UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Wesley Quaresma Cota

Álgebras com estruturas adicionais de crescimento polinomial

Belo Horizonte
2021

Wesley Quaresma Cota

Álgebras com estruturas adicionais de crescimento polinomial

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Ana Cristina Vieira.

Belo Horizonte
2021

Cota, Wesley Quaresma.

C843a Álgebras com estruturas adicionais de crescimento polinomial [recurso eletrônico] / Wesley Quaresma Cota –2021.
1 recurso online (89 f. il, color.) : pdf.

Orientador: Ana Cristina Vieira.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.89-89

1. Matemática – Teses. 2. Identidades polinomiais– Teses. 3. Superálgebras – Teses.I. Vieira, Ana Cristina. I. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III.Título.

CDU 519.6*22(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Álgebras com estruturas adicionais de crescimento polinomial

WESLEY QUARESMA COTA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Ana Cristina Vieira
Profa. Ana Cristina Vieira
UFMG

Rafael Santos
Prof. Rafael Bezerra dos Santos
UFMG

Tatiana Ap. Gouveia
Profa. Tatiana Aparecida Gouveia
UFJF

Belo Horizonte, 24 de setembro de 2021.

Agradecimentos

Certa vez estava lendo a respeito dos corpos celestes e como eles se assemelham com as relações humanas. Os planetas, assim como nós, representam um mundo, cheio da sua imensidão, complexidade e particularidades. Embora cada corpo tenha sua própria órbita, os planetas, o sol, a lua se atraem e formam uma relação rodeada de suas matemáticas e peculiaridades, evidenciado a conexidade entre esses objetos. Apesar de suas individualidades, cada corpo se posiciona numa formosa dança, numa harmonia na qual se constrói o Universo. Não é muito diferente das relações humanas, apesar de cada um ter suas singularidades, a relação que temos uns com os outros nos torna tão especiais na órbita alheia, então passamos a nos atrair e a participar da imensidão do mundo do outro. Nesse espaço, dedico meus agradecimentos a cada um de vocês, cujos percursos fizeram com que nossas órbitas se intersectassem.

Desse modo, gostaria de começar meus singelos agradecimentos à minha orientadora, Ana Cristina Vieira, cujas palavras me esvaem ao tentar descrever toda gratidão, admiração e amizade. Agradeço por cada ensinamento, paciência e por me relembrar sempre os motivos que me trouxeram até aqui. Obrigado por ser um exemplo e inspiração para mim.

A todos os meus amigos, cujas palavras e apoio foram essenciais para o meu crescimento. Em especial à Nayara, Teresinha e Dani, agradeço por sempre acreditarem em mim, por me lembrarem todos os dias da minha capacidade e por serem colo quando mais precisei. Ao Filiphe por todo carinho, amor e paciência, por estar sempre ao meu lado e tornar todos os desafios superáveis contigo. Amo vocês!

A minha família, que mesmo na falta e simplicidade passaram a acreditar em mim e perceber que nenhum sonho é grande demais. Em particular a minha irmã, Tatiane, que mesmo de longe sempre esteve presente e que jamais duvidou de mim.

A todos os professores que participaram do meu desenvolvimento aos longo dos últimos anos. Obrigado por contribuírem para o meu amadurecimento e me inspirarem a cada dia. Em particular, ao professor Michel Spira que desde o primeiro semestre da graduação me inspirou e me orientou nessa jornada, obrigado por cada conselho e amizade. Ao professor Rafael Bezerra dos Santos, por todas as dicas e conselhos, os quais foram fundamentais para este trabalho. À professora Tatiana Gouveia pela leitura e sugestões de melhorias.

Em especial, todo meu carinho à OBMEP por descobrir um garotinho no interior de Minas, despertar nele a paixão pela matemática, acreditar no seu sonho e investir nele. Sem o PICME ou a Bolsa Tim, esse sonho não seria possível. Obrigado por lutarem para tornar a educação mais igualitária. Espero que mais "Wesley's"sejam instigados por programas como esses.

A todo o departamento da matemática: professores e funcionários, que sempre foram solícitos e contribuíram para minha formação.

Meus agradecimentos à CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

O clássico Teorema de Kemer [24], provado em 1979, nos diz que uma variedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $UT_2, \mathcal{G} \notin \mathcal{V}$. A caracterização apresentada por Kemer foi estendida por outros autores para álgebras com estruturas adicionais. Em 2001, Giambruno e Mishchenko [12] mostraram ser necessário e suficiente excluir as $*$-álgebras D_* e M_* da $*$-variedade para garantir crescimento polinomial da sequência de $*$-codimensões. No mesmo ano, Giambruno, Mishchenko e Zaicev [13] caracterizaram as supervariedades de crescimento polinomial, mostrando ser necessário e suficiente excluir cinco superálgebras da supervariedade para garantir tal resultado, são elas: UT_2, $\mathcal{G}$, UT_2^{gr}, $\mathcal{G}^{gr}$ e D^{gr}. Em 2016, Giambruno, dos Santos e Vieira [16] exibiram uma caracterização das $*$-supervariedades de crescimento polinomial, mostrando ser necessário e suficiente excluir as $*$-superálgebras D_*, M_*, D^{gr}, D^{gri} e M^{gri} da $*$-supervariedade para garantir crescimento polinomial da sequência de codimensões $*$-graduadas. O objetivo principal desse trabalho consiste em exibir as caracterizações apresentadas pelos autores, fornecendo demonstrações com linguagem mais atualizada desenvolvida na PI-teoria nos últimos anos.

Palavras chave: identidades polinomiais, codimensões, crescimento polinomial, $*$-álgebras, superálgebras, $*$-superálgebras.

Abstract

The classic Kemer's Theorem [24], established in 1979, states that a variety of algebras $\mathcal{V}$ has polynomial growth if, and only if, $UT_2, \mathcal{G} \notin \mathcal{V}$. The Kemer's caracterization was extended to algebras with additional structures by other authors. In 2001, Giambruno and Mishchenko [12] proved that a necessary and sufficient condition to have $\mathcal{V}$ as a $*$-variety of polynomial growth is excluding the $*$-algebras D_* and M_* from $\mathcal{V}$. In the same year, Giambruno, Mishchenko and Zaicev [13] characterized varieties of superalgebras with polynomial growth by the exclusion of five superalgebras from the variety of superalgebras, which are: UT_2, $\mathcal{G}$, UT_2^{gr}, $\mathcal{G}^{gr}$ and D^{gr}. Finally, in 2016, Giambruno, dos Santos and Vieira [16] proved that it is necessary and sufficient to exclude the $*$-superalgebras D_*, M_*, D^{gr}, D^{gri} and M^{gri} from a variety of $*$-superalgebras in order to have polynomial growth. The main purpose of this dissertation is to present the previous characterizations, giving proofs with updated language developed in PI-theory in the last years.

Keywords: polynomial identities, codimensions, polynomial growth, $*$-algebras, superalgebras, $*$-superagebras.

Sumário

Introdução

Neste trabalho, consideramos F um corpo de característica zero, A uma F-álgebra associativa e $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis. Denotamos por $F\langle X\rangle$ a álgebra livre associativa unitária gerada por X, cujos elementos $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ serão chamados de polinômios. Diante desses objetos, dizemos que A é uma **PI-álgebra** se existe um polinômio não nulo $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ tal que $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$, para todos $a_1, \ldots, a_n \in A$. Nesse caso, escrevemos $f \equiv 0$ em A e dizemos que f é uma identidade de A.

O estudo das PI-álgebras ganhou notoriedade a partir de 1948, quando Kaplansky [22] abordou a respeito da estrutura de particulares PI-álgebras, observando que as identidades da álgebra influenciam diretamente em sua estrutura. Nas décadas seguintes, importantes resultados a respeito das estruturas das PI-álgebras foram desenvolvidos e podem ser consultados em [32]. Posteriormente, em 1950, Amitsur e Levitsky [2] utilizaram métodos puramente combinatórios para mostrar que o polinômio standard de grau $2n$ é uma identidade de $M_n(F)$, onde o polinômio standard de grau k é dado por

$$St_k(x_1, \ldots, x_k) := \sum_{\sigma \in S_k} (\text{sgn } \sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(k)}.$$

Exemplos clássicos de PI-álgebras são facilmente encontrados. Por exemplo, o comutador de Lie de peso 2 definido por $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$ é uma identidade polinomial de uma álgebra comutativa. Além disso, toda álgebra nilpotente de índice m é uma PI-álgebra, uma vez que $x_1 \ldots x_m \equiv 0$ em A. De modo geral, é possível mostrar que se A é uma álgebra de dimensão finita n, então $St_{n+1}(x_1, \ldots, x_{n+1})$ é uma identidade de A, isto é, toda álgebra de dimensão finita é uma PI-álgebra.

Um exemplo de álgebra de dimensão infinita que é uma PI-álgebra é dado pela álgebra de Grassmann $\mathcal{G}$ definida por $\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \ldots \mid e_ie_j = -e_je_i,\ i, j \in \mathbb{N}\rangle$. Não é difícil mostrar que o comutador de peso três $[[x_1, x_2], x_3]$ é uma identidade da álgebra $\mathcal{G}$.

Outro exemplo importante para a teoria é dado pela álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2 com entradas no corpo F, denotada por UT_2. Um exemplo simples de identidade dessa álgebra é o polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$.

A par dessa lista de exemplos, é de grande interesse descrevermos o conjunto das identidades polinomiais satisfeitas por uma álgebra A, denominado $Id(A)$, o qual é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ invariante sob todo endomorfismo de $F\langle X\rangle$. Ideais com essa propriedade são chamados T-ideais. Nesse caso, $Id(A)$ é dito o T-ideal da álgebra A. Para uma álgebra A, definimos a variedade gerada por A como a classe de todas as álgebras B tais que $Id(A) \subseteq Id(B)$ e denotamos por $\mathcal{V} = var(A)$.

É importante ressaltar que determinar o ideal das identidades polinomiais de uma álgebra é um trabalho complicado e de fonte de pesquisas atuais. Em [6], Drensky exibiu as identidades geradoras do T-ideal da álgebra $M_2(F)$. Porém, o T-ideal de $M_n(F)$, para $n \geq 3$, ainda é desconhecido. Em 1950, Specht [34] conjecturou que, sobre um corpo de característica zero, todo T-ideal próprio I de $F\langle X\rangle$ é finitamente gerado como T-ideal. Essa conjectura foi ratificada por Kemer [25] somente em 1988, o que se torna uma grande ferramenta aliada ao processo de multilinearização, o qual nos permite concluir que todo T-ideal é completamente determinado por um número finito de identidades multilineares. Assim sendo, o espaço dos polinômios multilineares nas primeiras n variáveis $P_n := \text{span}_F\{x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$ é de grande relevância para a teoria.

A fim de minimizar a dificuldade em determinar o T-ideal de uma PI-álgebra A e compreender o comportamento das identidades satisfeitas por essa álgebra, em 1972, Regev [31] introduziu a sequência de codimensões de uma álgebra, cujo n-ésimo termo é dado por

$$c_n(A) := \dim_F \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)},\ n \geq 1.$$

Tal sequência numérica nos permite, de certa maneira, “medir”o crescimento das identidades satisfeitas por A. Ainda em 1972, Regev [31] mostrou que se A é uma PI-álgebra sobre um corpo de característica zero, então existem constantes β, $\alpha > 0$ tais que $c_n(A) \leq \beta\alpha^n$, para todo $n \geq 1$. No ano seguinte, Krakovsky e Regev [26] mostraram que $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$. Além disso, Malcev [27] mostrou que $c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n-2)+2$. Consequentemente, as álgebras $\mathcal{G}$ e UT_2 apresentam crescimento exponencial da sequência de codimensões.

Esses resultados motivaram a busca de condições necessárias e suficientes para garantir que a sequência de codimensões de uma PI-álgebra A seja polinomialmente limitada, isto é, existam constantes α e $t \geq 0$ tais que $c_n(A) \leq \alpha n^t, n \geq 1$. Nesse intuito, Kemer [24] foi o pioneiro na caracterização das variedades de crescimento polinomial da sequência de codimensões via exclusão de álgebras da variedade. Em 1979, o autor mostrou que $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $\mathcal{G}, UT_2 \notin var(A)$.

No final da década de 90, iniciou-se o estudo de álgebras munidas de estruturas adicionais. Nesse sentido, dizemos A é uma $*$-álgebra, se A está munida de uma involução, ou seja, um antiautomorfismo de ordem no máximo 2. A título de exemplo, toda álgebra comutativa admite a involução trivial. Um exemplo de involução não trivial em uma álgebra comutativa é dado pela álgebra $D = F \oplus F$ munida da involução troca, isto é, $(a, b)^* = (b, a)$. Nesse passo, consideramos a álgebra $M = F(e_{11}+e_{44})+F(e_{22}+e_{33})+Fe_{12}+Fe_{34} \subset UT_4$ com involução reflexão ao longo da diagonal secundária, dada por

$$\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} a & d & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & c \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Assim definida, M é um $*$-álgebra denotada por M_*.

Dizemos que A é uma superálgebra se existem dois subespaços vetoriais $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ tais que:

1. $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$, como soma de espaços vetoriais;

2. $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$ e $A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}$.

Nesse caso, indicamos a graduação de A da forma $(A^{(0)}, A^{(1)})$.

Por exemplo, toda álgebra é uma superálgebra com graduação trivial $(A, 0)$. Além disso, as seguintes superálgebras merecem nosso destaque: $\mathcal{G}$ e UT_2 denotam, respectivamente, as álgebras de Grassmann e a UT_2 com graduação trivial; D^{gr} a álgebra D com graduação $(F(1, 1), F(1, -1))$; UT_2^{gr} a álgebra UT_2 com graduação $(Fe_{11}+Fe_{22}, Fe_{12})$ e $\mathcal{G}^{gr}$ a álgebra de Grassmann com graduação $(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{G}^{(1)})$, onde

$$\mathcal{G}^{(0)} = \text{span}_F\{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k}, k \geq 0\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{G}^{(1)} = \text{span}_F\{e_{i_1} \dots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k+1}, k \geq 0\}.$$

Note que se A é uma superálgebra, então existe um automorfismo $\varphi : A \to A$ de ordem no máximo 2 induzido pela superestrutura de A, dado por $\varphi(a) = a_0 - a_1$, onde $a = a_0 + a_1 \in A$ com $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$. Reciprocamente, se existe um automorfismo φ de A de ordem no máximo 2, então A é uma superálgebra com a graduação induzida por φ, isto é, $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ onde $A^{(0)} = \{a \in A \mid \varphi(a) = a\}$ e $A^{(1)} = \{a \in A \mid \varphi(a) = -a\}$.

Desse modo, dizemos que A é uma φ-álgebra se essa está munida de um automorfismo ou um antiautomorfismo φ de ordem no máximo 2. Assim, qualquer superálgebra ou qualquer álgebra com involução, é uma φ-álgebra.

Para esse contexto, podemos considerar $F\langle Y \cup Z\rangle$ a φ-álgebra livre nas variáveis $Y = \{y_1, y_2, \ldots\}$ e $Z = \{z_1, z_2, ...\}$. Assim, podemos estender as definições de identidades, variedades e codimensões para φ-identidades, φ-variedades e φ-codimensões e considerar o conjunto $Id^{\varphi}(A)$ dito o T_{φ}-ideal de A, formado por todas as φ-identidades polinomiais de A. Observe que $Id^{\varphi}(A)$ é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle Y \cup Z\rangle$ que comutam com φ, ou seja, é um T_{φ}-ideal de $F\langle Y \cup Z\rangle$. Analogamente ao caso ordinário, $Id^{\varphi}(A)$ é gerado por um número finito de φ-identidades multilineares. Desse modo, denotamos por $P_n^{\varphi} = \text{span}_F\{w_{\sigma(1)} \ldots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i = y_i \text{ ou } w_i = z_i, \ i = 1, \ldots, n\}$, $n \geq 1$, o espaço dos φ-polinômios multilineares nas variáveis $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$. Além disso, denotamos por $var^{\varphi}(A)$ a φ-variedade gerada por A e definimos a n-ésima φ-codimensão de uma φ-álgebra A como

$$c_n^{\varphi}(A) := \dim_F \frac{P_n^{\varphi}}{P_n^{\varphi} \cap Id^{\varphi}(A)}, \ n \geq 1.$$

Em 2001, Giambruno e Mishchenko [12] mostraram que se $\mathcal{V} = var^*(A)$ é uma $*$-variedade gerada por uma $*$-álgebra A então $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se $M_*, D_* \notin \mathcal{V}$.

No ano de 2001, Giambruno, Mishchenko e Zaicev [13] caracterizaram as supervariedades de crescimento polinomial, mostrando ser necessário e suficiente excluir cinco superálgebras da supervariedade, são elas: $\mathcal{G}$, UT_2, $\mathcal{G}^{gr}$, UT_2^{gr} e D^{gr}.

Finalmente, dizemos que uma superálgebra $A = A^{(0)} \dotplus A^{(1)}$ é uma $*$-superálgebra se A admite uma involução graduada, isto é, uma involução que preserve as componentes homogêneas. Ilustramos esse conceito com as seguintes $*$-superálgebras, as quais terão papel fundamental neste trabalho: D_* denota a álgebra D com graduação trivial e involução troca; M_* a álgebra M com graduação trivial e involução reflexão; D^{gr} a álgebra D com graduação $(F(1,1), F(1,-1))$ e involução trivial; D^{gri} a álgebra D com graduação $(F(1,1), F(1,-1))$ e involução troca; M^{gri} a álgebra M com graduação $(F(e_{11} + e_{44}) + F(e_{22} + e_{33}), Fe_{12} + Fe_{34})$ e involução reflexão.

Nesse caso, podemos considerar $F\langle Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1\rangle$ a $*$-superálgebra livre nas variáveis $Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$. Similarmente aos casos anteriores, consideramos o ideal das identidades $*$-graduadas de A, isto é, $Id^{gri}(A) = \{f \in F\langle Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$. É bem conhecido que, sobre um corpo de característica zero, $Id^{gri}(A)$ é gerado por um número finito de identidades $*$-graduadas multilineares. Com isso, definimos $P_n^{gri} = \text{span}_F\{w_{\sigma(1)} \ldots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, \ w_i = y_{i,g_i} \text{ ou } w_i = z_{i,g_i}, \ g_i = 0, 1\}$ o espaço dos polinômios multilineares $*$-graduados nas primeiras n-variáveis.

Ademais, denotamos a classe de todas as $*$-superálgebras que satisfazem as identidades $*$-graduadas de uma $*$-superálgebra A por $var^{gri}(A)$ e definimos a n-ésima codimensão $*$-graduada de uma $*$-superálgebra A como

$$c_n^{gri}(A) = \dim_F \frac{P_n^{gri}}{P_n^{gri} \cap Id^{gri}(A)},\ n \geq 1.$$

Em 2016, Giambruno, dos Santos e Vieira [16] apresentaram uma caracterização das $*$-supervariedades de crescimento polinomial geradas por uma $*$-superálgebra de dimensão finita, mostrando ser necessário e suficiente excluir as $*$-superálgebras D_*, M_*, D^{gr}, D^{gri} e M^{gri} da $*$-supervariedade para garantir tal resultado.

A par da discussão apresentada até aqui, este trabalho consiste em expor os resultados em linguagem atualizada e contribuir para a disseminação do conhecimento dos trabalhos desenvolvidos na pesquisa da PI-teoria. Para isso, iniciamos o Capítulo 1 definindo o principal objeto com o qual trabalharemos, as PI-álgebras, bem como apresentar exemplos e as principais ferramentas para estudos posteriores: T-ideais, variedades, sequência de codimensões e o Teorema de Wedderburn-Malcev. Finalizamos este capítulo com o prestigiado Teorema de Kemer, o qual nos fornece a grande motivação para os demais resultados apresentados.

No Capítulo 2 abordaremos de modo geral as φ-álgebras, os objetos e resultados análogos ao caso ordinário. Por fim, apresentamos a classificação das φ-álgebras simples sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Os Capítulos 3 e 4 concentram o cerne deste trabalho. No Capítulo 3, apresentamos novas demonstrações para as caracterizações das φ-variedades de crescimento polinomial, feitas originalmente nos artigos [12] e [13], aqui utilizando argumentos desenvolvidos na PI-teoria nos últimos anos.

Por último, no Capítulo 4 apresentamos o conceito de $*$-superálgebra, transcrevendo os resultados e objetos anteriores para essa estrutura. Com o auxílio de um resultado provado por Giambruno, Ioppolo e La Mattina [9], exibimos a demonstração mais geral, retirando a hipótese de dimensão finita do resultado de Giambruno, dos Santos e Vieira [16]. Enfim, finalizamos o capítulo com uma breve discussão a respeito de resultados que vem sendo desenvolvidos atualmente nesta linha de pesquisa e possíveis motivações para investigações e incentivo ao estudo da PI-teoria.

Capítulo 1

PI-álgebras e identidades polinomiais

Iniciamos este capítulo com uma breve discussão a respeito dos objetos e resultados preliminares. Em seguida, apresentamos os conceitos de T-ideal, variedade e a sequência de codimensões de uma álgebra. Finalizaremos o capítulo com a apresentação do clássico Teorema de Kemer, o qual foi o pioneiro na caracterização das variedades de crescimento polinomial via exclusão de álgebras da variedade e a grande motivação para os demais resultados apresentados. Embora alguns resultados não necessitem dessa hipótese, admitiremos sempre que F é um corpo de característica zero.

1.1 Definições e exemplos

Nessa primeira seção definiremos o conceito de PI-álgebras e apresentaremos algumas das principais álgebras com as quais trabalharemos.

Definição 1.1.1. Um espaço vetorial A sobre um corpo F é dito ser uma **álgebra** (*associativa*) se A está munido de uma operação binária $\cdot : (A, A) \to A$, chamada *multiplicação*, tal que, para todos $a, b, c \in A$ e $\alpha \in F$, temos satisfeitas

$$\begin{aligned}
(a+b)c &= ac + bc\\
a(b+c) &= ab + ac\\
\alpha(ab) &= (\alpha a)b = a(\alpha b)\\
a(bc) &= (ab)c.
\end{aligned}$$

Embora a última propriedade não seja necessária para a definição de uma álgebra, para nós, uma álgebra sempre significará uma álgebra associativa.

Dizemos que B é uma **subálgebra** de A se B é um subespaço vetorial de A e é fechado para a multiplicação, isto é, $ab \in B$, para todos $a, b \in B$. A título de exemplo, o **centro** $Z(A) = \{a \in A \mid ab = ba, \forall b \in A\}$ de uma álgebra A é uma subálgebra de A. Ademais, dizemos que uma subálgebra I de A é um **ideal à esquerda** de A se $AI \subseteq I$. Analogamente, podemos definir um **ideal à direita** e iremos nos referir a um **ideal bilateral** se esse é um ideal à esquerda e à direita.

Exemplo 1.1.2. Denotamos por $M_n(F)$ a álgebra de matrizes de ordem $n \times n$ com entradas no corpo F e com a multiplicação usual de matrizes. Além disso, definimos $M_n(F)^{op}$ o espaço vetorial $M_n(F)$ com multiplicação $\bullet$ dada por $a \bullet b = ba$, onde $a, b \in M_n(F)$, e ba é a multiplicação dada em $M_n(F)$.

De modo geral, dada uma álgebra A, podemos definir a **álgebra oposta** de A, a qual denotaremos por A^{op} como: A^{op} coincide como espaço vetorial com a álgebra A, cujos elementos são os mesmos; já a multiplicação é dada por $a \bullet b = ba$, para todo $a, b \in A$, onde ba denota a multiplicação em A.

Exemplo 1.1.3. A álgebra UT_n das matrizes triangulares superiores $n \times n$ com entradas em F é uma subálgebra da álgebra $M_n(F)$.

Nos referimos a **dimensão** de uma álgebra como a sua dimensão como espaço vetorial. Por exemplo, $\dim_F M_n(F) = n^2$, já a álgebra UT_n possui dimensão $\frac{n(n+1)}{2}$.

Antes de partirmos para mais exemplos, considere a definição a seguir.

Definição 1.1.4. Seja A uma F-álgebra e $A_1, \ldots, A_k$ subálgebras dessa. Dizemos que A é **soma direta** (como álgebra) de $A_1, \ldots, A_k$, se as seguintes condições são satisfeitas:

(1) $A = A_1 \dot{+} \ldots \dot{+} A_k$, como soma direta de espaços vetoriais;

(2) $a_1 + \ldots + a_k = 0$, com $a_i \in A_i$, então $a_i = 0$, para todo $i \in \{1, \ldots, k\}$;

(3) $A_i A_j = \{0\}$, para $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ com $i \neq j$.

Nesse caso, escrevemos $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_k$.

Exemplo 1.1.5. Considere a álgebra $D = F \oplus F$. Para quaisquer elementos $a_1 + b_1$, $a_2 + b_2 \in D$, temos que

$$(a_1 + b_1)(a_2 + b_2) = a_1a_2 + a_1b_2 + b_1a_2 + b_1b_2 = a_1a_2 + b_1b_2,$$

já que $a_1b_2 = b_1a_2 = 0$. Portanto, podemos considerar os elementos de D como pares ordenados (a, b), onde $a, b \in F$. A soma e produto são definidos, coordenada a coordenada:

$$(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2) \quad \text{e} \quad (a_1, b_1)(a_2, b_2) = (a_1a_2, b_1b_2),$$

onde a_1, a_2, b_1, $b_2 \in F$.

Motivados pelos exemplos anteriores, considere as seguintes definições.

Definição 1.1.6. Seja A uma F-álgebra. Dizemos que A é

(1) **unitária** se existe um elemento $1 = 1_A \in A$ tal que $1a = a1 = a$, para todo $a \in A$;

(2) **comutativa** se $ab = ba$, para todos $a, b \in A$;

(3) **nilpotente** se existe um número natural m para o qual $A^m = 0$, isto é, $a_1 \dots a_m = 0$, para todos $a_1, \dots, a_m \in A$.

Se A é uma álgebra nilpotente, o menor natural m satisfazendo a terceira condição da definição anterior é dito o *índice de nilpotência* de A.

Exemplo 1.1.7. Note que $M_n(F)$ é uma álgebra unitária, mas não é comutativa. Todavia, D é uma álgebra comutativa unitária com $1_D = (1, 1)$.

Definição 1.1.8. Sejam A e B álgebras sobre um corpo F. Um **homomorfismo** de A em B é uma aplicação linear $\varphi : A \to B$ tal que

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b),$$

para todos $a, b \in A$ e $\alpha \in F$.

Ou seja, um homomorfismo φ de F-álgebras nada mais é que um homomorfismo de anéis que é F-linear. Se φ é injetiva então esse é chamado **monomorfismo**. Quando φ é sobrejetiva, é chamado **epimorfismo**. Além disso, se φ é bijetora, dizemos que a mesma é um **isomorfismo** e, nesse caso, A e B são álgebras isomorfas, o qual denotaremos por $A \cong B$. Para o caso em que $B = A$, dizemos que φ é um **endomorfismo**. Um **automorfismo** é um endomorfismo bijetor de A.

Antes do próximo exemplo, denotamos por $\{e_{ij} \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq n\}$, o conjunto das **matrizes elementares** em $M_n(F)$, em que e_{ij} consiste da matriz $n \times n$ com 1 na entrada (i, j) e 0 nas demais, com $i, j = 1, \dots, n$.

Exemplo 1.1.9. Para $n \geq 2$, $M_n(F)$ contém uma subálgebra isomorfa a UT_2. De fato, basta considerar o monomorfismo $\varphi : UT_2 \to M_n(F)$ tal que $\varphi(e_{11}) = e_{11}$, $\varphi(e_{22}) = e_{nn}$ e $\varphi(e_{12}) = e_{1n}$. Observe que a imagem é uma subálgebra de $M_n(F)$ isomorfa a UT_2.

Exemplo 1.1.10. Seja $M_n(F \oplus cF)$ a álgebra de matrizes $n \times n$ com entradas em $F \oplus cF$, onde $c^2 = 1$. Observe que essa álgebra pode ser decomposta como soma direta de duas subálgebras do seguinte modo,

$$M_n(F \oplus cF) \cong \left(\frac{1+c}{2} M_n(F)\right) \oplus \left(\frac{1-c}{2} M_n(F)\right).$$

Considere a álgebra

$$C := \left\{ \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix} \mid A, B \in M_n(F) \right\},$$

e o homomorfismo de álgebras $\varphi : M_n(F \oplus cF) \to C$, dado por

$$\frac{1+c}{2} A + \frac{1-c}{2} B \mapsto \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

onde $A, B \in M_n(F)$. Observe que φ é, na verdade, um isomorfismo entre essas álgebras. No caso em que $n = 1$, temos $M_1(F \oplus cF) = F \oplus cF$ e $C \cong F \oplus F$. Logo, obtemos $F \oplus cF \cong F \oplus F$.

Neste passo, consideramos $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis e $F\langle X \rangle$ o F-espaço vetorial gerado por todos os produtos

$$x_{i_1} \ldots x_{i_n},$$

onde $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$ são elementos em X, $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 0$, tal que, para $n = 0$, temos o elemento $1 \in F$. Definimos uma multiplicação em $F\langle X \rangle$ dada por justaposição, isto é,

$$(x_{i_1} \ldots x_{i_p}) \cdot (x_{j_1} \ldots x_{j_q}) = x_{i_1} \ldots x_{i_p} x_{j_1} \ldots x_{j_q}.$$

Nesse caso, $F\langle X \rangle$ é uma álgebra, denominada **álgebra livre** sobre X. Um elemento $f \in F\langle X \rangle$ será intitulado de **polinômio**. Um **monômio** nada mais é que uma palavra $u = x_{i_1} \ldots x_{i_n} \in F\langle X \rangle$. Desse modo, dizemos que o **grau** do monômio u, denotado por $\deg u$, é o comprimento da palavra u, isto é, $\deg u = n$. Também, definimos o grau de um monômio em relação à variável x_i como o número de vezes que a variável x_i aparece no monômio

u, o qual denotamos por $\deg_{x_i} u$. Finalmente, o grau de um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ é dado por

$$\deg f := \max \ \deg u,$$

onde u percorre todos os monômios de f.

A seguir definiremos alguns polinômios que serão importantes futuramente.

Exemplo 1.1.11. O **comutador de peso** 2 (ou *comutador de Lie* de peso 2) entre x_1 e x_2 é dado pelo polinômio $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1 \in F\langle X\rangle$. Mais geralmente, definimos o comutador de peso n indutivamente como

$$[x_1, x_2, \ldots, x_n] := [[x_1, \ldots, x_{n-1}], x_n].$$

Além disso, **identidade de Jacobi** é o nome dado para a seguinte igualdade:

$$[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0.$$

Exemplo 1.1.12. O **polinômio de Capelli** de posto k é dado por:

$$Cap_k(x_1, \ldots, x_k, x'_1, \ldots, x'_{k+1}) = \sum_{\sigma \in S_k} (\operatorname{sgn} \sigma) x'_1 x_{\sigma(1)} x'_2 \ldots x_{\sigma(k)} x'_{k+1},$$

onde S_k denota o grupo simétrico de grau k e $\operatorname{sgn} \sigma$ é o sinal da permutação $\sigma \in S_k$.

Exemplo 1.1.13. Definimos o **polinômio standard** de grau n como:

$$St_n(x_1, \ldots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} (\text{sgn } \sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} \ldots x_{\sigma(n)}.$$

Em outras palavras, o polinômio standard de grau n nada mais é que o polinômio de Capelli de posto n especializando as variáveis $x'_1 = \ldots = x'_{n+1} = 1$.

Observação 1.1.14. Em alguns casos, será conveniente reescrevermos um polinômio standard de grau par da seguinte forma, cuja demonstração pode ser consultada em [32],

$$St_{2k}(x_1, \ldots, x_{2k}) = \frac{1}{2^k} \sum_{\sigma \in S_{2k}} (\text{sgn } \sigma)[x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \ldots [x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)}].$$

Feita essa discussão, tomamos conhecimento da seguinte definição.

Definição 1.1.15. Sejam A uma F-álgebra e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** de A se

$$f(a_1, \ldots, a_n) = 0, \text{ para todos } a_1, \ldots, a_n \in A.$$

Nesse caso, escrevemos simplesmente $f \equiv 0$ em A e dizemos que f é uma identidade de A.

Finalmente, podemos definir o nosso principal objeto de estudo. Para isso, observe que o polinômio nulo é sempre uma identidade de A. Se uma F-álgebra A admite uma identidade não nula $f \in F\langle X\rangle$, então dizemos que A é uma ***PI-álgebra***.

Exemplo 1.1.16. Se A uma álgebra comutativa, então A é uma PI-álgebra desde que $[x_1, x_2]$ é uma identidade de A.

Exemplo 1.1.17. Se A é uma álgebra nilpotente de índice m, então o polinômio $f(x_1, \ldots, x_m) = x_1 \ldots x_m$ é uma identidade de A.

Exemplo 1.1.18. Para $a_i, a_j \in UT_n$, $[a_i, a_j]$ é uma matriz triangular superior consistindo de 0 em todas as entradas da diagonal. Logo, desde que o produto de n elementos dessa forma resulta em 0, temos que

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \ldots [x_{2n-1}, x_{2n}] \equiv 0 \text{ em } UT_n.$$

Exemplo 1.1.19. O polinômio $[[x_1, x_2]^2, x_3]$ é uma identidade da álgebra $M_2(F)$, chamada *identidade de Hall*. De fato, defina $A := [B, C]$, onde $B, C \in M_2(F)$. Desde que A^2 é uma matriz escalar, temos que $A^2 \in Z(M_2(F))$. Assim, segue que $[[B, C]^2, D] = 0$ para todos $B, C, D \in M_2(F)$.

Dizemos que a álgebra A é gerada, como álgebra, por um subconjunto S de A se todo elemento de A pode ser escrito como uma F-combinação linear de produtos formados por elementos de S. Nesse caso, escrevemos $A = \langle S\rangle$. A seguir daremos um exemplo de uma importante PI-álgebra de dimensão infinita, cujo conjunto gerador como espaço vetorial e como álgebra diferem.

Exemplo 1.1.20. Seja I o ideal bilateral de $F\langle X\rangle$ gerado pelo conjunto $\{x_i x_j + x_j x_i \mid i, j \geq 1\}$. Considere o espaço quociente $\mathcal{G} = F\langle X\rangle/I$ e denotamos $e_i := x_i + I$, $i \in \mathbb{N}$. Assim, podemos definir uma operação nesse espaço dada por $e_i e_j = x_i x_j + I$. Definimos a **álgebra de Grassmann** $\mathcal{G}$ como a álgebra gerada pelos elementos 1 e $\{e_i\}_{i\in\mathbb{N}}$. Além disso, temos satisfeito $e_i e_j + e_j e_i = x_i x_j + x_j x_i + I = I$, isto é, $e_i e_j = -e_j e_i$ e assim, podemos representar essa álgebra da seguinte forma

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \ldots \mid e_i e_j = -e_j e_i,\ i, j \in \mathbb{N}\rangle.$$

Com isso, note que $\mathcal{B} = \{1, e_{i_1} \dots e_{i_k} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_k,\ k \geq 1\}$ é uma base de $\mathcal{G}$, ou seja, essa álgebra tem dimensão infinita. A seguir, introduziremos dois subespaços importantes da álgebra de Grassmann,

$$\mathcal{G}^{(0)} = \mathrm{span}_F\{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k}, k \geq 0\} \quad \text{e}$$

$$\mathcal{G}^{(1)} = \mathrm{span}_F\{e_{i_1} \dots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k+1}, k \geq 0\}.$$

Pela definição, pode-se verificar que esses subespaços satisfazem as seguintes relações:

$$\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subseteq \mathcal{G}^{(0)} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(1)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(0)} \subseteq \mathcal{G}^{(1)}.$$

Como consequência, a primeira relação nos diz que $\mathcal{G}^{(0)}$ é uma subálgebra de $\mathcal{G}$. Desde que $\mathcal{G}^{(0)} \cap \mathcal{G}^{(1)} = \{0\}$ e todo elemento de $\mathcal{G}$ pode ser escrito como soma de elementos de $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\mathcal{G}^{(1)}$, temos que $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \dot{+} \mathcal{G}^{(1)}$.

Desde que os elementos de $\mathcal{G}^{(0)}$ comutam com qualquer elemento de $\mathcal{G}$, temos que $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq Z(G)$. Assim, segue que, para todos $a = a_0 + a_1$ e $b = b_0 + b_1 \in \mathcal{G}$, com $a_0, b_0 \in \mathcal{G}^{(0)}$ e $a_1, b_1 \in \mathcal{G}^{(1)}$, temos

$$[a, b] = [a_1, b_1] + \underbrace{[a_0, b_0]}_{0} + \underbrace{[a_1, b_0]}_{0} + \underbrace{[a_0, b_1]}_{0} = 2a_1b_1 \in \mathcal{G}^{(0)}.$$

Logo, $[\mathcal{G}, \mathcal{G}] \subseteq Z(\mathcal{G})$ e obtemos $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$ em $\mathcal{G}$, ou seja, $\mathcal{G}$ é uma PI-álgebra.

Em 1950, Amitsur e Levitzki mostraram em [2] uma importante identidade da álgebra de matrizes.

Teorema 1.1.21 (Amitsur e Levitzki)**.** *O polinômio standard de grau* $2n$ *é uma identidade polinomial de* $M_n(F)$*, ou seja,* $St_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}) \equiv 0$ *em* $M_n(F)$*.*

Além disso, é possível verificar que nenhum polinômio de grau menor que $2n$ é uma identidade da álgebra de matrizes de ordem n, isto é, $2n$ é o grau mínimo de uma identidade em $M_n(F)$, cuja demonstração encontra-se exposta no Teorema 1.7.2 em [20].

Definição 1.1.22. Uma álgebra A satisfaz uma identidade de Capelli de posto m se A satisfaz todos os polinômios obtidos de Cap_m, tomando, eventualmente, as variáveis x_i' iguais a 1 de todas as formas possíveis.

De modo geral, é possível provar que se A é uma álgebra de dimensão finita n, então A satisfaz a identidade de Capelli de posto $n+1$. Em particular, o polinômio standard de grau $n+1$ é uma identidade de A. O leitor interessado pode consultar o Teorema 1.5.8 em [20].

Finalizaremos esta seção com uma breve discussão a respeito do produto tensorial de álgebras. A fim de compreender essa álgebra, sejam A e B duas F-álgebras. Consideramos $A \times B$ o F-espaço vetorial gerado pelos pares ordenados $\{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$. Desse modo, todo elemento de $A \times B$ pode ser escrito como combinação linear $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i(a_i, b_i)$, onde $\alpha_i \in F, a_i \in A$ e $b_i \in B$. Seja ainda I o subespaço de $A \times B$ gerado por todos os elementos da forma

$$(a+a', b) - (a,b) - (a',b), \qquad (a, b+b') - (a,b) - (a,b'),$$

$$(\alpha a, b) - \alpha(a,b) \quad \text{e} \quad (a, \alpha b) - \alpha(a,b).$$

O **produto tensorial** $A \otimes B$ é definido como o espaço quociente $\frac{A \times B}{I}$. Denotaremos por $a \otimes b$ a classe $(a,b) + I$. Observe que $A \otimes B$ é uma F-álgebra com o produto dado por

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = aa' \otimes bb'.$$

Da definição, seguem imediatamente as propriedades abaixo:

(1) $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$;

(2) $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$;

(3) $\alpha(a \otimes b) = \alpha a \otimes b = a \otimes \alpha b$.

Observe que se $\{v_1, \ldots, v_n\}$ é uma base de A e $\{u_1, \ldots, u_m\}$ é uma base de B, então $\{v_i \otimes u_j \mid 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq j \leq m\}$ é uma base de $A \otimes B$, como F-álgebra. Com isso, temos que $\dim_F(A \otimes B) = \dim_F A \dim_F B$.

É possível verificar que o produto tensorial definido satisfaz a seguinte Propriedade Universal: Dados quaisquer F-álgebra H e um mapa bilinear $f : A \times B \to H$, existe um único mapa $\tilde{f} : A \otimes B \to H$ linear, tal que $f = \tilde{f} \circ i$, onde $i : A \times B \to A \otimes B$ dada por $i(a,b) = a \otimes b$ é um mapa bilinear. Em outras palavras, o seguinte diagrama comuta

$$\begin{tikzcd} A \times B \arrow[r, "i"] \arrow[dr, "f"'] & A \otimes B \arrow[d, "\tilde{f}"] \\ & H \end{tikzcd} .$$

Além disso, o produto tensorial é único a menos de isomorfismo.

O produto tensorial de álgebras será importante, posteriormente, para estender as álgebras a um corpo algebricamente fechado.

1.2 T-ideais e variedades

Nesta seção, consideramos o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra, definiremos o T-ideal e a variedade gerada por uma álgebra. Ao final, apresentaremos algumas ideias a respeito do processo de multilinearização, o qual nos permitirá obter um importante resultado a respeito das identidades de uma álgebra.

Nesse intuito, para uma álgebra A, definimos

$$Id(A) := \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\},$$

o conjunto de todas as identidades polinomiais de A. Observe que $Id(A)$ é um ideal bilateral de $F\langle X\rangle$. Além disso, considere $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade de A e um endomorfismo $\psi : F\langle X\rangle \to F\langle X\rangle$ que mapeia $x_i \to g_i$. Observe que,

$$\psi(f) = f(\psi(x_1), \ldots, \psi(x_n)) = f(g_1, \ldots, g_n) \equiv 0 \text{ em } A.$$

Desse modo, $Id(A)$ é um ideal invariante sob todos os endomorfismos de $F\langle X\rangle$. Um ideal de $F\langle X\rangle$ com essa propriedade é chamado de T-**ideal**. Por outro lado, afirmamos que todo T-ideal é o ideal das identidades polinomiais de alguma álgebra. Mais especificamente, para um T-ideal I de $F\langle X\rangle$ temos que $Id(F\langle X\rangle/I) = I$. Como vimos, $Id(A)$ é um T-ideal de $F\langle X\rangle$, dito o T-ideal de A.

Exemplo 1.2.1. Em [6] Drensky exibiu identidades geradoras para o T-ideal da álgebra $M_2(F)$:

$$Id(M_2(F)) = \langle [[x_1, x_2]^2, x_3], St_4(x_1, x_2, x_3, x_4)\rangle_T.$$

Porém, o T-ideal de $M_n(F)$, para $n \geq 3$, ainda é desconhecido.

Dizemos que um T-ideal I é gerado, como T-ideal, por um conjunto $S \subset F\langle X\rangle$ se todo elemento de I pode ser escrito como uma F-combinação linear de elementos da forma

$$h_1 f(g_1, \ldots, g_n) h_2,$$

onde $h_1, g_1, \ldots, g_n, h_2 \in F\langle X\rangle$ e $f \in S$. Nesse caso, denotamos por $I = \langle S\rangle_T$. Além disso, dizemos que um polinômio f é **consequência** de polinômios em um conjunto $S \subset F\langle X\rangle$ se $f \in \langle S\rangle_T$.

Em 1954 Specht conjecturou que, sobre um corpo de característica zero, todo T-ideal próprio de $F\langle X\rangle$ é finitamente gerado, como T-ideal. Essa conjectura foi ratificada somente em 1988 por Kemer [25]. Porém, embora se conheça as identidades geradoras do T-ideal de algumas álgebras, outras ainda se tornam motivos de contínuas pesquisas, como já foi observado no Exemplo 1.2.1.

Definição 1.2.2. Dado um subconjunto não vazio S de $F\langle X\rangle$, a **variedade** determinada por S é a classe de todas as álgebras A tais que $f \equiv 0$ em A, para todo $f \in S$. Nesse caso, denotaremos a variedade de S por $\mathcal{V} = var(S)$.

Exemplo 1.2.3. Seja $S = \{[x, y]\} \subseteq F\langle X\rangle$. A variedade determinada por S é a classe de todas as álgebras comutativas.

A relação entre T-ideais e variedades é bem conhecida, mais especificamente, temos uma correspondência biunívoca entre esses objetos. De fato, observe que se $\langle S\rangle_T$ é o T-ideal de $F\langle X\rangle$ gerado por S, então $var(S) = var(\langle S\rangle_T)$. Além disso, se $\mathcal{V}$ é uma classe de álgebras, então $\mathcal{V} = var(I)$, onde

$$I = \bigcap_{A\in\mathcal{V}} Id(A).$$

Nesse caso, será comum representarmos o T-ideal I por $Id(\mathcal{V})$. Observe que, para dois T-ideais I e J, temos $J \subset I$ se e somente se $var(I) \subset var(J)$.

Se $\mathcal{V} = var(I)$ e A é uma F-álgebra tal que $Id(A) = I$, denotaremos por $var(A)$ a **variedade gerada por** A, ou seja, $B \in var(A)$ se, e somente se, $Id(A) \subseteq Id(B)$.

Dada uma classe de álgebras, podemos nos questionar se essa forma uma variedade. Sabemos que uma variedade $\mathcal{V}$ é fechada para qualquer homomorfismo, subálgebra ou produto direto. O Teorema de Birkhoff [3] nos diz exatamente que essas propriedades caracterizam uma variedade.

Teorema 1.2.4 (Birkhoff)**.** *Uma classe $\mathcal{V}$ não vazia de álgebras é uma variedade se, e somente se, as seguintes propriedades são satisfeitas:*

(1) se $A \in \mathcal{V}$ e B é uma subálgebra de A, então $B \in \mathcal{V}$;

(2) se $A \in \mathcal{V}$ e I é um ideal de A, então $A/I \in \mathcal{V}$;

(3) se $\{A_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ é uma família de álgebras satisfazendo $A_i \in \mathcal{V}$, para todo $i \in \mathcal{I}$, então $\prod_{i\in\mathcal{I}} A_i \in \mathcal{V}$.

A seguir, relacionamos as identidades da interseção de duas variedades com as identidades das respectivas variedades.

Proposição 1.2.5. Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ duas variedades. Então,

$$Id(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) = Id(\mathcal{V}) + Id(\mathcal{W}).$$

Demonstração. Uma vez que, $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ e $\mathcal{V} \cap \mathcal{W} \subset \mathcal{W}$, então $Id(\mathcal{V}) \subset Id(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$ e $Id(\mathcal{W}) \subset Id(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$. Portanto, $Id(\mathcal{V}) + Id(\mathcal{W}) \subseteq Id(\mathcal{V} \cap \mathcal{W})$.

Para a inclusão contrária, basta mostrarmos que $var(Id(\mathcal{V}) + Id(\mathcal{W})) \subset var(Id(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}))$. Para isso, considere $A \in var(Id(\mathcal{V}) + Id(\mathcal{W}))$, com isso, temos que $Id(\mathcal{V}) + Id(\mathcal{W}) \subset Id(A)$. Portanto, $Id(\mathcal{V})$ e $Id(\mathcal{W})$ estão contidos em $Id(A)$. Consequentemente, $A \in \mathcal{V} \cap \mathcal{W}$ e assim, $Id(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}) \subset Id(A)$. Desse modo, temos que $A \in var(Id(\mathcal{V} \cap \mathcal{W}))$, como gostaríamos.

□

Nosso próximo passo consiste em mostrar que o T-ideal de uma álgebra é completamente determinado pelas identidades multilineares. Esse resultado é uma consequência do processo de multilinearização. Para chegarmos lá, considere as seguintes definições.

Definição 1.2.6. Seja $f \in F\langle X \rangle$. Dizemos que f é **linear** na variável x_i se todo monômio de f contém exatamente uma variável x_i. Se todos os monômios de f tem o mesmo grau, então f é dito **homogêneo**. Ademais, dizemos que f é homogêneo na variável x_i se x_i aparece com mesmo grau em todos os monômios de f. No caso em que f é homogêneo em todas suas variáveis, f é chamado de **multihomogêneo**. Finalmente, um polinômio é chamado **multilinear** se f é multihomogêneo e linear em todas as suas variáveis.

Observe que se $f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X \rangle$, podemos escrever

$$f = \sum_{i_1 \geq 0, \ldots, i_n \geq 0} f^{(i_1, \ldots, i_n)},$$

onde $f^{(i_1, \ldots, i_n)}$ é a soma de todos os monômios de f onde $\deg_{x_j} f = i_j$, para todo $j = 1, \ldots, n$. Os polinômios $f^{(i_1, \ldots, i_n)}$ serão chamados de **componentes homogêneas** de f.

As componentes homogêneas desempenham um papel importante, dado pelo teorema seguinte.

Teorema 1.2.7. *[20, Theorem 1.3.2] Sejam F um corpo de característica zero e f uma identidade de uma F-álgebra A. Então, toda componente multihomogênea de f é uma identidade de A.*

Como corolário imediato, temos que todo T-ideal é gerado pelas identidades multihomogêneas.

Nos atentamos agora ao caso em que f é um polinômio multilinear. Nesse caso, desde que cada variável aparece com grau 1 em cada monômio de f, podemos escrever

$$f(x_1,\dots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\dots x_{\sigma(n)},$$

onde $\alpha_\sigma\in F$ é, eventualmente, nulo.

Observação 1.2.8. Note que se $f(x_1,\dots,x_n)$ é um polinômio linear numa variável, digamos x_1, então

$$f(\sum\alpha_i y_i,x_2,\dots,x_n)=\sum\alpha_i f(y_i,x_2,\dots,x_n),$$

para todos $\alpha_i\in F$ e $y_i\in F\langle X\rangle$.

A observação anterior nos diz que, para decidirmos se um polinômio multilinear é uma identidade da álgebra, basta avaliarmos em elementos de uma base.

Finalmente, temos o **processo de multilinearização**, o qual nos afirma que, a partir de uma identidade de grau k, podemos obter uma identidade multilinear de grau menor ou igual a k, cuja demonstração pode ser vista em [20].

Teorema 1.2.9. *[20, Theorem 1.3.7] Se uma álgebra A satisfaz uma identidade de grau k, então A satisfaz uma identidade multilinear de grau menor ou igual a k.*

Teorema 1.2.10. *Sejam F um corpo de característica zero e $f\in F\langle X\rangle$ uma identidade da F-álgebra A. Então f é consequência de um número finito de polinômios multilineares.*

Demonstração. Seja f uma identidade de A. Pelo Teorema 1.2.7, podemos supor f multihomogêneo. Aplicando o processo de multilinearização em f, se $deg_{x_1} f=d>1$, então escrevemos

$$h=f(y_1+y_2,x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=0}^{d}g_i(y_1,y_2,x_2,\dots,x_n),$$

onde $deg_{y_1} g_i=i$, $deg_{y_2} g_i=d-i$ e $deg_{x_t} g_i=deg_{x_t} f$ para todo $t=2,\dots,n$.

Uma vez que f é uma identidade de A, segue que h é também uma identidade. Além disso, desde que as componentes multihomogêneas de uma identidade são identidades, segue que $g_i = g_i(y_1, y_2, x_2, \ldots, x_n)$ são consequências de f, para todo i. Por outro lado, temos

$$g_i(y_1, y_1, x_2, \ldots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Como F é um corpo de característica zero, segue que $\binom{d}{i} \neq 0$, então f é consequência de g_i, para todo $i = 1, \ldots, d-1$. Isto é, $\langle f \rangle_T = \langle g_1, \ldots, g_{d-1} \rangle_T$. Aplicando indução para todas as variáveis, temos que f é consequência de um conjunto finito de polinômios multilineares. $\square$

Ilustramos esse processo com o seguinte exemplo.

Exemplo 1.2.11. Seja $f(x_1, x_2, x_3) = [[x_1, x_2]^2, x_3]$. Note que f não é linear nas variáveis x_1 e x_2, mas é na variável x_3. Considere

$$h_1(y_1, y_2, x_2, x_3) = f(y_1 + y_2, x_2, x_3) - f(y_1, x_2, x_3) - f(y_2, x_2, x_3) =$$

$$= [[y_1, x_2][y_2, x_2], x_3] + [[y_2, x_2][y_1, x_2], x_3].$$

Note que h_1 é linear nas variáveis y_1, y_2, x_3 mas não é na variável x_2. Considere então

$$h(y_1, y_2, y_3, y_4, x_3) = h_1(y_1, y_2, y_3+y_4, x_3) - h_1(y_1, y_2, y_3, x_3) - h_1(y_1, y_2, y_4, x_3) =$$

$$= [[y_1, y_3][y_2, y_4], x_3] + [[y_1, y_4][y_2, y_3], x_3] + [[y_2, y_3][y_1, y_4], x_3] + [[y_2, y_4][y_1, y_3], x_3].$$

Logo h é um polinômio multilinear obtido a partir de f.

Desde que o Teorema de Kemer estabelece que todo T-ideal próprio de $F\langle X \rangle$ é gerado por um número finito de identidades, podemos aplicar o processo de multilinearização nos geradores para obter o seguinte resultado.

Corolário 1.2.12. Todo T-ideal próprio de $F\langle X \rangle$ é gerado, como T-ideal, por um número finito de polinômios multilineares.

Em alguns momentos, será conveniente reescrever um polinômio multilinear $f \in F\langle X \rangle$ de grau n como F-combinação linear de polinômios da forma

$$x_{i_1} \ldots x_{i_{s_1}} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s_2}}] \ldots [x_{l_1}, \ldots, x_{l_{s_m}}], \tag{1.1}$$

onde $i_1 < \ldots < i_{s_1}$, $\displaystyle\sum_{i=1}^{m} s_i = n$ e os comutadores acima são de pesos arbitrários. Mais detalhes sobre esse resultado pode ser consultado em [5]. A seguir, apresentamos um exemplo que evidencia a conveniência em se trabalhar com polinômios da forma descrita acima.

Exemplo 1.2.13. Seja A uma álgebra comutativa e unitária. Então, $Id(A)$ é gerado, como T-ideal, por $[x_1, x_2]$. De fato, desde que A é uma álgebra comutativa, $[x_1, x_2] \equiv 0$ em A, ou seja, $I := \langle [x_1, x_2] \rangle_T \subseteq Id(A)$. Por outro lado, seja f uma identidade de A, a qual, pelo Corolário 1.2.12, podemos supor multilinear. Pela observação (1.1), podemos escrever

$$f \equiv \alpha x_1 \dots x_n (\mod I).$$

Tomando uma avaliação $x_1 = \dots = x_n = 1$ em f, obtemos $f \equiv \alpha 1 (\mod I)$. Desde que f é uma identidade de A, temos que $\alpha = 0$, ou seja, $f \in I$. Portanto, concluímos que $Id(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$.

Finalizamos esta seção com o seguinte resultado, o qual relaciona as identidades de uma F-álgebra A com as identidades de $A \otimes C$, onde C é uma álgebra comutativa. Em particular, o caso em que C é o fecho algébrico de F será de suma importância para nós.

Proposição 1.2.14. Sejam F um corpo de característica zero, A uma F-álgebra e C uma F-álgebra comutativa unitária. Então, toda identidade de A é também uma identidade de $A \otimes C$, e vice-versa.

Demonstração. Tomamos $\overline{A} = A \otimes C$ e $f(x_1, \dots, x_n)$ uma identidade de $A \otimes C$ de grau n. Podemos supor, sem perda de generalidade, f um polinômio multilinear. Desde que A pode ser vista como uma subálgebra de $A \otimes C$ pelo monomorfismo $\varphi : A \to A \otimes C$ dado por $\varphi(a) = a \otimes 1$, é imediato que f é uma identidade de A.

Suponhamos agora que $g(x_1, \dots, x_j)$ é uma identidade de grau j para A. Assumimos que g é multilinear. Uma vez que C é uma álgebra comutativa, temos que, para quaisquer $\overline{b_1} = b_1 \otimes c_1, \dots, \overline{b_j} = b_j \otimes c_j \in \overline{A}$ podemos escrever

$$g(\overline{b_1}, \dots, \overline{b_j}) = g(b_1, \dots, b_j) \otimes c_1 \dots c_j.$$

Como $g \in Id(A)$, concluímos que $g(\overline{b_1}, \dots, \overline{b_j}) = 0$, para todos $\overline{b_1}, \dots, \overline{b_j} \in \overline{A}$, como gostaríamos. □

1.3 Sequência de codimensões

Em algumas situações, determinar o T-ideal de uma álgebra torna-se um problema extremamente árduo. A fim de minimizar essa dificuldade e compreender o crescimento das identidades de uma álgebra A, definiremos a sequência de codimensões de A. Além disso, apresentaremos algumas definições e exemplos importantes.

Para isso, consideramos o **espaço dos polinômios multilineares** nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ dado por $P_n := \mathrm{span}_F\{x_{\sigma(1)} \ldots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}$. Com isso, observe que o T-ideal de uma PI-álgebra é gerado pelo seguinte subespaço de $F\langle X\rangle$,

$$(P_1 \cap Id(A)) \dotplus (P_2 \cap Id(A)) \dotplus \ldots \dotplus (P_1 \cap Id(A)) \dotplus \ldots$$

Assim, a dimensão de $P_n \cap Id(A)$ nos fornece, de certa forma, o crescimento das identidades da álgebra A.

Definimos então,

$$P_n(A) := \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}.$$

Observe que A é uma PI-álgebra se, e somente se, $\dim_F P_n(A) < n!$, para algum n. A grande percepção de se compreender o crescimento das identidades de uma álgebra a partir do espaço quociente definido acima se deve a Regev [31], o qual introduziu a sequência de codimensões de uma álgebra.

Definição 1.3.1. Para $n \geq 1$, a **n-ésima codimensão** de A é o inteiro não negativo

$$c_n(A) := \dim_F P_n(A).$$

Além disso, se $\mathcal{V} = var(A)$ então definimos $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$, $n \geq 1$, a n-ésima codimensão da variedade $\mathcal{V}$.

Exemplo 1.3.2. Se A é uma F-álgebra nilpotente de índice m então, qualquer monômio de P_n contendo pelo menos m variáveis é uma identidade de A. Assim sendo, $c_n(A) = 0$, para todo $n \geq m$.

Exemplo 1.3.3. Seja A uma F-álgebra comutativa e unitária. Desde que $Id(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$, segue de (1.1) que $\{x_1 \ldots x_n\}$ é uma base de P_n módulo $P_n \cap Id(A)$. Desse modo, $c_n(A) = 1$, para todo $n \geq 1$.

Em 1973, Krakowski e Regev [26] determinaram completamente o T-ideal da álgebra de Grassmann e exibiram sua sequência de codimensões.

Teorema 1.3.4. *Seja $\mathcal{G}$ a Grassmann de dimensão infinita. Então, $Id(\mathcal{G}) = \big\langle [x_1, x_2, x_3] \big\rangle_T$ e $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Sejam $I = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$ e $P_n(I) = \dfrac{P_n}{P_n \cap I}\cdot$ Uma vez que $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$ em $\mathcal{G}$, temos que $I \subseteq Id(\mathcal{G})$. Com isso, observamos que

$$c_n(\mathcal{G}) \leq \dim_F P_n(I).$$

Para concluir a igualdade entre os T-ideais, basta verificarmos que $c_n(\mathcal{G}) = \dim_F P_n(I)$, para todo $n \geq 1$. Desse modo, tome $g \in F\langle X\rangle$, o qual pela observação (1.1), pode ser escrito, módulo I, como combinação linear de elementos da forma:

$$x_{i_1} \dots x_{i_r}[x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}], \tag{1.2}$$

onde $i_1 < \dots < i_r$, $r + 2m = n$. Sem perda de generalidade, podemos supor, $j_1 < j_2, \dots, j_{2m-1} < j_{2m}$. Além disso, observe que para todos $a, b, c, d \in F\langle X\rangle$, temos satisfeitas as seguintes relações:

1. $[a, b, [c, d]] = [a, b][c, d] - [c, d][a, b]$;
2. $[a, c][b, d] = -[a, b][c, d] + [ab, c, d] + [ac, b, d] - [a, b, d]c - [a, c, d]b$.

Traduzindo para o nosso caso, módulo I, a primeira relação nos diz que os comutadores de peso 2 comutam. Já a segunda propriedade nos diz que, módulo I, podemos trocar as variáveis entre os comutadores, a menos de sinal. Com isso, podemos supor em (1.2) que

$$j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_{2m}.$$

De todo modo, para n qualquer, temos 2^{n-1} elementos da forma desejada. Com isso, desde que os elementos dessa forma formam um conjunto gerador do espaço $P_n(I)$, concluímos o seguinte:

$$c_n(\mathcal{G}) \leq \dim_F P_n(I) \leq 2^{n-1}.$$

Afirmamos que os elementos da forma (1.2), com $i_1 < \dots < i_r$, $j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_{2m}$ e $r + 2m = n$ são linearmente independentes em $P_n(\mathcal{G})$. Para isso, tome uma F-combinação linear nula desses elementos em $P_n(\mathcal{G})$, isto é,

$$h := \sum_{s\in S} \alpha_s x_{i_1} \dots x_{i_r}[x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}] \equiv 0 \mod Id(\mathcal{G}),$$

onde S consiste em todas as n-uplas $(i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{2m})$ satisfazendo $i_1 < \dots < i_r$, $j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_{2m}$ e $r + 2m = n$. Suponha por absurdo que exista um coeficiente $\alpha_{s'}$ não nulo, onde $s' = (i_1, \dots, i_{r'}, j_1, \dots, j_{2m'}) \in S$, $i_1 < \dots < i_{r'}$, $r' + 2m' = n$, $j_1 < j_2 < j_3 < \dots < j_{2m'}$, com s' escolhido de forma que a quantidade de elementos $\{j_1, \dots, j_{2m'}\}$ seja a menor possível. Considere a avaliação $x_{i_1} = \dots = x_{i_{r'}} = 1$ e $x_{j_l} = e_l$, onde $1 \leq l \leq 2m'$. Assim, obtemos

$$2^{m'}\alpha_{s'} e_1 \dots e_{2m'}.$$

Desde que h é uma identidade de $\mathcal{G}$, segue que $\alpha_{s'} = 0$, uma contradição. Provada a independência linear desse conjunto, temos que

$$2^{n-1} \leq c_n(\mathcal{G}) \leq \dim_F P_n(I) \leq 2^{n-1},$$

concluindo assim que $c_n(\mathcal{G}) = \dim_F P_n(I) = 2^{n-1}$ e consequentemente $Id(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$. □

Em 1971, Malcev [27] exibiu o T-ideal da álgebra UT_2 e calculou sua sequência de codimensões.

Teorema 1.3.5. *Seja UT_2 a álgebra das matrizes triangulares superiores de ordem 2 sobre F. Então $Id(UT_2) = \big\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \big\rangle_T$ e $c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$, para todo $n \geq 1$.*

Demonstração. Defina I o T-ideal gerado pelo polinômio $[x_1, x_2][x_3, x_4]$. Desde que $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ é uma identidade de UT_2, obtemos $I \subseteq Id(UT_2)$. Para a inclusão contrária, seja $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ uma identidade de UT_2, a qual podemos supor multilinear. Pela observação (1.1), f pode ser escrito, módulo I, como combinação linear de elementos da forma

$$x_{i_1} \ldots x_{i_{s_1}} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s_2}}], \tag{1.3}$$

onde $i_1 < \ldots < i_{s_1}$, $s_1 + s_2 = n$ e $i_1, \ldots, i_{s_1}, j_1, \ldots, j_{s_2} \in \{1, \ldots, n\}$.

Neste passo, observe que, para elementos $a_1, a_2, a_3, a_4 \in UT_2$, temos que

$$[[a_1, a_2], [a_3, a_4]] = [a_1, a_2, a_3, a_4] - [a_1, a_2, a_4, a_3].$$

Logo, desde que $[[y_1, y_2], [y_3, y_4]] \in I$, essa relação nos permite obter a seguinte identidade

$$[a_1, a_2, a_3, a_4] \equiv [a_1, a_2, a_4, a_3] \mod I.$$

Desse modo, para qualquer permutação $\sigma \in S_m$, $b_1, b_2, a_1, \ldots, a_m \in UT_2$, temos satisfeito

$$[b_1, b_2, a_1, \ldots, a_m] = [b_1, b_2, a_{\sigma(1)}, \ldots, a_{\sigma(m)}].$$

Utilizando a identidade de Jacobi e a anticomutatividade do comutador, podemos reordenar os três primeiros termos do comutador. Portanto, se denotarmos por S o conjunto das n-uplas $(i_1, \ldots, i_{s_1}, j_1, \ldots, j_{s_2})$ satisfazendo $i_1 < \ldots < i_{s_1}$, $j_1 > j_2, j_2 < \ldots < j_{s_2}$ e $s_1 + s_2 = n$, é possível ordenar os elementos do comutador em (1.3) de forma a obtermos

$$f = \sum_{s \in S} \alpha_s x_{i_1} \ldots x_{i_{s_1}} [x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s_2}}] \mod I.$$

Uma vez que f é uma identidade de UT_2, avaliando o polinômio acima em $x_1 = \ldots = x_n = 1$, temos que o coeficiente do monômio $x_1 \ldots x_n$ é zero. Mais que isso, afirmamos que todos os coeficientes α_s, $s \in S$, acima são nulos. Para isso, suponhamos por absurdo que exista um coeficiente $\alpha_{s'} \neq 0$, onde $s' = (r_1, \ldots, r_{s'_1}, t_1, \ldots, t_{s'_2}) \in S$ é uma n-upla satisfazendo $s'_1 + s'_2 = n$, $r_1 < \ldots < r_{s'_1}, t_1 > t_2$ e $t_2 < \ldots < t_{s'_2}$ escolhida de forma que $\{t_2, \ldots, t_{s'_2}\}$ possua o menor número possível de elementos. Considere a avaliação $x_{r_1} = \ldots = x_{r_{s'_1}} = 1$, $x_{t_1} = e_{12}$ e $x_{t_2} = \ldots = x_{t_{s'_2}} = e_{22}$. Com isso, obtemos $\alpha_{s'} e_{12} = 0$, consequentemente $\alpha_{s'} = 0$, o que contradiz a hipótese. Portanto, $f \equiv 0 \mod I$. Melhor dizendo, acabamos de concluir que $Id(UT_2) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$.

Para calcular a n-ésima codimensão da álgebra UT_2, notamos que

$$x_{i_1} \ldots x_{i_{s_1}} [x_k, x_{j_1}, \ldots, x_{j_{s_2}}]$$

é uma base de $P_n(UT_2)$, onde $i_1 < \ldots < i_{s_1}$, $k > j_1, j_1 < \ldots < j_{s_2}$, $s_1 + s_2 = n - 1$ e $i_1, \ldots, i_{s_1}, k, j_1, \ldots, j_{s_2} \in \{1, \ldots, n\}$. Basta então calcular quantos elementos há nessa base. Para isso, observe que, dada uma variável fixa x_k, podemos escolhê-la de n modos. Logo, para as $n-1$ variáveis restantes, temos duas possibilidades: ou estar fora do comutador, ou no comutador. Observe que ao escolher as variáveis que estão fora do comutador, essas já estarão ordenadas. Já para as variáveis que estão no comutador, essas também estarão ordenadas a menos de troca das variáveis x_k e x_{j_1}. Desse modo, contabilizamos $2^{n-1}n$ elementos dessa forma. Todavia, devemos eliminar o caso em que $k < j_1 < j_2 < \ldots < j_{s_2}$, isto é, o caso em que o índice da variável x_k é menor que todos os índices das demais variáveis de dentro do comutador. Nesse caso, basta notar que temos exatamente 2^n possibilidades, uma vez que a ordem das variáveis já estarão determinadas ao se escolher as variáveis que estarão dentro e as que estarão fora do comutador. Com isso, eliminamos também o caso em que o comutador contém somente uma variável. Finalmente, observe que a primeira contagem não contabiliza o caso em que todas as variáveis estão fora do comutador, já na segunda contagem esse caso é considerado, ou seja, devemos somar 2 a nossa contagem para contabilizar o único caso em que todas as variáveis estão fora do comutador. Portanto, concluímos que

$$c_n(UT_2) = 2^{n-1}n - 2^n + 2 = 2^{n-1}(n-2) + 2.$$

□

Observe que duas álgebras isomorfas determinam o mesmo T-ideal. Todavia, duas álgebras podem não ser isomorfas, mas possuírem o mesmo ideal das identidades polinomiais. Desse modo, considere a definição a seguir.

Definição 1.3.6. Dizemos que duas álgebras A e B são T**-equivalentes** se essas determinam o mesmo T-ideal, ou seja, $Id(A) = Id(B)$. Nesse caso, denotamos por $A \sim_T B$. Assim, duas álgebras T-equivalentes geram a mesma variedade.

Exemplo 1.3.7. Denotamos por M a seguinte F-subálgebra de UT_4

$$M := \left\{ \begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & d \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

Observe que $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv 0$ em M, assim $Id(UT_2) \subseteq Id(M)$. Por outro lado, considere $B = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}, e_{12}\}$, observe que B é, na verdade, uma subálgebra de M. Consideramos o isomorfismo de álgebras $\varphi : B \to UT_2$ dado por $\varphi(e_{11} + e_{44}) = e_{11}, \varphi(e_{22} + e_{33}) = e_{22}$ e $\varphi(e_{12}) = e_{12}$. Com isso, temos que $UT_2 \cong B \in var(M)$ e assim, $Id(M) \subseteq Id(UT_2)$. Consequentemente, temos $Id(M) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T = Id(UT_2)$. Logo, $var(M) = var(UT_2)$.

Note que, se A satisfaz todas as identidades polinomiais de uma álgebra B, então $P_n \cap Id(B) \subseteq P_n \cap Id(A)$. Consequentemente,

$$c_n(A) \leq c_n(B),$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Por outro lado, se $Id(B) \subseteq Id(A)$ e $c_n(B) = c_n(A)$, então $P_n \cap Id(B) \subseteq P_n \cap Id(A)$ e $\dim_F(P_n \cap Id(A)) = \dim_F(P_n \cap Id(B))$, para todo $n \geq 1$. Logo, $Id(A) = Id(B)$. Com isso, obtemos o seguinte resultado.

Proposição 1.3.8. Considere A e B duas PI-álgebras. Se $A \in var(B)$, então $c_n(A) \leq c_n(B)$, $\forall n \geq 1$. Além disso, se $Id(A) \subseteq Id(B)$ e $c_n(A) = c_n(B)$, $\forall n \geq 1$, então $A \sim_T B$.

Vimos anteriormente que A é uma PI-álgebra se, e somente se, a n-ésima codimensão de A é menor que $n!$, para algum $n \geq 1$. No entanto, Regev [31] melhorou a cota superior para a sequência de codimensões de uma PI-álgebra, mostrando que se A é uma PI-álgebra, então sua sequência de codimensões é **exponencialmente limitada**, isto é, existem constantes β, $\alpha > 0$ tais que $c_n(A) \leq \beta\alpha^n$, para todo $n \geq 1$. Neste passo, introduziremos algumas terminologias importantes em relação ao comportamento da sequência de codimensões.

Definição 1.3.9. 1. Dizemos que $c_n(A)$ é **polinomialmente limitada** se existem constantes α, $t \geq 0$ tais que $c_n(A) \leq \alpha n^t$, $\forall n \geq 1$.

2. A álgebra A tem **crescimento polinomial** da sequência de codimensões se $c_n(A)$ é polinomialmente limitada.

3. Uma variedade $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se essa é gerada por uma álgebra de crescimento polinomial da sequência de codimensões.

Exemplo 1.3.10. A par dos Exemplos 1.3.2 e 1.3.3, álgebras nilpotentes e álgebras comutativas tem crescimento polinomial.

Observe que a sequência de codimensões de algumas variedades não podem ser limitada por uma função polinomial, como ocorre com as variedades $var(UT_2)$ e $var(\mathcal{G})$.

Definição 1.3.11. Dizemos que uma álgebra A tem **crescimento exponencial** da sequência de codimensões se existe uma constante $\alpha \geq 2$ tal que $c_n(A) \geq \alpha^n$. Além disso, uma variedade tem crescimento exponencial se a álgebra que gera essa variedade tem crescimento exponencial.

Note que, em razão da Proposição 1.3.8, uma álgebra de crescimento exponencial não pode pertencer a uma variedade de crescimento polinomial.

Neste passo, considere A uma álgebra sobre um corpo F de característica zero e K uma extensão de F. Vimos que as identidades de A são preservadas quando consideramos as identidades de $A \otimes K$ como F-álgebra, isto é, $Id_F(A) = Id_F(A \otimes K)$. Note ainda que podemos ver a álgebra $A \otimes K$ como uma K-álgebra, definindo o seguinte produto $\beta(a \otimes k) = a \otimes \beta k$.

Naturalmente, podemos nos perguntar qual a relação entre a n-ésima codimensão de A como F-álgebra e a n-ésima codimensão de $A \otimes K$ como K-álgebra. Instigados por isso, para todo $n \geq 1$, definimos

$$c_n^K(A \otimes K) = \dim_K \frac{P_n^K}{P_n^K \cap Id_K(A \otimes K)},$$

onde P_n^K denota o conjunto dos polinômios multilineares de grau n com coeficientes em K e $Id_K(A \otimes K)$ as identidades de $A \otimes K$ com coeficientes em K. Respondendo ao nosso questionamento, apresentamos a proposição abaixo, cuja demonstração pode ser consultada em [20].

Proposição 1.3.12. Sejam A uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero e K uma extensão de F. Consideramos a K-álgebra $A \otimes K$. Então, $c_n^K(A \otimes K) = c_n^F(A)$, para todo $n \geq 1$.

O resultado acima nos diz que, para provar resultados a respeito da sequência de codimensões de uma F-álgebra A, podemos considerá-la, sem perda de generalidade, sobre um corpo algebricamente fechado, pois podemos tomar K como o fecho algébrico de F que a sequência de codimensões (sobre K) será a mesma.

1.4 O Teorema de Wedderburn-Malcev e o PI-expoente

Nesta seção, temos como objetivo definir o radical de Jacobson e apresentar a decomposição de Wedderburn-Malcev para álgebras de dimensão finita. Para isso, apresentamos a definição de álgebras simples e semissimples e ilustraremos esses novos conceitos. Finalizamos com uma breve discussão a respeito do PI-expoente.

Lembramos que um anel R é **simples** se $R^2 \neq \{0\}$ e R não possui ideais bilaterais próprios não nulos. Além disso, se todo ideal à esquerda B de R é um somando direto de R, ou seja, existe um ideal à esquerda B' de R tal que $R = B \oplus B'$, então R é dito **semissimples**. Ademais, uma álgebra A é simples (resp. semissimples) se essa é um anel simples (resp. semissimples).

Exemplo 1.4.1. $M_n(D)$ é uma álgebra simples, onde D é um anel de divisão.

Exemplo 1.4.2. Considere a álgebra $M_n(F \oplus cF)$, onde $c^2 = 1$. Vimos no Exemplo 1.1.10 que essa álgebra pode ser decomposta em soma direta de dois ideais do seguinte modo:

$$M_n(F \oplus cF) = \left(\frac{1+c}{2} M_n(F)\right) \oplus \left(\frac{1-c}{2} M_n(F)\right).$$

Observamos também que $M_n(F \oplus cF) \cong M_n(F) \oplus cM_n(F)$. Desse modo, temos que $M_n(F \oplus cF)$ não é uma álgebra simples, mas é semissimples, uma vez que seus únicos ideais à esquerda próprios não triviais são $\frac{1+c}{2} M_n(F)$ e $\frac{1-c}{2} M_n(F)$ e um é somando direto do outro.

Observação 1.4.3. Se A é uma álgebra simples, então A não é nilpotente. De fato, suponha que A é nilpotente de índice n, isto é, $A^n = \{0\}$ e $A^{n-1} \neq \{0\}$. Desde que $AA^{n-1} = A^{n-1}A = \{0\}$, segue que A^{n-1} é um ideal de A. Porém, como A é simples, temos ou $A^{n-1} = \{0\}$ ou $A^{n-1} = A$. Desde que o primeiro caso não pode ocorrer, temos no segundo caso $A^2 = \{0\}$, uma contradição.

O teorema seguinte, conhecido como Teorema de Wedderburn-Artin, estabelece uma caracterização de álgebras semissimples. A demonstração pode ser consultada em [28].

Teorema 1.4.4 (Wedderburn-Artin)**.** *Seja A uma F-álgebra semissimples de dimensão finita. Então A é isomorfa a uma soma direta de um número finito de álgebras de matrizes com coeficientes sobre anéis de divisão, ou seja:*

$$A \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \ldots \oplus M_{n_s}(D_s),$$

onde cada D_i é uma álgebra de divisão sobre F.

Em particular, se A é uma álgebra simples de dimensão finita, então $A \cong M_n(D)$, onde D é uma álgebra de divisão. Além disso, se F é um corpo algebricamente fechado e A é uma F-álgebra sob as hipóteses do Teorema de Wedderburn-Artin, então $D_i \cong F$, para todo $i = 1, \ldots, s$, ou seja, A é isomorfa a uma soma direta de um número finito de álgebras de matrizes com coeficientes em F.

Finalmente, definimos o **radical de Jacobson** de uma álgebra de dimensão finita A como o seu maior ideal nilpotente. Nesse caso, denotaremos por $J(A)$ o seu radical. Observamos que, se A é uma álgebra nilpotente de dimensão finita, então $J(A) = A$. Por outro lado, se A é uma álgebra unitária de dimensão finita, então $J(A)$ é um ideal próprio.

Exemplo 1.4.5. Considere $A = UT_n$, então $J(A)$ consiste das matrizes triangulares estritamente superiores.

É possível verificar que $J(A)$ possui outras definições equivalentes e pode ser definido para álgebras de dimensão qualquer. O leitor interessado pode verificar em [8].

A seguir, apresentamos o Teorema de Wedderburn-Malcev, o qual apresenta uma importante decomposição para álgebras de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Enunciaremos também, posteriormente, a versão deste teorema para álgebras com estruturas adicionais. A demonstração poderá ser consultada em [20].

Teorema 1.4.6 (Wedderburn-Malcev). *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero e seja $J(A)$ seu radical de Jacobson. Então, existe uma subálgebra semissimples maximal B tal que $A = B \dotplus J(A)$.*

Tendo em vista o Teorema de Wedderburn-Artin, se $char(F) = 0$ e A é uma F-álgebra de dimensão finita, então podemos escrever $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \dotplus J(A)$, onde $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ é soma direta de matrizes sobre anéis de divisão.

Ilustramos agora com os exemplos abaixo.

Exemplo 1.4.7. Seja F um corpo de característica zero e UT_n a álgebra de matrizes triangulares superiores. Então, uma decomposição de Wedderburn-Malcev de UT_n é dada por $B \dotplus J(A)$, onde $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$ com $B_i = \text{span}_F\{e_{ii}\} \cong F$, para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ e $J(A) = \text{span}_F\{e_{ij} \mid 1 \leq i < j \leq n\}$.

Exemplo 1.4.8. Considere a álgebra

$$B = \begin{pmatrix} F + cF & F + cF \\ 0 & F \end{pmatrix}.$$

Uma decomposição de Wederburn-Malcev de B é dada por

$$B = \frac{1+c}{2}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \frac{1-c}{2}\begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & F+cF \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Concluímos essa seção com uma breve discussão a respeito do PI-expoente de uma PI-álgebra. Para isso, relembramos que se A é uma PI-álgebra, então $c_n(A)$ é exponencialmente limitada. Assim sendo, $\sqrt[n]{c_n(A)}$ é limitada superiormente e inferiormente. De interesse especial, está o caso em que os limites superior e inferior coincidem.

Sob essa discussão, definimos o **PI-expoente** (ou simplesmente **expoente**) de uma PI-álgebra A como o limite

$$exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Quando $\mathcal{V} = var(A)$, dizemos que $exp(\mathcal{V}) = exp(A)$. Observe que, se $B \in \mathcal{V}$, então $exp(B) \leq exp(\mathcal{V})$.

Exemplo 1.4.9. Pelos Teoremas 1.3.4 e 1.3.5, sabemos que $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$ e $c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n-2)+2$, para todo $n \geq 1$, então

$$exp(\mathcal{G}) = exp(UT_2) = 2.$$

Em 1999, Giambruno e Zaicev provaram que, sobre um corpo de característica zero, o PI-expoente de uma PI-álgebra associativa existe e é um inteiro não negativo. De fato, eles mostraram em [18] e [19] o resultado seguinte.

Teorema 1.4.10. *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero. Então existe um inteiro q e constantes C_1, C_2, r_1, r_2 tais que $C_1 > 0$ e*

$$C_1 n^{r_1} q^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{r_2} q^n. \tag{1.4}$$

Em particular, temos $exp(A) = q$.

Além disso, exibiram uma forma de determinar tal inteiro no caso em que a álgebra A tem dimensão finita. Para isso, considere F um corpo de característica zero e $A_1 \oplus \ldots \oplus A_k \dotplus J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A. Ainda, considere todos os produtos

$$A_{i_1} J A_{i_2} J \ldots A_{i_{r-1}} J A_{i_r} \neq \{0\},$$

onde A_{i_s}, $s = 1, \ldots, r$, são álgebras distintas do conjunto $\{A_1, \ldots, A_k\}$, $r = 1, 2, \ldots, k$ e $J := J(A)$. Definimos

$$\tilde{q} := \max \dim_F (A_{i_1} \oplus \ldots \oplus A_{i_r}).$$

Os autores mostraram nessa situação que $exp(A)$ é o inteiro não negativo $\tilde{q}$ acima. Analisamos esse resultado com o exemplo a seguir.

Exemplo 1.4.11. Considere F um corpo algebricamente fechado de característica zero e a álgebra UT_n. Utilizando a notação do Exemplo 1.4.7, $B_1 J B_2 J \dots J B_n \neq 0$. A partir da discussão anterior, segue que $exp(UT_n) = \dim_F(B_1 \oplus \dots \oplus B_n) = n$.

Finalizamos esta seção apresentando uma primeira caracterização das variedades de crescimento polinomial a partir do PI-expoente.

Teorema 1.4.12. *Seja A uma PI-álgebra. Então A tem crescimento polinomial da sequência de codimensões se, e somente se, $exp(A) \leq 1$.*

Demonstração. Observe que se existem constantes $\alpha > 0$ e t tais que $c_n(A) \leq \alpha n^t$, então

$$exp(A) \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha n^t} = 1.$$

Na direção contrária, consideramos $exp(A) = q \leq 1$, onde q satisfaz a relação (1.4). Assim,

$$c_n(A) \leq C_2 n^{r_2} \leq C_2 n^k,$$

onde k é um inteiro positivo maior que r_2. Desse modo, A tem crescimento polinomial.

□

Nos próximos capítulos, estenderemos o resultado apresentado para álgebras munidas de estruturas adicionais.

1.5 Variedades de crescimento polinomial

Esta seção será a grande motivação para este trabalho. Apresentaremos o resultado provado por Kemer em [24], onde exibiu condições necessárias e suficientes para fornecer uma caracterização de variedades de crescimento polinomial da sequência de codimensões via exclusão de álgebras da variedade.

Antes de partirmos para os resultados de caracterização, enunciamos o teorema abaixo, que nos dará condições necessárias e suficientes para trabalharmos com uma variedade gerada por uma álgebra de dimensão finita.

Teorema 1.5.1. *[20, Teorema 7.1.4] Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo F de característica zero. São equivalentes:*

1. *$\mathcal{V} = var(A)$, para alguma F-álgebra A de dimensão finita;*

2. *$\mathcal{V} = var(A)$, para alguma F-álgebra A finitamente gerada;*

3. *$\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade standard;*

4. *$\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade de Capelli;*

5. *$\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$.*

Observe que, se estamos trabalhando com uma variedade de crescimento polinomial, a propriedade 5 do teorema acima é imediatamente satisfeita. Logo, nesse caso, nosso estudo se resume às variedades geradas por uma álgebra de dimensão finita.

Como consequência dos Lemas 2 e 3 do artigo [19], Giambruno e Zaicev mostraram como o crescimento da álgebra nos permite obter resultados da decomposição de Wedderburn-Malcev da álgebra.

Teorema 1.5.2. *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A. A álgebra A tem crescimento polinomial se, e somente se, para todo i, $A_i \cong F$ e $A_iJ(A)A_j = 0$, para todo $j \neq i$.*

Demonstração. Suponha $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ polinomialmente limitada. Pelo Teorema 1.4.6, podemos tomar

$$A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dot{+} J(A)$$

uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A onde $A_i \cong M_{k_i}(F)$, para $i = 1, \ldots, m$. Observe que, se $k_i > 1$, para algum $i = 1, \ldots, m$, pelo Exemplo 1.1.9, A_i contém uma subálgebra isomorfa à UT_2. Todavia, desde que $exp(UT_2) = 2$, segue do Teorema 1.4.12 que $UT_2 \notin var(A)$. Logo, $k_i = 1$ e $A_i \cong F$, $\forall i = 1, \ldots, m$. Ademais, se $A_iJ(A)A_j \neq 0$ para algum $j \neq i$, teríamos que $exp(A)$ é pelo menos 2, uma contradição.

Reciprocamente, se $\dim_F A_i = 1$, para todo i, e $A_iJ(A)A_j = 0$, para todo $j \neq i$, então $exp(A) = \dim_F A_i = 1$. Pelo Teorema 1.4.12, A tem crescimento polinomial.

□

Dada uma variedade $\mathcal{V}$, estamos interessados em saber quais álgebras devemos excluir da variedade para garantirmos que essa tenha crescimento polinomial. Para obtermos esse resultado, apresentamos o lema seguinte.

Lema 1.5.3. *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e $A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A. Se existem $l, k \in \{1, \ldots, m\}$, com $l \neq k$ e $A_lJ(A)A_k \neq \{0\}$, então $UT_2 \in var(A)$.*

Demonstração. Tomamos A_l e A_k, com $l \neq k$, tais que $A_l J(A) A_k \neq 0$. Dessa forma, existe $j \in J(A)$ tal que $i_1 j i_2 \neq 0$, onde i_1 e i_2 são as unidades de A_l e A_k, respectivamente. Afirmamos que i_1, i_2 e $i_1 j i_2$ são linearmente independentes. De fato, considere a combinação linear

$$\alpha i_1 + \beta i_2 + \gamma i_1 j i_2 = 0, \text{ com } \alpha, \beta \text{ e } \gamma \in F,$$

usando o fato que $i_1 i_2 = i_2 i_1 = 0$, obtemos $\alpha = \beta = \gamma = 0$.

Consideramos então $B = \text{span}_F\{i_1, i_2, i_1 j i_2\}$. Desde que o subespaço B é fechado para a multiplicação, segue que B é uma F-subálgebra de A. Seja $\phi : B \to UT_2$ o homomorfismo de F-álgebras definido por:

$$i_1 \mapsto e_{11}, \qquad i_2 \mapsto e_{22}, \qquad i_1 j i_2 \mapsto e_{12},$$

onde e_{ij} denotam as matrizes elementares. Observamos que ϕ é, na verdade, um isomorfismo de álgebras. Portanto, $UT_2 \in var(A)$, como gostaríamos. □

Em [24] Kemer caracterizou, através da exclusão de álgebras, as variedades de crescimento polinomial. Apresentaremos esse resultado abaixo.

Teorema 1.5.4 (Kemer)**.** *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade de álgebras sobre um corpo F de característica zero. Então $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, $UT_2, \mathcal{G} \notin \mathcal{V}$.*

Demonstração. Inicialmente, note que se $\mathcal{V} = var(0)$, o resultado é imediato. Consideramos então $\mathcal{V}$ uma variedade não trivial.

Suponha que existam constantes α e $t > 0$ tais que $c_n(\mathcal{V}) \leq \alpha n^t$. Pelos Teoremas 1.3.4, 1.3.5 e a Proposição 1.3.8 segue que $\mathcal{G}$ e UT_2 não pertencem à $\mathcal{V}$.

Reciprocamente, suponha que $UT_2, \mathcal{G} \notin \mathcal{V}$. Desde que $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$, pelo Teorema 1.5.1, temos que $\mathcal{V} = var(A)$ para alguma F-álgebra de dimensão finita A. Desse modo, podemos considerar $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \dotplus J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A. Em decorrência da Proposição 1.3.12, podemos supor que F é algebricamente fechado e assim $B_i \cong M_{n_i}(F)$, $1 \leq i \leq m$. Observe agora que, se $n_i > 1$ para algum $1 \leq i \leq m$, pelo Exemplo 1.1.9, A contém uma F-subálgebra isomorfa a UT_2, um absurdo. Logo, temos que $B_i \cong F$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Desde que $UT_2 \notin \mathcal{V}$, pelo Teorema 1.5.3, obtemos $B_i J(A) B_k = 0$, $\forall i, k \in \{1, \ldots, m\}$ com $i \neq k$. Logo, pelo Teorema 1.5.2, concluímos que $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial. □

Antes de apresentarmos alguns corolários do teorema acima, consideramos a seguinte definição.

Definição 1.5.5. Dizemos que uma variedade $\mathcal{V}$ tem **crescimento quase polinomial** se $\mathcal{V}$ tem crescimento exponencial, mas qualquer subvariedade própria de $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial.

Como consequência do Teorema de Kemer, obtemos os seguintes corolários.

Corolário 1.5.6. $var(UT_2)$ e $var(\mathcal{G})$ são as únicas variedades de crescimento quase polinomial.

Demonstração. De fato, já vimos que as álgebras UT_2 e $\mathcal{G}$ geram variedades de crescimento exponencial. Seja então $\mathcal{U}$ uma subvariedade própria de uma dessas, supomos $\mathcal{U} \subsetneq var(UT_2)$. Note que assim $UT_2 \notin \mathcal{U}$. Desde que $Id(UT_2) \subsetneq Id(\mathcal{U})$, segue que $\mathcal{G} \notin \mathcal{U}$. Logo, pelo Teorema de Kemer, isso implica que $\mathcal{U}$ tem crescimento polinomial.

Seja agora $\mathcal{V}$ uma variedade de crescimento quase polinomial. Pela caracterização apresentada por Kemer, não podemos ter ambas UT_2 e $\mathcal{G}$ excluídas da variedade $\mathcal{V}$. Assim, consideramos o caso em que $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$ e $UT_2 \in \mathcal{V}$. Desse modo, $var(UT_2) \subseteq \mathcal{V}$. Uma vez que $\mathcal{V}$ tem crescimento quase polinomial e $var(UT_2)$ tem crescimento exponencial da sequência de codimensões, essa inclusão não pode ser própria, ou seja, $\mathcal{V} = var(UT_2)$. Na segunda situação, ou seja, quando $\mathcal{G} \in \mathcal{V}$ temos $\mathcal{V} = var(\mathcal{G})$. $\square$

Corolário 1.5.7. Não existe variedade de crescimento intermediário, isto é, a sequência de codimensões de uma álgebra cresce exponencialmente ou é polinomialmente limitada.

Demonstração. De fato, se $\mathcal{V}$ é uma variedade gerada por uma álgebra A, então um dos seguintes casos ocorre: ou $\mathcal{G}, UT_2 \notin \mathcal{V}$ e nesse caso $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial da sequência de codimensões; ou pelo menos uma das duas álgebras $\mathcal{G}$ ou UT_2 pertence à $\mathcal{V}$ e nesse caso a variedade tem crescimento exponencial da sequência de codimensões. $\square$

Capítulo 2

φ-álgebras

Com o objetivo de apresentar os resultados que estendem a caracterização demonstrada por Kemer, neste capítulo definiremos o conceito de φ-álgebra, apresentando os objetos análogos ao caso anterior para álgebras munidas de estruturas adicionais e relacionando-os com os já vistos. Por fim, dedicaremos nossos esforços em classificar, a menos de isomorfismo, as álgebras φ-simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero.

2.1 Definições e exemplos

Apresentamos inicialmente os conceitos de álgebras com involução e superálgebras, seguidos de alguns exemplos.

Definição 2.1.1. Seja A uma F-álgebra. Uma aplicação F-linear $* : A \to A$ é chamada **involução** para a álgebra A se, para todos $a, b \in A$ temos satisfeito

1. $(ab)^* = b^*a^*$
2. $(a^*)^* = a$.

Dizemos que A é uma **álgebra com involução** (ou **$*$-álgebra**) se essa possui uma involução.

Uma aplicação F-linear satisfazendo a condição 1 da definição anterior é dita **antiautomorfismo**. Observe que uma involução determina um antiautomorfismo de ordem no máximo 2. Por outro lado, todo antiautomorfismo de ordem no máximo 2 definido em uma álgebra, torna a mesma uma $*$-álgebra. Exemplificamos esses conceitos definindo as principais involuções e $*$-álgebras que serão abordadas ao longo deste trabalho.

Exemplo 2.1.2. Se A é uma álgebra comutativa, então a aplicação identidade $\varphi(a) = a$, $\forall a \in A$, é uma involução em A, chamada de **involução trivial**. Nesse caso, $*$ é um antiautomorfismo de ordem 1.

Em contrapartida, se φ é um antiautomorfismo de ordem 1, então A é uma álgebra comutativa. Assim sendo, as únicas álgebras munidas da involução trivial são as álgebras comutativas.

Exemplo 2.1.3. Observe que se A é uma álgebra unitária, então

$$1 = (1^*)^* = (1^*1)^* = 1^*1 = 1^*.$$

Em particular, se $A = F$, então essa admite apenas a involução trivial.

Exemplo 2.1.4. Em $M_n(F)$ temos definida a involução

$$\begin{aligned} t : M_n(F) &\to M_n(F) \\ (a_{ij}) &\mapsto (a_{ji}), \end{aligned}$$

intitulada **involução transposta**.

Exemplo 2.1.5. Seja $s : M_{2n}(F) \to M_{2n}(F)$ dada por

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^s = \begin{pmatrix} D^t & -B^t \\ -C^t & A^t \end{pmatrix}$$

onde $A, B, C, D \in M_n(F)$ e t é a aplicação transposta. O mapa s é uma involução, denominada **involução simplética**, a qual está definida apenas para matrizes de ordem par.

Exemplo 2.1.6. Sejam D a F-álgebra comutativa $F \oplus F$ e $* : D \to D$ a aplicação dada por $(a, b)^* = (b, a)$. Assim definida, $*$ é uma involução em D denominada **involução troca**. Denotamos por D_* a $*$-álgebra D munida dessa involução.

Exemplo 2.1.7. Em UT_n, consideramos a aplicação $*$ dada pela reflexão ao longo da diagonal secundária. Por exemplo, para $B \in UT_4$, temos

$$B^* = \begin{pmatrix} a & e & f & g \\ 0 & b & h & i \\ 0 & 0 & c & j \\ 0 & 0 & 0 & d \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} d & j & i & g \\ 0 & c & h & f \\ 0 & 0 & b & e \\ 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Essa é uma involução na álgebra UT_n denominada **involução reflexão**. Em particular, denotamos por M_* a álgebra $M := F(e_{11} + e_{44}) + F(e_{22} + e_{33}) + Fe_{12} + Fe_{34}$ do Exemplo 1.3.7 com involução reflexão.

Se A é uma $*$-álgebra e B uma subálgebra dessa, dizemos que B possui **involução induzida** se $*$ é uma involução de B pela restrição, ou seja, $B^* = B$. Nesse caso, dizemos que B é uma $*$-subálgebra de A.

Nosso próximo passo consiste em escrever uma $*$-álgebra A como soma direta de dois subespaços. Para isso, dizemos que $a \in A$ é um **elemento simétrico**, se $a^* = a$. Por outro lado, se $a^* = -a$, dizemos que esse é um **elemento antissimétrico**. Além disso, denotamos por

$$A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\} \text{ e } A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}$$

os subespaços dos elementos simétricos e antissimétricos de A, respectivamente. De imediato, é notório que $A^+ \cap A^- = \{0\}$ e, se $char\, F \neq 2$ então, para todo $a \in A$, podemos escrever

$$a = \underbrace{\frac{a + a^*}{2}}_{\in A^+} + \underbrace{\frac{a - a^*}{2}}_{\in A^-}.$$

Consequentemente, podemos escrever $A = A^+ \dot{+} A^-$.

Lembramos que, para uma álgebra A, o produto de Jordan entre dois elementos a e b é dado por $a \circ b = ab + ba$.

Observação 2.1.8. Sejam $a_1, a_2 \in A^+$ e $b_1, b_2 \in A^-$, então

(*i*) $[a_1, a_2] \in A^-$, $[b_1, b_2] \in A^-$ e $[a_1, b_1] \in A^+$;

(*ii*) $a_1 \circ a_2 \in A^+$, $b_1 \circ b_2 \in A^+$ e $a_1 \circ b_1 \in A^-$.

De fato, para o primeiro item, observe que, se $a_1, a_2 \in A^+$, então

$$[a_1, a_2]^* = (a_1a_2)^* - (a_2a_1)^* = a_2^*a_1^* - a_1^*a_2^* = a_2a_1 - a_1a_2 = -[a_1, a_2].$$

Os demais itens seguem de forma análoga.

A seguir definiremos outra estrutura sob a qual estamos interessados.

Definição 2.1.9. Dizemos que uma F-álgebra A é uma **superálgebra** se existem dois subespaços vetoriais $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ tais que

$$A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)},$$

$$A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)} \quad \text{e} \quad A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}.$$

Nesse caso, denotamos a graduação de A por $(A^{(0)}, A^{(1)})$ e chamamos os subespaços $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ de **componentes homogêneas** de A, onde $A^{(0)}$ é a **componente par** e $A^{(1)}$ a **componente ímpar**. Dizemos que um elemento de $A^{(0)}$ é um **elemento par**, e um elemento de $A^{(1)}$ é um **elemento ímpar**. Cientes disso, ilustraremos com alguns exemplos.

Exemplo 2.1.10. Toda álgebra A é uma superálgebra com **graduação trivial** $A^{(0)} = A$ e $A^{(1)} = \{0\}$.

Exemplo 2.1.11. A álgebra $\mathcal{G}$ com **graduação canônica** $\mathcal{G}^{(0)}$ e $\mathcal{G}^{(1)}$ definida no Exemplo 1.1.20 é uma superálgebra. Nesse contexto, denotaremos por $\mathcal{G}$ a álgebra de Grassmann com graduação trivial e por $\mathcal{G}^{gr}$ a álgebra de Grassmann com graduação canônica.

Exemplo 2.1.12. Considere a álgebra $D = F \oplus F$ e os subespaços $D^{(0)} = F(1,1)$ e $D^{(1)} = F(1,-1)$. Observe que,

$$D^{(0)}D^{(0)} + D^{(1)}D^{(1)} \subset D^{(0)} \quad \text{e} \quad D^{(0)}D^{(1)} + D^{(1)}D^{(0)} \subset D^{(1)}.$$

Além disso, todo elemento de D pode ser escrito como soma de elementos de $D^{(0)}$ e $D^{(1)}$ do seguinte modo:

$$(a,b) = \underbrace{\left(\frac{a+b}{2}, \ \frac{a+b}{2}\right)}_{\in D^{(0)}} + \underbrace{\left(\frac{a-b}{2}, \ \frac{-(a-b)}{2}\right)}_{\in D^{(1)}}.$$

Logo, a álgebra D com graduação $(D^{(0)}, D^{(1)})$ definida acima é uma superálgebra. Desse modo, denotaremos por D^{gr} a álgebra D com graduação não trivial dada por $(F(1,1), F(1,-1))$.

Exemplo 2.1.13. Considere a álgebra UT_2 com os subespaços $UT_2^{(0)} = Fe_{11} + Fe_{22}$ e $UT_2^{(1)} = Fe_{12}$. Desse modo, UT_2 é uma superálgebra com **graduação canônica** $(UT_2^{(0)}, UT_2^{(1)})$ assim definida. Logo, tratando-se de superálgebras, denotamos simplesmente por UT_2 a álgebra UT_2 com graduação trivial e por UT_2^{gr} a mesma com graduação canônica.

Exemplo 2.1.14. Considere a álgebra $M_n(F)$ e inteiros k, l com $n \geq k \geq l \geq 0$ e $k + l = n$. Podemos reescrever $M_n(F)$ como

$$\left\{ \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \mid P \in M_k(F), Q \in M_{k\times l}(F), R \in M_{l\times k}(F) \text{ e } S \in M_l(F) \right\}.$$

Definimos os subespaços

$$M_{k,l}(F)^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & S \end{pmatrix} \mid P \in M_k(F) \text{ e } S \in M_l(F) \right\} \quad \text{e}$$

$$M_{k,l}(F)^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & Q \\ R & 0 \end{pmatrix} \mid R \in M_{l\times k}(F) \text{ e } Q \in M_{k\times l}(F) \right\}.$$

Temos que, $(M_{k,l}(F)^{(0)}, M_{k,l}(F)^{(1)})$, $n \geq k \geq l \geq 0$ e $k + l = n$, são graduações para a álgebra $M_n(F)$. Assim, quando $l > 0$, denotamos por $M_{k,l}(F)$ a álgebra $M_n(F)$ com **graduação não trivial**. Quando $l = 0$, observe que $M_{k,l}(F)^{(1)} = \{0\}$ e assim temos $M_n(F)$ uma superálgebra com graduação trivial.

Exemplo 2.1.15. A álgebra $M_n(F \oplus cF)$, onde $c^2 = 1$ é uma superálgebra com graduação $M_n(F \oplus cF)^{(0)} = M_n(F)$ e $M_n(F \oplus cF)^{(1)} = cM_n(F)$.

Veremos mais tarde que essas últimas álgebras desempenham um papel importante na classificação das superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero.

A próxima proposição nos permitirá estabelecer uma nomenclatura comum para superálgebras e $*$-álgebras.

Proposição 2.1.16. Se A é uma superálgebra então existe um automorfismo φ de A de ordem no máximo 2 induzido pela superestrutura de A. Reciprocamente, se existe um automorfismo φ de A de ordem no máximo 2, então A é uma superálgebra com a graduação induzida por φ.

Demonstração. Considere $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ uma superálgebra. Para todo $a \in A$, escrevemos $a = a_0 + a_1$, onde $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$, e definimos $\varphi : A \to A$, dado por

$$a \mapsto a_0 - a_1.$$

É de imediato que $\varphi \in Aut(A)$ e φ^2 é a aplicação identidade.

Por outro lado, seja φ um automorfismo de A de ordem no máximo 2. Definimos os subespaços

$$A^{(0)} = \{a \in A \mid \varphi(a) = a\} \text{ e } A^{(1)} = \{a \in A \mid \varphi(a) = -a\}$$

e observamos que $A^{(0)} \cap A^{(1)} = \{0\}$, $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$ e $A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}$. Além disso, para todo $a \in A$ e $char\, F \neq 2$, podemos escrever $a = a_0 + a_1$, onde

$$a_0 = \frac{a + \varphi(a)}{2} \text{ e } a_1 = \frac{a - \varphi(a)}{2}.$$

Desde que φ é um automorfismo de ordem no máximo 2, segue que $\varphi(a_0) = a_0$ e $\varphi(a_1) = -a_1$. Assim, $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$. Portanto, concluímos que φ induz uma superestrutura em A da forma $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$, como gostaríamos.

$\square$

Em particular, observe que a aplicação identidade induz a graduação trivial em A. Além disso, a demonstração anterior nos diz que $A^{(0)}$ é exatamente o espaço associado ao autovalor 1 e $A^{(1)}$ o espaço associado ao autovalor -1.

Seja A uma superálgebra com um automorfismo φ induzido pela superestrutura e B uma subálgebra de A. Dizemos que B é uma subálgebra graduada com **graduação induzida** de A se essa pode ser regrada com uma superestrutura oriunda da graduação de A dada por $(A^{(0)} \cap B, A^{(1)} \cap B)$. Nesse caso, temos que B é invariante pelo automorfismo φ, isto é, $B^{\varphi} = B$.

Por outro lado, observe que se $B^{\varphi} = B$, então para $b = b_0 + b_1 \in B$ com $b_0 \in A^{(0)}$ e $b_1 \in A^{(1)}$, temos

$$b_0 = \frac{b + \varphi(b)}{2} \in B \text{ e } b_1 = \frac{b - \varphi(b)}{2} \in B,$$

isto é, B pode ser escrita como soma direta $B = (A^{(0)} \cap B) \dot{+} (A^{(1)} \cap B)$, ou seja, B é uma subálgebra graduada de A com graduação induzida.

Chamamos de **φ-álgebra** uma álgebra A munida de um automorfismo ou um antiautomorfismo φ de ordem no máximo 2. Assim, qualquer superálgebra ou qualquer álgebra com involução, será uma φ-álgebra. Além disso, dizemos que duas φ-álgebras são isomorfas quando existe um isomorfismo de álgebras que se comporta bem com a φ-estrutura de A, conforme abaixo.

Definição 2.1.17. Sejam A uma álgebra com involução $*$ e B uma álgebra com involução $\diamond$. Um isomorfismo (de álgebras com involução) de A em B é um isomorfismo de álgebras $\psi : A \to B$ tal que

$$\psi(a^*) = \psi(a)^{\diamond}, \forall a \in A.$$

Definição 2.1.18. Sejam $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ e $B = B^{(0)} \dot{+} B^{(1)}$ superálgebras sobre um corpo F. Um isomorfismo (de superálgebras) de A em B é um isomorfismo de álgebras $\psi : A \to B$ que preserva graduação, ou seja,

$$\psi(A^{(0)}) = B^{(0)} \quad \text{e} \quad \psi(A^{(1)}) = B^{(1)}.$$

Exemplo 2.1.19. Desde que, para $P \in M_k(F), Q \in M_{k\times l}(F), R \in M_{l\times k}(F)$ e $S \in M_l(F)$, o homomorfismo $\psi : M_{k,l}(F) \to M_{l,k}(F)$ dado por

$$\begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} S & R \\ Q & P \end{pmatrix}$$

é um isomorfismo de superálgebras. Desse modo, poderíamos ter tomado $l \geq k$ no Exemplo 2.1.14.

Exemplo 2.1.20. A álgebra $M_2(F)$ com involução simplética contém uma subálgebra com involução induzida isomorfa a D_*. De fato, considere o monomorfismo $\psi : D_* \to M_2(F)$ dado por $\psi((a,b)) = ae_{11} + be_{22}$. Desde que

$$\psi((a,b)^*) = \psi((b,a)) = be_{11} + ae_{22} = (ae_{11} + be_{22})^s = \psi((a,b))^s,$$

temos que ψ é um monomorfismo de $*$-álgebras.

Exemplo 2.1.21. A álgebra $(M_n(F), t)$, $n \geq 2$, contém uma subálgebra isomorfa a $(M_2(F), t)$. Para isso, basta considerar o monomorfismo $\phi : M_2(F) \to M_n(F)$ dado por

$$\phi(e_{11}) = e_{11}, \quad \phi(e_{22}) = e_{nn}, \quad \phi(e_{21}) = e_{n1} \quad \phi(e_{12}) = e_{1n}.$$

Como esperado, $(M_{2n}(F), s)$, $n \geq 1$, contém uma subálgebra isomorfa à $(M_2(F), s)$. Para esse caso, basta considerar o monomorfismo $\psi : M_2(F) \to M_{2n}(F)$ dado por

$$\psi(e_{11}) = e_{11} + e_{nn}, \quad \psi(e_{22}) = e_{n+1\,n+1} + e_{2n\,2n},$$

$$\psi(e_{21}) = e_{2n\,1} + e_{n+1\,n}, \quad \psi(e_{12}) = e_{1\,2n} + e_{n\,n+1}.$$

2.2 φ-identidades polinomiais e φ-codimensões

Nesta seção, buscamos estender a linguagem usada em álgebras ordinárias para φ-álgebras. Assim sendo, definiremos as φ-identidades polinomiais e a sequência de φ-codimensões.

Se A é uma φ-álgebra, podemos escrever $A = A_\varphi^+ \dotplus A_\varphi^-$, onde $A_\varphi^+ = \{a \in A \mid a^\varphi = a\}$ e $A_\varphi^- = \{a \in A \mid a^\varphi = -a\}$. Desse modo, se φ é um automorfismo de ordem no máximo 2, ou seja, se A é uma superálgebra, então $A_\varphi^+ = A^{(0)}$ e $A_\varphi^- = A^{(1)}$. Todavia, se φ é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2, ou seja, se A é uma $*$-álgebra, segue que $A_\varphi^+ = A^+$ e $A_\varphi^- = A^-$.

Considere $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis, F um corpo de característica zero e φ um automorfismo ou um antiautomorfismo de ordem no máximo 2 em $F\langle X\rangle$. Dessa forma, denotamos por $F\langle X, \varphi\rangle$ a φ-álgebra livre associativa unitária gerada pelos elementos $X' = \{x_1, x_1^\varphi, x_2, x_2^\varphi, \ldots\}$.

Nosso próximo passo consiste em reescrever X' como união de dois subconjuntos Y e Z. Tal descrição será vantajosa para definirmos o conceito de identidade polinomial para φ-álgebras. Para isso, consideramos Y o conjunto dos elementos $\{y_i = x_i + x_i^\varphi \mid i \in \mathbb{N}\}$ e Z o conjunto dos elementos

$\{z_i = x_i - x_i^\varphi \mid i \in \mathbb{N}\}$. Podemos escrever os elementos de $F\langle X, \varphi\rangle$ tanto nas variáveis $\{x_1, x_1^\varphi, x_2, x_2^\varphi, \ldots\}$ quanto nas variáveis $\{y_1, z_1, y_2, z_2, \ldots\}$, ou seja, $F\langle X, \varphi\rangle = F\langle Y \cup Z\rangle$, onde essa última é a álgebra associativa livre no conjunto $Y \cup Z$. Utilizando essas notações, intitulamos os elementos de $\mathcal{F} := F\langle Y \cup Z\rangle$ de **φ-polinômios**.

Para entendermos melhor tais objetos, consideramos o exemplo a seguir.

Exemplo 2.2.1. Considere o polinômio $f(y_1, z_2) = y_1 z_2 \in F\langle Y \cup Z\rangle$. Desde que $y_1 = x_1 + x_1^\varphi$ e $z_2 = x_2 - x_2^\varphi$, temos

$$y_1 z_2 = (x_1 + x_1^\varphi)(x_2 - x_2^\varphi) = x_1 x_2 - x_1 x_2^\varphi + x_1^\varphi x_2 - x_1^\varphi x_2^\varphi \in F\langle X, \varphi\rangle.$$

Por outro lado, dado $x_1 x_2^\varphi \in F\langle X, \varphi\rangle$, temos

$$x_1 x_2^\varphi = \left(\frac{y_1 + z_1}{2}\right)\left(\frac{y_2 - z_2}{2}\right) = \frac{1}{4}(y_1 y_2 - y_1 z_2 + z_1 y_2 - z_1 z_2) \in F\langle Y \cup Z\rangle.$$

Observe que, por exemplo, o polinômio $f(x_1, x_1^\varphi, x_2, x_2^\varphi) = x_1 x_2 + x_2 x_1$ pode ser visto tanto como um elemento da álgebra livre $F\langle X\rangle$ como da φ-álgebra livre $F\langle X, \varphi\rangle$, o que nos permite visualizar $F\langle X\rangle \subset F\langle X, \varphi\rangle$. No caso em que estamos visualizando a φ-álgebra livre no conjunto $Y \cup Z$ podemos mergulhar a álgebra livre $F\langle X\rangle$ em $F\langle Y \cup Z\rangle$ definindo $x_i := y_i + z_i$, para todo $i \in \mathbb{N}$.

Chamamos atenção para o fato que, se φ é um automorfismo de ordem no máximo 2, $\mathcal{F}$ admite uma superestrutura definindo $\mathcal{F}^{(0)}$ o subespaço gerado por todos monômios nas variáveis $Y \cup Z$ que possuem um número par de variáveis em Z e $\mathcal{F}^{(1)}$ será o subespaço gerado por todos monômios nas variáveis $Y \cup Z$ que possuem um número ímpar de variáveis em Z. Em contrapartida, se $\varphi = *$ é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2, esse induz uma estrutura de $*$-álgebra em $\mathcal{F}$, onde as variáveis de Y são simétricas $y_i^* = y_i$ e as variáveis de Z são antissimétricas $z_i^* = -z_i$. Nesse caso, denotamos por $\mathcal{F}^+$ o espaço dos elementos simétricos e $\mathcal{F}^-$ o espaço dos elementos antissimétricos.

Definição 2.2.2. Seja A uma φ-álgebra. Dado $f = f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_m) \in \mathcal{F}$, dizemos que f é uma **φ-identidade polinomial** de A se

$$f(a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m) = 0$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A_\varphi^+$ e $b_1, \ldots, b_m \in A_\varphi^-$.

Nos respectivos casos, se A é uma superálgebra, dizemos que f é uma **identidade graduada** de A. Por outro lado, se A é uma $*$-álgebra, dizemos que f é uma **$*$-identidade** de A.

Exemplo 2.2.3. Para uma superálgebra A com graduação trivial, z é sempre uma identidade graduada de A.

Exemplo 2.2.4. Se A é uma φ-álgebra comutativa, segue que $[y_1, y_2]$, $[z_1, z_2]$ e $[y_1, z_1]$ são φ-identidades de A.

Exemplo 2.2.5. Considere a $*$-álgebra M_*. Sabemos que $M_*^+ = F(e_{11} + e_{44}) + F(e_{22} + e_{33}) + F(e_{12} + e_{34})$ e $M_*^- = F(e_{12} - e_{34})$. Logo, temos que $z_1 z_2$ é uma $*$-identidade de M_*.

Exemplo 2.2.6. Para a superálgebra $\mathcal{G}^{gr}$, vimos que $\mathcal{G}^{(0)} \subseteq Z(\mathcal{G})$, logo $[y_1, y_2]$ e $[y, z]$ são identidades graduadas de $\mathcal{G}^{gr}$.

Neste passo, definimos $Id^{\varphi}(A)$ o **T_{φ}-ideal de** A, formado por todas as φ-identidades polinomiais de A. Observe que $Id^{\varphi}(A)$ é um ideal invariante sob todo endomorfismo de $\mathcal{F}$ que comuta com φ, ou seja, é um T_{φ}-ideal de $\mathcal{F}$. No caso em que A é uma $*$-álgebra, denotamos $Id^{\varphi}(A) = Id^*(A)$ o **$*$-ideal** de A. Se essa é uma superálgebra, escrevemos $Id^{\varphi}(A) = Id^{gr}(A)$ o **T_2-ideal graduado** de A.

A par disso, consideramos

$$P_n^{\varphi} = \mathrm{span}_F\{w_{\sigma(1)} \ldots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i = y_i \text{ ou } w_i = z_i,\ i = 1, \ldots, n\},\ n \geq 1,$$

o espaço dos **φ-polinômios multilineares** nas variáveis $y_1, z_1, \ldots, y_n, z_n$.

É bem conhecido que, sobre um corpo de característica zero, todo T_{φ}-ideal é finitamente gerado. Além disso, qualquer φ-identidade é consequência de φ-identidades multilineares. Abaixo, exibiremos os T_{φ}-ideais das principais φ-álgebras com as quais trabalharemos ao longo deste trabalho. Posteriormente, exibiremos os cálculos para determinar os T_{φ}-ideais das φ-álgebras UT_2^{gr}, D^{gr} e D_*.

Lema 2.2.7.
1. *$Id^{gr}(UT_2) = \langle [y_1, y_2][y_3, y_4], z \rangle_{T_2}$ (ver [27]);*
2. *$Id^{gr}(\mathcal{G}) = \langle [y_1, y_2, y_3], z \rangle_{T_2}$ (ver [26]);*
3. *$Id^{gr}(D^{gr}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], [z_1, z_2] \rangle_{T_2}$ (ver [11]);*
4. *$Id^{gr}(UT_2^{gr}) = \langle [y_1, y_2], z_1 z_2 \rangle_{T_2}$ (ver [37]);*
5. *$Id^{gr}(\mathcal{G}^{gr}) = \langle [y_1, y_2], [y, z], z_1 \circ z_2 \rangle_{T_2}$ (ver [13]);*
6. *$Id^*(D_*) = \langle [y_1, y_2], [y, z], [z_1, z_2] \rangle_{T_*}$ (ver [11]);*
7. *$Id^*(M_*) = \langle z_1 z_2 \rangle_{T_*}$ (ver [29]).*

Proposição 2.2.8. *$Id^{gr}(UT_2^{gr}) = \langle [y_1, y_2], z_1 z_2 \rangle_{T_2}$.*

Demonstração. Seja $I = \langle [y_1, y_2], z_1z_2\rangle_{T_2}$. Desde que UT_2^{gr} satisfaz as identidades graduadas geradoras de I, segue que $I \subseteq Id^{gr}(UT_2^{gr})$. Por outro lado, seja $f(y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_n) \in Id^{gr}(UT_2^{gr})$ multilinear. Para mostrar a inclusão contrária, é suficiente mostrarmos que $f \equiv 0 \pmod I$.

Desde que $\mathcal{F}^{(1)}\mathcal{F}^{(0)} \subseteq \mathcal{F}^{(1)}$ e $z_1z_2 \in I$, segue que $z_1yz_2 \in I$, para qualquer variável par y. Logo, podemos escrever

$$f \equiv g(y_1, \ldots, y_m) + h(y_1, \ldots, y_m, z) \pmod I,$$

onde podemos supor g e h multilineares em suas respectivas variáveis.

Substituindo $y_{i_2}y_{i_1} = y_{i_1}y_{i_2} - [y_{i_1}, y_{i_2}]$ e usando o fato que $[y_1, y_2] \in I$, podemos reescrever $g \equiv \alpha y_1 \ldots y_m \pmod I$. Considere a avaliação $z = 0$ e $y_i = e_{11}$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Desde que f é uma identidade de UT_2^{gr}, obtemos $\alpha e_{11} = 0$, ou seja, $\alpha = 0$ e $g \equiv 0$ módulo I.

Analogamente, reordenando as variáveis podemos reescrever

$$h = \sum \beta y_{i_1} \ldots y_{i_n} z y_{j_1} \ldots y_{j_{t-n}} \pmod I,$$

com $i_1 < \ldots < i_n$ e $j_1 < \ldots < j_{t-n}$. Suponha que h é não nulo, isto é, existe um monômio $\beta y_1 \ldots y_m z y_{m+1} \ldots y_t$ não nulo. Considere a avaliação $y_1 = \ldots = y_m = e_{11}$, $y_{m+1} = \ldots = y_t = e_{22}$ e $z = e_{12}$ em f. Uma vez que $e_{11}e_{22} = e_{22}e_{11} = 0$, segue que qualquer monômio diferente de $\beta y_1 \ldots y_m z y_{m+1} \ldots y_t$ se anula nessa substituição. Desse modo, $f(e_{11}, \ldots, e_{11}, e_{22}, \ldots, e_{22}, e_{12}) \equiv \beta e_{12} \pmod I$. Desde que f é uma identidade de UT_2^{gr}, segue que $\beta = 0$, uma contradição. Portanto, $h \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\ I)$ e assim $f \equiv 0 \pmod I$. □

Teorema 2.2.9. *[4, Teorema 2.16] Para a álgebra $(M_2(F), t)$, com $\operatorname{char} F \neq 2$, as $*$-identidades*

$$[z_1, z_2], \quad [z_1z_2, y]$$
$$[y_1, y_2][y_3, y_4] - [y_1, y_3][y_2, y_4] + [y_1, y_4][y_2, y_3] \quad e$$
$$[z_1y_1z_2, y_2] - z_1z_2[y_1, y_2],$$

geram o T_*-ideal $Id^*(M_2(F))$.

Dizemos que duas φ-álgebras A e B são **T_φ-equivalentes** se $Id^\varphi(A) = Id^\varphi(B)$. Em notações estabelecidas, escrevemos $A \sim_{T_\varphi} B$.

Interessados em estudar o comportamento das φ-identidades de uma φ-álgebra consideramos o espaço

$$P_n^\varphi(A) := \frac{P_n^\varphi}{P_n^\varphi \cap Id^\varphi(A)}.$$

Note que o estudo das φ-identidades polinomiais pode ser obtido a partir do espaço $P_n^\varphi(A)$. Para isso, tomamos conhecimento da definição abaixo.

Definição 2.2.10. A dimensão de $P_n^{\varphi}(A)$ sobre F é denominada a n-ésima **φ-codimensão** de A e denotamos por $c_n^{\varphi}(A)$.

Se A é uma álgebra com involução, escrevemos $c_n^{\varphi}(A) = c_n^{*}(A)$ a n-ésima **$*$-codimensão** de A. Todavia, se A é uma superálgebra, denotamos $c_n^{\varphi}(A) = c_n^{gr}(A)$ a n-ésima **codimensão graduada** de A.

Se A é uma φ-álgebra sobre um corpo F munida de uma automorfismo ou um antiautomorfismos φ de ordem no máximo dois e K uma extensão de F, então $A \otimes K$ é uma K-álgebra munida de um automorfismo ou um antiautomorfismo $\overline{\varphi} : A \otimes K \to A \otimes K$ de ordem no máximo dois dado por $\overline{\varphi}(a \otimes k) = \varphi(a) \otimes k$, para todos $a \in A$ e $k \in K$, e estendido linearmente. Desse modo, $A \otimes K$ admite uma estrutura de φ-álgebra.

A observação seguinte nos permite relacionar a n-ésima codimensão da φ-álgebra A (sobre F) com a n-ésima codimensão da φ-álgebra $A \otimes K$ (sobre K).

Observação 2.2.11. A φ-codimensão de uma φ-álgebra A sobre um corpo F não é alterada quando consideramos a φ-álgebra $A \otimes K$ sobre uma extensão K do corpo original, ou seja, $c_n^{\varphi}(A) = c_n^{\varphi}(A \otimes K)$.

Assim, sempre que nos referirmos a resultados relativos à sequência de φ-codimensões, podemos considerar, sem perda de generalidade, o corpo algebricamente fechado.

De imediato, nos indagamos a respeito da relação entre a n-ésima codimensão ordinária de uma φ-álgebra e sua n-ésima φ-codimensão. Em 1985, Giambruno e Regev mostraram em [15] que se A é uma φ-álgebra, a relação buscada é dada pelo lema seguinte.

Lema 2.2.12. *Seja A uma φ-álgebra. Então $c_n(A) \leq c_n^{\varphi}(A)$.*

Além disso, os autores mostraram que se A é uma F-álgebra, então

$$c_n(A) \leq c_n^{\varphi}(A) \leq 2^n c_n(A). \tag{2.1}$$

Dessa forma, obtemos um limite exponencial para a n-ésima φ-codimensão da PI-álgebra A. Assim, concluímos o seguinte teorema.

Teorema 2.2.13. *Uma φ-álgebra A é uma PI-álgebra se, e somente se, $c_n^{\varphi}(A)$ é exponencialmente limitada.*

Como o título deste trabalho já nos apresenta, estamos interessados nas φ-álgebras cuja sequência de φ-codimensões é polinomialmente limitada. Assim, podemos estender as definições a respeito do comportamento da sequência de codimensões para a sequência de φ-codimensões.

Observação 2.2.14. Note que a relação (2.1) nos diz que se A é uma φ-álgebra cuja sequência de codimensões ordinárias cresce exponencialmente, então $c_n^{\varphi}(A)$ cresce exponencialmente. Assim, temos que as álgebras UT_2, UT_2^{gr}, $\mathcal{G}$ e $\mathcal{G}^{gr}$ têm crescimento exponencial da sequência de codimensões graduadas.

Para $r = 0, \ldots, n$ e $\sigma \in S_n$, definimos o espaço $P_{r,n-r}$ por

$$\text{span}_F\{w_{\sigma(1)} \ldots w_{\sigma(n)} \mid w_i = y_i,\ 1 \leq i \leq r \text{ e } w_i = z_{n-i+1},\ r+1 \leq i \leq n\},$$

o espaço dos φ-polinômios multilineares nas variáveis $y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_{n-r}$. Com isso, consideramos o seguinte espaço,

$$P_{r,n-r}(A) := \frac{P_{r,n-r}}{P_{r,n-r} \cap Id^{\varphi}(A)}.$$

Observe que, para cada partição $(r, n-r)$ de n, existem $\binom{n}{r}$ subespaços isomorfos à $P_{r,n-r}$ em P_n^{φ}. Desse modo, a relação entre P_n^{φ} e $P_{r,n-r}$ é dada por

$$P_n^{\varphi} \cong \bigoplus_{r=0}^{n} \binom{n}{r} P_{r,n-r}.$$

Logo, a melhor compreensão do espaço $P_{r,n-r}(A)$ nos permitirá obter informações a respeito das φ-identidades a partir das variáveis $Y \cup Z$, determinadas pela partição $(r, n-r)$ de n. De fato, buscaremos esclarecer essas relações nos próximos resultados.

Nesse sentido, definimos $c_{r,n-r}(A) := \dim_F P_{r,n-r}(A)$ a $(r, n-r)$**-ésima** φ**-codimensão** de A.

Observação 2.2.15. Note que, se $\{f_i(x_1, \ldots, x_n)\}_{1 \leq i \leq m}$ é uma base de P_n módulo $Id(A)$, restringindo nossas variáveis às substituições específicas, podemos considerar $\{f_i(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_{n-r})\}_{1 \leq i \leq m}$ um conjunto linearmente independente de $P_{r,n-r}$ módulo $Id^{\varphi}(A)$. Assim,

$$c_{r,n-r}(A) \leq c_n(A), \text{ para todo } r \leq n.$$

Respondendo ao questionamento sobre uma possível associação entre a n-ésima φ-codimensão e a $(r, n-r)$-ésima codimensão definida, os autores mostraram no artigo [7] e em consequência do Teorema 10.4.5 em [20] o seguinte resultado.

Teorema 2.2.16. *Seja A uma φ-álgebra. Então*

$$c_n^{\varphi}(A) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} c_{r,n-r}(A).$$

Finalmente, dada uma φ-álgebra A, podemos considerar a classe de todas as φ-álgebras que satisfazem as φ-identidades de A. Denotamos essa classe por $var^{\varphi}(A)$ a **φ-variedade** gerada por A. Nos respectivos casos, se A é uma álgebra com involução, então $var^{\varphi}(A) = var^{*}(A)$ a **$*$-variedade** gerada por A. Se essa é uma superálgebra, então $var^{\varphi}(A) = var^{gr}(A)$ é a **supervariedade** gerada por A. Ademais, se $\mathcal{V} = var^{\varphi}(A)$, dizemos que $c_n^{\varphi}(\mathcal{V}) = c_n^{\varphi}(A)$.

Observação 2.2.17. Como consequência do Exemplo 2.1.20, segue que $D_* \in var^*(M_2(F), s)$.

Observação 2.2.18. Note que os $*$-polinômios que geram $Id^*(M_2(F))$ com involução transposta, descritos no Teorema 2.2.9, são $*$-identidades de M_*. Logo, $M_* \in var^*(M_2(F), t)$.

A partir dessas discussões, estamos aptos a exibir os cálculos para determinar os T_{φ}-ideais das álgebras D_* e D^{gr} e suas sequências de φ-codimensões.

Proposição 2.2.19. Seja D_{φ} a φ-álgebra D_* ou D^{gr}. Então $Id^{\varphi}(D_{\varphi}) = \langle [y_1, y_2], [y_1, z_1], [z_1, z_2] \rangle_{T_{\varphi}}$. Além disso, $c_n^{\varphi}(D_{\varphi}) = 2^n,$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração. Seja $I = \langle [y_1, y_2], [y_1, z_1], [z_1, z_2] \rangle_{T^{\varphi}}$ e $\mathcal{V}$ a φ-variedade gerada por I. Uma vez que as variáveis comutam, módulo I, qualquer polinômio $f \in P_{r,n-r}$ pode ser reescrito $(\bmod\, I)$ como combinação linear de elementos da forma $y_1 \dots y_r z_1 \dots z_{n-r}$, para todo $r = 0, 1, \dots, n$. Logo,

$$c_{r,n-r}(\mathcal{V}) \leq 1, \text{ para todo } r.$$

Uma vez que D_{φ} satisfaz as φ-identidades geradoras de I, concluímos que $I \subseteq Id^{\varphi}(D_{\varphi})$ e consequentemente,

$$c_{r,n-r}(D_{\varphi}) \leq c_{r,n-r}(\mathcal{V}) \leq 1.$$

Afirmamos que $c_{r,n-r}(D_{\varphi}) \geq 1$. Para isso, para cada $r = 0, 1, \dots, n$, basta exibirmos um polinômio em $P_{r,n-r}$ que não é identidade para D_{φ}. Tome então

$$f(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_n) = y_1 \dots y_r z_1 \dots z_{n-r} \in P_{r,n-r}$$

e a avaliação $y_i = (1, 1)$, $z_j = (1, -1)$, para todos $i = 1, \dots, r$ e $j = 1, \dots, n-r$. Observamos que

$$f((1, 1), \dots, (1, 1), (1, -1), \dots, (1, -1)) = (1, (-1)^{n-r}) \neq 0.$$

Portanto, temos que $1 \leq c_{r,n-r}(D_\varphi) \leq c_{r,n-r}(\mathcal{V}) \leq 1$. Logo, $c_{r,n-r}(D_\varphi) = 1$ para todo $r = 0, \ldots, n$. Desde que $c_{r,n-r}(D_\varphi) = c_{r,n-r}(\mathcal{V}) = 1$, obtemos $Id^\varphi(D_\varphi) = I$. Além disso,

$$c_n^\varphi(D_\varphi) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} c_{r,n-r}(D_\varphi) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n,$$

como queríamos. □

Chamamos atenção para as φ-álgebras D_* e D^{gr}. Essas serão de grande interesse para o capítulo seguinte, uma vez que, D é uma álgebra comutativa com codimensão ordinária $c_n(D) = 1$. Porém, quando olhamos para essa álgebra como φ-álgebra, sua φ-codimensão $c_n^*(D_*) = c_n^{gr}(D^{gr}) = 2^n$ é exponencial. Essa análise nos induz, caso queiramos obter resultados análogos ao Teorema 1.5.4, a excluir essas álgebras das respectivas φ-variedades para garantirmos crescimento polinomial das φ-codimensões.

O próximo resultado nos informa sobre a sequência de φ-codimensões de uma álgebra A cuja $c_n(A)$ é polinomialmente limitada, a partir de certas condições.

Lema 2.2.20. *Seja A uma φ-álgebra de crescimento polinomial da sequência de codimensões ordinárias. Se existe um natural q para o qual qualquer monômio contendo pelo menos q variáveis em Z está em $Id^\varphi(A)$ então $c_n^\varphi(A)$ é polinomialmente limitada.*

Demonstração. Suponha $c_n(A) \leq \alpha n^t$, para algumas constantes α e t. Para $r = 0, 1, \ldots, n$, a relação entre $c_{r,n-r}(A)$ e $c_n(A)$ dada pela Observação 2.2.15 nos diz que

$$c_{r,n-r}(A) \leq c_n(A) \leq \alpha n^t.$$

Observe que se existe um inteiro q nas condições da hipótese, então para todo $r \leq n - q$ temos que $P_{r,n-r} \cap Id^\varphi(A) = P_{r,n-r}$ e consequentemente, $c_{r,n-r}(A) = 0$. Portanto, pelo Teorema 2.2.16, concluímos que,

$$c_n^\varphi(A) = \sum_{r=n-q+1}^{n} \binom{n}{r} c_{r,n-r}(A) \leq \alpha n^t \sum_{r=n-q+1}^{n} \binom{n}{r} = \alpha n^t \sum_{r=0}^{q-1} \binom{n}{r} \leq \alpha n^{t+q},$$

como gostaríamos. □

Observe que o número de variáveis em Z em uma φ-identidade nos direciona para resultados a respeito do crescimento da sequência de φ-codimensões. Motivados pelo lema anterior, apresentaremos alguns resultados nessa direção, os quais serão fundamentais no próximo capítulo.

Para visualizar melhor a demonstração que faremos a seguir, supomos, por exemplo, que A é uma φ-álgebra tal que $z_1z_2z_3 \in Id^{\varphi}(A)$. Afirmamos que, por exemplo, $a_1b_4a_2a_3 = 0$, onde $a_1, a_2, a_3 \in A_{\varphi}^{-}$ e $b_4 \in A_{\varphi}^{+}$. De fato, como $a_1 \circ b_4 := a_5 \in A_{\varphi}^{-}$, podemos escrever $a_1b_4 = a_5 - b_4a_1$. Portanto,

$$a_1b_4a_2a_3 = a_5a_2a_3 - b_4a_1a_2a_3 = 0,$$

como verificamos.

Proposição 2.2.21. Seja A uma φ-álgebra. Se existe um inteiro $t \geq 1$ com $z_1 \dots z_t \in Id^{\varphi}(A)$, então

$$z_1w_1z_2 \dots w_{t-1}z_t \in Id^{\varphi}(A),$$

onde $w_1, \dots, w_{t-1}$ são monômios (eventualmente vazios) em variáveis pertencentes a $Y \cup Z$.

Demonstração. Para provar a proposição, é suficiente mostrarmos que, dado o inteiro t da hipótese e elementos $a_1, \dots, a_t \in A_{\varphi}^{-}$, então o produto

$$a_1\gamma_1a_2 \dots \gamma_{t-1}a_t = 0,$$

onde $\gamma_1, \dots, \gamma_{t-1}$ são elementos de A que são produtos de elementos de A_{φ}^{+} e de A_{φ}^{-}. Uma vez que $a_i \circ b_i \in A_{\varphi}^{-}$, para todo $b_i \in A_{\varphi}^{+}$, temos que $a_ib_i = -b_ia_i + k_i$, com $k_i \in A_{\varphi}^{-}$. Desse modo, aplicando recursivamente o que foi observado antes do enunciado da proposição, podemos reescrever o produto $a_1\gamma_1a_2 \dots \gamma_{t-1}a_t$ de modo a obter o resultado desejado. □

Por fim, exibimos o teorema abaixo que nos dará uma condição, em termos de uma identidade ordinária, para trabalharmos com uma φ-variedade gerada por uma φ-álgebra finitamente gerada. No próximo capítulo daremos mais detalhes sobre a utilidade deste resultado.

Teorema 2.2.22. *[20, Teorema 11.4.3] Seja $\mathcal{V}$ uma φ-variedade. Se $\mathcal{V}$ satisfaz alguma identidade de Capelli de algum posto, então $\mathcal{V} = var^{\varphi}(A)$ para alguma φ-álgebra A finitamente gerada.*

2.3 φ-álgebras simples e o φ-expoente

Com o intuito de apresentar a classificação das φ-álgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero, recordaremos alguns resultados a respeito de $M_n(F)$-módulos. Inicialmente, lembramos que se R é um anel unitário, um R-módulo M é simples se $RM \neq \{0\}$ e esse não possui R-submódulos próprios não nulos.

Exemplo 2.3.1. Seja F um corpo e, para um valor fixo $j = 1, \dots, n$, considere o ideal à esquerda C_j de $M_n(F)$ gerado pela matriz coluna $\{a_{ij} \mid i = 1, \dots, n\}$. Então C_j é um $M_n(F)$-módulo simples com a multiplicação usual.

Antes do próximo exemplo, consideramos F^n o espaço dos vetores colunas n dimensional com entradas em F.

Exemplo 2.3.2. Seja $\sigma \in Aut(M_n(F))$ e considere F^n o $M_n(F)$-módulo sob a ação definida por

$$\begin{aligned} M_n(F) \times F^n &\to F^n \\ (X, v) &\mapsto \sigma(X)v. \end{aligned}$$

Então, F^n é um $M_n(F)$-módulo simples.

Para verificar isso, considere $N \neq \{0\}$ um $M_n(F)$-submódulo de F^n, queremos ver que $N = F^n$. Tome $v = (v_1, \dots, v_n) \in N$, com $v \neq 0$ e α um elemento qualquer de F. Desde que v é não nulo, uma das entradas v_i de v é não nula.

Uma vez que σ é um automorfismo de $M_n(F)$, segue que, para cada $j \in \{1, \dots, n\}$, existe uma matriz $A_j \in M_n(F)$ tal que

$$\sigma(A_j) = \frac{\alpha}{v_i} e_{ji},$$

onde e_{ji} denota a matriz elementar. Desse modo, com a ação definida acima, temos que

$$A_j v = \sigma(A_j) v = \frac{\alpha}{v_i} e_{ji} v = \alpha e_j,$$

onde e_j denota o vetor coluna cuja entrada j é igual a 1 e as demais são nulas. Como α é arbitrário, decorre que $\alpha e_j \in N$, $\forall \alpha \in F$ e $j \in \{1, \dots, n\}$, isto é, $F^n \subseteq N$, e a igualdade segue.

Proposição 2.3.3. Todos os $M_n(F)$-módulos simples são isomorfos.

Demonstração. Seja N um $M_n(F)$-módulo simples. Contanto que dois quaisquer ideais laterais de matrizes colunas são isomorfos, basta mostrarmos que N é isomorfo a um ideal lateral de matrizes colunas C_i. De fato, como $N = IN \subseteq M_n(F)N \subseteq N$ decorre da simplicidade de N que $M_n(F)N = N$, onde I é a matriz identidade $n \times n$.

Considere agora a aplicação

$$\begin{aligned} f : C_i &\to N \\ c_i &\mapsto c_i n. \end{aligned}$$

Uma vez que $M_n(F) = \sum_{i=1}^{n} C_i$ e $N \neq \{0\}$, existe $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $C_i N \neq 0$. Portanto, existe $n \in N$ e $c_i \in C_i$ tal que $c_i n \neq 0$, isto é, f é um homomorfismo não nulo de $M_n(F)$-módulos cujo núcleo é um $M_n(F)$-submódulo próprio de C_i e a imagem é um $M_n(F)$-submódulo não nulo de N. Desde que C_i e N são simples, então $ker(f) = \{0\}$ e $f(C_i) = N$. Logo, f é, na verdade, um isomorfismo de $M_n(F)$-módulos.

□

Teorema 2.3.4 (Skolem-Noether)**.** *Se F é um corpo, então todo automorfismo σ de $M_n(F)$ é interno, isto é, da forma $X \to YXY^{-1}$, onde Y é uma matriz invertível.*

Demonstração. Considere F^n o $M_n(F)$-módulo com a ação $(X, v) \to Xv$. Por outro lado, dado $\sigma \in Aut(M_n(F))$, podemos considerar a ação

$$(X, v) \to \sigma(X)v,$$

com $X \in M_n(F)$ e $v \in F^n$. Desde que o Exemplo 2.3.2 e a Proposição 2.3.3 nos dizem que $M_n(F)$ admite apenas um módulo simples a menos de isomorfismo, existe uma transformação linear bijetora $Y : F^n \to F^n$ entre esses dois módulos tal que $Y(Xv) = \sigma(X)Y(v)$, para todo $v \in F^n$ e $X \in M_n(F)$, logo $\sigma(X) = YXY^{-1}$. □

Se I é um ideal de uma φ-álgebra A, então I é um **φ-ideal** de A se I é invariante pela aplicação φ, ou seja, quando $\varphi = *$ é uma involução, então $I^* = I$, quando φ é um automorfismo de ordem no máximo dois, induzido pela superestrutura de A, então I é um ideal com graduação induzida de A, consequentemente $I^\varphi = I$.

Neste passo, dizemos que uma φ-álgebra é φ-simples se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos φ-ideais de A são $\{0\}$ e A. Nesse caso, quando φ for um automorfismo de ordem no máximo dois, dizemos que A é uma superálgebra simples e se φ é um antiautomorfismo de ordem no máximo dois, A é uma $*$-álgebra $*$-simples. Observamos que uma φ-álgebra pode ser φ-simples, mas não ser simples como álgebra ordinária. Todavia, se uma φ-álgebra é uma álgebra simples, então essa é φ-simples.

Exemplo 2.3.5. Desde que $M_n(F)$ é simples como álgebra ordinária, temos que $M_{k,l}(F)$, $n \geq k \geq l \geq 0, k + l = n$, com graduações definidas em 2.1.14 são superálgebras simples. Analogamente, $(M_n(F), t)$ e $(M_n(F), s)$ são $*$-simples.

Exemplo 2.3.6. A $*$-álgebra D_* é $*$-simples. De fato, considere $F_1 = \text{span}_F\{(1, 0)\}$ e $F_2 = \text{span}_F\{(0, 1)\}$, queremos ver que esses são os únicos ideais de D. Para isso, seja I um ideal não nulo de D diferente de F_1 e F_2, e tome $(a,b) \in I$, com $a,b \neq 0$. Como $(1,0)(a,b) = (a,0) \in I$ e $(0,1)(a,b) = (0,b) \in I$, segue que $I = F_1 \oplus F_2 = D$, e F_1, F_2 são os únicos ideais próprios não nulos de D. Porém, como $F_1^* = F_2$, segue que esses não são $*$-ideais, ou seja, D_* é $*$-simples

Exemplo 2.3.7. De modo geral, considere a álgebra $M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$, sabemos que esta pode ser vista como uma $*$-álgebra com involução troca. Afirmamos que $(M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}, *)$ é uma álgebra $*$-simples. De fato, desde que $M_n(F)$ e $M_n(F)$ são álgebras unitárias e $M_n(F)$ é simples, os únicos ideais próprios não nulos de $M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ são $(0, M_n(F)^{op})$ e $(M_n(F), 0)$, como nenhum desses são $*$-ideais, segue o resultado. Portanto, essa não é uma álgebra simples, mas é $*$-simples.

Com o propósito de obter a classificação desejada, apresentamos o seguinte teorema, que nos permitirá caracterizar as álgebras φ-simples sob determinadas condições.

Teorema 2.3.8. *[20, Teorema 3.4.4] Seja A uma φ-álgebra de dimensão finita sobre um corpo F. Então:*

1. *$J(A)$ é φ-ideal de A;*

2. *se A é uma álgebra φ-simples, então A é simples ou $A = B \oplus B^\varphi$, para alguma subálgebra simples B de A.*

Demonstração. Seja m o índice de nilpotência de $J(A)$ e tome ${j_1}^\varphi, \ldots, {j_m}^\varphi \in J(A)^\varphi$. Logo,

$${j_1}^\varphi \ldots {j_m}^\varphi = (j_{\sigma(1)} \ldots j_{\sigma(m)})^\varphi = 0,$$

onde $\sigma \in S_m$ é a identidade no caso em que φ é um automorfismo, ou $\sigma(i) = m - i + 1$, $\forall i = 1, \ldots, m$, caso em que φ é um antiautomorfismo. Desse modo, $J(A)^\varphi$ é nilpotente de índice pelo menos m. Uma vez que, $J(A)$ é o maior ideal nilpotente de A, temos $J(A)^\varphi \subseteq J(A)$. Também,

$$J(A) = (J(A)^\varphi)^\varphi \subseteq J(A)^\varphi,$$

concluindo que $J(A) = J(A)^\varphi$.

Para a segunda parte, supomos que A é φ-simples, mas não é simples. Desde que $J(A)$ é um φ-ideal de A e A não é nilpotente, segue que $J(A) = \{0\}$ e, pelo Teorema 1.4.6, podemos escrever $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_n$, onde cada B_i é, na verdade, um ideal bilateral simples e minimal em A.

Seja então B um ideal minimal de A. Pela φ-simplicidade de A, $B^\varphi \neq B$ ainda é um ideal minimal satisfazendo $B \cap B^\varphi = \{0\}$. Desse modo, $B \oplus B^\varphi$ é um φ-ideal de A. Portanto, $A = B \oplus B^\varphi$ e o teorema está demonstrado. $\square$

Exemplo 2.3.9. Seja A uma $*$-álgebra de dimensão finita $*$-simples que não é simples. Logo, pelo Teorema 2.3.8, $A = B \oplus B^*$, para alguma subálgebra simples B de A, onde $B \oplus B^*$ é $*$-subálgebra de A com involução induzida dada por $(a, b^*)^* = (b, a^*)$.

Considere agora a $*$-álgebra $B \oplus B^{op}$ com involução troca $\diamond$ e a aplicação $\psi : B \oplus B^* \to B \oplus B^{op}$ dada por $(c, d^*) \mapsto (c, d)$. Com isso, observe que

$$\psi((b_1, b_2^*)^*) = \psi((b_2, b_1^*)) = (b_2, b_1) = (b_1, b_2)^\diamond = \psi((b_1, b_2^*))^\diamond.$$

Desde que esse é um isomorfismo de álgebras que preserva a involução, segue que $B \oplus B^* \cong (B \oplus B^{op}, \diamond)$, isto é, $A \cong (B \oplus B^{op}, \diamond)$. No caso em que F é algebricamente fechado, temos $B \cong M_n(F)$ e, portanto, A é isomorfa a $M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ com involução troca.

Apresentamos agora a versão do Teorema de Wedderburn-Malcev para φ-álgebras, apresentada por Taft [36] em 1957.

Teorema 2.3.10. *Seja A uma φ-álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Então, existe uma φ-subálgebra maximal semissimples B de A tal que $A = B \dotplus J(A)$. Além disso, se A é uma φ-álgebra semissimples então $A = A_1 \oplus \ldots \oplus A_m$, onde $A_1, \ldots, A_m$ são subálgebras φ-simples de A.*

Exemplo 2.3.11. Uma decomposição de Wedderburn-Malcev da $*$-álgebra M_* é dada por $F(e_{11}+e_{44}) \oplus F(e_{22}+e_{33}) \dotplus J(M_*)$, onde $J(M_*) = Fe_{12}+Fe_{34}$. Já para a álgebra UT_2 munida da involução reflexão, temos $UT_2(F) = B \dotplus J(UT_2)$, onde B é a $*$-subálgebra $B = Fe_{11} \oplus Fe_{22}$ e $J(UT_2) = Fe_{12}$.

Exemplo 2.3.12. Considere a álgebra B do Exemplo 1.4.8. Uma decomposição de Wedderburn-Malcev de B, como superálgebra, é

$$B = \begin{pmatrix} F+cF & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & F+cF \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nosso próximo passo consiste em classificar, a menos de isomorfismo, as φ-álgebras simples sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Antes disso, consideramos o resultado que classifica todas as involuções da álgebra de matrizes $M_n(F)$, onde F é um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Teorema 2.3.13. *[32, Teorema 3.1.61] Seja F um corpo algebricamente fechado de característica zero e $*$ uma involução em $M_n(F)$. Desse modo, $(M_n(F), *) \cong (M_n(F), t)$ ou $(M_n(F), *) \cong (M_n(F), s)$, onde esse último caso ocorre apenas quando n é par.*

Teorema 2.3.14. *Seja A uma $*$-álgebra $*$-simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então A é isomorfa a uma das seguintes $*$-álgebras:*

1. $(M_n(F), t)$;
2. $(M_n(F), s)$, *onde* $n \geq 2$ *é par;*
3. $(M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}, *)$, *com involução troca* $(a, b)^* = (b, a)$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.3.8 temos que A é simples como álgebra ordinária ou $A = B \oplus B^*$, para alguma subálgebra simples B de A. Uma vez que F é algebricamente fechado então $A \cong (M_n(F), *)$ ou $A = B \oplus B^*$, com $B \cong M_n(F)$.

Se $A \cong (M_n(F), *)$, decorre do Teorema 2.3.13 que $A \cong (M_n(F), t)$ ou $A \cong (M_n(F), s)$, em que essa última ocorre apenas quando n é par.

No segundo caso, pelo Exemplo 2.3.9, temos $A \cong M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ com involução troca, como gostaríamos. □

Teorema 2.3.15. *Seja A uma superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então A é isomorfa a uma das seguintes superálgebras:*

1. $M_n(F)$, *com graduação trivial;*
2. $M_{k,l}(F)$, *com* $k \geq l > 0$ *e graduação definida no Exemplo 2.1.14;*
3. $M_n(F \oplus cF)$, *com* $c^2 = 1$ *e graduação* $(M_n(F), cM_n(F))$.

Demonstração. Sejam A uma superálgebra simples de dimensão finita e ψ o automorfismo induzido pela superestrutura. Pelo Teorema 2.3.8 temos que A é simples como álgebra ordinária ou $A = B \oplus B^\psi$, para alguma subálgebra simples B. Desde que F é algebricamente fechado, isso nos diz que $A \cong M_n(F)$ ou $A = B \oplus B^\psi$, com $B \cong M_m(F)$.

Suponha que $A = B \oplus B^\psi$, com $B \cong M_m(F)$. Considere os subespaços

$$M' = \{(d, d) \mid d \in M_m(F)\} \text{ e } M'' = \{(e, -e) \mid e \in M_m(F)\}.$$

Observe que, para todo $(a, b^\psi) \in M_m(F) \oplus M_m(F)^\psi$, podemos escrever

$$(a, b^\psi) = \underbrace{\left(\frac{a + b^\psi}{2}, \frac{a + b^\psi}{2}\right)}_{\in M'} + \underbrace{\left(\frac{a - b^\psi}{2}, -\frac{a - b^\psi}{2}\right)}_{\in M''}.$$

Logo, $A \cong M_m(F) \oplus M_m(F)^{\psi} = M' \dotplus M''$. Mais que isso, note que (M', M'') é uma graduação em $M' \dotplus M''$. Agora, observe que $M' \cong M_m(F)$ e $M'' = cM' \cong cM_m(F)$, onde $c = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$ e I a matriz identidade de ordem m. Assim, concluímos que $A \cong M_m(F) \dotplus cM_m(F) \cong M_m(F \oplus cF)$, com graduação $(M_m(F), cM_m(F))$, onde $c^2 = 1$.

Por outro lado, no primeiro caso, temos $A \cong M_n(F)$. Segue pelo Lema 2.3.4, que o automorfismo ψ induzido pela superestrutura é dado pela conjugação por uma matriz invertível Y. Uma vez que ψ^2 é a aplicação identidade, segue que

$$XY^2 = \psi^2(X)Y^2 = Y^2XY^{-2}Y^2 = Y^2X, \text{ para todo } X \in M_n(F).$$

Assim, como Y^2 está contido no centro de A, então existe um $\lambda \in F$ não nulo tal que $Y^2 = \lambda I$. Desde que F é algebricamente fechado, podemos escrever $\lambda = \beta^2$, para algum $\beta \in F$. Assim, obtemos $(\beta^{-1}Y)^2 = I$. Como qualquer múltiplo escalar não nulo de Y determina o mesmo automorfismo, podemos considerar, sem perda de generalidade, $Y^2 = I$. Assim sendo, os autovalores de Y são 1 ou -1. De todo modo, Y pode ser escrito em uma base específica como a matriz

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix},$$

onde k é o número de autovalores iguais a 1, l o número de autovalores iguais a -1 e I_k e I_l denotam as matrizes identidades de ordem k e l, respectivamente, com $k + l = n$.

Desse modo, considerando $X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \in M_n(F)$, onde X_{11}, X_{12}, X_{21} e X_{22} são blocos de matrizes de tamanho $k \times k$, $k \times l, l \times k$ e $l \times l$, respectivamente, temos que

$$\psi(X) = YXY^{-1} = \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{21} & X_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_k & 0 \\ 0 & -I_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_{11} & -X_{12} \\ -X_{21} & X_{22} \end{pmatrix}.$$

Por fim, desde que na graduação $A = (A^{(0)}, A^{(1)})$, temos que $A^{(0)}$ é o espaço dos elementos invariantes por ψ e $A^{(1)}$ o espaço dos elementos de A cuja imagem por ψ leva no seu inverso aditivo, temos que

$$A^{(0)} = \left\{ \begin{pmatrix} X_{11} & 0 \\ 0 & X_{22} \end{pmatrix} \mid X_{11} \in M_k(F),\ X_{22} \in M_l(F) \right\} \text{ e}$$

$$A^{(1)} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & X_{12} \\ X_{21} & 0 \end{pmatrix} \mid X_{12} \in M_{k,l}(F),\ X_{21} \in M_{lk}(F) \right\}.$$

Portanto, ou A é isomorfa a $M_n(F)$, com graduação trivial, caso em que $k = n$ e $l = 0$, ou A é isomorfa a $M_{k,l}(F)$ com graduação definida no Exemplo 2.1.14, caso em que k e l são ambos não nulos. Sem perda de generalidade, podemos assumir que $k \geq l$, concluindo a prova do teorema. $\square$

Vimos que a álgebra $M_n(F)$ é uma álgebra simples e, portanto, uma superálgebra simples. Pelo teorema anterior, segue que as graduações apresentadas no Exemplo 2.1.14 são as únicas graduações, a menos de isomorfismo, em $M_n(F)$, onde F denota um corpo algebricamente fechado de característica zero.

Finalizamos este capítulo definindo o φ-expoente de uma φ-álgebra. Posteriormente, iremos expor uma maneira de calcular o φ-expoente de uma φ-álgebra de dimensão finita e apresentaremos uma caracterização das φ-variedades de crescimento polinomial a partir desse objeto.

Com esse objetivo, relembramos que o Teorema 2.2.13 nos diz que a sequência de φ-codimensões de uma PI-álgebra é exponencialmente limitada. Assim, desde que a sequência de φ-codimensões é sempre maior ou igual a zero, faz sentido definirmos o **φ-expoente** de uma φ-álgebra A como

$$exp^{\varphi}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{\varphi}(A)}.$$

Em 2010, Giambruno e La Mattina provaram em [10] que se uma superálgebra A é uma PI-álgebra associativa, então o expoente graduado existe e é um inteiro não negativo. No ano de 2017, Giambruno, Polcino e Valenti provaram em [14] o resultado análogo para $*$-álgebras, isto é, se uma $*$-álgebra A é uma PI-álgebra associativa, então o $*$-expoente existe e é um inteiro não negativo. A junção dos resultados expostos pelos autores nos permite enunciar o teorema seguinte.

Teorema 2.3.16. *Se A é uma φ-álgebra sobre um corpo F, então existe um inteiro não negativo q e constantes C_1, C_2, r_1, r_2 tais que $C_1 > 0$ e*

$$C_1 n^{r_1} q^n \leq c_n^{\varphi}(A) \leq C_2 n^{r_2} q^n.$$

Consequentemente, $exp^{\varphi}(A)$ é igual ao inteiro q acima.

Se A é uma $*$-álgebra, então escrevemos $exp^{\varphi}(A) = exp^{*}(A)$ o **$*$-expoente** de A. Em contrapartida, se essa é uma superálgebra, então denotamos $exp^{\varphi}(A) = exp^{gr}(A)$ o **expoente graduado** de A.

Exemplo 2.3.17. Pela Proposição 2.2.19, $exp^{*}(D_*) = exp^{gr}(D^{gr}) = 2$.

Exemplo 2.3.18. Temos que $exp^{gr}(\mathcal{G}) = 2$ e $exp^{gr}(\mathcal{G}^{gr}) = 2$.

De fato, como $z \equiv 0$ em $\mathcal{G}$, temos que $P_{r,n-r}(\mathcal{G}) = \{0\}$ sempre que $n-r \geq 1$. Logo, como $\mathcal{G}^{(0)} = \mathcal{G}$, estamos lidando com o caso ordinário, visualizando $P_{n,0} \cong P_n$. Nesse caso, o Teorema 1.3.4 nos diz que $c_n^{gr}(\mathcal{G}) = c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$. Desse modo, $exp^{gr}(\mathcal{G}) = 2$.

Para o segundo caso, basta observar que as identidades graduadas geradoras do T_2-ideal da superálgebra $\mathcal{G}^{gr}$ descritas no Lema 2.2.7, nos diz que, para $r = 0, 1, \ldots, n$, o espaço $P_{r,n-r}$ módulo $Id^{gr}(\mathcal{G}^{gr}) \cap P_{r,n-r}$ é gerado pelo monômio $y_1 \ldots y_r z_1 \ldots z_{n-r}$. Assim, $\dim_F P_{r,n-r}(\mathcal{G}^{gr}) = 1$. Logo, pelo Teorema 2.2.16,

$$c_n^{gr}(\mathcal{G}^{gr}) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n.$$

Consequentemente, $exp^{gr}(\mathcal{G}^{gr}) = 2$.

No caso em que A é uma φ-álgebra de dimensão finita, podemos tomar uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A como φ-álgebra

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_k \dot{+} J(A).$$

Os autores mostraram em [10] e [14] que $exp^{\varphi}(A)$ é igual a

$$\tilde{q} := \max_{m} \dim_F(B_{i_1} \oplus \ldots \oplus B_{i_m}),$$

onde $B_{i_1} J B_{i_2} \ldots J B_{i_m} \neq 0$ e B_{i_r}, $r = 1, \ldots, m$, são φ-álgebras simples distintas que aparecem na decomposição de A e $J := J(A)$.

Exemplo 2.3.19. Considere a $*$-álgebra M_*. Podemos tomar uma decomposição de Wedderburn-Malcev

$$M_* = F(e_{11} + e_{44}) \oplus F(e_{22} + e_{33}) \dot{+} J(A),$$

onde $J(A) = Fe_{12} + Fe_{34}$ é o seu radical de Jacobson. Observe que, para $B_1 := F(e_{11} + e_{44})$ e $B_2 := F(e_{22} + e_{33})$, temos $B_1 J B_2 \neq 0$. Assim, $exp^*(M_*) = \dim_F(B_1 \oplus B_2) = 2$.

O teorema seguinte nos dará uma caracterização das φ-variedades de crescimento polinomial a partir do φ-expoente.

Teorema 2.3.20. *Seja A uma φ-álgebra. Então $c_n^{\varphi}(A)$ é polinomialmente limitada se, e somente se, $exp^{\varphi}(A) \leq 1$.*

Demonstração. Suponha $c_n^{\varphi}(A)$ polinomialmente limitada, isto é, existem constantes $\alpha \geq 0$ e t tais que $c_n^{\varphi}(A) \leq \alpha n^t$. Logo,

$$exp^{\varphi}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{\varphi}(A)} \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha n^t} = 1.$$

Para a recíproca, observe que $q := exp^{\varphi}(A) \leq 1$ satisfaz o Teorema 2.3.16. Assim,

$$c_n^{\varphi}(A) \leq C_2 n^{r_2},$$

ou seja, A tem crescimento polinomial da sequência de φ-codimensões. $\square$

Capítulo 3

φ-variedades de crescimento polinomial

A caracterização apresentada por Kemer no Teorema 1.5.4 foi estendida por outros autores para álgebras munidas de estruturas adicionais. Em 2000, Mishchenko e Valenti [29] apresentaram uma caracterização das $*$-variedades de crescimento polinomial no caso em que a $*$-variedade é gerada por uma $*$-álgebra de dimensão finita, mostrando ser necessário e suficiente excluir duas $*$-álgebras da $*$-variedade para garantir tal resultado. No ano seguinte, Giambruno e Mishchenko [12], ratificaram o resultado para dimensão qualquer. No mesmo ano, Giambruno, Mishchenko e Zaicev mostraram, em [13], ser necessário e suficiente excluir cinco superálgebras da supervariedade para garantir crescimento polinomial. O objetivo deste capítulo consiste em apresentar uma demonstração para essas caracterizações, utilizando argumentos diferentes dos utilizados originalmente pelos autores.

3.1 Álgebras com involução

Antes de partirmos para o comportamento da sequência de $*$-codimensões de uma $*$-álgebra, consideramos os resultados preliminares, os quais nos darão condições para trabalharmos com $*$-álgebras de dimensão finita, cujas demonstrações poderão ser consultadas em [20].

Lema 3.1.1. *Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-variedade. Então $D_* \notin \mathcal{V}$ se, e somente se, $z^d \in Id^*(\mathcal{V})$, para algum $d \geq 1$.*

Demonstração. Desde que z^d não é uma $*$-identidade de D_*, segue que, se $z^d \in Id^*(\mathcal{V})$ então $D_* \notin \mathcal{V}$.

Reciprocamente, suponha que $D_* \notin \mathcal{V}$. Logo, existe um polinômio multilinear $f(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_m) \in Id^*(\mathcal{V}) \backslash Id^*(D_*)$. Uma vez que, $a = (1, 1)$

e $b = (1, -1)$ formam uma base de D_* e $b^2 = a$ é um elemento simétrico, obtemos

$$0 \neq f(a, \ldots, a, b, \ldots, b) = f(b^2, \ldots, b^2, b, \ldots, b) = \alpha b^{2r+m}.$$

Logo, a soma α dos coeficientes de f é não nula.

Note que, como $z^2 \in \mathcal{F}^+$ e $Id^*(\mathcal{V})$ é um T_*-ideal, temos

$$f(z^2, \ldots, z^2, z, \ldots, z) = \alpha z^{2r+m} = 0 \, (\mathrm{mod}\, Id^*(\mathcal{V})).$$

Posto que $\alpha \neq 0$, a relação acima nos diz que $z^d \in Id^*(\mathcal{V})$, onde $d = 2r + m$, como gostaríamos. □

Nosso próximo passo consiste em apresentar uma versão análoga ao Teorema de Nagata e Higman para $*$-álgebras. O resultado original abordado por eles nos diz que, se A é uma álgebra nil de grau limitado, então ela é nilpotente, em outras palavras, se x^n é uma identidade para a álgebra A, para algum $n \geq 1$, então $x_1 \ldots x_t$ é também uma identidade de A, para algum $t \geq 1$. Apresentamos a seguir a versão para $*$-álgebras, a qual nos permite transcrever o teorema citado apenas para a componente antissimétrica.

Lema 3.1.2. *[20, Teorema 11.6.4] Seja A é uma $*$-álgebra. Se existe um inteiro $d \geq 1$ tal que $z^d \in Id^*(A)$, então existe um inteiro $t \geq 1$ para o qual $z_1 z_2 \ldots z_t \equiv 0$ em A.*

Consequentemente, a junção do lema anterior à Proposição 2.2.21 nos permite concluir o seguinte.

Corolário 3.1.3. Seja A uma $*$-álgebra tal que $z^d \in Id^*(A)$ para algum inteiro $d \geq 1$. Então, existe um inteiro $t \geq 1$ tal que qualquer monômio contendo pelo menos t variáveis antissimétricas, é uma identidade de A.

Lema 3.1.4. *Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-variedade. Se $D_* \notin \mathcal{V}$, então existe $t \geq 1$ tal que $[x_1, x_2] \ldots [x_{2t-1}, x_{2t}] \equiv 0$ é uma identidade ordinária de $\mathcal{V}$.*

Demonstração. Uma vez que $D_* \notin \mathcal{V}$, pelo Lema 3.1.1, $z^d \in Id^*(\mathcal{V})$, para algum $d \geq 1$. Consequentemente, pelo corolário anterior, qualquer monômio contendo pelo menos t variáveis antissimétricas é uma $*$-identidade de $\mathcal{V}$.

Para provar o lema, basta mostrarmos que qualquer produto $g := [w_1, w_2] \ldots [w_{2t-1}, w_{2t}]$ é uma $*$-identidade para $\mathcal{V}$, onde cada w_i é uma variável simétrica ou antissimétrica. Nesse sentido, para um comutador $[w_i, w_{i+1}]$, temos três casos a considerar: ou ambas as variáveis são simétricas, ou ambas são antissimétricas, ou apenas uma das variáveis é antissimétrica.

Note que, no primeiro e no segundo caso, o comutador $[w_i, w_{i+1}]$ resulta, numa avaliação de elementos de uma $*$-álgebra, em um elemento antissimétrico. Já no terceiro, ao desenvolver o comutador, obtemos dois monômios contendo apenas uma variável antissimétrica cada.

De todo modo, concluímos que, ao substituir as variáveis por elementos da $*$-álgebra, obtemos que cada parcela contém pelo menos t elementos antissimétricos, resultando assim que g é uma $*$-identidade de $\mathcal{V}$. □

Como consequência do Lema 3.1.4 e da Observação 1.1.14 obtemos o seguinte.

Teorema 3.1.5. *Se $D_* \notin \mathcal{V}$ então existe $k \geq 1$ tal que $St_{2k}(x_1, \ldots, x_{2k})$ é uma identidade ordinária em $\mathcal{V}$.*

Portanto, a junção dos Teoremas 1.5.1 e 3.1.5 nos garante o seguinte corolário.

Corolário 3.1.6. Se $D_* \notin \mathcal{V}$ então $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade de Capelli de algum posto.

Neste ponto, chamamos atenção para o Teorema 2.2.22, que nos diz que se uma $*$-variedade $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade de Capelli de algum posto, então $\mathcal{V} = var^*(C)$ para alguma $*$-álgebra C finitamente gerada.

Por fim, Sviridova mostrou em [35] o seguinte.

Teorema 3.1.7. *Se $\mathcal{V}$ é uma $*$-variedade gerada por uma $*$-álgebra finitamente gerada, então existe uma $*$-álgebra B de dimensão finita tal que $\mathcal{V} = var^*(B)$.*

Com isso, a junção dos resultados apresentados nos fornece o seguinte.

Corolário 3.1.8. Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-variedade. Se $D_* \notin \mathcal{V}$, então $\mathcal{V} = var^*(A)$ para alguma $*$-álgebra A de dimensão finita.

3.1.1 $*$-variedades de crescimento polinomial

Finalmente, estamos preparados para apresentar alguns resultados de caracterizações das $*$-álgebras de crescimento polinomial da sequência de $*$-codimensões. Para isso, inciamos com a seguinte observação.

Observação 3.1.9. Recordamos que, no Exemplo 1.3.7 e Teorema 1.3.5, $c_n(M) = c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2$, para todo $n \geq 1$. Assim, pelo Lema 2.2.12, temos que

$$2^{n-1}(n-2) + 2 = c_n(M) \leq c_n^*(M_*).$$

Portanto, $c_n^*(M_*)$ cresce exponencialmente.

Novamente, estamos em busca de um resultado que nos diga quais $*$-álgebras devemos excluir de uma $*$-variedade para garantirmos que essa tenha crescimento polinomial. Sob essa perspectiva, apresentaremos os resultados seguintes.

Lema 3.1.10. *[29, Teorema 4] Sejam A uma $*$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica zero e $A_1 \oplus \ldots \oplus A_m \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A dada pelo Teorema 1.4.6. Se existem $r, s \in \{1, \ldots, m\}$, $r \neq s$, tal que $A_r J(A) A_s \neq \{0\}$, então $M_* \in var^*(A)$.*

Demonstração. Tomamos A_r e A_s, com $r \neq s$, tais que $A_r J(A) A_s \neq 0$. Dessa forma, existe $j \in J(A)$ tal que $i_1 j i_2 \neq 0$, onde i_1 e i_2 são as unidades em A_r e A_s, respectivamente. Seja ainda $k \geq 1$ o maior inteiro tal que $i_1 j i_2 \in J(A)^k$ e consideremos a álgebra $\overline{A} := A/J(A)^{k+1}$. Desde que $J(A)$ é um $*$-ideal, segue que $J(A)^{k+1}$ é um $*$-ideal e, portanto $\overline{A}$ é uma $*$-álgebra. Além disso, observe que $\overline{A} \in var^*(A)$.

Considere as imagens $\overline{i_1}$, $\overline{i_2}$, $\overline{i_1 j i_2}$ e $\overline{i_2 j^* i_1}$ dos elementos i_1, i_2, $i_1\, j\, i_2$ e $i_2\, j^* i_1$, respectivamente e $S = \mathrm{span}_F\{\overline{i_1}, \overline{i_2}, \overline{i_1 j i_2}, \overline{i_2 j^* i_1}\}$. Uma vez que $i_1^2 = i_1$, $i_2^2 = i_2$, $i_1 i_2 = i_2 i_1 = 0$ e $\{i_1 j i_2 j^* i_1, i_2 j^* i_1 j i_2\} \subseteq J(A)^{k+1}$ temos que

$$\overline{i_1 i_1} = \overline{i_2 i_1} = 0 \quad \text{e} \quad \overline{i_1 j i_2}\,\overline{i_2 j^* i_1} = \overline{i_2 j^* i_1}\,\overline{i_1 j i_2} = 0.$$

Logo, S é uma $*$-subálgebra de $\overline{A}$.

Considere o homomorfismo de álgebras $\phi : S \to M_*$ definido por:

$$\overline{i_1} \mapsto e_{11} + e_{44}, \qquad \overline{i_2} \mapsto e_{22} + e_{33}, \qquad \overline{i_1 j i_2} \mapsto e_{12}, \qquad \overline{i_2 j^* i_1} \mapsto e_{34}.$$

Observamos que ϕ é um isomorfismo de álgebras que preserva a involução. Assim, temos que $\overline{A}$ possui uma $*$-subálgebra isomorfa a M_*. Portanto, $M_* \in var^*(\overline{A}) \subseteq var^*(A)$, como gostaríamos. $\square$

Lema 3.1.11. *Sejam A uma $*$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A dada pelo Teorema 2.3.10. Se M_*, $D_* \notin var^*(A)$, então $B_i \cong F$, para todo $i = 1, \ldots, m$.*

Demonstração. Considere uma decomposição de Wedderburn-Malcev como apresentada no enunciado. Uma vez que cada B_i é uma $*$-álgebra simples com involução induzida, pelo Teorema 2.3.14 temos três casos a considerar: ou $B_i \cong (M_n(F), t)$; ou $B_i \cong (M_l(F), s)$; ou $B_i \cong (M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}, *)$, onde $*$ é a involução troca.

No primeiro caso, se $n \geq 2$, pelo Exemplo 2.1.21, $(M_n(F), t)$ contém uma $*$-subálgebra isomorfa a $(M_2(F), t)$. Portanto, pela Observação 2.2.18, $M_* \in \mathcal{V}$, uma contradição.

No segundo caso, desde que $l \geq 2$ é par, pelo Exemplo 2.1.21, B_i possui uma $*$-subálgebra isomorfa a $(M_2(F), s)$. Logo, pela Observação 2.2.17, $D_* \in var^*(A)$, uma contradição. Portanto, esse caso não pode ocorrer.

Por fim, no terceiro caso, considerarmos a aplicação $\phi : D_* \to M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}$ dada por $\phi(a,b) = (ae_{11}, be_{11})$. Note que esse é um monomorfismo de álgebras que preserva involução. Logo, $(M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}, *)$ contém uma $*$-subálgebra isomorfa a D_*, outra contradição. Logo, esse caso também não pode ocorrer.

Desse modo, obtemos $B_i \cong F$, $\forall i = 1, \ldots, m$. □

No ano de 2000, Giambruno e Zaicev caracterizaram em [17] as $*$-álgebras de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado com crescimento polinomial da sequência de $*$-codimensões a partir do comportamento da sequência de codimensões ordinárias e da sua decomposição de Wedderburn-Malcev.

Teorema 3.1.12. *Seja A uma $*$-álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Então $c_n^*(A)$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

1. *$c_n(A)$ é polinomialmente limitada;*
2. *$A = B \dotplus J(A)$ é uma decomposição de Wedderburn-Malcev dada pelo Teorema 2.3.10 onde $b^* = b$, para todo $b \in B$.*

Demonstração. Suponha $c_n^*(A)$ polinomialmente limitada. Pela Proposição 2.2.12, $c_n(A) \leq c_n^*(A) \leq \alpha n^t$, para algumas constantes α e t. Logo, o primeiro item está verificado.

Para o segundo item, podemos tomar $A = B \dotplus J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev dada pelo Teorema 2.3.10, onde $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ é maximal semissimples e $B_1, \ldots, B_m$ são subálgebras $*$-simples. Desde que a Observação 3.1.9 e a Proposição 2.2.19 nos garante que $M_*, D_* \notin var^*(A)$, segue do Lema 3.1.11 que $B_t \cong F$ (como $*$-álgebra), para todo $t = 1, \ldots, m$. Consequentemente, a involução é invariante em cada componente $*$-simples e age trivialmente sob a mesma. Portanto, $*$ age trivialmente sobre B.

Reciprocamente, suponha que os itens 1 e 2 são verificados. Tomamos $a \in A^-$ e escrevemos $a = b + j$ onde $b \in B$ e $j \in J(A)$. Desde que a involução age trivialmente em B, temos que

$$a - a^* = j - j^* \in J(A). \tag{3.1}$$

Por outro lado, temos satisfeito $a^* = -a$, isto é,

$$a + a^* = 0 \tag{3.2}$$

Portanto, se $a \in A^-$ a junção das igualdades (3.1) e (3.2) nos leva a $2a \in J(A)$. Desde que F tem característica zero, obtemos $A^- \subseteq J(A)$.

Assuma que q é o índice de nilpotência de $J(A)$. Uma vez que $A^- \subseteq J(A)$ então $z_1 \dots z_q \in Id^*(A)$. Logo, pela Proposição 2.2.21, qualquer monômio contendo pelo menos q variáveis antissimétricas é uma $*$-identidade de A. Uma vez que $c_n(A)$ é polinomialmente limitada por hipótese, pelo Lema 2.2.20, $c_n^*(A)$ é polinomialmente limitada, como gostaríamos.

□

Finalmente, apresentamos uma demonstração mais atualizada do teorema provado por Giambruno e Mishchenko em [12].

Teorema 3.1.13. *Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-variedade. Então $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial da sequência de $*$-codimensões se, e somente se, $D_*, M_* \notin \mathcal{V}$.*

Demonstração. Suponha que $\mathcal{V}$ é uma $*$-variedade de crescimento polinomial. Uma vez que a Observação 3.1.9 e a Proposição 2.2.19 nos dizem que D_* e M_* têm crescimento exponencial da sequência de $*$-codimensões, segue que estas não pertencem à $\mathcal{V}$.

Reciprocamente, suponha D_*, $M_* \notin \mathcal{V}$. Pelo Corolário 3.1.8, podemos considerar $\mathcal{V} = var^*(A)$, onde A é uma $*$-álgebra de dimensão finita. Ainda, pela Observação 2.2.11, podemos assumir F algebricamente fechado. Desse modo, consideramos uma decomposição de Wedderburn-Malcev dada pelo Teorema 2.3.10

$$A = B \dotplus J(A) = B_1 \oplus \dots \oplus B_m \dotplus J(A). \tag{3.3}$$

Pelo Lema 3.1.11, $B_i \cong F$, $\forall i = 1, \dots, m$. Portanto, $B \cong F \oplus \dots \oplus F$ e assim, B é uma $*$-subálgebra maximal de A com involução induzida trivial. Além disso, cada componente B_i é simples.

Ademais, como $M_* \notin \mathcal{V}$, pelo Teorema 3.1.10, verificamos que $B_i J(A) B_k = 0$, $\forall i, k \in \{1, \dots, m\}$ com $i \neq k$. Desde que a decomposição em (3.3) satisfaz as condições do Teorema 1.5.2, temos que $c_n(A)$ tem crescimento polinomial. Desse modo, temos satisfeitas as condições 1 e 2 do Teorema 3.1.12 e assim, $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial da sequência de $*$-codimensões. □

Como consequência do teorema anterior, temos que se A é uma $*$-álgebra sobre um corpo de característica zero, então a sequência de $*$-codimensões é polinomialmente limitada ou cresce exponencialmente. Além disso, é possível mostrar, como foi feito no caso ordinário, que M_* e D_* têm crescimento quase polinomial e assim, o seguinte corolário é obtido.

Corolário 3.1.14. $var^*(M_*)$ e $var^*(D_*)$ são as únicas $*$-variedades de crescimento quase polinomial.

3.2 Superálgebras

Os próximos resultados nos permitirá, sob certas condições, considerarmos uma supervariedade $\mathcal{V}$ como sendo gerada por uma superálgebra de dimensão finita, cujas demonstrações poderão ser consultadas em [20]. Para nossos propósitos, vamos iniciar com um resultado a respeito das subvariedades próprias de $var^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$.

Lema 3.2.1. *Seja $\mathcal{V}$ uma subvariedade própria de $var^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$. Então existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $z_1 \dots z_n \in Id^{gr}(\mathcal{V})$.*

Demonstração. Seja $\mathcal{V}$ uma subvariedade própria de $var^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$. Em outras palavras, existe um inteiro não negativo r e um polinômio multilinear $f = f(y_1, \dots, y_r, z_1, \dots, z_{m-r}) \in Id^{gr}(\mathcal{V})$, tal que $f \notin Id^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$. Uma vez que, $[y_1, y_2], [y_1, z_1]$ e $z_1 \circ z_2$ são identidades graduadas de $\mathcal{G}^{gr}$, podemos reordenar os monômios de f de modo a obtermos

$$f = \alpha z_1 \dots z_{m-r} y_1 \dots y_r \pmod{Id^{gr}(\mathcal{G}^{gr})}, \text{ com } \alpha \neq 0.$$

Assim, desde que f é uma identidade graduada de $\mathcal{V}$, podemos supor, sem perda de generalidade, que $f = z_1 \dots z_{m-r} y_1 \dots y_r$. Desde que $Id^{gr}(\mathcal{V})$ é um T_2-ideal e $\mathcal{F}^{(1)}\mathcal{F}^{(1)} \subseteq \mathcal{F}^{(0)}$, substituindo $y_1 = z_{m-r+1} z_{m-r+2}, \dots, y_r = z_{m+r-1} z_{m+r}$ obtemos

$$f(y_1, \dots y_r, z_1, \dots, z_{m-r}) = z_1 \dots z_{m+r} \in Id^{gr}(\mathcal{V}).$$

Assim, basta tomarmos $n = m + r$, concluindo a prova do lema. □

Antes de provarmos o próximo resultado, tomamos conhecimento da seguinte observação.

Observação 3.2.2. [20, Observação 11.3.6] Se $g(z_1, \dots, z_n) \in P_{0,n} \cap Id^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$, então

$$\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) g(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}) = 0, \text{ em } F\langle Y \cup Z \rangle.$$

A título de exemplo, como $z_1 z_2 + z_2 z_1 \in P_{0,2} \cap Id^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$, observe que

$$\sum_{\sigma \in S_2} (\operatorname{sgn} \sigma) z_{\sigma(1)} z_{\sigma(2)} + z_{\sigma(2)} z_{\sigma(1)} = (z_1 z_2 + z_2 z_1) - (z_2 z_1 + z_1 z_2) = 0.$$

Corolário 3.2.3. Considere $\mathcal{V}$ uma supervariedade. Se $\mathcal{G}^{gr} \notin \mathcal{V}$, então $St_n(z_1, \dots, z_n) \in Id^{gr}(\mathcal{V})$, para algum $n \geq 1$.

Demonstração. Suponha que $\mathcal{G}^{gr} \notin \mathcal{V}$. Logo, $\mathcal{W} := \mathcal{V} \cap var^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$ é uma subvariedade própria de $var^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$. Assim, pelo Lema 3.2.1, existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $z_1 \dots z_n \in Id^{gr}(\mathcal{W})$.

Pela Proposição 1.2.5, temos que $Id^{gr}(\mathcal{W}) = Id^{gr}(\mathcal{V}) + Id^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$. Logo, existe um polinômio $g \in Id^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$ tal que

$$f := z_1 \dots z_n + g \in Id^{gr}(\mathcal{V}).$$

Posto que, podemos considerar f é multilinear, assumimos $g = g(z_1, \dots, z_n)$ multilinear. Como o T_2-ideal é fechado por endomorfismos, segue que, alternando as variáveis de $f(z_1, \dots, z_n)$, ainda obtemos uma identidade graduada de $\mathcal{V}$. Observe que isso nos fornece

$$\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) z_{\sigma(1)} \dots z_{\sigma(n)} + \sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) g(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}) \in Id^{gr}(\mathcal{V}).$$

Desde que a Observação 3.2.2 nos diz que $\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) g(z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(n)}) = 0$ na álgebra livre, obtemos

$$\sum_{\sigma \in S_n} (\operatorname{sgn} \sigma) z_{\sigma(1)} \dots z_{\sigma(n)} = St_n(z_1, \dots, z_n) \in Id^{gr}(\mathcal{V}), \text{ para algum } n \geq 1,$$

como gostaríamos. $\square$

A seguir, apresentamos um lema e um teorema técnico, cujas demonstrações encontram-se em [20, Lemma 11.4.1] e [20, Lemma 11.4.2].

Lema 3.2.4. *Seja $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ uma superálgebra. Se $A^{(0)}$ satisfaz uma identidade de Capelli e $A^{(1)}$ satisfaz uma identidade standard, então A satisfaz uma identidade de Capelli de algum posto.*

Teorema 3.2.5. *Seja A uma superálgebra. Então $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^{gr} \notin var^{gr}(A)$ se, e somente se, A satisfaz uma identidade de Capelli.*

Demonstração. Desde que um polinômio de Capelli de posto qualquer não é uma identidade de $\mathcal{G}$ nem de $\mathcal{G}^{gr}$, uma direção é imediata.

Para a recíproca, suponha que $\mathcal{G}$, $\mathcal{G}^{gr} \notin var^{gr}(A)$, desde que $var^{gr}(A^{(0)}) \subseteq var^{gr}(A)$, segue que $\mathcal{G} \notin var^{gr}(A^{(0)}) = var(A^{(0)})$. Logo, pelo Teorema 1.5.1, $A^{(0)}$ satisfaz uma identidade de Capelli.

Além disso, desde que $\mathcal{G}^{gr} \notin var^{gr}(A)$, segue pelo Corolário 3.2.3 que $St_n(z_1, \dots, z_n) \in Id^{gr}(A)$, para algum n, ou seja, $A^{(1)}$ satisfaz uma identidade standard. Portanto, pelo Lema 3.2.4, A satisfaz uma identidade de Capelli de algum posto. $\square$

Neste passo, observe que o Teorema 2.2.22 nos diz que se uma supervariedade $\mathcal{V}$ satisfaz uma identidade de Capelli de algum posto, então $\mathcal{V} = var^{gr}(A)$ para alguma superálgebra A finitamente gerada. Em [23], Kemer mostrou o seguinte.

Teorema 3.2.6 (Kemer)**.** *Se $\mathcal{V}$ é uma supervariedade gerada por uma superálgebra finitamente gerada, então $\mathcal{V} = var^{gr}(A)$, para alguma superálgebra A de dimensão finita.*

A par dos resultados acima, obtemos o seguinte corolário.

Corolário 3.2.7. Seja $\mathcal{V}$ uma supervariedade. Se $\mathcal{G}, \mathcal{G}^{gr} \notin \mathcal{V}$, então $\mathcal{V} = var^{gr}(A)$ para alguma superálgebra A de dimensão finita.

3.2.1 Supervariedades de crescimento polinomial

Finalizamos este capítulo apresentando algumas caracterizações das supervariedades de crescimento polinomial. Para isso, consideramos o seguinte lema.

Lema 3.2.8. *Sejam A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \dotplus J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A dada pelo Teorema 2.3.10. Se UT_2, UT_2^{gr}, $D^{gr} \notin var^{gr}(A)$, então $B_i \cong F$, para todo $i = 1, \ldots, m$.*

Demonstração. Desde que, para $i = 1, \ldots, m$, B_i é uma subálgebra graduada simples e F é algebricamente fechado, pelo Teorema 2.3.15 temos três possibilidades a considerar: ou $B_i \cong M_n(F)$ com graduação trivial ou $B_i \cong M_{k,l}(F)$, com $k \geq l > 0$, ou $B_i \cong M_n(F) \oplus cM_n(F)$ com graduação $(M_n(F), cM_n(F))$.

No primeiro caso, observe que se $n \geq 2$, então B_i contém uma subálgebra isomorfa à UT_2 com graduação trivial, uma contradição.

Para o segundo caso, considere o monomorfismo de superálgebras $\psi : UT_2^{gr} \to M_{k,l}(F)$ dado por

$$e_{11} \mapsto e_{11}, \qquad e_{22} \mapsto e_{(k+l)(k+l)}, \qquad e_{12} \mapsto e_{(1(k+l))}.$$

Com isso, observe que $\psi((UT_2^{gr})^{(0)}) \subseteq M_{k,l}(F)^{(0)}$ e $\psi((UT_2^{gr})^{(1)}) \subseteq M_{k,l}(F)^{(1)}$. Logo, $M_{k,l}(F)$ contém uma subálgebra isomorfa a UT_2^{gr}, uma contradição.

Por fim, para o terceiro caso, se $n > 1$, considere o monomorfismo de superálgebras $\rho : D^{gr} \to M_n(F \oplus cF)$, dado por

$$(1, 1) \mapsto e_{11}, \qquad (1, -1) \mapsto ce_{11}.$$

No caso em que $n = 1$, basta notarmos que $\rho : D^{gr} \to F \oplus cF$ dado por $\rho((a,b)) = (\frac{1+c}{2}a, \frac{1-c}{2}b)$ é um isomorfismo de superálgebras. Desse modo, $\rho((D^{gr})^{(0)}) \subseteq M_n(F \oplus cF)^{(0)} = M_n(F)$ e $\rho((D^{gr})^{(1)}) \subseteq M_n(F \oplus cF)^{(1)} = cM_n(F)$. Assim, $M_n(F \oplus cF)$ contém uma subálgebra isomorfa a D^{gr}, uma contradição.

Portanto, o único caso que pode ocorrer é $B_i \cong F$, para todo i. $\square$

Teorema 3.2.9. *Seja A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F. Então $c_n^{gr}(A)$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

1. *$c_n(A)$ é polinomialmente limitada;*
2. *$A = B \dotplus J(A)$ é uma decomposição de Wedderburn-Malcev dada pelo Teorema 2.3.10 onde B é uma subálgebra maximal semissimples de A com graduação induzida trivial.*

Demonstração. Suponha $c_n^{gr}(A)$ polinomialmente limitada, pela Proposição 2.2.12, $c_n(A) \leq c_n^{gr}(A) \leq \alpha n^t$, para algumas constantes α e t. Logo, $c_n(A)$ é polinomialmente limitada.

Para o item 2, considere $A = B \dotplus J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev dada pelo Teorema 2.3.10, onde $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ é uma superálgebra maximal semissimples. Desde que $c_n^{gr}(A)$ é polinomialmente limitada, pela Observação 2.2.14 e Proposição 2.2.19, UT_2, UT_2^{gr}, $D^{gr} \notin var^{gr}(A)$. Logo, pelo Lema 3.2.8, $B_i \cong F$, para todo i, ou seja, $B = F \oplus \ldots \oplus F$. Assim, como $B_i^{(0)} = B$ e $B_i^{(1)} = \{0\}$, para todo i, temos que φ induz uma graduação trivial em B, onde φ é o automorfismo induzido pela superestrutura de A.

Reciprocamente, suponha que as condições 1 e 2 são satisfeitas. Desde que $A = B \dotplus J(A)$, tomamos $a \in A$ e escrevemos $a = b + j$ com $b \in B = B^{(0)}$ e $j \in J(A)$. Consideramos ainda φ o automorfismo induzido pela graduação. Desde que B possui graduação induzida trivial, temos que

$$a - a^{\varphi} = j - j^{\varphi} \in J(A). \tag{3.4}$$

Em particular, para todo elemento $a \in A^{(1)}$, temos $a^{\varphi} = -a$, isto é

$$a^{\varphi} + a = 0. \tag{3.5}$$

Portanto, se $a \in A^{(1)}$, a junção das igualdades (3.4) e (3.5) nos fornece $2a \in J(A)$, isto é $a \in J(A)$. Logo, $A^{(1)} \subseteq J(A)$;

Neste passo, assuma que q é o índice de nilpotência de $J(A)$. Uma vez que, $A^{(1)} \subseteq J(A)$ então $z_1 \ldots z_q \in Id^{gr}(A)$. Logo, pela Proposição 2.2.21, qualquer monômio contendo pelo menos q variáveis ímpares é uma identidade graduada de A. Desde que $c_n(A)$ é polinomialmente limitada, pelo Lema 2.2.20, $c_n^{gr}(A)$ é polinomialmente limitada, como queríamos. $\square$

Antes de partirmos para o principal resultado desta seção, apresentamos o seguinte lema.

Lema 3.2.10. *Sejam A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \dotplus J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A dada pelo Teorema 2.3.10. Se existem $r, s \in \{1, \ldots, m\}$, $r \neq s$, com $B_r^{(0)} J(A)^{(1)} B_s^{(0)} \neq \{0\}$, então $UT_2^{gr} \in var^{gr}(A)$.*

Demonstração. Assuma que existam naturais r e s como no enunciado, de modo que $B_r^{(0)} J(A)^{(1)} B_s^{(0)} \neq \{0\}$. Dessa forma, existe $j \in J(A)^{(1)}$ tal que $i_1 j i_2 \neq 0$, onde i_1 e i_2 são as unidades em $B_r^{(0)}$ e $B_s^{(0)}$, respectivamente. Consideramos o espaço vetorial $S = \mathrm{span}_F\{i_1, i_2, i_1 j i_2\}$. Desde que i_1 e i_2 são idempotentes e ortogonais entre si, S é uma F-subálgebra de A. Além disso, observe que se φ é o automorfismo induzido pela graduação de A, temos que $\varphi(i_t) = i_t$, para $t = 1, 2$, e $\varphi(i_1 j i_2) = -i_1 j i_2$, desde que $j \in J(A)^{(1)}$. Isso nos diz que S é uma superálgebra com graduação induzida de A, onde

$$S^{(0)} = \mathrm{span}\{i_1, i_2\} \text{ e } S^{(1)} = \mathrm{span}\{i_1 j i_2\}.$$

Seja $\phi : S \to UT_2^{gr}$ o homomorfismo de F-álgebras definido por:

$$i_1 \mapsto e_{11}, \qquad i_2 \mapsto e_{22}, \qquad i_1 j i_2 \mapsto e_{12}.$$

Observamos que ϕ é de fato um isomorfismo que preserva a graduação. Logo, A possui uma subálgebra isomorfa a UT_2^{gr}. Portanto, $UT_2^{gr} \in var^{gr}(A)$, como gostaríamos. $\square$

Finalmente, juntando as peças apresentadas até o momento, estamos aptos a exibir uma demonstração mais atualizada para a caracterização das supervariedades de crescimento polinomial, demonstrada originalmente em 2001 por Giambruno, Mishchenko e Zaicev [13].

Teorema 3.2.11. *Seja $\mathcal{V}$ uma supervariedade. Então $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial da sequência de codimensões graduadas se, e somente se, $\mathcal{G}$, UT_2, $\mathcal{G}^{gr}$, UT_2^{gr}, $D^{gr} \notin \mathcal{V}$.*

Demonstração. Desde que a Observação 2.2.14 e a Proposição 2.2.19 nos afirmam que as superálgebras acima geram supervariedade de crescimento exponencial, uma direção é imediata.

Suponha então que $\mathcal{G}$, UT_2, $\mathcal{G}^{gr}$, UT_2^{gr}, $D^{gr} \notin \mathcal{V}$. Uma vez apresentado o Corolário 3.2.7, podemos tomar $\mathcal{V} = var^{gr}(A)$ para alguma superálgebra A de dimensão finita. Ainda, pela Observação 2.2.11, podemos considerar F

algebricamente fechado. Desse modo, podemos tomar uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A dada pelo Teorema 2.3.10

$$A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \dotplus J(A),$$

onde, pelo Lema 3.2.8, cada $B_i \cong F$, $\forall\, i = 1, \ldots, m$, e assim, $B_i = B_i^{(0)} \cong F$ é simples. Portanto, $B := B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ é uma subálgebra maximal semissimples de A com graduação induzida trivial.

Considere, também

$$A^{(0)} = B_1^{(0)} \oplus \ldots \oplus B_m^{(0)} \dotplus J(A)^{(0)}$$

a componente homogênea par de A. Sabemos que $A^{(0)}$ é uma subálgebra de A munida da graduação trivial. Portanto, temos $Id^{gr}(A^{(0)}) \subseteq Id(A^{(0)})$. Uma vez que $UT_2, \mathcal{G} \notin var^{gr}(A^{(0)})$, então $UT_2, \mathcal{G} \notin var(A^{(0)})$. Pelo Teorema 1.5.4, $c_n(A^{(0)})$ é polinomialmente limitada. Desse modo, pelo Teorema 1.5.2, concluímos que

$$B_i^{(0)} J(A)^{(0)} B_k^{(0)} = B_i J(A)^{(0)} B_k = 0, \ \forall i, k \in \{1, \ldots, m\} \text{ com } i \neq k.$$

Além disso, desde que $UT_2^{gr} \notin \mathcal{V}$, pelo Teorema 3.2.10, verificamos que

$$B_i^{(0)} J(A)^{(1)} B_k^{(0)} = B_i J(A)^{(1)} B_k = 0, \forall i, k \in \{1, \ldots, m\} \text{ com } i \neq k.$$

Como consequência das duas afirmações anteriores, obtemos $B_i J(A) B_k = 0$, para todos $i, k \in \{1, \ldots, m\}$, $i \neq k$.

Logo, pelo Teorema 1.5.2, $c_n(A)$ é polinomialmente limitada. Assim, pelo Teorema 3.2.9, concluímos que $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial da sequência de codimensões graduadas.

$\square$

A partir do teorema apresentado, conclui-se que as superálgebras $\mathcal{G}$, UT_2, $\mathcal{G}^{gr}$, UT_2^{gr} e D^{gr} geram supervariedades de crescimento quase polinomial. Além disso, não existem supervariedades de crescimento intermediário, isto é, ou a sequência de codimensões de uma superálgebra cresce polinomialmente, ou cresce exponencialmente.

Outrossim, segue a lista de todas as supervariedades de crescimento quase polinomial.

Corolário 3.2.12. As supervariedades $var^{gr}(\mathcal{G})$, $var^{gr}(UT_2)$, $var^{gr}(\mathcal{G}^{gr})$, $var^{gr}(UT_2^{gr})$ e $var^{gr}(D^{gr})$ são as únicas supervariedades de crescimento quase polinomial.

Capítulo 4

$*$-superálgebras

No ano de 2016, Giambruno, dos Santos e Vieira [16] caracterizaram as $*$-supervariedades geradas por $*$-superálgebras de dimensão finita com crescimento polinomial da sequência de codimensões $*$-graduadas, mostrando ser necessário e suficiente excluir cinco $*$-superálgebras da $*$-supervariedade para garantir tal resultado. Somente em 2019, Giambruno, Ioppolo e La Mattina exibiram um resultado que nos permitiu retirar a hipótese de dimensão finita da caracterização anterior. Nesse contexto, definiremos os novos conceitos transcritos para $*$-superálgebra e apresentaremos o resultado demonstrado em [16].

4.1 Definições e exemplos

Neste passo, apresentaremos o conceito de $*$-superálgebra, exibiremos alguns exemplos e definições importantes.

Iniciamos esta seção com o seguinte exemplo: considere a superálgebra D munida da graduação $(D^{(0)}, D^{(1)}) = (F(1,1), F(1,-1))$. No Exemplo 2.1.6 vimos que álgebra D admite a involução troca $*$ dada por $(a,b)^* = (b,a)$. Além disso, observe que $(D^{(0)})^* = D^{(0)}$ e $(D^{(1)})^* = D^{(1)}$.

Incitados pelo exemplo acima, dizemos que $*$ é uma **involução graduada** em uma superálgebra $A = A^{(0)} \dotplus A^{(1)}$ se essa preserva as componentes homogêneas $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$, ou seja, $\left(A^{(0)}\right)^* = A^{(0)}$ e $\left(A^{(1)}\right)^* = A^{(1)}$.

Definição 4.1.1. Uma superálgebra A munida de uma involução graduada $*$ é chamada de **$*$-superálgebra**.

Exemplo 4.1.2. Desde que toda álgebra admite a graduação trivial, toda álgebra com involução pode ser vista como uma $*$-superálgebra com graduação trivial. Logo, o conceito de $*$-superálgebras generaliza o estudo de álgebras com involução.

Exemplo 4.1.3. Se A é uma superálgebra comutativa, então A pode ser vista como uma $*$-superálgebra com involução trivial.

Exemplo 4.1.4. Consideremos a álgebra comutativa $D = F \oplus F$.

1) A álgebra D é uma $*$-superálgebra com graduação trivial e involução troca. Denotaremos essa $*$-superálgebra por D_*;

2) A álgebra D com graduação $(F(1,1),\ F(1,-1))$ e involução trivial é uma $*$-superálgebra que denotaremos por D^{gr};

3) A álgebra D com graduação $(F(1,1),\ F(1,-1))$ e involução troca é uma $*$-superálgebra que denotaremos por D^{gri}.

Exemplo 4.1.5. Consideremos a álgebra M definida no Exemplo 1.3.7.

1) A álgebra M é uma $*$-superálgebra com graduação trivial e involução reflexão. Denotaremos essa $*$-superálgebra por M_*;

2) A álgebra M com graduação não trivial $(F(e_{11}+e_{44})\oplus F(e_{22}+e_{33}), Fe_{12}\oplus Fe_{34})$ e involução reflexão é uma $*$-superálgebra. Denotaremos essa $*$-superálgebra por M^{gri}.

Lema 4.1.6. *Sejam A uma superálgebra sobre um corpo F de característica diferente de 2 munida de uma involução $*$ e φ o automorfismo induzido pela superestrutura. Então, A é uma $*$-superálgebra se, e somente se, $*\circ\varphi = \varphi\circ *$.*

Demonstração. Considere $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ uma $*$-superálgebra e φ o automorfismo de ordem no máximo dois induzido pela superestrutura dado por $\varphi(a) = \varphi(a_0 + a_1) = a_0 - a_1$, onde $a = a_0 + a_1 \in A$ com $a_0 \in A^{(0)}$ e $a_1 \in A^{(1)}$. Logo,

$$\varphi(a^*) = \varphi(a_0^* + a_1^*) = a_0^* - a_1^* = \varphi(a)^*,$$

isto é, $\varphi \circ * = * \circ \varphi$.

Suponha agora que $\varphi \circ * = * \circ \varphi$. Basta verificarmos que as componentes homogêneas de A são preservadas pela aplicação $*$. Para isso, observe que se $a_0 \in A^{(0)}$, então

$$\varphi(a_0^*) = \varphi(a_0)^* = a_0^*,$$

ou seja, $a_0^* \in A^{(0)}$. Da mesma forma, se $a_1 \in A^{(1)}$, então

$$\varphi(a_1^*) = \varphi(a_1)^* = -a_1^*,$$

ou seja, $a_1^* \in A^{(1)}$. Desse modo, A é uma $*$-superálgebra. $\square$

Observe que se $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$ é uma superálgebra munida de uma involução graduada, então podemos decompor $A^{(0)} = (A^{(0)})^+ \dot{+} (A^{(0)})^-$ e $A^{(1)} = (A^{(1)})^+ \dot{+} (A^{(1)})^-$. Mais que isso, o lema anterior nos diz o seguinte.

Corolário 4.1.7. Sejam A uma superálgebra sobre um corpo F de característica diferente de 2 munida de uma involução $*$. Então, A é uma $*$-superálgebra se, e somente se, os subespaços A^+ e A^- são subespaços graduados.

Como consequência, podemos escrever

$$A = (A^{(0)})^+ \dot{+} (A^{(1)})^+ \dot{+} (A^{(0)})^- \dot{+} (A^{(1)})^-,$$

onde $(A^{(0)})^+$ denota a **componente homogênea par simétrica**, $(A^{(1)})^+$ a **componente homogênea ímpar simétrica**, $(A^{(0)})^-$ a **componente homogênea par antissimétrica** e $(A^{(1)})^-$ a **componente homogênea ímpar antissimétrica**.

Exemplo 4.1.8. Para a $*$-superálgebra M^{gri}, temos que $(M^{(0)})^+ = F(e_{11} + e_{44}) + F(e_{22} + e_{33})$, $(M^{(1)})^+ = F(e_{12} + e_{34})$, $(M^{(0)})^- = \{0\}$ e $(M^{(1)})^-) = F(e_{12} - e_{34})$.

Se A é uma superálgebra com involução graduada $*$ e B superálgebra com involução graduada $\diamond$, um isomorfismo de $*$-superálgebras de A em B é um isomorfismo de álgebras $\varphi : A \to B$ que preserva graduação e involução, isto é,

$$\varphi((A^{(0)})^+) = (B^{(0)})^+, \quad \varphi((A^{(0)})^-) = (B^{(0)})^-,$$
$$\varphi((A^{(1)})^+) = (B^{(1)})^+ \quad \text{e} \quad \varphi((A^{(1)})^-) = (B^{(1)})^-.$$

4.2 Identidades $*$-graduadas e codimensões $*$-graduadas

Nesta seção, estenderemos os conceitos de álgebra livre, identidades polinomiais, T-ideal, variedade e sequência de codimensões para o contexto de $*$-superálgebras.

Sejam $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de variáveis, F um corpo de característica zero, φ um automorfismo de ordem no máximo 2 e $*$ uma involução graduada definidos na álgebra livre $F\langle X\rangle$. Denotamos por $F\langle X \mid \mathbb{Z}_2, *\rangle := \mathfrak{F}$ a $*$-superálgebra livre associativa unitária gerada pelos elementos $\{x_i, x_i^*, x_i^\varphi, (x_i^\varphi)^* \mid i \in \mathbb{N}\}$. Denotamos por $Y_0 = \{y_{i,0} := (x_i + x_i^\varphi) + (x_i + x_i^\varphi)^* \mid i \in \mathbb{N}\}$ o conjunto das **variáveis simétricas pares**,

$Y_1 = \{y_{i,1} := (x_i - x_i^{\varphi}) + (x_i - x_i^{\varphi})^* \mid i \in \mathbb{N}\}$ o conjunto das **variáveis simétricas ímpares**, $Z_0 = \{z_{i,0} := (x_i + x_i^{\varphi}) - (x_i + x_i^{\varphi})^* \mid i \in \mathbb{N}\}$ o conjunto das **variáveis antissimétricas pares** e $Z_1 = \{z_{i,1} := (x_i - x_i^{\varphi}) - (x_i - x_i^{\varphi})^* \mid i \in \mathbb{N}\}$ o conjunto das **variáveis antissimétricas ímpares**. Desse modo, podemos escrever X como união disjunta de $Y_0 \cup Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$, melhor dizendo, podemos escrever os elementos $f \in \mathfrak{F}$ da forma

$$f = f(y_{1,0}, \dots, y_{m,0}, y_{1,1}, \dots, y_{n,1}, z_{1,0}, \dots, z_{p,0}, z_{1,1}, \dots, z_{q,1}),$$

os quais chamaremos de **polinômios $*$-graduados**. Assim, iremos nos referir às variáveis de $Y_0 \cup Z_0$ como homogêneas de grau 0, e às variáveis de $Y_1 \cup Z_1$ como homogêneas de grau 1. Ademais, referimos as variáveis de $Y_0 \cup Y_1$ como simétricas e $Z_0 \cup Z_1$ como variáveis antissimétricas.

Além disso, observe que $\mathfrak{F}$ de fato admite uma estrutura de $*$-superálgebra, definindo $\mathfrak{F}^{(0)}$ como o espaço gerado por todos os monômios nas variáveis de X que contém um número par de variáveis de grau 1 e $\mathfrak{F}^{(1)}$ o espaço gerado por todos os monômios em variáveis de X que contém um número ímpar de variáveis de grau 1. Assim definido, temos que as componentes $\mathfrak{F}^{(0)}$ e $\mathfrak{F}^{(1)}$ são invariantes pela involução, ou seja, $\mathfrak{F}$ é uma $*$-superálgebra.

Analogamente, podemos visualizar a álgebra livre $F\langle X\rangle \subset \mathfrak{F}$ definindo $x_i = y_{i,0} + y_{i,1} + z_{i,0} + z_{i,1}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. No caso em que $F\langle X \cup Y\rangle$ é a $*$-álgebra livre, temos $F\langle X \cup Y\rangle \subset \mathfrak{F}$ onde $\{y_{i,0} + y_{i,1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos elementos simétricos e $\{z_{i,0} + z_{i,1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos elementos antissimétricos. Para a superálgebra livre, temos $F\langle X \cup Y\rangle \subset \mathfrak{F}$ onde $\{y_{i,0} + z_{i,0} \mid i \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos elementos pares e $\{y_{i,1} + z_{i,1} \mid i \in \mathbb{N}\}$ é o conjunto dos elementos ímpares.

Nosso próximo passo consiste em transcrever o conceito de identidade polinomial para $*$-superálgebras.

Definição 4.2.1. Seja A uma $*$-superálgebra. Dizemos que $f \in \mathfrak{F}$ é uma identidade $*$-graduada de A se

$$f(a^+_{1,0}, \dots, a^+_{m,0}, b^+_{1,1}, \dots, b^+_{n,1}, a^-_{1,0}, \dots, a^-_{p,0}, b^-_{1,1}, \dots, b^-_{q,1}) = 0,$$

para todos $a^+_{1,0}, \dots, a^+_{m,0} \in (A^{(0)})^+$, $b^+_{1,1}, \dots, b^+_{n,1} \in (A^1)^+$, $a^-_{1,0}, \dots, a^-_{p,0} \in (A^{(0)})^-$ e $b^-_{1,1}, \dots, b^-_{q,1} \in (A^{(1)})^-$.

Nesse caso, denotamos simplesmente por $f \equiv 0$ em A.

Exemplo 4.2.2. Para a álgebra D^{gri}, temos que $(D^{(0)})^+ = F(1,1)$, $(D^{(0)})^- = \{0\}$, $(D^{(1)})^+ = \{0\}$, $(D^{(1)})^- = F(1,-1)$. Assim, $z_{1,0}$ e $y_{1,1}$ são $*$-identidades graduadas de D^{gri}.

Exemplo 4.2.3. Desde que $(M^{(0)})^- = \{0\}$, segue que $z_{1,0} \equiv 0$ em M^{gri}. Além disso, observe que $x_{1,1}x_{2,1}$ é sempre uma identidade $*$-graduada de M^{gri}, onde $x_{i,1} = y_{i,1}$ ou $x_{i,1} = z_{i,1}$, para $i = 1, 2$.

Neste passo, consideramos o **ideal das identidades $*$-graduadas** de A, isto é,

$$Id^{gri}(A) = \{f \in \mathfrak{F} \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}.$$

Note que, $Id^{gri}(A)$ é um ideal e é invariante sob qualquer endomorfismo de $\mathfrak{F}$ que preserva a graduação e que comuta com a involução. Em outras palavras, $Id^{gri}(A)$ é um T_2^*-ideal de $\mathfrak{F}$, dito o T_2^*-ideal de A.

A seguir descreveremos o T_2^*-ideal de algumas $*$-superálgebras.

Proposição 4.2.4. [16, Theorem 5.1]

1. $Id^{gri}(D_*) = \langle Id^*(D_*), y_{1,1}, z_{1,1}\rangle_{T_2^*}$;
2. $Id^{gri}(M_*) = \langle Id^*(M_*), y_{1,1}, z_{1,1}\rangle_{T_2^*}$;
3. $Id^{gri}(D^{gr}) = \langle Id^{gr}(D^{gr}), z_{1,0}, z_{1,1}\rangle_{T_2^*}$.

Demonstração. Desde que D_* é uma $*$-superálgebra com graduação trivial, podemos ver $Id^*(D_*) \subseteq Id^{gri}(D_*)$, então $\langle Id^*(D_*), y_{11}, z_{11}\rangle_{T_2^*} \subseteq Id^{gri}(D_*)$.

Por outro lado, seja $f \in Id^{gri}(D_*)$ multilinear. Podemos supor, sem perda de generalidade, que $f = f(y_{1,0}, \dots, y_{m,0}, z_{1,0}, \dots, z_{n,0})$. Como f é uma identidade $*$-graduada de D_*, temos que $f \equiv 0$ $(Id^*(D_*))$. Assim, concluímos que $Id^{gri}(D_*) \subseteq \langle Id^*(D_*), y_{11}, z_{11}\rangle_{T_2^*}$. Logo, $Id^{gri}(D_*) = \langle Id^*(D_*), y_{11}, z_{11}\rangle_{T_2^*}$.

Analogamente, os demais T_2^*-ideais podem ser verificados. □

Neste passo, denotamos a classe de todas as $*$-superálgebras que satisfazem as identidades $*$-graduadas de uma $*$-superálgebra A por $var^{gri}(A)$ a **$*$-supervariedade** gerada por A, em outras palavras, $B \in var^{gri}(A)$ se, e somente se, $Id^{gri}(A) \subseteq Id^{gri}(B)$.

Os polinômios $*$-graduados multilineares desempenham um papel importante no estudo da PI-teoria, desde que, sobre um corpo de característica zero, $Id^{gri}(A)$ é completamente determinado pelas identidades multilineares $*$-graduadas. Desse modo, tomamos conhecimento da seguinte definição,

$$P_n^{gri} = \text{span}_F\{w_{\sigma(1)} \dots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n,\ w_i = y_{i,g_i} \text{ ou } w_i = z_{i,g_i},\ g_i = 0, 1\}$$

é o espaço dos **polinômios multilineares $*$-graduados**.

Vimos nos casos anteriores que um método bem estabelecido para entender o crescimento das identidades polinomiais de uma dada PI-álgebra pode ser obtido através da sequência numérica que associamos a essa álgebra, chamada de sequência de codimensões (ou φ-codimensões para φ-álgebras). Nesse contexto, consideramos a seguinte definição.

Definição 4.2.5. Para $n \geq 1$, a **n-ésima codimensão $*$-graduada** de uma $*$-superálgebra A é dada por $c_n^{gri}(A) := \dim_F \dfrac{P_n^{gri}}{P_n^{gri} \cap Id^{gri}(A)}$.

Para uma $*$-supervariedade $\mathcal{V}$ gerada por uma $*$-superálgebra A, definimos a n-ésima codimensão $*$-graduada de $\mathcal{V}$ como $c_n^{gri}(\mathcal{V}) = c_n^{gri}(A)$.

Análogo ao estudo de álgebras ordinárias, o próximo lema nos permitirá considerarmos o corpo algebricamente fechado sempre que formos tratar de resultados a respeito das codimensões $*$-graduadas.

Lema 4.2.6. *Seja F um corpo, K uma extensão de F e A uma $*$-superálgebra sobre F. Então $A \otimes K$ vista como K-álgebra é uma $*$-superálgebra com $((A \otimes K)^{(g_i)})^+ = (A^{(g_i)})^+ \otimes K$ e $((A \otimes K)^{(g_i)})^- = (A^{(g_i)})^- \otimes K$, para $g_i = 0, 1$. Além disso, $c_n^{gri}(A) = c_n^{gri}(A \otimes K)$.*

Observe que se A é uma $*$-superálgebra, então podemos considerar P_n, P_n^{φ} como subespaços de P_n^{gri}, o que nos permite considerarmos $Id(A) \subseteq Id^{\varphi}(A) \subseteq Id^{gri}(A)$. De forma similar aos estudos anteriores, buscamos relacionar a codimensão ordinária de uma $*$-superálgebra A com a sua φ-codimensão e a codimensão $*$-graduada. Essa correspondência pode ser verificada a seguir.

Lema 4.2.7. *[16, Lemma 3.1,] Seja A uma $*$-superálgebra. Então, para todo $n \geq 1$, temos*

1. $c_n(A) \leq c_n^*(A) \leq c_n^{gri}(A)$;

2. $c_n(A) \leq c_n^{gr}(A) \leq c_n^{gri}(A)$;

3. $c_n^{gri}(A) \leq 4^n c_n(A)$.

Como consequência, temos o seguinte.

Corolário 4.2.8. Seja A uma $*$-superálgebra. Então, A é uma PI-álgebra se, e somente se, sua sequência de codimensões $*$-graduadas $c_n^{gri}(A)$, $n \geq 1$, é exponencialmente limitada.

Desse modo, com o intuito de obter resultados que nos permitem limitar a sequência de codimensões $*$-graduadas de uma $*$-superálgebra por uma função polinomial, podemos estender as definições de crescimento polinomial, exponencial e quase polinomial para $*$-superálgebras, de forma análoga ao caso ordinário.

Exemplo 4.2.9. As $*$-supervariedades $var^{gri}(D_*)$, $var^{gri}(M_*)$, $var^{gri}(D^{gr})$, $var^{gri}(D^{gri})$ e $var^{gri}(M^{gri})$ têm crescimento exponencial. De fato, pelo Lema 4.2.7, temos

$$c_n^*(D_*) \leq c_n^{gri}(D_*), \quad c_n^*(M_*) \leq c_n^{gri}(M_*), \quad c_n^{gr}(D^{gr}) \leq c_n^{gri}(D^{gr}),$$

$$c_n^*(M^{gri}) \leq c_n^{gri}(M^{gri}) \quad \text{e} \quad c_n^{gr}(D^{gri}) \leq c_n^{gri}(D^{gri}).$$

Desde que $c_n^*(D_*), c_n^*(M_*)$, $c_n^{gr}(D^{gr})$, $c_n^*(M^{gri})$ e $c_n^{gr}(D^{gri})$ têm crescimento exponencial, segue que $c_n^{gri}(D_*), c_n^{gri}(M_*)$, $c_n^{gri}(D^{gr})$, $c_n^{gri}(M^{gri})$ e $c_n^{gri}(D^{gri})$ crescem exponencialmente.

Para uma composição $(n_1, n_2, n_3, n_4) := \langle n \rangle$ de n, definimos $P_{\langle n \rangle}$ como o espaço dos polinômios $*$-graduados multilineares nas variáveis $y_{1,0}, \ldots, y_{n_1,0}$, $y_{1,1}, \ldots, y_{n_2,1}$, $z_{1,0}, \ldots, z_{n_3,0}$, $z_{1,1}, \ldots, z_{n_4,1}$. Observe que em P_n^{gri} existem $\binom{n}{n_1,n_2,n_3,n_4} := \binom{n}{\langle n \rangle}$ subespaços isomorfos a $P_{\langle n \rangle}$. Logo, temos

$$P_n^{gri} \cong \bigoplus_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} P_{\langle n \rangle}.$$

Além disso, para todo $n \geq 1$, a **$\langle n \rangle$-ésima codimensão $*$-graduada** de A é dada por

$$c_{\langle n \rangle}(A) := \dim_F \frac{P_{\langle n \rangle}}{P_{\langle n \rangle} \cap Id^{gri}(A)}.$$

Pela discussão anterior, a relação entre $c_{\langle n \rangle}(A)$ e $c_n^{gri}(A)$ é dada por

$$c_n^{gri}(A) = \sum_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} c_{\langle n \rangle}(A). \tag{4.1}$$

Observação 4.2.10. Note que se $\{f_i(x_1, \ldots, x_n)\}_{1 \leq i \leq m}$ é uma base de P_n (mod $Id(A)$), restringindo nossas variáveis às substituições específicas, podemos considerar $\{f_i(y_{1,0}, \ldots, y_{n_1,0}, y_{1,1}, \ldots, y_{n_2,1}, z_{1,0}, \ldots, z_{n_3,0}, z_{1,1}, \ldots, z_{n_4,1})\}$, $1 \leq i \leq m$, um conjunto linearmente independente de $P_{\langle n \rangle}$ módulo $Id^{gri}(A)$. Assim,

$$c_{\langle n \rangle}(A) \leq c_n(A).$$

Finalizaremos esta seção calculando os T_2^*-ideais das $*$-superálgebras D^{gri} e M^{gri} e descrevendo o comportamento das codimensões $*$-graduadas. Para isso, considere as seguintes observações.

Observação 4.2.11. Sejam $f \in \mathfrak{F}$ e $I = \langle z_{1,0},\, x_{1,1}x_{2,1} \rangle_{T_2^*}$, então $x_{1,1} f x_{2,1} \in I$, onde $x_{i,1}$ é uma variável homogênea de grau 1.

Demonstração. Sem perda de generalidade, podemos supor que f é um monômio. Desde que $\mathfrak{F}$ admite uma estrutura de superálgebra, segue que o produto de uma variável homogênea de grau 1 por uma de grau 0 resultará em um monômio pertencente à componente ímpar $\mathfrak{F}^{(1)}$. Desde que o produto de dois elementos de grau 1 pertence ao ideal I e $z_{1,0} \in I$ podemos supor, sem perda de generalidade, que o monômio f contém apenas variável de do tipo $y_{i,0}$. Desse modo, f contém um número par de variáveis de grau 1, logo $[x_{1,1}, f] \in \mathfrak{F}^{(1)}$. Finalmente, basta observar que

$$x_{1,1} f x_{2,1} = [x_{1,1}, f]x_{2,1} + f x_{1,1} x_{2,1}.$$

Uma vez que, cada termo à direita pertence ao ideal I, segue o resultado.

□

Teorema 4.2.12. *[16, Theorem 6.3]* $Id^{gri}(M^{gri}) = \left\langle z_{1,0},\, x_{1,1}x_{2,1} \right\rangle_{T_2^*}$.

Demonstração. Seja $I = \left\langle z_{1,0},\, x_{1,1}x_{2,1} \right\rangle_{T_2^*}$. Pelo Exemplo 4.2.3, temos que $I \subseteq Id^{gri}(M^{gri})$. Para concluir a igualdade entre os ideais, basta vermos que, para uma identidade $*$-graduada multilinear f de grau n de M^{gri}, temos $f \equiv 0 \pmod I$.

Desde que, a Observação 4.2.11 nos diz que qualquer monômio contendo pelo menos duas variáveis homogêneas de grau 1 está em I segue que cada monômio de f contém no máximo 1 variável homogênea de grau 1. Além disso, observe que $[y_{1,0}, y_{2,0}] \in (\mathfrak{F}^{(0)})^-$, o que acarreta $[y_{1,0}, y_{2,0}] \equiv 0 \pmod I$, ou seja, $y_{i,0}y_{j,0} \equiv -y_{j,0}y_{i,0} \pmod{I}$. Desse modo, temos duas possibilidades a considerar: ou $f \equiv \alpha y_{1,0} \dots y_{n,0} \pmod I$, ou f é combinação linear de elementos da forma $y_{i_1,0} \dots y_{i_t,0} x_{1,1} y_{i_{t+1},0} \dots y_{i_{n-1},0}$, onde $0 \leq t \leq n-1$, $i_1 < \dots < i_t$ e $i_{t+1} < \dots < i_{n-1}$.

Para o primeiro caso, tomando uma avaliação com $y_{i,0} = 1$ a matriz identidade em M^{gri}, para todo $i = 1, \dots, n$, temos $f \equiv \alpha 1 \pmod I$. Desde que f é uma identidade $*$-graduada de M^{gri}, temos que $\alpha = 0$ e $f \equiv 0 \pmod I$.

Para o segundo caso, tome $i_1 < \dots < i_t$ e considere a avaliação $y_{i_1,0} = \dots = y_{i_t,0} = e_{11} + e_{44}$, $y_{i_{t+1},0} = \dots = y_{i_n,0} = e_{22} + e_{33}$ e $x_{1,1} = e_{12} + e_{34}$ se $x_{1,1}$ é uma variável simétrica ímpar, ou $x_{1,1} = e_{12} - e_{34}$, se $x_{1,1}$ é uma variável antissimétrica ímpar. De todo modo, note que nessa avaliação,

$$\alpha_{i_1,\dots,i_{n-1}} y_{i_1,0} \dots y_{i_t,0} x_{1,1} y_{i_{t+1},0} \dots y_{i_{n-1},0} = \alpha_{i_1,\dots,i_{n-1}} e_{12}$$

e todo monômio de f que difere desse, resulta em zero nessa avaliação. Desde que f é uma identidade $*$-graduada de M^{gri}, temos que $\alpha_{i_1,\dots,i_{n-1}} = 0$. Logo, $f \in I$ e $Id^{gri}(M^{gri}) \subseteq I$, concluindo assim a igualdade. □

Teorema 4.2.13. $Id^{gri}(D^{gri}) = \left\langle z_{1,0},\, y_{1,1} \right\rangle_{T_2^*}$ *e* $c_n^{gri}(D^{gri}) = 2^n$.

Demonstração. Seja I o T_2^*-ideal gerado por $z_{1,0}$ e $y_{1,1}$. Vimos no Exemplo 4.2.2 que $I \subseteq Id^{gri}(D^{gri})$.

Para a inclusão contrária, seja $f \in Id^{gri}(D^{gri})$ uma identidade $*$-graduada multilinear. Uma vez que $[y_{1,0}, y_{2,0}]$ e $[z_{1,1}, z_{2,1}]$ são consequências de $z_{1,0}$ e $[y_{1,0}, z_{1,1}]$ é consequência de $y_{1,1}$ temos que esses polinômios $*$-graduados pertencem à I. Logo, podemos considerar, sem perda de generalidade,

$$f \equiv \alpha y_{1,0} \dots y_{m,0} z_{1,1} \dots z_{n,1} \pmod{I}.$$

Quemos ver que $f \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\, I)$, para isso, considere $a = (1,1)$ e $b = (1,-1)$, temos que

$$f(a, \dots, a, b, \dots, b) = \alpha(1, (-1)^n) \neq 0.$$

Desde que f é uma identidade $*$-graduada de D^{gri}, temos que $\alpha = 0$. Consequentemente $Id^{gri}(D^{gri}) \subseteq I$, concluindo assim a igualdade entre os T_2^*-ideais.

Visto que, todo polinômio $*$-graduado multilinear contendo n_1 variáveis homogêneas pares simétricas e n_3 variáveis homogêneas ímpares antissimétricas pode ser escrito como combinação linear do monômio $y_{1,0} \dots y_{n_1,0} z_{1,1} \dots z_{n_3,1}$ módulo $Id^{gri}(D^{gri})$, temos que $c_{\langle n \rangle}(D^{gri}) = 1$, para todo $(n_1, 0, n_3, 0) = \langle n \rangle$ partição de n. Logo, temos que

$$c_n^{gri}(D^{gri}) = \sum_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} c_{\langle n \rangle}(D^{gri}) = \sum_{n_1=0}^{n} \binom{n}{n_1} = 2^n.$$

□

4.3 $*$-superálgebras simples e o expoente $*$-graduado

Nesta seção, apresentaremos a versão do Teorema de Wedderburn-Malcev para $*$-superálgebras. Em seguida, classificaremos as $*$-superálgebras simples de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero. Por fim, definiremos o expoente $*$-graduado de uma $*$-superálgebra A e exibiremos um método para calculá-lo quando essa tem dimensão finita.

Antes disso, tomamos conhecimento das seguintes definições.

Definição 4.3.1. Sejam A uma $*$-superálgebra, φ o automorfismo de ordem no máximo dois induzido pela superestrutura, $*$ a involução graduada de A e I um ideal de A. Dizemos que I é um **ideal $*$-graduado** se I é um ideal com graduação induzida e também um $*$-ideal. De forma equivalente, temos $I^\varphi = I$ e $I^* = I$.

Além disso, dizemos que uma $*$-superálgebra A é uma **$*$-superálgebra simples** se $A^2 \neq \{0\}$ e os únicos ideais $*$-graduados de A são A e $\{0\}$. De imediato, observe que se uma $*$-superálgebra A é uma álgebra simples ou uma $*$-álgebras $*$-simples, então A é uma $*$-superálgebra simples. Porém, uma $*$-superálgebra simples pode não ser uma álgebra simples, nem uma $*$-álgebra $*$-simples.

Exemplo 4.3.2. Considere a $*$-superálgebra $M_n(F) \oplus cM_n(F)$ com graduação $(M_n(F), cM_n(F))$ e involução dada por $(a+bc)^\dagger = a^* - cb^*$, onde $*$ denota a involução transposta ou simplética. Vimos que $\frac{1+c}{2}M_n(F)$ e $\frac{1-c}{2}M_n(F)$ são os únicos ideais dessa álgebra, porém nenhum é um $*$-ideal. Portanto, $M_n(F) \oplus cM_n(F)$ não é simples, mas é $*$-simples. Logo, essa álgebra é uma $*$-superálgebra simples.

Exemplo 4.3.3. A $*$-superálgebra $A \cong M_{k,l}(F)$, com $k \geq 1$, $k \geq l \geq 0$, com involução transposta ou simplética uma $*$-superálgebra simples, já que essa é simples. Observe que a involução simplética só está definida para o caso em que $k = l$ ou $l = 0$ e k é par.

Observação 4.3.4. Se A é uma $*$-superálgebra simples, então A não é nilpotente. De fato, basta observar que, se A é uma $*$-superálgebra simples nilpotente de índice n, então A^{n-1} é um ideal $*$-graduado. Logo, ou $A^{n-1} = \{0\}$, o que contraria a minimalidade de n, ou $A^{n-1} = A$ e nesse caso $A^2 = \{0\}$, um absurdo.

Proposição 4.3.5. Considere A uma $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero e φ o automorfismo induzido pela superestrutura. Então:

1. $J(A)$ é um ideal $*$-graduado;

2. Se A é uma $*$-superálgebra simples, então A é simples ou A é $*$-simples ou $A = B \oplus B^\varphi$ para algum ideal $*$-simples B.

Demonstração. Para o primeiro item, vimos no Teorema 2.3.8 que $J(A)$ é um φ-ideal de A, isto é, invariante sob todo automorfismo e antiautomorfismo φ de ordem no máximo 2 de A. Desse modo, $J(A)$ é um ideal $*$-graduado.

Para o segundo item, suponha que A é uma $*$-superálgebra simples que não é simples como álgebra ordinária. Desde que o primeiro item diz que o radical de Jacobson é um $*$-ideal graduado e A não é nilpotente, segue que $J(A) = 0$ e, pelo Teorema 1.4.6, A é semissimples. Assim, podemos escrever $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$, onde cada B_i é um ideal bilateral minimal de A e é simples.

Observe que se $B_i^* = B_i$, então A contém um ideal $*$-simples, isto é, o próprio B_i. Do contrário, temos que $B_i \oplus B_i^*$ é um ideal $*$-simples. De todo modo, A contém um ideal $*$-simples, o qual chamaremos de B. Note que, se $B^\varphi = B$, então B é um ideal $*$-graduado de A, consequentemente, $A = B$ é $*$-simples. Por fim, se $B^\varphi \neq B$, então $B \oplus B^\varphi$ é um ideal $*$-graduado de A, consequentemente, $A = B \oplus B^\varphi$ para algum ideal $*$-simples B de A. $\square$

Finalmente, exibimos a versão do Teorema de Wedderburn-Malcev para uma $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo de característica zero, a qual pode ser consultada em [16].

Teorema 4.3.6. *Sejam A uma $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero e φ o automorfismo induzido pela superestrutura de A. Então,*

1. *$A = B \dotplus J(A)$, onde B é uma subálgebra maximal semissimples de A com $B^* = B$ e $B^\varphi = B$;*

2. *se A é uma $*$-superálgebra semissimples, então A é soma direta de $*$-superálgebras simples.*

Relembramos que, nos casos anteriores, o comportamento assintótico da sequência de codimensões, em cada contexto, pode ser estudada a partir da estrutura da álgebra, fornecida pelas versões do Teorema de Wedderburn-Malcev. Com o objetivo de obter tal resultado, apresentamos a classificação das $*$-superálgebras simples, provada pelos autores em [16].

Teorema 4.3.7. *Seja A uma $*$-superálgebra simples de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então A é isomorfa a uma das seguintes $*$-superálgebras:*

(1) $M_{k,l}(F)$, com $k \geq 1$, $k \geq l \geq 0$, com involução transposta ou simplética. Este último caso ocorre apenas quando $k = l$ ou quando $l = 0$ e k é par;

(2) $M_{k,l}(F) \oplus M_{k,l}(F)^{op}$, com $k \geq 1$, $k \geq l \geq 0$, com graduação induzida e involução troca;

(3) $M_n(F) \dotplus cM_n(F)$, com involução dada por $(a + bc)^\dagger = a^* - cb^*$, onde $*$ denota a involução transposta ou simplética;

(4) $M_n(F) \dotplus cM_n(F)$, com involução dada por $(a + bc)^\dagger = a^* + cb^*$, onde $*$ denota a involução transposta ou simplética;

(5) $(M_n(F)+cM_n(F))\oplus(M_n(F)+cM_n(F))^{op}$*, com graduação dada por*

$$(M_n(F)\oplus M_n(F)^{op}, c(M_n(F)\oplus M_n(F)^{op}))$$

e involução troca.

Demonstração. Sejam A uma $*$-superálgebra simples e φ o automorfismo induzido pela superestrutura. Pela Proposição 4.3.5, ou A é simples como álgebra ordinária ou A é $*$-simples ou $A=B\oplus B^{\varphi}$, para algum ideal $*$-simples B.

Para o primeiro caso, suponha que A é simples. Pela demonstração do Teorema 2.3.15, temos que A é isomorfa a $M_{k,l}(F)$, com $k\geq 1$ e $k\geq l\geq 0$. Desde que a demonstração do Teorema 2.3.14 nos diz que, nesse caso, A admite apenas a involução simplética ou transposta e essas são involuções graduadas em $M_{k,l}(F)$, temos que A é isomorfa a uma $*$-superálgebra do tipo (1).

Para o segundo caso, suponha que A é $*$-simples, mas não é simples. Nesse caso, vimos no Exemplo 2.3.9 que $A=B\oplus B^{op}$ com involução troca, para alguma subálgebra simples B de A. Basta então estudarmos a graduação induzida pelo automorfismo φ nessa álgebra. Nesse contexto, se $B^{\varphi}=B$, então $(B^{op})^{\varphi}=B^{op}$. Pela demonstração do Teorema 2.3.15, temos que $B\cong M_{k,l}(F)$ com $k\geq 1$, $k\geq l\geq 0$, isto é, A é isomorfa a uma $*$-superálgebra do tipo (2).

Por outro lado, se tivermos $B^{\varphi}\neq B$, então $B^{\varphi}=B^{op}$. Desse modo, podemos considerar $\varphi((a,b))=(\varphi_0(b),\varphi_1(a))$, onde $(a,b)\in B\oplus B^{op}$ e $\varphi_0,\varphi_1: B\to B$ são mapas lineares. Seja $\diamond$ a involução troca em A. Observe que, para todo $(a,b)\in A$, temos

$$(\varphi((a,b)))^{\diamond}=(\varphi_0(b),\varphi_1(a))^{\diamond}=(\varphi_1(a),\varphi_0(b)); \tag{4.2}$$

$$\varphi((a,b)^{\diamond})=\varphi((b,a))=(\varphi_0(a),\varphi_1(b)). \tag{4.3}$$

Desde que φ comuta com $\diamond$, pela igualdade entre (4.2) e (4.3) resulta que $\varphi_0=\varphi_1$ e assim $\varphi((a,b))=(\varphi_0(b),\varphi_0(a))$, para todo $(a,b)\in A$. Além disso, se $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A$, temos

$$\varphi((a_1,b_1)(a_2,b_2))=\varphi((a_1a_2,b_2b_1))=(\varphi_0(b_2b_1),\varphi_0(a_1a_2)); \tag{4.4}$$

$$\varphi((a_1,b_1))\varphi((a_2,b_2)))=(\varphi_0(b_1)\varphi_0(b_2),\varphi_0(a_2)\varphi_0(a_1)). \tag{4.5}$$

Uma vez que φ é um automorfismo de ordem no máximo dois, segue de (4.4) e (4.5) que

$$(\varphi_0(b_2b_1),\varphi_0(a_1a_2))=(\varphi_0(b_1)\varphi_0(b_2),\varphi_0(a_2)\varphi_0(a_1)),$$

para todos $(a_1, b_1), (a_2, b_2) \in A$. Essa igualdade nos permite concluir que φ_0 é um antiautomorfismo de ordem no máximo 2 na álgebra B, isto é, φ_0 é uma involução em B. Assim sendo, considerando $\varphi_0 := *$, temos que $\varphi((a,b)) = (b^*, a^*)$, para todo $(a,b) \in A$, onde $*$ é, na verdade, a involução transposta ou simplética em B.

Ainda precisamos entender como esses argumentos induzem uma superestrutura na álgebra A. Para isso, observe que, para todo $(a,b) \in A$, podemos escrever

$$(a,b) = \frac{1}{2}(a + b^*, a^* + b) + \frac{1}{2}(a - b^*, -a^* + b),$$

isto é,

$$(a,b) = \frac{1}{2}((a,b) + \varphi((a,b))) + \frac{1}{2}((a,b) - \varphi((a,b))).$$

Desde que $A^{(0)} = \{(a,b) + \varphi((a,b)) \mid (a,b) \in A\}$ e $A^{(1)} = \{(a,b) - \varphi((a,b)) \mid (a,b) \in A\}$, as igualdades acima nos permitem reescrever

$$A^{(0)} = \{(a, a^*) \mid a \in B\} \text{ e } A^{(1)} = \{(a, -a^*) \mid a \in B\}.$$

Finalmente, basta observar que $A^{(0)} \cong M_n(F)$ e $A^{(1)} = (1,-1)A^{(0)} = cA^{(0)} \cong cM_n(F)$, onde $c^2 = 1$ e $c^\diamond = -c$. Nesse caso, pelos Teoremas 2.3.14 e 2.3.15, temos que $A \cong M_n(F) \dot{+} cM_n(F)$ com involução dada por $(a+cb)^\dagger = a^* - cb^*$, onde $*$ denota a involução transposta ou simplética, isto é, obtemos uma álgebra do tipo (3).

Para o quarto caso, suponha que $A = B \oplus B^\varphi$, para algum ideal $*$-simples B. Se B é simples, então $B \cong M_n(F)$ com involução simplética ou transposta. Pela demonstração do Teorema 2.3.15, $A \cong M_n(F) \dot{+} cM_n(F)$ com graduação $(M_n(F), cM_n(F))$. Logo, se $\dagger$ é uma involução em A, temos $(a + cb)^\dagger = a^\dagger + cb^\dagger = a^* + cb^*$, onde $*$ denota a involução transposta ou simplética, ou seja, A é isomorfa a uma $*$-superálgebra do tipo (4).

Por outro lado, se B é $*$-simples, mas não é simples, pelo Exemplo 2.3.9 temos que $B = I \oplus I^{op}$ com involução troca, para alguma subálgebra simples I de A. Desse modo, note que

$$A = (I \oplus I^{op}) \oplus (I \oplus I^{op})^\varphi = (I \oplus I^\varphi) \oplus (I^{op} \oplus (I^{op})^\varphi)$$

Observe que, pelo Teorema 2.3.15, $I \oplus I^\varphi \cong M_n(F) \oplus cM_n(F)$. Além disso, pelo Exemplo 2.3.9 e propriedades da álgebra oposta, temos que

$$I^{op} \oplus (I^{op})^\varphi \cong I^{op} \oplus (I^{op})^{op} \cong (I \oplus I^{op})^{op} \cong (M_n(F) \oplus cM_n(F))^{op}.$$

Desse modo, $A \cong (M_n(F) \oplus cM_n(F)) \oplus (M_n(F) \oplus cM_n(F))^{op}$, com graduação dada por

$$(M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}, c(M_n(F) \oplus M_n(F)^{op}))$$

e involução troca, isto é, A é isomorfa a uma $*$-superálgebra do tipo (5).

□

Finalizamos esta seção com uma breve discussão a respeito do expoente $*$-graduado de uma $*$-superálgebra. Mais tarde, iremos exibir uma caracterização das $*$-superálgebras de crescimento polinomial da sequência de codimensões $*$-graduadas a partir do expoente $*$-graduado. Nesse intuito, recordamos o Corolário 4.2.8, o qual nos diz que a sequência de codimensões $*$-graduadas de uma PI-álgebra A é exponencialmente limitada, isto é,

$$0 \leq c_n^{gri}(A) \leq \alpha^n, \text{ onde } \alpha \geq 2.$$

Desse modo, faz sentido definirmos o expoente $*$-graduado de A como

$$exp^{gri}(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n^{gri}(A)}.$$

Exemplo 4.3.8. Como consequência da Proposição 4.2.4, obtemos $c_n^{gri}(D_*) = c_n^*(D_*) = 2^n$. Logo, $exp^{gri}(D_*) = 2$.

Note que se $Id^{gri}(A) \subseteq Id^{gri}(B)$, temos que $c_n^{gri}(B) \leq c_n^{gri}(A)$, logo $exp^{gri}(B) \leq exp^{gri}(A)$.

A seguir exibimos um importante limitante superior e inferior para a sequência de codimensões $*$-graduadas de uma $*$-superálgebra.

Teorema 4.3.9. *[21, Theorem 5] Seja A um $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então existe um inteiro não negativo q e constantes não nulas C_1, C_2, t_1 e t_2 tais que*

$$C_1 n^{t_1} q^n \leq c_n^{gri}(A) \leq C_2 n^{t_2} q^n.$$

Consequentemente, $exp^{gri}(A) = q$.

No caso em que A um $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero, dos Santos [33] exibiu um método para calcular o expoente $*$-graduado. Para isso, seja $A = B \dotplus J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A dada por 4.2.8, consideramos todos os produtos

$$B_{i,1} J B_{i,2} J \ldots J B_{i,k-1} J B_{i,k} \neq 0, \tag{4.6}$$

onde $B_{i,1}, \ldots, B_{i,k}$ são $*$-subálgebras simples que aparecem na decomposição de B como soma direta de $*$-superálgebras simples e $J := J(A)$. Então,

$$exp^{gri}(A) = \max \dim_F(B_{i,1} \oplus \ldots \oplus B_{i,k}),$$

onde o máximo é tomado em i satisfazendo (4.6).

Antes de partirmos para o próximo corolário, observamos que, assim como a sequência de codimensões é invariante por extensões por escalares, o PI-expoente também é invariante por extensões, isto é, $exp_F^{gri}(A) = exp_K^{gri}(A \otimes K)$, onde K é uma extensão do corpo F. Consequentemente, estendendo a um corpo algebricamente fechado, obtemos como corolário do teorema anterior o seguinte resultado.

Corolário 4.3.10. Seja A um $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Então $exp^{gri}(A)$ existe, é um inteiro não negativo e $exp^{gri}(A) \leq \dim_F(A)$.

Por fim, apresentamos uma caracterização das $*$-superálgebras de crescimento polinomial através do expoente $*$-graduado, que pode ser provada de maneira análoga ao Teorema 2.3.20, estendendo a um corpo algebricamente fechado antes.

Teorema 4.3.11. *Seja A uma $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Então A tem crescimento polinomial da sequência de codimensões $*$-graduadas se, e somente se, $exp^{gri}(A) \leq 1$.*

4.4 $*$-supervariedades de crescimento polinomial

Finalizamos este trabalho com a caracterização das $*$-supervariedades de crescimento polinomial via exclusão de álgebras.

Com o propósito de obter resultados para álgebras de dimensão qualquer, em 2019, Giambruno, Ioppolo e La Mattina exibiram em [9] condições suficientes para garantirmos que uma $*$-supervariedade é gerada por uma $*$-superálgebra de dimensão finita.

Teorema 4.4.1. *Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-supervariedade. Se $D_* \notin \mathcal{V}$, então $\mathcal{V} = var^{gri}(A)$ para alguma $*$-superálgebra A finitamente gerada.*

Enunciamos o teorema seguinte, cuja demonstração é análoga ao caso de álgebras com superinvolução, mostrado pelos autores em [1].

Teorema 4.4.2. *Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-supervariedade gerada por uma $*$-superálgebra B finitamente gerada sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então $\mathcal{V} = var^{gri}(A)$, para alguma $*$-superálgebra A de dimensão finita sobre F.*

Como corolário dos Teoremas 4.4.1 e 4.4.2, obtemos o seguinte.

Corolário 4.4.3. Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-supervariedade sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Se $D_* \notin \mathcal{V}$, então $\mathcal{V} = var^{gri}(A)$ para alguma $*$-superálgebra A de dimensão finita.

Finalmente, estamos aptos a exibir os resultados expostos em [16]. Antes disso, observe que escrevendo $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$ como soma de inteiros não negativos e denotando por t a soma $n_2 + n_3 + n_4$, temos

$$\binom{n}{n_1, n_2, n_3, n_4} \leq \frac{n!}{n_1!} = \frac{n!}{(n-t)!} \leq bn^t,$$

para alguma constante b. Além disso, se existe uma constante q tal que $t = n_2 + n_3 + n_4 < q$, então

$$\sum_{n-n_1<q} \binom{n}{\langle n \rangle} \leq cn^q,$$

para alguma constante c. Enunciamos o resultado obtido no seguinte lema.

Lema 4.4.4. *Seja $n \geq 1$ um inteiro e $n_1 + n_2 + n_3 + n_4 = n$ uma soma de inteiros não negativos. Se $n - n_1 = n_2 + n_3 + n_4 < q$, para algum inteiro positivo q, então*

$$\sum_{n-n_1<q} \binom{n}{\langle n \rangle} \leq cn^q,$$

para alguma constante c.

Lema 4.4.5. *Considere A uma $*$-superálgebra de crescimento polinomial da sequência de codimensões ordinárias. Se existe um natural q tal que qualquer monômio contendo um produto de pelo menos q variáveis de $Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ é uma identidade $*$-graduada de A, então $c_n^{gri}(A)$ é polinomialmente limitada.*

Demonstração. Suponha $c_n(A) \leq \alpha n^t$, para algumas constantes α e t. A relação entre $c_{\langle n \rangle}(A)$ e $c_n(A)$ nos diz que

$$c_{\langle n \rangle}(A) \leq c_n(A) \leq \alpha n^t.$$

Note que se existe tal inteiro q, então para todo $n - n_1 = n_2 + n_3 + n_4 \geq q$ temos que $P_{\langle n \rangle} \cap Id^{gri}(A) = P_{\langle n \rangle}$ e consequentemente, $c_{\langle n \rangle}(A) = 0$. Portanto, pelo Lema 4.4.4, para todo $n - n_1 \leq q$ concluímos que,

$$c_n^{gri}(A) = \sum_{\langle n \rangle} \binom{n}{\langle n \rangle} c_{\langle n \rangle}(A) \leq \alpha n^t \sum_{n-n_1 \leq q} \binom{n}{\langle n \rangle} \leq \alpha c n^{t+q},$$

como desejamos.

□

Antes do próximo resultado, considere a seguinte proposição.

Proposição 4.4.6. Seja A uma $*$-superálgebra. Se existe um inteiro $q \geq 1$ para o qual $x_{i_1} \ldots x_{i_q}$ é uma identidade $*$-graduada de A, onde $x_{i_k} \in Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$, para todo $k = 1, \ldots, q$, então todo monômio contendo pelo menos q variáveis em $Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ é uma identidade $*$-graduada de A.

De fato, vimos na Observação 2.1.8 que o produto de Jordan entre um elemento simétrico e um antissimétrico é antissimétrico. Além disso, o comutador de Lie entre dois elementos simétricos é antissimétrico. Utilizando essas propriedades, a demonstração segue análoga a da Proposição 2.2.21.

Assim sendo, estamos capacitados a demonstrar uma primeira caracterização das $*$-supervariedades de crescimento polinomial, a partir da sequência de codimensões ordinárias e de sua decomposição de Wedderburn-Malcev.

Teorema 4.4.7. *[16, Teorema 8.3] Seja A uma $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F. Então $c_n^{gri}(A)$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

1. *$c_n(A)$ é polinomialmente limitada;*
2. *$A = B \dotplus J(A)$, onde B é uma subálgebra maximal semissimples de A com graduação induzida trivial e involução induzida trivial.*

Demonstração. Inicialmente, supomos $c_n^{gri}(A)$ polinomialmente limitada. Em vista do Teorema 4.2.7 temos que $c_n(A)$ é polinomialmente limitada. Assim, o primeiro item está verificado.

Para o segundo item, tomamos uma decomposição de Wedderburn-Malcev $A = B \dotplus J(A)$, onde $B = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$ é uma $*$-superálgebra maximal semissimples. Desde que $c_n^{gri}(A)$ é polinomialmente limitada, segue do Teorema 4.3.11 que $exp^{gri}(A) \leq 1$. Desse modo, temos que $B_i J(A) B_j = \{0\}$ para todo $i \neq j$ com $i, j \in \{1, \ldots, m\}$. Portanto, $\dim_F B_i = 1$, para todo $i = 1, \ldots, m$. Em outras palavras, temos que $B_i \cong F$ para todo $i \in \{1, \ldots, m\}$. Pelas demonstrações dos Teoremas 3.1.12 e 3.2.9, temos que B possui graduação trivial e involução induzida trivial.

Reciprocamente, tomamos como verdadeiras as condições 1 e 2. Consideramos $A = B \dotplus J(A) = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \dotplus J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev, onde B possui graduação e involução induzida trivial. Desde que B está munida da involução trivial, decorre da demonstração do Teorema 3.1.12 que $A^- \subseteq J(A)$. Da mesma forma, como B possui graduação trivial, segue da demonstração do Teorema 3.2.9 que $A^{(1)} \subseteq J(A)$. Assim sendo, temos que $x_{i_1} \ldots x_{i_q}$ é uma identidade $*$-graduada de A, onde q é o índice de nilpotência de $J(A)$ e $x_{i_k} \in Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$, para todo $k = 1, \ldots, q$.

Desse modo, pela Proposição 4.4.6, qualquer monômio contendo pelo menos q variáveis em $Y_1 \cup Z_0 \cup Z_1$ é uma identidade $*$-graduada de A. Desde que $c_n(A)$ é polinomialmente limitada, decorre do Lema 4.4.5 que $c_n^{gri}(A)$ é polinomialmente limitada, como gostaríamos. □

Nosso próximo passo consiste em obter um resultado de caracterização via exclusão de $*$-superálgebras da $*$-supervariedade. Nesse intuito, consideramos os seguintes lemas.

Lema 4.4.8. *Sejam A uma $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \dotplus J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A, onde $B_1, \ldots, B_m$ são $*$-superálgebras simples. Se existem inteiros $r, s \in \{1, \ldots, m\}$, $r \neq s$, tais que $B_r^{(0)} J(A)^{(1)} B_s^{(0)} \neq \{0\}$, então $M^{gri} \in var^{gri}(A)$.*

Demonstração. Sejam $B_r^{(0)}$ e $B_s^{(0)}$, com $r \neq s$, tais que $B_r^{(0)} J(A)^{(1)} B_s^{(0)} \neq 0$. Dessa forma, existe $j \in J(A)^{(1)}$ tal que $i_1 j i_2 \neq 0$, onde i_1 e i_2 são as unidades em $B_r^{(0)}$ e $B_s^{(0)}$, respectivamente. Tomamos ainda, $k \geq 1$ o maior inteiro tal que $i_1 J(A) i_2 \subset J(A)^k$ e consideramos a álgebra $\overline{A} := A/J(A)^{k+1}$.

Desde que $J(A)$ é um ideal $*$-graduado, $\overline{A}$ é uma $*$-superálgebra. Além disso, observe que toda identidade $*$-graduada de A é uma identidade $*$-graduada de $\overline{A}$, isto é, $\overline{A} \in var^{gri}(A)$.

Consideramos também, as imagens $\overline{i_1}$, $\overline{i_2}$, $\overline{i_1 j i_2}$ e $\overline{i_2 j^* i_1}$ dos elementos i_1, i_2, $i_1\, j\, i_2$ e $i_2\, j^* i_1$, respectivamente, e definimos

$$S = \mathrm{span}_F\{\overline{i_1},\ \overline{i_2},\ \overline{i_1 j i_2},\ \overline{i_2 j^* i_1}\}.$$

Uma vez que i_1 e i_2, são ortogonais e idempotentes, $k \geq 1$ foi tomado de modo que $i_1 j i_2 j^*$, $j^* i_1 j i_2 \in J(A)^{k+1}$, segue que S é uma subálgebra de $\overline{A}$. Mais que isso, S é uma $*$-superálgebra com

$$(S^{(0)})^+ = \mathrm{span}\{\overline{i_1}, \overline{i_2}\},\ \ (S^{(0)})^- = \{0\},$$

$$(S^{(1)})^+ = \mathrm{span}\{\overline{i_1 j i_2} + \overline{i_2 j^* i_1}\}\ \text{ e }\ (S^{(1)})^- = \mathrm{span}\{\overline{i_1 j i_2} - \overline{i_2 j^* i_1}\}.$$

Ademais, seja $\phi : S \to M^{gri}$ o homomorfismo de $*$-superálgebras definido por:

$$\overline{i_1} \mapsto e_{11} + e_{44}, \qquad \overline{i_2} \mapsto e_{22} + e_{33}, \qquad \overline{i_1 j i_2} \mapsto e_{12}, \qquad \overline{i_2 j^* i_1} \mapsto e_{34}.$$

Observamos que ϕ é de fato um isomorfismo que preserva a graduação e involução. Logo, $\overline{A}$ possui uma $*$-superálgebra isomorfa a M^{gri}. Portanto, $M^{gri} \in var^{gri}(\overline{A}) \subseteq var^{gri}(A)$, como gostaríamos.

□

Lema 4.4.9. *Sejam A e B $*$-superálgebras onde B tem graduação trivial. Se $B \notin var^{gri}(A)$ então $B \notin var^{*}(A^{(0)})$.*

Demonstração. Suponha que $B \in var^{*}(A^{(0)})$. Observe que $Id^{gri}\,(A^{(0)}) = \langle Id^{*}(A^{(0)}), y_{1,1}, z_{1,1}\rangle$ e $Id^{gri}(B) = \langle Id^{*}(B), y_{1,1}, z_{1,1}\rangle$. Desde que $Id^{*}(A^{(0)}) \subseteq Id^{*}(B)$, segue que $B \in var^{gri}(A^{(0)}) \subseteq var^{gri}(A)$.

□

Lema 4.4.10. *Seja A uma $*$-superálgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado de característica zero e $B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \dotplus J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev dada pelo Teorema 4.3.6. Se M_*, D_*, D^{gr}, $D^{gri} \notin var^{gri}(A)$, então $B_i \cong F$, para todo $i = 1, \ldots, m$.*

Demonstração. Considere a decomposição de Wedderburn-Malcev de A dada pelo enunciado e seja $A^{(0)} = B^{(0)} \dotplus J(A)^{(0)} = B_1^{(0)} \oplus \ldots \oplus B_k^{(0)} \dotplus J(A)^{(0)}$ a componente homogênea par dessa álgebra. Desse modo, $A^{(0)}$ é uma álgebra com involução induzida e graduação trivial.

Observe que, em decorrência do Lema 4.4.9, M_*, $D_* \notin var^{*}(A^{(0)})$. Assim, pelo Teorema 3.1.13, $c_n^{*}(A^{(0)}) = c_n^{gri}(A^{(0)})$ é polinomialmente limitada. Além disso, pelo Lema 3.1.11, temos que $B_i^{(0)} \cong F$, para todo $i = 1, \ldots, k$. Uma vez que cada álgebra B_i é uma $*$-superálgebra simples, pelo Teorema 4.3.7 temos apenas três casos a considerar: ou $B_i \cong F$; ou $B_i \cong F \oplus cF$ com graduação (F, cF) e involução dada por $(a + cb)^* = a - cb$; ou $B_i \cong F \oplus cF$ com graduação (F, cF) e involução dada por $(a + cb)^* = a + cb$.

Note que, no segundo e terceiro caso, $B_i \cong D^{gri}$ e $B_i \cong D^{gr}$, respectivamente. Desde que essas $*$-superágebras não pertencem à $var^{gri}(A)$, segue que a única possibilidade é $B_i \cong F$, para todo $i = 1, \ldots, k$. □

Exibiremos aqui, com o auxílio dos Teoremas 4.4.1 e 4.4.2, a demonstração mais geral do resultado provado em [16], retirando-se a hipótese de dimensão finita.

Teorema 4.4.11. *Seja $\mathcal{V}$ uma $*$-supervariedade sobre um corpo de característica zero. Então $c_n^{gri}(\mathcal{V})$ é polinomialmente limitada se, e somente se, M_*, D_*, D^{gr}, D^{gri}, $M^{gri} \notin \mathcal{V}$.*

Demonstração. Assuma que $c_n^{gri}(\mathcal{V})$ é polinomialmente limitada. Pelo Exemplo 4.2.9 as $*$-supervariedades geradas pelas $*$-superálgebras M_*, D_*, D^{gr}, D^{gri} e M^{gri} têm crescimento exponencial, logo essas não pertencem à $\mathcal{V}$.

Reciprocamente, suponha que M_*, D_*, D^{gr}, D^{gri}, $M^{gri} \notin \mathcal{V}$. Desde que $D_* \notin \mathcal{V}$, pelo Corolário 4.4.3, podemos considerar $\mathcal{V} = var^{gri}(A)$ para alguma $*$-superálgebra A de dimensão finita. Além disso, vimos que sempre que quisermos tratar de resultados a respeito da sequência de codimensões $*$-graduadas, podemos considerar o corpo algebricamente fechado. Desse modo, podemos tomar $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m \dot{+} J(A)$ uma decomposição de Wedderburn-Malcev de A dada pelo Teorema 4.3.6, onde, pelo Lema 4.4.10, $B_i \cong F$ é simples, para todo $i = 1, \ldots, m$. Desse modo, B possui graduação trivial e involução trivial, ou seja, $B_i = B_i^{(0)}$. Além disso, pela demonstração do Lema 4.4.10 temos que $c_n(A^{(0)}) \leq c_n^*(A^{(0)})$ é polinomialmente limitada, isso implica que $exp(A^{(0)}) \leq 1$, ou seja,

$$B_i^{(0)} J(A)^{(0)} B_l^{(0)} = \{0\}, \text{ para todos } i, l \in \{1, \ldots, k\}, i \neq l.$$

Suponha que exista i, $l \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq l$, tal que $B_i^{(0)} J(A)^{(1)} B_l^{(0)} \neq \{0\}$. Pelo Teorema 4.4.8, $M^{gri} \in var^{gri}(A)$, outra contradição. Portanto,

$$B_i^{(0)} J(A)^{(1)} B_l^{(0)} = \{0\}, \text{ para todos } i, l \in \{1, \ldots, k\}, i \neq l.$$

Consequentemente, para todos $i, l \in \{1, \ldots, k\}$, $i \neq l$, temos que $B_i J(A) B_l = \{0\}$. Assim, pelo Teorema 1.5.2, temos que $c_n(A)$ é polinomialmente limitada. Desse modo, temos satisfeita as condições do Teorema 4.4.7, logo concluímos que $c_n^{gri}(A)$ é polinomialmente limitada e o teorema está demonstrado.

□

Por fim, concluímos que se A é uma $*$-superálgebra, então a sequência de codimensões $*$-graduadas $\{c_n^{gri}(A)\}_{n\geq 1}$, é polinomialmente limitada ou cresce exponencialmente. Além disso, identificamos as $*$-supervariedades de crescimento quase polinomial.

Corolário 4.4.12. As $*$-superálgebras $M_*, D_*, D^{gr}, D^{gri}$ e M^{gri} geram as únicas $*$-supervariedades de crescimento quase polinomial.

4.5 Considerações finais

Finalizamos este trabalho com uma breve motivação para futuras pesquisas na PI-teoria, apresentando alguns resultados que vem sendo desenvolvidos na linha de pesquisa apresentada até o momento. Para isso, consideramos F um corpo de característica zero e G um grupo qualquer.

A próxima definição generaliza o conceito de superálgebra.

Definição 4.5.1. Dizemos que A é uma **álgebra G-graduada** se existem subespaços $\{A^{(g)}\}_{g\in G}$, chamados componentes homogêneas, satisfazendo

$$A = \bigoplus_{g\in G} A^{(g)} \quad \text{e} \quad A^{(g)} A^{(h)} \subseteq A^{(gh)}, \text{ para todos } g, h \in G.$$

Além disso, uma involução $*$ em uma álgebra G-graduada A é dita ser uma **involução G-graduada** se $(A^{(g)})^* = A^{(g)}$, para todo $g \in G$. Em outras palavras, uma involução G-graduada nada mais é que uma involução que preserva as componentes homogêneas. Assim sendo, dizemos que uma álgebra G-graduada A é uma **$(G, *)$-álgebra** se A admite uma involução G-graduada. Observe que, no caso em que $G = \mathbb{Z}_2$, A é uma $*$-superálgebra, isto é, a definição apresentada generaliza a definição de uma $*$-superálgebra, assim como álgebras com involução. Desse modo, faz-se pertinente o estudo de tais álgebras como uma motivação apresentada neste espaço.

Exemplo 4.5.2. Toda $*$-álgebra A é uma $(G, *)$-álgebra munida da **G-graduação trivial** dada por $A^{(1)} = A$ e $A^{(g)} = \{0\}$ para todo $g \neq 1 \in G$. Em particular, denotamos por D_* a $(G, *)$-álgebra $D = F \oplus cF$ com G-graduação trivial e involução troca, onde $c^2 = 1$.

Seja G um grupo finito e considere a álgebra de grupo FG com **G-graduação canônica** definida por $(FG)^{(g)} = \text{span}_F\{g\}$. Considere o subgrupo de G, $C_p = \langle h \rangle$ o grupo cíclico de ordem prima p gerado por h, onde p divide $|G|$.

Exemplo 4.5.3. FC_p é uma subálgebra G-graduada de FG munida da G-graduação $FC_p = \bigoplus_{i=0}^{p-1} FC_p^{(h^i)}$, onde $FC_p^{(h^i)} = \text{span}_F\{h^i\}$, $0 \leq i \leq p-1$ e $FC_p^{(g)} = 0$ para todo $g \notin \langle h \rangle$. Denotamos por $(FC_p)^G$ a $(G, *)$-álgebra FC_p com G-graduação definida anteriormente e involução trivial.

Em particular, se a ordem de G é par, denotamos por D_*^G a álgebra D com involução troca e G-graduação $(D_*)^{(1)} = F$, $(D_*)^{(c)} = cF$ e $(D_*)^{(g)} = \{0\}$ para todo $g \notin C_2 = \langle c \mid c^2 = 1 \rangle$.

Exemplo 4.5.4. Para cada $g \in G$, $g \neq 1$, a álgebra M com G-graduação

$$M^{(1)} = \text{span}_F\{e_{11} + e_{44}, e_{22} + e_{33}\},\ M^{(g)} = \text{span}_F\{e_{12}, e_{34}\} \text{ e } M^{(h)} = \{0\},$$

para todo $h \notin \{1, g\}$, e munida com involução reflexão é uma $(G, *)$-álgebra, denotada por $M_{(g,*)}$.

No caso em que $g = 1$, definimos $M_{(1,*)}$ a $(G, *)$-álgebra M com G-graduação trivial e involução reflexão.

Seja G um grupo finito e $F\langle X \mid G, * \rangle$ a álgebra associativa unitária livre gerada pelo conjunto $X = \bigcup_{g \in G} X_g^*$, onde $X_g^* = \{x_{1,g}, x_{1,g}^*, \ldots\}$ e $X_{g_1}^* \cap X_{g_2}^* = \emptyset$ para todo $g_1 \neq g_2$. Desse modo, um elemento $f \in F\langle X \mid G, * \rangle$ será chamado de **polinômio $(G, *)$-graduado**. Observamos que $F\langle X \mid G, * \rangle$ admite uma estrutura de álgebra $(G, *)$-graduada. Assim sendo, faz sentido a seguinte definição.

Definição 4.5.5. Um polinômio $(G,*)$-graduado

$$f(x_{1,g_1}, x^*_{1,g_1}, \ldots, x_{n,g_n}, x^*_{n,g_n}) \in F\langle X \mid G, *\rangle$$

é uma $(G,*)$**-identidade** em uma $(G,*)$-álgebra A se

$$f(a_1^{(g_1)}, (a_1^{(g_1)})^*, \ldots, a_n^{(g_n)}, (a_n^{(g_n)})^*) = 0,$$

para todos $a_1^{(g_1)} \in A^{(g_1)}, \ldots, a_n^{g_n} \in A^{(g_n)}$. Nesse caso, denotamos por $f \equiv 0$ em A.

Portanto, podemos considerar $Id^{(G,*)}(A)$ o conjunto de todas as $(G,*)$-identidades de A. Além disso, definimos $\mathcal{V} = var^{(G,*)}(A)$ a $(G,*)$-variedade gerada por A, isto é, $B \in \mathcal{V}$ se, e somente se, $Id^{(G,*)}(A) \subseteq Id^{(G,*)}(B)$. Ademais, para um grupo finito G, consideramos o espaço dos $(G,*)$-polinômios multilineares de grau n, $P_n^{(G,*)} = \text{span}\{x_{\sigma(1)}^{(g_1)} \ldots x_{\sigma(n)}^{(g_n)} \mid \sigma \in S_n,\ g_1, \ldots, g_n \in G\}$.

Definição 4.5.6. Para $n \geq 1$, a n-ésima $(G,*)$-codimensão $c_n^{(G,*)}(A)$ de uma $(G,*)$-álgebra A é dada por

$$c_n^{(G,*)}(A) := \dim_F \frac{P_n^{(G,*)}}{P_n^{(G,*)} \cap Id^{(G,*)}(A)}.$$

É de interesse o caso em que a sequência de $(G,*)$-codimensões de uma $(G,*)$-álgebra A é **polinomialmente limitada**. Nesse caso, dizemos que A tem **crescimento polinomial** da sequência de $(G,*)$-codimensões.

A fim de apresentar resultados que estendem as caracterizações anteriores para uma $(G,*)$-álgebra, temos o seguinte resultado provado por Oliveira, dos Santos e Vieira [30] no caso em que G é um grupo abeliano finito e $\mathcal{V} = var^{(G,*)}(A)$ para uma $(G,*)$-álgebra A de dimensão finita.

Teorema 4.5.7. *Seja $\mathcal{V}$ uma variedade gerada por uma $(G,*)$-álgebra de dimensão finita sobre F. Então, $\mathcal{V}$ tem crescimento polinomial se, e somente se, uma das duas opções ocorrem*

1. *ordem de G é par e D_*, D_*^G, $(FC_p)^G$ e $M_{(g,*)} \notin \mathcal{V}$;*
2. *ordem de G é ímpar e D_*, $(FC_p)^G$ e $M_{(g,*)} \notin \mathcal{V}$;*

para todo primo p que divide a ordem de G e para todo $g \in G$.

Assim, algumas perguntas tornam-se motivações para contínuas pesquisas. A título de exemplo, tal resultado é válido para uma $(G,*)$-variedade gerada por uma $(G,*)$-álgebra de dimensão qualquer? Podemos encontrar condições suficientes para garantir que uma $(G,*)$-variedade seja gerada por uma $(G,*)$-álgebra de dimensão finita? Nos questionamos ainda a respeito de outras caracterizações de crescimento polinomial da sequência de $(G,*)$-codimensões, tais como a partir da sequência de cocaracteres e da estrutura da álgebra. Também, podemos ampliar nossos estudos na classificação das subvariedades das variedades de crescimento quase polinomial ou trabalhar nos estudos das $(G,*)$-variedades unitárias e também nas minimais. Tais questionamentos confirmam que a PI-teoria é um caminho de grandes oportunidades a serem exploradas.

Referências Bibliográficas

[1] E. Aljadeff, A. Giambruno and Y. Karasik. *Polynomial identities with involution, superinvolutions and the Grassmann envelope*. Proc. Amer. Math. Soc. 145(5) (2017) 1843–1857.

[2] S. A. Amitsur and J. Levitzki. *Minimal identities for algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 449-463.

[3] P. M. Cohn. Algebra. Vol. 1,2,3. John Wiley e Sons, London-New York-Sydney, 1997.

[4] J. Colombo and P. Koshlukov. *Identities with involution for the matrix algebra of order two in characteristic p*. Israel J. Math. **146** (2005) 337-355.

[5] V. Drensky. Free Algebras and PI-Algebras. Springer-Verlag Singapore, 2000.

[6] V. Drensky. *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0*. Algebra i Logika **20** (1981) 282-290.

[7] V. Drensky and A. Giambruno. *Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for* 2×2 *matrices with involution*. Canadian J. Math. **46** (1994) 718-733.

[8] B. Farb and R. Dennis. Noncommutative Algebra. New York: Springer-Verlag, 1993.

[9] A. Giambruno, A. Ioppolo and D. La Mattina. *Superalgebras with Involution or Superinvolution and Almost Polynomial Growth of the Codimensions*. Algebr. Represent. Theor. **22** (2019) 961–976.

[10] A. Giambruno and D. La Mattina. *Graded polynomial identities and codimensions: Computing the exponential growth*. Advances in Mathematics **225** (2010) 859-881.

[11] A. Giambruno and S. Mishchenko. *Polynomial Growth of the $*$-codimensions and Young Diagrams.* Comm. Algebra 29(1) (2001) 277-284.

[12] A. Giambruno and S. Mishchenko. *On star-varieties with almost polynomial growth.* Algebra Coll. **8** (2001) 33-42.

[13] A. Giambruno; S. Mishchenko and M. Zaicev. *Polynomial Identities on superalgebras and almost polynomial growth.* Special issue dedicated to Alexei Ivanovich Kostrikin, Comm. Algebra **29** (2001) 3787-3800.

[14] A. Giambruno, C. Polcino Milies and A. Valenti. *Star-polynomial identities: Computing the exponential growth of the codimensions.* J. Algebra **469** (2017) 302-322.

[15] A. Giambruno and A. Regev. *Wreath products and P.I. algebras.* J. Pure Appl. Algebra **35** (1985) 133-149.

[16] A. Giambruno, R. B. dos Santos and A. C. Vieira. *Identities of *-superalgebras and almost polynomial growth.* Linear and Multilinear Algebra 64:3 (2016) 484-501.

[17] A. Giambruno and M. Zaicev. *A characterization of algebras with polynomial growth of the codimensions.* Proc. Amer. Math. Soc. **129** (2000) 59-67

[18] A. Giambruno and M. Zaicev. *Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimative.* Adv. Math. **142** (1999) 221-243.

[19] A. Giambruno and M. Zaicev. *On codimension growth of finitely generated associative algebras.* Adv. Math. **140** (1998) 145-155.

[20] A. Giambruno and M. Zaicev. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. Mathematical Surveys e Monographs, American Mathematical Society, **122**, Providence R.I., 2005.

[21] A. S. Gordienko. *Amitsur's conjecture for associative algebras with a generalized Hopf action.* J. Pure Appl. Algebra **217** (2013) 1395-1411.

[22] I. Kaplansky. *Rings with a polynomial identity.* Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948) 496-500.

[23] A. R. Kemer. Ideals of Identities of Associative Algebras. AMS Translations of Mathematical Monograph. Vol **87**, 1988.

[24] A. R. Kemer. Varieties of finite rank. Proc. 15th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsh **2**, 1979 (in Russian).

[25] A. R. Kemer. *Solution of the problem as to whether associative algebras have a finite basis of identities.* (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR **298** (1988), no. 2, 273-277; translation in Soviet Math. Dokl. **37** (1988), no. 1, 60-64.

[26] D. Krakowski and A. Regev. *The polynomial identities of the Grassmann algebra.* Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973) 429-438.

[27] Yu. N. Malcev. *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices* (Russian). Algebra i Logika **10** (1971) 393-400; English translation: Algebra and Logic **10** (1971).

[28] C. P. Milies and S. K. Sehgal. An introduction to group rings. Kluwer Academic Publishers, 2002.

[29] S. Mishchenko and A. Valenti. *A star-variety with almost polynomial growth.* J. Algebra **223** (2000) 66-84.

[30] L. M. Oliveira, R. B. dos Santos and A. C. Vieira. *Varieties of group graded algebras with graded involution of almost polynomial growth.* A aparecer em Algebr. Represent. Theor.

[31] A. Regev. *Existence of identities in $A \otimes B$.* Israel J. Math. **11** (1972) 131–152.

[32] L. H. Rowen. Polynomial identities in ring theory. Academic press, INC. London. 1980.

[33] R. B. dos Santos. *$*$-Superalgebras and exponential growth.* J. Algebra **473** (2017) 283-306.

[34] W. Specht. *Gesetze in Ringen.* Mathematische Zeitschrift **52** (1950) 557-589.

[35] I. Sviridova. *Finitely generated algebras with involution and their identities.* J. Algebra **383** (2013) 144-167.

[36] E. J. Taft. *Invariant Wedderburn factors.* Illinois J. Math.**1** (1957) 565–573.

[37] A. Valenti. *The graded identities of upper triangular matrices of size two.* J. Pure Appl. Algebra **172** (2002) 325-335.