

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências exatas
Programa de Pós-graduação em Física

Paula D'Avila Machado

**COERÊNCIA QUÂNTICA DE ESTADOS DE FENDA:
preparação e caracterização parcial de estados bipartidos assimétricos**

BELO HORIZONTE
2020

Paula D'Avila Machado

**COERÊNCIA QUÂNTICA DE ESTADOS DE FENDA:
preparação e caracterização parcial de estados bipartidos assimétricos**

Tese de doutorado apresentada ao Programa de Pós-graduação em Física da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para a obtenção do título de Doutor em Física.

Orientador: Prof. Dr. Sebastião José Nascimento de Pádua

BELO HORIZONTE
2020

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

D259c D'avila, Paula Machado.

Coerência quântica de estados de fenda: preparação e caracterização parcial de estados bipartidos assimétrico/ Paula Machado D'avila. – 2020. 102 f. : il.

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua.

Tese (doutorado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

Bibliografia: f. 84-90.

1. Teoria da Informação Quântica. 2. Mecânica quântica. 3. Coerência quântica. I. Título. II. Pádua, Sebastião José Nascimento de. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 530.145.6 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente tese, intitulada "**Coerência quântica de estados de fenda: preparação e caracterização parcial de estados bipartidos assimétricos**" de autoria de **PAULA D'ÁVILA MACHADO** submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **DOUTORA EM CIÊNCIAS**, em seis de novembro de 2020.

Belo Horizonte, 06 de novembro de 2020.

Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua

Prof. Pablo Lima Saldanha

Orientador da estudante

Departamento de Física/UFMG

Departamento de Física/UFMG

Prof. Carlos Henrique Monken

Dra. Gláucia Murta Guimarães

Departamento de Física/UFMG

Heinrich-Heine-Universität Düsseldorf

Prof. Antonio Zelaquett Houry

Dr. Cristhiano Andre Gamarano Duarte Carneiro Silva

Departamento de Física/UFF

Chapman University



Documento assinado eletronicamente por **Carlos Henrique Monken, Professor do Magistério Superior**, em 16/11/2020, às 14:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sebastião Jose Nascimento de Padua, Membro de comissão**, em 16/11/2020, às 14:52, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Antonio Zelaquett Khoury, Usuário Externo**, em 16/11/2020, às 17:24, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Pablo Lima Saldanha, Servidor(a)**, em 16/11/2020, às 17:31, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



Documento assinado eletronicamente por **Cristhiano Andre Gamarano Duarte Carneiro Silva, Usuário Externo**, em 17/11/2020, às 10:46, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 6º, § 1º, do [Decreto nº 8.539, de 8 de outubro de 2015](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **0415992** e o código CRC **01173DEC**.

Agradecimentos

A carreira acadêmica é uma jornada longa, que exige paciência, disposição e perseverança. Uma trilha que forja habilidades individuais daqueles que se arriscam por ela, e cuja linha de chegada é impossível de ser alcançada solitariamente. Chegar até aqui é resultado do apoio e colaboração de muitas pessoas, direta ou indiretamente. Sei que não conseguirei mencionar todos aqueles que contribuíram para a conclusão deste trabalho, mas de antemão quero agradecer a todos aqueles que somaram comigo ao longo do percurso. Minha gratidão a todos.

Primeiramente agradeço ao Deus trino, criador e mantenedor do universo. Pela maior de todas as providências, enviada por meio de Jesus Cristo. Pela providência diária, pela força nos momentos de fraqueza. À Ele todas as coisas. *Ut ex invisibilibus visibilia fierent. Soli Deo Gloria.*

Ao meu esposo Renan, por trilhar a jornada comigo. Pelo incentivo e apoio emocional. Pela parceria nos estudos e momentos de discussão sobre os temas da pesquisa. Por tornar a jornada mais leve, sendo um exemplo de cientista para mim.

Aos meus pais pelo amor e ensino. Por me apoiarem em todo o tempo e não medirem sacrifícios para que eu pudesse alcançar essa conquista, que é tanto minha quanto deles.

Ao meu irmão André, juntamente com minha cunhada Fernanda e meu sobrinho Gustavo. Por todo incentivo e apoio.

À minha grande família (sogros, cunhado, avós, tios(as) e primos,) pelo apoio. Também à minha família das igrejas CRE e IPBV pela amizade e suporte em orações.

Ao meu orientador, professor Sebastião de Pádua, pelo incentivo para que eu não desistisse, e por mostrar que é possível fazer um trabalho de excelência se mantendo humano e gentil para com todos.

Agradeço aos professores do grupo de óptica quântica pelas instruções e boas conversas sobre ciência. Em especial ao professor Leonardo Neves, pela contribuição no trabalho.

Aos professores que contribuíram para minha formação. Principalmente àqueles do departamento de física, pela disponibilidade em transmitir conhecimento, dentro e fora da sala de aula. Também sou grata pelos cursos e provas difíceis que me induziram à superação e amadurecimento.

Aos companheiros do laboratório de Óptica Quântica, pelo auxílio e aprendizado.

Especialmente à Mariana e ao Tutu, por terem me ajudado diretamente nos experimentos.

Aos colegas da sala 3064, pela convivência e parceria. Especialmente à Ana Paula e à Sheilinha, pelos "papo cabeça" e xícaras de chá. Momentos de recobrar o ânimo para voltar ao trabalho.

Aos colegas de turma, pelos anos de convivência e apoio mútuo, que tornaram o processo mais leve.

À banca examinadora da tese de doutorado, pelas discussões, e por todas as correções e contribuições.

Agradeço ao CNPq, à CAPES e FAPEMIG, pelo financiamento de bolsas, projetos e congressos que tornam a ciência brasileira possível e tornou possível meu contínuo aprendizado.

“Grandes são as obras do SENHOR, dignas de estudo para quem as ama.”Salmo 111 : 2

Resumo

O desenvolvimento de métodos de preparação e caracterização de estados quânticos e emaranhados são de grande importância para o progresso da informação quântica e o desenvolvimento de novas tecnologias. Nesta tese, estudamos a preparação de estados de fenda de dimensão $D_1 \times D_2$ e apresentamos resultados experimentais para dimensão 2×3 . Quanto à caracterização, analisamos como a coerência quântica das partes de um estado bipartido qualquer, nos fornece informações a respeito do emaranhamento e da matriz densidade do estado conjunto. Além disso, discutimos as possibilidades de obtenção experimental da coerência quântica de estados de fenda, e apresentamos resultados obtidos para *qutrits*.

Palavras-chave: Estados de fenda. Coerência quântica. Estados bipartidos $D_1 \times D_2$.

Abstract

The development of methods for preparing and characterizing quantum and entangled states is of great importance for the progress of quantum information and the development of new technologies. In this thesis, we study a slit state preparation of dimension $D_1 \times D_2$ and presented experimental results for dimension 2×3 . As for the characterization, we analyze how the quantum coherence of the parts of any bipartite state, provides us with information about the entanglement and the density matrix of the joint state. Also, we discuss how to obtain experimental quantum coherence of slit states, and present results obtained for *qutrits*.

Keywords: Slit states. Quantum coherence. $D_1 \times D_2$ bipartite states.

Sumário

	Sumário	10
	Introdução	13
I	DISCUSSÃO TEÓRICA	15
1	COERÊNCIA	16
1.1	Conceito geral	16
1.2	Os quantificadores de coerência	17
1.2.1	Sistemas bidimensionais	17
1.2.2	Sistemas de dimensão maior ou igual a três	19
1.3	A manifestação da coerência é dependente do observador	20
2	ESTADOS DE FENDA	23
2.1	Visão geral	23
2.1.1	Discretização do momento linear transversal	23
2.1.2	Estados bipartidos	25
2.2	Estados bipartidos produzidos a partir da Conversão Paramétrica Descendente	27
2.2.1	Projeção da imagem do cristal sobre o plano das fendas.	29
2.2.2	Mudando o perfil transversal do feixe de bombeio	32
2.3	Preparação de estados de um <i>qudit</i> por meio de traço parcial de um estado bipartido	38
3	MEDIÇÕES EM SISTEMAS DE ESTADOS DE FENDA	40
3.1	Operadores de medição e probabilidades de detecção	40
3.2	Paralelo entre medições de estados de fenda e o formalismo de marcadores de caminho	43
3.3	Medição da norma l_1 de <i>qudits</i> codificados em caminho transversal	47
3.4	Medição de estados bipartidos	51
3.4.1	Medição conjunta de imagem e padrão de interferência	51
3.4.2	Probabilidades marginais e a operação traço parcial	55
II	EXPERIMENTOS	58
4	ESTADOS 2×3	59

4.1	Preparação e medições dos coeficientes diagonais do estado conjunto	59
4.2	Análise qualitativa dos resultados das medições plano de imagem-plano de Fourier	64
4.3	Análise qualitativa dos resultados das medições marginais no plano de Fourier	65
5	NORMA l_1 DE QUTRITS	68
5.1	<i>Qutrits</i> obtidos a partir de estados 2×3	68
5.2	Obtenção da coerência quântica	69
III	CARACTERIZAÇÃO DE ESTADOS BIPARTIDOS VIA COERÊNCIA DAS PARTES	75
6	A COERÊNCIA QUÂNTICA DAS PARTES E A CARACTERIZAÇÃO DO ESTADO CONJUNTO	76
6.1	A matriz densidade conjunta	76
6.2	O emaranhamento	79
	Conclusão final	84
	REFERÊNCIAS	85
	APÊNDICES	92
	APÊNDICE A – CÁLCULOS GERAIS PARA A PROPAGAÇÃO	93
A.1	Ferramentas da Óptica de Fourier	93
A.1.1	Sistemas ópticos tratados como operadores	94
A.2	Propagação na projeção de imagem e da transformada de Fourier	95
A.3	A propagação dos estados quânticos	96
	APÊNDICE B – CÁLCULOS REFERENTES À PREPARAÇÃO E MEDIÇÃO DOS ESTADOS DE FENDA	97
B.1	Estado 2×3 maximamente emaranhado com correlação entre todas as aberturas	97
B.2	Operadores de medição e distribuição de probabilidade dos estados bipartidos	98
B.3	A seleção dos estados de Schmidt na medição plano de Fourier-Transformada de Fourier	99

	APÊNDICE C – CÁLCULOS ENVOLVENDO O TRAÇO PARCIAL E A DISTRIBUIÇÃO DE PROBABILIDADE MAR- GINAL	101
C.1	Estado de um fóton à partir do traço parcial - exemplo no sistema i	101
C.2	O uso de um dos detectores como <i>bulk</i> (incapaz de identificar a posição do fóton detectado) corresponde a operação de traço parcial	102

Introdução

Sistemas que manifestam propriedades quânticas possuem características estranhas ao tratamento clássico. Nesse sentido, podemos citar a necessidade de descrição de observáveis por meio de operadores incompatíveis, dando origem às relações de incerteza de Heisenberg e às dualidades interferométricas; outros exemplos são o antibunching de fótons, o comportamento dual da matéria e o emaranhamento. Este último, em particular, se mostrou útil na realização de tarefas envolvendo a codificação e a transmissão segura de informação [1]. Por isso, o aprimoramento de técnicas de preparação e caracterização dos estados emaranhados, é essencial para a aplicação da mecânica quântica no desenvolvimento de novas tecnologias.

No que diz respeito à preparação, fótons gerados no processo da Conversão Paramétrica Descendente (CPD) vêm sendo amplamente utilizados na preparação de estados emaranhados em diversos graus de liberdade, dentre eles o momento linear [2–11]. O uso de fendas múltiplas para discretizar o momento linear transversal desses fótons possibilita a preparação de estados de altas dimensões e com diferentes simetrias, chamados de estados de fenda. Na literatura anterior ao presente trabalho, os estudos sobre o assunto estiveram focados nos estados de fenda bipartidos em que as partes possuem a mesma dimensão. Assim, neste trabalho procuramos analisar as técnicas de preparação de estados de fenda de uma forma geral, considerando estados de dimensão quaisquer $D_1 \times D_2$.

Assim como o emaranhamento, o comportamento dual de sistemas quânticos (ora como partícula, ora como onda) também foi alvo de muitos trabalhos, principalmente no início do desenvolvimento do formalismo da mecânica quântica [12]. Ao longo dos anos, muitos autores redirecionaram o foco (inicialmente voltado para a natureza dos sistemas quânticos) para os efeitos produzidos pelo aparente comportamento dual da natureza, a saber, as dualidades interferométricas [13–15]. A busca por uma relação quantitativa para essas dualidades foi de encontro à necessidade de se quantificar a potencialidade de um estado quântico produzir interferência, capacidade esta nomeada como coerência. Para estados de mais de dois níveis, em 2014 Baumgratz e coautores fomentaram discussões sobre o assunto dentro da literatura recente, propondo alguns quantificadores [16]. Desde então, diferentes autores têm estudado métodos de obtenção experimental da coerência de estados quânticos [17, 18]. Neste trabalho, estudamos a coerência de estados de fenda de dimensão maior que dois, analisando diferentes técnicas experimentais para a obtenção da coerência desses estados. Além disso, no caso de estados bipartidos, discutimos o papel da coerência quântica das partes na caracterização do estado conjunto.

O texto da tese está dividido em três partes, sendo a primeira composta por

revisão teórica e nossa contribuição nas análises teóricas sobre a preparação e medição da coerência dos estados de fenda. No Cap.1, discutimos questões gerais sobre coerência quântica, fazendo um paralelo com o conceito de coerência presente na óptica clássica. No Cap.2 tratamos especificamente sobre a preparação dos estados de fenda. Em seguida, no Cap.3, revisamos as formas mais comuns de medição dos estados de fenda, analisando a relação dessas com as possibilidades de obtenção experimental da coerência quântica. Já na segunda parte da tese, apresentamos os resultados experimentais obtidos pela aplicação das discussões da primeira parte. Assim, nos Caps. 4 e 5 estão as descrições experimentais da preparação de estados de fenda 2×3 e da medição da coerência quântica de *qutrits*, respectivamente. Por fim, no Cap.6, analisamos como a coerência quântica das partes de um estado bipartido atua na caracterização da matriz densidade e da quantidade de emaranhamento do estado conjunto.

Parte I

Discussão teórica

1 Coerência

Como mencionado na introdução da tese, o presente trabalho tem os estados de fenda como objeto central de estudo. Além das análises envolvidas na preparação destes estados, a coerência quântica é a principal propriedade explorada ao longo do trabalho. Visando a construção de uma base para as discussões subsequentes, neste capítulo a coerência quântica é apresentada numa perspectiva geral. Na seção 1.1, definimos o conceito de coerência nos contextos da óptica clássica e da mecânica quântica. Na Sec.1.2 estudamos alguns quantificadores propostos ao longo das últimas décadas, primeiro para sistemas bidimensionais e, posteriormente, para dimensões maiores. Por fim, na Sec.1.3 revisamos o tratamento dos efeitos observáveis associados à coerência, onde a interação com marcadores de caminho é considerada.

1.1 Conceito geral

Em óptica ondulatória, a coerência é a propriedade referente à correlação entre campos de dois feixes em um determinado instante de tempo em um certo ponto espacial, ou mesmo em instantes e pontos diferentes [20]. A manifestação visível dessa correlação se dá pelo aparecimento de franjas de interferência, quando os feixes correlacionados são sobrepostos em um anteparo distante da fonte em um determinado instante [19]. Se o produto escalar entre os dois campos for nulo ou se a fase relativa entre eles variar de forma aleatória (fazendo com que a média temporal seja nula [21]), as fontes de origem dos dois campos são independentes e a sobreposição não é capaz de produzir oscilações na intensidade do campo resultante.

Em mecânica quântica, o estudo da coerência começa antes mesmo do termo ser usado, sendo parte importante dos debates entre Einstein e Bohr [12]. Desde o início dessas discussões, é conhecido o fato de que saber a trajetória de uma partícula ao longo de um interferômetro impossibilita a observação de interferência. Em outras palavras, em um interferômetro qualquer não se pode distinguir completamente (com 100% de certeza) a trajetória de uma partícula e observar interferência ao mesmo tempo. Mesmo na situação em que o conhecimento da trajetória é apenas probabilístico, a observação de interferência é prejudicada. Como as franjas de interferência constituem o efeito observável da coerência ¹ [13], esta sempre esteve associada a uma não distinção entre possíveis estados de um sistema, como os caminhos em um interferômetro [12]. Dessa forma, podemos dizer que a coerência é a propriedade atrelada à produção de interferência, e se manifesta quando os possíveis estados da base na qual o sistema é descrito não podem ser distinguidos.

¹ A palavra coerência não está presente em algumas referências antigas, mas a ideia é a mesma.

1.2 Os quantificadores de coerência

Uma vez que a coerência é uma propriedade associada à interferência, torna-se relevante o conhecimento de qual a quantidade de coerência é responsável pela produção de um certo padrão de interferência. O caso mais simples acontece na ausência de coerência, quando nenhuma interferência é produzida. Para outros casos, parâmetros que quantifiquem a coerência do estado dos sistema são necessários. Nessa seção revisamos a medida de coerência para casos bidimensionais e algumas das propostas para sistemas de maiores dimensões.

1.2.1 Sistemas bidimensionais

- Caso clássico

Consideremos a situação exemplo na qual dois feixes de luz, oriundos de pontos \vec{r}_1 e \vec{r}_2 , propagam durante os intervalos de tempo t_1 e t_2 , sendo seus campos descritos pelas funções $\vec{E}_1(\vec{r}_1, t_1)$ e $\vec{E}_2(\vec{r}_2, t_2)$. Se os dois feixes se sobrepõem no ponto \vec{r} em um dado instante t , após a propagação nos respectivos intervalos de tempo, a intensidade média $\langle I \rangle$ do campo resultante $\vec{E}(\vec{r}, t)$ é dada por [19]

$$\begin{aligned} \langle I(\vec{r}, t) \rangle &= \langle |\vec{E}(\vec{r}, t)|^2 \rangle = \langle |\vec{E}_1(\vec{r}_1, t - t_1) + \vec{E}_2(\vec{r}_2, t - t_2)|^2 \rangle \\ &= \langle |\vec{E}_1(\vec{r}_1, t - t_1)|^2 \rangle + \langle |\vec{E}_2(\vec{r}_2, t - t_2)|^2 \rangle + 2\text{Re} \left[\langle \vec{E}_1(\vec{r}_1, t - t_1) \cdot \vec{E}_2^*(\vec{r}_2, t - t_2) \rangle \right] \\ &= \langle I_1(\vec{r}_1, t - t_1) \rangle + \langle I_2(\vec{r}_2, t - t_2) \rangle + 2\text{Re} [G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1 - t_2)]. \end{aligned} \quad (1.1)$$

Os dois primeiros termos na expressão acima correspondem às intensidades médias dos campos $\vec{E}_1(\vec{r}_1, t_1)$ e $\vec{E}_2(\vec{r}_2, t_2)$ em seus pontos de origem. Já o terceiro termo corresponde à parte real da função de correlação ou função de coerência mútua, podendo ser escrito como $|G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1 - t_2)| \cos(\delta)$, sendo δ a fase da função de coerência [19, 21]. No caso em que a função de coerência mútua é não nula, a intensidade resultante em \vec{r} apresenta oscilações, cujo contraste é quantificado pela visibilidade ν , definida como [19]

$$\nu = \frac{\langle I_{max}(\vec{r}, t) \rangle - \langle I_{min}(\vec{r}, t) \rangle}{\langle I_{max}(\vec{r}, t) \rangle + \langle I_{min}(\vec{r}, t) \rangle} = \frac{2|G(\vec{r}_1, \vec{r}_2, t_1 - t_2)|}{\langle I_1(\vec{r}_1, t - t_1) \rangle + \langle I_2(\vec{r}_2, t - t_2) \rangle}, \quad (1.2)$$

onde I_{max} e I_{min} correspondem aos valores máximo e mínimo de intensidade.

Portanto, a visibilidade do padrão de interferência produzido pela superposição de dois feixes, quantifica a correlação entres os feixes definida pela função de coerência mútua. A visibilidade é, portanto, um quantificador de coerência para o caso clássico.

- Caso quântico

Para estados quânticos, L. Mandel mostrou que a visibilidade do padrão de interferência produzido por um *ensemble* de fótons igualmente preparados em uma superposição bidimensional, quantifica o grau de coerência quântica do sistema [22]. Em sua análise, Mandel considerou o estado geral

$$\hat{\rho} = \rho_{11} |1\rangle \langle 1| + \rho_{22} |2\rangle \langle 2| + \rho_{12} |1\rangle \langle 2| + \rho_{21} |2\rangle \langle 1|, \quad (1.3)$$

que pode ser escrito como uma combinação de um estado puro $\hat{\rho}_p$ (maximamente coerente) e um estado completamente misto $\hat{\rho}_m$ (incoerente) com os mesmos coeficientes diagonais do estado puro. Sendo $\hat{\rho}_p$ e $\hat{\rho}_m$ escritos como

$$\hat{\rho}_p = |\alpha_1|^2 |1\rangle \langle 1| + |\alpha_2|^2 |2\rangle \langle 2| + \alpha_1 \alpha_2^* |1\rangle \langle 2| + \alpha_2 \alpha_1^* |2\rangle \langle 1|; \quad (1.4)$$

$$\hat{\rho}_m = |\alpha_1|^2 |1\rangle \langle 1| + |\alpha_2|^2 |2\rangle \langle 2|, \quad (1.5)$$

Mandel considerou o estado $\hat{\rho}$ escrito como

$$\hat{\rho} = P_p \hat{\rho}_p + P_m \hat{\rho}_m, \quad (1.6)$$

onde P_p e P_m são as probabilidades de o estado estudado ser da forma das Eqs. 1.4 e 1.5, respectivamente.

Separando os elementos diagonais e não diagonais em ambos os lados da Eq.(1.6) e considerando a normalização do estado, temos que $P_p + P_m = 1$. Diante disso, podemos escrever

$$\hat{\rho} = |\alpha_1|^2 |1\rangle \langle 1| + |\alpha_2|^2 |2\rangle \langle 2| + P_p (\alpha_1 \alpha_2^* |1\rangle \langle 2| + \alpha_2 \alpha_1^* |2\rangle \langle 1|), \quad (1.7)$$

onde P_p determina o quanto $|1\rangle$ e $|2\rangle$ são intrinsecamente indistinguíveis no estado preparado².

Comparando os coeficientes das Eqs.(1.3) e (1.7) obtemos

$$\rho_{11} = |\alpha_1|^2; \quad \rho_{22} = |\alpha_2|^2; \quad |\rho_{12}|^2 = P_p^2 |\alpha_1|^2 |\alpha_2|^2, \quad (1.8)$$

$$P_p = \frac{|\rho_{12}|}{\sqrt{\rho_{11}\rho_{22}}}. \quad (1.9)$$

Na detecção do *ensemble* de fótons preparados no estado da Eq.(1.3), a distribuição espacial de fótons registrados apresenta uma oscilação cuja visibilidade ν (de forma análoga ao caso clássico) é dada por [22]

$$\nu = 2 |\rho_{12}|. \quad (1.10)$$

Assim, Mandel mostrou que a visibilidade das oscilações na distribuição de probabilidade de detecção, quantifica a coerência presente em um sistema quântico de dois níveis.

² Como evidenciado em [14], na Ref. [22] a relação entre coerência e indistinguíbilidade é estabelecida no caso em que não há marcadores de caminho interagindo com o sistema. As situações em que essa interação é considerada, serão estudadas no Caps.3 para sistemas de estados de fenda.

1.2.2 Sistemas de dimensão maior ou igual a três

Como visto acima, a medida de contraste de um padrão de interferência quantifica a coerência de sistemas bidimensionais, tanto no âmbito clássico quanto no quântico. No entanto, as discussões apresentadas na seção anterior não se aplicam à sistemas de dimensões maiores, sendo necessário o estabelecimento de generalizações. À seguir, veremos algumas tentativas de generalização presentes na literatura.

- Caso quântico

Em relação aos sistemas quânticos, Stephan Dürr propôs em 2001 uma generalização para a visibilidade [15], à qual chamaremos de visibilidade generalizada, V definida como

$$V = \sqrt{\frac{D}{D-1} \sum_l \sum_{l;m \neq l} |\rho_{lm}|^2}, \quad (1.11)$$

onde ρ_{lm} são os coeficientes não diagonais do estado $\hat{\rho} = \sum_l \sum_m \rho_{lm} |l\rangle \langle m|$ de dimensão D . Apesar de não ser satisfatória na generalização de algumas relações de complementariedade [23, 24], a medida proposta por Dürr foi usada por diferentes autores [25, 26]. Em 2014, T. Baumgratz e colaboradores propuseram quantificadores que respeitassem as propriedades contidas no tratamento da coerência quântica como um recurso³ [16]. Dentre os quantificadores propostos, está a norma l_1 de coerência (nomeada pelos próprios autores como l_1 norm of coherence) definida, de forma normalizada, como

$$\mathcal{C} = \frac{1}{D-1} \sum_l \sum_{m \neq l} |\rho_{lm}|, \quad (1.12)$$

onde D é a dimensão do estado normalizado $\hat{\rho}$.

A medida \mathcal{C} , proporcional à norma l_1 dos coeficientes não diagonais da matriz densidade do estado analisado, foi validada por outros autores [28] e tem sido amplamente estudada nos últimos seis anos [18, 29–32]. Neste trabalho, estudamos o quantificador \mathcal{C} (que no decorrer do texto chamamos apenas de norma l_1) em sistemas envolvendo estados de fótons codificados em momento linear transversal, sobre os quais tratamos no próximos capítulos.

- Caso clássico

Já em relação aos sistemas clássicos, a problematização de um quantificador de coerência de sistemas com dimensão maior que dois, não é muito trabalhada na literatura [20, 21, 60].

³ Teoria de recurso é um tópico que se encontra fora do escopo do presente trabalho, de forma que indicamos a leitura da Ref. [27] para um melhor entendimento da teoria utilizada em [16]

Entretanto, o entendimento de que a visibilidade (Eq.(1.2)) se refere à coerência mútua entre um par de feixes se faz presente nos textos didáticos sobre o assunto. Além disso, para dimensões maiores também encontramos na literatura a noção de que as funções de coerência, de cada par do conjunto, contribuem de forma independente para a formação da interferência total [67]. No Cap.3, aprofundamos essa discussão para os estados quânticos, mas destacamos que as mesmas análises podem ser estendidas para sistemas clássicos.

1.3 A manifestação da coerência é dependente do observador

Vimos na Sec.1.1 que a formação de franjas de interferência é a manifestação visível da presença de coerência no sistema estudado, sendo este clássico ou quântico. Nas discussões em torno das Eqs.(1.2) e (1.10), a produção de franjas de interferência aparece como dependente apenas do estado estudado, no caso quântico, e da fonte de luz analisada, no caso clássico. Porém, a obtenção de franjas também depende do processo de observação e análise do sistema.

- Caso quântico

Como mencionado na Sec.1.2, Mandel descreve a coerência de um estado quântico como consequência da indistinguibilidade intrínseca entre os estados que compõem o estado de superposição em que o sistema foi preparado. No entanto, distinguir estes possíveis estados, bem como identificar a presença de coerência quântica por meio da observação de interferência, também depende do aparato de medição. A análise matemática dessa dependência foi apresentada pela primeira vez na Ref. [14], onde Englert considerou a interação de estados bidimensionais com marcadores de caminho no processo de medição. Posteriormente, o tratamento foi estendido para dimensões maiores [25,28], como mostrado a seguir.

Tomando o estado geral de dimensão D

$$\hat{\rho} = \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{m=-\Lambda}^{\Lambda} \rho_{lm} |l\rangle \langle m| \quad (1.13)$$

tal que $\Lambda \equiv (D - 1)/2$, vamos considerar que no processo de medição $\hat{\rho}$ interage com um segundo sistema, que podemos chamar de marcador de caminho, como ilustrado na Fig.1. Se a interação ocorre de forma tal que cada possível estado do marcador se acopla a um único estado que compõe a superposição do sistema analisado (Fig.1), podemos escrever o estado conjunto (sistema-marcador) $\hat{\rho}_T$ como

$$\hat{\rho}_T = \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{m=-\Lambda}^{\Lambda} \rho_{lm} |l\rangle |p_l\rangle \langle m| \langle p_m|, \quad (1.14)$$

onde $\{|p_l\rangle\}$ são os possíveis estados do marcador.

Apesar de o estado de interesse ser o estado $\hat{\rho}$, após a interação com o marcador o resultado da medição não fornecerá informações à respeito do estado original $\hat{\rho}$, mas do estado reduzido obtido pelo traço parcial sobre o estado do marcador (Fig.1(a)). Em outras palavras, o estado disponível para observação $\hat{\rho}_p$ é dado por

$$\hat{\rho}_o = Tr_p(\hat{\rho}_T) = \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{m=-\Lambda}^{\Lambda} \rho_{lm} \langle p_l|p_m\rangle |l\rangle \langle m|. \quad (1.15)$$

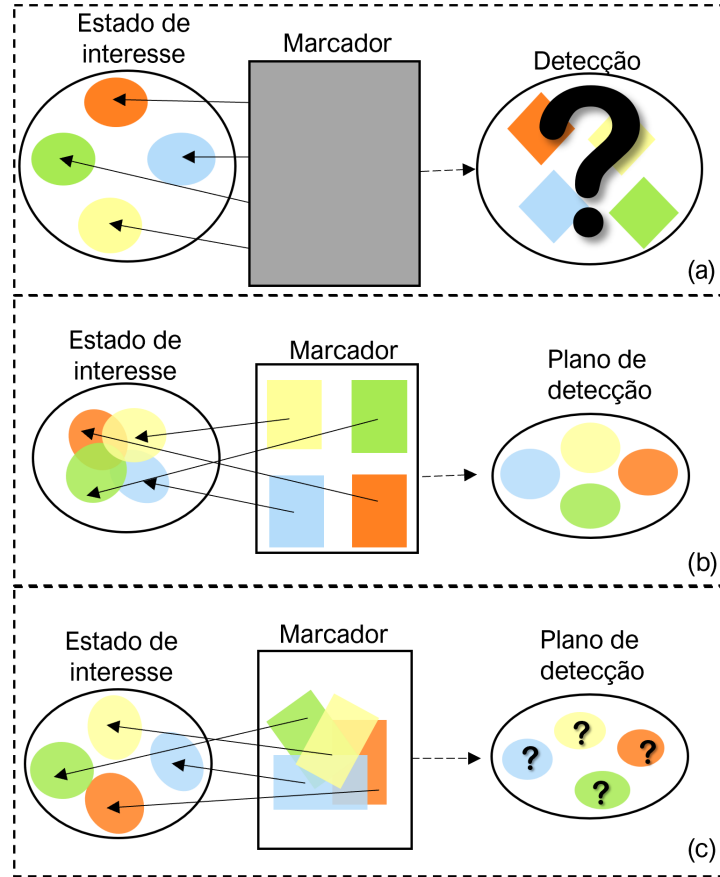


Figura 1 – Esquema ilustrativo da interação de um sistema quântico com um marcador de caminho. Em (a) o estado de interesse interage com um segundo sistema antes do plano de detecção, de forma que as informações obtidas na detecção não são, necessariamente, oriundas do estado inicial. (b) corresponde a configuração em que $\langle p_l|p_m\rangle = 0$. Nesse caso, os estados da base (no qual o do estado de interesse é descrito) são perfeitamente discriminadas pelo marcador de forma que nenhuma interferência é observada, ainda que o estado de interesse tenha uma superposição coerente. (c) corresponde a configuração em que $\langle p_l|p_m\rangle \neq 0$. Nesse caso, os possíveis estados da base não são distinguidos pelo marcador de caminho. Assim, caso o estado de interesse tenha coerência, franjas de interferência serão observadas.

Pela Eq.1.15, temos que os coeficientes do estado disponível $\hat{\rho}_o$ dependem diretamente do produto interno entre os possíveis estados do marcador de caminho. Em

particular, no caso em que dois estados $|p_l\rangle$ e $|p_m\rangle$ são ortogonais entre si, nenhuma informação sobre o coeficiente ρ_{lm} é disponibilizada. Nesse caso, podemos dizer que o marcador de caminho é capaz de distinguir os possíveis estados $|l\rangle$ e $|m\rangle$, eliminando a possibilidade de observarmos alguma interferência devido à coerência inicial entre o par ($|l\rangle$ e $|m\rangle$) (Fig.1(b)). Por outro lado, se dois estados $|p_l\rangle$ e $|p_m\rangle$ são não ortogonais, $|l\rangle$ e $|m\rangle$ não são totalmente distinguidos pela medição (Fig.1(c)), uma vez que a distribuição de probabilidade obtida na medição possui contribuições dos coeficientes ρ_{lm} com $l \neq m$. Nesse caso, se ρ_{lm} é não nulo observamos interferência. Portanto, a manifestação da presença de coerência num determinado estado depende diretamente do aparato de medição utilizado.

Nas Secs.3.2 e 3.3 apresentamos uma análise mais profunda sobre a influência de marcadores de caminho na determinação experimental da coerência quântica de estados de fenda, cuja preparação discutiremos no Cap.3.

- Caso clássico

No caso clássico, apesar de não encontrarmos na literatura uma análise envolvendo marcadores de caminho, a observação de franjas de interferência depender não apenas da fonte estudada, mas também do aparato de medição, é um fato evidente e de natural entendimento. Em experimentos de fenda dupla, por exemplo, a observação da luz próxima à fonte [33, 105] (no campo próximo) não nos permite identificar a presença de coerência. Neste caso, podemos dizer que a abertura fonte de cada feixe pode ser identificada, ou em outras palavras, as aberturas podem ser distinguidas uma da outra. Diante disso, nossas discussões sobre marcadores de caminho em sistemas de estados de fenda podem ser aplicadas à casos clássicos, isto é, experimentos ópticos de fendas múltiplas. Salientamos no entanto, não apresentamos uma discussão mais detalhada sobre essa aplicação, uma vez que os estados quânticos são o foco do presente trabalho.

Conclusão

Neste capítulo, revisamos os quantificadores de coerência e apresentamos uma breve discussão conceitual para coerência dentro dos contextos clássico e quântico. Em todo capítulo demos ênfase aos sistemas ópticos, uma vez que estes constituem parte central deste trabalho e estarão presentes ao longo de todo o texto.

2 Estados de fenda

Nas discussões a seguir, focamos no sistema físico estudado no trabalho, a saber, estados fotônicos codificados em momento linear transversal, também chamados de estados de fenda. Este e o próximo capítulo tratam, respectivamente, dos processos de preparação e medição desses estados.

Na primeira seção (Sec.2.1), estabelecemos uma visão geral sobre a discretização do momento linear transversal de fótons para a preparação de estados de uma e duas partes. Em seguida (Sec.2.2), descrevemos nossas contribuições na generalização de dois métodos de preparação de estados bipartidos. Por fim, na Sec.2.2, analisamos a possibilidade de prepararmos estados de uma parte por meio do traço parcial de estados bipartidos.

2.1 Visão geral

Estados quânticos descritos por uma base de estados discreta vêm sendo amplamente explorados nos estudos fundamentais sobre a mecânica quântica, bem como no desenvolvimento de protocolos de informação quântica [6, 7, 34–37]. Por isso, a preparação de estados discretos é uma tarefa essencial no desenvolvimento e aplicação da área em novas tecnologias.

No caso de estados preparados com fótons, uma possibilidade é a discretização do momento linear transversal por meio de fendas múltiplas, que possibilita a preparação de estados em altas dimensões [38–40]. Por esses fatores, os estados de fenda vêm sendo aplicados em diversos experimentos de óptica quântica.

2.1.1 Discretização do momento linear transversal

A técnica consiste em fazer com que fótons sejam transmitidos por uma fenda múltipla, posicionada em um plano fixo e com as aberturas orientadas perpendicularmente à direção de propagação dos fótons. Cada abertura transmite fótons com momento linear dentro de um único e específico intervalo. Para fendas múltiplas com aberturas estreitas consideramos que cada abertura por onde é transmitido um fóton, define um único estado da base de caminhos do sistema, ou seja, consideramos o estado como discreto [41].

A Fig.2 ilustra a discretização ao longo da direção ortogonal ao comprimento das aberturas. Todas as operações sobre o estados são realizadas ao longo dessa direção. O tamanho das aberturas ao longo da direção \hat{y} é considerada grande comparada com a largura do feixe. Por isso, podemos analisar os cálculos envolvidos considerando apenas a dimensão na qual a discretização acontece.

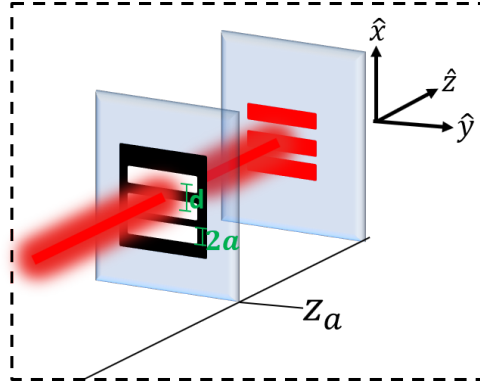


Figura 2 – Fótons propagando no sentido \hat{z} positivo, com uma certa distribuição de momento linear transversal, são transmitidos por uma fenda múltipla fixa no plano em $z = z_a$. As aberturas são separadas centro a centro de uma distância d , sendo cada uma de largura $2a$. Além disso, o posicionamento das aberturas é tal que a discretização ocorre em \hat{x} e a distribuição inicial dos fótons ao longo de \hat{y} permanece inalterada. O número de aberturas do conjunto determina a dimensão do estado, de forma que a figura ilustra o exemplo em que uma fenda tripla é utilizada na preparação de um *qutrit* (estado quântico de dimensão igual a três) espacial.

Na Fig.2, os fótons propagam no sentido \hat{z} positivo, a maior dimensão de cada abertura retangular é orientada na direção \hat{y} e a componente \hat{x} do momento linear dos fótons é discretizada. Nesse caso, o estado quântico do *ensemble* de fótons igualmente preparados, ao longo da direção \hat{x} , em um dado plano z constante pode ser escrito como

$$|\psi_z\rangle = \int \Phi(q_x, z) |q_x\rangle dq_x, \quad (2.1)$$

onde $\Phi(q_x, z)$ é a função que define os coeficientes do estado, q_x é a componente \hat{x} do momento linear dos fótons e $|q_x\rangle$ indica o estado de um fóton de momento linear q_x [43]. No espaço das posições, esse mesmo estado é escrito como

$$|\psi_z\rangle = \int \Phi(x, z) |x\rangle dx, \quad (2.2)$$

onde [44] $|x\rangle = (1/2\pi) \int e^{iqx} |q\rangle dq$ ¹, e $\Phi(x, z)$ é a amplitude do estado descrito no espaço das posições e reproduz o perfil transversal que seria observado, ao longo de \hat{x} no plano z , caso a fonte de luz fosse clássica [21, 43]. Por tornar alguns cálculos mais simples e facilitar a visualização dos resultados, desenvolvemos todas as nossas análises no espaço das posições, como mostrado ao longo do texto.

No plano em que a fenda múltipla é posicionada ($z = z_a$ na Fig.2), o perfil transversal incidente $\Phi_{in}(x, z_a)$ é modificado pelo conjunto de aberturas. Matematicamente, o perfil

¹ Aproximação válida considerando todas dimensões envolvidas como muito maiores que o comprimento de onda do fóton. Apesar de não haver um vetor posição para descrever o estado dos fótons, essa notação simplifica os cálculos de propagação e permite a visualização de onde os fótons seriam detectados ao longo de \hat{x} , caso uma medição fosse realizada no plano z .

resultante dessa modificação $\Phi_{out}(x, z_a)$ é dado por [61]

$$\Phi_{out}(x, z_a) = \Phi_{in}(x, z_a) T(x), \quad (2.3)$$

onde T é a função transmissão da fenda múltipla [33]. Definindo o centro do perfil incidente como $x = 0$, e considerando a fenda múltipla posicionada de forma que seu centro coincida com essa posição, T é definido como [33]

$$T(x) = \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \Pi\left(\frac{x-l d}{2a}\right), \quad (2.4)$$

onde $\Lambda = (D - 1)/2$, D é o número de aberturas na fenda múltipla e $\Pi\left(\frac{x-l d}{2a}\right)$ é a função retângulo descrevendo uma abertura de largura $2a$ e centro em $x = l d$.

Assim, o estado no plano em $z = z_a$, imediatamente após as aberturas, pode ser escrito como [33]

$$|\Psi\rangle = \int \Phi_{out}(x, z_a) |x\rangle dx, \quad (2.5)$$

Substituindo as Eqs.(2.3) e (2.4) na Eq.(2.5), e considerando que $2a$ é pequeno o suficiente para que a função Φ tenha o mesmo valor dentro do intervalo de cada abertura, podemos fatorar $\Phi_{in}(l d, z_a)$ de cada termo do somatório, de forma que

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &= \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \Phi_{in}(l d, z_a) \int \Pi\left(\frac{x-l d}{2a}\right) |x\rangle dx \\ |\Psi\rangle &\propto \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \Phi_{in}(l d, z_a) |l\rangle, \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde o estado de caminho $|l\rangle$ é definido como [5, 41]

$$|l\rangle \equiv \sqrt{\frac{\pi}{a}} \int \Pi\left(\frac{x-l d}{2a}\right) |x\rangle dx. \quad (2.7)$$

A Eq.(2.6) descreve um estado discreto na base $\{|l\rangle\}$, cuja dimensão é determinada pela quantidade D de aberturas da fenda múltipla, e cujos coeficientes são determinados pela amplitude do perfil do campo incidente sobre o plano em $z = z_a$, nas posições em $x = l d$.

2.1.2 Estados bipartidos

O procedimento descrito acima tem sido muito utilizado na preparação de estados quânticos bipartidos [40, 45–47]. Nesse caso, pares de fótons são transmitidos por duas

fendas múltiplas, como mostrado na Fig. 3. Se ambas discretizam a componente \hat{x} do momento linear de fótons, o estado do sistema pode ser escrito, à semelhança da Eq. (2.2), como [41]

$$|\psi_z\rangle = \int \int \Phi(x_i, x_s, z_i, z_s) |x_i\rangle |x_s\rangle dx_i dx_s, \quad (2.8)$$

onde i e s são índices que rotulam cada um dos fótons que viajam em direções diferentes, sendo partes de um sistema quântico bipartido.

Na preparação de estados de fenda bipartidos, a função $\Phi_{in}(x_i, x_s, z_i, z_s)$ (que define os coeficientes do estado incidente sobre o plano das fendas) é modificada pelos dois conjuntos de aberturas de forma simultânea e independente. Se cada fenda múltipla intercepta fótons de cada uma das partes do estado em planos equivalentes, isto é, em $z_i = z_s = z_a$, a amplitude $\Phi_{out}(x_i, x_s, z_a)$ do sistema imediatamente após as aberturas é (por extensão da Eq. (2.3))

$$\Phi_{out}(x_i, x_s, z_a) = \Phi_{in}(x_i, x_s, z_a) T_i T_s, \quad (2.9)$$

onde $\Phi_{in}(x_i, x_s, z_a)$ corresponde ao estado em $z_i = z_a$ e $z_s = z_a$, imediatamente antes das aberturas. Além disso, T_i e T_s são as funções transmissão de cada fenda múltipla no caminho das partes i e s , respectivamente.

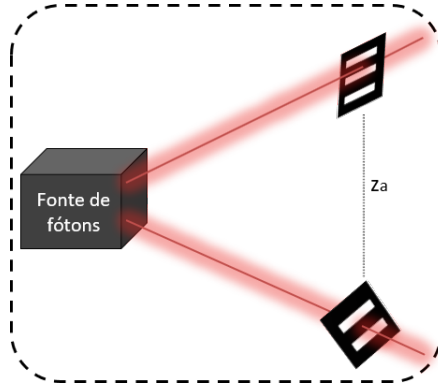


Figura 3 – Na preparação de estados de fenda bipartidos, o momento linear transversal de pares de fótons gerados igualmente por uma fonte, é discretizado por um par de fendas múltiplas. O número de aberturas em cada fenda múltipla determina a dimensão de cada parte do estado. Já as correlações do estado preparado após as aberturas, depende diretamente das correlações entre cada par, estabelecidas pela fonte.

A partir da Eq.(2.9), a extensão dos cálculos das Eqs.(2.5)-(2.6) para dois fótons resulta no estado [5, 61]

$$|\Psi_2\rangle \propto \sum_{l_i=-\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_s} \Phi_{in}(l_i d, l_s d, z_a) |l_i\rangle |l_s\rangle. \quad (2.10)$$

Semelhantemente à Eq. (2.6), a dimensão do estado na Eq.(2.10) é determinada pela quantidade de aberturas nos caminhos dos fótons de cada parte. Já as correlações

entre as partes, são governadas pela amplitude de probabilidade conjunta $\Phi_{in}(l_id, l_sd, z_a)$. Esta função determina, portanto, a forma do estado preparado e as correlações entre os modos de fenda de cada parte. A preparação de estados com características específicas envolve o controle sobre essa função, como descrito detalhadamente na sequência.

2.2 Estados bipartidos produzidos a partir da Conversão Paramétrica Descendente

Nas últimas três décadas, a Conversão Paramétrica Descendente (CPD) tem sido explorada na preparação de estados de fótons emaranhados [4–7, 38–41, 46–51, 73] em diferentes graus de liberdade, dentre eles o momento linear transversal. Nesta seção, revisamos alguns métodos de preparação de estados de fenda a partir da CPD, bem como nossa contribuição para o aprimoramento dos mesmos. Nosso foco se encontra na aplicação dos métodos já conhecidos na preparação de estados bipartidos com as partes possuindo dimensões diferentes.

A Conversão Paramétrica, como ilustrado na Fig.4, ocorre de forma espontânea quando um feixe de laser intenso (o feixe de bombeio ou *pump*) interage com um cristal não linear posicionado em um plano fixo ao longo do sentido de propagação do *pump*. Essa interação resulta na criação de pares de fótons gêmeos, também conhecidos como bifótons [3]. Os fótons gêmeos, nomeados como *signal* e *idler*, podem ser gerados sob dois tipos de casamentos de fase. No Casamento de Fase Tipo I *signal* e *idler* possuem polarização iguais e ortogonais à do *pump*. Já no Casamento de Fase Tipo II, a polarização dos fótons são ortogonais entre si, sendo uma delas igual a do *pump* [2, 52]. Tanto energia quanto momento (linear e angular [59]) são conservados no processo, de modo que os fótons de cada par são correlacionados. Diferentes autores estudaram a natureza dessas correlações e mostraram que os fótons são emaranhados em diversos graus de liberdade [7, 53, 54, 83] [8–11, 38, 56, 57], como polarização [56], momento angular [8–10, 57], frequência [11] e caminho transversal [38].

A preparação de estados de fenda com fótons produzidos na CPD já foi explorada em diferentes trabalhos [4, 41, 56, 65]. Em todos eles cada um dos fótons é transmitido por fendas múltiplas contendo o mesmo número de aberturas, resultando em estados de dimensão $D \times D$ [58]. Utilizando o grau de liberdade de polarização dos fótons, estados 2×3 também foram estudados nas Refs. [41] e [66]. Já a possibilidade de codificarmos ambas as partes de um estado $D_i \times D_s$ em variáveis espaciais, se mostra interessante por demandar uma menor complexidade experimental e expandir as possibilidades de correlação entre as partes.

No plano do cristal em $z = z_c$, imediatamente após a geração, a função que

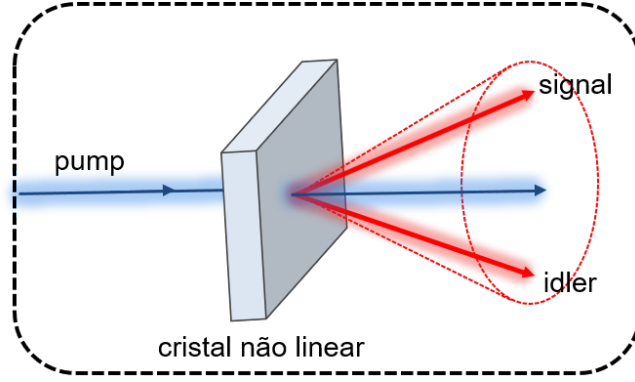


Figura 4 – O campo eletromagnético do feixe de bombeio interage com o cristal não linear ocasionando, com uma pequena probabilidade, a aniquilação de um fóton do *pump* e a criação de um par de fótons emaranhados em diversos graus de liberdade. Momento linear é conservado no processo, de forma que as possíveis direções de emissão de cada fóton gêmeo formam cones. Se o processo ocorre sob o casamento de fase Tipo I, os cones são coaxiais, como mostrado na figura.

determina os coeficientes do estado do bifóton $\Phi(x_i, x_s, z_c)$ é tal que [42, 86]

$$\Phi_{z_c}(x_i, x_s, z_c) \propto E\left(\frac{x_i + x_s}{2}, z_c\right) \xi\left(\frac{x_i - x_s}{2}, z_c\right), \quad (2.11)$$

onde os índices i e s fazem referência às variáveis dos fótons *idler* e *signal*, e $z_i = z_s = z_c$. A função $\xi((x_i - x_s)/2, z_c)$ é chamada de Função Casamento de Fase e depende diretamente das propriedades do cristal², cuja influência sobre o estado gerado tem sido bem investigada na literatura [89–92]. Para cada cristal utilizado, a função $\xi\left(\frac{x_i - x_s}{2}, z_c\right)$ é fixa e não pode ser modificada ([68]). No entanto, o casamento de fase propagado pode ser modificado em planos posteriores a $z = z_c$, uma vez que operações podem ser realizadas sobre a amplitude de probabilidade conjunta inicial $\Phi_{z_c}(x_i, x_s, z_c)$ (Eq. (2.11)).

Ainda sobre a Eq.(2.11), $E((x_i + x_s)/2, z_c)$ descreve a amplitude do campo elétrico clássico do feixe de bombeio em função da coordenada \hat{x} , no plano em $z = z_c$. Devido à conservação de momento linear e a consequente transferência do espectro angular do *pump* para o bifóton [88], podemos escrever a função E em termos das variáveis espaciais x_i e x_s no lugar da variável espacial referentes ao feixe do *pump*, x_p [3, 4]. Assim, a correlação entre os fótons gêmeos num determinado plano é diretamente influenciada pela função que descreve o perfil espacial do *pump* nesse mesmo plano [41]. Como consequência, operações realizadas sobre o feixe de bombeio em planos anteriores ao plano do cristal modificam as amplitudes do *pump* e a amplitude de probabilidade de detecção do bifóton de forma semelhante. Nos últimos anos, o controle da correlação por meio de manipulações feitas sobre o *pump* vêm sendo explorado de forma manual e eletrônica [58, 93–95]. Esse controle

² $\tilde{\xi}(q_s - q_i) = \text{sinc}\left(\frac{L(|q_s - q_i|^2)}{8n_{eff}\bar{\omega}/c}\right)$, onde L é o comprimento do cristal e n_{eff} é o índice de refração efetivo para fótons gêmeos de frequência $\bar{\omega}$.

tem se mostrado útil não apenas na preparação de estados emaranhados, mas também na manutenção da correlação dos pares de fótons em meios turbulentos [96–99].

Considerando que fendas múltiplas são colocadas no caminho dos fótons gêmeos (como na Sec. 2.1), e supondo que as mesmas são posicionadas em $z_i = z_a$ e $z_s = z_a$, o estado obtido em z_a logo após as fendas é (de forma semelhante a Eq.2.10)

$$\begin{aligned} |\Psi\rangle &\propto \sum_{l_i=-\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_s} \Phi_{in}(l_i d, l_s d, z_a) |l_i\rangle |l_s\rangle \\ |\Psi\rangle &\propto \sum_{l_i=-\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_s} E_{in}\left(\frac{(l_i + l_s)d}{2}, z_a\right) \xi_{in}\left(\frac{(l_i - l_s)d}{2}, z_a\right) |l_i\rangle |l_s\rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

A Eq.(2.12) nos mostra que a amplitude sobre os planos em $z_i = z_s = z_a$ é o produto das duas funções, ξ e E , propagadas do cristal até as aberturas. Então, o coeficiente de um par $|l_i\rangle |l_s\rangle$ é determinado pelo produto das duas funções E_{in} e ξ_{in} nos pontos $(l_i + l_s)d/2$ e $(l_i - l_s)d/2$, respectivamente. Para uma determinada dimensão $D_i \times D_s$, preparar estados diferentes implica na manipulação de $\Phi_{in}(x_i, x_s, z_a)$ nos pontos ($x_i = l_i d$ e $x_s = l_s d$). Realizar operações sobre os fótons entre o cristal e as fendas múltiplas é matematicamente equivalente a dizer que as duas funções na Eq.(2.11) são modificadas na propagação.

É interessante observarmos que a Eq. (2.12) não apresenta restrições quanto ao número de aberturas em cada caminho. Neste trabalho, exploramos principalmente a situação na qual o número de aberturas no caminho dos fótons *signal* e *idler* são diferentes, e analisamos como $\Phi(x_i, x_s, z_c)$ controla as correlações de cada par $|l_i\rangle |l_s\rangle$. Para tanto, consideramos dois métodos para manipularmos a amplitude do bifóton. Em cada um deles, uma das funções $E_{in}((x_i + x_s)/2, z_a)$ ou $\xi_{in}((x_i - x_s)/2, z_a)$, é predominante na determinação dos coeficientes de cada $|l_i\rangle |l_s\rangle$ para o estado quântico do bifóton no plano das fendas [4, 41].

2.2.1 Projeção da imagem do cristal sobre o plano das fendas.

O primeiro método consiste em projetar uma imagem ampliada do plano em $z = z_c$ sobre o plano em $z = z_a$. Nesse caso, $\Phi_{in}(x_i, x_s, z_a)$ reproduz $\Phi(x_i, x_s, z_c)$ (Eq.(2.11)) de forma ampliada e com fase modificada. Como ilustrado na Fig. 5, um telescópio projetando a imagem ampliada do cristal sobre o plano das fendas. Uma lente cilíndrica L_c e uma lente esférica L_2 são colocadas nos planos em $z = z_{l_c}$ e $z = z_{l_2}$, respectivamente. Além disso $z_{l_c} - z_c$ e $z_{l_2} - z_c$ são iguais aos comprimentos focais das lentes cilíndrica (f_c) e esférica (f_2), respectivamente.

Para o cálculo da propagação da amplitude $\Phi_{z_c}(x_i, x_s, z_c)$ (Eq.(2.11)) até as aberturas, utilizamos as ferramentas apresentadas no Ap.A, por meio de um procedimento semelhante ao explicado na Sec.A.2 (o cálculo detalhado pode ser encontrado na Ref. [68]).

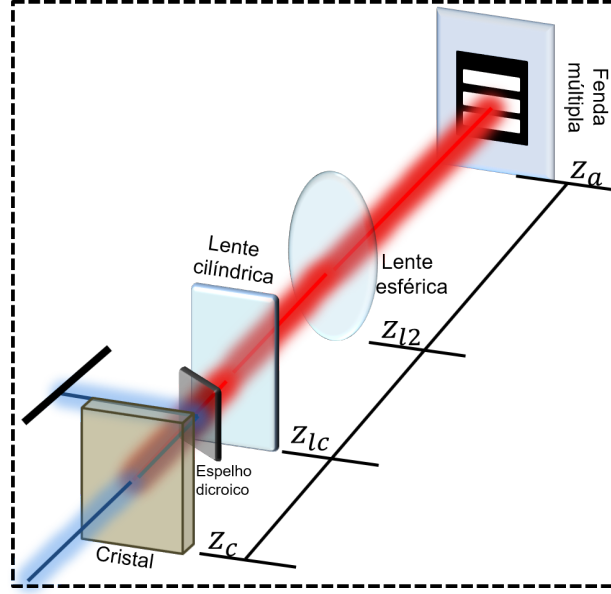


Figura 5 – Esquema gráfico do *setup* experimental em que a uma lente cilíndrica e uma lente esférica compõem o telescópio que projeta a imagem do plano do cristal, em $z = z_c$, sobre o plano das aberturas, em $z = z_a$. O fator de aumento da imagem é dado pela razão $(z_{l2} - z_c) / (z_{lc} - z_c)$.

A amplitude obtida no plano das fendas nesse caso é tal que

$$\Phi_{in}(x_i, x_s, z_a) \propto e^{i \frac{k f_c}{2 f_2} (x_i^2 + x_s^2)} \xi \left(\frac{f_c(x_i - x_s)}{2 f_2}, z_c \right) E \left(\frac{f_c(x_i + x_s)d}{2 f_2}, z_c \right), \quad (2.13)$$

E o estado imediatamente após as aberturas é dado por

$$|\Psi\rangle \propto \sum_{l_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} e^{i \frac{k}{2p} (l_i^2 + l_s^2) d^2} \xi \left(\frac{(l_i - l_s)d}{2p}, z_c \right) E \left(\frac{(l_i + l_s)d}{2p}, z_c \right) |l_i\rangle |l_s\rangle, \quad (2.14)$$

onde k é o módulo do vetor de onda do feixe de bombeio (*pump*) e $p = f_2/f_c$ é o fator de aumento da imagem.

Montagens semelhantes foram utilizadas na preparação de estados de dois *qubits* em [4] (*signal* e *idler* são transmitidos por fendas duplas) e de quatro *qubits* em [5, 69]. No caso em que uma fenda dupla e uma fenda tripla são utilizadas, o estado após as fendas (para $\Lambda_i = 1/2$ e $D_i = 2$, e $\Lambda_s = 1$ e $D_s = 3$), é

$$|\Psi\rangle \propto \left\{ \xi \left(-\frac{d}{4p}, z_c \right) \left[e^{i\varphi} E \left(-\frac{3d}{4p}, z_c \right) |-\frac{1}{2}-1\rangle + E \left(\frac{d}{4p}, z_c \right) |-\frac{1}{2}0\rangle \right] + e^{i\varphi} \xi \left(-\frac{3d}{4p}, z_c \right) E \left(-\frac{d}{4p}, z_c \right) |-\frac{1}{2}-1\rangle \right. \\ \left. + e^{i\varphi} \xi \left(\frac{3d}{4p}, z_c \right) E \left(\frac{d}{4p}, z_c \right) |-\frac{1}{2}1\rangle + \xi \left(\frac{d}{4p}, z_c \right) \left[E \left(-\frac{d}{4p}, z_c \right) |-\frac{1}{2}0\rangle + e^{i\varphi} E \left(\frac{3d}{4p}, z_c \right) |-\frac{1}{2}1\rangle \right] \right\}, \quad (2.15)$$

onde $\varphi = kd^2/(2p)$.

Os coeficientes do estado $|\Psi\rangle$ (Eq.(2.15)) sofrem a influência do valor da função casamento de fase em pontos diferentes, e alguns coeficientes sofrem a influência do valor do perfil transversal do *pump* em um mesmo ponto, isto é, $E(\pm d/(4p), z_c)$ estão presentes em mais de um coeficiente. No entanto, o único parâmetro ajustável na montagem experimental

após o cristal (Fig.5), é o fator de aumento p . Pelo fato de a função casamento de fase ser definida simetricamente [42], sua imagem em $z = z_a$ também o é. O mesmo vale para o perfil do *pump* no plano do cristal. Assim, $\xi(+x, z_a) = \xi(-x, z_a)$ e $E(+x, z_a) = E(-x, z_a)$ na Eq. (2.15), limitando o conjunto de possíveis estados à serem preparados. Para uma melhor visualização desses aspectos, dispomos os coeficientes da Eq.(2.15) na matriz de coeficientes $M_{2 \times 3}^{(\text{PMF})}$ abaixo, onde a simetria das funções foi considerada [81].

$$M_{2 \times 3}^{(\text{PMF})} = \begin{array}{c} |-\frac{1}{2}\rangle \\ |\frac{1}{2}\rangle \end{array} \begin{array}{ccc} | -1 \rangle & | 0 \rangle & | 1 \rangle \\ \left(\begin{array}{ccc} \text{◇} \xi_1 \times \text{□} E_2 e^{i\varphi} & \text{◇} \xi_1 \times \text{○} E_1 & \text{○} \xi_2 \times \text{○} E_1 e^{i\varphi} \\ \text{○} \xi_2 \times \text{○} E_1 e^{i\varphi} & \text{◇} \xi_1 \times \text{○} E_1 & \text{◇} \xi_1 \times \text{□} E_2 e^{i\varphi} \end{array} \right), \end{array} \quad (2.16)$$

onde $\xi_1 = \xi\left(\pm \frac{d}{4p}, z_c\right)$, $\xi_2 = \xi\left(\pm \frac{3d}{4p}, z_c\right)$, $E_1 = E\left(\pm \frac{d}{4p}, z_c\right)$, $E_2 = E\left(\pm \frac{3d}{4p}, z_c\right)$, cada figura geométrica identifica os termos que são iguais e PMF se refere a *Phase Matching Function*.

Os elementos transversalmente na matriz $M_{2 \times 3}^{(\text{PMF})}$, seguindo do canto superior esquerdo para o canto inferior direito, são determinados pelo valor da função casamento de fase nos mesmos pontos (ou em pontos simétricos). Já os elementos das anti-diagonais, simétricas em relação a uma anti-diagonal central, são determinados pelo valor do perfil espacial do *pump* em um mesmo ponto (ou no ponto simétrico). Esse fato é observado em qualquer dimensão (incluindo $D \times D$), como exemplificado nas matrizes para estados 3×4 e 3×3 a seguir,

$$M_{3 \times 4}^{(\text{PMF})} = \begin{array}{c} | -1 \rangle \\ | 0 \rangle \\ | 1 \rangle \end{array} \begin{array}{cccc} | -\frac{3}{2} \rangle & | -\frac{1}{2} \rangle & | \frac{1}{2} \rangle & | \frac{3}{2} \rangle \\ \left(\begin{array}{cccc} \text{◇} \xi_1 \times \text{○} E_3 e^{3i\varphi} & \text{◇} \xi_1 \times \text{□} E_2 e^{i\varphi} & \text{○} \xi_2 \times \text{○} E_1 e^{i\varphi} & \text{○} \xi_3 \times \text{○} E_1 e^{3i\varphi} \\ \text{○} \xi_2 \times \text{□} E_2 e^{2i\varphi} & \text{◇} \xi_1 \times \text{○} E_1 & \text{◇} \xi_1 \times \text{○} E_1 & \text{○} \xi_2 \times \text{□} E_2 e^{2i\varphi} \\ \text{○} \xi_3 \times \text{○} E_1 e^{3i\varphi} & \text{○} \xi_2 \times \text{○} E_1 e^{i\varphi} & \text{◇} \xi_1 \times \text{□} E_2 e^{i\varphi} & \text{◇} \xi_1 \times \text{○} E_3 e^{3i\varphi} \end{array} \right) \end{array} \quad (2.17)$$

$$M_{3 \times 3}^{(\text{PMF})} = \begin{array}{c} | -1 \rangle \\ | 0 \rangle \\ | 1 \rangle \end{array} \begin{array}{ccc} | -1 \rangle & | 0 \rangle & | 1 \rangle \\ \left(\begin{array}{ccc} \text{◇} \xi_6 \times \text{◇} E_4 e^{3i\varphi} & \text{○} \xi_5 \times \text{○} E_5 e^{i\varphi} & \text{□} \xi_4 \times \text{◇} E_6 e^{i\varphi} \\ \text{○} \xi_5 \times \text{○} E_5 e^{2i\varphi} & \text{◇} \xi_6 \times \text{◇} E_6 & \text{○} \xi_5 \times \text{○} E_5 \\ \text{□} \xi_4 \times \text{◇} E_6 e^{3i\varphi} & \text{○} \xi_5 \times \text{○} E_5 e^{i\varphi} & \text{◇} \xi_6 \times \text{◇} E_4 e^{i\varphi} \end{array} \right) \end{array} \quad (2.18)$$

onde $\xi_3 = \xi\left(\pm \frac{5d}{4p}, z_c\right)$, $\xi_4 = \xi\left(\pm \frac{d}{p}, z_c\right)$, $\xi_5 = \xi\left(\pm \frac{d}{2p}, z_c\right)$, $\xi_6 = \xi(0, z_c)$, $E_3 = E\left(\pm \frac{5d}{4p}, z_c\right)$, $E_4 = E\left(\pm \frac{d}{p}, z_c\right)$, $E_5 = E\left(\pm \frac{d}{2p}, z_c\right)$ e $E_6 = E(0)$.

No plano das aberturas, a imagem ampliada do perfil transversal do *pump* em $z = z_c$ é mais larga do que a imagem da função casamento de fase nesse mesmo plano [4].

No caso ideal, $E\left(\frac{x_i+x_s}{2}, z_a\right) = E\left(\frac{x_i+x_s}{2p}, z_c\right)$ é constante ao longo das aberturas e pode ser fatorado da Eq.(2.15).

Considerando essa situação para o estado 2×3 , há dois possíveis estados à serem preparados. O primeiro, é descrito pela Eq.(2.15) quando $E\left(\frac{x_i+x_s}{2}, z_a\right) = cte$, isto é, $\xi(\pm d/(4p), z_c)$ e $\xi(\pm 3d/(4p), z_c)$ são diferentes de zero [81]. O segundo é obtido com a imagem do cristal no plano das aberturas estreita o suficiente para que $\xi(\pm 3d/(4p), z_c)$ seja nulo, o que resulta no estado

$$|\psi_I\rangle \propto |-\frac{1}{2}\rangle \left(e^{i\varphi} E_2 | -1\rangle + E_1 | 0\rangle \right) + |\frac{1}{2}\rangle \left(e^{i\varphi} E_2 | 1\rangle + E_1 | 0\rangle \right). \quad (2.19)$$

A Fig.6 é uma ilustração das correlações no estado $|\psi_I\rangle$. Quando um fóton idler é identificado como sendo transmitido pela abertura $l_i = -1/2$ da fenda dupla, seu par *signal* é identificado como transmitido por uma das aberturas $l_s = -1$ ou $l_s = 0$. Isto é, cada possível caminho do sistema *i* está correlacionado com um superposição de possíveis caminhos do sistema *s*.

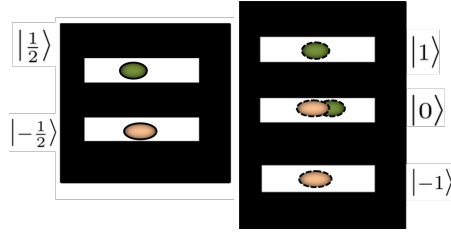


Figura 6 – Correlação do estado ψ_I Eq.(2.19). Se um fóton do *qubit* (sistema *i*) é detectado em $|-1/2\rangle$, seu par (sistema *s*) é detectado em uma superposição entre $|-1\rangle$ e $|0\rangle$. Esferas de mesma cor indicam fótons de um mesmo par, sendo cada parte diferenciada pelos contornos preenchido (na fenda dupla) e pontilhado (na fenda tripla).

O número de estados bipartidos que podem ser preparados por esse método é limitado por dois fatores, em qualquer dimensão. O primeiro, é o fato de o ajuste da largura da função propagada ser a única manipulação possível. Dessa forma, fazer a imagem do casamento de fase em $z = z_a$ estreita o suficiente para que um certo $\xi_j = 0$ seja nulo, impede que qualquer $\xi_{j'}$ com $j' > j$ seja diferente de zero. No caso 2×3 , por exemplo, não seria possível zerar ξ_1 e não zerar ξ_2 . Conseqüentemente, não seria possível preparar um estado apenas com as correlações $|\frac{1}{2} - 1\rangle$ e $|\frac{1}{2} 1\rangle$. O segundo fator limitante é devido a diferentes pares $|l_i l_s\rangle$ terem o mesmo coeficiente ξ_j . Para a dimensão 2×3 , por exemplo, essa característica faz com que não seja possível preparar um estado com $|\frac{1}{2} 0\rangle$ e sem $|\frac{1}{2} 1\rangle$.

2.2.2 Mudando o perfil transversal do feixe de bombeio

No segundo método, a propagação do bifóton até o plano das aberturas é tal que a função $\xi\left(\frac{x_i-x_s}{2}, z_a\right)$ é mais larga do que $E\left(\frac{x_i+x_s}{2}, z_a\right)$ [61]. Na configuração ideal,

$\xi\left(\frac{x_i - x_s}{2}, z_a\right)$ é constante na região das aberturas e os coeficientes da Eq.(2.12) são determinados apenas pelo perfil transversal do feixe de bombeio. Como consequência, controlar o perfil do *pump* que incide sobre o cristal significa controlar os coeficientes do estado na Eq.(2.12) [38, 95].

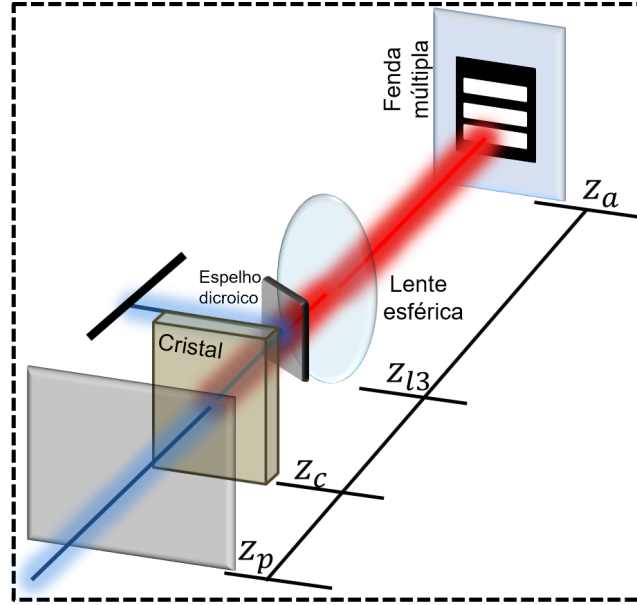


Figura 7 – Esquema gráfico do *setup* experimental em que uma lente esférica projeta a imagem do plano em $z = z_p$, anterior ao cristal, sobre o plano das aberturas, em $z = z_a$. O fator de aumento da imagem é dado pela razão $(z_a - z_{l3} - f) / f$, sendo f a distância focal da lente utilizada.

Como ilustrado na Fig. 7, a imagem de um plano anterior ao cristal é projetada sobre o plano em $z = z_a$. Após o cristal, os fótons gerados de forma colinear são transmitidos por uma lente L_3 de distância focal $f = (z_{l3} - z_p) / 2 = (z_a - z_{l3}) / 2$, posicionada em $z = z_{l3}$. O feixe de bombeio não sofre a ação de L_3 na Fig. 7, no entanto se o feixe do *pump* seguisse o caminho dos fótons gêmeos, a distribuição de intensidade do feixe de bombeio observada em $z = z_a$ seria a mesma observada em $z = z_p$. Novamente, o cálculo de $\Phi_{in}(x_i, x_s, z_a)$ é feito de forma semelhante à mostrada no Ap.A, sendo encontrado de forma detalhada na Ref. [68]. Nessa configuração, a imagem não ampliada do plano em $z = z_p$ é projetada sobre o plano em $z = z_a$. Além disso, o casamento de fase propagado é aproximadamente constante, de forma que $\Phi_{in}(x_i, x_s, z_a)$ é proporcional a $E(x_p, z_p)$ [68]. Assim, o estado do bifóton logo após as aberturas é

$$|\Psi\rangle \propto \sum_{l_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} e^{i\phi(l_i - l_s)^2} E\left(\frac{(l_i + l_s)d}{2}, z_p\right) |l_i\rangle |l_s\rangle, \quad (2.20)$$

onde $\phi = k / (8(z_a - z_c))$ é a fase adquirida na propagação e k é o módulo do vetor de onda do *pump* [61].

Os coeficientes do estado da Eq.(2.20) são determinados pelo valor de $E(x_p, z_p)$ nos pontos $x_p = (l_i + l_s) d / 2$ (Eq.(2.21)). Para a dimensão 2×3 , o estado geral descrito

na Eq.(2.20) é

$$|\Psi\rangle \propto \left[|-\frac{1}{2}\rangle \left(E\left(-\frac{3d}{4}, z_p\right) |-1\rangle + E\left(-\frac{d}{4}, z_p\right) |0\rangle + e^{2i\phi d^2} E\left(\frac{d}{4}, z_p\right) |1\rangle \right) + | \frac{1}{2}\rangle \left(e^{2i\phi d^2} E\left(-\frac{d}{4}, z_p\right) |-1\rangle + E\left(\frac{d}{4}, z_p\right) |0\rangle + E\left(\frac{3d}{4}, z_p\right) |1\rangle \right) \right]. \quad (2.21)$$

Ao contrario do método anterior, podemos modificar não apenas a largura do perfil, mas também a amplitude do campo em regiões específicas. Portanto, para uma abordagem mais geral não consideraremos o perfil do *pump* simétrico como o foi em [38]. Semelhantemente ao caso anterior, podemos escrever uma matriz de coeficientes para o estado da Eq.(2.21), a saber [81]

$$M_{2 \times 3}^{(\text{pump})} = \begin{array}{c} |-\frac{1}{2}\rangle \\ | \frac{1}{2}\rangle \end{array} \begin{array}{ccc} | -1\rangle & | 0\rangle & | 1\rangle \\ \begin{array}{ccc} \text{C}_3 & \text{C}_1 & \text{C}_2 e^{2i\phi d^2} \\ \text{C}_1 e^{2i\phi d^2} & \text{C}_2 & \text{C}_4 \end{array} \end{array}, \quad (2.22)$$

onde $C_{1(2)} = E\left(-(+)\frac{d}{4}, z_p\right)$ e $C_{3(4)} = E\left(-(+)\frac{3d}{4}, z_p\right)$.

Mesmo considerando a possibilidade de o perfil do *pump* ser não simétrico, alguns coeficientes da matriz $M_{2 \times 3}^{(\text{pump})}$ (dispostos em diagonal) são determinados pelo valor da função $E\left(\frac{d(l_i+l_s)}{2}, z_p\right)$ em um mesmo ponto, análogo ao observado nas Eqs.(2.16-2.18). Essa característica é intrínseca ao método, sendo observada em qualquer dimensão. Tomando como exemplo os estados 3×4 e 3×3 , temos

$$M_{3 \times 4}^{(\text{pump})} = \begin{array}{c} | -1\rangle \\ | 0\rangle \\ | 1\rangle \end{array} \begin{array}{cccc} | -\frac{3}{2}\rangle & | -\frac{1}{2}\rangle & | \frac{1}{2}\rangle & | \frac{3}{2}\rangle \\ \begin{array}{cccc} \text{C}_5 & \text{C}_3 & \text{C}_1 e^{2i\phi d^2} & \text{C}_2 e^{9i\phi d^2/4} \\ \text{C}_3 e^{2i\phi d^2} & \text{C}_1 & \text{C}_2 & \text{C}_4 e^{2i\phi d^2} \\ \text{C}_1 e^{9i\phi d^2/4} & \text{C}_2 e^{2i\phi d^2} & \text{C}_4 & \text{C}_6 \end{array} \end{array}, \quad (2.23)$$

onde $C_{5(6)} = E\left(-(+)\frac{5d}{4}, z_p\right)$, $C_{7(8)} = E\left(-(+)\frac{d}{2}, z_p\right)$, $C_{9(10)} = E\left(-(+)\frac{d}{4}, z_p\right)$ e $C_{11} = E\left(0, z_p\right)$.

$$M_{3 \times 3}^{(\text{pump})} = \begin{array}{c} | -1\rangle \\ | 0\rangle \\ | 1\rangle \end{array} \begin{array}{ccc} | -1\rangle & | 0\rangle & | 1\rangle \\ \begin{array}{ccc} \text{C}_9 & \text{C}_7 & \text{C}_{11} e^{2i\phi d^2} \\ \text{C}_7 e^{2i\phi d^2} & \text{C}_{11} & \text{C}_8 \\ \text{C}_{11} e^{9i\phi/4} & \text{C}_8 e^{2i\phi d^2} & \text{C}_{10} \end{array} \end{array}, \quad (2.24)$$

O número de correlações possíveis é, portanto, limitado pelo fato de mais de um coeficiente ser determinado pelo valor da função $E\left(x_p/2, z_p\right)$ em um mesmo ponto. Não é possível, por exemplo, prepararmos um estado 3×4 com $|0 - \frac{3}{2}\rangle$ sem $| -1 - \frac{1}{2}\rangle$. Apesar disso, a possibilidade de modificarmos cada região do perfil do *pump* separadamente aumenta o número de estados possíveis, se comparado com o método anterior. Uma

possibilidade muito utilizada na preparação de estados de fenda $D \times D$, consiste em utilizar uma lente para focalizar o feixe de bombeamento no plano das aberturas (sem a presença da L_2) [38]. Essa configuração é eficiente na preparação de estados maximamente emaranhados [38, 41, 47, 55], mas limita a quantidade de estados com outros graus de emaranhamento que podem ser preparados, uma vez que modifica apenas a largura de $E(\frac{x_i+x_s}{2}, z_a)$. No caso 3×3 , por exemplo, se a focalização é tal que $C_9 = 0$, então $C_{10} = 0$, e se $C_7 = 0$, $C_8 = 0$.

Uma configuração possível onde o perfil do *pump* é zerado em um determinado ponto x , mas não em $-x$, é mostrado na Fig.8. Em $z = z_p$, o feixe de bombeamento é bloqueado uniformemente ao longo de \hat{y} , e em torno de um ou mais pontos ao longo de \hat{x} . Assim, o perfil $E(x_p, z_p)$ imediatamente após os bloqueios, bem como sua imagem $E((x_i+x_s)/2, z_a)$, apresenta “buracos” correspondentes às regiões bloqueadas.

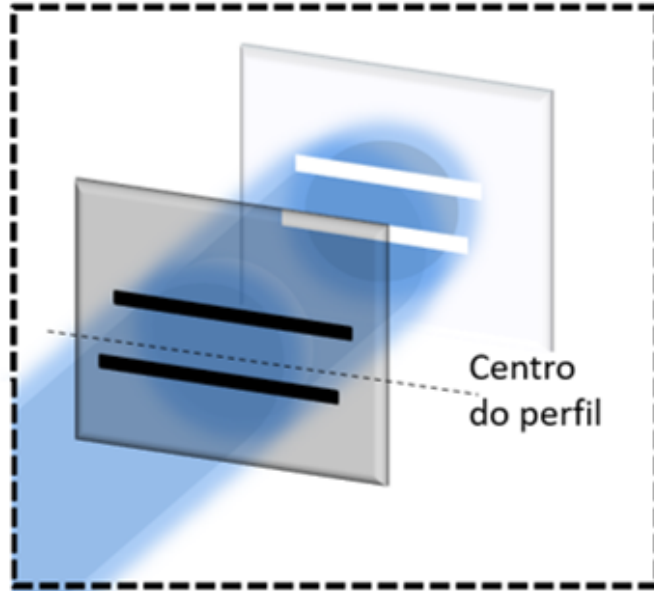


Figura 8 – Ilustração de um feixe de *laser* passando por um *slide* transparente contendo faixas escuras. Essas faixas bloqueiam a passagem de luz, de forma que o perfil transversal do feixe transmitido apresenta regiões de intensidade nula, correspondentes às regiões das faixas escuras.

Tomando como exemplo a dimensão 2×3 , se o feixe de bombeamento é bloqueado em torno de $x_p = -d/4$ e $x_p = +3d/4$, a imagem do perfil transversal do *pump* sobre o plano das aberturas também é nula nessas regiões. Nesse caso, o estado $|\psi_{II}\rangle$ preparado logo após as aberturas é tal que $C_1 = C_4 = 0$, ou seja

$$|\psi_{II}\rangle \propto |-\frac{1}{2}\rangle \left(C_3 | -1\rangle + e^{2i\phi d^2} C_2 | 1\rangle \right) + C_2 | \frac{1}{2}\rangle | 0\rangle. \quad (2.25)$$

Se os cortes são feitos em torno de $x_p = +d/4$ e $x_p = -3d/4$, temos que $C_2 = C_3 = 0$, e o estado obtido após as fendas é espelhado com relação ao da Eq.(2.25), isto é

$$|\psi'_{II}\rangle \propto \left| \frac{1}{2} \right\rangle \left(e^{2i\phi d^2} C_1 | -1 \rangle + C_4 | 1 \rangle \right) + C_1 \left| -\frac{1}{2} \right\rangle | 0 \rangle. \quad (2.26)$$

No caso em que o feixe é bloqueado em torno de dois pontos simetricamente opostos com relação ao centro, há duas modificações possíveis para a dimensão 2×3 . A primeira consiste em zerar $E(x_p, z_p)$ em torno de $x = +d/4$ e $x = -d/4$ ($C_1 = C_2 = 0$), o que resulta no estado $|\psi_{III}\rangle$

$$|\psi_{III}\rangle \propto C_3 \left| -\frac{1}{2} \right\rangle | -1 \rangle + C_4 \left| \frac{1}{2} \right\rangle | 1 \rangle. \quad (2.27)$$

Já na segunda modificação, $E(x_p, z_p)$ é zerado em torno de $x = +3d/4$ e $x = -3d/4$ ($C_3 = C_4 = 0$), resultando no estado $|\psi_{IV}\rangle$

$$|\psi_{IV}\rangle \propto \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \left(C_1 | 0 \rangle + e^{2i\phi d^2} C_2 | 1 \rangle \right) + \left| \frac{1}{2} \right\rangle \left(C_2 | 0 \rangle + e^{2i\phi d^2} C_1 | -1 \rangle \right). \quad (2.28)$$

O estado $|\psi_{IV}\rangle$ também pode ser preparado com uma lente (que pode ser posicionada antes ou depois do cristal) focalizando fracamente o feixe de bombeamento no plano das aberturas. Caso $E((x_i+x_s)/2, z_a)$ seja estreito o suficiente para que $E(\pm 3d/4, z_a) = 0$, um estado com as mesmas correlações da Eq.(2.28) é obtido. Assim, $|\psi_{IV}\rangle$ é o estado obtido quando o procedimento feito em [38, 87], para estados 3×3 , é aplicado à dimensão 2×3 .

Nos estados das Eqs. (2.25) e (2.28), assim como na Eq.(2.19), todos os estados das bases $\{|l_i\rangle\}$ e $\{|l_s\rangle\}$ estão presentes. Em outras palavras cada $|l_s\rangle$ possui correlação direta com algum $|l_i\rangle$. O emaranhamento desses estados é pequeno, mesmo para valores otimizados e não nulos de cada um dos coeficientes [62]. Em contrapartida, $|\psi_{III}\rangle$ (Eq.(2.27)), não acessa todos os possíveis estados no espaço do qutrit. O caminho $l_s = 0$ permanece livre mas não aparece nas correlações, de forma que o estado $|\psi_{III}\rangle$ se comporta, de maneira efetiva, como um estado de dimensão 2×2 , sendo o emaranhamento máximo quando $C_3 = C_4$.

Para investigarmos se é possível prepararmos um estado maximamente emaranhado envolvendo todos os $\{|l_i\rangle\}$ e $\{|l_s\rangle\}$, recorreremos à decomposição de Schmidt já que em nossas análises supomos que os estados são puros [78]. Tomando um estado $D_i \times D_s$ ($D_i \leq D_s$), o emaranhamento será máximo se seus coeficientes de Schmidt são iguais a $1/\sqrt{D_i}$ [62]. Em outras palavras, se os autovalores da matriz densidade reduzida de uma das partes do sistema são iguais a $1/D_i$ [62]. Para a dimensão 2×3 , por exemplo, os dois autovalores não nulos devem ser iguais a $1/2$. Isso acontece, como mostrado na Sec.B.1, se

$$C_3 = -\frac{C_1}{2 \cos(2\phi d^2)}, \quad (2.29)$$

com o feixe de bombeamento considerado inicialmente simétrico. No caso especial em que $2\phi d^2 = \pi$, o seguinte estado após as fendas é obtido

$$|\psi_V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ \left| -\frac{1}{2} \right\rangle \left[\frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \left| -1 \right\rangle + \left| 0 \right\rangle + \left| 1 \right\rangle \right) \right] + \left| \frac{1}{2} \right\rangle \left[\frac{3}{2} \left(\left| -1 \right\rangle + \left| 0 \right\rangle - \frac{1}{2} \left| 1 \right\rangle \right) \right] \right\}, \quad (2.30)$$

o qual pode ser reescrito na forma

$$|\psi_V\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \left| -\frac{1}{2} \right\rangle |\Omega_1\rangle + \left| \frac{1}{2} \right\rangle |\Omega_2\rangle \}, \quad (2.31)$$

onde $|\Omega_1\rangle$ e $|\Omega_2\rangle$ são definidos como [81]

$$|\Omega_1\rangle = \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{2} \left| -1 \right\rangle + \left| 0 \right\rangle + \left| 1 \right\rangle \right), \quad |\Omega_2\rangle = \frac{3}{2} \left(\left| -1 \right\rangle + \left| 0 \right\rangle - \frac{1}{2} \left| 1 \right\rangle \right). \quad (2.32)$$

O perfil transversal do feixe de bombeamento necessário para a preparação do estado $|\psi_V\rangle$, é tal que $|E(-(+)\frac{3d}{4}, z_p)| = |E(-(+)\frac{d}{4}, z_p)|/2$. Além disso, o *setup* experimental utilizado deve ser ajustado para que $\phi d^2 = \pi/2$. A necessidade de controlar a fase ϕ e a amplitude relativa entre alguns pontos do perfil, faz com que a preparação de $|\psi_V\rangle$ seja experimentalmente mais complexa do que as dos outros estados apresentados.

O perfil transversal do *pump* em $z = z_p$ pode ser manipulado de muitas outras maneiras, resultando em diferentes estados de fenda. A Fig. 9 ilustra as correlações dos estados $|\psi_{II}\rangle$ - $|\psi_V\rangle$ e de mais dois exemplos, para dimensão 2×3 , em que apenas um corte é feito em $E(x_p, z_p)$ ³.

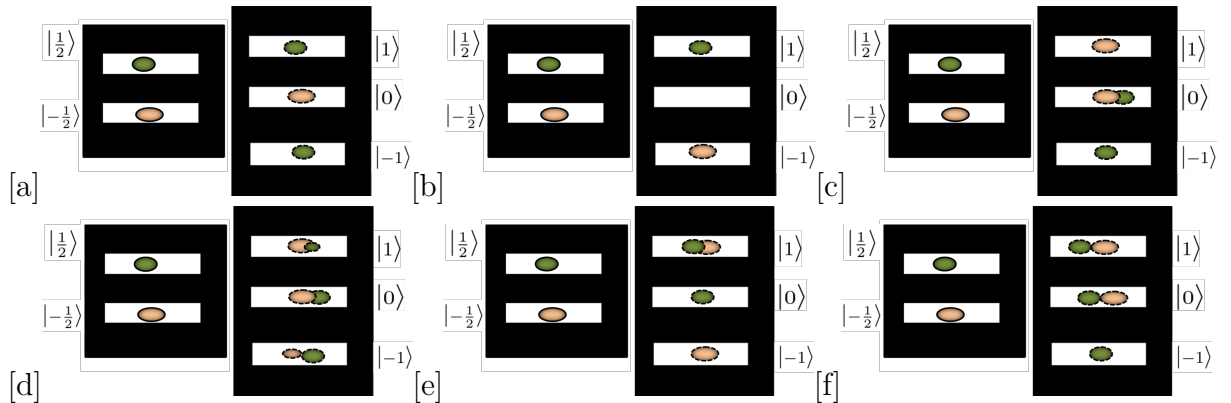


Figura 9 – Correlação dos estados. Esferas de mesma cor indicam fótons de um mesmo par, sendo cada parte diferenciada pelos contornos preenchido (na fenda dupla) e pontilhado (na fenda tripla). As correlações dos estados $|\psi_{II}\rangle$ - $|\psi_V\rangle$ são respectivamente ilustradas em (a)-(d). (e) e (f) correspondem aos exemplos em que apenas $C_1 = 0$ e $C_3 = 0$, respectivamente.

³ Neste trabalho consideramos as possibilidades em que as aberturas são posicionadas de forma simétrica com relação ao centro do perfil do pump ($x_p = 0$). Dessa forma, deixamos em aberto as possibilidades que envolvem o posicionamento não simétrico das aberturas para a preparação de estados com diferentes correlações.

A possibilidade de obtermos diferentes correlações por meio do controle sobre o perfil transversal da amplitude conjunta dos fótons gêmeos também abre o leque de possibilidades na preparação de estados de fenda compostos por uma única parte. O uso dos métodos de preparação de estados bipartidos na preparação de estados unipartidos é discutido na seção à seguir.

2.3 Preparação de estados de um *qudit* por meio de traço parcial de um estado bipartido

Estados bipartidos também podem ser usados como base para a preparação de estados de uma única parte. A realização de traço parcial sobre o sistema resulta em estados reduzidos de apenas um *qudit*, sendo que os coeficientes dos estados reduzidos dependem da amplitude conjunta $\Phi_{in}(x_i, x_s, z_a)$ (Eq.(2.10)). Partindo do estado da Eq.(2.12) e supondo, por exemplo, que traço parcial seja realizado sobre a parte i do sistema, o estado reduzido ρ_s é dado por (Ap. C) [76]

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_s &= Tr_i (|\Psi\rangle\langle\Psi|) \\ \hat{\rho}_s &\propto \sum_{l_i=-\Lambda_i}^{\Lambda_i} \left(\sum_{l_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_s} \sum_{m_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_s} \Phi_{in}(l_i d, l_s d, z_a) \Phi_{in}^*(l_i d, m_s d, z_a) |l_s\rangle\langle m_s| \right), \end{aligned} \quad (2.33)$$

sendo o somatório final dependente de l_s e m_s .

Para o caso em que o traço parcial é realizado sobre a parte s do sistema, obtemos um estado $\hat{\rho}_i$ descrito de forma completamente análoga à Eq. (2.33) (com os somatórios dos índices l_s , l_i e m_i).

Caso a função $\Phi_{in}(x_i, x_s, z_a)$ possa ser escrita como um produto de duas funções, uma dependente apenas de x_i e outra apenas de x_s , a Eq.(2.33) dependerá apenas dos somatórios sobre as funções dependentes de l_s e m_s , indicando a ausência de correlação inicial entre as duas partes. Em contrapartida, se o estado bipartido é preparado com fótons produzidos pela CPD, por exemplo, sabemos que a função $\Phi_{in}(x_i d, x_s d, z_a)$ é não separável com relação as variáveis x_i e x_s [42]. Isso faz com que o estado $\hat{\rho}_s$ carregue a correlação do sistema de duas partes, sendo seus coeficientes determinados pelo sistema de origem, isto é, o estado bipartido.

Considerando os dois métodos de preparação descritos na Sec.2.2, o estados reduzidos $\hat{\rho}_s$ em cada um deles, são

$$\hat{\rho}_{s1} \propto \sum_{l_i=-\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s, m_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_s} e^{i\varphi(l_s^2 - m_s^2)} \xi\left(\frac{(l_i - l_s)d}{2p}, z_c\right) \xi\left(\frac{(l_i - m_s)d}{2p}, z_c\right) |l_s\rangle\langle m_s|, \quad (2.34)$$

para a imagem ampliada do cristal projetada sobre o plano das aberturas, e

$$\hat{\rho}_{s2} \propto \sum_{l_i=-\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s, m_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_s} e^{i\phi(2l_i(m_s - l_s) + l_s^2 - m_s^2)} E\left(\frac{(l_i + l_s)d}{2}, z_p\right) E^*\left(\frac{(l_i + m_s)d}{2}, z_p\right) |l_s\rangle\langle m_s| \quad (2.35)$$

para a imagem do perfil do *pump* em $z = z_p$ projetada sobre o plano em $z - z_a$.

Novamente, os estados reduzidos da parte i , $\hat{\rho}_{i1}$ e $\hat{\rho}_{i2}$, são descritos de forma análoga às Eqs. (2.34) e (2.35), respectivamente.

Conclusão

Neste capítulo, revisamos os pontos principais sobre o uso de fendas múltiplas na preparação de estados quânticos, e mostramos que métodos conhecidos ainda podem ser explorados de muitas formas além daquelas feitas na literatura.

3 Medições em sistemas de estados de fenda

Tanto em óptica clássica quanto em óptica quântica, os experimentos envolvendo fendas múltiplas são, em geral, estudados por meio de dois tipos de medição: a imagem e a transformada de Fourier óptica do plano da fenda múltipla. No caso clássico, a imagem fornece a intensidade do campo elétrico que emerge de cada abertura. Já a transformada de Fourier óptica, fornece a distribuição de intensidade do campo resultante vindo das aberturas e propagado até um plano distante da fonte [33]. No caso quântico, a imagem nos permite determinar o número de fótons transmitidos através de cada uma das aberturas [40, 84, 85]. Já a transformada de Fourier óptica nos permite obter a distribuição de probabilidade de detectarmos fótons em um plano distante das aberturas onde não seja possível discernir o caminho de cada fóton, ou a abertura de origem de cada um [21, 33]. Neste capítulo, revisamos as descrições teóricas desses dois tipos de medição, apresentando nossas contribuições para o entendimento das mesmas, e as relacionamos com o problema da determinação da coerência quântica de estados de fenda de altas dimensões.

Nas três primeiras seções, analisamos as medições de estados de uma e duas partes, sendo a primeira seção uma revisão teórica sobre os dois processos de medição citados acima. Na Sec. 3.2, mostramos como a descrição da interação do estado com um marcador de caminho (Cap.1) é aplicada às medições dos estados de fenda. Em seguida, na Sec.3.3, relacionamos a análise da seção anterior com os possíveis métodos para a obtenção experimental da norma l_1 de coerência. Por fim, na Sec.3.4, discutimos a extensão das medições descritas na Sec.3.1 para estados bipartidos, e as medições marginais na preparação de estados de uma parte.

3.1 Operadores de medição e probabilidades de detecção

Para qualquer sistema quântico em um certo estado $\hat{\rho}$, a probabilidade de obtermos um resultado α após uma medição associada a um operador \hat{M}_α é dada por [75]

$$P_\alpha = \text{Tr}(\hat{\Gamma}\hat{\rho}), \text{ onde } \hat{\Gamma} = \hat{M}_\alpha^\dagger \hat{M}_\alpha. \quad (3.1)$$

Em sistemas ópticos, as distribuições de probabilidade são experimentalmente obtidas a partir da contagem de fótons registrados por um detector fixo em um plano (em $z = z_d$) que chamamos de plano de detecção. A taxa temporal com que os fótons em um estado $\hat{\rho}$ são registrados em um determinado ponto (x, y) no plano de detecção, é proporcional ao $\text{Tr}(\hat{E}^{(-)}(x, y, z_d) \hat{E}^{(+)}(x, y, z_d) \hat{\rho})$, sendo $\hat{E}^{(-)}(x, y, z_d)$ o operador campo elétrico no ponto (x, y) do plano em $z = z_d$ [43, 77].

Na medição dos estados de fenda, a distribuição de fótons registrados em $z = z_d$ é avaliada na mesma direção em que a discretização do momento linear ocorre, como as demais operações sobre o estado. Neste trabalho, como descrito no Cap.2, o momento linear dos fótons é discretizado ao longo da direção \hat{x} . Assim, a probabilidade $P(x, z_d)$ de detectarmos um fóton em alguma posição x do plano em $z = z_d$ é tal que [43, 77]

$$P(x, z_d) = \text{Tr} \left(\hat{E}^{(-)}(x, z_d) \hat{E}^{(+)}(x, z_d) \hat{\rho} \right). \quad (3.2)$$

Portanto, as medições feitas sobre os estados de fenda são associadas ao operador positivo

$$\hat{\Gamma} = \hat{E}^{(-)}(x, z_d) \hat{E}^{(+)}(x, z_d). \quad (3.3)$$

Considerando um estado de fenda geral, descrito como

$$\hat{\rho} = \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{m=-\Lambda}^{\Lambda} \rho_{lm} |l\rangle \langle m| \text{¹}, \quad (3.4)$$

podemos escrever o operador $\hat{\Gamma}$ na mesma base de $\hat{\rho}$, a saber [61, 70]

$$\hat{\Gamma} = \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{m=-\Lambda}^{\Lambda} \langle l | \hat{E}^{(-)}(x, z_d) \hat{E}^{(+)}(x, z_d) | m \rangle | l \rangle \langle m |, \quad (3.5)$$

e o produto $\hat{\Gamma} \hat{\rho}$ como

$$\hat{\Gamma} \hat{\rho} = \sum_{m=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{r=-\Lambda}^{\Lambda} \langle m | \hat{E}^{(-)}(x, z_d) \hat{E}^{(+)}(x, z_d) | l \rangle \rho_{lr} | m \rangle \langle r |. \quad (3.6)$$

Nesse caso, escrevemos a probabilidade $P(x, z_d)$ (Eq.(3.2)), ou melhor, o traço de $\hat{\Gamma} \hat{\rho}$ como

$$P(x, z_d) = \sum_{m=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \langle m | \hat{E}^{(-)}(x, z_d) \hat{E}^{(+)}(x, z_d) | l \rangle \rho_{lm}. \quad (3.7)$$

A Eq.(3.7) mostra que a probabilidade $P(x, z_d)$ de um fóton ser detectado depende não apenas do estado preparado, mas também dos valores $\{\langle m | \hat{E}^{(-)}(x, z_d) \hat{E}^{(+)}(x, z_d) | l \rangle\}$, e conseqüentemente, do operador implementado na medição (Eq.(3.3)). Além disso, os diferentes processos de medições envolvem diferentes expressões para os operadores campo elétrico.

Com relação à determinação dos operadores atuantes em cada medição, trabalhos anteriores mostraram que $\hat{E}^{(+)}(x, z_d)$ é o operador campo elétrico de um fóton propagado através dos componentes ópticos do *setup* de medição até o plano em $z = z_d$ [61]. Neste trabalho, o *setup* de medição engloba toda montagem experimental entre o plano das

¹ Como na descrição do capítulo anterior, $\Lambda = (D - 1)/2$ e D é a dimensão do estado definido pelo número de aberturas da fenda múltipla.

aberturas e o plano de detecção. Em todas as configurações de medição utilizadas, uma lente esférica é posicionada no meio do caminho entre a fenda múltipla e o detector, como mostrado na Fig. 10. Sendo assim, o cálculo de $\hat{E}^{(+)}(x, z_d)$ é igual ao da propagação de um fóton que propagando do plano em $z = z_a$ até o plano em $z = z_d$, sendo transmitido por uma lente em $z = z_l$ (Fig. 10).

As configurações correspondentes às duas medições abordadas, à saber, imagem e transforma da de Fourier, são descritas na sequência.

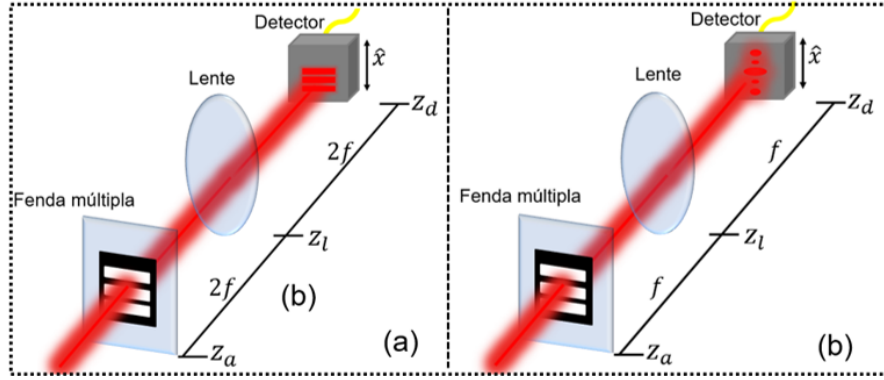


Figura 10 – Esquema do *setup* de medição. Uma lente esférica é colocada no plano em $z = z_l$, à meia distância entre o plano das aberturas em $z = z_a$ e o plano de detecção em $z = z_d$. Em (a) a lente possui distância focal igual a $(z_l - z_a)/2$ e a imagem não ampliada do plano das aberturas é projetada sobre o plano de detecção. Em (b) a lente possui distância focal igual a $z_l - z_a$ e a transformada de Fourier óptica do plano das aberturas é projetada sobre o plano de detecção.

- Imagem

Na primeira configuração (Fig.10(a)), a lente posicionada entre a fenda múltipla e o detector possui uma distância focal f tal que $z_l - z_a = z_d - z_l = 2f$. Nessa situação, a lente projeta a imagem do plano da fenda múltipla sobre o plano de detecção, como mostrado na Sec. A.2. Partindo do cálculo apresentado na Sec.B.2 e da Eq.(3.7), temos que neste caso a probabilidade de um fóton ser detectado em um ponto x do plano em $z = z_d$ é dada por

$$\begin{aligned}
 P^I(x, z_d) &\propto \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{m=-\Lambda}^{\Lambda} \Pi\left(\frac{x - md}{2a}\right) \Pi\left(\frac{x - ld}{2a}\right) \langle l | \hat{\rho} | m \rangle \\
 P^I(x, z_d) &\propto \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \Pi\left(\frac{x - ld}{2a}\right) \rho_{ll}.
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

A distribuição de probabilidade da Eq.(3.8) mostra que a medição da imagem da fenda múltipla nos permite acessar o valor de cada elemento diagonal da matriz densidade do estado (proporcional a contagem de fótons registrados em torno de $x = ld$, dentro de um intervalo $2a$).

- Transformada de Fourier óptica

No caso em que a distância focal f_2 da lente em $z = z_l$ é tal que $z_l - z_a = z_d - z_l = f_2$ (Fig.10(b)), a transformada de Fourier do plano da fenda múltipla é projetada sobre o plano de detecção, como discutido nas Secs. A.2 e B.2. A partir da Sec.B.2 e da Eq.(3.7), a probabilidade de detectarmos um fóton em um ponto x do plano $z = z_d$ nesse caso é dada por

$$P^F(x, z_d) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{kax}{f_2}\right) \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{m=-\Lambda}^{\Lambda} e^{-i\frac{k(l-m)d}{f_2}x} \rho_{lm} \\ \propto \text{sinc}^2\left(\frac{kax}{f_2}\right) \left[\sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \rho_{ll} + \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{m \neq l, m=-\Lambda}^{\Lambda} 2 \cos\left(\frac{k(l-m)d}{f_2}x + \varphi_{lm}\right) |\rho_{lm}| \right], \quad (3.9)$$

onde φ_{lm} é a fase do coeficiente complexo ρ_{lm} , e para um estado normalizado $\sum_l \rho_{ll} = 1$ [43, 77].

A distribuição de probabilidade descrita na Eq.(3.9) apresenta uma oscilação ponderada pelos coeficientes não diagonais de $\hat{\rho}$, mas também depende de todos os outros. Por isso, os coeficientes $\{\rho_{lm}; l \neq m\}$ não podem ser determinados diretamente da distribuição de contagem proporcional a Eq.(3.9), ao contrário dos coeficientes $\{\rho_{ll}\}$, que podem ser obtidos diretamente dos dados experimentais proporcionais a Eq.(3.8).

A informação a respeito de cada $\rho_{lm}(l \neq m)$ está disponível na Eq.(3.9) mas nem sempre é acessível, como veremos na sequência. Na Sec.3.3 abordamos o problema diretamente, onde discutimos as possíveis maneiras de determinarmos o valor da soma $\sum_{l,m;l \neq m} |\rho_{lm}|$ a partir do padrão de interferência da Eq.(3.9).

3.2 Paralelo entre medições de estados de fenda e o formalismo de marcadores de caminho

Na revisão da seção anterior, as Eqs.(3.7), (3.8) e (3.9) mostram que o resultado de uma medição, e as informações dela extraídas, dependem do operador implementado, e portanto, do *setup* experimental. Como consequência, a observação de franjas de interferência produzidas por um determinado estado, depende não apenas do estado em si, mas também de como a medição é feita. Essa dependência tem sido discutida em muitos trabalhos onde a coerência quântica é estudada em interferômetros de dois ou mais caminhos. Para estabelecermos uma conexão entre a análise dos estados de fenda e os demais trabalhos da literatura, propomos um paralelo entre a descrição de medição via interação com marcadores de caminho (apresentada na Ref. [14]) e a introduzida na seção anterior. Além disso, discutimos a relevância de nossas análises na medição da norma l_1 de coerência.

Como ponto de partida, observemos que a Eq.(3.7) é um somatório em que cada termo corresponde a um par lm . Se construirmos uma matriz densidade $\hat{\rho}'$ com os termos da Eq. (3.7), de forma que cada coeficiente ρ'_{lm} seja dado pelo termo correspondente ao par lm na Eq. (3.7), o operador de estado $\hat{\rho}'$ obtido é

$$\hat{\rho}' = \sum_{l,m=-\lambda}^{\lambda} \left(\rho_{lm} \langle m | E^{(-)}(x, z_d) E^{(+)}(x, z_d) | l \rangle \right) | l \rangle \langle m |. \quad (3.10)$$

Voltando ao Cap.1, destacamos a semelhança entre as Eqs. (1.15) e (3.10). O estado hipotético $\hat{\rho}'$ é descrito como se houvesse uma espécie de marcador de caminho, cujos possíveis estados dependem da configuração experimental entre os planos em $z = z_a$ e $z = z_d$ (já que o valor de cada $\langle m | E^{(-)}(x, z_d) E^{(+)}(x, z_d) | l \rangle$ depende da configuração experimental).

Experimentos com estados de fenda são basicamente constituídos de um *ensemble* de fótons propagando através de um *setup* experimental até um plano onde os fótons são registrados. Se a descrição dos resultados permanece inalterada, a separação entre etapas de preparação, evolução e medição podem ser feitas de forma conveniente a uma determinada análise do experimento. Assim, a distribuição de probabilidade de detecção de fótons pode ser obtida por diferentes maneiras. Na seção anterior, por exemplo, $\hat{E}^{(+)}(x, z_d) \propto a^\dagger$ foi calculado considerando o campo propagado através dos componentes ópticos do *setup* de medição, partindo do plano das fendas até o plano do detector. No entanto, a distribuição de probabilidade resultante também poderia ser obtida considerando a propagação do estado de fenda, preparado em $z = z_a$, até o plano imediatamente após a lente. O operador $E^{(+)}(x, z_d)$ seria, então, calculado considerando a propagação de um fóton de $z = z_a$ até z_l . Poderíamos ainda propagar o estado preparado no plano das aberturas até o plano do detector. Nesse caso, $\hat{E}^{(+)}(x, z_d)$ teria o papel apenas de aniquilar os fótons no plano em $z = z_d$. Em uma outra possibilidade, podemos supor a existência de um marcador de caminho entre o plano das aberturas e o plano de detecção, com o qual os fótons do estado preparado em $z = z_a$ interagem produzindo um estado conjunto em $z = z_d$, semelhante ao da Eq.(1.14).

Vamos considerar o estado de um fóton transmitido por uma determinada abertura l e propagado até o plano em $z = z_d$, através da montagem experimental mostrada na Fig. 10. Sendo $|n_l\rangle$ o estado no plano em $z = z_a$, escrito como

$$|n_l\rangle_{z_a} \propto \int_{-\infty}^{\infty} \Pi\left(\frac{x - ld}{2a}\right) |x\rangle dx, \quad (3.11)$$

o estado final $|p_l\rangle = |n_l\rangle_{z_d}$ em $z = z_d$, é tal que²

$$|p_l\rangle \propto \begin{cases} \int \Pi\left(\frac{x-ld}{2a}\right) |x\rangle dx & \text{na configuração da Fig.10(a)} \\ \int \text{sinc}(kax/f) e^{-i\frac{kld}{f}x} |x\rangle dx & \text{na configuração da Fig.10(b)}. \end{cases} \quad (3.12)$$

A descrição da propagação dos fótons que saem do plano das abertura e passam pelo *setup* experimental até z_d é análoga à descrição em que cada possível $|l\rangle$ (do estado de interesse) interage com seu respectivo marcador $|p_l\rangle$ antes de ser detectado. Nesse sentido, podemos considerar que o estado resultante $\hat{\rho}_T$ no plano de detecção é tal que

$$\hat{\rho}_T = \sum_{l,m=-\Lambda}^{\Lambda} \rho_{lm} |l\rangle |p_l\rangle \langle m| \langle p_m|. \quad (3.13)$$

Já o estado observado $\hat{\rho}_o$ é dado pelo traço parcial sobre os estados do marcador de caminho, isto é,

$$\hat{\rho}_o = \text{Tr}_p(\rho_T) = \sum_{l,m=-\Lambda}^{\Lambda} \langle p_m|p_l\rangle \rho_{lm} |l\rangle \langle m|. \quad (3.14)$$

Para as duas situações consideradas, temos que

$$\hat{\rho}_o \propto \begin{cases} \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \Pi^2\left(\frac{x-ld}{2a}\right) \rho_{ll} |l\rangle \langle l| & \text{na configuração da Fig.10(a)} \\ \sum_{l,m=-\Lambda}^{\Lambda} \text{sinc}^2\left(\frac{kax}{f_2}\right) e^{i\frac{kld}{f_2}x(m-l)} \rho_{lm} |l\rangle \langle m| & \text{na configuração da Fig.10(b)}. \end{cases} \quad (3.15)$$

É interessante analisarmos as duas possibilidades da Eq. (3.15) tendo em mente o conteúdo da Sec.1.3, onde discutimos os efeitos da ortogonalidade dos possíveis estados do marcador de caminho na determinação dos coeficientes diagonais e não diagonais do estado de interesse. No primeiro caso da Eq.(3.15) (Fig.10(a)), os possíveis estados do conjunto $\{|p_l\rangle\}$ são ortogonais entre si. Nesse caso, podemos determinar apenas os coeficientes diagonais do estado de interesse, isto é, os coeficientes $\{\rho_{ll}\}$ do estado $\hat{\rho}$. Já no segundo caso (Fig.10(b)), os estados $\{|p_l\rangle\}$ diferem entre si apenas por uma fase. Assim, fótons vindos de cada uma das aberturas não podem ser diferenciados e o estado observado é escrito em termos de todos os coeficientes de $\hat{\rho}$.

Dados os argumentos construídos até aqui, destacamos o paralelo existente entre as descrições envolvendo a interação de um sistema com um marcador de caminho e a descrição tradicional de experimentos envolvendo estados de fenda. Experimentos como o da Fig.10 parecem possuir uma espécie de marcador de caminho, cujos possíveis estados

² Cálculo feito de forma detalhada na Sec.A.2.

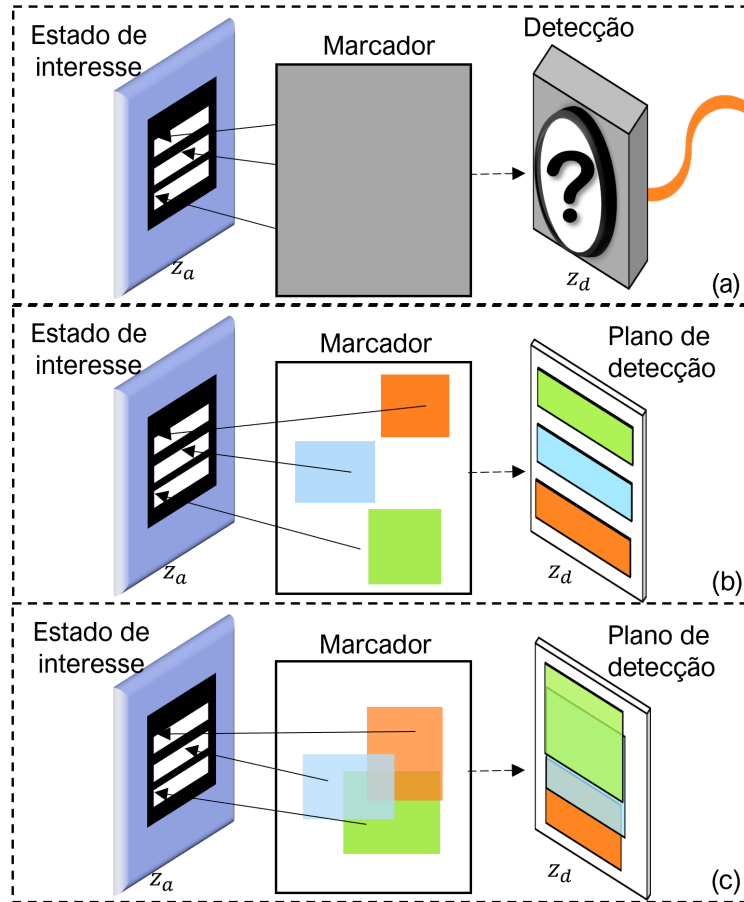


Figura 11 – Esquema ilustrativo propagação de um estado de fenda através de um *setup* experimental. Em analogia a Fig. 1, podemos considerar o estado no plano de detecção como resultado da interação entre o estado em z_a (estado de interesse) e o estado de um fóton originado em z_a e propagado até o plano z_d . Em (a) o estado de interesse interage com um *setup* experimental geral, sendo que o que é observado no plano de detecção depende diretamente dessa interação (propagação) de forma análoga ao caso da Fig.1 (a). (b) corresponde a configuração em que $\langle n_l | n_m \rangle_{z_d} == \langle p_l | p_m \rangle = 0$ (Eq.(3.12)). Nesse caso a imagem do plano das aberturas é projetada em z_a e as aberturas de origem de cada fóton detectado são perfeitamente discriminadas, como no caso da Fig.1 (b). (c) corresponde a configuração em que $\langle n_l | n_m \rangle_{z_d} == \langle p_l | p_m \rangle \neq 0$. Nesse caso, a transformada de Fourier do plano z_a é projetada em z_d e as aberturas de origem dos fótons detectados não podem ser identificadas, como no caso da Fig.1 (c).

$\{|p_l\rangle\}$ são determinados pela configuração do *setup* de medição (pelo campo propagado entre z_a e z_d). Quando a imagem do plano das aberturas é projetada sobre o plano de detecção, os estados do conjunto $\{|p_l\rangle\}$ são ortogonais, e nenhuma coerência pode ser observada, independente de qual seja o estado $\hat{\rho}$ (de forma semelhante ao caso em que o marcador de caminho se encontra em uma superposição de estados ortogonais). Por outro lado, a projeção da transformada de Fourier óptica do plano da fenda múltipla sobre o plano de detecção, produz um conjunto de estados indistinguíveis, possibilitando a

observação da coerência do estado inicial (como no caso em que o marcador de caminho de encontra numa superposição de estados não ortogonais) [82].

A determinação da coerência quântica de um estado, a partir do padrão de interferência resultante da medição no plano de Fourier, não é uma tarefa trivial. Como será mostrado na próxima seção, a questão principal a ser respondida é: como podemos extrair o valor de $\sum_{l,m;l \neq m} \rho_{lm}$ da curva experimental descrita na Eq.(3.9).

3.3 Medição da norma l_1 de *qudits* codificados em caminho transversal

Desde o tratamento teórico da Ref. [16], outros autores têm trabalhado no problema experimental referente à determinação da coerência quântica. Um dos quantificadores definidos na Ref. [16] foi obtido experimentalmente em 2016, para o estado de um *qubit* codificado em polarização [17]. Em relação aos estados de fenda, T. Paul e T. Qureshi analisaram a teoria envolvida na determinação experimental da norma l_1 , a partir da medição de um padrão de interferência como o da Eq.(3.9). Nesta seção, discutimos o método proposto na Ref. [18], e apresentamos alternativas para os casos em que o mesmo não é válido.

Na Sec.3.1, vimos duas medições típicas em experimentos envolvendo estados de fenda. Uma delas nos permite discriminar o caminho dos fótons, nos dando acesso apenas aos elementos diagonais da matriz densidade do estado preparado no plano da fenda múltipla. Para que tenhamos acesso aos elementos não diagonais, necessitamos de um *setup* de medição através do qual os caminhos dos fótons não possam ser identificados, o que ocorre quando a transformada de Fourier óptica do plano em $z = z_a$ é projetada em $z = z_d$. Porém, o valor da norma l_1 não pode ser extraído diretamente da curva experimental descrita pela Eq.(3.9). A princípio, essa limitação se dá em todas as dimensões onde há a possibilidade de superposição, uma vez que a distribuição de probabilidade no plano de Fourier depende tanto de elementos não diagonais quanto diagonais, independente da dimensão. Para os estados bidimensionais, a visibilidade do padrão de interferência nos fornece a soma dos módulos dos dois coeficientes não diagonais. Já para dimensões maiores, não podemos definir um contraste e a soma dos módulos dos coeficientes não diagonais envolve mais de dois termos.

Conforme a Ref. [18], a determinação da coerência quântica pode ser feita com o auxílio de um segundo estado de fenda $\hat{\rho}_{diag}$, previamente identificado como sendo incoerente e contendo os mesmos coeficientes diagonais do estado estudado $\hat{\rho}$. A medição do estado $\hat{\rho}_{diag}$ no plano de Fourier resulta na seguinte distribuição de probabilidade ao

longo de \hat{x} no plano em $z = z_d$

$$P_{diag}(x, z_d) \propto \text{sinc}^2 \left(\frac{kax}{f_2} \right) \left[\sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \rho_l \right], \quad (3.16)$$

a qual não apresenta oscilações, como esperado para um estado incoerente.

Sendo $\hat{\rho}$ o estado cuja coerência pretendemos determinar e $\hat{\rho}_{diag}$ o estado previamente conhecido como incoerente, podemos definir a curva de oscilação $\Theta(x, z_d)$ como

$$\begin{aligned} \Theta(x, z_d) &= \frac{P^F(x, z_d) - P_{diag}(x, z_d)}{P_{diag}(x, z_d)} \\ \Theta(x, z_d) &= \sum_{l=-\Lambda}^{\Lambda} \sum_{m \neq l, m=-\Lambda}^{\Lambda} 2 \cos(\gamma(l-m)x + \varphi_{lm}) |\rho_{lm}|, \end{aligned} \quad (3.17)$$

onde $\gamma = kd/f_2$, e a normalização de $\hat{\rho}_{diag}$ foi considerada.

Apesar de a função $\Theta(x, z_d)$ não ser resultado direto de uma medição, como $P(x, z_d)$ e $P_{diag}(x, z_d)$, a curva resultante na Eq.(3.17) pode ser usada na determinação da coerência quântica de alguns estados, a saber, aqueles que cujas fases $\{\varphi_{lm}\}$ são todas nulas (ou iguais a π). Para esses estados, todos os termos cossenoidais na Eq.(3.17) possuem o mesmo ponto de máximo (ou de mínimo), de forma que o valor máximo (ou mínimo) de $\Theta(x, z_d)$ é igual à norma l_1 do estado.

Tomando como exemplo o estado geral de dimensão $D = 3$, representado pela matriz densidade

$$\rho = \begin{array}{c} \langle -1| \\ |0\rangle \\ |1\rangle \end{array} \begin{pmatrix} \langle -1| & \langle 0| & \langle 1| \\ \rho_{-1-1} & |\rho_{-10}| e^{i\varphi_{-10}} & |\rho_{-11}| e^{i\varphi_{-11}} \\ |\rho_{-10}| e^{-i\varphi_{-10}} & \rho_{00} & |\rho_{01}| e^{i\varphi_{01}} \\ |\rho_{-11}| e^{-i\varphi_{-11}} & |\rho_{01}| e^{-i\varphi_{01}} & \rho_{11} \end{pmatrix}, \quad (3.18)$$

temos que $\Theta(x, z_d)$ para essa dimensão é dado por

$$\begin{aligned} \Theta_3(x, z_d) &= 2 |\rho_{-10}| \cos(\gamma x + \varphi_{-10}) + 2 |\rho_{01}| \cos(\gamma x + \varphi_{01}) \\ &\quad + 2 |\rho_{-11}| \cos(2\gamma x + \varphi_{-11}). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Diferentes estados de *qutrit* resultam em funções Θ_3 com diferentes coeficientes e diferentes fases. Na Fig.12 estão as simulações da Eq. (3.19) para estados com diferentes valores de ρ_{lm} e φ_{lm} . Nas Figs. 12(a) e (b) todas as fases são nulas ($\{\varphi_{lm} = 0\}$). Nas Figs. 12(c) e (d) $\{\varphi_{lm} = \pi\}$, na Fig. 12(e) $\{\varphi_{lm} = \pi/2\}$, e na Fig. 12(f), $\varphi_{-11} = 2\pi/3, \varphi_{-10} = \pi/2, \varphi_{01} = 5\pi/3$. Além disso, nas Figs. 12(b), (d) e (f) $|\rho_{-11}| = 0.25, |\rho_{-10}| = 0.2, |\rho_{01}| = 0.35$, e nas Figs.12(a), (c) e (e) $|\rho_{-11}| = 0.4, |\rho_{-10}| = 0.1, |\rho_{01}| = 0.5$. Em cada gráfico, a linha horizontal superior indica o valor de $2(|\rho_{-11}| + |\rho_{-10}| + |\rho_{01}|)$, e a linha inferior indica o oposto deste valor.

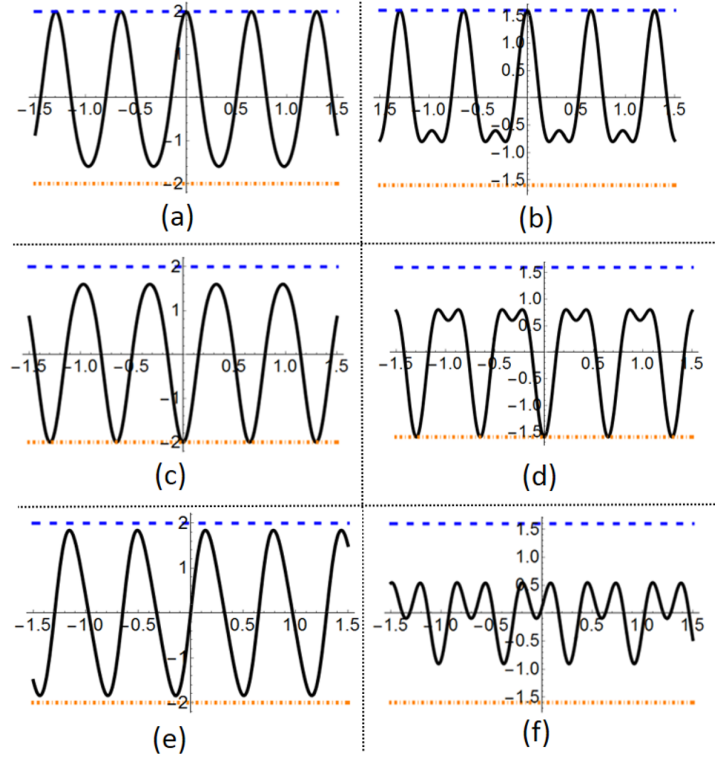


Figura 12 – Curvas teóricas da função de oscilação $\Theta(x, z_D)$ na Eq.(3.19) para qutrits. As linhas azuis e tracejadas (no topo das curvas) indicam o valor da norma l_1 (coerência quântica não normalizada) dos estados correspondentes à cada curva, as linhas de pontos na cor laranja (na parte de baixo das curvas) indicam o valor negativo da norma l_1 de cada estado. Em (a) e (b) todas as fases φ_{lm} são iguais a zero, *i.e.*, $\{\varphi_{lm} = 0\}$. Em (c) e (d) $\{\varphi_{lm} = \pi\}$, em (e) $\{\varphi_{lm} = \pi/2\}$, e em (f) $\varphi_{-11} = 2\pi/3, \varphi_{-10} = \pi/2, \varphi_{01} = 5\pi/3$. Em (b), (d) e (f), $|\rho_{-11}| = 0.25, |\rho_{-10}| = 0.2, |\rho_{01}| = 0.35$, e em (a), (c) e (e), $|\rho_{-11}| = 0.4, |\rho_{-10}| = 0.1, |\rho_{01}| = 0.5$.

A Fig. 12 mostra que para estados com todas as fases nulas (Figs.12(a) e (b)), e com todas as fases iguais a π (Figs. 12(c) e (d)), a coerência quântica pode ser determinada diretamente do gráfico, sendo

$$\mathcal{C} = \begin{cases} \frac{\Theta_{max}(x_{max}, z_d)}{(3-1)} & \text{para } \{\varphi_{lm} = 0\}, \\ \frac{\Theta_{min}(x_{min}, z_d)}{(3-1)} & \text{para } \{\varphi_{lm} = \pi\}. \end{cases} \quad (3.20)$$

Na Ref. [18] os autores propõem a determinação da coerência quântica de estados com fases nulas, a partir dos máximos centrais das funções descritas nas Eqs.(3.16) e (3.17)³. Tal proposta é equivalente à análise de um único ponto (de máximo ou mínimo) das curvas mostradas nas Figs. 12 (a)-(d).

Nas Figs. 12(e) e (f), onde as fases são diferentes, a oscilação não atinge o valor da norma l_1 do estado. Portanto, a menos que saibamos previamente que $\{\varphi_{ml} = 0\}$ (ou

³ Os autores de [18] mostram que $\mathcal{C} = [P^F(x_{max}, z_d)/P_{diag}(x_{max}, z_d)] - 1$ para estados de fases nulas.

$\{\varphi_{ml} = \pi\}$), não podemos determinar a coerência quântica do estado estudado a partir da função $\Theta(x, z_d)$. Assim, tanto a necessidade de se caracterizar estados completamente desconhecidos, como o fato de a suposição $\{\varphi_{ml} = 0\}$ (ou $\{\varphi_{ml} = \pi\}$) não ser compatível com muitos dos estados preparados em laboratório, faz com que a determinação experimental da coerência quântica de estados mais gerais precise ser estudada.

Um ponto importante à ser destacado na Eq.(3.9), é o fato de que cada termo do segundo somatório corresponde a uma oscilação consequente da superposição entre um par de modos de fenda, sendo φ_{ml} a fase relativa entre os modos transversais em cada estado do par ($|l\rangle$ e $|m\rangle$). Como consequência, se apenas os fótons oriundos de um par de aberturas chegar até o detector, o padrão de interferência observado será o de um estado bidimensional. Neste caso, a visibilidade do padrão interferência é igual à coerência entre os dois modos de fenda considerados [22].

Tomando novamente $D = 3$ como exemplo, se apenas os fótons oriundos das aberturas $l = -1$ e $m = 1$ chegarem até o detector, o padrão de interferência observado ao longo de \hat{x} no plano em $z = z_d$ pode ser escrito como

$$P_{-11}(x, z_d) \propto \text{sinc}^2\left(\frac{kax}{f_2}\right) [1 + V_{-11} \cos(2\gamma x - \varphi_{-11})], \quad (3.21)$$

onde $V_{-11} = 2|\rho_{-11}| / (\rho_{-1-1} + \rho_{11})$, e ρ_{-11} , ρ_{11} e ρ_{-1-1} são os elementos da matriz densidade do *qutrit* em questão.

Considerando os padrões que seriam obtidos para os outros pares de aberturas, $l = -1, m = 0$ e $l = 0, m = 1$, podemos determinar a coerência do *qutrit* somando, de forma ponderada, as visibilidades dos padrões de interferência produzidos por todas as combinações de pares de aberturas. Para o estado geral descrito na Eq.(3.18), podemos escrever [82]

$$\mathcal{C} = \frac{1}{(3-1)} \frac{V_{-10}(\rho_{-1-1} + \rho_{00}) + V_{-11}(\rho_{-1-1} + \rho_{11}) + V_{01}(\rho_{00} + \rho_{11})}{\rho_{-1-1} + \rho_{00} + \rho_{11}}. \quad (3.22)$$

Na ilustração da Fig.13, uma das aberturas da fenda tripla é bloqueada mecanicamente, de forma que o padrão de interferência seja consequente da superposição dos estados correspondentes a apenas duas aberturas. Nesse caso, para determinarmos o valor de \mathcal{C} na Eq.(3.22), também é necessário realizar a medição no plano de imagem, à fim de determinarmos os valores dos coeficientes ρ_{-1-1} , ρ_{00} e ρ_{11} . Portanto, a determinação experimental de todos os termos da Eq.(3.22) envolve a realização de quatro varreduras ao longo de \hat{x} no plano em $z = z_d$ (três padrões de interferência e uma imagem). Para um estado de dimensão $D > 2$, é necessária uma quantidade N de varreduras igual um mais a combinação de D dois à dois, isto é

$$N = 1 + \frac{D!}{2(D-2)!} = 1 + \frac{D^2 - D}{2}. \quad (3.23)$$

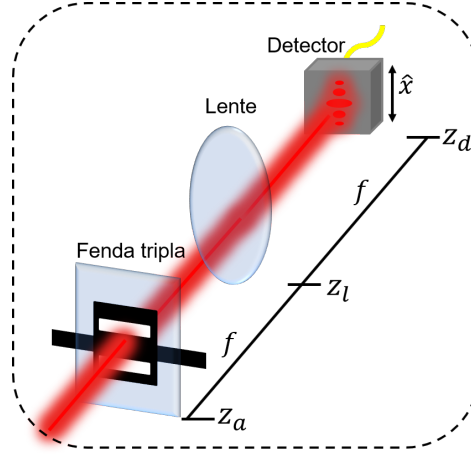


Figura 13 – Ilustração do procedimento experimental para a medição de padrões de interferência entre pares. Com uma lente projetando a transformada de Fourier do plano da fenda múltipla sobre o plano de detecção, um bloqueio mecânico é utilizado de forma a permitir que os fótons sejam transmitidos por apenas duas aberturas da fenda múltipla, em direção ao detector. A figura mostra o exemplo em que $l = -1$ e $m = 1$ são deixados livres, produzindo o padrão de interferência descrito pela Eq.(3.21).

Apesar do rápido crescimento de N com a dimensão D , o método se mostra interessante pelo fato de nos permitir determinar o valor da coerência quântica de qualquer estado, e também o módulo de cada um dos elementos de sua matriz densidade. Além disso, podemos determinar quais são as fases relativas entre dois elementos não diagonais de ρ . A fase relativa $\varphi_{-10} - \varphi_{01}$, por exemplo, é dado pelo deslocamento entre os máximos centrais dos padrões de interferência proporcionais a $P_{-10}(x, z_d)$ e $P_{01}(x, z_d)$.

3.4 Medição de estados bipartidos

As discussões feitas até aqui envolveram as medições de estados de fenda de uma única parte. Nesta seção, consideramos diferentes combinações das configurações ilustradas na Fig.10 para a medição de estados bipartidos. Além disso, mostramos como o traço parcial, apontado na Sec.2.3, é implementado experimentalmente.

3.4.1 Medição conjunta de imagem e padrão de interferência

Em sistemas bipartidos, operadores de medição como o da Eq.(3.3) atuam em cada um dos subespaços i e s , e a probabilidade de os fótons serem registrados em coincidência depende do registro de fótons de ambas as partes, dentro de uma mesma janela temporal [43].

Assim, para o estado geral

$$\hat{\rho} = \sum_{m_i, l_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{m_s, l_s = -\Lambda_s}^{-\Lambda_s} \rho_{l_i m_i, l_s m_s} |l_i\rangle \langle m_i| \otimes |l_s\rangle \langle m_s|, \quad (3.24)$$

a probabilidade $P(x_i, x_s, z_d)$ pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 P(x_i, x_s, z_d) &\propto \sum_{m_i, l_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{m_s, l_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \langle l_i l_s | \hat{\rho} | m_i m_s \rangle \\
 &\times \langle m_i m_s | \hat{E}_i^{(-)}(x_i, z_d) \hat{E}_s^{(-)}(x_s, z_d) \hat{E}_i^{(+)}(x_i, z_d) \hat{E}_s^{(+)}(x_s, z_d) | l_i l_s \rangle, \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

onde $\hat{\rho}$ é o estado conjunto e os subíndices i e s correspondem às duas partes do sistema.

Uma vez que os operadores atuam de forma independente sobre cada uma das partes, as coincidências podem ser obtidas sob diferentes combinações. Considerando as configurações descritas na Sec.3.1, há três combinações possíveis para as medições conjuntas. Em todas elas, consideramos que uma lente esférica é colocada no caminho de cada parte em $z_i = z_{f_i}$ e $z_s = z_{f_s}$, entre o plano das aberturas (em $z_i = z_s = z_a$) e os planos de detecção (em $z_i = z_d$ e $z_s = z_d$). Além disso, as distâncias entre os detectores e as respectivas fendas múltiplas são iguais.

- Imagem-Imagem.

Na primeira combinação possível, as duas lentes possuem distâncias focais tais que $f_i = f_s = (z_a - z_d)/4$. Os operadores de medida atuando em ambas as partes são os mesmos obtidos no Apêndice B.2 para a situação em que a imagem da fenda múltipla é projetada sobre o plano de detecção. Nesse caso, semelhantemente a Eq.(3.8), a probabilidade de registrarmos uma contagem em coincidência nas posições x_i e x_s [43] é

$$P(x_i, x_s, z_d) \propto \sum_{l_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \prod \left(\frac{x_i + l_i d}{2a} \right) \prod \left(\frac{x_s + l_s d}{2a} \right) \rho_{l_i l_s l_i l_s}, \quad (3.26)$$

onde $\{\rho_{l_i l_s l_i l_s}\}$ são os elementos diagonais da matriz densidade do estado conjunto. Assim, a medição em coincidências com a projeção das imagens de ambas as fendas sobre os planos de detecção, permite a determinação dos elementos diagonais da matriz densidade conjunta.

- Transformada de Fourier-Transformada de Fourier.

Na segunda configuração, as distâncias focais das duas lentes são tais que as transformadas de Fourier dos planos das aberturas, em $z_i = z_a$ e $z_s = z_a$, são projetadas sobre os planos de detecção em $z_i = z_d$ e $z_s = z_d$. Assim, cada parte é sujeita a um operador de medida em que a transformada de Fourier óptica do plano da fenda múltipla é projetada sobre o plano de detecção (calculado na Sec.B.2). Nesse caso, a

probabilidade de registrarmos uma coincidência é tal que

$$P(x_i, x_s, z_d) \propto \text{sinc}^2(kax_i/f_2) \text{sinc}^2(kax_s/f_2) \left[\sum_{l_i=-\Lambda_i, l_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_i} \sum_{m_i, l_i, m_s, l_s}^{\Lambda_s} \rho_{l_i l_i, l_s l_s} + \sum_{m_i, l_i=-\Lambda_i; m_i \neq l_i}^{\Lambda_i} \sum_{m_s, l_s=-\Lambda_s; m_s \neq l_s}^{\Lambda_s} 2|\rho_{m_i l_i, m_s l_s}| \cos \left(\gamma(x_i(m_i - l_i) + x_s(m_s - l_s) + (\varphi_{m_i l_i} + \varphi_{m_s l_s})) \right) \right]. \quad (3.27)$$

Padrões de interferência com ambas as partes sendo detectadas nos respectivos planos de Fourier, já foram bem estudados para estados 2×2 [51] e aplicados na execução de diferentes experimentos [7, 55]. A Eq.(3.27) possui termos cossenoidais dependentes apenas de x_i ou x_s , e também termos dependentes de $x_i \pm x_s$, os quais são conhecidos como termos de interferência condicionais. Já é bem estabelecido que a presença de apenas termos de interferência condicional (dependentes de $x_i \pm x_s$) na Eq.(3.27) indica um emaranhamento máximo em alguns estados $D \times D$ [51, 55], a saber, estados de Bell e estados anti-correlacionados em dimensões maiores que dois. No entanto, essa relação não é geral. Em grande parte dos estados de dimensão $D_i \times D_s$ ($D_i \neq D_s$) um modo de fenda de uma das partes é correlacionado com uma superposição de modos de fenda da outra parte. Para qualquer estado com essa característica, seja qual for a dimensão, não podemos fazer uma ligação direta entre a quantidade de emaranhamento e a presença (ou ausência) de termos condicionais na Eq.(3.27).

Tomando como exemplo o estado $|\psi_V\rangle$ (Eq. (2.30)), temos que a Eq.(3.27) para esse estado é dada por

$$P_V(x_i, x_s, z_d)(x_i, x_s) = \left\{ 1 + \frac{8}{9} \cos(\gamma(x_i - x_s)) - \frac{2}{9} \cos(\gamma(x_i - 2x_s)) - \frac{4}{9} \cos(\gamma(x_i + x_s)) - \frac{1}{9} \cos(\gamma(x_i + 2x_s)) - \frac{1}{9} \cos(\gamma x_i) \right\}. \quad (3.28)$$

Apesar de o emaranhamento de $|\psi_V\rangle$ ser máximo, $P_V(x_i, x_s, z_d)$ possui termos não condicionais (dependente apenas de x_i).

- Imagem - Transformada de de Fourier

A terceira configuração consiste em mesclar as duas medições descritas na Sec.3.1. Neste trabalho, consideramos o uso desta configuração na caracterização de estados em que um modo de fenda de uma das partes é correlacionado com alguma superposição de modos de fenda da segunda parte. Nos casos em que as correlações entre os modos das partes são “um para um” (um modo de uma parte correlacionado com outro modo de outra parte), os resultados são triviais.

Tomando como exemplo o caso em que a parte i é detectada no plano de imagem ($f_i = (z_a - z_d)/4$), a probabilidade de detecção em coincidência é dada por

$$P(x_i, x_s, z_d) \propto \text{sinc}^2(kax_s/f_s) \sum_{l_i=-\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{m_s, l_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_s} \rho_{m_i l_i, m_s l_s} e^{i\gamma x_s(m_s - l_s)} \prod \left(\frac{x_i - l_i d}{2a} \right) \quad (3.29)$$

onde a propriedade de ortogonalidade da função retângulo foi utilizada e $\gamma = kd/f_s$. A partir da Eq.(3.29), observamos que para cada posição fixa do detector d_i , dentro do intervalos $2a$ em torno dos pontos $l_i d$, a varredura do detector d_s produz diferentes oscilações nas coincidências. Podemos, dessa forma, reescrever a Eq.(3.29) como

$$P(x_i, x_s, z_d) \propto \text{sinc}^2(\theta x_s) \times \sum_{l_i=-\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s, m_s=-\Lambda_s}^{\Lambda_s} \prod \left(\frac{x_i - l_i d}{2a} \right) F_{\psi}^{(l_i)}(x_s, l_s, m_s), \quad (3.30)$$

onde $F_{\psi}^{(l_i)}(x_s, l_s, m_s)$ é a função que descreve a oscilação observada na varredura de d_s , enquanto d_i é mantido fixo na posição $x_i = l_i d$. Como $F_{\psi}^{(l_i)}(x_s, l_s, m_s)$ é governado pelos coeficientes $\rho_{l_i l_i, m_s l_s}$, as oscilações observadas dependem de qual parte do sistema é detectada no plano de Fourier.

Tabela 1 – Expressões teóricas das funções $F_{\psi}^{(l_s)}(x_i, l_i, m_i)$ para os estados $|\psi_I\rangle$, $|\psi_{II}\rangle$ e $|\psi_V\rangle$. Detector do *qubit* é varrido no plano de Fourier enquanto o detector do *qutrit* permanece fixo no plano de imagem nas posições $x_s = l_s d$ ($\gamma = \gamma = kd/f_i$).

State	$F_{\psi}^{(-1)}(x_i)$	$F_{\psi}^{(0)}(x_i)$	$F_{\psi}^{(1)}(x_i)$
$ \psi_I\rangle$	1	$[1 - \cos(\gamma x_i)]$	1
$ \psi_{II}\rangle$	1	1	1
$ \psi_V\rangle$	$\left[1 - \frac{4}{5} \cos(\gamma x_i)\right]$	$[1 - \cos(\gamma x_i)]$	$\left[1 - \frac{4}{5} \cos(\gamma x_i)\right]$

Como exemplo, nas Tabelas (1) e (2) estão as funções $F_{\psi}^{(l_s)}(x_i, l_i, m_i)$ de alguns dos estados analisados no Cap.2. As oscilações estão presentes nos casos em que o modo de fenda selecionado pelo detector no plano de imagem é correlacionado com uma superposição de modos de fenda da outra parte. Assim, essa medição é útil na caracterização parcial do estado, pois nos permite identificar se as correlações entre as partes do sistema são do tipo “um para um” na base dos estados de fenda.

Tabela 2 – Expressões teóricas das funções $F_\psi^{(l_i)}(x_s, l_s, m_s)$ para os estados $|\psi_I\rangle$, $|\psi_{II}\rangle$ e $|\psi_V\rangle$. Detector do *qutrit* é varrido no plano de Fourier enquanto o detector do *qubit* permanece fixo no plano de imagem nas posições $x_i = l_i d$ ($\gamma = kd/f_s$, ϕ , C_2 e C_3 são descritos na Eq.(2.22)).

State	$F_\psi^{(-1/2)}(x_s)$	$F_\psi^{(1/2)}(x_s)$
$ \psi_I\rangle$	$[1 + \cos(\gamma x_s)]$	$[1 + \cos(\gamma x_s)]$
$ \psi_{II}\rangle$	1	$\left[1 + \frac{2C_3 C_2}{C_3^2 + C_2^2} \cos(\phi d^2) \cos(2\gamma x_s)\right]$
$ \psi_V\rangle$	$\left[1 + \frac{4}{9} (\cos(\gamma x_s) - \cos(2\gamma x_s))\right]$	$\left[1 + \frac{4}{9} (\cos(\gamma x_s) - \cos(2\gamma x_s))\right]$

3.4.2 Probabilidades marginais e a operação traço parcial

Além das três combinações acima, podemos detectar os fótons em coincidências mantendo um dos detectores completamente aberto enquanto o outro é varrido ao longo de \hat{x} . Nesse caso, o caminho do fóton que chega no detector aberto, bem como a posição onde o mesmo é registrado, não é identificável. Portanto, os fótons assim registrados servem como um *trigger* que sinaliza a presença do par do fóton registrado no outro detector, em uma dada posição x . Na Eq.(3.25), as variáveis x_i e x_s correspondem às posições de detectores pontuais registrando fótons nos planos em $z = z_d$, ao longo de \hat{x} . Assim, abrir o detector de uma das partes é equivalente a integrar a expressão da Eq.(3.25) sobre uma das variáveis, ao longo de todo intervalo. No caso de o detector d_i ser aberto por exemplo, a probabilidade de detectarmos os fótons em coincidência será dada por

$$P(x_s, z_d) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x_i, x_s, z_d) dx_i. \quad (3.31)$$

A função a ser integrada na Eq.(3.31) depende do operador Γ (Eq.(3.5)) implementado sobre a parte do sistema cujo detector é aberto (i). Apesar disso, a probabilidade resultante $P(x_s, z_d)$ não depende do operador de medida atuando sobre essa parte do sistema. A mesma distribuição de probabilidade é obtida para os casos em que o detector aberto está no plano de imagem e no plano de Fourier. Como mostrado em detalhes no Ap. C, a Eq.(3.31) resulta em

$$P(x_s, z_d) \propto \sum_{l_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{m_s, l_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \left(\langle l_i m_s | E_s^{(-)}(x_s, z_d) E_s^{(+)}(x_s, z_d) | l_i l_s \rangle \langle l_s | \langle l_i | \hat{\rho} | l_i \rangle | m_s \rangle \right), \quad (3.32)$$

e descreve a probabilidade de detectarmos um fóton no estado

$$\hat{\beta} = \sum_{n_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \langle n_i | \hat{\rho} | n_i \rangle = \sum_{n_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_i, m_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s, m_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \rho_{l_i l_s, m_i m_s} \langle n_i | | l_i l_s \rangle \langle m_i m_s | | n_i \rangle. \quad (3.33)$$

A expressão acima é a obtida na Sec.2.3 para o estado reduzido da parte s do sistema bipartido. Portanto, a implementação experimental do traço parcial se faz pela

abertura do detector da parte do estado que matematicamente tomamos o traço parcial. Cada registro nesse detector é uma sinalização para o registro da outra parte do sistema no detector correspondente.

Este tipo de detecção é também conhecida como detecção de probabilidade marginal. Se a parte s do sistema for detectada no plano de imagem, a detecção marginal nos permite determinar os coeficientes diagonais da matriz densidade reduzida que representa o estado da parte i . Já a detecção no plano de Fourier, nos fornece as mesmas informações discutidas na Sec.3.3, mas agora referente a um estado que é parte do estado bipartido. No caso dos estados preparados com fótons gerados pela CPD, podemos escrever a Eq.(3.32)

$$\begin{aligned} P(x_s, z_d) &\propto \text{sinc}^2(\theta x_s) \sum_{l_i} \sum_{l_s} \sum_{l'_s} \Phi_{\text{in}}(l_i, l_s, z_a) \times \Phi_{\text{in}}^*(l_i, l'_s, z_a) e^{i\gamma(l'_s - l_s)x_s} \\ P(x_s, z_d) &\propto \text{sinc}^2(\theta x_q) \times F^{(1)}(x_q, z_d), \end{aligned} \quad (3.34)$$

onde $F^{(1)}(x_q)$ é a função que descreve a oscilação na distribuição de probabilidade.

Um ponto importante a ser observado é o fato de que, para dimensão 2×2 há uma relação direta entre a quantidade de emaranhamento de um estado puro e a visibilidade do padrão de interferência marginal. Estados cujas probabilidades marginais não apresentam oscilações (contraste nulo) possuem um valor máximo de Concorrência [58]. Além disso, estados maximamente emaranhados de dimensão $D \times D$, em que as correlações entre os modos de cada parte são do tipo um para um (um vetor da base de uma parte com outro vetor da base de outra parte), também não apresentam oscilações nas distribuições de probabilidade medidas no plano de Fourier. Nesses casos a ausência de oscilações indica que o estado conjunto é maximamente emaranhamento. Essa afirmação, porém, não é verdadeira para todo e qualquer estado.

Em relação aos estados com as partes possuindo dimensões diferentes, é importante ressaltarmos que em geral as partes de um estado $D_i \times D_s$ (com $D_i \neq D_s$) produzem diferentes padrões de interferência marginais, devido à assimetria na dimensão. Por isso, a dimensão da parte a ser traçada deve ser levada em conta em todas as análises envolvendo os estados reduzidos. As conclusões a respeito do estado conjunto, obtidas a partir das medições marginais, devem ser as mesmas independente da parte analisada. Portanto, a caracterização do estado conjunto por meio dos estados reduzidos em sistemas $D_i \times D_s$ (com $D_i \neq D_s$) deve levar em conta a dimensão de cada parte .

Conclusão

Neste capítulo, discutimos questões envolvendo a medição de estados de fenda de uma e duas partes e mostramos quais informações podemos obter, e como obtê-las, a partir das medições de imagem e transformada de Fourier óptica. A aplicação e verificação

experimental das análises feitas estão contidas nas descrições experimentais dos dois próximos capítulos.

Parte II

Experimentos

4 Estados 2×3

Introduzindo a parte experimental do trabalho, neste capítulo mostramos como implementamos as análises anteriores na preparação e medição de estados 2×3 . Na primeira seção, descrevemos as montagens experimentais e os resultados das medições conjuntas nos dois planos de imagem (Sec. 3.4). Também mostramos as curvas observadas nas medições feitas com um dos detectores no plano de imagem e o outro no plano de Fourier (Sec.4.2), e as curvas obtidas nas medições marginais (Sec.4.3).

4.1 Preparação e medições dos coeficientes diagonais do estado conjunto

Em todos os procedimentos apresentados nesta tese utilizamos uma montagem experimental base, mostrada na Fig.14. Um laser contínuo de $\lambda = 405$ nm é filtrado por uma fibra óptica monomodo, garantindo uma maior estabilidade do perfil transversal durante o experimento [60]. O feixe de bombeamento que sai da fibra incide sobre o cristal não linear com de 2 mm de espessura e composição $B_iB_3O_6$ (cristal BiBo), posicionado no plano em $z = z_c$. Na interação entre o feixe de bombeamento e o cristal, pares de fótons gêmeos com $\lambda = 810$ nm são gerados com a mesma polarização (casamento de fase tipo I) e de forma colinear. Um espelho dicróico é usado para refletir o *pump* transmitido pelo cristal para fora do experimento. O divisor de feixes não polarizador (BS) divide os fótons em refletidos e transmitidos, de forma aproximadamente equilibrada. No caminho dos fótons refletidos e transmitidos são colocadas uma fenda tripla e uma fenda dupla, respectivamente, nos planos $z_i = z_a$ e $z_s = z_a$. Filtros de interferência centrados em 810 nm com 30 nm de largura de banda são acoplados a dois detectores para permitir a seleção em frequência dos pares de fótons. Lentes de microscópio acoplam os fótons em fibras multimodo, levando-os até detectores do tipo fotodiodo de avalanche (APD) [21]. Quando cada um dos APDs registra um fóton dentro de uma janela temporal de 5 ns, uma coincidência é registrada.

Alguns fótons de um mesmo par são transmitidos ou refletidos pelo BS simultaneamente, passando pela mesma fenda múltipla e sendo registrados pelo mesmo detector. Estes fótons não interferem em nossos resultados, uma vez que consideramos apenas as estatísticas de contagens em coincidências. Assim, efetivamente podemos considerar que uma parte do sistema é transmitida (*idler*) e a outra é refletida (*signal*) pelo BS. A distância entre o cristal e cada uma das fendas múltiplas é igual a 40cm, sendo o centro do BS posicionado a 33cm do cristal. Cada um dos detectores é mantido à uma

distância de 40cm das fendas múltiplas. Essas distâncias foram mantidas fixas em todos os procedimentos.

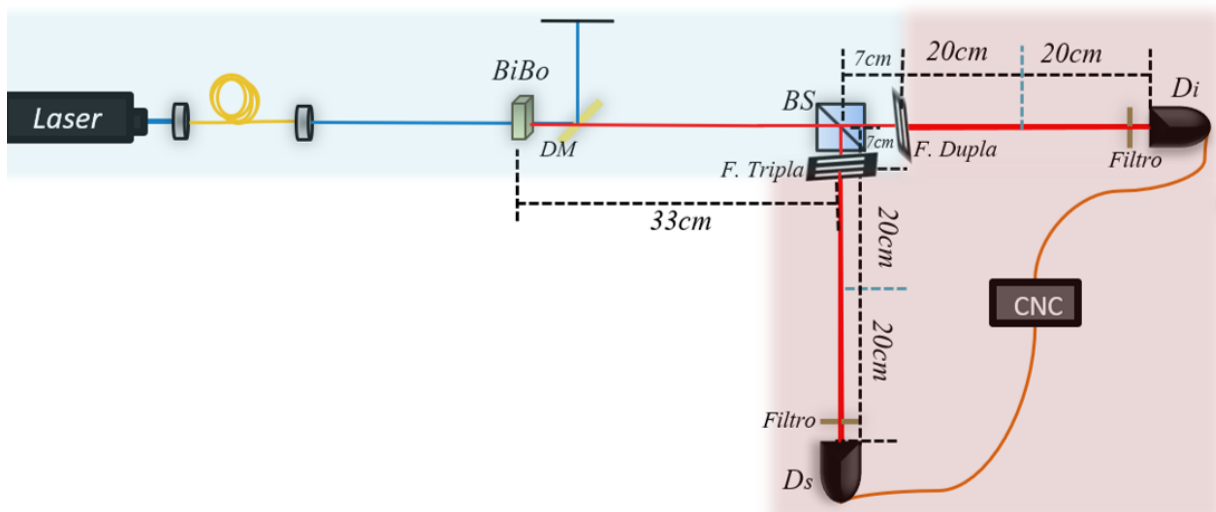


Figura 14 – Montagem experimental base para a preparação e medição dos estados de fenda de dimensão 2×3 . Um feixe de *laser* de 405 nm passa por uma fibra monomodo e incide sobre o cristal não linear do tipo BiBo, de 5 mm de espessura, onde fótons gêmeos são gerados colinearmente e com mesma polarização. Um divisor de feixe não polarizador (BS) divide os fótons para dois caminhos diferentes, onde fendas múltiplas são colocadas à mesma distância do BS. Detectores são colocados a 40 cm de cada uma das fendas múltiplas, sendo que à meia distância entre as aberturas e os detectores, lentes com distâncias focais de 10 e 20 cm são posicionadas para projetar, respectivamente, a imagem e a transformada de Fourier dos planos das aberturas sobre os planos de detecção. Filtros de interferência são acoplados aos dois detectores D_s e D_i para permitir a seleção em frequência dos pares de fótons, os quais são ligados a um programa computacional onde as contagens em CNC são registradas. Um espelho dicróico (DM) reflete o feixe de bombeamento para fora da montagem experimental, impedindo que este chegue aos detectores.

As regiões sombreadas de azul e lilás na Fig.14 correspondem a partes para preparação e medição dos estados, respectivamente. Em todas as medições, lentes esféricas são posicionadas a meia distância entre as fendas múltiplas e os detectores, a 20 cm dos planos de detecção [21]. A projeção da transformada de Fourier do plano das aberturas sobre o plano de detecção foi feita com uma lente de comprimento focal igual a 20 cm. A projeção da imagem das fendas múltiplas foi feita com uma lente de distância focal igual a 10 cm. As diferentes medições descritas na Sec.3.4 correspondem ao uso combinado das duas lentes.

A Fig.15 mostra como o *setup* base da Fig. 14 foi modificado na implementação dos dois métodos de preparação descritos na Sec.2.2. Na sequência, veremos em detalhes cada um dos processos de preparação juntamente com a medição plano de imagem - plano de imagem.

- Correlações governadas pelo casamento de fase propagado

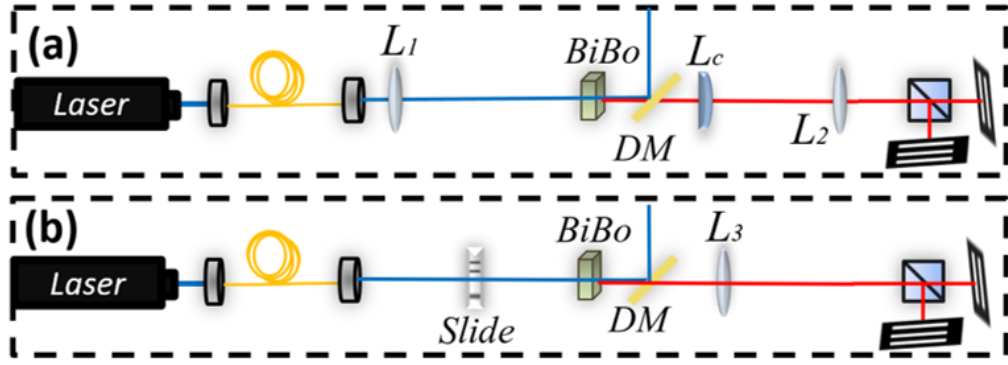


Figura 15 – Modificações da montagem experimental base para a preparação de estados de fenda 2×3 por dois métodos diferentes. Em (a) a lente L_1 de foco igual a 50 cm focaliza o feixe de bombeamento sobre o cristal (colocado a 50 cm da lente). Entre o cristal e o divisor de feixe, uma lente cilíndrica L_c de foco igual a 5 cm e uma lente esférica L_2 de foco igual a 20 cm formam um telescópio que projeta a imagem do plano do cristal sobre o plano das aberturas, com fator de ampliação igual a 4, fazendo com que todas as aberturas sejam iluminadas. L_c e L_2 são posicionadas de forma tal que o foco anterior de ambas coincide com a posição do cristal. Em (b), uma lente L_3 posicionada a 15 cm do cristal e de distância focal igual a 12,5 cm, projeta a imagem não aumentada de um plano (onde slides transparentes com faixas escuras são posicionados) a 10 cm do plano do cristal, sobre o plano das aberturas.

Na montagem da Fig.15 (a), a lente esférica L_1 (de foco igual a 50 cm) focaliza o *pump* no centro do cristal não linear em $z = z_c$. Após esse plano, a lente cilíndrica L_c de foco igual a 5 cm e a lente esférica L_2 de foco igual a 20 cm projetam a imagem do plano em $z = z_c$ sobre os planos $z_i = z_a$ e $z_s = z_a$ com um fator de ampliação igual a 4, sendo $\varphi \approx 3,014\pi$ (Eq.(2.15)).

Inicialmente alinhamos o sistema sem a presença do espelho dicróico, tomando o feixe de bombeamento como referência no alinhamento a olho nu. Utilizamos o *setup* de medição de imagem para refinarmos o alinhamento e posicionarmos as aberturas ao longo de \hat{x} . O posicionamento transversal das fendas múltiplas foi realizado da seguinte forma: com todas as lentes posicionadas e o sistema alinhado, acoplamos aberturas de $100\mu\text{m}$ à entrada dos detectores. Fixamos D_i na posição de maior contagem individual, também chamada de contagem simples, e varremos D_s ao longo de \hat{x} . O perfil de coincidências obtido nessa varredura reproduz o perfil transversal do bifóton em $z_s = z_i = z_a$, e está mostrado na Fig.16(a). Com os dois detectores fixos nas posições de maior contagem em coincidência, posicionamos as fendas múltiplas de forma que o centro da abertura do meio da fenda tripla, e o centro da parte escura da fenda dupla, coincidissem com o pico de contagem simples em cada detector. Como o centro do perfil de coincidências (CNCs) coincide com o pico de contagens simples, esse procedimento também alinha os centros das fendas múltiplas com o pico de CNCs.

A observação das correlações entre as partes do estado assim preparado pode ser observada na medição plano de imagem-plano de imagem. Para tanto, fixamos um dos

detectores em cada pico de contagem simples correspondente a imagem de cada abertura (sendo três picos para D_s e dois para D_i). Para cada posição fixa varremos o outro detector ao longo de \hat{x} e registramos CNCs ao longo de cada varredura. Os resultados dessa medição depois de normalizados se transformam em probabilidade, e nos permitem determinar os elementos da matriz de coeficientes do estado, que equivalem aos coeficientes diagonais da matriz densidade do estado. A matriz de coeficientes obtida nessa preparação está mostrada na Fig.16(b).

Comparando a Eq.(2.16) e a Fig.16(b), observamos que as correlações do estado preparado são predominantemente governadas pelo perfil do casamento de fase propagado até $z = z_a$, em outras palavras, $\xi_1/\xi_2 < E_1/E_2$ (Eq.2.11). Diferentemente da previsão teórica descrita no Cap.2, os coeficientes de $|-1/2, -1\rangle$ e $|1/2, 1\rangle$ são diferentes uma vez que o perfil do bifóton obtido experimentalmente (Fig.16(a)) é não simétrico com relação pico central em $x = 0$. A partir dos valores experimentais mostrados na Fig.16(b), obtidos para os coeficientes da Eq.(2.16), temos que

$$\begin{aligned} \frac{|\xi\left(-\frac{3df_c}{4f_2}, 0\right) E\left(-\frac{df_c}{4f_2}, 0\right)|}{|\xi\left(\frac{df_c}{4f_2}, 0\right) E\left(-\frac{df_c}{4f_2}, 0\right)|} &= \frac{|\xi\left(-\frac{3df_c}{4f_2}, 0\right)|}{|\xi\left(\frac{df_c}{4f_2}, 0\right)|} = 0,305 \quad ; \quad \frac{|\xi\left(\frac{3df_c}{4f_2}, 0\right) E\left(\frac{df_c}{4f_2}, 0\right)|}{|\xi\left(-\frac{df_c}{4f_2}, 0\right) E\left(\frac{df_c}{4f_2}, 0\right)|} = \frac{|\xi\left(\frac{3df_c}{4f_2}, 0\right)|}{|\xi\left(-\frac{df_c}{4f_2}, 0\right)|} = 0,437 \\ \frac{|\xi\left(-\frac{df_c}{4f_2}, 0\right) E\left(-\frac{3df_c}{4f_2}, 0\right)|}{|\xi\left(-\frac{df_c}{4f_2}, 0\right) E\left(\frac{df_c}{4f_2}, 0\right)|} &= \frac{|E\left(-\frac{3df_c}{4f_2}, 0\right)|}{|E\left(\frac{df_c}{4f_2}, 0\right)|} = 0,728 \quad ; \quad \frac{|\xi\left(\frac{df_c}{4f_2}, 0\right) E\left(\frac{3df_c}{4f_2}, 0\right)|}{|\xi\left(\frac{df_c}{4f_2}, 0\right) E\left(-\frac{df_c}{4f_2}, 0\right)|} = \frac{|E\left(\frac{3df_c}{4f_2}, 0\right)|}{|E\left(-\frac{df_c}{4f_2}, 0\right)|} = 0,549. \end{aligned} \quad (4.1)$$

- Correlações governadas pelo perfil transversal do feixe de bombeamento

Na Fig.16 (c), mostramos a distribuição espacial dos fótons transmitidos por esse slide no plano da imagem, sem a presença das fendas múltiplas. Note que temos dois picos com alturas diferentes (transmissão assimétrica)

Na implementação do segundo método, retiramos as lentes L_1 , L_c e L_2 e posicionamos a lente esférica L_3 , de foco igual a 12,5 cm, entre o cristal e o divisor de feixes (Fig.15(b)). A distância entre a lente e as aberturas, bem como entre a lente e o plano em $z = z_p$ é de 25 cm. Novamente, utilizamos o feixe de bombeamento para o alinhamento inicial e fixamos os detectores nos pontos de máxima contagem em coincidências nos planos de imagem. Em $z = z_p$, introduzimos um *slide* transparente com duas faixas escuras de largura $150 \mu\text{m}$ e separação $250 \mu\text{m}$ centro a centro. Na sequência, varremos o *slide* ao longo de \hat{x} a fim de identificarmos a posição coincidente entre o centro entre as duas faixas escuras e o pico de CNCs. Fixamos o slide na posição correspondente e o deslocamos de $62,5 \mu\text{m}$ para cima. Em seguida, varremos o detector D_s ao longo de \hat{x} , e observamos o perfil de CNC mostrado na Fig.16(c). Esse perfil indica a distribuição espacial dos fótons transmitidos pelo slide no plano da imagem sem a presença das fendas múltiplas. Além

disso, o perfil transversal do bifóton no plano em $z = z_a$ (Fig.16(c)) corresponde ao perfil transversal do feixe de bombeamento em $z = z_p$.

O posicionamento das fendas múltiplas e a medição das correlações nos planos de imagem foram feitos pelos mesmos procedimentos realizados na preparação anterior. A Fig.16(d) mostra a matriz de coeficientes obtida nesse caso. O valor dos coeficientes nela indicados e as correlações predominantes correspondem ao esperado teoricamente para $E(+d/4) \approx 0$ e $E(-3d/4) \approx 0$, como no estado $|\psi_{II'}\rangle$ (Eq.(2.26)) [81].

Utilizamos um segundo *slide* contendo uma única faixa escura de largura igual a $250 \mu\text{m}$. Sem as fendas múltiplas e com os detectores fixos nas posições correspondentes à maior contagem em CNCs, posicionamos o *slide* em $z = z_p$ de forma a alinhar o centro da região escura com a posição de maior CNC. As Figs.16(e) e 16(f) mostram, respectivamente, o perfil do bifóton medido quando a imagem do *slide* é projetada em $z = z_a$ e a matriz de coeficientes obtida na presença das fendas múltiplas. Como esperado teoricamente para $E(+d/4) = E(-d/4) = 0$ (Eq.(2.27)), há a predominância de correlações que envolvem apenas duas dentre as três aberturas da fenda tripla.

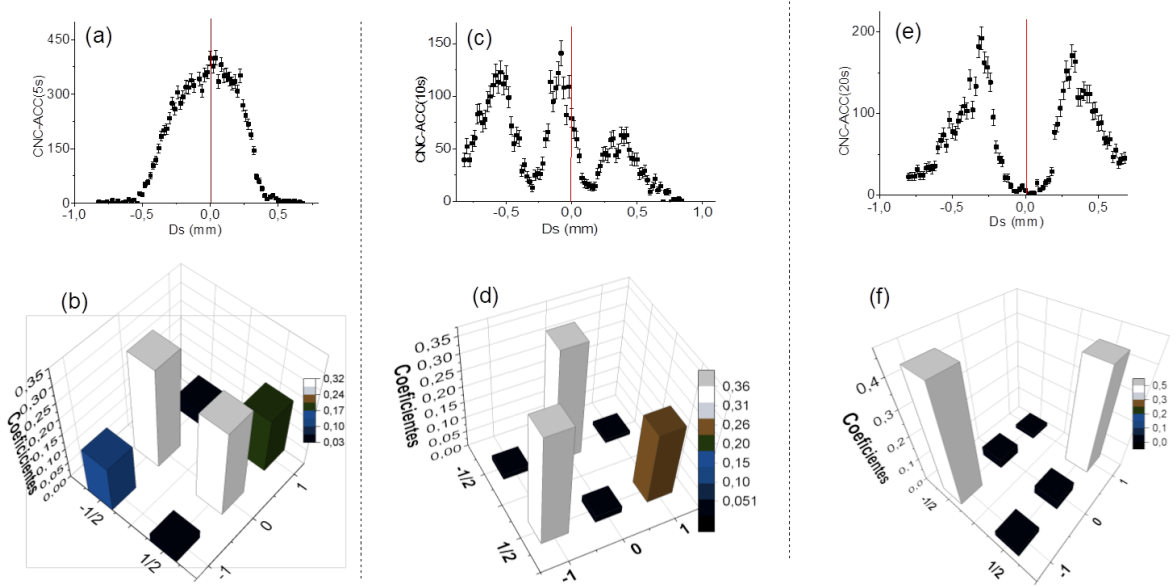


Figura 16 – Perfil transversal do bifóton no plano das fendas em $z = z_a$ e as respectivas matrizes de coeficientes dos estados ψ_I em (a) e (b) (Eq.(2.19)), $\psi_{II'}$ em (c) e (d) (Eq.(2.26)) e ψ_{III} em (e) e (f). Os valores indicados pelas barras, são a potência quadrática dos coeficientes nas Eqs. (2.22) e (2.16). As linhas vermelhas (linhas centrais) em (a), (c) e (e) indicam a região do perfil coincidente com o centro das duas fendas múltiplas.

4.2 Análise qualitativa dos resultados das medições plano de imagem-plano de Fourier

A segunda medição feita sobre os três estados da seção anterior, envolve a combinação das medições de imagem e transformada de Fourier aplicadas em cada uma das duas partes, como descrito na Sec.3.4. Para cada um dos três estados preparados, as medições mistas foram feitas com duas configurações do *setup* de medição.

Na primeira configuração, uma lente com foco de 20cm é colocada à meia distância entre a fenda tripla e o detector D_s , enquanto uma lente de foco de 10cm é colocada entre a fenda dupla e o detector D_i , como nas medições descritas na seção anterior. Assim, a imagem do plano da fenda dupla e a transformada de Fourier do plano da fenda tripla são projetadas sobre os respectivos planos de detecção. As coincidências foram registradas ao longo de duas varreduras de D_s . Em cada uma das varreduras, D_i foi mantido fixo em um dos picos de contagem simples, correspondente à imagem de uma das duas aberturas da fenda dupla. Fendas simples de $50\mu\text{m}$ e $100\mu\text{m}$ foram acopladas à D_s e D_i , respectivamente. As Figs. 17(a),(c) e (e) mostram as curvas de coincidências obtidas nas varreduras de D_s para os três estados preparados. Na segunda configuração, as lentes foram trocadas, fazendo com que a imagem do plano da fenda tripla e a transformada de Fourier do plano da fenda dupla fossem projetadas sobre os respectivos planos de detecção. Assim, as coincidências foram registradas ao longo de três varreduras de D_i . Em cada uma delas, D_s foi mantido fixo em um dos picos de contagem simples, correspondendo à imagem de uma das aberturas da fenda tripla. Fendas simples de $100\mu\text{m}$ e $50\mu\text{m}$ foram acopladas à D_s e D_i , respectivamente. As Figs. 17(b),(d) e (f) mostram os dados experimentais obtidos nessa configuração para cada um dos três estados preparados. As Figs. 17(a) e (b) correspondem ao estado preparado com o telescópio (Fig.15). Figs. 17(e) e (f), e Figs. 17(c) e (d) correspondem respectivamente aos estados preparados com as transparências contendo uma e duas faixas escuras [81].

Observamos uma variação pronunciada entre os dados experimentais e as expressões teóricas esperadas para as medições mistas mostradas nas Tabelas I e II da Sec. 3.4. Essa diferença se dá principalmente, pelo fato de os coeficientes dos estados preparados não possuírem o mesmo valor dos coeficientes dos estados descritos na análise teórica do Cap.2, onde alguns coeficientes eram completamente zerados e o perfil do bifóton foi considerado simétrico para a preparação com o telescópio. A influência dos coeficientes não nulos, indicados pelas barras escuras (barras menores) nas matrizes das Figs.16(b),(d) e (f), podem ser claramente vistas nas oscilações obtidas para as varreduras de D_i no plano da transformada de Fourier da fenda dupla. Apesar disso, verificamos forte concordância entre os dados experimentais e as curvas teóricas calculadas com os valores reais dos coeficientes, isto é, os valores obtidos na medição de imagem e mostrados nas Figs.16(b),(d)

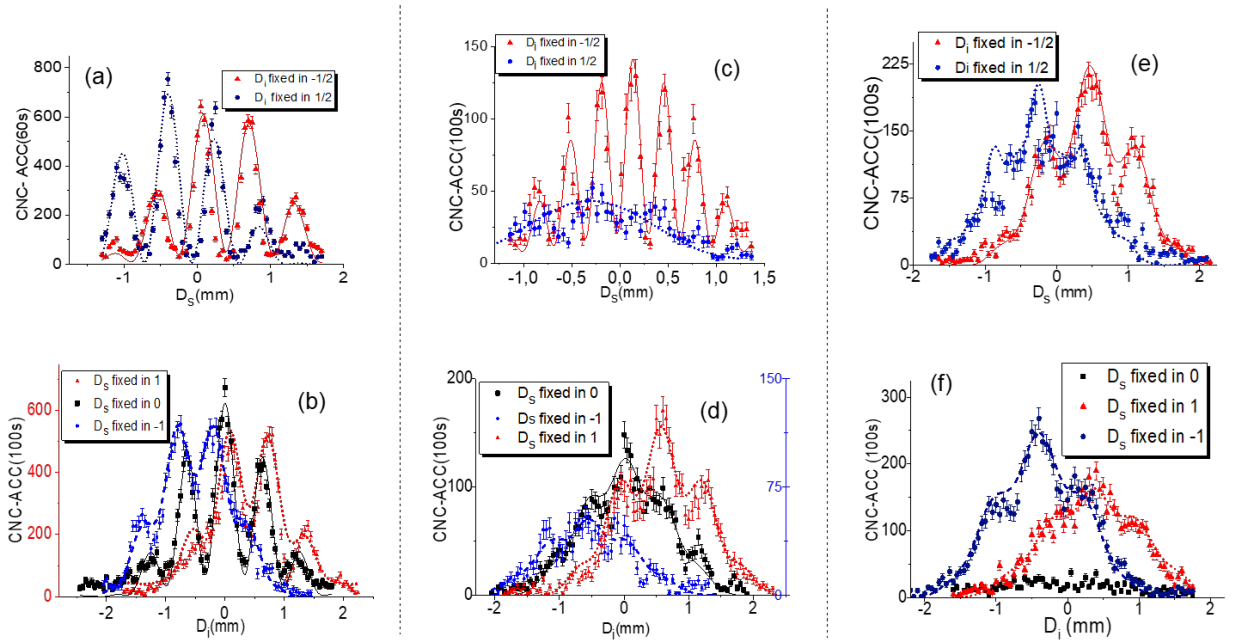


Figura 17 – Padrões de interferência obtidos nas medições plano de imagem-plano de Fourier. Em (a), (c) e (e), D_i é mantido fixo em cada um dos picos de contagens correspondendo às aberturas da fenda múltipla. Em (b), (d) e (f), D_s mantido fixo nos picos correspondendo à cada uma das aberturas da fenda tripla. As marcações pontuais (círculos, quadrados e triângulos) indicam os valores experimentais obtidos durante as medições e as linhas contínuas (sólidas, pontilhadas e tracejadas) são as curvas teóricas descritas na Eq.(3.29) para estados com coeficientes determinados a partir das matrizes da Fig.16. Os padrões de interferência em (a) e (b), (c) e (d), (e) e (f) correspondem aos estados com coeficientes mostrados nas Fig.16(b), Fig.16(d) e Fig.16(f), respectivamente.

e (f). As curvas teóricas obtidas com os valores de coeficientes mostrados na Sec.4.1 estão superpostas aos pontos experimentais na Fig.17. É interessante observarmos que os padrões de interferência são mais pronunciados (maior coerência) nos estados em que um único modo da fenda dupla é correlacionado com uma superposição de modos da fenda tripla. Nesse sentido, fixar D_i na posição de imagem da respectiva abertura da fenda dupla, projeta o estado da parte S numa superposição, capaz de produzir interferência quando observada no plano da transformada de Fourier do plano das aberturas.

4.3 Análise qualitativa dos resultados das medições marginais no plano de Fourier

Na terceira medição que implementamos, varremos um dos detectores no plano da transformada de Fourier da fenda múltipla enquanto o outro detector foi mantido aberto (como discutido na Subsec.3.4.2). Utilizamos lentes diferentes para projetar a imagem de uma das partes e a transformada de Fourier da segunda parte sobre os respectivos planos

de detecção, sendo o detector posicionado no plano de imagem mantido aberto.

Em um primeiro momento, enquanto D_i foi mantido aberto, as coincidências foram registradas em uma única varredura de D_s no plano de Fourier. O mesmo foi feito na situação inversa, D_s mantido aberto e D_i varrido no plano de Fourier. Nas duas situações, acoplamos aberturas de $50 \mu\text{m}$ de largura aos detectores posicionados no plano de Fourier.

Para cada um dos três estados preparados, obtivemos duas curvas experimentais correspondentes aos padrões de interferência produzidos pelos estados reduzidos. Na Fig. 16, estão os dados experimentais obtidos para cada estado. Fig. 18(a) e (b) correspondem ao estado preparado com o telescópio (Eq.(2.19)), Figs. 18(e) e (f), e Figs. 18(c) e (d) correspondem aos estados preparados com as transparências contendo uma e duas faixas escuras, respectivamente (Eqs.(2.26) e (2.27)). As curvas teóricas, calculadas com os valores experimentais obtidos para a matriz de coeficientes, estão sobrepostas aos dados experimentais. Novamente, observamos concordância entre os dados e as curvas previstas. Já é bem conhecido da literatura que padrões de interferência marginais nos dão informação a respeito da quantidade de emaranhamento de um estado bipartido puro de dimensão 2×2 . No entanto, essa relação não é direta quando alguma das partes do estado possui dimensão maior que dois. Apenas uma observação simples de cada uma das Figs. 18 (c) e (d), por exemplo, levaria à conclusões diferentes a respeito do emaranhamento do estado conjunto. Como veremos no Cap. 6, a determinação do emaranhamento de estados de dimensão maior que 2×2 envolve a análise de outras variáveis além da coerência do padrão de interferência marginal.

Conclusão

Por meio dos dados apresentados neste capítulo, bem como no Cap.2, mostramos que as correlações espaciais entre os fótons gerados na CPD podem ser modificadas pela manipulação do perfil transversal do feixe de bombeamento ou do casamento de fase propagado antes de os fótons serem transmitidos por fendas múltiplas. Isso permite a obtenção de diferentes estados bipartidos de caminho em diferentes dimensões, o que se mostra útil ao estudo experimental dos estados $D_i \times D_s$ (com $D_i \neq D_s$), atualmente escassos na literatura.

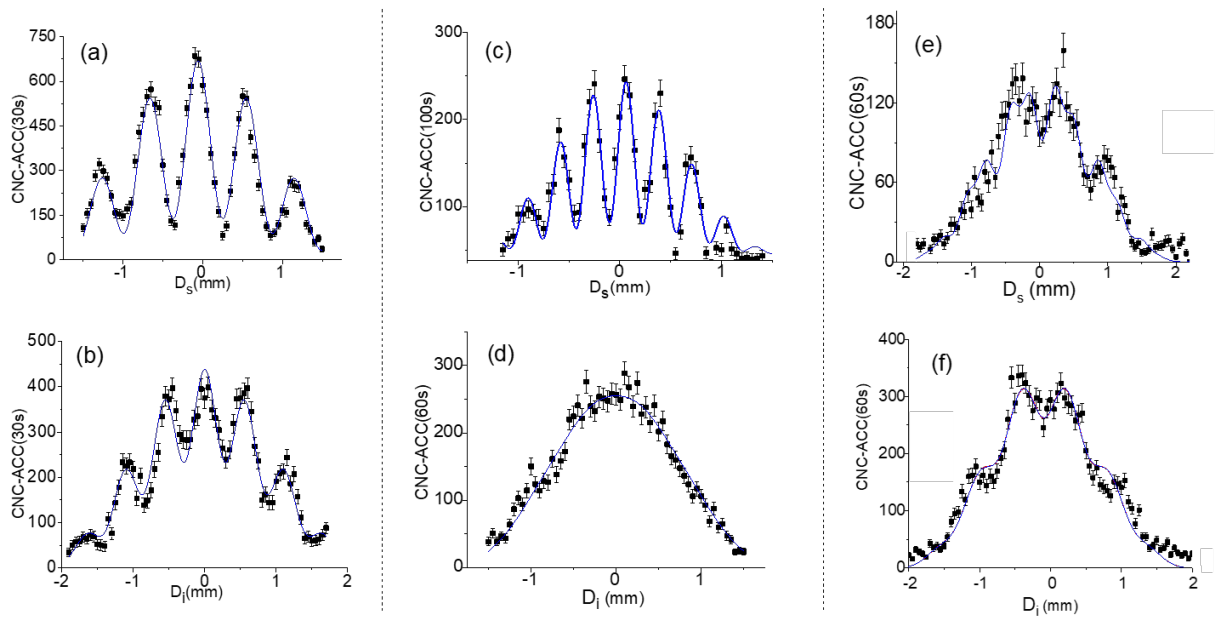


Figura 18 – Padrões de interferência resultantes de medições marginais. D_i é mantido aberto durante as medições de (a),(c) e (e), enquanto D_s é mantido aberto em (b),(d) e (f). Os pontos indicam os valores experimentais medidos, bem como suas respectivas barras de erro. A linha azul (linha sólida) indica, em cada gráfico, a curva teórica descrita na Eq.(3.34) para os estados com valores de coeficientes determinados por meio da Fig.16 (b), (d) and (f). Os padrões de interferência em (a) e (b), (c) e (d) e, (e) e (f) são produzidos pela medição marginal das partes dos estados das Fig.16(b), Fig.16(d) e Fig.16(f), respectivamente.

5 Norma l_1 de qutrits

Como discutido na Parte I, o entendimento teórico acerca da coerência quântica de estados de alta dimensão tem avançado nos últimos anos [16, 18, 28], ao passo que os estudos experimentais tem avançado mais lentamente. Em uma das etapas do presente trabalho, implementamos a proposta experimental da Ref. [18], sobre a qual discutimos na Sec.3.3. Em nosso experimento, verificamos a funcionalidade da proposta (dentro de seu limite de validade) para a medição da coerência quântica de *qutrits*.

Na primeira seção deste capítulo descrevemos como os estados *qutrits* foram preparados. Em seguida (Sec.5.2), descrevemos os procedimentos realizados para a determinação da coerência quântica e as análises para a validação do método.

5.1 *Qutrits* obtidos a partir de estados 2×3

Para a verificação experimental do método proposto por T. Paul e T. Quresh na Ref. [18], recorremos a estados cujos respectivos valores de coerência também pudessem ser determinados pelo método já conhecido (contraste do padrão de interferência produzido pelo estado), possibilitando a comparação dos resultados. O contraste é bem definido para padrões de interferência com um único período espacial. Assim, para que os resultados pudessem ser comparados, os estados usados no experimento são tais que os padrões de interferência obtidos por meio da medição no plano de Fourier possuem uma única frequência de oscilação mesmo possuindo dimensão maior que dois.

Na Sec.2.3 mostramos que a operação de traço parcial (sobre uma das partes do sistema bipartido) pode ser usada para a preparação de diferentes estados de uma única parte. Considerando as vantagens do método, mencionadas anteriormente e discutidas na sequência, os estados utilizados no experimento descrito neste capítulo foram obtidos por meio do traço parcial de estados 2×3 . Partindo, respectivamente, dos estados descritos nas Eqs.(2.19) e (2.26), a operação de traço parcial (sobre os subespaços dos qubits de cada estado) resulta em estados de *qutrits* que podem ser escritos de forma geral como

$$\rho_a = \begin{pmatrix} \rho_{-1-1} & |\rho_{-10}| & 0 \\ |\rho_{-10}| & \rho_{00} & |\rho_{01}| \\ 0 & |\rho_{01}| & \rho_{11} \end{pmatrix}, \quad \rho_b = \begin{pmatrix} \rho_{-1-1} & 0 & |\rho_{-11}| \\ 0 & \rho_{00} & 0 \\ |\rho_{-11}| & 0 & \rho_{11} \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

As matrizes ρ_a e ρ_b representam estados genéricos, que possuem como característica em comum os coeficientes nulos apontados na Eq.(5.1). Esses estados possuem simetrias

específicas que resultam nas funções de oscilação

$$\begin{aligned}\Theta_a(x, z_D) &= \mathcal{A}_a \cos(\gamma x), \\ \Theta_b(x, z_D) &= \mathcal{A}_b \cos(2\gamma x),\end{aligned}\tag{5.2}$$

onde $\mathcal{A}_a = 2(|\rho_{-10}| + |\rho_{01}|)$ e $\mathcal{A}_b = 2|\rho_{-11}|$ são as respectivas amplitudes de oscilação.

O padrão de interferência produzido pela medição do estado representado por ρ_b possui apenas um termo cossenoidal (como pode ser observado em $\Theta_b(x, z_D)$), uma vez que possuem apenas um coeficiente não nulo acima da diagonal de ρ_b ($|\rho_{-11}|$). Em outras palavras, ρ_b representa o estado de um *qutrit* no qual apenas dois dentre os estados da base usada na descrição do estado do sistema são indistinguíveis. Já a interferência produzida pelo estado representado por ρ_a é composta de dois termos cossenoidais com a mesma frequência de oscilação (como observado em $\Theta_a(x, z_D)$). Isso ocorre pelo fato de $|\rho_{-11}| = 0$, sendo este elemento da matriz o responsável pela amplitude do termo cossenoidal com frequência diferente daquelas devido à superposição entre $|0\rangle$ e $|1\rangle$, e entre $|0\rangle$ e $|-1\rangle$. Portanto, seja devido a um único termo de oscilação ou a uma única frequência de oscilação, os estados $\hat{\rho}_a$ and $\hat{\rho}_b$ produzem oscilações (Θ_a e Θ_b) equivalentes às produzidas por estados bidimensionais, e portanto, com contrastes bem definidos [20].

Além disso, as fases dos coeficientes não diagonais dos estados representados na Eq. (5.1) são todas nulas, fazendo com que o valor da coerência quântica de ambos possa ser determinado por meio das funções descritas na Eq.(5.2), ou seja, por meio da proposta feita pelos autores da Ref. [18]. Assim, apesar de os estados estudados produzirem oscilações simples, os escolhemos intencionalmente visando a verificação do método e a sua validação no uso para estados possuindo fases nulas (ou igual a π) em qualquer dimensão, e com qualquer simetria.

5.2 Obtenção da coerência quântica

A montagem experimental que utilizamos para a determinação da norma l_1 é a mesma descrita no capítulo anterior (Fig.14 e Fig. 15). Estados 2×3 foram inicialmente preparados da forma descrita na Sec.4.1, sendo que o *slide* usado na segunda configuração foi o mesmo usado na preparação do estado correspondente à Fig.16(d).

Para a medição, utilizamos lentes para projetar a imagem da fenda dupla e a transformada de Fourier do plano da fenda tripla em seus respectivos planos de detecção, como descrito nas Secs.3.4 e 4.2. Mantendo D_i aberto, realizamos a varredura de D_s registrando as contagens em CNCs para ambos os estados preparados. Neste processo, o registro em CNC é importante não apenas por fornecer a estatística produzida pelo estado marginal (Eq.(5.1)), mas também por garantir que o estado estudado é de origem quântica.

- Contraste do padrão de interferência

As distribuições de probabilidade $P(x_s, z_d)$ (Eq.(3.31)) obtidas para os estados $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$ (Eq. (5.1)) estão mostradas em preto nas Figs. 19(a) e (c). Os pontos correspondentes aos dados experimentais estão sobrepostos aos *fits* das expressões teóricas (linhas pontilhadas), nos quais os módulos dos elementos não diagonais de ρ_a e ρ_b foram deixados como parâmetros livres.

As Figs.19(a) e (c) mostram, como já mencionado na Sec. 5.1, que $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$ produzem padrões de interferência para quais podemos calcular o contraste da forma usual. O contraste desses padrões nos fornece a soma dos módulos dos elementos não diagonais de $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$. Nas tabelas 3 e 4 estão os valores da coerência quântica de $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$, obtidos por meio da soma dos parâmetros livres dos *fits* das expressões teóricas e por meio do cálculo do contraste dos padrões de interferência, respectivamente. Estes valores são úteis para a comparação com os resultados obtidos por meio do método discutido na Sec.3.3, implementado como descrito à seguir.

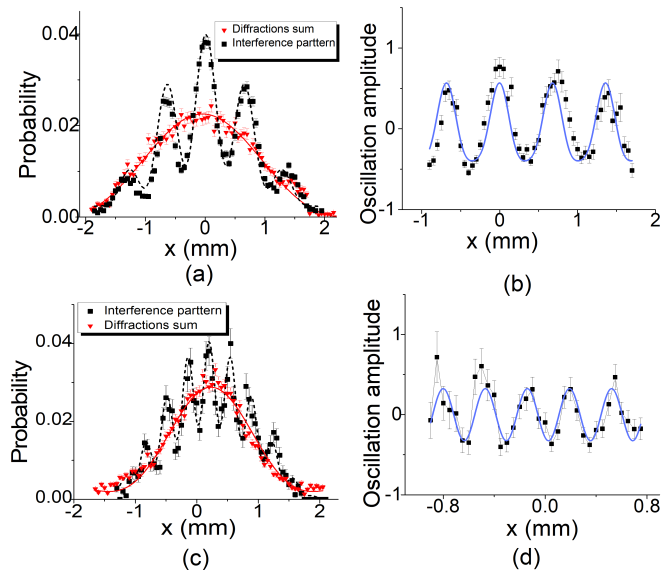


Figura 19 – Curvas experimentais dos padrões de interferência e difração e as resultantes curvas de oscilação, sendo as Figs.19(a) e (b), e Figs.19(c) e (d) correspondentes aos estados ρ_a e ρ_b , respectivamente. As curvas em preto nas Figs.19(a) e 19(c) são os padrões de interferência produzidos pelos estados, e as curvas em vermelho são as difrações resultantes da medição do padrão de cada abertura no plano de Fourier. As Figs.19(b) e (d) mostram as curvas de oscilação obtidas a partir dos dados das Figs.19(a) e 19(c) respectivamente. Os dados experimentais dos padrões de interferência e das curvas de oscilação estão sobrepostos aos *fits* das curvas teóricas, enquanto os dados em vermelho estão sobrepostos às curvas teóricas para a difração.

- A curva de oscilação

A obtenção da curva de oscilação $\Theta(x, z_d)$ (Eq. (3.17)) envolve a distribuição de probabilidade $P_{diag}(x, z_D)$ (Eqs.(3.16), pertencente a um estado diagonal previamente conhecido contendo os mesmos coeficientes diagonais do estado cuja coerência quântica desejamos determinar. No entanto, não é necessário que um segundo estado seja preparado para que possamos obter a curva de difração no plano de Fourier. Para simular a presença do estado incoerente, medimos as curvas de difração produzida por fótons provenientes de cada abertura da fenda tripla, sempre em coincidências com D_i . A soma das três curvas obtidas reproduz a curva que seria obtida com a medição de um estado incoerente.

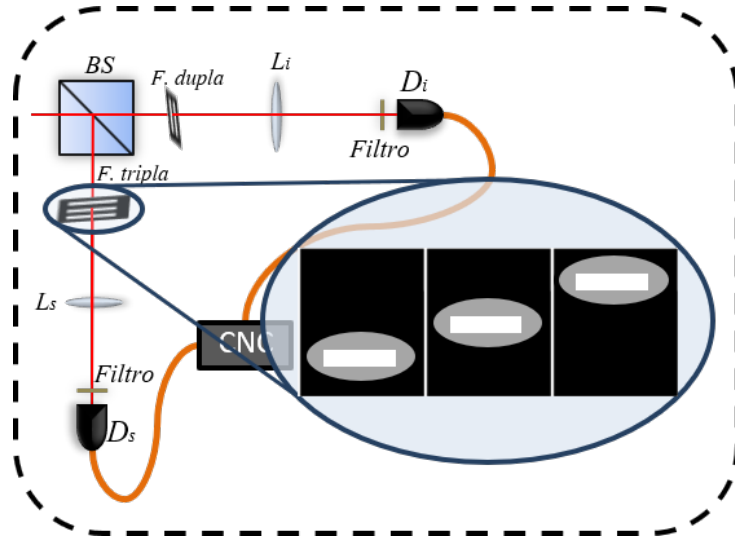


Figura 20 – Ilustração do procedimento experimental para a medição das curvas de difração produzidas por fótons oriundos de cada uma das aberturas. Em cada varredura de D_2 no plano de Fourier da fenda múltipla, duas das três aberturas são bloqueadas, e apenas os fótons que passam por uma das aberturas chegam ao detector, onde as coincidências são registradas.

A Fig.20 ilustra o procedimento que utilizamos para que fótons provenientes de cada abertura pudessem ser detectados separadamente. Posicionamos uma abertura retangular de $100\mu\text{m}$ de largura imediatamente após a fenda tripla, de forma que duas das três aberturas fossem bloqueadas. Registramos as contagens em CNCs ao longo de três varreduras de D_s , cada uma delas correspondendo ao alinhamento da fenda simples em frente a uma das aberturas da fenda tripla. Embora seja necessária uma quantidade de varreduras igual à dimensão, a complexidade do aparato experimental para este procedimento é menor do que a que seria necessária para a preparação de um segundo estado incoerente. Nas Figs.19 (a) e (c), a soma das três curvas de difração para os estados $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$ são mostradas em vermelho, sendo que os dados experimentais estão superpostos às curvas teóricas para a difração do estado incoerente (linha preenchida).

Ressaltamos que não podemos determinar o caminho dos fótons a partir das curvas obtidas em cada uma das varreduras, mesmo que os fótons de apenas uma das aberturas estejam chegando no plano de detecção. Como discutido na Sec.3.2, a identificação da abertura de origem de cada fóton depende do *setup* de medição utilizado, e não apenas de

como o estado é preparado, isto é, não depende apenas de onde os fótons saem a partir do plano das aberturas. O uso de uma lente para a projeção da transformada de Fourier do plano das aberturas sobre o plano de detecção impede que o caminho seja marcado, como discutido no Cap.3.

A partir das curvas experimentais $P(x, z_D)$ e $P_{diag}(x, z_D)$ (Figs.19(a) e (c)), obtemos a curva de oscilação $\Theta(x, z_d)$ por meio da operação mostrada na Eq. (3.17). As Figs.19 (b) e (d) mostram as curvas obtidas para os estados $\hat{\rho}_a$ and $\hat{\rho}_b$, respectivamente. Mais uma vez, os pontos correspondentes aos dados experimentais estão sobrepostos aos *fits* das expressões teóricas (em azul), cujos parâmetros livres são \mathcal{A}_1 e \mathcal{A}_2 (Eq. (5.2)).

Na Tab.3, mostramos os valores de coerência quântica de $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$ obtidos por meio dos *fits* das curvas de oscilação, e observamos concordância entre os valores fornecidos pelos ajustes de $P(x, z_D)$ e $\Theta(x, z_d)$ [82].

Tabela 3 – Valores experimentais da coerência quântica dos estados $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$, obtidos por meio dos parâmetros livres dos *fits* das curvas de oscilação (Eq.(5.2)) e dos padrões de interferência (Eq.(3.9)) produzido por cada estado.

Estado	<i>Fit</i> da interferencia	<i>Fit</i> da oscilação
$\hat{\rho}_a$	0.579 ± 0.034	0.568 ± 0.039
$\hat{\rho}_b$	0.355 ± 0.025	0.325 ± 0.035

De modo geral, analisar os dados experimentais por meio do *fit* de uma determinada função exige um conhecimento prévio sobre a expressão teórica da função a ser fitada. Na situação em que a única informação disponível é que os coeficientes possuem fases nulas, o ajuste da curva de oscilação se torna uma tarefa mais complexa, principalmente com o aumento da dimensão. Portanto, é interessante que o valor da coerência quântica também possa ser determinado a partir das curvas de oscilação na ausência de um ajuste, de forma semelhante à determinação do contraste dos padrões de interferência a partir dos valores máximo e mínimo do padrão de interferência.

Na Tab.4, mostramos os valores obtidos por meio do cálculo do contraste dos padrões de interferência (primeira coluna da tabela), pelo cálculo do valor médio dos picos das oscilações das Figs.19(b) e (d) (segunda coluna), e por meio da forma proposta na Ref. [18] (terceira coluna) [82]. Nesta, consideramos apenas os picos das curvas nas Figs.19(a) e (c). Novamente, observamos concordância entre os valores experimentais obtidos e destacamos a alta precisão do valor obtido considerando apenas um ponto em cada uma das curvas das Figs.19(a) e (c), como proposto na Ref. [18].

- Valores obtidos e o valor máximo previsto

Tabela 4 – Valores experimentais da coerência quântica dos estados $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$, obtidos por meio do cálculo do contraste dos padrões de interferência, do valor médio dos picos das curvas de oscilação, e da fórmula proposta na Ref. [18].

Estado	$\frac{P^{max} - P^{min}}{P^{max} + P^{min}}$	Média dos picos	$\frac{P^{max} - P^{max}_{diag}}{P^{max}_{diag}}$
$\hat{\rho}_a$	0.555 ± 0.024	0.530 ± 0.034	0.565 ± 0.091
$\hat{\rho}_b$	0.353 ± 0.001	0.346 ± 0.049	0.313 ± 0.146

A Eq.(3.22) nos permite não apenas calcular o valor esperado para a coerência quântica de um estado específico, mas também estimar o valor máximo de coerência quântica que uma classe de estados pode atingir. Estados descritos por matrizes densidade como as da Eq. (5.1), por exemplo, não atingem o valor máximo de coerência, independentemente do valor dos coeficientes não nulos. Para o estado teórico $\hat{\rho}_a$, por exemplo, $V_{-1,1} = 0$ e a coerência quântica, a partir da Eq.(3.22), pode ser escrita como

$$\mathcal{C}_a = \frac{1}{2} \frac{V_{-10} (\rho_{-1-1} + \rho_{00}) + V_{01} (\rho_{00} + \rho_{11})}{\rho_{-1-1} + \rho_{00} + \rho_{11}} = \frac{V_{-10} (\rho_{-1-1} + \rho_{00}) + V_{01} (\rho_{00} + \rho_{11})}{2}, \quad (5.3)$$

onde a normalização do estado foi considerada.

Ainda que haja coerência máxima entre os modos $| -1 \rangle$ e $| 0 \rangle$, isto é, mesmo que $V_{-10} = V_{01} = 1$, \mathcal{C}_a é menor que 1, uma vez que $(\rho_{-1-1} + \rho_{00}) < 1$ e $(\rho_{00} + \rho_{11}) < 1$.

Além de verificarmos que os estados quânticos preparados possuem coerência quântica menor que um, também podemos investigar o valor máximo para a coerência de estados como $\hat{\rho}_a$ e $\hat{\rho}_b$. Em trabalhos anteriores, como Refs. [14] e [28], foi mostrado que quanto maior for a diferença entre os coeficientes diagonais de um determinado estado, menor será a coerência quântica do mesmo. Assim, o limite superior da coerência quântica de uma determinada classe de estados (com uma determinada simetria, como na Eq. (5.1)) é atingido quando todos os coeficientes diagonais são iguais [26, 80].

Considerando um estado com os mesmos coeficientes nulos de $\hat{\rho}_a$, e com todos os coeficientes diagonais iguais a $1/3$, temos

$$\mathcal{C}_a = \frac{V_{-10} + V_{01}}{3}. \quad (5.4)$$

Portanto, o limite superior para a coerência quântica neste caso é $2/3 \approx 0,67$. Assim, apesar de os resultados experimentais para $\hat{\rho}_a$ mostrados nas Tabs.3 e 4 serem baixos, são apenas ligeiramente menores que o limite superior.

Já para o estado $\hat{\rho}_b$, temos que $\hat{\rho}_b$, $V_{-10} = V_{01} = 0$ e $\mathcal{C}_b = V_{-11} \frac{(\rho_{-1-1} + \rho_{11})}{2}$. Se todos

os coeficientes diagonais forem iguais a $1/3$, temos

$$\mathcal{C}_b = \frac{V_{-11}}{3}. \quad (5.5)$$

Neste caso, o limite superior para a coerência quântica é $1/3 \approx 0,33$. Observamos que os resultados obtidos para o estado $\hat{\rho}_b$ estão próximos ao limite superior, considerando o intervalo de incerteza experimental. Neste caso, os valores ultrapassam ligeiramente o limite superior devido à influência dos coeficientes da matriz densidade que são iguais a zero na Eq. (5.1), mas que experimentalmente não são completamente nulos.

Conclusão

Considerando as análises teóricas feitas na Sec.3.3, bem como as descrições experimentais deste capítulo, mostramos que o método proposto na Ref. [18] é válido para a determinação da coerência quântica de estados com altas dimensões, desde que os coeficientes dos estados estudados tenham fases nulas (ou todas iguais a π). Mostramos ainda que é possível que o método seja implementado sem a preparação de um segundo estado, e que neste caso o cálculo feito apenas com o valor máximo dos padrões de interferência e difração aumenta a incerteza do valor obtido. Já para os estados em que os coeficientes possuem fases não nulas, ou mesmo nos casos em que a dimensão é a única informação disponível sobre o estado estudado, o método geral expresso na Eq.(3.22) é aplicável.

Parte III

Caracterização de estados bipartidos via
coerência das partes

6 A coerência quântica das partes e a caracterização do estado conjunto

No Cap.2, vimos as diversas possibilidades de estados de fenda bipartidos que podem ser preparados com pares de fótons gerados pela CPD. Além disso, estudamos técnicas para obtenção experimental da coerência quântica de *qudits*. No Cap.5 em especial, determinamos o valor da coerência quântica de *qutrits*, os quais constituíam uma parte de um estado bipartido.

Neste capítulo, discutimos as informações sobre o estado conjunto (bipartido) que podem ser obtidas por meio da análise de apenas uma das partes do sistema, e em especial, por meio da análise da coerência quântica de apenas uma das partes. Na primeira seção, analisamos as matrizes densidade das partes, apontando as informações contidas em cada uma delas a respeito da matriz densidade conjunta. Em seguida, na Sec.6.2, estudamos a determinação da quantidade de emaranhamento do estado por meio da coerência quântica de uma das partes.

6.1 A matriz densidade conjunta

A reconstrução da matriz densidade de um estado pode ser feita por meio da tomografia quântica: processo no qual medimos a distribuição de probabilidade de obtermos um resultado positivo quando um conjunto informacionalmente completo de operadores positivos atua sobre um *ensemble* de fótons igualmente preparados [72]. A tomografia de estados de fenda, realizada em [73], exige um aparato experimental a parte da preparação e detecção. Devido a essa complexidade, nem sempre conseguimos realizar um grupo de medições informacionalmente completo. No caso de um conjunto de medições informacionalmente incompleto, podemos obter um conjunto de possíveis matrizes densidade para o estado analisado [74]. Se considerarmos ainda a existência de situações em que há interesse no conhecimento de apenas algumas características do estado, não é necessário que recorramos à tomografia e à complexidade experimental nela exigida. Assim, apesar de as análises a seguir não se mostrarem eficientes para a caracterização completa do estado, cremos que as mesmas podem ser úteis em diversas situações, principalmente naquelas em que o valor de apenas alguns coeficientes do estado são de interesse.

- A coerência dos estados reduzidos

Para um estado como o da Eq.(3.24), a matriz densidade reduzida obtida pelo

traço parcial sobre a parte s , por exemplo, é escrita como

$$\hat{\rho}_i = Tr_s(\hat{\rho}) = \sum_{m_i, l_i} \sum_{l_s} \rho_{l_i m_i, l_s l_s} |l_i\rangle \langle m_i|. \quad (6.1)$$

Considerando a situação análoga para o sistema s , temos que a coerência quântica de $\hat{\rho}_i$ e $\hat{\rho}_s$ determinam o valor da soma dos módulos de alguns pares de elementos da matriz densidade conjunta ρ . Tomando como exemplo um estado 2×3 , onde $D_s = 3$ e $D_i = 2$, as respectivas matrizes ρ_s e ρ_i podem ser escritas como

$$\rho_i = \begin{pmatrix} \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -1-1} + \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 00} + \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 11} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -1-1} + \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 00} + \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 11} \\ \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -1-1}^* + \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 00}^* + \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 11}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -1-1} + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 00} + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 11} \end{pmatrix}, \quad (6.2)$$

$$\rho_s = \begin{pmatrix} \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -1-1} + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -1-1} & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -10} + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -10} & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -11} + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -11} \\ \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -10}^* + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -10}^* & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 00} + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 00} & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 01} + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 01} \\ \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -11}^* + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -11}^* & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 01} + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 01}^* & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 11} + \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 11} \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

Cada termo $\rho_{l_i m_i, l_s m_s}$ nas matrizes acima correspondem aos coeficientes do estado geral descrito na Eq.(3.24), cuja matriz densidade é

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -1-1} & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -10} & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -11} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -1-1} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -10} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -11} \\ \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -10}^* & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 00} & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 01} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 0-1} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 00} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 01} \\ \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, -11}^* & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 01}^* & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}, 11} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 1-1} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 10} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 11} \\ \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -1-1}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 0-1}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 1-1}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -1-1} & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -10} & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -11} \\ \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -10}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 00}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 10}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -10}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 00} & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 01} \\ \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -11}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 01}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 11}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, -11}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 01}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2}, 11} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

As matrizes acima nos mostram que a norma l_1 de ρ_i é proporcional à soma dos módulos dos coeficientes em vermelho acima da diagonal principal de ρ . Já a norma l_1 de ρ_s , é proporcional à soma dos módulos dos conjuntos formados pelos coeficientes marcados pela mesma cor acima da diagonal principal de ρ . Em outras palavras, corresponde à adição dos módulos da somas dos coeficientes circulosados de verde, coeficientes circulosados de roxo, e dos circulosados de laranja.

A medição de imagem dos estados marginais também nos dá informação sobre a soma de alguns coeficientes diagonais em ρ . Já os coeficientes deixados em cinza, são aqueles a respeito dos quais não temos nenhuma informação por meio dessa análise. Assim, a determinação dos coeficientes diagonais e da coerência quântica de $\hat{\rho}_i$ e de $\hat{\rho}_s$, correspondem ao valor total de grupos de coeficientes de ρ .

- A coerência das projeções de cada parte

Na situação em que a parte \mathbf{s} , por exemplo, é selecionada em um único estado $|l_s\rangle$ (medição de imagem), ao invés de uma medida de um padrão de interferência (ou imagem) marginal, a operação sobre o estado é $Tr(|l_s\rangle\langle l_s|\hat{\rho})$. Nesse caso, para cada $|l_s\rangle$ selecionado, a parte \mathbf{i} é projetada no estado \hat{I}_{l_s} dado por

$$\hat{I}_{l_s} = \frac{\sum_{m_i, l_i} \rho_{l_i m_i, l_s l_s} |l_i\rangle \langle m_i|}{\sum_{l_i} |\rho_{l_i l_i, l_s l_s}|}. \quad (6.5)$$

Cada estado \hat{I}_{l_s} possui uma coerência quântica própria, de forma que podemos definir

$$\mathcal{C}_{I_{l_s}} = \left(\frac{1}{D_i - 1} \right) \frac{\sum_{m_i \neq l_i} |\rho_{l_i m_i, l_s l_s}|}{N_{I_{l_s}}}, \quad (6.6)$$

onde $N_{I_{l_s}}$ é o fator de normalização do estado \hat{I}_{l_s} .

Definições análogas podem ser feitas para o sistema \mathbf{s} , com \hat{S}_{l_i} e $\mathcal{C}_{S_{l_i}}$ definidos de forma semelhante à \hat{I}_{l_s} e $\mathcal{C}_{I_{l_s}}$, respectivamente. A coerência quântica de cada \hat{I}_{l_s} e \hat{S}_{l_i} nos fornece a soma dos módulos de coeficientes dispostos em blocos na matriz ρ . Cada um desses blocos correspondem a um mesmo valor de l_s e l_i .

Tomando novamente o estado descrito na Eq.(6.4) como exemplo, podemos escrever as matrizes

$$I_{-1} = \frac{1}{N_{I_{-1}}} \begin{pmatrix} \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1-1} & \rho_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1-1} \\ \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1-1}^* & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1-1} \end{pmatrix}, \quad I_0 = \frac{1}{N_{I_0}} \begin{pmatrix} \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 00} & \rho_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 00} \\ \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 00}^* & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 00} \end{pmatrix},$$

$$I_1 = \frac{1}{N_{I_1}} \begin{pmatrix} \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 11} & \rho_{-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 11} \\ \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 11}^* & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 11} \end{pmatrix}; \quad (6.7)$$

$$S_{-1/2} = \frac{1}{N_{S_{-1/2}}} \begin{pmatrix} \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1-1} & \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -10} & \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -11} \\ \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -10}^* & \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 00} & \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 01} \\ \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -11}^* & \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 01}^* & \rho_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 11} \end{pmatrix}$$

$$S_{1/2} = \frac{1}{N_{S_{1/2}}} \begin{pmatrix} \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1-1} & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -10} & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -11} \\ \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -10}^* & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 00} & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 01} \\ \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -11}^* & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 01}^* & \rho_{\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 11} \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Para observarmos a relação entre S_{l_i} , I_{l_s} e a matriz densidade conjunta, podemos escrever ρ com o código de cores usado acima, de forma que

$$\rho = \begin{pmatrix} \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},-1-1} & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},-10} & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},-11} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},-1-1} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},-10} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},-11} \\ \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},-10}^* & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},00} & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},01} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},0-1} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},00} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},01} \\ \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},-11}^* & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},01}^* & \rho_{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2},11} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},1-1} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},10} & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},11} \\ \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},-1-1}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},0-1}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},1-1}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2},-1-1} & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2},-10} & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2},-11} \\ \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},-10}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},00}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},10}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2},-10}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2},00} & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2},01} \\ \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},-11}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},01}^* & \rho_{-\frac{1}{2}\frac{1}{2},11}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2},-11}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2},01}^* & \rho_{\frac{1}{2}\frac{1}{2},11} \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

Temos então, que a norma l_1 de cada I_{l_s} é proporcional ao módulo de um dos elementos acima da diagonal principal de ρ . Já a norma l_1 de cada S_{l_i} , é proporcional à soma dos módulos dos elementos da matriz densidade dispostos em um bloco acima da diagonal de ρ . Além disso, a imagem tanto de cada uma das projeções, de ambas as partes, nos fornece o valor de um dos coeficientes diagonais de ρ .

- Coerência entre pares de uma das partes

Como discutido nos capítulos anteriores, se o estado a ser analisado tiver dimensão maior que dois e for completamente desconhecido, não podemos fazer nenhuma afirmação a respeito das fases ou da distribuição dos coeficientes em sua matriz densidade, de forma que a norma l_1 deve ser determinada por meio da soma das coerências quânticas obtidas através dos padrões de interferência entre os pares dos estados da base.

Para um estado 2×3 , a coerência quântica entre cada par da base de estados do *qutrit* é proporcional à soma dos módulos de dois coeficientes acima da diagonal. Na Eq.(6.4) corresponde à soma dos módulos de elementos marcados pela mesma cor. Já a coerência quântica entre os pares nas projeções do *qutrit* descritos nas Eqs.(6.7)-(6.1), são proporcionais ao módulo de um dos elementos não diagonais em ρ .

6.2 O emaranhamento

A determinação da quantidade de emaranhamento de um estado bipartido é de fundamental importância, dado o uso na implementação de protocolos de informação quântica [1]. Considerando a situação na qual a tomografia completa de um estado não pode ser realizada por algum motivo, nesta seção estudamos a possibilidade de determinarmos a quantidade de emaranhamento de um estado bipartido a partir de um dos estados reduzidos.

A quantidade de emaranhamento de um estado $D_1 \times D_2$ puro pode ser determinada a partir dos valores dos coeficientes de Schmidt (como explorado anteriormente na Sec.2.2.2).

Para estados de fenda 2×2 , já foi mostrado que medições feitas com os dois detectores no plano de Fourier (3.27), nos permitem detectar os fótons nos estados da base de Schmidt, e assim determinar o valor dos coeficientes [61]. No entanto, essa possibilidade se restringe aos estados reduzidos cujos coeficientes diagonais são iguais, como demonstramos na Sec.B.3. Além disso, a relação entre a medição de ambas as partes no plano de Fourier e as bases de Schmidt para estados de dimensão maior, permanece, ao nosso conhecimento, em aberto na literatura. Sendo assim, uma alternativa na determinação da quantidade de emaranhamento de um estado se faz necessária.

Em um conhecido trabalho de 2007, Jakob e Bergou obtiveram uma relação de complementaridade envolvendo o quantificador de emaranhamento chamado de I-concorrência \mathbf{C} e a função ν proporcional à norma l_2 do estado reduzido [26], aceito na época como quantificador de indistinguibilidade (ou coerência quântica na linguagem atual) [15]. Considerando um estado puro $D_i \times D_s$ ($D_i \leq D_s$), temos que para o estado reduzido $\hat{\rho}_i$ por exemplo,

$$\nu_i^2 = 2 \sum_{j \neq k} |\rho_{ijk}|^2. \quad (6.10)$$

Já a I-concorrência é dada por [79]

$$\mathbf{C}(|\psi\rangle) = \sqrt{2[1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_i^2)]} = \sqrt{2[1 - \text{Tr}(\hat{\rho}_s^2)]}, \quad (6.11)$$

e cujo quadrado é proporcional ao grau de mistura dos estados reduzidos, sendo portanto, diretamente ligada à pureza de $\hat{\rho}_i$ e $\hat{\rho}_s$.

Em [26] os autores obtiveram

$$p_i^2 + \nu_i^2 + \mathbf{C}^2(|\psi\rangle) = \frac{2(D_i - 1)}{D_i}, \quad (6.12)$$

onde p_i é a preditibilidade de $\hat{\rho}_i$. Sendo uma medida do quão diferente são os valores dos coeficientes diagonais de ρ_i , p_i é definida como

$$p_i = \sqrt{2 \left(\sum_j |\rho_{ijj}|^2 - \frac{1}{D_i} \right)}. \quad (6.13)$$

Tendo ν (proporcional à norma l_2) sido rejeitado como um bom quantificador de coerência quântica [23], a Eq.(6.12) é inválida, como destacado em [80]. Para $D_i = 2$ no entanto, os quantificadores proporcionais às normas l_1 e l_2 assumem o mesmo valor, de forma que a Eq.(6.12) é válida para *qubits*¹.

¹ A norma l_p de um vetor \vec{W} é definida como $\|\vec{W}\|_p = \left(\sum_j |w_j|^p \right)^{(1/p)}$, onde w_j indica a componente j do vetor [103]. Nos cálculos dos quantificadores de coerência proporcionais às normas l_1 e l_2 , os elementos fora da diagonal da matriz densidade do estado formam um vetor, sendo cada elemento uma componente.

À seguir, procuramos obter uma relação entre a I-concorrência do estado conjunto, a preditibilidade e a coerência dos estados reduzidos, que nos permita determinar a quantidade de emaranhamento do conjunto por meio do estudo das partes. Para tanto, vamos partir da forma normalizada da Eq.(6.12). Tomando as formas normalizadas tais que $V_i = \sqrt{\frac{D_i}{2(D_i-1)}}\nu_i$, $\Omega = \sqrt{\frac{D_i}{2(D_i-1)}}\mathbf{C}$ e $P_i = \sqrt{\frac{D_i}{2(D_i-1)}}p_i$, temos

$$P_i^2 + V_i^2 + \Omega^2 = 1. \quad (6.14)$$

Considerando também a forma normalizada da medida de coerência quântica \mathcal{C}_i do estado $\hat{\rho}_i$, podemos escrever \mathcal{C}_i^2 como

$$\mathcal{C}_i^2 = \frac{2}{D_i(D_i-1)}V_i^2 + \frac{T_i}{(D_i-1)^2}, \quad (6.15)$$

onde $T_i = 8 \sum_{j < k} \sum_{r < q; j, k \neq r, q} |\rho_{ijk}| |\rho_{irq}|$, sendo bem definido apenas para $D_i \geq 3$.

Usando a expressão acima para escrever V_i em função de \mathcal{C}_i e T_i , e substituindo V_i na Eq.(6.14) obtemos

$$\Omega^2 + P_i^2 + \frac{D_i(D_i-1)}{2}\mathcal{C}_i^2 = 1 + \frac{D_i}{2(D_i-1)}T_i. \quad (6.16)$$

A expressão acima mostra que existe uma relação entre a coerência quântica, a pureza (quantificada por $1 - \Omega$) e o balanceio (quantificado por $1 - \mathbf{P}$) entre os estados da base de um estado (nesse caso so subsistema i). No caso de sistemas de dimensão maior que dois, essa relação envolve a terceira variável T , cuja interpretação se encontra em aberto, e cuja relação direta com \mathbf{C} será discutida na sequência. Apesar disso, é bem estabelecido na literatura a noção de que a coerência máxima em uma determinada dimensão D é atingida por estados puros ($\Omega=0$) e com coeficientes diagonais da matriz densidade equilibrados ($-\mathbf{P} = 0$). Para estados bidimensionais $T = 0$ e a relação entre preditibilidade (ou balanço dos estados da base) pureza e coerência podem ser observadas na Fig.21, apresentada na Ref. [107].

Ao longo desse trabalho, estudamos as possibilidades para determinarmos experimentalmente o valor de \mathcal{C} de um estado qualquer. P_i^2 pode ser facilmente determinado por meio da medição de imagem, no caso de $\hat{\rho}_i$ ser um estado de fenda. Assim, poderíamos determinar a quantidade de emaranhamento do estado bipartido Ω por meio das medições de imagem e coerência quântica do estado reduzido, não fosse o termo T_i do lado direito da Eq.(6.16). Apesar de não podermos determinar o valor de Ω a partir dos valores de P_i e \mathcal{C} , estes nos fornecem um intervalo de valores para a quantidade de emaranhamento do estado.

As normas l_1 e l_2 de um determinado vetor \vec{W} são relacionadas pela desigualdade [104]

$$\|\vec{W}\|_2 \leq \|\vec{W}\|_1 \leq \sqrt{n} \|\vec{W}\|_2, \quad (6.17)$$

sendo n a dimensão do vetor, ou o número de elementos do conjunto cuja norma se pretende calcular. Com relação aos estados quânticos, o conjunto sobre o qual calculamos as normas l_1 e l_2 , presentes nas definições de V_i e \mathcal{C}_i , são compostos pelos coeficientes não diagonais do estado analisado tendo, portanto, $D_i^2 - D_i$ elementos.

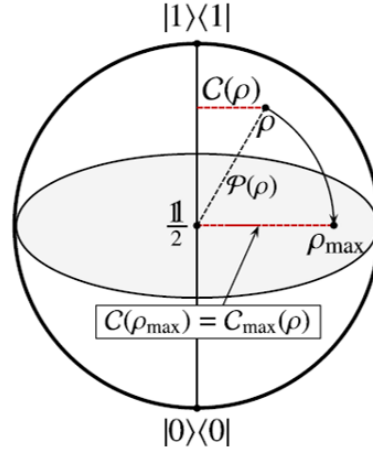


Figura 21 – Representação da Esfera de Bloch apresentada na Ref. [107]. Considerando um estado de um *qubit* ρ , a figura ilustra a relação entre a pureza $\mathcal{P}(\rho)$ e a coerência $\mathcal{C}(\rho)$. Para um valor fixo de pureza (raio na esfera de Bloch), o estado de maior coerência é aquele composto uma superposição equilibrada dos estados da base. Além disso, para estados com valores diagonais fixos (representados no plano equatorial da esfera no caso bidimensional), a coerência é limitada pelo valor da pureza (o que também ocorre para estados de dimensão maior que dois).

Considerando a Eq.(6.17), bem como as definições de V_i e \mathcal{C}_i , podemos escrever

$$\frac{(D_i - 1)}{D_i} V_i^2 \leq (D_i - 1)^2 \mathcal{C}_i^2 \leq (D_i - 1)^2 V_i^2. \quad (6.18)$$

Substituindo o valor de V_i^2 (dado pela Eq(6.15)) na expressão acima, obtemos

$$(D_i - 1) \mathcal{C}_i^2 - \frac{T_i^2}{D_i - 1} \leq 2(D_i - 1)^2 \mathcal{C}_i^2 \leq D_i (D_i - 1)^2 \mathcal{C}_i^2 - D_i T_i^2. \quad (6.19)$$

O limite inferior da equação acima permite que \mathcal{C}_i e T_i assumam valores negativos. No entanto, por definição, \mathcal{C}_i e T_i são sempre positivos. Além disso, no caso em que $\mathcal{C}_i = 0$, T_i também é nulo. Assim, descartando os resultados fisicamente impossíveis, temos que o limite inferior de T_i é zero. Assim, nos casos em que a coerência quântica do estado analisado é nula, podemos estabelecer uma relação direta entre Ω e P_i . Portanto, se a coerência quântica de um dado estado $\hat{\rho}_i$ for igual a zero, o emaranhamento de um estado bipartido e puro, contendo $\hat{\rho}_i$ como uma das partes, pode ser determinado apenas com a informação sobre o valor de P_i (Eq.(6.16)).

Avaliando o limite superior de T_i a partir da Eq.(6.19), temos

$$\begin{aligned} 2(D_i - 1)^2 \mathcal{C}_i^2 &\leq D_i (D_i - 1)^2 \mathcal{C}_i^2 - D_i T_i \\ T_i &\leq \frac{(D_i - 1)^2 (D_i - 2)}{D_i} \mathcal{C}_i^2. \end{aligned} \quad (6.20)$$

Substituindo a relação da Eq.(6.20) na Eq.(6.16), obtemos

$$\begin{aligned} \Omega^2 + P_i^2 + \frac{D_i (D_i - 1)}{2} \mathcal{C}_i^2 &\leq 1 + \frac{(D_i - 1)(D_i - 2)}{2} \mathcal{C}_i^2 \\ \Omega^2 &\leq 1 - P_i^2 - (D_i - 1) \mathcal{C}_i^2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

A relação acima (Eq.(6.21)) se torna uma igualdade quando $\mathcal{C}_i = 0$, ou quando a igualdade na Eq.(6.20) é atingida. Resolvendo a Eq.(6.20), verificamos que a igualdade é atingida quando, além do caso trivial nulo, o estado analisado possui uma simetria entre seus coeficientes tal que

$$\sum_{j \neq k} |\rho_{i_{jk}}|^2 = \frac{8 \sum_{j < k} \sum_{r < q; j, k \neq r, q} |\rho_{i_{jk}}| |\rho_{i_{rq}}|}{D_i - 2}. \quad (6.22)$$

Conclusão

Nos capítulos anteriores, estudamos as principais propriedades e métodos de preparação de estados de fenda, de uma e duas partes. Estudamos também as possibilidades de determinarmos a coerência quântica de estados de fenda de uma parte. Neste capítulo, analisamos como essa determinação pode ser útil na caracterização de um estado bipartido do qual o estado analisado seja uma das partes, sendo esta caracterização parcial e referente à matriz densidade e à quantidade de emaranhamento do estado bipartido.

Conclusão final

Tendo os estados de fenda como objeto central de estudo, o presente trabalhou abordou tanto a preparação quanto a caracterização destes estados. Apesar de ser um tópico muito explorado na literatura, até o momento nenhum trabalho havia usado técnicas conhecidas para preparação de estados bipartidos com as partes possuindo dimensões diferentes. No Cap.2 desenvolvemos uma análise geral (englobando estados $D_1 \times D_2$ com $D_1 = D_2$ ou $\neq D_2$) sobre a preparação de estados de fenda a partir de fótons gerados pela CPD, e no Cap.4 mostramos os resultados experimentais obtidos para a dimensão 2×3 .

Referente à caracterização dos estados de fenda bipartidos, o trabalho teve como foco situações hipotéticas em que a tomografia completa não é possível, e também situações em que temos acesso a apenas uma das partes do sistema. Essa última situação em particular, vai de encontro ao problema da coerência quântica de estados de dimensão maior que dois, para os quais a definição de novos quantificadores de coerência quântica fomentaram pesquisas recentes sobre o assunto. Tendo discutido os tópicos gerais sobre coerência no Cap.1, no Cap.3 analisamos a observação do efeito de coerência (interferência) em estados de fenda. Naquele capítulo, também mostramos que o processo de medição dos estados de fenda pode ser analisado considerando a interação entre o sistema estudado e marcadores de caminho. Além disso, apresentamos os resultados experimentais obtidos para a norma l_1 de coerência de dois estados de *qutrits* (Cap.5).

Considerando as discussões dos Caps.1,3 e 5, na terceira parte da tese estudamos o papel da coerência quântica das partes de um estado bipartido na caracterização do estado conjunto. Apesar de a tese tratar especificamente os estados de fenda, as análises apresentadas no Cap.6 são gerais, e podem ser aplicadas a estados quânticos preparados a partir de outros sistemas físicos, assim como alguns pontos discutidos no Cap.(3) [106].

Em suma, trabalhamos temas bem conhecidos na literatura, mas que apresentam questões relevantes em aberto. Nossas contribuições para essas questões incluem: um panorama geral sobre as possíveis correlações obtidas com o uso de fótons gêmeos na preparação de estados de fenda bipartidos, bem como resultados experimentais para dimensão 2×3 ; análise teórica detalhada sobre o efeito observável produzido pela presença de coerência em sistemas de *qudits* espaciais (a interferência); a verificação experimental de um método proposto na literatura para a obtenção experimental da coerência quântica de estados de fenda; um estudo da caracterização parcial da matriz densidade de um estado bipartido, por meio da coerência quântica de cada parte, e a relação entre a quantidade de emaranhamento de um estado bipartido e a norma l_1 de cada parte.

Referências

- [1] R. Horodecki, P. Horodecki, M. Horodecki e K. Horodecki, *Rev. Mod. Phys.* **81** 865 (2009). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 79.
- [2] H. Di L. Pires e M. P. van Exter, *Phys. rev. A* **89** 053820 (2009). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 27.
- [3] S. P. Walborn, C. H. Monken, S. Pádua e P. H. S. Ribeiro, *Phys. Reports* **495** 87 (2010) Citado 4 vezes nas páginas 13, 27, 28 e 98.
- [4] W. H. Peeters, J. J. Renema e M. P. van Exter, *Phys. Rev. A* **79** 043817 (2009) Citado 6 vezes nas páginas 13, 27, 28, 29, 30 e 31.
- [5] P.-L. de Assis, M. A. D. Carvalho, L. P. Berruezo, J. Ferraz, I. F. Santos, F. Sciarrino e S. Pádua, *O. Express* **19** 003715 (2011) Citado 5 vezes nas páginas 13, 25, 26, 27 e 30.
- [6] G. Borges, M. Carvalho, P.-L. de Assis, J. Ferraz, M. Araújo, A. Cabello, M. T. Cunha e S. Pádua, *Phys. Rev. A* **89** 052106 (2014). Citado 3 vezes nas páginas 13, 23 e 27.
- [7] B. Marques, M. R. Barros, W. M. Pimenta, M. A. D. Carvalho, J. Ferraz, R. C. Drumond, M. T. Cunha e S. Pádua, *Phys. Rev. A* **86** 032306 (2012). Citado 4 vezes nas páginas 13, 23, 27 e 53.
- [8] W. H. Peeters, E. J. K. Verstegen and M. P. van Exter, *Phys. Rev. A* **76**, 042302 (2007). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 27.
- [9] A. K. Jha, B. Jack, E. Yao, J. Leach, R. W. Boyd, G. S. Buller, S. M. Barnett, S. Franke-Arnold and M. J. Padgett, *Phys. Rev. A* **78**, 043810 (2008). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 27.
- [10] E. J. S. Fonseca, J. C. Machado da Silva, C. H. Monken and S. Pádua, *Phys. Rev. A* **61**, 023801 (2000). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 27.
- [11] D. Pagel and H. Fehske, *J. of Phys. B: Atomic, Molecular and Optical Physics* **50**, (2017). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 27.
- [12] D. M. Greenberger e A. Yasin, *Phys. Lett. A* **128** 8 (1988). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.
- [13] M. Scully, B.-G. Englert e H. Walther, *Nature* **351** 111 (1991). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 16.

- [14] B.-G. Englert, *Phys. Rev. Lett.* **77** 2154 (1996). Citado 5 vezes nas páginas 13, 18, 20, 43 e 73.
- [15] S. Durr, *Phys. Rev. A* **64** 042113 (2001). Citado 3 vezes nas páginas 13, 19 e 80.
- [16] T. Baumgratz, M. Cramer e M. B. Plenio, *Phys. Rev. Letters* **113** 140401 (2014). Citado 4 vezes nas páginas 13, 19, 47 e 68.
- [17] Y.-Tao Wang, J.-Shun Tang, Z.-Yuan Wei, S. Yu, Z.-Jin Ke, X.-Ye Xu, C.-F. Li e G.-C. Guo, *Phys. Rev. Letters* **118** 020403 (2017). Citado 2 vezes nas páginas 13 e 47.
- [18] T. Paul e T. Qureshi, *Phys. Rev. A* **95** 042110 (2017). Citado 9 vezes nas páginas 13, 19, 47, 49, 68, 69, 72, 73 e 74.
- [19] L. Mandel e E. Wolf, *Optical coherence and quantum optics* **2ed** (2007). Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- [20] G. R. Fowles, *Introduction to Modern Optics* **2ed** (2007). Citado 3 vezes nas páginas 16, 19 e 69.
- [21] B. E. A. Saleh e M. C. Teich, *Fundamentals of photonics* **2ed**. Citado 7 vezes nas páginas 16, 17, 19, 24, 40, 59 e 60.
- [22] L. Mandel, *Optics Letters* **16** 1882 (1991). Citado 2 vezes nas páginas 18 e 50.
- [23] G. Bimonte e R. Musto, *J. of Physics A: Mathematical and General* **36** 11481 (2003). Citado 2 vezes nas páginas 19 e 80.
- [24] R. Souza Cunha *Dissertação de mestrado* Universidade Federal de Minas Gearis (2017) Citado na página 19.
- [25] G. Bimonte e R. Musto, *Phys. Rev. A* **67** 066101 (2003). Citado 2 vezes nas páginas 19 e 20.
- [26] M. Jakob e J. A. Bergou, *Phys. Rev. A* **76** 052107 (2007) Citado 3 vezes nas páginas 19, 73 e 80.
- [27] A. Streltsov, G. Adesso, M. B. Plenio *Rev. of Mod. Phys.* **89** (2017). Citado na página 19.
- [28] M. N. Bera, T. Qureshi, M. A. Siddiqui e A. K. Pati, *Phys. Rev. A* **92** 012118 (2015). Citado 4 vezes nas páginas 19, 20, 68 e 73.
- [29] E. Chitambar e M.-H. Hsieh *Phys. Rev. Lett.* **117** 020402 (2016). Citado na página 19.

- [30] X.-F. Qian, K. Konthasinghe, S. K. Manikandan, D. Spiecker, A. N. Vamivakas e J. H. Eberly *Phys. Rev. Research* **2** 012016 (2020). Citado na página 19.
- [31] S. Mishra, A. Venugopalan e T. Qureshi *Phys. Rev. A* **100** 1103 (2019). Citado na página 19.
- [32] Z. Xi *J. Phys. A: Math. Theor.*, *accepted manuscript*, (2018). Citado na página 19.
- [33] Joseph W. Goodman, *Introduction to Fourier Optics* **3ed** (2005) Citado 5 vezes nas páginas 22, 25, 40, 93 e 94.
- [34] H. B.-Pasquinucci e W. Tittel, *Phys. Rev. A* **61** 062308 (2000). Citado na página 23.
- [35] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters, *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895 (1992). Citado na página 23.
- [36] D. S. Naik, C. G. Peterson, A. G. White, A. J. Berglund e P. G. Kwiat, *Phys. Rev. Lett.* **84** 4733 (1999). Citado na página 23.
- [37] M. Muraio, M. B. Plenio e V. Vedral, *Phys. Rev. A* **61** 032311 (1999). Citado na página 23.
- [38] L. Neves, G. Lima, J. G. Aguirre Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra e S. Pádua *Phys. Rev. Letters* **94** 100501 (2005) Citado 6 vezes nas páginas 23, 27, 33, 34, 35 e 36.
- [39] L. Neves, S. Pádua e C. Saavedra, *Phys. Rev. A* **69** 042305 (2004) Citado 2 vezes nas páginas 23 e 27.
- [40] L. Neves, G. Lima, J. G. Aguirre, C. H. Monken, C. Saavedra e S. Pádua, *Mod. Phys. B* **20** 1-23 (2006). Citado 4 vezes nas páginas 23, 25, 27 e 40.
- [41] L. Neves, S. Pádua e C. Saavedra *Phys. Rev. A* **69** 042305 (2004) Citado 7 vezes nas páginas 23, 25, 26, 27, 28, 29 e 35.
- [42] C. H. Monken, Aplicação da Óptica de Fourier à Conversão Paramétrica Descendente, Notas de aula - Departamento de Física - UFMG (1998-2004). Citado 3 vezes nas páginas 28, 31 e 38.
- [43] John Garrison e Raymond Chiao, *Quantum Optics* (2008). Citado 6 vezes nas páginas 24, 40, 41, 43, 51 e 52.
- [44] A. Abouraddy, B. Saleh, A. Sergienko e M. Teich., *Phys. Rev. Letters* **87** 123602 (2001). Citado na página 24.

- [45] B. Marques, A. A. Matoso, W. M. Pimenta, A. J. Gutierrez-Esparza, G. Lima, L. Neves, A. Delgado, C. Saavedra e S. Pádua *Phys. Rev. A* **87** 052327 (2013). Citado na página 25.
- [46] G. Taguchi, T. Dougakiuchi, N. Yoshimoto, K. Kasai, M. Iinuma, H. F. Hofmann e Y. Kadoya *Phys. Rev. A* **78** 012307 (2008). Citado 2 vezes nas páginas 25 e 27.
- [47] G. Lima, L. Neves, I. F. Santos, C. H. Monken, J. G. A. Gomez, C. Saavedra e S. Pádua *International Journal of Quantum Information* **5** 65 (2007). Citado 3 vezes nas páginas 25, 27 e 35.
- [48] M. D'Angelo, Y.-H. Kim, S. P. Kulik e Y. Shih, *Phys. Rev. Lett.* **92** 233601 (2004). Citado na página 27.
- [49] J. C. Howell, R. S. Bennink, S. J. Bentley e R.W. Boyd, *Phys. Rev. Lett.* **92** 210403 (2004). Citado na página 27.
- [50] Y.-H. Kim, M. V. Chekhova, S. P. Kulik, M. H. Rubin e Y. Shih, *Phys. Rev. A* **63** 062301 (2001). Citado na página 27.
- [51] E. J. S. Fonseca, J. C. Machado da Silva, C. H. Monken e S. Pádua, *Phys. Rev. A* **61** 023801 (2000). Citado 2 vezes nas páginas 27 e 53.
- [52] S.P.Walborn, C.H.Monken, S.Pádua e P.H.Souto Ribeiro, *Phys. Rep.* **495**, 87 (2010). Citado na página 27.
- [53] D. Bouwmeester, J. W. Pan, K. Mattle, M. Eibl, H. Weinfurter e A. Zeilinger, *Nature* **390**, 575 (1997). Citado na página 27.
- [54] T. Jennewein, C. Simon, G. Weihs, H. Weinfurter e A. Zeilinger, *Phys. Rev. Lett.* **84** 4729(2000). Citado na página 27.
- [55] A. A. Matoso, X. Sánchez-Lozano, W. M. Pimenta, P. Machado, B. Marques, F. Sciarrino, L. E. Oxman, A. Z. Khoury e S. Pádua *Phys. Rev. A* **94** 052305 (2016) Citado 2 vezes nas páginas 35 e 53.
- [56] R. Shimizu, T. Yamaguchi, Y. Mitsumori, H. Kosaka e K. Edamatsu, *Phys. Rev. A* **77**, 032338 (2008). Citado na página 27.
- [57] A. Mair, A. Vaziri, G. Weihs e A. Zeilinger, *Nature* **412**, 313 (2001). Citado na página 27.
- [58] L. Neves, G. Lima, E. J. S. Fonseca, L. Davidovich e S. Pádua, *Phys. Rev. A* **76**, 032314 (2007). Citado 3 vezes nas páginas 27, 28 e 56.

- [59] L.S. P. Walborn, S. Pádua e C. H. Monken, *Phys. Rev. A* **71**, 053812 (2005) Citado na página 27.
- [60] S. C. Zilio, *Óptica moderna: fundamentos e aplicações*. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 59.
- [61] L. T. Neves, *Estados Emaranhados de Qubits e Qudits Criados com Pares de Fótons Produzidos na Conversão Paramétrica Descendente*. *Tese de Doutorado UFMG* (2006) Citado 6 vezes nas páginas 25, 26, 32, 33, 41 e 80.
- [62] M. B. Plenio e S. Virmani, *Quantum Info. Comput.* **7** 1 (2007). Citado na página 36.
- [63] C. H. Bennett e S. J. Wiesner, *Phys. Rev. Letters* **69** 2881 (1992). Nenhuma citação no texto.
- [64] C. H. Bennett, G. Brassard, C. Crépeau, R. Jozsa, A. Peres e W. K. Wootters, *Phys. Rev. Letters* **70** 1895 (1993). Nenhuma citação no texto.
- [65] E. J. S. Fonseca, C. H. Monken e S. Pádua, *Phys. Rev. Letters* **82** 2868 (1999). Citado na página 27.
- [66] B. P. Lanyon, T. J. Weinhold, N. K. Langford, J. L. O'Brien, K. J. Resch, A. Gilchrist e A. G. White, *Phys. Rev. Lett.* **100**, 06504 (2008). Citado na página 27.
- [67] G. M. Burrow e T. K. Gaylord *Micromachines* , **2**, (2011). Citado na página 20.
- [68] Paula D. Machado, *Engenharia de estados espaciais de dimensões híbridas*. *Dissertação de Mestrado UFMG* (2016) Citado 3 vezes nas páginas 28, 29 e 33.
- [69] P.-L. de Assis, *Manipulação e mapeamento de correlações quânticas em estados de quatro qudits espaciais*. *Tese de Doutorado UFMG* (2011) Citado na página 30.
- [70] P.-L. de Assis, *Tese de Doutorado UFMG* (2011) Citado na página 41.
- [71] Wikipedia, *Rectangular function* Nenhuma citação no texto.
- [72] S. T. Flammia, A. Silberfarb e C. M. Caves, *Foundations of Physics* **35** 1985 (2005). Citado na página 76.
- [73] W. M. Pimenta, B. Marques, T. O. Maciel, R. O. Vianna, A. Delgado, C. Saavedra e S. Pádua, *Phys. Rev. A* **88** 012112 (2013). Citado 2 vezes nas páginas 27 e 76.
- [74] D. S. Gonçalves, C. Lavor, M. A. Gomes-Ruggiero, A.T. Cesário, R. O. Vianna e T. O. Maciel, *Phys. Rev. A* **87** 052140 (2013). Citado na página 76.
- [75] Michael A. Nielsen e Isaac L. Chuang, *Computação Quântica e Informação Quântica* (2005). Citado na página 40.

- [76] L. E. Ballentine, *Quantum Mechanics: A Modern Development* (1998). Citado na página 38.
- [77] Roy J. Glauber, *Phys. Rev.* **130** 2529 (1963) Citado 3 vezes nas páginas 40, 41 e 43.
- [78] C. Eltschka e J. Siewert, *J. of Phys. A: Mathematical and Theoretical* **47** 424005 (2014). Citado na página 36.
- [79] P. Rungta, V. Buzek, C. M. Caves, M. Hillery e G. J. Milburn, *Phys. Rev. A* **64** 042315 (2001). Citado na página 80.
- [80] E. Bagan, J. A. Bergou, S. S. Cottrell e M. Hillery, *Phys. Rev. Letters* **116** 160406 (2016) Citado 2 vezes nas páginas 73 e 80.
- [81] P. Machado, A. A. Matoso, M. R. Barros, L. Neves e S. Pádua, *Phys. Rev. A* **99** 063839 (2019). Citado 6 vezes nas páginas 31, 32, 34, 37, 63 e 64.
- [82] P. Machado e S. Pádua, *J. of Optics* **22** 065201 (2020). Citado 3 vezes nas páginas 47, 50 e 72.
- [83] W. A. T. Nogueira, S. P. Walborn, S. Pádua e C. H. Monken, *Phys. Rev. Letters* **86** 4009 (2001) . Citado na página 27.
- [84] G. Lima, L. Neves, I. F. Santos, J. G. A. Gómez, C. Saavedra e S. Pádua, *PhysRevA* **73** 032340 (2006). Citado na página 40.
- [85] G. Lima, L. Neves, I. F. Santos, C. H. Monken, J. G. A. Gomez, C. Saavedra e S. Pádua, *International Journal of Quantum Information* **5** 69-81 (2007). Citado na página 40.
- [86] C. K. Hong e L. Mandel, *Phys. Rev. A* **31**, 2409 (1985). Citado na página 28.
- [87] W. M. Pimenta, B. Marques, T. O. Maciel, R. O. Vianna, A. Delgado, C. Saavedra e S. Padua, *Phys. Rev. A* **88**, 012112 (2013). Citado na página 36.
- [88] C. H. Monken, P. H. Souto Ribeiro e S. Paádua, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 3123 (1998). Citado na página 28.
- [89] R. Ramírez-Alarcón, H. Cruz-Ramírez e A. B. U'Ren, *Laser Phys.* **23**, 055204 (2013). Citado na página 28.
- [90] W. P. Grice, A. B. U'Ren e I. A. Walmsley, *Phys. Rev. A* **64**, 063815 (2001). Citado na página 28.
- [91] M. V. Fedorov, M. A. Efremov, P. A. Volkov, E. V. Moreva, S. S. Straupe e S. P. Kulik, *Phys. Rev. Lett.* **99**, 063901 (2007). Citado na página 28.

- [92] A. G. da Costa Moura, W.A.T.Nogueira e C. H. Monken, *Opt. Com.* **238**, 2866 (2010). Citado na página 28.
- [93] M. V. Jabir, N. A. Chaitanya e G. K. Samanta, *Frontiers in Opt. JTh2A.18* (2016). Citado na página 28.
- [94] D. Ghosh, T. Jennewein, P. Kolenderski e U. Sinha, *1702.02581 arXiv* (2018). Citado na página 28.
- [95] E. J. S. Fonseca, J. C. f da Silva, C. H. Monken e S. Pádua, *Phys. Rev. A* **61**, 023801 (2000). Citado 2 vezes nas páginas 28 e 33.
- [96] E. V. Kovlakov, S. S. Straupe e S. P. Kulik, *Phys. Rev. A* **98**, 060301 (2018). Citado na página 29.
- [97] S. Liu, Z. Zhou, S. Liu, Y. Li, Y. Li, C. Yang, Z. Xu, Z. Liu, G. Guo e B. Shi, *Phys. Rev. A* **98**, 062316 (2018). Citado na página 29.
- [98] C. J. Pugh, P. Kolenderski, C. Scarcella, A. Tosi e T. Jennewein, *Opt. Express* **24**, 20947 (2016). Citado na página 29.
- [99] H. Avetisyan e C. H. Monken, *Opt. Express* **24**, 003218 (2016). Citado na página 29.
- [100] H. J. Lee e H. S. Park, *Quat. Inf. and Measurement* (2017) Nenhuma citação no texto.
- [101] M. Nazarathy e J. Shamir, *Journal of the Optical Society of America* **70** 150 (1980) Nenhuma citação no texto.
- [102] M. Li e S.-Ming Fei, *Phys. Rev. A* **85**, 014304 (2012). Nenhuma citação no texto.
- [103] A. Ang, *Notas de aula* (2013). Citado na página 80.
- [104] T. R. Kristiantoo, R. A. W.-Kusumah e H. Gunawan, *M. Vesnik* **65**, 4 (2012). Citado na página 81.
- [105] L. Mandel e E. Wolf, *Rev. Mod. Phys.* **37** 231 (1965) Citado na página 22.
- [106] A. C. Cardoso, J. G. L. Condé, B. Marques, J. S. Cabral e S. Pádua, *arXiv* (2020) Citado na página 84.
- [107] A. Streltsov, H. Kampermann, S. Wölk, M. Gessner e D. Bru, *N. J. of Physics* (2018) Citado 2 vezes nas páginas 81 e 82.

Apêndices

APÊNDICE A – Cálculos gerais para a propagação

Neste apêndice apresentamos, em linhas gerais, os cálculos de propagação que servem de base para o entendimento de todo o estudo teórico apresentado ao longo do texto. A primeira seção contém alguns conceitos básicos referentes à Óptica de Fourier. Já as seções A.2 e A.3 tratam, respectivamente, da propagação de feixes através de uma lente esférica e da propagação geral de um conjunto de fótons igualmente preparados.

A.1 Ferramentas da Óptica de Fourier

Para um campo elétrico harmônico e escalar, cuja parte espacial obedece a Equação de Helmholtz, podemos, para cada z constante, decompor o perfil transversal do campo em ondas planas, obtendo assim, seu espectro angular, mencionado ao longo do texto, e definido como [33]

$$\tilde{E}(q_x, q_y, z) = \iint E(x, y, z) e^{-i(xq_x + yq_y)} dx dy, \quad (\text{A.1})$$

e que se modifica por uma propagação livre ao longo de z , positivo, de forma tal que [33]

$$\tilde{E}(q_x, q_y, z) = \tilde{E}(q_x, q_y, z_0) e^{ik_z(z-z_0)}. \quad (\text{A.2})$$

Caso o campo passe por algum componente óptico linear, o perfil transversal do campo elétrico transmitido será dado pelo produto entre a função que descreve o perfil sobre o plano do elemento óptico e a função transmissão referente ao componente óptico em questão (como exemplo, temos a soma de funções retângulo representando fenda múltipla). Assim, sabemos calcular de forma direta (como produto de duas funções) a ação da propagação livre sobre o espectro angular, e a ação de elementos ópticos sobre o perfil transversal do campo. Para uma situação em que o feixe passa por uma sucessão de propagações livres intercaladas com elementos ópticos, o perfil transversal resultante é obtido por meio do cálculo de várias integrais. Para simplificarmos os cálculos e torna-los mais práticos, podemos usar o método descrito na Ref. [33] para elementos ópticos com funções transmissão conhecidas (e operações sobre o feixe incidente), o qual apresentamos na sequência.

A.1.1 Sistemas ópticos tratados como operadores

Uma técnica prática para determinamos o comportamento de um feixe através de um conjunto de elementos ópticos lineares, é pela utilização da álgebra de operadores, sendo os quatro operadores base, \mathcal{Q} , \mathcal{P} , \mathcal{F} e \mathcal{R} , definidos como à seguir [33]

Multiplicação por uma fase exponencial quadrática	$\mathcal{Q}[c] \{U(x)\} = e^{i\frac{k}{2}cx^2} U(x) \quad (\text{A.3})$
---	--

Dimensionamento por uma constante b	$\mathcal{P}[b] \{U(x)\} = b ^{\frac{1}{2}} U(bx) \quad (\text{A.4})$
-------------------------------------	--

Transformada de Fourier	$\mathcal{F} \{U(x)\} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} U(x) e^{-iqx} dx \quad (\text{A.5})$
-------------------------	---

Propagação no espaço livre por uma distância d	$\mathcal{R}[d] \{U(x_1)\} = \frac{1}{\sqrt{i\lambda d}} \int_{-\infty}^{\infty} U(x_1) e^{i(k/2d)(x_2-x_1)^2} dx_1 \quad (\text{A.6})$
--	---

Além disso, os quatro operadores apresentam as seguintes propriedades:

$$\mathcal{R}[d] = \mathcal{Q} \left[\frac{1}{d} \right] \mathcal{P} \left[\frac{k}{d} \right] \mathcal{F} \mathcal{Q} \left[\frac{1}{d} \right] \quad (\text{A.7}) \quad \left| \quad \mathcal{P} \left[\frac{k}{f} \right] \mathcal{F} = \mathcal{R}[f] \mathcal{Q} \left[\frac{-1}{f} \right] \mathcal{R}[f]. \quad (\text{A.8})$$

Essas relações nos permitem propagar um campo elétrico por um conjunto de sistemas ópticos lineares sem ser necessária a resolução de integrais dentro de integrais. Para tanto, precisamos conhecer a função transmissão de cada sistema óptico e associar a ação de cada um deles às expressões definidas acima. Assim, representamos a ação do conjunto como um produto de operadores e usamos tais relações para simplificar a expressão o máximo possível.

A.2 Propagação na projeção de imagem e da transformada de Fourier

Na montagem experimental ilustrada na Fig.22, um feixe de laser (fonte de luz clássica) se propaga à partir de um plano em $z = z_a$ até um plano em $z = z_d$, sendo transmitido por uma lente esférica posicionada em um plano intermediário em $z = z_l$. Sendo $\Phi(x, z_d)$ o perfil transversal do feixe no plano em $z = z_d$, ao longo de \hat{x} , o mesmo é dado por

$$\Phi(x, z_d) = \mathcal{R}[d_2] \left\{ \mathcal{Q} \left[-\frac{1}{f} \right] \{ \mathcal{R}[d_1] \{ \Phi(x_a, z_a) \} \} \right\}, \quad (\text{A.9})$$

onde $d_1 = z_l - z_a$, $d_2 = z_d - z_l$ e f é a distância focal da lente esférica. Considerando as definições apresentadas na Sec.A.1, temos que

$$\Phi(x, z_d) \propto e^{\frac{ik}{2d_2}x^2} \int e^{-\frac{ik}{2f}x_l^2} \left(\int \Phi(x_a, z_a) e^{\frac{ik}{2d_1}(x_l-x_a)^2} dx_a \right) e^{\frac{ik}{2d_2}(x-x_l)^2} dx_l \quad (\text{A.10})$$

$$\Phi(x, z_d) \propto e^{\frac{ik}{2d_2}x^2} \int \Phi(x_a, z_a) e^{i\frac{k}{2d_1}x_a^2} \left(\int e^{i\frac{k}{2}bx_l^2} e^{-i\frac{2kx_a}{2d_1}x_l} e^{-i\frac{2kx}{2d_2}x_l} dx_l \right) dx_a, \quad (\text{A.11})$$

onde $b = \left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} \right)$.

Para as configurações experimentais onde $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}$, $b = 0$ e a expressão acima é simplificada de forma que

$$\begin{aligned} \Phi(x, z_d) &\propto e^{\frac{ik}{2d_2}x^2} \int \Phi(x_a, z_a) e^{i\frac{k}{2d_1}x_a^2} \int e^{-i\frac{2kx_a}{2d_1}x_l} e^{-i\frac{2kx}{2d_2}x_l} dx_l dx_a \\ \Phi(x, z_d) &\propto e^{\frac{ik}{2d_2}x^2} \int \Phi(x_a, z_a) e^{i\frac{k}{2d_1}x_a^2} \delta\left(\frac{kx_a}{d_1} + \frac{kx}{d_2}\right) dx_a \\ \Phi(x, z_d) &\propto e^{i\frac{k}{2d_2}\left(1+\frac{d_1}{d_2}\right)x^2} \Phi\left(-\frac{d_1}{d_2}x, z_a\right), \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

e o perfil transversal do feixe em $z = z_a$ é reproduzido em $z = z_d$ adicionado à uma fase e escalonado por um fator de aumento. Em outras palavras, a imagem do plano em $z = z_a$ é projetada sobre o plano em $z = z_d$. No caso em que $d_1 = d_2 = 2f$, a imagem é não ampliada em relação ao perfil em $z = z_a$, e reproduz em z_d o perfil do plano em $z = z_a$ de forma invertida.

Nos casos em que $\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} \neq \frac{1}{f}$, a última exponencial dentro da integral entre parêntesis na Eq.(A.11), evidencia a transformada de Fourier do produto de exponenciais dependentes de x_l . A função resultante é igual a convolução entre as transformadas de Fourier das duas primeiras exponenciais. Modificando a variável de integração de x_l para kx/d_2 e operando a convolução como dependente dessa variável, temos que

$$\Phi(x, z_d) \propto e^{i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_2^2 b}\right)x^2} \int \Phi(x_a, z_a) e^{i\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_1} - \frac{1}{d_1^2 b}\right)x_a^2} e^{-ix_a \frac{kx}{d_1 d_2 b}} dx_a. \quad (\text{A.13})$$

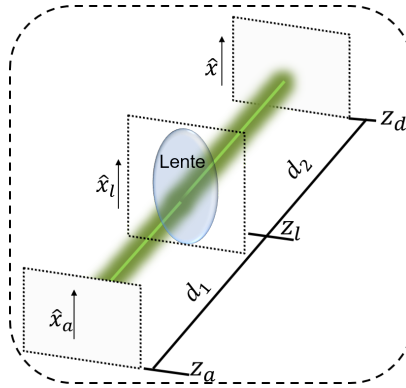


Figura 22 – Ilustração da montagem experimental genérica em que um feixe de luz se propaga ao longo de \hat{z} , a partir de um plano em $z = z_a$ até um plano em $z = z_d$. Em plano intermediário, em $z = z_l$, a luz é transmitida por uma lente esférica de distância focal f .

Para as configurações experimentais onde $d_1 = d_2 = f$, $b = 1/f$ e a expressão acima se reduz a

$$\Phi(x, z_d) \propto \int \Phi(x_a, z_a) e^{-i\frac{kx}{f}x_a} dx_a, \quad (\text{A.14})$$

mostrando que neste caso a transformada de Fourier óptica do plano em $z = z_a$ é projetada sobre o plano em $z = z_d$.

A.3 A propagação dos estados quânticos

Com relação aos estado quânticos fotônicos descritos de maneira geral como

$$|\psi_z\rangle = \int \Phi(x, z) |x\rangle dx, \quad (\text{A.15})$$

o cálculo da propagação do estado ao longo do *setup* experimental se dá por meio do cálculo da propagação do perfil espacial $\Phi(x, z)$. Em cada plano em determinado z constante, o estado $|\psi_z\rangle$ é determinado pela amplitude espacial do campo neste mesmo plano.

No caso dos estados bipartidos estudados neste trabalho, a propagação do estado

$$|\psi\rangle = \iint \Phi(x_i, x_s, z_i, z_s) |x_i\rangle |x_s\rangle dx_i dx_s, \quad (\text{A.16})$$

é descrita por meio do cálculo de $\Phi(x_i, x_s, z_i, z_s)$, que por sua vez se dá pela aplicação das operações descritas na Sec.A.1 em cada parte do sistema à partir de seus respectivos planos iniciais.

APÊNDICE B – Cálculos referentes à preparação e medição dos estados de fenda

Neste apêndice, estão os cálculos envolvidos em algumas análises referentes à preparação e medição de estados de fenda.

B.1 Estado 2×3 maximamente emaranhado com correlação entre todas as aberturas

Uma das maneiras de determinarmos os possíveis estados maximamente emaranhados de dimensão 2×3 , preparados a partir de fótons gerados na CPD, se dá pela análise dos coeficientes de Schmidt do estado mais geral nessa dimensão. Esses coeficientes correspondem à raiz quadrada dos autovalores não nulos dos operadores de estado reduzidos de cada parte do sistema bipartido.

Na configuração do *setup* de preparação descrito na Subsec.2.2.2, o estado geral $|\Psi\rangle$ preparado no plano das aberturas é descrito pela Eq.(2.20). Tomando o operador de estado $|\Psi\rangle\langle\Psi|$ e considerando a dimensão 2×3 , os autovalores não nulos dos estados reduzidos de qualquer uma das partes (i ou s), são λ_+ e λ_- dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \left[1 \pm \frac{\sqrt{\left(|E(-\frac{3d}{4})|^2 - |E(\frac{3d}{4})|^2\right)^2 + 4|g|^2}}{2\left(|E(-\frac{d}{4})|^2 + |E(\frac{d}{4})|^2\right) + |E(-\frac{3d}{4})|^2 + |E(\frac{3d}{4})|^2} \right], \quad (\text{B.1})$$

onde $g = e^{-2i\phi d^2} E(-\frac{3d}{4}) E^*(-\frac{d}{4}) + e^{2i\phi d^2} E^*(\frac{3d}{4}) E(\frac{d}{4}) + E(-\frac{d}{4}) E^*(\frac{d}{4})$.

Estados puros bipartidos numa dimensão arbitrária $D_1 \times D_2$ (com $D_1 < D_2$) é maximamente emaranhado se os coeficientes de Schmidt são todos iguais a $1/\sqrt{D_1}$. Para dimensão 2×3 isso ocorre se

$$\left(|E(-\frac{3d}{4})|^2 - |E(\frac{3d}{4})|^2\right)^2 + 4|g|^2 = 0. \quad (\text{B.2})$$

Uma possibilidade de fazermos com que a igualdade acima seja atingida, consiste em manipular o perfil do feixe de bombeio de forma que $E(-\frac{d}{4}) = E(\frac{d}{4}) = 0$, produzindo o estado da Eq.(2.27). Supondo, no entanto, a exigência hipotética de que haja correlação entre fótons passando por todas as aberturas de ambas as fendas múltiplas (dupla e tripla),

nenhum dos coeficientes da Eq.B.2 pode ser nulo. Nesse caso, considerando um perfil simétrico para o feixe de bombeio, é necessário que

$$e^{-2i\phi d^2} E\left(\frac{3d}{4}\right) E^*\left(\frac{d}{4}\right) + e^{2i\phi d^2} E^*\left(\frac{3d}{4}\right) E\left(\frac{d}{4}\right) + |E\left(\frac{d}{4}\right)|^2 = 0, \quad (\text{B.3})$$

que por sua vez, ocorre se $E\left(\frac{3d}{4}\right) = -\frac{E\left(\frac{d}{4}\right)}{2\cos(2\phi d^2)}$. No caso especial em que $2\phi d^2 = \pi$, $E\left(\frac{3d}{4}\right) = \frac{E\left(\frac{d}{4}\right)}{2}$ e o estado então obtido é tal que

$$|\Psi_V\rangle \propto E\left(\frac{d}{4}\right) \left[|-\frac{1}{2}\rangle \left(-\frac{1}{2} | -1\rangle + |0\rangle + |1\rangle \right) + |\frac{1}{2}\rangle \left(| -1\rangle + |0\rangle - \frac{1}{2} |1\rangle \right) \right]. \quad (\text{B.4})$$

B.2 Operadores de medição e distribuição de probabilidade dos estados bipartidos

Como mencionado ao longo do texto, o cálculo dos operadores $\hat{E}^{(+)}(x, z_d)$ para cada medição, pode ser feito considerando a propagação de feixes ao longo do *setup*, e a quantização do campo realizada posteriormente. Assim, para a montagem experimental de medição englobando todos os componentes óticos e o espaço livre do plano da fenda múltipla até o detector, podemos utilizar os cálculos já mostrados no apêndice anterior.

Dado os cálculos da Sec.A.2, e considerando um campo clássico em $z = z_a$ descrito como $\Phi(x, z_a) = E(x)$, o mesmo será descrito como

$$\Phi(x, z_d) \propto \begin{cases} e^{i\frac{k}{2f_1}x^2} E(-x) & \text{no caso em que a imagem não ampliada do plano} \\ \text{em } z = z_a \text{ é projetada em } z = z_d \text{ por uma lente de foco } f_1; \\ \int E(x') e^{-i\frac{kx}{f_2}x'} dx' & \text{no caso em que a transformada de Fourier óptica} \\ \text{do plano em } z = z_a \text{ é projetada em } z = z_d \text{ por uma lente de foco } f_2. \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

A quantização do campo é feita de forma que o espectro angular $\tilde{E}(q)$ é substituído pelo operador aniquilação $\hat{a}(q)$, sendo $\tilde{E}(q) \propto \int E(x) e^{iqx} dx$ [3]. Assim, a aplicação do operador $\hat{E}^{(+)}(x, z_d)$ sobre o estado

$$|l\rangle = \frac{a}{\pi} \int dq e^{-iqld} \text{sinc}(qa) |q\rangle^1, \quad (\text{B.6})$$

é tal que

¹ Como no restante do texto, d é a separação entre as aberturas da fenda múltipla e $2a$ é a largura de cada abertura.

$$\hat{E}^{(+)}(x, z_d) |l\rangle \propto \begin{cases} e^{i\frac{k}{2f_1}x^2} \iint e^{-iq'ld} \text{sinc}(q'a) e^{iqx} \hat{a}(q) |q'\rangle dqdq' & \text{para;} \\ \text{a projeção de image} \\ \int e^{-iqld} \text{sinc}(qa) \hat{a}(kx/f_2) |q\rangle dq & \text{para a projeção} \\ \text{datransformada de Fourier.} \end{cases} \quad (\text{B.7})$$

Realizando cada uma das integrais acima, obtemos

$$\hat{E}^{(+)}(x, z_d) |l\rangle \propto \begin{cases} e^{i\frac{k}{2f_1}x^2} \Pi\left(\frac{x-l d}{2a}\right) |0\rangle & \text{para a projeção de imagem;} \\ \int e^{-i\frac{kld}{f_2}x} \text{sinc}\left(\frac{ka}{f_2}x\right) |0\rangle & \text{para a projeção da} \\ \text{transformada de Fourier,} \end{cases} \quad (\text{B.8})$$

onde $|0\rangle$ representa o estado de vácuo do campo eletromagnético.

B.3 A seleção dos estados de Schmidt na medição plano de Fourier-Transformada de Fourier

Vamos tomar como exemplo o estado geral de um *qubit*, descrito pela matriz densidade

$$\rho = \frac{1}{a_1 + a_2} \begin{pmatrix} a_1 & w \\ w^* & a_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.9})$$

Os autovalores de ρ (o quadrado dos coeficientes de Schmidt) são $\lambda_{\pm} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{1+4|w|^2-2a_1a_2}}{2(a_1+a_2)}$, e os autovetores (vetores da base de Schmidt)

$$|\beta_{\pm}\rangle = \frac{(c_1 \pm c_2) |-\frac{1}{2}\rangle + |\frac{1}{2}\rangle}{\sqrt{1 + |c_1 \pm c_2|^2}}; c_1 = \frac{a_1 - a_2}{2w^*}; c_2 = \frac{\sqrt{(a_1 - a_2)^2 + 4|w|^2}}{2w^*}. \quad (\text{B.10})$$

A probabilidade de detectarmos um fóton, no plano de Fourier, em um dos estados $|\beta_{\pm}\rangle$ é (3.9)

$$P_{\beta_{\pm}}^{(F)}(x, z_D) \propto \frac{1}{|c_1 \pm c_2|^2} \left\{ 1 + |c_1 \pm c_2|^2 + 2 \cos(kdx/f_1) \text{Re}(c_1 \pm c_2) \right\}. \quad (\text{B.11})$$

Se em certa posição x_1 , $P_{\beta_+}^{(F)}(x_1, z_D)$ for máximo e $P_{\beta_-}^{(F)}(x_1, z_D)$ for igual a zero, podemos dizer que o detector fixo em x_1 registra apenas fótons preparados no estado $|\beta_+\rangle$, de forma que as contagens assim registradas são proporcionais ao quadrado de um

dos coeficientes de Schmidt. O outro coeficiente é obtido se, em x_2 , $P_{\beta_+}^{(F)}(x_2, z_D) = 0$ e $P_{\beta_-}^{(F)}(x_2, z_D)$ é máximo. A condição necessária para que isso ocorra é

$$\frac{2\text{Re}(c_1 + c_2)}{1 + |c_1 + c_2|^2} = -\frac{2\text{Re}(c_1 - c_2)}{1 + |c_1 - c_2|^2}, \quad (\text{B.12})$$

o que acontece se $a_1 = a_2$ ($c_1 = 0$). Assim, a obtenção dos coeficientes de Schmidt diretamente dos padrões de interferência só é possível para os estados com elementos diagonais iguais. Para os casos onde isso não ocorre é necessário que outro método, ou medida de emaranhamento seja utilizada.

APÊNDICE C – Cálculos envolvendo o traço parcial e a distribuição de probabilidade marginal

Neste apêndice estão detalhados os cálculos referentes à operação de traço parcial sobre os estados bipartidos (Sec.C.1), e a demonstração de que o uso de um dos detectores para registrar, com a mesma probabilidade, todos os fótons que chegam em qualquer posição (*bulk*) na medição em coincidência é equivalente a essa operação (Sec.C.2).

C.1 Estado de um fóton à partir do traço parcial - exemplo no sistema i

Supondo um estado bipartido geral

$$\hat{\rho} = \sum_{l_i, m_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s, m_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \rho_{l_i l_s m_i m_s} |l_i l_s\rangle \langle m_i m_s|, \quad (\text{C.1})$$

o estado reduzido da parte s é dado pelo traço parcial sobre a parte i do sistema, de forma que

$$\begin{aligned} \hat{\rho}_s &= \text{Tr}_i(\hat{\rho}) \\ &= \sum_{l_i, m_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s, m_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \sum_{j_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \rho_{l_i l_s m_i m_s} \langle j_i | |l_i l_s\rangle \langle m_i m_s | |j_i\rangle \\ &= \sum_{l_i, m_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{l_s, m_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \sum_{j_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \rho_{l_i l_s m_i m_s} \langle j_i | |l_i l_s\rangle \langle m_i m_s | |j_i\rangle \\ &= \sum_{l_s, m_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \sum_{j_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \rho_{j_i l_s j_i m_s} |l_s\rangle \langle m_s|. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

No caso em que fótons gerados pela CPD são utilizados, os estados de fenda preparados são puros (Eq.(2.12)), de forma que

$$\rho_{l_i l_s m_i m_s} = \Phi_{in}(l_i d, l_s d, z_a) \Phi_{in}^*(m_i d, m_s d, z_a), \quad (\text{C.3})$$

resultando no estado de fenda

$$\hat{\rho}_s = \sum_{l_s, m_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \sum_{j_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \Phi_{in}(l_i d, l_s d, z_a) \Phi_{in}^*(m_i d, m_s d, z_a) |l_s\rangle \langle m_s|. \quad (\text{C.4})$$

C.2 O uso de um dos detectores como *bulk* (incapaz de identificar a posição do fóton detectado) corresponde a operação de traço parcial

Nas medições dos estados bipartidos, a distribuição de probabilidade conjunta é proporcional à taxa de contagem em coincidências registradas por detectores pontuais, de forma que

$$\begin{aligned}
 P(x_i, x_s, z_d) &\propto \sum_{m_i, l_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{m_s, l_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \langle l_i l_s | \hat{\rho} | m_i m_s \rangle \\
 &\times \langle m_i m_s | \hat{E}_i^{(-)}(x_i, z_d) \hat{E}_s^{(-)}(x_s, z_d) \hat{E}_i^{(+)}(x_i, z_d) \hat{E}_s^{(+)}(x_s, z_d) | l_i l_s \rangle. \quad (\text{C.5})
 \end{aligned}$$

O uso de um detector *bulk* implica em um registro não pontual dos fótons, isto é, a distribuição de probabilidade não é descrita em cada ponto ao longo de \hat{x} . O uso do detector d_i como *bulk*, por exemplo, produz uma distribuição de contagem em CNC matematicamente dada por

$$\begin{aligned}
 P(x_s, z_d) &\propto \int_{-\infty}^{\infty} P(x_i, x_s, z_d) dx_i \\
 P(x_s, z_d) &\propto \sum_{m_i, l_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{m_s, l_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \langle l_i l_s | \hat{\rho} | m_i m_s \rangle \times \\
 &\int_{-\infty}^{\infty} \left(\langle m_i m_s | E_i^{(-)}(x_i, z_d) E_s^{(-)}(x_s, z_d) E_i^{(+)}(x_i, z_d) E_s^{(+)}(x_s, z_d) | l_i l_s \rangle \right) dx_i \quad (\text{C.6})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P(x_s, z_d) &\propto \sum_{m_i, l_i = -\Lambda_i}^{\Lambda_i} \sum_{m_s, l_s = -\Lambda_s}^{\Lambda_s} \rho_{l_i l_s m_i m_s} \langle m_s | E_s^{(-)}(x_s, z_d) E_s^{(+)}(x_s, z_d) | l_s \rangle \times \\
 &\int_{-\infty}^{\infty} \left(\langle m_i | E_i^{(-)}(x_i, z_d) E_i^{(+)}(x_i, z_d) | l_i \rangle \right) dx_i. \quad (\text{C.7})
 \end{aligned}$$

Considerando os cálculos mostrados na Sec. A.2, podemos escrever a última integral na equação acima como

$$\begin{aligned}
 \int \langle m_i | E_i^{(-)}(x_i, z_d) E_i^{(+)}(x_i, z_d) | l_i \rangle dx_i &\propto \int \left[\int \int \prod \left(\frac{x_{a'} - ld}{2a} \right) \prod \left(\frac{x_a - ld}{2a} \right) e^{-i \frac{k}{2d_1} (x_{a'}^2 - x_a^2)} \times \right. \\
 &\left. \left(\int \int e^{i \frac{kb}{2} (x_i^2 - x_{l'}^2)} e^{i \frac{k}{d_1} (x_{a'} x_{l'} - x_a x_l)} e^{i \frac{kx_i}{d_2} (x_{l'} - x_l)} dx_{l'} dx_l \right) dx_a dx_{a'} \right] dx_i. \quad (\text{C.8})
 \end{aligned}$$

Integrando primeiramente em x_i , temos

$$\begin{aligned}
 \int \langle m_i | E_i^{(-)}(x_i, z_d) E_i^{(+)}(x_i, z_d) | l_i \rangle dx_i &\propto \int \int \prod \left(\frac{x_{a'} - ld}{2a} \right) \prod \left(\frac{x_a - ld}{2a} \right) e^{-i \frac{k}{2d_1} (x_{a'}^2 - x_a^2)} \times \\
 &\left[\int \int e^{i \frac{kb}{2} (x_i^2 - x_{l'}^2)} e^{i \frac{k}{d_1} (x_{a'} x_{l'} - x_a x_l)} \left(\int e^{i \frac{kx_i}{d_2} (x_{l'} - x_l)} dx_i \right) dx_{l'} dx_l \right] dx_a dx_{a'}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \propto \int \int \prod \left(\frac{x_{a'} - ld}{2a} \right) \prod \left(\frac{x_a - ld}{2a} \right) e^{-i\frac{k}{2d_1}(x_{a'}^2 - x_a^2)} \times \\ & \left[\int \int e^{i\frac{kb}{2}(x_l^2 - x_{l'}^2)} e^{i\frac{k}{d_1}(x_{a'}x_{l'} - x_ax_l)} \delta(x_{l'} - x_l) dx_{l'} dx_l \right] dx_a dx_{a'} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

$$\begin{aligned} & \propto \int \int \prod \left(\frac{x_{a'} - ld}{2a} \right) \prod \left(\frac{x_a - ld}{2a} \right) e^{-i\frac{k}{2d_1}(x_{a'}^2 - x_a^2)} \int e^{i\frac{k}{d_1}x_l(x_{a'} - x_a)} dx_l dx_a dx_{a'} \\ & \propto \int \int \prod \left(\frac{x_{a'} - ld}{2a} \right) \prod \left(\frac{x_a - ld}{2a} \right) e^{-i\frac{k}{2d_1}(x_{a'}^2 - x_a^2)} \delta(x_{a'} - x_a) dx_a dx_{a'} \\ & \propto \int \left(\prod \left(\frac{x_a - ld}{2a} \right) \right)^2 dx_a = cte. \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

Assim, as expressões mostradas na Eq.(C.8) resulta em um valor constante (proporcional a $1/(4a^2)$) e independente de qual seja o valor de b na Eq.(C.8). Substituindo o resultado da expressão acima na Eq.(C.6), mostramos que o uso de um detector *bulk* em uma das partes do estado equivale à realização da operação de traço parcial sobre a parte correspondente a este detector.