

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Escola de Engenharia  
Curso de Especialização em Estruturas

Cleuciane da Silva Maia

**ANÁLISE COMPARATIVA DO DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO NORMAL  
SIMPLES EM SEÇÕES RETANGULARES CONSIDERANDO AS TENSÕES NO  
CONCRETO COM DISTRIBUIÇÃO RETANGULAR E PARÁBOLA RETÂNGULO**

Belo Horizonte

2022

Cleuciane da Silva Maia

**ANÁLISE COMPARATIVA DO DIMENSIONAMENTO À FLEXÃO NORMAL  
SIMPLES EM SEÇÕES RETANGULARES CONSIDERANDO AS TENSÕES NO  
CONCRETO COM DISTRIBUIÇÃO RETANGULAR E PARÁBOLA RETÂNGULO**

Monografia de especialização apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Estruturas.

Orientador: Ney Amorim Silva

Belo Horizonte

2022

M217a	<p>Maia, Gleuciane da Silva.  Análise comparativa do dimensionamento à flexão normal simples em seções retangulares considerando as tensões no concreto com distribuição retangular e parábola retângulo [recurso eletrônico] / Gleuciane da Silva Maia. – 2022.  1 recurso online (96 f. : il., color.) : pdf.</p> <p>Orientador: Ney Amorim Silva.</p> <p>“Monografia apresentada ao Curso de Especialização em Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais” .</p> <p>Bibliografia: f. 95-96.  Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.</p> <p>1. Engenharia de estruturas. 2. Flexão (Engenharia civil).  3. Deformação (Mecânica) 4. Dimensionamento. I. Silva, Ney Amorim.  II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia.  III. Título.</p> <p style="text-align: right;">CDU: 624</p>
-------	--



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
ESCOLA DE ENGENHARIA  
CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS

### ATA DE DEFESA DE MONOGRAFIA / TRABALHO DE CONCLUSÃO DE CURSO (TCC)

Aos **doze** dias do mês de **dezembro** de **2022**, às 10h, a estudante **Cleuciane da Silva Maia**, matrícula 2017706790, defendeu o Trabalho intitulado “**Análise Comparativa do Dimensionamento à Flexão Normal Simples em Seções Retangulares Considerando as Tensões no Concreto com Distribuição Retangular e Parábola Retângulo**”.

Participaram da banca examinadora os abaixo indicados, que, por nada mais terem a declarar; assinam eletronicamente a presente ata.

**Nota:** 90 (noventa pontos)

**Orientador(a):** Prof. Ney Amorim Silva

**Nota:** 90 (noventa pontos)

**Examinador(a):** Prof. Pedro Vianna Pessoa de Mendonça



Documento assinado eletronicamente por Ney Amorim Silva, Membro de comissão, em 25/01/2023, às 11:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por Pedro Vianna Pessoa de Mendonça, Subchefe de departamento, em 25/01/2023, às 19:17, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso=0), informando o código verificador 2035369 e o código CRC 72CB5AEA.

Este documento deve ser editado apenas pelo Orientador e deve ser assinado eletronicamente por todos os membros da banca.

## **DEDICATÓRIA**

Dedico esse trabalho as minhas irmãs por me apoiarem em todas as minhas decisões e por torcer pelo meu sucesso, em especial ao José Paulo, por ser meu companheiro e meu principal incentivador.

## **AGRADECIMENTOS**

Primeiramente a DEUS, pela vida, pela família, por me guiar, resguardar e principalmente me permitir ter saúde, entusiasmo e coragem para sempre lutar pelos meus objetivos.

Agradeço ao meu orientador Professor Ney Amorim Silva, pela paciência, disposição, orientação e pela oportunidade de ter sido seu orientando e o apoio durante esses últimos meses, sempre com palavras tranquilizadoras e encorajadoras.

À Escola de Engenharia Civil da UFMG, por possibilitar a realização desse trabalho. Aos funcionários da escola de engenharia da UFMG, pela colaboração na elaboração deste trabalho; em especial a Fatima, Iracema e Alessandra pela colaboração, apoio e ajuda.

Ao José Paulo que sempre esteve ao meu lado, dando-me o incentivo para continuar e nunca desistir, pelo apoio, amor e compreensão incondicional.

A todos os meus mestres do Curso de Especialização pela colaboração única na minha formação profissional.

“Não existe caminho fácil.

Existe o caminho certo!”.

*(Patrícia)*

## RESUMO

O dimensionamento de seções retangulares de estruturas de concreto submetidas à flexão normal simples, garantindo sua segurança em relação ao estado limite último, tem sido objeto de estudo de diversos autores. De acordo com a NBR 6118:2018 a distribuição das tensões do concreto na seção se faz de acordo com o diagrama parábola-retângulo e permite-se a substituição desse, por um diagrama retangular simplificado. Esse estudo compara os dois modelos de cálculo, o primeiro chamado parábola retângulo, onde a distribuição dos esforços na seção transversal retangular segue um padrão parábola mais retângulo, e o segundo, o retangular simplificado, que segue um padrão retangular tensão constante atuante até a profundidade  $y$ , em acordo com as hipóteses básicas previstas no item 17.2 da NBR 6118:2018. Analisando-se os esforços e o comportamento da estrutura e suas deformações, propõe-se verificar para cada domínio de deformação, submetido a flexão normal simples, até onde os dois modelos são equivalentes, visando o cálculo da área de armadura tracionada. A abordagem utilizada será a análise de esforços, assumindo-se, para cada domínio de deformação, valores crescentes para o momento externo solicitante, e para cada valor da profundidade da linha neutra, calcular a resultante interna de compressão no concreto e por fim o valor de área de armadura tracionada. Estes valores serão tabulados e plotados em gráficos, tanto para o modelo parábola retângulo quanto para o modelo retangular simplificado, visando analisar a equivalência entre eles.

**Palavras-chave:** flexão simples, domínios de deformação, estado limite último, linha neutra.



## ABSTRACT

*The design of rectangular sections of concrete structures subjected to simple normal bending, ensuring their safety in relation to the ultimate limit state, has been the subject of study by several authors. According to NBR 6118:2018, the distribution of concrete stresses in the section is done according to the parabola-rectangle diagram and its replacement is allowed for a simplified rectangular diagram. This study compares the two calculation models, the first called rectangular parabola, where the distribution of efforts in the rectangular cross section follows a parabola plus rectangle pattern, and the second, the simplified rectangular, which follows a rectangular pattern constant tension acting until the depth  $y$ , in accordance with the basic hypotheses provided for in item 17.2 of NBR 6118:2018. Analyzing the efforts and behavior of the structure and its deformations, it is proposed to verify for each deformation domain, subjected to simple normal bending, up to where the two models are equivalent, aiming at calculating the tensioned reinforcement area. The approach used will be the stress analysis, assuming, for each deformation domain, increasing values for the requesting external moment, and for each value of the depth of the neutral line, calculate the internal resultant of compression in the concrete and finally the value area of tensioned reinforcement. These values will be tabulated and plotted in graphs, both for the rectangular parabola model and for the simplified rectangular model, to analyze the equivalence between them.*

**Keywords:** *simple bending, deformation domains, ultimate limit state, neutral line.*

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Curva de Gauss para CPs de concreto ensaiados à compressão resistência característica.....	20
Figura 2 - Diagrama tensão deformação idealizado a compressão .....	22
Figura 3 - Diagrama tensão deformação bilinear na tração.....	23
Figura 4 - Diagrama tensão x deformação para aços de armaduras passivas.....	25
Figura 5- Esforços solicitantes externos e internos .....	28
Figura 6 - Diagramas $\sigma$ x $\epsilon$ parábola-retângulo para distribuição de tensões de compressão no concreto (Grupo I).....	29
Figura 7 - Diagramas $\sigma$ x $\epsilon$ retangular simplificado para distribuição de tensões.....	30
Figura 8 - Valores de $f_c$ para o diagrama $\sigma$ x $\epsilon$ retangular simplificado .....	30
Figura 9 - Domínios de deformação no estado limite último de uma seção transversal .....	31
Figura 10 – Profundidade limite do domínio 2 .....	32
Figura 11 - Subdivisão do domínio 2 .....	32
Figura 12 – Final do domínio 3 .....	34
Figura 13 – Início do domínio 5 e o posicionamento do ponto C .....	36
Figura 14 - Diagramas $\sigma_x \epsilon$ para uma seção retangular de concreto do Grupo I.....	38
Figura 15 - Resumo de cálculo para o dimensionamento na flexão simples em uma seção retangular (Tepedino).....	42
Figura 16 - Diagrama de tensões Parábola Retângulo no concreto para o subdomínio 2a .....	43
Figura 17 - Diagrama de tensões Parábola Retângulo no concreto para o subdomínio 2b .....	49
Figura 18 - Diagrama de tensões Parábola Retângulo no concreto para o domínio 3.....	56
Figura 19 - Diagrama parábola retângulo no subdomínio 2b.....	71
Figura 20 - Diagrama parábola retângulo no domínio 3 .....	77

## LISTA DE QUADROS

Tabela 1 - Valores dos coeficientes de ponderação $\gamma_c$ e $\gamma_s$ dos materiais .....	24
Tabela 2 - Valores limites de $\varepsilon$ para o concreto e $\xi_L$ para os domínios .....	34
Tabela 3 - Valor de $K_L$ com o adequado comportamento dútil.....	38
Tabela 4 - Tabela dos limites entre os Domínios .....	63
Tabela 5 - Informações básicas para o dimensionamento no subdomínio 2a .....	64
Tabela 6 - Valor da linha neutra ( $x_i=\xi.d$ ) no diagrama parábola-retângulo no subdomínio 2a	64
Tabela 7 – Valores da linha neutra ( $x_i=\xi.d$ ) no diagr. retang. simplificado - subdomínio 2a ..	67
Tabela 8 - Informações básicas para o dimensionamento no subdomínio 2b .....	69
Tabela 9 - Valores da linha neutra ( $x_i=\xi.d$ ) no diagrama parábola-retângulo no subdomínio 2b .....	69
Tabela 10 - Valores da linha neutra ( $x_i=\xi.d$ ) no diagrama retangular simplificado - subdomínio 2b.....	73
Tabela 11 - Informações básicas para o dimensionamento no Domínio 3.....	75
Tabela 12 - Valores da linha neutra ( $x_i=\xi.d$ ) no diagrama parábola-retângulo no Domínio 3.	76
Tabela 13 - Valores da linha neutra ( $x_i=\xi.d$ ) no diagrama retangular simplificado – Domínio 3 .....	79
Tabela 14 - Resumo com as diferenças entre os dois modelos de diagramas no subdomínio 2a .....	81
Tabela 15 - Comparativo dos resultados da área de armadura entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, variando a profundidade da LN ( $x=\xi.d$ ), no subd. 2a. ....	83
Tabela 16 - Comparativo dos resultados da área de armadura entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, variando a profundidade da linha neutra ( $x=\xi.d$ ), no subdomínio 2a. ....	84
Tabela 17 - Diferenças observadas para cada $K' = f(\xi)$ entre cálculo efetuado pelo método parábola-retângulo em relação ao retangular simplificado, para o subdomínio 2a.....	85
Tabela 18 - Resumo das diferenças entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no subdomínio 2b .....	85
Tabela 19 - Áreas de armadura de tração, obtidas entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no subdomínio 2b, em função de Md. ....	87

Tabela 20 - Comparativo dos resultados da área de armadura entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, variando a profundidade da linha neutra ( $x=\xi.d$ ), no subdomínio 2b. ....	88
Tabela 21 - Diferenças observadas para $K' = f(\xi)$ entre o cálculo efetuado pelo modelo parábola-retângulo em relação ao retangular simplificado, para o subdomínio 2b.....	89
Tabela 22 - Resumo das diferenças entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no domínio 3.....	90
Tabela 23 - Análise dos esforços ( $M_d$ ), comparando os resultados da área de armadura obtidos entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no domínio 3. ....	91
Tabela 24 - Áreas de armadura de tração, obtidas entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, variando a profundidade da linha neutra ( $x=\xi.d$ ), no domínio 3. ....	92
Tabela 25 - Diferenças observadas para $K' = f(\xi)$ entre o cálculo efetuado pelo método parábola-retângulo em relação ao retangular simplificado, para o Domínio 3. ....	93
Tabela 26 – Equações do Momento resistente adimensional $K' = f(\xi)$ , conforme modelos Parábola Retângulo x Retangular Simplificado, de acordo com cada domínio de deformação. ....	94
Tabela 27 – Resumo dos resultados de cálculo de uma viga com dimensão 20x50 cm entre os dois modelos de cálculo dimensionados nos domínios 2a, 2b e 3. ....	95
Tabela 28 – Resumo dos resultados de cálculo de uma viga com dimensão 20x20 cm entre os dois modelos de cálculo dimensionados nos domínios 2a, 2b e 3. ....	95

## LISTA DE ABREVIações

b	Largura da seção retangular (na NBR 6118:2018 é dado por $b_w$ )
d	Altura útil da seção transversal
d'	Profundidade da armadura A's
ELS	Estado limite de serviço.
ELU	Estado limite último.
$E_s$	É o módulo de elasticidade longitudinal do aço.
$f_{ck}$	É a resistência característica à compressão.
h	Altura total da seção retangular.
K'	É o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor interno resistente de cálculo.
K	É o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor externo solicitante de cálculo.
M	Momento
$M_d$	Momento externo solicitante de cálculo.
$M_{sd}$	Momento fletor solicitante de cálculo.
$R'_{sd}$	Resultante interna de compressão na armadura A's.
$R_{cc}$	Resultante interna de compressão no concreto.
$R_{st}$	Resultante interna de tração na armadura (As).
X	Profundidade da linha neutra para o diagrama $\sigma_x \epsilon$ parábola-retângulo.
Y	Profundidade da linha neutra para o diagrama $\sigma_x \epsilon$ retangular.
Z	Braço de alavanca do binário interno resistido pelo concreto.
$\alpha_c$	Parâmetro de redução da resistência do concreto na compressão.
$\gamma_c$	Coeficiente de ponderação da resistência do concreto.
$\lambda$	Parâmetro de redução da altura do diagrama retangular simplificado.
$\epsilon$	Deformação específica.
$\epsilon_c$	Deformação específica do concreto.
$\gamma_s$	Coeficiente de ponderação da resistência do aço.

## SUMÁRIO

<b>1. INTRODUÇÃO .....</b>	<b>16</b>
<b>2. OBJETIVOS .....</b>	<b>16</b>
<b>2.1 Metodologia.....</b>	<b>17</b>
<b>3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA.....</b>	<b>17</b>
<b>3.1 Estados Limites .....</b>	<b>17</b>
3.1.1 Estado limite último – ELU.....	17
3.1.2 Estado limite de serviço - ELS .....	18
<b>3.2 Concreto Armado .....</b>	<b>19</b>
3.2.1 Propriedades mecânicas do concreto.....	20
3.2.1.1 Resistência à compressão.....	20
3.2.1.2 Resistência característica do concreto à compressão - $f_{ck}$ .....	20
3.2.1.3 Módulo de elasticidade longitudinal .....	21
3.2.1.4 Diagrama tensão-deformação do concreto a compressão .....	22
3.2.1.5 Resistência a tração do concreto .....	23
3.2.1.6 Resistência de cálculo do concreto .....	24
3.2.2 Aços para concreto armado .....	24
<b>4. FLEXÃO NORMAL SIMPLES .....</b>	<b>26</b>
<b>4.1 Hipóteses Básicas - NBR 6118:2018 .....</b>	<b>28</b>
<b>4.2 Domínios de Deformação.....</b>	<b>30</b>
4.2.1 Domínio 1.....	31
4.2.2 Domínio 2.....	31
4.2.3 Domínio 3.....	33
4.2.4 Domínio 4.....	35
4.2.5 Domínio 4a.....	35
4.2.6 Domínio 5.....	35
4.2.7 Seções Subarmada, Normalmente Armada e Superarmada .....	36
<b>4.3 Flexão Simples, Seção Retangular com Armadura Simples - Considerando Concretos do Grupo I (até classe C50) .....</b>	<b>37</b>

<b>4.4</b>	<b>Equacionamento da Flexão Normal Simples Considerando o Diagrama Retangular Simplificado e o Diagrama Parábola Retângulo para Concretos do Grupo I.....</b>	<b>39</b>
4.4.1	Equacionamento considerando o diagrama retangular simplificado .....	39
4.4.2	Equacionamento considerando o diagrama parábola-retângulo .....	43
4.4.2.1	Equacionamento no subdomínio 2a .....	43
4.4.2.2	Equacionamento no subdomínio 2b.....	49
	Cálculo do trecho retangular no subdomínio 2b.....	50
	Cálculo do trecho parabólico no subdomínio 2b .....	52
4.4.2.3	Equacionamento no domínio 3 .....	56
	Cálculo do trecho retangular no domínio 3 .....	57
	Cálculo do trecho parabólico no domínio 3.....	59
<b>4.5</b>	<b>Aplicações numéricas .....</b>	<b>63</b>
4.5.1	Aplicação numérica - subdomínio 2a.....	64
4.5.1.1	Cálculo de acordo com o diagrama parábola-retângulo.....	64
4.5.1.2	Cálculo de acordo com o diagrama retangular simplificado.....	66
4.5.2	Aplicação numérica - subdomínio 2b.....	68
4.5.2.1	Cálculo de acordo com o diagrama parábola-retângulo.....	68
4.5.2.2	Cálculo de acordo com o diagrama retangular simplificado.....	72
4.5.3	Aplicação numérica - domínio 3 .....	75
4.5.3.1	Cálculo de acordo com o diagrama parábola-retângulo.....	75
4.5.3.2	Cálculo de acordo com o diagrama retangular simplificado.....	79
<b>4.6</b>	<b>Análise e Resultados .....</b>	<b>81</b>
4.6.1	Análise do subdomínio 2a .....	81
4.6.2	Análise do subdomínio 2b.....	85
4.6.3	Análise do domínio D3.....	89
<b>5.</b>	<b>CONCLUSÃO .....</b>	<b>94</b>
<b>6.</b>	<b>REFERÊNCIAS .....</b>	<b>97</b>

## **1. INTRODUÇÃO**

O dimensionamento de elementos estruturais em concreto armado pressupõe uma série de hipóteses básicas e valores constantes prefixados, confirmados por ensaios laboratoriais ou convencionados. Muitas dessas presunções permanecem inalteradas ao longo do tempo, o que não significa terem sido exploradas e entendidas o suficiente.

A NBR 6118:2018, no item 17.2.2, descreve as hipóteses básicas que norteiam o dimensionamento de elementos lineares sujeitos às solicitações normais no estado limite último (ELU), porém em sua redação elas não são abordadas em profundidade, especialmente em seus conceitos e origens, nem mesmo são bem ilustradas. A literatura corrente também não debate de forma significativa e didática os conceitos e fundamentos considerados.

No caso específico dos domínios de deformação, ilustrados e brevemente descritos nas hipóteses básicas da NBR 6118:2018, constata-se que eles não são suficientemente detalhados, de forma a proporcionar um contexto didático que propicie a compreensão das etapas futuras do dimensionamento. Na literatura corrente, bem como na prática de ensino, têm sido pouco estudados os domínios de deformação. Os valores normativos prefixados não são, em sua grande parte, bem explanados. Entende-se que a sequência da abordagem atualmente praticada, bem como o conjunto de ilustrações e suas consequentes interpretações não são plenamente exploradas na maioria das escolas que lecionam concreto armado.

Procura-se nesse trabalho analisar e comparar os resultados do dimensionamento de peças, com seção retangular, em concreto armado submetidos a flexão normal simples (FNS) considerando a distribuição de tensões no concreto tanto com o diagrama retangular simplificado quanto com o diagrama parábola retângulo, conforme a NBR 6118:2018.

## **2. OBJETIVOS**

Esse trabalho de conclusão de curso tem caráter de pesquisa exploratória. O objetivo geral é analisar e comparar resultados, as diferenças e semelhanças dos cálculos gerados na flexão normal simples (FNS), por meio do diagrama de tensão parábola retângulo e do diagrama de tensão retangular simplificado.



O objetivo secundário é o desenvolvimento de equações de equilíbrio do momento fletor resistente, de forma adimensional, para o dimensionamento de vigas de concreto armado nos domínios 2,3 e 4. A forma adimensional das equações tem o propósito de generalizar a profundidade relativa da linha neutra, independente da altura da seção da viga. Em seguida, é determinada a armadura de tração para a seção da viga analisada.

## **2.1 Metodologia**

A metodologia do presente trabalho consiste inicialmente em uma pesquisa bibliográfica sobre o assunto em livros, artigos e trabalhos publicados, além da ABNT NBR 6118:2018.

Para o estudo comparativo, será realizado um ajuste das equações de equilíbrio do momento fletor de forma adimensional, no estado limite último em seções retangulares submetidas a flexão normal simples, conforme as hipóteses básicas da ABNT NBR 6118:2018. Será utilizada como referência “Apostila Concreto Armado I”, do curso de Especialização em Estruturas do Departamento de Engenharia de Estruturas DEES (EE-UFMG). Por fim, será realizada a análise de resultados de ambos os diagramas de tensões no concreto.

## **3. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA**

Para compreender o funcionamento das estruturas submetidas a flexão simples, é essencial entender os elementos estruturais definindo alguns conceitos básicos sobre o assunto. Nesse trabalho será estudado o comportamento do elemento estrutural viga. Vigas são “elementos lineares em que a flexão é preponderante”, definição esclarecida pela ABNT NBR 6118:14, item 14.4.1.1. Esses elementos lineares são aqueles em que o seu comprimento longitudinal supera em pelo menos três vezes a maior dimensão da seção transversal, sendo também denominada barras.

### **3.1 Estados Limites**

#### **3.1.1 Estado limite último – ELU**

A ABNT NBR 6118:2018 conceitua o estado limite último (ELU), relacionado ao colapso, ou a qualquer outra forma de ruína estrutural, que determine a paralização do uso da estrutura. Também define critérios gerais e requisitos básicos que regem o projeto.

Em conformidade com a ABNT NBR 6118:2018, a segurança das estruturas de concreto deve sempre ser verificada em relação aos seguintes estados-limites últimos:

- a) Perda do equilíbrio da estrutura, admitida como corpo rígido;
- b) Esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, devido às solicitações normais e tangenciais, admitindo-se a redistribuição de esforços internos, desde que seja respeitada a capacidade de adaptação plástica definida na NBR 6118:2018, e admitindo-se, em geral, as verificações separadas das solicitações normais e tangenciais. Todavia, quando a interação entre elas for importante, ela estará explicitamente indicada na NBR 6118:2018;
- c) Esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando os efeitos de segunda ordem;
- d) Provocado por solicitações dinâmicas, conforme Seção 23 da NBR 6118:2018;
- e) Colapso progressivo;
- f) Esgotamento da capacidade resistente da estrutura, no seu todo ou em parte, considerando exposição ao fogo, conforme a ABNT NBR 15200:2012;
- g) Esgotamento da capacidade resistente da estrutura, considerando ações sísmicas, de acordo com a ABNT NBR 15421:2006;
- h) Outras situações que eventualmente possam ocorrer em casos especiais.

### **3.1.2 Estado limite de serviço - ELS**

O comportamento das estruturas no estado limite de serviço não chega a comprometer a estrutura, ou seja, não chega ao colapso. Nesse estado, deve-se verificar as fissuras, prever as deformações e analisar as flechas. Para os estados limites de serviço, a ABNT NBR 6118:2018

no item 10.4, conceitua e estabelece requisitos relacionados à durabilidade das estruturas, ao conforto do usuário e à aparência, à boa utilização funcional, quanto aos usuários, às máquinas ou aos equipamentos utilizados. Também regula as construções especiais, analisando a segurança em relação a outros estados limites de serviço que não estão definidos na NBR 6118:2018.

Alguns estados limites de serviços determinados pela NBR 6118:2018, no seu item 3.2, são:

- Estado-limite de formação de fissuras (ELS-F);
- Estado-limite de abertura das fissuras (ELS-W);
- Estado-limite de deformações excessivas (ELS-DEF);
- Estado-limite de vibrações excessivas (ELS-VE).

### **3.2 Concreto Armado**

O concreto armado é uma combinação de alta relevância na construção civil. Sua utilização abrange várias áreas da engenharia e arquitetura.

O concreto é uma mistura de cimento, agregados (brita e areia) e água. A colocação de barras de aço o transforma em concreto armado. Seu desempenho é alcançado devido à combinação de três propriedades, tais como: aderência aço-concreto, coeficientes de dilatação térmica do aço e do concreto praticamente iguais e a proteção da armadura contra a corrosão.

Uma estrutura de concreto armado deve apresentar boas condições de ductilidade, ou seja, apresentar grandes deformações, de maneira que, uma eventual ruína ocorra de forma suficientemente avisada, alertando os usuários. A NBR 6118:2018 limita a profundidade máxima da linha neutra, como visto adiante, com esse propósito.

### 3.2.1 Propriedades mecânicas do concreto

#### 3.2.1.1 Resistência à compressão

A principal característica do concreto é sua resistência à compressão, propriedade mecânica a ser considerada e analisada.

#### 3.2.1.2 Resistência característica do concreto à compressão - $f_{ck}$

Silva (2018, p. 1.8) relata que a resistência característica ( $f_{ck}$ ) deve ser determinada pelo ensaio de corpos de prova submetidos à compressão simples atendendo à normas estabelecidas. Esse ensaio também permite a obtenção de outras características, tais como o módulo de deformação longitudinal (o módulo de elasticidade). Quando os resultados dos ensaios a compressão de um grande número de corpos de provas são colocados em um gráfico onde nas abscissas são marcadas as resistências obtidas e nas ordenadas a frequência com que as mesmas ocorrem, o gráfico final, ilustrado na Figura 1, obedece a uma curva normal de distribuição de frequência, ou curva de Gauss.

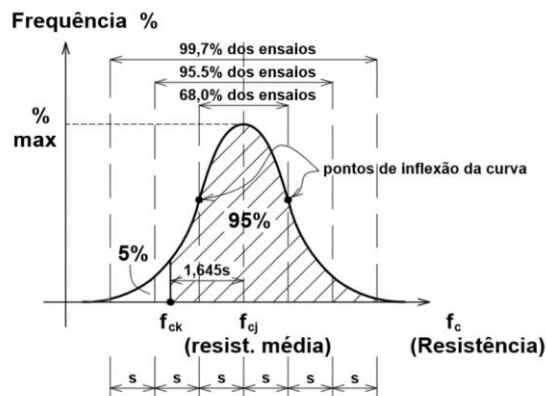


Figura 1 - Curva de Gauss para CPs de concreto ensaiados à compressão resistência característica

Fonte: SILVA (2018)

Do lote de corpo de provas ensaiados a resistência a ser utilizada nos cálculos é baseada em considerações probabilísticas, considerando-se a resistência característica ( $f_{ck}$ ) do lote de concreto ensaiado aquela abaixo da qual só corresponde um total de 5% dos resultados obtidos, ou seja, um valor com 95% de chance de ser ultrapassado, Silva (2018, p. 1,9).

A resistência característica define as classes do concreto por exemplo: o concreto classe C20 é aquele concreto cuja resistência característica a compressão aos 28 dias, vale  $f_{ck} = 20$  MPa.

### 3.2.1.3 Módulo de elasticidade longitudinal

De acordo com Silva (2018) o módulo de elasticidade ou módulo de deformação do concreto, é uma grandeza mecânica que mede a rigidez de um material sólido. Em conformidade com ABNT NBR 6118:2018 no item 8.2.8, deve-se determinar o ensaio de acordo com a ABNT NBR 8522:2008. Quando não forem realizados ensaios, pode ser estimado através expressão (3.1) , para concretos com  $f_{ck} = 20$  até  $f_{ck} = 50$  MPa (Grupo I)

Modulo de elasticidade ou módulo de deformação tangente inicial:

$$E_{ci} = \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (3.1)$$

Onde

$\alpha_E = 1,2$  concreto produzido com brita de basalto ou diabásio

$\alpha_E = 1,0$  concreto produzido com brita de granito ou gnaiss

$\alpha_E = 0,9$  concreto produzido com brita de calcário

$\alpha_E = 0,7$  concreto produzido com brita de arenito

Modulo de elasticidade secante utiliza-se para verificação da estrutura no ELS

$$E_{cs} = \alpha_i . E_{ci} \quad (3.2)$$

$$\alpha_i = 0,8 + 0,2 \frac{f_{ck}}{80} \leq 1,0 \quad (3.3)$$

Onde:

$E_{ci}$  e  $f_{ck}$  são dados em MPa

$E_{ci}$ : Módulo de deformação tangente inicial

$E_{cs}$ : Módulo de deformação secante

### 3.2.1.4 Diagrama tensão-deformação do concreto a compressão

De acordo com a NBR 6118:2018 no item 8.2.10.1 o diagrama real ( $\sigma_x \varepsilon$ ) na compressão é sempre curvo e idealizado conforme a Figura 2, para efeito de utilização. No estado-limite último, para concretos de classes até C50 tem-se a deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico ( $\varepsilon_{c2} = 2 \text{‰}$ ) e deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura ( $\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{‰}$ ). Como será visto no item 4.1 e 4.2 abaixo.

No diagrama  $\sigma_x \varepsilon$ , ilustrado na Figura 2, observa-se dois trechos:

O primeiro trecho, com deformações inferiores a  $\varepsilon_{c2}$ , é curvo e apresenta-se na forma de uma parábola de grau “n” ( $n=2$  para concretos até 50 MPa). A tensão no concreto  $\sigma_c$  nesse trecho é dada pela equação (3.3).

$$\sigma_{c,2a} = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (3.3)$$

No segundo trecho, com deformações variando de  $\varepsilon_{c2}$  a  $\varepsilon_{cu}$ , a tensão de pico é constante e igual a  $f_c = \alpha_c \cdot f_{cd}$ . O coeficiente  $\alpha_c$  para concretos de classes até C50 é igual 0,85, conforme será visto no item 4.1.

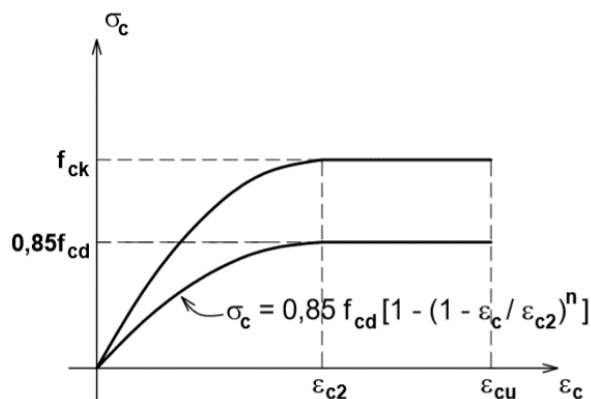


Figura 2 - Diagrama tensão deformação idealizado a compressão  
Fonte: SILVA (2018)

Onde:

$\varepsilon_c$  - Deformação específica do concreto;

$\varepsilon_{cu}$  - Deformação específica de encurtamento do concreto na ruptura;

$\varepsilon_{c2}$  - Deformação específica de encurtamento do concreto no início do patamar plástico;

$\sigma_c$  - Tensão à compressão no concreto;

$f_{ck}$  - Resistência característica à compressão do concreto;

$f_{cd}$  - Resistência de cálculo à compressão do concreto.

### 3.2.1.5 Resistência a tração do concreto

A resistência à tração é desprezada no dimensionamento dos elementos estruturais, pois se tem pouca importância na capacidade de carga da estrutura. Mas, conforme a NBR 6118:2018 deve-se realizar a verificação das deformações da estrutura sob as cargas de serviço, levando-se em conta a colaboração do concreto tracionado. Nesses casos, pode-se empregar a equação (3.4), para concretos de classes até C50, para a estimativa de  $f_{ctm}$  (resistência média do concreto à tração) em função da resistência característica  $f_{ck}$  adotada no projeto.

$$f_{ct,m} = 0,3 (f_{ck})^{2/3} \text{ MPa} \quad (3.4)$$

O ensaio habitual na tração é normatizado em três ensaios: tração direta, tração indireta (compressão diametral) e tração na flexão.

Para a NBR 6118:2018 no item 8.2.10.2, o diagrama  $\sigma_x \varepsilon$  do concreto não fissurado pode ser ilustrado conforme a Figura 3, com a deformação máxima de alongamento igual a 0,15 ‰. Assim tem-se a resistência média do concreto à tração  $f_{ctm}$  e a resistência característica do concreto à tração  $f_{ctk}$ , ou simplesmente  $f_{tk}$ .

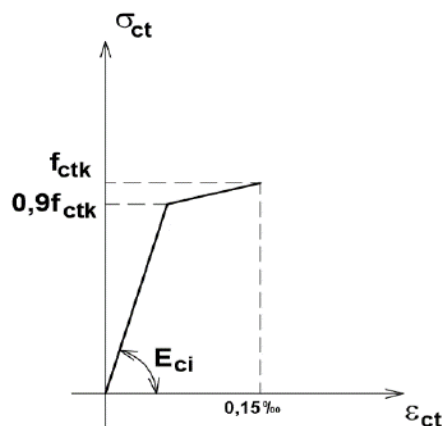


Figura 3 - Diagrama tensão deformação bilinear na tração  
Fonte: Adaptada da Fig. 8.3 da NBR 6118:2018

### 3.2.1.6 Resistência de cálculo do concreto

A resistência de cálculo do concreto ( $f_{cd}$ ), é definida de acordo com a NBR 6118:2018 no item 12.3.3, na qual, esclarece que a resistência de cálculo é obtida em função da idade do concreto. Para data igual ou superior a 28 dias, essa resistência é dada pela equação (3.5) em função do valor  $f_{ck}$ . O concreto atinge a resistência calculada, mas ao longo do tempo a mesma continua aumentando.

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.5)$$

Onde:

$\gamma_c = 1,4$  sendo o coeficiente de ponderação da resistência do concreto, definido conforme a Tabela 1.

Para efeito de cálculo no ELU, as resistências de cálculo dos materiais são obtidas a partir das resistências características divididas por um coeficiente de ponderação ( $\gamma_m$ ), de minoração. Na Tabela 1, estão indicados os valores a serem considerados para o coeficiente de ponderação da resistência do concreto ( $\gamma_c$ ) e do aço ( $\gamma_s$ ).

Tabela 1 - Valores dos coeficientes de ponderação  $\gamma_c$  e  $\gamma_s$  dos materiais

<b>Combinações</b>	<b>Concreto (<math>\gamma_c</math>)</b>	<b>Aço (<math>\gamma_s</math>)</b>
Normais	1,4	1,15
Especiais ou de construção	1,2	1,15
Excepcionais	1,2	1,0

Fonte: NBR 6118:2018, Tabela 12.1

### 3.2.2 Aços para concreto armado

As barras de aço utilizados em estruturas de concreto armado no Brasil estão de acordo com a NBR 7480:2007. Essa norma, “[...] estabelece os requisitos exigidos para a encomenda, fabricação e fornecimentos de barras e fios de aço destinados a armaduras para estruturas de concreto armado”. Dependendo do processo de fabricação o aço pode apresentar um patamar



de escoamento no seu diagrama  $\sigma \times \varepsilon$ . Para efeito de dimensionamento o diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  ilustrado na Figura 4, é o apresentado na NBR 6118:2018.

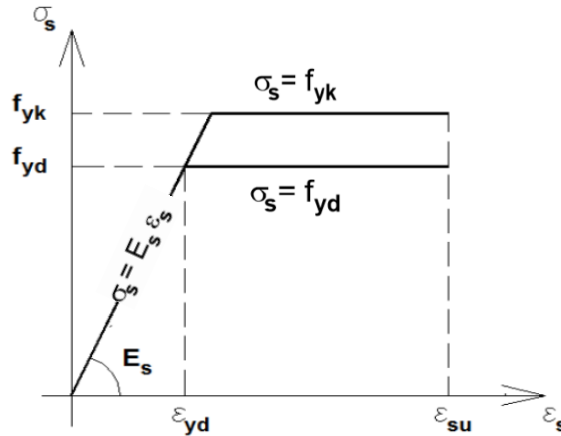


Figura 4 - Diagrama tensão x deformação para aços de armaduras passivas.  
Fonte: NBR 6118/2018

Onde:

$f_{yk}$  é a resistência característica ao escoamento dos aços, obtida por ensaios submetidos a tração.  
 $f_{yd}$  é a resistência de cálculo ao escoamento, dada por  $f_{yk}/\gamma_s$  ( $\gamma_s$  é igual a 1,15)  
 $\varepsilon_{yd}$  é a deformação específica de escoamento de cálculo do aço

De acordo com a NBR 6118:20014, “O diagrama tensão-deformação do aço e os valores característicos da resistência ao escoamento  $f_{yk}$ , da resistência à tração  $f_{stk}$  e da deformação na ruptura  $\varepsilon_{uk}$  devem ser obtidos de ensaios de tração realizados segundo a NBR ISO 6892-1”. O valor de  $f_{yk}$  para os aços sem patamar de escoamento é o valor da tensão correspondente à deformação permanente de 2 ‰.

A resistência de cálculo de início de escoamento do aço ( $f_{yd}$ ), é definida pela equação (3.6), cuja resistência ao escoamento  $f_{yk}=50 \text{ KN/cm}^2$  para o aço CA 50, em que CA significa Concreto Armado e o número representa o valor característico da resistência de escoamento do aço,  $f_{yd}$ , em  $\text{kN/cm}^2$  ou  $\text{kgf/mm}^2$ . Importante destacar, ao mudar CA do aço o valor de  $f_{yk}$  também mudará.

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (3.6)$$

$$f_{yd} = f_{yk} / \gamma_s = 50/1,15 = 43,48 \text{ kN/cm}^2 \approx 43,5 \text{ kN/cm}^2 \quad (3.7)$$

Onde:

$\gamma_s=1,15$  é o fator de minoração da resistência do aço

$f_{yk}$  - resistência característica do aço à tração.

A deformação de início de escoamento do aço CA- 50 é  $\epsilon_{yd}= 2,07 \%$ , que é obtido pela equação (3.8). Quaisquer deformações menores que a de início de escoamento resultam em tensões menores que a máxima permitida no aço, que é igual a  $f_{yd}$ , caracterizando uso antieconômico do aço.

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (3.8)$$

Onde:

$E_s$  - módulo de elasticidade do aço, admitido igual a 210.000 MPa.

$f_{yd}$  - resistência de escoamento de cálculo do aço,

O aço até a sua ruptura terá uma deformação muito maior que o concreto. Nessa situação, devido a fissuração do concreto, a deformação máxima do aço fica limitada até  $\epsilon_{su}=10^0/00$ . Essa é a imposição do concreto armado, quanto a utilização do aço.

#### 4. FLEXÃO NORMAL SIMPLES

Dentre os esforços solicitantes o momento fletor (M), é em condições normais, o esforço predominante no dimensionamento de peças estruturais como as vigas. Assim, quando o momento fletor atua segundo um plano que contenha um dos eixos principais da seção transversal, a flexão é dita normal. E a flexão normal simples é dita quando o momento atua isoladamente, com tensões de tração e compressão na mesma seção transversal. Se simultaneamente atua uma força normal (N) a flexão é dita normal composta. Quando atua apenas momento, com componentes nos dois eixos principais de inércia da seção transversal, a

flexão é dita oblíqua simples e se acompanhada de força normal é dita oblíqua composta. (SILVA, 2018).

As três etapas da NBR 6118:2018 no item 16 (princípios gerais de dimensionamento, verificação e detalhamento), que se desenvolvem logo após a análise estrutural, devem garantir segurança, em relação aos estados-limites últimos (ELU) e de serviço (ELS), das estruturas como um todo e de cada uma de suas partes. Essa condição de segurança exige que as solicitações externas de cálculo não podem ser maiores do que as resistências internas de cálculo, e estas condições devem ser verificadas em relação a todos os estados limites e todos os carregamentos, ou seja, em qualquer caso deve ser respeitada a condição abaixo:

$$S_d \leq R_d \quad (4.1)$$

Onde:

$S_d$  é a solicitação externa de cálculo

$R_d$  é a resistência interna de cálculo.

Com a finalidade de garantir a segurança, tem-se que o momento externo solicitante de cálculo  $M_{Sd}$  tem de ser menor ou igual ao momento interno resistente de cálculo  $M_{Rd}$ .

$$M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad (4.2)$$

$$M_{Sd} \leq M_{Rd} = R_{cc} \cdot z = R_{st} \cdot z \quad (4.3)$$

Como a flexão é simples (FNS), a força normal solicitante é igual a zero, havendo apenas o momento externo solicitante. A Figura 5 apresenta uma seção transversal retangular de uma viga, mostrada a esquerda, e sua vista lateral parcial, mostrada a direita. Na vista lateral a seção transversal é uma linha vertical, onde estão concentrados em seu centro geométrico os esforços externos solicitantes. As resultantes internas de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) e de tração no aço ( $R_{st}$ ), linha neutra (LN), estão mostradas na Figura 5 a seguir.

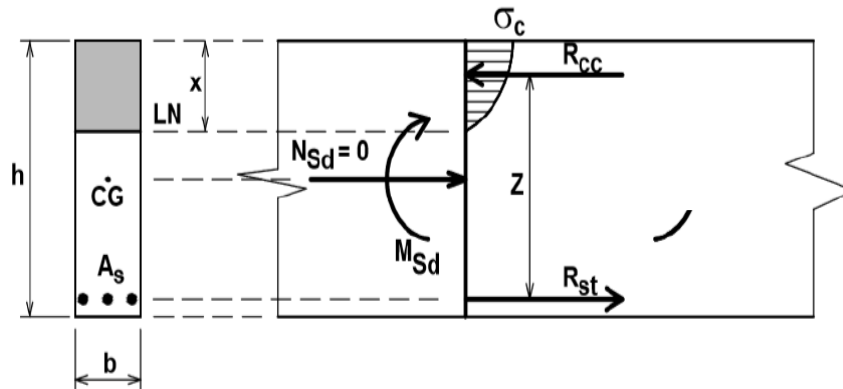


Figura 5- Esforços solicitantes externos e internos  
Fonte: SILVA (2018)

#### 4.1 Hipóteses Básicas - NBR 6118:2018

De acordo com a ABNT NBR 6118:2018 no item 17.2.2, hipóteses básicas, na análise dos esforços resistentes de uma seção de viga sujeita a solicitações normais no Estado Limite Último, devem ser consideradas as seguintes hipóteses básicas:

- a) As seções transversais se mantêm planas após a deformação até o estado limite último. Como efeito, a deformação em um ponto qualquer da seção é proporcional à sua distância a linha neutra;
- b) A deformação das barras passivas aderentes em tração ou compressão deve ser a mesma do concreto em seu entorno, ou seja, admite-se solidariedade perfeita entre o concreto e a armadura;
- c) As tensões de tração no concreto, normais à seção transversal, devem ser desprezadas, pois no ELU a resistência a tração é nula;
- d) Para o encurtamento de ruptura do concreto nas seções parcialmente comprimidas considera-se o valor convencional de  $\epsilon_{cu}$  (domínios 3, 4 e 4a da Figura 9). Nas seções inteiramente comprimidas (domínio 5) admite-se que o encurtamento da borda mais comprimida, na ocasião da ruptura, varie de  $\epsilon_{cu}$  a  $\epsilon_{c2}$ , mantendo-se inalterado e igual a  $\epsilon_{c2}$  a deformação a uma distância  $[(\epsilon_{cu} - \epsilon_{c2}) / \epsilon_{cu}]$ , a partir da borda mais comprimida. (Figura 9);

- e) A distribuição de tensões no concreto é feita de acordo com o diagrama parábola-retângulo, ilustrado na Figura 6, com tensão de pico igual a  $f_c = \alpha_c \cdot f_{cd}$ , com  $\alpha_c = 0,85$  para concretos de classes até C50. Esse diagrama parábola-retângulo (Figura 6), pode ser substituído por um diagrama retangular simplificado com tensão  $f_c = \alpha_c \cdot f_{cd}$ , conforme a
- f) Figura 7, e profundidade  $y = \lambda x$ , onde o valor do parâmetro  $\lambda = 0,8$  para  $f_{ck} \leq 50$  MPa. Quando se considera esse diagrama retangular e a largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, não diminuir a partir dessa, para a borda mais comprimida, conforme exemplificado na Figura 8, a tensão vale  $f_c = \alpha_c f_{cd}$ , caso contrário a tensão será  $f_c = 0,9 \alpha_c f_{cd}$ .

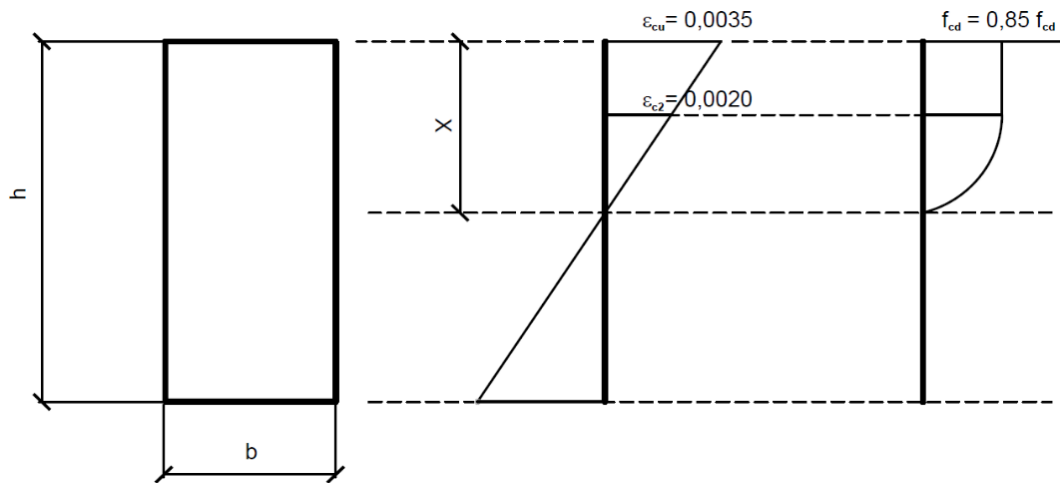


Figura 6 - Diagramas  $\sigma \times \epsilon$  parábola-retângulo para distribuição de tensões de compressão no concreto (Grupo I)  
Fonte: Silva (2018)

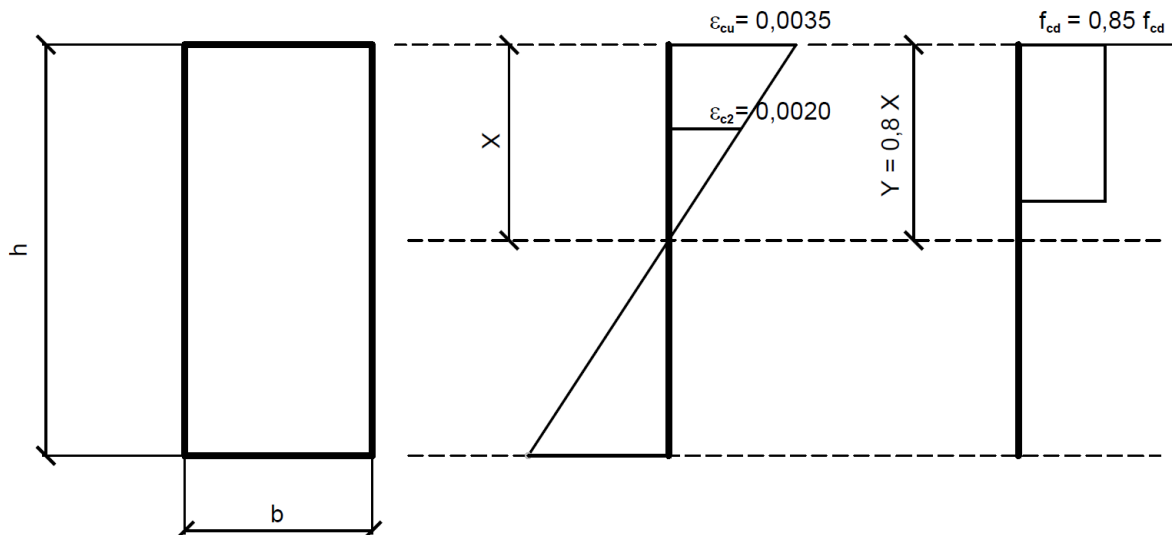


Figura 7 - Diagramas  $\sigma \times \varepsilon$  retangular simplificado para distribuição de tensões  
 Fonte: Silva (2018)

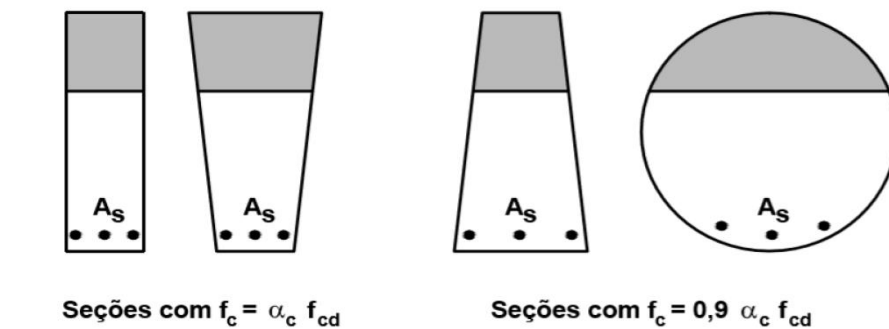


Figura 8 - Valores de  $f_c$  para o diagrama  $\sigma \times \varepsilon$  retangular simplificado  
 Fonte: Silva (2018)

As diferenças de resultados obtidos com esses dois diagramas são pequenas e aceitáveis, sem necessidade de coeficiente de correção adicional (NBR 6118:2018). Essa constatação é o objetivo desse trabalho.

- g) A tensão nas armaduras deve ser obtida com base nos diagramas tensão-deformação, com valores de cálculo definidos por NBR 6118:2018.

## 4.2 Domínios de Deformação

A NBR 6118:(2018, p. 121) no item 17.2.2 conceitua o “estado-limite último é caracterizado quando a distribuição das deformações na seção transversal pertencer a um dos cinco domínios” conforme mostrado na Figura 9. Nessa figura, observa-se a caracterização dos domínios de deformação, quando submetidos a solicitações normais. As deformações de alongamento são marcadas do lado esquerdo e de encurtamento do lado direito, oriundas de tensões normais de tração e de compressão, simultaneamente.

Na Figura 9, os pontos correspondentes ao dimensionamento (ELU) são os pontos A, B e C. As estruturas de concreto armado se rompem nas seguintes situações: ruptura do aço por tração, ruptura do concreto por compressão ou a ruptura de ambos. A ruptura convencional do aço ocorre por tração ( $\varepsilon_{su} = 10\%$ ), que equivale ao ponto “A” dos domínios de deformação 1 e 2. A ruptura do concreto por compressão, para peças parcialmente comprimidas, ocorre no ponto “B” ( $\varepsilon_{c,max} = \varepsilon_{cu} = 3,5 \%$ , para concretos do grupo 1), que define os domínios 3, 4 e 4a.

Para peças inteiramente comprimidas a ruptura do concreto é definida pelo encurtamento máximo,  $\epsilon_{c,2} \leq \epsilon_{c,max} \leq \epsilon_{cu}$  (de 2‰ a 3,5‰ para o grupo 1) desde que, a 3/7 de (h), este encurtamento seja constante e igual ao valor de  $\epsilon_{c,2}$ . Isto significa que no domínio 5, a seção passa a girar em torno do ponto C, sendo (d) a altura útil da seção, ou seja, a distância da borda mais comprimida da seção até o centro da armadura mais tracionada ( $A_s$ ) e  $\epsilon_{cu}$  é o encurtamento de ruptura do concreto.

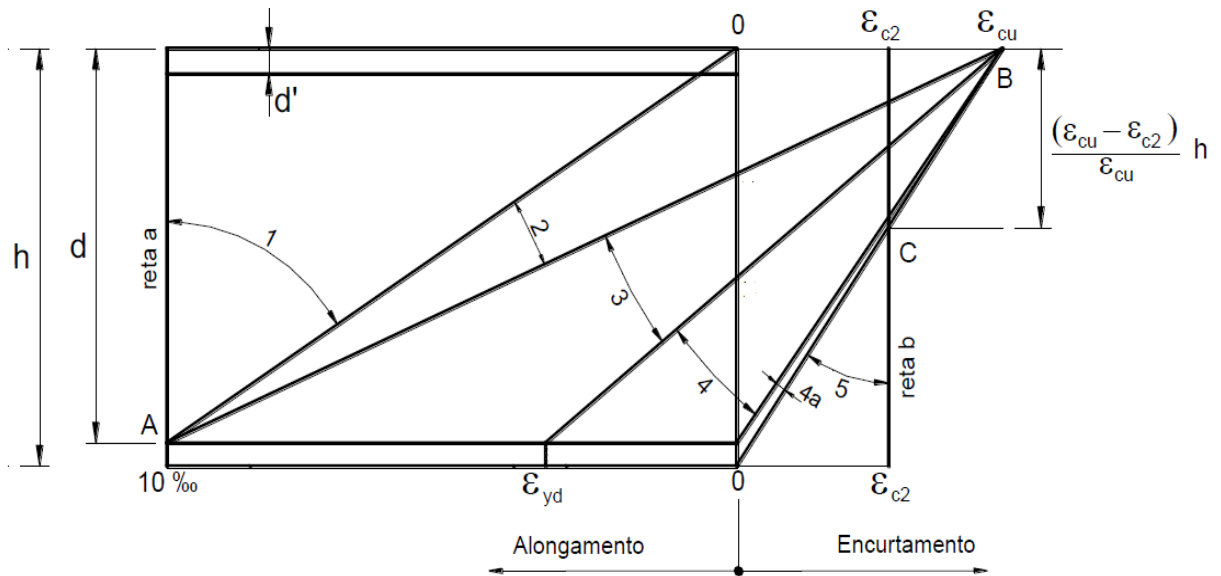


Figura 9 - Domínios de deformação no estado limite último de uma seção transversal  
Fonte: Adaptada da Figura 17.1 da NBR 6118:2018

#### 4.2.1 Domínio 1

No Domínio 1, as deformações começam na reta “a” (tração centrada) e a seção gira em torno do ponto A. Nesse domínio a seção encontra-se totalmente tracionada e sem compressão, com solicitações variando desde a tração centrada até flexo-tração (tração não uniforme) sem compressão. Nesse caso, a linha neutra ( $x$ ) não corta a seção que se encontra externa a seção transversal variando de  $-\infty$  a zero, ou seja,  $(-\infty < x \leq 0)$  para cima da seção. Para que se tenha um estado limite último o alongamento nessa armadura é  $\epsilon_{su} = 10\text{‰}$ , representado pelo ponto “A”. SILVA (2018, p. 2.10)

#### 4.2.2 Domínio 2

O domínio 2, é caracterizado pelo ELU correspondente à deformação plástica excessiva do aço  $\epsilon_{su} = 10\text{‰}$ . A seção ainda gira em torno do ponto A. Nesse caso, a seção transversal encontra-

se parcialmente comprimida, até que no limite, seja atendido simultaneamente o ELU para a ruptura do concreto à compressão, ou seja,  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ . As solicitações prováveis são flexo-tração, flexão simples pois se tem simultaneamente resultantes de compressão e de tração, e a flexo-compressão com baixa excentricidades e sem ruptura à compressão do concreto, ou seja,  $\varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu}$ . (SILVA, 2018, p. 2.10).

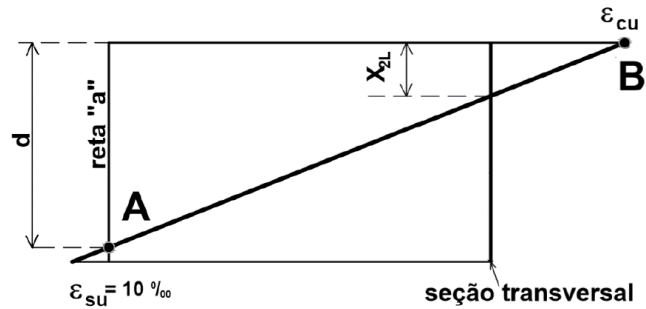


Figura 10 – Profundidade limite do domínio 2  
Fonte: SILVA (2018)

No domínio 2 a deformação na fibra mais comprimida varia desde  $\varepsilon_c = 0$  a  $\varepsilon_c = \varepsilon_{cu}$ . Considerando concretos do grupo I, onde o  $\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$  e  $\varepsilon_{c2} = 2 \text{ ‰}$ , pode-se dividir o domínio 2 nos subdomínios 2a e 2b. No subdomínio 2a, para concretos do grupo I, a deformação máxima do concreto varia  $0 < \varepsilon_{c, \max} = 2 \text{ ‰}$ , tendo, pois, um diagrama de tensões no concreto apenas com um trecho parabólico. No subdomínio 2b a deformação máxima varia  $\varepsilon_{c2} = 2 \text{ ‰} \leq \varepsilon_{c, \max} \leq \varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$ , resultando, pois, em um diagrama de tensões no concreto parábola retângulo. Daí a subdivisão em 2 subdomínios parece ser o mais razoável (SILVA, 2018).

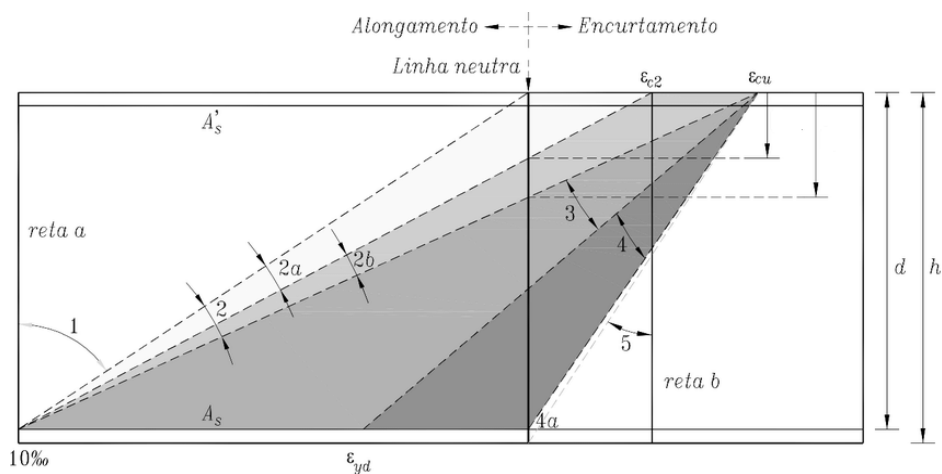


Figura 11 - Subdivisão do domínio 2  
Fonte: Tozato (2016)



A linha neutra varia de  $x = 0$  até a profundidade limite  $x = x_{2L}$ , que é obtida por semelhança de triângulos conforme a equação abaixo. Para concretos do grupo I:

$$X_{2L} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{su}} \cdot d \quad (4.4)$$

$$X_{2L} = \frac{3,5}{3,5 + 10} \cdot d = 0,259 \cdot d$$

Com a subdivisão do domínio 2, a profundidade limite  $x = x_{2a, \text{lim}}$  da linha neutra no subdomínio 2a, para concretos do grupo I, é dada conforme a equação (4.5), também obtida por semelhança de triângulos.

$$X_{2a, \text{lim}} = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{c2} + \varepsilon_{su}} \cdot d \quad (4.5)$$

$$X_{2a, \text{lim}} = \frac{2,0}{2,0 + 10} \cdot d = 0,1667 \cdot d \quad (4.6)$$

Quanto à segurança do elemento estrutural, o colapso da viga será com aviso prévio, pois a deformação do aço é máxima e ocorrerá antes de uma possível ruptura por esmagamento do concreto na região comprimida.

### 4.2.3 Domínio 3

No domínio 3, a seção gira em torno do ponto B e não mais em torno do ponto A. Nesse domínio a deformação do concreto se mantém sempre igual a  $\varepsilon_{cu} = 3,5 \text{ ‰}$  (para concretos do grupo I) e as deformações do aço variam no intervalo  $\varepsilon_{yd} = 2,07 \text{ ‰} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} = 10 \text{ ‰}$ , conforme ilustrado na Figura 9. A ruptura ocorrerá no concreto por compressão, enquanto a armadura ( $A_s$ ) se encontra em fase de escoamento. Situação ideal para os dois materiais (concreto e aço), é a ilustrada na figura 12, correspondente ao final do domínio 3, onde os dois materiais atingem a sua capacidade máxima de aproveitamento. As solicitações que ocorrem nesse domínio são flexão simples e flexo-compressão com ruptura à compressão do concreto. (SILVA, 2018)

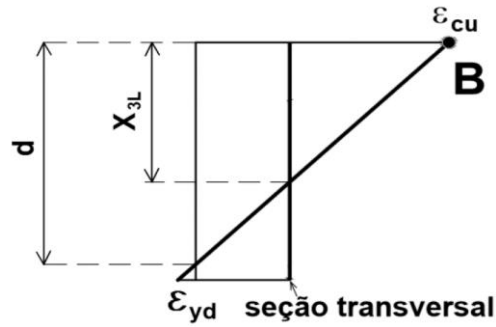


Figura 12 – Final do domínio 3

Fonte: SILVA (2018)

A linha neutra varia desde a profundidade limite do domínio 2 até ao valor limite do domínio 3. E o valor  $X_{3L}$  é calculado por semelhança de triângulos conforme a equação (4.7). Para concretos de classes até C50.

$$X_{3L} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} \cdot d \quad (4.7)$$

$$X_{3L} = \frac{3,5}{3,5 + 2,07} \cdot d = 0,628 \cdot d \quad (4.8)$$

A profundidade da linha neutra no domínio 3 depende do tipo de aço e do grupo de concreto utilizado. Quanto maiores estes valores, mais próxima a linha neutra estará da fibra superior comprimida. Isto pode ser observado na Tabela 2, SILVA (2018).

Tabela 2 - Valores limites de  $\varepsilon$  para o concreto e  $\xi_L$  para os domínios

Deformações limites do concreto e profundidades relativas dos domínios 2 e 3						
CLASSE	$\varepsilon_{c2}$ ‰	$\varepsilon_{cu}$ ‰	$\xi_{2L} =$ $X_{2,L}/d$	$\xi_{3L} = X_{3,L}/d$		
				CA 25 $\varepsilon_{yd} = 1,035\%$	CA 50 $\varepsilon_{yd} = 2,070\%$	CA 60 $\varepsilon_{yd} = 2,484\%$
Até C50	2,000	3,500	0,259	0,772	0,628	0,585
C55	2,199	3,125	0,238	0,752	0,602	0,557
C60	2,288	2,884	0,224	0,736	0,582	0,537
C65	2,357	2,737	0,215	0,726	0,569	0,524
C70	2,416	2,656	0,210	0,720	0,562	0,517
C75	2,468	2,618	0,207	0,717	0,558	0,513
C80	2,516	2,604	0,207	0,716	0,557	0,512
C85	2,559	2,600	0,206	0,715	0,557	0,511
C90	2,600	2,600	0,206	0,715	0,557	0,511

Fonte: SILVA (2018).

O domínio 3 é caracterizado basicamente pela flexão simples (seções subarmadas) e flexo-compressão com ruptura à compressão do concreto e com o escoamento da armadura  $A_s$ .

#### 4.2.4 Domínio 4

No domínio 4 a seção continua girando em torno do ponto B desde a posição final do domínio 3 até que, a deformação na armadura, seja nula. A armadura trabalha com uma tensão de tração menor ou igual à  $f_{yd}$  e, portanto, estará subutilizada. Embora possível, nesse domínio o dimensionamento à flexão simples (seções superarmadas) deve ser evitado por questões econômicas, (SILVA, 2018, p. 2.14)

A linha neutra corta a seção transversal e varia entre  $X_{3lim}$  e  $X_{4lim} = d$ .

O dimensionamento nesse domínio é perigoso, pois a ruína é “sem aviso prévio” e se dá por ruptura do concreto e sem escoamento do aço.

#### 4.2.5 Domínio 4a

O domínio 4a, caracteriza-se por comprimir ambas as armaduras. A solicitação desse domínio é definida por flexo-compressão. Nesse domínio “ainda se pode girar em torno do ponto B até que seção tenha deformação nula na fibra inferior mais tracionada”. (SILVA, 2018, p. 2.14)

A profundidade da linha neutra varia desde a altura útil  $d$  até a altura total da peça  $h$ .

#### 4.2.6 Domínio 5

O domínio 5 caracteriza-se por peças submetidas à flexo-compressão com as armaduras comprimidas, até a situação limite da compressão centrada, reta b. “[...] em peças inteiramente comprimidas o encurtamento da fibra mais comprimida varia de  $\varepsilon_{cu}$  a  $\varepsilon_{c2}$ , desde que a  $[(\varepsilon_{cu} - \varepsilon_{c2}) / \varepsilon_{cu}] h$ , ou seja, a uma distância de  $(3/7).h$ , dessa borda o encurtamento seja constante e igual a  $\varepsilon_{c2}$ . Isso significa que no domínio 5 a seção gira em torno de um terceiro ponto, o C”, conforme a Figura 13. Nesse domínio não é possível a ocorrência de flexão simples” (SILVA, 2018, p. 2.14)

A linha neutra não corta a seção transversal, ou seja, encontra-se fora da seção, que está inteiramente comprimida. A linha neutra varia no intervalo  $(h) \leq x \leq X_{5L} = +\infty$  (para baixo).

A Figura 13 representa a situação de deformação correspondente aos limites entre o final do domínio 4a e o início do domínio 5. Nesse caso  $x=h$ , e a distância  $a_{0-2}$  é obtida por regra de três simples conforme a seguir:

Para concretos de classe até C50 tem-se:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{h} = \frac{\varepsilon_{c2}}{a_{0-2}} \quad (4.9)$$

$$a_{0-2} = \frac{4}{7} \cdot h \rightarrow a_{2-u} = \frac{3}{7} \cdot h \quad (4.10)$$

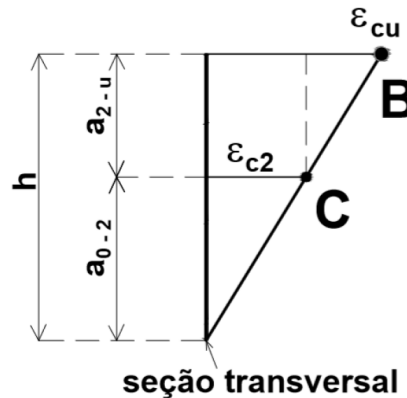


Figura 13 – Início do domínio 5 e o posicionamento do ponto C  
Fonte: SILVA (2018)

#### 4.2.7 Seções Subarmada, Normalmente Armada e Superarmada

No caso da flexão simples, dos domínios citados no item 4.1 acima, a flexão simples não é possível nos domínios 1 (seção inteiramente tracionada), domínio 5 (seção inteiramente comprimida) e domínio 4a (ambas as armaduras comprimidas). Restam os domínios 2 e 3, onde as peças são subarmadas ( $\sigma_s = f_{yd}$  ou  $\varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su} = 10\%$ ) e o domínio 4, onde as peças são superarmadas ( $\sigma_s < f_{yd}$  ou  $\varepsilon_s < \varepsilon_{yd}$ ).

Uma seção que trabalha no limite entre a seção subarmada (domínios 3) e a seção superarmada (domínios 4), é classificada como normalmente armada, ou seja, teoricamente, ocorrem ao mesmo tempo o encurtamento último convencional do concreto comprimido e a deformação de escoamento do aço (SILVA, 2018).

Segundo Tepedino (1980) citada por Silva (2018, p. 2.16), na flexão simples “[...] a superarmadura é antieconômica, pelo mau aproveitamento da resistência do aço. Por isto mesmo, sempre que possível, devem-se projetar seções subarmadas ou normalmente armadas, sendo a mesma desaconselhável pela NBR 6118”.

De acordo com NBR 6118:2018, respeitando-se os limites da posição da linha neutra ( $x/d$ ), consegue-se garantir boas condições de ductilidade, e, se necessário, deve-se fazer uso de armaduras de compressão.

Importante ressaltar que na NBR 6118:2018 no item 14.6.4.3, apresenta os limites para a posição da linha neutra visando adotar nas vigas uma maior capacidade de rotação. Quanto menor for a relação  $x/d$ , onde  $x$  é a posição da linha neutra e  $d$  é a altura útil da viga, maior será a rotação da seção melhorando sua ductilidade. Para proporcionar o adequado comportamento dúctil em vigas, a posição da linha neutra no ELU deve obedecer aos seguintes limites:

$x/d \leq 0,45$ , para concretos com  $f_{ck} \leq 50$  MPa;

$x/d \leq 0,35$ , para concretos com  $50 \text{ MPa} < f_{ck} \leq 90$  MPa.

### **4.3 Flexão Simples, Seção Retangular com Armadura Simples - Considerando Concretos do Grupo I (até classe C50)**

As seções com armadura simples são aquelas que possuem armadura somente na área da seção tracionada ( $A_s$ ). Nesse caso, o momento externo solicitante  $M_d$  (adimensionalmente K) será equilibrado internamente apenas pelo momento devido ao concreto comprimido (adimensionalmente K’). Para efeito deste dimensionamento, admite-se a seção retangular cujas características geométricas estão representadas na Figura 14, submetida apenas a um momento solicitante de cálculo  $M_d$  com ausência de força normal (N). Quando o momento externo  $M_d$  (K) for equilibrado apenas pelo momento interno devido ao concreto comprimido (K’), tem-se fisicamente  $K = K'$ , não sendo necessária, portanto, armadura de compressão  $A'_s$ . (SILVA, 2018)

Segundo a NBR 6118:2018, item 14.6.4.3, os valores limites  $\xi_L = 0,45$ , proporcionam um adequado comportamento dúctil da seção. A Tabela 3, apresenta o valor de  $K_L$  para concreto de classe até C50

Tabela 3 - Valor de  $K_L$  com o adequado comportamento dútil

CLASSE	$\lambda$	$\xi_L = (X/d)_L$	$\alpha_L = \lambda(X/d)_L$	$K_L = \alpha_L(1 - \alpha_L/2)$
Até C50	0,8000	0,45	0,360	0,295

Fonte: Silva (2018)

A máxima profundidade relativa da linha neutra também corresponde ao limite do domínio 3. Com essa profundidade limite, obtém-se o valor máximo do momento interno resistente devido ao concreto  $K'_L$  (sem necessidade de  $A'_s$ ), e que deve ser equilibrado pelo momento externo limite  $K_L$ .

Os critérios para limitação do valor de  $K$  para uma seção retangular, é dada por:

$$K \leq K_L \rightarrow K' = K$$

$$K > K_L \rightarrow K' = K_L$$

De acordo com Silva (2018, p. 2.19)

A armadura tracionada ( $A_s$ ) é racionalmente dimensionada na flexão simples quando trabalha com a máxima tensão possível  $\sigma_{sd} = f_{yd}$ , ou seja, apenas nos domínios 2 e 3, onde a profundidade relativa da linha neutra ( $\xi = x/d$ ) é menor ou igual à profundidade relativa limite do domínio 3 ( $\xi \leq \xi_{3L}$ ). Atendendo essa premissa básica do dimensionamento à flexão, a resultante de tração  $R_{st}$  deve ser obtida pelo produto da área  $A_s$  (incógnita) pela tensão  $\sigma_s = f_{yd}$ .

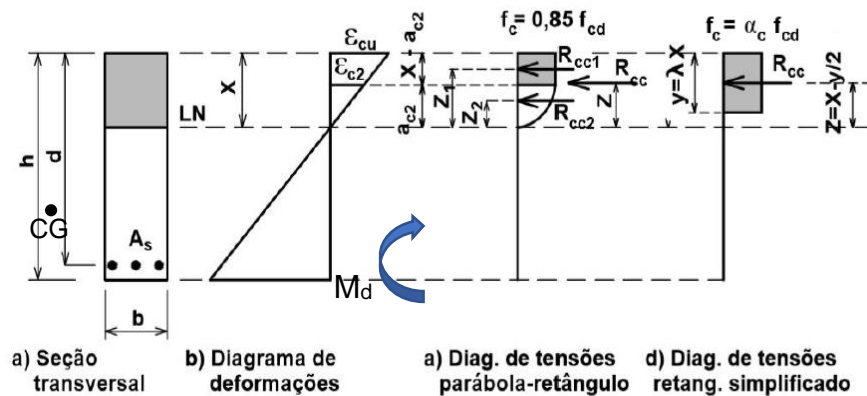


Figura 14 - Diagramas  $\sigma_x \epsilon$  para uma seção retangular de concreto do Grupo I

Fonte: SILVA (2018)

#### 4.4 Equacionamento da Flexão Normal Simples Considerando o Diagrama Retangular Simplificado e o Diagrama Parábola Retângulo para Concretos do Grupo I

##### 4.4.1 Equacionamento considerando o diagrama retangular simplificado

O equacionamento referente ao diagrama retangular simplificado baseia-se nas hipóteses básicas, item 4.1 acima, no qual afirma-se que a distribuição de tensões no concreto ocorre de acordo com o diagrama parábola-retângulo, com tensão de pico  $f_c = \alpha_c \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd}$ , que pode ser substituído por um diagrama retangular simplificado de altura  $y = \lambda \cdot x$ .

De acordo com a Figura 14, obtemos as equações de equilíbrio cuja somatória de momentos é nula em relação ao ponto de aplicação de ( $A_s$ ). A somatória de forças horizontais também é nula. Deste modo, tem-se:

$$M_d = f_c \cdot b \cdot y \cdot \left( d - \frac{y}{2} \right) + A'_s \sigma'_{sd} (d - d) \quad (4.11)$$

$$N_d = 0 = f_c \cdot b \cdot y + A'_s \sigma'_{sd} - A_s \cdot f_{yd} \quad (4.12)$$

Na equação (4.11), os três termos representam momentos, o primeiro o momento fletor externo solicitante de cálculo e os dois da direita, momentos fletores internos resistentes de cálculo devidos à resultante interna de compressão no concreto e à resultante de compressão na armadura  $A'_s$ , respectivamente.

“Ao dividir os termos dessa equação de equilíbrio por um outro que tenha a mesma dimensão de um momento, ( $f_c \cdot b \cdot d^2$ ), obtém-se uma nova equação de equilíbrio em termos adimensionais” é dada por: (SILVA, 2018, p. 2.20)

$$K = K' + \frac{A'_s \sigma'_{sd}}{f_c \cdot b \cdot d} \left( 1 - \frac{d'}{d} \right) \quad (4.13)$$

$$K = \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} \quad (4.14)$$

Onde:

O primeiro termo da equação (4.13) é o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor externo solicitante de cálculo (K), equação (4.14).

O segundo termo da equação (4.13) é o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor interno resistente de cálculo devido ao concreto comprimido (K'), equação (4.15)

$$K' = \frac{f_c \cdot b \cdot y \left(d - \frac{y}{2}\right)}{f_c \cdot b \cdot d^2} = \frac{y}{d} \left(1 - \frac{y}{2d}\right) = \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \quad (4.15)$$

O terceiro termo da equação (4.13) é também adimensional e mede a intensidade do momento fletor interno resistente de cálculo, devido à armadura (A's) comprimida.

Na equação (4.15), ( $\alpha$ ) representa o valor da profundidade relativa da linha neutra referente ao diagrama retangular simplificado de tensões no concreto, dado por:

$$\alpha = \frac{y}{d} = \frac{\lambda \cdot x}{d} = \lambda \cdot \xi \quad \rightarrow \quad \lambda = 0,8 \quad (4.16)$$

Onde:  $\xi = x/d$ .

Substituindo o valor de ( $\alpha$ ) na equação (4.15), tem-se:

$$K' = (\lambda \cdot \xi) \cdot \left\{1 - \left(\frac{\lambda \cdot \xi}{2}\right)\right\} \quad (4.17)$$

Ao substituir  $\lambda=0,8$  na equação acima, considerando  $f_{ck} \leq 50$  MPa, ela pode ser reescrita como:

$$K'_{\text{retangular simpl.}} = -0,32 \cdot \xi^2 + 0,80 \cdot \xi \quad (4.18)$$

A equação (4.18) calcula o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor interno resistente de cálculo, devido ao concreto comprimido (K').

Considerando que esse estudo se refere às seções subarmadas ou normalmente armadas, quando o momento externo  $M_d$  (K) for equilibrado apenas pelo momento interno devido ao concreto comprimido (K'), não sendo necessária a armadura de compressão (A's). Desta forma, tem-se (K=K'), e a equação (4.18) pode ser reescrita:



$$K = K'_{\text{retangular simpl.}} = -0,32 \cdot \xi^2 + 0,80 \cdot \xi$$

$$0,32 \cdot \xi^2 - 0,80 \cdot \xi + \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = 0 \quad (4.19)$$

A expressão (4.19) é uma equação de segundo grau que permite calcular ( $\xi$ ), obtendo-se duas raízes, sendo que apenas uma delas resulta em um valor válido.

Multiplicando-se o valor obtido de ( $\xi$ ) pela altura útil da seção ( $d$ ), obtém-se a profundidade da linha neutra (LN). Como é FNS o  $x$  é a profundidade da linha neutra que equilibra a resultante interna de compressão no concreto, que é igual a resultante de tração no aço.

$$x_{LN} = \xi \cdot d \quad (4.20)$$

Para obter a altura do diagrama retangular simplificado ( $y$ ), multiplica-se o valor  $x_{LN}$  por  $\lambda$ :

$$y = \lambda \cdot x \quad \rightarrow \quad \lambda = 0,8 \quad (4.16)$$

A resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) no diagrama retangular simplificado, é dada por:

$$R_{cc} = f_c \cdot b \cdot y \quad (4.21)$$

Com a resultante interna de compressão no concreto, pode-se calcular armadura de tração ( $A_s$ ), que é dada por:

$$R_{cc} = R_{st} \quad (4.22)$$

$$R_{cc} = f_c \cdot b \cdot y = R_{st} = A_s \cdot f_{yd} \quad (4.23)$$

$$A_s = \frac{R_{cc}}{f_{yd}} = \frac{f_c \cdot b \cdot y}{f_{yd}} \quad (4.24)$$

Com a armadura calculada ( $A_s$ ), escolhe-se a bitola da barra de aço a ser utilizada no detalhamento da seção transversal.

Segundo Tepedino (1980), citado por Silva (2018, p. 2.30) o dimensionamento de seções retangulares submetidas à flexão simples, encontra-se de forma resumida abaixo:

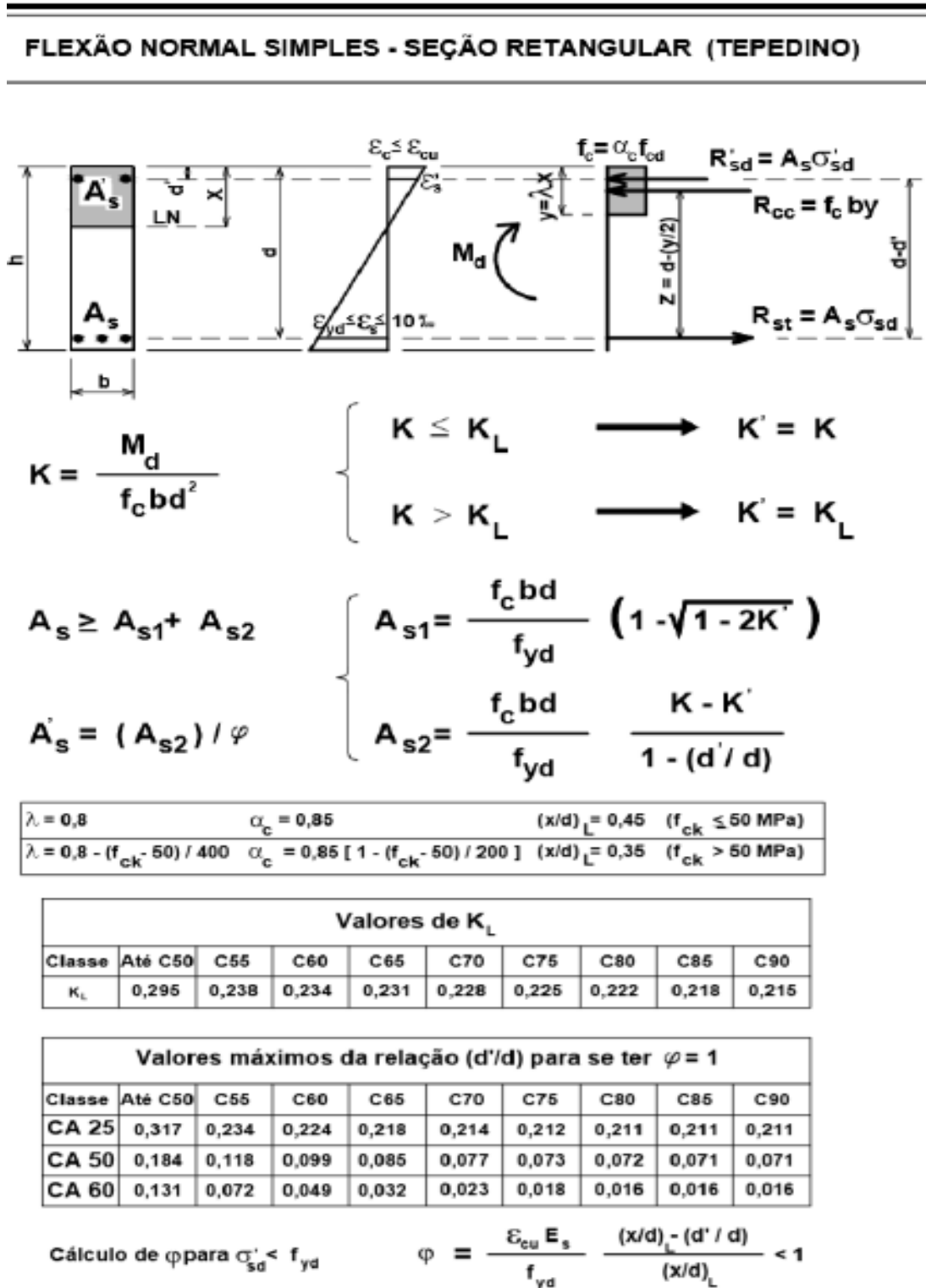


Figura 15 - Resumo de cálculo para o dimensionamento na flexão simples em uma seção retangular (Tepedino)  
 Fonte: SILVA (2018)

#### 4.4.2 Equacionamento considerando o diagrama parábola-retângulo

##### 4.4.2.1 Equacionamento no subdomínio 2a

No subdomínio 2a a deformação máxima do concreto varia entre 0 e  $\epsilon_{c2} = 2\text{‰}$  e a deformação do aço constante igual a  $\epsilon_{su} = 10\text{‰}$ , conforme ilustrado na Figura 16, na qual é representado o diagrama-parábola retângulo no subdomínio 2a. O equacionamento do subdomínio 2a ocorrerá somente em uma configuração, que será no trecho parabólico.

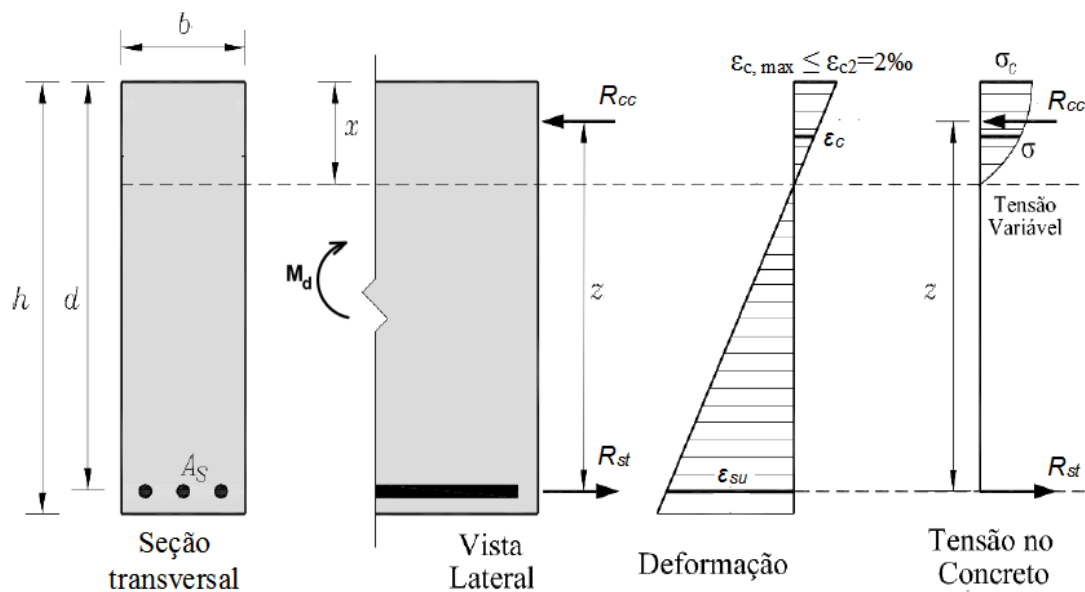


Figura 16 - Diagrama de tensões Parábola Retângulo no concreto para o subdomínio 2a  
Fonte: Tozato (2016)

A posição final da linha neutra no subdomínio 2a é expressa pela equação (4.25) variando no intervalo  $0 < \xi \leq 0,1667$  para concreto do grupo 1.

$$\xi_{2a, \lim} = \frac{\epsilon_{c2}}{\epsilon_{c2} + \epsilon_{su}} = \frac{2 \text{‰}}{12 \text{‰}} = 0,167 \quad (4.25)$$

Em um ponto qualquer da região comprimida com deformação  $\epsilon_c$ , a tensão vale  $\sigma_c$ .

As equações de compatibilidade são extraídas por semelhança de triângulos. Conforme a Figura 16, tem-se:

$$\frac{\varepsilon_{c,max}}{x} = \frac{\varepsilon_{su}}{d - x} \quad (4.26)$$

$$\varepsilon_{c,max} = \frac{x}{d - x} \cdot \varepsilon_{su} \quad (4.27)$$

No diagrama de tensão parábola-retângulo a tensão no concreto é dada pela equação (4.28). onde “n=2” para concretos com  $f_{ck} \leq 50 \text{ MPa}$  e ao inserir a equação (4.27) na equação (4.28), onde  $\varepsilon_c$  será igual a  $\varepsilon_{c, \text{máx}}$  tem-se:

$$\sigma_{c,2a} = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (4.28)$$

$$\sigma_{c,2a} = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\frac{x}{d-x} \cdot \varepsilon_{su}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad (4.29)$$

Na equação acima, substituindo-se  $x$  por  $(\xi \cdot d)$ , onde  $\xi$  representa a razão  $(x/d)$ , tem-se:

$$\sigma_{c,2a} = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\frac{\xi \cdot d}{d - \xi \cdot d} \cdot \varepsilon_{su}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad (4.30)$$

Colocando-se “d” em evidência no numerador da equação acima, tem-se:

$$\sigma_{c,2a} = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\frac{\xi \cdot d}{d(1-\xi)} \cdot \varepsilon_{su}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad (4.31)$$

$$\sigma_{c,máx} = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\xi}{1-\xi} \cdot \frac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{c2}} \right)^2 \right] \quad (4.32)$$

Considerando  $\varepsilon_{su} = 10\text{‰}$  e  $\varepsilon_{c2} = 2\text{‰}$  tem-se

$$\sigma_{c,máx} = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\xi}{1-\xi} \cdot \frac{10\text{‰}}{2\text{‰}} \right)^2 \right] \quad (4.33)$$

$$\sigma_{c,m\acute{a}x} = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{5\xi}{1-\xi} \right)^2 \right] \quad (4.34)$$

Desta forma se obtém a equação (4.34) que traduz a tensão de compressão máxima para concretos do grupo I com  $f_{ck} \leq 50$  MPa, na forma adimensional, para o subdomínio 2a, onde  $\xi = x/d$ .

A resultante interna de compressão no concreto, para o trecho parabólico, é dada pela integração ao longo do intervalo de atuação da profundidade da linha neutra em  $x$ , no subdomínio 2a. Logo temos:

$$R_{cc} = \int_0^z b \cdot \sigma_c(z) dz \quad (4.35)$$

$$R_{cc} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \int_0^z \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{\varepsilon_{c2}} \cdot \frac{\varepsilon_{c2}}{x} \cdot Z \right)^n \right] dz$$

$$R_{cc} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \int_0^z \left( 1 - 1 + \frac{2 \cdot Z}{x} - \frac{Z^2}{x^2} \right) dz$$

$$R_{cc} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot \left( \frac{Z^2}{x} - \frac{Z^3}{3x^2} \right) \Big|_0^z$$

$$R_{cc} = \frac{2}{3} \cdot f_c \cdot b \cdot x$$

$$R_{cc} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot x \cdot \sigma_{c,m\acute{a}x} \quad (4.36)$$

Nota: Nesta equação (4.36), o valor 2/3 resulta da integração da parábola do segundo grau no retângulo de largura  $b$  e altura  $4/7 X$ .

Aplicando-se a equação de equilíbrio na seção de concreto da Figura 16, obtém-se a equação do momento fletor, onde a somatória dos momentos deve ser nula em relação ao ponto de aplicação ( $A_s$ ), expressa por:

$$Md = R_{cc} \cdot Z \quad (4.37)$$

De acordo com SILVA (2018) o ponto de aplicação da resultante interna de compressão no concreto do trecho parabólico será igual a  $5/8 \cdot x$ , a partir da linha neutra. Nesse equacionamento adota-se que a somatória de momentos é em relação à linha de centro das armaduras e não em relação à linha neutra. Desta forma, o braço de alavanca ( $Z$ ) é dado por:

$$Z = d - \frac{3}{8} \cdot x \quad (4.38)$$

Substituindo a equação(4.36) e (4.38) na equação (4.37), tem-se:

$$Md = \frac{2}{3} \cdot b \cdot x \cdot \sigma_{c,máx} \left( d - \frac{3}{8} \cdot x \right) \quad (4.39)$$

Substituindo-se a equação da tensão de compressão máxima (4.34) na equação do momento fletor (4.39) e considerando-se que  $x = \xi \cdot d$ , tem-se:

$$Md = \frac{2}{3} \cdot b \cdot (\xi \cdot d) \cdot \left( d - \frac{3}{8} \cdot \xi \cdot d \right) \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{5\xi}{1-\xi} \right)^2 \right] \quad (4.40)$$

$$Md = \frac{2}{3} \cdot b \cdot d^2 \cdot 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \xi \cdot \left( 1 - \frac{3}{8} \cdot \beta \right) \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{5\xi}{1-\xi} \right)^2 \right] \quad (4.41)$$

Considerando que o  $f_c = 0,85 \cdot f_{cd}$ , a equação (4.41) resultam em:

$$Md = \frac{2}{3} \cdot f_c \cdot b \cdot d^2 \cdot \xi \cdot \left( 1 - \frac{3}{8} \cdot \xi \right) \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{5\xi}{1-\xi} \right)^2 \right] \quad (4.42)$$

“Ao dividir-se ambos os termos da equação (4.42) por um outro que tenha a mesma dimensão de um momento, por exemplo,  $(f_c \cdot b \cdot d^2)$ , obtém-se uma nova equação de equilíbrio em termos adimensionais, que depois de algumas simplificações é dada pela equação abaixo.” SILVA (2018, p. 2.19).

$$\frac{Md}{f_c \cdot b \cdot d^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{f_c \cdot b \cdot d^2}{f_c \cdot b \cdot d^2} \cdot \xi \cdot \left( 1 - \frac{3}{8} \cdot \xi \right) \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{5\xi}{1-\xi} \right)^2 \right] \quad (4.43)$$

O primeiro termo da equação acima representa momento fletor externo solicitante de cálculo (K), dado por:

$$K = \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} \quad (4.14)$$

O segundo termo da equação(4.43), que doravante será chamado de  $K'$ , representa o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor interno resistente de cálculo, devido ao concreto comprimido, dado por:

$$K'_{d2a \text{ paráb-retang}} = \frac{2}{3} \cdot \xi \cdot \left(1 - \frac{3}{8} \cdot \xi\right) \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{5 \xi}{1 - \xi}\right)^2\right] \quad (4.44)$$

Após expandir a equação acima, obtém-se equação (4.45) abaixo, que é uma equação de 4º grau em função de  $\xi$ .

$$K'_{d2a \text{ paráb-retang}} = \frac{25 \cdot \xi^4}{4(1 - \xi)^2} - \frac{5 \cdot \xi^3}{2(1 - \xi)} - \frac{50 \cdot \xi^3}{3(1 - \xi)^2} + \frac{20 \cdot \xi^2}{3(1 - \xi)} \quad (4.45)$$

Após algumas transformações algébricas, pode-se reduzir a equação anterior à uma forma mais simples, ainda sendo uma equação de 4º grau, obtendo-se:

$$K'_{d2a \text{ paráb-retang}} = \frac{5\xi^2(3\xi - 8)(7\xi - 2)}{12(\xi - 1)^2} \quad (4.46)$$

A solução numérica desta equação foge ao escopo deste trabalho. Conforme hipóteses anteriores, nesse estudo trabalha-se com seções subarmadas ou normalmente armadas, quando o momento externo  $M_d$  ( $K$ ) for equilibrado apenas pelo momento interno devido ao concreto comprimido ( $K'$ ), não sendo necessária a armadura de compressão ( $A'_s$ ). Desta forma, tem-se  $K=K'$ , e a equação (4.46) poderá ser reescrita como:

$$K = K'_{d2a, \text{paráb-retang}} = \frac{5\xi^2(3\xi - 8)(7\xi - 2)}{12(\xi - 1)^2} \quad (4.47)$$

Para um adequado comportamento dútil  $K' \leq K_L=0,295$  para concreto de classe até C50

A equação (4.47) pode ser reescrita, onde  $K=M_d/f_c \cdot b \cdot d^2$ , como:

$$\left( \frac{5\xi^2(3\xi - 8) \cdot (7\xi - 2)}{12(\xi - 1)^2} \right) - \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_c} = 0 \quad (4.48)$$

Como a equação acima é de difícil solução algébrica, ela pode ser resolvida através de métodos numéricos por tentativa e erro, obtendo-se as soluções possíveis dentro do intervalo  $0 \leq \xi \leq 0,167$  do subdomínio 2a.

Obtido o valor de  $(\xi)$ , multiplica-se o resultado pela altura útil da seção ( $d$ ) e obtém-se a profundidade da linha neutra ( $LN=x$ ). Como é FNS o valor de  $x$  é a profundidade da linha neutra que equilibra a resultante interna de compressão no concreto, que é igual a resultante de tração no aço.

$$x_{LN} = \xi \cdot d \quad (4.49)$$

Assim, a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ), no subdomínio 2a é calculada por:

$$R_{cc} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot x \cdot \sigma_{c,máx} \quad (4.36)$$

Com a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ), calcula-se a armadura de tração ( $A_s$ ):

$$R_{cc} = R_{st} = A_s \cdot f_{yd} \quad (4.50)$$

$$A_s = \frac{R_{cc}}{f_{yd}} \quad (4.51)$$

Para atender a armadura final, a armadura de tração calculada ( $A_{s, cal}$ ) deve ser maior ou igual a armadura mínima ( $A_{s, min}$ ), dada por:

$$A_{s,min} = 0,15\% \cdot b \cdot h \quad (4.52)$$

Por fim, obtida a armadura de tração ( $A_s$ ), escolhe-se a bitola da barra de aço a ser utilizada no detalhamento da seção transversal.



#### 4.4.2.2 Equacionamento no subdomínio 2b

No subdomínio 2b a deformação do concreto varia no intervalo onde  $\varepsilon_{c2} = 2\text{‰} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} = 3,5\text{‰}$  e o aço apresenta deformação plástica excessiva  $\varepsilon_{su} = 10\text{‰}$  (ponto A), conforme ilustrado na Figura 17.

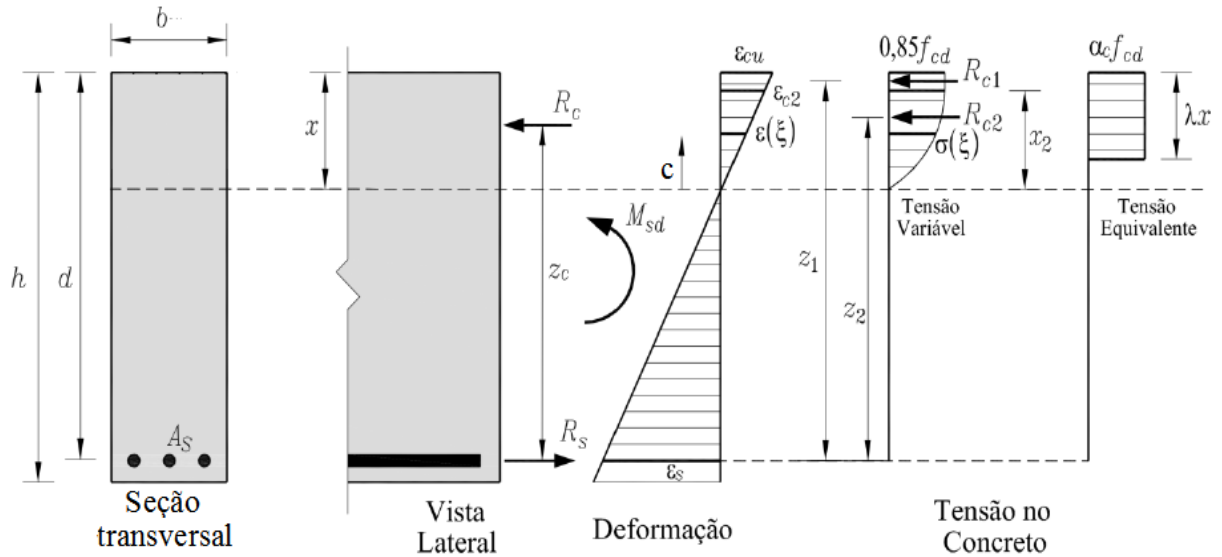


Figura 17 - Diagrama de tensões Parábola Retângulo no concreto para o subdomínio 2b  
Fonte: Tozato (2016)

A posição final do subdomínio 2b também será o fim do domínio 2, que é extraída por semelhança de triângulos conforme a Figura 17.

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x_{2L}} = \frac{(\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{su})}{d} \quad (4.53)$$

$$\xi_{2b,lim} = \frac{x_{2L}}{d} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{su}} = \frac{3,5 \text{‰}}{13,5 \text{‰}} = 0,259 \quad (4.54)$$

O equacionamento do subdomínio 2b ocorrerá em duas configurações sendo uma conforme o trecho retangular e outra conforme o trecho parabólico do diagrama de tensões ilustrado na Figura 17.

As equações de compatibilidade são extraídas por semelhança de triângulos conforme a Figura 17:

$$\frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\varepsilon_{su}}{d - x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_c = \varepsilon_{su} \cdot \frac{c}{d - x} \quad (4.55)$$

$$\frac{\varepsilon_{c2}}{a_{c2}} = \frac{\varepsilon_{su}}{d - x} \quad \rightarrow \quad \varepsilon_{c2} = \varepsilon_{su} \cdot \frac{a_{c2}}{d - x} \quad (4.56)$$

A altura do trecho parabólico ( $a_{c2}$ ) e dado pela expressão:

$$\frac{\varepsilon_{c2}}{a_{c2}} = \frac{\varepsilon_{su}}{d - x} \quad (4.57)$$

$$a_{c2} = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{su}} \cdot (d - x) \quad (4.58)$$

$$a_{c2} = \frac{2 \text{‰}}{10 \text{‰}} \cdot (d - x) \quad (4.59)$$

$$a_{c2} = \frac{d - x}{5} \quad (4.60)$$

A altura do trecho retangular ( $a_{c1}$ ), conforme Figura 17 e dada por:

$$a_{c1} = x - a_{c2} \quad (4.61)$$

$$a_{c1} = x - \left( \frac{d - x}{5} \right) \quad (4.62)$$

$$a_{c1} = \frac{5x - d + x}{5} \quad (4.63)$$

$$a_{c1} = \frac{6x - d}{5} \quad (4.64)$$

### **Cálculo do trecho retangular no subdomínio 2b**

Para o trecho retangular, a tensão no concreto é constante igual a  $f_c = \alpha_c \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd}$ , e a resultante interna de compressão no concreto é dada por:

$$R_{cc1} = f_c \cdot b \cdot (x - a_{c2}) \quad (4.65)$$

De acordo com a Figura 17 o braço de alavanca  $Z_1$  do trecho retangular, é dado por:

$$Z_1 = d - \frac{a_{c1}}{2} \quad (4.66)$$

$$Z_1 = d - \frac{\frac{6x - d}{5}}{2} \quad (4.67)$$

$$Z_1 = d - \frac{6x - d}{10} \quad (4.68)$$

$$Z_1 = \frac{11d - 6x}{10} \quad (4.69)$$

A equação de equilíbrio do momento fletor para o trecho retangular é expressa por:

$$M_{d1} = R_{cc1} \cdot Z_1 \quad (4.70)$$

$$M_{d1} = f_c \cdot b \cdot (x - a_{c2}) \cdot \left( \frac{11d - 6x}{10} \right) \quad (4.71)$$

Na equação (4.71) do momento fletor do trecho retangular, ao substituir o valor de  $a_{c2}$ , dado pela equação (4.60), tem-se:

$$M_{d1} = f_c \cdot b \cdot \left[ x - \left( \frac{d - x}{5} \right) \right] \cdot \left[ \frac{11d - 6x}{10} \right] \quad (4.72)$$

Na equação acima, substituindo-se  $x$  por  $(\xi \cdot d)$ , onde  $\xi$  representa a razão  $(x/d)$ , tem-se:

$$M_{d1} = f_c \cdot b \cdot \left[ \xi \cdot d - \left( \frac{d - \xi \cdot d}{5} \right) \right] \cdot \left[ \frac{11d - 6 \cdot \xi \cdot d}{10} \right] \quad (4.73)$$

$$M_{d1} = f_c \cdot b \cdot d^2 \left[ \xi - \left( \frac{1 - \xi}{5} \right) \right] \cdot \left[ \frac{11 - 6 \cdot \xi}{10} \right] \quad (4.74)$$

“Ao dividir-se ambos os termos da equação (4.74) por um outro que tenha a mesma dimensão de um momento, por exemplo,  $(f_c \cdot b \cdot d^2)$ , obtém-se uma nova equação de equilíbrio em termos adimensionais, que depois de algumas simplificações é dada pela equação abaixo.” SILVA (2018, p. 2.19).

$$\frac{Md}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2} = \left( \frac{5\xi - 1 + \xi}{5} \right) \cdot \left( \frac{11 - 6 \cdot \xi}{10} \right) \quad (4.75)$$

$$\frac{Md}{0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot d^2} = \left( \frac{6 \cdot \xi - 1}{5} \right) \cdot \left( \frac{11 - 6 \cdot \xi}{10} \right) \quad (4.76)$$

Na equação (4.76) substituindo o termo  $0,85 \cdot f_{cd} = f_c$ , tem-se:

$$\frac{Md}{f_c \cdot b \cdot d^2} = \left( \frac{6 \cdot \xi - 1}{5} \right) \cdot \left( \frac{11 - 6 \cdot \xi}{10} \right) \quad (4.77)$$

Considerando que  $k = \frac{Md}{f_c \cdot b \cdot d^2}$ , parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor externo solicitante de cálculo, a equação (4.77) passa a ter a seguinte forma:

$$k'_{2b,Ret.} = \frac{66 \cdot \xi - 36 \cdot \xi^2 - 11 + 6 \cdot \xi}{50} \quad (4.78)$$

$$k'_{2b,Ret.} = \frac{-36 \cdot \xi^2}{50} + \frac{72 \cdot \xi}{50} - \frac{11}{50} \quad (4.79)$$

### **Cálculo do trecho parabólico no subdomínio 2b**

A equação da tensão no concreto do trecho parabólico, dada pela equação (4.28), é uma parábola de grau “n=2” para  $f_{ck} \leq 50$  MPa:

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad (4.28)$$

Onde a tensão máxima é dada por:

$$\sigma_c = \alpha_c \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd} = f_c \quad (4.80)$$

A resultante interna de compressão no concreto comprimido para o trecho parabólico é dada por:

$$R_{cc2} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot f_c \cdot ac_2 \quad (4.81)$$

O braço de alavanca  $Z_2$  correspondente a resultante interna de compressão no concreto  $R_{cc2}$  é dado por:

$$Z_2 = d - x + \frac{5}{8} \cdot ac_2 \quad (4.82)$$

$$Z_2 = d - x + \frac{5}{8} \cdot \left( \frac{d - x}{5} \right) \quad (4.83)$$

$$Z_2 = \frac{9}{8} \cdot (d - x) \quad (4.84)$$

A equação de equilíbrio do momento fletor para o trecho parabólico é dada por:

$$M_{d2} = R_{cc2} \cdot Z_2 \quad (4.85)$$

$$M_{d2} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot f_c \cdot ac_2 \cdot \frac{9}{8} \cdot (d - x) \quad (4.86)$$

Na equação (4.86), ao substituir o valor de  $ac_2$  dado pela equação (4.60) tem-se:

$$M_{d2} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot f_c \cdot \left( \frac{d - x}{5} \right) \cdot \frac{9}{8} \cdot (d - x) \quad (4.87)$$

Na equação acima, substituindo-se  $x$  por  $(\xi \cdot d)$ , onde  $\xi$  representa a razão  $(x/d)$ , tem-se:

$$M_{d2} = \frac{2}{3} \cdot f_c \cdot b \cdot \left( \frac{d - \xi \cdot d}{5} \right) \cdot \frac{9}{8} \cdot (d - \xi \cdot d) \quad (4.88)$$

$$M_{d2} = \frac{2}{3} \cdot f_c \cdot b \cdot d \cdot \left( \frac{1 - \xi}{5} \right) \cdot \frac{9}{8} \cdot d (1 - \xi) \quad (4.89)$$

$$M_{d2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{9}{8} \cdot f_c \cdot b \cdot d^2 \cdot (1 - \xi)^2 \quad (4.90)$$

“Ao dividir-se ambos os termos da equação (4.90) por um outro que tenha a mesma dimensão de um momento, por exemplo,  $(f_c \cdot b \cdot d^2)$ , obtém-se uma nova equação de equilíbrio em termos adimensionais, que depois de algumas simplificações é dada pela equação abaixo.” SILVA (2018, p. 2.19).

$$\frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = \frac{3}{20} \cdot (1 - 2\xi + \xi^2) \quad (4.91)$$

O primeiro termo da equação acima representa momento fletor externo solicitante de cálculo (K), dado por:

$$K = \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} \quad (4.14)$$

O segundo termo da equação (4.91), que doravante será chamado de (K'), representa o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor interno resistente de cálculo, devido ao concreto comprimido, dado por:

$$k'_{2b,parab} = \frac{3\xi^2}{20} - \frac{6\xi}{20} + \frac{3}{20} \quad (4.92)$$

Então, o momento resistente do subdomínio 2b será dado pelo somatório do trecho retangular com o trecho parabólico, dado por:

$$K'_{d2b \text{ paráb-retang}} = k'_{2b,Ret.} + k'_{2b,parab} \quad (4.93)$$

Substituindo as equações correspondentes, tem-se:

$$K'_{d2b \text{ paráb-retang}} = \left( \frac{-36 \cdot \xi^2}{50} + \frac{72 \cdot \xi}{50} - \frac{11}{50} \right) + \left( \frac{3\xi^2}{20} - \frac{6\xi}{20} + \frac{3}{20} \right) \quad (4.94)$$

$$K'_{d2b \text{ paráb-retang}} = \frac{-72\xi^2 + 114\xi - 22 + 15\xi^2 - 30\xi + 15}{100} \quad (4.95)$$

$$K'_{d2b \text{ paráb-retang}} = \frac{-57\xi^2}{100} + \frac{114\xi}{100} - \frac{7}{100} \quad (4.96)$$

Rearranjando a expressão (4.96), tem-se:

$$\frac{57\xi^2}{100} - \frac{114\xi}{100} + \frac{7}{100} + \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = 0 \quad (4.97)$$

A equação (4.97) é uma equação do 2º grau que permite calcular  $\xi$ , obtendo-se duas raízes, sendo apenas uma possível.

Com o valor de ( $\xi$ ) obtido pela equação (4.97), multiplica-se esse valor pela altura útil da seção (d), obtendo-se a profundidade da linha neutra no subdomínio 2b.

$$x_{LN} = \xi \cdot d \quad (4.98)$$

A partir do valor de  $x_{LN}$  obtido acima, calculam-se as alturas dos trechos parabólico e retangular, dadas por:

Altura do trecho parabólico ( $a_{c2}$ ):

$$a_{c2} = \frac{d - x}{5} \quad (4.60)$$

Altura do trecho retangular ( $a_{c1}$ ):

$$a_{c1} = \frac{6x - d}{5} \quad (4.64)$$

Calculando-se a resultante interna de compressão no concreto do trecho retangular ( $R_{cc1}$ ) e do trecho parabólico ( $R_{cc2}$ ), dado pelas equações (4.65) e (4.81), tem-se a resultante interna total de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ):

$$R_{cc1} = f_c \cdot b \cdot (x - a_{c2}) \quad (4.65)$$

$$R_{cc2} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot f_c \cdot a_{c2} \quad (4.81)$$

Logo, a resultante interna total de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ), é a soma das parcelas ( $R_{cc1}$ ) e ( $R_{cc2}$ ), dada por:

$$R_{cc} = R_{cc1} + R_{cc2} \quad (4.99)$$

Após, o cálculo da resultante interna total de compressão no concreto calcula-se a armadura de tração ( $A_s$ ):

$$R_{cc} = R_{st} = A_s \cdot f_{yd} \quad (4.100)$$

$$A_s = \frac{R_{cc}}{f_{yd}} \quad (4.101)$$

Para atender a armadura final, a armadura de tração calculada ( $A_{s, \text{cal}}$ ) tem de ser maior ou igual a armadura mínima ( $A_{s, \text{min}}$ ), dada por:

$$A_{s, \text{min}} = 0,15\% \cdot b \cdot h \quad (4.52)$$

Por fim, com a armadura de tração calculada ( $A_s$ ), escolhe-se a bitola da barra de aço a ser utilizada no detalhamento da seção transversal.

#### 4.4.2.3 Equacionamento no domínio 3

O domínio 3 é caracterizado pela deformação no aço tracionado variando no intervalo entre  $\varepsilon_{yd}=2,07\% \leq \varepsilon_s \leq \varepsilon_{su}=10\%$ , onde a tensão na armadura ( $A_s$ ) é constante e igual à  $f_{yd}$  e o concreto com a deformação máxima  $\varepsilon_{cu}=3,5\%$ , conforme ilustrado na Figura 18.

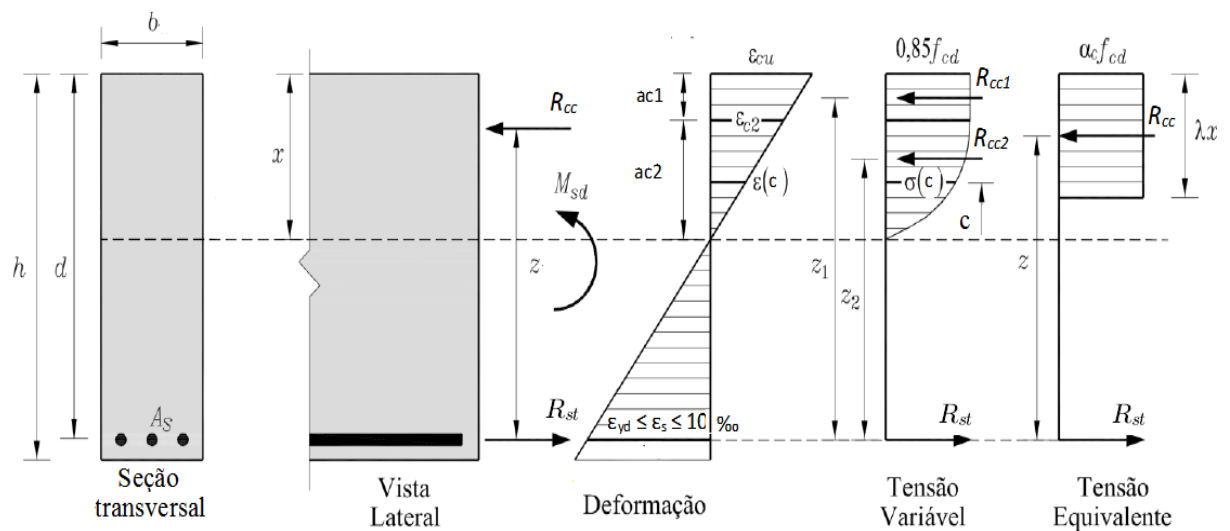


Figura 18 - Diagrama de tensões Parábola Retângulo no concreto para o domínio 3  
Fonte: Tozato (2016)

A profundidade da linha neutra é obtida por semelhança de triângulos conforme ilustrado na Figura 18:



$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x} = \frac{\varepsilon_{yd}}{d - x} \quad (4.102)$$

$$\xi_{3l} = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{yd}} = \xi_{3l} = \frac{3,5}{3,5 + 2,07} = \xi_{3l} = 0,628 \quad (4.103)$$

As equações de compatibilidade são extraídas por semelhança de triângulos de acordo com a Figura 18.

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x} = \frac{\varepsilon_{c2}}{a_{c2}} \quad (4.104)$$

$$\varepsilon_c = \frac{c \cdot \varepsilon_{cu}}{x} \quad (4.105)$$

$$\varepsilon_{c2} = \frac{a_{c2}}{x} \cdot \varepsilon_{cu} \quad (4.106)$$

A altura do trecho parabólico ( $a_{c2}$ ) é dada pela expressão:

$$\frac{\varepsilon_{cu}}{x} = \frac{\varepsilon_{c2}}{a_{c2}} \quad (4.107)$$

$$a_{c2} = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \cdot x \rightarrow a_{c2} = \frac{4}{7} \cdot x \quad (4.108)$$

A altura do trecho retangular ( $a_{c1}$ ) é dada pela expressão:

$$a_{c1} = x - a_{c2} \quad (4.109)$$

$$a_{c1} = x - \frac{4}{7} \cdot x \quad (4.110)$$

$$a_{c1} = \frac{3}{7} \cdot x \quad (4.111)$$

### Cálculo do trecho retangular no domínio 3

Para o trecho retangular, a tensão no concreto é constante igual a  $f_c = \alpha_c \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd}$ , e a resultante interna de compressão no concreto é dada por:

$$R_{cc1} = f_c \cdot b \cdot (x - a_{c2}) \quad (4.112)$$

Na equação (4.112) ao substituir o termo  $(x - a_{c2})$  pela equação (4.108), tem-se:

$$R_{cc1} = \frac{3}{7} \cdot f_c \cdot b \cdot x \quad (4.113)$$

O braço de alavanca  $Z_1$  do trecho retangular, conforme a Figura 18 é dado por:

$$Z_1 = d - \frac{a_{c1}}{2} \quad (4.114)$$

$$Z_1 = d - \frac{\frac{3}{7} \cdot x}{2} \quad (4.115)$$

$$Z_1 = d - \frac{3}{14} \cdot x \quad (4.116)$$

Aplicando as condições de equilíbrio na seção de concreto para este trecho retangular, obtém-se a equação de momento fletor:

$$M_{d1} = R_{cc1} \cdot Z_1 \quad (4.117)$$

$$M_{d1} = \frac{3}{7} \cdot f_c \cdot b \cdot x \cdot \left( d - \frac{3}{14} \cdot x \right) \quad (4.118)$$

Na equação acima(4.118), substituindo-se  $x$  por  $(\xi \cdot d)$ , onde  $\xi$  representa a razão  $(x/d)$ , tem-se:

$$M_d = \frac{3}{7} \cdot f_c \cdot b \cdot \xi \cdot d \cdot \left[ d - \frac{3}{14} \cdot \xi \cdot d \right] \quad (4.119)$$

$$M_d = \frac{3}{7} \cdot f_c \cdot b \cdot d^2 \cdot \xi \cdot \left[ 1 - \frac{3}{14} \cdot \xi \right] \quad (4.120)$$

“Ao dividir-se ambos os termos da equação (4.120), por um outro que tenha a mesma dimensão de um momento, por exemplo,  $(f_c \cdot b \cdot d^2)$ , obtém-se uma nova equação de equilíbrio em termos adimensionais, que depois de algumas simplificações é dada pela equação abaixo.” SILVA (2018, p. 2.19).

$$\frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = \frac{3}{7} \cdot \frac{f_c \cdot b \cdot d^2}{f_c \cdot b \cdot d^2} \cdot \xi \cdot \left[ 1 - \frac{3}{14} \cdot \xi \right] \quad (4.121)$$

$$\frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = \frac{3}{7} \cdot \xi \cdot \left[ 1 - \frac{3}{14} \cdot \xi \right] \quad (4.122)$$

O primeiro termo da equação acima representa momento fletor externo solicitante de cálculo (K), dado por:

$$K = \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} \quad (4.14)$$

Considerando que  $k = \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2}$ , parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor externo solicitante de cálculo (k), a equação (4.122) assume a seguinte forma:

$$K_{Ret.} = \frac{3}{7} \cdot \xi - \frac{9}{98} \cdot \xi^2 \quad (4.123)$$

### Cálculo do trecho parabólico no domínio 3

No domínio 3, a tensão máxima do concreto é dada por:

$$\sigma_c = \alpha_c \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd} = f_c \quad (4.80)$$

A resultante interna de compressão no concreto do trecho parabólico  $R_{cc2}$ , equivale à resultante em um trecho de tensão constante,  $f_c = 0,85 \cdot f_{cd}$ , com altura  $(2/3) \cdot a_{c2}$  e ponto de aplicação a partir da linha neutra igual a  $(5/8) \cdot a_{c2}$ . Desta forma tem-se a equação abaixo: (SILVA, 2018, p. 2.8).

$$R_{cc2} = \frac{2}{3} \cdot f_c \cdot b \cdot a_{c2} \quad (4.124)$$

$$R_{cc2} = \frac{2}{3} \cdot f_c \cdot b \cdot \frac{4}{7} \cdot x \quad (4.125)$$

$$R_{cc2} = \frac{8}{21} \cdot f_c \cdot b \cdot x \quad (4.126)$$

O braço de alavanca ( $Z_2$ ) correspondente a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc2}$ ) do trecho parabólico é dado por:

$$Z_2 = d - x + \frac{5}{8} \cdot ac_2 \quad (4.127)$$

$$Z_2 = d - x + \frac{5}{8} \cdot \frac{4}{7} \cdot x \quad (4.128)$$

$$Z_2 = \frac{14 \cdot d - 14 \cdot x + 5 \cdot x}{14} \quad (4.129)$$

$$Z_2 = d - \frac{9}{14} \cdot x \quad (4.130)$$

A equação de equilíbrio de momento fletor para o trecho parabólico do domínio 3 é dada por:

$$M_d = R_{cc2} \cdot Z_2 \quad (4.131)$$

$$M_d = \frac{8}{21} \cdot f_c \cdot b \cdot x \cdot \left( d - \frac{9}{14} \cdot x \right) \quad (4.132)$$

Na equação acima, substituindo-se  $x$  por  $(\xi \cdot d)$ , onde  $\xi$  representa a razão ( $x/d$ ), tem-se:

$$M_d = \frac{8}{21} \cdot f_c \cdot b \cdot \xi \cdot d \cdot \left( d - \frac{9}{14} \cdot \xi \cdot d \right) \quad (4.133)$$

$$M_d = \frac{8}{21} \cdot f_c \cdot b \cdot \xi \cdot d^2 \cdot \left( 1 - \frac{9}{14} \cdot \xi \right) \quad (4.134)$$

“Ao dividir-se ambos os termos da equação (4.134), por um outro que tenha a mesma dimensão de um momento, por exemplo,  $(f_c \cdot b \cdot d^2)$ , obtém-se uma nova equação de equilíbrio em termos adimensionais, que depois de algumas simplificações é dada pela equação abaixo.” SILVA (2018, p. 2.19).

$$\frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = \frac{8}{21} \cdot \frac{f_c \cdot b \cdot \xi \cdot d^2}{f_c \cdot b \cdot d^2} \cdot \left( 1 - \frac{9}{14} \cdot \xi \right) \quad (4.135)$$

$$\frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = \frac{8}{21} \cdot \xi \cdot \left(1 - \frac{9}{14} \cdot \xi\right) \quad (4.136)$$

$$\frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = \frac{8}{294} \cdot \xi \cdot (14 - 9 \cdot \xi) \quad (4.137)$$

O primeiro termo da equação acima representa momento fletor externo solicitante de cálculo (K), dado por:

$$K = \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} \quad (4.14)$$

O segundo termo da equação (4.137), que doravante será chamado de (K'), representa o parâmetro adimensional que mede a intensidade do momento fletor interno resistente de cálculo, devido ao concreto comprimido, dado por:

$$K'_{D3,parab} = \frac{8}{294} \cdot \xi \cdot (14 - 9 \cdot \xi) \quad (4.138)$$

$$K'_{D3,parab} = -\frac{36}{147} \cdot \xi^2 + \frac{56}{147} \cdot \xi \quad (4.139)$$

$$K'_{D3,parab} = -\frac{1}{147} \cdot (36 \cdot \xi^2 - 56 \cdot \xi) \quad (4.140)$$

Então, o momento resistente é dado pelo somatório do trecho retangular com o trecho parabólico, dado por:

$$K'_{d3 \text{ paráb-retang}} = K_{D3,Ret.} + K_{D3,parab} \quad (4.141)$$

$$K'_{d3 \text{ paráb-retang}} = \left(\frac{3}{7} \cdot \xi - \frac{9}{98} \cdot \xi^2\right) + \left(-\frac{36}{147} \cdot \xi^2 + \frac{56}{147} \cdot \xi\right) \quad (4.142)$$

$$K'_{d3 \text{ paráb-retang}} = \frac{126 \cdot \xi - 27 \cdot \xi^2 + 112 \cdot \xi - 72 \cdot \xi^2}{294} \quad (4.143)$$

$$K'_{d3 \text{ paráb-retang}} = \frac{-99. \xi^2 + 238. \xi}{294} \quad (4.144)$$

$$K'_{d3 \text{ paráb-retang}} = -\frac{1}{294} (99. \xi^2 - 238. \xi) \quad (4.145)$$

Rearranjando a expressão (4.145), tem-se:

$$\frac{99. \xi^2}{294} - \frac{238. \xi}{294} + \frac{M_d}{f_c . b . d^2} = 0 \quad (4.146)$$

A equação (4.146) é uma equação do 2º grau que permite calcular  $\xi$ , obtendo-se duas raízes, sendo apenas uma possível.

Do resultado obtido pela equação (4.146), multiplicando-se esse valor pela altura útil da seção (d), obtém-se a profundidade da linha neutra.

$$x_{LN} = \xi . d \quad (4.147)$$

A partir do valor de  $x_{LN}$  obtido acima, calcula-se a altura do trecho parabólico e a altura do trecho retangular.

A altura do trecho parabólico ( $a_{c2}$ ), é dada por:

$$a_{c2} = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} . x \rightarrow a_{c2} = \frac{4}{7} . x \quad (4.108)$$

A altura do trecho retangular ( $a_{c1}$ ) é dada por:

$$a_{c1} = \frac{3}{7} . x \quad (4.111)$$

Calculando-se a resultante interna de compressão no concreto do trecho retangular ( $R_{cc1}$ ) e do trecho parabólico ( $R_{cc2}$ ), dada pelas equações (4.113) e (4.126), tem-se a resultante interna total de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ):

$$R_{cc1} = \frac{3}{7} . f_c . b . x \quad (4.113)$$

$$R_{cc2} = \frac{8}{21} \cdot f_c \cdot b \cdot x \quad (4.126)$$

Logo, a resultante interna total de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ), é a soma das parcelas ( $R_{cc1}$ ) e ( $R_{cc2}$ ), dada por:

$$R_{cc} = R_{cc1} + R_{cc2} \quad (4.148)$$

Assim, com a resultante interna total de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) calcula-se armadura de tração ( $A_s$ ), correspondente:

$$R_{cc} = R_{st} = A_s \cdot f_{yd} \quad (4.149)$$

$$A_s = \frac{R_{cc}}{f_{yd}} \quad (4.150)$$

Para atender a armadura final, a armadura de tração calculada ( $A_{s, cal}$ ) tem de ser maior ou igual a armadura mínima ( $A_{s, min}$ ), dada por:

$$A_{s, min} = 0,15\% \cdot b \cdot h \quad (4.52)$$

Por fim, com a armadura de tração calculada ( $A_s$ ), escolhe-se a bitola da barra de aço a ser utilizada no detalhamento da seção transversal.

#### 4.5 Aplicações numéricas

O exemplo numérico a seguir consiste no dimensionamento de uma viga de concreto armado, efetuando-se o equacionamento dos momentos reduzidos na forma adimensional, em função de  $\xi$ , que variam conforme a tabela abaixo:

Tabela 4 - Tabela dos limites entre os Domínios

Limites	Valores	Domínio
$\xi$ 2a	0,167	2a
$\xi$ 2L	0,259	2b
$\xi$ 3L	0,628	3

Fonte: Próprio autor

Em cada um dos domínios de deformação acima listados, utilizaremos tanto o diagrama parábola-retângulo quanto o diagrama retangular simplificado. Após esses exemplos, os resultados serão comentados no item 4.6 Análise e Resultados.

#### 4.5.1 Aplicação numérica - subdomínio 2a

##### 4.5.1.1 Cálculo de acordo com o diagrama parábola-retângulo

A aplicação numérica a seguir, referente ao subdomínio 2a, é baseada no equacionamento feito no item 4.4.2.1 acima.

Tabela 5 - Informações básicas para o dimensionamento no subdomínio 2a

Dados da Seção				Resistência Concreto		Aço CA 50		Momento solicitante
b	h	d'	d	f <sub>ck</sub>	f <sub>c</sub>	f <sub>yd</sub>	f <sub>y</sub>	M <sub>d</sub>
cm	cm	cm	cm	Mpa	kN/cm <sup>2</sup>	kN/cm <sup>2</sup>	Mpa	kN.m
20	50	4	46	20	1,214	43,48	500	25

Fonte: Próprio autor

Conforme a equação (4.48) e com as informações fornecidas pela Tabela 5, obtém-se o valor de  $\xi$ .

$$\left( \frac{5\xi^2(3\xi - 8) \cdot (7\xi - 2)}{12(\xi - 1)^2} \right) - \frac{Md}{b \cdot d^2 \cdot f_c} = 0$$

$$\left( \frac{5\xi^2(3\xi - 8) \cdot (7\xi - 2)}{12(\xi - 1)^2} \right) - \frac{1,4 \cdot 25 \cdot 100}{20 \cdot 46^2 \cdot 1,214} = 0$$

Após resolução da equação acima através de método numérico de tentativa e erro, obtém-se a raiz possível dentro do intervalo  $0 < \xi \leq 0,1667$  do subdomínio 2a, onde  $\xi$  representa a razão ( $x/d$ ).

Tabela 6 - Valor da linha neutra ( $x_i = \xi \cdot d$ ) no diagrama parábola-retângulo no subdomínio 2a

Raízes	Valor de $\xi$	Valor de $\xi \cdot d$	Profundidade da Linha Neutra
$\xi_I$	0,120	0,120. 46	$x_I = 5,52$ cm

Fonte: Próprio autor



Portanto, a profundidade da linha neutra para o diagrama parábola-retângulo é igual a 5,52 cm. Logo a seção trabalha no subdomínio 2a e o limite do domínio é dado por:

$$\xi_{2a} = 0,1667 \cdot d \rightarrow \xi_{2a} = 0,1667 \cdot 46 \rightarrow \xi_{2a} = 7,67 \text{ cm}$$

Analisando-se a posição da linha quanto ao comportamento dúctil da viga no ELU, têm-se:

$$(x/d) \leq 0,45$$

$$(x/d) = 5,52 / 46 = 0,120 < 0,45 \text{ Atende!}$$

O parâmetro adimensional que mede o momento fletor interno resistente de cálculo do diagrama parábola-retângulo é dado pela equação de  $K' = f(\xi)$ :

$$K'_{d2a \text{ paráb-retang}} = \frac{5\xi^2(3\xi - 8)(7\xi - 2)}{12(\xi - 1)^2}$$

$$K'_{d2a, \text{paráb-retang}} = \frac{5 \cdot 0,120^2 (3 \cdot 0,120 - 8)(7 \cdot 0,120 - 2)}{12(0,120 - 1)^2}$$

$$K'_{d2a, \text{paráb-retang}} = 0,0687$$

Como  $K' < K_L = 0,295$  não haverá a necessidade de armadura de compressão,  $A'_s$ .

A tensão máxima no concreto no subdomínio 2a, é dada por:

$$\sigma_{c2a} = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right]$$

$$\sigma_{c,2a} = 0,85 \cdot f_{cd} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\xi}{1 - \xi} \cdot \frac{\varepsilon_{su}}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right]$$

$$\sigma_{c,2a} = 1,214 \cdot \left[ 1 - \left( 1 - \frac{0,120}{1 - 0,120} \cdot \frac{10,0}{2,0} \right)^2 \right]$$

$$\sigma_{c2a} = 1,091$$

A resultante interna de compressão no concreto comprimido ( $R_{cc}$ ) no diagrama parábola-retângulo é dada por:

$$R_{cc} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot \sigma_c \cdot x \quad \rightarrow \quad R_{cc} = \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 1,091 \cdot 5,52$$

$$R_{cc} = 80,29 \text{ KN}$$

O braço de alavanca correspondente a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) é dado por:

$$Z = d - \frac{3}{8} \cdot x \quad \rightarrow \quad Z = 46 - \frac{3}{8} \cdot 5,52 \quad \rightarrow \quad Z = 43,93 \text{ cm}$$

Com a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) calcula-se a armadura de tração na seção transversal ( $A_s$ ) dada por:

$$R_{cc} = R_{st} = A_s \cdot f_{yd}$$

$$A_s = \frac{R_{cc}}{f_{yd}} \quad \rightarrow \quad A_s = \frac{80,29}{43,48} \quad \rightarrow \quad A_s = 1,847 \text{ cm}^2$$

#### 4.5.1.2 Cálculo de acordo com o diagrama retangular simplificado

A tensão do concreto é constante igual a  $\sigma_c = \alpha_c \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd}$ .

Utilizando-se da equação de equilíbrio de momentos, gerada pela distribuição do diagrama retangular de tensões, têm-se:

$$M_d = -0,32 \cdot \xi^2 + 0,80 \cdot \xi$$

$$0,32 \cdot \xi^2 - 0,80 \cdot \xi + \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_c} = 0$$

$$0,32 \cdot \xi^2 - 0,80 \cdot \xi + \frac{25 \cdot 1,4 \cdot 100}{20 \cdot 46^2 \cdot 1,214} = 0$$

Após a resolução da equação acima obtém-se duas raízes,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . Nesse exemplo, a raiz que fornecerá o valor da linha neutra é  $\xi_2$ , pois o valor de  $\xi_1$  resulta em valor da linha neutra fora da

seção transversal da viga, onde ( $\xi$ ) representa a razão ( $x/d$ ), conforme demonstrado na Tabela 7.

Tabela 7 – Valores da linha neutra ( $x_i = \xi \cdot d$ ) no diagr. retang. simplificado - subdomínio 2a

Raízes	Valores de $\xi$	Valores de $x_i = \xi \cdot d$	Valores de $x_i$	Observação
$\xi_1$	2,4117	$x_1 = 2,4117 \cdot 46$	$x_1 = 110,9$ cm	Medida fora da seção transversal
$\xi_2$	0,0883	$x_2 = 0,0883 \cdot 46$	$x_2 = 4,06$ cm	Medida dentro da seção transversal

Fonte: Próprio autor

Portanto, a profundidade da linha neutra para o diagrama  $\sigma_x \varepsilon$  retangular é igual a 4,06 cm. Logo a seção trabalha no subdomínio 2a e o limite do domínio no diagrama retangular é dado por:

$$\xi_{d2} = 0,259 \cdot d \rightarrow \xi_{d2} = 0,259 \cdot 46 \rightarrow \xi_{d2} = 11,91 \text{ cm}$$

Analisando-se a posição da linha quanto ao comportamento dúctil da viga no ELU, têm-se:

$$(x/d) \leq 0,45$$

$$(x/d) = 4,06 / 46 = 0,0883 < 0,45 \text{ Atende!}$$

O parâmetro adimensional que mede o momento fletor interno resistente de cálculo do diagrama retangular simplificado é dado pela equação de  $K' = f(\xi)$ .

$$K'_{\text{retangular simpl.}} = -0,32 \cdot \xi^2 + 0,80 \cdot \xi$$

$$K'_{\text{retangular simpl.}} = -0,32 \cdot 0,0883^2 + 0,80 \cdot 0,0883$$

$$K'_{\text{retangular simpl.}} = 0,0681$$

Como  $K' < K_L = 0,295$  não haverá a necessidade de armadura de compressão  $A'_s$ .

Calculando a profundidade da linha neutra para o diagrama  $\sigma_x \varepsilon$  retangular, que equivale à altura do retângulo no diagrama retangular simplificado, tem-se:

$$y = \lambda \cdot x \quad \rightarrow \quad y = 0,8 \cdot 4,06 \quad \rightarrow \quad y = 3,25 \text{ cm}$$

A resultante interna de compressão no concreto no diagrama retangular simplificado é dada por:

$$R_{cc} = f_c \cdot b \cdot (\lambda \cdot x)$$

$$R_{cc} = 1,214 \cdot 20 \cdot 0,8 \cdot 4,06$$

$$R_{cc} = 78,86 \text{ KN}$$

Com a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) calcula-se a armadura de tração na seção transversal ( $A_s$ ) dada por:

$$R_{cc} = R_{st} = A_s \cdot f_{yd}$$

$$A_s = \frac{R_{cc}}{f_{yd}} \quad \rightarrow \quad A_s = \frac{78,86}{43,48} \quad \rightarrow \quad A_s = 1,814 \text{ cm}^2$$

Para definir com qual tipo de armadura será feito o dimensionamento, é necessário comparar a armadura de tração calculada ( $A_{s, \text{cal}}$ ) com a armadura mínima ( $A_{s, \text{min}}$ ). A armadura de tração calculada tem que ser maior ou igual a armadura mínima ( $A_{s, \text{min}}$ ), dada por:

$$A_{s, \text{min}} = 0,15\% \cdot b \cdot h \quad \rightarrow \quad A_{s, \text{min}} = 0,15\% \cdot 20 \cdot 50 \quad \rightarrow \quad A_{s, \text{min}} = 1,50 \text{ cm}^2$$

$A_{s \text{ parab. retângulo}} = 1,847 \text{ cm}^2 > A_{s, \text{min}} \text{ ok!}$  e  $A_{s \text{ retang. simplificado}} = 1,814 \text{ cm}^2 > A_{s, \text{min}} \text{ ok!}$

Desta forma verifica-se que os dois métodos aplicados no subdomínio 2a, para o exemplo numérico proposto com  $M_d = 25 \text{ KN.m}$ , produzem resultados muito próximos, com diferença de 1,8% entre os resultados obtidos.

## 4.5.2 Aplicação numérica - subdomínio 2b

### 4.5.2.1 Cálculo de acordo com o diagrama parábola-retângulo

A aplicação numérica do subdomínio 2b é baseada no equacionamento do item 4.4.2.2 acima.

Tabela 8 - Informações básicas para o dimensionamento no subdomínio 2b

Dados da Seção				Resistência Concreto		Aço CA 50		Momento solicitante
b	h	d'	d	f <sub>ck</sub>	f <sub>c</sub>	f <sub>yd</sub>	f <sub>y</sub>	M <sub>d</sub>
cm	cm	cm	cm	Mpa	kN/cm <sup>2</sup>	kN/cm <sup>2</sup>	Mpa	kN.m
20	50	4	46	20	1,214	43,48	500	45

Fonte: Próprio autor

Conforme a equação (4.93) e com as informações fornecidas pela Tabela 8, obtém-se o valor de  $\xi$ .

$$K'_{d2b \text{ paráb-retang}} = k'_{2b,Ret.} + k'_{2b,parab}$$

$$K'_{d2b \text{ paráb-retang}} = \frac{-57\xi^2}{100} + \frac{114\xi}{100} - \frac{7}{100}$$

$$\frac{57\xi^2}{100} - \frac{114\xi}{100} + \frac{7}{100} + \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = 0$$

$$\frac{57\xi^2}{100} - \frac{114\xi}{100} + \frac{7}{100} + \frac{45 \cdot 1,4 \cdot 100}{1,214 \cdot 20 \cdot 46^2} = 0$$

Após resolução da equação acima obtém-se uma raiz possível dentro do intervalo  $0,1667 < \xi \leq 0,259$  de classificação do subdomínio 2b, onde  $\xi$  representa a razão ( $x/d$ ).

Tabela 9 - Valores da linha neutra ( $x_i = \xi \cdot d$ ) no diagrama parábola-retângulo no subdomínio 2b

Raízes	Valores de $\xi$	Valores de $x_i = \xi \cdot d$	Valores de $x_i$	Observação
$\xi_1$	1,814	$x_1 = 1,814 \cdot 46$	$x_1 = 83,43 \text{ cm}$	Medida fora da seção transversal
$\xi_2$	0,186	$x_2 = 0,186 \cdot 46$	$x_2 = 8,57 \text{ cm}$	Medida dentro da seção transversal

Fonte: Próprio autor

Portanto, a profundidade da linha neutra para o diagrama parábola-retângulo é igual a 8,57 cm. Logo a seção trabalha no subdomínio 2b e o limite do domínio é dado por:

$$\xi_{2b} = 0,259 \cdot d \rightarrow \xi_{2b} = 0,259 \cdot 46 \rightarrow \xi_{2b} = 11,91 \text{ cm}$$

Analisando a posição da linha neutra quanto ao comportamento dúctil da viga no ELU, têm-se:

$$(x/d) \leq 0,45$$

$$(x/d) = 8,57/46 = 0,186 < 0,45 \text{ Atende ao requisito!}$$

O parâmetro adimensional que mede o momento fletor interno resistente de cálculo do diagrama parábola-retângulo é dado pela equação de  $K' = f(\xi)$ :

$$K'_{d2B \text{ paráb-retang}} = \frac{-57\xi^2}{100} + \frac{114\xi}{100} - \frac{7}{100}$$

$$K'_{d2B \text{ paráb-retang}} = \frac{-57 \cdot 0,186^2}{100} + \frac{114 \cdot 0,186}{100} - \frac{7}{100}$$

$$K'_{D2b \text{ parab-ret}} = 0,1223$$

Como  $K' < K_L = 0,295$  não haverá a necessidade de armadura de compressão, ( $A'_s$ ).

### **Cálculo do trecho retangular**

A altura do trecho parabólico ( $a_{c2}$ ) é dada por:

$$a_{c2} = \frac{d - x}{5} \rightarrow a_{c2} = \frac{46 - 8,57}{5} \rightarrow a_{c2} = 7,49 \text{ cm}$$

A altura do trecho retangular ( $a_{c1}$ ) é dada por:

$$a_{c1} = \frac{6x - d}{5} \rightarrow a_{c1} = \frac{6 \cdot 8,57 - 46}{5} \rightarrow a_{c1} = 1,08 \text{ cm}$$

A figura abaixo ilustra a altura do trecho parabólico e o trecho retangular.

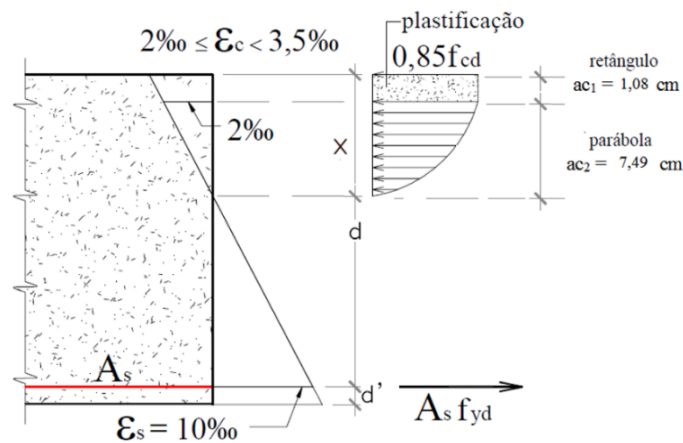


Figura 19 - Diagrama parábola retângulo no subdomínio 2b  
Fonte: COSTA 2018

O braço de alavanca ( $Z_1$ ) do trecho retangular, é dado por:

$$Z_1 = \frac{11d - 6x}{10} \rightarrow Z_1 = \frac{11 \cdot 46 - 6 \cdot 8,57}{10} \rightarrow Z_1 = 45,46 \text{ cm}$$

Calculando-se a resultante interna de compressão no concreto para o trecho retangular ( $R_{cc1}$ ), tem-se:

$$R_{cc1} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot b \cdot (x - a_{c2}) \rightarrow R_{cc1} = 1,214 \cdot 20 \cdot (8,570 - 7,49)$$

$$R_{cc1} = 26,32 \text{ KN}$$

### Cálculo do trecho parabólico

A resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc2}$ ) para o trecho parabólico, é dada por:

$$R_{cc2} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot f_c \cdot a_{c2} \rightarrow R_{cc2} = \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 1,214 \cdot 7,49$$

$$R_{cc2} = 121,20 \text{ KN}$$

O braço de alavanca ( $Z_2$ ), correspondente a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc2}$ ), é dado por:

$$Z_2 = \frac{9}{8} \cdot (d - x) \rightarrow Z_2 = \frac{9}{8} \cdot (46 - 8,57) \rightarrow Z_2 = 42,11 \text{ cm}$$

Logo, a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) é a soma das parcelas ( $R_{cc1}$ ) e ( $R_{cc2}$ ), dada por:

$$R_{cc} = R_{cc1} + R_{cc2} \rightarrow R_{cc} = 26,32 + 121,20$$

$$R_{cc} = 147,52 \text{ KN}$$

O braço de alavanca ( $Z$ ) correspondente a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ), é dado por:

$$Z = \frac{R_{cc1} \cdot Z_1 + R_{cc2} \cdot Z_2}{R_{cc}} \rightarrow Z = \frac{26,32 \cdot 45,46 + 121,20 \cdot 42,11}{147,52}$$

$$Z = 42,71 \text{ cm}$$

Após o cálculo da resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ), calcula-se armadura de tração na seção transversal ( $A_s$ ) dada por:

$$R_{cc} = R_{st} = A_s \cdot f_{yd}$$

$$A_s = \frac{R_{cc}}{f_{yd}} \rightarrow A_s = \frac{147,52}{43,48} \rightarrow A_s = 3,393 \text{ cm}^2$$

#### 4.5.2.2 Cálculo de acordo com o diagrama retangular simplificado

Para o diagrama retangular simplificado e considerando a tensão do concreto constante, tem-se:  $\sigma_c = \alpha_c \cdot f_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd}$

Utilizando-se da equação de equilíbrio de momentos, gerada pela distribuição do diagrama retangular de tensões, têm-se:

$$M_d = f_c \cdot b \cdot (\lambda \cdot \xi) \cdot \left[ d - \left( \frac{\lambda \cdot \xi}{2} \right) \right]$$



$$M_d = -0,32. \xi^2 + 0,80. \xi$$

$$0,32. \xi^2 - 0,80. \xi + \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_c} = 0$$

$$0,32. \xi^2 - 0,80. \xi + \frac{45 \cdot 1,4 \cdot 100}{20 \cdot 46^2 \cdot 1,214} = 0$$

Após a resolução da equação acima obtém-se duas raízes,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . Nesse exemplo, a raiz que fornecerá o valor da linha neutra é  $\xi_2$ , pois o valor de  $\xi_1$  resulta em valor da linha neutra fora da seção transversal da viga, onde ( $\xi$ ) representa a razão ( $x/d$ ), conforme demonstrado na Tabela 10.

Tabela 10 - Valores da linha neutra ( $x_i = \xi \cdot d$ ) no diagrama retangular simplificado - subdomínio 2b

Raízes	Valores de $\xi$	Valores de $x_i = \xi \cdot d$	Valores de $x_i$	Observação
$\xi_1$	2,336	$x_1 = 2,336 \cdot 46$	$x_1 = 107,5$ cm	Medida fora da seção transversal
$\xi_2$	0,164	$x_2 = 0,164 \cdot 46$	$x_2 = 7,54$ cm	Medida dentro da seção transversal

Fonte: Próprio autor

Portanto, a profundidade da linha neutra para o diagrama  $\sigma_x \varepsilon$  retangular é igual 7,54 cm. Logo a seção trabalha no subdomínio 2b e o limite do domínio no diagrama retangular simplificado é dado por:

$$\xi_{D2} = 0,259 \cdot d \rightarrow \xi_{D2} = 0,259 \cdot 46 \rightarrow \xi_{D2} = 11,91 \text{ cm}$$

Analisando a posição da linha neutra quanto ao comportamento dúctil da viga no ELU, têm-se:

$$(x/d) \leq 0,45$$

$$(x/d) = 7,54 / 46 = 0,1640 < 0,45 \text{ Atende!}$$

O parâmetro adimensional que mede o momento fletor interno resistente de cálculo do diagrama retangular simplificado é dado pela equação de  $K' = f(\xi)$ , tem-se:

$$K'_{\text{retangular simpl.}} = -0,32 \cdot \xi^2 + 0,80 \cdot \xi$$

$$K'_{\text{retangular simpl.}} = -0,32 \cdot 0,164^2 + 0,80 \cdot 0,164$$

$$K'_{\text{retangular simpl.}} = 0,123$$

Como  $K' < K_L = 0,295$  não haverá a necessidade de armadura de compressão, ( $A'_s$ ).

Calculando a profundidade da linha neutra para o diagrama  $\sigma_x \varepsilon$  retangular, que equivale à altura do retângulo no diagrama retangular simplificado, tem-se:

$$y = \lambda \cdot x \rightarrow y = 0,8 \cdot 7,54 \rightarrow y = 6,035 \text{ cm}$$

A resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) calculada no diagrama retangular simplificado é dada por:

$$R_{cc} = f_c \cdot b \cdot (\lambda \cdot x) \rightarrow R_{cc} = 1,214 \cdot 20 \cdot 0,8 \cdot 7,54$$

$$R_{cc} = 146,6 \text{ KN}$$

O braço de alavanca ( $Z$ ), é dado por:

$$Z = d - \frac{\lambda \cdot x}{2} \rightarrow Z = 46 - \frac{0,8 \cdot 7,54}{2} \rightarrow Z = 42,982 \text{ cm}$$

Com a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ), calcula-se a armadura de tração na seção transversal ( $A_s$ ) dada por:

$$R_{cc} = R_{st} = A_s \cdot f_{yd}$$

$$A_s = \frac{R_{cc}}{f_{yd}} \rightarrow A_s = \frac{146,6}{43,48} \rightarrow A_s = 3,371 \text{ cm}^2$$

Para definir com qual tipo de armadura será feito o dimensionamento, é necessário comparar a armadura de tração calculada ( $A_{s, cal}$ ) com a armadura mínima ( $A_{s, min}$ ). A armadura de tração calculada tem que ser maior ou igual a armadura mínima ( $A_{s, min}$ ), dada por:

$$A_{s, min} = 0,15\% \cdot b \cdot h \rightarrow A_{s, min} = 0,15\% \cdot 20 \cdot 50 \rightarrow A_{s, min} = 1,50 \text{ cm}^2$$

$A_{s \text{ parab. retângulo}} = 3,393 \text{ cm}^2 > A_{s, min} \text{ ok!}$  e o  $A_{s \text{ retang. simplificado}} = 3,371 \text{ cm}^2 > A_{s, min} \text{ ok!}$

Desta forma verifica-se que os dois métodos aplicados no subdomínio 2b, para o exemplo numérico proposto com  $M_d = 45 \text{ KN.m}$ , produzem resultados muito próximos, com diferença de 0,65 % entre os resultados obtidos.

### 4.5.3 Aplicação numérica - domínio 3

#### 4.5.3.1 Cálculo de acordo com o diagrama parábola-retângulo

A aplicação numérica do domínio 3 é baseado no equacionamento do item 4.4.2.3 acima.

Tabela 11 - Informações básicas para o dimensionamento no Domínio 3

Dados da Seção				Resistência Concreto		Aço CA 50		Momento solicitante
b	h	d'	d	$f_{ck}$	$f_c$	$f_{yd}$	$f_y$	$M_d$
cm	cm	cm	cm	Mpa	kN/cm <sup>2</sup>	kN/cm <sup>2</sup>	Mpa	kN.m
20	50	4	46	20	1,214	43,48	500	107

Fonte: Próprio autor

Conforme a equação (4.141) e com as informações fornecidas pela Tabela 11, obtém-se o valor de  $\xi$ .

$$K'(\xi) = K_{D3, Ret.} + K_{D3, parab}$$

$$K'_{D3}(\xi) = \left( \frac{3}{7} \cdot \xi - \frac{9}{98} \cdot \xi^2 \right) + \left( - \frac{36}{147} \cdot \xi^2 + \frac{56}{147} \cdot \xi \right)$$

$$\frac{99 \cdot \xi^2}{294} - \frac{238 \cdot \xi}{294} + \frac{M_d}{f_c \cdot b \cdot d^2} = 0$$

$$0,336735 \cdot \xi^2 - 0,809524 \cdot \xi + \frac{107 \cdot 1,4 \cdot 100}{1,214 \cdot 20 \cdot 46^2} = 0$$

$$0,336735 \cdot \xi^2 - 0,809524 \cdot \xi + 0,1873 = 0$$

Após resolução da equação acima obtém-se uma raiz possível dentro do intervalo  $0,259 < \xi \leq 0,628$  de classificação do domínio 3, onde  $\xi$  representa a razão  $(x/d)$ .

Tabela 12 - Valores da linha neutra ( $x_i = \xi \cdot d$ ) no diagrama parábola-retângulo no Domínio 3.

Raízes	Valores de $\xi$	Valores de $x_i = \xi \cdot d$	Valores de $x_i$	Observação
$\xi_1$	1,963	$x_1 = 1,963 \cdot 46$	$x_1 = 90,30 \text{ cm}$	Medida fora da seção transversal
$\xi_2$	0,441	$x_2 = 0,441 \cdot 46$	$x_2 = 20,29 \text{ cm}$	Medida dentro da seção transversal

Fonte: Próprio autor

Portanto, a profundidade da linha neutra para o diagrama parábola-retângulo é igual a 20,29 cm. Logo, a seção trabalha no domínio 3 e o limite do domínio é dado por:

$$\xi_{D3} = 0,628 \cdot d \rightarrow \xi_{D3} = 0,628 \cdot 46 \rightarrow \xi_{D3} = 28,89 \text{ cm}$$

Analisando a posição da linha neutra quanto ao comportamento dúctil da viga no ELU, têm-se:

$$(x/d) \leq 0,45$$

$$(x/d) = 20,29/46 = 0,441 < 0,45 \text{ Atende!}$$

O parâmetro adimensional que mede o momento fletor interno resistente de cálculo no diagrama parábola-retângulo é dado pela equação  $K' = f(\xi)$ .

$$K'_{d3 \text{ paráb-retang}} = -\frac{1}{294} (99 \cdot \xi^2 - 238 \cdot \xi)$$

$$K'_{d3 \text{ paráb-retang}} = -\frac{1}{294} (99 \cdot 0,441^2 - 238 \cdot 0,441)$$

$$K'_{d3 \text{ paráb-retang}} = 0,2924$$

Como  $K' < K_L = 0,295$  não haverá a necessidade de armadura de compressão, ( $A'_s$ ).

### Cálculo do trecho retangular

A altura do trecho parabólico ( $a_{c2}$ ) é dada por:

$$a_{c2} = \frac{\varepsilon_{c2}}{\varepsilon_{cu}} \cdot x \quad \rightarrow \quad a_{c2} = \frac{2,00}{3,5} \cdot 20,29 \quad \rightarrow \quad a_{c2} = 11,592 \text{ cm}$$

A altura do trecho retangular ( $a_{c1}$ ) é dada por:

$$a_{c1} = x - a_{c2} \quad \rightarrow \quad a_{c1} = 20,29 - 11,592 \quad \rightarrow \quad a_{c1} = 8,69 \text{ cm}$$

A figura abaixo ilustra a altura do trecho parabólico e o trecho retangular.

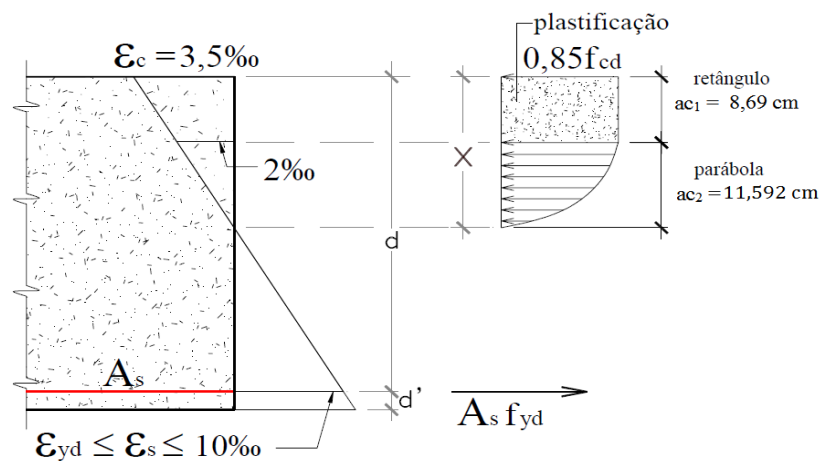


Figura 20 - Diagrama parábola retângulo no domínio 3  
Fonte: COSTA 2018

Calculando-se o braço de alavanca ( $Z_1$ ) da resultante de compressão do trecho retangular tem-se:

$$Z_1 = d - \frac{3}{14} \cdot x \quad \rightarrow \quad Z_1 = 46 - \frac{3}{14} \cdot 20,29 \quad \rightarrow \quad Z_1 = 41,65 \text{ cm}$$

Calculando-se a resultante interna de compressão no concreto para o trecho retangular ( $R_{cc1}$ ) tem-se:

$$R_{cc1} = f_c \cdot b \cdot (x - a_{c2}) \rightarrow R_{cc1} = 1,214 \cdot 20 \cdot (20,29 - 11,592)$$

$$R_{cc1} = 211,13 \text{ KN}$$

### Cálculo do trecho parabólico

A resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc2}$ ) do trecho parabólico, é dado por:

$$R_{cc2} = \frac{2}{3} \cdot b \cdot f_c \cdot a_{c2} \rightarrow R_{cc2} = \frac{2}{3} \cdot 20 \cdot 1,214 \cdot 11,592 \rightarrow R_{cc2} = 187,64 \text{ KN}$$

O braço de alavanca ( $Z_2$ ) correspondente a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc2}$ ), que é dada por:

$$Z_2 = d - \frac{9}{14} \cdot x \rightarrow Z_2 = 46 - \frac{9}{14} \cdot 20,29 \rightarrow Z_2 = 32,95 \text{ cm}$$

Logo a resultante total interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) é a soma das parcelas ( $R_{cc1}$ ) e ( $R_{cc2}$ ), dada por:

$$R_{cc} = R_{cc1} + R_{cc2} \rightarrow R_{cc} = 211,13 + 187,64 \rightarrow R_{cc} = 398,77 \text{ KN}$$

O braço de alavanca ( $Z$ ) correspondente a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) é dado por:

$$Z = \frac{R_{cc1} \cdot Z_1 + R_{cc2} \cdot Z_2}{R_{cc}} \rightarrow Z = \frac{211,13 \cdot 41,65 + 187,64 \cdot 32,95}{398,77}$$

$$Z = 37,56 \text{ cm}$$

Após o cálculo da resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ), calcula-se armadura de tração na seção transversal ( $A_s$ ) dada por:

$$R_{cc} = R_{st} = A_s \cdot f_{yd}$$

$$A_s = \frac{R_{cc}}{f_{yd}} \rightarrow A_s = \frac{398,77}{43,48} \rightarrow A_s = 9,171 \text{ cm}^2$$

#### 4.5.3.2 Cálculo de acordo com o diagrama retangular simplificado

Para o diagrama retangular simplificado e considerando a tensão do concreto constante, vem:

$$\sigma_c = \alpha_c \cdot f_{cd}$$

Utilizando-se da equação de equilíbrio de momentos, gerada pela distribuição do diagrama retangular de tensões, têm-se:

$$M_d = -0,32 \cdot \xi^2 + 0,80 \cdot \xi$$

$$0,32 \cdot \xi^2 - 0,80 \cdot \xi + \frac{M_d}{b \cdot d^2 \cdot f_c} = 0$$

$$0,32 \cdot \xi^2 - 0,80 \cdot \xi + \frac{107,14 \cdot 100}{20 \cdot 46^2 \cdot 1,214} = 0$$

Após a resolução da equação acima obtém-se duas raízes,  $\xi_1$  e  $\xi_2$ . Nesse exemplo, a raiz que fornecerá o valor da linha neutra é  $\xi_2$ , pois o valor de  $\xi_1$  resulta em valor da linha neutra fora da seção transversal da viga, onde ( $\xi$ ) representa a razão ( $x/d$ ), apresentado na Tabela 13.

Tabela 13 - Valores da linha neutra ( $x_i = \xi \cdot d$ ) no diagrama retangular simplificado – Domínio 3

Raízes	Valores de $\xi$	Valores de $x_i = \xi \cdot d$	Valores de $x_i$	Observação
$\xi_1$	2,057	$x_1 = 2,057 \cdot 46$	$x_1 = 94,63 \text{ cm}$	Medida fora da seção transversal
$\xi_2$	0,443	$x_2 = 0,443 \cdot 46$	$x_2 = 20,369 \text{ cm}$	Medida dentro da seção transversal

Fonte: Próprio autor

Portanto, a profundidade da linha neutra para o diagrama  $\sigma_x \varepsilon$  retangular é igual a 20,369 cm. Logo a seção trabalha no domínio 3 e o limite do domínio no diagrama retangular simplificado é dado por:

$$\xi_{D3} = 0,628 \cdot d \rightarrow \xi_{D3} = 0,628 \cdot 46 \rightarrow \xi_{D3} = 28,89 \text{ cm}$$

Analisando a posição da linha quanto ao comportamento dúctil da viga no ELU, têm-se:

$$(x/d) \leq 0,45$$

$$(x/d) = 20,369 / 46 = 0,4428 < 0,45 \text{ Atende!}$$

O parâmetro adimensional que mede o momento fletor interno resistente de cálculo no diagrama retangular simplificado é dado pela equação de  $K' = f(\xi)$ , tem-se:

$$K'_{\text{retangular simpl.}} = -0,32 \cdot \xi_x^2 + 0,80 \cdot \xi_x$$

$$K'_{\text{retangular simpl.}} = -0,32 \cdot 0,443^2 + 0,80 \cdot 0,443$$

$$K'_{\text{retangular simpl.}} = 0,292$$

Como  $K' < K_L = 0,295$  não haverá a necessidade de armadura de compressão,  $A'_s$ .

Calculando a profundidade da linha neutra para o diagrama  $\sigma_x \varepsilon$  retangular, que equivale à altura do retângulo no diagrama retangular simplificado, tem-se:

$$y = \lambda \cdot x \rightarrow y = 0,8 \cdot 20,369$$

$$y = 16,296 \text{ cm}$$

A resultante interna de compressão no concreto no diagrama retangular simplificado é dada por:

$$R_{cc} = f_c \cdot b \cdot (\lambda \cdot x) \rightarrow R_{cc} = 1,214 \cdot 20 \cdot 0,8 \cdot 20,369$$

$$R_{cc} = 395,7 \text{ KN}$$

Com a resultante interna de compressão no concreto ( $R_{cc}$ ) obtém-se a armadura de tração na seção transversal ( $A_s$ ), dada por:

$$R_{cc} = R_{st} = A_s \cdot f_{yd}$$



$$A_s = \frac{R_{cc}}{f_{yd}} \rightarrow A_s = \frac{395,7}{43,48}$$

$$A_s = 9,102 \text{ cm}^2$$

Para definir com qual tipo de armadura será feito o dimensionamento, é necessário comparar a armadura de tração calculada ( $A_{s, \text{cal}}$ ) com a armadura mínima ( $A_{s, \text{min}}$ ). A armadura de tração calculada tem que ser maior ou igual a armadura mínima ( $A_{s, \text{min}}$ ), dada por:

$$A_{s, \text{min}} = 0,15\% \cdot b \cdot h \rightarrow A_{s, \text{min}} = 0,15\% \cdot 20 \cdot 50 \rightarrow A_{s, \text{min}} = 1,50 \text{ cm}^2$$

$A_{s, \text{parab. retângulo}} = 9,171 \text{ cm}^2 > A_{s, \text{min}}$  ok! e

$A_{s, \text{retang. simplificado}} = 9,102 \text{ cm}^2 > A_{s, \text{min}}$  ok!

Desta forma verifica-se que os dois métodos aplicados no domínio 3, para o exemplo numérico proposto com  $M_d = 107 \text{ KN.m}$ , produzem resultados muito próximos, com diferença de 0,76 % entre os resultados obtidos.

#### 4.6 Análise e Resultados

Considerando-se os exemplos numéricos acima, apresenta-se a seguir os resultados da teoria exposta no item 17.2.2 - Hipóteses básicas da NBR 6118/2018, com as devidas considerações entre os dois modelos analisados, parábola retângulo e retangular simplificado.

##### 4.6.1 Análise do subdomínio 2a

Na Tabela 14 apresenta-se os resultados obtidos na aplicação numérica efetuada no subdomínio 2a, no item 4.5.1. Para ambos os modelos se adotou o mesmo momento fletor externo solicitante, de 25 kN. Nota-se uma diferença entre os resultados de cada modelo de cálculo, para a armadura ( $A_s$ ) calculada a diferença é de 1,81%.

Tabela 14 - Resumo com as diferenças entre os dois modelos de diagramas no subdomínio 2a

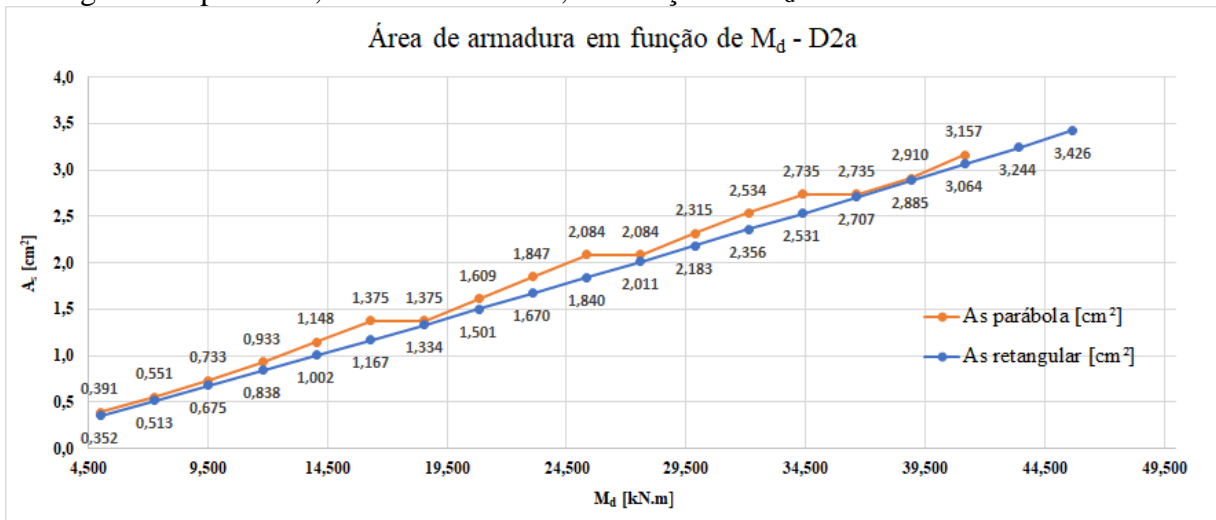
Subdomínio 2a	Modelo 1	Modelo 2	Diferença % entre o Modelo 2 e o Modelo 1
Variáveis	Parábola Retângulo	Retangular Simplificado	

$R_{cc}$ [KN]	80,32	78,87	-1,81%
$X_{LN}$ [cm]	5,52	4,06	-26,46%
$\xi$	0,120	0,0883	-26,46%
$K' = f(\xi)$	0,0687	0,0681	-0,81%
$A_s$ [cm <sup>2</sup> ]	1,85	1,81	-1,81%

Fonte: Próprio autor

O Gráfico 1 apresenta os resultados obtidos no cálculo da armadura de tração ( $A_s$ ), calculada pelos dois modelos, para diversos valores de  $M_d$ . Observa-se que, para um mesmo valor de momento, o modelo parábola retângulo nos fornece resultados maiores do que o obtido pelo modelo retangular simplificado. A Tabela 15 apresenta os valores numéricos que geraram os gráficos, permitindo uma comparação detalhada dos dois modelos.

Gráfico 1- Áreas de armadura de tração, obtidas entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no subdomínio 2a, em função de  $M_d$ .



Fonte: Próprio autor

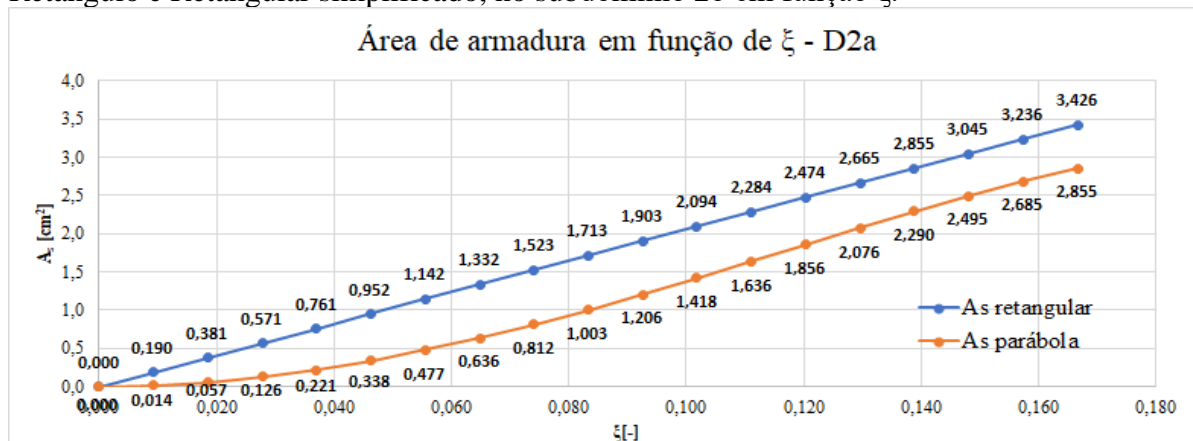
Tabela 15 - Comparativo dos resultados da área de armadura entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, variando a profundidade da LN ( $x=\xi.d$ ), no subd. 2a.

$M_d$ [KN.m]	Retangular simplificado				Parábola- Retângulo				Diferença % $A_s$ parábola $A_s$ retangular	
	$\xi$ [-]	$X_{LN}$ [cm]	$R_{cc}$ [KN]	$A_s$ [cm <sup>2</sup> ]	$\xi$ [-]	$X_{LN}$ [cm]	$R_{cc}$ KN	$A_s$ [cm <sup>2</sup> ]		
5,00	0,017	0,79	15,3	0,352	0,050	2,30	17,0	0,391		0,0%
7,26	0,025	1,15	22,3	0,513	0,060	2,76	24,0	0,551		-6,9%
9,52	0,0329	1,51	29,4	0,675	0,070	3,22	31,9	0,733		-7,8%
11,78	0,041	1,88	36,4	0,838	0,080	3,68	40,5	0,933		-10,1%
14,04	0,049	2,24	43,6	1,002	0,090	4,14	49,9	1,148		-12,7%
16,30	0,057	2,61	50,8	1,167	0,100	4,60	59,8	1,375		-15,1%
18,56	0,065	2,98	58,0	1,334	0,100	4,60	59,8	1,375		-3,0%
20,82	0,073	3,36	65,3	1,501	0,110	5,06	70,0	1,609		-6,7%
23,08	0,081	3,74	72,6	1,670	0,120	5,52	80,3	1,847		-9,6%
25,34	0,089	4,12	80,0	1,840	0,130	5,98	90,6	2,084		-11,7%
27,60	0,098	4,50	87,4	2,011	0,130	5,98	90,6	2,084		-3,5%
29,86	0,106	4,88	94,9	2,183	0,140	6,44	100,7	2,315		-5,7%
32,12	0,115	5,27	102,5	2,356	0,150	6,90	110,2	2,534		-7,0%
34,38	0,123	5,66	110,1	2,531	0,160	7,36	118,9	2,735		-7,4%
36,64	0,132	6,06	117,7	2,707	0,160	7,36	118,9	2,735		-1,0%
38,90	0,140	6,46	125,4	2,885	0,170	7,82	126,5	2,910		-0,9%
41,16	0,149	6,86	133,2	3,064	0,190	8,74	137,3	3,157		-3,0%
43,42	0,158	7,26	141,0	3,244	2,670	122,82				
45,68	0,167	7,67	149,0	3,426	2,670	122,82				

Fonte: Próprio autor

O Gráfico 2 apresenta o cálculo da área de armadura ( $A_s$ ) fornecido pelos dois modelos, agora com base na profundidade da linha neutra, representada pela variável adimensional  $\xi=x/d$ , e não mais pelo esforço ( $M_d$ ). Observa-se que, para um mesmo valor de ( $\xi$ ), o modelo retangular simplificado nos fornece uma área de armadura de tração ( $A_s$ ) maior do que o obtido pelo modelo parábola-retângulo, sendo que esta diferença se reduz à medida que se aumenta o valor de  $\xi$ . A Tabela 16 apresenta os valores numéricos plotados no Gráfico 2, permitindo uma comparação detalhada dos resultados.

Gráfico 2 - Comparativo dos resultados da área de armadura entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no subdomínio 2b em função  $\xi$ .



Fonte: Próprio autor

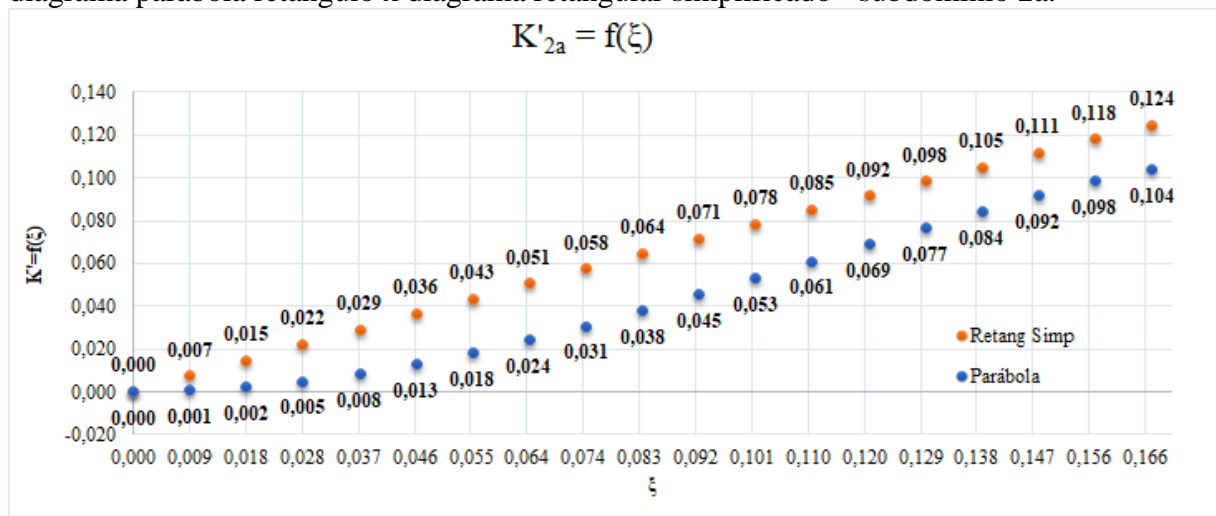
Tabela 16 - Comparativo dos resultados da área de armadura entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, variando a profundidade da linha neutra ( $x=\xi.d$ ), no subdomínio 2a.

$\xi$	$X_{LN}$	Retangular simplificado			Parábola-Retângulo			Diferença % $A_s$ parábola $A_s$ retangular
		$M_d$	$R_{cc}$	$A_s$ retangular	$M_d$	$R_{cc}$	$A_s$ parábola	
[-]	[cm]	[KN.m]	KN	[cm <sup>2</sup> ]	[KN.m]	KN	[cm <sup>2</sup> ]	
0,000	0,00	0,0	0,00	0,000	0,0	0,00	0,000	0,0%
0,009	0,43	2,7	8,28	0,190	0,2	0,63	0,014	-92,4%
0,019	0,85	5,4	16,55	0,381	0,8	2,48	0,057	-85,0%
0,028	1,28	8,1	24,83	0,571	1,8	5,49	0,126	-77,9%
0,037	1,70	10,7	33,10	0,761	3,1	9,59	0,221	-71,0%
0,046	2,13	13,3	41,38	0,952	4,7	14,71	0,338	-64,5%
0,056	2,56	16,0	49,65	1,142	6,7	20,76	0,477	-58,2%
0,065	2,98	18,5	57,93	1,332	8,9	27,66	0,636	-52,3%
0,074	3,41	21,1	66,20	1,523	11,3	35,31	0,812	-46,7%
0,083	3,83	23,7	74,48	1,713	13,9	43,60	1,003	-41,5%
0,093	4,26	26,2	82,75	1,903	16,6	52,42	1,206	-36,7%
0,102	4,69	28,7	91,03	2,094	19,5	61,63	1,418	-32,3%
0,111	5,11	31,2	99,30	2,284	22,4	71,11	1,636	-28,4%
0,120	5,54	33,6	107,58	2,474	25,3	80,71	1,856	-25,0%
0,130	5,96	36,1	115,85	2,665	28,2	90,25	2,076	-22,1%
0,139	6,39	38,5	124,13	2,855	31,0	99,56	2,290	-19,8%
0,148	6,81	40,9	132,40	3,045	33,7	108,46	2,495	-18,1%
0,157	7,24	43,3	140,68	3,236	36,1	116,72	2,685	-17,0%
0,167	7,67	45,7	148,95	3,426	38,2	124,13	2,855	-16,7%

Fonte: Próprio autor

Analisando as duas curvas do Gráfico 3, que mostra o parâmetro adimensional do momento fletor interno resistente de cálculo ( $K'$ ) em função de ( $\xi$ ), verifica-se que os dois modelos apresentam diferenças significativas em todo o intervalo de  $\xi$  (de 0,00 até 0,167) para o subdomínio 2a. Estas diferenças também podem ser observadas na Tabela 17 abaixo.

Gráfico 3 - Comparação do parâmetro adimensional ( $K'$ ) calculado pelos dois modelos, diagrama parábola retângulo x diagrama retangular simplificado - subdomínio 2a.



Fonte: Próprio autor

Tabela 17 - Diferenças observadas para cada  $K' = f(\xi)$  entre cálculo efetuado pelo método parábola-retângulo em relação ao retangular simplificado, para o subdomínio 2a.

$\xi$ [-]	Retangular simplificado		Parábola- Retângulo		Diferença % Paráb - Retang.
	$M_d$ [KN.m]	$K' = f(\xi)$ [-]	$M_d$ [KN.m]	$K' = f(\xi)$ [-]	
0,000	0,0	0,000	0,0	0,000	0%
0,009	2,7	0,007	0,2	0,001	-92%
0,019	5,4	0,015	0,8	0,002	-85%
0,028	8,1	0,022	1,8	0,005	-78%
0,037	10,7	0,029	3,1	0,008	-71%
0,046	13,3	0,036	4,7	0,013	-64%
0,056	16,0	0,043	6,7	0,018	-58%
0,065	18,5	0,051	8,9	0,024	-52%
0,074	21,1	0,058	11,3	0,031	-47%
0,083	23,7	0,064	13,9	0,038	-41%
0,093	26,2	0,071	16,6	0,045	-37%
0,102	28,7	0,078	19,5	0,053	-32%
0,111	31,2	0,085	22,4	0,061	-28%
0,120	33,6	0,092	25,3	0,069	-25%
0,130	36,1	0,098	28,2	0,077	-22%
0,139	38,5	0,105	31,0	0,084	-19%
0,148	40,9	0,111	33,7	0,092	-18%
0,157	43,3	0,118	36,1	0,098	-17%
0,167	45,7	0,124	38,2	0,104	-16%

Fonte: Próprio autor

#### 4.6.2 Análise do subdomínio 2b

Na Tabela 18 são apresentados os resultados obtidos na aplicação numérica efetuada no subdomínio 2b, no item 4.5.2. Para ambos os modelos se adotou o mesmo momento fletor externo solicitante, no valor de 45 kN. Nota-se uma diferença entre os resultados de cada modelo de cálculo, para a armadura ( $A_s$ ) calculada a diferença é de 0,64%.

Tabela 18 - Resumo das diferenças entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no subdomínio 2b

Subdomínio 2B	Modelo 1	Modelo 2	Diferença % entre o Modelo 2 e o Modelo 1
Variáveis	Parábola Retângulo	Retangular Simplificado	
$R_{cc}$ [KN]	147,52	146,57	-0,64%
$X_{LN}$ [cm]	8,57	7,54	-11,97%
$\xi$	0,186	0,164	-11,97%
$K' = f(\xi)$	0,123	0,123	0,00%

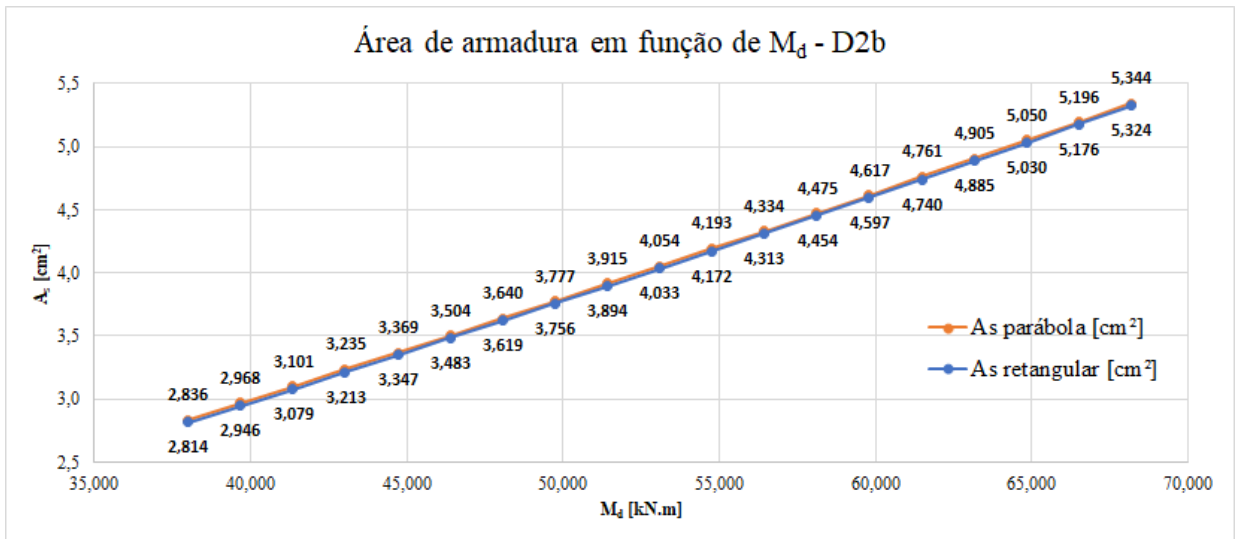
$A_s$ [cm <sup>2</sup> ]	3,39	3,37	-0,64%
Domínio	*A seção trabalha no domínio 2b	*A seção trabalha no domínio 2a	-

\* Constatou-se que, adotando-se o modelo de cálculo do diagrama parábola-retângulo, a seção está trabalhando no subdomínio 2b, com  $\xi=0,186$  enquanto, ao adotar o diagrama retangular simplificado, a seção está trabalhando no subdomínio 2a com  $\xi=0,164$ . Porém, para o efeito de cálculo, este fato não é relevante, visto que o  $\xi$  varia no intervalo de 0 até 0,259 no modelo retangular simplificado do domínio 2, enquanto no modelo parábola-retângulo, o  $\xi$  varia no intervalo de 0,1667 até 0,259 (subdomínio 2b).

Fonte: Próprio autor

No Gráfico 4, são apresentadas as diferenças das áreas de armadura calculadas ( $A_s$ ) pelos dois modelos, para diversos valores de  $M_d$ . Observa-se que, para um mesmo valor de momento, o modelo parábola retângulo nos fornece uma área de armadura ligeiramente maior do que o obtido pelo modelo retangular simplificado, sendo que esta diferença se reduz gradativamente à medida que aumenta o momento. A Tabela 19 apresenta os valores numéricos plotados no Gráfico 4, permitindo uma comparação detalhada dos resultados.

Gráfico 4 - Áreas de armadura de tração, obtidas entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no subdomínio 2b, em função de  $M_d$ .



Fonte: Próprio autor

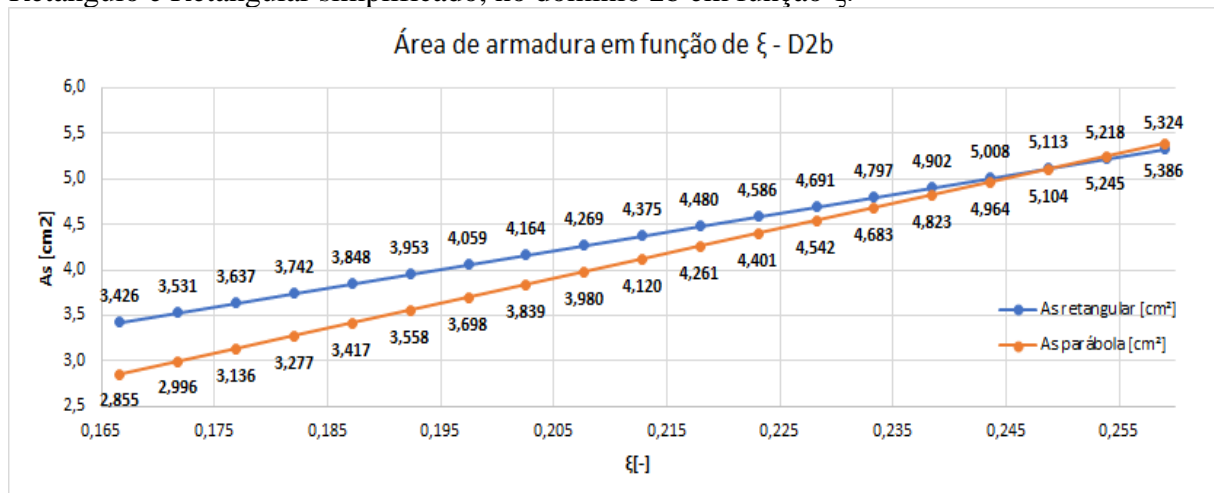
Tabela 19 - Áreas de armadura de tração, obtidas entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no subdomínio 2b, em função de  $M_d$ .

$M_d$ [KN.m]	Retangular simplificado				Parábola- Retângulo				Diferença % $A_s$ paráb. x $A_s$ retang. [%]
	$\xi$ [-]	$X_{UH}$ [cm]	$R_{cc}$ KN	$A_s$ retangular [cm <sup>2</sup> ]	$\xi$ [-]	$X_{UH}$ [cm]	$R_{cc}$ KN	$A_s$ parábola [cm <sup>2</sup> ]	
38,00	0,137	6,30	122,4	2,814	0,166	7,64	123,3	2,836	0,79%
39,68	0,143	6,59	128,1	2,946	0,171	7,86	129,1	2,968	0,75%
41,35	0,150	6,89	133,9	3,079	0,176	8,08	134,8	3,101	0,72%
43,03	0,156	7,19	139,7	3,213	0,181	8,30	140,6	3,235	0,68%
44,71	0,163	7,49	145,5	3,347	0,185	8,53	146,5	3,369	0,65%
46,38	0,169	7,79	151,4	3,483	0,190	8,76	152,4	3,504	0,62%
48,06	0,176	8,10	157,3	3,619	0,195	8,99	158,3	3,640	0,59%
49,74	0,183	8,41	163,3	3,756	0,200	9,21	164,2	3,777	0,57%
51,41	0,189	8,71	169,3	3,894	0,205	9,45	170,2	3,915	0,55%
53,09	0,196	9,02	175,3	4,033	0,210	9,68	176,2	4,054	0,52%
54,76	0,203	9,34	181,4	4,172	0,215	9,91	182,3	4,193	0,50%
56,44	0,210	9,65	187,5	4,313	0,221	10,15	188,4	4,334	0,48%
58,12	0,217	9,97	193,7	4,454	0,226	10,39	194,6	4,475	0,46%
59,79	0,224	10,29	199,9	4,597	0,231	10,62	200,8	4,617	0,45%
61,47	0,231	10,61	206,1	4,740	0,236	10,87	207,0	4,761	0,43%
63,15	0,238	10,93	212,4	4,885	0,241	11,11	213,3	4,905	0,42%
64,82	0,245	11,26	218,7	5,030	0,247	11,35	219,6	5,050	0,40%
66,50	0,252	11,58	225,1	5,176	0,252	11,60	225,9	5,196	0,39%
68,176	0,259	11,91	231,5	5,324	0,257	11,84	232,3	5,344	0,37%

Fonte: Próprio autor

















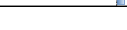


Fazendo-se outro tipo de análise, ou seja, fixando-se o valor da profundidade da linha neutra ( $\xi=x/d$ ) e calculando-se ( $R_{cc}$ ) e ( $A_s$ ) para cada valor de  $\xi$  pelos dois métodos, obtemos diferenças maiores entre as áreas de armadura. Tabela 20 (máximo de 16,7%) do que aquelas observadas na análise de esforço feita anteriormente Tabela 19 (máximo de 0,79%). Por este motivo, nesse estudo do subdomínio 2b, assim como no subdomínio 2a, não se deve comparar o cálculo da armadura fixando-se a profundidade da linha neutra, e sim comparar a armadura utilizando-se o mesmo esforço externo solicitante ( $M_d$ ), conforme exemplificado na Tabela 19.

Gráfico 5 - Comparativo dos resultados da área de armadura entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no domínio 2b em função  $\xi$ .



Fonte: Próprio autor

Tabela 20 - Comparativo dos resultados da área de armadura entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, variando a profundidade da linha neutra ( $x=\xi.d$ ), no subdomínio 2b.

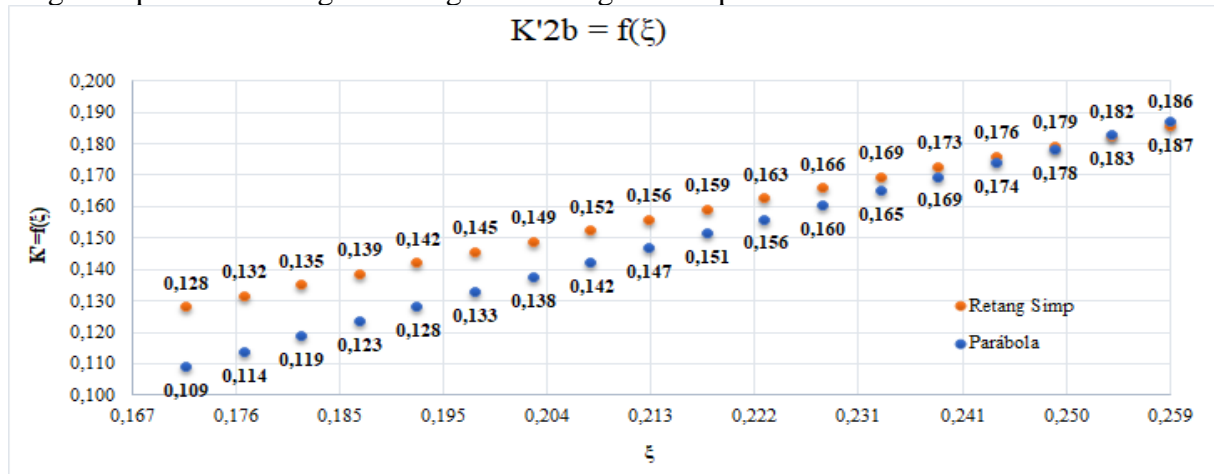
$\xi$	$X_{ln}$	Retangular simplificado			Parábola- Retângulo			Diferença %	
		$M_d$	$R_{cc}$	$A_s$ retangular	$M_d$	$R_{cc}$	$A_s$ parábola	$A_s$ paráb. x $A_s$ retang.	[%]
[-]	[cm]	[KN.m]	KN	[cm <sup>2</sup> ]	[KN.m]	KN	[cm <sup>2</sup> ]		
0,167	7,67	45,68	149,0	3,426	38,24	124,1	2,855		-16,7%
0,172	7,90	46,98	153,5	3,531	40,02	130,2	2,996		-15,2%
0,177	8,14	48,28	158,1	3,637	41,79	136,4	3,136		-13,8%
0,182	8,37	49,57	162,7	3,742	43,55	142,5	3,277		-12,4%
0,187	8,61	50,85	167,3	3,848	45,30	148,6	3,417		-11,2%
0,192	8,85	52,13	171,9	3,953	47,04	154,7	3,558		-10,0%
0,197	9,08	53,40	176,5	4,059	48,77	160,8	3,698		-8,9%
0,203	9,32	54,67	181,0	4,164	50,49	166,9	3,839		-7,8%
0,208	9,55	55,92	185,6	4,269	52,19	173,0	3,980		-6,8%
0,213	9,79	57,18	190,2	4,375	53,89	179,1	4,120		-5,8%
0,218	10,03	58,42	194,8	4,480	55,57	185,3	4,261		-4,9%
0,223	10,26	59,66	199,4	4,586	57,25	191,4	4,401		-4,0%
0,228	10,50	60,90	204,0	4,691	58,91	197,5	4,542		-3,2%
0,233	10,73	62,13	208,5	4,797	60,56	203,6	4,683		-2,4%
0,238	10,97	63,35	213,1	4,902	62,20	209,7	4,823		-1,6%
0,244	11,21	64,57	217,7	5,008	63,83	215,8	4,964		-0,9%
0,249	11,44	65,78	222,3	5,113	65,45	221,9	5,104		-0,2%
0,254	11,68	66,98	226,9	5,218	67,05	228,0	5,245		0,5%
0,259	11,91	68,176	231,5	5,324	68,649	234,2	5,386		1,2%

Fonte: Próprio autor

Por fim, analisando as duas curvas do Gráfico 6 e comparando o parâmetro adimensional do momento fletor interno resistente de cálculo ( $K'$ ) dos dois modelos, constata-se que para o trecho onde  $\xi$  está entre 0,167 e 0,223, o parâmetro ( $K'$ ) calculado pelo modelo retangular simplificado é maior do que aquele calculado pelo modelo parábola retângulo. Esta diferença começa em 16 % para valores de  $\xi = 0,167$  e vai diminuindo até chegar em 0%, quando  $\xi = 0,254$ . Estes resultados estão detalhados na Tabela 21.



Gráfico 6 - Comparação do parâmetro adimensional ( $K'$ ) calculado pelos dois modelos, diagrama parábola retângulo x diagrama retangular simplificado - subdomínio 2b



Fonte: Próprio autor

Tabela 21 - Diferenças observadas para  $K' = f(\xi)$  entre o cálculo efetuado pelo modelo parábola-retângulo em relação ao retangular simplificado, para o subdomínio 2b.

$\xi$ [-]	Retangular simplificado		Parábola- Retângulo		Diferença % Paráb - Retang.
	$M_d$ [KN.m]	$K' = f(\xi)$ [-]	$M_d$ [KN.m]	$K' = f(\xi)$ [-]	
0,167	45,7	0,124	38,2	0,104	-16,3%
0,172	47,0	0,128	40,0	0,109	-14,8%
0,177	48,3	0,132	41,8	0,114	-13,4%
0,182	49,6	0,135	43,6	0,119	-12,1%
0,187	50,9	0,139	45,3	0,123	-10,9%
0,192	52,1	0,142	47,0	0,128	-9,8%
0,197	53,4	0,145	48,8	0,133	-8,7%
0,203	54,7	0,149	50,5	0,138	-7,6%
0,208	55,9	0,152	52,2	0,142	-6,7%
0,213	57,2	0,156	53,9	0,147	-5,8%
0,218	58,4	0,159	55,6	0,151	-4,9%
0,223	59,7	0,163	57,2	0,156	-4,1%
0,228	60,9	0,166	58,9	0,160	-3,3%
0,233	62,1	0,169	60,6	0,165	-2,5%
0,238	63,3	0,173	62,2	0,169	-1,8%
0,244	64,6	0,176	63,8	0,174	-1,1%
0,249	65,8	0,179	65,4	0,178	-0,5%
0,254	67,0	0,182	67,1	0,183	0,1%
0,259	68,2	0,186	68,6	0,187	0,7%

Fonte: Próprio autor

#### 4.6.3 Análise do domínio D3

Na Tabela 22 são apresentados os resultados obtidos na aplicação numérica efetuada no domínio 3, no item 4.5.3 acima. Para ambos os modelos se adotou o mesmo momento fletor externo solicitante, no valor de 107 kN. Nota-se que quase não há diferença entre os resultados dos dois modelos de cálculo para este domínio, indicando a equivalência entre os dois modelos.

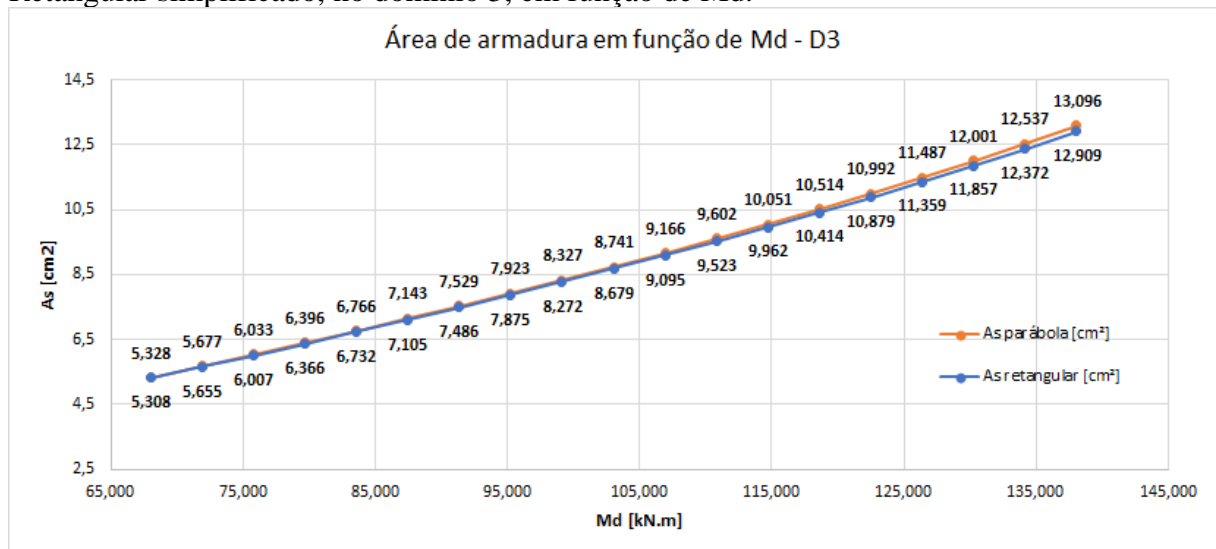
Tabela 22 - Resumo das diferenças entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no domínio 3

<b>Domínio 3</b>	<b>Modelo 1</b>	<b>Modelo 2</b>	<b>Diferença % entre o Modelo 2 e o Modelo 1</b>
<b>Variáveis</b>	<b>Parábola Retângulo</b>	<b>Retangular Simplificado</b>	
$R_{cc}$ [KN]	398,77	395,75	-0,77%
$X_{LN}$ [cm]	20,29	20,37	0,41%
$\xi$	0,441	0,443	0,45%
$K' = f(\xi)$	0,292	0,292	-0,32%
$A_s$ cm <sup>2</sup>	9,17	9,10	-0,76%

Fonte: Próprio autor

O Gráfico 7 apresenta o cálculo da armadura de tração ( $A_s$ ) obtida pelos dois modelos de cálculo, para um mesmo ( $M_d$ ). Constata-se a proximidade dos resultados obtidos, que pode ser avaliada em detalhe na Tabela 23.

Gráfico 7 - Áreas de armadura de tração, obtidas entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no domínio 3, em função de  $M_d$ .



Fonte: Próprio autor

Tabela 23 - Análise dos esforços ( $M_d$ ), comparando os resultados da área de armadura obtidos entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no domínio 3.

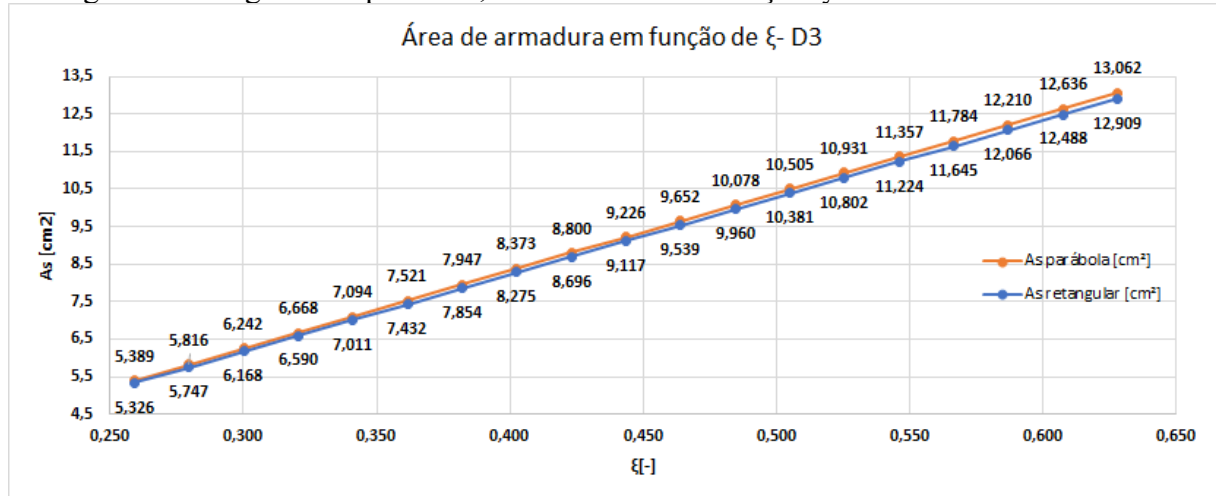
$M_d$	Retangular simplificado				Parábola- Retângulo				Diferença %	
	$\xi$	$X_{LN}$	$R_{cc}$	$A_s$ retangular	$\xi$	$X_{LN}$	$R_{cc}$	$A_s$ parábola	$A_s$ parábola	$A_s$ retangular
[KN.m]	[-]	[cm]	KN	[cm <sup>2</sup> ]	[-]	[cm]	KN	[cm <sup>2</sup> ]		
68,0	0,258	11,9	230,8	5,308	0,256	11,8	231,6	5,328		0,36%
71,9	0,275	12,7	245,9	5,655	0,273	12,6	246,8	5,677		0,39%
75,8	0,292	13,4	261,2	6,007	0,290	13,3	262,3	6,033		0,43%
79,7	0,310	14,2	276,8	6,366	0,307	14,1	278,1	6,396		0,46%
83,6	0,328	15,1	292,7	6,732	0,325	15,0	294,2	6,766		0,50%
87,5	0,346	15,9	308,9	7,105	0,343	15,8	310,6	7,143		0,54%
91,4	0,364	16,8	325,5	7,486	0,362	16,7	327,3	7,529		0,58%
95,3	0,383	17,6	342,4	7,875	0,381	17,5	344,5	7,923		0,62%
99,1	0,402	18,5	359,7	8,272	0,400	18,4	362,1	8,327		0,67%
103,0	0,422	19,4	377,3	8,679	0,420	19,3	380,0	8,741		0,72%
106,9	0,442	20,4	395,5	9,095	0,441	20,3	398,5	9,166		0,77%
110,8	0,463	21,3	414,0	9,523	0,462	21,2	417,5	9,602		0,83%
114,7	0,485	22,3	433,1	9,962	0,483	22,2	437,0	10,051		0,89%
118,6	0,507	23,3	452,8	10,414	0,505	23,3	457,1	10,514		0,96%
122,5	0,529	24,3	473,0	10,879	0,528	24,3	477,9	10,992		1,04%
126,4	0,553	25,4	493,9	11,359	0,552	25,4	499,5	11,487		1,13%
130,3	0,577	26,5	515,5	11,857	0,577	26,5	521,8	12,001		1,22%
134,2	0,602	27,7	537,9	12,372	0,603	27,7	545,1	12,537		1,33%
138,1	0,628	28,9	561,3	12,909	0,630	29,0	569,4	13,096		1,45%

Fonte: Próprio autor

O Gráfico 8 ilustra o cálculo da área de armadura de tração ( $A_s$ ) em função do valor adimensional ( $\xi=x/d$ ), que varia de 0,259 até 0,628, onde nota-se que os dois modelos de cálculo também apresentam resultados praticamente coincidentes para esse domínio, com diferenças máximas em torno de 1%. Esses valores podem ser examinados em detalhe na Tabela 24.

Diferentemente do domínio 2b, no domínio 3 tem-se praticamente os mesmos resultados de armadura entre os dois modelos, independentemente de adotar-se a profundidade da linha neutra como referência ou de adotar-se o mesmo esforço externo solicitante ( $M_d$ ) para o cálculo da armadura de tração.

Gráfico 8 - Comparativo dos resultados da área de armadura entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, no domínio 3 em função  $\xi$ .



Fonte: Próprio autor

Tabela 24 - Áreas de armadura de tração, obtidas entre os modelos Parábola-Retângulo e Retangular simplificado, variando a profundidade da linha neutra ( $x=\xi.d$ ), no domínio 3.

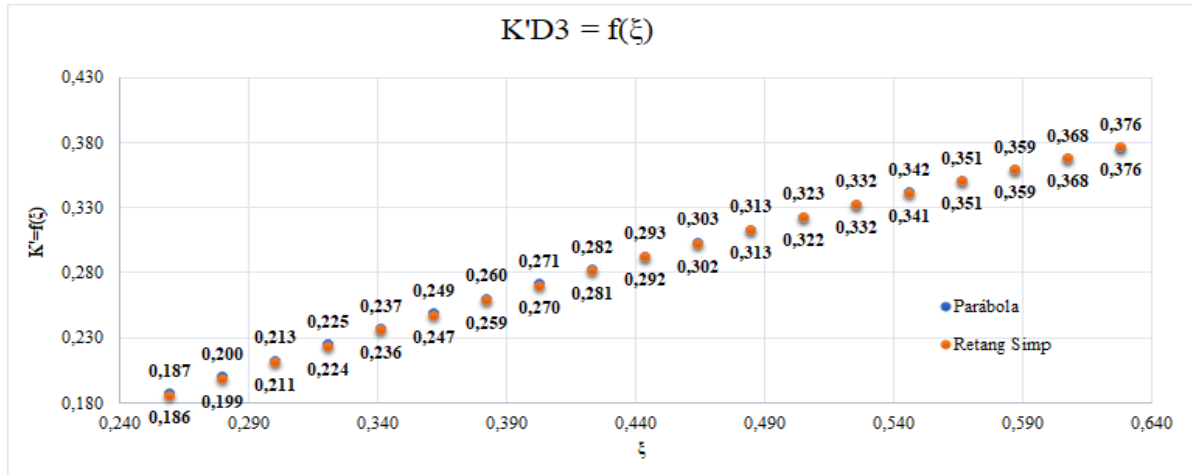
$\xi$	$X_{Ln}$	Retangular simplificado			Parábola- Retângulo			Diferença %	
		$M_d$	$R_{cc}$	$A_s$ retangular	$M_d$	$R_{cc}$	$A_s$ parábola	$A_s$ parábola	$A_s$ retangular
[-]	[cm]	[KN.m]	KN	[cm²]	[KN.m]	KN	[cm²]		
0,259	11,9	68,2	231,6	5,326	72,6	234,3	5,389		1,19%
0,280	12,9	72,9	249,9	5,747	79,6	10,0	5,816		1,19%
0,300	13,8	77,5	268,2	6,168	86,4	10,6	6,242		1,19%
0,321	14,7	82,1	286,5	6,590	93,0	11,1	6,668		1,19%
0,341	15,7	86,5	304,8	7,011	99,3	11,7	7,094		1,19%
0,362	16,6	90,8	323,1	7,432	105,5	12,2	7,521		1,19%
0,382	17,6	95,0	341,5	7,854	111,4	12,7	7,947		1,19%
0,403	18,5	99,2	359,8	8,275	117,0	13,3	8,373		1,19%
0,423	19,5	103,2	378,1	8,696	122,5	13,8	8,800		1,19%
0,444	20,4	107,1	396,4	9,117	127,7	14,4	9,226		1,19%
0,464	21,3	111,0	414,7	9,539	132,7	14,9	9,652		1,19%
0,485	22,3	114,7	433,0	9,960	137,5	15,4	10,078		1,19%
0,505	23,2	118,3	451,4	10,381	142,0	16,0	10,505		1,19%
0,526	24,2	121,9	469,7	10,802	146,4	16,5	10,931		1,19%
0,546	25,1	125,3	488,0	11,224	150,5	0,0	11,357		1,19%
0,567	26,1	128,7	506,3	11,645	154,3	0,0	11,784		1,19%
0,587	27,0	131,9	524,6	12,066	158,0	0,0	12,210		1,19%
0,608	27,9	135,0	542,9	12,488	161,4	0,0	12,636		1,19%
0,628	28,9	138,1	561,3	12,909	164,6	231,6	13,062		1,19%

Fonte: Próprio autor

Finalmente, comparando os valores do parâmetro adimensional ( $K'$ ), que mede o momento interno resistente calculado pelo modelo do diagrama retangular simplificado em relação ao calculado pelo modelo do diagrama parábola-retângulo, conforme Gráfico 9, verifica-se que,

para o trecho onde  $\xi$  está entre 0,259 e 0,628, os dois modelos exibem resultados praticamente iguais.

Gráfico 9 - Comparação do parâmetro adimensional ( $K'$ ) calculado pelos dois modelos, diagrama parábola retângulo x diagrama retangular simplificado - domínio 3.



Fonte: Próprio autor

Tabela 25 - Diferenças observadas para  $K' = f(\xi)$  entre o cálculo efetuado pelo método parábola-retângulo em relação ao retangular simplificado, para o Domínio 3.

$\xi$ [-]	Retangular simplificado		Parábola- Retângulo		Diferença % Paráb - Retang.
	$M_d$ [KN.m]	$K' = f(\xi)$ [-]	$M_d$ [KN.m]	$K' = f(\xi)$ [-]	
0,259	68,2	0,186	68,7	0,187	0,72%
0,280	72,9	0,199	73,4	0,200	0,68%
0,300	77,5	0,211	78,0	0,213	0,64%
0,321	82,1	0,224	82,6	0,225	0,60%
0,341	86,5	0,236	87,0	0,237	0,55%
0,362	90,8	0,247	91,3	0,249	0,51%
0,382	95,0	0,259	95,5	0,260	0,46%
0,403	99,2	0,270	99,6	0,271	0,42%
0,423	103,2	0,281	103,6	0,282	0,37%
0,444	107,1	0,292	107,5	0,293	0,32%
0,464	111,0	0,302	111,3	0,303	0,27%
0,485	114,7	0,313	115,0	0,313	0,22%
0,505	118,3	0,322	118,5	0,323	0,17%
0,526	121,9	0,332	122,0	0,332	0,12%
0,546	125,3	0,341	125,4	0,342	0,06%
0,567	128,7	0,351	128,7	0,351	0,01%
0,587	131,9	0,359	131,8	0,359	-0,05%
0,608	135,0	0,368	134,9	0,368	-0,11%
0,628	138,1	0,376	137,9	0,376	-0,16%

Fonte: Próprio autor

Desta forma, e de acordo com as premissas já expostas, o emprego das equações resumidas na Tabela 26 permitem calcular o parâmetro  $K'$ , que mede a intensidade do momento fletor interno resistente de cálculo para cada um dos diferentes domínios de deformação, subdomínio 2a, subdomínio 2b, domínio 3 e o domínio 4.

Tabela 26 – Equações do Momento resistente adimensional  $K' = f(\xi)$ , conforme modelos Parábola Retângulo x Retangular Simplificado, de acordo com cada domínio de deformação.

	Limites	Valores	Domínio	Equações Utilizadas
Parábola - Retângulo	$\xi_{2a} =$	0,167	2a	$K'_{d2a \text{ paráb-retang}} = \frac{5\xi^2(3\xi - 8)(7\xi - 2)}{12(\xi - 1)^2}$
	$\xi_{2L} =$	0,259	2b	$K'_{d2B \text{ paráb-retang}} = \frac{-57\xi^2}{100} + \frac{114\xi}{100} - \frac{7}{100}$
	$\xi_{3L} =$	0,628	3	$K'_{d3 \text{ paráb-retang}} = -\frac{1}{294} (99.\xi^2 - 238.\xi)$
	$\xi_{4L} =$	1,000	4	
Retangular Simplificado	2, 3 e 4			$K'_{\text{retangular simpl.}} = -0,32.\xi^2 + 0,80.\xi$

Fonte: Próprio autor

## 5. CONCLUSÃO

O desenvolvimento do presente trabalho permitiu uma análise dos domínios de deformação que são fundamentais para o dimensionamento de elementos estruturais submetidos a Flexão simples, apresentados na ABNT NBR 6118:2018 no item 17.2.2, hipóteses básicas. A partir dessas informações, realizamos neste trabalho o equacionamento das expressões nos domínios de deformação 2a, 2b e 3 para o dimensionamento das armaduras, analisando posteriormente a diferença percentual entre os resultados obtidos pelo diagrama parábola-retângulo e o pelo diagrama retangular simplificado.

O dimensionamento da viga, calculado nos domínios 2a, 2b e 3, foi realizado considerando duas seções distintas (primeira viga com dimensão 20x50 cm e a segunda com dimensão 20x20 cm), conforme informado nas tabelas abaixo. Com base nos resultados obtidos através das equações de equilíbrio de forma adimensional, pode-se afirmar que as diferenças dos resultados obtidos com os dois modelos são mínimas, com uma observação de que, no domínio 2a, a diferença é um pouco maior, mais ainda sim, menor que 2%.

Tabela 27 – Resumo dos resultados de cálculo de uma viga com dimensão 20x50 cm entre os dois modelos de cálculo dimensionados nos domínios 2a, 2b e 3.

<b>Domínios</b>	<b>M<sub>d</sub></b> (kN.m)	<b>Modelo 1</b> Parábola Retângulo (As cm <sup>2</sup> )	<b>Modelo 2</b> Retangular Simplificado (As cm <sup>2</sup> )	<b>% Diferença</b> <b>Modelo 2 em relação</b> <b>ao Modelo 1</b>
Subdomínio 2a	25	1,85	1,81	-1,81 %
Subdomínio 2b	45	3,39	3,37	-0,64 %
Domínio 3	107	9,17	9,10	-0,76 %

Fonte: Próprio autor

Na segunda verificação, agora com uma viga apresentando dimensões 20x20 cm, foi possível chegar a um resultado da taxa de armadura de tração, no domínio 2a, com uma diferença de 4,13 % entre os dois modelos de cálculo. Ainda que este resultado seja notadamente maior que o valor de -1,81% obtido na seção 20 x 50, as diferenças no cálculo da armadura de tração nos domínios 2b e 3 são mínimas, conforme resumido na Tabela 2 abaixo.

Tabela 28 – Resumo dos resultados de cálculo de uma viga com dimensão 20x20 cm entre os dois modelos de cálculo dimensionados nos domínios 2a, 2b e 3.

<b>Domínios</b>	<b>M<sub>d</sub></b> (kN.m)	<b>Modelo 1</b> Parábola Retângulo (As cm <sup>2</sup> )	<b>Modelo 2</b> Retangular Simplificado (As cm <sup>2</sup> )	<b>% Diferença</b> <b>Modelo 2 em relação</b> <b>ao Modelo 1</b>
Subdomínio 2a	3,50	0,951	0,912	-4,13 %
Subdomínio 2b	8,00	1,796	1,789	-0,39 %
Domínio 3	13	3,208	3,183	-0,77 %

Fonte: Próprio autor

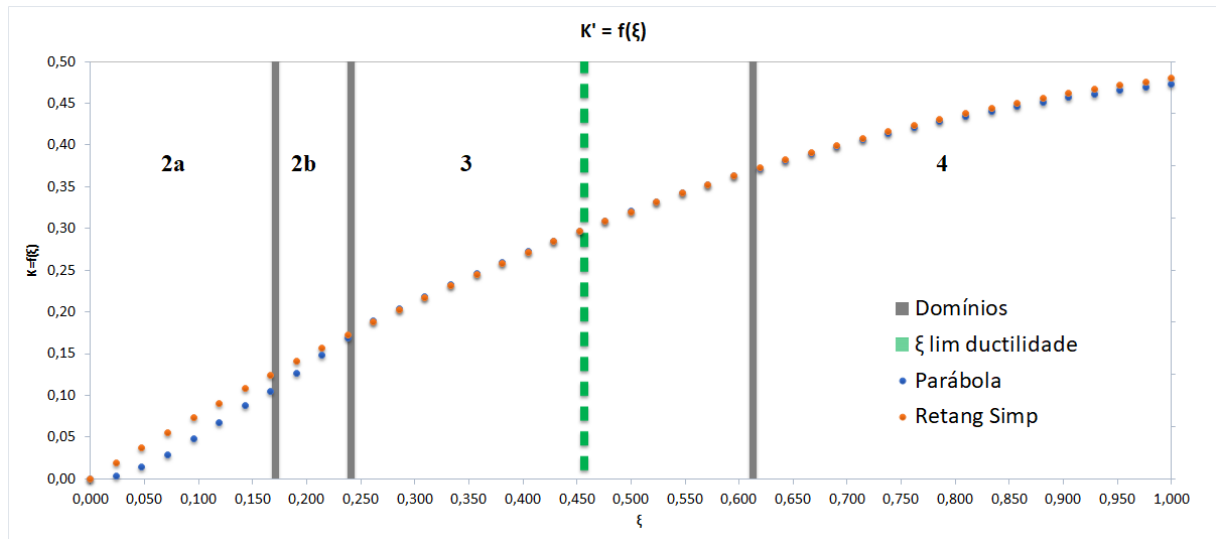
Destaca-se, com base na análise de resultados, resumidos nas tabelas acima, que as maiores diferenças entre os dois modelos, no cálculo da armadura de tração, encontram-se no domínio 2a, zona em que os esforços externos solicitantes aplicados à seção são os menores possíveis, tanto que à medida que os valores do momento aplicado na seção aumentam, a profundidade da linha neutra também aumenta.

Consequentemente o valor de ( $\xi$ ) também aumenta, até o valor limite ( $\xi$ ) = 0,45, saindo do subdomínio 2a e 2b e entrando no domínio 3, onde a curva de  $K'$  é quase igual para os dois modelos e as diferenças são mínimas. Portanto conclui-se que, para solicitações maiores que resultam numa seção trabalhando no domínio 3, tanto faz trabalhar com um ou com outro modelo de cálculo.

Dos resultados obtidos, constata-se desta forma a equivalência entre os dois modelos, evidenciada pela análise de esforços ( $M_d$ ) efetuada nesse estudo, podendo-se afirmar que é possível substituir-se o diagrama parábola-retângulo por um diagrama retangular-simplificado, de profundidade  $y = \lambda \cdot x$ , conforme sugere a NBR 6118/2018 no item 17.2.2 Hipóteses básicas. É importante destacar que o procedimento de cálculo realizado pelo diagrama retangular simplificado é mais fácil e rápido do que aquele realizado pelo método do diagrama parábola-retângulo, o que descomplica bastante o dimensionamento no ELU para o calculista.

Entretanto, é importante lembrar que a NBR 6118/2018, no item 14.6.4.3 - Limites para redistribuição de momentos e condições de ductilidade - preconiza que a posição da linha neutra no ELU deve obedecer ao limite  $x/d \leq 0,45$  para  $f_{ck} \leq 50$  Mpa. O Gráfico 10 ilustra a profundidade relativa da linha neutra aplicando-se a condição de ductilidade  $\xi_{lim} = x/d \leq 0,45$ , ficando a mesma posicionada aproximadamente no meio do domínio 3. Então, fica claro que, para obter-se um comportamento dúctil em flexão simples, não se pode dimensionar as seções considerando todo o domínio 3.

Gráfico 10 - Comparação dos Momento resistente de cálculo do diagrama parábola retângulo x diagrama retangular simplificado, de acordo com os domínios de deformação.



Fonte: Próprio autor

Fica como proposta de continuidade desse estudo a utilização desta mesma metodologia para os casos de flexão normal composta, onde além dos momentos externos solicitantes, ocorra a incidência de força normal à seção transversal do elemento estrutural considerado para o estudo.



## 6. REFERÊNCIAS

Associação Brasileira de Normas Técnicas. ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.

ARAÚJO, José Milton. Curso de Concreto Armado: Flexão Normal Simples. *In*: CURSO de Concreto Armado: Flexão Normal Simples. 3. ed. rev. Rio Grande: Dunas, 2010. v. 1, cap. 3, p. 85-122. ISBN 9788586717093.

BASTOS, P.S.S. *Flexão Normal Simples – Vigas*. Bauru/SP, Unesp - Departamento de Engenharia Civil, Notas de aula, Fev/2015,78p., disponível em:[http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag\\_concreto1.htm](http://www.feb.unesp.br/pbastos/pag_concreto1.htm)

CARVALHO, Roberto Chust; FILHO, Jasson Rodrigues de Figueiredo. Cálculo e Detalhamento de Estruturas Usuais de Concreto Armado: Cálculo da armadura de flexão. 4. ed. São Carlos: Edufscar, 2014. 424 p.

FUSCO, P. B. Estruturas de Concreto - Solicitações Normais. RIO DE JANEIRO: EDITORAGUANABARA DOIS S.A., 1981.

HELBING, Daniel. Flexão Simples em Seções de Concreto Armado: Dimensionamento e Análise de Materiais. Orientador: Dr. Libânio Miranda Pinheiro. 1994. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos Departamento de Estruturas, São Carlos, 1994. DOI pdf. Disponível em: <http://www.set.eesc.usp.br/producao/822>. Acesso em: 28 out. 2019.

NBR6118- 2018. 58º Congresso Brasileiro do Concreto, Belo Horizonte, ano 2016, ed. 58, 11 out. 2016. Disponível em: [https://www.researchgate.net/publication/309353146\\_Estudo\\_parametrico\\_do\\_bloco\\_de\\_tensao\\_adotado\\_no\\_dimensionamento\\_de\\_elementos\\_de\\_concreto\\_armado\\_no\\_estado\\_limite\\_ultimo\\_segundo\\_a\\_NBR6118-2018](https://www.researchgate.net/publication/309353146_Estudo_parametrico_do_bloco_de_tensao_adotado_no_dimensionamento_de_elementos_de_concreto_armado_no_estado_limite_ultimo_segundo_a_NBR6118-2018). Acesso em: 28 out. 2019

PINHEIRO, Libânio M. *et al.* FUNDAMENTOS DO CONCRETO E PROJETO DE EDIFÍCIOS: BASES PARA CÁLCULO – CAPÍTULO 6. 1. ed. São Carlos: ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS, 2007. 42-60 p. DOI pdf. Disponível em: [http://coral.ufsm.br/decc/ECC1006/Downloads/Apost\\_EESC\\_USP\\_Libanio.pdf](http://coral.ufsm.br/decc/ECC1006/Downloads/Apost_EESC_USP_Libanio.pdf). Acesso em: 28 out. 2018.

RONILSON FLÁVIO. *In*: SOUZA, 2018, Belo Horizonte. MBA em Construção Civil [...]. LUBEDAESTRUTURA: [s. n.], 2018.

SILVA, R.C. Vigas de concreto armado com telas soldadas: análise teórica e experimental da resistência à força cortante e do controle da fissuração. Tese (Doutorado), São Carlos, Escola de Engenharia de São Carlos, USP, Departamento de Engenharia de Estruturas, 2003, 328p

SILVA, Ney Amorim. ESPECIALIZAÇÃO EM ESTRUTURAS: CONCRETO ARMADO I. 2018. ed. Belo Horizonte, ed 2018. 337p.

SANTOS, L.M. Cálculo de Concreto Armado, v.1, São Paulo, Ed. LMS, 1983, 541p.

VASCONCELOS, A.C. O concreto no Brasil – Recordes, Realizações, História. São Paulo, Ed. Pini, 2a ed., v.1, 1985, 277p.

TOZATO, Luis Felipe *et al.* Estudo paramétrico do bloco de tensão adotado no dimensionamento de elementos de concreto armado no estado limite último segundo a NBR 6118-2014. Disponível em < [https://www.researchgate.net/figure/Figura-3-Dominios-de-deformacao-do-estado-limite-ultimo-de-uma-secao-transversal-Fonte\\_fig1\\_309353146](https://www.researchgate.net/figure/Figura-3-Dominios-de-deformacao-do-estado-limite-ultimo-de-uma-secao-transversal-Fonte_fig1_309353146)>. Acessado em: julho 2018