



**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINHAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS GRADUAÇÃO EM
ENGENHARIA MECÂNICA**

**TÉCNICAS DE CÁLCULO DE DERIVADAS PARA
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS APLICADO EM
ESTABILIDADE DE AERONAVES**

CHRISTIAN PRADO DOS SANTOS MACHADO

Belo Horizonte
Escola de Engenharia da UFMG
2022

CHRISTIAN PRADO DOS SANTOS MACHADO

**TÉCNICAS DE CÁLCULO DE DERIVADAS PARA
IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS APLICADO EM
ESTABILIDADE DE AERONAVES**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Mestre em Engenharia Mecânica

Orientador:

Prof. Dr. Dimas Abreu Archanjo Dutra

Belo Horizonte

Escola de Engenharia da UFMG

2022

M149t

Machado, Christian Prado dos Santos.

Técnicas de cálculo de derivadas para identificação de sistemas aplicado em estabilidade de aeronaves [recurso eletrônico] / Christian Prado dos Santos Machado. - 2022.

1 recurso online (73 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Dimas Abreu Archanjo Dutra.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Apêndices: f. 67-73.

Bibliografia: f. 64-66.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia mecânica - Teses. 2. Aeronaves - Teses. 3. Estabilidade - Teses. 4. Identificação de sistemas - Teses. 5. Otimização - Teses.
I. Dutra, Dimas Abreu. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

"TÉCNICAS DE CÁLCULO DE DERIVADAS PARA IDENTIFICAÇÃO DE SISTEMAS APLICADO EM ESTABILIDADE DE AERONAVES"

CHRISTIAN PRADO DOS SANTOS MACHADO

Dissertação submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Minas Gerais, constituída pelos Professores: Dr. Dimas Abreu Archanjo Dutra (Orientador – Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), Dr. Ricardo Poley Martins Ferreira (Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG) e Dr. Eduardo José Lima II (Departamento de Engenharia Mecânica/UFMG), como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "**Mestre em Engenharia Mecânica**", na área de concentração de "**Projeto e Sistemas**".

Dissertação aprovada no dia 20 de dezembro de 2022.



Documento assinado eletronicamente por **Dimas Abreu Archanjo Dutra, Professor do Magistério Superior**, em 06/01/2023, às 00:35, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Poley Martins Ferreira, Professor do Magistério Superior**, em 16/01/2023, às 16:27, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Eduardo Jose Lima II, Professor do Magistério Superior**, em 17/01/2023, às 12:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1993997** e o código CRC **0B9CD864**.

À toda minha família.

Agradecimentos

Agradeço primeiramente à toda minha família por acreditar em mim e dar suporte, em especial aos meus pais que, mesmo passando boa parte do tempo a distância foram sempre presentes, com todo amor e companheirismo. Também agradeço aos meus avós e tias por sua dedicação, por todo o sacrifício que fizeram para que eu pudesse ter uma permanência tranquila e confortável durante essa jornada.

Ao meu orientador Prof. Dimas Dutra por sua paciência gigantesca e habilidade ímpar em ensinar, tanto presencialmente quanto à distância, por sua dedicação durante esses anos e por sempre me motivar, se tornando além de professor, um exemplo de pessoa pra mim.

Ao prof. Danilo Azevedo que além de todo o conhecimento compartilhado também é um grande amigo e incentivador, sempre com olhar atento e preciso em suas colocações, um engenheiro excepcional que uso como espelho.

À Universidade Federal de Minas Gerais pela oportunidade de realizar o mestrado em Engenharia Mecânica em suas dependências, com toda estrutura necessária sempre a disposição e professores capacitados. Agradecimento especial aos professores do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica - PPGMEC - UFMG, por toda dedicação e colaboração em minha formação.

Ao **CNPq** pela bolsa concedida.

Aos meus amigos, principalmente os que conquistei na Equipe Delta do Piauí Aerodesign, em especial ao Valdson Prado por todos os anos de amizade desde a graduação e presencialmente parte do mestrado, sempre incentivando e mostrando como ser um pesquisador em uma cidade distante. Também ao Juan do Vale por todas as conversas sobre a vida, o universo e tudo mais. Aos amigos e colegas que conheci no CEA-UFMG, agradeço pelos dias de voo do aerodesign e as conversas sempre descontraídas e cheias de conhecimento. Agradeço também a todos os meus amigos que de certa forma contribuíram com a conclusão deste mestrado.

Resumo

O processo de construir um modelo matemático a partir de dados disponíveis de um sistema dinâmico e poder inferir sobre o sistema real é conhecido dentro da área de controle como *Identificação de Sistemas*. Técnicas de identificação de sistemas são utilizadas extensivamente para obtenção de modelos de aeronaves a partir de ensaios em voo para desenvolvimento de simuladores e sistemas de controle. Essas mesmas técnicas podem ser aplicadas em outras áreas, também, como por exemplo ajuste de curva, aprendizado de máquina, estatística, economia, mineração de dados, e redes neurais. Diversas técnicas de identificação são baseadas na minimização iterativa de funções de custo e, para tal, utilizam informação de derivadas. O cálculo de derivadas para modelos com um grande número de parâmetros, estados, e medições, utilizando uma grande quantidade de dados, é um desafio que dificulta a aplicação dessas técnicas em problemas na fronteira do conhecimento. O presente trabalho visa fazer um levantamento das principais técnicas de cálculo de derivadas para identificação de sistemas, mostrar sua aplicação nas principais funções de custo utilizadas, e estudar sua consequência em problemas desafiadores. São abordados os métodos numéricos de diferenças finitas por passo a frente, central e complexo, além de técnicas de diferenciação algorítmica de modo direto, modo reverso, e diferenciação simbólica. Essas técnicas são aplicadas no método de erro de saída para identificação de modelos longitudinais e látero-direcionais de aeronaves, cujas representações matemáticas também serão descritas. Conforme esperado, os métodos derivativos apresentam forte influência sobre o tempo de execução, principalmente quando a quantidade de parâmetros é extensa.

Palavras-chave: Identificação de sistemas, otimização, diferenciação, ensaio em voo.

Abstract

The process of building a mathematical model from available data of a dynamic system and being able to infer about the real system is known within the control area as *Systems Identification*. Systems identification techniques are used extensively to obtain aircraft models from flight tests for the development of simulators and control systems. These same techniques can be applied in other areas, too, such as curve fitting, machine learning, statistics, economics, data mining, and neural networks. Several identification techniques are based on the iterative minimization of cost functions and, for that, use information from derivatives. The calculation of derivatives for models with a large number of parameters, states, and measurements, using a large amount of data, is a challenge that hinders the application of these techniques in problems at the frontier of knowledge. The present work aims to survey the main derivative calculation techniques for system identification, show their application in the cost functions used, and study their consequences in challenging problems. Numerical methods of finite differences by step forward, central and complex are discussed, as well as algorithmic differentiation techniques in direct mode, reverse mode and symbolic differentiation. These techniques are applied in the output error method for identifying longitudinal and lateral-directional models of aircraft, whose mathematical representations will also be described. As expected, derivative methods have a strong influence on execution time, especially when the number of parameters is large.

Keywords: Identification, differentiation, flight test.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Eixos do corpo da aeronave e inercial. Adaptado de (SCHMIDT, 1998, Cap. 1) - Aeronave: AZ-X02 – Danilo Azevedo.	21
Figura 2 – Diagrama do método de erro de saída. Adaptado de (JATEGAONKAR, 2015, Figura 4.1)	39
Figura 3 – Diagrama do método de erro de equação. Adaptado de (JATEGAONKAR, 2015, Figura 6.1)	40
Figura 4 – Diagrama do método de erro de filtro. Adaptado de (JATEGAONKAR, 2015, Figura 5.1)	43
Figura 5 – Grafo computacional da avaliação da função	50
Figura 6 – Diagrama computacional da avaliação da derivada modo direto	52
Figura 7 – Grafo computacional da avaliação da derivada modo reverso	53
Figura 8 – Erro absoluto <i>epsilon</i> pelo tamanho do passo de diferenciação	62
Figura 9 – Comparando saída do modelo período curto para angulo de ataque com os dados disponíveis.	68
Figura 10 – Comparando saída do modelo período curto para velocidade de arfagem com os dados disponíveis.	69
Figura 11 – Comparando saída do modelo latero-direcional para aceleração lateral com os dados disponíveis.	70
Figura 12 – Comparando saída do modelo latero-direcional para velocidade de rolamento com os dados disponíveis.	71
Figura 13 – Comparando saída do modelo latero-direcional para velocidade de guinada com os dados disponíveis.	72

Lista de tabelas

Tabela 1 – Linearização das derivadas direcionais das forças	29
Tabela 2 – Linearização das derivadas direcionais dos momentos	29
Tabela 3 – Funções intermediárias de $f(x)$	50
Tabela 4 – Passos para obtenção da derivada direta	51
Tabela 5 – Traço da derivada direta	51
Tabela 6 – Passos para obtenção da derivada reversa	52
Tabela 7 – Traço da função	53
Tabela 8 – Traço do gradiente reverso da Tabela 7	53
Tabela 9 – Custo computacional derivada direta.	59
Tabela 10 – Custo computacional derivada reversa.	59
Tabela 11 – Tabela comparativa entre os Métodos Direto e Reverso no OEM.	59
Tabela 12 – Composição dos modelos	60
Tabela 13 – Tabela comparativa - Aplicação em termos de complexidade.	60
Tabela 14 – Média de tempos para diferenças finitas em segundos - Longitudinal	60
Tabela 15 – Média de tempos para método direto e reverso em segundos - Longitudinal	60
Tabela 16 – Média de tempos para diferenças finitas em segundos - Latero direcional	61
Tabela 17 – Média de tempos para método direto e reverso em segundos - Latero direcional	61

Lista de abreviaturas e siglas

ABNT	Associação Brasileira de Normas Técnicas
AD	Derivação Automática (do inglês <i>Automatic Differentiation</i>)
ATTAS	Advanced Technologies Testing Aircraft System
CEA	Centro de Estudos Aeronáuticos - UFMG
CNPq	Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico
EEM	método de erro de equação (do inglês <i>Equation Error Method</i>)
FEM	método do erro de filtro (do inglês <i>Filter Error Method</i>)
NED	Norte, leste e para baixo (do inglês <i>North East Down</i>)
OEM	método de erro de saída (do inglês <i>Output Error Method</i>)
PDF	função densidade de probabilidade (do inglês <i>Probability Density Function</i>)
Quad-M	Manobra, medição, método e modelo (do inglês <i>Maneuver, Measurements, Methods and Models</i>)
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais

Lista de símbolos

α	ângulo de ataque
β	ângulo de deriva
\bar{c}	corda média aerodinâmica
$C_{()}$	coeficientes adimensionais
δ_e, δ_a e δ_r	deflexão profundor, aileron e leme.
ε	resíduos
$f[]$	funções de estado
F_{ext}	somatório de forças externas ao corpo
f_{Ax}, f_{Ay}, f_{Az}	coeficientes da força aerodinâmica
$g[]$	funções de observação
g	vetor gravitacional
CG	centro gravitacional
$v(t_k)$	ruído
M	número de Mach
M	massa da aeronave
$I_{()}$	matrizes de inércia
J	função custo
K	matriz de ganho
$\mathbf{L}, \mathbf{M}, \mathbf{N}$	componentes do vetor de momento no CG
l_A, m_A, n_A	coeficientes do vetor de momento aerodinâmico
\dot{p}	variação temporal do momento linear
\dot{h}	variação temporal do momento angular
M_{ext}	somatório de momentos externos ao corpo

u, v, w	componentes da velocidade linear
p, q, r	componentes do vetor de velocidade angular
\bar{q}	pressão dinâmica
R	matriz de covariância do ruído
T	vetor de tração
T_ψ, T_θ, T_ϕ	matrizes de transformação
ψ, θ e ϕ	ângulos de Euler
η_p	eficiência da hélice
$y(t)$	função saída
$\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$	componentes da força no CG
\mathbf{v}_T	velocidade relativa ao ar da aeronave
$\mathbf{X}^e, \mathbf{Y}^e, \mathbf{Z}^e$	sistema de coordenadas na terra
$\mathbf{x}^b, \mathbf{y}^b, \mathbf{z}^b$	sistema de coordenadas no corpo
$z(t)$	medidas do sistema real
$Z(\cdot)$	coeficientes das derivadas adimensionais no eixo z da aeronave

Sumário

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Motivação	19
1.2	Objetivos	19
2	DINÂMICA DE VOO	20
2.1	Sistema de coordenadas	20
2.1.1	Ângulos de Euler e atitude da aeronave	22
2.1.2	Mudança de coordenadas	22
2.2	Forças e Momentos	24
2.2.1	Forças e Momentos Aerodinâmicas	25
2.2.2	Forças e Momentos Propulsivos	27
2.2.3	Forças Gravitacionais	28
2.3	Modelo	28
2.3.1	Desacoplando as equações	29
2.3.2	Movimento Longitudinal	30
2.3.2.1	Modelo Período Curto	31
2.3.2.2	Modelo Fugóide	31
2.3.3	Movimento Latero-direcional	32
2.3.3.1	Modelo latero-direcional	33
3	MÉTODOS E IDENTIFICAÇÃO	34
3.1	Princípio da Máxima Verossimilhança	34
3.2	Métodos de erro de saída	36
3.3	Método do Erro de Equação	40
3.4	Método do Erro de Filtro	42
4	DERIVADAS	45
4.1	Diferenças finitas	45
4.1.1	Passo a Frente	46
4.1.2	Diferença Central	47
4.1.3	Passo Complexo	48
4.2	Diferenciação Algorítmica e Modos de Cálculo de Derivadas	49
4.2.1	Modo Direto	51
4.2.2	Modo Reverso	52
4.3	Modo Direto e Reverso no Método de Erro de Saída	54
4.3.1	Comparação entre os Métodos	57

5	CONCLUSÕES	63
5.1	Sugestões para trabalhos futuros	63
	REFERÊNCIAS	64
	APÊNDICE A – SAÍDA DOS MODELOS	67
	APÊNDICE B – CÓDIGO-FONTE	73

1 Introdução

Existem diversas metodologias para condução de um projeto aeronáutico, várias técnicas e métodos podem ser empregadas, a exemplo de Raymer (2018) e Barros, Pinto e Oliveira (2000). O problema inicial parte dos requisitos de projeto que devem ser atendidos e, desta forma, estimulam o uso de quaisquer ferramentas disponíveis para o ponta-pé inicial e avanço do projeto. Os parâmetros da aeronave são calculados de forma a contemplar limites estruturais, manobrabilidade, missão principal a ser executada, ergonomia e conforto dos pilotos (quando houver tripulantes), carga e forças durante a pilotagem, velocidades e muitos outros fatores, que são baseados nos requisitos do projeto e limitações técnicas e regulamentares. Comparações com aeronaves de propósito semelhante ao do projeto são feitas através de tabela comparativa a fim de se obter estimativas iniciais dos parâmetros mais gerais, pelo menos em ordem de grandeza. Em determinado momento é preciso verificar se as previsões e cálculos estão dentro da faixa esperada ou dentro da tolerância estabelecida. Embora seja uma metodologia consistente e econômica para manejo preliminar dos requisitos, até esta etapa somente verificações teóricas foram realizadas, logo uma confirmação mais exata seria o próximo passo, uma confirmação mais objetiva. Com a construção de partes da aeronave ou, em alguns casos, da aeronave completa é possível executar testes e ensaios e fazer a identificação do sistema, que utiliza métodos de captura e análise de dados permitindo a comparação dos valores dessa identificação com os dados previstos nas fases teóricas do projeto, o que traduz-se em análises diretas dos valores de entrada, saída e modificações dos modelos dinâmicos implementados. Dessa forma, podemos inferir se o projeto se comporta no mundo real tal qual esperado na teoria (TISCHLER, 1996, Cap. 1).

Modelos dinâmicos são representações baseadas nas principais interações das variáveis de um sistema. Tais modelos variam em complexidade e podem ser tão abstratos quanto modelos mentais, utilizados para se executar uma tarefa simples, pensar, raciocínio e agrupar padrões, mas também existem formas mais metódicas e complexas, ao custo de um maior formalismo matemático. Ao longo do tempo foram desenvolvidas algumas técnicas e procedimentos que facilitam a obtenção de alguns modelos através de representações gráficas, chamados de (*Modelos Gráficos*), largamente utilizados para que uma ou mais características possam ser observadas claramente, desde que os dados estejam escalonados adequadamente. Outros sistemas são mais complexos, desta forma é necessário uma abordagem mais abstrata, assim os *Modelos Matemáticos* (ou analíticos) são utilizados e podem ser ajustados conforme as especificidades de cada sistema. Tais modelos podem ser tão extensos e intrincados que programas de computador precisam ser desenvolvidos para auxiliar os cálculos e efetuar as inter-relações entre suas variáveis (LJUNG et al., 1987, Cap. 17) (JATEGAONKAR, 2015) (AGUIRRE, 2004, Cap. 1).

Na identificação de sistemas utilizamos os dados disponíveis para podermos inferir sobre os parâmetros de um modelo, dessa forma comparamos tais valores e passamos a ter um

entendimento bastante acurado sobre o sistema do qual os dados foram retirados. De maneira geral, sistemas reais são muito complexos, mesmo os mais simples envolvem variáveis que podem ter passado despercebidas no processo de construção do modelo matemático ou podem ser tão inconsistentes ou ruidosas que seria virtualmente impossível o tratamento individual dos seus parâmetros com a exatidão adequada (JATEGAONKAR, 2015, Cap. 1). Para limitar o que significado de um 'bom modelo' podemos dizer que é aquele que consegue descrever o processo com uma complexidade matemática desejada, mantendo-o o mais simples possível. Esse entendimento vem sendo aplicado desde a antiguidade em diversas áreas de estudo Maurer (1978) e no caso específico dos modelos matemáticos serve para delimitar o tamanho e complexidade dos modelos. Para análise dos sistemas dinâmicos descritos no espaço de estados podemos distinguir três tipos de valores: a entrada, a saída e as funções do sistema. As entradas são os valores que o operador insere para controlar ou ajustar o sistema. A resposta do sistema é chamada de saída, e são coletados dados referente a essa saída com mecanismos de medição e transformados em dados utilizáveis. As funções do sistema são os modelos referidos anteriormente que representam o sistema real. Durante o processo de identificação existem parâmetros que são inicialmente desconhecidos e são responsáveis pelas características da resposta do sistema. Comparando o modelo proposto com dados disponíveis do sistema real, as técnicas de identificação de sistema permitem maior aproximação entre as informações previstas e as obtidas experimentalmente. Esta tarefa pode se mostrar árdua e frequentemente pode apresentar pouca ou nenhuma vantagem em termos de custos de cálculo e modelagem para com a exatidão esperada dos resultados. Para aumentar as chances da convergência a um custo-benefício adequado no processo de identificação, duas premissas fazem-se imprescindíveis, a de que o processo pode ser dinamicamente modelado e a de que é possível realizar comparações experimentais para validação da modelagem. Como base de qualquer identificação de sistema as saídas do sistema real precisam estar disponíveis para análise antes da comparação com os valores fornecidos pelo modelo (JATEGAONKAR, 2015, Cap. 1). Mesmo em identificação em 'tempo real' capazes de fornecer a resposta do sistema de forma 'instantânea', a execução acontece sempre seguindo a ordem programada sob as premissas e trabalhando de forma ordenada com os dados disponíveis, mesmo que execute o sistema em velocidade de máquina.

De uma perspectiva histórica, no começo do século XX o desenvolvimento de aeronaves tornava esses dispositivos cada vez mais capazes, confiáveis e rápidos. A necessidade de se conhecer os parâmetros e características de voo já se mostrava importante e os primeiros trabalhos de identificar tais sistemas se remetem aos anos 1911 e 1919 nos trabalhos de Bryan (1911) e Glauert (1919) quando estimaram algumas derivadas com uso da manobra fugóide. Outros autores também contribuíram para a melhoria da identificação, com trabalhos que remetem aos movimentos oscilatórios por Jr (1947), introdução de pulsos nos comandos e análise de Fourier Jr, Blasingame e Clementson (1950) e o método dos mínimos quadrados ponderados por Shinbrot (1951). Mesmo com avanços consideráveis à época, ainda se utilizava de métodos gráficos com vetores variantes no tempo, diagrama de Bode, Nyquist e resposta ao degrau, limitando a

estimação a poucos coeficientes. A captura dos dados era demasiadamente laboriosa, exigindo bastante habilidade manual do operador, e demorada, limitando a quantidade de iterações experimentais. Com as técnicas de identificação de sistemas baseadas no controle do modelo, alguns métodos de ajuste de curva foram desenvolvidos já nas décadas de 1960, já com auxílio dos computadores analógicos, que eram empregados em testes de túneis de vento para predição de parâmetros de estabilidade. Gravadores de voo eram utilizados mesmo com pouca capacidade de filtrar ruído e de calibração extremamente difícil, logo necessitavam de um número alto de repetições de ensaios e, apesar da melhoria em relação aos sistemas manuais anteriores, apresentavam limitação na quantidade de dados armazenados (HAMEL; JATEGAONKAR, 1996). Com a representação no espaço de estados desenvolvidos por Kalman ainda na década de 1960 foi dado o pontapé para estudos baseados em otimização, filtragem e controle ótimo de dados que em conjunto com as contribuições de Åström e Torsten (1965) é considerado o início da era moderna da identificação. Os trabalhos de Åström e Bohlin utilizavam as técnicas de máxima verossimilhança, com grande influência na comunidade científica e sendo considerado a centelha dos estudos dos métodos de erro de predição. Em 1970 Box e Jenkins publicaram o livro *"Time serie analysis, forecasting and control"* com um conjunto de aplicações de tais técnicas, utilizado como base em muitos estudos subsequentes. Apesar do grande uso dos métodos de predição, os sistemas eram considerados 'reais' e o modelo tendia a ser uma representação do melhor cenário possível de um sistema real, levando a dificuldades de convergência em encontrar os 'valores reais' dos parâmetros. Os artigos publicados por Ljung, Anderson et al e Ljung e Caines entre os anos de 1976 e 1979 sugeriam uma mudança de visão nos processos de identificação, negociando a busca pelo sistema real por uma melhor aproximação do mesmo, na qual o erro do modelo possuía papel central. Dessa forma, as funções de transferência que governam o sistema tem maior importância, deixando para os valores dos parâmetros um papel secundário na identificação. Essa visão possibilitou uma maior flexibilidade durante a identificação, com os pesquisadores e engenheiros trabalhando com quantos parâmetros fossem necessários, tornando o processo de identificação não mais uma etapa de verificação de projeto, mas também parte do projeto inicial. Com a publicação do livro *"System identification: Theory for the user"* no ano de 1987, Ljung consolidou a base da identificação de sistemas como parte separada das áreas de estatística e análise de séries temporais, mostrando que as técnicas propostas além de explicar um conjunto de dados, tinham o poder de projetar e construir um modelo desejado. Com isso novas possibilidades surgiram a partir da década de 1990 como, por exemplo, controle robusto, identificação no domínio da frequência, sistemas de malha fechada, entre outros (GEVERS et al., 2006).

A modelagem matemática de sistemas mais elaborados, tal qual aeronaves, pode ser realizada em função de diversas equações conhecidas e que são apresentadas de maneiras distintas. Essa modelagem está em constante evolução devido a novos materiais, técnicas de fabricação, etc. As características geométricas influenciam diretamente o comportamento aerodinâmico que por sua vez associado às características inerciais, gravitacionais e propulsivas determinam a

resposta de estabilidade e controle da aeronave. Entretanto, as equações possuem muitos efeitos sobrepostos, ocorrendo variados acoplamento entre as variáveis, sejam elas forças, momentos, comandos, atitudes ou acelerações. Enquanto na fase de projeto muitas comparações são feitas, durante a fase de testes, em específico na identificação do sistema, essas equações e parâmetros devem ser estimados conforme os modelos para cada situação de voo. Como existem inúmeras situações de voo, o compromisso entre a precisão exigida e os recursos disponíveis pode tornar a identificação uma tarefa limitante. Oportunamente, é sabido que cinco modelos dinâmicos (fugóide, período curto, *Dutch-Roll*, rolamento puro e espiral) são típicos em aeronaves e, desta forma, costuma-se focar a identificação apenas nestes modelos, generalizando o conhecimento sobre a aeronave e avaliando se tal aeronave foi caracterizada de maneira satisfatória (PAMADI, 2004, Cap. 6). Esses modelos foram selecionados de forma que uma resposta específica é esperada da aeronave, ou seja, a aplicação de uma entrada específica excita uma faixa específica de frequência durante a resposta do sistema. As relações longitudinais da aeronave podem ser mais bem caracterizadas com as manobras fugóide e período curto, que conseguem excitar os dois principais modos através da variação da velocidade e do ângulo de ataque, fornecendo informações sobre a capacidade de manter e voltar ao voo nivelado da aeronave em termos de atitude e altitude. A manobra de rolamento puro estão relacionadas a manobrabilidade lateral, fornecendo informações sobre o quão rapidamente a aeronave responde sobre comandos ou forças laterais. Dutch-roll, conhecido como Rolamento Holandês, está relacionado com características oscilatórias de movimentos laterais acoplados com direcionais principalmente através do ângulo de derrapagem. O modo espiral é tipicamente muito amortecido, tendo pouca influência nas características de voo devido a sua longa duração e está relacionada com o ângulo de rolagem da aeronave em um longo período de tempo quando comparado as manobras anteriores. Todas estas manobras foram selecionadas de forma que fosse possível observar claramente os modos, padronizando a comparação entre aeronaves e fornecer uma noção bastante acurada das características de voo. Os modos citados são resultado da linearização das equações de movimento (MCLEAN, 1982, Sec. 2.1) (SCHMIDT, 1998, Cap. 3) (JATEGAONKAR, 2015, Sec. 2.2.1) que serão vistas em detalhes mais adiante.

Os métodos mais atuais tem uma abordagem bastante sistemática, aproveitando-se da evolução dos computadores e sensores que permitiram um aumento considerável na captura dos dados, fazendo com que mais parâmetros pudessem ser estimados. Isso gerou mudança de foco nas estimações, que deixaram de ser analisadas no domínio da frequência para modelos não-lineares e passaram a ser observadas no apenas no domínio do tempo e o método da máxima verossimilhança é tido como principal marco nesse contexto (JATEGAONKAR, 2015, Sec. 1.7). Com isso, a forma com que os os dados são coletados e analisados naturalmente evoluiu para a identificação de sistemas em aeronaves como conhecemos hoje, com a adoção de um pragmatismo que pode ser resumido no que é chamado de **Quad-M** (HAMEL; JATEGAONKAR, 1996), Manobra, Medição, Método (de estimação) e Modelo (em inglês *Maneuver, Measurements, Methods and Models*) onde o aspecto científico pôde ser mais bem abordado. Com isso, a pesquisa

e desenvolvimento de entradas mais restritas aos modos requeridos por cada método, a qualidade dos dados coletados e o ajuste de modelos genéricos para modelos mais específicos dependendo do tipo de aeronave estudada ajudou a otimizar os projetos de aeronaves (JATEGAONKAR, 2015, Sec. 1.7).

1.1 Motivação

Dentre os métodos de identificação mais utilizados em aeronaves o método de erro na saída (*Output-error Method*, OEM) se destaca. Entre as mais diversas vantagens, podemos destacar sua relativa robustez que, apesar de um relativo alto custo computacional, é o mais simples em sua classe e possui capacidade de lidar com ruídos e vieses. (JATEGAONKAR, 2015, Cap. 4). Apesar da já citada a robustez inerente ao método, o cálculo das derivadas podem se mostra dificuldade limitante, devido a dificuldade de processar os dados durante a análise do modelo e o elevado custo computacional de tais ferramentas, que podem se mostrar bastante desafiadoras durante o processo de encontrar os mínimos, convergência dos coeficientes do modelo e dificuldade de implementação em código. Logo, este trabalho apresenta algumas abordagens para o cálculo de tais derivadas e visa comparar seus benefícios e desafios.

1.2 Objetivos

O objetivo principal deste trabalho é estudar e expor as características do método de erro de saída associado aos cálculos de derivação algorítmica. Diversos testes e aplicações desse método já foram feitas e comprovam sua eficácia (MAINE; ILIFF, 1986, Cap. 11).

Como objetivo específico, serão analisadas as derivadas reversa e direta, tratadas como analíticas, bem como a comparação dessas com os métodos de diferenças finitas. O presente trabalho propõe uma abordagem diferente de calcular a derivada dos valores dentro do OEM, onde utiliza-se a 'derivada reversa' (*Reverse Mode* ou *Adjoint Mode*) (GRIEWANK; WALTHER, 2008), que toma o caminho reverso de uma derivada comum, partindo da variável de saída e 'voltando' com o cálculo da derivada em relação ao parâmetro de entrada. Esse procedimento embora pareça ineficiente em um primeiro momento, resume o processo à uma variável dependente em cada cálculo de derivada. Dessa forma, se a aplicação possuir mais entradas do que saídas espera-se evidenciar a vantagem de diminuir a quantidade de cálculos, fazendo apenas os passos necessários com relação ao parâmetro de interesse.

2 Dinâmica de voo

Durante o voo uma aeronave apresenta um comportamento característico e sua dinâmica pode ser dividida em vários aspectos como desempenho, estabilidade e controle (SCHMIDT, 1998, Cap. 1), dos quais as forças e momentos podem ser avaliados e agrupados em quatro grandes grupos: aerodinâmicos, inercial, gravitacional e de propulsão. Apresentamos neste capítulo uma breve introdução sobre as equações de movimento que resultam nos modelos dinâmicos utilizados. Vamos considerar a massa e a inércia do corpo, as forças aerodinâmicas e efeitos de amortecimento e, além disso, uma breve introdução sobre a dinâmica aeroelástica.

Com a junção dos estudos de (BRYAN, 1911) e de (LANCHESTER, 1910) iniciados ainda no século XX, formou-se a base teórica das análises e modelagens do que hoje é conhecido como dinâmica de voo, introduzindo assuntos relacionados à estabilidade, controle e equações de movimento. Estabilidade e controle estão relacionados à dinâmica do voo, que nesse caso é caracterizada pela presença de seis graus de liberdade (três rotacionais e três translacionais) para corpos rígidos e mais alguns para corpos tidos como elásticos. Para facilitação do processo de modelagem em compromisso com a certeza dos resultados, algumas premissas são assumidas: o corpo é um meio contínuo e sua massa não varia com o tempo; inicialmente desconsidera-se sua elasticidade, ou seja, seu tensor de inércia é constante; a terra tem a superfície plana, sem curvatura e; o movimento relativo da aeronave ocorre a partir de pequenas amplitudes em relação ao referencial inercial. Tais considerações permitem a linearização das equações de movimento que, em conjunto com a simetria da aeronave, possibilita decompô-las em um conjunto de equações para movimento longitudinal e outro conjunto de para latero-direcional (SCHMIDT, 1998).

2.1 Sistema de coordenadas

Como requisito básico para descrever o movimento de uma aeronave alguns sistemas de referências precisam ser criados, permitindo inferir sobre as grandezas vetoriais inerentes. Assumimos que a aeronave se encontra nas regiões da atmosfera próxima à superfície da terra. Para as análises neste trabalho, um dos sistemas utilizados será de coordenadas tridimensionais ortogonais, cuja origem é fixada em algum ponto de interesse da superfície terrestre, sob a hipótese de terra plana, que será utilizado como referencial inercial. Seus eixos \mathbf{x}^e , \mathbf{y}^e e \mathbf{z}^e alinhados com o norte, leste e para baixo (na direção do centro do planeta) respectivamente serão designados pelo sobrescrito ^e (do inglês *earth*). Para a aeronave será utilizado os eixos do corpo, fixo em rotação e translação a fuselagem da aeronave e sendo sua origem localizada no centro de gravidade (CG) da mesma, com o eixo \mathbf{x}^b paralelo ao comprimento da aeronave e com sentido positivo para a proa, o eixo \mathbf{y}^b paralelo ao comprimento das asas com sentido positivo para a asa direita e o eixo

\mathbf{z}^b normal ao plano x-y, apontando para baixo (SCHMIDT, 1998, Sec. 1.2.1). Os eixos do corpo serão usados com sobrescrito b (do inglês *body*). Para mais sistemas de eixos e coordenadas recomendamos consultar (PAMADI, 2004, Sec. 4.2). Observe que com a definição dos eixos referenciais na terra e um sistema de eixos no corpo da aeronave, podemos utilizar um sistema vetorial para representar as forças, momentos, velocidades e acelerações da aeronave em qualquer outro sistema de coordenada, bem como a posição relativa da aeronave e de qualquer elemento de massa, desde que o referencial inercial seja mantido em cada manobra. Note também que quantidades vetoriais estão representadas por letras em negrito.

As forças consideradas no equacionamento são denotadas pelas letras \mathbf{X} , \mathbf{Y} e \mathbf{Z} e tem seus eixos e valores positivos coincidentes com os eixos \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} do corpo da aeronave respectivamente. O momento agindo na aeronave será decomposto em \mathbf{L} , \mathbf{M} e \mathbf{N} , chamados de rolagem, arfagem e guinada respectivamente, e coincidem com os eixos \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} da aeronave. A velocidade será denotada por \mathbf{V} e, assim como forças e momento, será decomposta, sendo \mathbf{u} , \mathbf{v} e \mathbf{w} a representação das velocidades nos eixos \mathbf{x} , \mathbf{y} e \mathbf{z} da aeronave respectivamente. As velocidades angulares são representadas por p , q e r , também nos respectivos eixos da aeronave. Observe a Figura 1.

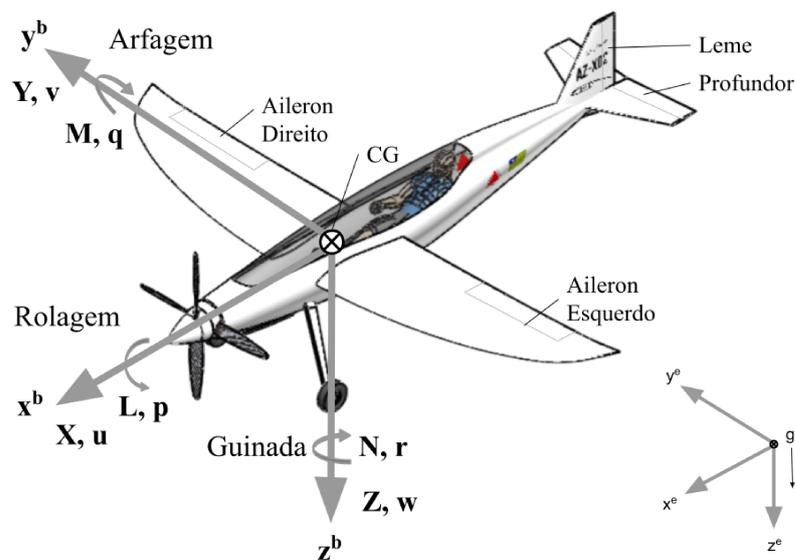


Figura 1 – Eixos do corpo da aeronave e inercial. Adaptado de (SCHMIDT, 1998, Cap. 1) - Aeronave: AZ-X02 – Danilo Azevedo.

Note que todos os eixos seguem a convenção da mão direita. Na Figura 1 temos a indicação das superfícies de comando primárias, onde os ailerons são os principais responsáveis pelo movimento de rolamento da aeronave, o profundor pelo de arfagem e o leme, guinada. A deflexão executada por essas superfícies de comando são descritas como sendo δ_a , δ_e e δ_r , subscrito tirado do inglês *aileron*, *elevator* e *rudder*. Tanto leme quanto profundor estão localizados na cauda do avião, que em conjunto com os estabilizadores verticais e horizontais formam as estruturas chamada de empenagem vertical e empenagem horizontal, respectivamente. A maioria das aeronaves possui configuração similar à apresentada na figura, mas as posições, proporções e número de superfícies de comando e estabilizadores podem variar de acordo com a aeronave.

Para mais detalhes verificar (RAYMER, 2018, Seç.4.5.2).

O movimento relativo entre aeronave e o ar influencia as forças aerodinâmicas e propulsivas responsáveis pelo voo, no qual a velocidade relativa \mathbf{v}_{rel} é definida pela diferença entre a velocidade da aeronave $\mathbf{v}_{CG/e}$ em relação à terra e a velocidade do vento em relação à terra $\mathbf{v}_{w/e}$. Lembrando que na aeronave o centro de gravidade (CG) é dado como ponto de referencia.

$$\mathbf{v}_{rel} = \mathbf{v}_{CG/e} - \mathbf{v}_{w/e}.$$

Os parâmetros relacionados a velocidade da aeronave em relação ao ar são sua direção, definido como $\mathbf{v}_{rel} \triangleq [u' \ v' \ w']^T$, seu módulo $v_T \triangleq |\mathbf{v}_{rel}|$, ângulo de ataque $\alpha \triangleq \arctan(w'/u')$ e ângulo de derrapagem $\beta \triangleq \arctan(v'/u')$.

2.1.1 Ângulos de Euler e atitude da aeronave

Para descrever uma movimentação entre uma posição (\mathbf{x}^1 , \mathbf{y}^1 e \mathbf{z}^1) e outra qualquer (\mathbf{x}^2 , \mathbf{y}^2 e \mathbf{z}^2), uma rotação em cada eixo é feita para que um sistema de coordenada coincida com outro, fazendo a posição inicial coincidir com a final. É utilizado um sistema de coordenadas inercial para obter uma descrição completa da posição da aeronaves, com os ângulos ψ , θ e ϕ associados a uma rotação em torno dos eixos \mathbf{z}^e , \mathbf{y}^e e \mathbf{x}^e respectivamente. Essa descrição informa a atual posição da aeronave em relação ao sistemas de coordenadas na superfície da terra, ou seja, uma referencia do corpo da aeronave em relação ao Norte-Leste-Baixo (North-East-Down, NED), onde obtemos a posição \mathbf{x}' , \mathbf{y}' e \mathbf{z}' .

As rotações em relação aos eixos são definidos de tal forma que ϕ em \mathbf{x}^e é chamado de ângulo de rolagem (*roll angle*), θ em \mathbf{y}^e de ângulo de arfagem (*pitch angle*) e ψ em \mathbf{z}^e , ângulo de guinada (*yaw angle*). Os ângulos ϕ , θ e ψ são chamados de Ângulos de Euler e a posição do corpo em relação a Terra é chamada de atitude - da aeronave.

2.1.2 Mudança de coordenadas

Para a mudança de representação entre um sistema de coordenadas e outro são utilizadas matrizes de rotação. A mudança de um vetor \mathbf{x} qualquer de um sistema i para um sistema j é representada com a notação

$$\mathbf{x}^j = \mathbf{C}_{j/i} \mathbf{x}^i$$

onde $\mathbf{C}_{j/i}$ é a matriz de rotação (transformação) entre os sistemas i para um sistema j . Para mudar a representação de uma aeronave das coordenadas em relação à terra (\mathbf{X}' , \mathbf{Y}' , \mathbf{Z}') para (\mathbf{X}_1 , \mathbf{Y}_1 , \mathbf{Z}_1) que estão no sistema de coordenadas do corpo da aeronave, é convencionalizado realizar uma rotação em cada eixo seguindo a ordem:

1. guinada, representada pela matriz de transformação \mathbf{T}_ψ ;

2. arfagem, representada pela matriz de transformação \mathbf{T}_θ ;
3. rolagem, representada pela matriz de transformação \mathbf{T}_ϕ ;

que em notação matricial fica

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}' \\ \mathbf{Y}' \\ \mathbf{Z}' \end{bmatrix} = \mathbf{T}_\phi \mathbf{T}_\theta \mathbf{T}_\psi \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Z}_1 \end{bmatrix},$$

onde

$$\mathbf{T}_\phi = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{T}_\psi = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

As velocidades angulares ω do corpo em relação à terra, que são as derivadas temporais das posições angulares são determinadas de acordo com a seguinte transformação

$$\omega = \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}_\phi \left(\begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathbf{T}_\theta \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \sin \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

Com a inversão da matriz na Equação (2.1) temos

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \dot{\theta} \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \tan \theta \sin \phi & \tan \theta \cos \phi \\ 0 & \cos \phi & -\sin \phi \\ 0 & \sin \phi \sec \theta & \cos \phi \sec \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix}. \quad (2.2)$$

As Equações (2.2) são conhecidos como equações cinemáticas de Euler. Uma observação importante é que o ângulo de arfagem (θ) possui limitações em $\pm 90^\circ$, caso contrário, tem-se uma singularidade ou indefinição evidenciadas pela natureza das relações trigonométricas. De forma resumida os ângulos de Euler devem estar dentro dos limites:

$$\begin{aligned} -\pi &\leq \psi \leq \pi \\ -\frac{\pi}{2} &\leq \theta \leq \frac{\pi}{2} \\ -\pi &\leq \phi \leq \pi \end{aligned}$$

Como consequência disso, a matriz na Equação (2.2) não possui inversa mas ainda continua uma opção válida desde que se trabalhe apenas com variações pequenas nos ângulos.

2.2 Forças e Momentos

Partindo da segunda lei de Newton, a variação temporal do momento linear total $\dot{\mathbf{p}}^e$ e a variação do momento angular relativo $\dot{\mathbf{h}}^e$ são dados, respectivamente por:

$$\dot{\mathbf{p}}^e = \mathbf{F}_{ext}, \quad \dot{\mathbf{h}}^e = \mathbf{M}_{ext} \quad (2.3)$$

onde \mathbf{F}_{ext} é o somatório das forças externas e \mathbf{M}_{ext} é o somatório dos momentos externos à aeronave. Observe também o índice e indica referencial a terra, assumido como inercial. Dado que as forças e momentos atuantes em todas as partículas de massa possam ser resumidas ao ponto do centro de gravidade da aeronave (CG), a massa se mantém constante para efeitos de cálculo. Essa consideração se dá devido as características de consumo de combustível e a duração relativamente curta dos ensaios e, no caso de aeronaves totalmente elétricas (baterias e/ou painéis solares) a massa se mantém constante independente do tipo e duração do ensaio. O tensor de inércia é assumido como sendo constante devido as características de corpo rígido da aeronave, dessa forma temos que as Equações (2.3) se tornam:

$$M^e \dot{\mathbf{v}}_{CG/e} = \mathbf{F}_{ext}, \quad \mathbf{I} \dot{\boldsymbol{\omega}}_{b/e} = \mathbf{M}_{ext}, \quad (2.4)$$

onde M é a massa total da aeronave, $\mathbf{v}_{CG/e}$ é a velocidade do centro de massa da aeronave em relação a terra, definida como a variação do vetor posição da aeronave entre os sistemas de coordenadas da Terra e do Corpo, $\boldsymbol{\omega}_{b/e}$ é a velocidade angular de rotação da aeronave em relação ao corpo da aeronave e \mathbf{I} é o tensor de inércia da aeronave, definido como

$$\mathbf{I} \triangleq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{xx} & \mathbf{I}_{xy} & \mathbf{I}_{xz} \\ \mathbf{I}_{xy} & \mathbf{I}_{yy} & \mathbf{I}_{yz} \\ \mathbf{I}_{xz} & \mathbf{I}_{yz} & \mathbf{I}_{zz} \end{bmatrix}, \quad (2.5)$$

em que \mathbf{I}_{xx} , \mathbf{I}_{yy} e \mathbf{I}_{zz} são os momentos de inércia e os outros elementos restantes são os produtos de inércia. Observe que a maioria das aeronaves apresentam simetria em relação ao plano \mathbf{xz} , o que permite a desconsideração dos produtos \mathbf{I}_{xy} e \mathbf{I}_{yz} , fazendo do eixo y um eixo principal de

inércia. Isso significa que um torque no eixo y não gera aceleração nos outros dois, do qual a recíproca não é verdadeira, reforçando a divisão entre modos látero direcional e longitudinal. Outro ponto importante é que os efeitos giroscópicos associado à hélice, motores e outros componentes rotativos são desconsiderados, uma consequência de aproximar a aeronave a um corpo rígido.

No contexto de identificação de sistemas é interessante representar as coordenadas nos eixos do corpo, logo uma transformação de coordenadas é necessária. Como tanto a massa quanto o tensor de inércia são constantes, as velocidades precisam ser medidas no corpo da aeronave. Partindo de uma observação do sistema inercial para o referencial do corpo e utilizando a lei de Coriolis, temos:

$$\dot{\mathbf{v}}_{CG/e} = \frac{\mathbf{F}_{ext}}{M} - \boldsymbol{\omega}_{b/e} \times \mathbf{v}_{CG/e}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{I}\dot{\boldsymbol{\omega}}_{b/e} = \mathbf{M}_{ext} - \boldsymbol{\omega}_{b/e} \times (\mathbf{I}\boldsymbol{\omega}_{b/e}) \quad (2.7)$$

É importante observar que os termos $\dot{\mathbf{v}}_{CG/e}$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}_{b/e}$ do lado esquerdo das duas equações se referem às acelerações lineares e angulares no corpo, medidas diretamente no CG da aeronave.

2.2.1 Forças e Momentos Aerodinâmicas

Ao se movimentar pela atmosfera, as superfícies aerodinâmicas recebem forças e carregamentos gerados através do atrito de cisalhamento e uma distribuição de pressão surge como manifestação dessa interação. Como será visto mais adiante, vários coeficientes aerodinâmicos serão calculados provenientes dessa interação, mas é pertinente expor que apesar de alguns coeficientes serem bastante diferentes dos outros, todos tem sua origem em alguma relação com as duas formas de interação, atrito e pressão.

Quando houver movimento relativo entre a aeronave e a atmosfera ao seu redor, as moléculas de ar se chocam com a superfície que ocasiona uma mudança da velocidade dessas moléculas e na sua provável mudança de direção. O escoamento próximo à superfície da aeronave acaba por ter uma velocidade tida como nula para efeitos de cálculo, definida como “Condição de não escoamento”, embora seja uma aproximação devido ao movimento aleatório das moléculas nessa região. Conforme a distância normal à superfície aumenta, essa velocidade muda até atingir a velocidade referente ao escoamento no infinito. O diferencial de velocidade causa atrito devido à viscosidade do ar, denominado de atrito viscoso e gera um diferencial de pressão entre as camadas de ar e a superfície. Os efeitos aerodinâmicos têm natureza não-linear e as relações entre geometria da superfície, posição e o escoamento são difíceis de calcular. Mesmo quando os efeitos e coeficientes são encontrados empiricamente, podem resultar erros consideráveis devido as condições do ensaio. No contexto da identificação de sistemas as forças aerodinâmicas não podem ser medidas diretamente, entretanto o conjunto de informações coletados através das acelerações e ângulos permitem inferências sobre as mesmas.

Como dito anteriormente, as forças **X**, **Y** e **Z** possuem a contribuição aerodinâmica as quais vamos chamar de f_{Ax} , f_{Ay} e f_{Az} para cada eixo respectivo. De forma análoga, os momentos **L**, **M** e **N** possuem suas contribuições aerodinâmicas representadas por l_A , m_A e n_A . As forças dependem de variáveis como pressão dinâmica \bar{q} , deflexão das superfícies de comando, área de planta da superfície S e os ângulos, velocidades e coeficientes adimensionais $C_{(\)}$. Esses coeficientes são características da aeronave que estão encapsuladas devido sua complexidade, geralmente não-lineares e tabelados;

$$\bar{q} = \frac{1}{2} \rho v_T^2 \quad (2.8a)$$

$$f_{Ax} = \bar{q} S C_x(\alpha, \beta, q, \delta_e, T_c, \dots) \quad (2.8b)$$

$$f_{Ay} = \bar{q} S C_y(\alpha, \beta, p, r, \delta_a, \delta_r, \dots) \quad (2.8c)$$

$$f_{Az} = \bar{q} S C_z(\alpha, q, \delta_e, \dots). \quad (2.8d)$$

Os momentos tem dependência semelhante, porém precisam de um comprimento característico de referência:

$$l_A = \bar{q} S b C_l(\alpha, \beta, M, p, r, \delta_a, \delta_r, \dots) \quad (2.9a)$$

$$m_A = \bar{q} S \bar{c} C_m(\alpha, M, q, \delta_e, T_c, \dots) \quad (2.9b)$$

$$n_A = \bar{q} S b C_n(\alpha, \beta, M, p, r, \delta_a, \delta_r, \dots). \quad (2.9c)$$

Neste caso M é o número de *Mach*, b é a envergadura da asa, \bar{c} é a corda média aerodinâmica e T_c é o coeficiente de propulsão. Quando há uma dependência majoritária em α , esses coeficientes são chamados de longitudinais, sendo eles sustentação, arrasto e momento de arfagem ou picador. Quando há uma dependência tanto de α quanto de β , são chamados de latero-direcionais, sendo esses rolagem, guinada e força lateral. Os coeficientes podem ainda ser divididos em *Coefficientes estáticos*, quando os valores referentes são capturados em estados estáticos de ensaio, a exemplo de um modelo no túnel de vento ou em manobras em que o tempo de execução é longo e o escoamento não se altera de forma acentuada ao redor da aeronave, e os *Coefficientes Dinâmicos*, onde o tempo de mudança de atitude da aeronave é relativamente curto, levando à reajustes no escoamento. Estes últimos são complicados de modelar e geralmente são avaliados apenas em aeronaves de alta manobrabilidade. Quando os coeficientes aerodinâmicos da aeronave são analisados, estes podem ser divididos em: Derivadas amortecidas, quando essas tendem a criar forças e momentos opostos ao movimento p , q e r ; e as Derivadas aceleradas, quando o incremento devido a essa derivada é diretamente proporcional as taxas dos ângulos $\dot{\alpha}$ (em alguns casos também para $\dot{\beta}$). De forma geral, a modelagem dos coeficientes aerodinâmicos representados por $C_{(\)}$ é ineficiente devido sua dependência em várias variáveis, o que implica em múltiplas interpolações a partir dos dados disponíveis, muita das quais não possuem sentido físico. Dessa forma, com a separação explícita dos coeficientes e o relativo baixo acoplamento entre as variáveis, um modelo baseado no somatório das partes contribuintes torna-se em uma abordagem atrativa e viável de representar a aeronave. É possível realizar a linearização dos

equacionamentos pertinentes à modelagem de acordo com a quantidade de variáveis almejada, desde que estas possam ser avaliadas experimentalmente (STEVENS; LEWIS; JOHNSON, 2015, Seç. 2.3). Logo, no presente trabalho os coeficientes são definidos como;

$$C_x \approx C_{x_0} + C_{x_\alpha} \alpha + C_{x_{\delta_e}} \delta_e + C_{x_{T_c}} T_C \quad (2.10a)$$

$$C_y \approx C_{y_0} + C_{y_\beta} \beta + C_{y_{\delta_a}} \delta_a + C_{y_{\delta_r}} \delta_r + C_{y_{T_c}} T_C + \frac{b}{2v_T} (C_{y_p} p + C_{y_r} r) \quad (2.10b)$$

$$C_z \approx C_{z_0} + C_{z_\alpha} \alpha + C_{z_{\delta_e}} \delta_e + C_{z_{T_c}} T_C + \frac{\bar{c}}{2v_T} (C_{z_q} q + C_{z_\alpha} \dot{\alpha}) \quad (2.10c)$$

$$C_l \approx C_{l_0} + C_{l_\beta} \beta + C_{l_{\delta_a}} \delta_a + C_{l_{\delta_r}} \delta_r + C_{l_{T_c}} T_C + \frac{b}{2v_T} (C_{l_p} p + C_{l_r} r) \quad (2.10d)$$

$$C_m \approx C_{m_0} + C_{m_\alpha} \alpha + C_{m_{\delta_e}} \delta_e + C_{m_{T_c}} T_C + \frac{\bar{c}}{2v_T} (C_{m_q} q + C_{m_\alpha} \dot{\alpha}) \quad (2.10e)$$

$$C_n \approx C_{n_0} + C_{n_\beta} \beta + C_{n_{\delta_a}} \delta_a + C_{n_{\delta_r}} \delta_r + C_{n_{T_c}} T_C + \frac{b}{2v_T} (C_{n_p} p + C_{n_r} r) \quad (2.10f)$$

2.2.2 Forças e Momentos Propulsivos

A modelagem das forças e momentos propulsivos utiliza técnicas semelhantes às aplicadas na aerodinâmica, porém simplificadas. Suponha uma aeronave movida a hélice em posição *Tractor* locomovendo-se com velocidade relativa ao escoamento V_0 . Considere um disco imaginário com diâmetro D , área S equivalente a hélice que gira em torno do seu eixo. A velocidade do escoamento após passar por esse disco torna-se V e a energia cinética fornecida pelo sistema de propulsão é proporcional ao diferencial de velocidades do escoamento antes e depois do disco. Da segunda lei de Newton temos que a potência de tração P_t é

$$P_t = FV_0 = \rho SV(V - V_0)V_0,$$

ρ é a densidade do ar. A equação da Tração é definida como

$$T = K_T \rho n^2 D^4,$$

k_T é o coeficiente adimensional de tração e n é a velocidade de rotação da hélice. A eficiência da hélice η_P é

$$\eta_P = \frac{\text{Potência antes do disco}}{\text{Potência depois do disco}} = (\dots) = \frac{2}{V/V_0 + 1}.$$

Observe que existe um conflito entre eficiência e tração, para máxima eficiência ($= 1$) tem-se a condição de velocidades iguais, não gerando tração. Existem outros fatores envolvidos na aplicação da propulsão, porém de forma simplificada pode-se estabelecer que as forças propulsivas são fortemente influenciadas pela velocidade relativa e os ângulos de incidência:

$$f_{T_x} = f_{T_x}(u', \alpha), \quad f_{T_y} = f_{T_y}(\beta), \quad f_{T_z} = f_{T_z}(u', \alpha), \quad (2.11a)$$

$$l_T = l_A(\beta), \quad m_T = m_A(u', \alpha), \quad n_T = n_A(\beta). \quad (2.11b)$$

Em muitos casos a posição vertical da hélice proporciona um braço de momento longitudinal desconsiderável em relação ao CG da aeronave, sendo essa contribuição para o momento de arfagem muito pequena assim como os efeitos giroscópicos de qualquer elemento rotativo, além de que em geral, os efeitos das forças propulsivas estão englobados nas forças e coeficientes aerodinâmicos.

2.2.3 Forças Gravitacionais

O peso é a interação da massa \mathbf{M} da aeronave com a aceleração da gravidade g , essa sempre paralela ao eixo z dos eixos da terra

$$\mathbf{F}_g^e = \mathbf{M}[0 \ 0 \ g]^T.$$

No sistema de coordenadas do corpo, temos

$$\mathbf{F}_g^b = \mathbf{M}[-g \sin \theta \quad g \sin \phi \cos \theta \quad g \cos \phi \cos \theta]^T.$$

Quando é feito o cálculo dos momentos gerados pelos pesos de cada componente da aeronave, um ponto de equilíbrio equivalente com momento nulo pode ser encontrado, esse é o Centro de Gravidade (CG) da aeronave. Considerando a densidade constante através da aeronave, podemos posicionar o Centro de Massa no mesmo ponto do CG e assim desconsiderar a atuação dos momentos gravitacionais.

2.3 Modelo

O modelo completo se baseia na junção das equações cinemáticas de Euler nas Equações (2.2), nas Equações da dinâmica translacional (2.6) e rotacional (2.7) e as componentes aerodinâmicas das Equações (2.8), logo de maneira explícita temos

$$\dot{\phi} = p + \tan \theta (q \sin \phi + r \cos \phi) \quad (2.12a)$$

$$\dot{\theta} = q \cos \phi - r \sin \theta \quad (2.12b)$$

$$\dot{\psi} = (q \sin \phi + r \cos \phi) / \cos \theta \quad (2.12c)$$

$$\dot{u}' = rv' - qw' - g \sin \theta + (f_{a_x} + T) / \mathbf{M} \quad (2.12d)$$

$$\dot{v}' = -ru' + pw' + g \sin \phi \cos \theta + f_{a_y} / \mathbf{M} \quad (2.12e)$$

$$\dot{w}' = qu' - pv' + g \cos \phi \cos \theta + f_{a_z} / \mathbf{M} \quad (2.12f)$$

$$(I_x I_z - I_{xz}^2) \dot{p} = I_{xz} [I_x - I_y + I_z] pq - [I_z (I_z - I_y) + I_{xz}^2] qr + I_z (l_A + Q) + I_{xz} n_A \quad (2.12g)$$

$$I_y \dot{q} = (I_z - I_x) pr - I_{xz} (p^2 - r^2) + m_A \quad (2.12h)$$

$$(I_x I_z - I_{xz}^2) \dot{r} = -I_{xz} [I_x - I_y + I_z] pr + [I_x (I_x - I_y) + I_{xz}^2] pq + I_{xz} (l_A + Q) + I_x n_A \quad (2.12i)$$

2.3.1 Desacoplando as equações

Como visto anteriormente, as equações que governam o movimento de uma aeronave podem ser simplificadas, e no caso deste trabalho ser restrito a pequenas perturbações e movimento nivelado, uma linearização pode ser efetuada nas derivadas dimensionais de estabilidade. A linearização dos termos nas forças X , Y e Z resulta em:

Eixo X	Eixo Y	Eixo Z
$X_{u'} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Ax}}{\partial u'}$	$Y_{\beta} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Ay}}{\partial \beta}$	$Z_{u'} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Az}}{\partial u'}$
$X_{T_{u'}} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Tx}}{\partial u'}$	$Y_p = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Ay}}{\partial p}$	$Z_{\alpha} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Az}}{\partial \alpha}$
$X_{\alpha} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Ax}}{\partial \alpha}$	$Y_r = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Ay}}{\partial r}$	$Z_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Az}}{\partial \dot{\alpha}}$
$X_{\delta_e} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Ax}}{\partial \delta_e}$	$Y_{\delta_a} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Ay}}{\partial \delta_a}$	$Z_q = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Az}}{\partial q}$
	$Y_{\delta_r} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Ay}}{\partial \delta_r}$	$Z_{\delta_e} = \frac{1}{M} \frac{\partial f_{Az}}{\partial \delta_e}$

Tabela 1 – Linearização das derivadas direcionais das forças

De maneira análoga para os momentos, temos:

Eixo X	Eixo Y	Eixo Z
$L_{\beta} = \frac{1}{I_x} \frac{\partial l_A}{\partial \beta}$	$M_{u'} = \frac{1}{I_y} \frac{\partial m_A}{\partial u'}$	$N_{\beta} = \frac{1}{I_z} \frac{\partial n_A}{\partial \beta}$
$L_p = \frac{1}{I_x} \frac{\partial l_A}{\partial p}$	$M_{T_{u'}} = \frac{1}{I_y} \frac{\partial m_{Tx}}{\partial u'}$	$N_p = \frac{1}{I_z} \frac{\partial n_A}{\partial p}$
$L_r = \frac{1}{I_x} \frac{\partial l_A}{\partial r}$	$M_{\alpha} = \frac{1}{I_y} \frac{\partial m_A}{\partial \alpha}$	$N_{\delta_a} = \frac{1}{I_z} \frac{\partial n_A}{\partial \delta_a}$
$L_{\delta_a} = \frac{1}{I_x} \frac{\partial l_A}{\partial \delta_a}$	$M_{\dot{\alpha}} = \frac{1}{I_y} \frac{\partial m_A}{\partial \dot{\alpha}}$	$N_{\delta_r} = \frac{1}{I_z} \frac{\partial n_A}{\partial \delta_r}$
$L_{\delta_r} = \frac{1}{I_x} \frac{\partial l_A}{\partial \delta_r}$	$M_{T_{\alpha}} = \frac{1}{I_y} \frac{\partial m_{Tx}}{\partial \alpha}$	$N_r = \frac{1}{I_z} \frac{\partial n_A}{\partial r}$
	$M_q = \frac{1}{I_y} \frac{\partial m_A}{\partial q}$	
	$M_{\delta_e} = \frac{1}{I_y} \frac{\partial m_A}{\partial \delta_e}$	

Tabela 2 – Linearização das derivadas direcionais dos momentos

Os produtos de inércia também podem ser inseridos nas equações, mas em geral sua contribuição é pequena e caso algum momento de inercia tenha contribuição significativa no projeto e não esteja nas equações, pode ser erroneamente interpretado como derivada aerodinâmica, observadas apenas em condições específicas. De forma geral, podemos assumir os seguintes coeficientes e suas relações com as manobras como:

$$\begin{aligned}
 \text{Voo reto nivelado:} & \quad \phi, \dot{\phi}, \dot{\theta}, \dot{\psi} \equiv 0, & \therefore p, q, r \equiv 0 \\
 \text{Curva Nivelada:} & \quad \dot{\phi}, \dot{\theta} \equiv 0, & \dot{\psi} \equiv \text{Razão de curva} \\
 \text{Subida Constante:} & \quad \phi, \dot{\phi}, \dot{\psi} \equiv 0, & \dot{\theta} \equiv \text{Razão de Subida} \\
 \text{Rolagem Constante:} & \quad \dot{\theta}, \dot{\psi} \equiv 0, & \dot{\phi} \equiv \text{Razão de Rolagem}
 \end{aligned}$$

Em todo caso as velocidades devem ser mantidas constantes, ou seja, $(u', v', w' \equiv 0)$. Uma observação importante é que tanto a subida quanto a rolagem constante só existem

instantaneamente, ou seja, são avaliadas de maneira infinitesimal, pois em passos maiores de tempo, haveria a convergência para outras situações de voo não desejadas para este estudo. Uma inspeção nos coeficientes e evocando o raciocínio pertinente à simetria em torno do plano xz em termos de movimento da aeronave, tem-se que os vetores para os estados e entradas podem ser estabelecidos de forma que;

$$\begin{array}{ll} \text{Longitudinal:} & x = [\alpha \ q \ v_T \ \theta]^T \quad u = [\delta_e]^T \\ \text{Latero-direcional:} & x = [\beta \ \phi \ p \ r \ \theta]^T \quad u = [\delta_a \ \delta_r]^T \end{array}$$

2.3.2 Movimento Longitudinal

A análise longitudinal foca em torno dos movimentos de arfagem da aeronave, de maneira que as variáveis latero-direcionais permanecem constantes sem gerar acelerações ($p, r, \phi, \beta := 0$), logo em termos matemáticos advindos das Equações (2.12), temos:

$$\dot{\theta} = q \quad (2.13a)$$

$$\dot{u}' = -qw' - g \sin \theta + (f_{a_x} + T)/M \quad (2.13b)$$

$$\dot{w}' = qu' + g \cos \theta + f_{a_z}/M \quad (2.13c)$$

$$\dot{q} = m_A/I_x. \quad (2.13d)$$

Aplicamos a consideração de pequenos ângulos, temos por exemplo, $\sin x \approx x$, $\cos x \approx 1$ e $\tan x \approx x$. Para verificar o movimento longitudinal, os modos de período-curto e período-longo precisam ser excitados de forma a contemplar as variáveis necessárias.

Com aplicação de um pulso de excitação de profundor a manobra de período-curto, apresenta características oscilatórias de alta frequência, na ordem de grandeza de $1 H_z$, altamente amortecido e em geral com uma duração de poucos segundos. Nesse modo o ângulo de ataque, os ângulos de arfagem e velocidade de arfagem variam rapidamente. A velocidade relativa ao ar da aeronave permanece aproximadamente constante ao longo do ensaio e não apresenta movimentação vertical significativa.

O modo de período-longo, também chamado de fugóide, possui características de baixa frequência quando comparado com período curto, apresentando oscilação mais lenta, na casa das dezenas ou centenas de segundos causando um movimento senoidal bastante aparente na trajetória da aeronave. Após a excitação inicial do profundor a aeronave passa a se comportar de maneira a ganhar e perder altitude de forma significativa, perdendo velocidade enquanto ganha altitude, até que em algum ponto a aeronave perde a atitude de subida e apresenta movimento descendente. A partir deste momento a aeronave passa a ganhar velocidade enquanto perde altitude, fazendo com que a sustentação aumente para o mesmo ângulo de ataque, o que conseqüentemente acaba por limitar o movimento descendente até que volte a ter sustentação suficiente para haver um movimento de subida novamente. Essa variação de energia potencial-cinética é uma das características principais desse modo, até que o movimento convirja ao equilíbrio em voo reto nivelado.

2.3.2.1 Modelo Período Curto

Para modelar linearmente o modo de período curto a variação do ângulo de arfagem e a velocidade relativa ao ar podem ser aproximados como equivalentes para o cálculo do ângulo de ataque e velocidade de arfagem, ou seja

$$\alpha \approx \frac{w'}{u'}$$

Permitindo uma variação ao redor do ponto de equilíbrio das variáveis com índice $_{eq}$ do voo nivelado, que agora passam a ser o referencial, das Equações (2.13) temos

$$\dot{\alpha} = \frac{Z_{\alpha}}{u'_{eq}} \Delta\alpha + \left(1 + \frac{Z_q}{u'_{eq}}\right) q + \frac{Z_{\delta_e}}{u'_{eq}} \Delta\delta_e \quad (2.14a)$$

$$\dot{q} = M_{\alpha} \Delta\alpha + M_q q + M_{\delta_e} \Delta\delta_e \quad (2.14b)$$

em que a variação em torno do valor de referencia é indicado por Δ , por exemplo,

$$\Delta\alpha = \alpha - \alpha_{ref}$$

e Z_{α} , Z_q , Z_{δ_e} , M_{α} , M_q e M_{δ_e} são as derivadas dimensionais de estabilidade e controle definidas nas Tabelas 1 e 2 podendo ser descritas como

$$\begin{aligned} Z_{\alpha} &\triangleq \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{\partial f_{x_a}}{\partial \alpha} = \frac{\bar{q}S}{\mathbf{M}} C_{x_{\alpha}} & M_{\alpha} &\triangleq \frac{1}{I_x} \frac{\partial m_a}{\partial \alpha} = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_x} C_{m_{\alpha}} \\ Z_q &\triangleq \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{\partial f_{x_a}}{\partial q} = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2v_T\mathbf{M}} C_{x_q} & M_q &\triangleq \frac{1}{I_x} \frac{\partial m_a}{\partial q} = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{2v_T} C_{m_q} \\ Z_{\delta_e} &\triangleq \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{\partial f_{x_a}}{\partial \delta_e} = \frac{\bar{q}S}{\mathbf{M}} C_{x_{\delta_e}} & M_{\delta_e} &\triangleq \frac{1}{I_x} \frac{\partial m_a}{\partial \delta_e} = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{I_x} C_{m_{\delta_e}} \end{aligned}$$

2.3.2.2 Modelo Fugóide

Na modelagem para o modo fugóide consideramos que o ângulo de ataque permanece constante, tornando a velocidade de referencia um valor muito próximo de u' , logo:

$$\dot{\theta} = q \quad (2.16a)$$

$$\dot{u}' = g \cos \theta_{eq} \Delta\theta - w_{eq} q + X_V \Delta u' + X_{\delta_e} \Delta\delta_e \quad (2.16b)$$

$$\dot{q} = M_q q + M_V \Delta u' + M_{\delta_e} \Delta\delta_e. \quad (2.16c)$$

Neste modo também vale a indicação dos valores de referencia em torno do equilíbrio representados com o índice $_{eq}$. Nesse modelo temos:

$$\begin{aligned} X_V &\triangleq \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{\partial X_A}{\partial v_T} = \frac{\bar{q}S}{v_T\mathbf{M}} 2C_{x_{eq}} \\ M_V &\triangleq \frac{1}{I_y} \frac{\partial m_A}{\partial v_T} = \frac{\bar{q}S\bar{c}}{v_T I_y} 2C_{m_{eq}} \\ X_{\delta_e} &\triangleq \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{\partial X_A}{\partial \delta_e} = \frac{\bar{q}S}{\mathbf{M}} C_{x_{\delta_e}} \end{aligned}$$

De certo modo, o valor do ângulo de ataque não é exatamente constante, mas sim muito pequeno em relação ao componente u'/v_T , o que é exatamente o comportamento contrário ao apresentado no modo de período curto. Uma consideração decorrente disso é que essa oscilação de período longo acontece com o coeficiente de sustentação C_L constante.

2.3.3 Movimento Latero-direcional

O modelo latero-direcional considera que os movimentos de arfagem são constante, ou seja, as velocidades u' e w' e o ângulo q não se alteram. Dessa forma, aplicando as considerações supracitadas nas Equações (2.12), temos:

$$\dot{\phi} = p + r \tan \theta \cos \phi \quad (2.18a)$$

$$\dot{v}' = -ru' + pw' - g \sin \phi + f_{a_y}/\mathbf{M} \quad (2.18b)$$

$$(I_x I_z - I_{xz}^2) \dot{p} = I_z(l_A + Q) + I_{xz} n_A \quad (2.18c)$$

$$(I_x I_z - I_{xz}^2) \dot{r} = I_{xz}(l_A + Q) + I_x n_A. \quad (2.18d)$$

As Equações (2.18) incluem basicamente três modos dinâmicos, rolamento holandês, rolamento puro e espiral. Para garantir que tais modos sejam avaliados de maneira mais exata é recomendado o acoplamento dos comandos laterais e direcionais, mas também é possível obtê-los de forma separada. Caso opte-se por entradas separadas então deve ser garantido condições de voo bastante similares para que haja comparação e evitar dificuldade no processamento dos dados. As manobras podem ser feitas em sequência e não se precisa limitar a apenas uma entrada de cada superfície de comando.

O rolamento holandês é definido como um modo oscilatório de baixo amortecimento e com acoplamento de rolamento e guinada. O conhecimento das características desse modo são vitais para operação segura das aeronaves, visto que aeronaves com enflexamento nas asas tendem a apresentar esse movimento oscilatório durante pousos com vento cruzado para os casos em que tal aeronave apresenta baixo amortecimento relativo. O rolamento puro envolve principalmente a velocidade de rolamento e a resposta a esse movimento pode ser observada com entrada de comando nos ailerons apenas. Esse modo tem características sobreamortecidas que pode demorar alguns segundos para se dissipar e conhecer como a aeronave responde pode ser importante para estudar os efeitos de rajadas de vento e carregamentos diferentes nas asas. Em geral esse modo é observado quando o ângulo de rolamento oscila em valores maiores, na casa dos 40° , mantendo a velocidade de rolamento constante. Outro modo que pode ser facilmente obtido com movimento de aileron é o espiral, onde é observado a velocidade de guinada e o ângulo de rolamento praticamente constante. Também sobreamortecido com duração na casa das centenas de segundos, costuma apresentar instabilidade, entretanto, devido sua longa duração pode ser prontamente corrigido pelo piloto ou por controles automáticos.

2.3.3.1 Modelo latero-direcional

Como dito anteriormente, os modos apresentam respostas difíceis de separar, por exemplo, a manobra rolamento holandês tem respostas em β , p e r , entretanto podemos simplificar as Equações (2.18) e considerar a velocidade do escoamento constante. Os movimentos ao longo do eixo z são pequenos e podem ser desconsiderados e os movimentos partem inicialmente com as asas niveladas ($\theta_0 = 0$). Com essas considerações, temos que:

$$\dot{\phi} = \tan \theta_{eq} \sin \phi_{eq} \Delta\phi + p + \tan \theta_{eq} \cos \phi_{eq} r \quad (2.19a)$$

$$u'_{eq} \dot{\beta}' = g \cos \phi_{eq} \cos \theta_{eq} \Delta\phi + (Y_p + w'_{eq})p + (Y_r - u'_{eq})r + Y_\beta \Delta\beta + Y_{\delta_a} \Delta\delta_a + Y_{\delta_r} \Delta\delta_r \quad (2.19b)$$

$$\dot{p} = L'_\beta \Delta\beta + L'_p p + L'_r r + L'_{\delta_a} \Delta\delta_a + L'_{\delta_r} \Delta\delta_r \quad (2.19c)$$

$$\dot{r} = N'_\beta \Delta\beta + N'_p p + N'_r r + N'_{\delta_a} \Delta\delta_a + N'_{\delta_r} \Delta\delta_r, \quad (2.19d)$$

onde as derivadas direcionais foram definidas nas Tabelas 1 e 2 e podem ser descritas como

$$\begin{array}{lll} Y_\beta \triangleq \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{\partial f_{A_y}}{\partial \beta} = \frac{\bar{q}S}{\mathbf{M}} C_{y\beta} & L_\beta \triangleq \frac{1}{I_x} \frac{\partial l_A}{\partial \beta} = \frac{\bar{q}Sb}{I_x} C_{l\beta} & N_\beta \triangleq \frac{1}{I_z} \frac{\partial n_A}{\partial \beta} = \frac{\bar{q}Sb}{I_z} C_{n\beta} \\ Y_p \triangleq \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{\partial f_{A_y}}{\partial p} = \frac{\bar{q}Sb}{2v_T \mathbf{M}} C_{y_p} & L_p \triangleq \frac{1}{I_x} \frac{\partial l_A}{\partial p} = \frac{\bar{q}Sb^2}{2I_x v_T} C_{l_p} & N_p \triangleq \frac{1}{I_z} \frac{\partial n_A}{\partial p} = \frac{\bar{q}Sb^2}{2I_z v_T} C_{n_p} \\ Y_r \triangleq \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{\partial f_{A_y}}{\partial r} = \frac{\bar{q}Sb}{2v_T \mathbf{M}} C_{y_r} & L_r \triangleq \frac{1}{I_x} \frac{\partial l_A}{\partial r} = \frac{\bar{q}Sb^2}{2I_x v_T} C_{l_r} & N_{\delta_a} \triangleq \frac{1}{I_z} \frac{\partial n_A}{\partial \delta_a} = \frac{\bar{q}Sb}{I_z} C_{n_{\delta_a}} \\ Y_{\delta_a} \triangleq \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{\partial f_{A_y}}{\partial \delta_a} = \frac{\bar{q}S}{\mathbf{M}} C_{y_{\delta_a}} & L_{\delta_a} \triangleq \frac{1}{I_x} \frac{\partial l_A}{\partial \delta_a} = \frac{\bar{q}Sb}{I_x} C_{l_{\delta_a}} & N_{\delta_r} \triangleq \frac{1}{I_z} \frac{\partial n_A}{\partial \delta_r} = \frac{\bar{q}Sb}{I_z} C_{n_{\delta_r}} \\ Y_{\delta_r} \triangleq \frac{1}{\mathbf{M}} \frac{\partial f_{A_y}}{\partial \delta_r} = \frac{\bar{q}S}{\mathbf{M}} C_{y_{\delta_r}} & L_{\delta_r} \triangleq \frac{1}{I_x} \frac{\partial l_A}{\partial \delta_r} = \frac{\bar{q}Sb}{I_x} C_{l_{\delta_r}} & N_r \triangleq \frac{1}{I_z} \frac{\partial n_A}{\partial r} = \frac{\bar{q}Sb^2}{2I_y v_T} C_{n_r} \end{array}$$

3 Métodos e Identificação

Neste capítulo iremos descrever de forma breve os métodos de erro de predição (MEP) utilizados na análise dos dados. A forma com que as variáveis interagem entre si pode ser analisada de várias maneiras, desde um modelo mental onde a experimentação e a prática se fazem necessários e os conceitos envolvidos são subjetivos e pessoais, até modelos matemáticos precisos (ou nem tanto) onde uma quantidade considerável de variáveis são comparadas com auxílio computacional. Seja qual for a maneira que se analisam as variáveis, sempre haverá uma entrada, conhecida ou não, um sistema a ser julgado e as possíveis saídas ou respostas desse sistema. Observe que é natural a necessidade de se ter uma forma organizada e lógica para que as saídas do modelo tenham um comportamento desejado, dessa forma vários pesquisadores, autores e cientistas elaboraram maneiras de se condicionar as etapas para que tal processo seja eficiente, desde a elaboração dos ensaios e experimentos para coleta de dados, até a forma que os resultados devem ser tratados.

De forma geral, os métodos de erro de predição possuem características estatísticas herdadas dos métodos de verossimilhança, como variância ($\lambda(\theta)$) e função de distribuição de probabilidades ($PDF \rightarrow f(e, \theta)$), que são consideradas robustas o suficientes para tratar ruídos. Se ponderarmos que o ruído está contido tanto na dinâmica do processo quanto na saída do sistema, então esses modelos são chamados métodos de erro de filtro. O ruído pode ser tratado também de forma independente tanto apenas na equação, quando são supostas entradas não conhecidas de fontes aleatórias intrínsecas à dinâmica do processo, quanto apenas na saída, onde o ruído é assumido nos dados que são coletados independente da dinâmica do processo. Esses dois últimos casos são classificados como métodos de Erro de Equação e Erro de Saída respectivamente. Com as breves definições acima podemos dizer que os métodos de erro de equação e erro de saída são casos especiais de um caso mais geral, o método de erro de filtro. De forma contrária, podemos dizer que o método de erro de filtro é extensão natural dos métodos de erro de equação e de saída. Antes de nos aprofundarmos sobre os métodos de erro de predição, vamos a uma breve introdução à estimação de Máxima Verossimilhança.

3.1 Princípio da Máxima Verossimilhança

Assumindo a hipótese de que um determinado sistema permita uma formulação matemática baseada em parâmetros, um conjunto de dados aleatórios são medidos do mesmo. Essa concepção se faz necessário quando o conjunto de dados que podem ser medidos N tende ao infinito e a análise necessita de apenas uma parte desses dados. Nesse contexto, a verossimilhança de um parâmetro em relação a uma medida é proporcional à probabilidade de realização de uma

das medidas dado esse parâmetro (DUTRA, 2010, seç. 4.1).

$$L(\theta|z) \propto P(z|\theta)$$

Essa notação é usada para evitar ser confundida com a probabilidade de realização de um evento. No caso da função de verossimilhança o que temos é estimação da influência de um determinado parâmetro sobre uma variável aleatória que já aconteceu, ou seja, possibilita uma inferência sobre o parâmetro e não sobre a variável aleatória. Segundo (FISHER, 1912, seç. 5), verossimilhança é apenas um valor que fornece informações sobre o parâmetro de forma que não necessita de nenhum conhecimento anterior (parte desses parâmetros podem ser desconhecidos), e também não carrega informações das probabilidades desse parâmetro em atingir um valor predeterminado.

$$P(z|\theta) = P(z_1|\theta) \cdot P(z_2|\theta) \dots P(z_N|\theta) = \prod_{k=0}^N P(z(t_k)|\theta) \quad (3.1)$$

O objetivo é determinar um valor para os parâmetros que maximize a função de verossimilhança na Equação (3.1), para isso usamos o método em conjunto com uma função log-verossimilhança, afim de simplificar a aplicação, que é definido como

$$\ell(\theta) \triangleq \ln P(z_N|\theta) = \sum_{k=0}^N \ln P(z(t_k)|\theta) \quad (3.2)$$

Dessa forma temos uma função crescente, com a vantagem de que seu valor máximo não é alterado. Considerando que as variáveis são aleatórias, com distribuição normal e um conjunto N de medidas discretas, a função densidade de probabilidade (PDF) é dada por

$$P(z, \theta) = \frac{1}{\sqrt[ny]{(2\pi)^{ny} |R|}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [z(t_k) - y(t_k, \theta)]^T R^{-1} [z(t_k) - y(t_k, \theta)] \right\} \quad (3.3)$$

em que a norma $z \approx \mathcal{N}(y(t_k), R)$ com dimensão $z \in \mathbb{R}^{ny}$ e R é a matriz de covariância do ruído. Utilizando a função de log-verossimilhança da Equação (3.2) com a função PDF (3.3) obtemos

$$\ell(z|\theta) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [z(t_k) - y(t_k)]^T R^{-1} [z(t_k) - y(t_k)] - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \ln |R| - \frac{\ln(2\pi)}{2} \sum_{k=0}^N n \quad (3.4)$$

onde o último termo da direita da Equação (3.4) é constante e pode ser desconsiderado na otimização. O termo $\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{ny} \ln |R|$ pode ser calculado caso alguma informação sobre a matriz de covariância R seja fornecida e não possua dependência de θ , caso contrário esse termo pode ser desconsiderado também. Para maximizar a função densidade de probabilidades, assumindo valores fixos de variância σ^2 , o valor do erro quadrático pode ser minimizado. Definindo uma função custo q como

$$q(\theta) \triangleq -\ell(\theta) \quad (3.5)$$

podemos trabalhar com a minimização da função custo obtendo o mesmo resultado da sua maximização anterior. Isso é importante por motivos de que as rotinas de otimização computacionais

escolhidas tratam melhor a minimização das funções (DUTRA, 2010, seç. 4.1). Como alternativa, também pode ser efetuado uma estimação prévia de R afim de uma minimização da função de verossimilhança (JATEGAONKAR, 2015, Apêndice E), que também é utilizada neste trabalho como mais uma forma de otimizar todo o processo. Para minimização da função custo, uma expansão em série de Taylor para solução exata em relação a um parâmetro θ_i pode ser usado, ou seja,

$$q(\theta) \approx q_i + \bar{g}^T \Delta\theta + \frac{1}{2}(\Delta\theta)^T H \Delta\theta$$

onde q_i é o valor da função custo naquele ponto, \bar{g} é o gradiente e H é a Hessiana da função custo no ponto. O valor mínimo da função custo é obtido quando o gradiente da função igual a zero ou nulo. O gradiente é dado por

$$\nabla_{\theta} q = \bar{g} + H \Delta\theta$$

e seu valor mínimo é encontrado quando

$$H \Delta\theta = -\bar{g}. \quad (3.6)$$

Esse método também é conhecido como método de Gauss-Newton (JATEGAONKAR, 2015, Seç. 4.6, 4.7) e será empregado na etapa de minimização da função custo.

3.2 Métodos de erro de saída

O método de erro de saída (OEM) é um dos principais métodos no grupo chamado de 'métodos de ajuste de curva', onde os parâmetros são ajustados de forma a minimizar a diferença entre os valores disponíveis das variáveis medidas e das estimadas. O OEM é um dos métodos mais utilizados na identificação de parâmetros em sistemas aeronáuticos (JATEGAONKAR, 2015, Seç. 4.1). A expressão 'erro de saída' se refere ao termo adicionado na saída do sistema que contabiliza todo o ruído do sistema, desconsiderando qualquer erro no processo, logo esse método é um caso do estimador de máxima verossimilhança onde o processo é tido como determinístico. Para obter os valores ótimos dos parâmetros a função custo deve ser minimizada.

Considere o sistema dinâmico representado pelas seguintes equações:

$$\dot{x}(t) = f[x(t), u(t), \theta], \quad x(t_0) = x_0 \quad (3.7a)$$

$$y(t) = g[x(t), u(t), \theta] \quad (3.7b)$$

$$z(t_k) = y(t_k) + v(t_k), \quad (3.7c)$$

onde $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ são as variáveis dos vetores de estado, $u \in \mathbb{R}^{n_u}$ são as entradas do sistema, que não dependem das saídas calculadas $y \in \mathbb{R}^{n_y}$, $\theta \in \mathbb{R}^{n_\theta}$ são os parâmetros a serem encontrados, $z \in \mathbb{R}^{n_z}$ são as saídas medidas no tempo discreto t_k , f é o campo vetorial da evolução dos estados, g a função de saída e v é o ruído adicionado, assumido sendo branco, com distribuição gaussiana

de média zero e matriz de covariância R , ou seja,

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{v}(t_k)\} &= 0 \\ E\{\mathbf{v}(t_k)\mathbf{v}^T(t_k)\} &= R\delta_{kl} \end{aligned} \quad (3.8a)$$

onde $R \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$ e δ_{kl} é o delta de kronecker. Para calcular a verossimilhança no método de erro na saída devemos encontrar a solução para o sistema das Equações (3.7). A função custo fica

$$J(z, \theta, R) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [z(t_k) - y(t_k)]^T R^{-1} [z(t_k) - y(t_k)] - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \ln |R| - \frac{\ln(2\pi)}{2} \sum_{k=0}^N n. \quad (3.9)$$

Existem dois métodos utilizados para minimizar a função custo que se diferenciam caso a matriz de covariância R seja conhecida ou não. Caso a função matriz R seja previamente **conhecida** podemos assumir que a função custo da Equação (3.9) se resume a

$$J(z, \theta, R) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [z(t_k) - y(t_k)]^T R^{-1} [z(t_k) - y(t_k)] \quad (3.10)$$

pois os segundos e terceiros termos da função se tornam constantes e podem ser desconsiderados sem perda. Observe que a forma apresentada na Equação (3.10) leva em consideração apenas os termos diagonais da matriz R , portanto qualquer método de otimização utilizado neste trabalho pode ser aplicado, como por exemplo o método de Gauss-Newton. Para utilizar tal método, devemos calcular o gradiente da função custo, que é encontrado derivando-se a Equação (3.9) em relação aos parâmetros, logo

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \sum_{k=0}^N \left[\frac{\partial y(t_k)}{\partial \theta} \right]^T R^{-1} [z(t_k) - y(t_k)]. \quad (3.11)$$

Para, finalmente, obter o mínimo valor da função custo devemos

$$\left. \frac{\partial J}{\partial \theta} \right|_{\theta=\theta_i} = 0. \quad (3.12)$$

Tal solução leva a um conjunto de equações não-lineares de difícil solução que podem ser resolvidas por aproximação em uma expansão em série de Taylor em torno do ponto θ_i , que é assumida sendo duas vezes diferenciável e um truncamento no segundo termo se mostra suficiente para maioria dos casos

$$\frac{\partial J(\theta_{i+1})}{\partial \theta} \approx \frac{\partial J(\theta_i)}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 J(\theta_i)}{\partial \theta^2} \Delta \theta, \quad (3.13)$$

onde $\Delta \theta = \theta_1 - \theta_0$ é o incremento da função, $\partial J(z, \theta_i)/\partial \theta$ é o gradiente e o termo $\partial^2 J(z, \theta_0)/\partial \theta^2$ é a Hessiana da função custo. Tal método tem implementação muito simples, porém é muito sensível à variação $\Delta \theta$. Para um ajuste ótimo do incremento $\Delta \theta$, supondo que a matriz de covariância R já foi determinada e aplicando a função custo da Equação (3.5), temos que o gradiente e

a hessiana são, respectivamente

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = - \sum_{k=0}^N \left[\frac{\partial y(t_k)}{\partial \theta} \right]^T R^{-1} [z(t_k) - y(t_k)] \quad (3.14a)$$

$$\frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta^2} = \sum_{k=0}^N \left[\frac{\partial y(t_k)}{\partial \theta} \right]^T R^{-1} \left[\frac{\partial y(t_k)}{\partial \theta} \right]. \quad (3.14b)$$

Tais resultados serão utilizados mais adiante para o processo de otimização. Para o caso em que a matriz de covariância R é **desconhecida** podemos iniciar a otimização levando em consideração os termos da matriz de covariância como parâmetros a serem estimados junto com os das equações de estado e saída. Isso se mostra bastante ineficiente, pois além de exigir alto custo computacional e tornar o processo excessivamente demorado, o cálculo dos parâmetros durante a otimização exige o conhecimento prévio da matriz de covariância, carregando erro desde o início do processo. Para tentar superar essa dificuldade o método da relaxação é sugerido por (JATEGAONKAR, 2015, Seç. 4.7), que consiste basicamente em dois passos; O primeiro é calcular o valor da função R diferenciando a função custo em relação à R , que com algumas simplificações, mudança de notação e utilizando artifícios matemáticos é possível estabelecer que o valor dos termos da matriz de covariância são dados por

$$R = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N [z(t_k) - y(t_k)][z(t_k) - y(t_k)]^T. \quad (3.15)$$

Tais resultados podem levar a valores numéricos pouco acurados, entretanto já fornecem uma minimização inicial da função custo e da matriz R (JATEGAONKAR, 2015, Apêndice E). Uma matriz R simétrica e positiva é encontrada, fazendo necessário uma fatoração Cholesky para que seja obtida uma matriz inferior afim de possibilitar a inversão. Dessa forma podemos seguir para a segunda parte do método de relaxação aplicando a Equação (3.15) na função custo (3.9), logo temos

$$J(\theta, R) = -\frac{1}{2} n_y N + \frac{N}{2} \ln |R| - \frac{n_y N}{2} \ln 2\pi. \quad (3.16)$$

Como o conjunto de observações n_y e o total de pontos coletados N são constantes e definidos, os primeiro e ultimo termo da função custo torna-se constante e podem ser desconsiderados. Para verificar tal suposição, podemos derivar a função custo da Equação (3.16) em relação a R a fim de obter seu gradiente, logo

$$\frac{\partial R}{\partial \theta} \equiv \frac{2}{N} \sum_{k=1}^N [z(t_k) - y(t_k; \theta)]^T \frac{\partial y(t_k; \theta)_i}{\partial \theta_j}. \quad (3.17)$$

Derivando a Equação (3.16) em relação aos parâmetros, temos

$$\frac{\partial J}{\partial \theta} = \frac{N}{2} \frac{1}{R} \frac{\partial R}{\partial \theta}. \quad (3.18)$$

Aplicando a Equação(3.17) em (3.18) e rearranjando os termos, temos

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = - \sum_{k=0}^N \left[\frac{\partial y(t_k)}{\partial \theta} \right]^T R^{-1} [z(t_k) - y(t_k)] \quad (3.19)$$

em que $\partial J(\theta)/\partial \theta$ é o gradiente da função custo J utilizando o método direto, com R inicialmente desconhecido, como descrito em (JATEGAONKAR, 2015, Apêndice E) e é idêntico ao encontrado quando R é inicialmente fornecido. Portanto além de não apresentar perdas significativas, podemos continuar com a otimização para qualquer caso proposto.

Continuando o processo de otimização da função custo, vamos aplicar as Equações (3.14a), (3.14b) em (3.13) com a condição (3.12) temos que o incremento ótimo durante a minimização será

$$\Delta \theta = - \left(\frac{\partial^2 J(\theta_i)}{\partial \theta^2} \right)^{-1} \frac{\partial J(\theta_i)}{\partial \theta}.$$

Feito isso, podemos calcular o gradiente da resposta do modelo de forma analítica, através da diferenciação das Equações (3.7a) e (3.7b), logo:

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{d\theta} \quad (3.20a)$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial g}{\partial \theta} + \frac{\partial g}{\partial x} \frac{dx}{d\theta}. \quad (3.20b)$$

O termo $\partial y/\partial \theta$ é a sensibilidade e as Equações (3.20) são chamadas equações de sensibilidade. O cálculo das sensibilidades podem se tornar laboriosas dependendo do sistema e incorrer em erros em modelos não-lineares e, nesses casos, podem ser substituídas por aproximações de derivadas sem apresentar perda. Neste trabalho serão analisados os métodos de aproximação de derivadas por diferenças finitas passo à frente, reverso, complexo e também os métodos direto e reverso, que são considerados exatos, tal qual os métodos analíticos. Para uma melhor compreensão do método do erro de saída observe o diagrama da Figura 2

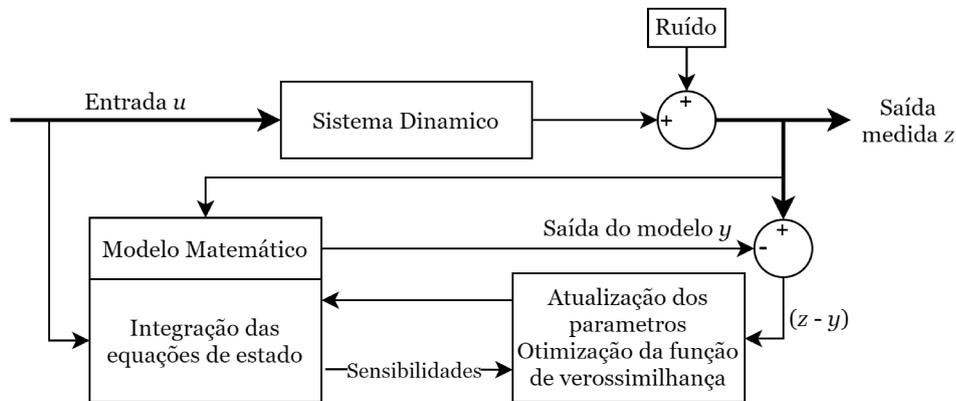


Figura 2 – Diagrama do método de erro de saída. Adaptado de (JATEGAONKAR, 2015, Figura 4.1)

Podemos resumir o procedimento utilizado no OEM nas seguintes etapas:

- 1 Escolha dos valores iniciais dos parâmetros θ ;
- 2 Cálculo das saídas do sistema y e do resíduo $(z - y)$, estimação da matriz de covariância do ruído R
- 3 Minimizar a função custo (verossimilhança);
- 4 Voltar ao passo 2 e verificar convergência.

Os passos descritos acima levam em consideração todas as simplificações citadas anteriormente, como suposição da matriz R sendo diagonal bem como a não-linearidade durante a minimização da função custo (JATEGAONKAR, 2015, Seç. 4.5).

3.3 Método do Erro de Equação

O método do erro de equação (EEM) parte do pressuposto que existe ruído apenas no processo, ou seja, as variáveis dos estados e suas derivadas estão disponíveis sem ruído associado. Como veremos a seguir, se trata de mais um caso especial da máxima verossimilhança e apesar da robustez ainda há um viés associado à identificação dos parâmetros devido ao fato de que é praticamente impossível eliminar o ruído de medição, sendo fortemente influenciado pela qualidade dos dados. Sensores de alta qualidade e sistemas bem montados podem aumentar consideravelmente a qualidade da aquisição dos dados, mas ainda assim, o engenheiro será responsável por avaliar se esses dados estão dentro dos requisitos. Algumas derivadas não podem ser diretamente obtidas dos sensores, como por exemplo as derivadas das velocidades angulares, tendo que ser estimada por algum método numérico derivativo (MORELLI; KLEIN, 2016, Seç. 6.4), (JATEGAONKAR, 2015, Seç. 6.1). Esse método pode ser visualizado no diagrama da Figura 3

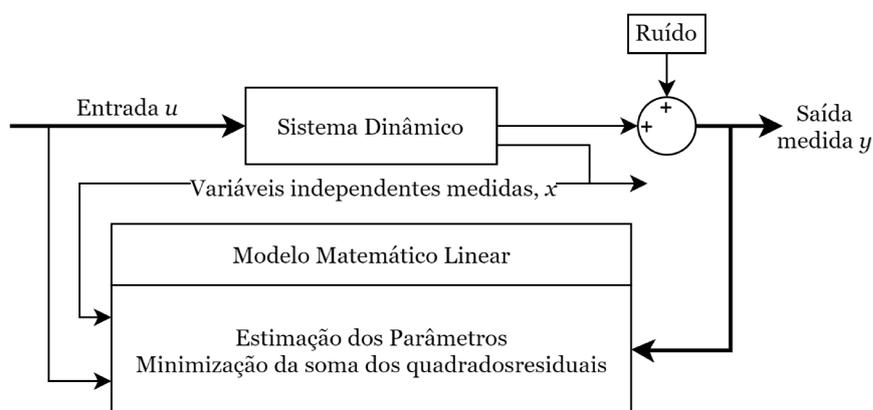


Figura 3 – Diagrama do método de erro de equação. Adaptado de (JATEGAONKAR, 2015, Figura 6.1)

Uma das técnicas mais simples pertencente à classe dos métodos de erro de equação é a técnica dos mínimos quadrados. Tais técnicas minimizam a função custo definida em

termos das equações de estado, onde sua relação de causa-efeito é descrita em termos das variáveis dependentes e independentes. As variáveis independentes são livre de ruído enquanto as variáveis dependentes tem adição de ruído branco, média zero e distribuição gaussiana. As variáveis dependentes, também chamadas de observações ou de variáveis resposta, $y_i(k)$ são dependentes linearmente das variáveis independentes, também chamados de regressores ou variáveis predictoras, $x_n(k)$, ambas no tempo t_k . Para N dados amostrais discretos, temos

$$y_i(k) = \theta_1 x_1(k) + \theta_2 x_2(k) + \dots + \theta_n x_n(k) + \varepsilon(k); \quad k = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3.21)$$

onde $\theta = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]^T$ é o vetor de parâmetros desconhecidos e ε é o erro nas variáveis independentes. Os parâmetros desconhecidos são as derivadas de estabilidade e controle e são tidas constante durante toda a amostra N e as variáveis independentes x são tidos como exatos e sem erro. Essas variáveis são os dados de deflexão de superfície de controle, derivadas de velocidades angulares, entre outros, necessários para obtenção dos modelos látero-direcionais e longitudinais (JATEGAONKAR, 2015, Seç. 6.2). Considerando o modelo linear com múltiplas entradas e erros em cada canal uma, também assumidos como independentes, a estimação é simplificada pois a regressão linear de cada medição pode ser feita individualmente (DUTRA, 2010, Seç. 4.2), sendo desnecessário o conhecimento da matriz de covariância do ruído. Podemos reescrever a Equação 3.21 como

$$Y = X\theta + \varepsilon \quad (3.22)$$

onde $Y = [y(1) \ y(2) \ y(3) \ \dots \ y(N)]^T$ é o vetor de observações (saídas medidas) e $\varepsilon = [\varepsilon(1) \ \varepsilon(2) \ \varepsilon(3) \ \dots \ \varepsilon(N)]^T$ é o vetor de erros de equação, ambos com tamanho $N \times 1$ e X é a matriz de variáveis independentes com tamanho $N \times n_y$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & x_2(2) & \dots & x_n(2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1(N) & x_2(N) & \dots & x_n(N) \end{bmatrix}.$$

Na prática temos um valor de N maior que n , auxiliando nossa estimação pois segundo a Jategaonkar (2015, Seç. 6.2) diz que "*o número redundante de dados contribui para uma estimação mais robusta*". A equação dos resíduos pode ser escrita a partir da Equação (3.22)

$$\varepsilon = Y - X\hat{\theta} \quad (3.23)$$

onde $\hat{\theta}$ passa a ser o parâmetro estimado. A função custo pode ser deduzida a partir da equação dos mínimos quadrados, logo

$$J(\theta) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N N\varepsilon^2 = \frac{1}{2} \varepsilon^T \varepsilon = \frac{1}{2} [Y - X\theta]^T [Y - X\theta]$$

e sua minimização é obtida quando temos sua derivada igualada à zero, portanto

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -Y^T X + \theta^T (X^T X) = 0$$

e se $(X^T X)$ for inversível

$$\hat{\theta} = (X^T X)^{-1} X^T Y$$

em que $\hat{\theta}$ é o parâmetro estimado ótimo que minimiza a função custo. Como citado anteriormente, o método do erro de equação apresentado aqui na forma dos mínimos quadrados leva à uma estimação inconsistente devido a natureza corrompida dos dados de saída com algum ruído. A solução proposta anteriormente de se utilizar sensores de qualidade pode se mostrar inviável financeiramente dependendo do orçamento do projeto. Técnicas de reconstrução de trajetória de voo também podem ser usadas para reduzir o ruído e ter melhores estimativas (DUTRA, 2010, Seç. 4.2). Outro ponto importante é que como o método dos mínimos quadrados não é iterativo para modelos lineares, podemos utiliza-lo como uma estimação inicial em outros métodos de estimação, como no método de erro de saída e o método de erro de filtro, que será apresentado a seguir. Para modelos não-lineares, aplicamos o método de forma iterativa.

3.4 Método do Erro de Filtro

O método de erro de filtro (FEM), também conhecido como erro de predição, é baseado no princípio da máxima verossimilhança e presume que o sistema avaliado seja estocástico, com ruído tanto na saída quanto no processo. Nessa abordagem o cálculo da função de verossimilhança é feito com estimação das distribuições de probabilidade, similar ao OEM, com uso de filtro de Kalman para sistemas lineares e Filtro de Kalman Estendido para sistemas não-lineares (AGUIRRE, 2004, Cap. 9). A principal diferença entre os dois é que no OEM o erro é contabilizado desde o início da captura dos dados, enquanto no FEM é contabilizado o erro de cada predição, que deverá ter seu valor convergindo para próximo de zero após estimação bem sucedida. Esse método é tido como o mais genérico entre os estimadores, possui robustez na análise de ensaios em voo com atmosfera turbulenta, fazendo boa filtragem do viés da atmosfera, apresentando dados semelhantes aos obtidos em atmosfera mais calma e pode ser visualizado no diagrama da Figura 4, (JATEGAONKAR, 2015, Cap. 5).

Em resumo, o método de erro de filtro pode ser interpretado de forma que o erro é proporcional à quantidade de correções necessárias (DUTRA, 2010, Seç. 4.4). Para sistemas estocásticos lineares a representação é

$$\dot{x} = f[x, u, \theta] + w \quad (3.24a)$$

$$y = g[x, u, \theta] \quad (3.24b)$$

$$z = y + v \quad (3.24c)$$

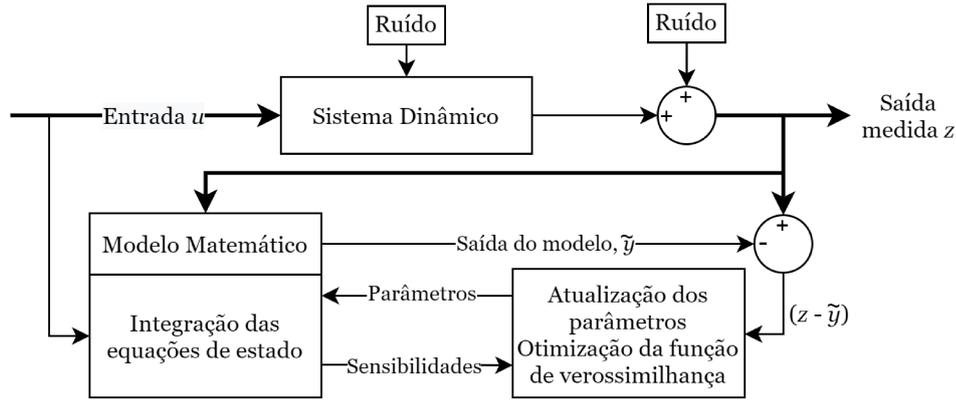


Figura 4 – Diagrama do método de erro de filtro. Adaptado de (JATEGAONKAR, 2015, Figura 5.1)

em que w é o ruído de processo e v na medição, ambos assumidos com distribuição gaussiana, branco e média zero. A estimação se dá em dois passos, nomeados predição e correção. A etapa de predição é dada pela integração da Equação (3.24c),

$$\begin{aligned}\tilde{x}(t_{k+1}) &= \hat{x}(t_k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f[x, u, \theta] dt, \quad \hat{x}(t_0) = x_0 \\ \tilde{y}(t_{k+1}) &= g[\tilde{x}(t_{k+1}), \delta(t_{k+1}), \theta]\end{aligned}$$

A etapa de correção é

$$\hat{x}(t_{k+1}) = \tilde{x}(t_{k+1}) + K[z(t_{k+1}) - \tilde{y}(t_{k+1})]$$

onde \tilde{x} e \hat{x} são os vetores de estados preditos e corrigidos, respectivamente. \tilde{y} é a saída predita (estimada), δ é a média das entradas de controle entre os dois pontos discretos e K é a matriz de ganho ótimo de Kalman, que pode ser chamado de filtro. Assumindo que existe pouco desvio na trajetória planejada para os ensaios e que os dados do movimento da aeronave são invariantes no tempo, o ganho K é constante durante todo o intervalo e o filtro para estados estáticos é dado por

$$K = PC^T R^{-1}$$

em que P é a matriz de covariância do erro predictor de estado, obtido da solução da equação de Raccati (RAOL; GIRIJA; SINGH, 2004). C é a matriz de observação do sistema linearizado, dado por

$$C = \left[\frac{\partial g[x, u, \theta]}{\partial x} \right]_{t=t_0}.$$

A função custo é similar à encontrada no OEM, ou seja

$$J(z, \theta, R) = -\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N [z(t_k) - \tilde{y}(t_k)]^T R^{-1} [z(t_k) - \tilde{y}(t_k)] - \frac{N}{2} \sum_{k=0}^N \ln |R| - \frac{\ln(2\pi)}{2} \sum_{k=0}^N n \quad (3.26)$$

a matriz de covariância é dada por

$$R = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N [z(t_k) - \tilde{y}(t_k)][z(t_k) - \tilde{y}(t_k)]^T.$$

O gradiente e sua matriz Hessiana são, respectivamente

$$\frac{\partial J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = - \sum_{k=0}^N \left[\frac{\partial \tilde{y}(t_k)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T R^{-1} [z(t_k) - \tilde{y}(t_k)] \quad (3.27a)$$

$$\frac{\partial^2 J(\boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}^2} = \sum_{k=0}^N \left[\frac{\partial \tilde{y}(t_k)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]^T R^{-1} \left[\frac{\partial \tilde{y}(t_k)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right]. \quad (3.27b)$$

O processo de minimização se dá de forma semelhante ao executado no OEM, utilizando método de Gauss-Newton.

4 Derivadas

Neste capítulo descreveremos os métodos utilizados para calcular as derivadas durante o processo de identificação de sistema.

Quando tratamos da otimização pelo método de Gauss-Newton na maioria dos métodos de otimização utilizados para identificação é necessário que os parâmetros sejam atualizados iterativamente. Para avaliar a função de custo do sistema, um algoritmo implementa as equações do modelo e faz as recursões necessárias. Assim, encontrar a resposta do sistema $y(t_k)$ bem como seus gradientes $\partial y(t_k)/\partial \theta$ de forma eficiente se torna um objetivo comum, para que por fim possa se obter o cálculo do erro. Os gradientes, conhecidos como Equações de Sensibilidades, relacionam as taxas entre os parâmetros dependentes e independentes, como por exemplo, nas Equações (3.20a) e (3.20b). Entretanto, o cálculo das derivadas da função custo são extremamente complicada para ser calculada analiticamente. Desta forma, duas possibilidades são apresentadas. Podemos utilizar os Métodos de Diferenças Finitas, que dependem apenas dos valores da função e avalia seu gradiente de forma completa ao final da etapa de avaliação da função. Podem ser do tipo *Passo à frente*, *Passo Central* e *Passo Complexo* de acordo com quais pontos avaliados serão feito os cálculos. A segunda alternativa é realizar o cálculo da derivada de cada passo do algoritmo que avalia a função, chamado de Diferenciação Algorítmica (AD), que pode ser do tipo *Direto* ou *Reverso* dependendo da ordem em que é executado. Sua aplicação é relativamente simples, porém, requerem cuidado para garantir eficiência (JATEGAONKAR, 2015, Seç. 4.8). Neste capítulo discutiremos sobre as formas das diferenças finitas e os métodos *direto* e *reverso*, que pode ser uma alternativa aos métodos AD no contexto das diferenciações automáticas.

4.1 Diferenças finitas

O método das diferenças finitas é um dos métodos mais simples e mais utilizados, baseado em uma aproximação do cálculo das derivadas oriundo diretamente do teorema de Taylor. O método pode ser descrito como uma perturbação muito pequena e finita na função em torno de um ponto de referencia, dessa forma podemos obter nossa aproximação de sua derivada. A definição de derivada pode ser demonstrada baseada no limite de uma função $f(x_0)$ em torno de um ponto x_0 em relação a x_i , assim

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \delta l_i) - f(x_0)}{\delta l_i} \quad (4.1)$$

onde δl_i é um incremento que causa uma perturbação na função. Observe que quando δ tende a zero precisamos que a função exista em um intervalo que possibilite que tal limite da função seja contínua tanto pela esquerda quanto pela direita, caso contrário dizemos que a função é não-diferenciável.

Aqui apresentamos três possíveis formas das diferenças finitas, sendo elas a diferença passo a frente, central e passo complexo, que podem ser interpretadas de acordo com as perturbações inseridas na avaliação das funções.

4.1.1 Passo a Frente

Uma das formas para obter a aproximação da derivada é quando avaliamos o gradiente ∇f de uma função diferenciável $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ no ponto $x = x_0$ em relação a um ponto $x = x_i$, imediatamente a frente de x_0 . Essa técnica é chamada de diferença finita passo a frente e é definida como

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_0 + \varepsilon l_i) - f(x_0)}{\varepsilon l_i} \quad (4.2)$$

onde ε é o tamanho da perturbação positiva e não nula aplicada e l_i é um vetor unitário que tem valor nulo para qualquer valor de $l \neq l_i$. Idealmente o valor de $\varepsilon \rightarrow 0$ quando consideramos a função no limite. O gradiente pode ser construído quando aplicamos $i = 1, 2, 3, \dots, n$, assim temos um custo de $(n + 1)$ avaliações devido a necessidade de calcular também x_0 em f . Pressupondo que a função f é continuamente diferenciável duas vezes e escolhendo um valor de εl_i que represente uma pequena perturbação compatível com uma variação perceptível no valor da função no ponto x_0 , a aplicação dessa aproximação permite reduzir o erro de tal forma que possa ser tão pequeno quanto queira. Partindo do teorema de Taylor (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, Teorema 2.1), temos

$$f(x + p) = f(x) + \nabla f(x)^T p + \frac{1}{2} p^T \nabla^2 f(x + tp) p \quad (4.3)$$

com valores de $t \in (0, 1)$ e p um valor qualquer que será utilizado como limitante. Atribuindo um valor L para o termo $\nabla^2 f(\cdot)$, que limita a função e rearranjando a Equação (4.3) de forma que o gradiente fique evidente, podemos assumir que a aproximação da Equação (4.2) é uma igualdade com a adição de um erro, ou seja

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = \frac{f(x_0 + \varepsilon l_i) - f(x_0)}{\varepsilon} + \delta_\varepsilon \quad (4.4)$$

onde espera-se que δ_ε seja um valor muito pequeno. Apesar do erro associado ser pequeno (ordem de $O(\varepsilon)$) a ponto de não interferir na aproximação isso só é válido nos casos em que valores infinitesimais podem ser utilizados. Quando tratamos de problemas matemáticos através de meios computacionais devemos respeitar algumas limitações das máquinas para o valor de ε , onde a ordem de grandeza dos resultados são limitados pelos valores que a máquina pode computar. Valores muito pequenos levam a *erro de truncamento* onde um cancelamento dos termos fornece derivada com valor nulo. Mesmo quando utilizados com valores de ponto flutuante, o que eleva a precisão, porém, em algumas aplicações ainda não é suficiente para obter o resultado desejado. Valores muito grandes levam a *erro de aproximação* onde ordens superiores da derivada apresentam grande influência no cálculo, fazendo com que o valor aproximado da derivada apresente um erro bastante expressivo em relação ao valor esperado. Esses dois tipos de

erro são levados em consideração quando se quer calcular derivadas por tais métodos, então uma unidade \mathbf{u} chamada de *unidade de arredondamento* delimita os valores que um número pode ter, em geral por volta de 1.1×10^{-16} . A unidade de arredondamento restringe significativamente os valores em que f pode ser calculado e um valor convencionalizado como ideal para maioria dos casos é $\varepsilon = \sqrt{\mathbf{u}}$, o que dá aproximadamente

$$\varepsilon = 1.0 \times 10^{-8}.$$

Esse ε leva a valores otimizados consideravelmente pequenos de forma que uma curva suave pode ser obtida, mas não permite que os valores das perturbações sejam muito próximos a ponto de incorrerem erros de aproximação, que ainda existem, mas são tão pequenos quanto $\sqrt{\mathbf{u}}$. Esse valor de ε é uma generalização, e pode variar um pouco quando uma rotina de otimização é feita a fim de se obter o valor ideal para aquele caso. Isso acrescenta um custo computacional, fazendo com que muitos autores utilizem o valor de ε próximo ao citado anteriormente sem nenhuma otimização prévia (NOCEDAL; WRIGHT, 2006, Sec. 8.1).

4.1.2 Diferença Central

O método da diferença finita com passo central é uma forma mais elaborada, também decorrente do teorema de Taylor que considera valores imediatamente à frente e atrás de um valor de referência, e pode ser definido como

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} \approx \frac{f(x_0 + \varepsilon l_i) - f(x_0 - \varepsilon l_i)}{2\varepsilon l_i} \quad (4.5)$$

onde se faz necessário o cálculo dos valores para as duas funções $f(x_0 + \varepsilon l_i)$ e $f(x_0 - \varepsilon l_i)$. Isso torna essa operação quase duas vezes mais custosa, necessitando de $(2n + 1)$ avaliações. Novamente, partindo do teorema de Taylor, e substituindo o valor de p por $p = \varepsilon l_i$ e $p = -\varepsilon l_i$, temos

$$f(x + \varepsilon l_i) = f(x) + \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + O(\varepsilon^3) \quad (4.6a)$$

$$f(x - \varepsilon l_i) = f(x) - \varepsilon \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \varepsilon^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} + O(\varepsilon^3) \quad (4.6b)$$

equacionando na forma de (4.5), temos

$$\frac{\partial f(x_0)}{\partial x_i} = \frac{f(x_0 + \varepsilon l_i) - f(x_0 - \varepsilon l_i)}{2\varepsilon} + O(\varepsilon^2) \quad (4.7)$$

que apresenta um erro menor que o encontrado em (4.4), porém, com um custo computacional maior. Considerando a unidade de arredondamento, um valor ótimo para efetuar as avaliações fica em torno de $\varepsilon = \mathbf{u}^{1/3}$ enquanto o erro associado é por volta de $\mathbf{u}^{2/3}$.

4.1.3 Passo Complexo

O método de diferenciação via passo complexo é similar ao método das diferenças finitas de passo a frente e utiliza a definição encontrada na Equação (4.4), porém, vamos considerar a função $f(z) = u + iv$ com $z = x + iy$. Sendo f diferenciável em \mathbb{C} das equações de Cauchy-Riemann, temos

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial v}{\partial x}.\end{aligned}$$

Esse método pode ser utilizado em algoritmos em que a função possa ser avaliada e diferenciável tanto com argumentos reais ou complexos. Utilizando o método das diferenças finitas passo a frente para avaliar a função f , temos

$$\frac{\partial u}{\partial x} \approx \frac{v(x + i(y+h)) - v(x + iy)}{\varepsilon} \quad (4.9)$$

em que ε é o tamanho do passo, real. Dado que as funções e variáveis avaliadas são reais, $y = 0$, $u(x) = f(x)$ e $v(x) = 0$, podemos reescrever a Equação (4.9) para

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{Im[f(x + i\varepsilon)]}{\varepsilon} \quad (4.10)$$

com um valor de ε pequeno. Observe que não há subtração aplicada na operação, logo não lida com erros de aproximação. Essa é a principal vantagem desse método. Quando aplicamos o passo ε diretamente na função e expandimos em Taylor, podemos observar que

$$f(x + i\varepsilon) = f(x) + i\varepsilon \frac{df}{dx} - \frac{1}{2}\varepsilon^2 \frac{d^2f}{dx^2} - i\varepsilon^3 \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \dots \quad (4.11)$$

utilizando a parte imaginária dos dois lados da expansão em (4.11), e dividimos ambos por ε , temos

$$\frac{df}{dx} = \frac{Im[f(x + i\varepsilon)]}{\varepsilon} + \varepsilon^2 \frac{1}{3!} \frac{d^3f}{dx^3} + \dots, \quad (4.12)$$

onde o erro é da ordem de $O(\varepsilon^2)$, obtemos o valor da derivada de f em relação a x . Tomando a parte Real de (4.11) e reorganizando os termos, temos

$$f(x) = Re[f(x + i\varepsilon)] + \varepsilon^2 \frac{1}{2!} \frac{d^2f}{dx^2} + \dots, \quad (4.13)$$

que é o valor da função no ponto x . Isso mostra que quando avaliamos a diferença finita utilizando o passo complexo podemos obter o valor da função real no ponto x no mesmo passo que obtemos sua derivada. Essa solução mostra que a derivada passo complexo pode ser vantajosa quando queremos uma solução simples, porém, bastante eficiente em termos computacionais, principalmente em linguagens como Python ou Matlab, onde o mesmo algoritmo pode avaliar funções com argumentos reais e complexos. Além disso, como pode ser visto em (MACHADO;

DUTRA, 2021) e em (MARTINS; STURDZA; ALONSO, 2003, Seç. 2.2), podemos diminuir o valor do passo ε sem incorrer em erro de aproximação.

As diferenças finitas apresentam simplicidade, o que incorre na facilidade de implementação em código, porém, o erro associado ao tamanho do passo se mostra um grande limitante em determinadas aplicações, mesmo com esse sendo menor no passo complexo. Uma característica negativa desses métodos é sua demora de execução, principalmente quando trata matrizes de ordens superiores (MARGOSSIAN, 2019).

4.2 Diferenciação Algorítmica e Modos de Cálculo de Derivadas

Diferenciação automática ou diferenciação algorítmica é um termo genérico que engloba os métodos de diferenciação computacional que usam uma representação da função para fornecer o valor de suas derivadas. Esse tipo de diferenciação parte do princípio que por mais complicada que uma função seja, a mesma pode ser decomposta em várias etapas fundamentais com um ou dois elementos. As etapas com apenas um elemento são as funções ditas elementares; trigonométricas, exponencial e logarítmica. Etapas com dois elementos são soma, subtração, multiplicação, divisão e potenciação. Essa decomposição em funções mais elementares, chamadas de *intermediárias*, funciona em conjunto com a aplicação da regra da cadeia, que pode calcular a jacobiana completa ao final do procedimento.

Inicialmente vamos definir a notação com base em (GRIEWANK; WALTHER, 2008, Seç. 3.1). Seja uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$\begin{aligned} \{v_{1-n}, \dots, v_0\} &\rightarrow \text{Variáveis independentes, } x \\ \{v_1, v_2, \dots, v_{l-m}\} &\rightarrow \text{Variáveis intermediárias} \\ \{v_{l-m+1}, \dots, v_l\} &\rightarrow \text{Saídas, } y \end{aligned}$$

onde n é o número de variáveis independentes, v_i com índice $i > 0$ são as variáveis intermediárias. Observe que o último passo é atribuir a última (ou as últimas) funções intermediárias como saída da função. O número de saídas depende do conjunto avaliado. De forma simplificada, vamos exemplificar uma decomposição de uma função, sendo

$$y = f(x) = \frac{x_1 x_2 \sin x_3 + e^{x_1 x_2}}{x_3}. \quad (4.14)$$

Para decompor a função devemos notar que nesse exemplo o termo $x_1 x_2$ deve ser o primeiro termo intermediário devido sua multiplicação pelas funções $\sin(\cdot)$ e $e^{(\cdot)}$, com dependência direta dos termos independentes. Aplicando a decomposição a toda a estrutura da função podemos montar a Tabela 3 com todos as funções intermediárias

Independentes	Intermediárias	Saídas
$v_{-2} = x_1$	$v_1 = v_{-2} \cdot v_{-1}$	$y_1 = v_6$
$v_{-1} = x_2$	$v_2 = \sin v_0$	
$v_0 = x_3$	$v_3 = e^{v_1}$	
	$v_4 = v_1 \cdot v_2$	
	$v_5 = v_3 + v_4$	
	$v_6 = v_5 / v_0$	

Tabela 3 – Funções intermediárias de $f(x)$.

O valor da variável v_6 é o valor da função y que buscamos, as funções v_{-2} , v_{-1} e v_0 são as variáveis independentes e as variáveis (v_1, \dots, v_6) são as intermediárias. Essa quebra não precisa ser executada pelo usuário, o próprio algoritmo cuida dos termos intermediários que frequentemente são avaliados de forma analítica. Esse exemplo utiliza o fluxo de cálculo tal qual esperado, conhecido como *forward sweep*, algo como “varredura direta”. A fim de simplificar mais ainda a notação, vamos definir que as funções elementares são ϕ_i cujo argumento é v_j com $j < i$, logo

$$v_i = \phi_i(v_j)_{j \prec i},$$

onde o símbolo \prec indica que v_i depende diretamente de v_j , seu antecessor. No nosso exemplo v_2 depende de v_0 , logo $0 \prec 2$ assim como $1 \prec 3$, mas $-2 \not\prec 3$. Entretanto, $-2 \prec 1 \prec 3$. Observe o diagrama da Figura 5.

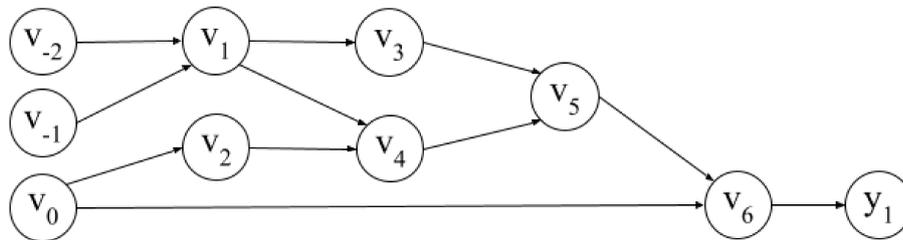


Figura 5 – Grafo computacional da avaliação da função

A utilização da regra da cadeia deve ser feita às funções intermediárias para se obter a derivada, porém, existem duas maneiras de se proceder. A maneira mais intuitiva é quando avaliamos os valores das derivadas (independentes, intermediárias e saídas) na mesma etapa em que avaliamos o valor da função, nesse caso é chamado de modo direto. Também existe a possibilidade de se avaliar o valor das derivadas após o cálculo de todas as funções, chamado de modo reverso. Em ambos os casos os índices das funções precisam ser salvos para eventual consulta quando suas derivadas forem avaliadas. Nas seções seguintes vamos analisar os modos direto e reverso do cálculo. Devemos lembrar que a diferenciação automática é uma aplicação dos métodos direto e reverso, podendo esses dois serem feitos de forma analítica, o que significa que não estão restritos apenas à aplicações computacionais. Mais detalhes podem ser encontrados em Margossian (2019), Nocedal e Wright (2006, Cap. 8) e Griewank e Walther (2008, Cap. 3).

4.2.1 Modo Direto

Suponha a função $f(g(x))$ com $g \in \mathbb{R}^m$ e $x \in \mathbb{R}^n$, podemos escrever a regra da cadeia

$$\frac{df(g(x))}{dx} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial g_i} \frac{dg_i(x)}{dx}.$$

No modo direto vamos calcular os valores de cada derivada da etapa intermediária em relação aos parâmetros independentes com auxílio de um termo $\dot{v} \in \mathbb{R}^n$ que ‘direciona’ a função, ao passo que também é feito o cálculo de x_i . Ou seja, iremos calcular a função com auxílio de um guia, \dot{v} sendo este a derivada da função v_i em relação aos termos dos quais depende. Reforçamos ao leitor para não confundir com a derivada temporal da função, cuja notação similar é muito utilizada na literatura. As derivadas direcionais \dot{v} são chamadas de vários nomes, *Seed vector*, *Seed directions* ou ainda de tangentes. Observe a Tabela 4:

$v_{i-n} \equiv x_i$	$\dot{v}_{i-n} \equiv \dot{x}_i$	$i = 1, \dots, n$
$v_i \equiv \phi_i(v_j)_{j < i}$	$\dot{v}_i \equiv \sum_{j < i} \frac{\partial \phi_i(v_j)_{j < i}}{\partial v_j} * v_j$	$i = 1, \dots, l$
$y_{m-i} \equiv v_{l-i}$	$\dot{y}_{m-i} \equiv \dot{v}_{l-i}$	$i = m-1, \dots, 0$

Tabela 4 – Passos para obtenção da derivada direta

Aplicando o método no exemplo, temos

Funções intermediárias	Derivadas
$v_{-2} = x_1$	$\dot{v}_{-2} = \dot{x}_1$
$v_{-1} = x_2$	$\dot{v}_{-1} = \dot{x}_2$
$v_0 = x_3$	$\dot{v}_0 = \dot{x}_3$
$v_1 = v_{-2} \cdot v_{-1}$	$\dot{v}_1 = \dot{v}_{-2} \cdot v_{-1} + v_{-2} \cdot \dot{v}_{-1}$
$v_2 = \sin v_0$	$\dot{v}_2 = \dot{v}_0 \cos v_0$
$v_3 = e^{v_1}$	$\dot{v}_3 = \dot{v}_1 e^{v_1}$
$v_4 = v_1 \cdot v_2$	$\dot{v}_4 = \dot{v}_1 \cdot v_2 + v_1 \cdot \dot{v}_2$
$v_5 = v_3 + v_4$	$\dot{v}_5 = \dot{v}_3 + \dot{v}_4$
$v_6 = v_5 / v_0$	$\dot{v}_6 = (\dot{v}_5 - \dot{v}_6) / v_0$
$y_1 = v_6$	$\dot{y}_1 = \dot{v}_6$

Tabela 5 – Traço da derivada direta

De forma semelhante a avaliação direta, temos o diagrama em conjunto do modo direto na Figura 6.

Note que as derivadas são calculadas imediatamente a seguir de suas respectivas funções, daí o nome “direto”. Apesar das tangentes possuir semelhança com a regra da cadeia convencional, destaca-se que seu cálculo é feito apenas para uma entrada por vez devido à derivada parcial nas entradas, ou seja, a cada etapa calculamos uma nova coluna da matriz jacobiana para

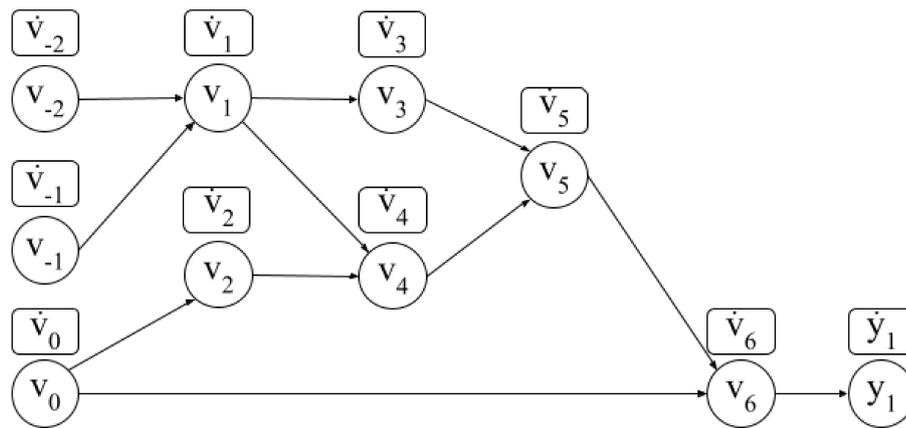


Figura 6 – Diagrama computacional da avaliação da derivada modo direto

um parâmetro de dependência da função. Isso ajuda a economizar poder de processamento e memória, pois caso fossemos calcular os valores de \dot{v}_i para todos os termos de uma só vez, precisaríamos conhecer de antemão os valores das funções v_i e suas respectivas derivadas. Entretanto, para obtermos a matriz completa da jacobiana precisaríamos repetir o processo um total de vezes correspondente ao número de entradas que se avalia, o que pode se tornar custoso.

4.2.2 Modo Reverso

O modo reverso é análogo ao caminho inverso do direto com a diferença que conta com auxílio de uma quantidade chamada *adjunto*, que nada mais é do que a derivada da função intermediária em relação aos seus sucessores multiplicado pelo adjunto do respectivo sucessor. Observe que desta forma é necessário saber de antemão o adjunto daquele respectivo sucessor, o que pode ser resolvido quando os adjuntos são calculados da última função até a primeira, daí o nome “reverso”. As funções intermediárias são calculadas primeiro, para em seguida serem calculados os adjuntos, ao custo total de m passos para o cálculo da Jacobiana completa. De forma mais pragmática, temos a Tabela 6

Função			Intervalo
v_{i-n}	\equiv	x_i	$i = 1, \dots, n$
v_i	\equiv	$\phi_i(v_j)_{j < i}$	$i = 1, \dots, l$
y_{m-i}	\equiv	v_{l-i}	$i = m - 1, \dots, 0$
\bar{v}_{l-i}	\equiv	\bar{y}_{m-i}	$i = m - 1, \dots, 0$
\bar{v}_j	\equiv	$\sum_{i < j} \frac{\partial \phi_i(v_j)_{j < i}}{\partial v_j} * \bar{v}_i$	$i = l - m, \dots, 1 - n$
\bar{x}_i	\equiv	v_{i-n}	$i = n, \dots, 1.$

Tabela 6 – Passos para obtenção da derivada reversa

Isso reitera a afirmação que esse método exige a passagem pelo traço da avaliação duas vezes, uma na direção normal e outra na contrária. Apesar de exigir memória através dos

apontadores para guardar todos os endereços das variáveis no traço, esse método não calcula o valor dos adjuntos imediatamente, apenas quando solicitado. Isso faz com que apenas os apontadores sejam realmente necessários, fazendo com que a avaliação de apenas um dos adjuntos não implique no cálculo de variáveis intermediárias que não estão diretamente relacionados com a derivada solicitada. Aplicando ao nosso exemplo, podemos demonstrar as Tabelas 7 e 8.

Tabela 7 – Traço da função

$v_{-2} = x_1$
$v_{-1} = x_2$
$v_0 = x_3$
$v_1 = v_{-2} \cdot v_{-1}$
$v_2 = \sin v_0$
$v_3 = e^{v_1}$
$v_4 = v_1 \cdot v_2$
$v_5 = v_3 + v_4$
$v_6 = v_5 / v_0$
$y_1 = v_6$

Tabela 8 – Traço do gradiente reverso da Tabela 7

$\bar{y}_1 = \bar{v}_6 = 1$
$\bar{v}_5 = 1 / v_0 \bar{v}_6$
$\bar{v}_4 = \bar{v}_5$
$\bar{v}_3 = \bar{v}_5$
$\bar{v}_2 = v_1 \bar{v}_4$
$\bar{v}_1 = e^{v_1} \bar{v}_3 + v_2 \bar{v}_4$
$\bar{v}_0 = \cos v_0 \cdot \bar{v}_2 + v_5 / v_0^2 \bar{v}_6$
$\bar{v}_{-1} = v_{-2} \bar{v}_1$
$\bar{v}_{-2} = v_{-1} \bar{v}_1$

O caminho do cálculo da derivada pode ser exemplificado através da Figura 7.

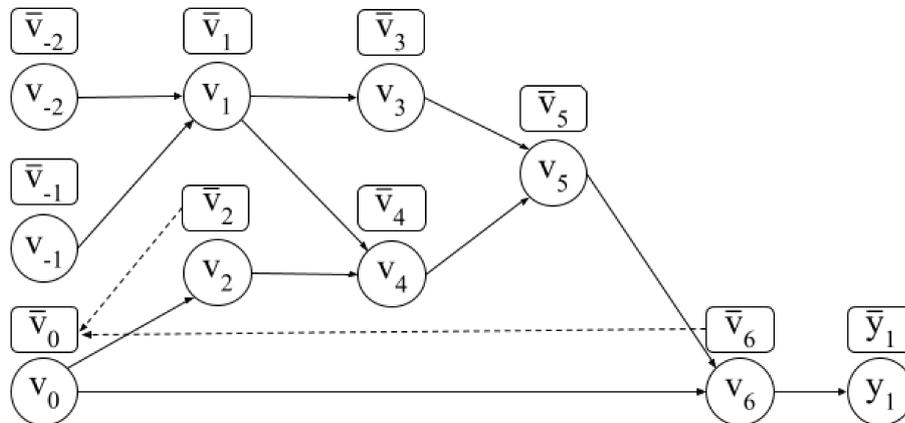


Figura 7 – Grafo computacional da avaliação da derivada modo reverso

Fica evidente na Figura 7 o sentido inverso do cálculo dos adjuntos em relação às funções intermediárias. Observe, por exemplo, o cálculo da derivada total em relação a v_0 , teríamos que saber apenas os adjuntos das funções dependentes e suas derivadas parciais em relação aquela entrada. Também assim como no exemplo, precisamos do valor de algumas entradas, entretanto isso não adiciona custo pois tais números já foram previamente armazenados. Surge então a dúvida de qual seria a vantagem de se utilizar o método reverso visto que os valores intermediários e seus apontadores precisam ser salvos, o que implicaria em um custo computacional e de memória maior e sem grande rigor, podemos dizer que quando temos $n > m$ e supondo que seja necessário o cálculo de todos os elementos da matriz jacobiana, então o método

direto se mostra vantajoso pois necessita de m passos para fornecer os resultados. Espera-se que quando $n \gg m$, ou seja, o número de entradas é muito maior que o número de saídas então o modo reverso se mostre bastante vantajoso. Quando $n \leq m$ o modo direto aparenta ter melhor desempenho, as decomposições das funções em partes elementares e o armazenamento desses valores consomem memória, mas como o procedimento será repetido poucas vezes o custo pode ser menor. Outro ponto importante a ser notado que é característica tanto do modo direto quanto do modo reverso é que tais métodos analíticos proporcionam o cálculo das derivadas totais usando apenas derivadas parciais.

4.3 Modo Direto e Reverso no Método de Erro de Saída

Para avaliação da função custo da Equação 3.10 quando a matriz de covariância é fornecida inicialmente, é necessário o cálculo do erro. Desta forma podemos elaborar o seguinte Pseudocódigo apresentado em 1:

Algoritmo 1 Avaliação do OEM

Entradas: $x_1, u, z, t, \theta, R, N$

Os argumentos de entrada da função são o estado inicial x_1 ; os instantes de tempo t_k , as entradas u_k e saídas medidas z_k do sistema para todas as amostras $k = 1, \dots, N$; o vetor de parâmetros θ ; a matriz de covariância das medidas R ; e o número de amostras N .

- 1: $J \leftarrow 0$ ▷ Inicializa o custo
 - 2: **Para** $k \leftarrow 1, \dots, N - 1$ **Faça** ▷ Avaliando todos os pontos
 - 3: $\Delta_k \leftarrow t_{k+1} - t_k$ ▷ Incremento de tempo
 - 4: $y_k \leftarrow g(x_k, u_k, \theta)$ ▷ Avaliação das funções de saída
 - 5: $e_k \leftarrow z_k - y_k$ ▷ erro
 - 6: $J \leftarrow J + \frac{1}{2} e_k^T R^{-1} e_k$ ▷ Custo
 - 7: $f_k \leftarrow f(x_k, u_k, \theta)$ ▷ Avaliação da dinâmica do sistema
 - 8: $x_{k+1} \leftarrow x_k + f_k \Delta_k$ ▷ Método de Euler
 - 9: **Fim Para**
 - 10: $y_N \leftarrow g(x_N, u_N, \theta)$ ▷ Avaliação da saída no último instante
 - 11: $e_N \leftarrow z_N - y_N$ ▷ erro
 - 12: $J \leftarrow J + \frac{1}{2} e_N^T R^{-1} e_N$ ▷ Custo
 - 13: **Retorna** J
-

Observe que a avaliação da função necessita de um valor inicial, no caso é zero, sendo atualizado a cada novo ponto avaliado, com o método de Euler para integrar os valores das funções de estado. Casos que a matriz de covariância não seja fornecida inicialmente, podemos efetuar o cálculo da matriz R_k segundo os dois métodos apresentados anteriormente, tal como na Equação (3.15), por exemplo, entretanto não serão descritos aqui.

Para se obter o algoritmo para o cálculo do gradiente do custo do método do erro de saída utilizando diferenciação por modo direto, basta calcular a derivada de cada linha do Algoritmo 1. O cálculo da derivada é feito na mesma ordem que o cálculo da função, e cada instrução do cálculo da derivada pode ser executada logo após a instrução correspondente do cálculo da

função. Em conjunto com o método de Euler para implementar cada nova derivada das funções de saída, podemos fazer

$$\frac{\partial y(t_k; \theta)_i}{\partial \theta_j} = \left[\frac{\partial g(x(t_k; \theta), u(t_k), \theta)}{\partial x} \right] \frac{\partial x(t_k; \theta)_i}{\partial \theta_j} + \frac{\partial g(x(t_k; \theta), u(t_k), \theta)}{\partial \theta}. \quad (4.15)$$

De maneira análoga para as variáveis dos vetores de estado, temos;

$$\frac{\partial x(t_{k+1}; \theta)_i}{\partial \theta_j} = \left[\Delta_k \frac{\partial f(x(t_k; \theta), u(t_k), \theta)}{\partial x} + \mathbf{I} \right] \frac{\partial x(t_k; \theta)_i}{\partial \theta_j} + \Delta_k \frac{\partial f(x(t_k; \theta), u(t_k), \theta)}{\partial \theta}. \quad (4.16)$$

Essas etapas utilizando o método de Euler deve ser avaliada no ponto $\partial x(0; \theta)_i / \partial \theta_j = 0$ inicialmente. T é o período de amostragem utilizado para solução das equações, necessário quando as funções se apresentam na forma implícita, como no caso dos resíduos. Os índices i e j formam uma matriz que contempla todas as funções de estados e saídas assim como todos os parâmetros. Desta forma podemos apresentar o seguinte Pseudocódigo 2 com as etapas do processo por inteiro;

Novamente, observe a sequencia de etapas no pseudocódigo no Algoritmo 2 em que o gradiente é calculado seguindo a ordem direta da avaliação. Após essa etapa o otimizador utiliza iterações afim de obter os valores dos parâmetros até que uma convergência seja atingida. Nos métodos de diferenciação por diferenças finitas a etapa $\frac{dy}{dp}$ varia de acordo com qual método está sendo avaliado, diferentemente do apresentado.

Para o modo reverso vamos partir do pressuposto que a matriz R é dada, utilizando a Equação (3.10) com o segundo e terceiro termos constantes. Inicialmente temos a integração das funções x da Equação 3.7a. Três definições serão feitas afim de simplificar a notação, das funções de estado, custo e saídas de forma que

$$\begin{aligned} x_k &= T f(x_{k-1}, u_{k-1}, \theta) + x_{k-1} \triangleq E(x_{k-1}, u_{k-1}, \theta) \\ y_k &\triangleq g(x_k, u_k, \theta), \\ J(z, \theta, R) &\triangleq h(y_1, \dots, y_k) \end{aligned} \quad (4.17a)$$

Algoritmo 2 Diferenciação por Modo Direto do OEM**Entradas:** $x_1, u, z, t, \theta, R, N$

Os argumentos de entrada da função são o estado inicial x_1 ; os instantes de tempo t_k as entradas u_k e saídas medidas z_k do sistema para todos as amostras $k = 1, \dots, N$; o vetor de parâmetros θ ; a matriz de covariância das medidas R ; e o número de amostras N .

- 1: $J \leftarrow 0$ ▷ Inicializa o custo
- 2: $\frac{\partial x_1}{\partial \theta} \leftarrow 0$ ▷ Inicializa a derivada do estado inicial
- 3: $\frac{\partial J}{\partial \theta} \leftarrow 0$ ▷ Inicializa a derivada do custo
- 4: **Para** $k \leftarrow 1, \dots, N - 1$ **Faça** ▷ Avaliando todos os pontos
- 5: $\Delta_k \leftarrow t_{k+1} - t_k$ ▷ Incremento de tempo
- 6: $y_k \leftarrow g(x_k, u_k, \theta)$ ▷ Avaliação das funções de saída
- 7: $\frac{\partial y(t_k; \theta)_i}{\partial \theta_j} \leftarrow$ Equação (4.15) ▷ Derivada da linha anterior
- 8: $e_k \leftarrow z_k - y_k$ ▷ erro
- 9: $\frac{\partial e_k}{\partial \theta} \leftarrow -\frac{\partial y_k}{\partial \theta}$ ▷ Derivada da linha anterior
- 10: $J \leftarrow J + \frac{1}{2} e_k^T R^{-1} e_k$ ▷ Custo
- 11: $\frac{\partial J}{\partial \theta} \leftarrow \frac{\partial J}{\partial \theta} + \frac{\partial e_k}{\partial \theta}^T R^{-1} e_k$ ▷ Derivada da linha anterior
- 12: $f_k \leftarrow f(x_k, u_k, \theta)$ ▷ Avaliação da dinâmica do sistema
- 13: $\frac{\partial f_k}{\partial \theta} \leftarrow \frac{\partial f(x_k, u_k, \theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial f(x_k, u_k, \theta)}{\partial x} \frac{\partial x_k}{\partial \theta}$ ▷ Derivada da linha anterior
- 14: $x_{k+1} \leftarrow x_k + f_k \Delta_k$ ▷ Método de Euler
- 15: $\frac{\partial x(t_{k+1}; \theta)_i}{\partial \theta_j} \leftarrow$ Equação (4.16) ▷ Derivada da linha anterior
- 16: **Fim Para**
- 17: $y_N \leftarrow g(x_N, u_N, \theta)$ ▷ Avaliação da saída no último instante
- 18: $\frac{\partial y_N}{\partial \theta} \leftarrow$ Equação (4.15) ▷ Derivada da linha anterior no ponto N
- 19: $e_N \leftarrow z_N - y_N$ ▷ erro
- 20: $\frac{\partial e_N}{\partial \theta} \leftarrow -\frac{\partial y_N}{\partial \theta}$ ▷ Derivada da linha anterior
- 21: $J \leftarrow J + \frac{1}{2} e_N^T R^{-1} e_N$ ▷ Custo
- 22: $\frac{\partial J}{\partial \theta} \leftarrow \frac{\partial J}{\partial \theta} + \frac{\partial e_N}{\partial \theta}^T R^{-1} e_N$ ▷ Derivada da linha anterior
- 23: **Retorna** J e $\frac{\partial J}{\partial \theta}$

Dessa forma, seguindo a lógica do método reverso, temos que criar os termos adjuntos

$$\bar{y}_k = \left(\frac{\partial h}{\partial y_k} \right)^T \bar{J} \quad (4.18a)$$

$$\bar{x}_k = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^T \bar{y}_k$$

$$\bar{\theta} = \left(\frac{\partial g}{\partial \theta} \right)^T \bar{g}_k + \bar{\theta}$$

$$\bar{x}_{k-1} = \left(\frac{\partial E}{\partial x} \right)^T \bar{x}_k \quad (4.18b)$$

$$\bar{\theta} = \bar{x}_k + \bar{\theta} + \left(\frac{\partial E}{\partial \theta} \right)^T \bar{x}_k \quad (4.18c)$$

Observe que a forma apresentada é incremental, necessitando da avaliação imediatamente

anterior do mesmo termo, com o valor de $\bar{J} = 1$. Esse método aplicado ao OEM pode ser ainda mais otimizado caso a solução das equações utilize algum outro método de linearização para avaliar as funções, visto que o método de Euler pode se tornar ineficiente dependendo do tipo de função e no truncamento utilizado. Novamente, observe que obtemos o valor do parâmetro θ em relação as derivadas apenas nas saídas das quais possuem dependência. Observe o Pseudocódigo 3.

Com intuito de comparar os métodos derivativos podemos utilizar a complexidade temporal, tema que surgiu nos estudos de ciência da computação, que mede a quantidade de tempo necessária para execução de um algoritmo. Dessa forma, quando comparamos o tempo de execução de algoritmos semelhantes podemos dizer qual é mais eficiente (COOK, 1983), (GAREY, 1979).

Para medir o tempo de cada etapa precisamos definir um termo que faça uma comparação justa entre os algoritmos escritos, de forma que mesmo que a quantidade dados variem de tamanho, ainda possamos comparar tais modelos. Definido Instancia, termo que engloba os objetos de uma mesma classe, ou seja, elementos que compartilham características semelhantes e podem ser agrupados, é esperado que a complexidade de um algoritmo varie conforme o tamanho das instancias que o compõem. No caso dos modelos aeronáuticos que caracterizamos neste trabalho, podemos nos referir a instancia como sendo as entradas, saídas, equações de estado e equações de saída do modelo, utilizando símbolos e termos que representem tais elementos. O tema complexidade é bastante amplo, sendo que os detalhes fogem do escopo deste trabalho. Para mais informações sobre complexidade assintótica, funcional, classes de complexidade, problema P-NP, etc., recomendamos a leitura de (ZOMAYA et al., 1996), (COOK, 1971), (BARBOSA; TOSCANI; RIBEIRO, 1991), (VELOSO; TOSCANI, 2001) e (GAREY, 1979). Os códigos-fonte utilizados neste trabalho estão disponíveis no Apêndice B.

4.3.1 Comparação entre os Métodos

Aplicando os modelos das manobras de período curto e látero-direcional em dados fornecidos por (JATEGAONKAR, 2015, Cap 4, sec 4.20.1) no método do erro de saída, obtemos os dados de saída referente ao ângulo de ataque representados no gráfico da Figura 9 e velocidade de arfagem nas Figuras 10, todas na Seção Apêndices A. Para os gráficos referente a saída do modelo latero-direcional temos a saída da aceleração lateral nas Figuras 11, velocidade de guinada nas Figuras 13 e velocidade de rolamento nas Figuras 12. Observamos que em todos os resultados o modelo retorna respostas semelhantes, apresentando convergência satisfatória.

Avaliando os custos computacionais das etapas tanto para derivada direta quanto para reversa podemos destacar a seguinte tabela com a quantidade de somas e multiplicações em cada instancias nessa aplicação. Observe a Tabela 9 para derivada direta.

Para derivada reversa, temos a Tabela 10.

Algoritmo 3 Diferenciação por Modo Reverso do OEM**Entradas:** $x_1, u, z, t, \theta, R, N$

Os argumentos de entrada da função são o estado inicial x_1 ; os instantes de tempo t_k , as entradas u_k e saídas medidas z_k do sistema para todos as amostras $k = 1, \dots, N$; o vetor de parâmetros θ ; a matriz de covariância das medidas R ; e o número de amostras N .

- 1: $J \leftarrow 0$ ▷ Inicializa o custo
- 2: **Para** $k \leftarrow 1, \dots, N - 1$ **Faça** ▷ Avaliando todos os pontos
- 3: $\Delta_k \leftarrow t_{k+1} - t_k$ ▷ Incremento de tempo
- 4: $y_k \leftarrow g(x_k, u_k, \theta)$ ▷ Avaliação das funções de saída
- 5: $e_k \leftarrow z_k - y_k$ ▷ erro
- 6: $J \leftarrow J + \frac{1}{2} e_k^T R^{-1} e_k$ ▷ Custo
- 7: $f_k \leftarrow f(x_k, u_k, \theta)$ ▷ Avaliação da dinâmica do sistema
- 8: $x_{k+1} \leftarrow x_k + f_k \Delta_k$ ▷ Método de Euler
- 9: **Fim Para**
- 10: $y_N \leftarrow g(x_N, u_N, \theta)$ ▷ Avaliação da saída no último instante
- 11: $e_N \leftarrow z_N - y_N$ ▷ erro
- 12: $J \leftarrow J + \frac{1}{2} e_N^T R^{-1} e_N$ ▷ Custo

Até esse ponto o algoritmo calcula as variáveis internas e a saída da função. Em seguida, são calculadas as variáveis adjuntas a partir das derivadas parciais de cada instrução do algoritmo.

- 13: $\bar{J} \leftarrow 1$ ▷ Inicializa a variável adjunta do retorno da função
- 14: $\bar{e}_N \leftarrow R^{-1} e_N \bar{J}$ ▷ Derivada da linha 12
- 15: $\bar{y}_N \leftarrow -\bar{e}_N$ ▷ Derivada da linha 11
- 16: $\bar{x}_N \leftarrow \left(\frac{\partial g(x_N, u_N, \theta)}{\partial x} \right)^T \bar{y}_N$ ▷ Derivada da linha 10
- 17: $\bar{\theta} \leftarrow \left(\frac{\partial g(x_N, u_N, \theta)}{\partial \theta} \right)^T \bar{y}_N$ ▷ Derivada da linha 10
- 18: **Para** $k \leftarrow N - 1, \dots, 1$ **Faça** ▷ Avaliando todos os pontos em ordem reversa
- 19: $\bar{x}_k \leftarrow \bar{x}_{k+1}$ ▷ Derivada da linha 8
- 20: $\bar{f}_k \leftarrow \Delta_k \bar{x}_{k+1}$ ▷ Derivada da linha 8
- 21: $\bar{x}_k \leftarrow \bar{x}_k + \left(\frac{\partial f(x_k, u_k, \theta)}{\partial x} \right)^T \bar{f}_k$ ▷ Derivada da linha 7
- 22: $\bar{\theta} \leftarrow \bar{\theta} + \left(\frac{\partial f(x_k, u_k, \theta)}{\partial \theta} \right)^T \bar{f}_k$ ▷ Derivada da linha 7
- 23: $\bar{e}_k \leftarrow R^{-1} e_k \bar{J}$ ▷ Derivada da linha 6
- 24: $\bar{y}_k \leftarrow -\bar{e}_k$ ▷ Derivada da linha 5
- 25: $\bar{x}_k \leftarrow \left(\frac{\partial g(x_k, u_k, \theta)}{\partial x} \right)^T \bar{y}_k$ ▷ Derivada da linha 4
- 26: $\bar{\theta} \leftarrow \bar{\theta} + \left(\frac{\partial g(x_k, u_k, \theta)}{\partial \theta} \right)^T \bar{y}_k$ ▷ Derivada da linha 4
- 27: **Fim Para**
- 28: $\frac{\partial J}{\partial \theta} \leftarrow \bar{\theta}$ ▷ O gradiente é a variável adjunta final
- 29: **Retorna** J e $\frac{\partial J}{\partial \theta}$

Tabela 9 – Custo computacional derivada direta.

	4.16	4.15	3.14a
Multiplicação	$n_x(n_x + n_x n_\theta + n_\theta)$	$n_x n_y n_\theta$	$n_y(n_y + n_\theta)$
Soma	$n_x(1 + n_x n_\theta)$	$n_x n_y n_\theta$	$n_y(n_y + n_\theta - 1)$

Tabela 10 – Custo computacional derivada reversa.

	4.18b	4.18c	4.18a
Multiplicação	$n_x(n_y + n_x)$	$n_\theta(n_x + n_y)$	$n_y(n_y + 2)$
Soma	$n_x(n_y + n_x - 1)$	$n_\theta(n_x + n_y)$	$n_y(n_y - 1)$

Com certo abuso de nomenclatura podemos dizer que as Equações 4.16 são equivalentes as Equações 4.18b e assim sucessivamente. Note que, com exceção das Equações 4.18c, em todos os outros custos há pelo menos um termo a mais na derivada direta quando comparada com a derivada reversa. Nas equações de derivação via diferenças finitas temos que os custos não ultrapassam $n_y(2n_x \times 2n_\theta)$, logo o custo teórico computacional é maior quando comparado com as Tabelas 9 e 10, pois nesse caso temos um crescimento assintótico n^3 com as três instancias.

Quando avaliamos os algoritmos direto e reverso implementados nos Pseudocódigos 2 e 3, obtemos a Tabela 11;

Diferenciação por Modo Direto do OEM	
Mult.	$N[n_y(n_\theta(n_x + 2) + 2n_y + 1) + n_\theta n_x(2n_x + 1) + n_x(n_x + 1) + 1] +$ $+n_y(n_\theta(n_x + 2) + 2n_y + 1) + 1$
Soma	$N[2n_y^2 + 2n_x + n_\theta(n_x(2n_x + n_y - 2) + n_y) + 1] +$ $+n_y(n_\theta n_x + n_\theta + 2n_y)$
Diferenciação por Modo Reverso do OEM	
Mult.	$N[n_y(n_\theta + 2n_y + 3) + n_x(n_\theta + n_x + n_y + 1) + 1] +$ $+n_y(n_\theta + n_x + 2n_y + 3) + 1$
Soma	$N[2n_y^2 + n_\theta n_y + n_x(n_\theta + n_x + n_y) + 1] +$ $+2n_y^2 + (n_y - 1)(n_\theta + n_x)$

Tabela 11 – Tabela comparativa entre os Métodos Direto e Reverso no OEM.

Observe que aparentemente temos um incremento nas operações devido ao maior número de passos, entretanto os custos são semelhantes, visto que a ordem de grandeza é similar em ambos os casos. Como exemplo vamos utilizar uma comparação entre os modelos longitudinais de período-curto e látero-direcionais disponíveis em (JATEGAONKAR, 2015, Cap. 4), nesse caso teremos a Tabela 12 os seguintes componentes;

Note que o cálculo da complexidade não depende da entrada, sendo apresentado apenas para esclarecimento. Os valores do cálculo da complexidade pode ser observado na Tabela 13, lembrando que apenas o modelo período curto e látero-direcional foram analisados no presente trabalho, sendo o modelo de reconstrução de caminho apenas um exemplo mais na fronteira do conhecimento.

Modelo	n_u	n_y	n_x	n_θ
Período curto	1	3	2	6
Látero-direcional	3	5	2	22
Reconstrução de caminho	9	7	7	10
Aeronave Flexível (SILVA; MÖNNICH, 2012)	7	42	20	210

Tabela 12 – Composição dos modelos

		Período Curto	Látero Direcional	Reconstrução de Caminho	Aeronave Flexível
Direto	Mult.	240.414	1.084.940	2.767.420	556.284.573
	Soma	151.774	710.826	2.273.184	523.469.026
	Total	392.188	1.795.766	5.040.604	1.079.753.599
Reverso	Multi.	105.192	354.658	548.469	26.951.685
	Soma	88.652	329.084	506.374	26.732.036
	Total	193.844	683.742	1.054.843	53.683.721

Tabela 13 – Tabela comparativa - Aplicação em termos de complexidade.

Em termos de tempo computacional, executamos o programa para manobra de período curto com contador de tempo total, tempo parcial e um de CPU para as derivadas. Obtivemos os resultados apresentados na Tabela 14 para os métodos de diferenças finitas e a Tabela 15 para os métodos direto e reverso.

	Passo a frente		Central		Complexo	
	CPU	Clock	CPU	Clock	CPU	Clock
T_{med}	24,22	14,26	41,70	26,58	76,32	23,92
σ	21,12	3,26	29,52	10,46	37,31	6,90
Total	3,39 s		5,15 s		4,16 s	

Tabela 14 – Média de tempos para diferenças finitas em segundos - Longitudinal

	Direto		Reverso	
	CPU	Clock	CPU	Clock
T_{med}	23,82	10,54	12,05	7,47
σ	21,55	2,82	16,05	1,36
Total	2,89 s		2,28 s	

Tabela 15 – Média de tempos para método direto e reverso em segundos - Longitudinal

A linha Tempo se refere a média do tempo de execução somente do trecho em que o algoritmo calcula as sensibilidades, σ é o desvio padrão das medidas e o Total se refere à execução do algoritmo todo, com todas as outras variáveis específicas do algoritmo mantidas constantes. Foram feitas cinco execuções em condições semelhantes, com o número de iterações variando em torno de 40 para passo a frente, 160 para central, 160 para complexo, 130 para método direto e reverso para atingir a convergência em uma máquina com Intel(R) Core(TM) i7-7700HQ CPU @ 2.80GHz 2.81 GHz, 16 GB de memória RAM, Windows 10 Home, 22H2

x64 . Observe que os tempos médios da CPU são maiores que os tempos *Clock* (tempo real) pois há contabilidade dos tempos de cada processador utilizado pelo otimizador, o que não implica no uso simultâneo dos oito núcleos. Outro ponto importante a se notar é que a diferença entre o desvio padrão dos tempos da CPU e os tempos *Clock* estão, em geral, uma ordem de grandeza de diferença, com os tempos de CPU apresentando valores maiores. O tempo Total demonstra que o método reverso apresenta o menor tempo de execução. Para a manobra latero-direcional temos as Tabelas 16 e 17.

	Passo a frente		Central		Complexo	
	CPU	Clock	CPU	Clock	CPU	Clock
T_{med}	91,58	79,03	178,70	157,2	128,1	110,35
σ	30,20	8,14	35,50	15,03	43,1	12,67
Total	15,83 s		28,30 s		18,97 s	

Tabela 16 – Média de tempos para diferenças finitas em segundos - Latero direcional

	Direto		Reverso	
	CPU	Clock	CPU	Clock
T_{med}	31,44	26,5	27,4	24,14
σ	18,66	2,86	14,66	2,62
Total	8,2849		89,6883	

Tabela 17 – Média de tempos para método direto e reverso em segundos - Latero direcional

Observa-se que as diferenças finitas foram mais eficientes em termos de tempo gasto para a dinâmica longitudinal do que a latero-direcional. As iterações são da ordem de 160 para diferenças finitas passo a frente, 150 para passo central, 140 para passo complexo e 160 para o método direto. Entretanto, na comparação entre os métodos direto e reverso temos uma diferença significativa entre os tempos. Observe que o tempo total para execução da derivada reversa é bem maior que todos os outros casos, porém, a parte do algoritmo responsável pela derivada apresenta uma média inferior, tal qual no modelo longitudinal. A execução do método reverso apresentou uma demora para alcançar a convergência quando comparado com os outros resultados, demorando mais de 2000 iterações.

Outro ponto importante a ser destacado é o erro devido ao tamanho do passo quando este diminui. Observe a Figura 8 abaixo, onde temos uma diferença entre o valor da função avaliada pelos métodos diferenças finitas e o valor da função avaliado pelo método analítico, que chamamos de ϵ apenas por conveniência, não tendo relação com o valor do erro utilizado nos métodos de predição de erro apresentados anteriormente.

Podemos observar claramente a limitação da máquina quando comparamos os métodos derivativos por diferenças finitas com os métodos analíticos. O método pelo passo central apresenta um erro semelhante ao passo complexo, entretanto começa a divergir quando o passo está próximo de $h = 10^{-5}$ e tende a crescer em uma taxa semelhante ao erro do método passo a

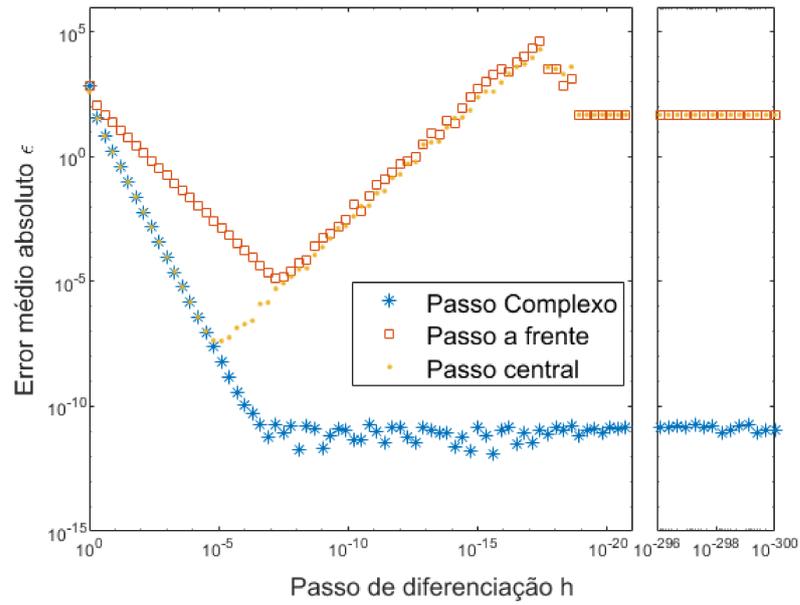


Figura 8 – Erro absoluto *epsilon* pelo tamanho do passo de diferenciação

frente, estabilizando ambos por volta de $h = 10^{-19}$ em valores próximos de $\epsilon = 10^2$. O passo complexo demonstra a eficiência por não usar diferenças em sua definição, apenas avaliação da função, entretanto apresenta um erro da ordem de $\epsilon = 10^{-11}$, oscilando a partir dos valores de $h = 10^{-7}$ e estabilizando em torno de $h = 10^{-20}$.

5 Conclusões

Este trabalho utilizou o OEM para estimar dados de um modelo para período curto e latero direcional, comparando os métodos derivativos e avaliando os custos computacionais de cada método. Os resultados convergiram satisfatoriamente para valores esperados, apresentando bom ajuste de curva entre o modelo, parâmetros estimados e valores disponíveis utilizados.

Podemos concluir que o método do passo a frente é o mais simples de ser implementado e os resultados são satisfatórios, desde o ajuste de curva ao tempo de execução do algoritmo, que no modelo longitudinal é o menor tempo entre as diferenças finitas. O método de diferenças centrais apresenta uma demora considerável de execução, apresentando um valor de tempo 51,5 % maior que o passo a frente e de 23,8% maior que o passo complexo no modelo longitudinal. O passo complexo apresenta resultado intermediário, com boa convergência. Os três modelos tem certa facilidade de implementação e podem ser utilizados em qualquer algoritmo. O método direto e reverso no modelo longitudinal apresentaram tempo menor que os métodos das diferenças finitas, se aproveitando da eficiência de bibliotecas conhecidas de diferenciação simbólica, entretanto apresenta uma dificuldade maior de implementação. O método reverso apresentou o melhor resultado, exigindo habilidade do usuário para implementação. De forma semelhantes ao do modelo longitudinal, o modelo látero direcional apresentou passo a frente com menor tempo entre os métodos de diferenças finitas, enquanto o método de diferença central apresentou o pior resultado. Entretanto, no caso das equações latero direcionais houve uma divergência nos valores da derivada reversa, apresentando um tempo de execução exageradamente maior que os demais, chegando a ser mais de dez vezes o tempo da derivada direta. Esse tempo total de execução se deve ao numero excessivo de iterações para que o otimizador que minimiza a função custo convergisse para um valor considerado satisfatório, entretanto o valor do tempo parcial médio de execução das etapas de cálculo das derivadas se mostrou menor que o método direto, inclusive com um desvio padrão mais satisfatório. Dessa forma os métodos são todos satisfatórios para os casos analisados e a implementação em outros modelos depende do nível de exigência tanto de custos computacionais operacionais, habilidade de implementação e exigência na precisão dos dados.

5.1 Sugestões para trabalhos futuros

Para trabalhos futuros sugere-se que o método reverso seja implementado em modelos mais complexos, com número de saídas menor que o número de entradas, tal qual análise de flexibilidade em aeronaves, por exemplo. Também sugerimos a criação de uma biblioteca específica para os métodos direto e reverso afim de simplificar a implementação.

Referências

- AGUIRRE, L. A. *Introdução à identificação de sistemas—Técnicas lineares e não-lineares aplicadas a sistemas reais*. Belo Horizonte - MG: Editora UFMG, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 42.
- ÅSTRÖM, K.-J.; TORSTEN, B. Numerical identification of linear dynamic systems from normal operating records. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 2, n. 2, p. 96–111, 1965. Citado na página 17.
- BARBOSA, M. A. de C.; TOSCANI, L. V.; RIBEIRO, L. Metodologia para o cálculo da complexidade de algoritmos e o processo de avaliação das equações de complexidade. *Simpósio Brasileiro de Engenharia de Software*, 1991. Citado na página 57.
- BARROS, C. P. de; PINTO, R. L. U. de F.; OLIVEIRA, P. H. I. A. de. *Uma metodologia para o desenvolvimento de aeronaves leves subsônicas*. [S.l.]: Ergonomia, 2000. Citado na página 15.
- BRYAN, G. H. *Stability in aviation: an introduction to dynamical stability as applied to the motions of aeroplanes*. [S.l.]: Macmillan and Company, limited, 1911. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 20.
- COOK, S. A. The complexity of theorem-proving procedures. In: *Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*. [S.l.: s.n.], 1971. p. 151–158. Citado na página 57.
- COOK, S. A. An overview of computational complexity. *Communications of the ACM*, ACM New York, NY, USA, v. 26, n. 6, p. 400–408, 1983. Citado na página 57.
- DUTRA, D. *Identificação de Sistema para uma Aeronave Leve*. [S.l.]: Undergraduate. Federal University of Minas Gerais, 2010. Citado 4 vezes nas páginas 35, 36, 41 e 42.
- FISHER, R. A. On an absolute criterion for fitting frequency curves. *Messenger of mathematics*, v. 41, p. 155–156, 1912. Citado na página 35.
- GAREY, M. *Johnson D.S. (1979) Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness*. [S.l.]: Freeman, San Francisco, 1979. Citado na página 57.
- GEVERS, M. et al. System identification without lennart ljung: what would have been different? *Forever Ljung in System Identification, Studentlitteratur AB, Norrtälje*, v. 2, 2006. Citado na página 17.
- GLAUERT, H. *Analysis of phugoids obtained by a recording airspeed Indicator*. [S.l.]: HM Stationery Office, 1919. Citado na página 16.
- GRIEWANK, A.; WALTHER, A. *Evaluating derivatives: principles and techniques of algorithmic differentiation*. [S.l.]: SIAM, 2008. Citado 3 vezes nas páginas 19, 49 e 50.
- HAMEL, P. G.; JATEGAONKAR, R. V. Evolution of flight vehicle system identification. *Journal of aircraft*, v. 33, n. 1, p. 9–28, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.

- JATEGAONKAR, R. V. *Flight vehicle system identification: A time-domain methodology*. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc., 2015. Citado 16 vezes nas páginas 8, 15, 16, 18, 19, 36, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 57, 59 e 67.
- JR, R. S.; BLASINGAME, B.; CLEMENTSON, G. The pulse method for the determination of aircraft dynamic performance. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 17, n. 1, p. 22–38, 1950. Citado na página 16.
- JR, W. F. M. Progress in dynamic stability and control research. *Journal of the Aeronautical Sciences*, v. 14, n. 9, p. 493–519, 1947. Citado na página 16.
- LANCHESTER, F. W. *Aerodnetics*. [S.l.]: Constable & Company Limited, 1910. v. 2. Citado na página 20.
- LJUNG, L. et al. Theory for the user. In: *System Identification*. [S.l.: s.n.], 1987. Citado na página 15.
- MACHADO, C. P. dos S.; DUTRA, D. A. A. Técnicas de cálculos de derivadas em problemas de identificação de sistema. In: SIMPÓSIO DA PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA MECÂNICA, 30., 2021, Online - virtual. Uberlândia: UFU, 2021. p. 6. Citado na página 49.
- MAINE, R. E.; ILIFF, K. W. Application of parameter estimation to aircraft stability and control: The output-error approach. *NASA Reference Publication 1168*, 1986. Citado na página 19.
- MARGOSSIAN, C. C. A review of automatic differentiation and its efficient implementation. *Wiley interdisciplinary reviews: data mining and knowledge discovery*, Wiley Online Library, v. 9, n. 4, p. e1305, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 49 e 50.
- MARTINS, J. R.; STURDZA, P.; ALONSO, J. J. The complex-step derivative approximation. *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)*, ACM New York, NY, USA, v. 29, n. 3, p. 245–262, 2003. Citado na página 49.
- MAURER, A. A. Method in ockham’s nominalism. *The Monist*, JSTOR, v. 61, n. 3, p. 426–443, 1978. Citado na página 16.
- MCLEAN, D. B. *etkin dynamics of flight—stability and control*, john wiley & sons inc, chichester. 1982. 370 pp. illustrated.£ 19.15. *The Aeronautical Journal*, Cambridge University Press, v. 86, n. 860, p. 393–393, 1982. Citado na página 18.
- MORELLI, E. A.; KLEIN, V. *Aircraft system identification: theory and practice*. [S.l.]: Sunflyte Enterprises Williamsburg, VA, 2016. v. 2. Citado na página 40.
- NOCEDAL, J.; WRIGHT, S. *Numerical optimization*. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 46, 47 e 50.
- PAMADI, B. N. *Performance, stability, dynamics, and control of airplanes*. [S.l.]: American Institute of aeronautics and astronautics, 2004. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 21.
- RAOL, J. R.; GIRIJA, G.; SINGH, J. *Modelling and parameter estimation of dynamic systems*. [S.l.]: Iet, 2004. v. 65. Citado na página 43.
- RAYMER, D. *Aircraft Design: A Conceptual Approach*, Reston, VA, USA. American Institute of Aeronautics and Astronautics. [S.l.]: Inc, 2018. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 22.

SCHMIDT, L. V. *Introduction to aircraft flight dynamics*. [S.l.]: American Institute of Aeronautics and Astronautics, 1998. Citado 4 vezes nas páginas 8, 18, 20 e 21.

SHINBROT, M. *A least squares curve fitting method with applications to the calculation of stability coefficients from transient-response data*. [S.l.]: National Advisory Committee for Aeronautics, 1951. Citado na página 16.

SILVA, B. Giordano de O.; MÖNNICH, W. System identification of flexible aircraft in time domain. In: *AIAA Atmospheric Flight Mechanics Conference*. [S.l.: s.n.], 2012. p. 4412. Citado na página 60.

STEVENS, B. L.; LEWIS, F. L.; JOHNSON, E. N. *Aircraft control and simulation: dynamics, controls design, and autonomous systems*. [S.l.]: John Wiley & Sons, 2015. Citado na página 27.

TISCHLER, M. B. System identification methods for aircraft flight control development and validation. *Advances in aircraft flight control*, Taylor & Francis New York, p. 35–69, 1996. Citado na página 15.

VELOSO, P. A.; TOSCANI, L. V. Complexidade de algoritmos: Análise, projeto e métodos. *Editora Sagra Luzzatto, 1ª edição*, 2001. Citado na página 57.

ZOMAYA, A. Y. et al. *Parallel and distributed computing handbook*. McGraw-Hill New York, 1996. Citado na página 57.

APÊNDICE A – Saída dos modelos

Comparativo entre saída do modelo estimado e as medições disponíveis para manobra longitudinal de período curto utilizando os dados disponíveis em (JATEGAONKAR, 2015, Cap 4, sec 4.20.1)).

Para o ângulo de ataque no modelo longitudinal, temos as Figuras 9.

Para a velocidade de arfagem no modelo longitudinal, temos as Figuras 10.

Para as acelerações laterais no modelo látero-direcional, temos as Figuras 11.

Para as velocidades de rolamento no modelo látero-direcional, temos as Figuras 12.

Para as velocidades de guinada no modelo látero-direcional, temos as Figuras 13.

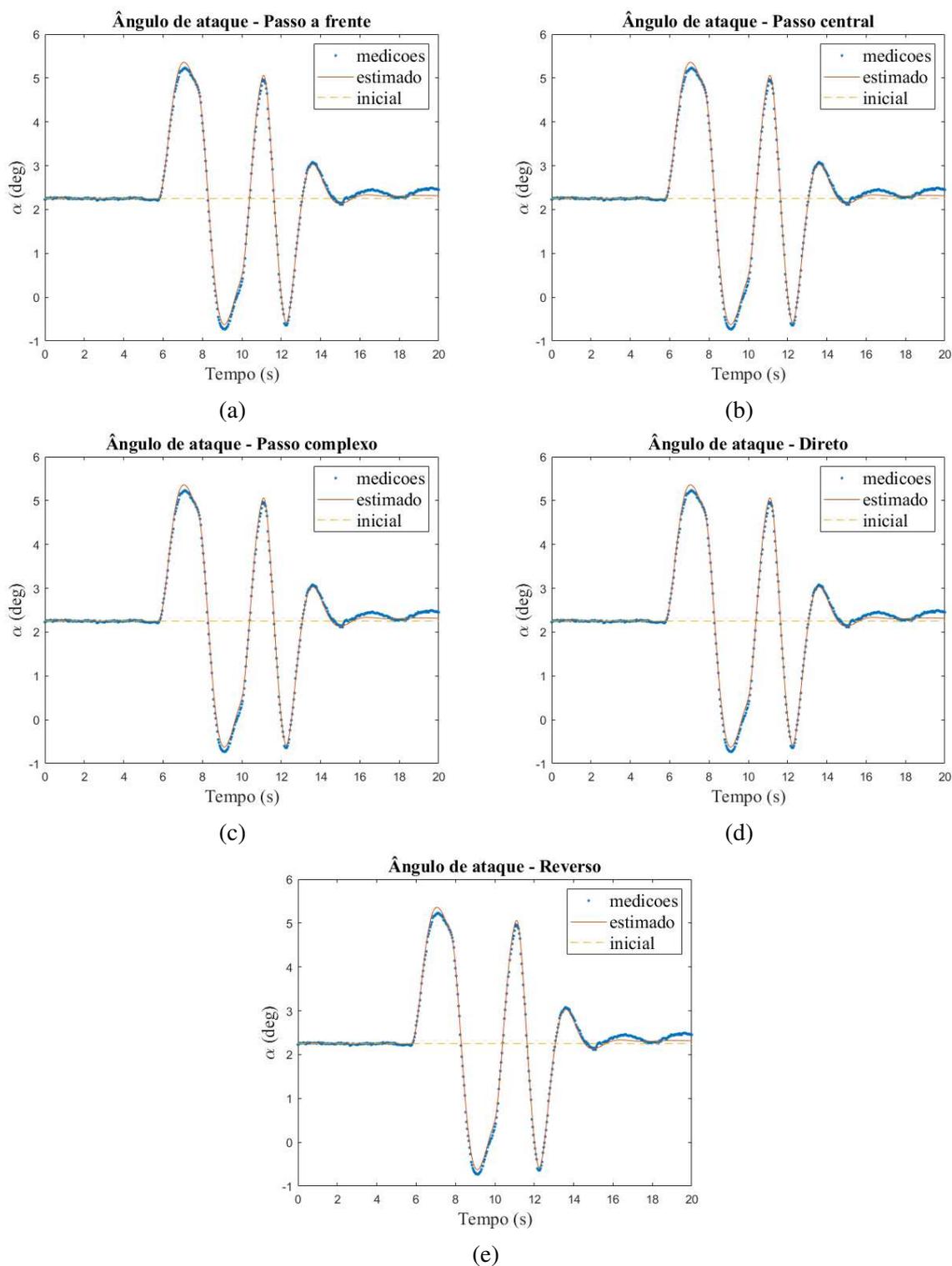


Figura 9 – Comparando saída do modelo período curto para angulo de ataque com os dados disponíveis.

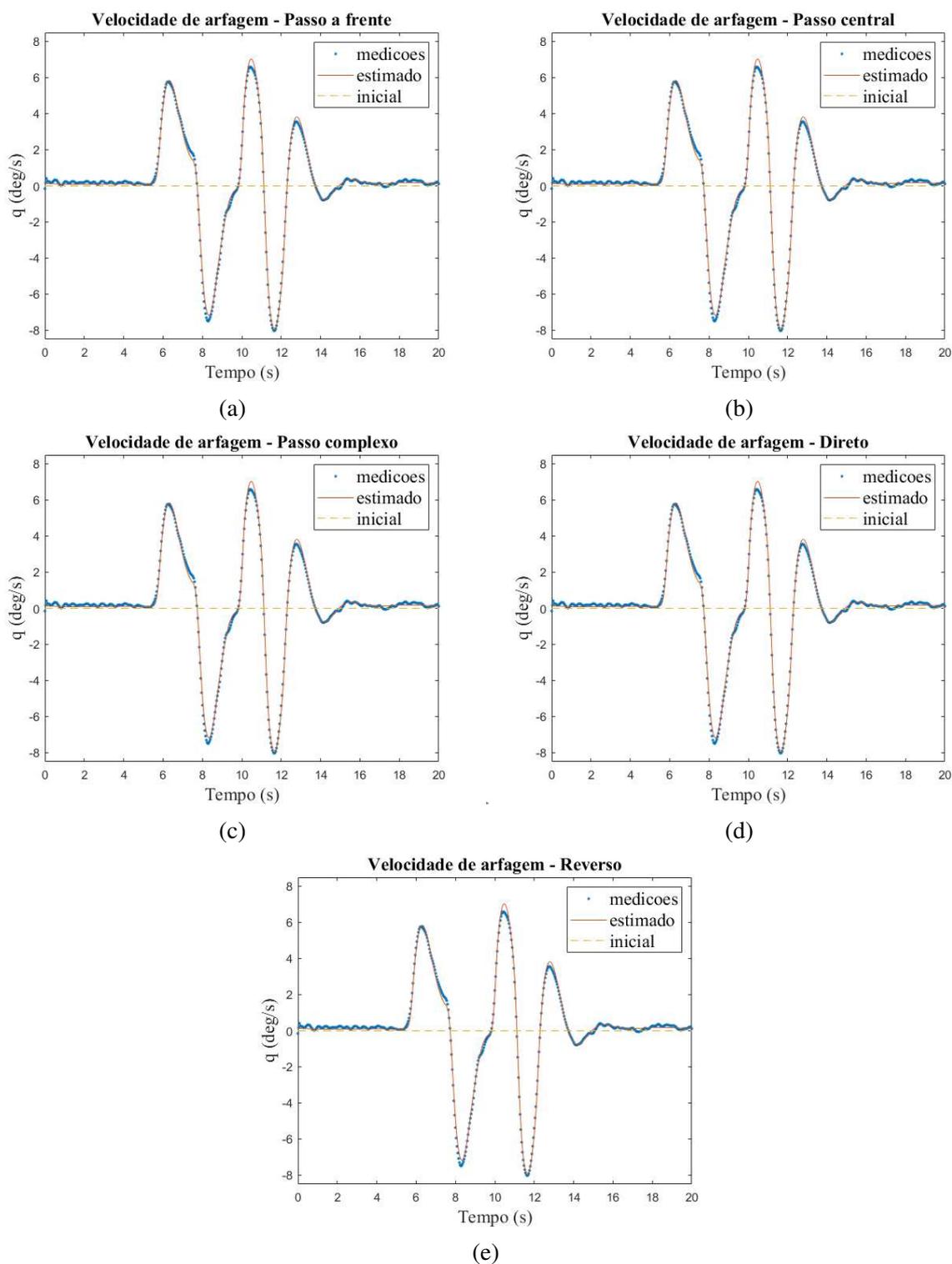


Figura 10 – Comparando saída do modelo período curto para velocidade de arfagem com os dados disponíveis.

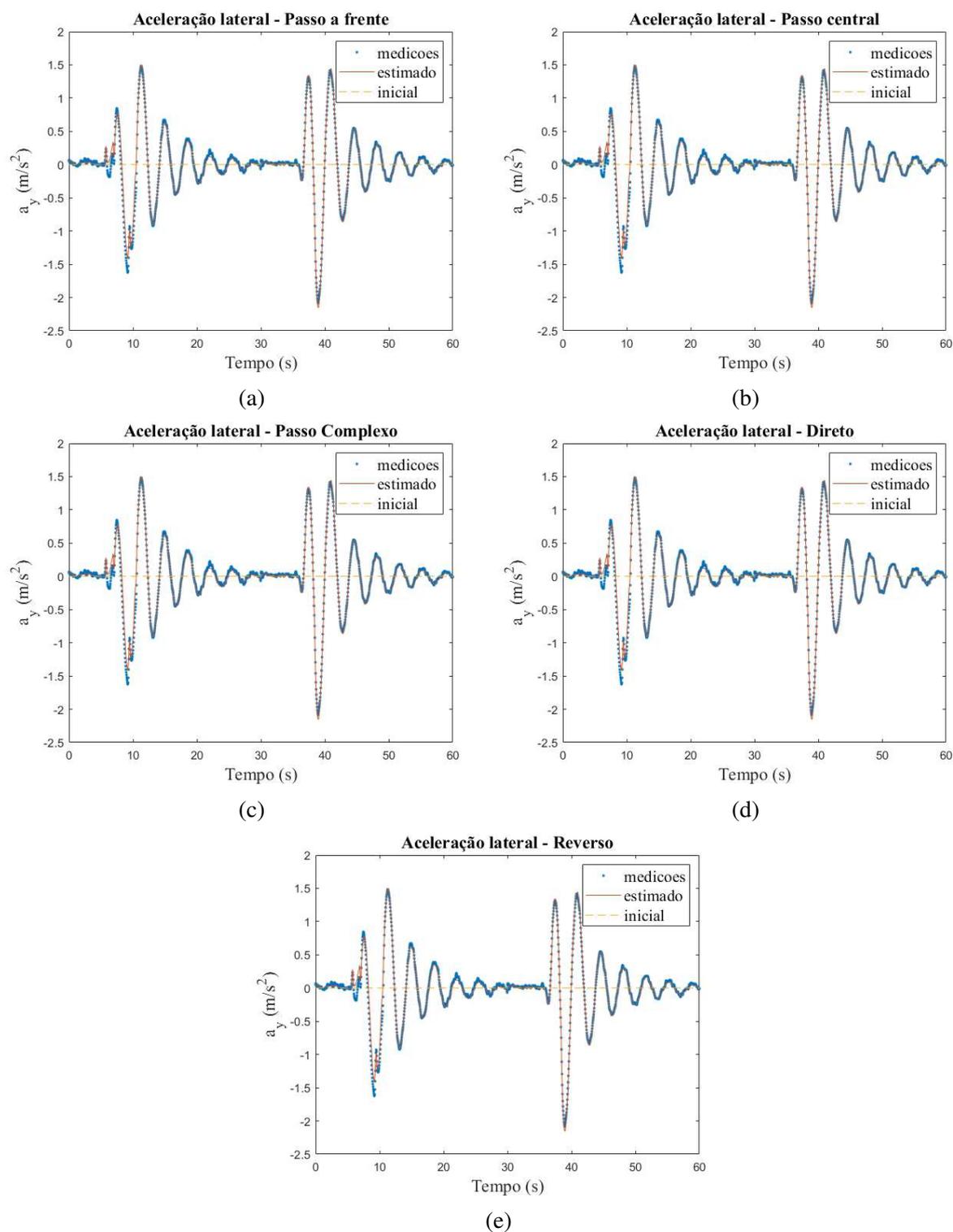


Figura 11 – Comparando saída do modelo latero-direcional para aceleração lateral com os dados disponíveis.

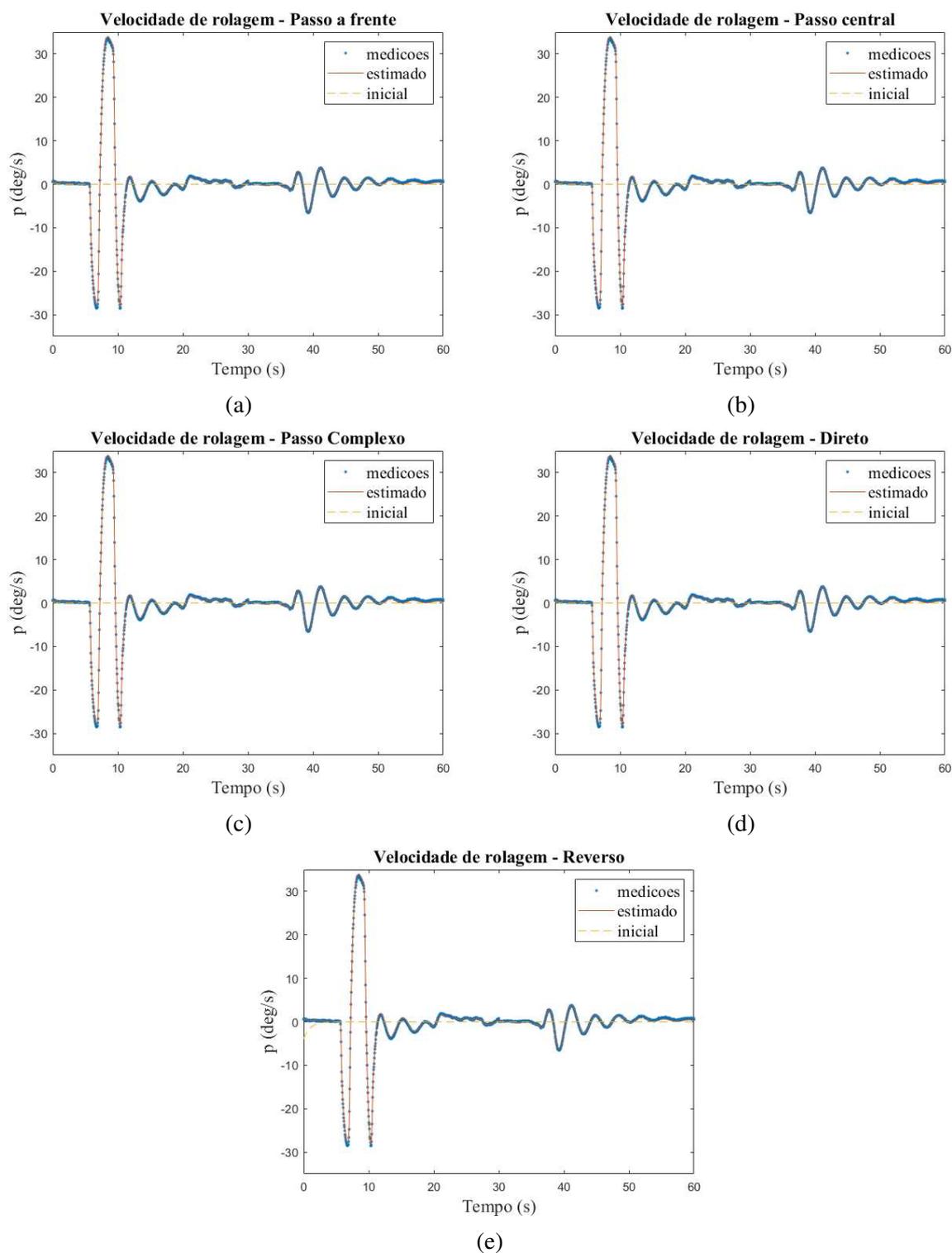


Figura 12 – Comparando saída do modelo latero-direcional para velocidade de rolamento com os dados disponíveis.

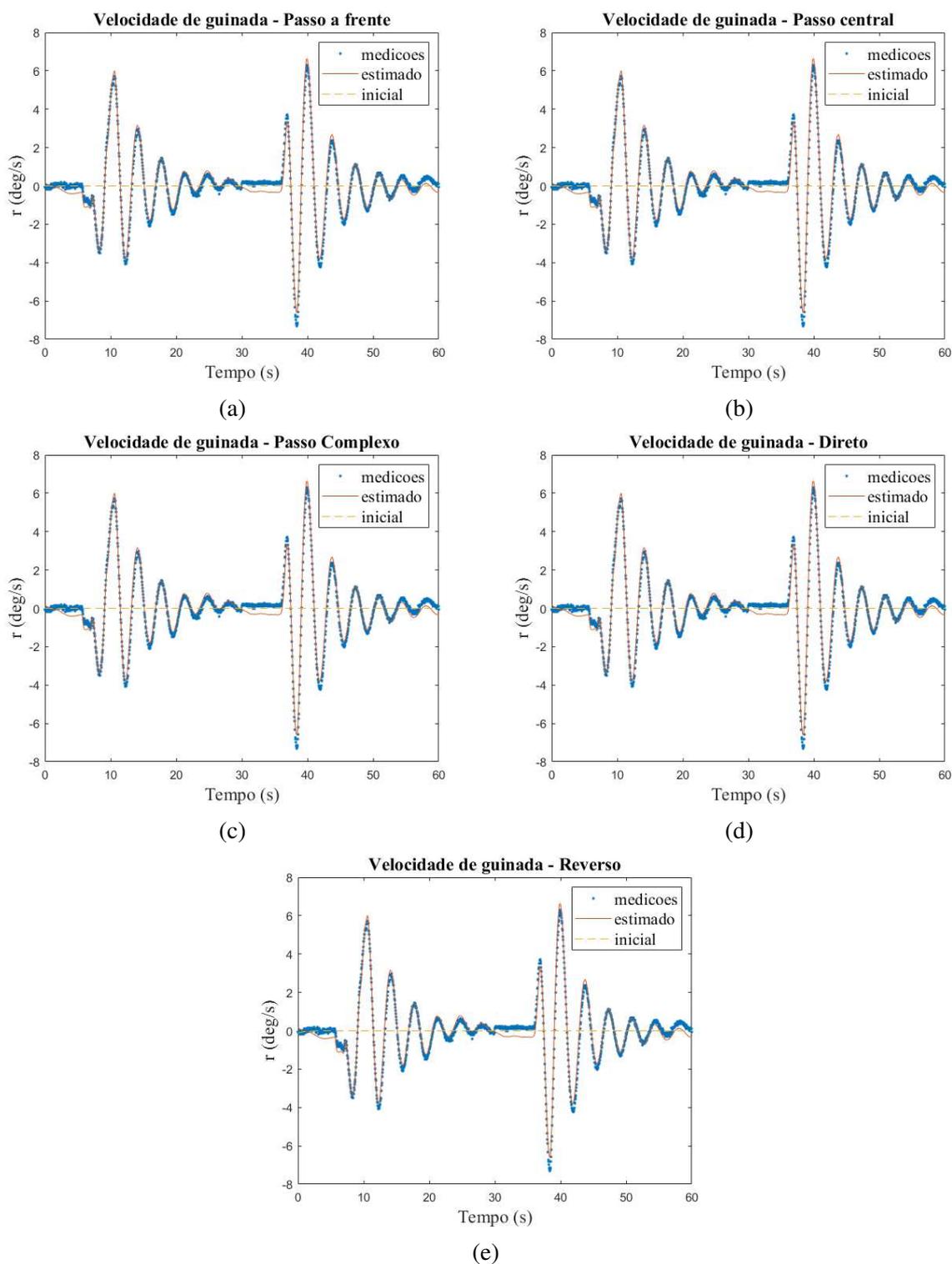


Figura 13 – Comparando saída do modelo latero-direcional para velocidade de guinada com os dados disponíveis.

APÊNDICE B – Código-Fonte

Os códigos-fonte utilizados neste trabalho estão disponíveis em:

<https://github.com/christianprado911/joss-aircraft-sisid>