



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica
Escola de Engenharia

Caio Mariano da Silva Anastácio

**Projeto de controladores tolerantes a falhas
baseados em observador: Uma abordagem em
faixas de frequência finita**

Belo Horizonte
2021

Caio Mariano da Silva Anastácio

Projeto de controladores tolerantes a falhas baseados em observador: Uma abordagem em faixas de frequência finita

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos exigidos para a obtenção do título de Mestre em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Luciano Antonio Frezzatto Santos

ESTE EXEMPLAR CORRESPONDE À VERSÃO FINAL DA DISSERTAÇÃO DE MESTRADO DEFENDIDA PELO ALUNO CAIO MARIANO DA SILVA ANASTÁCIO E ORIENTADA PELO PROF. DR. LUCIANO ANTONIO FREZZATTO SANTOS.

Belo Horizonte
2021

A534p

Anastácio, Caio Mariano da Silva.

Projeto de controladores tolerantes a falhas baseados em observador [recurso eletrônico]: uma abordagem em faixas de frequência finita / Caio Mariano da Silva Anastácio. - 2021.

1 recurso online (77 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Luciano Antonio Frezzatto Santos.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f.71-77.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia Elétrica - Teses. 2. Teoria do Controle – Teses.
I. Santos, Luciano Antonio Frezzatto. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 621.3(043)

"Projeto de Controladores Tolerantes A Falhas Baseados Em Observador: Uma Abordagem Em Faixas de Frequência Finita"

CAIO MARIANO DA SILVA ANASTACIO

Dissertação de Mestrado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Mestre em Engenharia Elétrica.

Aprovada em 30 de julho de 2021.

Por:



**Prof. Dr. Luciano Antonio Frezzatto Santos
DELT (UFMG) - Orientador**



**Prof. Dr. Leonardo Antônio Borges Tôres
DELT (UFMG)**



**Prof. Dr. Víctor Costa da Silva Campos
(UFMG)**

Dedico esta dissertação a minha família.

Agradecimentos

Agradeço a oportunidade de conhecer e conviver com meus queridos amigos Felipe Rigotti, Fernanda Rodrigues, Alesi Augusto, Priscila Fernanda, Daniel Almeida e Ludmila Helena. Compartilhamos conversas, experiências, alegrias, incertezas e me desenvolveram que são excelentes profissionais além de serem pessoas incríveis.

Em seguida, agradeço aos meus colegas e professores dos laboratórios D!FCOM e MACSIN.

Com grande entusiasmo agradeço ao professor Luciano Frezzatto pela orientação e pelo compartilhamento de conhecimento. Das várias características que devo ressaltar destaco o seu comprometimento em ser um pesquisador formidável e um educador grandioso.

Por fim, agradeço o apoio financeiro do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) - Processo: 159322/2019-7.

“– Sinto que lhe devo mais uma explicação, Harry – disse Dumbledore hesitante. – Você talvez tenha se perguntado por que nunca o escolhi para monitor? Devo confessar... que preferi... você já tinha responsabilidade suficiente. ”
(Harry Potter e a Ordem da Fênix)

Resumo

Este trabalho propõe preencher uma lacuna existente na literatura com a introdução de uma metodologia para projeto de controle tolerante a falhas com base em observador em faixas de frequência predefinidas com desempenho garantido \mathcal{H}_∞ para sistemas contínuos chaveados. A abordagem proposta faz uso dos estados e da falha estimada advindos do observador sintetizado para compor uma lei de controle que assegura eficácia na rejeição de distúrbios externos e na compensação dos efeitos das falhas em domínios de baixa, média e alta frequências. Ademais, para garantir a estabilidade assintótica do sistema chaveado, o sinal de chaveamento respeita a condição de tempo médio de permanência dependente de modo (MDADT), assegurando que o sistema permaneça um tempo mínimo em cada modo e evitando instabilidades referentes ao chaveamento arbitrário. O problema é estruturado de tal forma que, em malha fechada, o observador e o controlador podem ser sintetizados de forma separada. Para tanto, inicialmente, projeta-se o observador proposto para obter as estimativas dos estados e da falha em faixas de frequência específicas a partir do lema de Kalman-Yakubovich-Popov generalizado. Posteriormente, o controlador tolerante a falhas com custo garantido \mathcal{H}_∞ é projetado, assegurando estabilidade em malha fechada para sistemas chaveados sob restrições MDADT. Em ambos os projetos, as condições são descritas na forma de desigualdades matriciais lineares. Exemplos ilustrativos retirados da literatura são utilizados para demonstrar a eficácia e a aplicabilidade da abordagem proposta.

Palavras-chaves: Sistemas chaveados; Controle baseado em observador; Controle tolerante a falhas; Estimação de falhas; Frequência finita.

Abstract

This work proposes to fill an existing gap in the literature by introducing a methodology to fault-tolerant control based on observer design in predefined frequency ranges with guaranteed \mathcal{H}_∞ performance for continuous-time switched systems. The proposed approach makes use of the states and the estimation fault from the synthesized observer to compose a control law, which ensures effectiveness in rejecting external disturbances and compensating for the effects of faults in low, middle and high frequency domains. Furthermore, to ensure the asymptotic stability of the switched system, the switching signal respects the mode-dependent average dwell time (MDADT) condition, ensuring that the system remains a minimum time in each mode and avoiding instabilities concerning arbitrary switching. The problem is structured in such a way that, in closed-loop, the observer and the controller can be synthesized separately. For this purpose, initially, the proposed observer is designed to obtain the estimates of states and faults in specific frequency ranges from the generalized Kalman-Yakubovich-Popov lemma. Subsequently, the fault-tolerant controller with \mathcal{H}_∞ guaranteed cost is designed, ensuring closed-loop stability for switched systems under MDADT constraints. In both designs, the conditions are described in linear matrix inequalities form. Illustrative examples taken from the literature are used to demonstrate the effectiveness and applicability of the proposed approach.

Keywords: Switched systems; Observer-based control; Fault tolerant control; Fault estimation; Finite frequency domain.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 3.1.	40
Figura 2 – Falha $f(t)$ e sua estimacão $\hat{f}(t)$ para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU <i>et al.</i> , 2019) considerando o sistema do Exemplo 3.1.	41
Figura 3 – Erro de estimacão da falha para o sistema do Exemplo 3.1 para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU <i>et al.</i> , 2019).	41
Figura 4 – Erro de estimacão médio da falha para o sistema do Exemplo 3.1 para o observador projetado por meio do método reportado no Teorema 3.1.	42
Figura 5 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 3.2.	43
Figura 6 – Falha $f(t)$ e sua estimacão $\hat{f}(t)$ para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU <i>et al.</i> , 2019) considerando o sistema do Exemplo 3.2.	44
Figura 7 – Erro de estimacão da falha para o sistema do Exemplo 3.2 para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU <i>et al.</i> , 2019).	44
Figura 8 – Erro de estimacão médio da falha para o sistema do Exemplo 3.2 para o observador projetado por meio do método reportado no Teorema 3.1.	45
Figura 9 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 3.3.	46
Figura 10 – Falha $f(t)$ e sua estimacão $\hat{f}(t)$ para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU <i>et al.</i> , 2019) considerando o sistema do Exemplo 3.3.	47
Figura 11 – Erro de estimacão da falha para o sistema do Exemplo 3.3 para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU <i>et al.</i> , 2019).	47
Figura 12 – Erro de estimacão médio da falha para o sistema do Exemplo 3.3 para o observador projetado por meio do método reportado no Teorema 3.1.	48
Figura 13 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ utilizado para o sistema do Exemplo 4.1.	56
Figura 14 – Evoluo dos estados $x_1(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_1(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.1 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	57
Figura 15 – Evoluo dos estados $x_2(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_2(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.1 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	57

Figura 16 – Erro de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle $u(t)$ e saída controlada $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.1 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	58
Figura 17 – Evolução do erro de estimação médio dos estados para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.1 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	59
Figura 18 – Erro médio de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle média $u(t)$ e saída controlada média $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.1 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	59
Figura 19 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 4.2.	61
Figura 20 – Evolução dos estados $x_1(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_1(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.2 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	61
Figura 21 – Evolução dos estados $x_2(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_2(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.2 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	62
Figura 22 – Erro de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle $u(t)$ e saída controlada $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.2 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	62
Figura 23 – Evolução do erro de estimação médio dos estados para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.2 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	63
Figura 24 – Erro médio de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle média $u(t)$ e saída controlada média $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.2 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	63
Figura 25 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 4.3.	65
Figura 26 – Evolução dos estados $x_1(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_1(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.3 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	65
Figura 27 – Evolução dos estados $x_2(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_2(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.3 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	66
Figura 28 – Erro de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle $u(t)$ e saída controlada $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.3 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	66
Figura 29 – Evolução do erro de estimação médio dos estados para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.3 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.	67

Figura 30 – Erro médio de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle média $u(t)$ e saída controlada média $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.3 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador. 67

Lista de tabelas

Tabela 1 – Elementos $\mathcal{U}_{(1,1)}$, $\mathcal{U}_{(2,1)}$, e $\mathcal{U}_{(2,2)}$	36
--------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

Lista de símbolos

ADT	<i>Average Dwell Time</i> (Tempo Médio de Permanência)
FD	<i>Fault Detection</i> (Detecção de falha)
FE	<i>Fault Estimation</i> (Estimação de falha)
FTC	<i>Fault-Tolerant Control</i> (Controle Tolerante à Falha)
gKYP	<i>generalized Kalman-Yakubovich-Popov</i> (Kalman-Yakubovich-Popov generalizado)
LMI	<i>Linear Matrix Inequality</i> (Desigualdade Matricial Linear)
MDADT	<i>Mode-Dependent Average Dwell Time</i> (Tempo Médio de Permanência Dependente de Modo)
UIO	<i>Unknown Input Observer</i> (Observador de Entradas Desconhecidas)

Lista de símbolos

\mathbb{R}	conjunto dos números reais
\mathbb{R}^n	espaço vetorial real de dimensão n
$>$	maior que
$<$	menor que
\leq	menor ou igual
\geq	maior ou igual
\in	pertence a
\forall	para todo
$A > 0$	matriz A é definida positiva
$A < 0$	matriz A é definida negativa
$A \geq 0$	matriz A é semidefinida positiva
$A \leq 0$	matriz A é semidefinida negativa
$(\cdot)^T$	transposta
$(\cdot)^{-1}$	inversa
$(\cdot)^{-T}$	inversa transposta
$(\cdot)^\dagger$	pseudo inversa
$\text{posto}(\cdot)$	posto da matriz
$(\cdot)^*$	conjugado e transposto da matriz
$\text{He}\{A\}$	$A + A^T$

Sumário

Lista de ilustrações	10
Lista de tabelas	13
Lista de abreviaturas e siglas	14
Lista de símbolos	15
Sumário	16
1 Introdução	17
1.1 Objetivos	20
1.2 Organização do Texto	21
2 Conceitos e Fundamentos Matemáticos	22
2.1 Sistemas Chaveados	22
2.1.1 Regras de comutação	23
2.2 Estabilidade	23
2.2.1 Função de Lyapunov	24
2.3 Lei de chaveamento com restrição temporal	25
2.3.1 Tempo médio de permanência	25
2.4 Lema generalizado de Kalman-Yakubovich-Popov	28
2.5 Lema de Finsler	30
2.6 Cômputo do ganho \mathcal{L}_2	30
3 Projeto de Observador para Estimação de Falhas	32
3.1 Definição do problema	32
3.2 Condições para síntese de UIOs em frequência finita	36
3.3 Exemplos	39
3.4 Conclusão	48
4 Projeto de Controlador Tolerante a Falhas	49
4.1 Definição do problema	50
4.2 Síntese de controladores tolerantes a falhas	52
4.3 Exemplos	55
4.4 Conclusão	68
5 Conclusão	69
5.1 Trabalhos Futuros	69
5.2 Trabalhos Desenvolvidos	70
Referências	71

1 Introdução

Sistemas chaveados pertencem a uma classe especial de sistemas híbridos compostos por um número finito de subsistemas (também denominados de modos), sendo governados por regras de chaveamentos. Tais regras de comutação são caracterizadas em formas distintas, como por exemplo, podem ser inerentes ao sistema (isto é, atendem a uma especificidade atrelada à dinâmica do sistema) em que a transição dos modos é alterada conforme o comportamento dos estados; ou podem ser arbitradas por um sinal externo para atender alguma restrição desejada (LIBERZON; MORSE, 1999; LIN; ANTSAKLIS, 2009; ZHONG; YANG, 2015; DU *et al.*, 2019). Esses sistemas possuem uma extensa aplicação prática e mostram-se presentes em diversos processos como sistemas de potência, indústria automotiva e aeroespacial, processos químicos, robótica, dentre outros (BLANKE *et al.*, 2006; HAN *et al.*, 2019; ZHANG *et al.*, 2017). Por esses motivos, os estudos de sistemas chaveados continuam em desenvolvimento e atraem novos esforços para lidar com distintos problemas da área.

Entre os desafios que permeiam a classe de sistemas chaveados estão os problemas relacionados à estabilidade. Além do aparecimento de influências externas indesejáveis, como a ocorrência de distúrbios, o sinal de chaveamento afeta a dinâmica de todo o sistema, sendo que pode acarretar na instabilidade do sistema, mesmo que todos os modos sejam estáveis (ZHAO *et al.*, 2012; CHENG *et al.*, 2005). Diante desse aspecto atrelado à especificidade dos sistemas comutativos, trabalhos importantes disponíveis na literatura foram desenvolvidos para tratar da estabilização e estabilidade desses sistemas. O método abordado por Hespanha e Morse (1999), denominado de tempo médio de permanência (do inglês, *Average dwell-time* — ADT), é uma técnica amplamente difundida para garantir estabilidade de sistemas chaveados. A premissa que essa abordagem traz consigo diz respeito à permanência por um tempo grande o suficiente em cada modo do sistema, de maneira a garantir a estabilidade do sistema como um todo (ZHAO *et al.*, 2012; HESPANHA; MORSE, 1999; BENZAOUIA; EDDOUKALI, 2018). Um aspecto deficitário da metodologia ADT é o conservadorismo motivado pela adoção de uma constante temporal que atenda todos os subsistemas. Para contornar tal contratempo, uma metodologia mais geral intitulada tempo médio de permanência dependente de modo (do inglês, *Mode-Dependent Average Dwell Time* — MDADT) foi proposta por Zhao *et al.* (2012). Nessa metodologia cada modo detém o seu próprio tempo médio de permanência, tornando, assim, a condição mais relaxada (ZHAO *et al.*, 2012; ZHANG *et al.*, 2014).

Além disso, com o avanço expressivo do setor tecnológico, exige-se, cada vez mais, a confiabilidade de sistemas (BLANKE *et al.*, 2006; HAN *et al.*, 2019; ZHANG *et al.*, 2017); pois, na prática, todos os sistemas são suscetíveis a falhas (HAN *et al.*, 2019).

Nesse cenário, instrumentos físicos que mantenham informações sobre a dinâmica do sistema tornam-se imprescindíveis para se precaver de possíveis falhas que possam influenciar no funcionamento adequado do sistema. O aparecimento dessa anomalia causa efeitos negativos no desempenho do sistema, como: desgaste dos equipamentos; desempenho aquém do esperado que resulta, por exemplo, em desperdício de tempo e de matéria-prima em uma linha de produção; danos em dispositivos de segurança e em situações mais severas, a negligência da falha pode acarretar no colapso do sistema (ISERMANN, 2005; ISERMANN, 2011; CHEN; PATTON, 2012).

A natureza da falha pode ser classificada de duas formas: incipiente e abrupta. Denomina-se como falha incipiente o processo, inevitável, de envelhecimento gradativo dos componentes que são empregados no sistema e, desta forma, este perfil de falha atua de maneira passiva e progressiva. Por outro lado, a falha abrupta decorre de alterações instantâneas que infligem impactos sobre o monitoramento dos parâmetros do sistema (BLANKE *et al.*, 2006).

Estudos na área de confiabilidade, desempenho e robustez promovem um caminho a ser seguido para o desenvolvimento de abordagens que possibilitem projetos de controle eficientes para compensar os efeitos da falha. Em paralelo, tais abordagens podem também garantir uma resposta adequada e uma recuperação do processo em tempo mínimo, atenuando efeitos adversos e cessando, assim, a propagação de falhas (ISERMANN, 2005; ISERMANN, 2011; CHEN; PATTON, 2012).

Portanto, traçar projetos de controle que garantam estabilidade e desempenho satisfatórios sob o efeito de falhas e, além disso, que mantenham as variáveis controladas do sistema em valores aceitáveis dentro de uma região segura de operação, torna-se um desafio não trivial, mas necessário. Diversas pesquisas têm se concentrado no desenvolvimento de métodos que garantam confiabilidade para o sistema e, ao mesmo tempo, promovam o diagnóstico de falhas. A ramificação que engloba tais estudos abrange a detecção de falhas (do inglês, *Fault Detection* — FD), a estimação de falhas (do inglês, *Fault Estimation* — FE) e o controle tolerante a falhas (do inglês, *Fault-Tolerant Control* — FTC) (BLANKE *et al.*, 2006; CHEN; PATTON, 2012; LADEL *et al.*, 2020).

De forma ampla, os métodos que constituem FD e FE são a primeira etapa para o diagnóstico de falhas (QIU *et al.*, 2012). A abordagem de FD, denota informações limitadas sobre a ocorrência da falha, pois os parâmetros relativos à dimensão, ao tipo e à amplitude da falha são negligenciados (BLANKE *et al.*, 2006; CHEN; PATTON, 2012; LADEL *et al.*, 2020). Ademais, nessa abordagem a presença e o tempo da sua ocorrência é feita a partir da análise residual entre o parâmetro medido e o seu valor estimado, e caso haja um comportamento distinto do que se espera o operador é alertado (ISERMANN, 2005; ISERMANN, 2011). Por sua vez, no método de estimação de falhas interessa os passos seguintes, em que se necessita de informações sobre o instante de ocorrência e a magnitude da falha (CHEN; PATTON, 2012; ISERMANN, 2011; DU *et al.*, 2019).

Usualmente, os métodos que contemplam FE e FTC são mais eficazes e promovem um conhecimento maior sobre a evolução das falhas e seus respectivos efeitos. Adicionalmente, tais técnicas também garantem estabilidade, pois a ação da falha e os efeitos de perturbação sobre o sistema são compensados (LADEL *et al.*, 2020; XIAO-ZHENG; GUANG-HONG, 2009).

Além dos efeitos relacionados às falhas, a dinâmica do sistema está sujeita também a entradas desconhecidas (como sinais exógenos, distúrbios, erros referentes à modelagem, dentre outros). Tais efeitos impactam o desempenho do sistema e, por esse motivo, é necessário criar mecanismos que rejeitem ou minimizem esses ruídos externos. Uma das primeiras metodologias para lidar tanto com falhas quanto com entradas desconhecidas foi apresentado por Wünnenberg e Frank (1987), em que consideraram sistemas sujeitos a falhas nos sensores e atuadores como a ocorrência de entradas exógenas. Desde então, métodos que utilizam observadores de entradas desconhecidas (do inglês, *Unknown Input Observer* — UIO) foram amplamente explorados e, atualmente, tais métodos são os mais difundidos para lidar com esses problemas (CHEN *et al.*, 1996; CHEN; PATTON, 2012; DU *et al.*, 2019). Ademais, ressalta-se a possibilidade de se projetar um controlador baseado em observador utilizando os estados estimados (STOORVOGEL *et al.*, 1994; BERGHUIS; NIJMEIJER, 1993). Os controladores baseados em observadores são empregados, geralmente, quando os estados não são medidos diretamente, ou quando se almeja uma quantidade limitada de sensores, por exemplo ao se buscar redução de custo (OUDGHIRI *et al.*, 2008; LADEL *et al.*, 2020).

Comumente, as metodologias para projeto de controladores e observadores tendem a formular as condições de síntese como problemas convexos de otimização, os quais podem ser descritos em termos de desigualdades matriciais lineares (do inglês, *Linear Matrix Inequalities* — LMIs) e podem ser solucionados por meio de programação semidefinida. A teoria de estabilidade de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992) é a principal ferramenta utilizada para descrever os problemas da área de controle em termos de LMIs, por exemplo, o processo de síntese de controladores (BOYD *et al.*, 1993; GHAOUI; NICULESCU, 2000; SCHERER, 2006), observadores (MONDAL *et al.*, 2010; CHEN; SAIF, 2006; SAOUDI *et al.*, 2012) e filtros (ZHONG *et al.*, 2003; PALHARES; PERES, 2000; ZHONG *et al.*, 2001).

Resultados promissores com abordagens de diagnósticos de falhas e estabilidade em sistemas comutativos estão disponíveis na literatura como, por exemplo, FE com custo garantido \mathcal{H}_∞ utilizando um UIO para rejeitar entradas desconhecidas em sistemas chaveados (DU *et al.*, 2019), FE baseado em observador proporcional integral para sistemas chaveados com atraso (TELBISSI; BENZAOUIA, 2019), FD/FE com custo garantido \mathcal{H}_∞ baseado em observador para conversores CC-CC (LI *et al.*, 2019), FTC em sistemas comutativos lineares discretos com falhas no atuador (RODRIGUES *et al.*, 2006), FTC baseado em observador para sistemas contínuos chaveados com falhas no sensor (LADEL

et al., 2020). Note que todas as metodologias apontadas não fazem distinção do perfil de falha que impacta o sistema, em outras palavras, a falha pode ocorrer em toda faixa de frequência. Esse aspecto denota, em muitos casos, uma metodologia mais conservadora, visto que não atende às especificidades que cada sistema possui. Nesse sentido, há uma demanda no desenvolvimento de metodologias que lidem com falhas em faixas de frequência pré-especificadas para sistemas chaveados, as quais têm sido exploradas em alguns trabalhos recentes (DU *et al.*, 2018; ZHONG; YANG, 2015; DU *et al.*, 2017).

Para lidar com o problema de falhas em faixas de frequência pré-especificadas (também denominada de frequência finita), emprega-se o lema de Kalman-Yakubovich-Popov generalizado (gKYP) (IWASAKI; HARA, 2005). Esse lema é uma ferramenta poderosa por fazer relação entre desigualdades no domínio da frequência com desigualdades matriciais lineares, o que torna possível sua resolução a partir do uso de algoritmos focados em problemas de otimização. Com base no lema gKYP, trabalhos recentes têm proposto métodos para lidar com falhas em frequência finita que afetam sistemas chaveados, tais como, projeto de observadores para FD em frequência finita para sistemas comutados lineares (CUI *et al.*, 2009; YANG *et al.*, 2011b; CHEN; CAO, 2013), para sistemas fuzzy chaveados (HAN *et al.*, 2019; YANG *et al.*, 2011a), para sistemas chaveados com retardo (ZHONG; YANG, 2016), e, também, FTC para sistemas discretos chaveados em frequência finita (ZHU *et al.*, 2020).

1.1 Objetivos

Até o presente momento, ao que se sabe, o problema de projeto de FTC baseado em observador em frequência finita para sistemas contínuos chaveados ainda não foi explorado. Motivado por essas considerações, o presente trabalho tem como objetivo principal prover um método para projetar um FTC baseado em observador em faixas de frequência pré-especificadas com desempenho garantido \mathcal{H}_∞ para sistemas chaveados. Assume-se um sinal de chaveamento que atende à condição MDADT é conhecido. Além disso, a partir da estrutura do sistema em malha fechada resultante, é possível projetar os ganhos do observador e do controlador separadamente a partir das condições dadas na forma de LMIs.

A etapa inicial consiste em obter uma condição para projetar observadores de entradas desconhecidas em frequência finita com custo garantido \mathcal{H}_∞ e, então, é proposta uma outra condição para sintetizar o controlador tolerante a falhas com realimentação de estados sob MDADT. Ressalta-se que o presente trabalho utiliza as estimativas dos estados e a estimativa da falha fornecidas pelo observador para realizar a etapa de controle do sistema.

1.2 Organização do Texto

A estrutura desta dissertação é organizada da seguinte forma:

No Capítulo 2 são apresentados conceitos preliminares sobre sistemas chaveados e alguns resultados matemáticos necessários para o entendimento do restante do texto.

O Capítulo 3 aborda as condições de síntese, por meio de LMIs, do observador de entradas desconhecidas em faixas de frequência finita. Exemplos numéricos são apresentados para avaliar o desempenho da metodologia proposta sob a influência de falhas em diferentes faixas frequenciais.

Por sua vez, o Capítulo 4 apresenta o projeto de controlador tolerante a falhas baseado nos estados e na falha estimados pelo observador proposto. Exemplos ilustrativos são utilizados para validar a metodologia proposta neste trabalho.

Finalmente, o Capítulo 5 apresenta as conclusões finais do trabalho e delinea propostas a serem trabalhadas em pesquisas futuras.

2 Conceitos e Fundamentos Matemáticos

Neste capítulo serão abordados conceitos que visam fornecer um aporte teórico preliminar sobre sistemas comutativos. O objetivo, então, será apresentar ao leitor algumas características, propriedades e ferramentas fundamentais, disponíveis na literatura, para o entendimento desta dissertação.

Conceitos como teoria de estabilidade de Lyapunov, leis de chaveamento, diagnóstico de falhas, frequência finita e quantificação de desempenho a partir do cômputo da norma \mathcal{L}_2 são alguns tópicos que serão explorados.

2.1 Sistemas Chaveados

Sistemas chaveados são sistemas dinâmicos compostos por um número limitado de subsistemas e regidos por uma regra lógica de comutação entre os modos (LIBERZON; MORSE, 1999; LIN; ANTSAKLIS, 2009; ZHONG; YANG, 2015). O seu comportamento dinâmico pode ser facilmente observado em diversos meios, como por exemplo, em processos químicos (MHASKAR *et al.*, 2005), em sistemas de controle de tráfego urbano (PAPAGEORGIOU *et al.*, 2003), em sistemas de potência no qual estão presentes inversores e conversores (SHITESSEL *et al.*, 2002; SHIEH; SHYU, 1999), o que motiva o crescimento de pesquisas na área.

A representação matemática de um sistema chaveado pode ser retratada pela seguinte equação diferencial

$$\dot{x}(t) = f_{\sigma(t)}(x(t), u(t)) \quad (2.1)$$

sendo $\{f_i : i \in S\}$ caracterizado por uma família de funções suficientemente regulares de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, em que $\sigma(t)$ é uma função constante por partes denominada de sinal de chaveamento

$$\sigma_i(t) : [0, \infty) \rightarrow \{0, 1\}, \quad \sum_{i=1}^s \sigma_i(t) = 1, \quad (2.2)$$

a qual especifica qual modo é ativado durante o chaveamento; e $S = \{1, 2, 3, \dots, s\}$ é um conjunto de índices finito, sendo s o número de subsistemas compreendidos pelo sistema. Uma função constante por partes possui algumas características, como um número limitado de descontinuidades em qualquer intervalo de tempo, sendo sempre constante entre descontinuidades (HESPANHA; MORSE, 1999; MAZANTI, 2011).

Quando todos os subsistemas de um sistema chaveado são lineares, pode-se expressar sua dinâmica como

$$\dot{x}(t) = A_{\sigma}x(t) \quad (2.3)$$

com $A_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $i \in S$.

2.1.1 Regras de comutação

Quanto à comutação de sistemas chaveados, essa pode ser classificada em: comutação dependente do tempo e comutação dependente de estados, segundo tratado em (LIBERZON, 2003). Para o caso de comutação dependente de tempo, o mecanismo de gatilho se dá após decorrido um certo intervalo de tempo. Nessa comutação com dependência temporal utiliza-se o parâmetro $\sigma(t)$ para enfatizar o sinal de chaveamento. Por outro lado, o chaveamento dependente dos estados é rígido pelo comportamento dos estados do sistema, sendo o espaço de estados dividido em regiões que operam no acionamento dos modos que constituem o sistema chaveado. Os limites presentes nessas regiões denominam-se *superfícies de chaveamento* (LIBERZON; MORSE, 1999; LIBERZON, 2003).

Há também a relação entre a lei de comutação controlada com a lei de comutação autônoma. A comutação controlada é adotada para atender a algum comportamento de projeto desejado. Nesse caso, pode ser tanto dependente dos estados quanto dependente do tempo. Na comutação autônoma, a regra que representa o sinal de chaveamento é desconhecida ou foi desprezada durante o processo de aquisição do modelo do sistema. Ressalta-se que nesse grupo estão inseridos os sistemas com comutação dependente dos estados em que a localização das superfícies de comutação é predefinida, ou sistemas com comutação dependentes do tempo nos quais a regra que rege a definição dos modos do sistema é desconhecida (LIBERZON; MORSE, 1999; LIBERZON, 2003).

Para exemplificar os tipos de comutação considere, por exemplo, um sistema de transmissão veicular. Assumindo uma transmissão manual, a comutação representa uma ação controlada e dependente dos estados. Por outro lado, em veículos mais modernos com transmissão automática, o sistema chaveado possui uma comutação autônoma e dependente dos estados.

Ressalta-se, também, que as ações distintas referentes à comutação podem coexistir em sistemas chaveados. Desta forma, não é uma tarefa simples distinguir as classificações apresentadas anteriormente (LIBERZON; MORSE, 1999; LIBERZON, 2003; SCHARLAU, 2013).

2.2 Estabilidade

A estabilidade em sistemas chaveados é um tema que demanda parcimônia, pois não é um assunto trivial para se lidar. O comportamento comutativo pode levar a fenômenos não observados analisando-se separadamente os modos do sistema, o que resulta em aspectos instigantes, como por exemplo, um sistema chaveado que possui todos os modos estáveis pode vir a apresentar um comportamento instável (LIBERZON; MORSE, 1999; LIBERZON, 2003; SCHARLAU, 2013; MAZANTI, 2011).

Além da condição relacionada à especificidade dos sistemas chaveados advinda da lei de chaveamento, outros fatores também podem impactar negativamente sobre a dinâmica desses sistemas. O comportamento Zenão induz uma lógica de chaveamento na qual ocorre um infinito número de descontinuidades em um curto espaço de tempo limitado (HEYMANN *et al.*, 2005; MAZANTI, 2011). Além de acarretar, em alguns casos na descaracterização funcional do sistema, a implementação de projetos que contam com dispositivos físicos pode ser impactada, pois tal efeito pode resultar em desgastes excessivos em diversos sistemas, culminando na danificação dos componentes. Embora queira se evitar esse comportamento, ele pode ser encontrado em aplicações reais (SCHAFT; SCHUMACHER, 2000). Alguns resultados disponíveis na literatura abordam esse efeito, como demonstrado em (REN *et al.*, 2020; GEROMEL; COLANERI, 2006; LIAN; LI, 2021). Por esse motivo, um aspecto fundamental no controle de sistemas chaveados é garantir que haja uma limitação da frequência de chaveamento. Para se obter tal limitação, pode-se empregar uma condição que estabeleça um tempo mínimo de residência em cada subsistema, conforme apresentado nas metodologias ADT (HESPANHA; MORSE, 1999) e MDADT (ZHAO *et al.*, 2012).

Antes de apresentar as condições existentes de comutação sob restrições temporais, é introduzida uma forma de análise de estabilidade dada pela Teoria de Estabilidade de Lyapunov (LYAPUNOV, 1992).

2.2.1 Função de Lyapunov

Em teoria de controle, o estudo de estabilidade de sistemas recorre, geralmente, à Teoria de Estabilidade de Lyapunov, na qual busca-se por uma função candidata que atenda determinadas restrições de desigualdade (LYAPUNOV, 1992). A ideia central é tentar encontrar uma função candidata $V(x(t))$ que seja continuamente diferenciável e definida positiva, e cuja derivada seja definida negativa para quaisquer trajetórias $x(t)$. Caso seja possível determinar essa função, então a estabilidade assintótica do sistema é garantida (LIBERZON, 2003).

Para sistemas contínuos chaveados, uma primeira aproximação, em geral, é arbitrar uma função candidata de Lyapunov quadrática na forma $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, em que P é uma matriz simétrica, definida positiva e constante. Desse modo, se a condição

$$\dot{V}(x(t)) = x(t)^T (PA_i + A_i^T P)x(t) < 0, \quad (2.4)$$

for satisfeita para todo $i \in S$, então o sistema chaveado é assintoticamente estável.

Uma outra classe de funções candidatas existentes em sistemas comutativos e que tendem a fornecer resultados menos conservadores é a classe denominada de funções de Lyapunov quadráticas chaveadas, $V(t, x(t)) = x(t)^T P_{\sigma(t)} x(t)$ (GEROMEL; COLANERI, 2006). Note que, nessa classe, as funções de Lyapunov dependem também do sinal de

chaveamento. Analogamente, ao desenvolvimento feito em (2.4), se $V(t, x(t)) > 0$ e a desigualdade

$$P_i A_i + A_i^T P_i < 0, \quad (2.5)$$

forem satisfeitas para todo $i \in S$ então, a estabilidade do sistema chaveado é garantida.

Uma ressalva importante a se fazer quanto a expressão acima diz respeito ao sinal de chaveamento $\sigma(t)$ empregado na condição. Faz-se necessário e complementar que a lei de chaveamento seja escolhida de tal forma que o tempo de chaveamento entre os modos seja suficientemente grande para evitar ocorrências adversas que podem causar instabilidade. Por essa razão é adotado nesta dissertação o conceito de tempo médio de permanência como abordado na próxima seção.

2.3 Lei de chaveamento com restrição temporal

Conforme abordado em (DECARLO *et al.*, 2000), um sistema chaveado com todos os modos estáveis nem sempre é suficiente para garantir estabilidade durante a transição dos modos. Em suma, mesmo que todos os subsistemas sejam assintoticamente estáveis, ao adotar uma lei de chaveamento qualquer, não há garantias que as trajetórias resultantes dos estados sejam estáveis. Aliado a isso, outros fenômenos anômalos como, por exemplo, afundamentos, sobressinais ou falhas podem influenciar negativamente no desempenho do sistema e esses efeitos impertinentes podem acumular ao longo do tempo e causar instabilidade do sistema. Para evitar que o chaveamento ocasione instabilidades quando todos os modos são estáveis, uma das possibilidades disponíveis é adotar um tempo médio mínimo para que o sistema permaneça em um modo, com intuito de evitar a transição durante essas anomalias e garantir estabilidade ao sistema.

Nas últimas décadas, o conceito de tempo médio de permanência demonstrase em evolução nos trabalhos tratados na literatura, pois apresenta eficácia consolidada para tratar da análise de estabilidade em sistemas chaveados (YU *et al.*, 2019). Dentre as abordagens difundidas destacam-se os métodos ADT e MDADT. O que difere a metodologia ADT em relação à MDADT é, basicamente, o conservadorismo proveniente da adoção de uma constante temporal média válida para todos os modos e para cada modo, respectivamente. As condições de cada abordagem podem ser conferidas nas próximas subseções.

2.3.1 Tempo médio de permanência

A utilização de metodologias baseadas em um tempo médio de permanência (ADT) permite introduzir uma constante temporal, de modo que os intervalos entre chaveamentos não sejam menores do que a constante adotada. Há diversas abordagens

eficazes que utilizam o tempo médio de permanência tanto para sistemas chaveados lineares (ZHAO *et al.*, 2013; ZHANG; GAO, 2010; HESPANHA; MORSE, 1999), quanto para sistemas não lineares (LIU *et al.*, 2017; ZHENG *et al.*, 2020; ZHANG *et al.*, 2020).

Os resultados a seguir definem o que é o tempo médio de permanência nos modos do sistema e estabelecem uma forma de se determinar esse tempo por meio da teoria de Lyapunov.

Definição 2.1 ((HESPANHA; MORSE, 1999)). *Para um sinal de chaveamento $\sigma(t)$ e um intervalo $[t_1, t_2]$, $t_2 > t_1 > 0$ dados, diz-se que $\tau_m \in \mathbb{R}$ é o tempo médio de permanência em cada modo do sistema se o número de chaveamentos entre os instantes de tempo t_1 e t_2 $U_{\sigma_i}[t_1, t_2]$ satisfizer a seguinte relação*

$$U_{\sigma_i}[t_1, t_2] \leq U_0 + \frac{t_2 - t_1}{\tau_m}$$

nesto caso, a constante $U_0 \geq 0$ é denominada limite de vibração.

Lema 2.1 ((HESPANHA; MORSE, 1999)). *Seja o sistema contínuo chaveado autônomo expresso por (2.3), dadas constantes positivas α e μ e funções $\underline{\beta}_0$ e $\bar{\beta}_0 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ estritamente crescentes, não limitadas, contínuas e com $\underline{\beta}_0(0) = \bar{\beta}_0(0) = 0$; se existirem funcionais $V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t)$, para todo $i = 1, \dots, s$, tais que*

$$\frac{\partial V_i(x(t))}{\partial x} A(\sigma)x(t) \leq -\alpha V_i(x(t)), \quad (2.6)$$

$$\underline{\beta}_0(\|x(t)\|) \leq V_i(x(t)) \leq \bar{\beta}_0(\|x(t)\|), \quad (2.7)$$

$$V_i(x(t)) \leq \mu V_j(x(t)), \quad (2.8)$$

sejam satisfeitas para todo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $i, j = 1, \dots, s$, então existe uma constante $\bar{\tau}_m$ dada por

$$\bar{\tau}_m > \tau_m = \frac{\ln \mu}{\alpha}, \quad (2.9)$$

que garante a estabilidade assintótica do sistema.

Note que a constante temporal τ_m é única para todos os modos do sistema. Assim, caso um modo esteja no limite da estabilidade, possivelmente o valor de tal constante será pequeno e ditado, sobretudo, por esse modo. Apesar de se tratar de um tempo *mínimo* de permanência em cada modo, a imposição de um valor único para todo o sistema pode trazer resultados conservadores.

Uma extensão da metodologia ADT foi proposta no trabalho de Zhao *et al.* (2012), denominada *Mode-Dependent Average Dwell-time* (MDADT). Em suma, o método proposto apresenta-se como uma condição menos restritiva, devido à possibilidade de adoção de uma constante média temporal para cada um dos modos do sistema. Ressalta-se que, assim como na abordagem ADT, a MDADT também é extensiva a sistemas chaveados não lineares (LI *et al.*, 2017; NIU *et al.*, 2020; ZHAO *et al.*, 2012).

A lei de comutação com restrição temporal MDADT impõe a seleção de tempos de permanência mínimos distintos para cada modo do sistema. Isso possibilita, por exemplo, que o sistema permaneça mais tempo em modos “mais estáveis”, ou seja, modos cujos autovalores estejam mais afastados da região limiar de estabilidade. Os resultados a seguir estendem a definição de ADT e provêm um método para determinar o tempo médio de permanência de cada modo.

Definição 2.2 ((ZHAO *et al.*, 2012)). *Para um sinal de chaveamento $\sigma(t)$ e um intervalo $[t_1, t_2]$, com $t_2 > t_1 > 0$ dados, diz-se que $\tau_{ai} \in \mathbb{R}$ é o tempo médio de permanência dependente de modo (MDADT) em cada modo do sistema, se o número de chaveamentos entre os instantes de tempo t_1 e t_2 $U_{\sigma_i}[t_1, t_2]$ satisfizerem a seguinte relação*

$$U_{\sigma_i}(t_1, t_2) \leq U_{0i} + \frac{T_i(t_2, t_1)}{\tau_{ai}}, \quad \forall i = 1, \dots, S.$$

Neste caso, $T_i(t_2, t_1)$ é o tempo total de permanência no subsistema i , durante o intervalo de tempo t_1 a t_2 , e $U_{0i} \geq 0$ é denominado de limite de vibração dependente de modo.

Definição 2.3 ((LIBERZON, 2005)). *O sistema (2.3) é uniformemente assintoticamente estável se existir uma constante $\delta > 0$ e uma função β de classe \mathcal{KL} tal que para todo sinal de chaveamento $\sigma(t)$ as soluções de (2.3) com $|x(0)| \leq \delta$ satisfazer a desigualdade*

$$|x(t)| \leq \beta(|x(0)|, t) \quad \forall t \geq 0. \quad (2.10)$$

Se a função β assumir a forma $\beta(r, s) = \varrho e^{-\varrho s}$ para algum ϱ , tem-se que a desigualdade acima assume a seguinte forma

$$|x(t)| \leq \varrho e^{-\varrho t} |x(0)| \quad \forall t \geq 0. \quad (2.11)$$

então o sistema (2.3) é denominado de uniformemente exponencialmente estável. Se as desigualdades (2.10) e (2.11) são válidas para qualquer estado inicial $x(0)$ e sinal de chaveamento $\sigma(t)$, então o sistema é dito como globalmente uniformemente assintoticamente estável (do inglês, Globally Uniformly Asymptotically Stable — GUAS) e globalmente uniformemente exponencialmente estável (do inglês, Globally Uniformly Exponential Stable — GUES), respectivamente.

Lema 2.2 ((ZHAO *et al.*, 2012)). *Seja o sistema contínuo chaveado autônomo expresso por (2.3), dados escalares positivos α_i e μ_i e funções $\underline{\beta}_{0i}(\cdot)$ e $\overline{\beta}_{0i}(\cdot) : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ estritamente crescentes, não limitadas, contínuas e com $\underline{\beta}_{0i}(0) = \overline{\beta}_{0i}(0) = 0$; se existirem funcionais $V_i(x(t)) = x(t)^T P_i x(t)$, para todo $i = 1, \dots, s$, tal que*

$$\frac{\partial V_i(x(t))}{\partial x} A(\sigma)x(t) \leq -\alpha_i V_i(x(t)) \quad (2.12)$$

$$\underline{\beta}_{0i}(\|x(t)\|) \leq V_i(x(t)) \leq \overline{\beta}_{0i}(\|x(t)\|) \quad (2.13)$$

$$V_i(x(t)) \leq \mu_i V_j(x(t)) \quad (2.14)$$

sejam satisfeitas para todo $x \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $i \neq j$, então existem $\bar{\tau}_{ai}$ dados por

$$\bar{\tau}_{ai} > \tau_{ai} = \frac{\ln \mu_i}{\alpha_i} \quad (2.15)$$

que garante que o sistema é GUAS para todo sinal de chaveamento que atende a desigualdade associada ao tempo médio de permanência dependente do modo (2.15).

De forma similar ao que foi apresentado nos resultados do método ADT, o parâmetro temporal, τ_{ai} , que determina a permanência de cada modo depende de combinações arbitrárias das constantes μ_i e α_i , que são parâmetros de projeto nas condições a serem apresentadas nos capítulos subsequentes. Ressalta-se que, nesta dissertação, o cômputo do tempo médio de permanência dependente do modo a partir da expressão (2.15) será recorrente para a elaboração da lei de chaveamento utilizada em cada um dos exemplos.

2.4 Lema generalizado de Kalman-Yakubovich-Popov

O lema de Kalman-Yakubovich-Popov é tido como um importante resultado em teoria de controle, permitindo relacionar desigualdades no domínio da frequência (do inglês, *Frequency Domain Inequalities* — FDIs) com desigualdades matriciais lineares e possibilitando analisar e obter melhores resultados numéricos sobre a dinâmica do sistema (RANTZER, 2015). Embora os resultados obtidos sejam aplicáveis a muitos problemas e projetos, sua formulação assume que o domínio de operação abrange todo o espectro de frequências, o que, na prática, pode ser muito conservador (IWASAKI; HARA, 2005).

Ter conhecimento prévio acerca do sistema (dinâmica, faixa de operação, dentre outros) permite a utilização de abordagens mais direcionadas que podem impactar positivamente na resposta do sistema. Com base nesse aspecto de frequência, o lema de Kalman-Yakubovich-Popov foi estendido de modo a atender faixas frequenciais pré-determinadas (baixa, média e alta). Essa extensão é denominada lema generalizado de Kalman-Yakubovich-Popov (gKYP) (IWASAKI; HARA, 2005).

Lema 2.3 ((IWASAKI; HARA, 2005)). *Considere o seguinte sistema*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \mathcal{A}x(t) + \mathcal{B}u(t) \\ y(t) &= \mathcal{C}x(t) + \mathcal{D}u(t) \end{aligned} \quad (2.16)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ e $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ representam os estados e a entrada de controle, respectivamente; \mathcal{A} , \mathcal{B} , \mathcal{C} e \mathcal{D} são matrizes do sistema de dimensões apropriadas.

Sejam matrizes hermitianas Ψ , $\Phi \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $\Theta \in \mathbb{R}^{(n_x+n_u) \times (n_x+n_u)}$ em que $\det(\lambda I - \mathcal{A}) \neq 0$, $\lambda = j\omega$, $\forall \lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi)$, sendo que o conjunto $\Lambda(\Psi, \Phi) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \varkappa(\lambda, \Phi) = 0, \varkappa(\lambda, \Psi) \geq 0\}$ representa uma curva no plano complexo, em que

$$\varkappa(\lambda, \Pi) = [\lambda^* \ 1] \Pi [\lambda^* \ 1]^*$$

na qual Π pode assumir equivalência à Φ ou Ψ , então, as seguintes condições são equivalentes

(i) A FDI

$$\begin{bmatrix} (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} \\ I \end{bmatrix}^* \Theta \begin{bmatrix} (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \mathcal{B} \\ I \end{bmatrix} < 0,$$

é válida $\forall \lambda \in \Lambda(\Phi, \Psi)$.

(ii) Existem matrizes simétricas $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ tais que $\mathcal{Q} > 0$ e

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ I & 0 \end{bmatrix}^* (\Phi \otimes \mathcal{P} + \Psi \otimes \mathcal{Q}) \begin{bmatrix} \mathcal{A} & \mathcal{B} \\ I & 0 \end{bmatrix} + \Theta < 0.$$

Ademais, o resultado da expressão $(\Phi \otimes \mathcal{P} + \Psi \otimes \mathcal{Q})$ é definido para cada faixa de frequência específica:

(a) para baixas frequências $|\omega| \leq \varpi_l$

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{Q} & \mathcal{P} \\ \mathcal{P} & \varpi_l^2 \mathcal{Q} \end{bmatrix}$$

(b) para médias frequências $\varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2$

$$\begin{bmatrix} -\mathcal{Q} & \mathcal{P} + j\varpi_c \mathcal{Q} \\ \mathcal{P} - j\varpi_c \mathcal{Q} & -\varpi_1 \varpi_2 \mathcal{Q} \end{bmatrix}$$

sendo $\varpi_c = (\varpi_1 + \varpi_2)/2$.

(c) para altas frequências $|\omega| \geq \varpi_h$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{Q} & \mathcal{P} \\ \mathcal{P} & -\varpi_h^2 \mathcal{Q} \end{bmatrix}$$

Na prática, as ocorrências de falhas são caracterizadas em domínio de frequência finita (IWASAKI; HARA, 2005). Por exemplo, uma falha incipiente está contida em um domínio de baixa frequência, pois a sua evolução dá-se de forma lenta e gradual (CHEN *et al.*, 1996).

Extensões do lema gKYP para atender diversas classes de sistemas estão presentes na literatura, como por exemplo, em sistemas com parâmetros variantes no tempo (FREZZATTO *et al.*, 2018; CHEN *et al.*, 2015), em sistemas fuzzy (YANG *et al.*, 2011a; HELLANI *et al.*, 2018), em sistemas chaveados (KING; SHORTEN, 2013; DING; DU, 2016), em sistemas descritores (WANG *et al.*, 2021; CAMLIBEL; FRASCA, 2009), dentre outros.

2.5 Lema de Finsler

Esta dissertação faz uso de mais um resultado importante presente na literatura e que é empregado para obter todas as condições deste trabalho.

Lema 2.4 ((DE OLIVEIRA; SKELTON, 2001)). *Considere $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathcal{L} \in \mathbb{S}^{n \times n}$ e $\mathcal{B} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ de tal forma que $\text{posto}(\mathcal{B}) < n$. As seguintes afirmações são equivalentes:*

1. $x^T \mathcal{L} x < 0$, $\forall x \neq 0 : \mathcal{B}x = 0$.
2. $\mathcal{B}^{\perp T} \mathcal{L} \mathcal{B}^{\perp} < 0$ sendo $\mathcal{B} \mathcal{B}^{\perp} = 0$.
3. $\exists \rho \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{L} - \rho \mathcal{B}^T \mathcal{B} < 0$.
4. $\exists \mathcal{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ tal que $\mathcal{L} + \mathcal{X} \mathcal{B} + \mathcal{B}^T \mathcal{X}^T < 0$.

O lema de Finsler é uma ferramenta que pode ser usada para inserir matrizes de folga na estruturação da LMI, com intuito de promover resultados mais relaxados.

2.6 Cômputo do ganho \mathcal{L}_2

Este trabalho, como outrora detalhado, parte do pressuposto que ocorrências anômalas, como falhas, ruídos e distúrbios externos afetam a dinâmica do sistema. Com base nisso, torna-se possível e desejável efetuar a quantificação desses fenômenos sobre as variáveis que se deseja analisar.

O custo funcional \mathcal{H}_{∞} é um índice utilizado para avaliar o desempenho do projeto de sistemas chaveados, estabelecendo um limitante para o pior caso (DEAECTO *et al.*, 2012).

Seja um sistema contínuo chaveado sujeito a uma entrada exógena, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma)x(t) + B_w(\sigma)w(t) \\ z(t) &= C_z(\sigma)x(t) + D_{wz}(\sigma)w(t) \end{aligned} \quad (2.17)$$

sendo $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$ os estados do sistema e $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ a saída de desempenho. $A(\sigma)$, $B_w(\sigma)$, $C_z(\sigma)$ e $D_{wz}(\sigma)$ são matrizes de dimensões apropriadas e $\sigma(t)$ é o sinal de chaveamento.

O ganho \mathcal{L}_2 induzido do sistema (2.17) é estabelecido como a razão entre as normas \mathcal{L}_2 dos sinais da saída $z(t)$ e da entrada $w(t)$ para o pior cenário do sinal de entrada $w(t) \in \mathcal{L}_2$, conforme é apresentado a seguir.

Lema 2.5 ((DEAECTO *et al.*, 2012)). *Seja um sistema contínuo chaveado dado por (2.17), com a condição inicial $x(0) = 0$, o custo funcional \mathcal{H}_{∞} é dado por*

$$J_{\infty}(\sigma) = \sup_{0 \neq w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} \quad (2.18)$$

Lema 2.6 ((DEAECTO *et al.*, 2012)). *Seja um sistema contínuo chaveado dado por (2.17), com a condição inicial $x(0) = 0$, quando o sinal de chaveamento, $\sigma(t)$, é variante no tempo, o custo (2.18) torna-se dispendioso de calcular e, devido a isso, pressupõem-se a determinação de um limitante superior*

$$\sup_{w \in \mathcal{L}_2} \frac{\|z\|_2^2}{\|w\|_2^2} < \gamma^2 \quad (2.19)$$

e certificar o desempenho do sistema através da minimização deste limitante.

Na prática, uma das formas para realizar a computação da norma \mathcal{H}_∞ do sistema (2.17) é por meio da resolução de problemas de otimização baseados em LMIs, certificando que o desempenho do sistema é dado a partir da minimização do limitante γ . Para o caso, por exemplo, em que a função candidata de Lyapunov é dada por $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, uma condição suficiente para determinação do limitante γ para a norma H_∞ é apresentada no seguinte lema.

Lema 2.7. *O sistema (2.17) é assintoticamente estável se existir uma matriz $P = P^T > 0$ e $\gamma > 0$, satisfazendo a LMI*

$$\begin{bmatrix} A_i^T P + P A_i + C_{zi}^T C_{zi} & * \\ B_{wi}^T P + D_{wzi}^T C_{zi} & D_{wzi}^T D_{wzi} - \gamma^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (2.20)$$

para todo $i \in S$. Além disso, γ é um limitante superior para a norma \mathcal{H}_∞ do sistema.

Demonstração. Suponha que exista uma função de Lyapunov quadrática expressa por $V(x(t)) = x(t)^T P x(t)$, $P = P^T > 0$, $\gamma \geq 0$ tal que para todo t ,

$$\dot{V}(x(t)) + z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) \leq 0 \quad (2.21)$$

para todo $x(t)$ e $w(t)$ satisfazendo (2.17). Integrando ambos os lados de (2.21) de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, com a condição inicial $x(0) = 0$, chega-se a

$$V(x(T)) + \int_0^\infty (z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t)) dt \leq 0. \quad (2.22)$$

como $V(x(T)) \geq 0$, implica em (2.19). Ademais, substituindo (2.17) em (2.21) e após algumas manipulações obtém-se a LMI (2.20). \square

3 Projeto de Observador para Estimação de Falhas

Neste capítulo é tratado o problema de projeto de observadores de entradas desconhecidas em sistemas contínuos chaveados para estimação de falhas em faixas de frequência pré-especificadas. A estrutura do observador baseia-se no trabalho de Yeu *et al.* (2005), em que o problema de detecção, isolamento e reconstrução de falhas em atuadores e sensores foi tratado. O elemento adicional trazido por este trabalho, e que difere da metodologia de Yeu *et al.* (2005), é que as matrizes de síntese do observador não são estáticas, variando entre os modos presentes na dinâmica do sistema chaveado. As condições resultantes desse capítulo são estruturadas por LMIs.

3.1 Definição do problema

Considere o seguinte sistema contínuo chaveado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma)x(t) + B_u(\sigma)u(t) + B_d(\sigma)d(t) + B_w(\sigma)w(t) + B_f(\sigma)f(t) \\ y(t) &= C_y(\sigma)x(t) + D_{fy}(\sigma)f(t) \end{aligned} \quad (3.1)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$ e $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ representam os estados, a entrada de controle e a saída mensurada, respectivamente; $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ é uma entrada desconhecida associada a distúrbios não mensuráveis, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é um ruído de medição e $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ é falha que afeta o sistema, a qual é assumida diferenciável. As matrizes do sistema possuem dimensões apropriadas e $\sigma(t)$ é o sinal de chaveamento que especifica qual subsistema está ativo em cada instante de tempo.

Para que se possa projetar um observador de entradas desconhecidas que estime a dinâmica da falha faz-se necessário o agrupamento da falha, $f(t)$, com os estados do sistema, $x(t)$, na construção de um vetor de estados aumentado. O sistema aumentado é, então, dado por

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}(\sigma)\bar{x}(t) + \bar{B}_u(\sigma)u(t) + \bar{B}_d(\sigma)d(t) + \bar{B}_w(\sigma)w(t) + \bar{E}(\sigma)\dot{f}(t) \\ y(t) &= \bar{C}_y(\sigma)\bar{x}(t) \end{aligned} \quad (3.2)$$

sendo $\sigma(t)$ o sinal de chaveamento conhecido a cada instante de tempo e $\bar{x}(t) = [x(t)^T, f(t)^T]^T$, as matrizes aumentadas são tais que

$$\begin{aligned} \bar{A}(\sigma) &= \begin{bmatrix} A(\sigma) & B_f(\sigma) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_u(\sigma) = \begin{bmatrix} B_u(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_d(\sigma) = \begin{bmatrix} B_d(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_w(\sigma) = \begin{bmatrix} B_w(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{E}(\sigma) &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}^T, \bar{C}_y(\sigma) = \begin{bmatrix} C_y(\sigma) & D_{fy}(\sigma) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Deseja-se, projetar um observador de entradas desconhecidas (UIO – *Unknown Input Observer*) com a seguinte forma

$$\begin{aligned}\dot{x}_o(t) &= N(\sigma)x_o(t) + G(\sigma)u(t) + L(\sigma)y(t) \\ \hat{\bar{x}}(t) &= x_o(t) - H(\sigma)y(t) \\ \hat{f}(t) &= C_f\hat{\bar{x}}(t)\end{aligned}\tag{3.3}$$

que desacople a entrada desconhecida $d(t)$ e que estime a dinâmica da falha $f(t)$, sendo $N(\sigma)$, $G(\sigma)$, $L(\sigma)$ e $H(\sigma)$ matrizes de ganho do observador com dimensões apropriadas, e são projetadas para minimizar o erro de estimação dos estados do sistema (3.2); $C_f = [0 \ I] \in \mathbb{R}^{n_q \times (n_x + n_q)}$; $x_o(t)$ os estados do observador; $\hat{\bar{x}}(t)$ a estimação dos estados do sistema aumentado (3.2); e $\hat{f}(t)$ a estimação da falha.

O erro de estimação é definido como

$$e(t) = \bar{x}(t) - \hat{\bar{x}}(t),\tag{3.4}$$

e substituindo $\hat{\bar{x}}(t)$, dado em (3.3), tem-se

$$e(t) = T(\sigma)\bar{x}(t) - x_o,\tag{3.5}$$

sendo $T(\sigma) = I + H(\sigma)\bar{C}_y(\sigma)$. A dinâmica do erro é dada por

$$\dot{e}(t) = T(\sigma)\dot{\bar{x}}(t) - \dot{x}_o(t)\tag{3.6}$$

na qual, utilizando $\dot{\bar{x}}(t)$ e $\dot{x}_o(t)$ de (3.2) e (3.3), respectivamente, obtém-se

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= T(\sigma)[\bar{A}(\sigma)\bar{x}(t) + \bar{B}_u(\sigma)u(t) + \bar{B}_d(\sigma)d(t) + \bar{B}_w(\sigma)w(t) \\ &\quad + \bar{E}(\sigma)\dot{f}(t)] - N(\sigma)x_o - G(\sigma)u(t) - L(\sigma)\bar{C}_y(\sigma)\bar{x}(t)\end{aligned}\tag{3.7}$$

Tomando a expressão (3.5), x_o pode ser reescrito como

$$x_o = (I + H(\sigma)\bar{C}_y(\sigma))\bar{x}(t) - e(t)\tag{3.8}$$

, então, após algumas manipulações e coletando alguns termos, (3.7) resulta em

$$\begin{aligned}\dot{e}(t) &= [T(\sigma)\bar{A}(\sigma) - N(\sigma)H(\sigma)\bar{C}_y(\sigma) - L(\sigma)\bar{C}_y(\sigma)] e(t) + T(\sigma)\bar{E}(\sigma)\dot{f}(t) \\ &\quad + [T(\sigma)\bar{A}(\sigma) - N(\sigma) - N(\sigma)H(\sigma)\bar{C}_y(\sigma) - L(\sigma)\bar{C}_y(\sigma)] \hat{\bar{x}}(t) \\ &\quad + [T(\sigma)\bar{B}_u(\sigma) - G(\sigma)] u(t) + T(\sigma)\bar{B}_d(\sigma)d(t) + T(\sigma)\bar{B}_w(\sigma)w(t).\end{aligned}\tag{3.9}$$

Para rejeitar a influência da entrada $d(t)$ sobre a dinâmica do erro e mitigar a influência de $\hat{\bar{x}}$ e $u(t)$, as seguintes condições devem ser satisfeitas

$$T(\sigma)\bar{A}(\sigma) - N(\sigma) - N(\sigma)H(\sigma)\bar{C}_y(\sigma) - L(\sigma)\bar{C}_y(\sigma) = 0.\tag{3.10}$$

$$T(\sigma)\bar{B}_u(\sigma) - G(\sigma) = 0.\tag{3.11}$$

$$T(\sigma)\bar{B}_d(\sigma) = 0.\tag{3.12}$$

A condição (3.12) é análoga a $\bar{B}_d(\sigma) = -H(\sigma)\bar{C}_y(\sigma)\bar{B}_d(\sigma)$, após substituir $T(\sigma)$ por $I + H(\sigma)\bar{C}_y(\sigma)$. Para que essa relação seja atendida e exista um UIO que desacople a entrada desconhecida, a condição reportada no lema a seguir deve ser satisfeita.

Lema 3.1. *É necessário que*

$$\text{posto}(\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma)) = \text{posto}(\overline{B}_d(\sigma)), \quad \sigma(\cdot) = i \in S, \quad \forall t \geq 0$$

para que exista um UIO na forma (3.3) para o sistema (3.2).

Demonstração. Seja

$$T(\sigma)\overline{B}_d(\sigma) = (I + H(\sigma)\overline{C}_y(\sigma))\overline{B}_d(\sigma) = 0,$$

logo $\overline{B}_d(\sigma) = -H(\sigma)\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma)$. Então, faz-se necessário que

$$\text{posto}(\overline{B}_d(\sigma)) = \text{posto}(-H(\sigma)\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma)) = \text{posto}(H(\sigma)\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma)).$$

Pela desigualdade de posto chega-se a

$$\text{posto}(H(\sigma)\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma)) \leq \text{posto}(\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma)) \leq \text{posto}(\overline{B}_d(\sigma)), \quad (3.13)$$

que resulta na necessidade de $\text{posto}(\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma)) = \text{posto}(\overline{B}_d(\sigma))$. \square

Caso o Lema 3.1 não seja satisfeito, impossibilita a existência de uma matriz $H(\sigma)$ tal que $\overline{B}_d(\sigma) = -H(\sigma)\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma)$ e, portanto, não é possível projetar um observador UIO com a estrutura apresentada (3.3).

Com a determinação das matrizes $H(\sigma)$, tal que

$$-\overline{B}_d(\sigma) [\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma)]^\dagger = -\overline{B}_d(\sigma) [(\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma))^T(\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma))]^{-1} (\overline{C}_y(\sigma)\overline{B}_d(\sigma))^T,$$

é possível determinar as matrizes $T(\sigma) = (I + H(\sigma)\overline{C}_y(\sigma))$ que cumprem a condição de desacoplamento (3.12). Por sua vez, a condição (3.11) é satisfeita adotando $G(\sigma) = T(\sigma)\overline{B}_u(\sigma)$ e, finalmente, as matrizes $L(\sigma)$ são determinadas a partir da condição (3.10), uma vez que as matrizes $N(\sigma)$ são projetadas por meio das condições relatadas no Teorema 3.1 que é apresentado adiante.

Com as escolhas de variáveis relatadas no parágrafo anterior a dinâmica do erro (3.9) se reduz a

$$\dot{e}(t) = N(\sigma)e(t) + T(\sigma)\overline{E}(\sigma)\dot{f}(t) + T(\sigma)\overline{B}_w(\sigma)w(t), \quad (3.14)$$

e, adicionalmente, a falha pode ser estimada como

$$\tilde{f}(t) = f(t) - \hat{f}(t) = C_f e(t). \quad (3.15)$$

Antes de apresentar os resultados principais deste capítulo, faz-se necessário explorar novas condições para implementação de um projeto de UIO para estimação de falhas em faixas de frequência finita em sistemas contínuos chaveados.

Como mencionado no capítulo anterior, extensões do Lema 2.3 para tratar outras classes de sistemas dinâmicos estão relatadas na literatura. Dentre essas, estão

condições para sistemas chaveados como foi abordado por Ding e Du (2016). A extensão do Lema 2.3 para sistemas chaveados proposto por Ding e Du (2016) trata o problema de redução de modelos em sistemas contínuos chaveados considerando um índice de desempenho \mathcal{H}_∞ em faixas de frequência pré-estabelecidas a partir da dinâmica do erro, como retratado no Lema 3.2.

Lema 3.2 ((DING; DU, 2016)). *Dada uma matriz simétrica Π de dimensões apropriadas e uma faixa pré-definida de frequências, diz-se que a dinâmica do erro possui desempenho garantido \mathcal{H}_∞ em frequência finita dado por $\gamma > 0$ se existirem matrizes simétricas $\mathcal{M}(\sigma)$ e $\mathcal{Q} > 0$ tais que*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{A}(\sigma) & \mathcal{B}(\sigma) \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \Xi \begin{bmatrix} \mathcal{A}(\sigma) & \mathcal{B}(\sigma) \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathcal{C}(\sigma) & \mathcal{D}(\sigma) \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \Pi \begin{bmatrix} \mathcal{C}(\sigma) & \mathcal{D}(\sigma) \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0$$

sendo Π uma matriz simétrica de dimensões apropriadas definida como

$$\Pi = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma^2 I \end{bmatrix}$$

e Ξ definido de forma específica para cada faixa frequencial:

(a) para baixas frequências $|\omega| \leq \varpi_l$

$$\Xi = \begin{bmatrix} -\mathcal{Q} & \mathcal{M}(\sigma) \\ \mathcal{M}(\sigma) & \varpi_l^2 \mathcal{Q} \end{bmatrix}$$

(b) para médias frequências $\varpi_1 \leq \omega \leq \varpi_2$

$$\Xi = \begin{bmatrix} -\mathcal{Q} & \mathcal{M}(\sigma) + j\varpi_c \mathcal{Q} \\ \mathcal{M}(\sigma) - j\varpi_c \mathcal{Q} & -\varpi_1 \varpi_2 \mathcal{Q} \end{bmatrix}$$

sendo $\varpi_c = (\varpi_1 + \varpi_2)/2$.

(c) para altas frequências $|\omega| \geq \varpi_h$

$$\Xi = \begin{bmatrix} \mathcal{Q} & \mathcal{M}(\sigma) \\ \mathcal{M}(\sigma) & -\varpi_h^2 \mathcal{Q} \end{bmatrix}$$

Note que a matriz Ξ corresponde a escolhas particulares para a matriz $\Phi \otimes P + \Psi \otimes Q$ reportada no Lema 2.3.

3.2 Condições para síntese de UIOs em frequência finita

O projeto de observador para a estimação de falhas em faixas de frequência finita é apresentado nesta seção na forma de LMIs.

Teorema 3.1. *Dados escalares $\eta_i > 0$, $\mu_i > 0$, $\xi > 0$ e $\delta > 0$, se existirem matrizes simétricas $P_i > 0$, M_i e $Q > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, e matrizes $X_i \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$, $Y_{1i}, Y_{2i}, Z_{1i}, Z_{2i} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_y}$, $Y_{3i}, Z_{3i} \in \mathbb{R}^{n_y \times n_y}$, $Y_{4i}, Z_{4i} \in \mathbb{R}^{n_w \times n_y}$, para todo $i, j = 1, \dots, s$, tais que as seguintes condições são factíveis*

$$P_i \leq \mu_i P_j, \quad i \neq j \quad (3.16)$$

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{\xi X_i\} & * & * & * \\ P_i + X_i - \xi W_i^T - C_f^T Y_{1i}^T & \eta_i P_i - \text{He}\{W_i + Y_{2i} C_f\} & * & * \\ Y_{1i}^T & -Y_{3i} C_f + Y_{2i}^T & I + \text{He}\{Y_{3i}\} & * \\ -\xi \bar{B}_{wi}^T T_i^T X_i^T & -Y_{4i} C_f - \bar{B}_{wi}^T T_i^T X_i^T & Y_{4i} & -\gamma_0^2 I \end{bmatrix} < 0 \quad (3.17)$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{U}_{(1,1)} & * & * & * \\ \mathcal{U}_{(2,1)} & \mathcal{U}_{(2,2)} & * & * \\ -\delta E_i^T T_i^T X_i^T & -Z_{3i} C_f - E_i^T T_i^T X_i^T & -\gamma_1^2 I & * \\ Z_{1i}^T & -Z_{4i} C_f + Z_{2i}^T & Z_{3i}^T & I + \text{He}\{Z_{4i}\} \end{bmatrix} < 0 \quad (3.18)$$

com $\mathcal{U}_{(1,1)}$, $\mathcal{U}_{(2,1)}$ e $\mathcal{U}_{(2,2)}$ definidas para cada faixa de frequência expressa na Tabela 1, sendo $\Psi = M_i + X_i - \delta W_i^T - C_f^T Z_{1i}^T$ e $\phi = \text{He}\{W_i + Z_{2i} C_f\}$, então $N_i = X_i^{-1} W_i$ e as demais matrizes do observador (3.3) podem ser encontradas a partir de (3.10), (3.11) e (3.12). Ademais, γ_0 e γ_1 são limitantes superiores, respectivamente, para normas \mathcal{H}_∞ da entrada $w(t)$ para $\tilde{f}(t)$ e de $\dot{f}(t)$ para $\tilde{f}(t)$.

Tabela 1 – Elementos $\mathcal{U}_{(1,1)}$, $\mathcal{U}_{(2,1)}$, e $\mathcal{U}_{(2,2)}$.

	Baixas frequências	Médias frequências	Altas frequências
$\mathcal{U}_{(1,1)}$	$-Q + \text{He}\{\delta X_i\}$	$-Q + \text{He}\{\delta X_i\}$	$Q + \text{He}\{\delta X_i\}$
$\mathcal{U}_{(2,1)}$	Ψ	$\Psi - j\varpi_c Q$	Ψ
$\mathcal{U}_{(2,2)}$	$\varpi_l^2 Q - \phi$	$-j\varpi_1 \varpi_2 Q - \phi$	$-\varpi_h^2 Q - \phi$

Demonstração. A condição (3.16) é uma consequência direta do Lema 2.1.

Para a concepção da prova referente à condição (3.17) assumamos a seguinte desigualdade como válida

$$\dot{e}(t)^T P_i e(t) + e(t)^T P_i \dot{e}(t) + e(t)^T \eta_i P_i e(t) + \tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) - \gamma_0^2 w(t)^T w(t) < 0. \quad (3.19)$$

Substituindo as dinâmicas do sistema (3.14)–(3.15) em (3.19), com $\dot{f}(t) = 0$, e fazendo algumas manipulações obtém-se

$$\begin{bmatrix} \text{He}\{P_i N_i\} + \eta_i P_i + C_f^T C_f & * \\ \bar{B}_{wi}^T T_i^T P_i & -\gamma_0^2 I \end{bmatrix} < 0. \quad (3.20)$$

A desigualdade acima pode ser reescrita utilizando a implicação 2 do Lema 2.4, considerando

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} N_i & T_i \bar{B}_{wi} \\ I & 0 \\ C_f & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & P_i & 0 & 0 \\ P_i & \eta_i P_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\gamma_0^2 I \end{bmatrix}$$

E, utilizando a equivalência da implicação 2 para a implicação 4 do Lema 2.4 com as seguintes escolhas de variáveis

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & -N_i & 0 & -T_i \bar{B}_{wi} \\ 0 & -C_f & I & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \xi X_i & Y_{1i} \\ X_i & Y_{2i} \\ 0 & Y_{3i} \\ 0 & Y_{4i} \end{bmatrix},$$

resulta na condição (3.17), sendo $W_i = X_i N_i$.

Considerando uma função de Lyapunov candidata

$$V_i(t) = e(t)^T P_i e(t), \quad (3.21)$$

e retornando à expressão (3.19), pode-se reescrever esta última como

$$\dot{V}_i(t) + \eta_i V_i(t) + \tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) - \gamma_0^2 w(t)^T w(t) \leq 0 \quad (3.22)$$

Ao integrar ambos os lados de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, com condição inicial $e(0) = 0$, $\gamma_0 > 0$ e $\eta_i > 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} V_i(e(\infty)) + \int_0^\infty (\tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) - \gamma_0^2 w(t)^T w(t) + \eta_i V_i(t)) dt &\leq 0, \\ \int_0^\infty (\tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) - \gamma_0^2 w(t)^T w(t)) dt &\leq -V_i(e(\infty)) - \int_0^\infty \eta_i V_i(t) dt \leq 0, \end{aligned}$$

pois $V_i(e(\infty)) \geq 0$ e $\int_0^\infty \eta_i V_i(t) dt > 0$. Portanto,

$$\int_0^\infty \tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) dt < \gamma_0^2 \int_0^\infty w(t)^T w(t) dt$$

resultando em $\|\tilde{f}\|_2^2 < \gamma_0^2 \|w\|_2^2$, que corresponde ao ganho \mathcal{L}_2 induzido do sistema (3.14)–(3.15) do sinal de entrada $w(t) \in \mathcal{L}_2$ para a saída $\tilde{f}(t) \in \mathcal{L}_2$.

Considerando uma função de Lyapunov candidata (3.21), ao longo da trajetória do sistema (3.14), tem-se que (BENZAOUIA; EDDOUKALI, 2018)

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) + \eta_i V_i(t) &= \dot{e}(t)^T P_i e(t) + e(t)^T P_i \dot{e}(t) + e(t)^T \eta_i P_i e(t) \\ &= e(t)^T (P_i N_i + N_i^T P_i + \eta_i P_i) e(t). \end{aligned}$$

Então, de acordo com a desigualdade (3.20), sabe-se que $P_i N_i + N_i^T P_i + \eta_i P_i + C_f^T C_f < 0$, obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{V}_i(t) + \eta_i V_i(t) &\leq 0 \\ \dot{V}_i(t) &\leq -\eta_i V_i(t) \end{aligned}$$

Para provar a condição expressa pela LMI (3.18), considere a desigualdade abaixo

$$\dot{e}(t)^T M_i e(t) + e(t)^T M_i \dot{e}(t) + \tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) - \gamma_1^2 \dot{f}(t)^T \dot{f}(t) < 0. \quad (3.23)$$

Considerando inicialmente o caso em baixa frequência (sendo imediata a extensão da prova para as demais faixas de frequência), pretende-se que o erro de estimação da falha seja robusto a variações em faixas distintas de frequência, conforme abordado nos trabalhos (WANG *et al.*, 2019; WU *et al.*, 2019), para tanto, assumem-se as expressões (3.14)–(3.15), com $w(t) = 0$ e

$$\mathcal{A}(\sigma) = N_i, \quad \mathcal{B}(\sigma) = T_i \bar{E}_i, \quad \mathcal{C}(\sigma) = C_f, \quad \mathcal{D}(\sigma) = 0.$$

Aplicando o Lema 3.2, no qual se estabelece um limitante com custo \mathcal{L}_2 em frequência finita, para baixas frequências chega-se à seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} N_i & T_i \bar{E}_i \\ I & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} -Q & M_i \\ M_i & \varpi_l^2 Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_i & T_i \bar{E}_i \\ I & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_f & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -\gamma_1^2 I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_f & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} < 0.$$

em que ao expandir os termos tem-se

$$\begin{bmatrix} -N_i^T Q N_i + \text{He}\{M_i N_i\} + \varpi_l^2 Q + C_f^T C_f & * \\ \bar{E}_i^T T_i^T Q N_i + \bar{E}_i^T T_i^T M_i & -\gamma_1^2 I - \bar{E}_i^T T_i^T Q T_i \bar{E}_i \end{bmatrix} < 0. \quad (3.24)$$

A desigualdade acima, pode ser reescrita ao adotar os seguintes parâmetros relativos à implicação 2 do Lema 2.4

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} N_i & T_i \bar{E}_i \\ I & 0 \\ 0 & I \\ C_f & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} -Q & M_i & 0 & 0 \\ M_i & \varpi_l^2 Q & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\gamma_1^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}$$

Por sua vez, ao utilizar a equivalência da implicação 2 para a implicação 4 do Lema 3.2 com as seguintes escolhas de variáveis

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} I & -N_i & -T_i \bar{E}_i & 0 \\ 0 & -C_f & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{X} = \begin{bmatrix} \delta X_i & Z_{1i} \\ X_i & Z_{2i} \\ 0 & Z_{3i} \\ 0 & Z_{4i} \end{bmatrix},$$

obtém-se a LMI (3.18).

Por sua vez a expressão (3.23) pode ser reescrita na forma

$$\dot{V}_i(t) + \tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) - \gamma_1^2 \dot{f}(t)^T \dot{f}(t) \leq 0. \quad (3.25)$$

Ao integrar ambos os lados de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, considerando condição inicial $e(0) = 0$ e $\gamma_1 > 0$, obtém-se

$$V_i(e(\infty)) + \int_0^\infty (\tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) - \gamma_1^2 \dot{f}(t)^T \dot{f}(t)) dt \leq 0.$$

Seguindo os mesmos passos que foram realizados anteriormente, chega-se a

$$\int_0^\infty \tilde{f}(t)^T \tilde{f}(t) dt < \gamma_1^2 \int_0^\infty \dot{f}(t)^T \dot{f}(t) dt$$

resultando em $\|\tilde{f}\|_2^2 < \gamma_1^2 \|\dot{f}\|_2^2$, que corresponde ao ganho \mathcal{L}_2 induzido do sistema (3.14)–(3.15) do sinal de entrada $\dot{f}(t) \in \mathcal{L}_2$ para saída $\tilde{f}(t) \in \mathcal{L}_2$. □

3.3 Exemplos

Nesta seção são apresentados três exemplos tratando sistemas contínuos chaveados sob ação de distúrbios externos e falhas em diferentes faixas de operação. Ressalte-se que todos os experimentos numéricos foram desenvolvidos no ambiente computacional MATLAB 2018a com auxílio dos *softwares* YALMIP (LÖFBERG, 2004) e Mosek (APS, 2019). Em todas as simulações foram adotados parâmetros $w(t)$ e $d(t)$ como ruídos brancos padrão, isto é, sinais pseudoaleatórios com distribuição normal, média nula e variância unitária.

Exemplo 3.1. Considere o sistema de controle de nível de um líquido retirado de (DU *et al.*, 2019), o qual é expresso pelo conjunto de matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0.0007 & 0.0007 \\ 0.0011 & -0.0011 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.0013 & 0.0007 \\ 0.0011 & -0.0011 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -0.0007 & 0.0007 \\ 0.0011 & -0.0044 \end{bmatrix},$$

$$B_{ui} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{di} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad C_{yi} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{wi} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_{fi} = D_{fyi} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix},$$

$i = 1, 2, 3$. Empregando o Teorema 3.1, projeta-se um observador com os seguintes parâmetros $\varpi_l = 5 \text{ rad/s}$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \eta_1 = \eta_2 = \eta_3 = 1 \times 10^{-3}$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 1.002$, $\xi = 0.4$, $\delta = 8$, $\gamma_0 = 0.6$ e $\gamma_1 = 0.7$. Os parâmetros utilizados para síntese do observador proposto foram selecionados de forma empírica, ou seja, por meio de tentativa e erro, chegando a um conjunto de valores que gerou os melhores resultados. Para avaliar o desempenho do observador projetado é realizada uma simulação temporal para o sistema (3.1) em conjunto com o observador (3.3). Ademais, assumem-se condições iniciais

para os estados do sistema e do observador como $x(0) = [0.4 \ 1.1]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$ respectivamente, e $u(t) = 0.4e^{-0.5t}(0.5 + \sin(6\pi t))$. O sinal de chaveamento adotado para a simulação é expresso na Figura 1, no qual foi utilizada a equação (2.15) para sua concepção. O tempo médio de permanência considerado foi de 1.99 segundos em cada modo e o perfil de falha em baixas frequências é dado por

$$f(t) = 0.1(t - 40) + (4(\sin(t) + \sin(0.5t)) - 4); \quad (3.26)$$

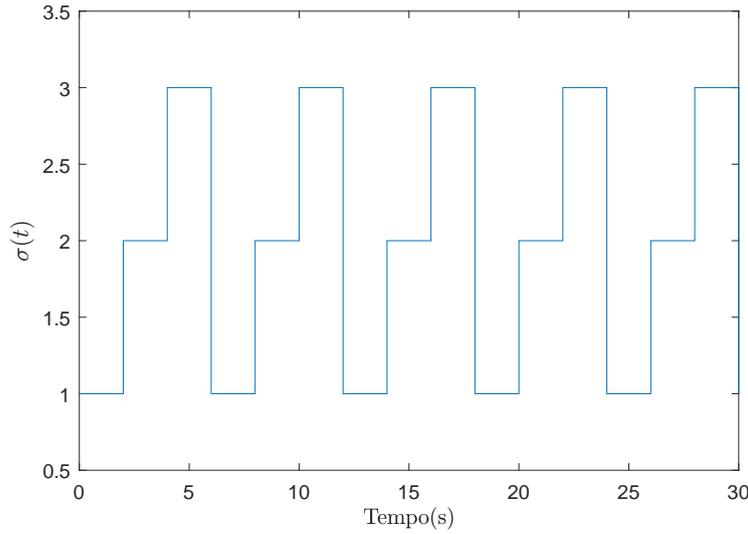


Figura 1 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 3.1.

Para fins de comparação, aplicou-se um método que contempla toda faixa frequencial proposto por (DU *et al.*, 2019). O método de Du *et al.* (2019) utiliza-se a abordagem ADT no qual os parâmetros α e μ são escolhidos para formação do tempo médio de permanência, τ_m , denotado em (2.9). Portanto, para este método os parâmetros de projeto α e μ foram escolhidos de tal forma que eles correspondam, sempre, aos parâmetros α_i e μ_i que irá fornecer o maior valor de τ_{ai} . Por meio do processo de minimização o método de Du *et al.* (2019) proveu um limitante correspondente a $\gamma_d = 3.00 \times 10^{-4}$. A Figura 2 demonstra a estimação da falha $\hat{f}(t)$, na qual constata-se uma boa acurácia no rastreamento da dinâmica da falha, quando comparado com o método de Du *et al.* (2019), e esse aspecto fica mais evidenciado ao analisar o erro de estimação apresentado na Figura 3.

Para assegurar a validade da metodologia proposta realizou-se a computação dos ganhos \mathcal{L}_2 induzidos a partir das simulações considerando $x(0)$ e $x_0(0)$ nulos. Para o método proposto, obtiveram-se os ganhos $\gamma_0^* = 0.33$ e $\gamma_1^* = 0.57$, os quais encontram-se abaixo dos respectivos limitantes previamente reportados. Ademais, o método de Du *et al.* (2019) proveu um ganho \mathcal{L}_2 induzido computado de $\gamma_d^* = 3.82$, o qual excede o limitante determinado.

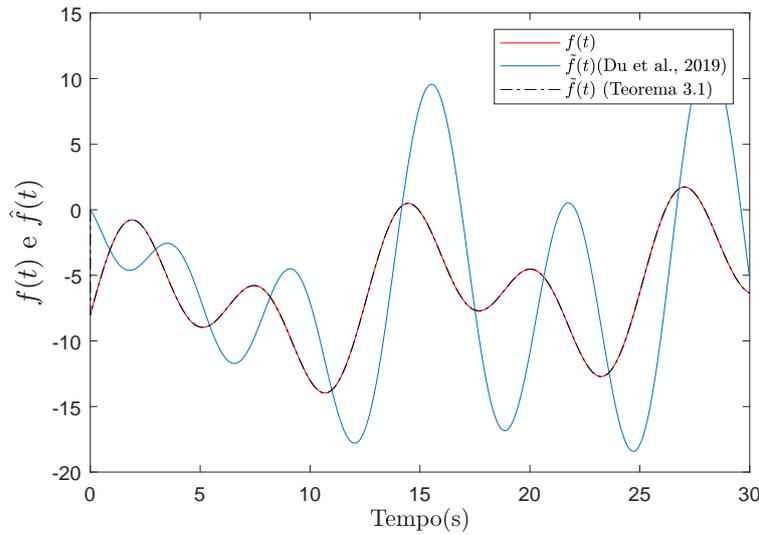


Figura 2 – Falha $f(t)$ e sua estimação $\hat{f}(t)$ para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU *et al.*, 2019) considerando o sistema do Exemplo 3.1.

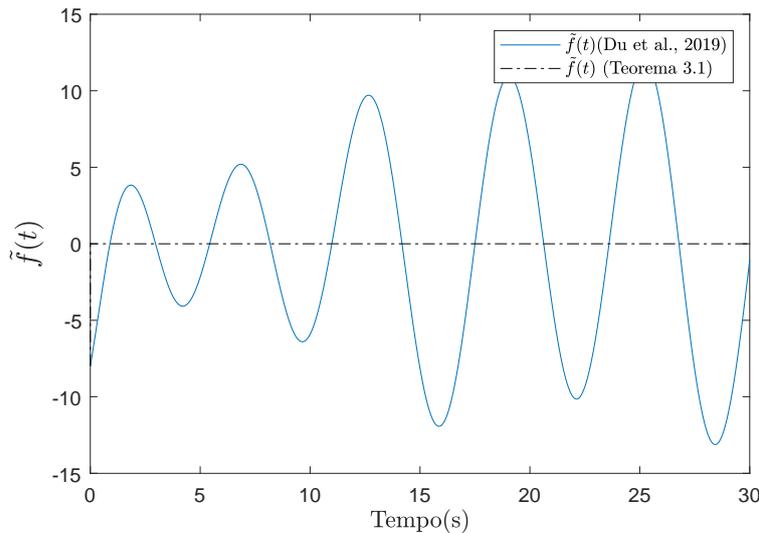


Figura 3 – Erro de estimação da falha para o sistema do Exemplo 3.1 para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU *et al.*, 2019).

Outra abordagem para corroborar a validade do método proposto é realizada. Adota-se uma simulação de Monte Carlo em que se considera 1000 repetições para o sistema do exemplo (3.1), sendo os parâmetros $\sigma(t)$, $d(t)$ e $w(t)$ foram escolhidos aleatoriamente no início de cada simulação. Ressalta-se que, os sinais de chaveamentos $\sigma(t)$ foram elaborados de tal forma que a condição MDADT seja válida para toda nova repetição, considerando um tempo médio de permanência dependente de modos igual ao pior caso, isto é, $\tau_a = \max(\tau_{ai})$, ao passo que, os modos do sistema são sorteados aleatoria-

mente. As condições iniciais para os estados do sistema e do observador correspondem a $x(0) = [0.4 \ 1.1]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$ e os parâmetros de síntese do UIO proposto são mantidas. A Figura 4 apresenta o erro de estimação médio da falha e nota-se boa acurácia no seguimento da dinâmica da falha devido aos valores exíguos no erro. Os valores dos ganhos médios \mathcal{L}_2 induzidos computados considerando $x(0)$ e $x_0(0)$ nulos, foram $\gamma_0 = 0.33$ e $\gamma_1 = 0.58$, estando abaixo dos empregados.

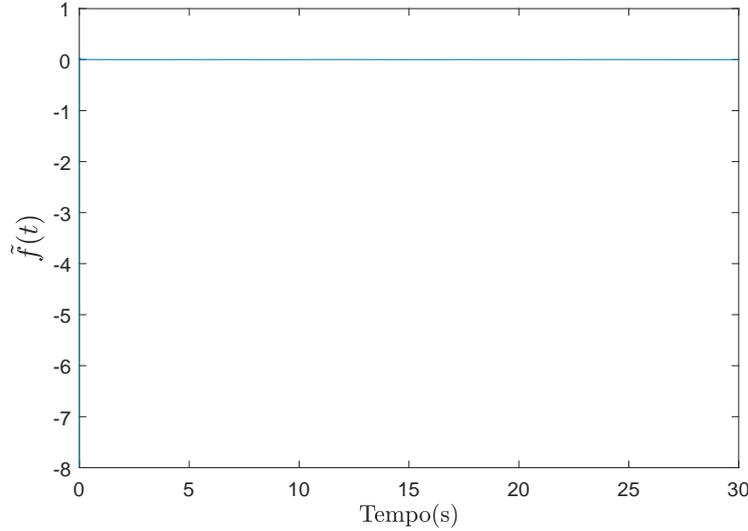


Figura 4 – Erro de estimação médio da falha para o sistema do Exemplo 3.1 para o observador projetado por meio do método reportado no Teorema 3.1.

Exemplo 3.2. Considere o seguinte sistema contínuo chaveado que representa um conversor CC/CC de modulação por largura de pulso (do inglês, *Pulse-Width Modulation* — PWM) retirado de (BENZAOUIA; EDDOUKALI, 2018) e expresso pelo conjunto de matrizes

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{u1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{u2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$B_{d1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_{d2} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{w1} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_{w2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_{f1} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_{f2} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.2 \end{bmatrix},$$

$$C_{y1} = [0.1 \ -0.1], \quad C_{y2} = [0.3 \ -0.4], \quad D_{fy1} = 1.5, \quad D_{fy2} = 1.2.$$

Recorrendo novamente ao Teorema 3.1, considerando para este exemplo uma faixa em alta frequência, e assumindo os seguintes parâmetros escolhidos de forma empírica $\varpi_l = 100\text{rad/s}$, $\eta_1 = \alpha_1 = 1.4$, $\eta_2 = \alpha_2 = 0.7$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\xi = 0.7$, $\delta = 16$, $\gamma_0 = 0.5$ e $\gamma_1 = 4.5$, o sistema em conjunto com o observador projetado são simulados considerando $u(t) = 2.2e^{-0.6t}(1 + \text{sen}(3\pi t))$, os estados iniciais do sistema e do observador são definidos como $x(0) = [1 \ 0.5]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$, respectivamente, e estão sujeitos à

regra de chaveamento expressa na Figura 5, a qual atende à condição MDADT por meio da expressão (2.15) fornecendo tempos médios de permanência $\tau_{a1} = 0.49$ segundos e $\tau_{a2} = 0.99$ segundos. Considera-se uma ação crítica afetando o sistema em todo o período temporal expressa pelo perfil de falha em alta frequência dado por

$$f(t) = \text{sen}(200t). \quad (3.27)$$

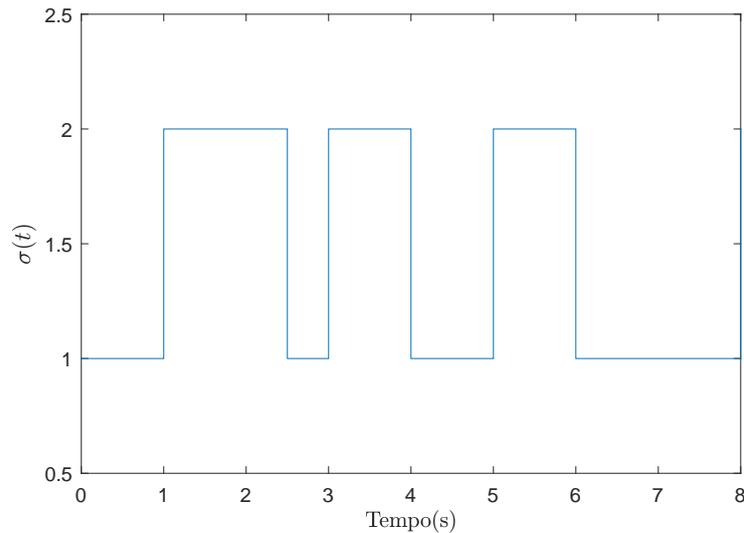


Figura 5 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 3.2.

Os resultados obtidos da estimação da falha e o erro provido de sua estimação estão destacados nas Figuras 6 e 7, respectivamente. Pode-se observar que a metodologia proposta apresenta, de modo geral, um bom desempenho para o rastreamento da falha. Além disso, neste exemplo em particular, houve uma maior dificuldade por parte do observador para estimar a dinâmica da falha quando o sistema chaveava para o modo 2. No entanto, ao simular o sistema apenas no modo 1 ou no modo 2, sem chaveamento, a estimação da falha permanecia adequada e com baixo erro. Apesar de diversos testes realizados com observadores sintetizados com diferentes parâmetros, o comportamento notado perdurou. Até o momento, o motivo por trás de tal fenômeno é desconhecido. Ao analisar a resposta advinda do método de Du *et al.* (2019), constata-se que esta não apresentou eficácia na estimação da falha.

A partir da determinação dos ganhos \mathcal{L}_2 induzidos pelas simulações realizadas com $x(0)$ e $x_0(0)$ nulos, chega-se aos ganhos $\gamma_0^* = 2.22 \times 10^{-3}$ e $\gamma_1^* = 0.78$, os quais respeitam os limitantes reportados anteriormente. O método de Du *et al.* (2019) proveu um ganho \mathcal{L}_2 de $\gamma_d = 2.77$ e o ganho \mathcal{L}_2 induzido computado foi de $\gamma_d^* = 1.7 \times 10^{-2}$.

Novamente, a abordagem utilizando o método de Monte Carlo foi adotada, considerando 500 simulações para o sistema do Exemplo 3.2. Assim como feito no exemplo

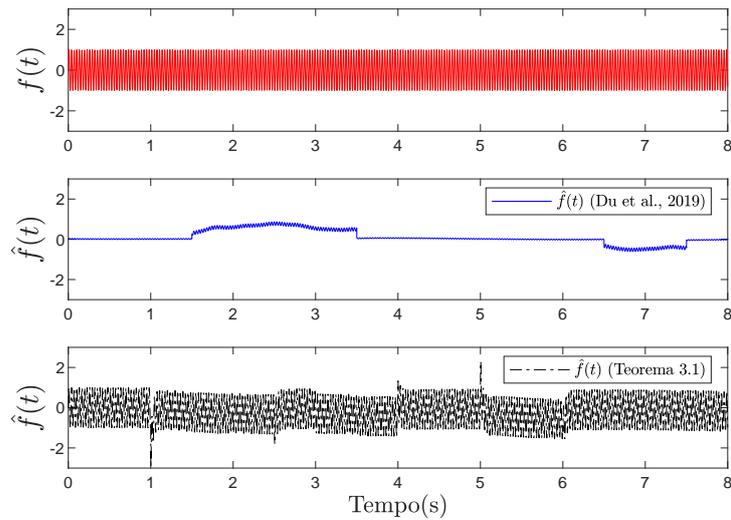


Figura 6 – Falha $f(t)$ e sua estimação $\hat{f}(t)$ para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU *et al.*, 2019) considerando o sistema do Exemplo 3.2.

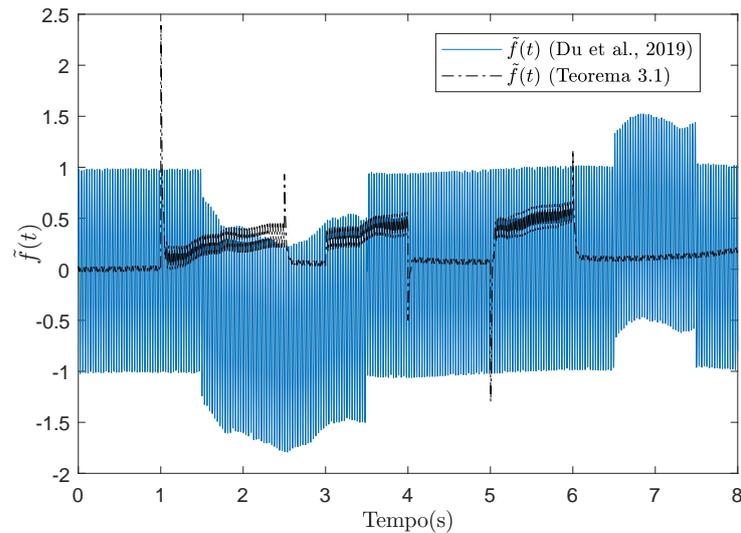


Figura 7 – Erro de estimação da falha para o sistema do Exemplo 3.2 para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU *et al.*, 2019).

anterior, o sinal de chaveamento $\sigma(t)$ adotado para a simulação deste método corresponde ao pior tempo médio de permanência obtido pela condição (2.15) e, além disso, os modos são definidos aleatoriamente. Os parâmetros $d(t)$ e $w(t)$ são sorteados de modo aleatório a cada instante de tempo para todas as simulações, ademais, as condições iniciais para os estados do sistema e do observador assumem valores $x(0) = [1 \ 0.5]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$ e os parâmetros de síntese do UIO proposto são mantidas. O comportamento do erro de estimação médio é ilustrado na Figura 8. Os valores dos ganhos médios \mathcal{L}_2 induzidos

computados com $x(0)$ e $x_0(0)$ nulos, apresenta-se como menores dos que foram adotados e são denotados como $\gamma_0 = 2.2 \times 10^{-3}$ e $\gamma_1 = 2.27$.

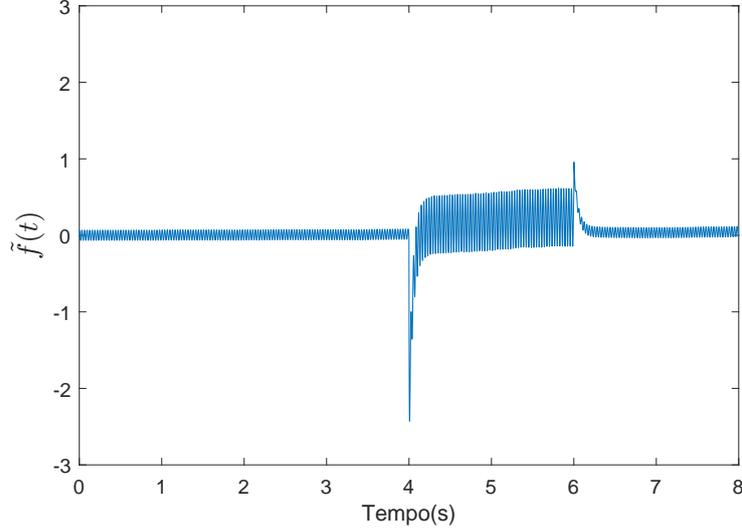


Figura 8 – Erro de estimação médio da falha para o sistema do Exemplo 3.2 para o observador projetado por meio do método reportado no Teorema 3.1.

Exemplo 3.3. O sistema contínuo chaveado apresentado neste exemplo é gerado de forma aleatória e é composto pelas matrizes

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -0.31 & 0.012 \\ 0.71 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.04 & 0.2 \\ 0.5 & -0.66 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -0.012 & 0.4 \\ 0.1 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad B_{u1} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \\
 B_{u2} &= \begin{bmatrix} 2.1 \\ 3.8 \end{bmatrix}, \quad B_{u3} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad C_{yi} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{fyi} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{d1} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{d2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \\
 B_{d3} &= \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{w1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_{w2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{w3} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{f1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{f2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 B_{f3} &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}^T
 \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$. Fazendo uso do Teorema 3.1 e considerando um perfil de falha em baixa frequência expresso em (3.26), projeta-se um observador adotando os termos $\varpi_l = 5\text{rad/s}$, $\varpi_h = 50\text{rad/s}$, $\eta_1 = \alpha_1 = 0.35$, $\eta_2 = \alpha_2 = 0.5$, $\eta_3 = \alpha_3 = 0.7$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$, $\xi = 0.4$, $\delta = 8$, $\gamma_0 = 0.08$ e $\gamma_1 = 1.7$ que foram definidos por meio de tentativa e erro. Adotando $u(t) = 1.2e^{-0.7t}(1 + \text{sen}(2\pi t))$ e a lei de chaveamento é regida pelo sinal mostrado na Figura 9 no qual são formados pelos tempos médios de permanência $\tau_{a1} = 1.98$ segundos, $\tau_{a2} = 1.38$ segundos e $\tau_{a3} = 0.99$ segundos ao se utilizar a expressão (2.15). Ademais, consideram-se os estados iniciais do sistema e do observador como $x(0) = [-1 \ -1]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$, respectivamente. Para este exemplo é adotado um perfil de falha em faixa

de média frequência expresso por

$$f(t) = 5(\text{sen}(t) + \text{sen}(5t)) - 5 \quad (3.28)$$

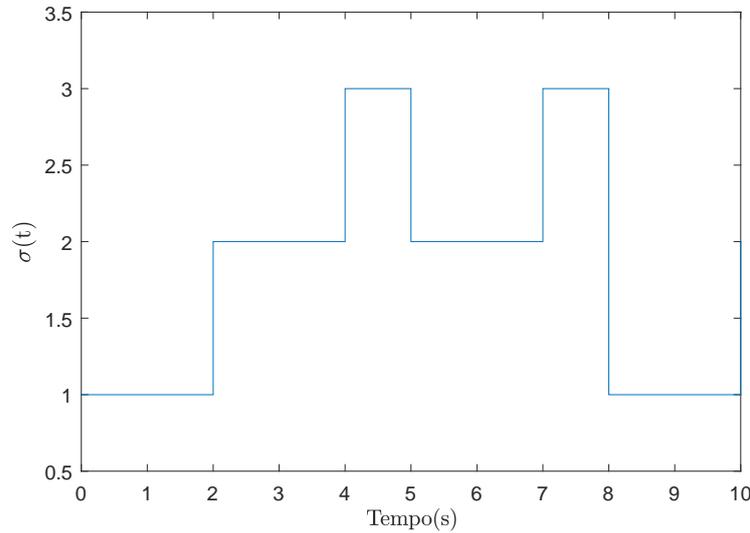


Figura 9 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 3.3.

Após a simulação, verifica-se que o observador projetado é eficaz para rastrear a dinâmica da falha conforme apresenta a Figura 10 e essa eficiência é mais notória ao se analisar a evolução do erro de estimação que fica próximo de zero durante o tempo de simulação, como ilustra a Figura 11. Por outro lado, a metodologia de Du *et al.* (2019) que abrange todo o espectro frequencial apresenta dificuldade no rastreamento da dinâmica da falha, como fica evidenciado pelas Figuras 10 e 11.

Por fim, novas simulações são feitas considerando os estados do sistema e do observador como nulos, de modo que o cômputo dos ganhos \mathcal{L}_2 induzidos respeitam os limitantes utilizados. Os valores encontrados pela metodologia proposta são $\gamma_0^* = 4.2 \times 10^{-2}$ e $\gamma_1^* = 0.56$, os quais situam-se abaixo dos limitantes reportados. Ademais, o método de Du *et al.* (2019) dispôs um limitante para o ganho \mathcal{L}_2 de $\gamma_d = 0.13$ e o ganho \mathcal{L}_2 induzidos computado foi de $\gamma_d^* = 3.97$, o qual excede o limitante determinado.

Análogo ao que foi realizado nos exemplos anteriores, utiliza-se nesse exemplo, também, o método de Monte Carlo desempenhando 1000 simulações. Os parâmetros $d(t)$ e $w(t)$ são sorteados de modo aleatório e a regra de chaveamento $\sigma(t)$ que atende à condição MDADT é gerada utilizando um tempo médio de permanência com base no maior valor de τ_{ai} obtido pela expressão (2.15), ao passo que os modos do sistema são sorteados de forma aleatória a cada instante de tempo para todas as simulações. As condições iniciais do sistema e do observador são $x(0) = [1 \ -1]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$, respectivamente, e as matrizes do UIO obtidas são mantidas advindas do Teorema 3.1. A Figura 12 mostra

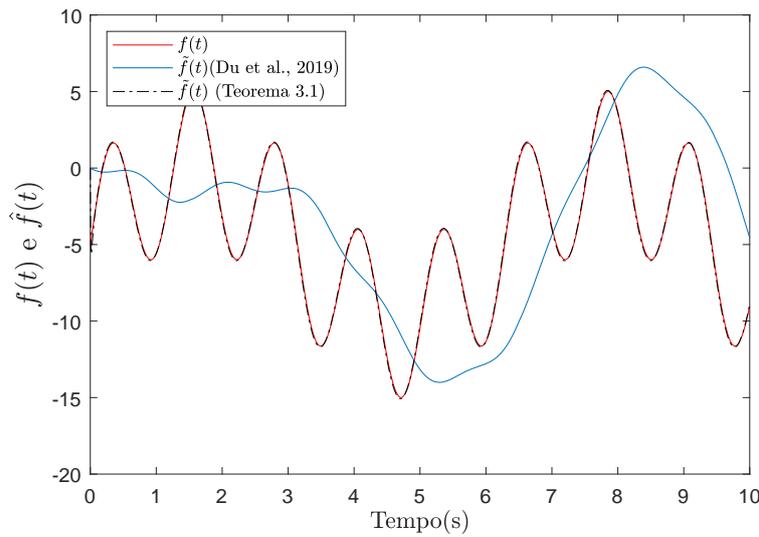


Figura 10 – Falha $f(t)$ e sua estimação $\hat{f}(t)$ para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU *et al.*, 2019) considerando o sistema do Exemplo 3.3.

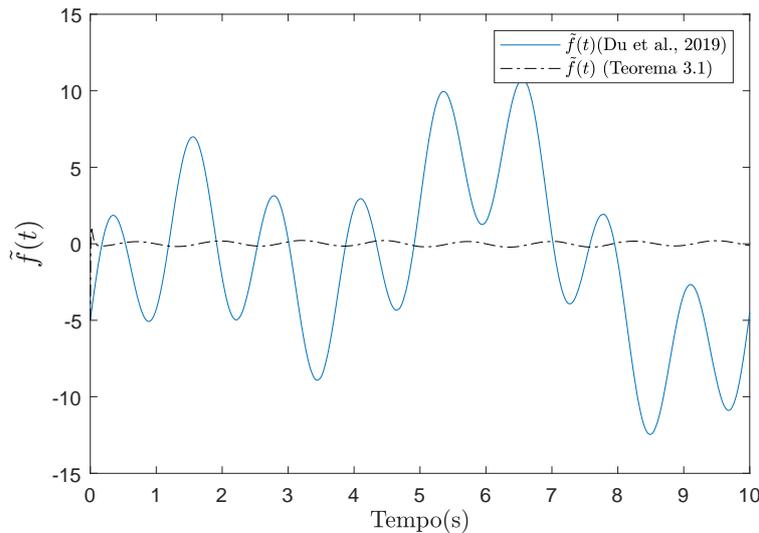


Figura 11 – Erro de estimação da falha para o sistema do Exemplo 3.3 para os observadores projetados por meio dos métodos reportados no Teorema 3.1 e em (DU *et al.*, 2019).

a evolução do erro de estimação médio, o qual se apresenta em torno da origem. Os valores dos ganhos médios \mathcal{L}_2 induzidos computados considerando $x(0)$ e $x_0(0)$ nulos foram $\gamma_0 = 3.5 \times 10^{-2}$ e $\gamma_1 = 1.64$, estando abaixo dos empregados.

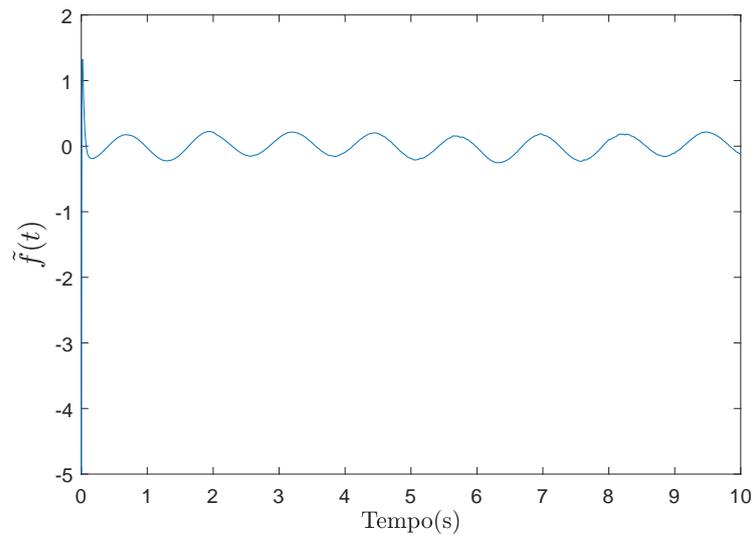


Figura 12 – Erro de estimação médio da falha para o sistema do Exemplo 3.3 para o observador projetado por meio do método reportado no Teorema 3.1.

3.4 Conclusão

Neste capítulo foram propostas condições de síntese para um observador de entradas desconhecidas visando à estimação de falhas em faixas de frequência finita para sistemas contínuos chaveados. A metodologia demonstra ser adequada para realizar a estimação de falhas em faixas pré-determinadas de frequência e, ao se comparar com outro método que abrange todo espectro frequencial, a metodologia proposta apresenta-se como mais eficaz, no sentido de que o erro médio quadrático de estimação da falha foi muito menor.

4 Projeto de Controlador Tolerante a Falhas

De posse de toda fundamentação teórica acerca do UIO proposto apresentada no capítulo anterior, o próximo passo é prover condições para síntese de controladores baseados em observador com o intuito de estabilizar sistemas contínuos chaveados sob influências externas como entradas desconhecidas e falhas. Note que, no primeiro momento, conforme discutido no Capítulo 3, o objetivo principal era tratar da estimação de distintos perfis de falhas em faixas de frequência finita, extraíndo o máximo potencial do UIO. A estrutura apresentada pelo sistema aumentado (3.2) indica que tanto os estados $x(t)$ quanto a falha $f(t)$ estão disponíveis, por meio do agrupamento, para serem tratados pelo observador proposto.

Então, ao dispor dos estados e da falha estimados, é possível arquitetar uma lei de realimentação cujo objetivo central consiste em mitigar a ação da falha sobre os estados do sistema e garantir estabilidade assintótica para todas as trajetórias. Concomitantemente, assume-se que a lei de chaveamento que dita a transição dos subsistemas é assegurada por meio da condição MDADT na qual a estabilidade do sistema chaveado em malha fechada é respeitada. Desta forma, torna-se possível projetar controladores baseados em observador tolerantes a falhas com custo garantido \mathcal{H}_∞ com base nos estados estimados pelo observador proposto em conjunto com a estimação da falha em faixas finitas de operação.

Em sistemas chaveados, estudos que abordam projetos de controladores baseados em observador têm sido frequentemente propostos, como, por exemplo, os trabalhos de Ladel *et al.* (2020); em que se projeta um controlador baseado em observador para sistemas chaveados com falhas nos sensores utilizando o conceito MDADT; de Xie *et al.* (2008); que propõe a construção de um controlador baseado em observador para sistemas chaveados lineares; de Liu *et al.* (2012); que apresenta um controlador baseado em observador robusto para sistemas chaveados com retardo utilizando a condição ADT; dentre outros. Um fato instigante é que, até o presente momento, os métodos referidos, assim como todos os demais disponíveis na literatura, tratam o problema em todo o espectro frequencial. O trabalho que mais se aproxima do que é retratado nesta dissertação foi apresentado por Zhu *et al.* (2020), no qual condições para um controlador tolerante a falhas com desempenho \mathcal{H}_∞ em faixas de frequência finita para sistemas chaveados em tempo discreto são apresentadas. Desta forma, o presente trabalho deseja preencher uma lacuna existente na literatura ao lidar com sistemas chaveados em tempo contínuo.

Neste capítulo é proposto um método para o projeto de controladores baseados em observador tolerantes a falhas descrito sob a forma de LMIs. A validade e a eficácia da metodologia proposta são ilustradas por meio de exemplos numéricos.

4.1 Definição do problema

Considere o seguinte sistema contínuo chaveado

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\sigma)x(t) + B_u(\sigma)u(t) + B_d(\sigma)d(t) + B_w(\sigma)w(t) + B_f(\sigma)f(t), \\ y(t) &= C_y(\sigma)x(t) + D_{fy}(\sigma)f(t), \\ z(t) &= C_z(\sigma)x(t) + D_{uz}(\sigma)u(t) + D_{dz}(\sigma)d(t) + D_{wz}(\sigma)w(t) + D_{fz}(\sigma)f(t), \end{aligned} \quad (4.1)$$

sendo que $x(t) \in \mathbb{R}^{n_x}$, $u(t) \in \mathbb{R}^{n_u}$, $y(t) \in \mathbb{R}^{n_y}$ e $z(t) \in \mathbb{R}^{n_z}$ representam os estados, a entrada de controle, a saída mensurada e a saída controlada, respectivamente; $d(t) \in \mathbb{R}^{n_d}$ é uma entrada desconhecida que representa distúrbios não mensuráveis, $w(t) \in \mathbb{R}^{n_w}$ é um ruído de medição e $f(t) \in \mathbb{R}^{n_f}$ é a falha diferenciável por partes que afeta o sistema. As matrizes do sistema possuem dimensões apropriadas e $\sigma(t)$ é a lei de chaveamento que atende à condição MDADT (2.15) que especifica qual subsistema está ativo em cada instante de tempo.

Para que se possa projetar o controlador baseado em observador, adota-se, novamente, um sistema aumentado análogo ao utilizado para o projeto de observador apresentado no Capítulo 3, adicionando um novo termo referente à saída controlada. Dessa forma, o sistema (4.1) apresenta uma nova configuração, a qual é dada por

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= \bar{A}(\sigma)\bar{x}(t) + \bar{B}_u(\sigma)u(t) + \bar{B}_d(\sigma)d(t) + \bar{B}_w(\sigma)w(t) + \bar{E}(\sigma)\dot{f}(t), \\ y(t) &= \bar{C}_y(\sigma)\bar{x}(t), \\ z(t) &= \bar{C}_z(\sigma)\bar{x}(t) + \bar{D}_{uz}(\sigma)u(t) + \bar{D}_{dz}(\sigma)d(t) + \bar{D}_{wz}(\sigma)w(t), \end{aligned} \quad (4.2)$$

sendo $\bar{x}(t) = [x(t)^T, f(t)^T]^T$ e as matrizes aumentadas são tais que

$$\begin{aligned} \bar{A}(\sigma) &= \begin{bmatrix} A(\sigma) & B_f(\sigma) \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_u(\sigma) = \begin{bmatrix} B_u(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_d(\sigma) = \begin{bmatrix} B_d(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \bar{B}_w(\sigma) = \begin{bmatrix} B_w(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix}, \\ \bar{E}(\sigma) &= \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix}^T, \bar{C}_y(\sigma) = \begin{bmatrix} C_y(\sigma) & D_{fy}(\sigma) \end{bmatrix}, \bar{C}_z(\sigma) = \begin{bmatrix} C_z(\sigma) & D_{fz}(\sigma) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Deseja-se projetar uma lei de controle tolerante a falhas a partir dos estados estimados $\hat{\bar{x}}(t)$, advindos do observador (3.3), dada por

$$u(t) = K(\sigma)\hat{\bar{x}}(t), \quad (4.3)$$

sendo $K(\sigma) = [K_a(\sigma), K_f(\sigma)]$, com $K_a(\sigma) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ e $K_f(\sigma) \in \mathbb{R}^{n_u \times n_f}$, o ganho do controlador.

Substituindo a lei de controle (4.3) no sistema (4.2) e considerando a dinâmica do erro (3.4), o sistema em malha fechada e a saída controlada são dadas por

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A_{cl}(\sigma)\bar{x}(t) - \bar{B}_u(\sigma)K(\sigma)e(t) + \bar{B}_d(\sigma)d(t) + \bar{B}_w(\sigma)w(t) + \bar{E}(\sigma)\dot{f}(t), \\ z(t) &= C_{cl}(\sigma)\bar{x}(t) - \bar{D}_{uz}(\sigma)K(\sigma)e(t) + \bar{D}_{dz}(\sigma)d(t) + \bar{D}_{wz}(\sigma)w(t), \end{aligned} \quad (4.4)$$

sendo $A_{cl}(\sigma) = \bar{A}(\sigma) + \bar{B}_u(\sigma)K(\sigma)$ e $C_{cl}(\sigma) = \bar{C}_z(\sigma) + \bar{D}_{uz}(\sigma)K(\sigma)$.

Combinando ambas as dinâmicas dadas pelo erro de estimação (3.14) e o sistema em malha fechada (4.4), chega-se à seguinte estrutura para o sistema

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \dot{\bar{x}}(t) \\ \dot{e}(t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}(\sigma) + \bar{B}_u(\sigma)K(\sigma) & -\bar{B}_u(\sigma)K(\sigma) \\ 0 & N(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_d(\sigma) \\ 0 \end{bmatrix} d(t) \\ &\quad + \begin{bmatrix} \bar{B}_w(\sigma) \\ T(\sigma)\bar{B}_w(\sigma) \end{bmatrix} w(t) + \begin{bmatrix} \bar{E}(\sigma) \\ T(\sigma)\bar{E}(\sigma) \end{bmatrix} \tilde{f}(t), \quad (4.5) \\ z(t) &= \begin{bmatrix} \bar{C}_z(\sigma) + \bar{D}_{uz}(\sigma)K(\sigma) & -\bar{D}_{uz}(\sigma)K(\sigma) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{x}(t) \\ e(t) \end{bmatrix} + \bar{D}_{dz}(\sigma)d(t) + \bar{D}_{wz}(\sigma)w(t), \end{aligned}$$

Além de garantir estabilidade assintótica em malha fechada considerando um critério de custo \mathcal{L}_2 , deseja-se também que a influência da falha sobre os estados seja atenuada. Para tanto, expandindo os termos de (4.4), com $e_x(t) = xt(t) - \hat{x}(t)$ chega-se a

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A(\sigma) + B_u(\sigma)K_a(\sigma)]x(t) + [B_f(\sigma) + B_u(\sigma)K_f(\sigma)]f(t) + B_d(\sigma)d(t) \\ &\quad - B_u(\sigma)K_a(\sigma)e_x(t) + B_w(\sigma)w(t) - B_u(\sigma)K_f(\sigma)\tilde{f}(t) \\ z(t) &= [C_z(\sigma) + D_{uz}(\sigma)K_a(\sigma)]x(t) + [D_{fz}(\sigma) + \bar{D}_{uz}(\sigma)K_f(\sigma)]f(t) \\ &\quad - \bar{D}_{uz}(\sigma)K_a(\sigma)e_x(t) + \bar{D}_{dz}(\sigma)d(t) + \bar{D}_{wz}(\sigma)w(t) - \bar{D}_{uz}(\sigma)K_f(\sigma)\tilde{f}(t) \end{aligned} \quad (4.6)$$

Supondo que posto $[B_u(\sigma), B_f(\sigma)] = \text{posto}(B_u(\sigma))$ e fazendo as escolhas tais que

$$K_f(\sigma) = -B_u(\sigma)^\dagger B_f(\sigma) \quad (4.7)$$

então tem-se que $B_f(\sigma) + B_u(\sigma)K_f(\sigma) = 0$, dessa forma o efeito da falha pode ser desprezado. No caso em que a condição de posto não for válida, não é possível determinar matrizes $K_f(\sigma)$, tais que $K_f(\sigma) = -B_u(\sigma)^\dagger B_f(\sigma)$ e, conseqüentemente, o desacoplamento da falha, $f(t)$, do sistema (4.6) não é exequível.

Logo, o sistema em malha fechada (4.4) torna-se

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= [A(\sigma) + B_u(\sigma)K_a(\sigma)]x(t) - B_u(\sigma)K_a(\sigma)e_x(t) - B_f(\sigma)K(\sigma)\tilde{f}(t) \\ &\quad + B_d(\sigma)d(t) + B_w(\sigma)w(t), \\ z(t) &= [C_z(\sigma) + \bar{D}_{uz}(\sigma)K_a(\sigma)]x(t) + [D_{fz}(\sigma) + \bar{D}_{uz}(\sigma)K_f(\sigma)]f(t) \\ &\quad - \bar{D}_{uz}(\sigma)K_a(\sigma)e_x(t) + \bar{D}_{dz}(\sigma)d(t) + \bar{D}_{wz}(\sigma)w(t) - \bar{D}_{uz}(\sigma)K_f(\sigma)\tilde{f}(t). \end{aligned} \quad (4.8)$$

Adicionalmente, considerando $\varpi = [w(t)^T, f(t)^T, \tilde{f}(t)^T]^T$, o sistema (4.8) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \tilde{A}(\sigma)x(t) + \tilde{B}(\sigma)\varpi(t) + B_d(\sigma)d(t) - B_u(\sigma)K_a(\sigma)e_x(t), \\ z(t) &= \tilde{C}(\sigma)x(t) + \tilde{D}(\sigma)\varpi(t) + D_{dz}(\sigma)d(t) - D_{uz}(\sigma)K_a(\sigma)e_x(t), \end{aligned} \quad (4.9)$$

sendo $\tilde{A}(\sigma) = A(\sigma) + B_u(\sigma)K_a(\sigma)$, $\tilde{C}(\sigma) = C_z(\sigma) + \bar{D}_{uz}(\sigma)K_a(\sigma)$,
 $\tilde{B}(\sigma) = \begin{bmatrix} B_w(\sigma) & 0 & -B_f(\sigma) \end{bmatrix}$, e $\tilde{D}(\sigma) = \begin{bmatrix} D_{wz}(\sigma) & D_{fz}(\sigma) + \bar{D}_{uz}(\sigma)K_f(\sigma) & -\bar{D}_{uz}(\sigma)K_f(\sigma) \end{bmatrix}$.

Com base no sistema em malha fechada (4.9), torna-se possível projetar um controlador tolerante a falhas com custo garantido \mathcal{L}_2 , considerando uma lei de chaveamento $\sigma(t)$ que atende à condição MDADT, de tal forma que assegure estabilidade ao sistema.

4.2 Síntese de controladores tolerantes a falhas

Nesta seção são apresentadas as condições LMIs para síntese do controlador baseado em observador tolerante a falhas. O desenvolvimento das condições ocorre de forma semelhante ao realizado no capítulo anterior.

Teorema 4.1. *Dados escalares $\alpha_i > 0$, $\nu > 0$, $\mu_i > 0$, $\beta > 0$ e $\lambda > 0.5$, se existirem matrizes simétricas $R_i > 0 \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e matrizes $\bar{L} \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ e $F_i \in \mathbb{R}^{n_u \times n_x}$ para todo $i, j = 1, \dots, s$, tais que*

$$R_i \leq \mu_i R_j, \quad i \neq j \quad (4.10)$$

$$\begin{bmatrix} -\beta(\bar{L} + \bar{L}^T) & * & * & * & * & * \\ \varkappa_{(2,1)} & \varkappa_{(2,2)} & * & * & * & * \\ -\epsilon\bar{L} - \beta F_i^T B_{ui}^T & \epsilon(A_i \bar{L} + B_{ui} F_i) - F_i^T B_{ui}^T & -\vartheta I - \epsilon \text{He}\{B_{ui} F_i\} & * & * & * \\ 0 & \lambda C_{zi} \bar{L} + \lambda D_{uzi} F_i & -\lambda D_{uzi} F_i & (1 - 2\lambda)I & * & * \\ \beta \tilde{B}_i^T & \tilde{B}_i^T & \epsilon \tilde{B}_i^T & \lambda \tilde{D}_i^T & -\gamma_2^2 I & * \\ \beta B_{di}^T & B_{di}^T & \epsilon B_{di} & \lambda D_{dzi}^T & 0 & \nu I \end{bmatrix} < 0 \quad (4.11)$$

com $\varkappa_{(2,1)} = R_i - \bar{L} + \beta \bar{L}^T A_i^T + \beta F_i^T B_{ui}^T$ e $\varkappa_{(2,2)} = \alpha_i R_i + \text{He}\{A_i \bar{L} + B_{ui} F_i\}$, então o sistema (4.9) é GUAS com limitante superior γ_2 para o desempenho \mathcal{H}_∞ para todo sinal de chaveamento MDADT que satisfaça (2.15) e, ademais, os ganhos do controlador são obtidos por $K_{ai} = F_i \bar{L}^{-1}$.

Demonstração. A condição (4.10) é uma consequência direta do Lema 2.2.

Para provar a LMI (4.11), considere uma função de Lyapunov candidata

$$V_i(t) = x(t)^T \bar{R}_i x(t). \quad (4.12)$$

e suponha válida a seguinte desigualdade

$$\begin{aligned} \dot{x}(t)^T \bar{R}_i x(t) + x(t)^T \bar{R}_i \dot{x}(t) + x(t)^T \alpha_i \bar{R}_i x(t) + z(t)^T z(t) - \gamma_2^2 \varpi(t)^T \varpi(t) \\ - \nu d(t)^T d(t) - \vartheta e_x(t)^T e_x(t) < 0. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Utilizando o sistema (4.9) em (4.13) e fazendo o uso da implicação 2 do Lema 2.4 com as seguintes escolhas de variáveis, tem-se

$$\mathcal{B}^\perp = \begin{bmatrix} \tilde{A}_i & -B_{ui}K_{ai} & \tilde{B}_i & B_{di} \\ I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 & 0 \\ \tilde{C}_i & -D_{uzi}K_{ai} & \tilde{D}_i & D_{dzi} \\ 0 & 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I \end{bmatrix}, \quad \mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & \bar{R}_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{R}_i & \alpha_i \bar{R}_i & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\vartheta I & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\gamma_2^2 I & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\nu I \end{bmatrix},$$

resultando em

$$\begin{bmatrix} \alpha_i \bar{R}_i + \tilde{A}_i^T \bar{R}_i + \bar{R}_i \tilde{A}_i + \tilde{C}_i^T \tilde{C}_i & * & * & * \\ -K_{ai}^T B_{ui}^T \bar{R}_i - K_{ai}^T D_{uzi}^T \tilde{C}_i & -\vartheta I - K_{ai}^T D_{uzi}^T D_{uzi} K_{ai} & * & * \\ \tilde{D}_i^T \tilde{C}_i + \tilde{B}_i^T \bar{R}_i & -\tilde{D}_i^T D_{uzi} K_{ai} & -\gamma_2^2 I + \tilde{D}_i^T \tilde{D}_i & * \\ B_{di}^T \bar{R}_i + D_{dzi}^T \tilde{C}_i & -D_{dzi}^T D_{uzi} K_{ai} & D_{dzi}^T \tilde{D}_i & -\nu I + D_{dzi}^T D_{dzi} \end{bmatrix} < 0 \quad (4.14)$$

Adotando a equivalência entre a implicação 2 e a implicação 4 do Lema 2.4 com as seguintes variáveis adicionais

$$\mathcal{X} = \begin{bmatrix} \beta J & 0 \\ J & 0 \\ \varepsilon J & 0 \\ 0 & \lambda U_i \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathcal{B} = \begin{bmatrix} -I & \tilde{A}_i & -B_{ui}K_{ai} & 0 & \tilde{B}_i & B_{di} \\ 0 & \tilde{C}_i & -D_{uzi}K_{ai} & -I & \tilde{D}_i & D_{dzi} \end{bmatrix}$$

resulta na seguinte desigualdade

$$\begin{bmatrix} -\beta(J + J^T) & * & * & * & * & * \\ \bar{R}_i - J + \beta \tilde{A}_i^T J^T & \alpha_i \bar{R}_i + J \tilde{A}_i + \tilde{A}_i^T J^T & * & * & * & * \\ \chi_{(3,1)} & \chi_{(3,2)} & \chi_{(3,3)} & * & * & * \\ 0 & \lambda U_i \tilde{C}_i & -\lambda U_i D_{uzi} K_{ai} & I - \lambda U_i - \lambda U_i^T & * & * \\ \beta \tilde{B}_i^T J^T & \tilde{B}_i^T J^T & \varepsilon \tilde{B}_i^T J^T & \lambda \tilde{D}_i^T U_i^T & -\gamma_2^2 I & * \\ \beta B_{di}^T J^T & B_{di}^T J^T & \varepsilon B_{di}^T J^T & \lambda D_{dzi}^T U_i^T & 0 & -\nu I \end{bmatrix} < 0$$

com

$$\begin{aligned} \chi_{(3,1)} &= -\varepsilon J - \beta K_{ai}^T B_{ui}^T J^T \\ \chi_{(3,2)} &= \varepsilon J \tilde{A}_i - K_{ai}^T B_{ui}^T J^T \\ \chi_{(3,3)} &= -\vartheta I - \varepsilon J B_{ui} K_{ai} - \varepsilon K_{ai}^T B_{ui}^T J^T \end{aligned}$$

Definindo $\mathcal{N} = \text{diag}(J^{-1}, J^{-1}, J^{-1}, I, I, I)$ e multiplicando por \mathcal{N} do lado esquerdo e o lado direito pelo seu transposto \mathcal{N}^T , chega-se a

$$\begin{bmatrix} -\beta(J^{-T} + J^{-1}) & * & * & * & * & * \\ \chi(2,1) & \chi(2,2) & * & * & * & * \\ \chi(3,1) & \chi(3,2) & \chi(3,3) & * & * & * \\ 0 & \lambda U_i \tilde{C}_i J^{-T} & -\lambda U_i D_{ui} K_{ai} J^{-T} & I - \lambda U_i - \lambda U_i^T & * & * \\ \beta \tilde{B}_i^T & \tilde{B}_i^T & \varepsilon \tilde{B}_i^T & \lambda \tilde{D}_i^T U_i^T & -\gamma_2^2 I & * \\ \beta B_{di}^T & B_{di}^T J & \varepsilon B_{di}^T J & \lambda D_{dzi}^T U_i^T & 0 & -\nu I \end{bmatrix} < 0$$

com

$$\begin{aligned} \chi(2,1) &= J^{-1} \bar{R}_i J^{-T} - J^{-T} + \beta J^{-1} A_i^T + \beta J^{-1} K_{ai}^T B_{ui}^T \\ \chi(2,2) &= J^{-1} \alpha_i \bar{R}_i J^{-T} + A_i J^{-T} + B_{ui} K_{ai} J^{-T} + J^{-1} A_i^T + J^{-1} K_{ai}^T B_{ui}^T \\ \chi(3,1) &= -\varepsilon J^{-T} - \beta J^{-1} K_{ai}^T B_{ui}^T \\ \chi(3,2) &= \varepsilon A_i J^{-T} + \varepsilon B_{ui} K_{ai} J^{-T} - J^{-1} K_{ai}^T B_{ui}^T \\ \chi(3,3) &= -\vartheta I - \varepsilon B_{ui} K_{ai} J^{-T} - \varepsilon J^{-1} K_{ai}^T B_{ui}^T \end{aligned}$$

Finalmente, escolhendo os parâmetros $U_i = I$, $\bar{L}^T = J^{-1}$, $F_i^T = J^{-1} K_{ai}^T$ e $R_i = J^{-1} \bar{R}_i J^{-T}$, verifica-se que a desigualdade acima, após algumas manipulações, corresponde à (4.11).

Ademais, considere que $\dot{V}_i(t)$ é tal que

$$\dot{V}_i(t) < -\alpha_i V(t) + \vartheta e_x(t)^T e_x(t), \quad (4.15)$$

com $e_x(t)^T e_x(t) \leq \bar{e}_x^2$. Integrando ambos os lados da expressão acima de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$ e utilizando o Lema da Comparação (KHALIL, 2002), tem-se

$$\begin{aligned} V_i(\infty) &< \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-\alpha_i t} V(0) + \vartheta \int_0^t e^{\alpha_i \tau} e_x(\tau)^T e_x(\tau) d\tau \right) \\ &< \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-\alpha_i t} V(0) + \vartheta \int_0^t e^{-\alpha_i \tau} \bar{e}_x^2 d\tau \right) \\ &< \lim_{t \rightarrow \infty} \left(e^{-\alpha_i t} V(0) + \frac{\vartheta \bar{e}_x^2}{\alpha_i} (1 - e^{-\alpha_i t}) \right) \\ V_i(\infty) &< \frac{\vartheta}{\alpha_i} \bar{e}_x^2 \end{aligned}$$

o que implica que as trajetórias do sistema não convergirão a zero ao longo do tempo, mas estarão confinadas dentro de uma região delimitada do espaço.

Por sua vez a expressão (4.13) pode ser reescrita como

$$\dot{V}_i(t) + \alpha_i V_i(t) + z(t)^T z(t) - \gamma_2^2 \varpi(t)^T \varpi(t) - \nu d(t)^T d(t) - \vartheta e_x(t)^T e_x(t) < 0 \quad (4.16)$$

ou, aplicando a relação 4.15,

$$z(t)^T z(t) - \gamma_2^2 \varpi(t)^T \varpi(t) - \nu d(t)^T d(t) < 0 \quad (4.17)$$

Ao integrar ambos os lados de $t = 0$ a $t \rightarrow \infty$, com $\gamma_2 > 0$ e $v > 0$, obtém-se

$$\int_0^\infty (z(t)^T z(t) - \gamma_2^2 w(t)^T w(t) - v d(t)^T d(t)) dt \leq 0,$$

$$\int_0^\infty z(t)^T z(t) dt < \int_0^\infty (\gamma_2^2 \varpi(t)^T \varpi(t) + v d(t)^T d(t)) dt$$

resultando em $\|z\|_2^2 < \gamma_2^2 \|\varpi\|_2^2 + v \|d\|_2^2$, que corresponde ao ganho \mathcal{L}_2 induzido do sistema (4.9) dos sinais de entrada $\varpi(t) \in \mathcal{L}_2$ e $d(t) \in \mathcal{L}_2$ para a saída $z(t) \in \mathcal{L}_2$.

□

4.3 Exemplos

Nesta seção são utilizados os mesmos sistemas contínuos chaveados reportados no Capítulo 3, com a adição de novos termos referentes à saída controlada.

É necessário enfatizar que, como outrora reportado, alguns trabalhos que tratam o tema central abordado por esta dissertação, tais como (ZHU *et al.*, 2020) e (LADEL *et al.*, 2020), não podem ser utilizados para efeitos de comparação, pois a metodologia de Zhu *et al.* (2020) trata de sistemas chaveados em tempo discreto e o método de Ladel *et al.* (2020) não considera que a dinâmica do sistema é afetada por entradas exógenas. Portanto, não são apresentadas comparações nos exemplos reportados para contrapor o projeto de controle tolerante a falhas com base em observador com desempenho garantido \mathcal{H}_∞ para sistemas contínuos chaveados.

Nessa seção, os parâmetros $w(t)$ e $d(t)$, assim como outrora utilizados, denotam ruídos brancos padrão, sendo sinais gerados de forma aleatória com distribuição normal padrão que correspondem a média nula e variância unitária.

Exemplo 4.1. Considere o sistema contínuo chaveado adaptado de (BENZAOUIA; ED-DOUKALI, 2018), dado pelo conjunto de matrizes:

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, C_1 = \begin{bmatrix} 0.1 & -0.1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, A_2 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, C_2 = \begin{bmatrix} 0.3 & -0.4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$B_{u1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, B_{u2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, B_{d1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, B_{d2} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, B_{w1} = \begin{bmatrix} 0.3 \\ 0.2 \end{bmatrix}, B_{w2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix},$$

$$B_{f1} = \begin{bmatrix} -0.6 \\ 0.3 \end{bmatrix}, B_{f2} = \begin{bmatrix} -0.8 \\ -0.2 \end{bmatrix}, C_{z1} = [0.1 \quad -0.1], C_{z2} = [3 \quad -4],$$

$$D_{fy1} = 1.5, D_{fy2} = 1.2, D_{uz1} = 0.2, D_{uz2} = 0.3, D_{dz1} = 0.1, D_{dz2} = 0.4,$$

$$D_{fz1} = 0.2, D_{fz2} = 0.1, D_{wz1} = 0.5, D_{wz2} = 0.2.$$

Considerando a falha em faixa de altas frequências expressa por (3.27), adotando $\eta_1 = 0.7$, $\eta_2 = 1.4$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\xi = 0.08$, $\delta = 45$, $\varpi_h = 40 \text{rad/s}$, $\gamma_0 = 1$, e $\gamma_1 = 1.9$ resolvendo as

condições do Teorema 3.1 obtém-se as matrizes do observador:

$$\begin{aligned}
 N_1 &= 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} -0.2529 & -0.6296 & -0.0495 \\ -0.4995 & -1.2578 & -0.0989 \\ -0.0168 & -0.0420 & -0.0110 \end{bmatrix}, \quad L_1 = 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} 1.5138 & 0 \\ 3.0182 & 0 \\ 0.1014 & 0 \end{bmatrix}, \\
 N_2 &= 1 \times 10^3 \begin{bmatrix} -1.9527 & -0.7635 & 0.3476 \\ -0.9701 & -0.4146 & 0.1743 \\ 0.1627 & 0.0652 & -0.1161 \end{bmatrix}, \quad L_2 = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} -2.3424 & 0 \\ -1.1823 & 0 \\ 0.2022 & 0 \end{bmatrix}, \\
 H_1 &= \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 20 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -10 & 0 \\ -5 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Em seguida, sintetiza-se o controlador por meio das condições apresentadas no Teorema 4.1, adotando os seguintes parâmetros $\alpha_1 = 0.7$, $\alpha_2 = 1.4$, $v = 6.41 \times 10^6$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\beta = 0.28$, $\lambda = 10.6$ e $\gamma_2 = 3.3$ obtém-se as seguintes matrizes

$$K_1 = [-11.6060 \quad 12.5857 \quad 0.6000], \quad K_2 = [6.0803 \quad -9.0227 \quad 0.2000].$$

Ressalta-se que todos os parâmetros de síntese do observador e do controlador utilizados foram obtidos por tentativa e erro, visando obter os melhores resultados e as condições iniciais para os estados do sistema e para o observador são $x(0) = [0.5 \ 0.3]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$, respectivamente. O sinal de chaveamento MDADT empregado está apresentado na Figura 13 no qual atende à condição (2.15) gerando tempos médios de permanência por modo de $\tau_{a1} = 0.99$ segundos e $\tau_{a2} = 0.49$ segundos, e a evolução dos estados e suas estimativas podem ser conferidas nas Figuras 14 e 15.

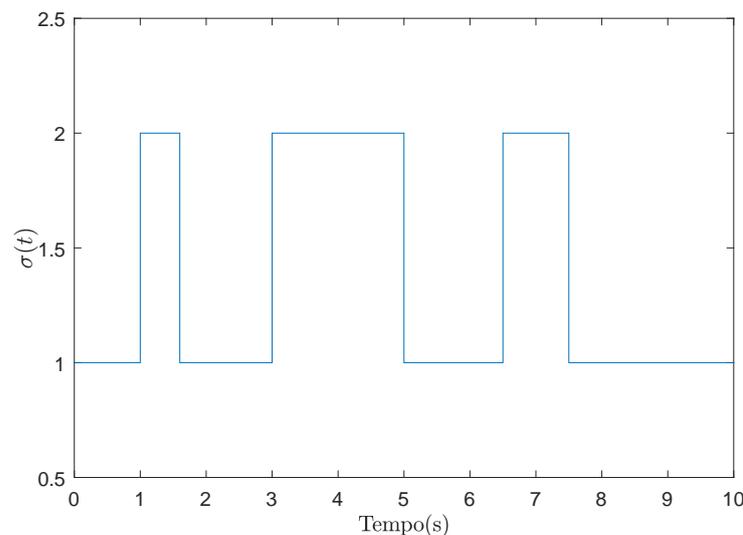


Figura 13 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ utilizado para o sistema do Exemplo 4.1.

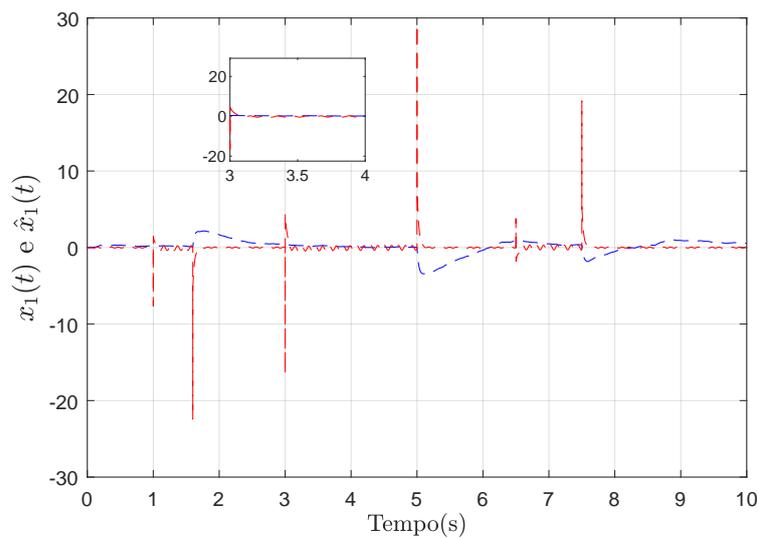


Figura 14 – Evolução dos estados $x_1(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_1(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.1 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

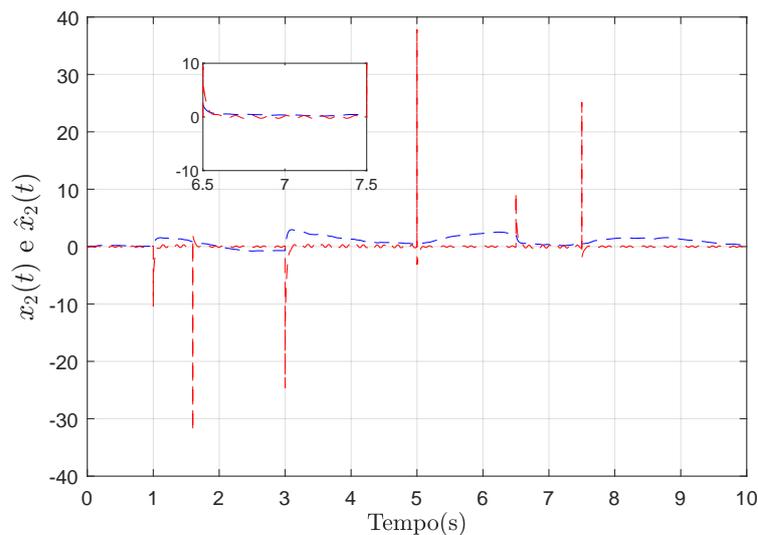


Figura 15 – Evolução dos estados $x_2(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_2(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.1 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

Os resultados mostram que as trajetórias dos estados convergem para a origem e o efeito da falha é adequadamente compensado. Note também que durante a transição dos modos as estimações dos estados sofrem com descontinuidades momentâneas, as quais são rapidamente acomodadas. Esse efeito também pode ser notado na entrada de controle.

A Figura 16 mostra o erro de estimação da falha em alta frequência, a entrada de controle saturada e a saída controlada. Nota-se que o erro de estimação apresenta valores próximos a zero, o que indica boa acurácia no seguimento do perfil de falha adotado.

Para avaliar quantitativamente o desempenho do sistema foram realizadas 300 simulações de Monte Carlo, considerando os mesmos parâmetros de síntese reportados no início do exemplo, condições iniciais de $x(0) = [0.5 \ 0.3]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$, e assumindo diferentes valores para os sinais $d(t)$ e $w(t)$. Assim como foi feito no capítulo anterior, para a implementação de Monte Carlo considera-se que os sinais de chaveamento $\sigma(t)$ são elaborados de tal forma que a condição MDADT seja válida para toda nova repetição, adotando um tempo médio de permanência dependente de modo, $\tau_a = \max(\tau_{ai})$, ao passo que, os modos do sistema são sorteados aleatoriamente.

A Figura 17 ilustra a evolução do erro de estimação médio dos estados em que se nota uma atenuação do efeito da falha sobre os estados. Por outro lado, a estimação média da falha deu-se de maneira adequada com valores do erro de estimação em torno de zero, conforme mostrado na Figura 18.

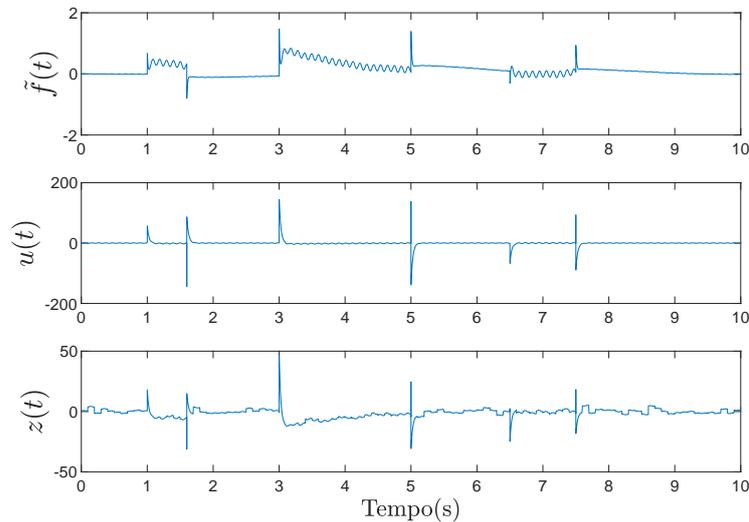


Figura 16 – Erro de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle $u(t)$ e saída controlada $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.1 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

Os ganhos médios \mathcal{L}_2 computados, ao considerar novas simulações com estados iniciais $x(0)$ e $x_0(0)$ nulos, foram $\gamma_0^* = 0.92$, $\gamma_1^* = 5.2 \times 10^{-3}$ e $\gamma_2^* = 2.44$, respeitando os limitantes adotados anteriormente.

Exemplo 4.2. O sistema contínuo chaveado apresentado neste exemplo é definido pelo

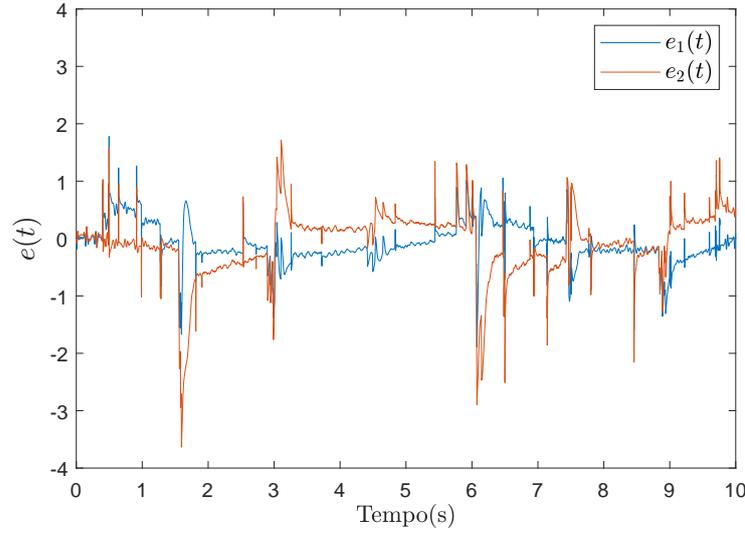


Figura 17 – Evolução do erro de estimação médio dos estados para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.1 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

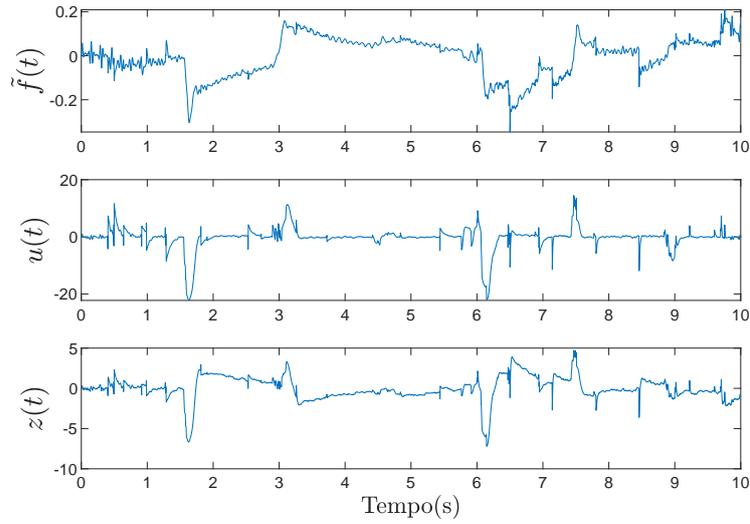


Figura 18 – Erro médio de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle média $u(t)$ e saída controlada média $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.1 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

conjunto de matrizes

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -0.31 & 0.012 \\ 0.71 & -0.1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -0.04 & 0.2 \\ 0.5 & -0.66 \end{bmatrix}, \quad A_3 = \begin{bmatrix} -0.012 & 0.4 \\ 0.1 & -0.8 \end{bmatrix}, \quad B_{u1} = \begin{bmatrix} 1.5 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \\
 B_{u2} &= \begin{bmatrix} 2.1 \\ 3.8 \end{bmatrix}, \quad B_{u3} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad C_{yi} = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 \\ 0.01 & 0 \end{bmatrix}, \quad D_{fyi} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{d1} = \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{d2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ -0.1 \end{bmatrix}, \\
 B_{d3} &= \begin{bmatrix} -0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{w1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad B_{w2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{w3} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{f1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad B_{f2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 B_{f3} &= \begin{bmatrix} 0.2 & 0.7 \end{bmatrix}^T, \quad D_{uz1} = 0.1, \quad D_{uz2} = 0.2, \quad D_{uz3} = 0.3, \quad D_{dz1} = 0.2, \quad D_{dz2} = 0.6, \\
 D_{dz3} &= 0.5, \quad D_{fz1} = 0.4, \quad D_{fz2} = 0.1, \quad D_{fz3} = 0.2, \quad D_{wz1} = 0.5, \quad D_{wz2} = 0.2, \quad D_{wz3} = 0.3.
 \end{aligned}$$

$i = 1, 2, 3$. Aplicando as condições do Teorema 3.1 com $\eta_1 = 0.35$, $\eta_2 = 0.5$, $\eta_3 = 0.7$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$, $\xi = 0.4$, $\delta = 80$, $\varpi_l = 5\text{rad/s}$, $\varpi_h = 12\text{rad/s}$, $\gamma_0 = 1.8$, e $\gamma_1 = 0.9$ obtém-se as matrizes do observador proposto

$$N_1 = \begin{bmatrix} -549.2646 & 396.5424 & 30.8378 \\ 553.8177 & -497.5631 & 14.4285 \\ 53.1476 & -41.8521 & -96.4296 \end{bmatrix}, N_2 = \begin{bmatrix} -525.0079 & 375.5028 & 25.9056 \\ 529.0187 & -477.4101 & 15.0313 \\ 49.9505 & -37.6312 & -92.9341 \end{bmatrix},$$

$$N_3 = \begin{bmatrix} -498.8768 & 352.5364 & 21.7636 \\ 501.9805 & -455.2625 & 15.1822 \\ 46.7069 & -33.2308 & -89.7450 \end{bmatrix}, L_1 = 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} -1.0253 & 0.6287 \\ 1.0777 & -0.5797 \\ 0.1103 & -0.0684 \end{bmatrix},$$

$$L_2 = 1 \times 10^5 \begin{bmatrix} -0.9779 & 0.6024 \\ 1.0314 & -0.5545 \\ 0.1030 & -0.0654 \end{bmatrix}, L_3 = 1 \times 10^4 \begin{bmatrix} -9.2676 & 5.7422 \\ 9.7909 & -5.2374 \\ 0.9565 & -0.6242 \end{bmatrix}, G_1 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.5 \\ 0.0 \end{bmatrix},$$

$$H_1 = \begin{bmatrix} -50 & -50 \\ 50 & 50 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H_2 = \begin{bmatrix} -50 & -50 \\ 50 & 50 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, H_3 = \begin{bmatrix} -50 & -50 \\ 50 & 50 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, G_2 = \begin{bmatrix} 0.0 \\ 0.6 \\ 0.0 \end{bmatrix}, G_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.7 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Sintetizando, então, o controlador, escolhendo os parâmetros $\alpha_1 = 0.35$, $\alpha_2 = 0.5$, $\alpha_3 = 0.7$, $v = 3.2 \times 10^7$, $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = 2$, $\beta = 1 \times 10^{-2}$, $\lambda = 0.95$ e $\gamma_2 = 18$ encontram-se as seguintes matrizes de ganho do controlador

$$K_1 = \begin{bmatrix} -99.5190 & -9.8935 & -0.5385 \end{bmatrix}, K_2 = \begin{bmatrix} -15.2398 & -0.3805 & -1.8000 \end{bmatrix},$$

$$K_3 = \begin{bmatrix} -5.5721 & -4.0739 & -1.3448 \end{bmatrix}.$$

Os parâmetros utilizados para síntese do observador e do controlador são estipulados por meio de avaliação qualitativa em que busca-se o melhor resultado. Uma simulação temporal é realizada levando em conta o perfil de falha (3.28), com condições iniciais do observador e controlador $x(0) = [-0.2 \ 0.4]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$, respectivamente.

A lei de chaveamento empregada e que satisfaz à condição MDADT pode ser conferida na Figura 19, e as evoluções dos estados com suas respectivas estimativas estão ilustradas nas Figuras 20 e 21.

A partir das Figuras 20 e 21 constata-se a boa aproximação entre os estados e suas estimativas. Além disso, a lei de controle projetada garante que os estados tendam assintoticamente para a origem.

O erro advindo da estimação da falha, bem como a entrada de controle e a saída controlada são mostrados na Figura 22. Os resultados demonstram que o observador proposto é hábil para estimar a falha e tal fato é constatado no erro praticamente nulo.

Novamente, recorre-se às simulações de Monte Carlo para avaliar de forma mais adequada o desempenho do sistema. Para tanto, consideram-se 300 simulações adotando valores arbitrários para $d(t)$, $w(t)$. Além disso, para garantir que todo novo sinal de chaveamento $\sigma(t)$ atenda à condição (2.15), adota-se o pior caso de τ_{ai} enquanto sorteiam-se os

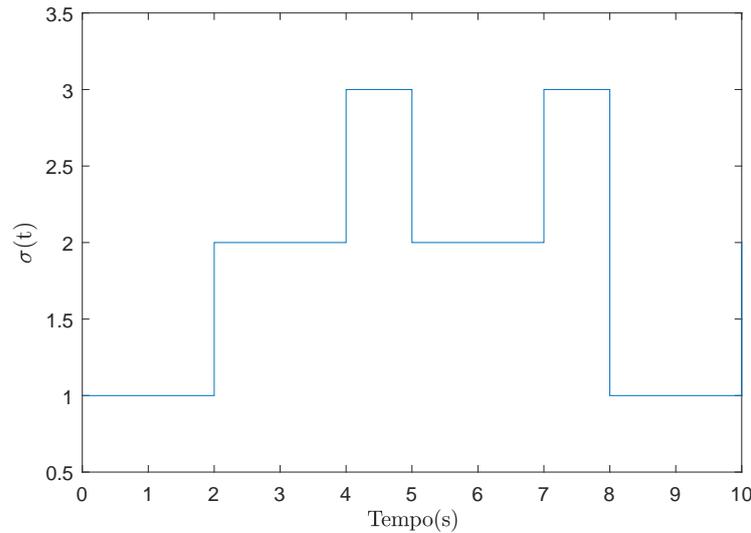


Figura 19 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 4.2.

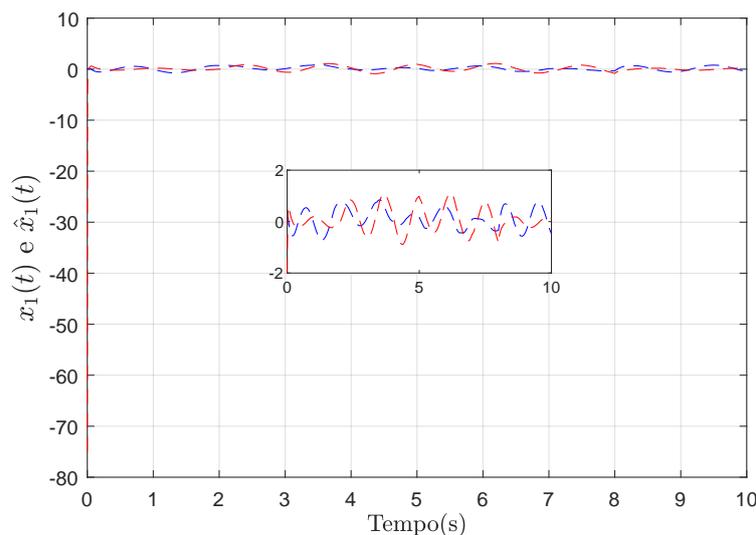


Figura 20 – Evolução dos estados $x_1(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_1(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.2 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

modos do sistema. Os parâmetros de projeto adotados para síntese permanecem os mesmos e considera-se que os estados iniciais do sistema e do observador como $x(0) = [-0.2 \ 0.4]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$, respectivamente. Como resultado, obtém-se a evolução do erro de estimação médio dos estados, sendo verificada a estabilização apropriada do sistema apesar dos efeitos da falha, conforme mostra a Figura 23. A Figura 24 ilustra que a evolução do erro médio de estimação da falha manteve-se em torno da origem resultando em uma boa acurácia para estimar o perfil de falha adotado.

Por fim, novas simulações são realizadas levando em conta os estados do observador e do controlador como sendo nulos, isto é, $x(0) = [0 \ 0]^T$ e $x_0(0) = [0 \ 0]^T$, em

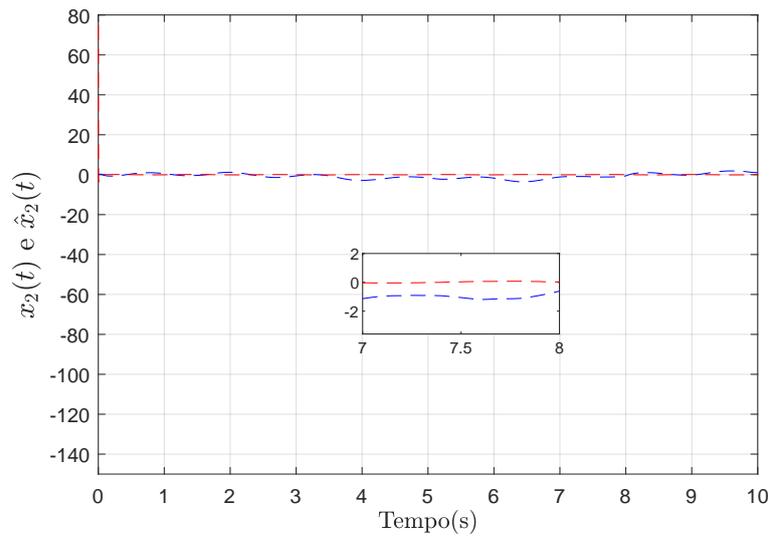


Figura 21 – Evolução dos estados $x_2(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_2(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.2 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

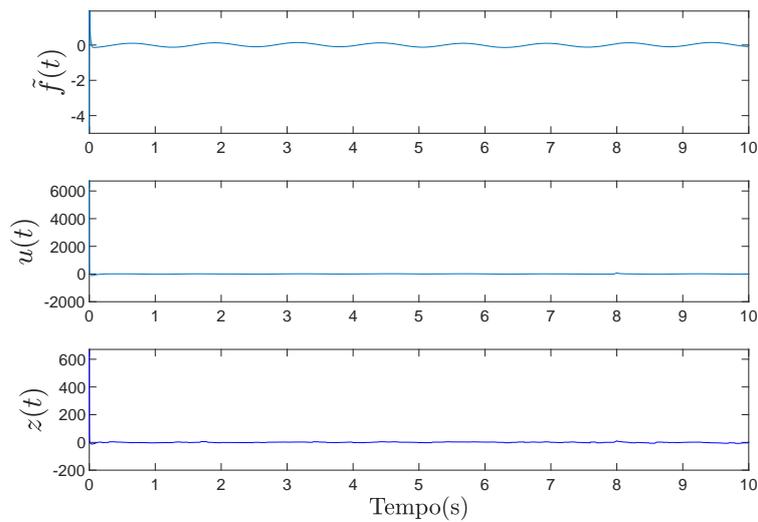


Figura 22 – Erro de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle $u(t)$ e saída controlada $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.2 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

que obtém-se os ganhos médios \mathcal{L}_2 induzidos de $\gamma_0^* = 1.68$, $\gamma_1^* = 2.35 \times 10^{-2}$ e $\gamma_2^* = 2.49$, estando abaixo dos limitantes reportados.

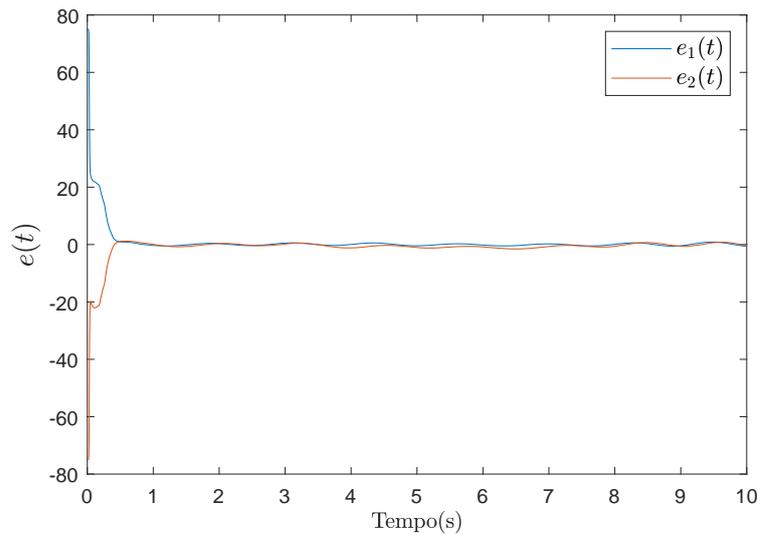


Figura 23 – Evolução do erro de estimação médio dos estados para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.2 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

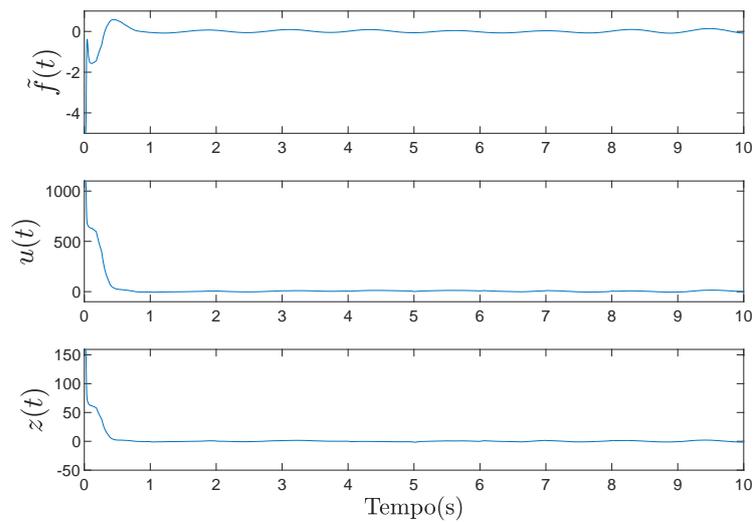


Figura 24 – Erro médio de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle média $u(t)$ e saída controlada média $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.2 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

Exemplo 4.3. Considere o sistema de uma aeronave altamente manobrável retirado

de (EDDOUKALI *et al.*, 2019), o qual é expresso pelo conjunto de matrizes

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \begin{bmatrix} -1.35 & -0.98 \\ 17.1 & -1.85 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} -1.87 & -0.98 \\ 12.6 & -2.63 \end{bmatrix}, \quad B_{u1} = \begin{bmatrix} 1.7 \\ 0.9 \end{bmatrix}, \quad B_{u2} = \begin{bmatrix} 1.9 \\ 3.8 \end{bmatrix}, \\
 C_1 &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad D_{fy1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{fy2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \\
 B_{d1} &= \begin{bmatrix} 0.8 \\ 0.5 \end{bmatrix}, \quad B_{d2} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.3 \end{bmatrix}, \quad B_{w1} = \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.2 \end{bmatrix}, \quad C_{z1} = [0.1 \quad -0.1], \quad D_{uz1} = 0.1, \\
 B_{w2} &= \begin{bmatrix} 0.1 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{f1} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.1 \end{bmatrix}, \quad B_{f2} = \begin{bmatrix} 0.2 \\ 0.8 \end{bmatrix}, \quad C_{z2} = [0.3 \quad -0.4], \quad D_{uz2} = 0.2, \\
 D_{dz1} &= 0.2, \quad D_{dz2} = 0.6, \quad D_{fz1} = 0.4, \quad D_{fz2} = 0.1, \quad D_{wz1} = 0.5, \quad D_{wz2} = 0.2
 \end{aligned}$$

Recorrendo às condições do Teorema 3.1 com $\eta_1 = 0.35$, $\eta_2 = 0.7$, $\xi = 0.3$, $\delta = 8.5$, $\varpi_l = 5\text{rad/s}$, $\gamma_0 = 1.3$, e $\gamma_1 = 9$ obtém-se as matrizes do observador proposto

$$\begin{aligned}
 N_1 &= \begin{bmatrix} -10.1426 & -0.4458 & 1.6165 \\ -0.4296 & -9.8972 & 1.2744 \\ 1.1434 & 0.8108 & -21.1024 \end{bmatrix}, \quad L_1 = \begin{bmatrix} -7.2576 & -3.6817 \\ 1.2631 & 6.0341 \\ 11.1661 & -0.0692 \end{bmatrix}, \\
 N_2 &= \begin{bmatrix} -10.6256 & -0.4562 & 0.9811 \\ -0.4801 & -11.6648 & 2.2876 \\ 0.6174 & 1.6672 & -22.1594 \end{bmatrix}, \quad L_2 = \begin{bmatrix} 3.9632 & -3.9372 \\ -1.2464 & -5.9282 \\ -0.0555 & 11.9318 \end{bmatrix}, \\
 H_1 &= \begin{bmatrix} -0.7191 & -0.4494 \\ -0.4494 & -0.2809 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad H_2 = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.3 \\ -0.3 & -0.9 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad G_1 = \begin{bmatrix} 0.0730 \\ -0.1169 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad G_2 = \begin{bmatrix} 0.5700 \\ -0.1900 \\ 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Em sequência, utilizam-se as condições apresentadas no Teorema 4.1 para sintetizar o controlador, adotando os seguintes parâmetros $\alpha_1 = 0.35$, $\alpha_2 = 0.7$, $v = 1.45 \times 10^7$, $\mu_1 = \mu_2 = 2$, $\beta = 1 \times 10^{-3}$, $\lambda = 10.5$ e $\gamma_2 = 3.3$ e obtendo as seguintes matrizes de ganho do controlador

$$K_1 = [-2.0136 \quad 0.7319 \quad -0.1162], \quad K_2 = [-37.3643 \quad -7.9208 \quad -0.1895].$$

Assim como foi feito no capítulo anterior, todos os parâmetros utilizados para síntese do observador e do controlador foram selecionados de forma empírica no qual chegou-se a um conjunto de valores que gerou os melhores resultados. As condições iniciais para os estados do sistema e do observador são expressas por $x(0) = [-1 \quad 0.5]^T$ e $x_0(0) = [0 \quad 0]^T$, respectivamente, e o perfil de falha em baixa frequência é expresso por

$$f(t) = \begin{cases} 0, & 0s \leq t < 5s \\ -0.02(t - 5)\text{sen}(t - 30), & 5s \leq t < 20s \\ 0, & 20s \leq t < 30s \end{cases}$$

A lei de chaveamento para este exemplo está ilustrada na Figura 25 no qual foi utilizada a equação (2.15) provendo tempos médios de permanência por modos de $\tau_{ai} = 1.98$ segundos e $\tau_{ai} = 0.99$ segundos, além do mais, a evolução dos estados e suas estimativas podem ser conferidas nas Figuras 26 e 27. Nota-se que ambas estimativas aproximam adequadamente dos estados do sistema sendo possível utilizar essas estimativas para sintetizar a lei de controle pretendida. A Figura 28 ilustra a evolução do erro de estimação da falha em

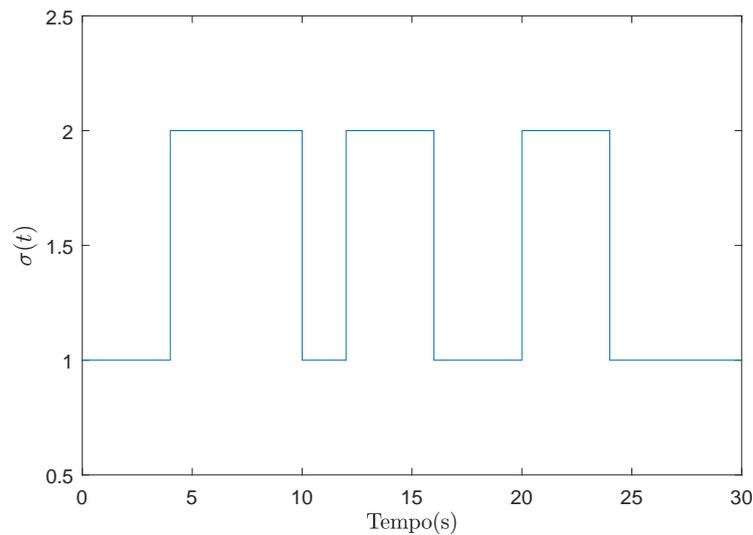


Figura 25 – Sinal de chaveamento $\sigma(t)$ para o sistema do Exemplo 4.3.

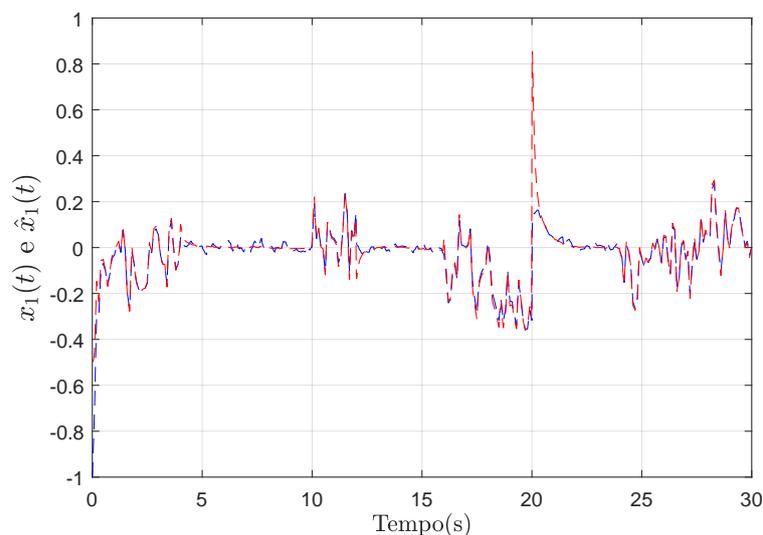


Figura 26 – Evolução dos estados $x_1(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_1(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.3 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

baixa frequência, a entrada de controle e a saída controlada. O erro de estimação apresenta valores próximos a zero indicando boa acurácia no seguimento do perfil de falha adotado.

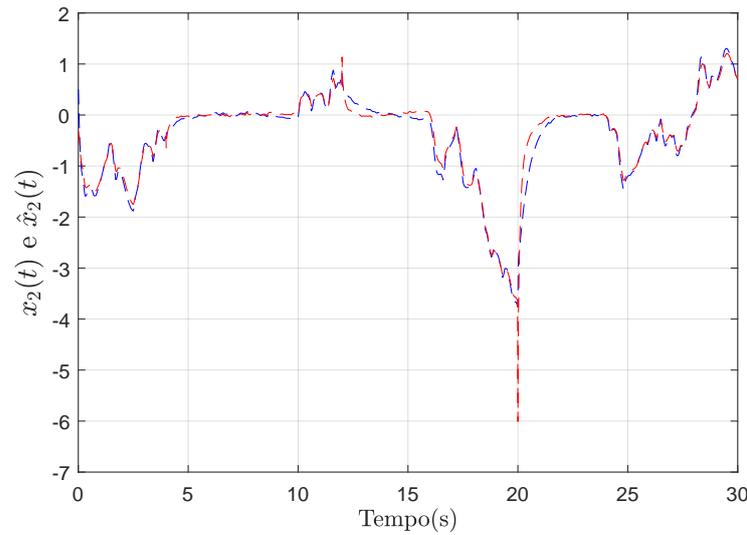


Figura 27 – Evolução dos estados $x_2(t)$ (linha tracejada azul) e suas estimativas $\hat{x}_2(t)$ (linha tracejada vermelha) para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.3 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

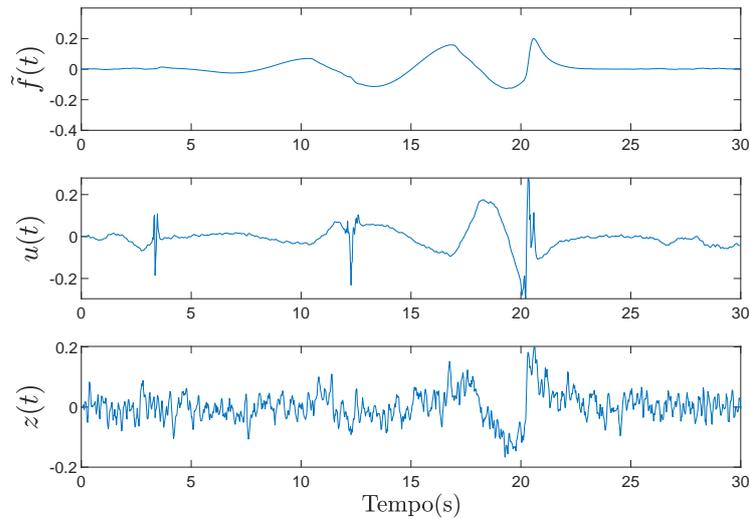


Figura 28 – Erro de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle $u(t)$ e saída controlada $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.3 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

Por fim, o Método de Monte Carlo foi aplicado também ao sistema do Exemplo 4.3 sendo realizadas 300 simulações. Assim como nos exemplos anteriores, os mesmos parâmetros de síntese previamente reportados são considerados e assumem-se valores distintos para os sinais de $d(t)$, $w(t)$ e $\sigma(t)$. A Figura 29 ilustra a evolução do erro de estimação médio dos estados, mostrando a eficácia do método proposto para mitigar o efeito da falha sobre os estados. Além disso, a estimação média da falha deu-se de maneira adequada com valores do erro de estimação em torno de zero, conforme ilustra a

Figura 30.

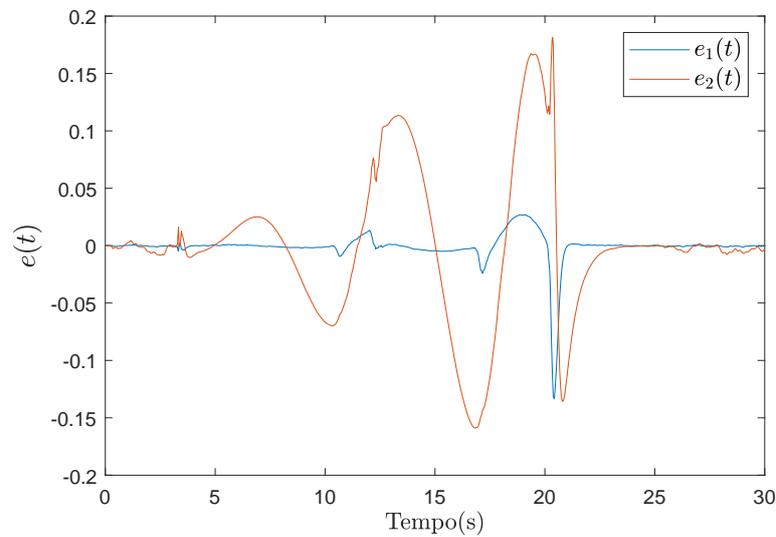


Figura 29 – Evolução do erro de estimação médio dos estados para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.3 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

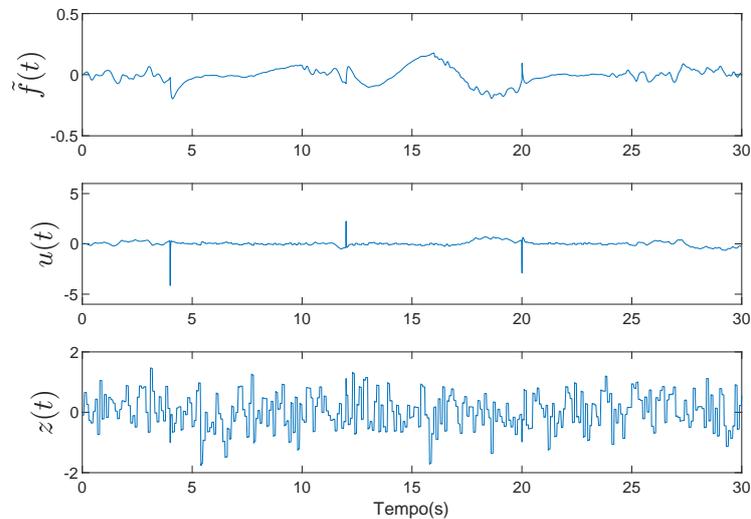


Figura 30 – Erro médio de estimação da falha $\tilde{f}(t)$, entrada de controle média $u(t)$ e saída controlada média $z(t)$ para o sistema em malha fechada do Exemplo 4.3 com o controlador tolerante a falhas baseado em observador.

Os ganhos médios \mathcal{L}_2 induzidos são coletados após as simulações considerando $x(0)$ e $x_0(0)$ nulos, resultando nos seguintes valores $\gamma_0^* = 0.16$, $\gamma_1^* = 0.07$ e $\gamma_2^* = 1.14$, estando abaixo dos limitantes reportados.

4.4 Conclusão

Neste capítulo foram propostas condições de síntese para controladores tolerantes a falhas baseados em observador com custo \mathcal{L}_2 para sistemas chaveados em tempo contínuo. Os resultados obtidos ilustram a eficácia das condições propostas, garantindo a estabilidade assintótica do sistema sob a influência de falhas e entradas desconhecidas.

5 Conclusão

Neste trabalho foram propostas condições de síntese para o projeto de observadores de entradas desconhecidas e de controladores tolerantes a falhas, baseados em observador, para sistemas contínuos chaveados, considerando que a dinâmica do sistema é afetada por entradas exógenas e por falhas em domínio frequencial finito.

No desenvolvimento das condições para síntese do observador de entradas desconhecidas proposto, foram introduzidos elementos para lidar com falhas em faixas de frequência específicas. Os exemplos numéricos ilustram que a abordagem proposta é capaz de estimar tanto a dinâmica da falha quanto os estados do sistema, provendo boa acurácia nas faixas de frequência consideradas durante o projeto de controladores e observadores. Ademais, ao se comparar com uma outra metodologia que contempla todo o domínio frequencial, a abordagem proposta mostrou-se menos conservadora, uma vez que os parâmetros obtidos relativos ao índice de desempenho apresentaram-se inferiores.

Dado o bom desempenho do observador, o passo seguinte consistiu no projeto de controladores tolerantes a falhas considerando que a lei de controle é sintetizada a partir das estimativas dos estados internos e do perfil da falha fornecidos pelo observador. A estrutura do sistema aumentado formado pelo acoplamento do controlador com o observador permite que ambos os dispositivos sejam projetados independentemente.

As condições propostas para a síntese do controlador tolerante a falhas utilizam o método de tempo médio de permanência dependente de modos, diminuindo o conservadorismo das condições propostas e garantindo a estabilidade do sistema em malha fechada. O custo garantido \mathcal{L}_2 foi utilizado como critério de desempenho para comparação com outras metodologias presentes na literatura. Os resultados obtidos por meio de exemplos numéricos indicam que a metodologia proposta possui um bom desempenho, mitigando o efeito da falha sobre a dinâmica do sistema e garantindo a estabilidade assintótica do sistema em malha fechada.

5.1 Trabalhos Futuros

Uma ideia de trabalho futuro consiste em implementar métodos de controle acionados por eventos ao invés do método de tempo médio de permanência dependente de modo, de forma a determinar quando e para qual modo o sistema deve transitar, na tentativa de prover melhores resultados.

Outro aspecto muito importante que pode ser abordado em um trabalho futuro é o desenvolvimento de observadores e controladores quando não se tem a informação direta da função de chaveamento $\sigma(t)$.

Uma outra abordagem possível é estender a aplicação para outras classes de sistemas dinâmicos, como, por exemplo, sistemas nebulosos.

Ademais, para retratar de forma mais fidedigna um sistema real pode-se acrescentar o parâmetro $w(t)$ na saída do sistema, impactando nas condições, visto que, o termo relativo a sua derivada (que pode tomar valores de altas magnitudes nos sinais) irá aparecer no desenvolvimento tornando mais complexo o problema.

5.2 Trabalhos Desenvolvidos

1. ANASTÁCIO, C. M. S.; FREZZATTO, L. \mathcal{H}_∞ observer-based fault-tolerant control for switched-systems in finite frequency. *ISA Transactions*. Submetido.
2. ANASTÁCIO, C. M. S.; FREZZATTO, L. Estimação da dinâmica de falhas em faixas finitas de frequência para sistemas contínuos chaveados. In: *Anais do XXIII Congresso Brasileiro de Automática*. CBA, v. 2, n. 1, 2020.

Referências

- APS, M. Mosek optimization toolbox for Matlab. *User's Guide and Reference Manual, version*, v. 4, 2019. Citado na página 39.
- BENZAOUIA, A.; EDDOUKALI, Y. Robust fault detection and control for continuous-time switched systems with average dwell time. *Circuits Systems and Signal Processing*, v. 37, n. 6, p. 2357–2373, 2018. Citado 4 vezes nas páginas 17, 37, 42 e 55.
- BERGHUIS, H.; NIJMEIJER, H. A passivity approach to controller-observer design for robots. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, v. 9, n. 6, p. 740–754, 1993. Citado na página 19.
- BLANKE, Z.; KINNAERT, M.; LUNZE, J.; STAROSWIECKI, M.; SCHRÖDER, J. *Diagnosis and fault-tolerant control*. New York, NY, USA: Springer, 2006. v. 2. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 18.
- BOYD, S.; BALAKRISHNAN, V.; FERON, E.; GHAOUI, L. E. Control system analysis and synthesis via linear matrix inequalities. In: *Proceedings of the 1993 American Control Conference*. San Francisco, CA, USA: IEEE, 1993. p. 2147–2154. Citado na página 19.
- CAMLIBEL, M. K.; FRASCA, R. Extension of Kalman–Yakubovich–Popov lemma to descriptor systems. *Systems & Control Letters*, v. 58, n. 12, p. 795–803, 2009. Citado na página 29.
- CHEN, J.; CAO, Y.-Y. A stable fault detection observer design in finite frequency domain. *International Journal of Control*, v. 86, n. 2, p. 290–298, 2013. Citado na página 20.
- CHEN, J.; CAO, Y.-Y.; ZHANG, W. A fault detection observer design for LPV systems in finite frequency domain. *International Journal of Control*, v. 88, n. 3, p. 571–584, 2015. Citado na página 29.
- CHEN, J.; PATTON, R. J. *Robust Model-Based Fault Diagnosis for Dynamic Systems*. Boston, USA: Springer Publishing Company, Incorporated, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 18 e 19.
- CHEN, J.; PATTON, R. J.; ZHANG, H.-Y. Design of unknown input observers and robust fault detection filters. *International Journal of Control*, v. 63, n. 1, p. 85–105, 1996. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 29.
- CHEN, W.; SAIF, M. Unknown input observer design for a class of nonlinear systems: an LMI approach. In: *Proceedings of the 2006 American Control Conference*. Minneapolis, MN, USA: IEEE, 2006. p. 834–838. Citado na página 19.
- CHENG, D.; GUO, L.; LIN, Y.; WANG, Y. Stabilization of switched linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 5, p. 661–666, 2005. Citado na página 17.
- CUI, Y.; HUANG, X.-h.; WANG, M. Multi-objective robust fault detection filter design in a finite frequency range. In: *International Symposium on Neural Networks*. Wuhan, China: Springer, 2009. p. 733–743. Citado na página 20.

- DE OLIVEIRA, M. C.; SKELTON, R. E. Stability tests for constrained linear systems. In: Reza Moheimani, S. O. (Ed.). *Perspectives in Robust Control*. New York, NY: Springer-Verlag, 2001, (Lecture Notes in Control and Information Science, v. 268). p. 241–257. Citado na página 30.
- DEAECTO, G. S.; DAAFOUZ, J.; GEROMEL, J. C. \mathcal{H}_2 and \mathcal{H}_∞ performance optimization of singularly perturbed switched systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 50, n. 3, p. 1597–1615, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 30 e 31.
- DECARLO, R. A.; BRANICKY, M. S.; PETTERSSON, S.; LENNARTSON, B. Perspectives and results on the stability and stabilizability of hybrid systems. *Proceedings of the IEEE*, v. 88, n. 7, p. 1069–1082, 2000. Citado na página 25.
- DING, D.-W.; DU, X. Finite-frequency model reduction of continuous-time switched linear systems with average dwell time. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 103, n. 11, p. 1894–1908, 2016. Citado 2 vezes nas páginas 29 e 35.
- DU, D.; COCQUEMPOT, V.; JIANG, B. Robust fault estimation observer design for switched systems with unknown input. *Applied Mathematics Letters*, v. 348, p. 70–83, 2019. Citado 11 vezes nas páginas 10, 17, 18, 19, 39, 40, 41, 43, 44, 46 e 47.
- DU, D.; XU, S.; COCQUEMPOT, V. Actuator fault estimation for discrete-time switched systems with finite-frequency. *Systems & Control Letters*, v. 108, p. 64–70, 2017. Citado na página 20.
- DU, D.; XU, S.; COCQUEMPOT, V. Finite-frequency fault detection filter design for discrete-time switched systems. *IEEE Access*, v. 6, p. 70487–70496, 2018. Citado na página 20.
- EDDOUKALI, Y.; BENZAOUIA, A.; OULADSINE, M. Integrated fault detection and control design for continuous-time switched systems under asynchronous switching. *ISA Transactions*, v. 84, p. 12–19, 2019. Citado na página 64.
- FREZZATTO, L.; OLIVEIRA, R. C.; PERES, P. L. \mathcal{L}_2 -gain filter design for continuous-time LPV systems in finite frequency domain. *IFAC-PapersOnLine*, v. 51, n. 26, p. 161–166, 2018. Citado na página 29.
- GEROMEL, J. C.; COLANERI, P. Stability and stabilization of continuous-time switched linear systems. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 45, n. 5, p. 1915–1930, 2006. Citado na página 24.
- GHAOUI, L. E.; NICULESCU, S.-L. *Advances in linear matrix inequality methods in control*. USA: SIAM, 2000. Citado na página 19.
- HAN, J.; ZHANG, H.; WANG, Y.; SUN, X. Robust fault detection for switched fuzzy systems with unknown input. *IEEE Transactions on Cybernetics*, v. 48, n. 11, p. 3056–3066, 2019. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 20.
- HELLANI, D. E.; HAJJAJI, A. E.; CESCHI, R. Finite frequency \mathcal{H}_∞ filter design for TS fuzzy systems: New approach. *Signal Processing*, v. 143, p. 191–199, 2018. Citado na página 29.

- HESPANHA, J. P.; MORSE, A. S. Stability of switched systems with average dwell-time. In: *Proceedings of the 38th IEEE Conference on Decision and Control*. Phoenix, Arizona: IEEE, 1999. v. 3, p. 2655–2660. Citado 4 vezes nas páginas 17, 22, 24 e 26.
- HEYMANN, M.; LIN, F.; MEYER, G.; RESMERITA, S. Analysis of Zeno behaviors in a class of hybrid systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 3, p. 376–383, 2005. Citado na página 24.
- ISERMANN, R. *Fault-diagnosis systems: An introduction from fault detection to fault tolerance*. Heidelberg, Germany: Springer Science & Business Media, 2005. Citado na página 18.
- ISERMANN, R. *Fault-diagnosis applications: model-based condition monitoring: Actuators, drives, machinery, plants, sensors, and fault-tolerant systems*. Heidelberg, Germany: Springer Science & Business Media, 2011. Citado na página 18.
- IWASAKI, T.; HARA, S. Generalized KYP lemma: Unified frequency domain inequalities with design applications. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 50, n. 1, p. 41–59, 2005. Citado 3 vezes nas páginas 20, 28 e 29.
- KHALIL, H. K. *Nonlinear systems*. New Jersey, USA: Prentice hall, 2002. Citado na página 54.
- KING, C.; SHORTEN, R. An extension of the KYP-lemma for the design of state-dependent switching systems with uncertainty. *Systems & Control Letters*, v. 62, n. 8, p. 626–631, 2013. Citado na página 29.
- LADEL, A. A.; BENZAOUIA, A.; OUTBIB, R.; OULADSINE, M. Integrated sensor fault estimation and control for continuous-time switched systems: A new separation principle. *ISA Transactions*, 2020. Citado 5 vezes nas páginas 18, 19, 20, 49 e 55.
- LI, J.; PAN, K.; ZHANG, D.; SU, Q. Robust fault detection and estimation observer design for switched systems. *Nonlinear Analysis Hybrid Systems*, v. 34, p. 30–42, 2019. Citado na página 19.
- LI, L.; LIU, L.; YIN, Y. Stability analysis for discrete-time switched nonlinear system under MDADT switching. *IEEE Access*, v. 5, p. 18646–18653, 2017. Citado na página 26.
- LIAN, J.; LI, C. Event-triggered adaptive tracking control of uncertain switched nonlinear systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, 2021. Citado na página 24.
- LIBERZON, D. *Switching in systems and control*. Urbana, USA: Springer Science & Business Media, 2003. Citado 2 vezes nas páginas 23 e 24.
- LIBERZON, D. Switched systems. In: *Handbook of networked and embedded control systems*. Urbana, USA: Springer, 2005. p. 559–574. Citado na página 27.
- LIBERZON, D.; MORSE, A. S. Basic problems in stability and design of switched systems. *IEEE Control Systems Magazine*, v. 19, n. 5, p. 59–70, 1999. Citado 3 vezes nas páginas 17, 22 e 23.

- LIN, H.; ANTSAKLIS, P. J. Stability and stabilizability of switched linear systems: A survey of recent results. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 54, n. 2, p. 308–322, 2009. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 22.
- LIU, H.; SHEN, Y.; ZHAO, X. Delay-dependent observer-based \mathcal{H}_∞ finite-time control for switched systems with time-varying delay. *Nonlinear Analysis: Hybrid Systems*, Elsevier, v. 6, n. 3, p. 885–898, 2012. Citado na página 49.
- LIU, L.; ZHOU, Q.; LIANG, H.; WANG, L. Stability and stabilization of nonlinear switched systems under average dwell time. *Applied Mathematics and Computation*, v. 298, p. 77–94, 2017. Citado na página 26.
- LÖFBERG, J. YALMIP: A toolbox for modeling and optimization in MATLAB. In: *Proceedings of the 2004 IEEE International Symposium on Computer Aided Control Systems Design*. Taipei, Taiwan: IEEE, 2004. p. 284–289. Citado na página 39.
- LYAPUNOV, A. M. The general problem of the stability of motion. *International Journal of Control*, v. 55, n. 3, p. 531–534, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 19 e 24.
- MAZANTI, G. A. *Sistemas Chaveados: Estudo Geral*. 2011. Trabalho de Conclusão de Curso, USP (Universidade de São Paulo), Escola de Engenharia de São Carlos, São Paulo, Brasil. Citado 3 vezes nas páginas 22, 23 e 24.
- MHASKAR, P.; EL-FARRA, N. H.; CHRISTOFIDES, P. D. Predictive control of switched nonlinear systems with scheduled mode transitions. *SIAM Journal on Control and Optimization*, v. 50, n. 11, p. 1670–1680, 2005. Citado na página 22.
- MONDAL, S.; CHAKRABORTY, G.; BHATTACHARYY, K. Lmi approach to robust unknown input observer design for continuous systems with noise and uncertainties. *International Journal of Control, Automation, and Systems*, v. 8, n. 2, p. 210–219, 2010. Citado na página 19.
- NIU, B.; ZHAO, P.; LIU, J.-D.; MA, H.-J.; LIU, Y.-J. Global adaptive control of switched uncertain nonlinear systems: An improved MDADT method. *Automatica*, v. 115, p. 108872, 2020. Citado na página 26.
- OUZGHIRI, M.; CHADLI, M.; HAJJAJI, A. E. Robust observer-based fault-tolerant control for vehicle lateral dynamics. *International Journal of vehicle design*, v. 48, n. 3-4, p. 173–189, 2008. Citado na página 19.
- PALHARES, R. M.; PERES, P. L. Robust filtering with guaranteed energy-to-peak performance – An LMI approach. *Automatica*, v. 36, n. 6, p. 851–858, 2000. Citado na página 19.
- PAPAGEORGIU, M.; DIAKAKI, C.; DINOPOULOU, V.; KOTSIALOS, A.; WANG, Y. Review of road traffic control strategies. *Proceedings of the IEEE*, v. 91, n. 12, p. 2043–2067, 2003. Citado na página 22.
- QIU, J.; REN, M.; NIU, Y.; ZHAO, Y.; GUO, Y. Fault estimation for nonlinear dynamic systems. *Circuits Systems and Signal Processing*, v. 31, n. 2, p. 555–564, 2012. Citado na página 18.

- RANTZER, A. On the Kalman-Yakubovich-Popov lemma for positive systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 61, n. 5, p. 1346–1349, 2015. Citado na página 28.
- REN, W.; YU, T.; XIONG, J. Stability analysis of impulsive switched systems with time delays and state-dependent impulses. In: *Proceedings of the 2016 American Control Conference*. Denver, USA: IEEE, 2020. p. 1809–1814. Citado na página 24.
- RODRIGUES, M.; THEILLIOL, D.; SAUTER, D. Fault tolerant control design for switched systems. In: *Analysis and Design of Hybrid Systems 2006*. Alghero, Italy: Elsevier, 2006. p. 223–228. Citado na página 19.
- SAOUDI, D.; CHADLI, M.; MECHMECHE, C.; BRAIEK, N. B. Unknown input observer design for fuzzy bilinear system: An LMI approach. *Mathematical Problems in Engineering*, v. 2012, 2012. Citado na página 19.
- SCHAFT, A. J. V. D.; SCHUMACHER, J. M. *An introduction to hybrid dynamical systems*. London, UK: Springer London, 2000. v. 251. Citado na página 24.
- SCHARLAU, C. C. Controle de sistemas chaveados e aplicações. 2013. Tese, UFSC (Universidade Federal de Santa Catarina), Santa Catarina, Brasil. Citado na página 23.
- SCHERER, C. W. LMI relaxations in robust control. *European Journal of Control*, v. 12, n. 1, p. 3–29, 2006. Citado na página 19.
- SHIEH, H.-J.; SHYU, K.-K. Nonlinear sliding-mode torque control with adaptive backstepping approach for induction motor drive. *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, v. 46, n. 2, p. 380–389, 1999. Citado na página 22.
- SHTESSEL, Y. B.; ZINOBER, A. S.; SHKOLNIKOV, I. A. Boost and Buck-Boost power converters control via sliding modes using dynamic sliding manifold. In: *Proceedings of the 41st IEEE Conference on Decision and Control, 2002*. Las Vegas, NV, USA: IEEE, 2002. v. 3, p. 2456–2461. Citado na página 22.
- STOORVOGEL, A. A.; SABERI, A.; CHEN, B. M. A reduced order observer based controller design for \mathcal{H}_∞ optimization. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 39, n. 2, p. 355–360, 1994. Citado na página 19.
- TELBISSI, K.; BENZAOUIA, A. Actuator fault estimation based on proportional-integral observer for delayed continuous-time switched systems. *Circuits Systems and Signal Processing*, v. 38, n. 10, p. 4405–4419, 2019. Citado na página 19.
- WANG, Y.; PUIG, V.; CEMBRANO, G.; ZHAO, Y. Zonotopic fault detection observer for discrete-time descriptor systems considering fault sensitivity. *International Journal of Systems Science*, v. 52, n. 1, p. 95–109, 2021. Citado na página 29.
- WANG, Z.; SHI, P.; LIM, C.-C. Robust fault estimation observer in the finite frequency domain for descriptor systems. *International Journal of Control*, v. 92, n. 7, p. 1590–1599, 2019. Citado na página 38.
- WU, Y.; DONG, J.; LI, T. Sensor fault estimation in finite-frequency domain for nonlinear time-delayed systems by T-S fuzzy model approach with local nonlinear models. *International Journal of Systems Science*, v. 50, n. 11, p. 2226–2247, 2019. Citado na página 38.

- WÜNNENBERG, J.; FRANK, P. Sensor fault detection via robust observers. In: *System fault diagnostics, reliability and related knowledge-based approaches*. Dordrecht: Springer, 1987. p. 147–160. Citado na página 19.
- XIAO-ZHENG, J.; GUANG-HONG, Y. Robust adaptive fault-tolerant compensation control with actuator failures and bounded disturbances. *Acta Automatica Sinica*, v. 35, n. 3, p. 305–309, 2009. Citado na página 19.
- XIE, D.; XU, N.; CHEN, X. Stabilisability and observer-based switched control design for switched linear systems. *IET Control Theory & Applications*, v. 2, n. 3, p. 192–199, 2008. Citado na página 49.
- YANG, H.; XIA, Y.; LIU, B. Fault detection for T–S fuzzy discrete systems in finite-frequency domain. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part B: Cybernetics*, v. 41, n. 4, p. 911–920, 2011. Citado 2 vezes nas páginas 20 e 29.
- YANG, H.; XIA, Y.; ZHANG, J. Generalised finite-frequency KYP lemma in delta domain and applications to fault detection. *International Journal of Control*, v. 84, n. 3, p. 511–525, 2011. Citado na página 20.
- YEU, T.-K.; KIM, H.-S.; KAWAJI, S. Fault detection, isolation and reconstruction for descriptor systems. *Asian Journal of Control*, v. 7, n. 4, p. 356–367, 2005. Citado na página 32.
- YU, Q.; GUO, Y.; YAN, J.; LI, Y. The relationship between ADT and MDADT schemes for switched systems. In: *Proceedings of the 2019 Academic Annual Conference of Chinese Association of Automation*. Jinzhou, China: IEEE, 2019. p. 216–220. Citado na página 25.
- ZHANG, H.; HAN, J.; WANG, Y.; LIU, X. Sensor fault estimation of switched fuzzy systems with unknown input. *IEEE Transactions on Fuzzy Systems*, v. 26, n. 3, p. 1114–1124, 2017. Citado na página 17.
- ZHANG, H.; XIE, D.; ZHANG, H.; WANG, G. Stability analysis for discrete-time switched systems with unstable subsystems by a mode-dependent average dwell time approach. *ISA Transactions*, v. 53, n. 4, p. 1081–1086, 2014. Citado na página 17.
- ZHANG, J.; SUN, Y.; MENG, F. State bounding for discrete-time switched nonlinear time-varying systems using ADT method. *Applied Mathematics and Computation*, v. 372, p. 125002, 2020. Citado na página 26.
- ZHANG, L.; GAO, H. Asynchronously switched control of switched linear systems with average dwell time. *Automatica*, v. 46, n. 5, p. 953–958, 2010. Citado na página 26.
- ZHAO, X.; ZHANG, L.; SHI, P. Stability of a class of switched positive linear time-delay systems. *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, v. 23, n. 5, p. 578–589, 2013. Citado na página 26.
- ZHAO, X.; ZHANG, L.; SHI, P.; LIU, M. Stability and stabilization of switched linear systems with mode-dependent average dwell time. *IEEE Transactions on Automatic Control*, v. 57, n. 7, p. 1809–1815, 2012. Citado 4 vezes nas páginas 17, 24, 26 e 27.

- ZHENG, Q.; XU, S.; ZHANG, Z. Nonfragile \mathcal{H}_∞ observer design for uncertain nonlinear switched systems with quantization. *Applied Mathematics and Computation*, v. 386, p. 125435, 2020. Citado na página 26.
- ZHONG, G.-X.; YANG, G.-H. Fault detection for discrete-time switched systems in finite-frequency domain. *Circuits Systems and Signal Processing*, v. 34, n. 4, p. 1305–1324, 2015. Citado 3 vezes nas páginas 17, 20 e 22.
- ZHONG, G.-X.; YANG, G.-H. Simultaneous control and fault detection for discrete-time switched delay systems under the improved persistent dwell time switching. *IET Control Theory & Applications*, v. 10, n. 7, p. 814–824, 2016. Citado na página 20.
- ZHONG, M.; DING, S.; TANG, B.; ZHANG, P.; JEINSCH, T. An LMI approach to robust fault detection filter design for discrete-time systems with model uncertainty. In: *Proceedings of the 40th IEEE Conference on Decision and Control*. Orlando, FL, USA: IEEE, 2001. v. 4, p. 3613–3618. Citado na página 19.
- ZHONG, M.; DING, S. X.; LAM, J.; WANG, H. An LMI approach to design robust fault detection filter for uncertain LTI systems. *Automatica*, v. 39, n. 3, p. 543–550, 2003. Citado na página 19.
- ZHU, X.; XIA, Y.; FU, M. Fault estimation and active fault-tolerant control for discrete-time systems in finite-frequency domain. *ISA Transactions*, v. 104, p. 184–191, 2020. Citado 3 vezes nas páginas 20, 49 e 55.