UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-Graduação em Matemática

Weberson da Silva Arcanjo

Recorrência, Transiência e Slow Down para o Passeio Aleatório em Ambiente Aleatório

Belo Horizonte
2016

Weberson da Silva Arcanjo

Recorrência, Transiência e Slow Down para o Passeio Aleatório em Ambiente Aleatório

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Marcelo Richard Hilário

Belo Horizonte
2016

Arcanjo, Weberson da Silva.

A668r Recorrência, transiência e slow down para o passeio aleatório em ambiente aleatório [recurso eletrônico] / Weberson da Silva Arcanjo –2016.
1 recurso online (37 f. il, color.) : pdf.

Orientador: Marcelo Richard Hilário.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.37

1. Matemática – Teses. 2. Passeio aleatório (Matemática) – Teses. 3.Campos aleatórios – Teses. I. Hilário, Marcelo Richard. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III.Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Recorrência, Transiência e Slow Down para o Passeio Aleatório em Ambiente Aleatório

WEBERSON DA SILVA ARCANJO

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Marcelo Richard Hilário

Prof. Marcelo Richard Hilário
UFMG

Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima
UFMG

Marco Aymone

Prof. Marco Vinicius Bahi Aymone
UFMG

Belo Horizonte, 03 de novembro de 2016.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

ATA DA DUCENTÉSIMA OCTAGÉSIMA SEGUNDA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO ALUNO WEBERSON DA SILVA ARCANJO, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 03 DE NOVEMBRO DE 2016.

Aos três dias do mês de novembro de 2016, às 15h00, na sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de dissertação do aluno **Weberson da Silva Arcanjo**, intitulada: *"Recorrência, Transiência e Slow Down para o Passeio Aleatório em Ambiente Aleatório"*, requisito final para obtenção do Grau de mestre em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Marcelo Richard Hilário, após dar conhecimento aos presentes o teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado, por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 03 de novembro de 2016.

Marcelo Richard Hilário

PROF. MARCELO RICHARD HILÁRIO
Orientador (UFMG)

Bernardo N B de Lima

PROF. BERNARDO NUNES BORGES DE LIMA
Examinador (UFMG)

Marco Aymone

PROF. MARCO VINICIUS BAHI AYMONE
Examinador (UFMG)

Agradecimentos

Aos meus pais, Ana e José, pelo apoio e incentivo que serviram de alicerce para as minhas realizações.

Às minhas irmãs, Dorinha e Simôni, pela amizade e atenção dedicadas quando sempre precisei.

À minha namorada Mallu pelo amor, pela atenção e por sempre estar presente nos momentos difíceis com uma palavra de incentivo.

Ao meu orientador Marcelo Hilário pelo sua dedicação e paciência durante o projeto. Seus conhecimentos e indicações fizeram grande diferença no resultado final deste trabalho.

À banca examinadora pelas valiosas sugestões e correções.

A todos os meus colegas, professores e funcionários do PGMAT.

À Capes, pelo apoio financeiro durante a elaboração deste trabalho.

Resumo

Seja $\{\alpha_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, com $0 \leq \alpha_z \leq 1$, para todo $z \in \mathbb{Z}$. O passeio aleatório em ambiente aleatório, sobre os inteiros, é a sequência $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, onde $X_0 = 0$ e, indutivamente, $X_{n+1} = X_n + 1$, com probabilidade α_{X_n}, e $X_{n+1} = X_n - 1$, com probabilidade $1 - \alpha_{X_n}$. O objetivo deste trabalho é estabelecer um critério de recorrência e transiência para o passeio aleatório em ambiente aleatório em uma dimensão, bem como estudar um fenômeno muito interessante conhecido como *slow down*, que ocorre quando escolhemos uma distribuição específica para o ambiente. Todo o trabalho será baseado no artigo *Random Walks in a Random Environment*, de Fred Solomon, 1975.

Palavras-Chaves : Passeios Aleatórios, Ambientes Aleatórios, Recorrência, Transiência, Slow Down.

Abstract

Let $\{\alpha_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ be a sequence of independent, identically distributed random variables with $0 \leq \alpha_z \leq 1$ for all $z \in \mathbb{Z}$. The random walk in a random environment on the integers is the sequence $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, where $X_0 = 0$ and, inductively, $X_{n+1} = X_n + 1$ with probability α_{X_n} and $X_{n+1} = X_n - 1$ with probability $1 - \alpha_{X_n}$. The objective of this work is to establish a criterion of recurrence and transience for a random walk in random environment in one dimension and study a very interesting phenomenon known as *slow down* which occurs when we choose a specific distribution for the environment. All the work will be based on the paper *Random Walks in a Random Environment*, by Fred Solomon, 1975.

Keywords : Random Walks, Random Environment, Recurrence, Transience, Slow Down.

Índice

1 Introdução **9**

2 Recorrência e Transiência de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **11**

2.1 Primeiros Resultados 11

2.2 O Critério de Recorrência e Transiência 16

3 O Fenômeno de Slow Down para um Passeio Aleatório em um Ambiente Aleatório **18**

3.1 Preliminares 18

3.2 Primeiros Resultados 19

3.3 As Convergências em Probabilidades para X_n e T_n Normalizados 31

Referências Bibliográficas **37**

Capítulo 1

Introdução

O passeio aleatório em um ambiente aleatório, que chamaremos de RWRE, foi introduzido por Fred Solomon em seu trabalho *Random Walks in a Random Environment*, publicado na revista *The Annals of Probability*, em 1975. Veja [7].

Seja $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de variáveis aleatórias tais que $0 \leq \alpha_n \leq 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Definimos o passeio aleatório em ambiente aleatório como sendo uma sequência de variáveis aleatórias $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ com matriz de transição dada por

$$M(n, n+1) = \alpha_n, \qquad M(n, n-1) = 1 - \alpha_n.$$

Observe que essa definição envolve dois componentes aleatórios, a saber, o passeio $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e a sequência $\{\alpha_n\}$, que chamaremos de ambiente. Construiremos o passeio no espaço mensurável $([0,1]^{\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F})$, onde $[0,1]^{\mathbb{Z}}$ é o conjunto de todos os ambientes $\alpha = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ é o conjunto das trajetórias do passeio e $\mathcal{F}$ é a σ-álgebra gerada pelos cilindros.

A principal dificuldade em estudar o RWRE é que, em geral, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ não é uma Cadeia de Markov. Para ver que o futuro, dado o presente, depende do passado, note que a cada vez que atingimos um sítio em $\mathbb{Z}$, aumenta a nossa certeza sobre ele. Para contornar esse problema, estudaremos a evolução do passeio em um ambiente fixo $\alpha = \{\alpha_n\}$ e além disso vamos supor que $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ é uma sequência i.i.d. Assim, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma cadeia de Markov irredutível e homogênea no tempo e, neste caso, denotaremos por M_α a medida de probabilidade associada. Essa é a descrição *quenched* do RWRE.

A fim de aleatorizarmos o ambiente, seja Q uma medida produto sobre $[0,1]^{\mathbb{Z}}$, tal que α é independente e identicamente distribuída. Se $A \subset [0,1]^{\mathbb{Z}}$ e $B \subset \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ são mensuráveis, defina

$$P(A \times B) = \int_A M_\alpha(B) dQ(\alpha).$$

Essa é a descrição *annealed* do RWRE.

Um fato importante é que se $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem uma propriedade quase certamente (q.c.), para quase todo ambiente fixo, então $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tem essa propriedade q.c. Isto é,

Teorema 1.1. *Seja B mensurável e suponha que $M_\alpha(\{X_n\} \in B) = 1$ para quase todo ambiente α. Então $P(\{X_n\} \in B) = 1$.*

Demonstração. $P(\{X_n\} \in B) = \int M_\alpha(B) dQ\alpha = 1.$ □

Esse resultado é fundamental e será usado constantemente, uma vez que antes de obtermos os resultados sob a lei annealed, os obteremos sob a lei quenched.

Esta dissertação será dividida em duas partes. No Capítulo 1, obteremos o critério de recorrência e transiência para o RWRE. Os primeiros lemas desse capítulo serão obtidos através de [4], usando sistema de equações de diferenças. O critério de recorrência será obtido combinando esses lemas com um resultado proveniente da Teoria de Flutuação, que se encontra em [3].

No Capítulo 2 escolheremos um ambiente de tal maneira que ocorra um fenômeno conhecido como *slow down*. Para isso, utilizaremos uma lei dos grandes números, também obtida por Solomon, e o critério de recorrência do Capítulo 1. Neste fenômeno estudaremos as convergências em probabilidade do passeio aleatório $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, e das variáveis aleatórias T_n, que representam o primeiro tempo que o passeio aleatório toca o sítio n, quando normalizadas por funções $f(n)$ adequadas.

Capítulo 2

Recorrência e Transiência de $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

Neste capítulo estamos interessados em obter um critério de recorrência e transiência para o passeio aleatório em ambiente aleatório. Na primeira seção, apresentaremos os primeiros resultados obtidos por Solomon e, na seção seguinte, aplicaremos esses resultados para demonstrar o Teorema 2.2, que é o objeto central deste capítulo.

2.1 Primeiros Resultados

Fixe o ambiente $\alpha = \{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ e seja $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ a Cadeia de Markov sobre $\mathbb{Z}$ com matriz de transição

$$M_\alpha(n, n+1) = \alpha_n, \quad M_\alpha(n, n-1) = \beta_n = 1 - \alpha_n.$$

Seja também

$$f_{ij} = P(X_n = j, \text{ para algum } n > 0 | X_0 = i).$$

Nosso primeiro lema diz respeito aos valores que f_{ij} pode assumir, dependendo dos valores de i e j.

Lema 2.1. *Fixe $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, com $0 < \alpha_n < 1$, para todo $n \in \mathbb{Z}$. Defina $\sigma_n = \beta_n/\alpha_n$ e*

$$\rho_n = \begin{cases} \sigma_0\sigma_1\cdots\sigma_n & n > 0, \\ \sigma_0\sigma_{-1}\cdots\sigma_n, & n < 0. \end{cases}$$

(i) *Se $i > j$, então*

$$f_{ij} = \frac{\displaystyle\sum_{n=i}^{\infty}\rho_n}{\displaystyle\sum_{n=j}^{\infty}\rho_n}.$$

Além disso, $f_{ij} < 1$ se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n < \infty$ e $f_{ij} = 1$ se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\rho_n = \infty$.

(ii) *Se $i < j$, então*

$$f_{ij} = \frac{\sum_{n=-\infty}^{i} (\rho_n)^{-1}}{\sum_{n=-\infty}^{j} (\rho_n)^{-1}}.$$

Além disso, $f_{ij} < 1$ *se* $\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_{-n})^{-1} < \infty$ *e* $f_{ij} = 1$ *se* $\sum_{n=1}^{\infty}(\rho_{-n})^{-1} = \infty$.

Demonstração. (i) Seja $k \in \mathbb{Z}$ tal que $k \geq i \geq j$ e

$${}_k f_{ij} := P(X_n = j \text{ para algum } n \text{ e } X_m \neq k \text{ para } 0 \leq m < n | X_0 = i).$$

Defina também

$$u_i = \begin{cases} {}_k f_{ij} & i \neq j, k, \\ 1 & i = j, \\ 0 & i = k. \end{cases}$$

Assim, obtemos a equação com condição de fronteira

$$u_i = \alpha_i u_{i+1} + \beta_i u_{i-1}, \quad j < i < k,$$

$$u_j = 1, \quad u_k = 0.$$

Esse sistema pode ser resolvido por recorrência e a sua única solução é dada por ${}_k f_{ij}$. Seja r tal que $j < r < k$. Então

$$\begin{aligned} u_r = \alpha_r u_{r+1} + \beta_r u_{r-1} \quad & \Rightarrow \quad \alpha_r(u_{r+1} - u_r) = \beta_r(u_r - u_{r-1}) \\ & \Rightarrow \quad u_{r+1} - u_r = \frac{\beta_r}{\alpha_r}(u_r - u_{r-1}) \\ & \Rightarrow \quad u_{r+1} - u_r = \frac{\beta_r \cdots \beta_{j+1}}{\alpha_r \cdots \alpha_{j+1}}(u_{j+1} - 1). \end{aligned}$$

Usando a convenção de que o produto vazio é igual a 1, obtemos

$$-1 = \sum_{r=j}^{k-1}(u_{r+1} - u_r) = \left(1 + \sum_{r=j+1}^{k-1} \frac{\beta_r \cdots \beta_{j+1}}{\alpha_r \cdots \alpha_{j+1}}\right)(u_{j+1} - 1), \tag{2.1}$$

$$u_i - 1 = \sum_{r=j}^{i-1}(u_{r+1} - u_r) = \left(1 + \sum_{r=j+1}^{i-1} \frac{\beta_r \cdots \beta_{j+1}}{\alpha_r \cdots \alpha_{j+1}}\right)(u_{j+1} - 1). \tag{2.2}$$

De (2.1) podemos escrever

$$-1 = (u_{j+1} - 1)[1 + \sigma_{j+1} + (\sigma_{j+1}\sigma_{j+2}) + \cdots + (\sigma_{j+1} \ldots \sigma_{k-1})]. \tag{2.3}$$

Subtraindo (2.1) de (2.2), temos

$$u_i = (1 - u_{j+1})[(\sigma_{j+1} \cdots \sigma_i) + \cdots + (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1})]. \tag{2.4}$$

A Equação (2.1) também implica que

$$(1 - u_{j+1}) = [1 + \sigma_{j+1} + \sigma_{j+1}\sigma_{j+2} + \cdots + (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1})]^{-1}. \tag{2.5}$$

Substituindo (2.5) em (2.4), temos

$$u_i = \frac{(\sigma_{j+1} \cdots \sigma_i) + \cdots + (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1})}{1 + \sigma_{j+1} + (\sigma_{j+1}\sigma_{j+2}) + \cdots + (\sigma_{j+1} \cdots \sigma_{k-1})} = \frac{\sum_{n=i}^{k-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n}{\sum_{n=j}^{k-1} \sigma_{j+1} \cdots \sigma_n}. \tag{2.6}$$

Multiplicando e dividindo (2.6) por $\sigma_0 \cdots \sigma_j$, obtemos

$$_k f_{ij} = \frac{(\sigma_0 \cdots \sigma_i) + \cdots + (\sigma_0 \cdots \sigma_{k-1})}{(\sigma_0 \cdots \sigma_j) + \cdots + (\sigma_0 \cdots \sigma_{k-1})} = \frac{\sum_{n=i}^{k-1} \rho_n}{\sum_{n=j}^{k-1} \rho_n}. \tag{2.7}$$

Como $_k f_{ij}$ tende a f_{ij} quando k tende a infinito, segue que

$$f_{ij} = \frac{\sum_{n=i}^{\infty} \rho_n}{\sum_{n=j}^{\infty} \rho_n}, \quad se \quad i > j,$$

demonstrando a primeira parte do item (i).

Para demonstrar a segunda parte, suponha que $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$. Logo,

$$\sum_{n=i}^{\infty} \rho_n < \infty \quad \text{e} \quad \sum_{n=j}^{\infty} \rho_n < \infty.$$

Como $i > j$ e $\rho_n > 0$, segue que

$$\sum_{n=i}^{\infty} \rho_n < \sum_{n=j}^{\infty} \rho_n < \infty$$

e, portanto, $f_{ij} < 1$. Por outro lado, se $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$, temos

$$\sum_{n=i}^{\infty} \rho_n = \sum_{n=j}^{\infty} \rho_n = \infty.$$

Assim, segue que

$$f_{ij} = \frac{\sum\limits_{n=i}^{\infty} \rho_n}{\rho_j \cdots \rho_{i-1} + \sum\limits_{n=i}^{\infty} \rho_n} = 1,$$

provando a segunda parte do item (i). A demonstração do item (ii) é análoga. $\square$

Através desse resultado, podemos obter o seguinte lema, que terá papel fundamental na demonstração do critério de recorrência e transiência do passeio aleatório em ambiente aleatório.

Lema 2.2. *Fixe $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$, com $0 < \alpha_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Então*

(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\rho_{-n})^{-1} = \infty$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$ *implica* $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = \infty$ *q.c.*

(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\rho_{-n})^{-1} < \infty$ *e* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$ *implica* $\lim\limits_{n\to\infty} X_n = -\infty$ *q.c.*

(iii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\rho_{-n})^{-1} = \infty = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$ *implica* $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *recorrente. Ou seja,* $-\infty = \liminf\limits_{n\to\infty} X_n < \limsup\limits_{n\to\infty} X_n = \infty$ *q.c.*

Demonstração. (i) Como $\sum_{n=1}^{\infty} (\rho_{-n})^{-1} = \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty$, pelo Lema 2.1, temos que $f_{ij} = 1$ se $i < j$ e $f_{ij} < 1$ se $i > j$. Afirmamos que isso implica em $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ q.c. De fato, para M um inteiro positivo qualquer, é fácil ver que $f_{M,2M} = 1$. Defina

$$t_1 = \inf\{n > 0; X_n = 2M\}, \quad s_1 = \inf\{n > t_1; X_n = M\},$$

e, para cada $i \geq 1$,

$$t_{i+1} = \inf\{n > s_i; X_n = 2M\}, \quad s_{i+1} = \inf\{n > t_{i+1}; X_n = M\},$$

com a convenção de que o ínfimo sobre o conjunto vazio é infinito.

Note que $t_1 < s_1 < t_2 < s_2 < \cdots$. Como $f_{0,2M} = 1$, então $t_1 < \infty$ q.c. e, como $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ para um ambiente fixo é uma cadeia de Markov, temos

$$P(s_i = \infty | t_i < \infty) = 1 - f_{2M,M} > 0.$$

Então,

$$\begin{aligned} P(s_i = \infty \textit{ para algum } i) &= \sum_{i=1}^{\infty} P(s_i = \infty, t_i < \infty) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} P(s_i = \infty | t_i < \infty) P(t_i < \infty) \\ &= (1 - f_{2M,M}) \sum_{i=1}^{\infty} P(t_i < \infty). \end{aligned}$$

Daí,

$$\sum_{i=1}^{\infty} P(t_i < \infty) = \frac{1}{1 - f_{2M,M}} P(s_i = \infty \textit{ para algum } i).$$

Pelo Lema de Borel-Cantelli, $P(t_i < \infty.\ \text{i.v.}) = 0$. Como tomamos $M > 0$ arbitrário, segue que $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ q.c.

(ii) Como $\sum_{n=1}^{\infty} (\rho_{-n})^{-1} < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty$, pelo Lema 2.1, temos que $f_{ij} < 1$, se $i < j$, e $f_{ij} = 1$, se $i > j$. Logo, analogamente ao caso anterior, concluímos que $\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ q.c.

(iii) Suponha agora que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\rho_{-n})^{-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n = \infty.$$

Pelo Lema 2.1, temos que $f_{ij} = 1$, se $i < j$, e $f_{ij} = 1$, se $i > j$. Nesse caso, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é recorrente. Com efeito, suponha que $P(X_n = 0.\ \text{i.v}) < 1$, isto é, $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ retorna à origem uma quantidade finita de vezes. Logo, para cada trajetória ω do passeio, existe $n_0(\omega) \in \mathbb{N}$ tal que $X_n > 0$, para todo $n > n_0(\omega)$, ou $X_n < 0$, para todo $n > n_0(\omega)$. Sem perda de generalidade, suponha que $X_n > 0$, para $n > n_0(\omega)$. Logo, para quase todo ω, existe $K \in \mathbb{Z}$ tal que $X_n > K$, o que é um absurdo, pois para quaisquer i e j tais que $i > j$, nós já sabemos que $f_{ij} = 1$. $\square$

Agora estamos aptos para enunciar o teorema mais importante dessa seção.

Teorema 2.1. *Seja $\{Y_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ uma sequencia de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas, não degeneradas e finitas. Seja também $S_n = Y_1 + ... + Y_n$. Então*

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(S_n > 0)}{n} < \infty$ *se, e somente se,* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ *q.c. Neste caso* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} e^{S_n} < \infty$ *q.c.*

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(S_n > 0)}{n} = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(S_n < 0)}{n}$ *se, e somente se,*

$$-\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n < \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty \textit{ q.c. Neste caso } \sum_{n=1}^{\infty} e^{-S_n} = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} e^{S_n} \textit{ q.c.}$$

Demonstração. As equivalências dos itens (i) e (ii) fazem parte do que chamamos de Teoria de Flutuação. Omitiremos essa primeira parte em cada um dos itens. Os detalhes se encontram em [3], Capítulo 8. A segunda parte em (ii) é imediata, pois $\lim_{n\to\infty} S_n$ não existe. Mostraremos agora a segunda parte em (i). Sob as hipóteses desse teorema, [8] mostra que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1/2}} = \infty \quad \text{q.c.} \quad \text{ou} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1/2}} = -\infty \quad \text{q.c.}$$

Mas, nesse caso, $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, q.c. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n^{1/2}} = -\infty \quad \text{q.c.}$$

Logo, existe $N > 0$ tal que se $n \geq N$ então $S_n < -n^{1/2}$ q.c. Como $e^{-n^{1/2}}$ é uma função positiva e decrescente, aplicando o teste da integral concluímos que $\sum_{n=N}^{\infty} e^{-n^{1/2}} < \infty$ q.c. Daí, pelo teste da comparação de séries

$$0 \leq \sum_{n=N}^{\infty} e^{S_n} < \sum_{n=N}^{\infty} e^{-n^{1/2}} < \infty \quad \text{q.c.}$$

□

2.2 O Critério de Recorrência e Transiência

Aplicando o Lema 2.2 e o Teorema 2.1, podemos obter, finalmente, o critério de recorrência e transiência para o RWRE.

Teorema 2.2. *Seja $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ uma sequência de variáveis aleatórias independentes, identicamente distribuídas, não degeneradas, com $0 < \alpha_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

(i) *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\rho_n > 1)}{n} < \infty$, *então* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ *q.c.*

(ii) *Se* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\rho_n < 1)}{n} < \infty$, *então* $\displaystyle\lim_{n\to\infty} X_n = -\infty$ *q.c.*

(iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\rho_n < 1)}{n} = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\rho_n > 1)}{n}$, *então $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é recorrente. Ou seja,* $\displaystyle -\infty = \liminf_{n\to\infty} X_n < \limsup_{n\to\infty} X_n = \infty$ *q.c.*

Se $E[\ln \sigma_0]$ está definido (possivelmente $\pm\infty$), então (i), (ii) e (iii) são equivalentes, respectivamente, a

(i') $E[\ln \sigma_0] < 0$,

(ii') $E[\ln \sigma_0] > 0$,

(iii') $E[\ln \sigma_0] = 0$.

Demonstração. Suponha que $0 < \alpha_n < 1$ para todo $n \in \mathbb{Z}$. Provaremos apenas o item (i), pois (ii) e (iii) são análogos.
Defina $S_n = \ln \sigma_0 + \ln \sigma_1 + \cdots + \ln \sigma_n$. Logo,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(S_n > 0)}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\ln \sigma_0 + \ln \sigma_1 + \cdots + \ln \sigma_n > 0)}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\ln \rho_n > 0)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\rho_n > 1)}{n}.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(S_n > 0)}{n} < \infty \Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\rho_n > 1)}{n} < \infty.$$

Pelo Teorema 2.1,

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{S_n} = \sum_{n=1}^{\infty} \rho_n < \infty \quad \textit{q.c.}$$

Como $\rho_n = \rho_{-n}$ em distribuição, concluímos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\rho_{-n}} = \infty.$$

Dessa forma, pelo Lema 2.2, $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ q.c. para quase todo ambiente fixo. Pelo Teorema 1.1, conclui-se que

$$P\left(\lim_{n\to\infty} X_n = \infty\right) = 1.$$

Suponha agora que $E[\ln \sigma_0]$ exista e novamente considere $S_n = \ln \sigma_0 + \ln \sigma_1 + \cdots + \ln \sigma_n$. Então, pela Lei Forte dos Grandes Números e pelo Teorema Central do Limite, $E[\ln \sigma_0] < 0$ se, e somente se, $\lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$ q.c.

Aplicando o Teorema 2.1, obtemos $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = -\infty$ se, e somente se,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(\rho_n > 1)}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{P(S_n > 0)}{n} < \infty.$$

Assim, a condição $\sum_{n=1}^{\infty} P(\rho_n > 1)/n < \infty$ pode ser substituída pela expressão $E[\ln \sigma_0] < 0$. Analogamente, podemos substituir $\sum_{n=1}^{\infty} P(\rho_n < 1)/n < \infty$ e $\sum_{n=1}^{\infty} P(\rho_n < 1)/n = \infty = \sum_{n=1}^{\infty} P(\rho_n > 1)/n$ por $E[\ln \sigma_0] > 0$ e $E[\ln \sigma_0] = 0$, respectivamente. $\square$

Capítulo 3

O Fenômeno de Slow Down para um Passeio Aleatório em um Ambiente Aleatório

Neste capítulo estamos interessados no caso em que $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ q.c., mas $\lim_{n\to\infty} X_n/n = 0$ q.c. Ou seja, o passeio é transiente para a direita, mas com velocidade zero. Para simplificar, consideraremos o caso em que $\sigma_j = 0$ ou $\sigma_j = \theta$, para todo $j \in \mathbb{Z}$. Os pontos j em que $\sigma_j = 0$ são chamados barreiras refletoras para a direita. A principal vantagem em fazer isso é que o passeio aleatório pode ser decomposto em excursões independentes de uma barreira até a próxima. Nosso objetivo no final deste capítulo será obter convergências em probabilidades para as variáveis aleatórias T_n, definidas abaixo, e X_n, desde que sejam normalizadas adequadamente por funções $f(n)$, que serão definidas durante o capítulo.

3.1 Preliminares

A seguir apresentaremos todas as notações e definições que utilizaremos neste capítulo. Para a construção do slow down precisaremos da lei dos grandes números para o RWRE. Este resultado também foi provado por Solomon em 1975 e [9] e [1] são boas referências para a demonstração. Segue abaixo o seu enunciado

Teorema 3.1. **(i)** *Se $E[\sigma_0] < 1$ então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = \frac{1 - E[\sigma_0]}{1 + E[\sigma_0]} \quad q.c.$$

(ii) *Se $E[\sigma_0^{-1}] < 1$ então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = -\frac{1 - E[\sigma_0^{-1}]}{1 + E[\sigma_0^{-1}]} \quad q.c.$$

(iii) *Se $E[\sigma_0]^{-1} \leq 1 \leq E[\sigma_0^{-1}]$ então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{X_n}{n} = 0 \quad q.c.$$

Note que as três possibilidades acima são exaustivas e mutuamente exclusivas, pois, pela desigualdade de Jensen, $E[\sigma_0]^{-1} \leq E[\sigma_0^{-1}]$.

Em todo este capítulo assumiremos que

$$\sigma_j = \begin{cases} 0 & \text{com probabilidade} \quad 1-\gamma, \\ \theta & \text{com probabilidade} \quad \gamma, \end{cases}$$

onde $\gamma \in (0,1)$ e θ é um número real positivo fixo.

Observe que $E\sigma_0 = 0(1-\gamma) + \theta\gamma = \theta\gamma$. Assim, se $\gamma\theta \geq 1$ então $\lim_{n\to\infty} X_n/n = 0$ q.c., pelo Teorema 3.1. Portanto, é esse o caso que consideraremos neste capítulo. Em particular, vamos supor $\theta > 1$. Por outro lado, com essa distribuição para σ_j, temos $E[\ln \sigma_0] = -\infty$ e, portanto, $\lim_{n\to\infty} X_n = \infty$ pelo Teorema 2.2. Além disso,

$$\sigma_j = 0 \Rightarrow \frac{1-\alpha_j}{\alpha_j} = 0 \Rightarrow \alpha_j = 1 \text{ e } \sigma_j = \theta \Rightarrow \frac{1-\alpha_j}{\alpha_j} = \theta \Rightarrow \alpha_j = \frac{1}{1+\theta}.$$

Se x é um número real, $[x]$ denotará a sua parte inteira e $\{x\}$ a sua parte fracionária, isto é, $\{x\} = x - [x]$. Denotaremos por E a esperança para variáveis aleatórias sob a lei annealed e E_α será a esperança com respeito ao ambiente fixo $\alpha = \{\alpha_n\}$, isto é, relativa à medida de probabilidade M_α.

Definição 3.1. *Seja $T_0 = 0$ e para cada $n \in \mathbb{N}$ defina*

$$T_n = \begin{cases} \min\{k > 0; X_k = n\}, & \textit{se k existe,} \\ \infty, & \textit{se k não existe.} \end{cases}$$

Seja ainda $\tau_n = T_n - T_{n-1}$ e defina T_{-n} e τ_{-n} analogamente.

Definição 3.2. *Seja $V_0 = 0$ e defina, indutivamente, $V_n = \min\{k > V_{n-1}; \alpha_k = 1\}$, para $n \geq 1$. Note que, para cada $n \in \mathbb{N}$, V_n é a enésima barreira à direita do zero. Como V_n é finita q.c., então T_{V_n} também o é. Observe também que as excursões entre os tempos T_{V_n} e $T_{V_{n+1}}$ formam uma sequência de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas.*

3.2 Primeiros Resultados

Nesta seção, vamos obter os primeiros resultados para o RWRE com o ambiente definido acima. Tais resultados serão usados diretamente na próxima seção para obtermos os limites de T_n e X_n, normalizados por funções $f(n)$.

Comecemos com um lema que relaciona as Transformadas de Laplace de T em tempos consecutivos.

Lema 3.1. *Fixe $\alpha = \{\alpha_n\}$ tal que $\limsup_{n\to\infty} X_n = \infty$ q.c. Seja $F_j(u) = E_\alpha[e^{-uT_j}]$ a Transformada de Laplace de T_j. Então*

$$\frac{1}{F_j(u)} = \frac{\alpha_j e^{-u}}{F_{j+1}(u)} + \frac{\beta_j e^{-u}}{F_{j-1}(u)}, \quad j \geq 1.$$

Demonstração. Se $\alpha = \{\alpha_n\}$ é fixo, então $\tau_1, \tau_2, ...$ são independentes. Note que

$$M_\alpha(\tau_{j+1} = k) = \begin{cases} \alpha_j, & k = 1, \\ \beta_j M_\alpha(\tau_{j+1} + \tau_j = k-1), & k \geq 1. \end{cases}$$

Seja $\varphi_j(u)$ a Transformada de Laplace de τ_j, dado um ambiente fixo $\alpha = \{\alpha_n\}$, isto é, $\varphi_j(u) = E_\alpha[e^{-u\tau_j}]$. Então

$$\varphi_{j+1}(u) = \alpha_j e^{-u} + \beta_j e^{-u}\varphi_j(u)\varphi_{j+1}(u), \text{ se } j \geq 0.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
\varphi_{j+1}(u) &= E_\alpha[e^{-u\tau_{j+1}}] = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-uk} M_\alpha(\tau_{j+1} = k) \\
&= e^{-u} M_\alpha(\tau_{j+1} = 1) + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-uk} M_\alpha(\tau_{j+1} = k) \\
&= \alpha_j e^{-u} + \sum_{k=2}^{\infty} e^{-uk} \beta_j M_\alpha(\tau_{j+1} + \tau_j = k-1) \\
&= \alpha_j e^{-u} + \beta_j e^{-u} \sum_{k=2}^{\infty} e^{-uk} e^{u} M_\alpha(\tau_{j+1} + \tau_j = k-1) \\
&= \alpha_j e^{-u} + \beta_j e^{-u} \sum_{k=2}^{\infty} e^{-u(k-1)} M_\alpha(\tau_{j+1} + \tau_j = k-1) \\
&= \alpha_j e^{-u} + \beta_j e^{-u} E_\alpha[e^{-u(\tau_{j+1}+\tau_j)}] \\
&= \alpha_j e^{-u} + \beta_j e^{-u} E_\alpha[e^{-u\tau_j}] E_\alpha[e^{-u\tau_{j+1}}] \\
&= \alpha_j e^{-u} + \beta_j e^{-u} \varphi_j(u)\varphi_{j+1}(u).
\end{aligned}$$

Agora, note que

$$\begin{aligned}
F_j(u) &= E_\alpha[e^{-uT_j}] = E_\alpha[e^{-u(T_j - T_0)}] \\
&= E_\alpha[e^{-u(\tau_1+\tau_2+...+\tau_j)}] \\
&= E_\alpha[e^{-u\tau_1} e^{-u\tau_2} \cdots e^{-u\tau_j}] \\
&= E_\alpha[e^{-u\tau_1}] E_\alpha[e^{-u\tau_2}] \cdots E_\alpha[e^{-u\tau_j}] \\
&= \varphi_1(u)\varphi_2(u) \cdots \varphi_j(u),
\end{aligned}$$

pois τ_1,τ_2,...,τ_j são independentes. Portanto,

$$F_j(u) = F_{j-1}(u)\varphi_j(u) \Rightarrow \varphi_j(u) = \frac{F_j(u)}{F_{j-1}(u)},$$

para qualquer ambiente fixo. Assim, concluímos que

$$\frac{F_{j+1}(u)}{F_j(u)} = \varphi_{j+1}(u) = \alpha_j e^{-u} + \beta_j e^{-u} \frac{F_j(u)}{F_{j-1}(u)} \frac{F_{j+1}(u)}{F_j(u)} = \alpha_j e^{-u} + \beta_j e^{-u} \frac{F_{j+1}(u)}{F_{j-}(u)}.$$

Logo,

$$\frac{1}{F_j(u)} = \frac{\alpha_j e^{-u}}{F_{j+1}(u)} + \frac{\beta_j e^{-u}}{F_{j-1}(u)}, \quad j \geq 1.$$

□

No lema a seguir, nosso objetivo é encontrar a transformada de Laplace da função de distribuição de $T_{V_{n+1}} - T_{V_n}$ que, como já observamos, são variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas. Como em todo este capítulo, estamos supondo que $\alpha_j = 1$, com probabilidade $1-\gamma$, o que implica em $\beta_j = 0$, com probabilidade $1-\gamma$, e $\alpha_j = 1/(1+\theta)$, com probabilidade γ, implicando em $\beta_j = \theta/(1+\theta)$, com probabilidade γ.

Lema 3.2. *Sejam*

$$\begin{aligned}
\lambda_1(u) &= \frac{e^u}{2}(\theta + 1 + [(\theta+1)^2 - 4\theta e^{-2u}]^{\frac{1}{2}}),\\
\lambda_2(u) &= \frac{e^u}{2}(\theta + 1 - [(\theta+1)^2 - 4\theta e^{-2u}]^{\frac{1}{2}}),
\end{aligned}$$

e defina

$$\begin{aligned}
a(u) &= \lambda_1(u) - e^u,\\
b(u) &= e^u - \lambda_2(u),\\
c(u) &= \lambda_1(u) - \lambda_2(u),\\
\beta(u) &= \theta^{-1}\lambda_1(u).
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Seja também $\varphi(u) = E[e^{-u(T_{V_{n+1}} - T_{V_n})}]$, para todo $n \in N$. Então,

$$\varphi(u) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c(u)(\gamma\beta(u))^j}{a(u) + b(u)(\theta\beta^2(u))^j}.$$

Demonstração. Primeiramente fixaremos $\{\alpha_n\}$. Seja $V_n \leq k \leq V_{n+1}$ e defina $G_k(u) = E_\alpha[e^{-u(T_k - T_{V_n})}]$. Usando o Lema 3.1 e o fato de que $T_{V_n+1} - T_{V_n} \equiv 1$, obtemos,

$$\frac{1}{G_k(u)} = \left(\frac{1}{1+\theta}\right)\frac{e^{-u}}{G_{k+1}(u)} + \left(\frac{\theta}{1+\theta}\right)\frac{e^{-u}}{G_{k-1}(u)}, \qquad V_n < k < V_{n+1}$$

$$G_{V_n} \equiv 1, \qquad G_{V_{n+1}}(u) = e^{-u}.$$

Para resolver essa relação de recorrência, considere inicialmente,

$$\frac{1}{G_k(u)} = H_{k-V_n}(u) = H_s(u),$$

onde $s = k - V_n$, para simplificar as contas. Assim, temos $H_0 \equiv 1$, $H_1 = e^u$, e, usando esses valores, obtemos $H_{-1} = e^u$. Além disso,

$$H_s = \left(\frac{1}{\theta+1}\right)e^{-u}H_{s+1} + \left(\frac{\theta}{\theta+1}\right)H_{s-1} \Rightarrow H_{s+1} = (\theta+1)e^u H_s - \theta H_{s-1}.$$

Multiplicando a relação acima por x^s, $|x| < 1$, e somando para $s \geq 0$, obtemos,

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^{\infty} H_{s+1}x^s &= \sum_{s=0}^{\infty}(\theta+1)e^u H_s x^s - \sum_{s=0}^{\infty} \theta H_{s-1}x^s \Rightarrow \frac{1}{x}\sum_{s=1}^{\infty} H_s x^s \\ &= (\theta+1)e^u \sum_{s=0}^{\infty} H_s x^s - \theta x \sum_{s=-1}^{\infty} H_s x^s.\end{aligned}$$

Seja $f(x) = \sum_{s=0}^{\infty} H_s x^s$. Da última equação, segue que

$$\frac{1}{x}\left(f(x) - H_0\right) = (\theta+1)e^u f(x) - \theta x\left(\frac{H_{-1}}{x} + f(x)\right).$$

Substituindo os valores de H_0 e H_{-1} e isolando $f(x)$, obtemos,

$$f(x) = \frac{1 - \theta e^u x}{\theta x^2 - (\theta+1)e^u x + 1}.$$

Nosso objetivo agora é escrever $f(x)$ em frações parciais. Observe que

$$\theta x^2 - (\theta+1)e^u x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{e^u}{2\theta}\left(\theta + 1 \pm [(\theta+1)^2 - 4\theta e^{-2u}]^{\frac{1}{2}}\right).$$

Logo, se x_1 e x_2 são as raízes dessa equação, então $x_1 = \lambda_1/\theta$ e $x_2 = \lambda_2/\theta$ e, portanto,

$$\theta x^2 - (\theta+1)e^u x + 1 = \theta\left(x - \frac{\lambda_1}{\theta}\right)\left(x - \frac{\lambda_2}{\theta}\right).$$

Sejam P e Q tais que

$$\begin{aligned}f(x) &= \frac{P}{\theta(x - \frac{\lambda_1}{\theta})} + \frac{Q}{(x - \frac{\lambda_2}{\theta})} = \frac{P(x - \frac{\lambda_2}{\theta}) + Q\theta(x - \frac{\lambda_1}{\theta})}{\theta(x - \frac{\lambda_1}{\theta})(x - \frac{\lambda_2}{\theta})} \\ &= \frac{(P + Q\theta)x - (P\frac{\lambda_2}{\theta} + Q\lambda_1)}{\theta(x - \frac{\lambda_1}{\theta})(x - \frac{\lambda_2}{\theta})}.\end{aligned}$$

Temos então que

$$\begin{cases} P + Q\theta = -\theta e^u \\ P\dfrac{\lambda_2}{\theta} + Q\lambda_1 = -1. \end{cases}$$

Resolvendo esse sistema, obtemos

$$P = \theta\left(\frac{e^u\lambda_1 - 1}{\lambda_2 - \lambda_1}\right) \quad \text{e} \quad Q = \frac{1 - \lambda_2 e^u}{\lambda_2 - \lambda_1}.$$

Agora, observe que,

$$\frac{P}{\theta\left(x - \dfrac{\lambda_1}{\theta}\right)} = \frac{-P}{\lambda_1\left(1 - \dfrac{x\theta}{\lambda_1}\right)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{-P}{\lambda_1}\left(\frac{x\theta}{\lambda_1}\right)^s.$$

Analogamente,

$$\frac{Q}{\left(x - \frac{\lambda_2}{\theta}\right)} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{-Q\theta}{\lambda_2} \left(\frac{x\theta}{\lambda_2}\right)^s.$$

Logo,

$$f(x) = -\sum_{s=0}^{\infty} \left(\frac{P\theta^s}{\lambda_1^{s+1}} + \frac{Q\theta^{s+1}}{\lambda_2^{s+1}}\right) x^s,$$

e, portanto,

$$H_s = -\left(\frac{P\theta^s}{\lambda_1^{s+1}} + \frac{Q\theta^{s+1}}{\lambda_2^{s+1}}\right).$$

Agora, note que, como λ_1/θ e λ_2/θ são raízes da equação $\theta x^2 - (\theta+1)e^u x + 1$, pelas relações de Girard, temos

$$\frac{\lambda_1}{\theta} \cdot \frac{\lambda_2}{\theta} = \frac{1}{\theta} \Rightarrow \lambda_1 \cdot \lambda_2 = \theta \quad \text{e} \quad \frac{\lambda_1}{\theta} + \frac{\lambda_2}{\theta} = \frac{(\theta+1)e^u}{\theta} \Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = e^u\theta + e^u.$$

Usando a relação para o produto das raízes e substituindo os valores de P e Q obtemos

$$\begin{aligned} H_s &= \frac{\frac{\theta}{\lambda_1}(e^u\lambda_1 - 1)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\frac{\lambda_1}{\theta})^s} + \frac{(1 - \lambda_2 e^u)\lambda_1^{s+1}}{\lambda_1 - \lambda_2} \\ &= \frac{\frac{\theta}{\lambda_1}(e^u\lambda_1 - 1) + (1 - \lambda_2 e^u)\lambda_1^{s+1} \cdot (\frac{\lambda_1}{\theta})^s}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\frac{\lambda_1}{\theta})^s} \\ &= \frac{(e^u\theta - \lambda_2) + (\lambda_1 - \theta e^u)(\frac{\lambda_1^2}{\theta})^s}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\frac{\lambda_1}{\theta})^s}. \end{aligned}$$

Pela relação da soma das raízes nas relações de Girard, segue que

$$H_s = \frac{(\lambda_1 - e^u) + (e^u - \lambda_2)(\frac{\lambda_1^2}{\theta})^s}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\frac{\lambda_1}{\theta})^s}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} G_k(u) &= \frac{(\lambda_1(u) - \lambda_2(u)) \left(\frac{\lambda_1(u)}{\theta}\right)^{k-V_n}}{(\lambda_1(u) - e^u) + (e^u - \lambda_2(u)) \left(\theta \left[\frac{\lambda_1(u)}{\theta}\right]^2\right)^{k-V_n}} \\ &= \frac{c(u)\,(\beta(u))^{k-V_n}}{a(u) + b(u)\,(\theta\beta^2(u))^{k-V_n}}, \end{aligned}$$

pois $s = k - V_n$ e $H_s = 1/G_k$.

Agora, seja $\varphi(u) = E\left[e^{-u(T_{V_{n+1}} - T_{V_n})}\right]$ com o ambiente aleatorizado. Então

$$\begin{aligned} \varphi(u) &= \sum_{j=1}^{\infty} G_{j+V_n}(u) \cdot P(V_{n+1} - V_n = j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} G_{j+V_n}(u) \cdot \gamma^{j-1} \cdot (1-\gamma) \\ &= \frac{1-\gamma}{\gamma} \sum_{j=1}^{\infty} \gamma^j G_{j+V_n}(u). \end{aligned}$$

Combinando com a solução do sistema, obtemos

$$\varphi(u) = \frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{c(u)(\gamma\beta(u))^j}{a(u) + b(u)(\theta\beta^2(u))^j},$$

o que prova o lema. □

O lema abaixo nos fornece relações assintóticas para a, b, c e β.

Lema 3.3. *Se $u \searrow 0$ então*

(i) $a(u) = \theta - 1 + O(u) \searrow \theta - 1,$

(ii) $b(u) = \dfrac{2\theta}{\theta - 1} u + O(u^2),$

(iii) $c(u) = \theta - 1 + O(u) \searrow \theta - 1,$

(iv) $\beta(u) = 1 + O(u) \searrow 1.$

Demonstração. Note que as expansões de e^u e $\sqrt{1+u}$ em série de Taylor são

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \frac{u^3}{6} + \cdots \quad e \quad \sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} - \frac{u^2}{8} + \cdots .$$

(i) Se $u \searrow 0$, podemos escrever $e^u = 1 + O(u)$ e $\sqrt{1+u} = 1 + O(u)$. Assim, temos,

$$\begin{aligned} a(u) &= \lambda_1(u) - e^u = \frac{e^u}{2}(\theta + 1 + [(\theta+1)^2 - 4\theta e^{-2u}]^{\frac{1}{2}}) - e^u \\ &= e^u \left(\frac{\theta+1}{2} - 1\right) + \frac{1}{2}\left[(\theta+1)^2 e^{2u} - 4\theta\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= [1 + O(u)]\left(\frac{\theta-1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left[(\theta+1)^2(1+O(u)) - 4\theta\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\theta-1}{2} + O(u) + \left[(\theta-1)^2 + O(u)\right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{\theta-1}{2} + O(u) + \frac{\theta-1}{2}[1 + O(u)] = \theta - 1 + O(u). \end{aligned}$$

(ii) Se $u \searrow 0$, podemos escrever $e^u = 1 + u + O(u^2)$ e $\sqrt{1+u} = 1 + \frac{u}{2} + O(u^2)$. Logo,

$$\begin{aligned}
b(u) &= e^u - \lambda_2(u) = e^u - \frac{e^u}{2}(\theta+1) + \frac{[(\theta+1)^2e^{2u} - 4\theta]^{1/2}}{2} \\
&= \left[1 + u + O(u^2)\right]\left(1 - \frac{\theta+1}{2}\right) + \frac{[(\theta+1)^2(1+2u+O(u^2)) - 4\theta]^{1/2}}{2} \\
&= \left[1 + u + O(u^2)\right]\left(\frac{1-\theta}{2}\right) + \frac{[(\theta-1)^2 + 2(\theta+1)^2u + O(u^2)]^{1/2}}{2} \\
&= \frac{1-\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2}u + O(u^2) + \frac{\theta-1}{2}\left[1 + \frac{2(\theta+1)^2u}{(\theta-1)^2} + O(u^2)\right]^{1/2} \\
&= \frac{1-\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2}u + O(u^2) + \frac{\theta-1}{2}\left[1 + \frac{1}{2}\left[\frac{2(\theta+1)^2u}{(\theta-1)^2} + O(u^2)\right] + O(u^2)\right] \\
&= \frac{1-\theta}{2} + \frac{1-\theta}{2}u + O(u^2) + \frac{\theta-1}{2} + \frac{(\theta+1)^2u}{2(\theta-1)^2} + O(u^2) \\
&= \frac{2\theta}{\theta-1}u + O(u^2).
\end{aligned}$$

(iii) Analogamente ao item (i), temos

$$\begin{aligned}
c(u) &= \lambda_1(u) - \lambda_2(u) = e^u\left[(\theta+1)^2 - 4\theta e^{-2u}\right]^{1/2} = \left[(\theta+1)^2e^{2u} - 4\theta\right]^{1/2} \\
&= \left[(\theta+1)^2(1+O(u)) - 4\theta\right]^{1/2} = \left[(\theta-1)^2 + O(u)\right]^{1/2} \\
&= (\theta-1)\left[1 + O(u)\right]^{1/2} = \theta - 1 + O(u).
\end{aligned}$$

(iv) Finalmente,

$$\begin{aligned}
\beta(u) &= \frac{\lambda_1(u)}{\theta} = \frac{e^u}{2\theta}\left[\theta + 1 + [(\theta+1)^2 - 4\theta e^{-2u}]^{1/2}\right] \\
&= \frac{1}{\theta}\left[\left(\frac{\theta+1}{2}\right)(1+O(u)) + \frac{[(\theta+1)^2e^{2u} - 4\theta]^{1/2}}{2}\right] \\
&= \frac{1}{\theta}\left[\frac{\theta+1}{2} + O(u) + \frac{\theta+1}{2} + O(u)\right] = \frac{1}{\theta}\left[\theta + O(u)\right] \\
&= 1 + O(u).
\end{aligned}$$

□

A seguir, mostramos que podemos trocar φ por ψ, onde

$$\psi = \frac{1-\gamma}{\gamma} \cdot \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\gamma^j}{1 + \nu u \theta^j}\ , \qquad \nu = \frac{2\theta}{(\theta-1)^2}.$$

Lema 3.4. *Se $u \searrow 0$, então $\varphi(u) - \psi(u) = O(u)$.*

Demonstração. Sejam

$A_1(u) = \varphi(u) - \dfrac{1-\gamma}{\gamma}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\dfrac{(\theta-1)\gamma^j}{a+b(\theta\beta^2)^j}$,

$A_2(u) = \dfrac{1-\gamma}{\gamma}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}(\theta-1)\gamma^j\left(\dfrac{1}{a+b(\theta\beta^2)^j} - \dfrac{1}{a+b\theta^j}\right)$ e

$A_3(u) = \dfrac{1-\gamma}{\gamma}\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\dfrac{(\theta-1)\gamma^j}{a+b\theta^j}$ - $\psi(u)$.

Note que $\varphi(u) - \psi(u) = A_1(u) + A_2(u) + A_3(u)$. Portanto, devemos mostrar que $A_j(u) = O(u)$ quando $u \searrow 0$, para $j = 1, 2, 3$. Usando o lema anterior, temos

$$\begin{aligned}
|A_1(u)| &= \left|\frac{1-\gamma}{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{c(\gamma\theta)^j}{a+b(\theta\beta^2)^j} - \frac{1-\gamma}{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\theta-1)\gamma^j}{a+b(\theta\beta^2)^j}\right| \\
&\leq \left|\frac{1-\gamma}{\gamma a}\sum_{j=1}^{\infty}(c\beta^j-(\theta-1))\gamma^j\right| = \left|\frac{1-\gamma}{\gamma a}\left(\frac{c}{1-\beta\gamma} - \frac{\theta-1}{1-\gamma} - (c-\theta+1)\right)\right| \\
&\leq \left|\frac{1-\gamma}{\gamma a}\left(\frac{c}{1-\beta\gamma} - \frac{\theta-1}{1-\gamma}\right)\right| = \left|\frac{1-\gamma}{\gamma a}\left(\frac{\theta-1+O(u)}{1-\beta\gamma} - \frac{\theta-1}{1-\gamma}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1-\gamma}{\gamma a}\left(\frac{\theta-1+O(u)}{1-\beta\gamma} - \frac{\theta-1+O(u)}{1-\gamma} + \frac{\theta-1+O(u)}{1-\gamma} - \frac{\theta-1}{1-\gamma}\right)\right| \\
&= \left|\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{1}{1-\beta\gamma} - \frac{1}{1-\gamma}\right) + \frac{O(u)}{1-\gamma}\right| = O(u).
\end{aligned}$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\begin{aligned}
|A_2(u)| &= \left|\frac{1-\gamma}{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}(\theta-1)\gamma^j\left(\frac{1}{a+b(\theta\beta^2)^j} - \frac{1}{a+b\theta^j}\right)\right| \\
&\leq \frac{(1-\gamma)(1-\theta)}{\gamma a}\sum_{j=1}^{\infty}((\gamma\beta^2)^j - \gamma^j) = O(u)
\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}
|A_3(u)| &= \left|\frac{1-\gamma}{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\theta-1)\gamma^j}{a+b\theta^j} - \frac{1-\gamma}{\gamma}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma^j}{1+\nu u\theta^j}\right| \\
&\leq \frac{1-\gamma}{\gamma}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(a-(\theta-1)+|b-\nu(\theta-1)u|\theta^j)\gamma^j}{(a+b\theta^j)(1+\nu u\theta^j)} \\
&\leq (a-(\theta-1))\cdot M_1 + \frac{|b-\nu(\theta-1)u|}{u}\cdot M_2 \\
&\leq O(u),
\end{aligned}$$

onde M_1 e M_2 são constantes positivas finitas. □

O lema abaixo é o primeiro passo na direção de se obter convergência em probabilidade para T_{V_n}.

Lema 3.5. *Seja $u > 0$. São válidas as seguintes implicações:*

(i) *Se $\gamma\theta = 1$, então*

$$\lim_{y\to\infty} y\left(1-\varphi\left(\frac{u}{y\ln y}\right)\right) = \frac{2\theta u}{(\theta-1)\ln\theta}.$$

(ii) *Se $\gamma\theta > 1$, então*

$$\lim_{y\to\infty}\left(y\left(1-\varphi\left(\frac{u}{y^{\rho}}\right)\right) - Ku\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\{\omega(y)\}}}{1+\nu u\theta^{j-\{\omega(y)\}}}\right) = 0,$$

onde $\nu = \dfrac{2\theta}{(\theta-1)^2}$, $K = \dfrac{1-\gamma}{\gamma}\cdot\nu$, $\omega(y) = \log_{\frac{1}{\gamma}} y$ *e* $\rho = \log_{\frac{1}{\gamma}}\theta > 1$.

Demonstração. Note que, para cada $u > 0$ e $\rho > 1$, temos $u/y\ln y \searrow 0$ e $u/y^{\rho} \searrow 0$, quando $y \to \infty$. Assim, pelo lema anterior, podemos trocar φ por ψ. Seja $\sigma = \sigma(x) = \log_{\theta} x$. Então

$$\begin{aligned}
1-\psi\left(\frac{u}{x}\right) &= 1-\frac{1-\gamma}{\gamma}\cdot\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma^j}{1+\nu\frac{u}{x}\theta^j} = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\gamma}{1-\gamma}-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma^j}{1+\nu\frac{u}{x}\theta^j}\right)\\
&= \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\gamma^j-\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma^j}{1+\nu\frac{u}{x}\theta^j}\right) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\gamma^j(1+\nu\frac{u}{x}\theta^j)-\gamma^j}{1+\nu\frac{u}{x}\theta^j}\\
&= \frac{1-\gamma}{\gamma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\nu\frac{u}{x}(\gamma\theta)^j}{1+\nu\frac{u}{x}\theta^j} = K\frac{u}{x}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^j}{1+\nu\frac{u}{x}\theta^j} = K\frac{u}{x}(\gamma\theta)^{\sigma}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\sigma}}{1+\nu u\theta^{j-\sigma}}\\
&= Ku\gamma^{\sigma}\cdot\sum_{j=1-[\sigma]}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\{\sigma\}}}{1+\nu u\theta^{j-\{\sigma\}}}.
\end{aligned}$$

(i) Se $\gamma\theta = 1$, então $\gamma^{\sigma} = 1/\theta^{\sigma} \Rightarrow \gamma^{\sigma} = 1/x$. Portanto, pela expressão acima, temos

$$\begin{aligned}
1-\psi\left(\frac{u}{x}\right) &= K\frac{u}{x}\cdot\left(\sum_{j=1-[\sigma]}^{0}\frac{1}{1+\nu u\theta^{j-\{\sigma\}}}+O(1)\right) = K\frac{u}{x}\left([\sigma]+O(1)\right)\\
&= K\frac{u}{x}\left([\log_{\theta}\gamma]+O(1)\right).
\end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}\left(1-\psi\left(\frac{u}{x}\right)\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}\left(K\frac{u}{x}\left([\log_{\theta}\gamma]+O(1)\right)\right) = \frac{Ku}{\ln\theta}.$$

Substituindo o valor de K e usando o fato de que $\gamma\theta = 1$, concluímos que

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\ln x}\left(1-\psi\left(\frac{u}{x}\right)\right) = \frac{2\theta u}{(\theta-1)\ln\theta}.$$

Fazendo $x = y\ln y$, obtemos

$$\lim_{y\to\infty}\frac{y\ln y}{\ln(y\ln y)}\left(1-\psi\left(\frac{u}{y\ln y}\right)\right) = \lim_{y\to\infty}\frac{y\ln y}{\ln y+\ln\ln y}\left(1-\psi\left(\frac{u}{y\ln y}\right)\right)=\frac{2\theta u}{(\theta-1)\ln\theta}.$$

Dividindo os dois lados por $\ln y/(\ln y+\ln\ln y)$ e usando o fato de que esta expressão tende a 1 quando $y\to\infty$, obtemos o resultado.

(ii) Seja $\gamma\theta > 1$. Então

$$\begin{aligned}\frac{1}{\gamma^\rho}=\theta \quad &\Rightarrow \quad \gamma^\rho=\theta^{-1}\\ &\Rightarrow \quad \gamma^{\rho\sigma}=\theta^{-\sigma}\\ &\Rightarrow \quad \gamma^{\rho\sigma}=x^{-1}\\ &\Rightarrow \quad \gamma^{\sigma}=x^{-1/\rho}.\end{aligned}$$

Daí, temos

$$\begin{aligned}x^{1/\rho}\left(1-\psi\left(\frac{u}{x}\right)\right) &= x^{1/\rho}Ku\gamma^\sigma\cdot\sum_{j=1-[\sigma]}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\{\sigma\}}}{1+\nu u\theta^{j-\{\sigma\}}}\\ &= Ku\cdot\sum_{j=1-[\sigma]}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\{\sigma\}}}{1+\nu u\theta^{j-\{\sigma\}}}.\end{aligned}$$

Como os limites existem, segue que

$$\lim_{x\to\infty}\left(x^{1/\rho}\left(1-\psi\left(\frac{u}{x}\right)\right)-Ku\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\{\sigma\}}}{1+\nu u\theta^{j-\{\sigma\}}}\right)=0.$$

Fazendo $y = x^{1/\rho}$ e observando que

$$\begin{aligned}\sigma=\sigma(x) &= \log_\theta x=\log_\theta y^\rho=\rho\log_\theta y\\ &= \rho\frac{\log_{\frac{1}{\gamma}} y}{\log_{\frac{1}{\gamma}}\theta}=\omega(y),\end{aligned}$$

segue o resultado. $\square$

Finalmente podemos obter a convergência em probabilidade para T_{V_n}.

Lema 3.6. **(i)** *Se $\gamma\theta = 1$, então*

$$\frac{T_{V_n}}{2n\log_\theta n}\longrightarrow\frac{\theta}{\theta-1}, \textit{em probabilidade, quando } n\to\infty.$$

(ii) *Se $\gamma\theta > 1$ e $\{n_k\}$ é uma sequência de inteiros tendendo a infinito tal que*

$$\lim_{k\to\infty}\{\log_{\frac{1}{\gamma}} n_k\}=\varepsilon,$$

então $n_k^{-\rho} \cdot T_{V_{n_k}}$ converge em lei, quando $k \longrightarrow \infty$, para a função de distribuição de probabilidade com Transformada de Laplace

$$exp\left(-Ku \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(\gamma\theta)^{j-\varepsilon}}{1+\nu u\theta^{j-\varepsilon}}\right), \tag{3.2}$$

onde $\nu = 2\theta/(\theta-1)^2$, $K = \nu(1-\gamma)/\gamma$ e $\rho = \log_{1/\gamma}\theta > 1$.

Demonstração. Note que $T_{V_n} = T_{V_n} - T_{V_{n-1}} + T_{V_{n-1}} - T_{V_{n-2}} + T_{V_{n-2}} - \cdots + T_{V_1}$. Como $\{T_{V_j} - T_{V_{j-1}}\}$ para $j \geq 2$, é i.i.d., temos

$$E\left[e^{-u\left(\frac{T_{V_n}}{f(n)}\right)}\right] = \varphi\left(\frac{u}{f(n)}\right)^{n-1} \cdot E\left[e^{-u\left(\frac{T_{V_1}}{f(n)}\right)}\right].$$

Se $f(n) \to \infty$, quando $n \to \infty$, então

$$\lim_{n\to\infty} E\left[e^{-u\left(\frac{T_{V_n}}{f(n)}\right)}\right] = \varphi\left(\frac{u}{f(n)}\right)^{n}.$$

(i) Se $\gamma\theta = 1$, pelo Lema 3.5, temos

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \varphi\left(\frac{u}{n\ln n}\right)^n &= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{n\left(1-\varphi\left(\frac{u}{n\ln n)}\right)\right)}{n}\right)^n \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\left(\frac{2\theta u}{(\theta-1)\ln\theta} + o(1)\right)\right)^n \\
&= \exp\left(\frac{2\theta u}{(\theta-1)\ln\theta}\right),
\end{aligned}$$

uma vez que

$$\left(1 - \frac{x+c_n}{n}\right)^n \to e^{-1}, \text{ se } c_n \to 0, \text{ quando } n \to \infty. \tag{3.3}$$

Logo, pela Observação 3.1 abaixo, concluímos que

$$\frac{T_{V_n}}{n\ln n} \to \frac{2\theta}{(\theta-1)\ln\theta},$$

em distribuição e, portanto, em probabilidade, pelo fato de $2\theta/(\theta-1)\ln\theta$ ser constante. Fazendo a mudança no logaritmo, segue o resultado.

(ii) Seja $\gamma\theta > 1$ e $\{n_k\}$ é uma sequência de inteiros tendendo a infinito tal que

$$\lim_{k\to\infty}\{\log_{\frac{1}{\gamma}} n_k\} = \varepsilon.$$

Usando igualdade obtida no início da demonstração e tomando $f(n) = n_k^\rho$, temos

$$\begin{aligned}\lim_{k\to\infty}\varphi\left(\frac{u}{n_k^\rho}\right)^{n_k} &= \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{n_k\left(1-\varphi\left(\frac{u}{n_k^\rho}\right)\right)}{n_k}\right)^{n_k}\\ &= \lim_{k\to\infty}\left(1-\frac{1}{n_k}\left(Ku\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\varepsilon}}{1+\nu u\theta^{j-\varepsilon}}+o(1)\right)\right)^{n_k}\\ &= \exp\left(-Ku\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\varepsilon}}{1+\nu u\theta^{j-\varepsilon}}\right).\end{aligned}$$

Novamente pela Observação 3.1, concluímos que $n_k^{-\rho}\cdot T_{V_{n_k}}$ converge, em lei, para a função de distribuição cuja Transformada de Laplace é a expressão (3.2). Note agora que, quando $u \searrow 0$, a expressão (3.2) tende a 1 e, portanto, é a transformada de Laplace de uma função distribuição de probabilidade não defectível (ver observação abaixo). □

Observação 3.1. *Dizemos que uma função de distribuição de probabilidade F é **defectível** se $F(\infty) < 1$. No último lema usamos o seguinte resultado.*

Teorema 3.2. *Seja $\{F_n\}$ uma sequência de distribuições de probabilidade, onde cada F_n possui Transformada de Laplace φ_n.*

Se $F_n \to F$, onde F é uma função de distribuição possivelmente defectível com transformada φ, então $\varphi_n(u) \to \varphi(u)$, para $u > 0$.

Reciprocamente, se a sequência $\{\varphi_n(u)\}$ converge, para cada $u > 0$, para um limite $\varphi(u)$, então φ é a transformada de uma função de distribuição F, possivelmente defectível, e $F_n \to F$.

Além disso, F é não defectível se, e somente se, $\varphi(u) \to 1$ quando $u \to 0$.

Demonstração. Ver [5], página 431. □

Além disso, [6] mostra também que a função de distribuição F, cuja transformada é dada por (3.2), é contínua e concentrada em $(0,\infty)$, isto é, $F(x) \searrow 0$, se $x \searrow 0$ e $F(x) \nearrow 1$, se $x \nearrow \infty$.

O lema auxiliar a seguir será usado diretamente para obtermos o limite da função de distribuição de T_n, quando normalizada de forma apropriada.

Lema 3.7. *Sejam $\{V_x\}$ e $\{T_x\}$, $0 \le x < \infty$, famílias não decrescentes de variáveis aleatórias não negativas tais que*

$$\frac{V_x}{x} \to \frac{1}{\beta} \quad \text{em probabilidade, quando } x\to\infty, \qquad 0<\beta<\infty.$$

Então, para cada $0 < \delta < \beta$ e qualquer sequência $y = y_k$ tendendo a infinito,

$$\liminf_{y\to\infty}\mathcal{L}\left(\frac{T_{V_y(\beta+\delta)}}{f(y)}\right) \le \liminf_{y\to\infty}\mathcal{L}\left(\frac{T_y}{f(y)}\right), \tag{3.4}$$

$$\limsup_{y\to\infty}\mathcal{L}\left(\frac{T_y}{f(y)}\right) \le \limsup_{y\to\infty}\mathcal{L}\left(\frac{T_{V_y(\beta-\delta)}}{f(y)}\right), \tag{3.5}$$

onde $\mathcal{L}(X)$ é a transformada de Laplace da função de distribuição de X e f é uma função estritamente positiva.

Demonstração. Sejam $0 < \delta < \beta$ e defina

$$A = A_{x,\delta} = \{y; \beta - \delta < \frac{x}{y} < \beta + \delta\}.$$

Note que, como T_y é crescente,

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\left(f\left(\frac{x}{\beta-\delta}\right)^{-1} \cdot T_{\frac{x}{\beta-\delta}}\right) &= E\left[e^{-u\left(f\left(\frac{x}{\beta-\delta}\right)^{-1} \cdot T_{\frac{x}{\beta-\delta}}\right)}\right] \\
&= E\left[E\left[e^{-u\left(f\left(\frac{x}{\beta-\delta}\right)^{-1} \cdot T_{\frac{x}{\beta-\delta}}\right)}\middle| V_x\right]\right] \\
&= E\left[\mathbb{1}_{\{V_x \in A\}} E\left[e^{-u\left(f\left(\frac{x}{\beta-\delta}\right)^{-1} \cdot T_{\frac{x}{\beta-\delta}}\right)}\middle| V_x\right]\right] \\
&\quad + E\left[\mathbb{1}_{\{V_x \in A^c\}} E\left[e^{-u\left(f\left(\frac{x}{\beta-\delta}\right)^{-1} \cdot T_{\frac{x}{\beta-\delta}}\right)}\middle| V_x\right]\right] \\
&\leq E\left[\mathbb{1}_{\{V_x \in A\}} \cdot e^{-uf\left(\frac{x}{\beta-\delta}\right)^{-1} \cdot T_{V_x}}\right] + P(V_x \in A^c) \\
&\leq E\left[e^{-uf\left(\frac{x}{\beta-\delta}\right)^{-1} \cdot T_{V_x}}\right] + P(V_x \in A^c).
\end{aligned}$$

Observe que $\lim_{x\to\infty} P(V_x \in A^c) = 0$. De fato, como $x/V_x \to \beta$, em probabilidade, para todo $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} P\left(\left|\frac{x}{V_x} - \beta\right| \geq \delta\right) = 0 \quad &\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} P\left(\frac{x}{V_x} \leq \beta - \delta \quad \text{ou} \quad \frac{x}{V_x} \geq \delta + \beta\right) = 0 \\
&\Rightarrow \quad \lim_{x\to\infty} P(V_x \in A^c) = 0.
\end{aligned}$$

Assim, se $\{y = y_k\}$ é uma sequência tendendo a infinito e $x = (\beta - \delta)y$, a desigualdade acima implica

$$\limsup_{y\to\infty} \mathcal{L}\left(\frac{T_y}{f(y)}\right) \leq \limsup_{y\to\infty} \mathcal{L}\left(\frac{T_{V_y(\beta-\delta)}}{f(y)}\right).$$

A demonstração de (3.4) é análoga. □

3.3 As Convergências em Probabilidades para X_n e T_n Normalizados

O limite das distribuições de T_n normalizadas adequadamente será obtido facilmente combinando os Lemas 3.6 e 3.7.

Teorema 3.3. **(i)** *Se $\gamma\theta = 1$, então*

$$\frac{T_{V_n}}{2n \log_\theta n} \longrightarrow 1, \text{ em probabilidade, quando } n \to \infty.$$

(ii) *Se $\gamma\theta > 1$ e $\{n_k\}$ é uma sequência de inteiros tendendo a infinito tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \{\log_{\frac{1}{\gamma}} n_k\} = \varepsilon,$$

então $n_k^{-\rho} \cdot T_{V_{n_k}}$ converge em lei, quando $k \longrightarrow \infty$, para a função de distribuição de probabilidade com Transformada de Laplace

$$\exp\left(-Lu \cdot \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{(\gamma\theta)^{j-\eta}}{1+\mu u\theta^{j-\eta}}\right),$$

onde $\mu = 2(1-\gamma)^{\rho}\theta/(\theta-1)^2$, $L = \mu(1-\gamma)/\gamma$, $\eta = \varepsilon + \log_{1/\gamma}(1-\gamma)$ e $\rho = \log_{1/\gamma}\theta > 1$.

Demonstração. Sejam $T_x = T_{[x]}$ e $V_x = V_{[x]}$. Então, pela lei dos grandes números,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{V_x}{x} = \frac{1}{\beta} = \frac{1}{1-\gamma}, \quad \text{q.c.}$$

(i) Seja $\gamma\theta = 1$. Observe que

$$\mathcal{L}\left(\frac{T_{V_{n(\beta\pm\delta)}}}{2n\log_\theta n}\right) = \mathcal{L}\left(\frac{T_{V_{n(\beta\pm\delta)}}}{2n(\beta\pm\delta)\log_\theta n(\beta\pm\delta)} \cdot \frac{(\beta\pm\delta)\log_\theta n(\beta\pm\delta)}{\log_\theta n}\right).$$

Pelo Lema 3.6 e pela Observação 3.1, concluímos que

$$\mathcal{L}\left(\frac{T_{V_{n(\beta\pm\delta)}}}{2n\log_\theta n}\right) \longrightarrow \mathcal{L}\left(\frac{\theta(\beta\pm\delta)}{\theta-1}\right) = \exp\left(-\frac{\theta(\beta\pm\delta)u}{\theta-1}\right).$$

Seja $\delta > 0$ suficientemente pequeno. Pelo Lema 3.7,

$$\exp\left(-\frac{\theta(\beta+\delta)u}{\theta-1}\right) \le \liminf_{n\to\infty} E\left[\exp\left(-u\cdot\frac{T_n}{2n\log_\theta n}\right)\right]$$

e

$$\limsup_{n\to\infty} E\left[\exp\left(-u\cdot\frac{T_n}{2n\log_\theta n}\right)\right] \le \exp\left(-\frac{\theta(\beta-\delta)u}{\theta-1}\right).$$

Portanto,

$$E\left[\exp\left(-u\cdot\frac{T_n}{2n\log_\theta n}\right)\right] \longrightarrow \exp\left(-\frac{\theta\beta u}{\theta-1}\right).$$

Pela Observação 3.1, segue que

$$\frac{T_n}{2n\log_\theta n} \longrightarrow \frac{\theta\beta}{\theta-1,}$$

em distribuição e, portanto, em probabilidade, uma vez que o limite é constante. Como $\gamma\theta = 1$ e $\beta = 1-\gamma$, temos

$$\theta - \gamma\theta = \theta - 1 \Rightarrow 1-\gamma = \frac{\theta-1}{\theta} \Rightarrow \beta = \frac{\theta-1}{\theta}.$$

Concluimos então que

$$\frac{T_n}{2n\log_\theta n} \longrightarrow 1, \quad \text{em probabilidade.}$$

(ii) Seja $\{n = n_k\}$ uma sequência de inteiros tal que

$$\lim_{k\to\infty} n = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty}\{\log_{1/\gamma} n\} = \varepsilon.$$

Então, temos

$$\{\log_{1/\gamma}[n(\beta\pm\delta)]\} \equiv \{\log_{1/\gamma} n\} + \{\log_{1/\gamma}(\beta\pm\delta)\} + \left\{\log_{1/\gamma}\frac{[n(\beta\pm\delta)]}{n(\beta\pm\delta)}\right\} \mod 1,$$

onde δ é suficientemente pequeno de tal forma que o lado direito é contínuo. Portanto, quando $n\to\infty$, nós obtemos que

$$\{\log_{1/\gamma}[n(\beta\pm\delta)]\} \to \varepsilon + \{\log_{1/\gamma}(\beta\pm\delta)\} \mod 1.$$

Logo,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left(\frac{T_{V_{n(\beta\pm\delta)}}}{n^\rho}\right) &= \mathcal{L}\left(\frac{T_{V_{n(\beta\pm\delta)}}}{(n(\beta\pm\delta))^\rho}\cdot(\beta\pm\delta)^\rho\right)\\ &\longrightarrow \exp\left(-Ku(\beta\pm\delta)^\rho\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\eta}}{1+\nu u(\beta\pm\delta)^\rho\theta^{j-\eta}}\right),\end{aligned}$$

pelo Lema 3.6 e pela Observação 3.1, onde $\eta = \varepsilon + \{\log_{1/\gamma}(\beta\pm\delta)\}$. Novamente, pelo Lema 3.7, concluímos que $n_k^{-\rho}\cdot T_{V_{n_k}}$ converge em lei, quando $k\to\infty$, para a função de distribuição de probabilidade com Transformada de Laplace

$$\exp\left(-Lu\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\eta}}{1+\mu u\theta^{j-\eta}}\right),$$

onde $\mu = 2(1-\gamma)^\rho\theta/(\theta-1)^2$ e $L = (1-\gamma)\mu/\gamma$. $\square$

Corolário 3.3.1. *Se $\gamma\theta > 1$, então*

$$\frac{\ln T_n}{\ln n} \longrightarrow \log_{\frac{1}{\gamma}}\theta, \text{ em probabilidade, quando } n\to\infty. \tag{3.6}$$

Demonstração. Seja $\{n_k\}$ uma sequência crescente de inteiros. Para provar (3.6) é suficiente mostrar que existe uma subsequência $\{m_k\}\subset\{n_k\}$ tal que (3.6) é verdadeira ao longo de $\{m_k\}$. Ver [2] página 16, e notar que o limite é constante. Portanto, seja $m = \{m_k\}\subset\{n_k\}$ tal que

$$\lim_{k\to\infty} m = \infty, \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty}\{\log_{1/\gamma} m\} = \varepsilon.$$

Pelo Teorema 3.3 e pela Observação 3.1, temos que T_m/m^ρ converge em lei para uma função de distribuição que é concentrada em $(0,\infty)$. Portanto, para todo $\delta > 0$,

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{k\to\infty} P\left(\frac{1}{m^\delta} < \frac{T_m}{m^\rho} < m^\delta\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} P\left((\rho-\delta)\ln m < \ln T_m < (\rho+\delta)\ln m\right) \\ &= \lim_{k\to\infty} P\left(\left|\frac{\ln T_m}{\ln m} - \rho\right| < \delta\right). \end{aligned}$$

Logo, $\ln T_m/\ln m$ converge em probabilidade para $\rho = \log_{1/\gamma}\theta$. □

Agora, vamos obter o limite das distribuições de X_n, quando normalizadas de forma adequada, assim como fizemos para T_n.

Teorema 3.4. **(i)** *Se $\gamma\theta = 1$, então*

$$\frac{X_n}{n/\log_\theta n} \longrightarrow \frac{1}{2}, \textit{em probabilidade, quando } n \to \infty.$$

(ii) *Se $\gamma\theta > 1$ e $\{n_k\}$ é uma sequência de inteiros tendendo a infinito tal que*

$$\lim_{k\to\infty}\{\log_{\frac{1}{\gamma}} n_k\} = \varepsilon,$$

então, para cada, $x > 0$

$$\lim_{k\to\infty} P(n_k^{-1/\rho}\cdot X_{n_k} < x) = 1 - F_{\lambda(x)}(((1-\gamma)x)^{-\rho}),$$

onde $\rho = \log_{1/\gamma}\theta > 1$, $\lambda(x) = \varepsilon + \log_{1/\gamma}((1-\gamma)x)$ e F_ε é a função de distribuição cuja transformada de Laplace é dada por

$$exp\left(-Ku\cdot\sum_{j=-\infty}^{\infty}\frac{(\gamma\theta)^{j-\varepsilon}}{1+\nu u\theta^{j-\varepsilon}}\right).$$

Demonstração. Seja $N(n)$ o único inteiro tal que

$$V_{N(n)} \le X_n < V_{N(n)+1},$$

ou seja, $T_{V_{N(n)}} \le n < T_{V_{N(n)+1}}$. Pela Lei dos grandes Números,

$$\frac{V_n}{n} \to \frac{1}{1-\gamma} \quad \text{q.c.}$$

Portanto,

$$1 \le \frac{X_n}{V_{N(n)}} \le \frac{V_{N(n)+1}}{V_{N(n)}} \to 1 \quad \text{q.c.} \tag{3.7}$$

Seja $]y[$ o menor inteiro maior do que ou igual a y. Note que

$$\begin{aligned} N(n) \geq y &\Rightarrow N(n) \geq]y[\\ &\Rightarrow V_{N(n)} \geq V_{]y[} \\ &\Rightarrow T_{V_{]y[}} \leq T_{V_{N(n)}} \leq n. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} T_{V_{]y[}} \leq n &\Rightarrow V_{]y[} \leq X_n \\ &\Rightarrow V_{]y[} \leq V_{N(n)} \\ &\Rightarrow N(n) \geq]y[\geq y. \end{aligned}$$

Logo,

$$P(N(n) \geq y) = P(T_{V_{]y[}} \leq n). \tag{3.8}$$

(i) Seja $\gamma\theta = 1$. Defina $g(t) = t \log_\theta t$. Então, para $s > 0$ e por (3.8), temos,

$$\begin{aligned} P\left(\frac{g^{-1}(n)}{N(n)} \leq s\right) &= P\left(N(n) \geq \frac{g^{-1}(n)}{s}\right) \\ &= P\left(T_{V_{]g^{-1}(n)/s[}} \leq n\right) \\ &= P\left(\frac{T_{V_{]g^{-1}(n)/s[}}}{\frac{g^{-1}(n)}{s} \log_\theta \frac{g^{-1}(n)}{s}} \leq \frac{n}{\frac{g^{-1}(n)}{s} \log_\theta \frac{g^{-1}(n)}{s}}\right). \end{aligned}$$

Observando que

$$g(g^{-1}(n)) = n \Rightarrow \frac{g^{-1}(n)}{n} \log_\theta g^{-1}(n) = 1,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \frac{n}{\frac{g^{-1}(n)}{s} \log_\theta \frac{g^{-1}(n)}{s}} &= \frac{s}{\frac{g^{-1}(n)}{n} \log_\theta \frac{g^{-1}(n)}{s}} \\ &= \frac{s}{\frac{g^{-1}(n)}{n} (\log_\theta g^{-1}(n) - \log_\theta s)} \\ &= \frac{s}{1 - n^{-1} g^{-1}(n) \log_\theta s}. \end{aligned}$$

Assim,

$$P\left(\frac{g^{-1}(n)}{N(n)} \leq s\right) = P\left(\frac{T_{V_{]g^{-1}(n)/s[}}}{\frac{g^{-1}(n)}{s} \log_\theta \frac{g^{-1}(n)}{s}} \leq \frac{s}{1 - n^{-1} g^{-1}(n) \log_\theta s}\right).$$

Usando o Lema 3.6 e o fato de que $\lim_{n\to\infty} g^{-1}(n)/n = 0$, obtemos

$$\frac{g^{-1}(n)}{N(n)} \longrightarrow \frac{2\theta}{\theta - 1},$$

em distribuição e, portanto, em probabilidade. Como $\lim_{j\to\infty} V_j/j \to 1/(1-\gamma)$ q.c., nós obtemos que

$$\frac{g^{-1}(n)}{V_{N(n)}} = \frac{\frac{g^{-1}(n)}{N(n)}}{\frac{V_{N(n)}}{N(n)}} \longrightarrow \frac{\frac{2\theta}{\theta-1}}{\frac{1}{1-\gamma}} = \frac{2\theta(1-\gamma)}{\theta-1} = 2,$$

em probabilidade, pois $\gamma\theta = 1$. Observe que em (3.7) temos que $X_n/V_{N(n)} \to 1$, q.c. Daí,

$$\frac{X_n}{g^{-1}(n)} = \frac{\frac{X_n}{V_{N(n)}}}{\frac{g^{-1}(n)}{V_{N(n)}}} \longrightarrow \frac{1}{2}, \text{ em probabilidade.}$$

Como $g^{-1}(n) \sim n/\log_\theta n$ segue que

$$\frac{X_n}{n/\log_\theta n} \longrightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{em probabilidade, quando } n \to \infty.$$

(ii) Seja $n = \{n_k\}$ uma sequência de inteiros tal que

$$\lim_{k\to\infty} n = \infty \quad \text{e} \quad \lim_{k\to\infty} \{\log_\theta n\} = \varepsilon.$$

Note que F_ε é contínua, pela Observação 3.1. Então, analogamente ao item (ii) do Teorema 3.3,

$$\{\log_{1/\gamma}[xn^{1/\rho}]\} \longrightarrow \log_{1/\gamma} x + \varepsilon = \frac{\lambda x}{1-\gamma}, \quad x > 0.$$

Usando (3.8) e o Lema 3.6, segue que

$$P\left(\frac{N(n)}{n^{1/\rho}} \geq x\right) = P(T_{V]xn^{1/\rho}[} \leq n) = P\left(\frac{T_{V]xn^{1/\rho}[}}{]xn^{1/\rho}[^\rho} \leq \frac{1}{x^\rho}\cdot\frac{x^\rho n}{]xn^{1/\rho}[^\rho}\right) \to F_{\lambda(x/(1-\gamma))}(x^{-\rho}).$$

Pela Lei dos Grandes Números,

$$\frac{V_n}{n} \to \frac{1}{1-\gamma} \quad q.c.,$$

e assim,

$$P\left(\frac{V_{N(n)}}{n^{1/\rho}} \geq x\right) = P\left(\frac{V_{N(n)}}{N(n)}\cdot\frac{N(n)}{n^{1/\rho}} \geq x\right) \to F_{\lambda(x)}(((1-\gamma)x)^{-\rho}).$$

Combinando com (3.7), segue o resultado. □

O corolário a seguir nos dá a convergência de $\ln X_n$, quando $\gamma\theta > 1$. Sua prova é essencialmente a mesma do Corolário 3.3.1

Corolário 3.4.1. *Se $\gamma\theta > 1$, então*

$$\frac{\ln X_n}{\ln n} \longrightarrow \log_\theta \frac{1}{\gamma} \quad \textit{em probabilidade, quando } n \to \infty.$$

Referências Bibliográficas

[1] Jeanne Amaral. *Passeios Aleatórios e Grandes Desvios em Ambientes Aleatórios.* Dissertação de Mestrado, UFMG, Belo Horizonte (2010).

[2] Patrick Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. John Wiley and Sons, New York (1968).

[3] Kai Lai Chung. *A Course in Probability Theory.* Academic Press, San Diego (2001).

[4] Kai Lai Chung. *Markov Chains with Stationary Transition Probabilities.* Springer-Verlag, Berlim (1960).

[5] William Feller. *An Introduction to Probability Theory and Its Applications, Vol 2.* Wiley, New York (1970).

[6] Harry Kesten. *Hitting probabilities of single points for processes with stationary independent increments.* American Mathematical Society, (1969).

[7] Fred Solomon. Random walks in a random environment. *The Annals of Probability*, Vol.3, No.1, pp. 1-31 (1975).

[8] Charles Stone. The growth of a random walk. *Annals of Mathematical Statistics*, Wiley and Sons, No.40, pp. 2203-2206, New York (1969).

[9] Ofer Zeitouni. *Random Walks in Random Environment.* Lectures on Probability Theory and Statistics, 189-312, Lecture Notes in Math., 1837, Springer, Berlin, (2004).