais, já que para cada valor de  $l$  teremos esferas diferentes que representarão outros padrões de polarização e de modos espaciais. Existem diversas formas de se produzir um feixe vetorial em laboratório [7, 12]. Nesta dissertação usaremos placas de onda constituídas de elementos de dimensões menores que o comprimento de onda da luz, chamadas de *q-plates* [9]. Mostraremos que esse tipo de placa consegue transformar uma onda Gaussiana de polarização homogênea em qualquer feixe vetorial presente na HOPS.

### 3 Q-plates

As q-plates são instrumentos óticos capazes de alterar o perfil espacial e o estado de polarização de uma onda eletromagnética<sup>1</sup>. Para isso elas são constituídas de elementos de dimensões menores que o comprimento de onda da luz e formam um meio óticamente anisotrópico (birrefringente) e não homogêneo (devido à geometria das estruturas que constituem a placa). A criação das q-plates se deu em 2006 por L. Marrucci et al. [1, 26]. Na ocasião foram utilizadas moléculas de cristal líquido (LC) como material birrefringente. Como representado na figura 12, a orientação dos eixos óticos dessas moléculas apresentavam um padrão circular em torno do ponto central da placa.

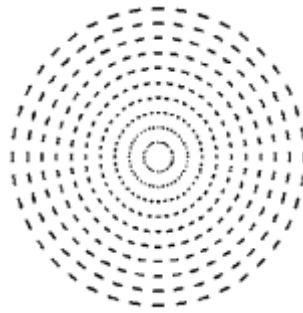


Figura 12 – Geometria de uma q-plate de LC. Os seguimentos de reta representam a orientação do eixo ótico em cada ponto da q-plate. Imagem retirada da referência [1]

Como veremos, uma q-plate tem o funcionamento semelhante à uma placa de onda, ou seja, ela gera uma fase entre duas componentes ortogonais do campo elétrico, sendo essas componentes paralela e ortogonal ao eixo rápido das moléculas de cristal líquido. A diferença está na orientação desse eixo rápido. Para placas de onda convencionais a orientação é homogênea no espaço. No caso das q-plates, devido à organização das moléculas de cristal líquido, a direção do eixo rápido de cada molécula varia com a coordenada azimutal na placa. Com isso, um feixe transversal que atravessa uma q-plate terá sua polarização alterada localmente, gerando diversos tipos de feixes vetoriais.

Nesta dissertação usamos q-plates constituídas de nanopilares de silício amorfo (a-Si). Por si só esse elemento não possui birrefringência, por isso as dimensões e espaçamento entre os pilares foram calculados a fim de gerar o fenômeno de birrefringência de forma [27]. Combinando a birrefringência de forma com a possibilidade de mudar a orientação dos pilares temos uma q-plate com propriedades óticas semelhantes a de uma q-plate de cristal líquido.

<sup>1</sup> Assim, as q-plates são consideradas conversores de modo eletromagnético.

Neste capítulo discutiremos o mecanismo de funcionamento das q-plates. Vamos mostrar como essas placas podem converter momento angular de spin em orbital, tornando-as um conversor Spin-Orbital (SOC) [28]. Evidenciamos que variando o estado de polarização da luz incidente em uma q-plate podemos gerar todos os feixes vetoriais presentes na esfera de Poincaré de ordem superior. Por fim, apresentamos uma forma de gerar a geometria das q-plates (i.e., a orientação dos nano-pilares de a-Si), necessária para a sua fabricação e discutimos o fenômeno de birrefringência de forma.

### 3.1 Ação de uma q-plate

Uma q-plate é constituída de elementos menores que o comprimento de onda da luz. Essa característica é muito importante para que não haja o fenômeno de difração. Uma forma interessante de entender o funcionamento de uma q-plate é imaginar que cada elemento nanométrico (e.g. moléculas de cristal líquido ou pilares de a-Si) que constitui a q-plate age como uma placa de onda rotacionada, possuindo um eixo rápido e um eixo lento.

É conveniente usar o formalismo de Jones para representar a ação de uma placa de onda no estado de polarização de um feixe de luz [18]. Neste caso um elemento ótico capaz de alterar o estado de polarização da luz pode ser representado, matematicamente, por uma matriz  $2 \times 2$  chamada de matriz de Jones que atua no vetor campo elétrico, chamado de vetor de Jones. A matriz de Jones correspondente a uma placa de onda rotacionada por um ângulo  $\alpha$  em relação ao eixo horizontal  $x$  é expressa por

$$\mathbf{J}_{\alpha,\delta} = \mathbf{R}(-\alpha) \cdot \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{R}(\alpha), \quad (3.1)$$

onde  $\mathbf{R}$  é a matriz de rotação dada por

$$\mathbf{R}(\alpha) = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

$\mathbf{J}_0$  é a matriz de Jones de uma placa de onda com o eixo rápido orientado na direção  $x$ , representada por

$$\mathbf{J}_0 = \begin{pmatrix} e^{i\delta_r} & 0 \\ 0 & e^{i\delta_l} \end{pmatrix}, \quad (3.3)$$

sendo  $\delta_r$  e  $\delta_l$  as fases adquiridas pela componente do campo elétrico paralela ao eixo rápido e lento, respectivamente, ao atravessar a placa de onda. Realizando a operação matricial da equação (3.1) obtemos a expressão

$$\mathbf{J}_{\alpha,\delta} = \begin{pmatrix} e^{i\delta_r} \cos^2(\alpha) + e^{i\delta_l} \sin^2(\alpha) & (e^{i\delta_r} - e^{i\delta_l}) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ (e^{i\delta_r} - e^{i\delta_l}) \sin(\alpha) \cos(\alpha) & e^{i\delta_r} \sin^2(\alpha) + e^{i\delta_l} \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.4)$$



No Apêndice B mostramos como, partindo da equação acima, podemos chegar na seguinte expressão para a matriz de Jones de uma placa de onda

$$\mathbf{J}_{\alpha,\delta} = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \sin(2\alpha) \\ \sin(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Essa equação representa uma placa de onda que gera uma fase  $\delta = \delta_l - \delta_r$  entre as componentes do campo elétrico paralelas ao eixo rápido e lento da placa. Como exemplo, usando  $\delta = \pi$  e  $\alpha = \frac{\pi}{4}$  teremos a matriz de Jones de uma placa de meia onda com seu eixo rápido a  $45^\circ$ . Substituindo esses valores na equação (3.5) ficamos com

$$\mathbf{J}_{\pi,\pi/4} = -i \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.6)$$

Uma placa de meia onda consegue transformar um feixe com polarização horizontal em vertical. A representação do vetor campo elétrico no formalismo de Jones é dado por uma matriz de dimensão  $2 \times 1$  (vetor coluna). Assim, aplicando a matriz da equação (3.6) em um feixe polarizado horizontalmente, resulta em

$$\mathbf{J}_{\pi,\pi/4} \cdot \mathbf{E}(r) = -iE_0(r) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -iE_0(r) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (3.7)$$

onde  $E_0(r)$  é amplitude do campo elétrico. Podemos notar que o estado de polarização foi transformado de horizontal para vertical, como esperado.

Tendo disponível a matriz de Jones que representa uma placa de onda, podemos estender o conceito e encontrar a matriz que represente uma placa de onda cuja orientação do eixo rápido varia com a posição. Isso é facilmente alcançado fazendo o ângulo  $\alpha$  ser uma função das coordenadas transversais  $xy$ . Assim, a matriz de Jones desse tipo de placa é

$$\mathbf{J} = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos 2\alpha(x, y) & \sin 2\alpha(x, y) \\ \sin 2\alpha(x, y) & -\cos 2\alpha(x, y) \end{pmatrix}. \quad (3.8)$$

Para as q-plates, a função  $\alpha$ , que nos informa a orientação do eixo rápido em cada ponto da placa, depende apenas da coordenada azimutal do ponto, sendo definida por

$$\alpha(\phi) = q\phi, \quad (3.9)$$

onde  $q$  é uma constante e  $\phi = \arctan(y/x)$ . Q-plates tem esse nome devido à constante  $q$ , também chamada de carga topológica, que representa a quantidade de voltas dadas pelo eixo rápido ao circular o ponto central da placa [29]. Alguns autores acrescentam uma constante  $\alpha_0$  à equação (3.9). Tal constante representa a orientação do eixo rápido na coordenada  $\phi = 0$  da placa. Essa mudança de orientação não interfere no estado de polarização ou espacial da luz. Por esse motivo, consideramos  $\alpha_0$  nulo sem perda de

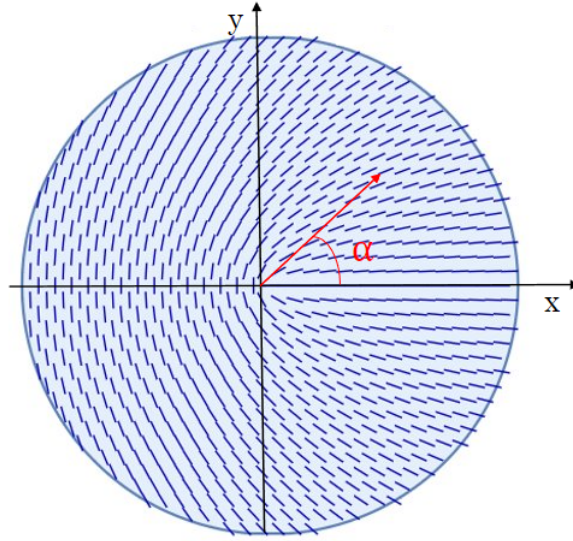


Figura 13 – Orientação do eixo rápido em cada ponto de uma q-plate de  $q = 1/2$ . O vetor em vermelho liga o centro da placa a um ponto qualquer. Como se trata de uma placa com  $q = 1/2$  a orientação do eixo rápido é dada pelo ângulo  $\alpha = \frac{\phi}{2}$  formado entre o vetor e o eixo  $x$  como representado pela equação (3.9).

generalidade. Na figura 13 podemos ver como a orientação do eixo rápido varia com posição em uma q-plate de  $q = 1/2$ .

Substituindo a equação (3.9) em (3.8), obtemos

$$\mathbf{J} = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(2q\phi) & \sin(2q\phi) \\ \sin(2q\phi) & -\cos(2q\phi) \end{pmatrix}. \quad (3.10)$$

Portanto, se quisermos descobrir como a q-plate modifica o estado de polarização e, como veremos, modifica o perfil espacial da luz (modo transversal), devemos aplicar a matriz acima ao campo elétrico em cada ponto do plano transversal da q-plate.

## 3.2 Feixes com momento angular orbital

Quando estudamos os modos transversais Laguerre-Gaussianos, vimos que um feixe que possui uma fase do tipo  $e^{il\phi}$  tem sua frente de onda em formato de vórtices. Esse tipo de fase não homogênea é característica de feixes que possuem momento angular orbital, com valor proporcional ao número  $l$ . Nesta seção mostraremos que as q-plates podem gerar, a partir de ondas planas, feixes com a frente de onda helicoidais, possuindo momento angular orbital proporcional ao valor da constante  $q$ .

Começamos estudando o efeito de uma q-plate em uma onda plana com polarização circular. Como vimos no capítulo anterior, as componentes transversais  $E_x$  e  $E_y$  do campo elétrico devem ter a mesma amplitude, porém com uma fase de  $\pm\pi/2$  entre elas. Nesse

caso, o vetor de Jones da luz incidente na placa é dado por

$$\mathbf{E}_{\text{in}} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}, \quad (3.11)$$

onde o sinal de  $\pm$  representa uma luz com polarização circular esquerda ou direita, respectivamente. Assim, o campo emergente da placa é obtido ao aplicarmos a matriz da equação (3.10) no vetor acima. obtendo

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{out}} = E_0 \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} - \\ iE_0 \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(2q\phi) & \text{sen}(2q\phi) \\ \text{sen}(2q\phi) & -\cos(2q\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Realizando as operações matriciais, ficamos com<sup>2</sup>

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{\text{out}} = E_0 \left[ \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} - i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(2q\phi) \pm i \text{sen}(2q\phi) \\ \text{sen}(2q\phi) \mp i \cos(2q\phi) \end{pmatrix} \right] \\ = E_0 \left[ \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ \pm i \end{pmatrix} - i \sin\left(\frac{\delta}{2}\right) e^{\pm 2iq\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Na equação acima vemos a superposição de dois vetores, representando estados de polarização distintos, sendo que o primeiro possui a mesma polarização do campo incidente e o segundo a polarização ortogonal. A parte que teve a polarização modificada ganhou uma fase (proveniente do termo  $e^{\pm 2iq\phi}$ ) que depende do ângulo azimutal. Essa fase é a mesma encontrada nos modos Laguerre-Gaussianos estudados no capítulo anterior. Sua presença transforma a frente de onda em helicoidal, possuindo  $l = 2q$  hélices entrelaçadas como representado na figura 3. Além disso, feixes com frente de onda helicoidais possuem momento angular orbital proporcional ao número de hélices.

Se a q-plate for feita para gerar uma diferença de fase de  $\delta = \pi$ , a sua matriz de Jones se torna

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \cos(2q\phi) & \text{sen}(2q\phi) \\ \text{sen}(2q\phi) & -\cos(2q\phi) \end{pmatrix}. \quad (3.14)$$

Essa matriz equivale a matriz de Jones de uma placa de meia onda que possui o eixo rápido rotacionado pelo ângulo  $2q\phi$ . Essa é a razão da transformação do estado de polarização na equação (3.13). Com  $\delta = \pi$  o feixe da equação (3.13) é dado por

$$\mathbf{E}_{\text{out}} = E_0 e^{\pm 2iq\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ \mp i \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Podemos ver que todo o feixe teve seu estado de polarização invertido e seu perfil de fase transformado em helicoidal. Isso ocorre pois o termo múltiplo da matriz identidade some

<sup>2</sup> Usamos a identidade de Euler  $e^{\pm i\theta} = \cos \theta \pm i \text{sen} \theta$ .

da equação (3.10). Por causa da total transformação do feixe, vamos nos referir às q-plates capazes de gerar uma fase  $\delta = \pi$  como q-plates otimizadas.

Em 1936 R. Beth [30], seguindo o trabalho de Poynting [31], mostrou experimentalmente, que ondas eletromagnéticas possuem momento angular de spin (SAM) associado ao estado de polarização circular. O valor desse momento angular é  $\pm\hbar$  por fóton, sendo que o sinal é determinado pela direção da polarização (positivo para polarização circular esquerda e negativo para direita). Ao incidirmos uma onda plana com polarização circular, ou seja, que possui SAM, em uma q-plate com  $\delta = \pi$  o feixe ganha momento angular orbital (OAM) de  $\pm 2q\hbar$  por fóton. Dessa forma, as q-plates são chamadas de conversores de momento angular spin-orbital (SOC) [32]. O momento angular orbital do feixe, após passar pela q-plate, é acoplado ao momento angular de spin do feixe incidente, já que ao mudarmos a direção da polarização circular incidente (mudando, assim, o sinal do SAM) mudamos a direção das hélices do feixe resultante.

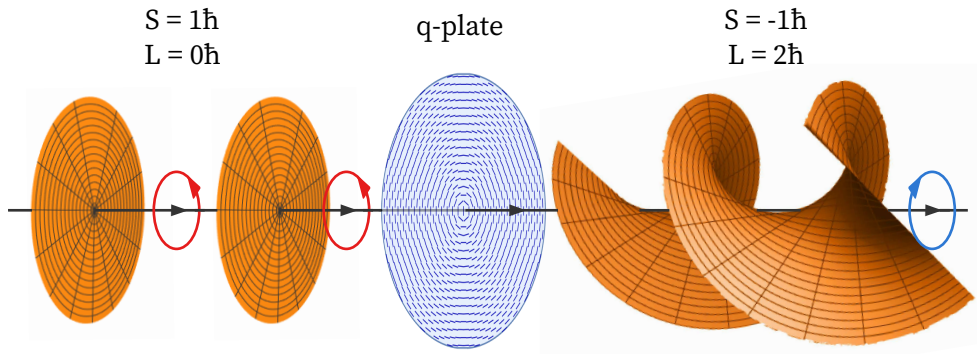


Figura 14 – Esquema representando a ação de uma q-plate de  $q = 1$  como conversor spin-orbital. Uma onda plana de polarização circular esquerda é transformada em um feixe helicoidal com  $L=2\hbar$  e polarização circular direita. A transformação conserva o momento angular total da luz ( $\Delta J = 0$ ).

Um exemplo interessante dessa conversão de spin-orbital acontece quando incidimos um feixe com polarização circular esquerda em uma q-plate de  $q = 1$  e  $\delta = \pi$ . O resultado dessa transformação é dado por

$$\mathbf{E}_{in} = E_0 \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \xrightarrow[q=1]{q\text{-plate}} \mathbf{E}_{out} = E_0 e^{i2\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

A figura 14 ilustra o que ocorre com a frente de onda e o estado de polarização ao realizarmos a transformação representada pela equação acima. Inicialmente o feixe possui apenas momento angular de spin no valor de  $S_{in} = \hbar$  por fóton. Ao atravessar a q-plate a polarização inverte, logo o SAM passa a ser  $S_{out} = -\hbar$  e o feixe adquire momento angular orbital de  $L_{out} = +2\hbar$ . Portanto, a variação do momento angular total da luz, ao passar

pela q-plate, é

$$\begin{aligned}\Delta J &= \Delta S + \Delta L = (S_{out} - S_{in}) + (L_{out} - L_{in}) \\ &= (-1 - 1)\hbar + (2 - 0)\hbar \\ &= 0.\end{aligned}\tag{3.17}$$

Esse resultado significa que o momento angular do feixe é conservado, ou seja, não há transferência de momento para a placa. O momento angular de spin que diminui ( $\Delta S$  é negativo) na transformação da polarização é convertido em momento angular orbital. Para placas com  $q \neq 1$  sempre haverá transferência de momento entre a luz e a placa, logo, não havendo conservação do momento angular da luz.

Até então, consideramos que uma onda plana incidia na placa. Uma visão mais realística seria se considerarmos um feixe Gaussiano. Lembrando que o modo Laguerre-Gaussiano de ordem 0 (i.e., índices  $p$  e  $l$  nulos) corresponde ao modo Gaussiano. Logo, podemos representar um feixe Gaussiano circularmente polarizado à esquerda, como sendo

$$\mathbf{E}_{in} = LG_{00}(\rho, z) \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix},\tag{3.18}$$

onde  $LG_{00}$  é o modo Laguerre-Gaussiano de ordem zero dado na equação (2.21). Ao atravessar uma q-plate otimizada (i.e.,  $\delta = \pi$ ), o campo convertido é

$$\mathbf{E}_{out} = U(\rho)e^{2iq\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix},\tag{3.19}$$

onde foi considerado  $z = 0$  no plano da placa. A função  $U(\rho)e^{2iq\phi}$  representa o perfil espacial do feixe logo após ele atravessar a placa. Embora não saibamos a forma da função  $U(\rho)$  podemos expandir o perfil espacial do feixe em modos Laguerre-Gaussianos. Ou seja, fazendo

$$U(\rho)e^{2iq\phi} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} C_{lp} LG_{lp}.\tag{3.20}$$

Os coeficientes dessa expansão são dados por

$$C_{lp} = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} U(\rho)e^{i2q\phi} LG_{lp}^*(\rho, \phi) \rho d\rho d\phi.\tag{3.21}$$

Voltando na equação (2.21) o modo  $LG_{lp}$  é dado por

$$LG_{lp}^*(\rho, \phi) = \frac{a_{lp}}{w_0} \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{w_0} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2\rho^2}{w_0^2} \right) \exp\left(-\frac{\rho^2}{w_0^2}\right) e^{-il\phi},\tag{3.22}$$

sendo a constante

$$a_{lp} = \sqrt{\frac{2p!}{\pi(|l| + p)!}}.\tag{3.23}$$

Substituindo a equação (3.22) na equação (3.21) e realizando a integração em  $\phi$ , chegamos no seguinte resultado para os coeficientes da expansão

$$C_{lp} = \delta_{l,2q} \int_0^\infty U(\rho) \frac{a_{pl}}{w_0} \left( \frac{\sqrt{2}\rho}{w_0} \right)^{|l|} L_p^{|l|} \left( \frac{2\rho^2}{w_0^2} \right) \exp \left( -\frac{\rho^2}{w_0^2} \right) \rho d\rho. \quad (3.24)$$

Nesta análise, não temos acesso ao resultado da integral em  $\rho$ , já que não conhecemos a forma da função  $U(\rho)$ . Contudo, sabemos que o mesmo é apenas uma constante que depende de  $l$  e  $p$ . Assim, chamando o valor dessa integral de  $c_{lp}$  o perfil transversal do feixe, logo após a q-plate, pode ser representado por

$$\mathbf{E}_{out} = \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{l=-\infty}^{\infty} \delta_{l,2q} c_{lp} LG_{lp}(\rho, \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} = \sum_{p=0}^{\infty} c_{2qp} LG_{2qp}(\rho, \phi) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}. \quad (3.25)$$

Portanto, o perfil espacial do feixe consiste em uma superposição de modos Laguerre-Gaussianos de mesmo índice azimutal  $l = 2q$  e diferentes valores do índice radial  $p$ .

### 3.3 Geração de feixes vetoriais

Vimos que uma q-plate otimizada (para gerar uma fase  $\delta = \pi$ ) consegue converter momento angular de spin em orbital. Para isso, consideramos um feixe incidente com polarização circular. Nesta seção mostraremos que ao incidir luz com polarização diferente da circular, ou seja, linear ou elíptica em uma q-plate o estado de polarização do feixe se torna não homogêneo. Conseguimos, assim, produzir feixes vetoriais usando apenas uma q-plate.

Usando o cálculo de Jones, o vetor que representa um feixe com o estado de polarização horizontal é  $\mathbf{E}_{in} = [1, 0]$ . Utilizando a matriz de Jones de uma q-plate otimizada (veja a equação (3.14)), ficamos com

$$\mathbf{E}_{out} = \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_{in} = \begin{pmatrix} \cos(2q\phi) & \sin(2q\phi) \\ \sin(2q\phi) & -\cos(2q\phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(2q\phi) \\ \sin(2q\phi) \end{pmatrix}. \quad (3.26)$$

O feixe que sai da placa não mais apresenta uma reformulação de sua frente de onda (i.e., não há uma fase dependente da posição). O estado de polarização é linear, já que as componentes  $x$  e  $y$  do campo estão em fase. Porém, não temos mais um feixe com polarização homogênea. Para cada ponto do perfil transversal do feixe teremos um estado de polarização linear diferente.

Ao fazer  $q = 1/2$  na equação (3.26), o vetor de Jones que representa o estado de polarização que sai da placa é dado por

$$\mathbf{E}_{out} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}. \quad (3.27)$$

Esse vetor representa um feixe com polarização radial. No capítulo anterior, vimos que podemos gerar um feixe radial ao fazer uma superposição de dois modos Laguerre-Gaussianos de índice azimutal  $l = \pm 1$  e polarização circular oposta (equação (2.48)). A q-plate não "enxerga" a polarização de entrada como horizontal, mas sim como uma superposição de polarização circular direita e esquerda (já que  $\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{x}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{R}} + \hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}})$ ). Assim, a placa transforma a parte da luz com polarização circular esquerda (direita) em circular direita (esquerda) com uma fase de  $e^{i\phi}$  ( $e^{-i\phi}$ ). Portanto, na saída da q-plate teremos a superposição de dois feixes helicoidais com polarização circular e hélices invertidas, assim como na equação (2.48).

Na última seção do capítulo anterior apresentamos a esfera de Poincaré de ordem superior (HOPS). Sendo essa uma forma geométrica de representar feixes vetoriais produzidos por superposição de ondas helicoidais (equação (2.50)). Discutimos que uma q-plate consegue produzir tal superposição de feixes com frente de onda helicoidal. Dessa forma, ao mudarmos o estado de polarização da onda eletromagnética que entra na q-plate, mudamos também a superposição dos feixes helicoidais, sendo possível produzir cada feixe vetorial presente na HOPS de ordem  $l = 2q$ . Logo, uma q-plate de  $q = 1/2$  consegue produzir todos os estados presentes na HOPS representada na figura 11 do capítulo anterior. Ao mudarmos a orientação da polarização linear de entrada geramos todos os estados presentes no equador da HOPS. Ao incidirmos polarização circular geramos os estados que se encontram nos polos da esfera. Já os outros pontos são obtidos modulando a amplitude e a fase dos feixes helicoidais presentes na superposição. Para isso, basta incidir um feixe com polarização elíptica.

Assim, além de ser um conversor spin-orbital, a q-plate é um gerador de feixes com polarização não homogênea, capaz de gerar diversos feixes vetoriais com uma simples mudança no estado de polarização de entrada. A figura 15 mostra uma simulação de alguns tipos de feixes vetoriais gerados por três tipos de q-plates ao incidir polarização horizontal, elíptica com eixo maior na vertical e elíptica com eixo maior a  $45^\circ$

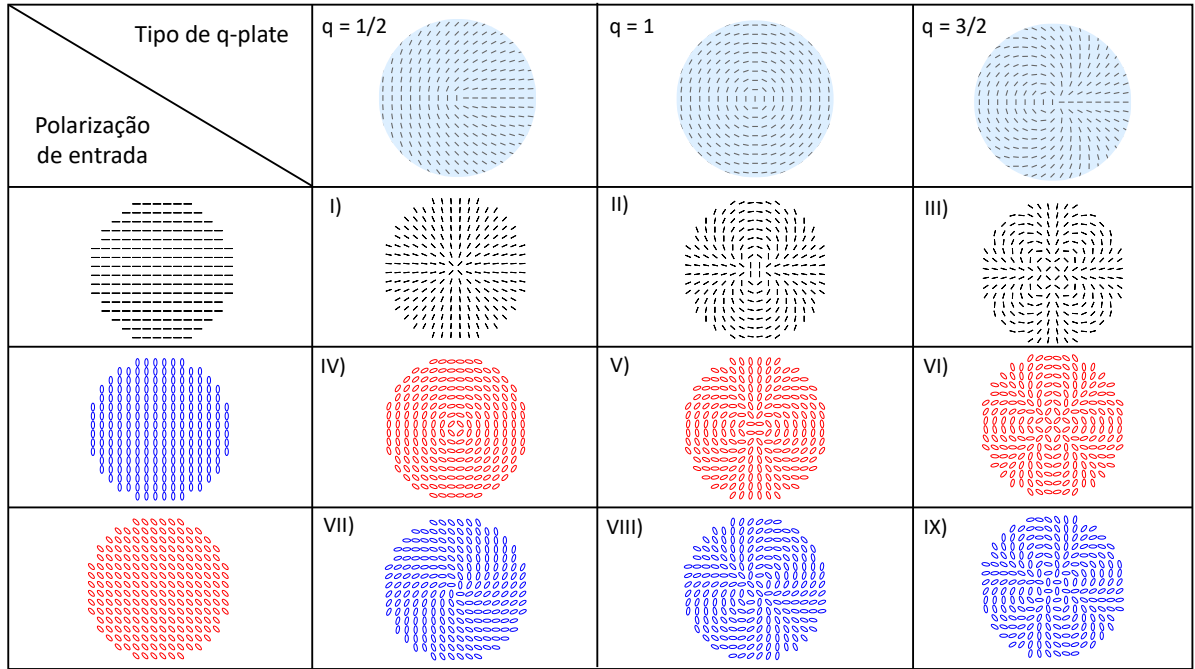


Figura 15 – Simulação de feixes vetoriais gerados por três tipos de q-plate. Os feixes vetoriais de I) - III) foram gerados ao incidir luz horizontalmente polarizada nas q-plates  $q = 1/2$ ,  $q = 1$  e  $q = 3/2$ , respectivamente. De IV) - IX) luz com polarização elíptica. As cores azul e vermelho nas polarizações representam polarização à direita e à esquerda, respectivamente.

### 3.4 Emaranhamento clássico nos feixes vetoriais

Os feixes vetoriais apresentam um estado de polarização não homogêneo em sua seção transversal. Isso gera uma correlação entre a polarização e o perfil espacial do feixe. Se mudarmos o estado de polarização de um feixe vetorial (usando um polarizador), necessariamente, o perfil espacial sofrerá uma alteração e vice-versa. Esse tipo de correlação é bastante conhecido na mecânica quântica e acontece quando temos duas partículas emaranhadas. Por isso, feixes vetoriais são considerados análogos clássicos do emaranhamento quântico [33]. Vale ressaltar que a analogia com o emaranhamento quântico se baseia no fato da não separabilidade entre os graus de liberdade de polarização e modo espacial do feixe. Já características mais fundamentais do emaranhamento como a não localidade não se aplicam na analogia clássica. Na linguagem da mecânica quântica, um estado puro que apresenta dois graus de liberdade emaranhados é aquele em que o vetor de estado do sistema como um todo não pode ser representado na forma separada

$$|\Psi\rangle = |U\rangle \otimes |\hat{e}\rangle, \quad (3.28)$$

onde  $U$  é uma função escalar que representa o perfil espacial do feixe (e.g., modo Laguerre-Gaussiano),  $\hat{e}$  é o vetor que representa o estado de polarização e o símbolo  $\otimes$  representa o produto tensorial. Se um feixe possui polarização homogênea não há correlação entre a polarização e seu perfil espacial, sendo possível representar seu estado na forma da equação



(3.28). Usando como exemplo o feixe dado pela equação (3.16), temos

$$|\Psi\rangle = |U\rangle \otimes |\hat{\mathbf{e}}\rangle = |E_0 e^{2i\phi}\rangle \otimes |\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{R}}\rangle. \quad (3.29)$$

Logo, esse feixe, que é helicoidal, possui o perfil espacial e o estado de polarização separáveis, ou, como vamos nos referir, não emaranhados. Só conseguimos representar esse feixe na forma da equação (3.28) pois sua polarização é homogênea (i.e., mesma polarização para todos os pontos em sua seção transversal). Já o estado do feixe dado pela equação (3.27) (feixe radial), em notação de Dirac, pode ser escrito como

$$|\Psi\rangle_{rad} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\cos\phi\rangle |\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{H}}\rangle + |\sin\phi\rangle |\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{V}}\rangle), \quad (3.30)$$

onde omitimos o símbolo  $\otimes$  entre os kets por simplicidade. Os kets  $|\cos\phi\rangle$  e  $|\sin\phi\rangle$  representam o perfil transversal do feixe, cujas amplitudes são proporcionais as funções  $\cos\phi$  e  $\sin\phi$ , respectivamente. Esse estado não pode ser escrito como um produto tensorial entre um ket que representa o perfil espacial e um outro que represente o estado de polarização. Logo, esse feixe se encontra em um estado emaranhado. Ao medir o estado de polarização de um fóton representado por esse estado descobrimos, instantaneamente, seu perfil transversal (e.g., proporcional a  $\cos\phi$  para polarização horizontal) ou ao, medir a posição do fóton em seu perfil transversal adquirimos informação de sua polarização (e.g., para  $\phi = \pi/2$  a polarização será vertical). Reescrevendo o estado acima usando a base de polarização circular, temos

$$|\Psi\rangle_{rad} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e^{i\phi}\rangle |\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{R}}\rangle + |e^{-i\phi}\rangle |\hat{\mathbf{e}}_{\mathbf{L}}\rangle), \quad (3.31)$$

que ilustra a discussão feita no final da seção anterior, sobre a q-plate transformar o feixe com polarização horizontal em uma superposição de feixes helicoidais com índice azimutal invertido e ortogonalmente polarizados.

Devido à não separabilidade dos graus de liberdade de polarização e perfil espacial, todos os feixes vetoriais estão em um estado emaranhado. Porém, o grau de emaranhamento nem sempre é o mesmo. Ou seja, existem tipos de feixes vetoriais que possuem maior correlação entre esses graus de liberdade do que outros. Uma forma de quantificar o grau de emaranhamento de um estado é usando a entropia de emaranhamento [34] (discutida mais adiante). Já que uma q-plate consegue gerar diversos feixes vetoriais (i.e., todos presentes na HOPS de ordem  $l = 2q$ ), é interessante entender qual o grau de emaranhamento de cada um desses feixes.

Podemos representar o vetor de estado de uma onda plana que incide em uma q-plate [35], como

$$|\Psi\rangle_{in} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |R\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |L\rangle, \quad (3.32)$$

onde  $\theta$  e  $\varphi$  são os ângulos polar e azimutal na esfera de Poincaré de polarização e não devem ser confundidos com as coordenadas do perfil espacial do feixe. Após o feixe passar

por uma q-plate otimizada ( $\delta = \pi$ ), o estado é transformado em

$$|\Psi\rangle_{out} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) |e^{-2iq\phi}\rangle |L\rangle + e^{i\varphi} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) |e^{2iq\phi}\rangle |R\rangle. \quad (3.33)$$

A forma como escrevemos o estado de saída do feixe é conhecida como decomposição de Schmidt de um estado emaranhado [36]. Para quantificar o grau de emaranhamento desse estado usaremos a entropia de emaranhamento, definida por [34]

$$E(|\Psi\rangle) = - \sum_{m=1}^2 c_m^2 \log(c_m^2), \quad (3.34)$$

onde a função logarítmica é dada na base 2 e os coeficientes da soma são

$$c_1 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad (3.35)$$

$$c_2 = \sin\left(\frac{\theta}{2}\right). \quad (3.36)$$

Se o estado não for emaranhado não haverá superposição de kets no estado do feixe (i.e., assim como representado na equação (3.29)), isso só ocorrerá se o estado de entrada tiver polarização circular, ou seja, para  $\theta = 0$  ou  $\theta = \pi$ . Para esses dois possíveis casos de estado não emaranhado a entropia de emaranhamento é nula. Para os demais valores de  $\theta$  e  $\varphi$  a entropia aumenta, e seu máximo é igual a um. Os estados com maior grau de emaranhamento são aqueles em que a entropia de emaranhamento é máxima. Ou seja, se  $\theta = \pi/2$ , que corresponde a incidirmos luz linearmente polarizada na q-plate, o feixe de saída se encontra em um estado maximamente emaranhado.

Na figura 16 apresentamos o gráfico da entropia de emaranhamento em função dos ângulos  $\theta$  e  $\varphi$ . Podemos ver que a entropia é zero para  $\theta = 0$  e  $\theta = \pi$ , sendo esses os únicos estados não emaranhados. Ao aumentar o ângulo  $\theta$  a entropia também aumenta atingindo seu valor máximo em  $\theta = \pi/2$ . Logo, incidindo qualquer estado de polarização linear em uma q-plate geramos feixes maximamente emaranhados. Para os demais estados de polarização incidentes o feixe de saída se encontra em um estado parcialmente emaranhado.

Quando incidimos um feixe com polarização linear em uma q-plate otimizada geramos os CVB, que possuem todos os estados de polarização linear em sua seção transversal. Esses, portanto, são os feixes com maior grau de emaranhamento entre todos os feixes vetoriais produzidos pela q-plate. Já os feixes helicoidais, que são produzidos ao incidir luz circularmente polarizada, não estão em um estado emaranhado, possuindo entropia nula.

A ilustração presente na figura 17 é uma forma de visualizar o grau de emaranhamento de cada feixe vetorial presente na HOPS. Esse gráfico pode ser entendido analisando a esfera de Poincaré de ordem superior e atribuindo a cada ponto de sua superfície o valor da entropia de emaranhamento do feixe vetorial representado por aquele ponto. Em seguida, basta contrair a superfície da esfera até que a distância de cada ponto até o centro

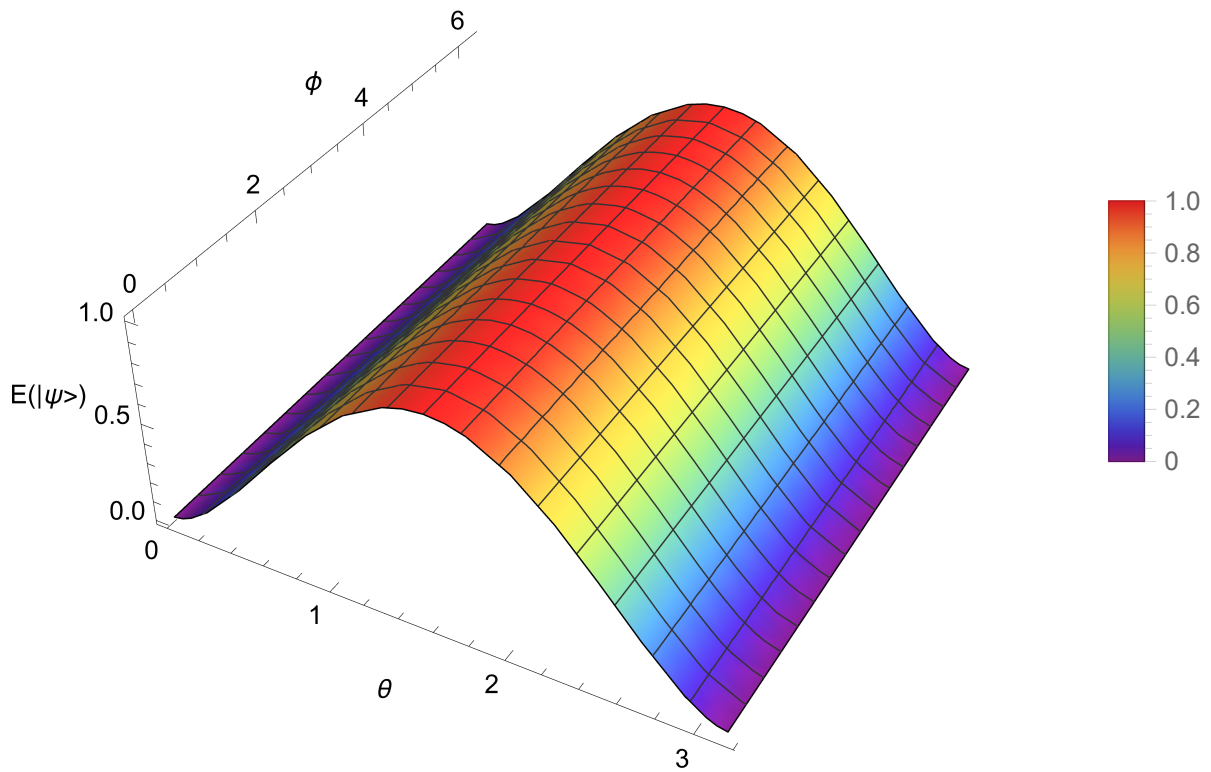


Figura 16 – Gráfico da entropia de emaranhamento que quantifica o grau de emaranhamento dos feixes que atravessam uma q-plate otimizada.

tenha o valor de sua entropia. Como esperado, no equador da HOPS não há contração, já que ali temos os CVBs que são maximamente emaranhados. Afastando do equador a superfície vai contraindo cada vez mais, ou seja, os feixes vetoriais representados por esses pontos são menos emaranhados. Chegando nos polos temos a contração máxima da esfera pois esses pontos representam os feixes helicoidais de polarização circular homogênea.

Não podemos nos esquecer que os estados da equação (3.33) são puramente clássicos, já que o modo espacial e a polarização são propriedades clássicas da luz. Contudo, devido à não separabilidade desses dois graus de liberdade, suas propriedades físicas se assemelham a de estados quânticos emaranhados. Essa similaridade proporciona o uso dos feixes vetoriais em tarefas designadas a estados quânticos como em teleporte [37, 38] e na área de informação quântica [39, 40]

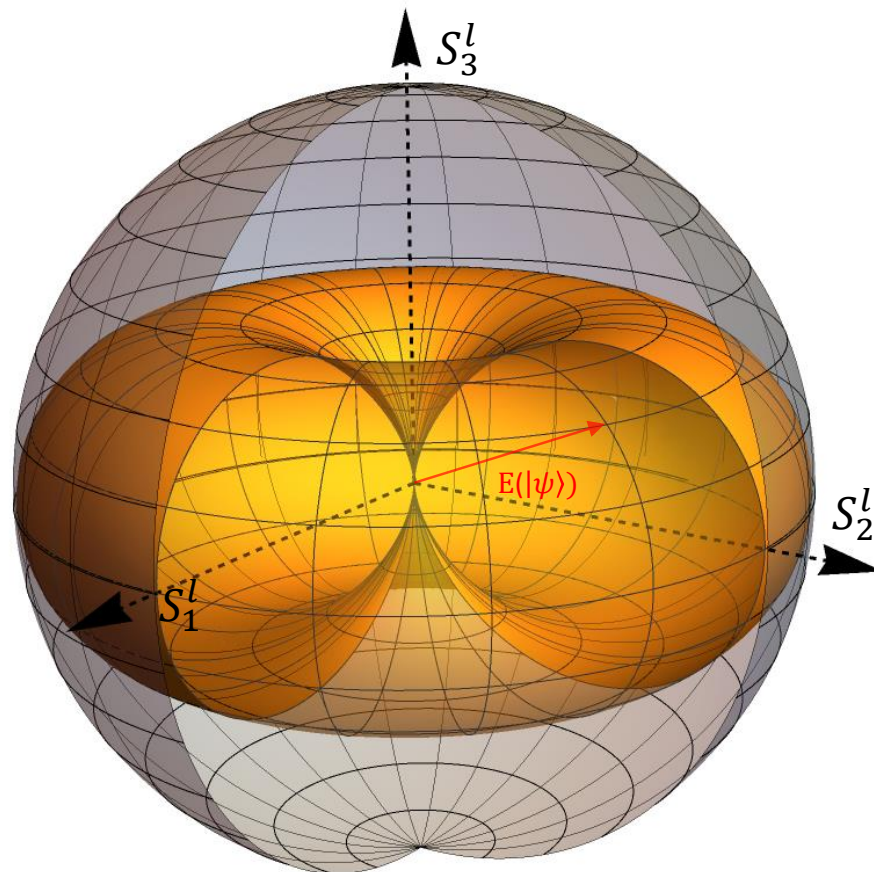


Figura 17 – Representação do grau de emaranhamento de cada feixe vetorial presente na esfera de Poincaré de ordem superior.

### 3.5 Padrão geométrico das q-plates

Até então discutimos a ação teórica das q-plates. Vimos que o eixo rápido dos elementos que constituem a placa devem seguir a regra dada pela equação (3.9). No caso das q-plates que usam as moléculas de cristais líquidos (LC) essa orientação pode ser obtida ao atritar, com movimentos rotatórios, um pedaço de tecido em um substrato de vidro. Dessa forma é possível gerar ranhuras no substrato que servem como acomodação para as moléculas de LC [1]. Outra forma de gerar esses padrões é usando a técnica de foto-alinhamento [41]. Nessa técnica, é usado um laser para gravar os padrões que as moléculas de LC devem ter. Ao incidir o laser em um substrato de vidro revestido por um material foto-sensível são criadas ranhuras no substrato perpendiculares à orientação da polarização do laser. Variando a polarização da luz que chega em cada ponto do substrato, é possível gerar qualquer padrão. Por fim, as moléculas de LC são depositadas nas ranhuras, formando a q-plate.

Nesta dissertação foi usada outro tipo de q-plate. Ao invés de moléculas de cristal líquido usamos nano-pilares de silício amorfo (a-Si), na forma de paralelepípedo sobre um substrato de vidro (SiO<sub>2</sub>). A figura 18a) ilustra um desses nano-pilares que constituem

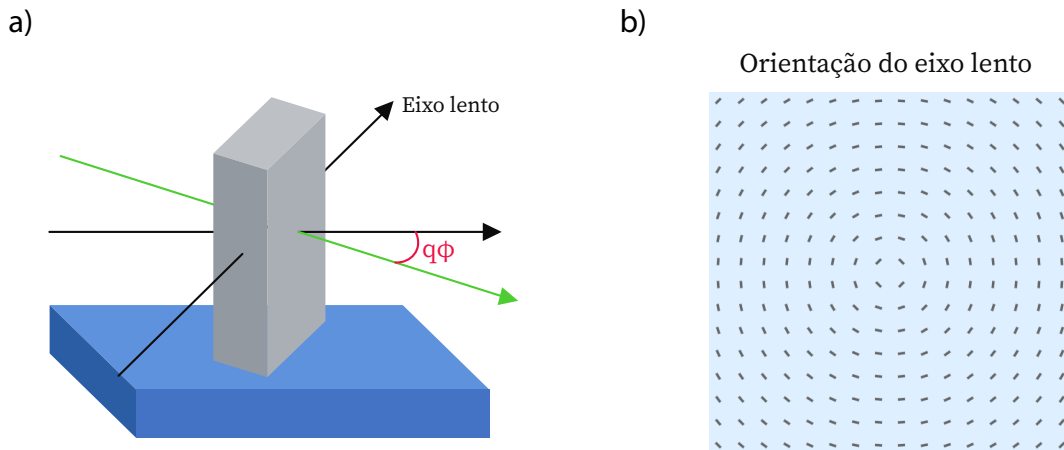


Figura 18 – a) Ilustração de um nano-pilar que compõe a q-plate, sendo  $q\phi$  o ângulo que a face maior do pilar faz com a horizontal. Em b) os seguimentos de reta representam a orientação do eixo lento de uma q-plate de  $q=1$ .

a placa. Diferente das moléculas de LC o a-Si não é um material birrefringente. Porém, alocando os pilares de forma periódica sobre o substrato é possível produzir o fenômeno de birrefringência de forma<sup>3</sup>. A luz polarizada paralela à superfície de cada estrutura experimenta um índice de refração maior do que a luz com polarização perpendicular, gerando uma diferença de fase local entre essas componentes. Logo, a orientação do eixo rápido da placa depende da orientação dos pilares. Na figura 18b) os segmentos de reta representam a orientação, em cada ponto da placa, do eixo lento de uma q-plate de  $q = 1$ . Como o eixo lento é paralelo à face dos pilares (i.e., maior índice de refração), devemos colocar cada pilar nessa mesma orientação.

Para construir a imagem da figura 18b) é necessário saber a orientação de cada pilar. Para isso, seguimos a seguinte estratégia de discretização do espaço, usada tipicamente na área de metamateriais. Primeiramente, consideramos o substrato da placa, ou seja, a sua base, sendo um quadrado de lado  $D$ . Depois, acrescentamos  $n$  pilares igualmente espaçados entre si e todos orientados na vertical. Matematicamente, podemos representar a direção vertical desses pilares com o vetor

$$V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.37)$$

Por fim, devemos orientar cada um desses pilares conforme a equação (3.9) que rege a ordem da q-plate. Considerando a origem do sistema de coordenadas cartesiano no centro da placa e que a posição de cada pilar é representada pela coordenada do seu centro, podemos rotacionar cada pilar aplicando uma operação de rotação no vetor da equação

<sup>3</sup> Discutiremos sobre esse fenômeno na próxima seção.

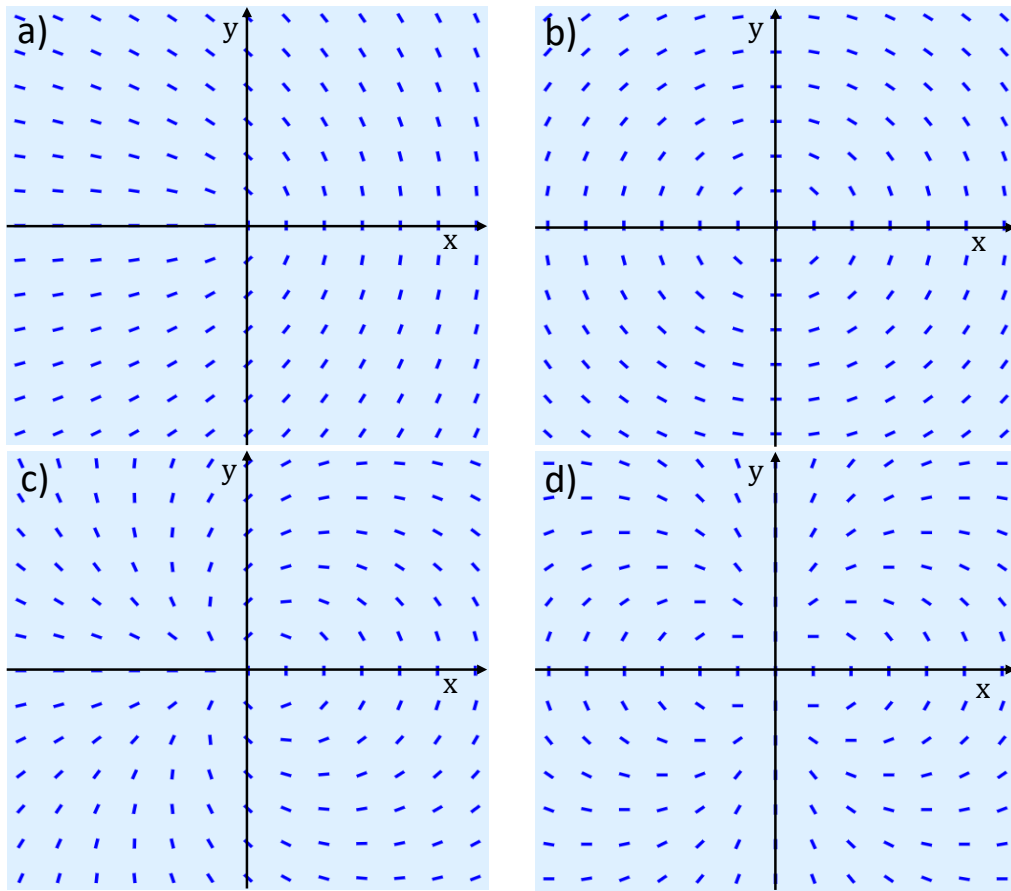


Figura 19 – Orientação dos pilares de a-Si para a formação de q-plates como o parâmetro  $q$  valendo a)  $1/2$ , b)  $1$ , c)  $3/2$  e d)  $2$ .

(3.37), ficando

$$\begin{aligned}\Psi &= \mathbf{R}(q\phi) \cdot V = \begin{pmatrix} \cos q\phi & \text{sen } q\phi \\ -\text{sen } q\phi & \cos q\phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \text{sen } q\phi \\ \cos q\phi \end{pmatrix},\end{aligned}\quad (3.38)$$

sendo  $\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ , em que  $(x, y)$  é a coordenada do centro de cada pilar. O vetor da equação acima é a representação matemática de cada pilar. Assim, um pilar no ponto  $(x, y)$  tem a mesma orientação do vetor  $\Psi$  nesse ponto. A equação (3.38) é muito importante, pois ela foi usada como base para fabricação das placas, como será visto no próximo capítulo.

Na figura 19 usamos a equação (3.38) para representar placas com diferentes valores do parâmetro  $q$ . Lembrando que essa representação tem o objetivo de ilustrar a orientação dos pilares através das linhas tracejadas, sendo que o espaçamento e as dimensões desses foram escolhidos de forma arbitrária.

### 3.6 Birrefringência de forma

Ao incidir uma onda transversal em uma placa de onda convencional uma das componentes do campo elétrico é atrasada em relação à componente ortogonal. Isso acontece pois essas placas são feitas de um cristal birrefringente (e.g. calcita). Cristais birrefringentes possuem anisotropia do índice de refração, portanto, seu valor depende da direção de propagação e da polarização da luz. Os cristais uniaxiais, que são os mais usados em laboratório, apresentam dois índices de refração diferentes e um eixo ótico (i.e., direção em que o índice de refração é igual para qualquer estado de polarização). Quando a luz se propaga por esse tipo de cristal em uma direção arbitrária, mas não paralela ao eixo ótico, a componente do campo elétrico que oscila perpendicularmente ao eixo ótico experimenta um valor de índice de refração chamado de ordinário ( $n_o$ ), já a outra componente do campo experimenta o índice de refração extraordinário ( $n_e$ ). Se  $n_e > n_o$  o cristal é chamado de uniaxial positivo, enquanto se  $n_o > n_e$  o cristal é uniaxial negativo.

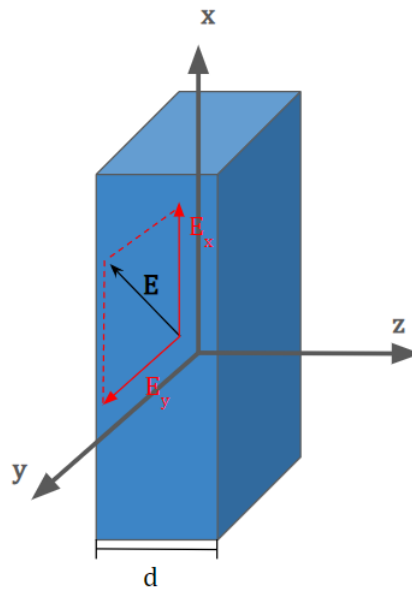


Figura 20 – Ilustração de uma placa de onda uniaxial em que um campo elétrico propaga na direção  $z$ .

Como a velocidade de propagação da luz no cristal depende do índice de refração, e esses são diferentes para cada componente do campo elétrico, a componente do campo que experimenta o maior índice de refração é atrasada em relação à componente ortogonal, que experimenta o índice de refração menor. Esse atraso entre as componentes ortogonais do campo se apresenta na forma de fase. Para calcularmos essa fase, consideramos a placa de onda composta de um material birrefringente uniaxial positivo representada na figura 20. Seu eixo ótico é paralelo à direção  $\hat{y}$  e uma onda plana se propaga na direção  $\hat{z}$ . A velocidade com que as componentes  $x$  e  $y$  do campo elétrico se propagam no meio é

$$v_x = \frac{c}{n_o}, \quad v_y = \frac{c}{n_e}, \quad (3.39)$$

onde  $c$  é a velocidade da luz no vácuo. O tempo com que cada componente leva para atravessar a placa de espessura  $d$  é dado por

$$t_x = \frac{d}{v_x} = \frac{n_o d}{c}, \quad t_y = \frac{d}{v_y} = \frac{n_e d}{c}. \quad (3.40)$$

O vetor campo elétrico que incide na placa pode ser representado, em sua forma complexa, como

$$\mathbf{E}(z, t) = E_{0x} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{x}} + E_{0y} e^{i(kz - \omega t)} \hat{\mathbf{y}}, \quad (3.41)$$

sendo  $k = \frac{2\pi}{\lambda}$  o vetor de onda e  $\omega = kc$  a frequência angular da luz. Como  $n_e > n_o$ , a componente  $y$  do campo leva mais tempo para atravessar o cristal, sendo essa diferença de tempo dada por

$$\Delta t = t_y - t_x = \frac{d}{c}(n_e - n_o) = \frac{d\Delta n}{c}. \quad (3.42)$$

Considerando que a onda incide na placa em  $t = 0$ , em  $t = t_y$  (i.e., tempo necessário para que a componente  $y$  atravesse o cristal) o vetor campo elétrico é dado por

$$\mathbf{E}(d, t_y) = E_{0x} e^{i(kd - \omega(t_y + \Delta t))} \hat{\mathbf{x}} + E_{0y} e^{i(kd - \omega t_y)} \hat{\mathbf{y}}. \quad (3.43)$$

Assim, a diferença de fase entre as duas componentes do campo elétrico na saída do cristal é expressa por

$$\varphi = \omega \Delta t = \frac{2\pi d(n_e - n_o)}{\lambda}. \quad (3.44)$$

Logo, um parâmetro determinante para gerar a diferença de fase desejada é a espessura do cristal birrefringente. No caso das q-plates de cristal líquido é possível variar a fase mudando a quantidade de cristal líquido colocado em cima do substrato.

A birrefringência só é possível se existir anisotropia do índice de refração. No caso dos cristais birrefringentes descritos acima, a anisotropia é devida à ligação e ao arranjo das moléculas do cristal. Porém, essa não é a única forma de se obter birrefringência. Ao arranjar de forma padronizada estruturas de dimensões menores que o comprimento de onda da luz é possível criar a anisotropia necessária, e com isso, gerar a chamada birrefringência de forma.

Considere a geometria representada na figura 21. Temos um arranjo periódico de nano-pilares na forma de paralelepípedo com espessura  $t_1$  e altura  $h$ , igualmente espaçados por uma distância  $t_2$ ;  $\epsilon_1$  e  $\epsilon_2$  são as constantes dielétricas dos pilares e do meio em que eles estão imersos, respectivamente. Veremos o que acontece quando uma onda plana monocromática incide nessa estrutura.

Primeiramente supomos que o vetor campo elétrico da luz está orientado perpendicularmente às faces dos pilares e que a área das faces é grande em comparação com  $t_1$  e  $t_2$ . Com isso, o campo elétrico entre as placas deve ser uniforme. Como os pilares e o meio ao redor são constituídos de elementos diferentes (i.e.,  $\epsilon_1 \neq \epsilon_2$ ), na face do pilar a componente



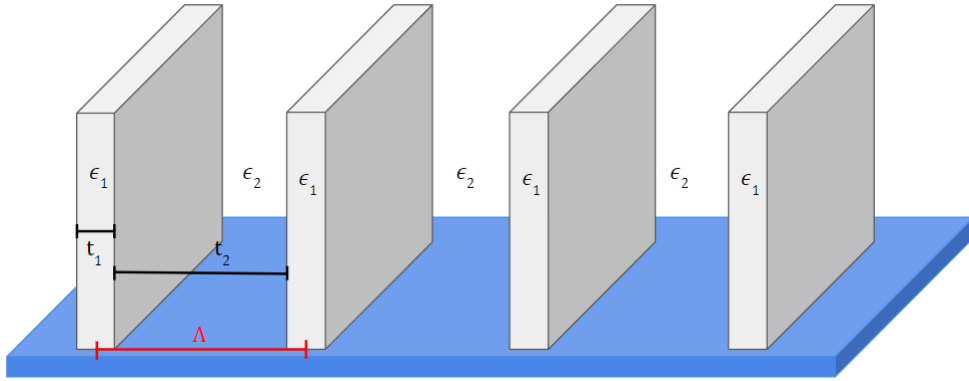


Figura 21 – Representação de uma estrutura periódica formada por paralelepípedos de permissividade elétrica  $\epsilon_1$ .  $\Lambda$  representa o período espacial da estrutura,  $t_1$  a largura da placa,  $\epsilon_2$  e  $t_2$  a permissividade do meio entre as placas e a sua largura, respectivamente.

normal do vetor deslocamento elétrico deve ser contínua<sup>4</sup> (i.e.,  $\mathbf{D}_1 = \mathbf{D}_2 = \mathbf{D}$ ). Logo o vetor campo elétrico em cada região é dado por

$$\mathbf{E}_1 = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_1} \quad \text{e} \quad \mathbf{E}_2 = \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_2}. \quad (3.45)$$

Como a estrutura é periódica, é possível calcular a média do campo elétrico sobre todo o volume da estrutura, sendo esse dada por [27]

$$\mathbf{E} = \frac{t_1 \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_1} + t_2 \frac{\mathbf{D}}{\epsilon_2}}{t_1 + t_2}. \quad (3.46)$$

Portanto, a constante dielétrica efetiva da estrutura é

$$\epsilon_{\perp} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}} = \frac{(t_1 + t_2)\epsilon_1\epsilon_2}{t_1\epsilon_2 + t_2\epsilon_1}. \quad (3.47)$$

A fração do volume total da estrutura periódica ocupada pelos pilares é chamada de fator de preenchimento e é expressa por

$$f = \frac{t_1}{t_2 + t_1} = \frac{t_1}{\Lambda}, \quad (3.48)$$

sendo  $\Lambda = t_1 + t_2$  o período espacial que representa o espaçamento em que a parte contendo o pilar (meio 1) e ar (meio 2) se repete. Já a fração do volume ocupada pelo meio 2 é  $(1 - f)$ . Assim, podemos reescrever a equação (3.47) usando o fator de preenchimento

$$\epsilon_{\perp} = \frac{\epsilon_1\epsilon_2}{f\epsilon_2 + (1 - f)\epsilon_1}. \quad (3.49)$$

Supondo que a luz incidente tenha o vetor campo elétrico paralelo às faces dos pilares, o vetor campo elétrico deve ser contínuo ao passar de um meio para o outro<sup>5</sup>. Logo,  $\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_2 = \mathbf{E}$  e os vetores deslocamento elétrico nas duas regiões são

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_1\mathbf{E} \quad \text{e} \quad \mathbf{D}_2 = \epsilon_2\mathbf{E}. \quad (3.50)$$

<sup>4</sup> Devido a Lei de Gauss:  $\nabla \cdot \mathbf{D} = 0$ .

<sup>5</sup> Devido a Lei de Faraday:  $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ .

A média do deslocamento elétrico é

$$\mathbf{D} = \frac{t_1\epsilon_1\mathbf{E} + t_2\epsilon_2\mathbf{E}}{t_1 + t_2}. \quad (3.51)$$

E a constante dielétrica efetiva da estrutura pode ser expressa por

$$\epsilon_{\parallel} = \frac{\mathbf{D}}{\mathbf{E}} = \frac{\epsilon_1 t_1 + \epsilon_2 t_2}{t_1 + t_2} = f\epsilon_1 + (1 - f)\epsilon_2. \quad (3.52)$$

Essa estrutura se comporta de forma análoga a um cristal birrefringente uniaxial, pois dependendo da polarização da luz teremos duas constantes dielétricas efetivas diferentes. Tais constantes se relacionam com os índices de refração da seguinte forma [42]

$$n_{\perp} = \sqrt{\epsilon_{\perp}} \quad \text{e} \quad n_{\parallel} = \sqrt{\epsilon_{\parallel}}. \quad (3.53)$$

O eixo ótico da estrutura é ortogonal às faces maiores dos pilares (i.e., um feixe propagando nessa direção experimenta um único índice de refração independente da polarização). Logo, as constantes dielétricas paralela e ortogonal podem ser relacionadas com os índices de refração ordinário e extraordinário, respectivamente. Usando as equações (3.47) e (3.52), podemos expressar os índices de refração ordinário e extraordinário como

$$n_o^2 = fn_1^2 + (1 - f)n_2^2, \quad (3.54a)$$

$$n_e^2 = \frac{n_1^2 n_2^2}{fn_2^2 + (1 - f)n_1^2}. \quad (3.54b)$$

Assim, como ocorre nos cristais birrefringentes, essa estrutura periódica consegue gerar uma fase entre as componentes perpendicular e paralela às faces dos pilares. Quando a luz incide na direção perpendicular ao eixo ótico, temos a maior birrefringência [43] e a fase gerada entre as componentes é dada pela equação (3.44), ou seja,

$$\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} h(n_e - n_o). \quad (3.55)$$

Para que não haja difração da luz pelas estruturas, o período espacial não pode ultrapassar um certo comprimento. Em [44] a autora demonstra que para extinguir ordens de difração propagantes (tornando-as evanescentes), para esse tipo de estrutura, o período espacial máximo deve respeitar a seguinte equação

$$\Lambda_{max} = \frac{\lambda}{n_1}, \quad (3.56)$$

sendo  $n_1$  e  $\lambda$  o índice de refração dos pilares e o comprimento de onda da luz, respectivamente.

Como já discutido, as q-plates estudadas nesta dissertação são formadas de pilares de dimensões menores que o comprimento de onda da luz e alocados de forma periódica.

São justamente essas duas condições as necessárias para que haja a birrefringência de forma. Na seção anterior desenvolvemos uma equação que nos informa qual deve ser a orientação de cada nano-pilar (i.e., equação (3.38)). Agora, com as equações (3.55), (3.54) e (3.56) em mãos podemos descobrir os parâmetros espaciais dos pilares para que possamos gerar a fase desejada.

Analisando a figura 19, podemos pensar que a fase gerada pela placa, dada pela equação (3.55), é gerada por cada pilar (i.e., representados pelos seguimentos de reta na figura), mas não é isso que acontece. A birrefringência ocorre devido à periodicidade dos pilares, e é essa periodicidade que gera a anisotropia do índice de refração na placa. No próximo capítulo discutiremos o processo de fabricação das q-plates e mostraremos como a periodicidade é implantada na placa.

## 4 Fabricação e caracterização das q-plates

Neste capítulo vamos apresentar o processo de fabricação das q-plates. Foram produzidos três tipos de placas, sendo essas de  $q = 1/2$ ,  $q = 1$  e  $q = 3/2$  fabricadas através do processo de litografia por feixes de elétrons. Todas as placas foram produzidas no intuito de gerar uma q-plate otimizada, para que a birrefringência de forma da placa gere  $\delta = \pi$ . Para isso, tivemos que levar em consideração qual o comprimento de onda será utilizado, o material dos pilares e suas dimensões. Definindo o comprimento de onda e escolhendo o material base, os outros parâmetros podem ser obtidos através das equações desenvolvidas na seção 3.6 do capítulo anterior.

Além disso, vamos apresentar o processo de caracterização das q-plates produzidas. Esse processo envolve a geração de feixes com frente de ondas helicoidais e diferentes feixes vetoriais. A estrutura helicoidal dos feixes será analisada por meio de interferometria, enquanto os feixes vetoriais gerados serão analisados usando polarizadores. Em ambos os casos o perfil de intensidade nos informará se as q-plates produzidas, de fato, funcionam.

### 4.1 Fabricação

O processo de fabricação de uma q-plate apresenta diversas etapas sequenciais, sendo necessário o uso de diferentes técnicas e equipamentos avançados. Todo o processo de fabricação foi realizado no centro de fabricação NANOLAB, localizado na Universidade Técnica da Dinamarca (DTU) e será abordado brevemente.

A primeira etapa da fabricação consiste na escolha do material que servirá de base para os pilares. Na ocasião foi escolhido um wafer de dióxido de silício ( $\text{SiO}_2$ ), por ser acessível e ter alta transmitância. O wafer sofre um processo de descontaminação chamado de RCA *clean*, com o intuito de remover compostos orgânicos, óxidos e íons. Após a limpeza é depositado sobre o wafer uma camada homogênea de silício amorfo (a-Si), através do processo de *Low Pressure Chemical Vapor Deposition* (LPCVD). Devido as características da deposição pelo método LPCVD os dois lados do wafer recebem a camada de a-Si porém, mais adiante, a camada presente na parte de baixo do wafer será removida. O a-Si possui um índice de refração bastante elevado e por isso constituirá os pilares da q-plate. Após o processo LPCVD, é depositado uma camada do fotorresiste CSAR sobre o a-Si. Após a aplicação do fotorresiste, usando a técnica de litografia de feixe de elétrons (EBL), é possível bombardear regiões específicas da camada de CSAR; as regiões afetadas apresentam alteração em sua solubilidade e são facilmente retiradas usando um solvente, gerando, no fotorresiste, o padrão desejado. Em seguida, é depositado uma camada de alumínio (Al) sobre superfície. Usando a técnica de *Al lift-off* o fotorresiste é removido

junto com o alumínio depositado sobre ele. As regiões em que o fotorresiste foi retirado deixam o a-Si exposto (sem a camada de alumínio) sendo possível a utilização do processo de *Deep Reactive Ion Etch* para a sua remoção. Com isso, o padrão da q-plate se forma, sendo necessário apenas a remoção do alumínio restante e da camada de a-Si presente embaixo do substrato. As várias etapas do processo de fabricação estão representadas na figura 22.

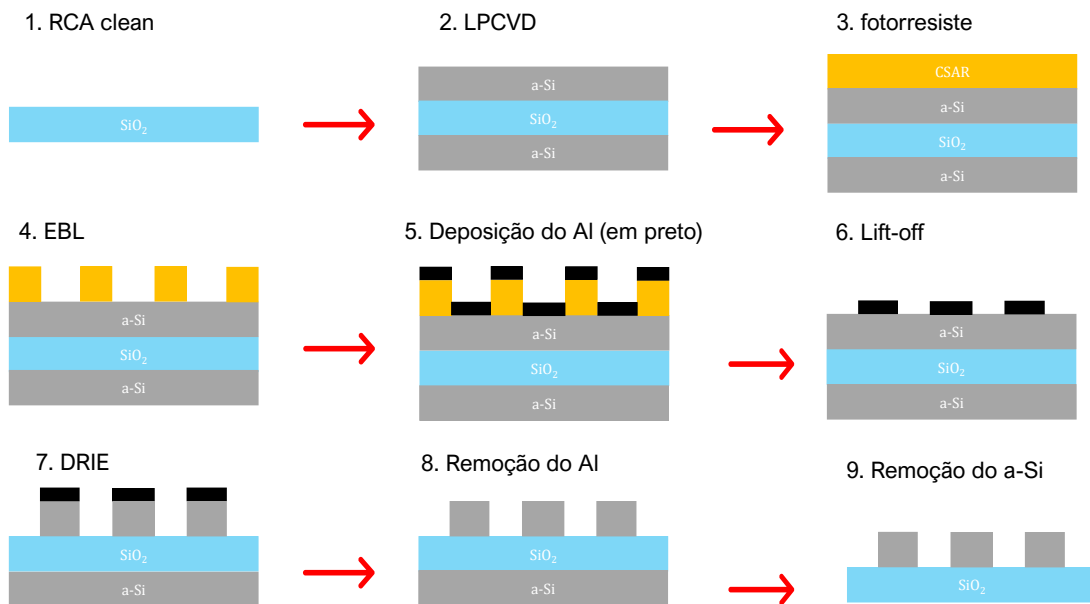


Figura 22 – Esquema ilustrando as principais etapas do processo de fabricação de uma q-plate.

Ao analisarmos o processo de fabricação podemos notar que as regiões do wafer a serem expostas pelo EBL dão origem aos pilares da q-plate. Desta forma, é de grande importância que a máquina de EBL receba as coordenadas corretas dos locais a serem bombardeados. Essas informações são fornecidas através de arquivos digitais chamados de máscaras, que reproduzem as estruturas a serem fabricadas. Na figura 23 mostramos a máscara da q-plate de  $q = 1$ , que servem como um guia para a EBL. Os elétrons só serão incididos nas regiões que apresentam as estruturas retangulares na máscara. O design inicial visava construir as q-plates otimizadas para um comprimento de onda de 632.8 nm. Para esse comprimento de onda o índice de refração dos pilares de a-Si é  $n_1 = 4.6$  o que é bastante elevado. Com isso, o período espacial precisa ser muito pequeno ( $\Lambda = 137$  nm) e, conseqüentemente, o espaçamento entre cada pilar também é reduzido ( $t_2 = 69$  nm)<sup>1</sup>, apresentando uma limitação para a resolução da EBL, ou seja, os elétrons não seriam direcionados para os lugares corretos do wafer. Por isso, resolvemos usar um comprimento de onda maior de 950 nm; para esse comprimento o índice de refração do a-Si é  $n_1 = 4$  e o período espacial aumenta para 237 nm, dentro da resolução da máquina.

<sup>1</sup> Os valores dos parâmetro foram calculados usando as equações da seção 3.6.

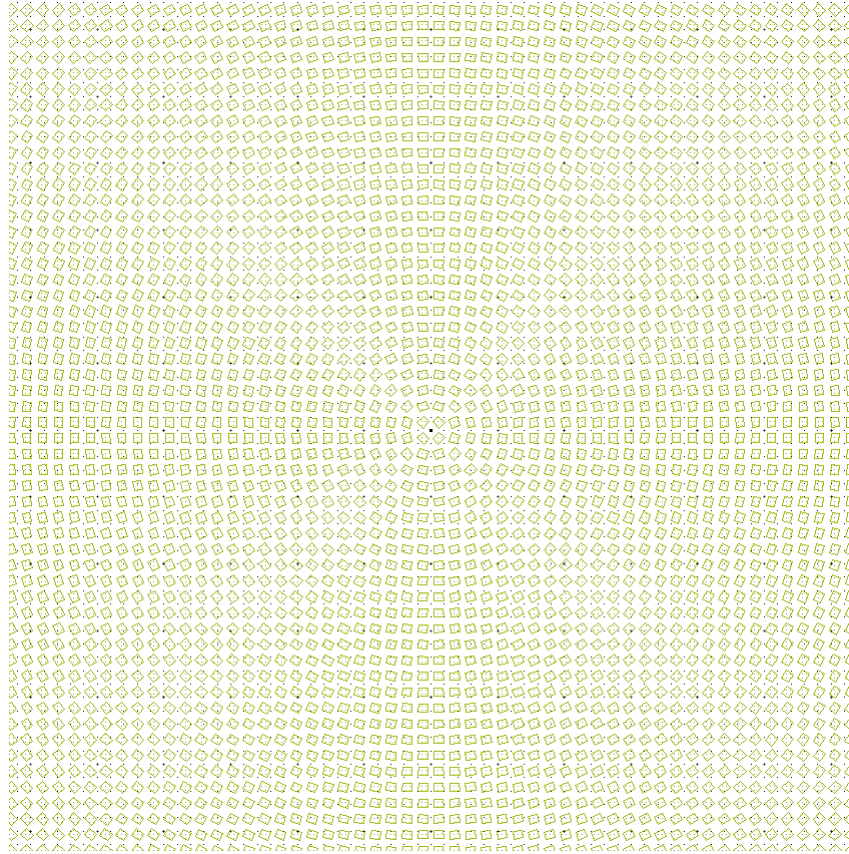


Figura 23 – Máscara utilizada pela maquina de EBL para criar os padrões de uma q-plate de  $q = 1$ .

A etapa de litografia gera os padrões dos pilares (i.e., orientação e dimensões transversais). Já a altura de cada pilar, que é um fator determinante para gerarmos a diferença de fase adequada, é determinada pela quantidade de material depositado no processo de LPCV. Usando a equação (3.55) a espessura adequada para uma fase de  $\pi$ ,  $f = 0,5$  e usando  $\lambda = 950$  nm é de aproximadamente 307 nm.

Para esse estudo foram produzidos quatro chips, sendo que cada chip possui 45 q-plates organizados como uma matriz  $9 \times 5$  (i.e., 15 q-plates de cada tipo). Na figura 24 a) podemos ver um esquema mostrando a organização das q-plates no chip. As estruturas da primeira coluna foram fabricadas inserindo na máquina de EBL as máscaras com as dimensões calculadas para  $\lambda = 950$  nm, já as estruturas da segunda coluna tiveram as dimensões transversais dos pilares encolhidas em 20 nm, as estruturas da terceira coluna tiveram uma redução de 30 nm e assim por diante. A altura dos pilares é de 271 nm para todas as q-plates. A figura 24 b) é uma fotografia de um dos chips contendo as estruturas. Não é possível ver as q-plates da quinta coluna por causa da redução em suas dimensões.

A imagem da figura 25 foi obtida usando um microscópio eletrônico de varredura (SEM). Por se tratar de estruturas nanométricas (i.e., a escala métrica está localizada na parte inferior esquerda da foto) é necessário pegar uma parte pequena da placa para que consigamos visualizar os pilares individualmente. A imagem como um todo abrange

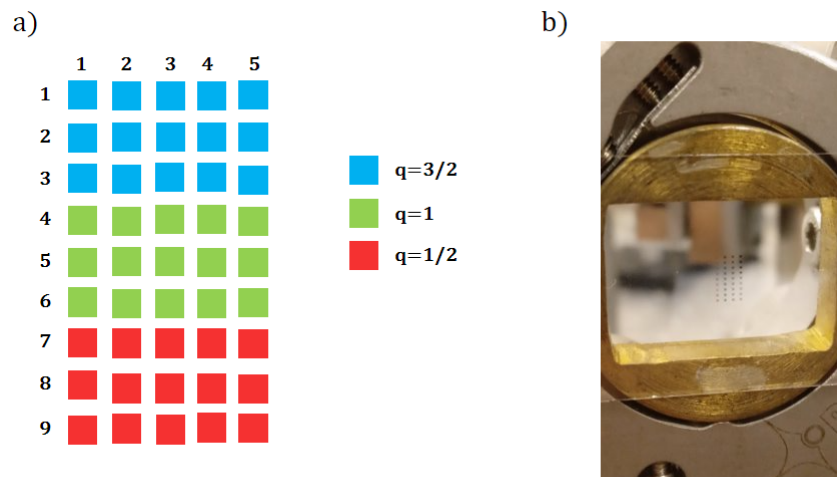


Figura 24 – Representação da organização das 45 q-plates em um chip. b) Fotografia do chip, cada quadrado corresponde a uma q-plate.

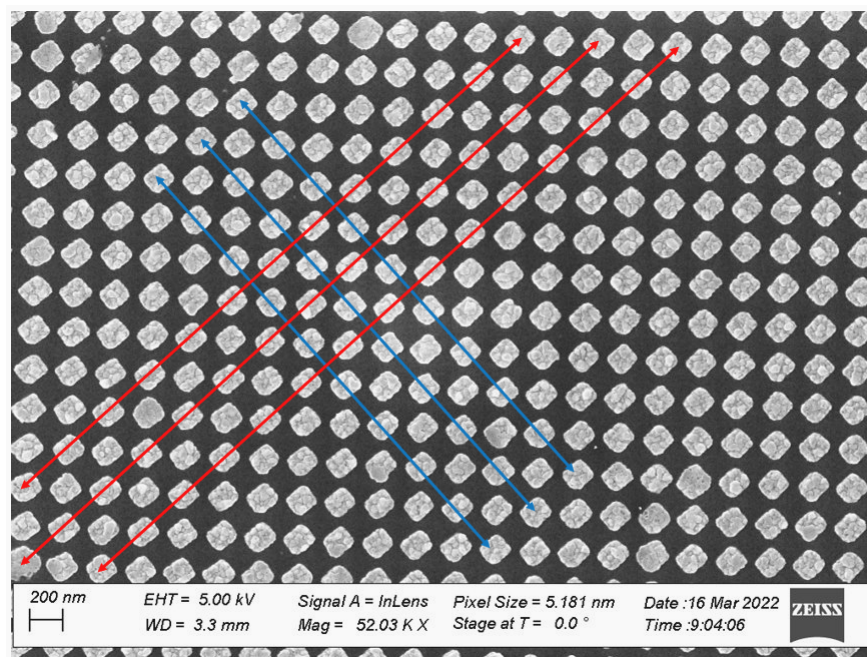


Figura 25 – Fotografia obtida de um microscópio eletrônico de varredura (SEM). As retas vermelhas e azuis representam os eixos lento e rápido locais, respectivamente.

uma região de aproximadamente  $5 \times 5 \mu\text{m}$  sendo que a região ocupada por uma q-plate tem dimensão  $200 \times 200 \mu\text{m}$  dificultando o reconhecimento do padrão da q-plate. Por isso, tentamos facilitar a interpretação da imagem colocando as retas indicando a orientação do eixo rápido e lento local da placa.

A figura 26 apresenta uma imagem ainda mais próxima dos pilares, mostrando as medidas das larguras e do período espacial da estrutura. Vemos que esses dois parâmetros estão de acordo com os valores teóricos. Isso é um bom indício que a q-plate fabricada coincide com a máscara projetada. Nas próximas seções será feita a caracterização experi-



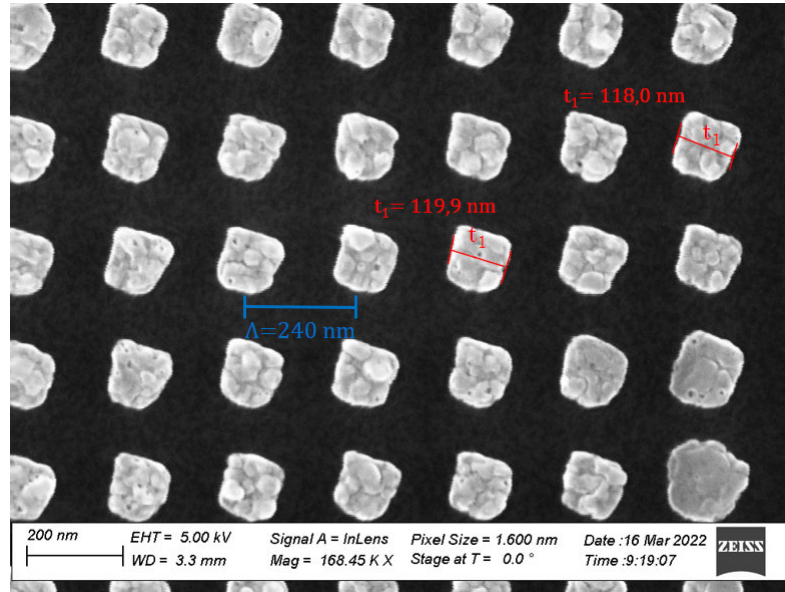


Figura 26 – Imagem de uma q-plate retirada usando um SEM indicando o comprimento  $t_1$  e o período espacial  $\Lambda$  da estrutura.

mental das estruturas visando verificar a geração de feixes com momento angular orbital e feixes vetoriais.

## 4.2 Caracterização das q-plates

O processo de caracterização do dispositivo consiste em testarmos se as q-plates produzidas geram as alterações na luz conforme previsto teoricamente. Para isso, testaremos a capacidade das placas produzirem feixes com frente de onda helicoidal e posteriormente, a geração de feixes com polarização não homogênea.

No capítulo anterior, vimos que ao incidir uma onda plana com polarização circular em uma q-plate, seu estado de polarização é invertido e a frente de onda sofre um remodelamento, se transformando em helicoidal. Com o objetivo de testar se as q-plates produzidas conseguem gerar tal transformação na luz, foi montado o esquema representado na figura 27. O laser, inicialmente, com polarização vertical incide em uma placa de um quarto de onda transformando o estado de polarização em circular direita. Em seguida, o feixe passa por uma lente biconvexa com distância focal de 10 cm que diminui o perfil espacial do feixe para que ele atravessasse apenas uma q-plate do chip. Ao atravessar uma q-plate, parte da luz tem o estado de polarização invertido e adquire uma frente de onda helicoidal e a outra parte não sofre transformação (conforme a equação (3.13)). A segunda lente é idêntica à primeira porém ela expande o feixe no intuito de colima-lo. O feixe, então, passa pela segunda placa de quarto de onda, que transforma a polarização da parte do feixe modificada pela q-plate em vertical e a parte não transformada em horizontal. Um divisor de feixe polarizador (PBS) faz com que a parte do feixe transformada passe



direto pelo PBS e a parte não transformada é defletida lateralmente. Por fim, uma CCD captura o perfil espacial de saída do feixe.

A Figura 28 mostra os perfis de intensidade dos feixes, registrados através de uma CCD, após o PBS para as diferentes q-plates produzidas. O formato anular do perfil, típico de um modo Laguerre-Gauss de  $l = 2q$ , indica que a transformação na frente de onda do feixe foi obtida.

Na seção anterior, mostramos que as q-plates foram fabricadas para serem utilizadas com uma fonte que possua um comprimento de onda de 950 nm. Porém, devido a limitações de equipamentos óticos, foi utilizado um laser He-Ne de 632.8 nm. Diferentes comprimentos de onda alteram a eficiência de conversão do feixe, já que a birrefringência de forma não gera uma fase de  $\pi$  para esse comprimento de onda.

Apenas a constatação de que o perfil do feixe se torna anular não é suficiente para afirmarmos que ele apresenta uma frente de onda helicoidal, ou seja, que possui momento angular orbital. Uma forma mais consistente de averiguar a estrutura de fase do feixe é usando um interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico (AMZ), mostrado na figura 29. O objetivo é interferir o feixe com sua versão espelhada e analisarmos o perfil de intensidade resultante. A figura 30 compara o perfil de intensidade na saída do interferômetro, obtida pela CCD, com a superposição de dois modos Laguerre-Gauss de ordem  $l = \pm 2q$  (i.e.,  $LG_{0,2q} + LG_{0,-2q}$ ), simulada computacionalmente. O perfil espacial em forma de pétalas pode ser entendido ao superpomos dois feixes com polarização vertical que possuem frentes de onda helicoidal sendo que suas helicidades são invertidas. Usando o cálculo de Jones

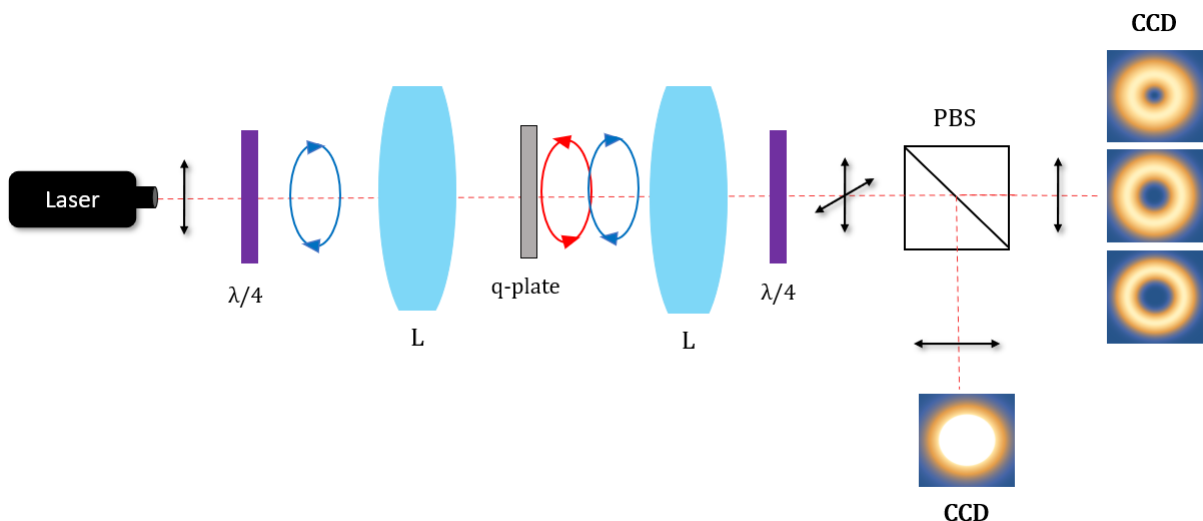


Figura 27 – Experimento utilizado para o teste das q-plates. As flechas em preto e os círculos em azul e vermelho representam o estado de polarização linear, circular direita e esquerda, respectivamente. L representa as lentes de foco 10 cm,  $\lambda/4$  as placas de quarto de onda e PBS o divisor de feixe polarizador.

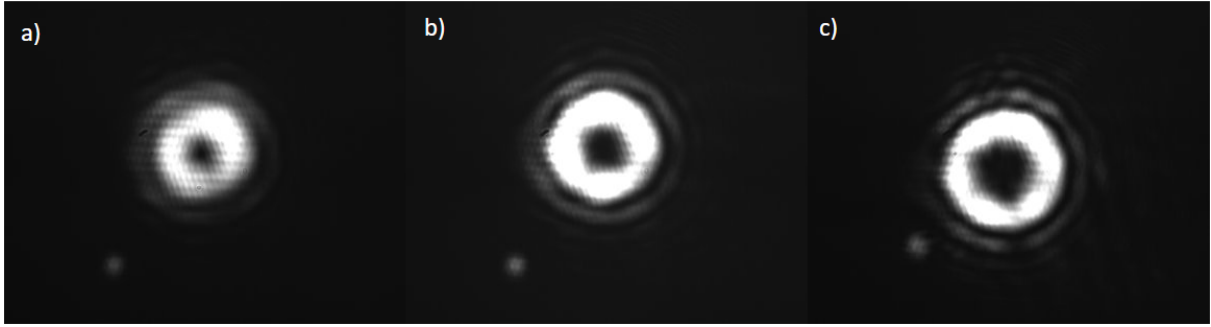


Figura 28 – Perfil de intensidade, capturado pela CCD, do feixe na saída do aparato representado na figura 27. Em a) o feixe passou pela q-plate de  $q = 1/2$  em b) de  $q = 1$  e em c) de  $q = 3/2$ .

essa superposição é dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(r) &= \frac{E_0(r)}{2} e^{il\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{E_0(r)}{2} e^{-il\phi} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= E_0(r) \cos(l\phi) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo  $E_0(r)$  a amplitude do feixe. Quando  $l = 2q$  a intensidade do feixe na saída do interferômetro é

$$\mathbf{I}(r) = |E_0(r)|^2 \cos^2(2q\phi). \quad (4.2)$$

A função  $\cos^2(2q\phi)$  vai a zero  $4q$  vezes ao contornar o perfil do feixe, explicando as  $4q$  pétalas obtidas na simulação e confirmadas pela imagem formada na CCD. Ao mudarmos o comprimento de um dos braços do interferômetro o padrão de interferência rotaciona em torno do seu centro, como esquematizado na figura 31, evidenciando que o feixe produzido possui momento angular orbital.

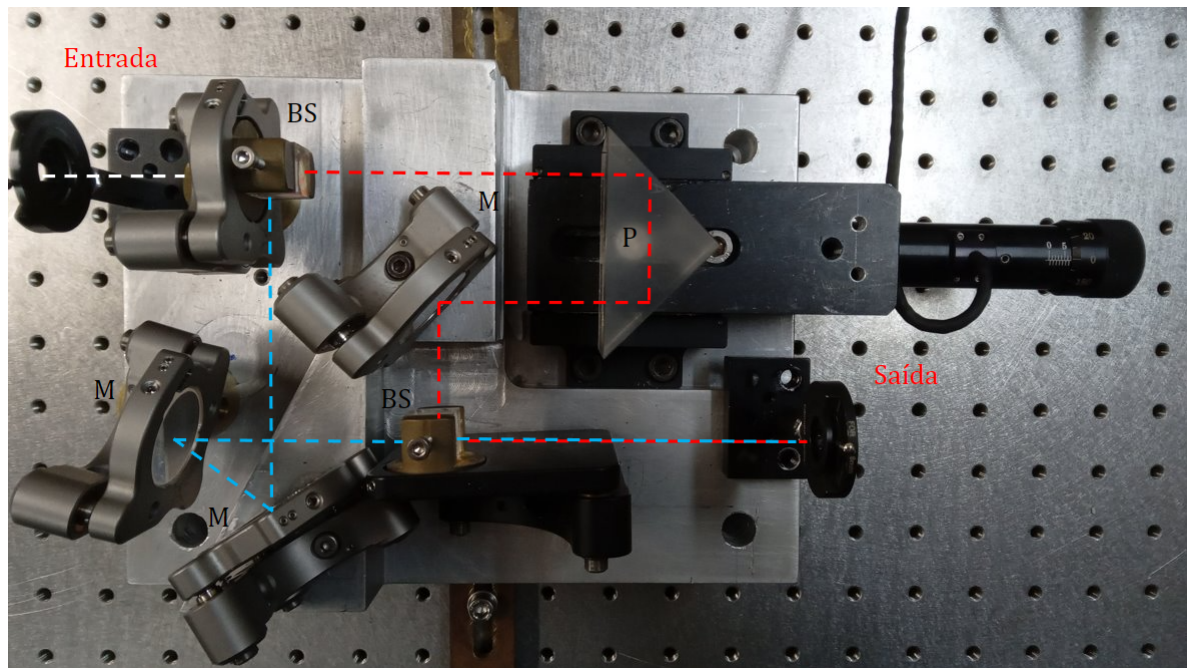


Figura 29 – Interferômetro de Mach-Zehnder assimétrico, utilizado na análise da frente de onda do feixe helicoidal. As retas pontilhadas de cores diferentes representam os dois braços do interferômetro. M representa os espelhos, BS os divisores de feixe e P um prisma.

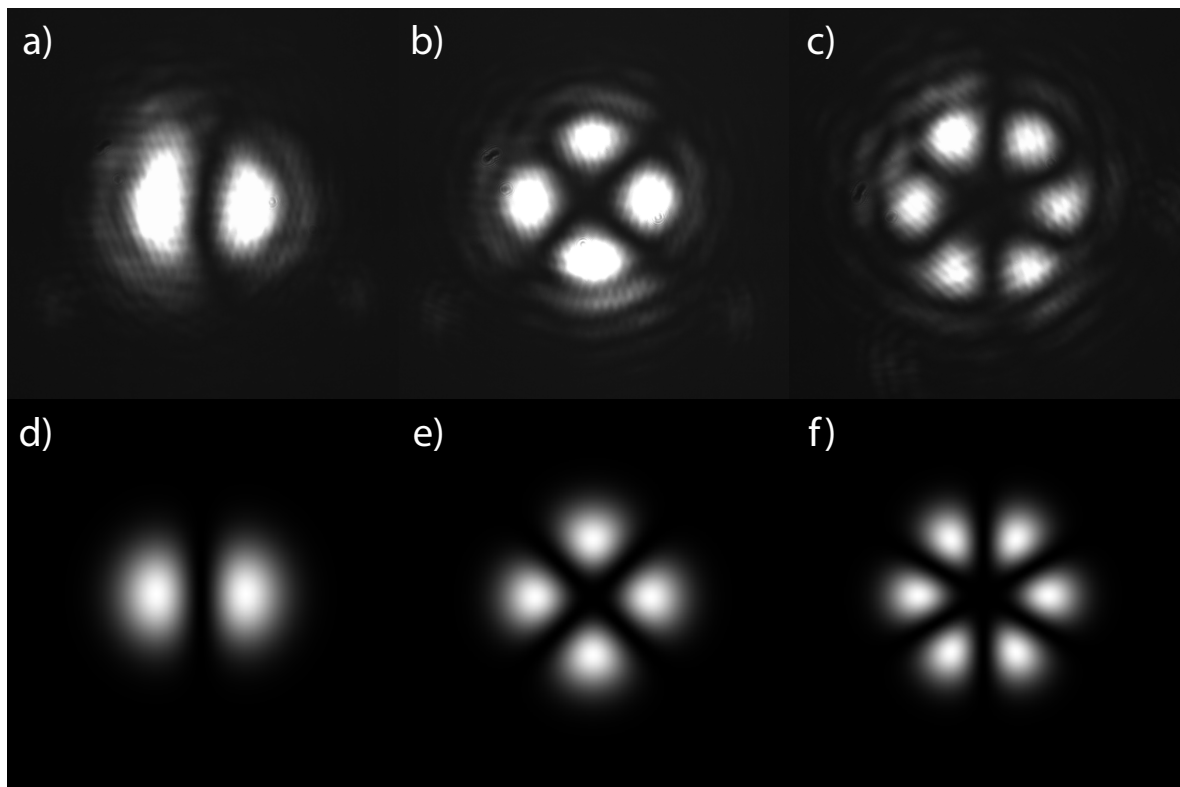


Figura 30 – a) - c) são os perfis de intensidade obtidos na saída do interferômetro e capturadas pela CCD para as placas de ordem  $q = 1/2$ ,  $q = 1$  e  $q = 3/2$ , respectivamente. d) - f) perfis de intensidade das superposições  $LG_{0,1} + LG_{0,-1}$ ,  $LG_{0,2} + LG_{0,-2}$  e  $LG_{0,3} + LG_{0,-3}$ , respectivamente.

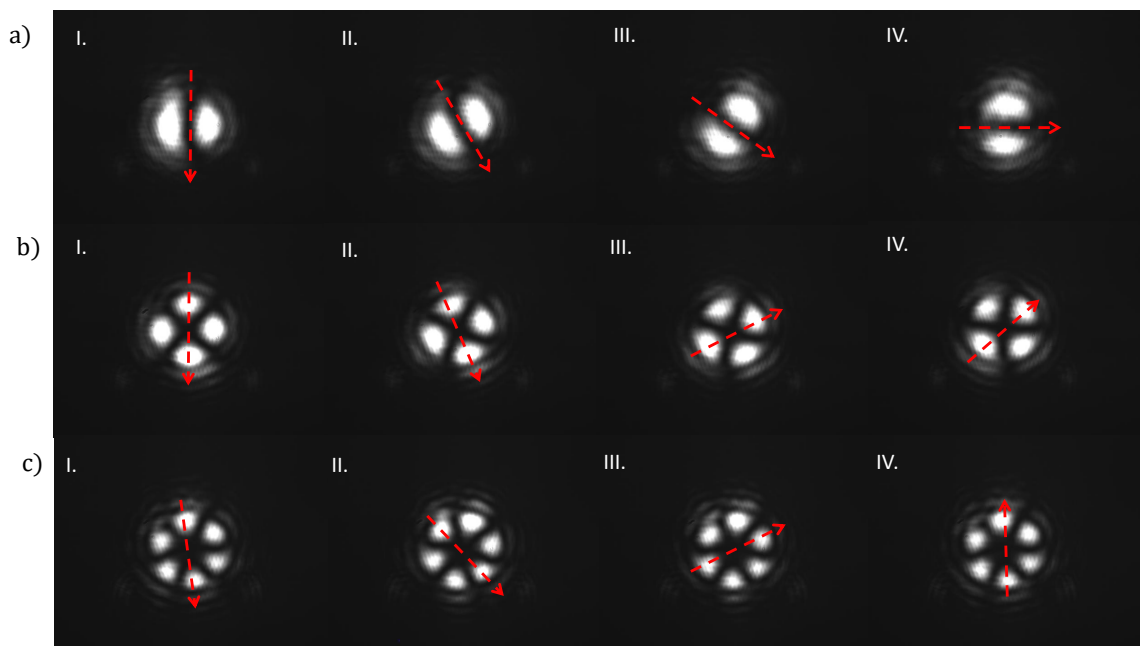


Figura 31 – Imagens dos padrões de interferência obtidas ao variarmos o comprimento de um dos braços do interferômetro. A seta auxilia a visualização do movimento de rotação dos perfis de intensidade.

### 4.3 Geração de feixes vetoriais usando as q-plates

No capítulo anterior, vimos que o tipo do feixe vetorial gerado por uma q-plate depende da polarização do campo de entrada. Assim iremos incidir sobre as diferentes q-plates dois estados de polarização linear diferentes e usando um polarizador analisaremos o perfil de intensidade do feixe.

Na figura 32 mostramos o arranjo experimental que possibilita alterar o estado de polarização de um laser incidente sobre a q-plate e identificar o feixe vetorial formado. Como no esquema utilizado na seção anterior, o feixe sai do laser com polarização vertical, mas trocamos a placa de quarto de onda por uma de meia onda. O eixo rápido dessa placa pode ser alterado no intuito de mudarmos a orientação da polarização linear que incide sobre a q-plate. As lentes possuem às mesmas funções do experimento usado na seção anterior. Já o divisor de feixe polarizador age como um analisador de feixes vetoriais, pois ao passar por ele, o feixe apresenta alterações no perfil de intensidade, que nos permite reconhecer qual padrão de polarização foi gerado.

Na figura 33 apresentamos o perfil de intensidade gerado pela q-plate ao incidir luz com polarização horizontal e diagonal (i.e., linear à  $45^\circ$ ) junto com os estados de polarização previstos teoricamente. As imagens da coluna à esquerda (i.e., a)-c) ) foram obtidas incidindo luz horizontalmente polarizada nas q-plates e o perfil de intensidade foi capturado na saída vertical do PBS (representada pela flecha na imagem). Nas imagens da coluna à direita, o campo de entrada possui polarização diagonal. Para analisar o feixe

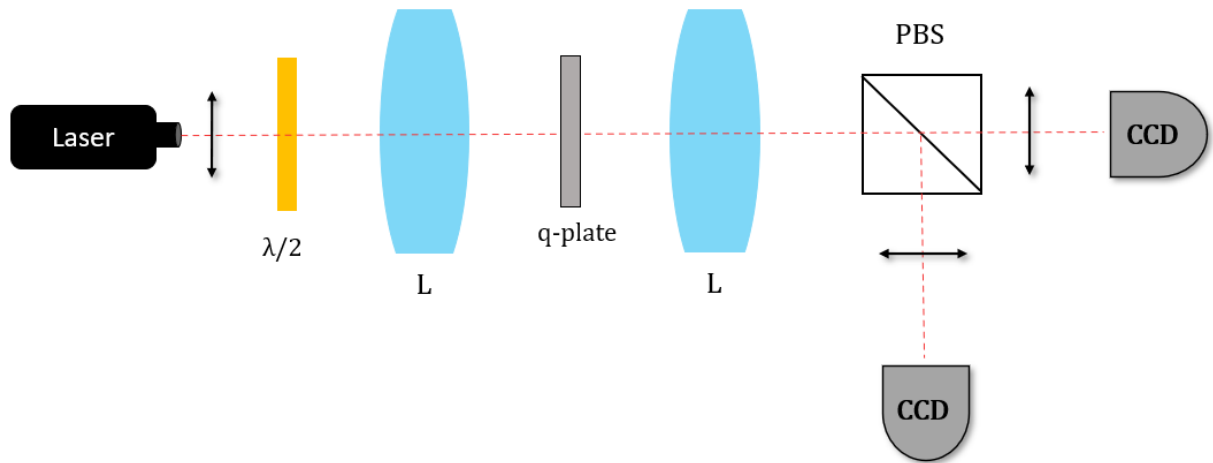


Figura 32 – Esquema utilizado na análise de feixes vetoriais.  $\lambda/2$  representa uma placa de meia onda. L são lentes convergentes de foco  $10\text{ cm}$  e PBS um divisor de feixes polarizador.

de saída foi necessário rotacionar em  $-45^\circ$  o PBS, a fim de capturar a parte anti-diagonal do feixe.

Após o PBS os perfis de intensidade, que eram anulares, apresentam regiões escuras (i.e., zero de intensidade). Essas partes escuras são regiões onde o estado de polarização do feixe é ortogonal à polarização do PBS. No caso das figuras 33 a) - c) as regiões escuras são aquelas que apresentam polarização horizontal. Já nas figuras 33 d) - f) as regiões escuras informam que o feixe gerado possui polarização diagonal. Não mostramos os padrões de intensidade para outras polarizações lineares de entrada, pois eles sempre se repetem, o que muda são suas orientações (i.e., as regiões claras rotacionam em torno do centro ao mudar a polarização de entrada e, conseqüentemente, a orientação do PBS).

A escolha da polarização do PBS não é arbitrária. É necessário escolher analisar o perfil de intensidade do feixe com polarização ortogonal à de entrada. Se escolhermos qualquer outra orientação para o PBS o padrão que caracteriza o tipo de feixe vetorial gerado é escondido pelo padrão Gaussiano da parte do feixe não convertida pela q-plate. Ao selecionarmos a polarização ortogonal à de entrada, asseguramos que estamos analisando apenas a parte convertida (i.e., assim como feito no esquema da seção anterior).

Para caracterizar a geração dos feixes vetoriais usamos apenas uma análise qualitativa do perfil de intensidade do feixe, sendo essa comumente usada na literatura [22], [45], [46]. Outra forma usada para analisar os feixes vetoriais é fazendo a medição dos parâmetros de Stokes [5], [47], [35]. Lembrando que para feixes vetoriais, esses parâmetros variam de acordo com a posição no perfil transversal do feixe. Não usamos esse método pois o nosso feixe vetorial contém uma parte não convertida (i.e., com a mesma polarização homogênea do feixe de entrada), essa parte impede a aquisição dos parâmetros de Stokes do feixe vetorial.

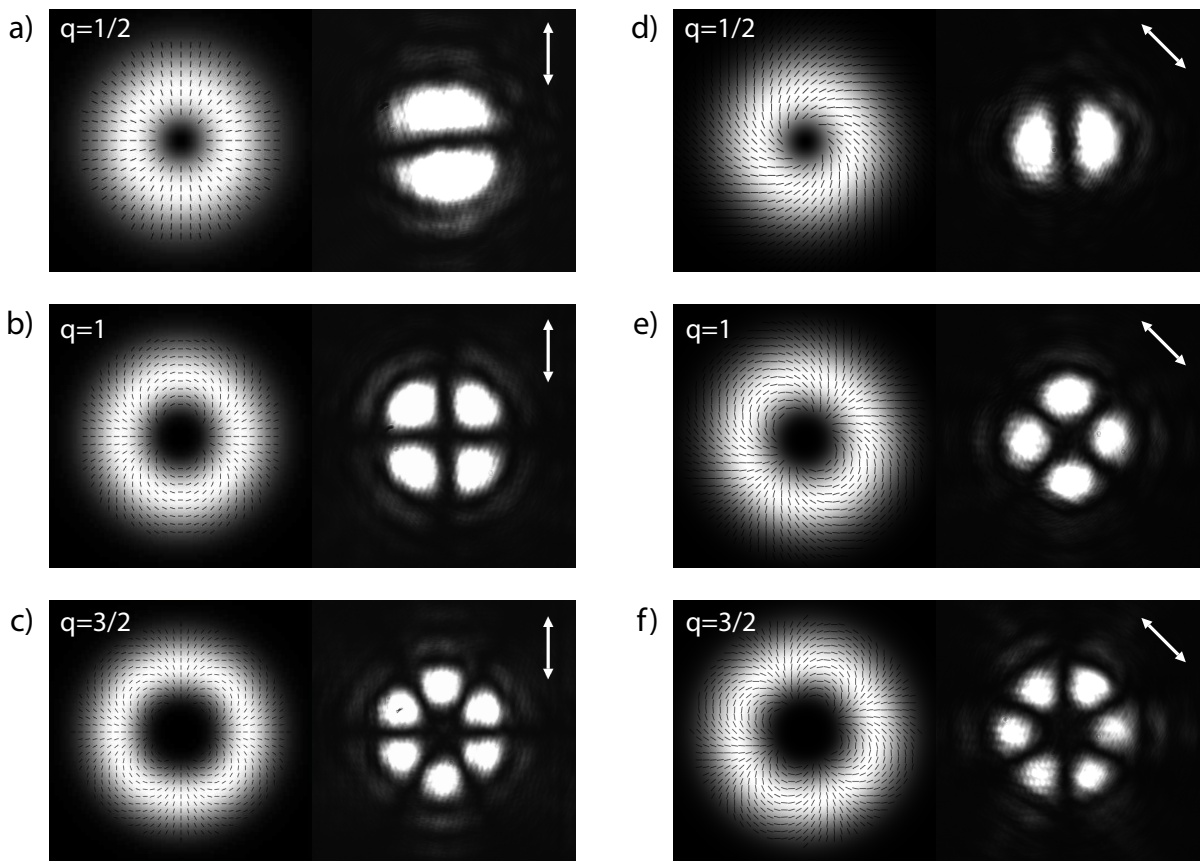


Figura 33 – À esquerda de cada imagem mostra a representação do estado de polarização e do perfil de intensidade de um feixe vetorial produzido pelos três tipos de q-plates, ao incidir luz com polarização a)-c) horizontal e d)-e) diagonal. À direita os respectivos perfis de intensidade, obtidos pela CCD, após o feixe passar pelo PBS. A flexa nos informa qual saída do PBS foi analisada.

#### 4.4 Eficiência e funcionamento das q-plates

Como vimos na seção 4.2, ao incidir luz com polarização circular direita nas q-plates, parte da luz é convertida em circular esquerda com a frente de onda helicoidal e parte não sofre transformação. A eficiência da placa é dada pela razão entre a intensidade da luz que é convertida e a intensidade total (i.e., intensidade da luz convertida mais da não transformada). Essa eficiência depende da fase  $\delta$  gerada pela placa, conforme dado pela equação (3.13). Logo, para uma q-plate otimizada, que gera  $\delta = \pi$ , devemos ter uma eficiência de 100%. Ao calcularmos as dimensões das nano estruturas, utilizando as fórmulas desenvolvidas na seção 3.6, consideramos o comprimento de onda de 950 nm. Porém, nos experimentos utilizamos um laser de 632,8 nm. Isso significa que, para esse comprimento de onda, a fase gerada será diferente de  $\pi$  e a eficiência diminuirá.

Entre todas as placas fabricadas, as q-plates mais eficientes foram as que possuem suas dimensões encolhidas em 30 nm, ou seja, as placas da terceira coluna de cada chip (veja a figura 24). As eficiências dessas placas ficaram em torno dos 82% para todos



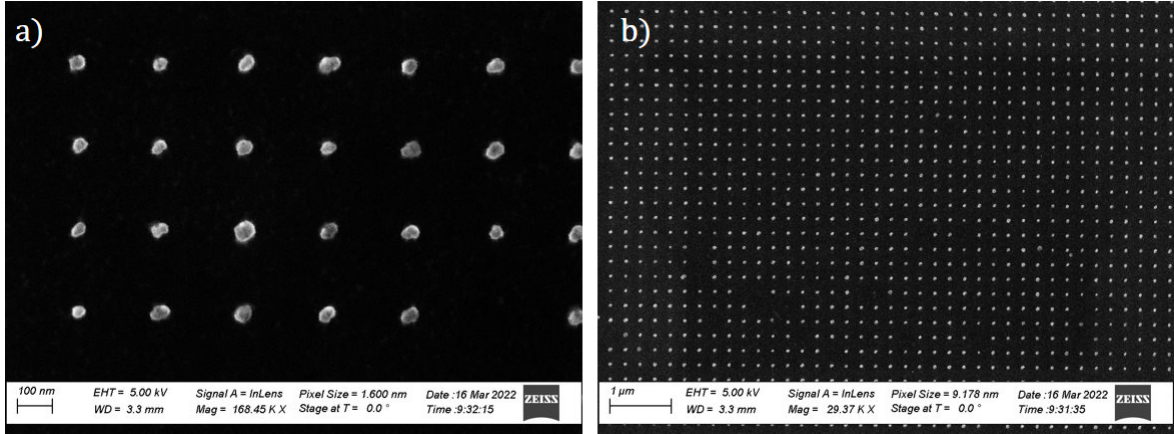


Figura 34 – Imagens obtidas por um microscópio eletrônico de varredura de uma q-plate da quinta coluna de placas.

os padrões fabricados (i.e.,  $q = 1/2$ ,  $q = 1$ ,  $q = 3/2$ ). As q-plates da primeira e segunda colunas, cujas dimensões mais se aproximam das dimensões da máscara da q-plate, tiveram uma eficiência muito baixa, por volta de 5%. Já as placas da quarta e quinta coluna não conseguiram gerar os feixes previstos teoricamente (i.e., os modos Laguerre-Gauss e os feixes vetoriais). As imagens da figura 34 são de uma dessas q-plates. Podemos ver que os pilares não apresentam orientação bem definida, o que impossibilita a conversão da luz. Teoricamente, a eficiência de conversão é expressa pela equação:

$$\eta = \text{sen}^2(\delta/2) = \text{sen}^2\left(\frac{\pi h \Delta n}{\lambda}\right), \quad (4.3)$$

onde  $h$  é a altura dos nano-pilares,  $\lambda$  é o comprimento de onda da luz utilizada e  $\Delta n$  é a diferença entre os índices de refração extraordinário e ordinário gerados pela birrefringência de forma. Devido a diferença nas dimensões das placas de cada coluna, o fator de preenchimento altera a birrefringência e, conseqüentemente, a eficiência. Para as placas da terceira coluna o valor obtido da equação (4.3) é de aproximadamente 80%, bem próximo da medição experimental. Entretanto, para as placas da primeira e segunda coluna os valores teóricos são de 15% e 30% de eficiência, respectivamente, muito diferente do obtido experimentalmente.

Essa não compatibilidade, entre os valores teóricos e experimentais, nos leva a questionar a validade do modelo adotado para explicar as q-plates. Fato é que as placas fabricadas conseguem transformar um feixe Gaussiano de polarização homogênea em um feixe helicoidal e vetorial. Não só isso, variando a polarização de entrada conseguimos gerar exatamente o feixe previsto pela teoria, como demonstrado nas seções 4.2 e 4.3. Porém, o parâmetro determinante para que haja alguma conversão, não importando com a eficiência, é a orientação dos pilares. Assim, se os pilares estão corretamente orientados (i.e., conforme a equação (3.38)) veremos os efeitos de uma q-plate (e.g., geração de modos helicoidais). Já a eficiência está ligada à birrefringência da placa. Devemos lembrar que o material a-Si, que constitui os pilares, não é birrefringente, se o fosse, os parâmetros

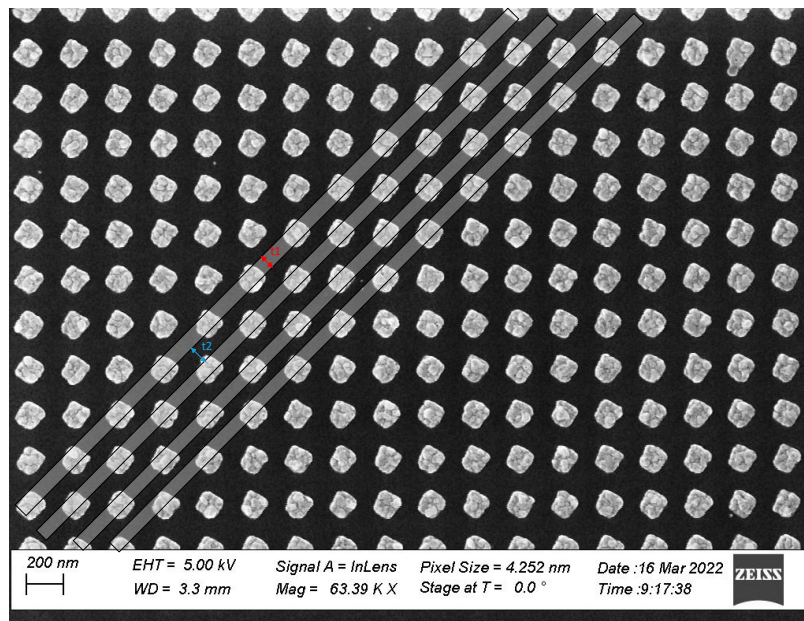


Figura 35 – Imagem de uma q-plate obtida por um microscópio eletrônico de varredura. Os retângulos em cinza representam as estruturas efetivas que levam ao fenômeno de birrefringência de forma.

fundamentais para alcançar uma eficiência de 100% seriam a altura dos pilares, que dependeria da birrefringência do material, e suas orientações. Dessa forma, as questões como o espaçamento entre pilares, largura e fator de preenchimento seriam parâmetros secundários. Esses valores só são fundamentais pois a birrefringência da placa vem da forma das estruturas. E, acreditamos, que está na birrefringência de forma o problema da eficiência das placas. Não que a teoria da birrefringência de forma esteja errada ou possua inconsistências, mas sim a maneira com que a consideramos pode não ser a mais adequada. Na seção 3.6 em que desenvolvemos as equações que modelam a birrefringência de forma, presumimos que as dimensões das faces laterais eram muito maiores que sua espessura (reveja a figura 21). Mas, como mostrado nas imagens obtidas por microscópio eletrônico, claramente isso não é verdade. Contornamos isso, ao considerar que a luz interage com um conjunto de pilares, formando varias colunas que satisfazem o requisito mencionado anteriormente. Ilustramos essa ideia na figura 35, onde os retângulos em cinza devem ser entendidos como um único grande pilar. A imagem nos leva a pensar que esse pilar efetivo deve ser retilíneo, mas para que o eixo rápido e lento varie conforme a regra da q-plate (i.e., dada pela equação (3.9)), essas estruturas devem ser curvadas, com suas faces sempre paralelas as dos pilares individuais. Se o leitor ainda estiver confuso, basta pegar as estruturas das q-plates mostradas na figura 19 e ir ligando os seguimentos de reta, transformando o padrão discreto das q-plates em algo contínuo.

Essa forma de modelar o funcionamento da q-plate é apenas uma aproximação, já que o valor do grau de birrefringência (i.e., o valor do parâmetro  $\Delta n$  na equação (4.3))



gerado pelas q-plates fabricadas não condiz com o grau de birrefringência gerado pela teoria de birrefringência de forma implementada. Sabemos disso, pois as eficiências medidas experimentalmente não coincidem com o cálculo teórico. Assim, entendemos que, embora a maneira em que implementamos a teoria de birrefringência de forma nos dê um bom entendimento do funcionamento das q-plates, ela apresenta falhas por se tratar de uma aproximação. Até onde sabemos, não há trabalhos que expliquem o espalhamento da luz por conjuntos de nano-pilares com a simetria das q-plates, sendo um interessante tópico de pesquisa.

## 5 Considerações finais

Nesta dissertação tínhamos como objetivo mostrar, detalhadamente, o funcionamento e um processo de fabricação da classe de placas de onda chamadas de q-plates. Usando o cálculo de Jones, desenvolvemos passo a passo até obtermos a matriz de Jones que represente a ação de uma q-plate. Com a matriz de Jones, fomos capazes de inferir a transformação no estado de polarização e no perfil de fase do feixe que atravessa a placa. Com isso, mostramos que a q-plate pode ser considerada um conversor spin-orbital, já que ao incidir luz circularmente polarizada é possível gerar um feixe com momento angular orbital. Posteriormente, mostramos a capacidade das q-plates em gerar feixes vetoriais (i.e. feixes com polarização não homogênea). Para isso, basta incidir luz com polarização diferente da circular. Exemplos mais comuns são os *cylindrical vector beams* obtidos ao incidir luz linearmente polarizada em uma q-plate. Além disso, mostramos que feixes vetoriais apresentam uma não separabilidade dos graus de liberdade de polarização e perfil espacial, e por isso, são considerados análogos clássicos de estados emaranhados. Usando a entropia de emaranhamento conseguimos quantificar o grau de emaranhamento dos diferentes feixes vetoriais criados pelas q-plates.

Além da formulação teórica das q-plates, mostramos seu processo de fabricação que se deu no centro de fabricação NANOLAB na Universidade Técnica da Dinamarca. Diferentes das q-plates de cristal líquido, nossas placas são formadas por nano-pilares de silício amorfo e seu funcionamento se baseia no fenômeno de birrefringência de forma. Por isso, podemos usa-las com fontes de alta potência sem risco de danificar suas estruturas. Ao descrever os processos de fabricação, começamos pela construção da máscara das q-plates. Essas máscaras contêm as informações das dimensões e orientações dos nano-pilares. Em seguida, detalhamos cada etapa de preparação da superfície, incluindo a escolha dos materiais, os processos de limpeza e a técnica de litografia por feixes de elétrons, responsável por gerar os padrões geométricos das placas. Por fim, mostramos imagens, utilizando um microscópio eletrônico de varredura, das q-plates produzidas. Para esta dissertação foram fabricados três tipos de q-plates, sendo elas de  $q = 1/2$ ,  $q = 1$  e  $q = 3/2$ .

A caracterização das placas foi realizada na Universidade Federal de Minas Gerais no laboratório de ótica quântica. Mostramos que ao incidir um feixe Gaussiano circularmente polarizado nas q-plates produzidas, geramos um feixe com o mesmo perfil de intensidade dos modos Laguerre-Gauss, assim como previsto teoricamente. Foi usada uma técnica de interferometria para mostrar que, de fato, a frente de onda sofre uma transformação de Gaussiana para helicoidal. Para testarmos a geração de feixes vetoriais incidimos sobre as q-plates luz com polarização horizontal e diagonal. Ao atravessar um polarizador os feixes apresentam uma mudança no perfil de intensidade, característica de feixes que apresentam

estado de polarização não homogêneo. Mostramos então, que o padrão de intensidade após o polarizador está de acordo com o previsto teoricamente.

Com os conhecimentos teóricos acerca do funcionamento das q-plates, adquiridos neste estudo, foi possível comprovar experimentalmente que as técnicas empregadas no desenvolvimento das placas realmente funcionam. Assim, somos capazes de construir q-plates de ordem mais elevadas (i.e.  $q > 3/2$ ). Possibilitando a produção de ondas eletromagnéticas com momento angular ainda maior e diferentes padrões de feixes vetoriais.

## Referências

- [1] Marrucci, L., C. Manzo e D. Paparo: *Pancharatnam-Berry phase optical elements for wave front shaping in the visible domain: Switchable helical mode generation*. Applied Physics Letters, 88(22):1–4, 2006. Citado 4 vezes nas páginas 9, 14, 34 e 47.
- [2] Zubairy, M. Suhail: *A Very Brief History of Light*, páginas 3–24. Springer International Publishing, Cham, 2016. Citado na página 13.
- [3] Jackson, D. J.: *Classical Electrodynamics*. Wiley, 1998. Citado na página 13.
- [4] Padgett, M. Courtial, J. e L. Allen: *Light's orbital angular momentum*. Physics Today, 57(5):35–40, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 20.
- [5] Piquero, Gemma, Rosario Martínez-Herrero, J. C. G. de Sande e Massimo Santarsiero: *Synthesis and characterization of non-uniformly totally polarized light beams: tutorial*. J. Opt. Soc. Am. A, 37(4):591–605, 2020. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 64.
- [6] Beckley, Amber M., Thomas G. Brown e Miguel A. Alonso: *Full Poincaré beams*. Opt. Express, 18(10):10777–10785, 2010. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 30.
- [7] Zhan, Qiwen: *Cylindrical vector beams: from mathematical concepts to applications*. Adv. Opt. Photon., 1(1):1–57, 2009. Citado 4 vezes nas páginas 13, 15, 30 e 33.
- [8] Dorn, R., S. Quabis e G. Leuchs: *Sharper Focus for a Radially Polarized Light Beam*. Phys. Rev. Lett., 91:233901, 2003. Citado na página 13.
- [9] Rubano, Andrea, Filippo Cardano, Bruno Piccirillo e Lorenzo Marrucci: *Q-plate technology: a progress review*. J. Opt. Soc. Am. B, 36(5):D70–D87, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 33.
- [10] Maiman, T. H.: *Stimulated optical radiation in ruby*. Nature, 187:493–494, 1960. Citado na página 15.
- [11] Maxwell, J. C.: *A Dynamical Theory of the Electromagnetic Field*. Proceedings of the Royal Society of London, 13:531–536, 1863. Citado na página 16.
- [12] Galvez, E. J.: *Vector beams in free space*, página 51–70. Cambridge University Press, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 33.
- [13] Gbur, Gregory J.: *Singular Optics*. CRC Press, 2016. Citado na página 20.

- [14] Allen, L., M. W. Beijersbergen, R. J. C. Spreeuw e J. P. Woerdman: *Orbital angular momentum of light and the transformation of Laguerre-Gaussian laser modes*. Phys. Rev. A, 45:8185–8189, 1992. Citado na página 21.
- [15] Padgett, Miles J.: *Orbital angular momentum 25 years on [Invited]*. Opt. Express, 25(10):11265–11274, 2017. Citado na página 21.
- [16] Willner, A. E., H. Huang, Y. Yan, Y. Ren, N. Ahmed, G. Xie, C. Bao, L. Li, Y. Cao, Z. Zhao, J. Wang, M. P. J. Lavery, M. Tur, S. Ramachandran, A. F. Molisch, N. Ashrafi e S. Ashrafi: *Optical communications using orbital angular momentum beams*. Adv. Opt. Photon., 7(1):66–106, 2015. Citado na página 21.
- [17] Padgett, M. Bowman, R.: *Tweezers with a twist*. Nature Photon, 5:343–348, 2011. Citado na página 21.
- [18] Goldstein, Dennis H: *Polarized light*. CRC press, 2017. Citado 2 vezes nas páginas 21 e 35.
- [19] G., Stokes. G.: *On the composition and resolution of streams of polarized light from different sources*. Transactions of the Cambridge Philosophical Society, 9:399–416, 1852. Citado na página 25.
- [20] Schaefer, B., E. Collett, R. Smyth, D. Barrett e B. Fraher: *Measuring the Stokes polarization parameters*. American Journal of Physics, 75(2):163–168, 2007. Citado na página 27.
- [21] Poicaré, H.: *Théorie mathématique de la lumière*, volume 2. Paris, 1892. Citado na página 29.
- [22] Rosales-Guzmán, Carmelo, Bienvenu Ndagano e Andrew Forbes: *A review of complex vector light fields and their applications*. Journal of Optics, 20(12):123001, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 64.
- [23] Hall, Dennis G.: *Vector-beam solutions of Maxwell’s wave equation*. Opt. Lett., 21(1):9–11, 1996. Citado na página 29.
- [24] Galvez, Enrique J., Shreeya Khadka, William H. Schubert e Sean Nomoto: *Poincaré-beam patterns produced by nonseparable superpositions of Laguerre-Gauss and polarization modes of light*. Appl. Opt., 51(15):2925–2934, 2012. Citado na página 30.
- [25] Milione, Giovanni, H. I. Sztul, D. A. Nolan e R. R. Alfano: *Higher-Order Poincaré Sphere, Stokes Parameters, and the Angular Momentum of Light*. Phys. Rev. Lett., 107:053601, 2011. Citado na página 32.

- [26] Marrucci, L., C. Manzo e D. Paparo: *Optical Spin-to-Orbital Angular Momentum Conversion in Inhomogeneous Anisotropic Media*. Phys. Rev. Lett., 96:163905, 2006. Citado na página 34.
- [27] Born, Max e Emil Wolf: *Principals of Optics 60th Anniversary Edition*. Cambridge University Press, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 34 e 52.
- [28] Nagali, Eleonora, Fabio Sciarrino, Francesco De Martini, Lorenzo Marrucci, Bruno Piccirillo, Ebrahim Karimi e Enrico Santamato: *Quantum Information Transfer from Spin to Orbital Angular Momentum of Photons*. Phys. Rev. Lett., 103:013601, 2009. Citado na página 35.
- [29] Marrucci, Lorenzo, Ebrahim Karimi, Sergei Slussarenko, Bruno Piccirillo, Enrico Santamato, Eleonora Nagali e Fabio Sciarrino: *Spin-to-orbital conversion of the angular momentum of light and its classical and quantum applications*. Journal of Optics, 13(6):064001, 2011. Citado na página 36.
- [30] Beth, Richard A.: *Mechanical Detection and Measurement of the Angular Momentum of Light*. Phys. Rev., 50:115–125, 1936. Citado na página 39.
- [31] Poynting, John Henry: *The wave motion of a revolving shaft, and a suggestion as to the angular momentum in a beam of circularly polarised light*. Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Containing Papers of a Mathematical and Physical Character, 82(557):560–567, 1909. Citado na página 39.
- [32] Devlin, Robert Charles, Antonio Ambrosio, Daniel Wintz, Stefano Luigi Oscurato, Alexander Yutong Zhu, Mohammadreza Khorasaninejad, Jaewon Oh, Pasqualino Maddalena e Federico Capasso: *Spin-to-orbital angular momentum conversion in dielectric metasurfaces*. Opt. Express, 25(1):377–393, 2017. Citado na página 39.
- [33] Spreeuw, Robert JC: *A classical analogy of entanglement*. Foundations of physics, 28(3):361–374, 1998. Citado na página 43.
- [34] Wootters, William: *Entanglement of formation and concurrence*. Quantum Information & Computation, 1:27–44, julho 2001. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 45.
- [35] Cardano, Filippo, Ebrahim Karimi, Sergei Slussarenko, Lorenzo Marrucci, Corrado de Lisio e Enrico Santamato: *Polarization pattern of vector vortex beams generated by q-plates with different topological charges*. Applied optics, 51(10):C1–C6, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 44 e 64.
- [36] Barnett, Stephen: *Quantum information*, volume 16. Oxford University Press, 2009. Citado na página 45.

- [37] Guzman-Silva, Diego, Robert Brünig, Felix Zimmermann, Christian Vetter, Markus Gräfe, Matthias Heinrich, Stefan Nolte, Michael Duparré, Andrea Aiello, Marco Ornigotti e Alexander Szameit: *Demonstration of local teleportation using classical entanglement*. *Laser & Photonics Reviews*, 10(2):317–321, 2016. Citado na página 46.
- [38] Silva, B Pinheiro da, M Astigarreta Leal, C E R Souza, E F Galvão e A Z Khoury: *Spin-orbit laser mode transfer via a classical analogue of quantum teleportation*. *Journal of Physics B: Atomic, Molecular and Optical Physics*, 49(5):055501, 2016. Citado na página 46.
- [39] Vallone, Giuseppe, Vincenzo D’Ambrosio, Anna Sponselli, Sergei Slussarenko, Lorenzo Marrucci, Fabio Sciarrino e Paolo Villoresi: *Free-Space Quantum Key Distribution by Rotation-Invariant Twisted Photons*. *Phys. Rev. Lett.*, 113:060503, 2014. Citado na página 46.
- [40] Mirhosseini, Mohammad, Omar S Magaña-Loaiza, Malcolm N O’Sullivan, Brandon Rodenburg, Mehul Malik, Martin P J Lavery, Miles J Padgett, Daniel J Gauthier e Robert W Boyd: *High-dimensional quantum cryptography with twisted light*. *New Journal of Physics*, 17(3):033033, 2015. Citado na página 46.
- [41] Slussarenko, Sergei, Bruno Piccirillo, Vladimir Chigrinov, Lorenzo Marrucci e Enrico Santamato: *Liquid crystal spatial-mode converters for the orbital angular momentum of light*. *Journal of Optics*, 15(2):025406, 2013. Citado na página 47.
- [42] Fowles, Grant R: *Introduction to modern optics*. Courier Corporation, 1989. Citado na página 53.
- [43] Cescato, L., Ekkehard Gluch, Helmut Haider e Norbert Streibl: *Form birefringence of dielectric coatings and relief gratings*. Em Lanzl, F., H. J. Preuss e G. Weigelt (editores): *Optics in Complex Systems*, volume 1319, páginas 333 – 334. International Society for Optics and Photonics, SPIE, 1990. Citado na página 53.
- [44] Vertchenko, Larissa: *Micro fabricação de placas óticas birrefringentes e suas aplicações*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2016. Citado na página 53.
- [45] Maurer, Christian, Alexander Jesacher, Severin Fürhapter, Stefan Bernet e Monika Ritsch-Marte: *Tailoring of arbitrary optical vector beams*. *New Journal of Physics*, 9(3):78–78, mar 2007. Citado na página 64.
- [46] Suzuki, Masato, Keisaku Yamane, Kazuhiko Oka, Yasunori Toda e Ryuji Morita: *Comprehensive quantitative analysis of vector beam states based on vector field reconstruction*. *Scientific reports*, 9(1):1–14, 2019. Citado na página 64.

- 
- [47] Chen, Shizhen, Xinxing Zhou, Yachao Liu, Xiaohui Ling, Hailu Luo e Shuangchun Wen: *Generation of arbitrary cylindrical vector beams on the higher order Poincaré sphere*. Opt. Lett., 39(18):5274–5276, 2014. Citado na página 64.



# Apêndices

# APÊNDICE A – Parâmetros geométricos da elipse de polarização

Neste apêndice vamos demonstrar como parâmetros que caracterizam a geometria da elipse de polarização se relacionam com as amplitudes e diferença de fase das componentes do campo elétrico da uma onda eletromagnética.

Como já discutido no capítulo 2 a equação (2.26) dada por

$$\frac{E_x^2}{E_{0x}^2} + \frac{E_y^2}{E_{0y}^2} - 2 \cos \delta \frac{E_x E_y}{E_{0x} E_{0y}} = \sin^2 \delta, \quad (\text{A.1})$$

descreve uma elipse rotacionada, isso se dá pela presença do termo cruzado  $E_x E_y$  portanto, em geral, os eixos da elipse de polarização não coincidem com os eixos  $xy$ .

É interessante definir um novo sistema de coordenadas, no qual, seus eixos  $u$  e  $v$  estejam ao longo dos eixos da elipse. Assim, as componentes do campo elétrico nesse novo sistema de coordenadas se relacionam com as componentes do sistema original seguindo as seguintes relações

$$E_u = E_x \cos \Psi + E_y \sin \Psi, \quad (\text{A.2a})$$

$$E_v = -E_x \sin \Psi + E_y \cos \Psi, \quad (\text{A.2b})$$

onde  $\Psi$  é o ângulo entre o eixo maior da elipse (eixo  $u$ ) e o eixo  $x$ , como representado na figura 36. No sistema de coordenada  $(u, v)$  a elipse não está rotacionada logo, as equações paramétricas da elipse tem sua forma padrão, expressas por

$$E_u = a_M \cos(\tau + \delta'), \quad (\text{A.3a})$$

$$E_v = \pm a_m \sin(\tau + \delta'), \quad (\text{A.3b})$$

sendo  $a_M$  e  $a_m$  o comprimento do semi-eixo maior e menor da elipse, respectivamente. o sinal de  $\pm$  identifica o sentido em que o vetor campo elétrico traça a elipse,  $\tau$  é o propagador e  $\delta'$  uma fase. Relembrando que nas coordenadas originais as equações paramétricas da elipse foram dadas pelas equações (2.25)

$$E_x = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x), \quad (\text{A.4a})$$

$$E_y = E_{0y} \cos(\tau + \delta_y). \quad (\text{A.4b})$$

Se substituirmos as equações (A.3) e (A.4) nas equações (A.2) conseguimos relacionar os comprimentos dos eixos da elipse com as amplitudes do campo elétrico. Fazendo

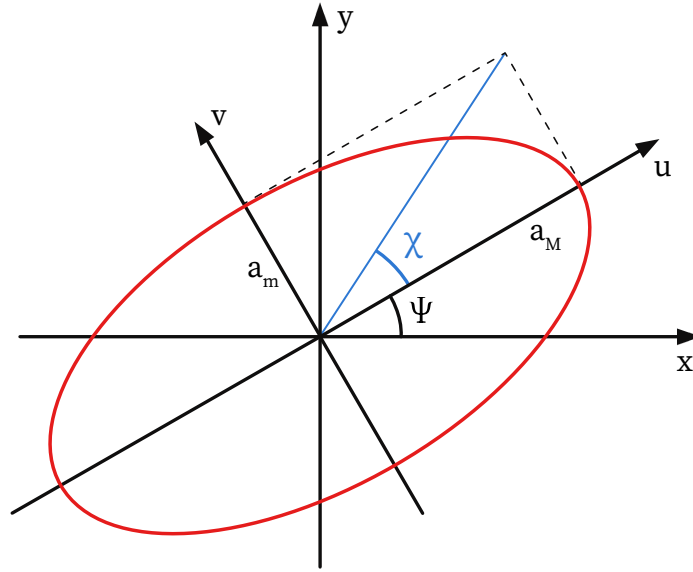


Figura 36 – Representação da elipse de polarização, contendo dois sistemas de coordenadas, um padrão  $(x, y)$  e o  $(u, v)$  ao longo dos eixos da elipse.

isso, nós temos

$$a_M \cos(\tau + \delta') = E_{0x} \cos(\tau + \delta_x) \cos \Psi + E_{0y} \cos(\tau + \delta_y) \sin \Psi, \quad (\text{A.5a})$$

$$\pm a_m \sin(\tau + \delta') = -E_{0x} \cos(\tau + \delta_x) \sin \Psi + E_{0y} \cos(\tau + \delta_y) \cos \Psi. \quad (\text{A.5b})$$

Expandindo as funções trigonométricas, ficamos com

$$a_M (\cos \tau \cos \delta' - \sin \tau \sin \delta') = E_{0x} (\cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x) \cos \Psi + E_{0y} (\cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y) \sin \Psi, \quad (\text{A.6})$$

$$\pm a_m (\sin \tau \cos \delta' + \cos \tau \sin \delta') = -E_{0x} (\cos \tau \cos \delta_x - \sin \tau \sin \delta_x) \sin \Psi + E_{0y} (\cos \tau \cos \delta_y - \sin \tau \sin \delta_y) \cos \Psi. \quad (\text{A.7})$$

Agrupando os termos que multiplicam  $\cos \tau$  e  $\sin \tau$ , obtemos quatro equações

$$a_M \cos \delta' = E_{0x} \cos \delta_x \cos \Psi + E_{0y} \cos \delta_y \sin \Psi, \quad (\text{A.8a})$$

$$a_M \sin \delta' = E_{0x} \sin \delta_x \cos \Psi + E_{0y} \sin \delta_y \sin \Psi, \quad (\text{A.8b})$$

$$\pm a_m \sin \delta' = -E_{0x} \cos \delta_x \sin \Psi + E_{0y} \cos \delta_y \cos \Psi, \quad (\text{A.8c})$$

$$\pm a_m \cos \delta' = E_{0x} \sin \delta_x \sin \Psi - E_{0y} \sin \delta_y \cos \Psi, \quad (\text{A.8d})$$

somando o quadrado das equações (A.8a) e (A.8b), chegamos na seguinte expressão

$$a_M^2 = E_{0x}^2 \cos^2 \psi + E_{0y}^2 \sin^2 \Psi + 2E_{0x}E_{0y} \sin(2\Psi) \cos \delta, \quad (\text{A.9})$$

onde usamos  $\delta = \delta_y - \delta_x$ . Deduzimos então a equação (2.30a). Fazendo o mesmo processo nas equações (A.8c) e (A.8d), chegamos na equação

$$a_m^2 = E_{0x}^2 \sin^2 \psi + E_{0y}^2 \cos^2 \Psi - 2E_{0x}E_{0y} \sin(2\Psi) \cos \delta, \quad (\text{A.10})$$

que é a mesma dada em (2.30b).

Se resolvermos as equações (A.2) para as componentes do sistema de coordenadas originais, obtemos

$$E_x = E_u \cos \Psi - E_v \sin \Psi, \quad (\text{A.11a})$$

$$E_y = E_x \sin \Psi + E_u \cos \Psi. \quad (\text{A.11b})$$

Substituindo essas equações na equação da elipse (A.1), chegamos na seguinte expressão

$$\begin{aligned} & \frac{E_u^2 \cos^2 \Psi (E_{0x}^2 + E_{0y}^2) + E_v^2 \sin^2 \Psi (E_{0x}^2 + E_{0y}^2)}{E_{0x}^2 E_{0y}^2} - \frac{\cos \delta (E_u^2 - E_v^2) \sin(2\Psi)}{E_{0x} E_{0y}} \\ & + \frac{E_u E_v \sin(2\Psi) (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)}{E_{0x}^2 E_{0y}^2} - \frac{2E_u E_v \cos(2\Psi) \cos \delta}{E_{0x} E_{0y}} = \sin^2 \delta. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Como a equação acima representa a elipse no sistema de coordenadas  $(u, v)$  os termos cruzados  $E_u E_v$  devem se anular, já que nesse sistema a elipse não se encontra rotacionada.

Logo

$$\frac{E_u E_v \sin(2\Psi) (E_{0x}^2 - E_{0y}^2)}{E_{0x}^2 E_{0y}^2} - \frac{2E_u E_v \cos(2\Psi) \cos \delta}{E_{0x} E_{0y}} = 0. \quad (\text{A.13})$$

Dessa equação conseguimos extrair a relação entre o ângulo de rotação da elipse, no sistema de coordenadas originais, e as amplitudes e diferença de fase do campo elétrico. Assim

$$\tan(2\Psi) = \frac{2E_{0x}E_{0y} \cos \delta}{E_{0x}^2 - E_{0y}^2}. \quad (\text{A.14})$$

Essa é a equação (2.30c) desta dissertação. Por último mas não menos importante, vamos deduzir a equação que relaciona os parâmetros do campo com o ângulo de elipsidade  $\chi$ .

Pela definição do ângulo  $\chi$  sabemos que sua tangente é a razão entre o semi-eixo menor e maior da elipse de polarização, como mostrado na figura 36, ou seja

$$\tan \chi = \pm \frac{a_m}{a_M}. \quad (\text{A.15})$$

Se voltarmos nas equações que definem os eixos da elipse e somarmos as equações (A.9) e (A.10), obtemos

$$a_M^2 + a_m^2 = E_{0x}^2 + E_{0y}^2. \quad (\text{A.16})$$

Outra relação útil envolvendo os eixos da elipse se dá ao multiplicar a equação (A.8a) pela equação (A.8c) e a equação (A.8b) pela equação (A.8d) e depois soma-las. Fazendo isso chegamos na equação

$$\pm a_m a_M = E_{0x} E_{0y} \sin \delta. \quad (\text{A.17})$$

Dividindo a equação (A.16) por (A.17), obtemos

$$\pm \frac{a_M^2 + a_m^2}{a_m a_M} = \frac{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}{E_{0x} E_{0y} \sin \delta}. \quad (\text{A.18})$$

Substituindo a equação (A.15) na equação acima, e depois de algumas identidades trigonométricas, chegamos na seguinte expressão para o ângulo de elipsidade

$$\sin(2\chi) = 2 \frac{E_{0x} E_{0y} \sin \delta}{E_{0x}^2 + E_{0y}^2}. \quad (\text{A.19})$$

Essa é a equação (2.30d), a última equação que propomos mostrar sobre os parâmetros geométricos da elipse de polarização.

## APÊNDICE B – Matriz de Jones de uma placa de onda

Na seção 3.1 obtivemos a matriz de uma placa de onda que gera um retardo de  $\delta$  entre as componentes do campo elétrico paralela e ortogonal ao eixo rápido. O objetivo desse apêndice é, partindo da equação (3.4), chegar na equação (3.5). A equação de partida é dada por

$$\mathbf{J}_{\alpha,\delta} = \begin{pmatrix} e^{i\delta_r} \cos^2(\alpha) + e^{i\delta_l} \sin^2(\alpha) & (e^{i\delta_r} - e^{i\delta_l}) \sin(\alpha) \cos(\alpha) \\ (e^{i\delta_r} - e^{i\delta_l}) \sin(\alpha) \cos(\alpha) & e^{i\delta_r} \sin^2(\alpha) + e^{i\delta_l} \cos^2(\alpha) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Usando as identidades trigonométricas

$$\cos^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha)), \quad (\text{B.2})$$

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha)), \quad (\text{B.3})$$

$$\sin(\alpha) \cos(\alpha) = \frac{1}{2} \sin(2\alpha), \quad (\text{B.4})$$

na equação (B.1) ficamos com a seguinte matriz

$$\mathbf{J}_{\alpha,\delta} = \begin{pmatrix} \left(\frac{e^{i\delta_r} + e^{i\delta_l}}{2}\right) + \cos(2\alpha) \left(\frac{e^{i\delta_r} - e^{i\delta_l}}{2}\right) & \left(\frac{e^{i\delta_r} - e^{i\delta_l}}{2}\right) \sin(2\alpha) \\ \left(\frac{e^{i\delta_r} - e^{i\delta_l}}{2}\right) \sin(2\alpha) & \left(\frac{e^{i\delta_r} + e^{i\delta_l}}{2}\right) - \cos(2\alpha) \left(\frac{e^{i\delta_r} - e^{i\delta_l}}{2}\right) \end{pmatrix}. \quad (\text{B.5})$$

Fazendo o uso da identidade de Euler, pode-se mostrar que

$$e^{i\delta_r} \pm e^{i\delta_l} = (\cos \delta_r \pm \cos \delta_l) + i (\sin \delta_r \pm \sin \delta_l). \quad (\text{B.6})$$

Utilizando as seguintes identidades trigonométricas

$$\cos \delta_r + \cos \delta_l = 2 \cos \left(\frac{\delta_r + \delta_l}{2}\right) \cos \left(\frac{\delta_r - \delta_l}{2}\right), \quad (\text{B.7})$$

$$\cos \delta_r - \cos \delta_l = -2 \sin \left(\frac{\delta_r + \delta_l}{2}\right) \sin \left(\frac{\delta_r - \delta_l}{2}\right), \quad (\text{B.8})$$

$$\sin \delta_r \pm \sin \delta_l = 2 \sin \left(\frac{\delta_r \pm \delta_l}{2}\right) \cos \left(\frac{\delta_r \mp \delta_l}{2}\right), \quad (\text{B.9})$$

na equação (B.6), obtemos as seguintes expressões

$$\begin{aligned} e^{i\delta_r} + e^{i\delta_l} &= 2 \cos \left(\frac{\delta_r + \delta_l}{2}\right) \cos \left(\frac{\delta_r - \delta_l}{2}\right) + 2i \sin \left(\frac{\delta_r + \delta_l}{2}\right) \cos \left(\frac{\delta_r - \delta_l}{2}\right) \\ &= 2 \cos \left(\frac{\delta}{2}\right) e^{i \left(\frac{\delta_r + \delta_l}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (\text{B.10a})$$

$$\begin{aligned} e^{i\delta_r} - e^{i\delta_l} &= -2 \sin \left(\frac{\delta_r + \delta_l}{2}\right) \sin \left(\frac{\delta_r - \delta_l}{2}\right) + 2i \sin \left(\frac{\delta_r - \delta_l}{2}\right) \cos \left(\frac{\delta_r + \delta_l}{2}\right) \\ &= -2i \sin \left(\frac{\delta}{2}\right) e^{i \left(\frac{\delta_r + \delta_l}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (\text{B.10b})$$

onde  $\delta = \delta_l - \delta_r$ . Substituindo as equações acima na matriz de Jones da placa de onda, ficamos com

$$\mathbf{J}_{\alpha,\delta} = e^{i\left(\frac{\delta_r+\delta_l}{2}\right)} \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) - i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos(2\alpha) & -i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \operatorname{sen}(2\alpha) \\ -i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \operatorname{sen}(2\alpha) & \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \cos(2\alpha) \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

o termo  $e^{i\left(\frac{\delta_r+\delta_l}{2}\right)}$  é apenas uma fase global e por isso pode ser desconsiderado. Além disso, podemos separar a matriz acima em duas. Fazendo isso ficamos com a matriz

$$\mathbf{J}_{\alpha,\delta} = \cos\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - i \operatorname{sen}\left(\frac{\delta}{2}\right) \begin{pmatrix} \cos(2\alpha) & \operatorname{sen}(2\alpha) \\ \operatorname{sen}(2\alpha) & -\cos(2\alpha) \end{pmatrix}, \quad (\text{B.12})$$

que é a expressão que propomos demonstrar neste apêndice. É interessante notar que um feixe que atravessa qualquer tipo de placa de onda (e.g., placa de um quarto de onda) pode ser entendido como uma superposição de dois feixes. Um que apenas sofre uma atenuação da intensidade e o outro que sofre atenuação e a ação de uma placa de meia onda.