UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

Superálgebras unitárias com involução graduada ou superinvolução de crescimento polinomial

Willer Daniel da Silva Costa

Belo Horizonte
2021

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Willer Daniel da Silva Costa

Superálgebras unitárias com involução graduada ou superinvolução de crescimento polinomial

Tese apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos para a obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientadora: Ana Cristina Vieira
Coorientador: Rafael Bezerra dos Santos

Belo Horizonte
2021

Costa, Willer Daniel da Silva.

C837s Superálgebras unitárias com involução graduada ou superinvolução de crescimento polinomial [manuscrito] / Willer Daniel da Silva Costa – 2021.
71 f. il.

Orientadora: Ana Cristina Vieira
Coorientador: Rafael Bezerra dos Santos.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 69-71.

1. Matemática – Teses. 2. Álgebra – teses. 3. Superálgebras – Teses. 4. Involução graduada – Teses. I. Vieira, Ana Cristina. II. Santos, Rafael Bezerra dos. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV.Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Irenquer Vismeg Lucas Cruz CRB 6/819 - Universidade Federal de Minas Gerais – ICEx.

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Superálgebras unitárias com involução graduada ou superinvolução de crescimento polinomial

WILLER DANIEL DA SILVA COSTA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Ana Cristina Vieira

Profa. Ana Cristina Vieira
UFMG

Prof. Rafael Bezerra dos Santos
UFMG

Antonio Ioppolo

Prof. Antonio Ioppolo
Universidade de Milano Bicocca

Prof. Humberto Luiz Talpo
UFSCar

Lucas Reis

Prof. Lucas da Silva Reis
UFMG

Thiago Castilho de Mello

Prof. Thiago Castilho de Mello
Unifesp

Belo Horizonte, 23 de julho de 2021.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Às minhas companheiras
Paty e Sol

Agradecimentos

A Deus por sempre iluminar meus passos.

Aos meus orientadores, Profa. Ana Cristina Vieira e Prof. Rafael Bezerra dos Santos, pela confiança e por todo aprendizado durante esses anos.

À Banca Examinadora, por todas as contribuições.

À minha mãe Lia Regina e minha avó Rita por sempre acreditarem em mim e serem grandes exemplos na minha vida.

À minha grande amiga e companheira Patrícia, por estar ao meu lado e sempre me dar forças durante todos esses anos.

À Dona Graça e “Seu”Expedito, por me acolherem em Belo Horizonte.

Aos velhos amigos Gustavo e Wellington. Reencontrá-los em Belo Horizonte e ver que a nossa amizade é a mesma desde a época “do Pomba”não tem preço.

Aos amigos que a UFMG me deu: Edson, Carol, Lorena, Humberto, Sarah, Vângellis, Dafne e Mallu, por todo companheirismo e conversas “sem sentido”durante os intervalos. O Doutorado foi mais “leve”graças a vocês.

Às meninas da secretaria, Kelly e Andrea, por toda ajuda nesses anos.

Aos colegas do DMPA, em especial à minha amiga Alana, pela parceria nos “dias de luta e dias de glória”na UFMG.

Ao Aloisio, a galera da turma das 8h do Cross Vikings e todos amigos de Alegre que mesmo distantes não deixaram de me apoiar.

A todos que, direta ou indiretamente, participaram dessa conquista.

Resumo

Se A é uma superálgebra munida de uma involução graduada ou uma superinvolução, dizemos que A é uma ψ-álgebra. Nesta tese trabalhamos com as ψ-álgebras unitárias cuja sequência das ψ-codimensões $c_n^{\psi}(A)$ é limitada polinomialmente. Nessas condições, mostramos que a sequência $c_n^{\psi}(A)$ é descrita por um polinômio com coeficientes racionais. Além disso, verificamos que existe uma quantidade finita de valores que o coeficiente líder do polinômio que descreve as ψ-codimensões pode assumir e construímos exemplos de ψ-álgebras unitárias que realizam o menor e o maior valor possível para o coeficiente líder. Para finalizar, tratamos do caso particular referente às ψ-álgebras unitárias de crescimento quadrático, exibindo exemplos de ψ-álgebras unitárias para cada valor possível do coeficiente líder do polinômio que descreve $c_n^{\psi}(A)$.

Palavras-chave: superálgebra unitária, involução graduada, superinvolução, codimensão, crescimento polinomial.

Abstract

If A is a superalgebra endowed with a graded involution or a superinvolution, we say that A is a ψ-algebra. In this thesis we work with unitary ψ-algebras whose ψ-codimension sequence $c_n^{\psi}(A)$ is polynomially bounded. Under this condition, we show that the sequence $c_n^{\psi}(A)$ is decribed by a polynomial with rational coefficients. Moreover, we verify that the leading coefficient of the polynomial that describes the ψ-codimensions may assume only a finite number of possible values. Also, we provide examples of unitary ψ-algebras that realize the smallest and the biggest possible value of the leading coefficient. Lastly, we treat the particular case related to unitary ψ-algebras of quadratic growth, showing examples of unitary ψ-algebras for each possible value of the leading coefficient of the polynomial describing $c_n^{\psi}(A)$.

Keywords: unitary superalgebras, graded involution, superinvolution, codimension, polynomial growth.

Sumário

Introdução

Seja A uma álgebra associativa sobre um corpo F de característica zero. Se A pode ser decomposta em uma soma direta de subespaços vetoriais A_0, A_1 tais que $A_0A_0+A_1A_1 \subseteq A_0$ e $A_0A_1 + A_1A_0 \subseteq A_1$, então dizemos que A é uma superálgebra.

Estamos interessados em superálgebras munidas de uma involução graduada ou de uma superinvolução. Mais precisamente, se $A = A_0 \oplus A_1$ é uma superálgebra, dizemos que uma involução $*$ sobre A é graduada se $*$ preserva a graduação, isto é, $(A_i)^* = A_i$, com $i = 0, 1$. Já uma superinvolução sobre A é uma aplicação linear $\varphi : A \to A$, de ordem no máximo 2, que preserva a graduação e satisfaz $(ab)^\varphi = (-1)^{|a||b|} b^\varphi a^\varphi$, para todos elementos $a, b \in A_0 \cup A_1$, em que $|c|$ representa o grau do elemento $c \in A_0 \cup A_1$. Denominaremos de ψ-álgebra uma superálgebra munida de uma involução graduada ou de uma superinvolução.

Recordemos que um polinômio f na álgebra livre $F\langle X \rangle$ é uma identidade de A se f se anula para qualquer avaliação de elementos de A. Se A satisfaz uma identidade não nula, então A é denominada uma PI-álgebra.

O estudo de PI-teoria teve seu início na década de 1940 com Kaplansky, onde este mostrou que a existência de identidades polinomiais em uma álgebra interfere, de certa maneira, na estrutura da álgebra e desde então, o estudo da PI-teoria tem despertado o interesse de vários pesquisadores e vários resultados relevantes têm sido verificados, tornando a PI-teoria um ramo atrativo dentro da pesquisa em matemática.

Esta tese tem como um dos objetivos estender para a classe das ψ-álgebras unitárias resultados da PI-teoria já estabelecidos para álgebras unitárias e para álgebras unitárias com uma estrutura adicional, como, por exemplo, superálgebras ou álgebras munidas de uma involução.

Um dos objetivos da PI-teoria é descrever as identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra dada. Seja $\mathrm{Id}(A)$ o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra A, destacamos que $\mathrm{Id}(A)$ é um T-ideal de $F\langle X \rangle$, isto é, um ideal de $F\langle X \rangle$ que é invariante sob os endomorfismos de $F\langle X \rangle$. Foi mostrado por Kemer (ver [20]) que todo T-ideal possui um conjunto finito de geradores como T-ideal e este resultado é de extrema importância, pois reduz o problema em descrever as identidades polinomiais de A a encontrar geradores, como T-ideal, para $\mathrm{Id}(A)$. Porém, em diversas situações, determinar esses geradores se mostrou uma tarefa árdua e complexa.

Na década de 70, Regev revolucionou a PI-teoria ao introduzir a sequência de codimensões de uma álgebra (vide [26]). Tal sequência se mostrou extremamente útil para compreender o crescimento das identidades de uma álgebra mesmo não conhecendo seus geradores. Por isso, um dos objetivos da PI-teoria é obter o comportamento assintótico da sequência de codimensões de uma álgebra dada.

Anos depois, Kemer mostrou que a sequência $c_n(A)$ das codimensões de uma PI-álgebra A ou cresce exponencialmente ou é limitada polinomialmente (ver [19]). Além disso, Kemer caracterizou as álgebras que possuem a sequência das codimensões limitada polinomialmente. A saber, Kemer mostrou que A é uma álgebra tal que $c_n(A)$ é limitada polinomialmente se, e somente se, $\mathrm{Id}(A) \nsubseteq \mathrm{Id}(\mathcal{G})$ e $\mathrm{Id}(A) \nsubseteq \mathrm{Id}(UT_2)$, onde $\mathcal{G}$ representa a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e UT_2 a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2 com entradas em F.

Tal resultado inspirou pesquisadores a trabalharem com álgebras de acordo com o crescimento de $c_n(A)$. Por exemplo, em [14] foram classificadas, a menos de PI-equivalência, as álgebras cujo crescimento de $c_n(A)$ é no máximo linear.

Quando A é uma álgebra unitária de crescimento polinomial, isto é, quando a sequência $c_n(A)$ é limitada polinomialmente, Drensky e Regev mostraram em [10] que $c_n(A)$ não apenas é limitada por um polinômio, mas que nesse caso $c_n(A)$ é descrita por um polinômio com coeficientes racionais e também mostraram que o coeficiente líder desse polinômio é limitado inferior e superiormente. Mais ainda, verificaram que existe uma quantidade finita de valores possíveis para esse coeficiente.

Diante disso, cabe levantarmos a seguinte questão: existem álgebras unitárias que realizam cada uma dessas constantes? Em 2007, Giambruno, La Mattina e Petrogradsky construíram álgebras que realizam o menor e o maior valor possível para o coeficiente líder de $c_n(A)$, porém nada foi dito sobre os valores intermediários que o coeficiente líder pode assumir (ver [15]). Vale destacar que, em [15] e [25] foram classificadas, a menos de PI-equivalência, álgebras unitárias com crescimento no máximo n^4.

Agora, considere A uma álgebra com estrutura adicional, no caso, A é uma superálgebra ou A é uma álgebra munida de uma involução. Nessas condições, dizemos que A é uma φ-álgebra.

Conceitos como identidade polinomial, T-ideal e a sequência de codimensões são estendidos naturalmente para φ-álgebras. Assim, se mostrou relevante o estudo do comportamento da sequência de codimensões $c_n^{\varphi}(A)$ de uma φ-álgebra A dada. Visto que o nosso interesse são as φ-álgebras unitárias, destacamos o resultado de La Mattina, Mauceri e Misso (ver [23]), que nos diz que se A é uma φ-álgebra unitária de crescimento polinomial, então a sequência $c_n^{\varphi}(A)$ das φ-codimensões de A é descrita por um polinômio com coeficientes racionais e existem cotas inferior e superior para o coeficiente líder desse polinômio, assim como ocorreu no caso ordinário. Também ressaltamos que, na mesma publicação, as autoras construíram φ-álgebras unitárias que realizam o menor e o maior valor do coeficiente líder citado acima.

Inspirados pelos resultados de Drensky e Regev para álgebras unitárias e pelos resultados de La Mattina, Mauceri e Misso para as φ-álgebras unitárias, neste trabalho buscamos a extensão desses resultados para a classe das ψ-álgebras unitárias de crescimento polinomial. Além disso, construímos exemplos de ψ-álgebras unitárias que realizam o menor e o maior valor possível para o coeficiente líder do polinômio que descreve a sequência de codimensões. Já para o caso particular em que A tem crescimento quadrático, apresentamos exemplos de ψ-álgebras que realizam todos os valores possíveis para o coeficiente líder do polinômio que descreve a sequência de codimensões.

Esta tese está dividida em quatro capítulos. No Capítulo 1, recordamos conceitos e resultados básicos da PI-teoria que são necessários para um claro entendimento deste trabalho. Apresentamos definições e resultados sobre PI-álgebras, superálgebras e álgebras com involução, dando destaque para as álgebras que possuem unidade.

No Capítulo 2, apresentamos o principal objeto de estudo desta tese, as ψ-álgebras, onde também apresentamos a extensão de conceitos tais como identidade, T-ideal e a sequência de codimensões para essa estrutura. A partir daí, focamos nossa atenção nas ψ-álgebras unitárias cuja sequência das ψ-codimensões é limitada polinomialmente. Nessas condições, provamos um dos principais resultados desta tese, onde garantimos que a sequência das ψ-codimensões é descrita por um polinômio com coeficientes racionais e, além disso, mostramos que existe um número finito de valores que o coeficiente líder desse polinômio pode assumir.

O Capítulo 3 é dedicado à construção de exemplos de ψ-álgebras unitárias que realizam o menor e o maior valor possível para o coeficiente líder que citamos no parágrafo anterior.

Finalmente, no Capítulo 4 dedicamos nossa atenção às ψ-álgebras unitárias de crescimento quadrático. Nesse capítulo, construímos, para cada valor possível do coeficiente líder do polinômio que descreve a sequência das ψ-codimensões, exemplos de ψ-álgebras unitárias que realizam esse valores. Para a verificação desses exemplos, foi preciso trabalhar com a extensão do conceito de cocaracter para ψ-álgebras e de resultados já bem estabelecidos na teoria.

Na última parte do texto, consideramos possíveis pesquisas futuras relacionadas com o tema da tese.

Os resultados desta tese, com exceção dos resultados obtidos no Capítulo 4, se encontram publicados em [3].

Capítulo 1

Conceitos preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns conceitos e resultados da PI-teoria que são necessários para um claro entendimento do texto, além de motivarem o objetivo desta tese. Durante todo o texto, F denotará um corpo de característica zero e A uma álgebra associativa sobre F.

1.1 PI-Álgebras

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis. Denotamos por $F\langle X\rangle$ a álgebra livre associativa gerada por X sobre F. Se $f \in F\langle X\rangle$ se anula sob qualquer avaliação de elementos de uma álgebra A, dizemos que f é uma **identidade polinomial** de A e escrevemos $f \equiv 0$. Dizemos que A é uma **PI-álgebra** se satisfaz uma identidade polinomial não nula.

A seguir, apresentamos alguns exemplos de polinômios em $F\langle X\rangle$ que serão importantes no decorrer desta tese. Definimos como comutador de peso 2 de x_1 e x_2 o polinômio $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ e, indutivamente, definimos como comutador de peso n o polinômio $[x_1, \ldots, x_n] = [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n]$, para todo $n \geq 3$.

Denote por S_n o grupo simétrico de grau n e por $(-1)^\sigma$ o sinal da permutação $\sigma \in S_n$. Definimos o **polinômio standard** de grau n como:

$$St_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}.$$

Vejamos alguns exemplos de PI-álgebras.

Exemplo 1.1. Se A é uma álgebra comutativa, então o polinômio $[x_1, x_2]$ é uma identidade de A.

Exemplo 1.2. Se A uma álgebra tal que $\dim A = n < \infty$, então o polinômio standard de grau $n + 1$ é uma identidade de A. Portanto, temos que toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra.

Exemplo 1.3. Considere a álgebra de Grassmann de dimensão infinita

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \ldots : e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

A álgebra de Grassmann é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio $[x_1, x_2, x_3]$.

Exemplo 1.4. Seja $M_n(F)$ a álgebra das matrizes com entradas no corpo F. Conforme o Exemplo 1.2, temos que $M_n(F)$ é uma PI-álgebra pois satisfaz o polinômio standard de grau $n^2 + 1$. Porém, em [1], Amitsur e Levitzki provaram que o polinômio standard de grau $2n$ é uma identidade de $M_n(F)$. Além disso, é possível mostrar que $M_n(F)$ não satisfaz nenhuma identidade de grau menor que $2n$.

O resultado citado no Exemplo 1.4 é conhecido como Teorema de Amitsur-Levitzki e é de grande importância dentro da PI-teoria pois abre a discussão sobre a minimalidade do grau das identidades de uma álgebra.

O conjunto das identidades polinomiais de A

$$\mathrm{Id}(A) = \{f \in F\langle X\rangle : f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, isto é, um ideal de $F\langle X\rangle$ invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$. Mais ainda, é fácil verificar que se I é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, então $I = \mathrm{Id}(F\langle X\rangle/I)$, ou seja, para cada T-ideal de $F\langle X\rangle$, existe uma álgebra A tal que $\mathrm{Id}(A) = I$. Denominamos $\mathrm{Id}(A)$ por **T-ideal de A**. Caso duas álgebras A e B tenham o mesmo T-ideal, dizemos que A e B são **PI-equivalentes**.

Dado um conjunto de polinômios $S \subseteq F\langle X\rangle$, denotamos por $\langle S\rangle_T$ o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por S. Se $S = \{f_1, \ldots, f_k\}$, então escrevemos $\langle f_1, \ldots, f_k\rangle_T$ para indicar $\langle S\rangle_T$. Dizemos que um conjunto de polinômios S' é uma **consequência** de S, se $S' \subseteq \langle S\rangle_T$.

Podemos mostrar que, se A é uma álgebra comutativa, então $\langle [x_1, x_2]\rangle_T \subseteq \mathrm{Id}(A)$. Caso A seja uma álgebra comutativa unitária, então $\langle [x_1, x_2]\rangle_T = \mathrm{Id}(A)$.

Em relação a álgebra de Grassmann, foi mostrado em [21] que seu T-ideal é $\mathrm{Id}(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3]\rangle_T$.

Em 1950, Specht conjecturou que se A é uma álgebra associativa sobre um corpo de característica zero, então $\mathrm{Id}(A)$ é gerado, como T-ideal, por um conjunto finito de polinômios. A prova dessa conjectura foi feita por Kemer em 1987 (vide [20]), porém a prova apresentada por Kemer não mostra como se determina tais geradores. Apesar de hoje já terem sido determinados os geradores do T-ideal de várias álgebras, determinar os geradores de um T-ideal ainda é uma tarefa complexa e continua sendo um desafio dentro da PI-teoria. Como exemplo, temos que o T-ideal de $M_n(F)$ só é conhecido para o caso em que $n = 2$, onde foi verificado em [5] que $\mathrm{Id}(M_2(F)) = \langle St_4(x_1, x_2, x_3, x_4), [[x_1, x_2]^2, x_3]\rangle_T$. Porém, para $n \geq 3$, até o momento não é conhecido o T-ideal de $M_n(F)$.

É conhecido que, sobre um corpo de característica zero, $\mathrm{Id}(A)$ é completamente determinado por polinômios multilineares. Assim, considere

$$P_n = \mathrm{span}\{x_{\sigma(1)}x_{\sigma(2)}\cdots x_{\sigma(n)} : \sigma \in S_n\},$$

o **espaço dos polinômios multilineares nas variáveis** $x_1, \ldots, x_n$.

O estudo de $\mathrm{Id}(A)$ pode ser feito através do estudo dos subespaços $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$, $n \geq 1$, e, de certa maneira, a dimensão desses subespaços nos dão informações sobre o crescimento das identidades de A. Com isso, temos a seguinte definição.

Definição 1.5. Para cada $n \geq 1$, o inteiro não-negativo

$$c_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$$

é chamado **n-ésima codimensão** de A.

O conceito de codimensão foi introduzido por Regev, em 1972 (ver [26]), e é um marco nos estudos relacionados à PI-teoria, pois nos permite estudar as identidades de uma álgebra mesmo sem conhecer seu T-ideal.

Regev também mostrou que se A é uma PI-álgebra, então a sequência das codimensões de A é limitada exponencialmente, isto é, existem constantes $a, \alpha \geq 0$ tais que $c_n(A) \leq a\alpha^n$, para todo $n \geq 1$. Mais adiante em 1978, Kemer em [19] mostrou que $c_n(A)$ ou cresce exponencialmente ou é limitada polinomialmente. Estamos interessados no caso em que $c_n(A)$ é limitada polinomialmente.

Definição 1.6. Dizemos que A tem **crescimento polinomial** das codimensões se existem constantes q e $k > 0$ tais que $c_n(A) \leq qn^k$, para todo $n \geq 1$.

Drensky mostrou que se A tem crescimento polinomial, então existem $q \in \mathbb{Q}$ e $k \geq 0$ tais que a sequência $c_n(A)$ é assintoticamente igual a qn^k, quando $n \to \infty$, ou seja, $\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_n(A)}{qn^k} = 1$. Usaremos o símbolo "$\approx$"para representarmos esta situação. Em outras palavras, Drenky mostrou que $c_n(A) \approx qn^k$, para algum $q \in \mathbb{Q}$ e $k \geq 0$ (vide [8]). Dizemos que A tem crescimento polinomial n^k se $c_n(A) \approx qn^k$, para algum $q \in \mathbb{Q}$ não nulo.

Agora, considere A uma álgebra unitária. Quando estudamos as identidades polinomiais de A, destacamos o conceito de polinômios próprios. Dizemos que um polinômio $f \in F\langle X\rangle$ é **próprio**, se é uma combinação linear de produtos de comutadores. Denotamos por B a álgebra gerada pelos polinômios próprios.

A álgebra livre $F\langle X\rangle$ munida do produto $[f, g] = fg - gf$ se torna uma álgebra de Lie denotada por $F\langle X\rangle^{(-)}$. A subálgebra de Lie $L(X)$ de $F\langle X\rangle^{(-)}$ gerada por X é chamada **álgebra livre de Lie**.

Teorema 1.7. [7, Proposição 4.4.3] *Seja*

$$x_1, x_2, \ldots, [x_{i_1}, x_{i_2}], [x_{j_1}, x_{j_2}], \ldots, [x_{k_1}, x_{k_2}, x_{k_3}], \ldots$$

uma base ordenada de $L(X)$. Então, $F\langle X\rangle$ tem uma base

$$x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} [x_{i_1}, x_{i_2}]^{\epsilon_1} \cdots [x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}]^{\epsilon_k},$$

onde $\alpha_1, \ldots, \alpha_m, \epsilon_1, \ldots, \epsilon_k \geq 0$ e $[x_{i_1}, x_{i_2}] \leq \cdots \leq [x_{j_1}, \ldots, x_{j_p}]$ na ordem induzida da base de $L(X)$.

A partir deste teorema, é possível provar que se A é uma PI-álgebra unitária sobre um corpo de característica zero, então $\mathrm{Id}(A)$ é completamente determinado pelas identidades multilineares próprias (vide Proposição 4.4.3(ii) de [7]). Logo, considere $\Gamma_n = B \cap P_n$ o **espaço dos polinômios próprios multilineares nas variáveis** $x_1, \ldots, x_n$. Convencionamos $\Gamma_0 = \mathrm{span}\{1\}$ e, por definição, $\Gamma_1 = \{0\}$. Em [28], Specht verificou que $\dim \Gamma_n = n! \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!}$.

Portanto, se A é uma álgebra unitária, para estudarmos $\mathrm{Id}(A)$ é suficiente trabalharmos com os subespaços $\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(A)$, para todo $n \geq 0$.

Denominamos por **n-ésima codimensão própria** de A o inteiro

$$\gamma_n(A) = \dim \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(A)} \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Em [6], Drensky mostrou que as sequências $c_n(A)$ e $\gamma_n(A)$ se relacionam através da seguinte equação:

$$c_n(A) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i(A), \; n = 1, 2, 3, \ldots \tag{1.1.1}$$

Da relação acima concluímos que, se A é uma álgebra unitária tal que $c_n(A) \approx qn^k$ para alguns $q \in \mathbb{Q}$ e $k \geq 0$, então $\gamma_k(A) \neq 0$ e $\gamma_i(A) = 0$, para todo $i > k$. Isto implica que $c_n(A)$ é um polinômio com coeficientes racionais e o seu coeficiente líder é $q = \frac{\gamma_k(A)}{k!}$. Visto que $\dim \Gamma_k = k! \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!}$ e $1 \leq \gamma_k(A) \leq \dim \Gamma_k$, obtemos que $\frac{1}{k!} \leq q \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!}$.

A discussão acima nos fornece o seguinte teorema, apresentado por Drensky e Regev, que é um dos resultados que inspiram este trabalho. Daqui por diante, usaremos a notação $\mathcal{O}(n^t)$ para representar um polinômio de grau menor ou igual a t e coeficientes racionais.

Teorema 1.8. [10, Teorema 1.4] *Seja A uma álgebra unitária de crescimento polinomial. Então existem $k \geq 0$ e $q \in \mathbb{Q}$ tais que $c_n(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1})$ e o coeficiente líder q satisfaz as inequações:*

$$\frac{1}{k!} \leq q \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Observe que, nas condições do teorema acima, temos uma quantidade finita de valores possíveis para o coeficiente líder q, isto é,

$$q \in L_k = \left\{ \frac{1}{k!}, \frac{2}{k!}, \ldots, \frac{\dim \Gamma_k}{k!} \right\}.$$

Visto que existe uma finitude de valores possíveis para q, uma pergunta que surge naturalmente é: existem álgebras unitárias que realizam esses valores de q? Mais precisamente, fixado $k \in \mathbb{N}$, existe uma álgebra unitária A, tal que $c_n(A) \approx qn^k$, com $q \in L_k$?

Em 2007, Giambruno, La Mattina e Petrogradsky responderam parcialmente esta questão. Inicialmente eles mostram que, se k é ímpar, então o valor mínimo de L_k é $\dfrac{(k-1)}{k!}$ e, se k é par, então o valor mínimo é de fato $\dfrac{1}{k!}$. Em seguida, eles determinaram álgebras que realizam o menor e o maior valor possível para q, para qualquer $k > 1$ (ver [15]).

Destacamos que a pergunta acima foi respondida para alguns casos particulares. Primeiramente, note que, da relação 1.1.1, concluímos que não existe álgebra unitária de crescimento linear. Já para o caso referente a álgebras unitárias de crescimento quadrático, através das inequações do teorema acima, obtemos apenas um valor possível para o coeficiente líder q e para o caso de álgebras unitárias de crescimento cúbico temos apenas duas possibilidades para o coeficiente líder. Ambos os casos (crescimento quadrático e cúbico) são contemplados pelo resultado de Giambruno, La Mattina e Petrogradsky citado acima.

Já para o caso particular de álgebras unitárias de crescimento n^4, em [25], foram exibidas álgebras unitárias de crescimento n^4 que realizam todos os valores em L_4. Mais ainda, foram classificadas, a menos de PI-equivalência, as álgebras unitárias de crescimento n^5 que realizam o menor e o maior valores possíveis para esse coeficiente líder.

Para finalizarmos esta seção, recordaremos o conceito de cocaracter de uma álgebra A. Tal conceito será relevante para os cálculos que faremos no último capítulo, onde também iremos estender os conceitos e resultados correspondentes.

O grupo simétrico S_n age à esquerda sobre P_n da seguinte maneira:

$$\sigma f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(n)}),$$

onde $\sigma \in S_n$ e $f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$.

Como qualquer T-ideal é invariante sob a permutação de variáveis, $P_n \cap \mathrm{Id}(A)$ é invariante sob essa ação. Logo, temos que $\dfrac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$ tem estrutura de S_n-módulo. O S_n-caracter de $\dfrac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(A)}$ é chamado de **n-ésimo cocaracter** de A e o denotamos por $\chi_n(A)$.

É conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre os S_n-caracteres irredutíveis e as partições $\lambda \vdash n$. Sabemos também que todo S_n-caracter pode ser decomposto como uma soma de S_n-caracteres irredutíveis. Logo, temos a seguinte decomposição,

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ representa o caracter irredutível associado a $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ é sua respectiva multiplicidade.

Observe que $c_n(A) = \chi_n(A)(1) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda(1) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda$, onde d_λ representa o grau do S_n-caracter irredutível χ_λ e é calculado através da fórmula do gancho (vide Teorema 12.2.12(ii) de [7]).

Note que Γ_n é invariante sob a ação de S_n definida acima. Logo, podemos restringir esta ação a Γ_n e com isso, obtemos que Γ_n é um S_n-submódulo de P_n. Mais ainda, $\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(A)$ também é invariante sob esta ação. Com isso, $\dfrac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(A)}$ também tem uma estrutura de S_n-módulo e denotamos por $\pi_n(A)$ o S_n-caracter de $\dfrac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap \mathrm{Id}(A)}$, chamado de n-**ésimo cocaracter próprio** de A. Além disso, podemos considerar a seguinte decomposição

$$\pi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} \tilde{m}_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ representa o caracter irredutível associado a $\lambda \vdash n$ e $\tilde{m}_\lambda \geq 0$ é sua respectiva multiplicidade.

Note que $\gamma_n(A) = \pi_n(A)(1) = \sum_{\lambda \vdash n} \tilde{m}_\lambda d_\lambda$. Assim, uma maneira de determinarmos a n-ésima codimensão própria de uma álgebra unitária A é calcularmos as multiplicidades que aparecem na decomposição do n-ésimo cocaracter próprio da mesma. Tal maneira de se calcular a codimensão será essencial no último capítulo onde trabalharemos com a extensão dos conceitos de codimensão e cocaracter para álgebras com uma estrutura adicional que são o foco de nosso trabalho.

1.2 φ-Álgebras

Nesta seção consideraremos álgebras munidas de uma estrutura adicional. Estudaremos álgebras munidas de uma $\mathbb{Z}_2$-graduação ou de uma involução e apresentaremos a extensão do conceito de identidade para essas estruturas, além de mostrarmos resultados relevantes para o nosso trabalho.

Definição 1.9. Dizemos que uma álgebra A é uma **superálgebra** se existem dois subespaços A_0 e A_1 tais que:

1. $A_0 \oplus A_1 = A$;

2. $A_0 A_0 + A_1 A_1 \subseteq A_0$ e $A_0 A_1 + A_1 A_0 \subseteq A_1$.

Os subespaços A_0 e A_1 são chamados de **componentes homogêneas de grau 0** e **de grau 1**, respectivamente, e o par (A_0, A_1) é chamado de $\mathbb{Z}_2$-**graduação** (ou simplesmente graduação) de A.

Se A é uma superálgebra, então a aplicação $\varphi : A \to A$, dada por $(a_0 + a_1)^\varphi = a_0 - a_1$, $a_0 \in A_0$, $a_1 \in A_1$ é um automorfismo de ordem no máximo 2. Reciprocamente, se existe $\varphi \in Aut(A)$, de ordem no máximo 2, então A é uma superálgebra com a graduação (A_0, A_1), onde $A_0 = \{a \in A : a^\varphi = a\}$ e $A_1 = \{a \in A : a^\varphi = -a\}$.

Observe que toda álgebra A é uma superálgebra se considerarmos a graduação $(A, \{0\})$, chamada **graduação trivial**.

Como exemplo de superálgebra, considere a álgebra de Grassmann

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \ldots : e_i e_j = -e_j e_i \rangle,$$

com a graduação $(\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$, onde $\mathcal{G}_0 = \text{span}\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k}} : i_1 < \cdots < i_{2k}, k \geq 0\}$ e $\mathcal{G}_1 = \text{span}\{e_{i_1} \cdots e_{i_{2k+1}} : i_1 < \cdots < i_{2k+1}, k \geq 0\}$, dita **graduação canônica**.

Vamos apresentar uma graduação sobre a álgebra $M_n(F)$ que será importante no decorrer do texto.

Seja $A = M_n(F)$. Dado $g = (g_1, \ldots, g_n) \in \mathbb{Z}_2^n$, onde $\mathbb{Z}_2$ representa o grupo aditivo $\{0, 1\}$. O elemento g induz uma graduação (A_0, A_1) sobre A, estabelecendo:

$$A_0 = \text{span}\{e_{ij} : g_i + g_j = 0\} \quad \text{e} \quad A_1 = \text{span}\{e_{ij} : g_i + g_j = 1\},$$

onde e_{ij} representa a matriz elementar usual. Tal graduação é denominada **graduação elementar** induzida por g.

Observe que os elementos $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ e $g' = (0, g_2 + g_1 \ldots, g_n + g_1)$ induzem a mesma graduação sobre $M_n(F)$. Portanto, se $M_n(F)$ é munida de um graduação elementar induzida por $g = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$, podemos supor que $g_1 = 0$.

Sejam $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra e B uma subálgebra de A. Se $(B \cap A_0, B \cap A_1)$ for uma graduação para B, dizemos que B tem **graduação induzida** de A.

Para $k \geq 1$, denote por G_k a seguinte subálgebra da álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$,

$$G_k = \langle 1, e_1, \ldots, e_k : e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

A graduação canônica de $\mathcal{G}$ induz uma graduação sobre G_k. Em particular, se $k = 2$, temos que $(F + Fe_1e_2, Fe_1 + Fe_2)$ é uma graduação para G_2. Observe que $(F + Fe_1, Fe_2 + Fe_1e_2)$ é uma graduação para G_2 que não é induzida pela graduação canônica.

Sejam $A = A_0 \oplus A_1$ e $B = B_0 \oplus B_1$ duas superálgebras. Dizemos que uma aplicação $\nu : A \to B$ é um **homomorfismo de superálgebras** se ν é um homomorfismo (de álgebras) e $\nu(A_i) \subseteq B_i$, para $i = 0, 1$. Se ν é um homomorfismo bijetor, dizemos que ν é um **isomorfismo de superálgebras**. Nessas condições, dizemos que A e B são **isomorfas como superálgebras**.

Definição 1.10. Sejam A uma F-álgebra e $*: A \to A$ uma aplicação F-linear. Dizemos que $*$ é uma **involução** sobre A se $*$ é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2, isto é, se $(a^*)^* = a$ e $(ab)^* = b^*a^*$. Nesse caso, dizemos que A é uma **$*$-álgebra**.

Note que se A é uma álgebra comutativa, então a aplicação identidade é uma involução sobre A e é chamada de **involução trivial**. Reciprocamente, se A é uma álgebra cuja aplicação identidade é uma involução sobre A, então A é uma álgebra comutativa.

Vejamos alguns exemplos de $*$-álgebras. Seja UT_k a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem k com entradas no corpo F. Considere a aplicação $\rho : UT_k \to UT_k$, dada por

$$(e_{ij})^\rho = e_{(k-j+1),(k-i+1)}. \tag{1.2.1}$$

A aplicação ρ é uma involução sobre UT_k, denominada **involução reflexão**.

Na álgebra de Grassmann, considere a seguinte aplicação F-linear τ definida nos geradores de $\mathcal{G}$, $\tau : e_i \mapsto -e_i$. Essa aplicação induz uma involução sobre $\mathcal{G}$ da seguinte forma: para cada produto $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k}$, com $i_1 < i_2 < \cdots < i_k$, estabeleça:

$$(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_k})^\tau = e_{i_k}^\tau \cdots e_{i_2}^\tau e_{i_1}^\tau = (-1)^k e_{i_k}\cdots e_{i_2}e_{i_1},$$

e estenda linearmente para cada elemento de $\mathcal{G}$.

De maneira análoga, as aplicações $\psi : e_i \mapsto e_i$ e $\varrho : e_i \mapsto (-1)^i e_i$ induzem uma involução sobre $\mathcal{G}$.

Seja A e B álgebras, $*$ uma involução sobre A e $\star$ uma involução sobre B. Uma aplicação $\delta : A \to B$ é um **homomorfismo de $*$-álgebras** se δ é um homomorfismo de álgebras tal que $\delta(a^*) = \delta(a)^\star$, para todo $a \in A$. Caso δ seja um homomorfismo bijetor, então dizemos que δ é um **isomorfismo de $*$-álgebras** e A e B são **isomorfas como $*$-álgebras**.

Podemos decompor uma $*$-álgebra A em uma soma direta $A = A^+ \oplus A^-$ de subespaços vetoriais, onde $A^+ = \{a \in A : a^* = a\}$ e $A^- = \{a \in A : a^* = -a\}$. Os subespaços A^+ e A^- são denominados **subespaço dos elementos simétricos** de A e **subespaço dos elementos antissimétricos** de A, respectivamente.

Com o intuito de estabelecer uma nomenclatura comum para superálgebras e $*$-álgebras, usaremos o termo φ-álgebra. Denominaremos por **φ-álgebra** qualquer álgebra A munida de um automorfismo ou antiautomorfismo φ de ordem no máximo 2, isto é, qualquer superálgebra ou $*$-álgebra.

Se A é uma φ-álgebra, então podemos escrever $A = A_\varphi^+ \oplus A_\varphi^-$, onde $A_\varphi^+ = \{a \in A : a^\varphi = a\}$ e $A_\varphi^- = \{a \in A : a^\varphi = -a\}$. No caso em que A é uma superálgebra, $A_\varphi^+ = A_0$ e $A_\varphi^- = A_1$ e no caso em que A é uma $*$-álgebra, $A_\varphi^+ = A^+$ e $A_\varphi^- = A^-$.

Seja $F\langle X, \varphi\rangle$ a φ-álgebra livre sobre F gerada por $X = \{x_1, x_1^\varphi, x_2, x_2^\varphi, \ldots\}$. Para cada $i = 1, 2, \ldots$, considere $y_i = x_i + x_i^\varphi$, $z_i = x_i - x_i^\varphi$. Assim, $F\langle X, \varphi\rangle = F\langle Y, Z\rangle$, onde

$Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, \ldots\}$. Observe que $y_i^\varphi = y_i$ e $z_i^\varphi = -z_i$. Os elementos de $F\langle Y, Z\rangle$ são chamados **φ-polinômios**.

Definição 1.11. Uma **φ-identidade polinomial** de uma φ-álgebra A é um φ-polinômio $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in F\langle Y, Z\rangle$ tal que $f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0$ para todos elementos $a_1, \ldots, a_n \in A_\varphi^+$ e $b_1, \ldots, b_m \in A_\varphi^-$.

O conjunto $\mathrm{Id}^\varphi(A)$ de todas φ-identidades de A é um T^φ-ideal de $F\langle Y, Z\rangle$, isto é, um ideal de $F\langle Y, Z\rangle$ invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle Y, Z\rangle$ que comutam com φ. Denominamos $\mathrm{Id}^\varphi(A)$ por **T^φ-ideal** de A.

Como F tem característica zero, $\mathrm{Id}^\varphi(A)$ é determinado pelos seus φ-polinômios multilineares. Consideramos

$$P_n^\varphi = \mathrm{span}\{u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(n)} : \sigma \in S_n, u_i = y_i \text{ ou } u_i = z_i,\ i = 1, \ldots, n\},$$

o **espaço dos φ-polinômios multilineares de grau** n nas variáveis $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$.

Para $n = 1, 2, \ldots$, definimos $c_n^\varphi(A) = \dim \dfrac{P_n^\varphi}{P_n^\varphi \cap \mathrm{Id}^\varphi(A)}$, como sendo a **$n$-ésima φ-codimensão** de A.

Nosso interesse são as φ-álgebras unitárias cuja sequência $c_n^\varphi(A)$ é limitada polinomialmente. Nesse sentido, os polinômios φ-próprios desempenham um papel fundamental.

Definição 1.12. Seja $F\langle Y, Z\rangle$ a φ-álgebra livre e denote por $B(Y)$ a subálgebra de $F\langle Y, Z\rangle$ gerada pelas variáveis em Z e por todos comutadores nas variáveis em Y e Z. Os elementos de $B(Y)$ são denominados **φ-polinômios próprios**.

Note que, se f é um φ-polinômio próprio, então f pode ser escrito como uma combinação linear de polinômios da forma

$$z_{i_1} \cdots z_{i_s} w_1 \cdots w_m,$$

onde w_i são comutadores nas variáveis em Y e Z.

No caso em que A é uma φ-álgebra unitária sobre um corpo de característica zero, $\mathrm{Id}^\varphi(A)$ é gerado, como T^φ-ideal, pelos φ-polinômios multilineares próprios (ver Lema 2.1 de [9]). Portanto, quando se trata de φ-álgebras unitárias, convém trabalhar com o espaço $\Gamma_n^\varphi = P_n^\varphi \cap B(Y)$ dos φ-polinômios próprios multilineares. Além disso, foi provado que a dimensão de Γ_n^φ é $\dim \Gamma_n^\varphi = n! \displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^{n-1} \frac{(-1)^i}{i!}$ (vide [23]).

Definimos, para todo inteiro $n \geq 0$, $\gamma_n^\varphi(A) = \dfrac{\Gamma_n^\varphi}{\Gamma_n^\varphi \cap \mathrm{Id}^\varphi(A)}$ como a **n-ésima φ-codimensão própria** de A.

As sequências $c_n^\varphi(A)$ e $\gamma_n^\varphi(A)$ se relacionam da seguinte forma (ver [9]):

$$c_n^{\varphi}(A) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i^{\varphi}(A), \quad n = 1, 2, \ldots$$

Além disso, se $c_n^{\varphi}(A)$ é limitada polinomialmente, é possível mostrar que existe $k > 1$ tal que que $\gamma_k^{\varphi}(A) \neq 0$ e $\gamma_j^{\varphi}(A) = 0$, para todo $j > k$. Como consequência, concluímos que $c_n^{\varphi}(A)$ é um polinômio com coeficientes racionais e seu coeficiente líder é $q = \dfrac{\gamma_k^{\varphi}(A)}{k!}$. Desde que $1 \leq \gamma_k^{\varphi}(A) \leq \dim \Gamma_k^{\varphi}$, temos $\dfrac{1}{k!} \leq q \leq \displaystyle\sum_{i=0}^{k} 2^{k-1} \frac{(-1)^i}{i!}$.

A discussão e resultados acima foram apresentados por La Mattina, Mauceri e Misso em 2009, nos levando ao seguinte resultado:

Teorema 1.13. [23, Corolário 2.3] *Seja A uma φ-álgebra unitária tal que $c_n^{\varphi}(A)$ é limitada polinomialmente. Então existem $k \geq 1$ e $q \in \mathbb{Q}$ tais que $c_n^{\varphi}(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1})$ e o coeficiente líder q satisfaz as seguintes inequações:*

$$\frac{1}{k!} \leq q \leq \sum_{i=0}^{k} 2^{k-i} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

As inequações que aparecem no teorema acima nos garantem que existe uma quantidade finita de valores que o coeficiente líder q pode assumir, assim como ocorreu no caso apresentado por Drensky e Regev. De fato, temos que

$$q \in \left\{ \frac{1}{k!}, \ldots, \frac{\dim \Gamma_n^{\varphi}}{k!} \right\}.$$

Na mesma publicação, as autoras responderam a questão sobre a existência de φ-álgebras unitárias que realizam o menor e maior valor possível para q. Foram construídas superálgebras e $*$-álgebras unitárias que realizam o menor e o maior valor do coeficiente líder q.

Destacamos que em [2] foram classificadas todas as φ-álgebras unitárias de crescimento quadrático, tanto para o caso em que φ é um automorfismo quanto para o caso em que é um antiautomorfismo e, como consequência dessa classificação, foram exibidos exemplos de φ-álgebras que, para cada valor possível para o coeficiente líder do polinômio que descreve as φ-codimensões, realizam esses valores.

Sob a luz dos trabalhos de Drensky e Regev ([10]), de Giambruno, La Mattina e Petrogradsky ([15]) e de La Mattina, Mauceri e Misso ([23]), nosso objetivo nesta tese é buscar resultados similares a estes para o nosso objeto de estudo, as ψ-álgebras, que serão definidas no próximo capítulo.

Capítulo 2

ψ-Álgebras unitárias de crescimento polinomial

Neste capítulo apresentamos os principais objetos desta tese, que são as superálgebras munidas de uma involução graduada ou de uma superinvolução, objetos que denotaremos por ψ-álgebras. Vamos estabelecer conceitos tais como identidades polinomiais, T-ideal e codimensão para as ψ-álgebras. Mais ainda, provaremos resultados relacionados às ψ-álgebras unitárias e finalizamos o capítulo com um dos principais resultados desta tese.

2.1 ψ-Álgebras

Nesta seção apresentamos o conceito de ψ-álgebra, definições e resultados fundamentais relacionados às ψ-álgebras, que são necessários para o desenvolvimento da tese.

Definição 2.1. Sejam $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra e $* : A \to A$ uma aplicação F-linear. Se $(A_0)^* \subseteq A_0$ e $(A_1)^* \subseteq A_1$, dizemos que $*$ **preserva a graduação**. No caso em que $*$ é uma involução que preserva a graduação, dizemos que $*$ é uma **involução graduada**.

Se A é uma superálgebra munida de uma involução graduada, dizemos que A é uma **$*$-superálgebra**.

Sejam A uma álgebra e $*$ uma involução sobre A. Se considerarmos A com a graduação trivial, temos que $*$ é uma involução graduada. Logo, toda $*$-álgebra é uma $*$-superálgebra.

Vejamos alguns exemplos de $*$-superálgebras. Considere a subálgebra da álgebra de Grassmann, G_2 com a graduação canônica e munida com qualquer uma das involuções τ, ψ e ϱ definidas no capítulo anterior (página 8). Em todos os casos, temos uma $*$-superálgebra. Denotamos por $G_{2,\tau}^{\mathrm{gr}}$, $G_{2,\psi}^{\mathrm{gr}}$, $G_{2,\varrho}^{\mathrm{gr}}$ cada uma delas, respectivamente.

Considere a seguinte subálgebra unitária de UT_6,

$$N_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \; : \; a, b, c, d, e \in F \right\},$$

com graduação

$$(FI_6 + F(e_{23} + e_{45}), F(e_{12} - e_{56}) + Fe_{13} + Fe_{46})$$

e munida da involução reflexão. Nesse caso, temos uma $*$-superálgebra, que denotamos por N_3^{gri}.

Seja U_3 a seguinte subálgebra de UT_6,

$$U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & d & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \; : \; a, b, c, d, e \in F \right\},$$

com graduação

$$(FI_6 + F(e_{23} + e_{45}), F(e_{12} + e_{56}) + Fe_{13} + Fe_{46})$$

e involução reflexão. Também temos uma $*$-superálgebra nesse caso e a denotamos por U_3^{gri}.

Sejam A e B $*$-superálgebras e $\varphi : A \to B$ um homomorfismo de álgebras. Se $\varphi(A_i) \subseteq B_i$, para $i = 0, 1$ tal que $\varphi(a^*) = \varphi(a)^\star$, para todo $a \in A$, onde $*$ é uma involução graduada sobre A e $\star$ é uma involução graduada sobre B, dizemos que φ é um **homomorfismo de $*$-superálgebras**. Caso φ seja um homomorfismo bijetor, dizemos que φ é um isomorfismo de $*$-superálgebras e que A e B são isomorfas como $*$-superálgebras.

Definição 2.2. Sejam $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra e $* : A \to A$ uma aplicação linear que preserva a graduação. Dizemos que $*$ é uma **superinvolução** se:

1. $(a^*)^* = a$, para todo $a \in A$,

2. $(ab)^* = (-1)^{|a||b|} b^* a^*$, onde $|c|$ denota o grau homogêneo do elemento $c \in A_0 \cup A_1$.

Observação 2.3. Se $A = A_0 \oplus A_1$ é uma superálgebra, então $(-1)^{|a||b|} = -1$ somente quando $a, b \in A_1$.

Observe que uma superinvolução geralmente não é uma involução e, consequentemente, não é uma involução graduada. De fato, se consideramos a álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$ com a graduação canônica, então a aplicação identidade é uma superinvolução sobre $\mathcal{G}$. Porém, a álgebra de Grassmann não é comutativa, logo a aplicação identidade não é uma involução.

A seguinte proposição estabelece uma condição para que as superinvoluções e involuções graduadas sobre uma superálgebra A coincidam.

Proposição 2.4. *Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra. Então, as superinvoluções e as involuções graduadas sobre A coincidem se, e somente se, $A_1^2 = \{0\}$. Em particular, se $A_1 = \{0\}$, então as superinvoluções sobre A coincidem com as involuções sobre A.*

Prova: Suponha que $A_1^2 = \{0\}$ e seja $*$ uma involução graduada sobre A. Queremos mostrar que $*$ é uma superinvolução sobre A e, para isso, de acordo com a Observação 2.3, basta considerar dois elementos $a, b \in A_1$ e mostrarmos que $(ab)^* = -b^*a^*$. Sejam $a, b \in A_1$, logo $a^*, b^* \in A_1$. Portanto, $(ab)^* = b^*a^* = 0$ e também $-b^*a^* = 0$, ou seja, $(ab)^* = -b^*a^*$. Logo, $*$ é uma superinvolução sobre A. De maneira análoga, mostramos que toda superinvolução sobre A é uma involução graduada sobre A.

Reciprocamente, sejam $a, b \in A_1$ e $*$ uma involução graduada sobre A. Então,

1. $(ab)^* = b^*a^*$, se vemos $*$ como uma involução graduada,

2. $(ab)^* = -b^*a^*$, se vemos $*$ como uma superinvolução.

Logo, $(ab)^* = 0$ e então, temos $ab = 0$, consequentemente, $A_1^2 = \{0\}$.

□

A seguir, trazemos exemplos de superálgebras munidas de uma superinvolução que são fundamentais para este trabalho.

Exemplo 2.5. Considere a álgebra G_k, com a graduação induzida da graduação canônica de $\mathcal{G}$. Defina a seguinte aplicação $\star$ sobre os geradores de G_k, $e_i^\star = -e_i$.

A aplicação $\star$ induz uma superinvolução sobre G_k se estabelecermos, para qualquer produto não-nulo $e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n} \in G_k$, com $i_1 < i_2 < \cdots < i_n$, que

$$(e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_n})^\star = (-1)^\mu(e_{i_n}^\star \cdots e_{i_2}^\star e_{i_1}^\star) = (-1)^{\mu+n}(e_{i_n}\cdots e_{i_2}e_{i_1}),$$

onde $\mu = |e_{i_1}||e_{i_2}\cdots e_{i_n}| + |e_{i_2}||e_{i_3}\cdots e_{i_n}| + \cdots + |e_{i_{n-1}}||e_{i_n}|$ e estendermos linearmente para todo elemento de G_k.

De maneira similar, a aplicação $\sharp$, dada por $e_i^\sharp = e_i$, $i = 1, \ldots, k$, também induz uma superinvolução sobre G_k.

Denotamos por $G_k^\star$ e $G_k^\sharp$, essas superálgebras com superinvoluções, respectivamente.

Para uma melhor visualização da construção acima, considere a álgebra $G_2 = \langle 1, e_1, e_2 : e_ie_j = -e_je_i\rangle$ e a superinvolução $\star$. Então,

$$(e_1e_2)^\star = (-1)^{|e_1||e_2|+2}e_2e_1 = -e_2e_1 = e_1e_2.$$

Agora, considere a involução τ, definida no capítulo anterior, sobre G_2. Note que, apesar de serem definidas da mesma maneira nos geradores de G_2, essas aplicações não são idênticas, pois $(e_1e_2)^\star = e_1e_2$ e $(e_1e_2)^\tau = -e_1e_2$.

Observação 2.6. Se A é uma superálgebra, de acordo com a Proposição 2.4, pode ocorrer de uma aplicação $*$ ser uma involução graduada e uma superinvolução sobre A simultaneamente. Por isso, para deixarmos claro com qual estrutura estamos trabalhando, quando estivermos interessados em $*$ como uma involução graduada em A, usaremos, quando for necessário, a notação A^{gri} e usaremos A^s quando estivermos trabalhando com $*$ sendo uma superinvolução sobre A.

De acordo com a Observação 2.6, usaremos as notações U_3^{gri} e N_3^{gri} quando estivermos interessados em $*$ como uma involução graduada e usaremos as notações U_3^s e N_3^s quando estivermos trabalhando com $*$ como uma superinvolução.

Em cada uma das $*$-superálgebras $G_{2,\tau}^{\text{gr}}$, $G_{2,\psi}^{\text{gr}}$, $G_{2,\varrho}^{\text{gr}}$ a involução considerada não é uma superinvolução. Além disso, $G_k^\sharp$, $G_k^\star$ são exemplos de superálgebras para as quais a superinvolução considerada não é uma involução.

Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra e considere ψ uma involução graduada ou uma superinvolução sobre A. Com o intuito de estabelecer uma denominação que abranja as duas opções para ψ e deixarmos mais clara a exposição dos resultados, usaremos os termos ψ-involução e ψ-álgebra, isto é, uma **ψ-involução** sobre A é uma involução graduada ou uma superinvolução ψ sobre A e A é uma **ψ-álgebra** se A é uma superálgebra munida de uma ψ-involução.

Como F tem característica zero e ψ preserva a graduação, podemos decompor uma ψ-álgebra A da seguinte forma,

$$A = A_0^+ \oplus A_1^+ \oplus A_0^- \oplus A_1^-,$$

onde $A_i^+ = \{a \in A_i : a^\psi = a\}$ e $A_i^- = \{a \in A_i : a^\psi = -a\}$, com $i = 0, 1$.

Seja $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis. Escreva X como uma união disjunta de quatro subconjuntos $X = Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$, onde $Y_0 = \{y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots\}$, $Y_1 = \{y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots\}$, $Z_0 = \{z_{1,0}, z_{2,0}, \ldots\}$ e $Z_1 = \{z_{1,1}, z_{2,1}, \ldots\}$. Denote por $\mathcal{F} = F\langle X|\mathbb{Z}_2, \psi\rangle$ a ψ-álgebra livre gerada por X sobre F dando uma estrutura de superálgebra para $\mathcal{F}$ estabelecendo que as variáveis de $Y_0 \cup Z_0$ sejam homogêneas de grau 0 e as variáveis de $Y_1 \cup Z_1$ sejam homogêneas de grau 1. Dessa forma, temos que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_0 \oplus \mathcal{F}_1$, onde $\mathcal{F}_0$ é o subespaço gerado por todos monômios nas variáveis de X que possuem um número par de variáveis de grau 1 e $\mathcal{F}_1$ é o subespaço gerado por todos monômios nas variáveis de X que possuem um número ímpar de variáveis de grau 1.

Também definimos uma ψ-involução sobre $\mathcal{F}$ estabelecendo que as variáveis de $Y_0 \cup Y_1$ sejam simétricas e as variáveis de $Z_0 \cup Z_1$ sejam antissimétricas.

Logo, estabelecemos que:

1. Y_0 é o conjunto das variáveis simétricas de grau 0,

2. Y_1 é o conjunto das variáveis simétricas de grau 1,

3. Z_0 é o conjunto das variáveis antissimétricas de grau 0 e

4. Z_1 é o conjunto das variáveis antissimétricas de grau 1.

Os elementos de $\mathcal{F}$ são chamados de **ψ-polinômios**.

Dizemos que

$$f = f(y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{m,0}, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, y_{n,1}, z_{1,0}, z_{2,0}, \ldots, z_{p,0}, z_{1,1}, z_{2,1}, \ldots, z_{q,1}) \in \mathcal{F}$$

é uma **ψ-identidade** para a ψ-álgebra A se

$$f(a_{1,0}, \ldots, a_{m,0}, a_{1,1}, \ldots, a_{n,1}, b_{1,0}, \ldots, b_{p,0}, b_{1,1}, \ldots, b_{q,1}) = 0,$$

para todos $a_{1,0}, \ldots, a_{m,0} \in A_0^+$, $a_{1,1}, \ldots, a_{n,1} \in A_1^+$, $b_{1,0}, \ldots, b_{p,0} \in A_0^-$ e $b_{1,1}, \ldots, b_{q,1} \in A_1^-$. O conjunto

$$\mathrm{Id}^\psi(A) = \{f \in \mathcal{F} : f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

é um **T_2^ψ-ideal** de $\mathcal{F}$, isto é, um ideal de $\mathcal{F}$ invariante sob todos os endomorfismos de $\mathcal{F}$ que preservam a superestrutura e comutam com ψ.

Se ψ é uma involução graduada sobre A, escrevemos $\mathrm{Id}^\psi(A) = \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$ e se ψ é uma superinvolução sobre A, escrevemos $\mathrm{Id}^\psi(A) = \mathrm{Id}^s(A)$.

Como F tem característica zero, $\mathrm{Id}^\psi(A)$ é determinado pelos polinômios multilineares. Denotamos por

$$P_n^\psi = \mathrm{span}\{u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(n)} : u_i \in \{y_{i,0}, y_{i,1}, z_{i,0}, z_{i,1}\}, \sigma \in S_n\},$$

o **espaço dos ψ-polinômios multilineares de grau** n nas variáveis

$$y_{1,0}, \ldots, y_{n,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{n,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{n,0}, z_{1,1}, \ldots, z_{n,1}.$$

Note que a dimensão de P_n^ψ é $4^n n!$.

Definimos a **n-ésima ψ-codimensão de** A por

$$c_n^{\psi}(A) = \dim \frac{P_n^{\psi}}{P_n^{\psi} \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)}, \quad n = 1, 2, 3 \ldots$$

Se ψ é uma involução graduada, escrevemos $c_n^{\psi}(A) = c_n^{\mathrm{gri}}(A)$ e denominamos por **n-ésima codimensão $*$-graduada** de A. Se ψ é uma superinvolução, escrevemos $c_n^{\psi}(A) = c_n^{s}(A)$ e denominamos por **n-ésima s-codimensão** de A.

Abaixo apresentamos os T_2^{ψ}-ideais e as ψ-codimensões dos exemplos dados. Usamos $a \circ b$, para denotar o produto de Jordan $ab + ba$.

Proposição 2.7. [17, Teoremas 4.4 e 4.5] *Considere U_3^s, N_3^s. Então:*

1. $\mathrm{Id}^s(U_3^s) = \langle z_{1,0}, [y_{1,0}, z_{2,1}], x_{1,1}x_{2,1}\rangle_{T_2^*}$, onde $x_{i,1} = y_{i,1}$ ou $x_{i,1} = z_{i,1}$,
2. $\mathrm{Id}^s(N_3^s) = \langle z_{1,0}, [y_{1,0}, y_{2,1}], x_{1,1}x_{2,1}\rangle_{T_2^*}$, onde $x_{i,1} = y_{i,1}$ ou $x_{i,1} = z_{i,1}$,
3. $c_n^{\mathrm{s}}(U_3^s) = c_n^{\mathrm{s}}(N_3^s) = n^2 + n + 1$.

Consequentemente, para as $*$-superálgebras $U_3^{\mathrm{gri}}, N_3^{\mathrm{gri}}$, temos:

1. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_3^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0}, [y_{1,0}, z_{2,1}], x_{1,1}x_{2,1}\rangle_{T_2^*}$, onde $x_{i,1} = y_{i,1}$ ou $x_i = z_{i,1}$,
2. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(N_3^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0}, [y_{1,0}, y_{2,1}], x_{1,1}x_{2,1}\rangle_{T_2^*}$, onde $x_{i,1} = y_{i,1}$ ou $x_{i,1} = z_{i,1}$,
3. $c_n^{\mathrm{gri}}(U_3^{\mathrm{gri}}) = c_n^{\mathrm{gri}}(N_3^{\mathrm{gri}}) = n^2 + n + 1$.

Proposição 2.8. [24, Lema 7.2] *Para as $*$-superálgebras $G_{2,\tau}^{\mathrm{gr}}, G_{2,\psi}^{\mathrm{gr}}, G_{2,\varrho}^{\mathrm{gr}}$, temos:*

1. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,\tau}^{\mathrm{gr}}) = \langle y_{1,1}, z_{1,0}z_{2,0}, z_{1,0}z_{2,1}, [y_{1,0}, y_{2,0}], [y_{1,0}, z_{2,0}], z_{1,1} \circ z_{2,1}, z_{1,1}z_{2,1}z_{3,1}\rangle_{T_2^*}$,
2. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,\psi}^{\mathrm{gr}}) = \langle z_{1,1}, z_{1,0}z_{2,0}, y_{1,1}z_{2,0}, [y_{1,0}, y_{2,0}], [y_{1,0}, z_{2,0}], y_{1,1} \circ y_{2,1}, y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1}\rangle_{T_2^*}$,
3. $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,\varrho}^{\mathrm{gr}}) = \langle z_{1,0}, z_{1,1}z_{2,1}, y_{1,1}y_{2,1}, [y_{1,0}, y_{2,1}], [y_{1,0}, z_{2,1}], y_{1,1} \circ z_{2,1}\rangle_{T_2^*}$,
4. $c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,\tau}^{\mathrm{gr}}) = c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,\psi}^{\mathrm{gr}}) = c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,\varrho}^{\mathrm{gr}}) = \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{3n}{2} + 1$.

Proposição 2.9. [13, Teoremas 6.2 e 6.5] *Considere as superálgebras munidas de superinvolução $G_k^{\sharp}$, $G_k^{\star}$. Então*

1. $\mathrm{Id}^s(G_k^{\sharp}) = \langle z_{1,0}, z_{1,1}, [y_{1,0}, y_{2,0}], [y_{1,0}, y_{2,1}], y_{1,1} \circ y_{2,1}, y_{1,1}y_{2,1}y_{3,1}\rangle_{T_2^*}$,
2. $\mathrm{Id}^s(G_k^{\star}) = \langle y_{1,1}, z_{1,0}, [y_{1,0}, y_{2,0}], [y_{1,0}, z_{2,1}], z_{1,1} \circ z_{2,1}, z_{1,1}z_{2,1}z_{3,1}\rangle_{T_2^*}$,
3. $c_n^{\mathrm{s}}(G_k^{\sharp}) = c_n^{\mathrm{s}}(G_k^{\star}) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \approx \frac{1}{k!} n^k$.

Se A é uma $*$-superálgebra, foi verificado em [16] que $c_n^{\mathrm{gri}}(A)$ ou cresce exponencialmente ou é limitada polinomialmente. Já para superálgebras com superinvolução o mesmo resultado foi verificado em [12]. Logo, se A é uma ψ-álgebra, então $c_n^{\psi}(A)$ ou cresce exponencialmente ou é limitada polinomialmente.

Definição 2.10. Dizemos que uma ψ-álgebra A tem **crescimento polinomial** se $c_n^{\psi}(A)$ é limitada polinomialmente, isto é, se existem $q > 0$ e $k \geq 0$ tais que $c_n^{\psi}(A) \leq qn^k$, para todo $n \geq 1$.

Nas próximas seções focaremos nossa atenção nas ψ-álgebras unitárias e, posteriormente, nas ψ-álgebras unitárias de crescimento polinomial. Estes são os objetos de interesse neste trabalho.

2.2 ψ-Álgebras unitárias

Começamos esta seção destacando os ψ-polinômios próprios. Tais polinômios têm papel fundamental ao se estudar as ψ-álgebras unitárias.

Seja $B(Y_0)$ a subálgebra de $\mathcal{F}$ gerada por $Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ e por todos comutadores nas variáveis em $X = Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$. Os elementos de $B(Y_0)$ são chamados **ψ-polinômios próprios**.

Observe que $f \in B(Y_0)$ se, e somente se, todas as variáveis em Y_0 aparecem apenas dentro dos comutadores. Como

$$[u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}]x_j = [u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}, x_j] + x_j[u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}],$$

para todo $u_{i_p} \in X$, $x_j \in Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ e $u_{i_1}u_{i_2} = u_{i_2}u_{i_1} + [u_{i_1}, u_{i_2}]$, para todos $u_{i_1}, u_{i_2} \in X$, concluímos que todo ψ-polinômio próprio é uma combinação linear de polinômios da forma

$$y_{i_1,1} \cdots y_{i_p,1} z_{k_1,0} \cdots z_{k_q,0} z_{l_1,1} \cdots z_{l_r,1} w_1 \cdots w_m, \tag{2.2.1}$$

onde $w_1, \ldots, w_m$ são comutadores nas variáveis de $Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$.

Como já comentamos, se A é uma álgebra unitária, então $\mathrm{Id}(A)$ é completamente determinado pelos polinômios multilineares próprios. Apresentaremos aqui a extensão deste resultado para a classe das ψ-álgebras.

Considere $\mathcal{F}$ a ψ-álgebra livre munida do produto $[f, g] = fg - gf$. Então, $\mathcal{F}$ se torna uma álgebra de Lie denotada por $\mathcal{F}^{(-)}$. Denotamos por $L(X|\mathbb{Z}_2, \psi)$ a subálgebra de Lie de $\mathcal{F}^{(-)}$ gerada por $X = Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$. Temos o seguinte resultado.

Teorema 2.11. *Seja*

$$y_{1,0}, y_{2,0}, \ldots, y_{1,1}, y_{2,1}, \ldots, z_{1,0}, z_{2,0}, \ldots, z_{1,1}, z_{2,1}, \ldots, w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots,$$

uma base ordenada de $L(X|\mathbb{Z}_2,*)$, onde w_j denota um comutador de peso j nas variáveis de $Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ e $j_1 \leq j_2 \leq \cdots$. Então, temos que:

1. *O espaço vetorial $\mathcal{F}$ tem uma base*

$$y_{i_1,0}^{\alpha_1}\cdots y_{i_m,0}^{\alpha_m} y_{s_1,1}^{\beta_1}\cdots y_{s_n,1}^{\beta_n} z_{k_1,0}^{\gamma_1}\cdots z_{k_p,0}^{\gamma_p} z_{l_1,1}^{\delta_1}\cdots z_{l_q,1}^{\delta_q} w_{j_1}^{\epsilon_1}\cdots w_{j_r}^{\epsilon_r},$$

   onde $\alpha_1,\ldots,\alpha_m,\beta_1,\ldots,\beta_n,\ \gamma_1,\ldots,\gamma_p,\delta_1,\ldots,\delta_q,\epsilon_1,\ldots,\epsilon_r \geq 0$ e $w_{j_1} \leq \cdots \leq w_{j_r}$ na ordem induzida da base de $L(X|\mathbb{Z}_2,\psi)$.

2. *Uma base para o espaço $B(Y_0)$ é obtida de uma base de $\mathcal{F}$ com $\alpha_1 = \cdots = \alpha_m = 0$.*

Prova: Desde que $X = Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$, temos que (1) segue do Teorema 1.7.

Para provar (2), seja $f \in B(Y_0)$. Podemos escrever f como uma combinação linear de polinômios da forma (2.2.1).

Usando o Teorema 1.7 para as álgebras livres $F\langle Y_1\rangle, F\langle Z_0\rangle$ e $F\langle Z_1\rangle$, temos que:

- $y_{i_1,1}\cdots y_{i_p,1}$ é uma combinação linear de polinômios da forma

$$y_{1,1}^{\beta_1}\cdots y_{n,1}^{\beta_n}[y_{i_1,1},y_{i_2,1}]^{\epsilon_{1,1}}\cdots[y_{j_1,1},\ldots,y_{j_p,1}]^{\epsilon_{k,1}},$$

  com $\beta_1,\ldots,\beta_n,\epsilon_{1,1},\ldots,\epsilon_{k,1} \geq 0$,

- $z_{k_1,0}\cdots z_{k_q,0}$ é uma combinação linear de polinômios da forma

$$z_{1,0}^{\gamma_1}\cdots z_{p,0}^{\gamma_p}[z_{i_1,0},z_{i_2,0}]^{\epsilon_{1,2}}\cdots[z_{j_1,0},\ldots,z_{j_p,0}]^{\epsilon_{k,2}},$$

  com $\gamma_1,\ldots,\gamma_p,\epsilon_{1,2},\ldots,\epsilon_{k,2} \geq 0$,

- $z_{l_1,1}\cdots z_{l_r,1}$ é uma combinação linear de polinômios da forma

$$z_{1,1}^{\delta_1}\cdots z_{q,1}^{\delta_q}[z_{i_1,1},z_{i_2,1}]^{\epsilon_{1,3}}\cdots[z_{j_1,1},\ldots,z_{j_p,1}]^{\epsilon_{k,3}},$$

  com $\delta_1,\ldots,\delta_q,\epsilon_{1,3},\ldots,\epsilon_{k,3} \geq 0$.

Portanto, podemos assumir que f é uma combinação linear de elementos da forma (2.2.1), com $i_1 \leq i_2 \leq \cdots \leq i_p$, $k_1 \leq k_2 \leq \cdots \leq k_q$ e $l_1 \leq l_2 \leq \cdots \leq l_r$. Se em algum produto $w_{i_1}\cdots w_{i_m}$, onde cada w_i representa um comutador que aparece na decomposição de f, temos w_iw_j com $w_i \geq w_j$, então trocamos w_iw_j por $w_jw_i + [w_i,w_j]$. Como $[w_i,w_j] \in L(X|\mathbb{Z}_2,\psi)$, então pode ser escrito com uma combinação linear de elementos da base de $L(X|\mathbb{Z}_2,\psi)$ e o resultado segue.

$\square$

Agora estamos na posição de provar o seguinte resultado.

Teorema 2.12. *Seja A uma ψ-álgebra unitária sobre um corpo de característica zero. Então, $\mathrm{Id}^{\psi}(A)$ é gerado, como T_2^{ψ}-ideal, por ψ-polinômios próprios.*

Prova: Seja $f \in \mathrm{Id}^{\psi}(A)$. Pelo teorema anterior, f pode ser escrito como

$$f = \sum_{\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)} \lambda_\alpha y_{1,0}^{\alpha_1}\cdots y_{n,0}^{\alpha_n}\omega_\alpha,\ \lambda_\alpha \in F,$$

onde $\omega_\alpha = \omega_\alpha(y_{1,0},\dots,y_{n,0},y_{1,1},\dots,y_{n,1},z_{1,0},\dots,z_{n,0},z_{1,1},\dots,z_{n,1})$ é uma combinação linear de

$$y_{1,1}^{\beta_1}\cdots y_{n,1}^{\beta_n}z_{1,0}^{\gamma_1}\cdots z_{n,0}^{\gamma_n}z_{1,1}^{\delta_1},\cdots z_{n,1}^{\delta_n}c_{j_1}^{\epsilon_1}\cdots c_{j_p}^{\epsilon_p},$$

onde c_j é um comutador de peso j nas variáveis de $Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$. Como F tem característica zero, podemos assumir que f é multilinear e então temos

$$\alpha_1,\dots,\alpha_n,\beta_1,\dots,\beta_n,\gamma_1,\dots,\gamma_n,\delta_1,\dots,\delta_n,\epsilon_1,\dots,\epsilon_p \leq 1.$$

Se $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$, para todo α, então f é um ψ-polinômio próprio e nada mais há a se fazer.

Agora, suponha que existe $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ tal que $\alpha_i = 1$, para algum $i \in \{1,\dots,n\}$. Então podemos escrever $f = f_{\alpha_i} + f'_{\alpha_i}$, onde f_{α_i} é um polinômio no qual a variável $y_{i,0}$ aparece fora dos comutadores e f'_{α_i} é um polinômio no qual a variável $y_{i,0}$ aparecem apenas nos comutadores.

Substituindo $y_{i,0}$ por $1 + y_{i,0}$ em f'_{α_i}, temos

$f'_{\alpha_i}(y_{1,0},\dots,1+y_{i,0},\dots,y_{n,0},y_{1,1},\dots,y_{n,1},z_{1,0},\dots,z_{n,0},z_{1,1},\dots,z_{n,1}) =$
$f'_{\alpha_i}(y_{1,0},\dots,1,\dots,y_{n,0},y_{1,1},\dots,y_{n,1},z_{1,0},\dots,z_{n,0},z_{1,1},\dots,z_{n,1})+$
$f'_{\alpha_i}(y_{1,0},\dots,y_{n,0},y_{1,1},\dots,y_{n,1},z_{1,0},\dots,z_{n,0},z_{1,1},\dots,z_{n,1})$.

Desde que obtemos zero se avaliarmos $y_{i,0}$ por 1 em um comutador, então,

$f'_{\alpha_i}(y_{1,0},\dots,1+y_{i,0},\dots,y_{n,0},y_{1,1},\dots,y_{n,1},z_{1,0},\dots,z_{n,0},z_{1,1},\dots,z_{n,1})$
$= f'_{\alpha_i}(y_{1,0},\dots,y_{n,0},y_{1,1},\dots,y_{n,1},z_{1,0},\dots,z_{n,0},z_{1,1},\dots,z_{n,1})$.

Como $f \in \mathrm{Id}^{\psi}(A)$, temos que

$$f(y_{1,0},\dots,1+y_{i,0},\dots,y_{n,0},y_{1,1},\dots,y_{n,1},z_{1,0},\dots,z_{n,0},z_{1,1},\dots,z_{n,1}) \in \mathrm{Id}^{\psi}(A).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
0 &\equiv f(y_{1,0},\dots,1+y_{i,0},\dots,y_{n,0},y_{1,1},\dots,y_{n,1},z_{1,0},\dots,z_{n,0},z_{1,1},\dots,z_{n,1})\\
&= f_{\alpha_i}(y_{1,0},\dots,1+y_{i,0},\dots,y_{n,0},y_{1,1},\dots,y_{n,1},z_{1,0},\dots,z_{n,0},z_{1,1},\dots,z_{n,1}) + f'_{\alpha_i}\\
&= \sum_{\alpha} \lambda_\alpha y_{1,0}^{\alpha_1}y_{2,0}^{\alpha_2}\cdots \widehat{y}_{i,0}\cdots y_{n,0}^{\alpha_n}\omega_\alpha + f\\
&\equiv \sum_{\alpha} \lambda_\alpha y_{1,0}^{\alpha_1}y_{2,0}^{\alpha_2}\cdots \widehat{y}_{i,0}\cdots y_{n,0}^{\alpha_n}\omega_\alpha \pmod{\mathrm{Id}^{\psi}(A)},
\end{aligned}$$

onde o símbolo $\widehat{y}_{i,0}$ significa a omissão da variável $y_{i,0}$. Então,

$$g = \sum_{\alpha} \lambda_\alpha y_{1,0}^{\alpha_1} y_{2,0}^{\alpha_2} \cdots \widehat{y}_{i,0} \cdots y_{n,0}^{\alpha_n} \omega_\alpha$$

é uma identidade na qual a variável $y_{i,0}$ aparece dentro dos comutadores.

Repetindo o processo acima para todas as variáveis simétricas de grau homogêneo 0 aparacendo na identidade g, obtemos que f é uma consequência dos polinômios próprios e a prova está completa.

□

Quando se trata de estudar as ψ-identidades de uma ψ-álgebra unitária sobre um corpo de característica zero, podemos focar os estudos nas ψ-identidades multilineares próprias.

Denotamos por $\Gamma_n^\psi = B(Y_0) \cap P_n^\psi$ o subespaço de P_n^ψ dos polinômios próprios multilineares e estabelecemos que $\Gamma_0^\psi = \text{span}\{1\}$. Definimos a **$n$-ésima ψ-codimensão própria** de A por

$$\gamma_n^\psi(A) = \dim \frac{\Gamma_n^\psi}{\Gamma_n^\psi \cap \mathrm{Id}^\psi(A)}.$$

Temos o seguinte resultado.

Proposição 2.13. *Seja A uma ψ-álgebra unitária. Então, temos a seguinte relação:*

$$c_n^\psi(A) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i^\psi(A), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{2.2.2}$$

Prova: Suponha que $\gamma_i^\psi(A) = m$. Seja $\{f_1, \ldots, f_m\}$ uma base de $\Gamma_i^\psi(A) = \dfrac{\Gamma_i^\psi}{\Gamma_i^\psi \cap Id^\psi(A)}$, onde

$$f_j = f_j(y_{1,0}, \ldots, y_{r_1,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{r_2,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{r_3,0}, z_{1,1}, \ldots, z_{r_4,1})$$

$j = 1, \ldots, m$, $r_1 + \cdots + r_4 = i$.

Seja $\pi : \Gamma_i^\psi \to \Gamma_i^\psi(A)$ a projeção canônica e considere $\{\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m\} \subset \Gamma_i^\psi$ tal que $\pi(\tilde{f}_j) = f_j$, $j = 1, \ldots, m$. Se $m + k = \dim_F(\Gamma_i^\psi)$ e $\{g_1, \ldots, g_k\}$ é uma base arbitrária de $\Gamma_i^\psi \cap Id^\psi(A)$, então $\{\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_m, g_1, \ldots, g_k\}$ é uma base de Γ_i^ψ.

Agora, pelo Teorema 2.11, o conjunto formado pelos elementos

$$y_{p_1,0} \cdots y_{p_{n-i},0} f_j(y_{q_1,0}, \ldots, y_{q_{r_1},0}, y_{1,1}, \ldots, y_{r_2,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{r_3,0}, z_{1,1}, \ldots, z_{r_4,1})$$

$j = 1, \ldots, m$, onde $p_1 < \cdots < p_{n-i}, q_1 < \cdots < q_{r_1}$, é uma base de $P_n^\psi(A)$. Contando a quantidade de elementos desta base, obtemos a relação desejada.

□

A equação (2.2.2) é essencial para os cálculos que iremos fazer na próxima seção, quando dedicamos nossa atenção para as ψ-álgebras unitárias cuja sequência das ψ-codimensões é limitada polinomialmente.

2.3 ψ-álgebras unitárias de crescimento polinomial

Consideremos A uma ψ-álgebra unitária de crescimento polinomial. Nesta seção, mostraremos que $c_n^\psi(A)$ é um polinômio com coeficientes racionais e também determinaremos cotas inferior e superior para o coeficiente líder de $c_n^\psi(A)$.

Considere as sequências $c_n^\psi(A)$ e $\gamma_n^\psi(A)$. Através dessas sequências, definimos as seguintes séries de potências:

$$\tilde{c}^\psi(A,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\psi(A)\frac{t^n}{n!} \quad \text{e} \quad \tilde{\gamma}^\psi(A,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^\psi(A)\frac{t^n}{n!}. \tag{2.3.1}$$

Proposição 2.14. *Seja* $\exp(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$. *Então,*

$$\tilde{c}^\psi(A,t) = \exp(t)\tilde{\gamma}^\psi(A,t).$$

Prova: Por (2.3.1), $\tilde{c}^\psi(A,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\psi(A)\frac{t^n}{n!}$ e, por (2.2.2), $c_n^\psi(A) = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\gamma_i^\psi(A)$. Logo,

$$\tilde{c}^\psi(A,t) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\gamma_i^\psi(A)\frac{t^n}{n!}.$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\exp(t)\tilde{\gamma}^\psi(A,t) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty}\gamma_j^\psi(A)\frac{t^j}{j!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\gamma_i^\psi(A)\frac{t^i}{i!}\frac{t^{n-i}}{(n-i)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\gamma_i^\psi(A)\frac{t^n}{(n-i)!i!} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{(n-i)!i!}\gamma_i^\psi(A)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\gamma_i^\psi(A)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

Portanto, $\tilde{c}^\psi(A,t) = \exp(t)\tilde{\gamma}^\psi(A,t)$.

□

O próximo resultado nos permite calcular a dimensão de Γ_n^ψ.

Proposição 2.15. *Para todo* $n \geq 0$, *temos*

$$\dim \Gamma_n^\psi = n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}4^{n-i}.$$

Prova: Considere a ψ-álgebra livre $\mathcal{F}$. Então,

$$\tilde{c}^\psi(\mathcal{F},t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^\psi(\mathcal{F})\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}\dim P_n^\psi\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}4^n n!\frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty}4^n t^n$$

e
$$\tilde{\gamma}^{\psi}(\mathcal{F},t)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n^{\psi}(\mathcal{F})\frac{t^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\dim\Gamma_n^{\psi}\frac{t^n}{n!}.$$
Pela Proposição 2.14, temos
$$\sum_{n=0}^{\infty}4^nt^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}\sum_{j=0}^{\infty}\dim\Gamma_j^{\psi}\frac{t^j}{j!}.$$

Logo,
$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\dim\Gamma_n^{\psi}\frac{t^n}{n!}&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^n\sum_{j=0}^{\infty}4^jt^j=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}t^i4^{n-i}t^{n-i}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}4^{n-i}\right)\frac{t^n}{n!}.\end{aligned}$$
Portanto,
$$\dim\Gamma_n^{\psi}=n!\sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{i!}4^{n-i}.$$

□

Os próximos resultados nos direcionam para atingirmos um dos principais objetivos desta tese: mostrar que, se A é uma ψ-álgebra unitária de crescimento polinomial, então $c_n^{\psi}(A)$ é um polinômio com coeficientes racionais.

Lema 2.16. *Para todo $k\geq 0$, Γ_{k+i}^{ψ} é uma consequência de Γ_k^{ψ}, para qualquer $i\geq 1$.*

Prova: Primeiramente, considere k um número par. Seja u um gerador de Γ_{k+i}^{ψ}, $i\geq 1$. Se $u=[x_1,x_2]\cdots[x_{k-1},x_k]\cdots[x_{k+i-1},x_{k+i}]$, com $x_i\in\{y_{i,0},y_{i,1},z_{i,0},z_{i,1}\}$, é um produto de comutadores de peso 2, então u pode ser descrito da forma $u=[x_1,x_2]\cdots[x_{i-1},x_i]g$, onde $g\in\Gamma_k^{\psi}$. Logo, $u\in\langle\Gamma_k^{\psi}\rangle_{T_2^{\psi}}$. Se u é um produto de comutadores onde pelo menos um tem peso maior do que 2, também obtemos que $u\in\langle\Gamma_k^{\psi}\rangle_{T_2^{\psi}}$, pois basta observar que qualquer comutador de peso j pode ser visto como consequência de um comutador de peso menor do que j.

Agora, suponha que
$$u=y_{i_1,1}\cdots y_{i_p,1}z_{j_1,0}\cdots z_{j_q,0}z_{l_1,1}\cdots z_{l_r,1}w_1\cdots w_m,\tag{2.3.2}$$
onde w_i são comutadores de peso h_i nas variáveis em X, $h_1+\cdots+h_m=h$ e $p+q+r+h=k+i$.

Se $h\geq k$, pela parte que foi verificada acima, temos que u é uma consequência de Γ_k^{ψ}. Se $h<k$, então u é uma consequência de um polinômio da forma
$$y_{a_1,1}\cdots y_{a_d,1}z_{b_1,0}\cdots z_{b_e,0}z_{c_1,1}\cdots z_{c_f,1}w_1\cdots w_m\in\Gamma_k^{\psi},$$
onde $d+e+f+h=k$. Portanto, concluímos que o resultado vale para k um número par.

Agora, considere k um número ímpar. Como o caso onde k é um número par está feito, basta verificarmos que Γ_{k+1}^{ψ} é uma consequência de Γ_k^{ψ}. Seja u um gerador de Γ_{k+1}^{ψ}. Se u é um produto de comutadores onde pelo menos um tem peso > 2 ou se u é da mesma forma que (2.3.2), então basta proceder como no caso onde k é par.

Agora, suponha que $u = [x_1, x_2] \cdots [x_k, x_{k+1}]$ seja um produto de comutadores de peso 2. Primeiramente, vamos supor que, para algum i, temos

$$[x_i, x_{i+1}] \neq \begin{cases} [y_{i,0}, z_{i+1,0}] \\ [z_{i,0}, y_{i+1,0}] \\ [y_{i,1}, z_{i+1,1}] \\ [z_{i,1}, y_{i+1,1}] \end{cases} \quad \text{ou} \quad [x_i, x_{i+1}] \neq \begin{cases} [y_{i,0}, z_{i+1,0}] \\ [z_{i,0}, y_{i+1,0}] \\ [y_{i,1}, y_{i+1,1}] \\ [z_{i,1}, z_{i+1,1}] \end{cases},$$

para os casos em que ψ é uma involução graduada ou uma superinvolução, respectivamente. Em ambos os casos, observe que $[x_i, x_{i+1}] \notin \mathcal{F}_0^+$.

Observe que u pode ser escrito da seguinte forma

$$\begin{aligned} u &= [x_1, x_2] \cdots [x_{i-2}, x_{i-1}][x_i, x_{i+1}][x_{i+2}, x_{i+3}] \cdots [x_k, x_{k+1}] \\ &= [x_1, x_2] \cdots [x_{i-2}, x_{i-1}, [x_i, x_{i+1}]][x_{i+2}, x_{i+3}] \cdots [x_k, x_{k+1}] \\ &+ [x_1, x_2] \cdots [x_i, x_{i+1}][x_{i-2}, x_{i-1}][x_{i+2}, x_{i+3}] \cdots [x_k, x_{k+1}]. \end{aligned}$$

Como $[x_1, x_2] \cdots [x_{i-2}, x_{i-1}, [x_i, x_{i+1}]][x_{i+2}, x_{i+3}] \cdots [x_k, x_{k+1}] \in \langle \Gamma_k^{\psi} \rangle_{T_2^{\psi}}$, temos:

$$u \equiv [x_1, x_2] \cdots [x_i, x_{i+1}][x_{i-2}, x_{i-1}][x_{i+2}, x_{i+3}] \cdots [x_k, x_{k+1}] \pmod{\langle \Gamma_k^{\psi} \rangle_{T_2^{\psi}}}.$$

Repetindo o processo acima, obtemos

$$u \equiv [x_i, x_{i+1}][x_1, x_2] \cdots [x_{i-2}, x_{i-1}][x_{i+2}, x_{i+3}] \cdots [x_k, x_{k+1}] \pmod{\langle \Gamma_k^{\psi} \rangle_{T_2^{\psi}}}.$$

Como $[x_i, x_{i+1}] \in \mathcal{F}_1^+ \cup \mathcal{F}_0^- \cup \mathcal{F}_1^-$, concluímos que u é uma consequência de Γ_k^{ψ}.

Agora, para ψ uma involução graduada, suponha que, para todo $1 < i < k$, temos $[x_i, x_{i+1}]$ igual a $[y_{i,0}, z_{i+1,0}]$, $[z_{i,0}, y_{i+1,0}]$, $[y_{i,1}, z_{i+1,1}]$ ou $[z_{i,1}, y_{i+1,1}]$ e, para ψ uma superinvolução, suponha que, para todo $1 < i < k$, temos $[x_i, x_{i+1}]$ igual a $[y_{i,0}, z_{i+1,0}]$, $[z_{i,0}, y_{i+1,0}]$, $[y_{i,1}, y_{i+1,1}]$ ou $[z_{i,1}, z_{i+1,1}]$. Faremos o caso onde

$$u = [y_{1,0}, z_{2,0}][x_3, x_4] \cdots [x_k, x_{k+1}].$$

Observe que $y_{1,0}z_{2,0}[x_3, x_4] \cdots [x_k, x_{k+1}] \in \langle \Gamma_k^{\psi} \rangle_{T_2^{\psi}}$. Assim,

$$\begin{aligned} u &= y_{1,0}z_{2,0}[x_3, x_4] \cdots [x_k, x_{k+1}] - z_{2,0}y_{1,0}[x_3, x_4] \cdots [x_k, x_{k+1}] \\ &\equiv -y_{1,0}z_{2,0}[x_3, x_4] \cdots [x_k, x_{k+1}] - z_{2,0}y_{1,0}[x_3, x_4] \cdots [x_k, x_{k+1}] \\ &\equiv -(y_{1,0}z_{2,0} + z_{2,0}y_{1,0})[x_3, x_4] \cdots [x_k, x_{k+1}] \pmod{\langle \Gamma_k^{\psi} \rangle_{T_2^{\psi}}}. \end{aligned}$$

Como $z_{2,0}y_{1,0} + y_{1,0}z_{2,0} \in \mathcal{F}_0^-$, concluímos que u é uma consequência de Γ_k^{ψ}. Procedendo de maneira análoga com os casos restantes, obtemos o resultado desejado.

□

Como consequência do lema acima, temos o seguinte resultado:

Corolário 2.17. *Seja A uma ψ-álgebra unitária. Se existe $k \geq 1$ tal que $\gamma_k^\psi(A) = 0$, então $\gamma_n^\psi(A) = 0$, para todo $n \geq k$.*

Note que, se A uma ψ-álgebra unitária tal que $\gamma_n^\psi(A) \neq 0$, para todo $n \geq 0$, então, pela Proposição 2.13, $c_n^\psi(A) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i^\psi(A) \geq \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$. Logo, se A tem crescimento polinomial, existe $k \geq 0$ tal que $\gamma_k^\psi(A) = 0$.

Finalmente, toda essa discussão nos permite mostrar o principal resultado desta seção, que nos diz que, quando A é uma ψ-álgebra unitária tal que a sequência das ψ-codimensões é limitada polinomialmente, então essa sequência é de fato um polinômio com coeficientes racionais. Além disso, encontramos limitantes inferior e superior para o coeficiente líder desta sequência.

Teorema 2.18. *Seja A uma ψ-álgebra unitária. Se A tem crescimento polinomial, então $c_n^\psi(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1})$ para algum natural k, onde q é um número racional satisfazendo as inequações:*

$$\frac{1}{k!} \leq q \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} 4^{k-i}.$$

Prova: Como A é uma ψ-álgebra unitária de crescimento polinomial, pela discussão acima e pelo Corolário 2.17, existe um $k \geq 1$ tal que $\gamma_k^\psi(A) \neq 0$ e $\gamma_{k+i}^\psi(A) = 0$ para todo $i \geq 1$. Portanto,

$$c_n^\psi(A) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i^\psi(A) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \gamma_i^\psi(A),$$

que é um polinômio de grau k. Além disso, o coeficiente líder deste polinômio é $q = \dfrac{\gamma_k^\psi(A)}{k!}$. Desde que $1 \leq \gamma_k^\psi(A) \leq \dim \Gamma_k^\psi$ e, pela Proposição 2.15, temos $\dim \Gamma_n^\psi = n! \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i}{i!} 4^{n-i}$, concluímos que,

$$\frac{1}{k!} \leq q \leq \sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{i!} 4^{k-i}.$$

$\square$

Vale ressaltar que o teorema acima não só nos diz que o coeficiente líder de $c_n^\psi(A)$ é limitado, mas também que ele pode assumir apenas uma quantidade finita de valores, isto é, se $c_n^\psi(A) \approx qn^k$, então o coeficiente líder q pertence ao conjunto $\left\{ \dfrac{1}{k!}, \dfrac{2}{k!}, \ldots, \dfrac{\dim \Gamma_k^\psi}{k!} \right\}$.

No próximo capítulo, buscamos construir ψ-álgebras unitárias de crescimento polinomial que realizam o menor e o maior valor possível para o coeficiente líder da sequência das ψ-codimensões.

Capítulo 3

O coeficiente líder de c_n^{ψ}(A)

No capítulo anterior mostramos que se A é uma ψ-álgebra unitária de crescimento polinomial, então $c_n^{\psi}(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1}) \approx qn^k$, para alguns $q \in \mathbb{Q}$ e $k \geq 0$ e o coeficiente líder q pertence ao conjunto

$$\left\{ \frac{1}{k!}, \ldots, \frac{\dim \Gamma_k^{\psi}}{k!} \right\}.$$

Neste capítulo, apresentaremos ψ-álgebras, tanto para o caso em que ψ é uma involução graduada quanto para o caso em que ψ é uma superinvolução, que realizam o menor e o maior valor de q, isto é, vamos mostrar que, dado $k \in \mathbb{N}$, existem ψ-álgebras A e B tais que

$$c_n^{\psi}(A) \approx \frac{1}{k!} n^k \quad \text{e} \quad c_n^{\psi}(B) \approx \sum_{i=0}^{k} 4^{k-i} \frac{(-1)^i}{i!} n^k.$$

3.1 O menor valor de q

Nesta seção, iremos exibir exemplos de ψ-álgebras unitárias tais que, dado $k \geq 0$, a sequência das ψ-codimensões se comportam assintoticamente como qn^k, onde $q = \dfrac{1}{k!}$.

Primeiro, apresentaremos exemplos de $*$-superálgebras que realizam essa constante.

Para $k \geq 2$, considere a álgebra UT_k e seja

$$E = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1} \in UT_k.$$

Denotamos por C_k a seguinte subálgebra comutativa de UT_k:

$$C_k = \left\{ \alpha I_k + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i E^i : \alpha, \alpha_i \in F \right\}.$$

Como exemplo, tome $k = 4$.

$$C_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in F \right\}.$$

Consideraremos duas graduações em C_k: a graduação trivial e a graduação elementar induzida por $g = (0, 1, 0, 1, \ldots) \in \mathbb{Z}_2^k$. Também consideraremos duas involuções sobre C_k: a involução trivial e a seguinte involução

$$\left(\alpha I_k + \sum_{i=1}^{k} \alpha_i E^i \right)^* = \alpha I_k + \sum_{i=1}^{k} (-1)^i \alpha_i E^i. \tag{3.1.1}$$

Para uma melhor compreensão da construção acima, exibiremos um caso particular.

Exemplo 3.1. Para $k = 4$, temos que

$$C_4 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : \ a, b, c, d \in F \right\}.$$

O elemento $g = (0, 1, 0, 1) \in \mathbb{Z}_2^4$ induz a seguinte graduação elementar $((C_4)_0, (C_4)_1)$, onde

$$(C_4)_0 = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 & c & 0 \\ 0 & a & 0 & c \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : \ a, c \in F \right\} \quad \text{e} \quad (C_4)_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & d \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} : \ b, d \in F \right\}.$$

A involução $*$ é dada por:

$$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ 0 & a & b & c \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & -b & c & -d \\ 0 & a & -b & c \\ 0 & 0 & a & -b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Considere as seguintes $*$-superálgebras:

1. $C_{k,*}$: a álgebra C_k com graduação trivial e a involução $*$, definida em (3.1.1).

2. C_k^{gr}: a álgebra C_k com a graduação elementar acima e a involução trivial.

3. C_k^{gri}: a álgebra C_k com a graduação elementar acima e a involução $*$ definida em (3.1.1).

Os seguintes resultados mostram que essas $*$-superálgebras realizam o menor valor de q.

Teorema 3.2. [13, Teorema 6.7], [17, Teorema 6.1], [22, Lema 9] *Se A é uma das $*$-superálgebras $C_{k+1,*}, C_{k+1}^{\mathrm{gr}}, C_{k+1}^{\mathrm{gri}}$, então*

$$c_n^{\mathrm{gri}}(A) \approx \frac{1}{k!} n^k.$$

Para finalizar a seção, vamos apresentar dois exemplos de superálgebras com superinvolução, que realizam o valor desejado de q.

Considere as superálgebras com superinvolução $G_k^{\sharp}$ e $G_k^{\star}$, definidas no capítulo anterior.

Teorema 3.3. [13, Teoremas 6.2 e 6.5] *Temos que:*

$$c_n^s(G_k^{\sharp}) = c_n^s(G_k^{\star}) \approx \frac{1}{k!} n^k.$$

Portanto, mostramos exemplos de $*$-superálgebras que não são superálgebras munidas de superinvolução e de superálgebras munidas de superinvolução que não são $*$-superálgebras que realizam o valor $q = \dfrac{1}{k!}$, como gostaríamos.

3.2 O maior valor de q

O objetivo desta seção é construir ψ-álgebras que realizam o valor

$$q = \sum_{i=0}^{k} 4^{k-i} \frac{(-1)^i}{i!}.$$

Esse é o maior valor possível para o coeficiente líder q, de acordo com o Teorema 2.18. Primeiro vamos construir um exemplo de $*$-superálgebra que realiza tal constante e, a partir deste exemplo, iremos construir uma superálgebra munida de uma superinvolução que também realizará a mesma constante.

Para $k \geq 2$, considere a seguinte subálgebra de UT_{2k}:

$$M_k = FI_{2k} + \sum_{1 \leq i < j \leq k} Fe_{ij} + \sum_{k+1 \leq i < j \leq 2k} Fe_{ij}.$$

Como exemplo, se $k = 3$ temos:

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \; : \; a, b, c, d, e, f, g \in F \right\}.$$

Denotamos por M_k^g a álgebra M_k com graduação elementar induzida por um elemento $g \in \mathbb{Z}_2^{2k}$.

Vamos considerar a restrição da involução reflexão ρ, definida em (1.2.1), sobre M_k^g.

Em particular, se $k = 3$, então

$$\begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & d & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & e & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^{\rho} = \begin{pmatrix} a & g & f & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a & d & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Dado $g \in \mathbb{Z}_2^{2k}$ arbitrário, vale ressaltar que ρ pode não ser uma involução graduada sobre M_k^g. Por exemplo, se considerarmos M_3^g, com $g = (0, 0, 1, 1, 1, 0)$, então $e_{12} \in (M_3^g)_0$, mas $e_{12}^{\rho} = e_{56} \in (M_2^g)_1$. Então, ρ não é uma involução graduada neste caso.

Estamos interessados em todos os elementos $g \in \mathbb{Z}_2^{2k}$ tais que a involução ρ seja uma involução graduada sobre M_k^g.

Lema 3.4. *Seja M_k^g a álgebra M_k com graduação elementar induzida por $g = (g_1, \ldots, g_{2k}) \in \mathbb{Z}_2^{2k}$. A involução reflexão ρ é uma involução graduada sobre M_k^g se, e somente se,*

$$g_1 + g_{2k} = g_2 + g_{2k-1} = \cdots = g_{2k} + g_1. \tag{3.2.1}$$

Prova: Suponha que ρ seja uma involução graduada sobre M_k^g. Então, para $1 \leq i \leq j \leq 2k$, as matrizes elementares e_{ij} e $e_{ij}^{\rho} = e_{2k-j+1,2k-i+1}$ pertencem a mesma componente homogênea. Portanto,

$$g_i + g_j = g_{2k-j+1} + g_{2k-i+1}, \quad 1 \leq i \leq j \leq 2k.$$

Daí segue que $g_i + g_{2k-i+1} = g_j + g_{2k-j+1}$, para $1 \leq i \leq j \leq 2k$.

Reciprocamente, suponha que M_k seja munida da graduação elementar induzida por $g = (g_1, \ldots, g_{2k}) \in \mathbb{Z}_2^{2k}$, com $g_i + g_{2k-i+1} = g_j + g_{2k-j+1}$, para $1 \leq i \leq j \leq 2k$. Então, $g_i + g_j = g_{2k-j+1} + g_{2k-i+1}$, $1 \leq i \leq j \leq 2k$, que nos garante que e_{ij} e e_{ij}^{ρ} estão na mesma componente homogênea para quaisquer $1 \leq i \leq j \leq 2k$. Portanto, ρ é uma involução graduada sobre M_k^g.

$\square$

Considere o seguinte conjunto

$$H = \{(g_1, \ldots, g_{2k}) \in \mathbb{Z}_2^{2k} : g_1 + g_{2k} = g_2 + g_{2k-1} = \cdots = g_{2k} + g_1\}.$$

Observe que, pelo Lema 3.4, $g \in H$ se, e somente se, ρ é uma involução graduada sobre M_k^g.

Seja $g = (g_1, \ldots, g_{2k}) \in H$. Como comentamos no capítulo anterior, podemos assumir $g_1 = 0$. Agora, se fixarmos g_{2k}, então $g_{2k-i+1} = g_i + g_{2k}$, para todo $2 \leq i \leq k$. Nesse caso, g é unicamente determinado por $g_2, \ldots, g_k$.

Considere $g = (0, g_2, \ldots, g_{2k-1}, 1) \in H$ e defina a $2k$-upla $h = (0, h_2, \ldots, h_{2k})$, onde $h_i = g_i$, para $1 \leq i \leq k$ e $h_i = 1 + g_i$, para $k+1 \leq i \leq 2k$.

Por construção, $h \in H$ e $h_{2k} = 0$. Vamos verificar que M_k^g e M_k^h são isomorfas como superálgebras. Para isso, basta mostrarmos que $g_i + g_j = h_i + h_j$, para todo $1 \leq i, j \leq 2k$.

Se $1 \leq i < j \leq k$, nada há a fazer, pois $g_i = h_i$, para todo $1 \leq i \leq k$. Se $k+1 \leq i < j \leq 2k$, então $h_i + h_j = 1 + g_{2k-i+1} + 1 + g_{2k-j+1} = g_i + g_j$, já que $g_i + g_{2k-i+1} = g_j + g_{2k-j+1}$, pois $g \in H$. Logo, temos o resultado desejado.

A discussão acima nos garante que podemos trabalhar apenas com os elementos $g = (g_1, g_2, \ldots, g_{2k}) \in H$, tais que $g_1 = g_{2k} = 0$. Então, considere o seguinte subconjunto de H

$$H_0 = \{(0, g_2, \ldots, g_{2k-1}, 0) \in H : g_i = g_{2k-i+1}, \text{ para } 2 \leq i \leq k\}. \tag{3.2.2}$$

Definição 3.5. *Definimos como W_k^{gri} a seguinte $*$-superálgebra:*

$$W_k^{\mathrm{gri}} = \bigoplus_{g \in H_0} M_k^g,$$

1. *graduação:* $\left(W_k^{\mathrm{gri}}\right)_i = \bigoplus_{g \in H_0} (M_k^g)_i$, $i = 0, 1$,
2. *involução graduada* $*$: $w^* = (A_1, \ldots, A_s)^* = (A_1^\rho, \ldots, A_s^\rho)$, para todo $w = (A_1, \ldots, A_s) \in W_k^{\mathrm{gri}}$.

Os próximos resultados nos darão condições para mostrarmos que W_k^{gri} é a $*$-superálgebra desejada, isto é, que $c_n^{\mathrm{gri}}(W_k^{\mathrm{gri}}) = \left(\sum_{i=0}^{k} 4^{k-i} \frac{(-1)^i}{i!}\right) n^k + \mathcal{O}(n^{k-1})$.

Proposição 3.6. *A $*$-superálgebra W_k^{gri} não satisfaz identidades de grau $\leq k-1$.*

Prova: Para cada $g \in H_0$, considere a involução reflexão sobre M_k^g. Observe que $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(W_k^{\mathrm{gri}}) = \bigcap_{g \in H_0} \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_k^g)$. Agora suponha por contradição que exista $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(W_k^{\mathrm{gri}})$ de grau $k-1$. Além disso, como F é um corpo de característica zero, podemos supor que f é um polinômio multilinear, isto é,

$$f(u_1, \ldots, u_{k-1}) = \sum_{\sigma \in S_{k-1}} \alpha_\sigma u_{\sigma(1)} \cdots u_{\sigma(k-1)}, \tag{3.2.3}$$

com $u_i \in \{y_{i,0}, y_{i,1}, z_{i,0}, z_{i,1}\}$ e $\alpha_\sigma \neq 0$ para algum $\sigma \in S_{k-1}$. Vamos supor, sem perda de generalidade, que $\alpha_{(1)} \neq 0$, onde (1) denota a identidade de S_{k-1}.

Considere $g = (g_1, \ldots, g_{2k}) \in \mathbb{Z}_2^{2k}$, de tal maneira que:

- $g_1 = g_{2k} = 0$;
- $g_i = g_{2k-i+1} = \sum_{j=1}^{i-1} h_j$, para $2 \leq i \leq k$, onde h_i é o grau homogêneo da variável u_i, que aparece no polinômio f definido em (3.2.3).

Por construção, $g \in H_0$. Vamos verificar que $f \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_k^g)$ e com isso, concluímos que $f \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(W_k^{\mathrm{gri}})$.

Considere os seguintes elementos de M_k:

$$a_1 = e_{12} \pm e_{2k-1,2k},\ a_2 = e_{23} \pm e_{2k-2,2k-1}, \ldots, a_{k-1} = e_{k-1,k} \pm e_{k+1,k+2}.$$

Observe que, para todo $1 \leq i \leq k-1$, o grau homogêneo do elemento a_i é o grau homogêneo da variável u_i. Além disso, temos que a_i é um elemento simétrico ou antissimétrico de acordo com o sinal "mais" ou o sinal "menos", respectivamente.

Denote por $\tau \in S_{k-1}$ a permutação que leva 1 em $k-1$ e vice-versa, 2 em $k-2$ e vice-versa, e assim por diante. Obtemos que

$$f(a_1, \ldots, a_{k-1}) = \alpha_{(1)} e_{1k} \pm \alpha_\tau e_{k+1,2k} \neq 0.$$

Então, concluímos que $f \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_k^g)$, e consequentemente, $f \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(W_k^{\mathrm{gri}})$, que contradiz nossa hipótese.

□

Observação 3.7. Sejam $A = M_k^g$ e ρ a involução reflexão sobre A. Como o radical de Jacobson J de M_k^g é $J = M_k \setminus \mathrm{span}\{I_{2k}\}$, obtemos que $A_0^-, A_1^-, A_1^+ \subset J$ para qualquer $g \in H_0$. Além disso, $J^k = \{0\}$.

A Proposição 3.6 e a Observação 3.7 nos dão condições para provar o seguinte teorema:

Teorema 3.8. *Para $k \geq 2$, temos que.*

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(W_k^{\mathrm{gri}}) = \langle \Gamma_k^{\mathrm{gri}} \rangle_{T_2^*}.$$

Prova: Vamos verificar que se $f \in \Gamma_k^{\mathrm{gri}}$, então $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(W_k^{\mathrm{gri}})$. Para tanto, basta verificarmos que $f \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(M_k^g)$, para todo $g \in H_0$.

Sejam $g \in H_0$, $A = M_k^g$ e seja J o radical de Jacobson de A. Como $J^k = \{0\}$, pela Observação 3.7, o produto $a_1 \cdots a_k$, com $a_i \in A_0^- \cup A_1^- \cup A_1^+$, para todo $i = 1, \ldots, k$, é nulo. Logo, todo monômio da forma $x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(k)}$, $\sigma \in S_k$ e $x_i \in Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$, é uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade de A.

Agora, sejam $a_1, a_2 \in A$. Então, $[a_1, a_2] \in J^2$ e, indutivamente, temos que $[a_1, \ldots, a_p]$ pertence a J^p, com $2 \leq p \leq k$. Portanto, o produto $a_1 \cdots a_{k-p}[b_1, \ldots, b_p]$, com $a_i \in$

$A_0^- \cup A_1^- \cup A_1^+$ e $b_j \in A$ é nulo e, com isso, concluímos que qualquer polinômio da forma $x_{i_1} \cdots x_{i_s} w_1 \cdots w_m$, onde $x_i \in Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ e w_i é um comutador de peso j_i, com $j_1 + \cdots + j_m = k - s$ nas variáveis em X é uma $(\mathbb{Z}_2, *)$-identidade de A.

Visto que todo polinômio $f \in \Gamma_k^{\text{gri}}$ é uma combinação linear dos polinômios acima, obtemos que $f \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$ e, portanto, $f \in \text{Id}^{\text{gri}}(W_k^{\text{gri}})$.

Agora, seja $f \in \text{Id}^{\text{gri}}(W_k^{\text{gri}})$. Como $\text{Id}^{\text{gri}}(W_k^{\text{gri}})$ é determinado pelos polinômios próprios, então podemos assumir que f é um polinômio próprio e, pela Proposição 3.6, temos que o grau de f é $\geq k$. Logo $f \in \Gamma_n^{\text{gri}}$, para algum $n \geq k$ e, pela Proposição 2.16, $\Gamma_n^{\text{gri}} \subset \langle \Gamma_k^{\text{gri}} \rangle_{T_2^*}$, para todo $n \geq k$. Portanto, temos $f \in \langle \Gamma_k^{\text{gri}} \rangle_{T_2^*}$.

$\square$

Nosso primeiro objetivo nesta seção, que é exibir uma $*$-superálgebra unitária que realiza o maior valor possível de q, segue como uma consequência do teorema acima.

Corolário 3.9. *Para qualquer $k \geq 2$,*

$$c_n^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}}) = \left(\sum_{i=0}^{k} 4^{k-i} \frac{(-1)^i}{i!} \right) n^k + \mathcal{O}(n^{k-1}).$$

Prova: Seja $f \in \Gamma_n^{\text{gri}}$, $n \leq k$. Pelo teorema acima, $\text{Id}^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}}) = \langle \Gamma_{k+1}^{\text{gri}} \rangle_{T_2^*}$. Logo, $f \notin \text{Id}^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}})$ e, portanto, $\gamma_n^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}}) = \dim \Gamma_n^{\text{gri}}$, para todo $n \leq k$. Por outro lado, se $f \in \Gamma_n^{\text{gri}}$, $n > k$, de acordo com a Proposição 2.16, temos $f \in \langle \Gamma_{k+1}^{\text{gri}} \rangle_{T_2^*}$. Logo, $f \in \text{Id}^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}})$ e, concluímos que, $\gamma_n^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}}) = 0$, para $n > k$. Assim,

$$\gamma_n^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}}) = \begin{cases} \dim \Gamma_n^{\text{gri}} & \text{se} \quad n \leq k \\ 0 & \text{se} \quad n > k. \end{cases}$$

Usando (2.2.2) temos, para $n \geq k$,

$$c_n^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \gamma_i^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}}) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} \dim \Gamma_i^{\text{gri}}.$$

Pela Proposição 2.15, temos $\dim \Gamma_n^{\text{gri}} = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \frac{4^{n-i}}{i!}$. Logo,

$$c_n^{\text{gri}}(W_{k+1}^{\text{gri}}) = \left(\sum_{i=0}^{k} 4^{k-i} \frac{(-1)^i}{i!} \right) n^k + \mathcal{O}(n^{k-1}).$$

$\square$

Agora, vamos apresentar uma superálgebra A munida de uma superinvolução tal que

$$c_n^s(A) \approx \left(\sum_{i=0}^{k} 4^{k-i} \frac{(-1)^i}{i!} \right) n^k.$$

Como comentamos no início da seção, nossa estratégia é usar a $*$-superálgebra W_k^{gri} para definirmos uma superálgebra com superinvolução com a propriedade desejada.

Para isso, precisamos de algumas definições e resultados.

Definição 3.10. Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra. Considere $\varphi : A \to A$ uma aplicação linear, bijetiva e que preserva a graduação. Dizemos que φ é um **superautomorfismo** se

$$(ab)^{\varphi} = (-1)^{|a||b|} a^{\varphi} b^{\varphi}, \quad \textit{para todos } a, b \in A_0 \cup A_1.$$

Seja A uma superálgebra munida de uma involução graduada. A seguinte proposição nos mostra como obtermos uma superinvolução sobre A através da involução graduada dada e de um superautomorfismo.

Proposição 3.11. *Seja $A = A_0 \oplus A_1$ uma superálgebra munida de uma involução graduada $*$. Se $\varphi : A \to A$ é um superautomorfismo de ordem 2 tal que $*\varphi = \varphi *$, então $*\varphi$ é uma superinvolução sobre A.*

Prova: Seja $\psi = *\varphi$. Observe que ψ preserva a graduação pois $*$ e φ preservam a graduação. Como $*\varphi = \varphi *$ e $*$ e φ têm ordem 2, então $\psi^2 = (*\varphi)(*\varphi) = *^2\varphi^2 = Id$. Resta mostrar que $(ab)^{\psi} = (-1)^{|a||b|} b^{\psi} a^{\psi}$, para todos $a, b \in A_0 \cup A_1$. Se $a, b \in A_0 \cup A_1$, então $(ab)^{\psi} = (ab)^{*\varphi} = ((ab)^{\varphi})^*$. Desde que φ é um superautomorfismo, temos que $(ab)^{\varphi} = (-1)^{|a||b|} a^{\varphi} b^{\varphi}$. Portanto, $((ab)^{\varphi})^* = ((-1)^{|a||b|} a^{\varphi} b^{\varphi})^* = (-1)^{|a||b|} (a^{\varphi} b^{\varphi})^* = (-1)^{|a||b|} (b^{\varphi})^* (a^{\varphi})^* = (-1)^{|a||b|} b^{\psi} a^{\psi}$.

□

Considerando o conjunto H_0 que foi definido em (3.2.2), já provamos que a involução reflexão ρ é uma involução graduada em M_k^g, para todo $g \in H_0$. Então, usando a Proposição 3.11, basta exibirmos um superautomorfismo nas condições da citada proposição que obtemos uma superinvolução sobre M_k^g, $g \in H_0$. Em [18], é apresentada uma aplicação que atende aos nossos requisitos, como veremos a seguir.

Definição 3.12. Seja $g \in H_0$. Definimos a aplicação $\Phi : M_k^g \to M_k^g$ tal que $\Phi = \Phi_{k-1}$, onde $\Phi_0(e_{ij}) = e_{ij}$ e, para todo $1 \leq n \leq k-1$,

$$\Phi_n(e_{ij}) = \begin{cases} \Phi_{n-1}(e_{ij}), & \text{se } e_{ij} \notin (M_k^g)_1^{n+1}, \\ -\Phi_{n-1}(e_{ij}), & \text{se } e_{ij} \in (M_k^g)_1^{n+1} \end{cases}$$

e estendemos linearmente para todo elemento de M_k^g.

Observação 3.13. Note que, para todo $1 \leq i \leq j \leq 2k$, $\Phi(e_{ij}) = \alpha e_{ij}$, com $\alpha \in \{-1, 1\}$, o que nos garante que Φ é bijetiva e preserva a graduação. Além disso, Φ tem ordem 2, pois $\Phi^2(e_{ij}) = \Phi(\alpha e_{ij}) = \alpha \Phi(e_{ij}) = \alpha^2 e_{ij} = e_{ij}$.

Exemplo 3.14. Seja $A = M_5^g$, onde $g = (0,1,0,1,0,0,1,0,1,0)$. Então, (A_0, A_1) é a graduação elementar induzida por g, em que $A_0 = \text{span}\{I_{10}, e_{13}, e_{15}, e_{24}, e_{35}, e_{68}, e_{610}, e_{79}, e_{8,10}\}$ e $A_1 = \text{span}\{e_{12}, e_{14}, e_{23}, e_{25}, e_{34}, e_{45}, e_{67}, e_{69}, e_{78}, e_{7,10}, e_{89}, e_{9,10}\}$. Vamos definir a aplicação Φ para este caso particular. Note que $A_1^2 = \text{span}\{e_{13}, e_{15}, e_{24}, e_{35}, e_{68}, e_{610}, e_{79}, e_{8,10}\}$, $A_1^3 = \text{span}\{e_{14}, e_{25}, e_{69}, e_{7,10}\}$, $A_1^4 = \text{span}\{e_{15}, e_{6,10}\}$ e $A_1^5 = \{0\}$.

Portanto,

$\Phi_0 = Id,$

$$\Phi_1(e_{ij}) = \begin{cases} e_{ij}, & \text{se } e_{ij} \notin \{e_{13}, e_{15}, e_{24}, e_{35}, e_{68}, e_{6,10}, e_{79}, e_{8,10}\} \\ -e_{ij}, & \text{se } e_{ij} \in \{e_{13}, e_{15}, e_{24}, e_{35}, e_{68}, e_{6,10}, e_{79}, e_{8,10}\} \end{cases},$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(e_{ij}) &= \begin{cases} \Phi_1(e_{ij}), & \text{se } e_{ij} \notin \{e_{14}, e_{25}, e_{69}, e_{7,10}\} \\ -\Phi_1(e_{ij}), & \text{se } e_{ij} \in \{e_{14}, e_{25}, e_{69}, e_{7,10}\} \end{cases}, \\ &= \begin{cases} e_{ij}, & \text{se } e_{ij} \notin \{e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{24}, e_{25}, e_{35}, e_{68}, e_{69}, e_{6,10}, e_{79}, e_{8,10}\} \\ -e_{ij}, & \text{se } e_{ij} \in \{e_{13}, e_{14}, e_{15}, e_{24}, e_{25}, e_{35}, e_{68}, e_{69}, e_{6,10}, e_{79}, e_{8,10}\} \end{cases}. \\ \Phi_3(e_{ij}) &= \begin{cases} \Phi_2(e_{ij}), & \text{se } e_{ij} \notin \{e_{15}, e_{6,10}\} \\ -\Phi_2(e_{ij}), & \text{se } e_{ij} \in \{e_{15}, e_{6,10}\} \end{cases}, \\ &= \begin{cases} e_{ij}, & \text{se } e_{ij} \notin \{e_{13}, e_{14}, e_{24}, e_{25}, e_{35}, e_{68}, e_{69}, e_{79}, e_{8,10}\} \\ -e_{ij}, & \text{se } e_{ij} \in \{e_{13}, e_{14}, e_{24}, e_{25}, e_{35}, e_{68}, e_{69}, e_{79}, e_{8,10}\} \end{cases}. \end{aligned}$$

Como $A_1^5 = \{0\}$, temos que $\Phi_3 = \Phi_4 = \Phi$. Logo,

$$\Phi(e_{ij}) = \begin{cases} e_{ij}, & \text{se } e_{ij} \notin \{e_{13}, e_{14}, e_{24}, e_{25}, e_{35}, e_{68}, e_{69}, e_{79}, e_{8,10}\} \\ -e_{ij}, & \text{se } e_{ij} \in \{e_{13}, e_{14}, e_{24}, e_{25}, e_{35}, e_{68}, e_{69}, e_{79}, e_{8,10}\} \end{cases}.$$

Sejam $g \in H_0$ e $A = M_k^g$ e considere uma matriz elementar $e_{ij} \in A$. Sabemos que, se J é o radical de Jacobson de M_k^g, então $A_1 \subset J$. Portanto, se $e_{ij} \in A_1^t$, para algum $t \geq 1$, sempre é possível encontrar um maior natural $m \in \{1, \ldots, k-1\}$ tal que $e_{ij} \in A_1^m$. Conforme a Observação 3.13, temos que $\Phi(e_{ij}) = \alpha e_{ij}$, com $\alpha \in \{-1, 1\}$. Nosso próximo passo é estabelecermos condições para determinarmos o valor da constante α. Para isso, precisamos do seguinte lema.

Lema 3.15. *Sejam $g \in H_0$ e $A = M_k^g$ e considere a aplicação Φ definida em (3.12). Então:*

1. *Se $e_{ij} \in A_0$ e $e_{ij} \notin A_1^t$, para todo $t \in \mathbb{N}$, então $\alpha = 1$.*

2. *Se $e_{ij} \in A_0$ e existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $e_{ij} \in A_1^t$, então $\Phi(e_{ij}) = \Phi_{2h}(e_{ij})$, onde h é o maior inteiro tal que $e_{ij} \in A_1^{2h}$.*

3. *Se $e_{ij} \in A_1$, então $\Phi(e_{ij}) = \Phi_{2h}(e_{ij})$, onde h é o maior inteiro tal que $e_{ij} \in A_1^{2h+1}$.*

Em ambos os casos (2) e (3) temos que $\Phi_{2h}(e_{ij}) = (-1)^h e_{ij}$.

Prova:

1. Se $e_{ij} \in A_0$ e $e_{ij} \notin A_1^t$, para todo $t \in \mathbb{N}$, então $\Phi(e_{ij}) = e_{ij}$, logo $\alpha = 1$ e isto prova o item 1.

2. Para provar o item 2, suponha que $e_{ij} \in A_0$ e que exista $t \in \mathbb{N}$ tal que $e_{ij} \in A_1^t$. Como $e_{ij} \in A_0$, então $t = 2r$, $r \in \mathbb{N}$.

   Tome h o maior inteiro tal que $e_{ij} \in A_1^{2h}$. Vamos determinar $\Phi_{2h}(e_{ij})$.

   Como $A_1^2 \supset A_1^4 \supset \ldots \supset A_1^{2k} \supset A_1^{2k+2} \supset \ldots$ temos que $e_{ij} \in A_1^{2h'}$ para todo $h' = 1, \ldots, h$. Portanto, $\Phi_1(e_{ij}) = -e_{ij}$, $\Phi_2(e_{ij}) = -e_{ij}$, $\Phi_3(e_{ij}) = e_{ij}$, $\Phi_4(e_{ij}) = e_{ij}$, $\Phi_5(e_{ij}) = -e_{ij}$ e, assim sucessivamente, concluímos que:

   $$\Phi_{4m+r}(e_{ij}) = \Phi_r(e_{ij}), \text{ com } r = 1, 2, 3, 4 \text{ e } m \in \mathbb{N}.$$

   Assim, obtemos que $\Phi_{2(2m)}(e_{ij}) = \Phi_4(e_{ij}) = e_{ij}$ e $\Phi_{2(2m+1)}(e_{ij}) = \Phi_2(e_{ij}) = -e_{ij}$, para qualquer $m \geq 1$. Portanto,

   - se h é par, então $\Phi_{2h}(e_{ij}) = e_{ij}$,
   - se h é ímpar, então $\Phi_{2h}(e_{ij}) = -e_{ij}$.

   Ou seja, se h é par, então $\alpha = 1$ e se h é ímpar, então $\alpha = -1$.

3. Finalmente, vamos provar o item 3 supondo que $e_{ij} \in A_1$ e considerando h o maior inteiro tal que $e_{ij} \in A_1^{2h+1}$. Vamos determinar $\Phi_{2h}(e_{ij})$.

   Note que $e_{ij} \in A_1^{2h'+1}$, para todo $0 \leq h' \leq h$. Assim como ocorreu no caso anterior obtemos que

   $$\Phi_{4m+r}(e_{ij}) = \Phi_r(e_{ij}), \text{ com } r = 1, 2, 3, 4 \text{ e } m \in \mathbb{N}.$$

   Logo, concluímos que, se h é par, então $\Phi_{2h}(e_{ij}) = e_{ij}$ e se h é ímpar, então $\Phi_{2h}(e_{ij}) = -e_{ij}$. Isto é, se h é par, temos $\alpha = 1$ e se h é ímpar, temos $\alpha = -1$.

$\square$

A próxima proposição nos mostra que Φ é, de fato, o superautomorfismo procurado.

Proposição 3.16. *Para todo* $g \in H_0$*, a aplicação* Φ *é um superautomorfismo de ordem 2 que comuta com* ρ*.*

Prova: De acordo com a Observação 3.13, resta provarmos que, para todo $1 \leq i \leq j \leq m \leq n \leq 2k$, temos

$$\Phi(e_{ij}e_{mn}) = (-1)^{|e_{ij}||e_{mn}|}\Phi(e_{ij})\Phi(e_{mn}).$$

Se $j \neq m$, então $\Phi(e_{ij}e_{mn}) = \Phi(0) = 0$. Por outro lado, se $\Phi(e_{ij}) = \alpha e_{ij}$ e $\Phi(e_{mn}) = \beta e_{mn}$, para alguns $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$, temos $\Phi(e_{ij})\Phi(e_{mn}) = (\alpha e_{ij})(\beta e_{mn}) = (\alpha\beta)e_{ij}e_{mn} = 0$. Logo, temos o resultado desejado.

Resta o caso $j = m$. Sejam $\Phi(e_{ij}) = \alpha e_{ij}$, $\Phi(e_{jn}) = \beta e_{jn}$ e $\Phi(e_{in}) = \gamma e_{in}$, com $\alpha, \beta, \gamma \in \{-1, 1\}$. Basta mostrar

$$\gamma = (-1)^{|e_{ij}||e_{jn}|}\alpha\beta. \tag{3.2.4}$$

Considere $A = M_k^g$, com $g = (0, g_2, \cdots, g_{2k-1}, 0) \in H_0$. Suponha que $e_{ij} \in A_0$ e $e_{ij} \notin A_1^t$, para todo $t \in \mathbb{N}$. Então $\alpha = 1$. Mais ainda, temos que $(-1)^{|e_{ij}||e_{jn}|} = 1$, independente da componente homogênea que e_{jn} esteja. Portanto, basta mostrarmos que $\beta = \gamma$ em qualquer uma das possibilidades para e_{ij} que resolvemos este caso. Vamos analisar as possibilidades de e_{jn}.

Se $e_{jn} \in A_0$ e $e_{jn} \notin A_1^t$, para todo $t \in \mathbb{N}$, então $\beta = 1$. Por outro lado, nessas condições temos que $e_{in} \in A_0$ e $e_{in} \notin A_1^t$, para todo $t \in \mathbb{N}$, logo, $\gamma = 1$.

Se $e_{jn} \in A_0$ e existe t de tal maneira que $e_{jn} \in A_1^t$, então $\Phi(e_{jn}) = \Phi_{2h}(e_{jn})$, onde h é o maior inteiro tal que $e_{jn} \in A_1^{2h}$. Por outro lado, $e_{in} \in A_0$ e também temos que h é o maior inteiro tal que $e_{in} \in A_1^{2h}$. Logo, $\Phi(e_{in}) = \Phi_{2h}(e_{in})$ e, consequentemente, $\Phi(e_{jn}) = \Phi(e_{in})$. Portanto, $\beta = \gamma$. De maneira análoga, mostramos que $\beta = \gamma$ para o caso em que $e_{jn} \in A_1$.

Agora, suponha que $e_{ij}, e_{jn} \in A_0$ e existam h_1, h_2 tais que h_1 é o maior inteiro tal que $e_{ij} \in A_1^{2h_1}$ e h_2 é o maior inteiro tal que $e_{jn} \in A_1^{2h_2}$. Afirmamos que $h_3 = h_1 + h_2$ é o maior inteiro tal que $e_{in} \in A_1^{2h_3}$. De fato, basta mostrarmos que $e_{in} \notin A_1^{2h_3+2}$ que temos o resultado desejado. Suponha, por contradição, que $e_{in} \in A_1^{2h_3+2}$, então existem $e_{i_1,i_2}, e_{i_2,i_3}, \ldots, e_{i_{2h_3+2},i_{2h_3+3}} \in A_1$ tais que $e_{in} = e_{i_1,i_2}e_{i_2,i_3}\cdots e_{i_{2h_3+2},i_{2h_3+3}}$. Note que $i_1 = i$ e $i_{2h_3+3} = n$.

Desde que $e_{i_1,i_2}, e_{i_2,i_3}, \ldots, e_{i_{2h_3+2},i_{2h_3+3}} \in A_1$ temos $g_{i_1} + g_{i_2} = 1$, $g_{i_2} + g_{i_3} = 1$, $\ldots$, $g_{i_{2h_3+2}} + g_{i_{2h_3+3}} = 1$. Daí concluímos que

- $g_{i_1} = g_{i_3} = \ldots = g_{i_{2t+1}} = \ldots = g_{i_{2h_3+3}}$,
- $g_{i_1} \neq g_{i_2} = g_{i_4} = \ldots = g_{i_{2t}} = \ldots = g_{i_{2h_3+2}}$.

Agora, como $e_{ij} \in A_1^{2h_1}$, temos que existem $e_{j_1,j_2}, e_{j_2,j_3}, \ldots, e_{j_{2h_1},j_{2h_1+1}} \in A_1$ tais que $e_{ij} = e_{j_1,j_2}e_{j_2,j_3}\cdots e_{j_{2h_1},j_{2h_1+1}}$. Note que $j_1 = i$ e $j_{2h_1+1} = j$.

Desde que $e_{j_1,j_2}, e_{j_2,j_3}, \ldots, e_{j_{2h_1},j_{2h_1+1}} \in A_1$ temos

- $g_{j_1} = g_{j_3} = \ldots = g_{j_{2t+1}} = \ldots = g_{j_{2h_1+1}}$,

- $g_{j_1} \neq g_{j_2} = g_{j_4} = \ldots = g_{j_{2t}} = \ldots = g_{j_{2h_1}}$.

Considere o produto $P = e_{i_1,i_2}e_{i_2,i_3}\cdots e_{i_{2h_1+1},i_{2h_1+2}}e_{i_{2h_1+2},j_{2h_1+1}}$. Como $i_1 = i$ e $j_{2h_1+1} = j$, temos que $P = e_{ij}$. Além disso, por hipótese, $e_{i_1,i_2}, e_{i_2,i_3}, \ldots e_{i_{2h_1+1},i_{2h_1+2}} \in A_1$ e $e_{i_{2h_1+2},j_{2h_1+1}}$ também pertence a A_1 pois $g_{i_{2h_1+2}} \neq g_{i_1} = g_i = g_{j_1} = g_{j_{2h_1+1}}$. Daí, obtemos que $e_{ij} \in A_1^{2h_1+2}$, que contradiz nossa hipótese que $e_{ij} \notin A_1^{2h}$, para todo $h > h_1$. Portanto, $e_{in} \notin A_1^{2h_3+2}$ como afirmamos.

De acordo com o Lema 3.15, basta analisarmos as paridades de h_1, h_2 e h_3 para concluirmos o resultado.

Como $e_{in} \in A_0$, temos que, se $h_1 + h_2$ é par, então $\gamma = 1$ e, se $h_1 + h_2$ é ímpar, então $\gamma = -1$.

Se $h_1 + h_2$ é par, então h_1 e h_2 têm a mesma paridade. Se ambos forem pares, então $\alpha = \beta = 1$ e se ambos forem ímpares, então $\alpha = \beta = -1$. Nas duas situações temos que a equação (3.2.4) é satisfeita.

Se $h_1 + h_2$ é ímpar, então h_1 e h_2 têm paridades diferentes. Suponha, sem perda de generalidade, que h_1 é par e h_2 é ímpar. Assim, temos que $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, que nos mostra que a equação (3.2.4) é satisfeita.

Vamos supor que $e_{ij} \in A_0$ e $e_{jn} \in A_1$, logo $e_{in} \in A_1$. Além disso, vamos considerar h_1, h_2 tais que h_1 é o maior inteiro tal que $e_{ij} \in A_1^{2h_1}$ e $e_{jn} \in A_1^{2h_2+1}$. Logo, assim como no caso anterior, $h_3 = h_1 + h_2$ é o maior natural tal que $e_{in} \in A_1^{2h_3+1}$. Como $e_{in} \in A_1$, temos que, se $h_1 + h_2$ é par, então $\gamma = 1$ e, se $h_1 + h_2$ é ímpar, então $\gamma = -1$.

Se $h_1 + h_2$ é par, então h_1 e h_2 têm a mesma paridade. Se ambos forem pares, temos $\alpha = \beta = 1$ e se ambos forem ímpares, temos $\alpha = \beta = -1$. Novamente temos que (3.2.4) é válida para as duas possibilidades.

Se $h_1 + h_2$ é ímpar, então h_1 e h_2 têm paridades diferentes. Suponha, sem perda de generalidade, que h_1 é par e h_2 é ímpar. Portanto, $\alpha = 1$ e $\beta = -1$ e concluímos que $\gamma = (-1)^{|e_{ij}||e_{jn}|}\alpha\beta$.

Para finalizar, suponha que $e_{ij}, e_{jn} \in A_1$. Então, $e_{in} \in A_0$ e $(-1)^{|e_{ij}||e_{jn}|} = -1$. Tome $h_1, h_2 \in \mathbb{N}$ tais que h_1 é o maior inteiro tal que $e_{ij} \in A_1^{2h_1+1}$ e h_2 é o maior inteiro tal que $e_{jn} \in A_1^{2h_2+1}$. Portanto, $h_3 = h_1 + h_2 + 1$ é o maior inteiro tal que $e_{in} \in A_1^{2h_3}$. Se h_3 é par, então $\gamma = 1$ e se h_3 é ímpar, então $\gamma = -1$.

Se h_3 é par, então h_1, h_2 têm paridades diferentes. Suponha, sem perda de generalidade, que h_1 é par e h_2 é ímpar. Assim, $\alpha = 1$ e $\beta = -1$, então, $(-1)^{|e_{ij}||e_{jn}|}\alpha\beta = 1 = \gamma$.

Se h_3 é ímpar, então h_1, h_2 têm a mesma paridade. Se ambos forem par, então $\alpha = \beta = 1$ e se ambos forem ímpar, então $\alpha = \beta = -1$. Portanto, em ambas situações temos que $\gamma = (-1)^{|e_{ij}||e_{jn}|}\alpha\beta$. Resta mostrarmos que $\Phi\rho = \rho\Phi$ para concluírmos o resultado.

Suponha que $e_{ij} \in A_1^{2h}$, $h > 0$. Então, $\Phi(e_{ij}) = (-1)^h e_{ij}$, logo $((-1)^h e_{ij})^\rho = (-1)^h \rho(e_{ij})$. Por outro lado, como ρ preserva a graduação, $\rho(e_{ij}) \in A_1^{2h}$, Daí, $\Phi(e_{ij}^\rho) =$

$(-1)^h(e_{ij}^{\rho})$ como queríamos.

$\square$

Seja $g \in H_0$ e considere a superálgebra M_k^g. Sabemos que ρ é uma involução graduada sobre M_k^g e acabamos de verificar que Φ é um superautomorfismo sobre M_k^g de ordem 2 que comuta com ρ. De acordo com a Proposição 3.11, temos que $\bar{\rho} = \Phi\rho$ é uma superinvolução sobre M_k^g.

Seja $g \in H_0$, através das superálgebras M_k^g munidas da superinvolução $\bar{\rho}$, definimos a seguir uma superálgebra munida de uma superinvolução que atende aos nossos propósitos.

Definição 3.17. Definimos W_k^s como a superálgebra com superinvolução:

$$W_k^s = \bigoplus_{g \in H_0} M_k^g,$$

1. graduação: $(W_k^s)_i = \bigoplus\limits_{g \in H_0} (M_k^g)_i$, $i = 0, 1$,

2. superinvolução $\bar{*}$: $w^{\bar{*}} = (A_1, \ldots, A_s)^{\bar{*}} = (A_1^{\bar{\rho}}, \ldots, A_s^{\bar{\rho}})$, para todo $w = (A_1, \ldots, A_s) \in W_k^s$.

De maneira análoga ao caso feito para $*$-superálgebras, mostramos que

1. W_k^s não satisfaz identidades de grau $\leq k - 1$ e

2. $\mathrm{Id}^s(W_k^s) = \langle \Gamma_k^s \rangle_{T_2^*}$.

Como consequência, temos o seguinte corolário que nos garante que W_k^s é o exemplo de superálgebra com superinvolução que procurávamos.

Corolário 3.18. *Para qualquer $k \geq 2$, temos*

$$c_n^s(W_{k+1}^s) \approx \left(\sum_{i=0}^{k} 4^{k-i} \frac{(-1)^i}{i!} \right) n^k.$$

Portanto, exibimos exemplos de superálgebras munidas de uma involução graduada ou de uma superinvolução que realizam o menor e o maior valor de q como desejávamos.

No próximo capítulo, analisaremos o caso particular em que A é uma ψ-álgebra unitária de crescimento quadrático e construiremos exemplos que realizam cada valor possível para o coeficiente líder de $c_n^{\psi}(A)$.

Capítulo 4

ψ-Álgebras unitárias de crescimento quadrático

Nos capítulos anteriores, mostramos que se A é uma ψ-álgebra unitária de crescimento polinomial, então a sequência $c_n^\psi(A)$ é descrita por um polinômio com coeficientes racionais e que existe uma quantidade finita de valores possíveis que o coeficiente líder desse polinômio pode assumir. Além disso, construímos ψ-álgebras unitárias que realizam o menor e o maior valor possível que esse coeficiente pode atingir.

O fato de existir uma quantidade finita de valores possíveis que esse coeficiente pode assumir, nos leva a seguinte questão: para cada valor possível para o coeficiente líder do polinômio que descreve a sequência das ψ-codimensões, é possível construir uma ψ-álgebra unitária que realiza esse valor?

Dentro dos casos ordinário e das φ-álgebras, vimos que, para alguns casos específicos, foram exibidos exemplos que realizam os valores possíveis para o coeficiente líder, conforme comentamos no Capítulo 1.

Agora, seja A uma ψ-álgebra unitária de crescimento linear, isto é, $c_n^\psi(A) \approx qn$, $q \in \mathbb{Q}$. De acordo com o Teorema 2.18, temos três possibilidades para q: $1, 2$ e 3. Como no capítulo anterior já apresentamos exemplos que realizam $q = 1$ e $q = 3$, resta exibirmos um exemplo para $q = 2$ para obter todos os exemplos procurados para o caso linear.

Considere a seguinte subálgebra unitária de UT_4:

$$U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \ : \ a, b, c \in F \right\}$$

com graduação elementar induzida por $g = (0, 1, 0, 1) \in \mathbb{Z}_2^4$ e munida da involução graduada reflexão ρ. Mais ainda, a involução ρ é uma superinvolução. Conforme a

Observação 2.6, denotaremos por U_2^{gri} quando nos referirmos a ρ como uma involução graduada e U_2^s quando nos referirmos a ρ como uma superinvolução.

Em [17], foram classificadas, a menos de T_2^s-equivalência, as superálgebras munidas de uma superinvolução cujo crescimento da sequência das s-codimensões é no máximo linear. Ao apresentarem essa classificação, foi mostrado que $c_n^s(U_2^s) = 2n + 1$ dentre outras codimensões que foram determinadas na mesma publicação. Consequentemente, temos $c_n^{\text{gri}}(U_2^{\text{gri}}) = 2n + 1$. Logo, nada temos a fazer para o caso referente às ψ-álgebras unitárias de crescimento linear.

Portanto, focaremos nossa atenção para o caso em que A é uma ψ-álgebra unitária de crescimento quadrático. De acordo com o Teorema 2.18, existem $q, p, r \in \mathbb{Q}$ tais que $c_n^\psi(A) = qn^2 + pn + r$. Mais ainda, temos que:

1. $q = \dfrac{\gamma_2^\psi(A)}{2}$,
2. $q \in \left\{\dfrac{1}{2}, \dfrac{2}{2}, \ldots, \dfrac{25}{2}\right\}$.

Como já apresentamos exemplos para $q = \dfrac{1}{2}$ e $q = \dfrac{25}{2}$, nosso objetivo neste capítulo é encontrar, para cada valor em $\left\{1, \dfrac{3}{2}, \ldots, \dfrac{23}{2}, 12\right\}$, uma ψ-álgebra unitária que realiza tal valor.

Visto que o coeficiente líder de uma ψ-álgebra A unitária de crescimento quadrático é $\dfrac{\gamma_2^\psi(A)}{2}$, nossa estratégia é determinar $\gamma_2^\psi(A)$ através do cocaracter próprio de A, conceito que introduzimos na próxima seção.

4.1 O ψ-cocaracter de A

Considere $\mathbb{H}_n$ o seguinte conjunto

$$\mathbb{H}_n = \{((g_1, h_1), (g_2, h_2), \ldots, (g_n, h_n); \sigma) : (g_i, h_i) \in \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2,\ \sigma \in S_n\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Em $\mathbb{H}_n$ defina o seguinte produto

$$((g_1, h_1), (g_2, h_2), \ldots, (g_n, h_n); \sigma)((a_1, b_1), (a_2, b_2), \ldots, (a_n, b_n); \tau) =$$

$$((u_1, v_1), \ldots, (u_n, v_n); \sigma\tau),$$

onde $(u_i, v_i) = (g_i a_{\sigma^{-1}(i)}, h_i b_{\sigma^{-1}(i)})$, para todo $1 \leq i \leq n$.

Observe que $\mathbb{H}_n$ com o produto acima é um grupo. Além disso, temos que o grupo $\mathbb{H}_n$ age à esquerda sobre P_n^ψ da seguinte forma:

$$((g_1, h_1), (g_2, h_2), \ldots, (g_n, h_n); \sigma) y_{i,t_i} = y_{\sigma(i), g_i + g_{\sigma(i)}}$$

$$((g_1,h_1),(g_2,h_2),\ldots,(g_n,h_n);\sigma)z_{i,t_i}=\begin{cases} z_{\sigma(i),g_i+g_{\sigma(i)}}, & \text{se} \quad h_{\sigma(i)}=1 \\ -z_{\sigma(i),g_i+g_{\sigma(i)}}, & \text{se} \quad h_{\sigma(i)}=-1. \end{cases}$$

Portanto, temos que P_n^{ψ} tem uma estrutura de $\mathbb{H}_n$-módulo. Mais ainda, como qualquer T_2^{ψ}-ideal é invariante sob a ação definida acima, temos que $P_n^{\psi}\cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)$ é invariante sob essa ação. Então, o quociente $P_n^{\psi}(A)=\dfrac{P_n^{\psi}}{P_n^{\psi}\cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)}$ também tem uma estrutura de $\mathbb{H}_n$-módulo. O $\mathbb{H}_n$-caracter de $P_n^{\psi}(A)$ é chamado de **n-ésimo ψ-cocaracter** de A e denotamos por $\chi_n^{\psi}(A)$.

Se ψ é uma involução graduada, então escrevemos $\chi_n^{\psi}(A)=\chi_n^{\mathrm{gri}}(A)$ e denominamos por **n-ésimo cocaracter $*$-graduado** de A e se ψ é uma superinvolução, então escrevemos $\chi_n^{\psi}(A)=\chi_n^{s}(A)$ e denominamos por **n-ésimo s-cocaracter** de A.

Considere $n\in\mathbb{N}$. Escreva $n=n_1+n_2+n_3+n_4$, onde n_i é um número inteiro não-negativo, para todo $i=1,2,3,4$, e denote a quádrupla (n_1,n_2,n_3,n_4) por $\langle n\rangle$. Se $\lambda(i)=(\lambda(i)_1,\lambda(i)_2,\ldots,\lambda(i)_{k_i})\vdash n_i$ é uma partição de n_i, para $1\le i\le 4$, dizemos que $\langle\lambda\rangle=(\lambda(1),\ldots,\lambda(4))$ é uma **multipartição** de n e denotamos por $\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle$.

Como F tem característica zero, a teoria de representações do grupo $\mathbb{H}_n$ nos garante que existe uma correspondência biunívoca entre os $\mathbb{H}_n$-caracteres irredutíveis e as multipartições $\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle$. Portanto, podemos decompor o n-ésimo ψ-cocaracter de A na forma

$$\chi_n^{\psi}(A)=\sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}, \tag{4.1.1}$$

onde $\chi_{\langle\lambda\rangle}$ é o $\mathbb{H}_n$-caracter irredutível associado a $\langle\lambda\rangle$ e $m_{\langle\lambda\rangle}$ é a multiplicidade correspondente a $\chi_{\langle\lambda\rangle}$. O grau do $\mathbb{H}_n$-caracter irredutível $\chi_{\langle\lambda\rangle}$ é dado por

$$d_{\langle\lambda\rangle}=\binom{n}{\langle n\rangle}d_{\lambda(1)}\cdots d_{\lambda(4)}, \tag{4.1.2}$$

onde $\displaystyle\binom{n}{\langle n\rangle}=\binom{n}{n_1,n_2,n_3,n_4}=\frac{n!}{n_1!n_2!n_3!n_4!}$ representa o coeficiente multinomial e $d_{\lambda(i)}$ é o grau do S_{n_i}-caracter irredutível $\chi_{\lambda(i)}$.

Visto que $c_n^{\psi}(A)=\chi_n^{\psi}(A)(1)=\displaystyle\sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}d_{\langle\lambda\rangle}$, para determinarmos $c_n^{\psi}(A)$ através do n-ésimo ψ-cocaracter de A, é preciso conhecer as multiplicidades $m_{\langle\lambda\rangle}$. Porém, determinar essas multiplicidades nem sempre é uma tarefa fácil. A teoria que segue abaixo é toda voltada para nos auxiliar a determinar as multiplicidades do n-ésimo ψ-cocaracter de uma ψ-álgebra A.

Dado $\langle n\rangle$, denotamos por $P_{\langle n\rangle}$ o subespaço de P_n^{ψ} dos ψ-polinômios nos quais as n_1 primeiras variáveis são simétricas e homogêneas de grau 0, as próximas n_2 variáveis são simétricas e homogêneas de grau 1, as próximas n_3 variáveis são antissimétricas e homogêneas de grau 0 e as últimas n_4 são antissimétricas e homogêneas de grau 1. Vale ressaltar que para cada escolha de $\langle n \rangle$, existem $\binom{n}{\langle n \rangle}$ subespaços isomorfos a $P_{\langle n \rangle}$. Além disso, temos que $P_n^{\psi} \cong \bigoplus_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} P_{\langle n \rangle}$.

Considere o grupo $S_{\langle n \rangle} := S_{n_1} \times S_{n_2} \times S_{n_3} \times S_{n_4}$ e observe que este age à esquerda sobre $P_{\langle n \rangle}$ permutando as respectivas variáveis.

Como, para uma ψ-álgebra A, $P_{\langle n \rangle} \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)$ é invariante sob a ação dada, temos que $P_{\langle n \rangle}(A) = \dfrac{P_{\langle n \rangle}}{P_{\langle n \rangle} \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)}$ herda de $P_{\langle n \rangle}$ a estrutura de $S_{\langle n \rangle}$-módulo. Logo, denotamos o $S_{\langle n \rangle}$-caracter de $P_{\langle n \rangle}(A)$ por $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ e o chamamos de **n-ésimo $\langle n \rangle$-cocaracter** de A.

Também existe uma correspondência biunívoca entre as multipartições $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$ e os $S_{\langle n \rangle}$-caracteres irredutíveis e é conhecido que os $S_{\langle n \rangle}$-caracteres irredutíveis são os produtos tensoriais dos caracteres irredutíveis de $S_{n_1}, \ldots, S_{n_4}$, respectivamente. Então, $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ pode ser escrito na forma

$$\chi_{\langle n \rangle}(A) = \sum_{\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle} \tilde{m}_{\langle \lambda \rangle} \chi_{\lambda(1)} \otimes \ldots \otimes \chi_{\lambda(4)}, \tag{4.1.3}$$

onde $\tilde{m}_{\langle \lambda \rangle}$ são as multiplicidades correspondentes.

Assim como foi estabelecido em [9] para $*$-álgebras, as multiplicidades que aparecem nas decomposições em (4.1.1) e (4.1.3) estão relacionadas (vide [9, Teorema 1.3]) .

Teorema 4.1. *Seja $\chi_n^{\psi}(A)$ o n-ésimo cocaracter de A com a decomposição dada em (4.1.1) e seja $\chi_{\langle n \rangle}(A)$ o n-ésimo $\langle n \rangle$-cocaracter de A com a decomposição dada em (4.1.3). Então, $m_{\langle \lambda \rangle} = \tilde{m}_{\langle \lambda \rangle}$, para toda $\langle \lambda \rangle \vdash \langle n \rangle$.*

Iremos apresentar abaixo a principal ferramenta usada por nós para o cálculo de $m_{\langle \lambda \rangle}$. Sejam F_m o espaço dos ψ-polinômios nas variáveis

$$y_{1,0}, \ldots y_{m,0}, y_{1,1}, \ldots y_{m,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{m,0}, \ldots, z_{1,1}, \ldots z_{m,1},$$

$U_1 = \mathrm{span}\{y_{1,0}, \ldots, y_{m,0}\}$, $U_2 = \mathrm{span}\{y_{1,1}, \ldots, y_{m,1}\}$, $U_3 = \mathrm{span}\{z_{1,0}, \ldots, z_{m,0}\}$ e $U_4 = \mathrm{span}\{z_{1,1}, \ldots, z_{m,1}\}$.

Considere GL_m o grupo linear geral de grau m e denote o produto $GL_m \times GL_m \times GL_m \times GL_m$ por GL_m^4. Observe que existe uma ação natural à esquerda do grupo GL_m^4 sobre $U_1 \times U_2 \times U_3 \times U_4$, que pode ser estendida diagonalmente à uma ação sobre F_m. Além disso, o subespaço $F_m \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)$ é invariante sob essa ação. Se considerarmos F_m^n o subespaço dos polinômios homogêneos de F_m com grau $n \geq m$, temos que GL_m^4 age sobre F_m^n e que $F_m^n \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)$ é invariante sob essa ação. Logo o espaço

$$F_m^n(A) = \frac{F_m^n}{F_m^n \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)}$$

é um GL_m^4-módulo e denotamos seu caracter por $\Psi_n^{\psi}(A)$.

É conhecido que existe uma correspondência biunívoca entre os GL_m^4-módulos irredutíveis e as multipartições de $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4))$ de n onde $\lambda(i)$ são partições com no máximo m partes. Se denotarmos por $\Psi_{\langle\lambda\rangle}$ o GL_m^4-caracter irredutível correspondente a multipartição $\langle\lambda\rangle$, podemos escrever

$$\Psi_n^\psi(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle\\ h(\langle\lambda\rangle)\leq m}} \overline{m}_{\langle\lambda\rangle}\Psi_{\langle\lambda\rangle}, \tag{4.1.4}$$

onde $\overline{m}_{\langle\lambda\rangle}$ é a multiplicidade de $\psi_{\langle\lambda\rangle}$, $h(\langle\lambda\rangle) = \max\{h(\lambda(i)), i = 1, 2, 3, 4\}$ e $h(\lambda(i))$ denota o número de partes da partição $\lambda(i) \vdash n_i$.

Novamente, assim como foi determinado para $*$-álgebras (vide [11, Teorema 3]), temos o seguinte resultado para ψ-álgebras.

Teorema 4.2. *Seja A uma ψ-álgebra e considere*

$$\chi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} \tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\lambda(1)}\otimes\ldots\otimes\chi_{\lambda(4)} \quad e \quad \Psi_n^\psi(A) = \sum_{\substack{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle\\ h(\langle\lambda\rangle)\leq m}} \overline{m}_{\langle\lambda\rangle}\Psi_{\langle\lambda\rangle}.$$

Então, $\tilde{m}_{\langle\lambda\rangle} = \overline{m}_{\langle\lambda\rangle}$ para todas multipartições $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4))$ tais que $h(\langle\lambda\rangle) \leq m$.

Para determinarmos $\overline{m}_{\langle\lambda\rangle}$ e, pelo Teorema 4.1, também determinarmos $m_{\langle\lambda\rangle}$, iremos usar um polinômio não-nulo denominado vetor de altura máxima que é definido da seguinte maneira.

Uma **multitabela** $T_{\langle\lambda\rangle} = (T_{\lambda(1)}, T_{\lambda(2)}, T_{\lambda(3)}, T_{\lambda(4)})$ é uma quádrupla formada por tabelas de Young $T_{\lambda(i)}$ associadas a uma partição $\lambda(i) \vdash n_i$, para $1 \leq i \leq 4$. A **multitabela padrão** $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ é uma multitabela cujos inteiros $1, 2, \ldots, n$ nesta ordem, preenchem de cima para baixo, da esquerda para direita, coluna por coluna, a tabela $\tilde{T}_{\lambda(1)}$ até a tabela $\tilde{T}_{\lambda(4)}$.

Exemplo 4.3. Sejam $\langle 6\rangle = (3, 0, 2, 1)$ e $\langle\lambda\rangle = (\lambda(1), \lambda(2), \lambda(3), \lambda(4))$ tal que $\lambda(1) = (2, 1) \vdash 3$, $\lambda(2) = \emptyset$, $\lambda(3) = (2) \vdash 2$, $\lambda(4) = (1) \vdash 1$. Então, a quádrupla abaixo representa uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ associada à partição $\langle\lambda\rangle$, mas observe que não é uma multitabela padrão

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4\\ \hline 3 \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,\ \emptyset\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 6 & 5\\ \hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|}\hline 2\\ \hline\end{array}\right) \tag{4.1.5}$$

Já aqui temos um exemplo de multitabela padrão.

$$\left(\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3\\ \hline 2 \\ \cline{1-1}\end{array}\ ,\ \emptyset\ ,\ \begin{array}{|c|c|}\hline 4 & 5\\ \hline\end{array}\ ,\ \begin{array}{|c|}\hline 6\\ \hline\end{array}\right) \tag{4.1.6}$$

Para a multitabela padrão $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$, definimos o seguinte polinômio:

$$f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}} = \prod_{i=1}^{\lambda(1)_1} St_{h_i(\lambda(1))}(y_{1,0},\ldots,y_{h_i(\lambda(1)),0}) \prod_{i=1}^{\lambda(2)_1} St_{h_i(\lambda(2))}(y_{1,1},\ldots,y_{h_i(\lambda(2)),1})$$
$$\prod_{i=1}^{\lambda(3)_1} St_{h_i(\lambda(3))}(z_{1,0},\ldots,z_{h_i(\lambda(3)),0}) \prod_{i=1}^{\lambda(4)_1} St_{h_i(\lambda(4))}(z_{1,1},\ldots,z_{h_i(\lambda(4)),1}),$$

onde $St_r(x_1,\ldots,x_r)$ é o polinômio standard de grau r e $h_i(\lambda(j))$ representa a altura da i-ésima coluna da tabela $T_{\lambda(j)}$.

Para uma multitabela qualquer $T_{\langle\lambda\rangle}$, definimos o **vetor de altura máxima** associado a $T_{\langle\lambda\rangle}$ como sendo o polinômio $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} := f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}}\sigma^{-1}$, onde $\sigma \in S_n$ é a única permutação que transforma $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ na multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ e a ação à direita de S_n sobre $F_m^n(A)$ é definida pela permutação de lugares.

Exemplo 4.4. Seja $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$ a multitabela padrão definida em (4.1.6). Então,

$$f_{\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}} = St_2(y_{1,0},y_{2,0})y_{1,0}z_{1,0}^2z_{1,1}$$

é o polinômio associado a $\tilde{T}_{\langle\lambda\rangle}$. Para a multitabela (4.1.5), temos $\sigma = (2\ 3\ 4\ 6)$ e o vetor de altura máxima associado a ela é o polinômio

$$f = St_2(y_{1,0},y_{2,0})y_{1,0}z_{1,0}^2z_{1,1}(2\ 6\ 4\ 3) = y_{1,0}^2z_{1,0}z_{1,1}z_{1,0}y_{2,0} - y_{2,0}y_{1,0}z_{1,0}z_{1,1}z_{1,0}y_{1,0}.$$

O próximo resultado estabelece uma relação entre $\overline{m}_{\langle\lambda\rangle}$ e $f_{T_{\langle\lambda\rangle}}$.

Teorema 4.5. [7, Teorema 12.4.4] *A multiplicidade $\overline{m}_{\langle\lambda\rangle}$ em (4.1.4) é não nula se, e somente se, existe uma multitabela $T_{\langle\lambda\rangle}$ tal que $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} \notin \mathrm{Id}^{\psi}(A)$. Mais ainda, $\overline{m}_{\langle\lambda\rangle}$ é igual ao número máximo de vetores $f_{T_{\langle\lambda\rangle}} \notin \mathrm{Id}^{\psi}(A)$ que são linearmente independentes em $F_m^n(A)$.*

A seguir, exibimos um exemplo que nos mostra como usar os vetores de altura máxima para calcular as multiplicidades desejadas.

Exemplo 4.6. Considere a seguinte subálgebra de UT_4

$$A_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, \in F \right\}$$

munida da involução reflexão, dada por:

$$\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Considere a seguinte graduação para A_2:

$$\left(\begin{pmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right).$$

A álgebra A_2 munida com a involução reflexão e essa graduação é uma $*$-superálgebra e a denotamos por A_2^{gri}. Como pode ser visto em [17, Teorema 5.1], seu T_2^*-ideal é

$$\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A_2^{\mathrm{gri}}) = \langle z_{1,0}, x_{1,1}x_{2,1}, y_{1,0}x_{1,1}y_{2,0}\rangle_{T_2^*},$$

com $x_{i,1} = y_{i,1}$ ou $x_{i,1} = z_{i,1}$.

Vamos verificar que $\chi_{\langle n\rangle}(A_2^{\mathrm{gri}}) = \chi_{(n),\emptyset,\emptyset,\emptyset} + 2\chi_{(n-1),(1),\emptyset,\emptyset} + 2\chi_{(n-1),\emptyset,\emptyset,(1)}$. De fato, em [17] foi verificado que $c_n^{\mathrm{gri}}(A_2^{\mathrm{gri}}) = 4n+1$ e observe que

$$d_{(n),\emptyset,\emptyset,\emptyset} + 2d_{(n-1),(1),\emptyset,\emptyset} + 2d_{(n-1),\emptyset,\emptyset,(1)} = 4n+1 = c_n^{\mathrm{gri}}(A_2^{\mathrm{gri}}). \tag{4.1.7}$$

Considere a multipartição $((n),\emptyset,\emptyset,\emptyset)$. Temos que o vetor de altura máxima $f_{T_{((n),\emptyset,\emptyset,\emptyset)}} = y_{1,0}^n$ não é uma identidade de A_2^{gri}. De fato, fazendo a avaliação $y_{1,0} = e_{11} + e_{44}$, obtemos $f_{T_{((n),\emptyset,\emptyset,\emptyset)}}(e_{11}+e_{44}) = e_{11}+e_{44} \neq 0$, logo $f_{T_{((n),\emptyset,\emptyset,\emptyset)}} \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A_2^{\mathrm{gri}})$ e, portanto, $m_{((n),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} = 1$.

Agora, por (4.1.7), para determinar as multiplicidades $m_{((n-1),(1),\emptyset,\emptyset)}$ e $m_{((n-1),\emptyset,\emptyset,(1))}$ basta encontrarmos dois vetores de altura máxima linearmente independentes para cada multipartição $((n-1),(1),\emptyset,\emptyset)$ e $((n-1),\emptyset,\emptyset,(1))$ que não são $(\mathbb{Z}_2,*)$-identidades de A_2^{gri}.

Para a multipartição $((n-1),(1),\emptyset,\emptyset)$, considere os seguintes vetores de altura máxima correspondentes às multitabelas:

$$\left(\ \boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{n-2}\boxed{n-1}\ ,\ \boxed{n}\ ,\ \emptyset\ ,\ \emptyset\ \right)\ \text{e}\ f_1 = y_{1,0}^{n-1}y_{1,1} \tag{4.1.8}$$

$$\left(\ \boxed{2}\boxed{3}\boxed{\cdots}\boxed{n-1}\boxed{n}\ ,\ \boxed{1}\ ,\ \emptyset\ ,\ \emptyset\ \right)\ \text{e}\ f_2 = y_{1,1}y_{1,0}^{n-1}. \tag{4.1.9}$$

Fazendo a avaliação $y_{1,0} = e_{11} + e_{44}$ e $y_{1,1} = e_{12} + e_{34}$, obtemos $f_1(y_{1,0}, y_{1,1}) = e_{12} \neq 0$ e $f_2(y_{1,0}, y_{1,1}) = e_{34} \neq 0$. Isto implica que $f_1, f_2 \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A_2^{\mathrm{gri}})$ e que estes polinômios são linearmente independentes módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A_2^{\mathrm{gri}})$.

Agora, para a multipartição $((n-1),\emptyset,\emptyset,(1))$, considere os seguintes vetores de altura máxima correspondentes às multitabelas:

$$\left(\ \boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{n-2}\boxed{n-1}\ ,\ \emptyset\ ,\ \emptyset\ ,\ \boxed{n}\ \right)\ \text{e}\ g_1 = y_{1,0}^{n-1}z_{1,1} \tag{4.1.10}$$

$$\left(\ \boxed{2}\boxed{3}\boxed{\cdots}\boxed{n-1}\boxed{n}\ ,\ \emptyset\ ,\ \emptyset\ ,\ \boxed{1}\ \right)\ \text{e}\ g_2 = z_{1,1}y_{1,0}^{n-1}. \tag{4.1.11}$$

Fazendo a avaliação $y_{1,0} = e_{11} + e_{44}$ e $z_{1,1} = e_{12} - e_{34}$, temos $g_1(y_{1,0}, z_{1,1}) = e_{12} \neq 0$ e $g_2(y_{1,0}, z_{1,1}) = -e_{34} \neq 0$. Isto implica que $g_1, g_2 \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A_2^{\mathrm{gri}})$ e utilizando a mesma substituição, podemos provar que esses polinômios são linearmente independentes módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A_2^{\mathrm{gri}})$.

Portanto, por (4.1.7), temos que $\chi_{\langle n\rangle}(A_2^{\mathrm{gri}}) = \chi_{(n),\emptyset,\emptyset,\emptyset} + 2\chi_{(n-1),(1),\emptyset,\emptyset} + 2\chi_{(n-1),\emptyset,\emptyset,(1)}$.

Nosso próximo passo é determinar o ψ-cocaracter próprio de uma ψ-álgebra unitária.

No início desta seção, definimos uma ação de $\mathbb{H}_n$ sobre P_n^{ψ}. Observe que Γ_n^{ψ} é invariante sob esta ação. Então, temos que Γ_n^{ψ} é um $\mathbb{H}_n$-submódulo de P_n^{ψ}. Além disso, para cada $\langle n\rangle$, defina $\Gamma_{\langle n\rangle} = B(Y_0) \cap P_{\langle n\rangle}$. Observe que a ação de $S_{\langle n\rangle}$ pode ser restrita a $\Gamma_{\langle n\rangle}$ e este subespaço é invariante sob esta ação. Então, $\Gamma_{\langle n\rangle}$ é um $S_{\langle n\rangle}$-submódulo de $P_{\langle n\rangle}$. Denote por $\chi(\Gamma_n^{\psi})$ o $\mathbb{H}_n$-caracter de Γ_n^{ψ} e $\chi(\Gamma_{\langle n\rangle})$ o $S_{\langle n\rangle}$-caracter de $\Gamma_{\langle n\rangle}$.

Os caracteres $\chi(\Gamma_n^{\psi})$ e $\chi(\Gamma_{\langle n\rangle})$ também possuem decomposições em caracteres irredutíveis e estas se relacionam através do seguinte teorema.

Teorema 4.7. *Seja*

$$\chi(\Gamma_n^{\psi}) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} p_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}$$

a decomposição do $\mathbb{H}_n$-caracter de Γ_n^{ψ} e

$$\chi(\Gamma_{\langle n\rangle}) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} p'_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\lambda(1)} \otimes \ldots \otimes \chi_{\lambda(4)}$$

a decomposição do $S_{\langle n\rangle}$-caracter de $\Gamma_{\langle n\rangle}$. Então, $p_{\langle\lambda\rangle} = p'_{\langle\lambda\rangle}$ para cada $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$.

Observe que, como $\Gamma_n^{\psi} \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)$ é invariante sob a ação de $\mathbb{H}_n$, temos que $\dfrac{\Gamma_n^{\psi}}{\Gamma_n^{\psi} \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)}$ é um $\mathbb{H}_n$-módulo. Denotamos o $\mathbb{H}_n$-caracter de $\dfrac{\Gamma_n^{\psi}}{\Gamma_n^{\psi} \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)}$ por $\pi_n^{\psi}(A)$ e o chamamos de **n-ésimo ψ-cocaracter próprio** de A. Podemos decompor $\pi_n^{\psi}(A)$ da seguinte forma:

$$\pi_n^{\psi}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} q_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}. \tag{4.1.12}$$

Além disso, $\Gamma_{\langle n\rangle}^{\psi} \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)$ também é invariante sob a ação de $S_{\langle n\rangle}$ e também temos que $\dfrac{\Gamma_{\langle n\rangle}}{\Gamma_{\langle n\rangle} \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)}$ é um $S_{\langle n\rangle}$-módulo. Denotamos por $\pi_{\langle n\rangle}(A)$ o $S_{\langle n\rangle}$-caracter de $\dfrac{\Gamma_{\langle n\rangle}}{\Gamma_{\langle n\rangle} \cap \mathrm{Id}^{\psi}(A)}$ e o denominamos por **$\langle n\rangle$-ésimo cocaracter próprio** de A. Também temos uma decomposição para $\pi_{\langle n\rangle}(A)$

$$\pi_{\langle n\rangle}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle\vdash\langle n\rangle} \tilde{q}_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\lambda(1)} \otimes \ldots \otimes \chi_{\lambda(4)}. \tag{4.1.13}$$

Assim como no caso geral, as decomposições dos cocaracteres próprio se relacionam como a seguir.

Teorema 4.8. *Seja $\pi_n^\psi(A)$ o n-ésimo ψ-cocaracter próprio de A com a decomposição dada em (4.1.12) e seja $\pi_{\langle n\rangle}(A)$ o n-ésimo $\langle n\rangle$-cocaracter próprio de A com a decomposição dada em (4.1.13). Então, $q_{\langle\lambda\rangle} = \tilde{q}_{\langle\lambda\rangle}$, para toda $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$.*

Vamos verificar agora como obter os vetores de altura máxima próprios a partir dos vetores de altura máxima.

Seja $B_m^n = B(Y_0) \cap F_m^n$ o espaço dos ψ-polinômios próprios homogêneos de grau $n \geq m$ nas variáveis $y_{1,0}, \ldots, y_{m,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{m,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{m,0}, \ldots, z_{1,1}, \ldots, z_{m,1}$.

Considere um monômio $x_{i_1} \cdots x_{i_n} \in F_m^n$, onde

$$x_{i_j} \in \{y_{1,0}, \ldots, y_{m,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{m,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{m,0}, \ldots, z_{1,1}, \ldots, z_{m,1}\},$$

para todo $j = 1, 2, \ldots, n$. Se $x_{i_1} \cdots x_{i_n} \neq y_{1,0}^n$ construa um ψ-polinômio próprio não-nulo nas mesmas variáveis $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$, digamos

$$y_{j_1,1} \cdots y_{j_p,1} z_{k_1,0} \cdots z_{k_r,0} \cdots z_{l_1,1} \cdots z_{l_s,1} w_1 \cdots w_m,$$

onde $w_1, \ldots, w_m$ são comutadores nas variáveis $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$. Para a forma fixa do ψ-polinômio próprio construído acima defina o seguinte homomorfismo

$$\theta : F_m^n \to B_m^n$$

$$\theta(x_{i_1} \cdots x_{i_n}) = y_{j_1,1} \cdots y_{j_p,1} z_{k_1,0} \cdots z_{k_r,0} \cdots z_{l_1,1} \cdots z_{l_s,1} w_1 \cdots w_m.$$

Como exemplo, considere o monômio $y_{1,0}y_{2,1}z_{3,1}$. Nesse caso temos os seguintes homomorfismos, a menos de constante:

1. $\theta_1(y_{1,0}y_{2,1}z_{3,1}) = [y_{1,0}, y_{2,1}, z_{3,1}]$,
2. $\theta_2(y_{1,0}y_{2,1}z_{3,1}) = [y_{2,1}, z_{3,1}, y_{1,0}]$,
3. $\theta_3(y_{1,0}y_{2,1}z_{3,1}) = y_{2,1}[z_{3,1}, y_{1,0}]$,
4. $\theta_4(y_{1,0}y_{2,1}z_{3,1}) = z_{3,1}[y_{1,0}, y_{2,1}]$.

Sejam $\langle\lambda\rangle \vdash \langle n\rangle$ e $T_{\langle\lambda\rangle}$ uma multitabela do tipo $\langle\lambda\rangle$. Considere $f_{T_{\langle\lambda\rangle}}$ o vetor de altura máxima associado a $T_{\langle\lambda\rangle}$. Se $\theta(f_{T_{\langle\lambda\rangle}}) \neq 0$, então dizemos que $\theta(f_{T_{\langle\lambda\rangle}})$ é um **vetor de alura máxima próprio** associado a $\langle\lambda\rangle$.

Para determinarmos as multiplicidades usaremos o seguinte teorema.

Teorema 4.9. *Seja A uma ψ-álgebra unitária e considere $\pi_n^\psi(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash n} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}$ o seu n-ésimo ψ-cocaracter próprio. Então:*

- $m_{\langle\lambda\rangle} \neq 0$ *se, e somente se, existe um vetor de altura máxima próprio associado a* $\langle\lambda\rangle$ *que não pertence a* $\mathrm{Id}^{\psi}(A)$.

- $m_{\langle\lambda\rangle}$ *é igual ao número máximo de vetores de altura máxima próprios linearmentes independentes, módulo* $\mathrm{Id}^{\psi}(A)$.

Com os resultados estabelecidos nesta seção estamos aptos para construir os exemplos de ψ-álgebras unitárias de crescimento quadrático, como veremos na próxima seção.

4.2 Construindo ψ-álgebras unitárias de crescimento quadrático

Seja A uma ψ-álgebra unitária de crescimento quadrático. Pelos resultados mostrados nos capítulos anteriores, o coeficiente líder de $c_n^{\psi}(A)$ é o valor $q = \dfrac{\gamma^{\psi}(A)}{2}$. Como comentamos no início do capítulo, nossa estratégia para construirmos os exemplos será determinar $\gamma_2^{\psi}(A)$ através do segundo cocaracter próprio de A. Considere $\pi_2^{\psi}(A)$ o segundo ψ-cocaracter próprio de A e sua decomposição em caracteres irredutíveis.

$$\pi_2^{\psi}(A) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash \langle 2\rangle} m_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle},$$

onde $\chi_{\langle\lambda\rangle}$ denota o $\mathbb{H}_2$-caracter irredutível associado à multipartição $\langle\lambda\rangle$ e $m_{\langle\lambda\rangle} \geq 0$ é a sua multiplicidade. Logo, $\gamma_2^{\psi}(A) = \pi_2^{\psi}(A)(1) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash \langle 2\rangle} m_{\langle\lambda\rangle} d_{\langle\lambda\rangle}$, em que $d_{\langle\lambda\rangle}$ é o grau de $\chi_{\langle\lambda\rangle}$.

Além disso, se $\chi(\Gamma_2^{\psi}) = \sum_{\langle\lambda\rangle \vdash \langle 2\rangle} \tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}\chi_{\langle\lambda\rangle}$ é o $\mathbb{H}_n$-caracter de Γ_2^{ψ}, então $m_{\langle\lambda\rangle} \leq \tilde{m}_{\langle\lambda\rangle}$, para toda $\langle\lambda\rangle \vdash \langle 2\rangle$.

Nosso primeiro passo é determinar os possíveis valores que $\gamma_2^{\psi}(A)$ pode assumir. Para isso, vamos considerar $\chi(\Gamma_2^{\psi})$ e sua decomposição em caracteres irredutíveis. De acordo com (4.1.2), vamos obter os graus de determinados caracteres irredutíveis correspondentes a algumas multipartições específicas:

$$d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} = d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)} = d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)} = d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} = d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} = d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(2))} = d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^2))} = 1,$$

$$d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} = d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} = d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} = d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} = d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} = d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} = 2.$$

Agora, vamos determinar todos os vetores de altura máxima próprios linearmente independentes associados a cada multipartição para as quais calculamos os graus acima. Tais polinômios estão relacionados na tabela abaixo:

$\langle\lambda\rangle$	vetores de altura máxima próprios
$((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)$	$f_1(y_{1,0},y_{2,0})=[y_{1,0},y_{2,0}]$
$(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)$	$f_2(y_{1,1})=y_{1,1}^2$
$(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)$	$f_3(y_{1,1},y_{2,1})=[y_{1,1},y_{2,1}]$
$(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)$	$f_4(z_{1,0})=z_{1,0}^2$
$(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)$	$f_5(z_{1,0},z_{2,0})=[z_{1,0},z_{2,0}]$
$(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(2))$	$f_6(z_{1,1})=z_{1,1}^2$
$(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^2))$	$f_7(z_{1,1},z_{2,1})=[z_{1,1},z_{2,1}]$
$((1),(1),\emptyset,\emptyset)$	$f_8(y_{1,0},y_{1,1})=[y_{1,0},y_{1,1}]$
$((1),\emptyset,(1),\emptyset)$	$f_9(y_{1,0},z_{1,0})=[y_{1,0},z_{1,0}]$
$((1),\emptyset,\emptyset,(1))$	$f_{10}(y_{1,0},z_{1,1})=[y_{1,0},z_{1,1}]$
$(\emptyset,(1),(1),\emptyset)$	$f_{11}(y_{1,1},z_{1,0})=y_{1,1}z_{1,0}$ $f_{12}(y_{1,1},z_{1,0})=[y_{1,1},z_{1,0}]$
$(\emptyset,(1),\emptyset,(1))$	$f_{13}(y_{1,1},z_{1,1})=y_{1,1}z_{1,1}$ $f_{14}(y_{1,1},z_{1,1})=[y_{1,1},z_{1,1}]$
$(\emptyset,\emptyset,(1),(1))$	$f_{15}(z_{1,0},z_{1,1})=z_{1,0}z_{1,1}$ $f_{16}(z_{1,0},z_{1,1})=[z_{1,0},z_{1,1}]$

Tabela 4.1: v.a.m. próprios associados a cada multipartição da decomposição de $\chi(\Gamma_2^\psi)$

Conforme a Proposição 2.15, a dimensão de Γ_2^ψ é igual a 25 e temos que $d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)}+d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)}+d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)}+d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)}+d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)}+d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(2))}+d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^2))}+d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)}+d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)}+d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))}+2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)}+2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))}+2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))}=25$. Portanto, concluímos que a decomposição de $\chi(\Gamma_2^\psi)$ é dada por:

$$\chi(\Gamma_2^\psi)=\chi_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)}+\chi_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)}+\chi_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)}+\chi_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)}+\chi_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)}+\chi_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(2))}+\chi_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^2))}+\chi_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)}+\chi_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)}+\chi_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))}+2\chi_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)}+2\chi_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))}+2\chi_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))}.$$

Dada uma ψ-álgebra A, observe que, analisando os graus e as multiplicidades de cada caracter irredutível que aparece na decomposição de $\chi(\Gamma_2^\psi)$, concluímos que $\gamma_2^\psi(A)$ pode assumir qualquer valor variando de 1 a 25. Na seção anterior, exibimos exemplos de ψ-álgebras que realizam o menor e o maior valor possível para q, que neste caso são $\frac{1}{2}$ e $\frac{25}{2}$. Agora iremos construir exemplos de ψ-álgebras que realizam os valores intermediários.

Finalmente, iremos exibir os exemplos procurados. Mas antes, como nossa estratégia é trabalhar com somas diretas de ψ-álgebras, vale ressaltar que, se $A=\bigoplus_{i=1}^{k}A_k$, em que A_i é uma ψ-superálgebra para todo $i=1,\ldots,k$, então, basta que $f\notin \mathrm{Id}^\psi(A_i)$, para algum $1\leq i\leq k$, para que $f\notin \mathrm{Id}^\psi(A)$. Além disso, temos que $c_n^\psi(A)\leq\sum_{i=1}^{k}c_n^\psi(A_i)$.

Primeiro apresentaremos exemplos para o caso em que A é uma $*$-superálgebra.

Definimos por $U_{3,*}$ a $*$-superálgebra U_3 munida da graduação trivial e da involução reflexão e por $N_{3,*}$ a $*$-superálgebra N_3 munida da graduação trivial e da involução reflexão.

Proposição 4.10. [22, Lemas 2 e 3] *Para as $*$-superálgebras $U_{3,*}$ e $N_{3,*}$, temos:*

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(U_{3,*}) = \langle y_{1,1}, z_{1,1}, [y_{1,0}, z_{2,0}], z_{1,0}z_{2,0}\rangle_{T_2^*}$,
- $c_n^{\mathrm{gri}}(U_{3,*}) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{n}{2} + 1$,
- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(N_{3,*}) = \langle y_{1,1}, z_{1,1}, [y_{1,0}, z_{2,0}], z_{1,0}z_{2,0}\rangle_{T_2^*}$,
- $c_n(N_{3,*}) = n^2 + 1$,
- $c_n(U_{3,*} \oplus N_{3,*}) = \frac{3}{2}n^2 - \frac{n}{2} + 1$.

Também destacamos o seguinte resultado referente às $*$-superálgebras U_3^{gri} e N_3^{gri}, definidas no Capítulo 2.

Proposição 4.11. [17, Teorema 4.6] *Para as $*$-superálgebras U_3^{gri}, N_3^{gri}, temos:*

$$c_n^{\mathrm{gri}}(U_3^{\mathrm{gri}} \oplus N_3^{\mathrm{gri}}) = 2n^2 + 1.$$

Logo, temos exemplos de $*$-superálgebras que realizam os seguintes valores: $\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2$.

Para verificar os outros exemplos, procederemos como comentado acima, através do cálculo de $\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A)$. Para isso, precisaremos da seguinte $*$-superálgebra e seu T_2^*-ideal, além dos exemplos que apresentamos no Capítulo 2.

Denotamos por $G_{2,0,\tau}$ a álgebra G_2 com graduação trivial e involução τ, $G_{2,2,\tau}$ a álgebra G_2 com graduação $(F1+Fe_1, Fe_2+Fe_1e_2)$ e a involução τ e por $G_{2,2,\varrho}$ a álgebra G_2 com a graduação $(F1+Fe_1, Fe_2+Fe_1e_2)$ e a involução ϱ, ambas involuções definidas no Capítulo 1.

Proposição 4.12. [24, Lemas 7.1 e 7.3] *Considere as $*$-superálgebras $G_{2,0,\tau}$, $G_{2,2,\tau}$ e $G_{2,2,\varrho}$. Então:*

- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,0,\tau}) = \langle y_{1,1}, z_{1,1}, [y_{1,0}, y_{2,0}], [y_{1,0}, z_{2,0}], z_{1,0}z_{2,0} + z_{2,0}z_{1,0}, z_{1,0}z_{2,0}z_{3,0}\rangle_{T_2^*}$;
- $c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,0,\tau}) = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2}$;
- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\tau}) = \langle y_{1,1}, z_{1,0}z_{2,0}, z_{1,1}z_{2,1}, [y_{1,0}, y_{2,0}], [y_{1,0}, z_{2,0}], z_{1,0}z_{2,1} + z_{2,1}z_{1,0}\rangle_{T_2^*}$,
- $c_n^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\tau}) = 1 + 2n + \frac{n(n-1)}{2}$
- $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(G_{2,2,\rho}) = \langle z_{1,1}, z_{1,0}z_{2,0}, y_{1,1}y_{2,1}, [y_{1,0}, y_{2,0}], [y_{1,0}, z_{2,0}], y_{1,1}z_{2,0} + z_{2,0}y_{1,1}\rangle_{T_2^*}$

Note que os exemplos abaixo são somas diretas $*$-superálgebras que possuem o crescimento da $*$-codimensão graduada pelo menos quadrático. Além disso, vamos usar os polinômios da tabela 4.1 e os resultados das proposições anteriores para garantir o valor das codimensões $*$-graduadas que aparecem nos exemplos. Vamos aos exemplos.

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 5$.

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus U_{3,*}$. Observe que $f_1 \notin \text{Id}^{\text{gri}}(U_{3,*})$, pois $f_1(e_{12}+e_{56}, e_{23}+e_{45}) = [e_{12}+e_{56}, e_{23}+e_{45}] = e_{13}-e_{46}$ e $f_i \in \text{Id}^{\text{gri}}(U_{3,*})$, para todo $i \neq 1$; $f_9 \notin \text{Id}^{\text{gri}}(N_{3,*})$, pois $f_9(e_{23}+e_{45}, e_{12}-e_{56}) = [e_{23}+e_{45}, e_{12}-e_{56}] = -e_{13}-e_{46}$ e $f_i \in \text{Id}^{\text{gri}}(N_{3,*})$, para todo $i \neq 9$ e $f_{10} \notin \text{Id}^{\text{gri}}(N_3^{\text{gri}})$, pois $f_{10}(e_{23}+e_{45}, e_{12}-e_{56}) = [e_{23}+e_{45}, e_{12}-e_{56}] = -e_{13}-e_{46}$ e $f_i \in \text{Id}^{\text{gri}}(N_3^{\text{gri}})$, para todo $i \neq 10$. Então $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, $i = 1, 9, 10$ e $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $j \neq 1, 9, 10$. Portanto,

$$\gamma_2^{\text{gri}}(A) = d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} = 5.$$

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 6$.

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus U_3^{\text{gri}}$. Então, $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, $i = 8, 9, 10$ e $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $j \neq 8, 9, 10$. Portanto,

$$\gamma_2^{\text{gri}}(A) = d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} = 6.$$

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 7$.

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus U_{3,*} \oplus U_3^{\text{gri}}$. Então, $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, $i = 1, 8, 9, 10$ e $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $j \neq 1, 8, 9, 10$. Portanto,

$$\gamma_2^{\text{gri}}(A) = d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} = 7.$$

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 8$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus U_3^{\text{gri}} \oplus G_{2,0,\tau}$. Então, $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, $i = 4, 5, 8, 9, 10$ e $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $j \neq 4, 5, 8, 9, 10$. Portanto,

$$\gamma_2^{\text{gri}}(A) = d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} = 8.$$

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 9$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus U_{3,*} \oplus U_3^{\text{gri}} \oplus G_{2,0,\tau}$. Então, $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, $i = 1, 4, 5, 8, 9, 10$ $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $i \neq 1, 4, 5, 8, 9, 10$. Portanto,

$$\gamma_2^{\text{gri}}(A) = d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} = 9.$$

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 10$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau}$. Então, $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, $i = 4, 5, 9, 10, 15, 16$ e $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $j \neq 4, 5, 9, 10, 15, 16$. Além disso, f_{15}, f_{16} são vetores de altura máxima próprios linearmente independentes, módulo $\text{Id}^{\text{gri}}(A)$, associados à multipartição $(\emptyset, \emptyset, (1), (1))$, portanto $m_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} = 2$. Logo,

$$\gamma_2^{\text{gri}}(A) = d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} = 10.$$

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 11$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus U_{3,*} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau}$. Então, $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, $i = 1, 4, 5, 9, 10, 15, 16$. e $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $j \neq 1, 4, 5, 9, 10, 15, 16$. Portanto,

$$\gamma_2^{\text{gri}}(A) = d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} = 11.$$

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 12$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus U_3^{\text{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau}$. Então, $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, $i = 4, 5, 8, 9, 10, 15, 16$ e $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $j \neq 4, 5, 8, 9, 10, 15, 16$. Portanto,

$$\gamma_2^{\text{gri}}(A) = d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} = 12.$$

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 13$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus U_{3,*} \oplus U_3^{\text{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau}$. Então, $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $i = 1, 4, 5, 8, 9, 10, 15, 16$, e $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $j \neq 1, 4, 5, 8, 9, 10, 15, 16$. Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\text{gri}}(A) = \; & d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} \\ & + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} = 13.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 14$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho}$. Então, $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $i = 4, 5, 9, \ldots, 12, 15, 16$ e $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $j \neq 4, 5, 9, \ldots, 12, 15, 16$. Além disso, f_{11}, f_{12} são vetores de altura máxima próprios linearmente independentes, módulo $\text{Id}^{\text{gri}}(A)$, associados à multipartição $(\emptyset, (1), (1), \emptyset)$, portanto $m_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} = 2$. Logo,

$$\gamma_2^{\text{gri}}(A) = d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} = 14.$$

- $\gamma_2^{\text{gri}}(A) = 15$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\text{gri}} \oplus U_{3,*} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho}$. Então, $f_i \notin \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $i = 1, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 15, 16$ e $f_j \in \text{Id}^{\text{gri}}(A)$, para todo $j \neq 1, 4, 5, 9, 10, 11, 12, 15, 16$. Logo,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\text{gri}}(A) = \; & d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} \\ & + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} = 15.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = 16$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\mathrm{gri}} \oplus U_3^{\mathrm{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para todo $i = 4, 5, 8, \ldots, 12, 15, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para todo $j \neq 4, 5, 8, \ldots, 12, 15, 16$. Logo,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = \ & d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} \\ & +2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} = 16.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = 17$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\mathrm{gri}} \oplus U_{3,*} \oplus U_3^{\mathrm{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 1, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para todo $j \neq 1, 4, 5, 8, \ldots, 12, 15, 16$. Logo,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = \ & d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{((1)^2,\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} \\ & +d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} = 17.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = 18$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\mathrm{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho} \oplus G_{2,1,\rho}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 4, 5, 9, \ldots, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para todo $j \neq 4, 5, 9, \ldots, 16$. Além disso, f_{13}, f_{14} são vetores de altura máxima próprios linearmente independentes, módulo $\mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, assosciados à multipartição $(\emptyset, (1), \emptyset, (1))$, portanto $m_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} = 2$. Logo,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = \ & d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} \\ & +2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} = 18.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = 19$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\mathrm{gri}} \oplus U_{3,*} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho} \oplus G_{2,1,\rho}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 1, 4, 5, 9, \ldots, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para todo $j \neq 1, 4, 5, 9, \ldots, 16$. Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = \ & d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} \\ & +2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} = 19.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = 20$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\mathrm{gri}} \oplus U_3^{\mathrm{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho} \oplus G_{2,1,\rho}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 4, 5, 8, 9, \ldots, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para todo $j \neq 4, 5, 8, 9, \ldots, 16$. Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = \ & d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} \\ & +2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} = 20.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = 21$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\mathrm{gri}} \oplus U_{3,*} \oplus U_3^{\mathrm{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho} \oplus G_{2,1,\rho}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 1, 4, 5, 8, \ldots, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para todo $j \neq 1, 4, 5, 8, \ldots, 16$. Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = \ & d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} \\ & +d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} = 21.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = 22$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\mathrm{gri}} \oplus U_3^{\mathrm{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho} \oplus G_{2,1,\rho} \oplus G_{2,1,\psi}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 2,3,4,5,8,\ldots,16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para $j \neq 2,3,4,5,8,\ldots,16$. Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = \;& d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} \\ & +2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} + d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)} = 22.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = 23$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\mathrm{gri}} \oplus U_{3,*} \oplus U_3^{\mathrm{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho} \oplus G_{2,1,\rho} \oplus G_{2,1,\psi}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 1,\ldots,5,8,\ldots,16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para $j \neq 1,\ldots,5,8,\ldots,16$. Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = \;& d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} \\ & +2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} + (d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)}) = 23.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = 24$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^{\mathrm{gri}} \oplus U_3^{\mathrm{gri}} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau} \oplus G_{2,2,\rho} \oplus G_{2,1,\rho} \oplus G_{2,1,\psi} \oplus G_{2,1,\tau}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 2,\ldots,16$ e $f_1 \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$. Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma_2^{\mathrm{gri}}(A) = \;& d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} \\ & +2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} + d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)} \\ & +d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(2))} + d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^2))} = 24.\end{aligned}$$

Portanto, para cada valor possível que o coeficiente líder q pode assumir, encontramos uma $*$-superálgebra que o realiza.

Vamos agora dar os exemplos para o caso em que A é uma superálgebra munida de uma superinvolução.

Primeiramente, observe que, devido a Proposição 2.4, temos que as involuções graduadas usadas em $G_{2,2,\tau}, G_{2,2,\rho}$ também são superinvoluções. Usaremos a notação $G_{2,2,\tau}^s, G_{2,2,\rho}^s$, respectivamente, quando estivermos no contexto das superinvoluções. Consequentemente, os exemplos dados para $q = \frac{1}{2},\ldots,\frac{17}{2}$, também são exemplos de superálgebras munidas de superinvolução. Portanto, precisamos apenas nos concentrar em encontrar exemplos para $q = \frac{18}{2},\ldots,\frac{24}{2}$. Iremos adotar a mesma estratégia usada para construir os exemplos de $*$-superálgebras.

Considere a álgebra G_2, com a graduação $G_2 = (F1 + Fe_1e_2, Fe_1 + Fe_2)$ e munida da superinvolução induzida por $\psi : e_i \to (-1)^i e_i$. Denotaremos essa superálgebra com superinvolução por G_2^ψ. Logo, $(G_2^\psi)_0^+ = F1$, $(G_2^\psi)_1^+ = Fe_2$, $(G_2^\psi)_0^- = Fe_1e_2$, $(G_2^\psi)_1^- = Fe_1$.

Proposição 4.13. *Existe $q \geq 1$ tal que $c_n^s(G_2^\psi) \approx qn^2$.*

Prova: Como G_2^{ψ} é unitária, de acordo com (2.2.2)

$$c_n^s(G_2^{\psi}) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \gamma_i^s(G_2^{\psi}), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Logo, basta mostrarmos que $\gamma_2^s(G_2^{\psi}) \neq 0$ e $\gamma_3^s(G_2^{\psi}) = 0$ que temos o resultado desejado.

Seja $f = y_{1,1}z_{1,1}$. Então, $f \in \Gamma_2^s$ e $f(e_2, e_1) = e_2e_1 \neq 0$. Logo, $f \notin \mathrm{Id}^s(G_2^{\psi})$ e, portanto, $\gamma_2^s(G_2^{\psi}) \neq 0$.

Agora, observe que o produto $a_1a_2a_3$, com $a_1, a_2, a_3 \in G_2 \setminus \mathrm{span}\{1\}$ é sempre nulo, logo qualquer monômio da forma $x_1x_2x_3$, $x_i \in Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ é uma identidade de G_2^{ψ}. Além disso, como $(G_2^{\psi})_0^+ = F1$, temos que qualquer polinômio da forma $x_1[x_2, x_3]$, onde $x_1 \in Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ e $x_2, x_3 \in X$ pertence a $\mathrm{Id}^s(G_2^{\psi})$.

Resta verificarmos os polinômios da forma $[x_1, x_2, x_3]$, $x_i \in X, i = 1, 2, 3$. Se $x_i \in Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$, então $[x_1, x_2, x_3] \in \mathrm{Id}^s(G_2^{\psi})$, desde que $x_1x_2x_3$, $x_i \in Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ é uma identidade de G_2^{ψ}. Agora, se x_1 ou x_2 pertencem a Y_0, então, como $[x_1, x_2, x_3]$ é uma consequência de $[x_1, x_2]$ e este é uma identidade, concluímos que $[x_1, x_2, x_3] \in \mathrm{Id}^s(G_2^{\psi})$. Finalmente, se $x_3 \in Y_0$, como $(G_2^{\psi})_0^+ = F1$ e $[x_1, x_2, x_3] = [x_1, x_2]x_3 - x_3[x_1, x_2]$, obtemos que $[x_1, x_2, x_3] \in \mathrm{Id}^s(G_2^{\psi})$. Daí, concluímos que se $f \in \Gamma_3^s$, então $f \in \mathrm{Id}^s(G_2^{\psi})$. Portanto, $\gamma_3^s(G_2^{\psi}) = 0$ e, consequentemente, $\gamma_k^s(G_2^{\psi}) = 0$, para todo $k \geq 3$.

$\square$

Observe que $f_{13}, f_{14} \notin \mathrm{Id}^s(G_2^{\psi})$, pois $f_{13}(e_2, e_1) = e_2e_1 = -e_1e_2$ e $f_{14}(e_2, e_1) = [e_2, e_1] = -2e_1e_2$. Além disso, $f_i \in \mathrm{Id}^s(G_2^{\psi})$, para todo $i \neq 13, 14$.

Vamos voltar aos exemplos. Ressaltamos que as superálgebras com superinvolução a serem construídas são somas diretas de superálgebras com superinvolução apresentadas anteriormente. Vamos usar as superálgebras com superinvolução com informações dadas nas Proposições 2.7 e 2.9.

- $\gamma_2^s(A) = 18$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^s \oplus U_3^s \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau}^s \oplus G_{2,2,\rho}^s \oplus G_2^{\sharp}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^s(A)$, $i = 2, 3, 4, 5, 8, \ldots, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para $j \neq 2, 3, 4, 5, 8, \ldots, 16$. Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma_2^s(A) = \; & d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} \\ & + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)} = 18.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^s(A) = 19$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^s \oplus U_{3,*} \oplus U_3^s \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau}^s \oplus G_{2,2,\rho}^s \oplus G_2^{\sharp}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^s(A)$, $i = 1, \ldots, 5, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para $j \neq 1, \ldots, 8, 9, 10, 11, 12, 15, 16$. Portanto,

$$\begin{aligned}\gamma_2^s(A) = \; & d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} \\ & + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)} = 19.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^s(A) = 20$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^s \oplus U_3^s \oplus G_{2,2,\tau}^s \oplus G_{2,2,\rho}^s \oplus G_2^{\#} \oplus G_2^{\star}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^s(A)$, $i = 2, \ldots, 12, 15, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para $j \neq 2, \ldots, 12, 15, 16$. Portanto,

  $$\begin{aligned}\gamma_2^s(A) = \;& d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))}\\ &+2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(2))} + d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^2))} = 20.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^s(A) = 21$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^s \oplus U_{3,*} \oplus U_3^s \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau}^s \oplus G_{2,2,\rho}^s \oplus G_2^{\sharp} \oplus G_2^{\star}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^s(A)$, $i = 1, \ldots, 12, 15, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para $j \neq 1, \ldots, 15, 16$. Portanto,

  $$\begin{aligned}\gamma_2^s(A) = \;& d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1)^2,\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)}\\ &+d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)}\\ &+d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(2))} + d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^2))} = 21.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^s(A) = 22$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^s \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau}^s \oplus G_{2,2,\rho}^s \oplus G_2^{\#} \oplus G_2^{\star} \oplus G_2^{\psi}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 2, , \ldots, 7, 9, \ldots, 16$ e $f_j \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, para $j \neq 2, \ldots, , 9, \ldots, 16$. Portanto,

  $$\begin{aligned}\gamma_2^s(A) = \;& d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)}\\ &+d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(2))} + d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^2))} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} = 22.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^s(A) = 23$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^s \oplus U_{3,*} \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau}^s \oplus G_{2,2,\rho}^s \oplus G_2^{\#} \oplus G_2^{\star} \oplus G_2^{\psi}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 1, \ldots, 7, 9, \ldots, 16$ e $f_8 \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$. Portanto,

  $$\begin{aligned}\gamma_2^s(A) = \;& d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)}\\ &+2d_{(\emptyset,\emptyset,(1),(1))} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(2))}\\ &+d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^2))} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} = 23.\end{aligned}$$

- $\gamma_2^s(A) = 24$

  Seja $A = N_{3,*} \oplus N_3^s \oplus U_3^s \oplus G_{2,0,\tau} \oplus G_{2,2,\tau}^s \oplus G_{2,2,\rho}^s \oplus G_2^{\#} \oplus G_2^{\star} \oplus G_2^{\psi}$. Então, $f_i \notin \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$, $i = 2, \ldots, 16$ e $f_1 \in \mathrm{Id}^{\mathrm{gri}}(A)$. Portanto,

  $$\begin{aligned}\gamma_2^s(A) = \;& d_{((1),\emptyset,(1),\emptyset)} + d_{((1),\emptyset,\emptyset,(1))} + d_{((1),(1),\emptyset,\emptyset)} + d_{((1^2),\emptyset,\emptyset,\emptyset)}\\ &+d_{(\emptyset,\emptyset,(2),\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,(1^2),\emptyset)} + 2d_{(\emptyset,(1),(1),\emptyset)} + d_{(\emptyset,(2),\emptyset,\emptyset)}\\ &+d_{(\emptyset,(1^2),\emptyset,\emptyset)} + d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(2))} + d_{(\emptyset,\emptyset,\emptyset,(1^2))} + 2d_{(\emptyset,(1),\emptyset,(1))} = 24.\end{aligned}$$

Então, de acordo com o que verificamos acima, existem exemplos de ψ-álgebras de crescimento quadrático, tanto para involução graduada quanto para superinvolução, que realizam todos os valores que o coeficiente líder do polinômio que descreve a ψ-codimensão pode assumir.

Considerações Finais

Seja A uma ψ-álgebra unitária e $c_n^{\psi}(A)$ a sua sequência das ψ-codimensões. Nesta tese provamos que se $c_n^{\psi}(A)$ é limitada polinomialmente, então $c_n^{\psi}(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1})$ para alguns $q \in \mathbb{Q}$ e $k \geq 0$. Além disso, mostramos que existe uma quantidade finita de valores possíveis para o coeficiente líder q de $c_n^{\psi}(A)$. Tais resultados são uma extensão dos resultados de Drensky e Regev em [10] (caso ordinário) e de La Mattina, Mauceri e Misso em [23] (caso φ-álgebras).

Posteriormente, construímos exemplos de ψ-álgebras unitárias que realizam o menor e o maior valor possível para o coeficiente líder do polinômio que descreve a sequência das ψ-codimensões.

Finalmente, focamos nossa atenção nas ψ-álgebras unitárias de crescimento quadrático onde construímos exemplos de ψ-álgebras unitárias para cada valor possível que o coeficiente líder do polinômio que descreve a ψ-codimensão pode assumir.

Uma possível generalização dos resultados apresentados nesta tese é a extensão do Teorema 2.18 para $(G,*)$-álgebras unitárias.

Dado um grupo G, dizemos que A é uma álgebra G-**graduada** se A é uma soma direta de subespaços $A^{(g)}$, com $g \in G$ que satisfazem $A^{(g)}A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}$.

Considerando G um grupo e A uma álgebra G-graduada, dizemos que uma involução $*$ sobre A é G-graduada se $(A^{(g)})^* \subseteq A^{(g)}$, para todo $g \in G$. Nestas condições, dizemos que A é uma $(G,*)$-álgebra.

É conhecido que, se G é um grupo finito, as noções da PI-teoria se estendem naturalmente para $(G,*)$-álgebras.

Note que, uma $*$-superálgebra é uma $(G,*)$-álgebra, com $G = \mathbb{Z}_2$.

Podemos buscar respostas para a seguinte questão: se A for uma $(G,*)$-álgebra unitária e sua sequência das $(G,*)$-codimensões for limitada polinomialmente, então essa sequência pode ser descrita por um polinômio? Caso a resposta seja positiva, será que o coeficiente líder desse polinômio é limitado inferior e superiormente?

Caso ambas perguntas tenham respostas positivas. Podemos pensar na construção de exemplos de $(G,*)$-álgebras que realizam o menor e o maior valor do coeficiente líder do polinômio citado acima, assim como fizemos no Capítulo 3.

Portanto, uma generalização dos resultados apresentados para $(G,*)$-álgebras é um trabalho interessante a ser desenvolido em uma futura pesquisa.

Uma outra possibilidade é estender o Teorema 2.18 para outras estruturas, como, por exemplo superálgebras munidas de uma pseudoinvolução.

Uma **pseudoinvolução** sobre uma superálgebra $A = A_0 \oplus A_1$ é uma aplicação F-linear $* : A \to A$ que preserva a graduação que satisfaz

- $(a^*)^* = (-1)^{|a|}a$,
- $(ab)^* = (-1)^{|a||b|}b^*a^*$, para quaisquer elementos $a, b \in A_0 \cup A_1$.

Os questionamentos levantados para $(G,*)$-álgebras também podem ser feitos para superálgebras unitárias munidas de uma pseudoinvolução e este também é um trabalho relevante para ser desenvolvido.

Uma outra abordagem é verificar se os exemplos encontrados no Capítulo 4 são únicos, a menos de PI-equivalência. Isto é, uma abordagem interessante é classificar, a menos de PI-equivalência, as ψ-álgebras unitárias de crescimento quadrático, dando continuidade a classificação feita em [17] para o caso linear.

Referências

[1] S. A. Amitsur, J. Levitzki, *Minimal identiies for algebras*, Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 449–463.

[2] D. C. L. Bessades, R. B dos Santos, M. L. O. Santos, A. C. Vieira, *Superalgebras and algebras with involution: classifying varieties of quadratic growth*, Comm. Algebra. **49** (2021) 2476–2490.

[3] W. D. S. Costa, A. Ioppolo, R. B. dos Santos, A. C. Vieira, *Unitary superalgebras with graded involution or superinvolution of polynomial growth*, J. Pure Appl. Algebra **225** (2021) 106666.

[4] C. W. Curtis, I. Reiner, Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras, New York, Interscience Publishers, 1962.

[5] V. Drensky, *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*, Algebra and Logic **20** (1981) 188–194.

[6] V. Drensky, *Codimensions of T-ideals and Hilbert series of relatively free algebra*, Journal of Algebra **91** (1984) 1–17.

[7] V. Drensky, Free Algebras and PI-Algebras, Singapore, Springer-Verlag, 2000.

[8] V. Drensky, *Relation for the cocharacter sequences of T-ideals*, Proceedings of the International Conference on Algebra, Part 2 (Novosibirsk, 1989), Contemporary Mathematics **131** AMS, Providence, (1992) 285–300.

[9] V. Drensky, A. Giambruno, *Cocharacter, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for* 2×2 *matrices with involution*, Canad. J. Math **46** (1994) no. 4, 718–733.

[10] V. Drensky, A. Regev, *Exact asymptotic behaviour of the codimensions of some P.I. algebras*, Israel J. Math **96** (1996) 231-242.

[11] A. Giambruno, $GL_m \times GL_m$*-representations and* $*$*-polynomial identities*, Comm. Algebra. **14** (1986) 787–796.

[12] A. Giambruno, A. Ioppolo, D. La Mattina, *Varieties of algebras with superinvolution of almost polynomial growth*, Algebr. Represent. Theory **19 (3)** (2016) 599–611.

[13] A. Giambruno, A. Ioppolo, D. La Mattina, *Superalgebras with involution or superinvolution and almost polynomial growth of the codimensions*, Algebr. Represent. Theory **22** (2019) no. 4, 961–976.

[14] A. Giambruno, D. La Mattina, *PI-algebras with slow codimension growth* J.Algebra **284** (2005) 371–391.

[15] A. Giambruno, D. La Mattina, V. M. Petrogradsky, *Matrix algebras of polynomial codimension growth*, Israel J. Math. **158** (2007) 367–378.

[16] A. Giambruno, R. B. dos Santos, A. C. Vieira, *Identities of $*$-superalgebras and almost polynomial growth*, Linear Multilinear Algebra **64 (3)** (2016) 484–501.

[17] A. Ioppolo, D. La Mattina, *Polynomial codimension growth of algebras with involutions and superinvolutions*, J. Algebra **472** (2017) 519–545.

[18] A. Ioppolo, F. Martino, *Superinvolutions on upper-triangular matrix algebras*, J. Pure Appl. Algebra **222** (2018) no. 8, 2022–2039.

[19] A. R. Kemer, *T-ideals with power growth of the codimensions are Specht*, Sibirsk. Mat. Zh. **19** (1978),54-69 (in Russian); English translation: *Sib. Math. J.* **19** (1978)37–48.44

[20] A. R. Kemer, *Ideal of Identities of Associative Algebras. Translations of Mathematical Monographs*, American Mathematical Society, Providence, RI, **87** (1991).

[21] D. Krakowski, A. Regev, *The polynomial identities of the Grassmann algebra*, Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973) 429–438.

[22] D. La Mattina, F. Martino, *Polynomial growth and star-varieties*, J. Pure Appl. Algebra **220** (2016) no. 1, 246–262.

[23] D. La Mattina, S. Mauceri, P. Misso, *Polynomial growth and identities of superalgebras and star-algebras*, J. Pure Appl. Algebra **213** (2009) no. 11, 2087–2094.

[24] T. S. Nascimento, A. C. Vieira, *Superalgebras with graded involution and star-graded colength bounded by 3*, Linear Multilinear Algebra 67, **10** (2019) 1999–2020.

[25] M. A. de Oliveira, A. C. Vieira, *Varieties of unitary algebras with small growth of codimensions*, Int. J. Algebra Comput. **31** (2021) no. 2, 257–277.

[26] A. Regev, *Existence of identities in $A \otimes B$*, Israel J. Math. **11** (1972) 131–152.

[27] B.E. Sagan, The Symmetric Group - Representations, Combinatorial Algorithms and Symmetric Functions, 1st ed. Belmont(CA): Wadsworth, 1991.

[28] W. Specht, *Gesetze in Ringen I*, Math. Z. **52** (1950) 557–589.