

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Deivide Kenede Esteves

O potencial efetivo a temperatura finita
no Modelo Padrão

BELO HORIZONTE
2023

Deivide Kenede Esteves

O potencial efetivo a temperatura finita no Modelo Padrão

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Bruce Lehmann Sánchez Vega

Belo Horizonte

2023

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

E79p Esteves, Deivide Kenede.
O potencial efetivo a temperatura finita no modelo padrão / Deivide Kenede Esteves. – 2023.
78f. : il.

Orientador: Bruce Lehmann Sánchez Vega.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 75-78.

1. Transição de fase. 2. Modelo padrão. I. Título. II. Sánchez Vega, Bruce Lehmann. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 531.19 (043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

A presente dissertação, intitulada de “**O potencial efetivo a temperatura finita no Modelo Padrão**” de autoria de **DEVIDE KENEDE ESTEVES**, submetida à Comissão Examinadora, abaixo-assinada, foi aprovada para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA** em vinte e oito de fevereiro de 2023.

Belo Horizonte, 28 de fevereiro de 2023.

Prof. Bruce Lehmann Sánchez Vega

Orientador do estudante

Departamento de Física/UFMG

Prof. Gláuber Carvalho Dorsch

Departamento de Física/UFMG

Prof. Alexis Roa Aguirre

Instituto de Física e Química/UNIFEI



Documento assinado eletronicamente por **Gláuber Carvalho Dorsch, Professor do Magistério Superior**, em 01/03/2023, às 10:16, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Bruce Lehmann Sanchez Vega, Coordenador(a)**, em 01/03/2023, às 10:26, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Alexis Roa Aguirre, Usuário Externo**, em 01/03/2023, às 11:02, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2110331** e o código CRC **472E7722**.

Referência: Processo nº 23072.210551/2023-36

SEI nº 2110331

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha mãe que mesmo em sua doença me apoiou, me deu amor, carinho e foi companheira durante todo meu trabalho no mestrado. Ao meu pai por todos os momentos de distração e passeios, as cervejas tomadas e as boas conversas que em momentos de descanso foram fundamentais para a conclusão do meu mestrado.

Sou grato aos meus amigos que estão em minha cidade natal que sempre me apoiaram incondicionalmente em toda minha caminhada profissional. Aos amigos que fiz na graduação. Ao pessoal da Irmandade4 que muito além de uma república se tornaram parte da minha família e me ajudam a tomar decisões importantes.

Ao Professor Doutor, Bruce Lehmann Sánchez Vega, pela oportunidade de conhecer melhor a física de partículas, e também pelos ensinamentos que pude adquirir durante o mestrado.

Ao Grupo de física de partículas da UFMG pela amizade, convivência e intercâmbio de experiências e ensinamentos, os quais carregarei por toda minha vida.

À Universidade e ao corpo docente, que, para mim, sempre foi e sempre será uma referência de conhecimento e acolhimento e, ainda que remotamente, garantiu aos alunos um ensino de qualidade.

À CNPq, pelo fomento que foi essencial para a realização deste trabalho.

Um agradecimento especial a ACCCOM, uma referência no tratamento do câncer, as enfermeiras, médicas e todo o pessoal que cuidam de minha mãe, que se não fosse pelo cuidado com ela nada disso seria possível.

E a todos que direta ou indiretamente fizeram parte da minha formação, o meu muito obrigado.

“Em alguma passagem de suas obras, Hegel comenta que todos os grandes fatos e todos os grandes personagens da história mundial são encenados, por assim dizer, duas vezes. Ele se esqueceu de acrescentar: a primeira vez como tragédia, a segunda como farsa.
(MARX, K., Dezoito Brumário de Louis Bonaparte, 1852)

Resumo

A teoria das partículas elementares possui simetrias, espontaneamente quebradas por campos escalares quando os mesmos desenvolvem um valor esperado de vácuo diferente de zero, no valor mínimo do potencial efetivo. Então, enquanto o universo resfria, ele passa por uma série de transições de fase de primeira e segunda ordem entre os mínimos do potencial. A transição de fase eletrofraca de primeira ordem forte será o foco dessa dissertação, para tentarmos entender quais os critérios para termos a bariogénesis.

Para entender a história do universo precisamos analisar a densidade das partículas que o compõem e como essas partículas se comportam com o passar do tempo. Nos primórdios do universo, esse era tão compacto e quente, que a formação de elementos leves era impossível, pois a aniquilação de partículas-antipartículas e a energia das partículas restantes eram maiores que o necessário para a combinação de elementos de um átomo. Esse universo, devido essas altas energias, estava em equilíbrio, vemos que fenômenos que perturbam esse equilíbrio tem um papel na formação desses elementos.

O universo ao expandir as temperaturas diminuíram e também as energias das partículas que o compõem, sendo assim, é necessário avaliar a termodinâmica do universo primordial e qual o papel dessa na formação dos elementos.

Para que o universo tenha um número bariônico diferente de zero, algumas simetrias precisam ser quebradas. Como dito anteriormente, a quebra espontânea de simetria para o início de nossa descrição deve ser avaliada, precisamos então, descrever o valor esperado do vácuo com o potencial ao nível de árvore, após isso encontraremos a correção a 1-loop a temperatura zero e temperatura finita.

A razão entre o valor do mínimo do potencial com a temperatura é uma forma de mensurar a força da transição de fase. Se impusermos que essa razão deve ser maior ou igual a um, encontramos um limite para a massa de Higgs de 45 GeV, que difere dos valores atuais encontrados no LHC que é 125,25 GeV.

Palavras-chave: Potencial de Coleman-Weinberg, potencial efetivo a temperatura finita, transição de fase eletrofraca.

Abstract

The theory of elementary particles has symmetries, spontaneously broken by scalar fields when they develop a vacuum expectation value different from zero at the minimum of the effective potential. So, as the universe cools, it goes through a series of first- and second-order phase transitions between potential minima. The strong first order electroweak phase transition will be the focus of this dissertation, in order to try to understand the criteria for having baryogenesis.

To understand the history of the universe, we need to analyze the density of the particles that compose it and how these particles behave over time. In the early days of the universe, it was so compact and hot that the formation of light elements was impossible, as the annihilation of particles-antiparticles and the energy of the remaining particles was greater than necessary for the combination of constituents of an atom. This universe, due to these high energies, was in equilibrium, we see that phenomena that disturb this balance play a role in the formation of these elements.

When the universe expands, temperatures decrease and also the energies of the particles that compose it, therefore, it is necessary to evaluate the thermodynamics of the primordial universe and what its role in the formation of elements.

For the universe to have a baryonic number other than zero, some symmetries need to be broken. As previously stated, the spontaneous symmetry breaking at the beginning of our description needs to be evaluated, we then need to describe the expectation value of the vacuum with the potential at the tree level, after which we will find the 1-loop correction at zero and finite temperature.

The ratio between the minimum value of the potential and the temperature is a way to measure the strength of the phase transition. If we impose that this ratio must be greater or equal to one, we find a limit for the Higgs mass of 45 GeV that differs from the current values found at the LHC, which is 125.25 GeV.

Keywords: Coleman-Weinberg potential, effective potential at finite temperature, electroweak phase transition.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Representação das nucleações de bolhas onde a fase de Higgs é o valor esperado do vácuo e a fase simétrica é onde o vácuo está em seu meta estado.	14
Figura 2 – Representação diagramática da solução perturbativa para o campo clássico.	17
Figura 3 – Funções de Green que aparecem na solução perturbativa do campo clássico, e os coeficientes da expansão de Taylor do gerador funcional, W_{tree}	18
Figura 4 – Representação diagramática de $\tilde{G}^{(2)}(p)$ em termos de $\Sigma(p)$	19
Figura 5 – Caso onde $m_0^2 > 0$ com mínimo estável em $\phi_c = 0$ e caso onde $m_0^2 < 0$ com mínimo estável em $\phi_c = \pm\phi'_c$	22
Figura 6 – Diagramas que representam o potencial efetivo a 1-loop do campo escalar.	28
Figura 7 – Diagramas que representam o potencial efetivo a 1-loop do campo fermiônico.	34
Figura 8 – Potencial ao nível de árvore com os valores de $\lambda = 0.13$ e $v_0 = 246$ GeV.	50
Figura 9 – Potencial ao nível de árvore comparado com o potencial efetivo a temperatura zero com os valores de $\lambda = 0.13$ e $v_0 = 246$ GeV.	53
Figura 10 – Diagrama de anéis.	54
Figura 11 – Representação do tensor de polarização.	56
Figura 12 – Propagador com e sem a contribuição do tensor de polarização.	56
Figura 13 – Contribuição do tensor de polarização a ordem λ^N	57
Figura 14 – O potencial a temperatura finita representado pela linha tracejada e o gráfico em linha preta solida o potencial a temperatura zero. Sendo assim é possível ver a restauração da simetria a altas temperaturas com o potencial encontrado em (7.52).	58
Figura 15 – Comportamento do mínimo em relação à temperatura.	59
Figura 16 – Massas do bóson de Higgs e Goldstone. A linha tracejada mostra o valor da massa mensurada do Higgs em relação ao valor de $v = 246$ GeV. . .	60
Figura 17 – Massas dos bósons W e Z . A linha tracejada mostra o valor da massa mensurada dos bósons de calibre em relação ao valor de $v = 246$ GeV.	62
Figura 18 – Massas do quark top. A linha tracejada mostra o valor da massa mensurada do quark top em relação ao valor de $v = 246$ GeV.	64
Figura 19 – Comportamento das funções I_b e $I_{b,\text{aprox.}}$	70
Figura 20 – Comportamento das funções I_f e $I_{f,\text{aprox.}}$	70
Figura 21 – Comportamento dos potenciais. O V_{eff} foi plotado com $T = 100$ GeV. .	71
Figura 22 – Comportamento de $V(T, \frac{v}{T})$ e $V_{\text{aprox.}}(T, \frac{v}{T})$, em relação a $\frac{v}{T}$	72

Figura 23 – Comportamento do potencial efetivo no Modelo Padrão em relação ao $\frac{v}{T_c}$	72
Figura 24 – $\frac{v}{T}$ em relação à massa do Higgs.	73

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
2	A AÇÃO EFETIVA	16
3	O POTENCIAL EFETIVO DE UM CAMPO ESCALAR.	23
3.1	Primeiro método: integral de caminho.	23
3.2	Segundo método: cálculo usando diagramas de Feynman a 1-loop	27
4	O POTENCIAL EFETIVO DE UM CAMPO DE SPIN MEIO.	30
4.1	Primeiro método: integral de caminho.	30
4.2	Segundo método: cálculo usando diagramas de Feynman a 1-loop	33
5	O POTENCIAL EFETIVO DO CAMPO DE BÓSONS DE CALIBRE.	35
5.1	Cálculo no caso abeliano.	35
5.2	Cálculo no caso não abeliano.	37
6	POTENCIAL EFETIVO À TEMPERATURA FINITA.	40
6.1	O universo como um sistema termodinâmico	40
6.2	O potencial efetivo a temperatura finita	41
7	O POTENCIAL EFETIVO A TEMPERATURA FINITA NO MO- DELO PADRÃO.	49
7.1	Campo escalar real	49
7.1.1	O potencial de Coleman–Weinberg	50
7.1.2	Regularização	51
7.1.3	Potencial a temperatura finita	52
7.1.4	Potencial de anéis	53
7.1.5	O tensor de polarização	56
7.1.6	A temperatura crítica	58
7.2	Modelo Padrão.	59
7.2.1	Massas do Modelo Padrão	59
7.2.2	O potencial de Coleman–Weinberg do Modelo Padrão	63
7.2.3	Potencial efetivo a temperatura finita no Modelo Padrão.	66
7.2.4	Contribuição dos diagramas de anéis	67
7.3	O potencial efetivo por uma abordagem aproximada.	69
7.4	A transição de fase de primeira ordem.	72

8	CONCLUSÃO	74
	REFERÊNCIAS	76

1 Introdução

No século vinte e início do vinte e um, físicos encontraram uma vasta quantidade de evidências que possibilitaram mostrar o início do universo sendo por volta de 14 bilhões de anos atrás, no evento que chamamos de Big Bang. A termodinâmica e a mecânica estatística têm um papel crucial para o entendimento da evolução que o universo passou momentos após este evento. O principal acontecimento que será estudado nessa dissertação é a transição de fase eletrofraca. Podemos usar termodinâmica de equilíbrio para os estudos dessa transição de fase, pois na maioria da história do universo as taxas de reações foram mais rápidas que a escala de tempo da expansão do universo [1].

As principais evidências que temos hoje do início do universo são [2]: todas as galáxias do universo estão se afastando umas das outras com uma velocidade v dada por $v = Hd$, onde H é o parâmetro de Hubble e d é a distância entre as duas galáxias. Outra evidência vem da medição da radiação cósmica de fundo com uma temperatura por volta de 2.72K com uma variação medida de por volta de $\pm 1,3 \mu\text{K}$ [3]. Com a expansão do universo a temperatura foi escalonada da forma $T(t)a(t) = \text{const.}$, com $a(t)$ sendo o fator de escala que é como distância entre dois pontos no universo que cresce durante um tempo. A seguinte evidência é a abundância de elementos leves como o hidrogênio e hélio criados durante os primeiros minutos do universo, importantes para avaliar a densidade relativa de bárions, n_B , para fótons, n_γ , $\eta = \frac{n_B}{n_\gamma}$.

No universo primordial o número de bárions e antibárions são iguais, no entanto, como é observado, há uma vasta abundância de bárions sobre os antibárions [4]. A origem dessa assimetria, pode ser resolvida pela bariogênese, depende de alguns fatores. Em 1969 Sakharov percebeu que para ocorrer uma assimetria de bárions e antibárions eram necessárias as seguintes condições [5]:

- Violar o número de bárion;
- Violar a simetria de carga C e de carga-paridade CP;
- Ocorrer fora do equilíbrio;

onde a terceira condição pode ser analisada por uma transição de fase eletrofraca de primeira ordem forte [6].

A teoria do Big Bang constata que o universo era quente e denso, com temperaturas variando de alguns eV até a escala da massa de Planck 10^{19} GeV. Acreditamos que o universo passou por várias transições de fases associadas com diferentes escalas de massa. A transição de fase eletrofraca é um elemento crucial para a compreensão da bariogênese.

A influência da temperatura nas propriedades da transição de fase eletrofraca depende crucialmente da massa do Higgs [7]. A transição de fase ocorre então quando temos uma variação abrupta na energia livre ou em suas derivadas [8].

No Modelo Padrão essa transição de fase está associada à quebra de simetria, isto é quando os bósons vetoriais mensageiros W e Z que são os mediadores da força fraca adquirem massa e o fóton que media a força eletromagnética não. Chamamos a quebra de simetria como quebra da simetria eletrofraca, e no modelo padrão acontece via mecanismo de Higgs [9]. Tal mecanismo supõe que temos um campo de Higgs que se estende por todo universo e sua partícula elementar, o bóson de Higgs, é o que dá massa às partículas mediadoras da força fraca, por intermédio de uma interação entre elas e o Higgs.

Atualmente sabemos que a massa do Higgs é 125,25 GeV [10], mas para que a transição de fase eletrofraca no Modelo Padrão seja de primeira ordem seria necessário que $m_H \lesssim 80$ GeV [11], motivando muitos modelos para além do Modelo Padrão. Podemos visualizar a transição de fase como bolhas de uma nova fase que surgem e se expandem entre a fase antiga como na figura (1). A expansão dessa nova fase ocorre até que a fase anterior desapareça completamente.

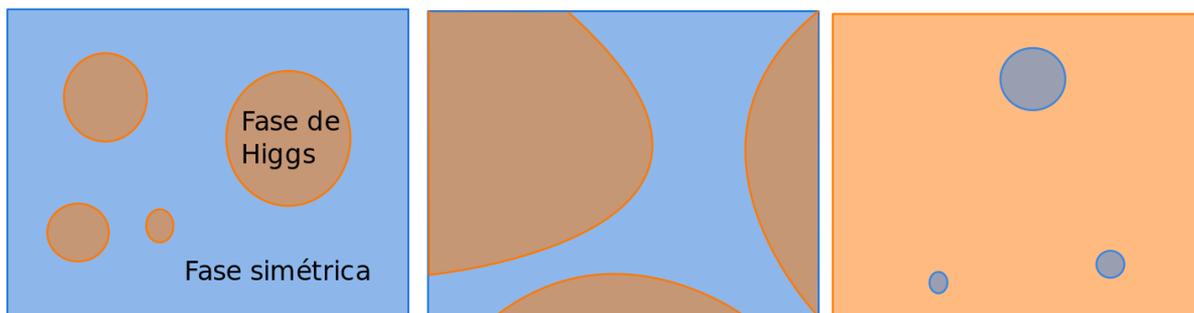


Figura 1 – Representação das nucleações de bolhas onde a fase de Higgs é o valor esperado do vácuo e a fase simétrica é onde o vácuo está em seu meta estado.

Para que a transição de fase ocorra é necessário que a massa do Higgs assuma o valor dito anteriormente, sendo assim, a transição é de primeira ordem. Mas para o valor real da massa de Higgs o calor latente diminui e temos então uma transição da fase de Higgs para a fase simétrica de segunda ordem. Um exemplo didático da transição de fase de segunda ordem é a transição da água em uma temperatura alta que ao resfriar passa da fase gasosa para a líquida suavemente, ao invés de ser de maneira abrupta [11].

O mundo é regido por diversas leis de conservação, reflexos das simetrias da natureza. Sendo algumas delas a conservação de energia-momento vindo da simetria de translação, momento angular vindo da simetria de rotação e carga vindo da simetria de calibre do eletromagnetismo. Steven Weinberg, em seu livro “Sonhos de uma teoria final” [12], cita um belo exemplo sobre quebra de simetria. Um ímã permanente a uma temperatura de

770 °C perde sua capacidade magnética, seus spins não mais apontam em uma direção preferencial, ao resfriar os spins se orientam em uma mesma direção e a simetria é quebrada. No universo primordial, houve um momento em que a simetria eletrofraca foi quebrada. Avaliaremos neste trabalho o potencial efetivo e sua analogia com a termodinâmica para entendermos melhor o que houve quando o universo resfriou.

Para estudarmos a quebra espontânea de simetria, analisaremos uma Lagrangiana simétrica com um estado fundamental não simétrico. Estudaremos campos escalares como campos clássicos e faremos uma analogia entre as teorias clássicas e as teorias quânticas.

O potencial efetivo, que será nossa principal ferramenta de estudo, tem como significado ser a energia por unidade de volume do estado fundamental. O potencial efetivo tem múltiplos mínimos locais e o menor desses mínimos é o estado fundamental. Também pode ser feita uma analogia com a termodinâmica e mecânica estatística a fim de relacionar o potencial com a energia livre de um ensemble canônico.

O objetivo dessa dissertação é o cálculo do potencial efetivo a temperatura finita no Modelo Padrão. A dissertação foi dividida como segue: no primeiro capítulo definiremos uma ação efetiva e suas ferramentas matemáticas que serão úteis nos capítulos seguintes. Usando o campo escalar como um modelo, podemos mostrar como encontrar o potencial efetivo e qual é o papel do mesmo na quebra espontânea de simetria. Os três seguintes capítulos serão dedicados ao cálculo de tal potencial efetivo fazendo-se uso da técnica de integrais de caminho e pela análise dos diagramas de uma partícula irreduzível a 1-loop. O seguinte capítulo será dedicado à analogia entre a teoria de campos e a termodinâmica, quais considerações podemos fazer e quais resultados podemos obter com um potencial efetivo à temperatura finita. No último capítulo aplicaremos a teoria ao Modelo Padrão e faremos a análise do como a massa de Higgs medida atualmente vai contrário a massa necessária para a transição ser de primeira ordem, assim como analisar a precisão de tal cálculo numérico em comparação a uma aproximação. Sendo os cálculos realizados em um programa desenvolvido no Mathematica. Podemos então, no final avaliar a aplicabilidade da teoria e como faremos para lidar com problemas que aparecem em seu desenvolvimento.

2 A ação efetiva

A ação efetiva é um objeto matemático com várias características interessantes, e com uma extensa aplicabilidade na teoria quântica dos campos, sendo uma delas a possibilidade de encontrarmos o valor esperado do vácuo de teorias com diversos campos escalares. Construíamos essa ideia descrevendo a teoria para campos escalares [13], com uma ação efetiva a partir de geradores funcionais obtidos pela teoria de perturbação e o termo de potencial será o potencial efetivo cuja posição do mínimo corresponde ao valor esperado do vácuo.

Seja a teoria do campo escalar descrita pela Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_0^2 \phi^2 - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4, \quad (2.1)$$

com isso, podemos escrever a ação clássica

$$S[\phi] = \int d^4x \mathcal{L}. \quad (2.2)$$

Sendo assim, podemos definir a amplitude de transição de vácuo para vácuo como

$$Z[J] = \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi]}, \quad (2.3)$$

que é uma integral em todas as configurações do campo ϕ possíveis e sendo J sua fonte. Com essas informações podemos obter o funcional gerador $W[J]$, com a relação

$$Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (2.4)$$

É conveniente definir o campo clássico $\phi_c(x)$, como

$$\phi_c(x) \equiv \frac{\langle 0 | \phi(x) | 0 \rangle_J}{\langle 0 | 0 \rangle_J}. \quad (2.5)$$

Podemos escrever a ação efetiva como

$$\Gamma[\phi_c] = W[J] - \int d^4x J \phi_c, \quad (2.6)$$

essa equação é a transformada de Legendre de (2.4). Dela podemos obter

$$\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c} = -J \quad \text{e} \quad \frac{\delta W[J]}{\delta J} = \phi_c. \quad (2.7)$$

Se compararmos as equações (2.3) com (2.4) notamos a relação entre $W[J]$ e $S[\phi]$. Aplicando a primeira relação em (2.7) obtemos:

$$-\frac{\delta \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c} = (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2) \phi_c + \frac{\lambda_0}{3!} \phi_c^3 = J. \quad (2.8)$$

Para resolver a equação (2.8) recorreremos a uma perturbação em λ_0 . Da seguinte forma

$$\phi_c = \phi_c^{(0)} + \lambda_0 \phi_c^{(1)} + \lambda_0^2 \phi_c^{(2)} + \dots \quad (2.9)$$

Se substituirmos essa perturbação em (2.8) e compararmos os termos de potências de mesma ordem, obtemos:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2) \phi_c^{(0)} &= J, \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2) \phi_c^{(1)} &= -\frac{\lambda_0}{3!} (\phi_c^{(0)})^3, \\ (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2) \phi_c^{(2)} &= -\frac{\lambda_0}{2!} (\phi_c^{(0)})^2 \phi_c^{(1)}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

A solução da primeira equação em (2.10) é dada como:

$$\phi_c^{(0)}(x) = \int d^4 x_1 G_2^{(0)}(x, x_1) J(x_1), \quad (2.11)$$

sendo $G_2^{(0)}(x, x_1) = (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2)^{-1}$ a função de Green de dois pontos. Recorrendo a $\phi_c^{(0)}$ e às relações em (2.10), podemos encontrar os próximos termos da perturbação, até completarmos $\phi_c^{(0)}$,

$$\begin{aligned} \phi_c^{(0)} &= \int d^4 x_1 G_2^{(0)}(x, x_1) J(x_1) \\ &+ \frac{1}{3!} \int d^4 x_1 d^4 x_2 d^4 x_3 G_4^{(0)}(x, x_1, x_2, x_3) J(x_1) J(x_2) J(x_3) \\ &+ \frac{1}{5!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_5 G_6^{(0)}(x, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) J(x_1) \dots J(x_5) + \dots, \end{aligned} \quad (2.12)$$

onde

$$G_4^{(0)}(x, x_1, x_2, x_3) = -\lambda_0 \int d^4 y_1 G_2^{(0)}(x, y_1) G_2^{(0)}(x_1, y_1) G_2^{(0)}(x_2, y_1) G_2^{(0)}(x_3, y_1) \quad (2.13)$$

O campo $\phi_c^{(0)}$ pode ser representado diagramaticamente como na figura (2) e as funções de Green de n-pontos $G^{(0)}_n$ representado em (3).

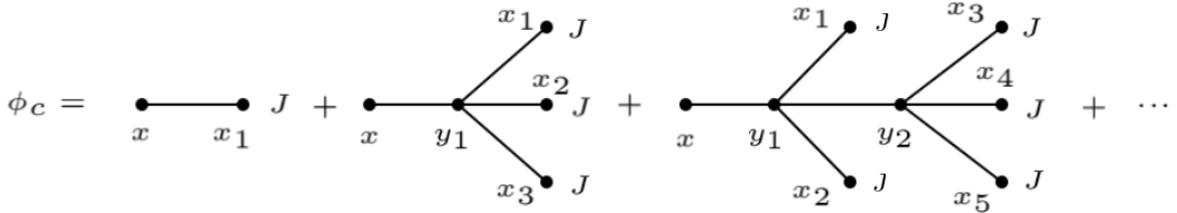


Figura 2 – Representação diagramática da solução perturbativa para o campo clássico.

Recorrendo à segunda relação em (2.7), $\frac{\delta W[J]}{\delta J} = \phi_c$, podemos assim encontrar o funcional gerador:

$$\begin{aligned} W_{\text{tree}}[J] &= \int d^4 x_1 d^4 x_2 J(x_1) G_2^{(0)}(x_1, x_2) J(x_2) \\ &+ \frac{1}{4!} \int d^4 x_1 \dots d^4 x_4 G_4^{(0)}(x_1, x_2, x_3, x_4) J(x_1) \dots J(x_4) + \dots \end{aligned} \quad (2.14)$$

representado na figura (3).

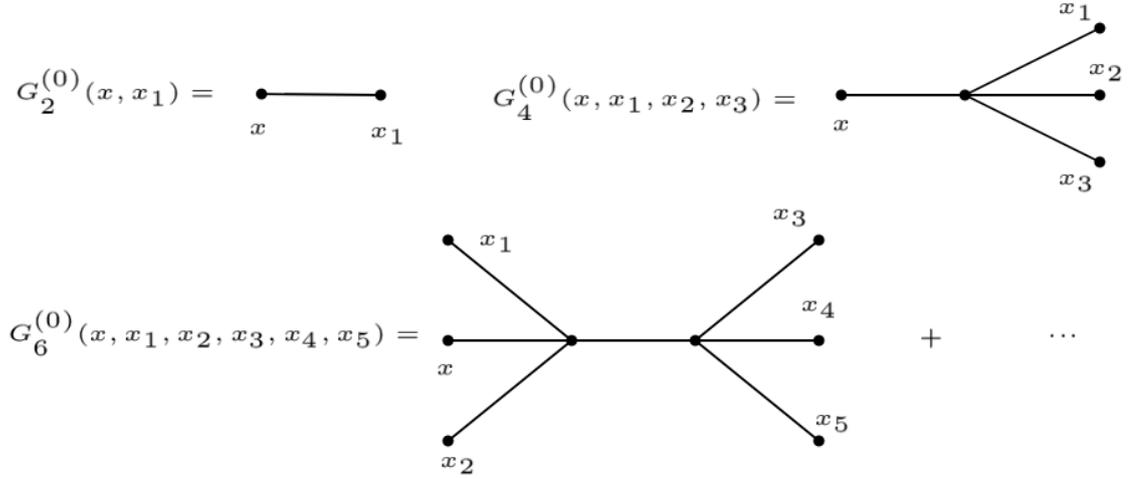


Figura 3 – Funções de Green que aparecem na solução perturbativa do campo clássico, e os coeficientes da expansão de Taylor do gerador funcional, W_{tree} .

Vemos que a ação efetiva gera as funções próprias como nos mostra (2.6) se:

$$\frac{\delta}{\delta\phi_c(y)}\phi_c(x) = \frac{\delta}{\delta\phi_c(y)}\frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \delta^4(x - y), \quad (2.15)$$

com isso, podemos definir uma regra da cadeia dada por

$$\frac{\delta}{\delta\phi_c(y)} \equiv \int d^4z \frac{\delta J(z)}{\delta\phi_c(y)} \frac{\delta}{\delta J(z)}, \quad (2.16)$$

então, se aplicarmos a (2.15) e substituirmos J dado por (2.7), obtemos

$$\delta^4(x - y) = \int d^4z \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_c(y)\delta\phi_c(z)} \frac{\delta^2W}{\delta J(z)\delta J(x)}. \quad (2.17)$$

Como $\delta^4(x - y)$ é uma matriz unitária, temos a matriz

$$\left. \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_c(y)\delta\phi_c(z)} \right|_{\phi_c=0}, \quad (2.18)$$

e sua matriz inversa

$$\left. \frac{\delta^2W}{\delta J(z)\delta J(x)} \right|_{J=0}, \quad (2.19)$$

em termos da expansão de Taylor de W e Γ . Sendo a expansão de Γ :

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \cdots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \cdots, x_n) \phi(x_1) \cdots \phi(x_n), \quad (2.20)$$

obtemos a função própria de dois pontos

$$\frac{\delta^2W}{\delta J(z)\delta J(x)} = G^{(2)}(z, x), \quad \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_c(y)\delta\phi_c(z)} = \Gamma^{(2)}(y, z), \quad (2.21)$$

então como uma é o inverso da outra

$$\Gamma^{(2)}(y, z) = (G^{(2)}(y, z))^{-1}. \quad (2.22)$$

Se fizermos uma transformada de Fourier para o espaço de momento

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = (\tilde{G}^{(2)}(p))^{-1}, \quad (2.23)$$

podemos escrever

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \frac{1}{p^2 - m^2 - \Sigma(p)}. \quad (2.24)$$

Sendo assim,

$$\tilde{\Gamma}^{(2)}(p) = p^2 - m^2 - \Sigma(p). \quad (2.25)$$

Ao analisar $\tilde{G}^{(2)}(p)$ podemos perceber que ao expandir, temos múltiplas potências de $\Sigma(p)$, de modo que

$$\begin{aligned} \tilde{G}^{(2)}(p) &= \frac{1}{p^2 - m^2} + \frac{1}{p^2 - m^2} \Sigma(p) \frac{1}{p^2 - m^2} \\ &+ \frac{1}{p^2 - m^2} \Sigma(p) \frac{1}{p^2 - m^2} \Sigma(p) \frac{1}{p^2 - m^2} + \dots \end{aligned} \quad (2.26)$$

Neste caso é melhor trabalharmos com $\tilde{\Gamma}^{(2)}(p)$, pois a mesma não é infinita em $\Sigma(p)$.

$$\tilde{G}^{(2)}(p) = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots$$

Figura 4 – Representação diagramática de $\tilde{G}^{(2)}(p)$ em termos de $\Sigma(p)$.

Como já encontramos as funções próprias de 2-pontos, agora encontraremos a de 3-pontos, realizando novamente a regra da cadeia

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta\phi_c(s)} \delta^4(x - y) &= 0 = \int d^4z \frac{\delta}{\delta\phi_c(s)} \left(\frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_c(y)\delta\phi_c(z)} \frac{\delta^2W}{\delta J(z)\delta J(x)} \right) \\ &= \int d^4z \frac{\delta^3\Gamma}{\delta\phi_c(s)\delta\phi_c(y)\delta\phi_c(z)} \frac{\delta^2W}{\delta J(z)\delta J(x)} \\ &+ \int d^4z d^4z_1 \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_c(y)\delta\phi_c(z)} \frac{\delta^2\Gamma}{\delta\phi_c(s)\delta\phi_c(z_1)} \frac{\delta^3W}{\delta J(z_1)\delta J(z)\delta J(x)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Quando J e ϕ_c são zero, isso pode ser escrito como

$$\begin{aligned} 0 &= \int d^4z \Gamma^{(3)}(s, y, z) G^{(2)}(z, x) \\ &+ \int d^4z d^4z_1 \Gamma^{(2)}(y, z) \Gamma^{(2)}(s, z_1) G^{(3)}(x, z, z_1). \end{aligned} \quad (2.28)$$

Para encontrar $\Gamma^{(3)}$ multiplicamos por $\int d^4x \Gamma^{(2)}(x, q)$

$$0 = \int d^4z \int d^4x \Gamma^{(3)}(s, y, z) G^{(2)}(z, x) \Gamma^{(2)}(x, q) + \int d^4z d^4z_1 \int d^4x \Gamma^{(2)}(y, z) \Gamma^{(2)}(s, z_1) \Gamma^{(2)}(x, q) G^{(3)}(x, z, z_1). \quad (2.29)$$

Analisando o primeiro termo

$$\int d^4x G^{(2)}(z, x) \Gamma^{(2)}(x, q) = \delta^4(z - q), \quad (2.30)$$

$$\int d^4z \Gamma^{(3)}(s, y, z) \delta^4(z - q) = \Gamma^{(3)}(s, y, q). \quad (2.31)$$

Temos então

$$\Gamma^{(3)}(s, y, q) = \int d^4z d^4z_1 d^4x \Gamma^{(2)}(s, z) \Gamma^{(2)}(y, z_1) \Gamma^{(2)}(q, x) G^{(3)}(x, z, z_1). \quad (2.32)$$

O contrário também é válido:

$$G^{(3)}(x_1, x_2, x_3) = \int d^4s d^4y d^4q G^{(2)}(x_1, s) G^{(2)}(x_2, y) G^{(2)}(x_3, q) \Gamma^{(3)}(s, y, q). \quad (2.33)$$

Para encontrar a função própria de 4-pontos o processo é similar, pois precisamos derivar. Para um caso geral, tanto para as funções de Green tanto para os vértices, temos

$$G^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{i^n Z} \frac{\delta^n Z[J]}{\delta J_1 \dots \delta J_n} \Big|_{J=0}, \quad (2.34)$$

$$\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = \frac{\delta^n \Gamma[\phi_c]}{\delta \phi_c(x_1) \dots \delta \phi_c(x_n)} \Big|_{\phi_c=0}. \quad (2.35)$$

A ação efetiva, como vimos, pode ser usada como funcional gerador das funções próprias de n -pontos, $\Gamma^{(n)}$, como uma expansão de Taylor funcional, assim como $W[J]$ gera as funções de Green, $G^{(n)}$. Temos então

$$\Gamma[\phi_c] = \sum_n \frac{1}{n!} \int d^4x_1 \dots d^4x_n \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) \phi_c(x_1) \dots \phi_c(x_n), \quad (2.36)$$

se usarmos nossa definição de antes no caso ao nível de árvore,

$$\Gamma[\phi_c] \approx \int d^4x \frac{1}{2} \phi_c (\partial_\mu \partial^\mu - m_0^2) \phi_c - \frac{\lambda_0}{4!} \phi_c^4, \quad (2.37)$$

podemos então comparar as equações (2.36) e (2.37) e obter

$$\begin{aligned} \Gamma^{(2)}(x_1, x_2) &= -(\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2) \delta^4(x_1 - x_2), \\ \Gamma^{(3)}(x_1, x_2, x_3) &= 0, \\ \Gamma^{(4)}(x_1, x_2, x_3, x_4) &= -\lambda_0 \delta^4(x_1 - x_2) \delta^4(x_1 - x_3) \delta^4(x_1 - x_4), \\ \Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) &= 0 \quad \text{para } n \geq 5. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Vemos aqui que ao nível de árvore, temos para $n = 3$ e $n > 4$ $\Gamma^{(n)}(x_1, \dots, x_n) = 0$.

Outra maneira de representar a ação efetiva é como uma expansão em derivadas

$$\Gamma[\phi_c] = \int d^4x \left(-V(\phi_c) - \frac{1}{2}Z[\phi_c](\partial_\mu\phi_c)^2 + \dots \right). \quad (2.39)$$

Se o campo for considerado constante, $\phi_c = \text{constante}$, o primeiro termo representará o potencial efetivo e os demais termos, por envolverem derivadas, podem ser desconsiderados.

Usando a definição da função delta de Dirac no espaço de momento,

$$\delta^{(4)}(p) = \int \frac{d^4x}{(2\pi)^4} e^{-ip \cdot x}, \quad (2.40)$$

obtemos então um campo com dependência no momento

$$\tilde{\phi}_c(p) = (2\pi)^4 \phi_c \delta^{(4)}(p). \quad (2.41)$$

Substituindo em (2.36), podemos escrever a ação efetiva quando $p = 0$ como

$$\begin{aligned} \Gamma[\phi_c] &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (2\pi)^4 \phi_c^n \delta^{(4)}(0) \Gamma^{(n)}(0) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \phi_c^n \Gamma^{(n)}(0) \int d^4x. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Comparando com (2.39) podem ser consideradas então a relação do potencial com a função própria, no caso, as funções próprias de n-pontos $\Gamma^{(n)}$ e com os diagramas irreduzíveis de uma partícula (1PI) sendo os diagramas que representam as funções próprias

$$V(\phi_c) = - \sum_n \frac{1}{n!} \Gamma^{(n)}(0) \phi_c^n. \quad (2.43)$$

O potencial efetivo pode ser usado para definir o vácuo quântico da teoria e se o mesmo é estável, ou seja, avaliar se ϕ_c é um mínimo de $V(\phi_c)$. Para testarmos essa hipótese, utilizaremos o potencial ao nível de árvore:

$$V_{\text{tree}}(\phi_c) = \frac{1}{2} m_0^2 \phi_c^2 + \frac{\lambda_0}{4!} \phi_c^4, \quad (2.44)$$

para encontrar os mínimos

$$\left. \frac{dV_{\text{tree}}}{d\phi_c} \right|_{\phi_c = \phi'_c} = 0. \quad (2.45)$$

Temos duas situações distintas. No modelo onde $m_0^2 > 0$ o vácuo é em $\phi_c = 0$, mas, se $m_0^2 < 0$ temos dois vácuos degenerados em ϕ'_c . Teremos como solução

$$\phi'_c = \pm \sqrt{\frac{6|m_0^2|}{\lambda_0}}. \quad (2.46)$$

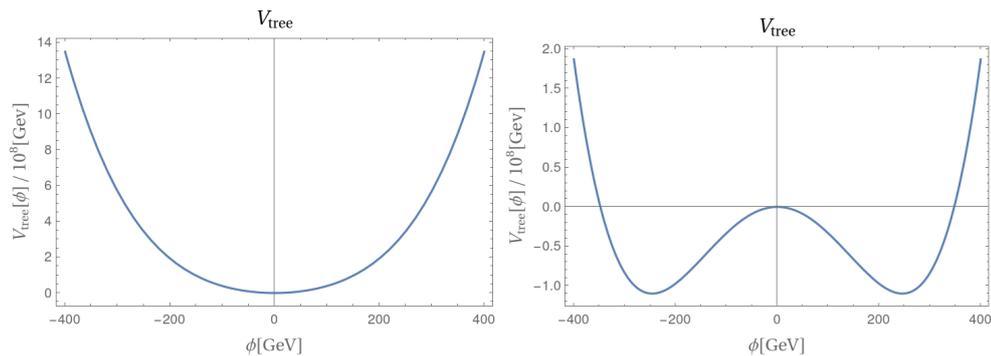


Figura 5 – Caso onde $m_0^2 > 0$ com mínimo estável em $\phi_c = 0$ e caso onde $m_0^2 < 0$ com mínimo estável em $\phi_c = \pm \phi'_c$.

Podemos aqui avaliar a simetria do potencial efetivo ao nível de árvore. No caso em que $m_0^2 > 0$, transformações do tipo $\phi_c \rightarrow -\phi_c$ deixam o potencial simétrico. No caso, $m_0^2 < 0$ a mesma transformação, $\phi_c \rightarrow -\phi_c$, não reflete a simetria do potencial na ação. Esse fenômeno é chamado de quebra espontânea de simetria.

Agora podemos partir para os métodos matemáticos utilizados para calcularmos esse potencial efetivo para os campos escalares, fermiônicos e de calibre ao nível de 1-loop.

3 O potencial efetivo de um campo escalar.

Neste capítulo apresentarei dois métodos para o cálculo do potencial efetivo: O primeiro método é o da solução da integral de caminho e o segundo método é o cálculo dos diagramas de Feynman a 1-loop.

3.1 Primeiro método: integral de caminho.

Podemos definir a amplitude de transição de vácuo para vácuo, $Z[J]$ [13], para um campo escalar como:

$$Z[J] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{iS[\phi, J]}, \quad (3.1)$$

onde a ação do campo escalar é

$$S[\phi, J] = \int d^4x \left[\frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_0^2 \phi^2) - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4 + J\phi \right], \quad (3.2)$$

e \mathcal{N}^{-1} é a constante de normalização dada por

$$\mathcal{N}^{-1} = \int \mathcal{D}\phi e^{(i \int d^4x \frac{1}{2} (\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m_0^2 \phi^2) - \frac{\lambda_0}{4!} \phi^4)}, \quad (3.3)$$

que permite que $Z[0] = 1$.

Podemos expandir a ação clássica, $S[\phi, J]$, como uma série de Taylor funcional em $\phi = \phi_c$, onde ϕ_c é um ponto estacionário da ação:

$$S[\phi, J] = S[\phi_c, J] + \left. \frac{\delta S}{\delta \phi} \right|_{\phi=\phi_c} (\phi - \phi_c) + \frac{1}{2} \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2} \right|_{\phi=\phi_c} (\phi - \phi_c)^2 + \dots, \quad (3.4)$$

a ação clássica será igual à ação efetiva ao nível de árvore, $S[\phi, J] = \Gamma_{\text{tree}}[\phi_c]$. O segundo termo, sendo a derivada da ação em sua configuração de mínimo, deve ser $\left. \frac{\delta S}{\delta \phi} \right|_{\phi=\phi_c} = 0$. Simplificando temos

$$S[\phi, J] \approx S[\phi_c, J] + \frac{1}{2} \left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2} \right|_{\phi=\phi_c} (\phi - \phi_c)^2. \quad (3.5)$$

Vemos que de (3.5), temos a ação efetiva com a potência máxima sendo o termo quadrático, então podemos usar a solução de integrais por determinantes a partir de uma integral Gaussiana que pode ser encontrada, por exemplo, no livro de Pierre Ramond [14]

$$\int \mathcal{D}q e^{-\frac{1}{2}(q^* A q)} = \frac{\mathcal{N}'}{\sqrt{\det A}}. \quad (3.6)$$

Após uma mudança de variável, $\phi \rightarrow \phi - \phi_c$ no funcional gerador, obtemos:

$$Z[J] \approx \mathcal{N} e^{iS[\phi_c, J]} \det^{-\frac{1}{2}} \left(\left. \frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2} \right|_{\phi=\phi_c} \right), \quad (3.7)$$

com

$$\mathcal{N} = \det^{\frac{1}{2}} [(\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2) \delta^4(x - y)] \quad (3.8)$$

e

$$-\frac{\delta^2 S}{\delta\phi(x)\delta\phi(y)} \Big|_{\phi=\phi_c} = (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} \phi_c^2) \delta^4(x - y). \quad (3.9)$$

Podemos assim coletar os termos obtidos e escrever:

$$Z[J] \approx e^{iS[\phi_c, J]} \det^{\frac{1}{2}} \left(\frac{(\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2) \delta^4(x - y)}{(\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} \phi_c^2) \delta^4(x - y)} \right). \quad (3.10)$$

Lembremos que como $(\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2)^{-1}$ é a função de Green $G_2^{(0)}(x - y)$, podemos escrever de forma ainda melhor, como:

$$\begin{aligned} (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2)^{-1} (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2 + \frac{\lambda_0}{2} \phi_c^2) &= (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2)^{-1} (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2) \\ &\quad + (\partial_\mu \partial^\mu + m_0^2)^{-1} \frac{\lambda_0}{2} \phi_c^2 \\ &= \delta^4(x - y) + G_2^{(0)}(x - y) \frac{\lambda_0}{2} \phi_c^2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Sendo assim o funcional gerador se torna:

$$Z[J] \approx e^{iS[\phi_c, J]} \det^{-\frac{1}{2}} \left(1 + G_2^{(0)}(x - y) \frac{\lambda_0}{2} \phi_c^2(y) \right). \quad (3.12)$$

Podemos extrair $W[J]$ de $Z[J]$ como constatamos no capítulo anterior. Analisemos a aplicação de determinantes para a solução dessas integrais da seguinte forma:

$$\det e^{\ln Z} = e^{\text{Tr} \ln Z} \implies \det Z = e^{\text{Tr} \ln Z}. \quad (3.13)$$

Aplicando essa propriedade ao $Z[J]$, então, com a relação

$$Z[J] = e^{iW[J]}. \quad (3.14)$$

Podemos encontrar

$$W[J] \approx S[\phi_c, J] + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left(1 + G_2^{(0)}(x - y) \frac{\lambda_0}{2} \phi_c^2(y) \right), \quad (3.15)$$

Usando a relação (2.6) a qual nos auxilia a encontrar a ação efetiva e subtrai os termos de fonte, obtemos

$$\Gamma[\phi_c] = S[\phi_c, 0] + \frac{i}{2} \hbar \text{Tr} \ln \left(1 + G_2^{(0)}(x - y) \frac{\lambda_0}{2} \phi_c^2(y) \right) + \mathcal{O}(\hbar^2) \quad (3.16)$$

Note que a constante de Plank, \hbar , que em unidades naturais é 1, é adicionada escalando o campo deslocado em $\hbar^{\frac{1}{2}}$, $\phi \rightarrow \hbar^{\frac{1}{2}} \phi$.

O cálculo do traço é complicado, pois a matriz não é diagonal e tem dimensão infinita. Se $\phi_c = \text{constante}$, podemos encontrar o potencial efetivo com mais facilidade, pois a matriz se torna diagonal no espaço de momentos. Como dito no capítulo anterior:

$$\Gamma[\phi_c] \approx - \int d^4x V(\phi_c), \quad (3.17)$$

Os termos com derivadas se anulam como vimos. Sendo assim, o potencial efetivo a 1-loop é

$$V[\phi_c] = -\frac{i}{2}\hbar \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{\frac{\lambda_0 \phi_c^2}{2}}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right). \quad (3.18)$$

A beleza desse método é que o logaritmo sai naturalmente como resultado da possibilidade de se escrever determinantes como exponenciais. O potencial efetivo a 1-loop obtido aqui é o potencial de Coleman–Weinberg [15].

Somando o potencial efetivo com o potencial ao nível de árvore obtemos

$$V[\phi_c] = \frac{1}{2}m_0^2\phi_c^2 + \frac{\lambda_0}{4!}\phi_c^4 - \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{\frac{\lambda_0 \phi_c^2}{2}}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right). \quad (3.19)$$

O potencial em (3.19) diverge em altas energias, então vamos renormalizá-lo e regularizá-lo. Para isso utilizaremos as seguintes condições de renormalização

$$\left. \frac{d^2V[\phi_c]}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c=0} = m^2, \quad \left. \frac{d^4V[\phi_c]}{d\phi_c^4} \right|_{\phi_c=0} = \lambda. \quad (3.20)$$

Aplicando a renormalização ao potencial encontramos

$$m^2 = m_0^2 + \frac{1}{2}\lambda \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}, \quad (3.21)$$

$$\lambda = \lambda + \frac{3}{2}i\lambda^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon} \right)^2. \quad (3.22)$$

Podemos escrever $V[\phi_c]$ em termo das quantidades renormalizadas

$$\begin{aligned} V[\phi_c] &= \frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 - \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{\frac{\lambda\phi_c^2}{2}}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right) \\ &\quad - \frac{1}{4}\lambda\phi_c^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{i}{p^2 - m^2 + i\epsilon} - i\frac{\lambda^2}{16}\phi_c^4 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon} \right)^2. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Ao adicionarmos a massa e acoplamento renormalizado em (3.19) o termo que contém o logaritmo após a substituição nos retornará termos de ordem 2-loops e maiores veja [13]. Agora realizaremos a regularização impondo o truncamento, $|\vec{p}| = \Lambda$ com Λ grande é suficiente. Realizando isso, vemos que o potencial não dependerá do truncamento.

Quando a integral em p_0 é realizada, temos

$$\begin{aligned}
V[\phi_c] &= \frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 - \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left(\sqrt{\vec{p}^2 - m^2 + \frac{\lambda\phi_c^2}{2}} - \sqrt{\vec{p}^2 - m^2} \right) \\
&+ \frac{1}{8}\lambda\phi_c^2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{\vec{p}^2 - m^2}} - \frac{\lambda^2\phi_c^4}{64} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \frac{1}{(\vec{p}^2 - m^2)^{\frac{3}{2}}}.
\end{aligned} \tag{3.24}$$

A regularização trunca as integrais restantes em $|\vec{P}| = \Lambda$. Todas as integrais podem ser resolvidas explicitamente como, por exemplo, a primeira integral pode ser resolvida usando:

$$\begin{aligned}
&\int_0^\Lambda \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sqrt{\vec{p}^2 - a^2} \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{p}{4}(p^2 - a^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{a^2p}{8}(p^2 - a^2)^{\frac{1}{2}} - \frac{a^2}{8} \ln(p + \sqrt{p^2 + a^2}) \right) \Big|_0^\Lambda \\
&= \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{\Lambda^4}{4} + \frac{1}{4}a^2\Lambda^2 + \frac{1}{32}a^4 - \frac{a^4}{8} \ln\left(\frac{2\Lambda}{a}\right) + \mathcal{O}\left(\frac{a^6}{\Lambda^2}\right) \right).
\end{aligned} \tag{3.25}$$

O potencial resultante é

$$\begin{aligned}
V[\phi_c] &= \frac{1}{2}m^2\phi_c^2 + \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 \\
&+ \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{1}{16} \left(m^2 + \frac{\lambda\phi_c^2}{2} \right)^2 \ln \left(1 + \frac{\lambda\phi_c^2}{2m^2} \right) - \frac{1}{32}\lambda m^2\phi_c^2 - \frac{3}{128}\lambda^2\phi_c^4 \right).
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Consideremos o que acontece com o potencial se $m^2 = 0$. É fácil de notar que não será possível aplicar esse limite na equação (3.26). Quando $m^2 = 0$ a partícula não tem massa e o ponto em que avaliamos as condições em (3.20) terá divergências no infravermelho. Vamos então avaliar essas condições em um ponto arbitrário M , o potencial efetivo quando $m_0^2 = 0$ é

$$V[\phi_c] = \frac{\lambda_0}{4!}\phi_c^4 - \frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{\lambda_0\phi_c^2}{p^2 - i\epsilon} \right). \tag{3.27}$$

Vamos agora calcular o novo acoplamento renormalizado com:

$$\lambda_M = \left. \frac{d^4V[\phi_c]}{d\phi_c^4} \right|_{\phi_c=M}, \tag{3.28}$$

onde M é um parâmetro com escala de massa. Usando a solução em (3.25) obtemos o potencial:

$$\begin{aligned}
V[\phi_c] &= \frac{\lambda}{4!}\phi_c^4 \\
&+ \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{1}{4}\Lambda^2 \left(\frac{\lambda_0\phi_c^2}{2} \right) - \frac{1}{32} \left(\frac{\lambda_0\phi_c^2}{2} \right)^2 - \frac{1}{16} \left(\frac{\lambda_0\phi_c^2}{2} \right)^2 \ln \left(\frac{8\Lambda^2}{\lambda_0\phi_c^2} \right) \right).
\end{aligned} \tag{3.29}$$

Para retirarmos os termos divergentes da massa renormalizada fazemos

$$\left. \frac{d^2 V[\phi_c]}{d\phi_c^2} \right|_{\phi_c=0} = 0. \quad (3.30)$$

O cálculo do λ_M nos leva a

$$\lambda_M = \lambda_0 + \frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{3}{16} \lambda_0^2 - \frac{3}{8} \lambda_0^2 \ln(4\Lambda^2) + \frac{\lambda_0^2}{64} \left(24 \ln \left(\frac{\lambda_0 M^2}{2} \right) + 100 \right) \right), \quad (3.31)$$

com isso podemos escrever o potencial em relação a λ_M

$$V[\phi_c] = \frac{\lambda_M}{4!} \phi_c^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{\lambda_M \phi_c^2}{2} \right)^2 \left(\ln \left(\frac{\phi_c^2}{M^2} \right) - \frac{25}{6} \right). \quad (3.32)$$

Agora podemos nos perguntar: existe dependência com a escala de renormalização λ_M ? Qual a consequência física da mudança de escala? Façamos $\lambda_M \rightarrow \lambda'_M$ e $M \rightarrow M'$, se aplicarmos

$$\lambda'_M = \left. \frac{d^4 V[\phi_c]}{d\phi_c^4} \right|_{\phi_c=M'} \quad (3.33)$$

diretamente no potencial de Coleman–Weinberg, encontramos

$$\lambda'_M = \lambda_M + \frac{3}{32\pi^2} \lambda_M^2 \ln \left(\frac{M'^2}{M^2} \right). \quad (3.34)$$

Se substituirmos no potencial, encontramos

$$V[\phi_c] = \frac{\lambda'_M}{4!} \phi_c^4 + \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{\lambda'_M \phi_c^2}{2} \right)^2 \left(\ln \left(\frac{\phi_c^2}{M'^2} \right) - \frac{25}{6} \right) + \mathcal{O}(\lambda_M^3). \quad (3.35)$$

Então, a escolha da escala não importa, $V[\phi_c, \lambda_M, M] = V[\phi_c, \lambda'_M, M']$, a física sempre é a mesma. Partimos então para o segundo método, onde avaliaremos a simetria dos diagramas de 1-loop.

3.2 Segundo método: cálculo usando diagramas de Feynman a 1-loop

A amplitude de transição de vácuo para vácuo [13] [16], $Z[J]$ pode ser escrita

$$Z[J] = \langle 0 | T e^{i \int d^4x J\phi} | 0 \rangle. \quad (3.36)$$

Como visto anteriormente, podemos definir o funcional gerador $W[J]$ usando $Z[J]$. A expansão em série da exponencial nos leva ao funcional gerador, onde os coeficientes são os produtos temporalmente ordenado do campo no vácuo ou as funções de Green

$$G(x_1, \dots, x_n) = \langle 0 | T(\varphi(x_1) \cdots \phi(x_n)) | 0 \rangle. \quad (3.37)$$

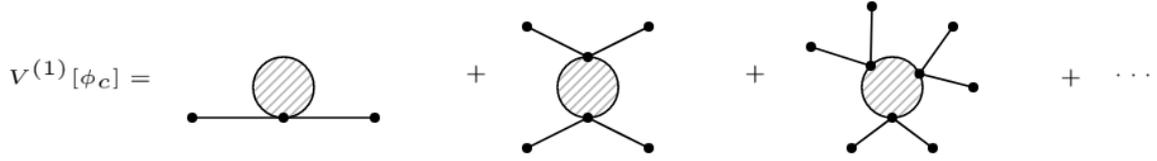


Figura 6 – Diagramas que representam o potencial efetivo a 1-loop do campo escalar.

A expansão perturbativa dos coeficientes nos leva a uma série de diagramas e suas regras de Feynman. Se expandirmos $\Gamma[\phi_c]$ o termo independente de p é o potencial efetivo. Se expandirmos em \hbar , o termo de primeira ordem representa os diagramas de 1-loop com momento externo zero.

Usando a regra de Feynman o primeiro diagrama fica:

$$-i\lambda_0\phi_c^2\frac{1}{4}\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}\frac{i}{p^2-m_0^2+i\epsilon}(2\pi)^4\delta^4(0), \quad (3.38)$$

o fator ϕ_c^2 vem das duas pernas externas, $\frac{1}{4}$ é o fator de simetria, $-i\lambda_0$ vem do vértice, $\int\frac{d^4p}{(2\pi)^4}$ do único momento no loop, $\frac{i}{p^2-m_0^2+i\epsilon}$ do propagador em torno do loop e fator $(2\pi)^4\delta^4(0)$ é simplesmente o quadrivolume $\int d^4x$, o mesmo será ignorado por tratarmos de uma densidade de energia.

O fator de simetria parece simples, mas esconde uma grande análise do sistema físico estudado, esse pode ser representado como:

$$s = \frac{1}{(2n)!}s_n \cdot d_n, \quad (3.39)$$

o termo $\frac{1}{(2n)!}$ vem do fato de que se temos n vértices, então, existe $2n$ linhas que contribuem para a função, $\Gamma^{(2n)}$, o coeficiente $2n$ -ésimo da expansão de Taylor de $\Gamma[\phi_c]$ que nos leva a $\frac{1}{(2n)!}$.

O fator de simetria individual de cada diagrama, s_n , se dá com base na definição da função de Green definida anteriormente como o produto temporalmente ordenado. Pelo teorema de Wick

$$\langle 0|\phi(x_1)\phi(x_2)\phi^4(y)|0\rangle \quad (3.40)$$

onde $\phi(x_1)$ contrai com um dos termos de $\phi^4(y)$ e então, para $\phi(x_2)$, sobram outros três termos em $\phi^4(y)$ para ser contraído. Sendo assim,

$$s_1 = \frac{1}{4!}(4 \cdot 3) = \frac{1}{2}. \quad (3.41)$$

O fator d_n se dá pelo fato da mudança do rótulo do momento, no caso $d_1 = 1$. Sendo assim

$$s = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4}. \quad (3.42)$$

Podemos escrever de maneira geral, para o n -ésimo diagrama, $d_n = (2n - 1)(2n - 3) \cdots 1$ e $s_n = \frac{(n-1)!}{2}$. Então o fator de simetria total é

$$s = \frac{1}{(2n)!} \frac{(n-1)!}{2} (2n-1)(2n-3) \cdots 1 = \frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^n. \quad (3.43)$$

O n -ésimo diagrama contribui então

$$\frac{1}{2n} \left(\frac{1}{2}\right)^n (-i\lambda_0\phi_c^2)^n \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{i}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}\right)^n. \quad (3.44)$$

O potencial efetivo, quando ϕ_c é constante, é a soma em n

$$\begin{aligned} V[\phi_c] &= -\frac{i}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{\lambda_0\phi_c^2}{2}\right)^n \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \left(\frac{1}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}\right)^n \\ &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{\frac{\lambda_0\phi_c^2}{2}}{p^2 - m_0^2 + i\epsilon}\right), \end{aligned} \quad (3.45)$$

potencial efetivo obtido é igual ao do método de integrais de caminho e sua renormalização segue os mesmos passos.

4 O potencial efetivo de um campo de spin meio.

Agora aplicaremos os mesmos métodos usados no capítulo anterior do campo escalar para os campos fermiônicos de spin $\frac{1}{2}$, mas com as mudanças necessárias para facilitar a obtenção do potencial efetivo.

4.1 Primeiro método: integral de caminho.

Para definir o funcional gerador $Z_E[\eta, \bar{\eta}]$ como uma integral de caminho [14], escrevemos

$$Z_E[\zeta, \zeta^\dagger] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^\dagger e^{S_E[\Psi, \Psi^\dagger, \zeta, \zeta^\dagger]}, \quad (4.1)$$

onde o subíndice E descreve o cálculo no espaço Euclidiano, a mudança do espaço de Minkowski dos casos anteriores para o nosso novo espaço se dá como $t \rightarrow it$.

Sendo a ação escrita como:

$$S_E[\Psi, \Psi^\dagger, \zeta, \zeta^\dagger] = \int d^4x [\Psi^\dagger(\not{\partial} + im + if\phi)\Psi + i\zeta^\dagger\Psi + i\Psi^\dagger\zeta], \quad (4.2)$$

onde $\not{\partial} = \gamma^\mu \partial_\mu$ os termos ζ e ζ^\dagger são as fontes de Ψ e Ψ^\dagger , respectivamente. O funcional gerador para os férmions fica:

$$Z_E[\eta, \bar{\eta}] = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^\dagger e^{i \int dx \Psi^\dagger(\not{\partial} + im + if\phi)\Psi + \zeta^\dagger\Psi + \Psi^\dagger\zeta}. \quad (4.3)$$

Definimos $\mathcal{N} = Z[0]^{-1}$, então

$$\mathcal{N}^{-1} = \int \mathcal{D}\Psi \mathcal{D}\Psi^\dagger e^{i \int dx \Psi^\dagger(\not{\partial} + im + if\phi)\Psi}, \quad (4.4)$$

é a constante de normalização. Se considerarmos a expansão da ação em torno das configurações clássicas do campo como feito para o caso escalar em (3.5) [14]:

$$\begin{aligned} S_E[\Psi, \Psi^\dagger, \eta, \bar{\eta}] = & S_E|_0 + \eta^\dagger \left. \frac{\delta S_E}{\delta \Psi^\dagger} \right|_0 + \left. \frac{\delta S_E}{\delta \Psi} \right|_0 \eta + \left. \frac{\delta S_E}{\delta \phi} \right|_0 \rho + \frac{1}{2} \rho_1 \left. \frac{\delta^2 S_E}{\delta \phi_1 \delta \phi_2} \right|_0 \rho_2 \\ & \eta_1^\dagger \left. \frac{\delta^2 S_E}{\delta \Psi_1^\dagger \delta \Psi_2^\dagger} \right|_0 \eta_2 + \rho_1 \left. \frac{\delta^2 S_E}{\delta \phi_1 \delta \Psi_2} \right|_0 \eta_2 + \eta_1^\dagger \left. \frac{\delta^2 S_E}{\delta \Psi_1^\dagger \delta \phi_2} \right|_0 \rho_2 + \dots \end{aligned} \quad (4.5)$$

onde $\eta = \Psi - \Psi_0$ e $\rho = \phi - \phi_0$. Encontramos as equações de movimento [14]:

$$\left. \frac{\delta S_E}{\delta \Psi^\dagger} \right|_0 = (\not{\partial} + im + if\phi_0)\Psi + i\zeta = 0, \quad (4.6)$$

$$\left. \frac{\delta S_E}{\delta \Psi} \right|_0 = \Psi^\dagger(-\not{\partial} + im + if\phi_0) - i\zeta^\dagger = 0, \quad (4.7)$$

$$\left. \frac{\delta S_E}{\delta \phi} \right|_0 = (-\partial^2 + m^2 \frac{1}{3!} \phi_0^3) \phi_0 + i f \Psi_0^\dagger \Psi_0 - J = 0. \quad (4.8)$$

Se considerarmos o funcional gerador:

$$W_E[\zeta^\dagger, \zeta, J] = \int \mathcal{D}\phi \mathcal{D}\Psi^\dagger \mathcal{D}\Psi e^{-S_E[\phi, \Psi^\dagger, \Psi, \zeta^\dagger, \zeta, J]}, \quad (4.9)$$

podemos recorrer à solução de uma integral Gaussiana pelo método dos determinantes dada por

$$\int \mathcal{D}\eta^\dagger \mathcal{D}\eta e^{i\eta^\dagger M \eta + \zeta^\dagger \eta + \zeta^T \eta^*} = \det M e^{-i\zeta^\dagger M^{-1} \zeta}, \quad (4.10)$$

as correções quânticas dessa equação são dadas pelo cálculo dos determinantes. Vamos calculá-los usando a técnica de funções zeta, apesar de alguns desses determinantes serem complicados de calcular devido ao índice de espinores e ao inverso do operador no segundo determinante. Assim

$$\begin{aligned} & \left[\det \left(-\partial^2 + m^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 + 2f^2 \Psi_0^\dagger (\not{\partial} + im + if\phi_0)^{-1} \Psi_0 \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left[\det \left(-\partial^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 + 2f^2 \Psi_0^\dagger (\not{\partial} + if\phi_0)^{-1} \Psi_0 \right) \right]^{-\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

então, se $m = 0$, usamos que:

$$(\not{\partial} + if\phi_0)^{-1} = (\not{\partial} - if\phi_0)(-\partial^2 + f^2\phi_0^2)^{-1}. \quad (4.12)$$

Sendo assim, podemos continuar calculando os determinantes da seguinte forma

$$\det \left(-\partial^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2 + 2f^2 \Psi_0^\dagger (\not{\partial} - if\phi_0)(-\partial^2 + f^2\phi_0^2)^{-1} \Psi_0 \right). \quad (4.13)$$

Como Ψ_0 é constante a seguinte mudança é válida

$$(-\partial^2 + f^2\phi_0^2)^{-1} \Psi_0 = \Psi_0 (-\partial^2 + f^2\phi_0^2)^{-1}. \quad (4.14)$$

Então, alteramos sua posição e colocamos o último termo em evidência, obtemos:

$$\det \left[\left((-\partial^2 + \frac{\lambda}{2} \phi_0^2)(-\partial^2 + f^2\phi_0^2) + 2f^2 \Psi_0^\dagger (\not{\partial} - if\phi_0) \Psi_0 \right) (-\partial^2 + f^2\phi_0^2)^{-1} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.15)$$

esse determinante pode ser reescrito usando

$$\det(\not{\partial} + if\phi_0) = [\det(-\partial^2 + f^2\phi_0^2)]^2. \quad (4.16)$$

Podemos simplificar os cálculos se assumimos que Ψ_0 é quiral,

$$\Psi_0^\dagger \gamma^\mu \Psi_0 = 0 \quad \text{ou} \quad \Psi_R = 0; \quad \Psi^\dagger \Psi \neq 0. \quad (4.17)$$

O argumento do determinante se torna então

$$(-\partial^2 + A)(-\partial^2 + B), \quad (4.18)$$

onde

$$\begin{aligned} A + B &= (f^2 + \frac{\lambda}{2})\phi_0^2; \\ AB &= \frac{\lambda}{2}f^2\phi_0^4 - 2if^3\Psi^\dagger\phi_0\Psi. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Usamos o fato de que $\det AB = \det A \det B$, portanto

$$\det \left[(-\partial^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2)(-\partial^2 + f^2\phi_0^2) \right]^{-\frac{1}{2}} = \det \left(-\partial^2 + \frac{\lambda}{2}\phi_0^2 \right)^{-\frac{1}{2}} \det \left(-\partial^2 + f^2\phi_0^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.20)$$

O primeiro determinante do lado direito nos levará ao potencial do campo escalar como calculado anteriormente. Então, vamos nos atentar ao segundo determinante para encontrarmos o potencial efetivo dos campos fermiônicos. Como $\mathcal{N} = (\det(\not{\partial} + if\phi_0))^{-1}$, podemos aplicar as regras (4.12) e (4.16) respectivamente e se valendo do determinante do produto ser o produto dos determinantes. encontramos:

$$Z_E[\eta, \bar{\eta}] = \det \left(-\partial^2 + f^2\phi_0^2 \right)^{\frac{5}{2}} \det \left(-\partial^2 + f^2\phi_0^2 \right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.21)$$

Podemos usar a solução de determinantes usando o método da função ζ [14], consideramos um operador A com um autovalor real positivo e discreto a_1, \dots, a_n ; Aplicado a uma função $f_n(x)$

$$Af_n(x) = a_n f_n(x). \quad (4.22)$$

É possível construir a função ζ de nosso interesse, como segue:

$$\zeta_A(s) = \sum_s \frac{1}{a_n^s}. \quad (4.23)$$

Notemos que a derivada da função ζ_A é

$$\left. \frac{d\zeta_A(s)}{ds} \right|_{s=0} = - \sum_n \ln a_n e^{-s \ln a_n} = - \ln \left(\prod_n a_n \right). \quad (4.24)$$

O que nos possibilita definir:

$$\det A \equiv \prod_n a_n = e^{-\zeta'_A(0)}. \quad (4.25)$$

Escrevemos então a relação entre o determinante e a função ζ , dada por:

$$\det(-\partial^2 + B) = e^{-\zeta'_{-\partial^2+B}[s=0]}, \quad (4.26)$$

onde as soluções para ζ são

$$\zeta_{-\partial^2+B}[s] = \frac{\mu^4}{16\pi^2} \left(\frac{B}{\mu^2} \right)^{2-s} \frac{\Gamma(s-2)}{\Gamma(s)} \int d^4x \quad (4.27)$$

e

$$\zeta'_{-\partial^2+B}[0] = \frac{-1}{32\pi^2} B^2 \left(\ln \frac{B}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \int d^4x. \quad (4.28)$$

μ é um parâmetro de massa arbitrário. Voltando ao determinante encontrado, podemos considerar que:

$$\det\left(-\partial^2 + f^2\phi_0^2\right)^2 = e^{-\frac{1}{2}\zeta'_{-\partial^2+f^2\phi_0^2}[s=0]}, \quad (4.29)$$

como vimos antes $Z = e^{iW}$. Sendo assim podemos encontrar o potencial efetivo como:

$$\int d^4x V_{\text{ef}} = -\frac{1}{2}\zeta'_{-\partial^2+f^2\phi_0^2}[s=0]. \quad (4.30)$$

O potencial efetivo para campos de spin meio a 1-loop pode ser escrito na configuração:

$$V_{\text{ef}} = \frac{-1}{8\pi^2} f^4 \phi_0^4 \left(\ln \frac{f^2\phi_0^2}{\mu^2} - \frac{3}{2} \right) \quad (4.31)$$

Ao solucionar a integral de caminho como observamos no caso do campo escalar obtemos termos divergentes. É necessário o uso dos métodos de normalização e regularização para lidar com os mesmos. Sendo assim, podemos notar que o método da solução por função zeta deve esconder o cancelamento das divergências de alguma forma.

A função zeta é analítica em $s = 0$ [17]. Portanto, $\zeta_{-\partial^2+B}[0]$ é finita. Assim, o processo de retirada das divergências está implícito no cálculo da função zeta. Uma expansão em série de Laurent pode ser realizada em (4.27) a fim de encontrar (4.28) e os termos infinitos presentes cancelam-se mutualmente. Podemos ver isso explicitamente em [18] na seção dois.

Usando o método de funções zeta, chegamos ao resultado do potencial efetivo já com o sinal negativo do loop de férmions. O potencial efetivo encontrado aqui se refere ao potencial efetivo para férmions de spin meio a 1-loop.

4.2 Segundo método: cálculo usando diagramas de Feynman a 1-loop

A análise da simetria para férmions segue a ideia inicial apresentada anteriormente na seção de mesmo nome para os campos escalares [16].

Podemos, aqui, analisar as regras de Feynman para férmions e assim encontrar o potencial efetivo para o mesmo. Do primeiro diagrama na figura (7) temos

$$-2\lambda(-ig\phi)^2 \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2} \left(\frac{i\not{p}}{p^2 + i\epsilon} \right)^2, \quad (4.32)$$

com a análise dos termos podemos construir uma ideia do que sera todos os diagramas a 1-loop. O termo 2λ nos diz qual o tipo de férmion (Weyl ou Dirac) onde $\lambda = 2$ para

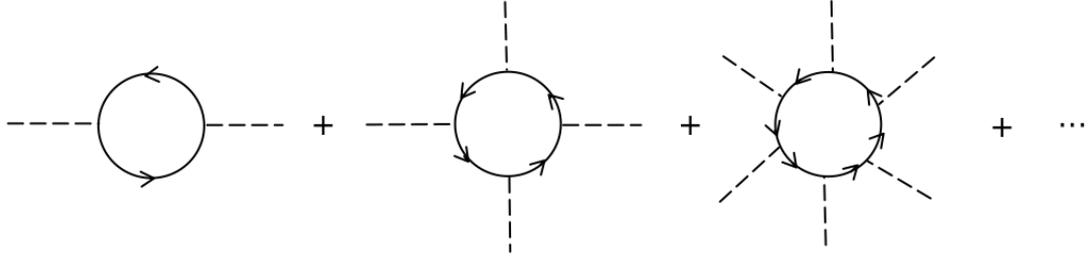


Figura 7 – Diagramas que representam o potencial efetivo a 1-loop do campo fermiônico.

férmions de Weyl e $\lambda = 4$ se forem de Dirac, o termo $(-ig\phi)^2$ se refere aos vértices, e cada vértice terá um propagador $\frac{i\cancel{p}}{p^2+i\epsilon}$. O termo $\frac{1}{2}$ vem da simetria cíclica e anticíclica dos diagramas, $\frac{1}{2n}$ e o fator -1 do loop fermiônico.

Podemos escrever a regra de Feynman para o n -ésimo diagrama

$$-2\lambda \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2n} \left(\frac{g\phi\cancel{p}}{p^2+i\epsilon} \right)^{2n}, \quad (4.33)$$

podemos aqui completar nossa avaliação dos diagramas percebendo que, diagramas com um número ímpar de vértices são zero, pois $\text{Tr}(\gamma^{\mu_1} \dots \gamma^{\mu_{2n+1}}) = 0$, temos também que $\tilde{p}^2 = p^2$, onde \tilde{p} é $\gamma \cdot p$ ou $\sigma \cdot p$ e para encontrar o potencial efetivo podemos fazer o traço, que consiste em somar todas as contribuições de diferentes férmions.

$$V = -2\lambda \text{Tr} \sum_{n=1}^{\infty} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \frac{1}{2n} \left(\frac{(g\phi)^2}{p^2+i\epsilon} \right)^n, \quad (4.34)$$

podemos aqui escrever essas equações como um logaritmo

$$V = -\lambda \text{Tr} \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} \ln \left(1 - \frac{(g\phi)^2}{p^2+i\epsilon} \right) \quad (4.35)$$

Vemos aqui uma semelhança com a mesma representação para os campos escalares e o passos a seguir, assim como os métodos de renormalização se assemelham.

5 O potencial efetivo do campo de bósons de calibre.

Calcularemos aqui o potencial efetivo para bósons de calibre no caso abeliano e faremos a extensão para o caso não abeliano.

5.1 Cálculo no caso abeliano.

Para encontrarmos a contribuição para o potencial efetivo dos bósons de calibre no caso abeliano consideramos que a Lagrangiana é da seguinte forma: $\mathcal{L} + \mathcal{L}_{\text{GF}}$ [19]. \mathcal{L} é

$$\mathcal{L} = (D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi^*) - \mu^2 \Phi^2 - \frac{1}{4} \lambda \Phi^2 - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (5.1)$$

onde

$$\begin{aligned} D_\mu \Phi &= (\partial_\mu + iqA_\mu)\Phi, \\ D^\mu \Phi^* &= (\partial_\mu - iqA_\mu)\Phi^*, \end{aligned} \quad (5.2)$$

são as derivadas covariantes,

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu \quad (5.3)$$

é o tensor invariante de calibre e

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\phi_c + \phi_1(x) + i\phi_2(x)]. \quad (5.4)$$

é o campo escalar. A contribuição da Lagrangiana de fixação de calibre, \mathcal{L}_{GF} , em nosso contexto se faz necessário o uso da Lagrangiana sugerida por 't Hooft [20] dada por:

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^\mu - \xi q \phi_c \phi_2)^2. \quad (5.5)$$

A vantagem dessa fixação de calibre é a remoção de misturas bilineares de A_μ e ϕ_2 , que surgem do termo $(D_\mu \Phi)(D^\mu \Phi^*)$.

No cálculo da aproximação de 1-loop do potencial efetivo precisamos somente considerar os termos quadráticos nos campos. O potencial efetivo então será:

$$e^{-i \int d^4x V_1(\phi_c)} = \int \mathcal{D}\Phi \mathcal{D}A^\mu e^{\int d^4x \mathcal{L}_{\text{quad}}(\phi_c)}. \quad (5.6)$$

A escolha de \mathcal{L}_{GF} nos garante que podemos escrever a ação na seguinte forma

$$\begin{aligned} \int d^4x \mathcal{L}_{\text{quad}}(\phi_c) &= -\frac{1}{2} \int d^4x' d^4x [\phi_i(x') \mathbf{A}_{ij}(x', x, \phi_c) \phi_j(x) \\ &\quad + A_\mu(x') \mathbf{B}^{\mu\nu}(x', x, \phi_c) A_\nu(x)] \end{aligned} \quad (5.7)$$

onde os operadores \mathbf{A}_{ij} e $\mathbf{B}^{\mu\nu}$ são

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{ij}(x', x, \phi_c) &= [-\partial_{x'\mu}\partial_x^\mu + M_{S_i}^2(\phi_c)]\delta_{ij}\delta(x' - x); \\ \mathbf{B}^{\mu\nu}(x', x, \phi_c) &= [(\xi^{-1} - 1)\partial_{x'}^\mu\partial_x^\nu + g^{\mu\nu}\partial_{x'\rho}\partial_x^\rho - q^2\phi_c^2 g^{\mu\nu}]\delta(x' - x),\end{aligned}\tag{5.8}$$

onde $M_{S_i}^2$ é a massa do campo escalar ϕ_i onde $i = 1, 2$. Vemos que a invariância de U(1) da eletrodinâmica escalar é espontaneamente quebrada quando o bóson de calibre adquire massa por absorver o bóson de Goldstone associado com a simetria global, preservando a renormalização da teoria. Se nos atentarmos a aproximação da ação efetiva ao potencial efetivo em (3.17), podemos recorrer à solução de integrais Gaussianas por soluções de traços. A integral funcional pode ser resolvida como

$$\int d^4x V_1(\phi_c) = -\frac{i}{2} \left[\text{Tr} \ln \frac{\mathbf{A}(\phi_c)}{\mathbf{A}(0)} + \text{Tr} \ln \frac{\mathbf{B}(\phi_c)}{\mathbf{B}(0)} \right].\tag{5.9}$$

Como vimos anteriormente em (3.18) podemos escrever

$$\begin{aligned}V_1(\phi_c) &= -\frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \left(\ln \frac{k^2 - \mu^2 - \frac{3}{4}\lambda\phi_c^2}{k^2 - \mu^2} + \ln \frac{k^2 - \mu^2 - \frac{3}{4}\lambda\phi_c^2 - \xi q^2\phi_c^2}{k^2 - \mu^2} \right. \\ &\quad \left. + 3 \ln \frac{k^2 - q^2\phi_c^2}{k^2} + \ln \frac{k^2 - \xi q^2\phi_c^2}{k^2} \right).\end{aligned}\tag{5.10}$$

No calibre de Landau ($\xi = 0$), a integral toma a forma que já trabalhamos nos casos dos campos anteriores, temos então o potencial efetivo para o caso dos bósons de calibre como

$$V(\phi_c) = \frac{1}{2}\mu^2\phi_c^2 + \frac{1}{16}\lambda\phi_c^4 + B\phi_c^4 \left(\ln \frac{\phi_c^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right).\tag{5.11}$$

Se recorrermos ao esquema de renormalização (3.20), podemos encontrar B

$$B = \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{5}{8}\lambda^2 + 3q^4 \right).\tag{5.12}$$

Se assumirmos λ como da ordem de grandeza de q^4 e com um valor pequeno, podemos então negligenciar a contribuição de λ^2 , sobrando somente a contribuição de q^4 . Assim, a contribuição dos diagramas de 1-loop ao potencial efetivo pode ser escrita como

$$V_1(\phi_c) = \frac{3}{64\pi^2} q^4 \phi_c^4 \left(\ln \frac{\phi_c^2}{M^2} - \frac{25}{6} \right).\tag{5.13}$$

Encontramos assim o potencial efetivo a 1-loop para os bósons de calibre como nos casos anteriores. Mas, precisamos agora analisar o caso não abeliano.

5.2 Cálculo no caso não abeliano.

Um fenômeno similar acontece no caso não abeliano. Consideremos uma simetria de calibre não abeliana geral, G , e n campos escalares reais $\Phi(x)$ como

$$\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \dots \\ \phi_n \end{pmatrix}. \quad (5.14)$$

Diferente do caso abeliano, escrevemos a derivada covariante em forma de matriz da seguinte maneira

$$D_\mu \equiv \mathbb{1}\partial_\mu + igT^a A_\mu^a, \quad (5.15)$$

onde $\mathbb{1}$ é a matriz $n \times n$, g é a constante de acoplamento, T^a ($a = 1, \dots, N$) são as matrizes $n \times n$ que satisfazem a álgebra de Lie do grupo G , e A_μ^a são os campos de calibre. Adicionando a Lagrangiana de Yang-Mills para os campos de calibre

$$\mathcal{L}_{\text{YM}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (5.16)$$

onde

$$F_{\mu\nu}^a = \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf^{abc} A_\mu^b A_\nu^c. \quad (5.17)$$

Temos assim o caso não abeliano análogo ao abeliano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(D_\mu \Phi)^T (D^\mu \Phi) - V(\Phi) - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{\mu\nu a}, \quad (5.18)$$

onde $V(\Phi)$ satisfaz

$$\frac{\partial V}{\partial \Phi} T^a \Phi = 0 \quad (5.19)$$

como consequência da simetria. Quando a simetria é espontaneamente quebrada, alguns ou todos os campos em Φ adquirem valores esperados de vácuo (VEVs). Definimos então,

$$\tilde{\Phi} = \Phi - v, \quad (5.20)$$

onde v é o vetor de deslocamento no campo em que todos os VEVs são zero. Rescrevendo o primeiro termo da Lagrangiana em termos desse novo campo obtemos

$$\begin{aligned} (D_\mu \Phi)^T (D^\mu \Phi) &= (\partial^\mu \tilde{\Phi})^T (\partial_\mu \tilde{\Phi}) + 2ig(\partial^\mu \tilde{\Phi}^T) T^a v A^{\mu a} \\ &+ g^2 A_\mu^a A^{b\mu} v^T T^a T^b v + \dots \end{aligned} \quad (5.21)$$

onde \dots denota os termos cúbicos e quárticos nas interações. Usamos aqui o fato de iT^a ser real e T^a ser hermitiana, fazendo da matriz T^a antissimétrica. Suponhamos T^a para que o estado fundamental em v seja invariante sob transformações pertencentes a um

subgrupo S de G . Então, escolhemos os geradores T^a ($a = 1, \dots, N$) de G tal que T^a ($a = 1, \dots, M$) gera S . Como o estado fundamental de v é invariante em S ,

$$T^a v = 0 \quad (a = 1, \dots, M), \quad (5.22)$$

mas

$$T^a v \neq 0 \quad (a = 1 + M, \dots, N). \quad (5.23)$$

Com isso vemos que em (5.21) os $N - M$ modos de Goldstone $i\tilde{\Phi}^T T^a v$ ($a = 1 + M, \dots, N$) estão misturados com os bósons de calibre correspondente. É possível antecipar, então, que A_μ^a ($a = 1, \dots, M$) será não massivo, como ele não estará misturado com um bóson de Goldstone, enquanto o restante adquirirá massa.

Podemos presumir que existe um calibre unitário no qual transforma os modos de Goldstone para zero, com a transformação de calibre não abeliana apropriada. Assumimos que

$$\Phi(x) \rightarrow \Phi'(x), \quad (5.24)$$

onde

$$i\tilde{\Phi}'^T T^a v = 0 \quad (a = M + 1, \dots, N). \quad (5.25)$$

Nesse calibre os campos de Higgs restantes em (5.21) não estão misturados com os bósons de calibre. O terceiro termo em (5.21) é o termo de massa dos bósons vetores, mas a massa real é obtida diagonalizando a matriz de massa

$$(M_A^2)^{ab} \equiv g^2 v^T T^a T^b v \quad (a, b = 1, \dots, N). \quad (5.26)$$

Como a matriz T^a satisfaz (5.22), notamos que

$$(M_A^2)^{ab} = 0 \quad (a, b = 1, \dots, M), \quad (5.27)$$

tal que A_μ^a ($a = 1, \dots, M$) será de fato não massivo. O cálculo das massas dos bósons será deixada para quando analisarmos o caso no Modelo Padrão. No caso não abeliano também se faz necessário a adição da Lagrangiana de fixação e calibre. Como antes num caso análogo a Lagrangiana sugerida por 't Hooft [20]. O termo de fixação de calibre é

$$\mathcal{L}_{\text{GF}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial_\mu A^{a\mu} - \xi g i\tilde{\Phi}^T T^a v)^2 \quad (5.28)$$

os termos cruzados $\partial_\mu A^{a\mu} g i\tilde{\Phi}^T T^a v$ cancelam os termos correspondentes em (5.21), facilitando o cálculo da renormalização. A escolha do calibre, assim como a avaliação da necessidade de uma Lagrangiana de fantasmas de Faddeev-Popov será deixada também para quando a análise no Modelo Padrão for feita.

A generalização do caso não abeliano pode ser escrita na forma de (5.9) como

$$\int d^4x V_1(\phi_c) = -\frac{i}{2} \left[\text{Tr} \ln \frac{\mathbf{A}(\phi_c)}{\mathbf{A}(0)} + \text{Tr} \ln \frac{\mathbf{B}(\phi_c)}{\mathbf{B}(0)} - 2 \text{Tr} \ln \frac{\mathbf{C}(\phi_c)}{\mathbf{C}(0)} - 2 \text{Tr} \ln \frac{\mathbf{D}(\phi_c)}{\mathbf{D}(0)} \right], \quad (5.29)$$

onde as matrizes \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} , \mathbf{D} especifica a contribuição do campo escalar, dos bósons de calibre, dos fantasmas e dos férmions respectivamente, sendo as contribuições dos campos escalar e dos férmions como calculados anteriormente, restando apenas os bósons de calibre no caso não abeliano e os fantasmas. Os termos dos fantasmas e dos férmions são acompanhados de um fator -2 por serem variáveis de Grassmann complexas. Os operadores nesse caso ficam respectivamente

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{ab}^{\mu\nu}(x', x, \phi_c) &= [\delta_{ab}(\xi^{-1}\partial_{x'}^\mu\partial_x^\nu - \partial_{x'}^\nu\partial_x^\mu + g^{\mu\nu}\partial_{x'\lambda}\partial_x^\lambda) - g^{\mu\nu}(M_A^2)_{ab}]\delta(x' - x) \\ \mathbf{C}_{ab}(x', x, \phi_c) &= [-\delta_{ab}\partial_{x'\mu}\partial_x^\mu + \xi(M_A^2)_{ab}]\delta(x' - x).\end{aligned}\tag{5.30}$$

A partir daqui o cálculo se assemelha ao caso abeliano, notando que os termos de massas são matrizes e que seus autovalores são os valores das massas das partículas. Com esse resultado, obtemos o necessário para escrever o potencial efetivo a 1-loop como nos casos anteriores. Fechamos aqui o cálculo do potencial efetivo para todos os campos a temperatura zero e podemos partir para a análise do caso em que temos uma temperatura diferente de zero.

6 Potencial efetivo à temperatura finita.

Nesse capítulo faremos uma analogia a fim de aplicar as propriedades termodinâmicas nos sistemas de campos quânticos, que será importante para estudarmos a transição de fase no universo primordial. Por ora construiremos o sistema termodinâmico do universo primordial e efetuaremos as modificações necessárias para tal descrição.

6.1 O universo como um sistema termodinâmico

No universo primordial, ao expandir-se, as temperaturas diminuíram a ponto onde a densidade de radiação no universo decresceu e a possibilidade da criação de elementos massivos se tornou possível [1]. Consideraremos que o ensemble canônico pode ser uma boa descrição para o nosso conjunto de sistemas e o banho térmico.

Podemos escrever a distribuição de probabilidade de como o sistema se comporta quando acoplado com o banho térmico em uma temperatura T ,

$$\mathcal{P} = \frac{1}{Z} e^{-\beta E}, \quad (6.1)$$

onde $\beta = \frac{1}{T}$. Como o sistema está em equilíbrio com o banho térmico, deve ter a mesma temperatura. Note que mesmo se a temperatura for igual, a energia não necessariamente será, mas está governada pela distribuição de probabilidade, conhecida como distribuição de Boltzmann [9].

Um dos objetos de maior importância na mecânica estatística é a função partição Z , definida como

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta \hat{H}}, \quad (6.2)$$

onde \hat{H} é o operador Hamiltoniano. Uma vez que a função partição é avaliada, é possível escrever a energia livre de Helmholtz F como

$$Z = e^{-\beta F}, \quad (6.3)$$

isso é, a energia total fornecida em forma de trabalho para criar o sistema espontaneamente ou se você está aniquilando o sistema, a energia que sai como trabalho [21].

No universo primordial não podemos aplicar a teoria usual, pois esta não leva em conta os efeitos da temperatura. Podemos fazer uma analogia entre a função partição e o funcional gerador, o qual, sabemos calcular como nos capítulos passados. Em termos da integral de caminho, a amplitude de transição é

$$\langle q_f | e^{-i(t_f - t_i)H} | q_i \rangle = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{i \int_{t_i}^{t_f} dt [p\dot{q} - H]}. \quad (6.4)$$

Comparando essa expressão com a função partição a temperatura β^{-1} , obtemos

$$Z = \text{Tr} e^{-\beta H} = \sum_q \langle q | e^{-\beta H} | q \rangle \quad (6.5)$$

onde H é o Hamiltoniano e p e q são as variáveis. Veja que (6.4) e (6.5) sugere uma comparação, desde que as seguintes mudanças sejam feitas:

1. Fazer uma rotação de Wick fixando $i(t_f - t_i) = \beta$ ou como a origem é arbitrária, $t_i = 0$ e $it_f = \beta$;
2. Fixar $q_i = q_f$ para que as configurações finais e iniciais sejam as mesmas, e como diferem por um “tempo” β , requer que seja periódica;

$$q(\beta) = q(0). \quad (6.6)$$

Tal analogia se torna possível, pois a variação de temperatura implicitamente nos dá uma evolução temporal, sendo assim obtemos

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H}) = \int \mathcal{D}q \int \mathcal{D}p e^{i \int_0^\beta d\tau [p \frac{dq}{d\tau} - H]}. \quad (6.7)$$

Podemos, então, usar as ferramentas para o cálculo das integrais de caminho para encontrarmos o potencial efetivo a uma temperatura finita. A principal ferramenta para o cálculo do potencial efetivo é a função partição. Uma vez que podemos avaliar tal função em relação à energia livre, podemos encontrar

$$-\beta F = \ln Z. \quad (6.8)$$

A introdução da variável $\tau = i\beta$ aqui se faz pela necessidade, não de levar nosso problema para o espaço Euclidiano, mas a de criar uma conexão entre a teoria de campos e a termodinâmica, sem a necessidade de retornar a análise temporal anterior, pois a função partição não tem dependência temporal [19]. Com a analogia da mecânica estatística com a mecânica quântica construída, podemos voltar a analisar o potencial efetivo e seus efeitos.

6.2 O potencial efetivo a temperatura finita

O universo, ao resfriar, atinge uma temperatura na qual a simetria é espontaneamente quebrada. Tomando como base a analogia feita na seção anterior, podemos escrever algo a fim de mostrar que na temperatura crítica ocorre a quebra da simetria do potencial e as partículas ganham massa.

Começamos calculando a função partição para o campo escalar [19]:

$$Z = \tilde{N}(\beta) \int \mathcal{D}\phi e^{-\frac{1}{2} \int_0^\beta d\tau' \int d^3x' \int_0^\beta d\tau \int d^3x \phi(\vec{x}') \mathbf{A}(\vec{x}', \vec{x}) \phi(\vec{x})}, \quad (6.9)$$

onde a integral de caminho é periódica em τ pela relação (6.6) e

$$\mathbf{A}(\bar{x}', \bar{x}) = (-\bar{\partial}'_\mu \bar{\partial}^\mu + m^2) \delta(\bar{x}' - \bar{x}). \quad (6.10)$$

Com a forma abreviada de $\delta(\bar{x}' - \bar{x})$ sendo

$$\delta(\bar{x}' - \bar{x}) \equiv \delta(\tau' - \tau) \delta(\mathbf{x}' - \mathbf{x}), \quad (6.11)$$

em que

$$\bar{x} \equiv (-i\tau, \mathbf{x}). \quad (6.12)$$

Podemos solucionar (6.9) como uma integral Gaussiana recorrendo ao traço da seguinte forma

$$Z = \tilde{N}(\beta) e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{A}}. \quad (6.13)$$

Para avaliar o traço, devemos primeiro nos atentar a periodicidade de $\phi(\tau, \mathbf{x})$ em $0 > \tau > \beta$, o que significa que podemos escrever

$$\phi(\bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\omega_n \tau} e^{i\mathbf{p} \cdot \mathbf{x}} \tilde{\phi}(\omega_n, \mathbf{p}), \quad (6.14)$$

com as frequências de Matsubara para bósons sendo

$$\omega_n = \frac{2n\pi}{\beta}. \quad (6.15)$$

Podemos então escrever

$$\phi(\bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p} \cdot \bar{x}} \tilde{\phi}(\bar{p}), \quad (6.16)$$

com

$$\bar{p} \equiv (i\omega_n, \mathbf{p}) \quad (6.17)$$

e

$$\bar{p} \cdot \bar{x} \equiv \omega_n \tau - \mathbf{p} \cdot \mathbf{x}. \quad (6.18)$$

de maneira correspondente

$$\delta(\bar{x}' - \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x}' - \bar{x})} \quad (6.19)$$

e

$$\mathbf{A}(\bar{x}', \bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p} \cdot (\bar{x}' - \bar{x})} (-\bar{p}^2 + m^2), \quad (6.20)$$

onde

$$\bar{p}^2 \equiv -(\omega^2 + \mathbf{p}^2). \quad (6.21)$$

Então, se fixarmos $\bar{x}' = \bar{x}$, integrarmos e somarmos sobre todos os valores de \bar{x} ,

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \mathbf{A} &= \int_0^\beta d\tau \int d^3 x \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln(-\bar{p}^2 + m^2) \\ &= \int d^3 x \sum_n \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} \ln[\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2]. \end{aligned} \quad (6.22)$$

Realizando a soma das frequências de Matsubara para bósons,

$$\sum_n \ln(\omega_n^2 + x^2) = \beta x + 2 \ln(1 - e^{-\beta x}) + \text{termos independentes de } x. \quad (6.23)$$

O resultado é

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \mathbf{A} = \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} & \left[\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + 2 \ln \left[1 - e^{-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \right] \right. \\ & \left. + \text{termos independentes de } \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.24)$$

Usando (6.13) em (6.24), obtemos

$$-\beta F = \ln Z = - \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left[\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + 2 \ln \left[1 - e^{-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \right] \right]. \quad (6.25)$$

os termos independentes de $\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$ são vinculados a temperatura e cancelam com $\tilde{N}(\beta)$. Quando a massa do campo escalar é negligenciável comparada a temperatura, é possível fazer uma aproximação em (6.25) e encontrar uma densidade de energia livre dada por

$$\mathcal{F} = \frac{-\pi^2}{90\beta^4} = -\frac{\pi^2 T^4}{90} \quad (6.26)$$

onde

$$F = \int d^3x \mathcal{F}. \quad (6.27)$$

Para escrevermos a função partição para os campos de calibre devemos nos atentar aos dois graus de liberdade que vem da Lagrangiana renormalizável que não são físicos, e também dos fantasmas de Faddeev-Popov, que não são partículas físicas e não devem estar em equilíbrio com o banho térmico. A solução deste problema se dá pela escolha apropriada do calibre que nos possibilita escrever a função partição dos campos de calibre como fizemos para o campo escalar. Para os campos de calibre

$$Z = [\tilde{N}(\beta)]^{2G_c} = \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(A_a^\mu, \eta_a)}, \quad (6.28)$$

com os campos em função de $\bar{x} \equiv (-i\tau, \mathbf{x})$ e G_c é a dimensão da representação adjunta do grupo de calibre. Os fantasmas de Faddeev-Popov, η , são tratados aqui de forma periódica, diferente dos campos fermiônicos que serão tratados mais tardes, pois esses surgem do determinante tratado no espaço dos campos de calibre.

No limite $g \rightarrow 0$ podemos solucionar a função partição como uma integral Gaussiana

$$Z = [\tilde{N}(\beta)]^2 \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}A^\mu e^{\int d\bar{x} \left(-\frac{1}{4} \bar{F}^{\mu\nu} \bar{F}_{\mu\nu} - \frac{1}{2\xi} (\bar{\partial}_\mu A^\mu)^2 \right)} \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta e^{\int d\bar{x} \bar{\partial}_\mu \eta^* \bar{\partial}^\mu \eta}, \quad (6.29)$$

onde

$$\bar{F}^{\mu\nu} \equiv \bar{\partial}^\mu A^\nu - \bar{\partial}^\nu A^\mu \quad (6.30)$$

e

$$\int d\bar{x} \equiv \int_0^\beta d\tau \int d^3x. \quad (6.31)$$

Podemos reescrever a função partição da seguinte forma

$$\begin{aligned} Z = & [\tilde{N}(\beta)]^2 \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}A^\mu e^{-\frac{1}{2} \int d\bar{x}' d\bar{x} A_\mu(\bar{x}') \mathbf{B}^{\mu\nu}(\bar{x}', \bar{x}) A_\nu(\bar{x})} \\ & \times \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta e^{-\int d\bar{x}' d\bar{x} \eta^*(\bar{x}') \mathbf{C}(\bar{x}', \bar{x}) \eta(\bar{x})} \end{aligned} \quad (6.32)$$

onde

$$\mathbf{B}^{\mu\nu}(\bar{x}', \bar{x}) = [(\xi^{-1} - 1) \partial_{x'}^\mu \partial_x^\nu + g^{\mu\nu} \partial_{x'\rho} \partial_x^\rho] \delta(\bar{x}' - \bar{x}) \quad (6.33)$$

e

$$\mathbf{C}(\bar{x}', \bar{x}) = [\partial_{x'\rho} \partial_x^\rho] \delta(\bar{x}' - \bar{x}), \quad (6.34)$$

com $\delta(\bar{x}' - \bar{x})$ como em (6.11).

Podemos efetuar a integral Gaussiana, obtemos

$$Z = [\tilde{N}(\beta)]^2 e^{-\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{B}} e^{\text{Tr} \ln \mathbf{C}}. \quad (6.35)$$

Se uma transformada de Fourier for efetuada nos dois operadores como feito em (6.19) e (6.20), podemos escrever os traços da seguinte forma

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \mathbf{B} &= \frac{1}{\beta} \int d\bar{x} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} [3 \ln(\bar{p}^2) + \ln(\xi^{-1} \bar{p}^2)] \\ &= \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 4 \ln[\omega_n^2 + \mathbf{p}^2], \end{aligned} \quad (6.36)$$

e

$$\text{Tr} \ln \mathbf{C} = \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \ln[\omega_n^2 + \mathbf{p}^2]. \quad (6.37)$$

Substituindo (6.36) e (6.37) em (6.35) nos dá

$$Z = [\tilde{N}(\beta)]^2 e^{-\frac{1}{2} \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2 \ln[\omega_n^2 + \mathbf{p}^2]}. \quad (6.38)$$

Isso é o mesmo resultado obtido para o campo escalar, mas com o expoente com seu valor dobrado. Similarmente podemos escrever a densidade de lagrangiana como

$$\mathcal{F} = -\frac{2\pi^2 T^4}{90}. \quad (6.39)$$

Estendendo nossa discussão para os férmions lembramos que observáveis físicos envolvem potencias pares dos campos de Dirac, pois ψ muda de sinal através de uma rotação de 2π . Para obter a descrição consistente com a estatística de Fermi quando a média térmica é calculada, precisamos começar de

$$Z = \sum_{\psi(x)} \langle \psi(x), t=0 | e^{-\beta \hat{H}} | -\psi(x), t=0 \rangle. \quad (6.40)$$

O formato da função partição para férmions é

$$Z = N'(\beta) \int_{\text{antiperiódica}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}(\psi)} \quad (6.41)$$

onde ψ é antiperiódico em $0 < \tau < \beta$,

$$\psi(x, t = 0) = -\psi(x, t = \beta). \quad (6.42)$$

Se fizermos uma transformada de Fourier em $\psi(x)$ encontramos

$$\psi(\bar{x}) = \frac{1}{\beta} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-i\bar{p}\cdot\bar{x}} \tilde{\psi}(\bar{p}), \quad (6.43)$$

onde as frequências de Matsubara para os férmions são

$$\omega_n = \frac{(2n+1)\pi}{\beta} \quad (6.44)$$

onde \bar{x} , \bar{p} e $\bar{p}\cdot\bar{x}$ são como em (6.12), (6.17) e (6.18) respectivamente. A Lagrangiana apropriada para a descrição é

$$\mathcal{L}(\psi) = \bar{\psi}(\bar{x})(i\vec{\not{D}} - m)\psi(\bar{x}). \quad (6.45)$$

Então

$$Z = N'(\beta) \int_{\text{antiperiódica}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{-\int d\bar{x} \int d\bar{x} \bar{\psi}(\bar{x}) \mathbf{D}(\bar{x}', \bar{x}) \psi(\bar{x})} \quad (6.46)$$

com

$$\mathbf{D}(\bar{x}', \bar{x}) = (i\vec{\not{D}} + m)\delta(\bar{x}' - \bar{x}). \quad (6.47)$$

Agora se realizarmos a integral Gaussiana como antes

$$Z = N'(\beta) e^{\text{Tr} \ln \mathbf{D}}. \quad (6.48)$$

Se a transformada de Fourier em (6.19) e (6.20) for realizada em $\mathbf{D}(\bar{x}', \bar{x})$ podemos tomar o traço e obtemos

$$\begin{aligned} \text{Tr} \ln \mathbf{D} &= \frac{1}{\beta} \int d\bar{x} \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2 \ln(-\bar{p}^2 + m^2) \\ &= \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} 2 \ln[\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2]. \end{aligned} \quad (6.49)$$

Realizando a soma das frequências de Matsubara como

$$\sum_n \ln(\omega_n^2 + x^2) = \beta x + 2 \ln(1 + e^{-\beta x}) + \text{termos independentes de } x, \quad (6.50)$$

e utilizando o resultado em (6.48), temos

$$-\beta F = \ln Z = 2 \int d^3x \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \left\{ \beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2} + 2 \ln \left[1 + e^{-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \right] \right\} \quad (6.51)$$

onde os termos constantes foram cancelados com $N'(\beta)$. A aproximação, no caso $m \ll T$, nos leva a densidade de energia

$$\mathcal{F} = -\frac{7\pi^2 T^4}{180}. \quad (6.52)$$

No caso de espinores não massivos, um cálculo similar, usando espinores de Weyl, chega a metade da resposta encontrada anteriormente. Podemos simplificar a apresentação da densidade de energia livre encontrada até aqui da seguinte forma

$$\mathcal{F} = -\frac{\pi^2 T^4}{90} \left(N_B + \frac{7}{8} N_F \right) \quad (6.53)$$

onde N_B e N_F são os números de graus de liberdades dos bósons e férmions, respectivamente.

A contribuição da ação efetiva a temperatura finita dos diagramas a 1-loop é obtida a partir de uma analogia ao caso de temperatura zero. Vamos agora trabalhar nos termos da Lagrangiana dos campos que são dependentes de τ que são quadráticos nos campos. Escrevendo a ação efetiva na forma de uma integral Gaussiana

$$e^{\bar{\Gamma}_1(\phi_c)} = \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \int_{\text{antiperiódica}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{\text{quad}}(\phi_c)}. \quad (6.54)$$

Podemos escrever a partir da ação efetiva o potencial efetivo como mostramos em (2.39), obtendo

$$e^{-\int_0^\beta d\tau \int d^3x \bar{V}(\phi_c)} = \int_{\text{periódica}} \mathcal{D}\phi \mathcal{D}A^\mu \mathcal{D}\eta^* \mathcal{D}\eta \int_{\text{antiperiódica}} \mathcal{D}\bar{\psi} \mathcal{D}\psi \times e^{\int_0^\beta d\tau \int d^3x \mathcal{L}_{\text{quad}}(\phi_c)}, \quad (6.55)$$

onde,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{quad}}(\phi_c) = & \frac{1}{2} \partial_\mu \phi_i \partial^\mu \phi_i - \frac{1}{2} [\hat{M}_S^2(\phi_c)]_{ij} \phi_i \phi_j \\ & - \frac{1}{4} (\partial^\mu A_a^\nu - \partial^\nu A_a^\mu) (\partial_\mu (A_a)_\nu - \partial_\nu (A_a)_\mu) \\ & + \frac{1}{2} [\hat{M}_V^2(\phi_c)]_{ab} A_a^\mu A_b^\mu - (1/2\xi) (\partial_\mu A_a^\mu)^2 \\ & + \partial_\mu \eta_a^* \partial^\mu \eta_a + i \bar{\psi}_r \gamma^\mu \vec{\partial}_\mu \psi_r \\ & - [\hat{M}_F(\phi_c)]_{rs} \bar{\psi}_r \psi_s, \end{aligned} \quad (6.56)$$

é a Lagrangiana com os termos quadráticos com todos os campos que analisaremos, \hat{M}_S^2 é a massa do campo escalar, \hat{M}_V^2 é a massa dos bósons de calibre e \hat{M}_F a massa do férmion. Podemos escrever os operadores de cada campo a fim de avaliar a integral como feito anteriormente. Vamos agora considerar os seguintes operadores:

- $\mathbf{A}(\vec{x}', \vec{x}) = [-\partial_\mu \partial^\mu + [\hat{M}_S^2(\phi_c)]_{ij}] \delta(\vec{x}' - \vec{x})$, para o caso do campo escalar;
- $\mathbf{B}^{\mu\nu}(\vec{x}', \vec{x}) = [(-\partial^2 + [\hat{M}_V^2(\phi_c)]_{ab}) g^{\mu\nu} + (1 - \xi^{-1}) \partial^\mu \partial^\nu] \delta(\vec{x}' - \vec{x})$, para o caso dos campos de bósons de calibre;

- $\mathbf{C}(\vec{x}', \vec{x}) = [-\partial^\rho \partial_\rho] \delta(\vec{x}' - \vec{x})$, para o caso dos campos fantasmas;
- $\mathbf{D}(\vec{x}', \vec{x}) = [i\gamma^\mu \partial_\mu + [\hat{M}_F(\phi_c)]_{rs}] \delta(\vec{x}' - \vec{x})$, para o caso do campo fermiônico.

Para os bósons de calibre, precisamos fazer algumas considerações, a Lagrangiana envolve todos os quatro graus de liberdade do campo de calibre no qual dois deles são não físicos, também os campos fantasmas de Fadeev-Popov que vem de uma teoria renormalizável, mas esses não são partículas físicas. Os campos do vetor não massivo tem somente dois graus de liberdade e o restante também não são físicos. Tais objetos não físicos não podem estar em equilíbrio com o banho térmico e por consequência aparecer em nossa função partição [1].

Realizando a integração Gaussiana na integral de caminho, obtemos:

$$-\int_0^\beta d\tau \int d^3x V(\phi_c) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{A} - \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \mathbf{B} + \text{Tr} \ln \mathbf{C} + \text{Tr} \ln \mathbf{D}, \quad (6.57)$$

os traços aqui são feitos como em (6.22), (6.36), (6.37) e (6.49), respectivamente, obtemos

$$\text{Tr} \ln \mathbf{A} = \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_i \ln[\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + [M_S^2]_i]; \quad (6.58)$$

$$\text{Tr} \ln \mathbf{B} = \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_a \{3 \ln[\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + [M_V^2]_a] + \ln[\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + \xi[M_V^2]_a]\}; \quad (6.59)$$

Onde aplicamos o calibre de Landau,

$$\text{Tr} \ln \mathbf{C} = \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_a \ln[\omega_n^2 + \mathbf{p}^2]; \quad (6.60)$$

$$\text{Tr} \ln \mathbf{D} = 2 \int d^3x \sum_n \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_r \ln[\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + [M_F^2]_r], \quad (6.61)$$

onde $[M_S^2]$, $[M_V^2]$ e $[M_F^2]$ são os autovalores das matrizes de massa \hat{M}_S^2 do campo escalar, \hat{M}_V^2 dos bósons de calibre e \hat{M}_F do férmion. Substituindo os traços em (6.57), obtemos

$$\begin{aligned} \beta V(\phi_c) = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_i \left\{ \beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + (M_S^2)_i} + 2 \ln \left[1 - e^{-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + (M_S^2)_i}} \right] \right\} \\ & - 2 \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_r \left\{ \beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + (M_F^2)_r} + 2 \ln \left[1 + e^{(-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + (M_F^2)_r})} \right] \right\} \\ & + \frac{1}{2} \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \sum_a \left\{ 3\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + (M_V^2)_a} + 6 \ln \left[1 - e^{(-\beta \sqrt{\mathbf{p}^2 + (M_V^2)_a})} \right] \right. \\ & \left. - \beta |\mathbf{p}| - 2 \ln (1 - e^{-\beta |\mathbf{p}|}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.62)$$

Podemos separar o potencial em duas partes, uma com temperatura zero e uma com uma temperatura finita,

$$V(\phi_c) = V_0(\phi_c) + V_T(\phi_c). \quad (6.63)$$

Os cálculos de $V_0(\phi_c)$ foram realizados nos capítulos passados. O cálculo do potencial a temperatura finita pode ser feito usando uma mudança de variável da seguinte forma $y \equiv \beta|p| = T^{-1}|p|$. Obtemos então

$$\begin{aligned} V_T(\phi_c) = & \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \left(\sum_i \ln \left[1 - e^{\left(-\sqrt{y^2+T^{-2}(M_S^2)_i}\right)} \right] \right. \\ & + \sum_a 3 \ln \left[1 - e^{\left(-\sqrt{y^2+T^{-2}(M_V^2)_a}\right)} \right] - \ln(1 - e^{-y}) \\ & \left. - 4 \sum_r \ln \left[1 + e^{\left(-\sqrt{y^2+T^{-2}(M_F^2)_r}\right)} \right] \right). \end{aligned} \quad (6.64)$$

Para o caso de temperatura finita, podemos analisar duas situações interessantes. Quando os autovalores das matrizes de massas são maiores que T^2 , as contribuições de V_T se tornam negligenciáveis. O segundo caso é quando o valor de T é maior que os autovalores das massas, usamos assim a solução para o caso bosônico

$$\frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \ln \left[1 - e^{\left(-\sqrt{y^2+RT^{-2}}\right)} \right] \approx \frac{-\pi^2 T^4}{90} + \frac{RT^2}{24} \quad RT^{-2} \ll 1, \quad (6.65)$$

e para o caso fermiônico

$$\frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dy y^2 \ln \left[1 + e^{\left(-\sqrt{y^2+RT^{-2}}\right)} \right] \approx \frac{7\pi^2 T^4}{720} - \frac{RT^2}{48} \quad RT^{-2} \ll 1. \quad (6.66)$$

Quando extrapolamos para o limite em altas temperaturas obtemos

$$\begin{aligned} V_T(\phi_c) \approx & -\frac{\pi^2 T^4}{90} \left(N_B + \frac{7}{8} N_F \right) + \frac{T^2}{24} \left(\sum_i (M_S^2)_i + 3 \sum_a (M_V^2)_a + 2 \sum_r (M_F^2)_r \right) \\ = & -\frac{\pi^2 T^4}{90} \left(N_B + \frac{7}{8} N_F \right) \\ & + \frac{T^2}{24} \left[\text{Tr } \hat{M}_S^2(\phi_c) + 3 \text{Tr } \hat{M}_V^2(\phi_c) + 2 \text{Tr } \hat{M}_F^2(\phi_c) \right]. \end{aligned} \quad (6.67)$$

Temos aqui a ferramenta necessária para avaliar o banho térmico que consideramos o universo, a quantidade potencial efetivo a temperatura finita se equipara a energia livre do sistema, considerada aqui a energia livre de Helmholtz. Podemos então partir para uma análise da transição de fase. Agora nos resta aplicar com dados reais toda nossa análise no Modelo Padrão, de modo a analisar a aplicabilidade da teoria na realidade e avaliar se correções devem ser feitas.

7 O potencial efetivo a temperatura finita no Modelo Padrão.

Para estudarmos a transição de fase eletrofraca no Modelo Padrão é necessário o cálculo do potencial efetivo a temperatura finita. Esse potencial contém várias contribuições, sendo elas: ao nível de árvore, 1-loop a temperatura zero e à temperatura finita a 1-loop com a contribuição dos diagramas de anéis.

7.1 Campo escalar real

Nesta seção analisaremos o caso do campo escalar real o qual tem Lagrangiana na forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu\phi)^2 + \frac{1}{2}c^2\phi^2 - \frac{1}{4}\lambda\phi^4, \quad (7.1)$$

que é simétrica perante $\phi \rightarrow -\phi$. Notamos que a Lagrangiana contém a simetria de paridade, mas o valor do campo no vácuo é degenerado e quebra a simetria espontaneamente. Podemos fazer um deslocamento no vácuo com $\phi = v + \chi$. Efetuando isso o potencial fica

$$V_{\text{tree}} = -\frac{1}{2}c^2(v + \chi)^2 + \frac{1}{4}\lambda(v + \chi)^4. \quad (7.2)$$

O primeiro passo para a análise do potencial é encontrar o termo de massa para o campo χ que é

$$m^2(v) = \left. \frac{d^2 V_{\text{tree}}}{d\chi^2} \right|_{\chi=0} = 3\lambda v^2 - c^2. \quad (7.3)$$

Para o campo constante v , em sua menor ordem, temos o potencial ao nível de árvore:

$$V_{\text{tree}}(v) = -\frac{1}{2}c^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4. \quad (7.4)$$

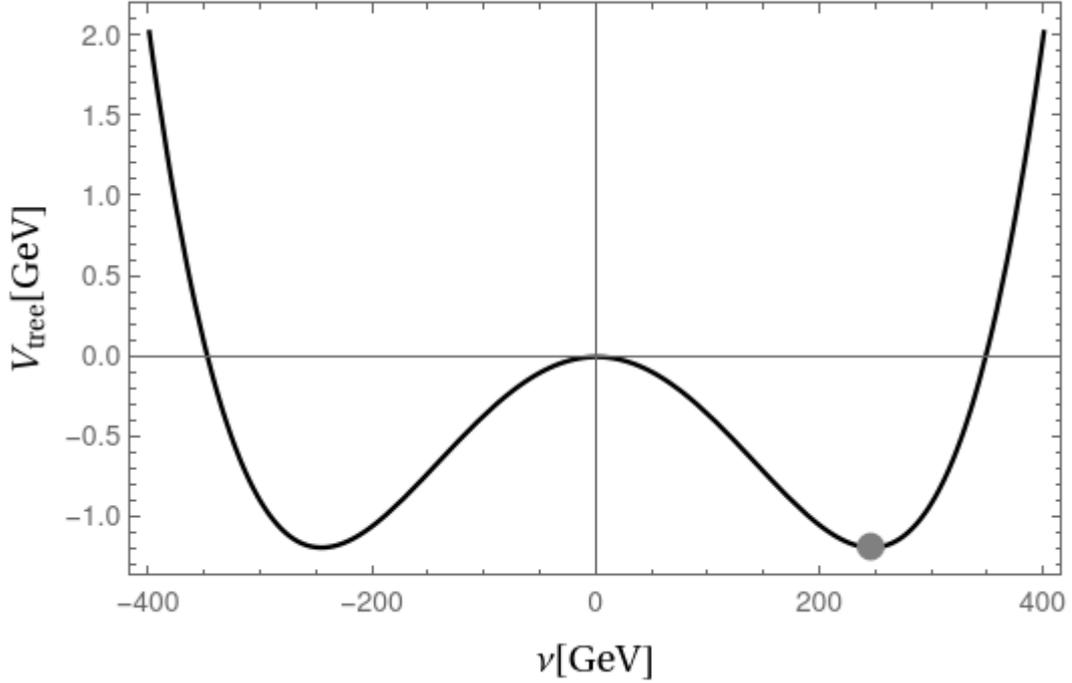
Com isso o gráfico deste potencial fica como na figura (8). Já havíamos calculado isso no capítulo 3, mas refaremos alguns cálculos por completeza, como encontrar o mínimo em relação a v que é

$$\begin{aligned} \left. \frac{dV_{\text{tree}}}{dv} \right|_{v=v_0} &= -c^2v + \lambda v^3 \Big|_{v=v_0} = 0, \\ v_0 &= \pm \frac{c}{\sqrt{\lambda}}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

A massa no mínimo é dada por

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{tree}}}{dv^2} \right|_{v=\frac{c}{\sqrt{\lambda}}} = -c^2 + 3\lambda v^2 \Big|_{v=\frac{c}{\sqrt{\lambda}}} = 2c^2. \quad (7.6)$$

Para irmos além do potencial ao nível de árvore começaremos calculando a correção a 1-loop conhecido como o potencial de Coleman–Weinberg.


 Figura 8 – Potencial ao nível de árvore com os valores de $\lambda = 0.13$ e $v_0 = 246$ GeV.

7.1.1 O potencial de Coleman–Weinberg

Podemos obter o potencial a 1-loop solucionando a integral

$$V_1(v) = \int \frac{d^4 k_E}{2(2\pi)^4} \ln(k_E^2 + m^2(v)). \quad (7.7)$$

Se reescrevermos esse potencial em função das frequências de Matsubara,

$$\int \frac{dk_4}{2\pi} f(k_4) \rightarrow T \sum_n f(k_4 = i\omega_n), \quad \omega_n = 2\pi nT, \quad (7.8)$$

podemos avaliar separadamente as contribuições a temperatura zero e a temperatura finita. O potencial a temperatura zero pode ser encontrado se considerarmos a integral

$$V_1^{T=0}(v) = \int \frac{d^3 \mathbf{k}}{2(2\pi)^3} \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2(v)}, \quad (7.9)$$

que pode ser solucionada usando (3.25) o que nos retorna de resultado:

$$V_1^{T=0}(v) = \frac{\Lambda m^2 \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}{32\pi^2} + \frac{\Lambda^3 \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}{16\pi^2} + \frac{m^4 \ln\left(\frac{m}{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m^2}}\right)}{32\pi^2}, \quad (7.10)$$

se considerarmos $\Lambda \rightarrow \infty$, obtemos

$$V_1^{T=0} = \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} + \frac{\Lambda^2 m^2}{16\pi^2} + \frac{m^4 \ln\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right)}{64\pi^2}. \quad (7.11)$$

Esta é a parte divergente de (7.10), sendo fisicamente inconsistente, precisamos resolver isso regularizando.

7.1.2 Regularização

O potencial efetivo de Coleman–Weinberg contém dois termos distintos, o divergente quando $\Lambda \rightarrow \infty$ e os termos finitos. Para encontrarmos um potencial sem divergências vamos renormalizá-lo e regularizá-lo.

Para começar introduziremos os contra termos

$$V^0(v) = V_{\text{tree}}(v) + V_1^{T=0}(v) + V_{\text{ct}}(v) \quad (7.12)$$

onde V_{ct} é o potencial com os contra termos, com a cara de

$$V_{\text{ct}} = \frac{1}{2}(A_d + A_f)v^2 + \frac{1}{4}(B_d + B_f)v^4 + (C_d + C_f). \quad (7.13)$$

usamos os índices d e f para definir divergente e finito. Para encontrarmos a parte divergente de V_{ct} , podemos avaliar esta parte separadamente da finita a fim de removê-la. Para isso substituímos $m^2(v) = 3\lambda v^2 - c^2$ nas massas e aplicamos as condições de renormalização:

$$V^0|_{v=0} = 0, \quad \left. \frac{dV^0}{dv} \right|_{v=v_0} = 0 \quad \text{e} \quad \left. \frac{d^2V^0}{dv^2} \right|_{v=v_0} = 2c^2. \quad (7.14)$$

Aplicando a primeira condição

$$\begin{aligned} & \frac{\Lambda^4}{16\pi^2} + \frac{\Lambda^2(3\lambda v^2 - c^2)}{16\pi^2} + \frac{(3\lambda v^2 - c^2)^2 \ln\left(\frac{\Lambda^2}{\kappa^2}\right)}{64\pi^2} \\ & + \frac{1}{2}A_d v^2 + \frac{1}{4}B_d v^4 + C_d = 0. \end{aligned} \quad (7.15)$$

Onde fizemos

$$\ln\left(\frac{m^2}{\Lambda^2}\right) = \ln\left(\frac{m^2}{\kappa^2} \frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right) = \ln\left(\frac{m^2}{\kappa^2}\right) + \ln\left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2}\right), \quad (7.16)$$

para que o \ln seja adimensional. Podemos encontrar os contra termos igualando os termos com potências iguais em v

$$A_d = \frac{3c^2\lambda \ln\left(\frac{\kappa}{\Lambda}\right)}{8\pi^2} - \frac{3\lambda\Lambda^2}{8\pi^2}; \quad B_d = -\frac{9\lambda^2 \ln\left(\frac{\kappa}{\Lambda}\right)}{8\pi^2}; \quad (7.17)$$

$$C_d = -\frac{c^4 \ln\left(\frac{\kappa}{\Lambda}\right)}{32\pi^2} + \frac{c^2\Lambda^2}{16\pi^2} - \frac{\Lambda^4}{16\pi^2}. \quad (7.18)$$

Para obtermos os termos finitos, somaremos a parte divergente ao potencial, no qual percebemos que a divergência sumirá. Trabalhamos então com o restante dos termos dado por

$$\begin{aligned} V^0 = & -\frac{1}{2}c^2v^2 + \frac{1}{4}\lambda v^4 + \frac{(3\lambda v^2 - c^2)^2 \ln\left(\frac{m}{\kappa}\right)}{32\pi^2} \\ & + \frac{1}{2}A_f v^2 + \frac{1}{4}B_f v^4 + C_f. \end{aligned} \quad (7.19)$$

Para encontrarmos os contra termos finitos podemos aplicar as condições de renormalização dadas por (7.14), onde na primeira condição queremos fixar o potencial no ponto zero em zero, depois pela segunda condição onde queremos que o mínimo desse novo potencial coincida com o mínimo ao nível de árvore, e pela terceira condição queremos que o novo potencial tenha a mesma massa que o caso ao nível de árvore.

Aplicando a primeira condição

$$C_f + \frac{c^4 \ln\left(\frac{\sqrt{-c^2}}{\kappa}\right)}{32\pi^2} = 0, \quad (7.20)$$

obtemos o C_f .

Aplicando a segunda condição temos

$$\frac{1}{4} \left(\frac{4A_f c}{\sqrt{\lambda}} + \frac{4B_f c^3}{\lambda^{3/2}} \right) + \frac{3c^3 \sqrt{\lambda} \ln\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{c^2}}{\kappa}\right)}{4\pi^2} + \frac{3c^3 \sqrt{\lambda}}{16\pi^2} = 0, \quad (7.21)$$

e finalmente, aplicando a terceira condição

$$\frac{1}{4} \left(4A_f + \frac{12B_f c^2}{\lambda} + 8c^2 \right) + \frac{3c^2 \lambda \ln\left(\frac{\sqrt{2}\sqrt{c^2}}{\kappa}\right)}{\pi^2} + \frac{15c^2 \lambda}{8\pi^2} = 2c^2, \quad (7.22)$$

obtemos um sistema de equações onde é possível resolver para encontrarmos A_f e B_f . Fazendo isso temos

$$A_f = \frac{1}{32\pi^2} \left(12c^2 \lambda \ln\left(\frac{\sqrt{2}c}{\kappa}\right) + 21c^2 \lambda \right), \quad (7.23)$$

$$B_f = -\frac{9}{32\pi^2} \left(4\lambda^2 \ln\left(\frac{\sqrt{2}c}{\kappa}\right) + 3\lambda^2 \right). \quad (7.24)$$

Podemos então substituir os valores encontrados em V_{ct} e somar com o potencial ao nível de árvore e o de Coleman–Weinberg para obtermos o potencial completo a temperatura zero

$$V^0 = -\frac{c^2 v^2}{2} + \frac{\lambda v^4}{4} + \frac{(c^2 - 3\lambda v^2)^2 \ln\left(\frac{3\lambda v^2 - c^2}{2c^2}\right)}{64\pi^2} + \frac{21c^2 \lambda v^2}{64\pi^2} - \frac{27\lambda^2 v^4}{128\pi^2}. \quad (7.25)$$

Comparando com o potencial somente ao nível de árvore vemos uma pequena diferença como mostrado na figura (9) Agora, precisamos encontrar a contribuição da temperatura finita para o potencial.

7.1.3 Potencial a temperatura finita

O potencial efetivo a temperatura finita pode ser encontrado a partir de (7.7). Já que temos a contribuição em $T = 0$ agora vamos nos dedicar a calcular em $T \neq 0$. Para tal solução usaremos as frequências de Matsubara dadas em (7.8), onde podemos recorrer

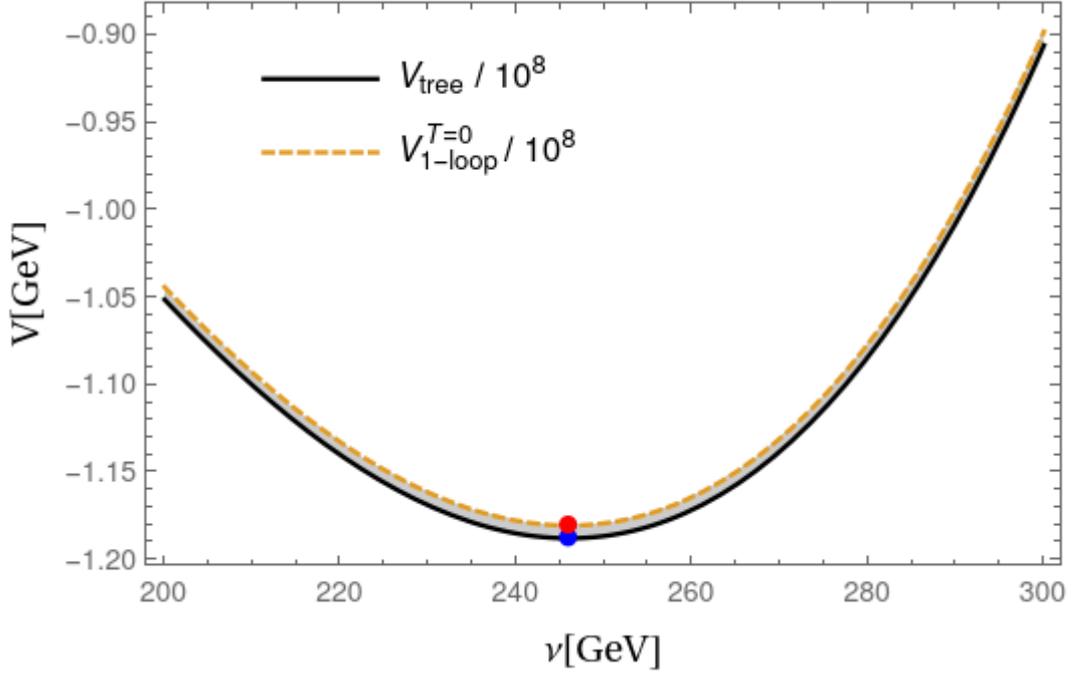


Figura 9 – Potencial ao nível de árvore comparado com o potencial efetivo a temperatura zero com os valores de $\lambda = 0.13$ e $v_0 = 246$ GeV.

a (6.19) e (6.20). O primeiro termo, βx é o caso que já solucionamos a temperatura zero. O segundo termo que nos interessa agora, fica

$$\frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left(1 - e^{-\sqrt{\frac{m^2}{T^2} + x^2}} \right). \quad (7.26)$$

Usualmente a integral não é solucionada de forma analítica, mas podemos ver alguns limites como no caso $\epsilon^2 = \frac{m^2}{T^2}$, é muito pequeno. Obtemos

$$\frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left[1 - e^{(-\sqrt{x^2 + \epsilon^2})} \right] \approx \frac{-\pi^2 T^4}{90} + \frac{m^2 T^2}{24}. \quad (7.27)$$

então

$$V_1^{T \neq 0} = \frac{-\pi^2 T^4}{90} + \frac{m^2 T^2}{24}. \quad (7.28)$$

Percebemos então que essa aproximação nos dá somente os dois primeiros termos do potencial efetivo a temperatura finita encontrado por Jackiw [22]. Tal potencial pode ser encontrado pelo método usado por Ramond em seu livro [14] e tem a forma

$$V^T = \frac{-\pi^2 T^4}{90} + \frac{m^2 T^2}{24} + \frac{m^3 T}{12\pi} - \frac{m^4}{32\pi^2} \ln \left(\frac{m}{4\pi T} \right). \quad (7.29)$$

Agora podemos melhorar o cálculo do potencial adicionando os termos de anéis.

7.1.4 Potencial de anéis

Agora mostraremos que a correção da próxima maior ordem não sera o diagrama a 2-loops, mas sim os diagramas de anéis como mostrado na figura (10), os quais são

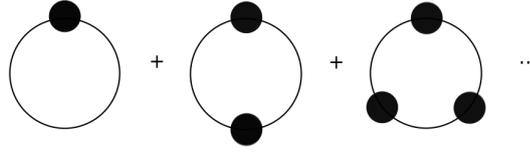


Figura 10 – Diagrama de anéis.

da ordem $\lambda^{\frac{3}{2}}$. Os diagramas de anéis contribuirão no limite em que $\frac{m(v)}{T}$ é pequeno. A maneira de obter os diagramas de anéis é se formos para além do valor médio do campo v , extremado o potencial efetivo em relação a $\langle v \rangle$:

$$\left. \frac{\delta V(v)}{\delta v} \right|_{v=\langle v \rangle} = 0. \quad (7.30)$$

Para irmos além, precisamos considerar o potencial não somente em função de v e a função de dois pontos $\pi(\omega_n, \mathbf{p})$ e extremar em respeito a ambos. A 1-loop obtemos

$$V - V_{\text{tree}} = \frac{1}{2}T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[\beta^2 \left(\omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 + \langle \pi(\omega_n, \mathbf{p}) \rangle \right) \right], \quad (7.31)$$

$\langle \pi(\omega_n, \mathbf{p}) \rangle$ é obtido de maneira a extremar o potencial efetivo. É possível fazer algumas manipulações algébricas para reescrever a integral

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(\beta^2 \left(m^2 + \omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + \pi(0) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2}T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(\beta^2 \left(\bar{D}_0^{-1} + \pi(0) \right) \right) \\ &= \frac{1}{2}T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(\beta^2 \bar{D}_0^{-1} \left(\pi(0) \bar{D}_0 + 1 \right) \right) \\ &= \frac{1}{2}T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(\beta^2 \bar{D}_0^{-1} \right) + \frac{1}{2}T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(\pi(0) \bar{D}_0 + 1 \right) \end{aligned} \quad (7.32)$$

com

$$\bar{D}_0 = \frac{1}{m^2 + \omega_n^2 + \mathbf{p}^2}. \quad (7.33)$$

Podemos notar que o primeiro termo na integral é o potencial a temperatura finita e a segunda integral é a que nos interessa agora que é o potencial dos diagramas de anéis

$$\begin{aligned} V_{\text{rings}} &= \frac{1}{2}T \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left(\pi(0) \bar{D}_0 + 1 \right) \\ &= \frac{T}{2} \int_0^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \ln \left(m^2 + \omega_n^2 + \mathbf{p}^2 + \pi(0) \right) - \ln \left(m^2 + \omega_n^2 + \mathbf{p}^2 \right) \right\}. \end{aligned} \quad (7.34)$$

Podemos simplificar essa integral usando a relação (6.19). Então temos

$$\begin{aligned} V_{\text{rings}} &= \frac{1}{2}T \int_0^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \beta \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 + \pi(0)} + 2 \ln \left[1 - e^{-\beta \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 + \pi(0)}} \right] \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2}T \int_0^{\infty} \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \left\{ \beta \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} + 2 \ln \left[1 - e^{-\beta \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (7.35)$$

Com isso obtemos

$$V_{\text{rings}} = T \int_0^\infty \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{-\beta \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 + \pi(0)}} \right] - \ln \left[1 - e^{-\beta \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} \right]. \quad (7.36)$$

Como tais diagramas só contribuem quando $\frac{m}{T} \ll 1$, podemos expandir esse potencial em potências de $\frac{m}{T}$. Usamos a relação

$$T \int_0^\infty \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \ln \left[1 - e^{\left[-\beta \sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2 + \pi(0)} \right]} \right] = -\frac{(\pi^2 T^4)}{90} - \frac{[m^2 + \pi(0)]^{\frac{3}{2}} T}{12\pi}, \quad (7.37)$$

para obter

$$V_{\text{rings}} = -\frac{T}{12\pi} \left\{ [m^2 + \pi(0)]^{\frac{3}{2}} - m^3 \right\}. \quad (7.38)$$

Encontramos então a contribuição dos diagramas de anéis para o potencial efetivo.

Podemos considerar outra abordagem para obtermos o potencial dos anéis, pegando o primeiro termo em (7.34) e a definição (7.33) e usando uma expansão de Taylor, obtemos

$$V_{\text{rings}} = -\frac{T}{2} \sum_n \int d^3 \mathbf{p} \sum_{N=1}^\infty \frac{1}{N} \left(-\frac{\pi(0)}{m^2 + \mathbf{p}^2 + \omega_n^2} \right)^N. \quad (7.39)$$

Analisemos o somatório em (7.39),

$$\sum_{N=1}^\infty \frac{1}{N} \left(-\frac{\pi(0)}{m^2 + \mathbf{p}^2 + \omega_n^2} \right)^N, \quad (7.40)$$

derivemos em relação a π , então

$$-\frac{1}{m^2 + \mathbf{p}^2 + \omega_n^2} \sum_{N=1}^\infty \left(-\frac{\pi(0)}{m^2 + \mathbf{p}^2 + \omega_n^2} \right)^{N-1}. \quad (7.41)$$

Usando à relação A.44, encontrada no apêndice de [23], fazendo $d = 3$ e $n = 1$, e integrando em \mathbf{p}

$$\int \frac{d^3 \mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{-1}{\mathbf{p}^2 - (m^2 + \pi(0) + \omega_n^2)} = -\frac{\Gamma\left(1 - \frac{3}{2}\right)}{(4\pi)^{3/2}} \left(\frac{1}{m^2 + \pi(0) + \omega_n^2} \right)^{1 - \frac{3}{2}}. \quad (7.42)$$

Agora integramos em π

$$\begin{aligned} \int_0^\pi d\pi \frac{\sqrt{m^2 + \pi(0) + \omega_n^2}}{4\pi} &= \frac{(m^2 + \pi(0) + \omega_n^2)^{3/2}}{6\pi} \Big|_0^{\pi(0)} \\ &= \frac{(m^2 + \pi(0) + \omega_n^2)^{3/2}}{6\pi} - \frac{(m^2 + \omega_n^2)^{3/2}}{6\pi}. \end{aligned} \quad (7.43)$$

multiplicando por um fator de $-\frac{T}{2}$, e somando a frequência de Matsubara que nos dá, a maior contribuição para o potencial quando $n = 0$. Então o resultado é

$$V_{\text{rings}} = -\frac{T}{12\pi} \left\{ [m^2 + \pi(0)]^{\frac{3}{2}} - m^3 \right\}, \quad (7.44)$$

como o encontrado no caso anterior. Agora, precisamos definir o que é o termo $\pi(0)$ em tal potencial.

7.1.5 O tensor de polarização

Em nossa análise anterior se faz necessário o cálculo do tensor de polarização a 1-loop dado por $\pi(0)$

$$\pi(0) = 3\lambda T \sum_{n=0}^{\infty} \int \frac{d^3\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{1}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2}, \quad (7.45)$$

que pode ser representado em diagramas de Feynman como na figura (11), e onde seus

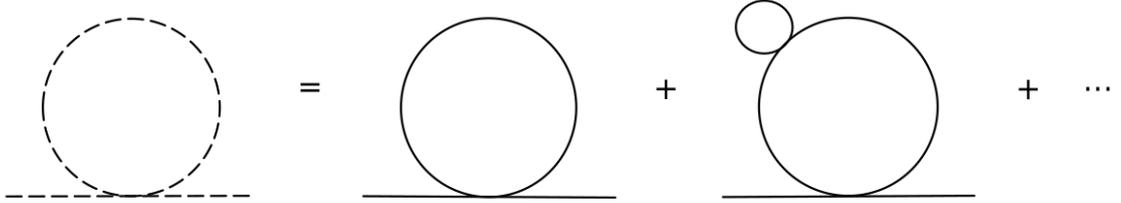


Figura 11 – Representação do tensor de polarização.

propagadores são representados em (12) Se usarmos a relação (6.23), obtemos

$$\begin{array}{l} \text{—————} \quad i/(\mathbf{p}^2 + m^2 + i\epsilon) \\ \text{-----} \quad i/(\mathbf{p}^2 + m^2 + \pi^{(1)}(0) + i\epsilon) \end{array}$$

Figura 12 – Propagador com e sem a contribuição do tensor de polarização.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ln(m^2 + \omega_n^2 + \mathbf{p}^2) = \left\{ \beta\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2} + 2\ln \left[1 - e^{-\beta\sqrt{m^2 + \mathbf{p}^2}} \right] \right\} + \dots \quad (7.46)$$

Se derivarmos em relação ao momento,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\mathbf{p}}{\omega_n^2 + \mathbf{p}^2} = 2\beta \left[\frac{1}{2} + e^{-\beta\mathbf{p}} (1 - e^{-\beta\mathbf{p}})^{-1} \right]. \quad (7.47)$$

Efetuando as mudanças necessárias chegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{m^2 + \omega_n^2 + \mathbf{p}^2} = \frac{\beta}{\mathbf{p}} \left(\frac{e^{-\beta\mathbf{p}}}{1 - e^{-\beta\mathbf{p}}} + \frac{1}{2} \right). \quad (7.48)$$

Com isso, nossa integral assume a forma

$$\begin{aligned} \pi(0) &= 3\lambda T \int \frac{d\mathbf{p}}{(2\pi)^3} \frac{\beta}{\mathbf{p}} \left(\frac{e^{-\beta\mathbf{p}}}{1 - e^{-\beta\mathbf{p}}} + \frac{1}{2} \right) \\ &= \frac{3\lambda}{2\pi^2} \left(\frac{\text{Li}_2(e^{\mathbf{p}\beta})}{\beta^2} - \frac{\mathbf{p}^2}{4} + \frac{\mathbf{p} \ln(1 - e^{\beta\mathbf{p}})}{\beta} \right). \end{aligned} \quad (7.49)$$

Onde Li_2 é a função polilogarítmica definida como:

$$\text{Li}_n(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^s}. \quad (7.50)$$

Então quando assumimos que $\mathbf{p} \rightarrow 0$:

$$\pi(0) = \frac{3\lambda}{2\pi^2} \frac{\pi^2}{6\beta^2} = \frac{\lambda T^2}{4}. \quad (7.51)$$

Quando extrapolamos para o caso de contribuições da ordem de $(n+1)$ -loop na contribuição do tensor de polarização podemos representar o diagrama como mostrado na figura (13).

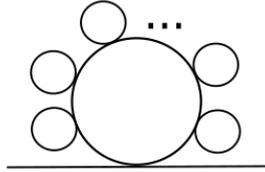


Figura 13 – Contribuição do tensor de polarização a ordem λ^N .

Se nos atentarmos as equações (7.44) e (7.51) vemos que a contribuição dos anéis se aproxima de zero quando $\frac{m}{T}$ se aproxima de um. Se $\frac{m}{T} \approx 1$, então $\pi(0) \approx \lambda m^2(v)$, pequeno comparado a $m^2(v)$ em (7.44). Se quisermos relaxar a suposição $\frac{m}{T} \ll 1$ devemos calcular a integral do potencial a temperatura finita numericamente, mas a contribuição dos anéis pode ser feita considerando somente o termo de ordem zero com o auxílio de (7.51).

Combinando (7.25), (7.29), e (7.44) e desconsiderando os termos independentes do campo v . No limite em que $\frac{m}{T} \ll 1$,

$$\begin{aligned} V(v) = & -\frac{c^2 v^2}{2} + \frac{\lambda v^4}{4} + \frac{21c^2 \lambda v^2}{64\pi^2} - \frac{27\lambda^2 v^4}{128\pi^2} \\ & + \frac{1}{24} T^2 (3\lambda v^2 - c^2) - \frac{T}{12\pi} \left((3\lambda v^2 - c^2) + \frac{\lambda T^2}{4} \right)^{3/2} + O(m^4(v)). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Na figura (14) é mostrado o potencial efetivo com diferentes temperaturas. Vemos que o potencial fica plano em uma temperatura específica e logo após vai para zero, refletindo a restauração da simetria. Então, resta-nos saber qual é a temperatura em que ocorre essa quebra de simetria para o nosso caso do campo escalar.

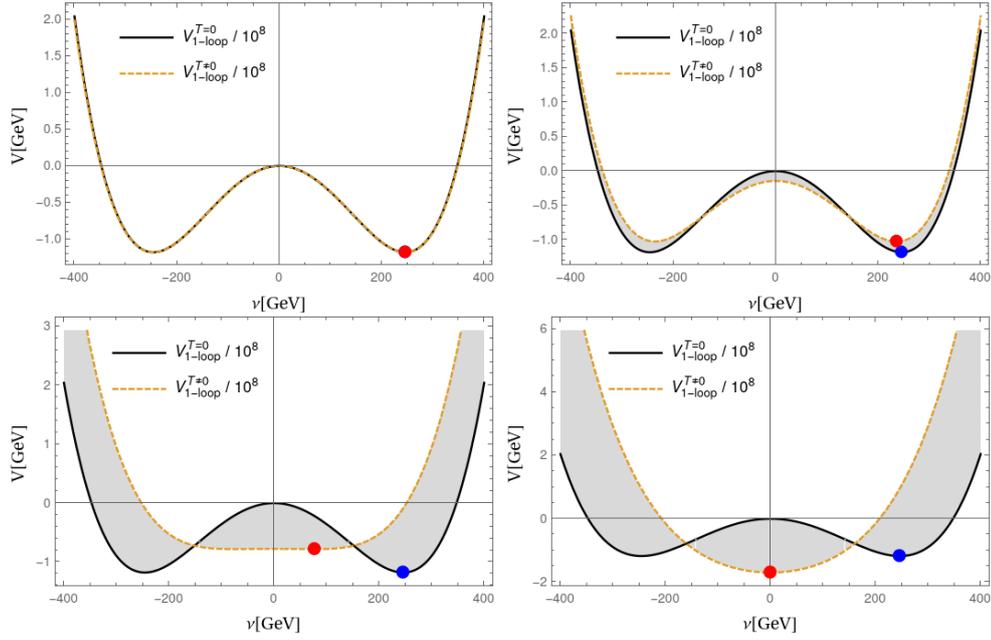


Figura 14 – O potencial a temperatura finita representado pela linha tracejada e o gráfico em linha preta solida o potencial a temperatura zero. Sendo assim é possível ver a restauração da simetria a altas temperaturas com o potencial encontrado em (7.52).

7.1.6 A temperatura critica

Percebemos na seção anterior que existe uma temperatura específica no qual os mínimos são degenerados. Tal ponto chamamos de temperatura critica, T_c , para encontrá-la vamos primeiro avaliar o comportamento do mínimo do campo com a temperatura. Para encontrar o mínimo fazemos:

$$\frac{dV(v)}{dv} = -\frac{\lambda T v}{2\pi} \sqrt{\frac{\lambda T^2}{4} + 2\lambda v^2} + \frac{1}{6}\lambda T^2 v + \frac{15\lambda^2 v^3}{32\pi^2} - \lambda v^3 = 0. \quad (7.53)$$

Se considerarmos os valores de $\lambda = 0.13$ e $v_0 = 246$ GeV. Podemos encontrar o valor de v em relação a T ,

$$v = 0.5(242667 - 0.97T^2 + 2(-0.013T^4 + 3673T^2 + 1.9 \times 10^{-6})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}, \quad (7.54)$$

plotando o gráfico (15) conseguimos ver o comportamento do mínimo em relação à temperatura. Notamos que em uma temperatura específica o mínimo se estabiliza em zero e isso é quando temos a restauração da simetria. Agora resta-nos saber o valor de tal temperatura, e para isso vamos derivar novamente

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(v)}{dv^2} = & -0.031T \sqrt{0.03T^2 + 0.39v^2 - 7850} \\ & - \frac{0.012Tv^2}{\sqrt{0.032T^2 + 0.39v^2 - 7850}} \\ & + 0.032T^2 + 0.39v^2 - 7782. \end{aligned} \quad (7.55)$$

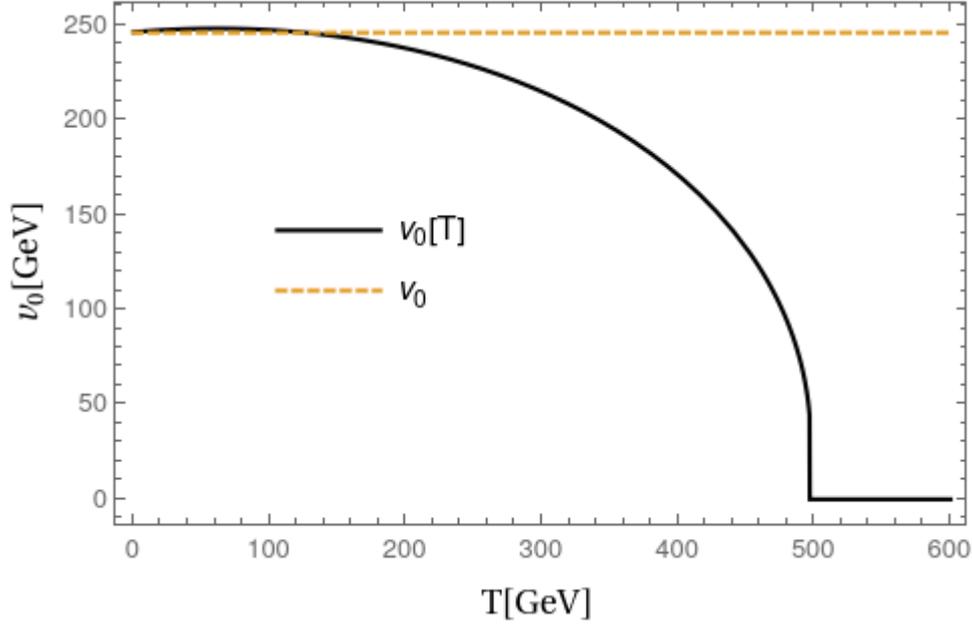


Figura 15 – Comportamento do mínimo em relação à temperatura.

Substituímos nessa equação o valor de v encontrado anteriormente e igualamos a zero para resolvermos então em T , assim encontramos então $T = 496.84$ GeV.

Temos, então, a teoria da transição de fase para o caso escalar e se seguirmos esses passos podemos encontrar então a transição de fase eletrofraca para o Modelo Padrão.

7.2 Modelo Padrão.

Temos todas as ferramentas para o cálculo do potencial efetivo do Modelo Padrão. Antes de encontrá-lo vamos nos dedicar a definir as massas das partículas para nos ajudar no cálculo numérico do potencial efetivo. Por final analisaremos o valor da massa de Higgs no qual nossa teoria respeita a terceira condição de Sakharov.

7.2.1 Massas do Modelo Padrão

A Lagrangiana do Modelo Padrão tem a forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \mathcal{L}_{\text{campos de calibre}} + \mathcal{L}_{\text{Higgs}} + \mathcal{L}_{\text{férmions}} \\ & + \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} + \mathcal{L}_{\text{fixação de calibre}}. \end{aligned} \quad (7.56)$$

Na continuação calcularemos os termos da Lagrangiana;

$$\mathcal{L}_{\text{campos de calibre}} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu} - \frac{1}{4}F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \quad (7.57)$$

que é o termo cinético dos campos de calibre. A parte da contribuição do Higgs para a Lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{\text{Higgs}} = (D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi + c^2(\phi^\dagger \phi) - \lambda(\phi^\dagger \phi)^2. \quad (7.58)$$

onde D_μ é derivada covariante,

$$D_\mu = \partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a + ig' \frac{1}{2} B_\mu, \quad (7.59)$$

e τ^a são as matrizes de Pauli. O dubleto complexo de Higgs tem a forma

$$\phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} \phi_3 + i\phi_4 \\ \phi_1 + i\phi_2 \end{bmatrix}. \quad (7.60)$$

Se fizermos um deslocamento como no caso anterior dos campos escalares no campo ϕ_1 . Os campos escalares adquirem massa

$$m_{\text{Higgs}}^2(v) = 3\lambda v^2 - c^2 \quad \text{e} \quad m_{2,3,4}^2(v) = m_{\text{Goldstone}}^2(v) = \lambda v^2 - c^2, \quad (7.61)$$

que no mínimo clássico $v_0 = c\sqrt{\lambda}$ os campos $\phi_{2,3,4}$ são campos de Goldstone. A simetria da Lagrangiana nesse caso é quebrada $SU(2)_L \times U(1)_Y \rightarrow U(1)_{\text{EM}}$. Podemos analisar o comportamento das massas em (7.61) na figura (16). Como o esperado, o valor da massa

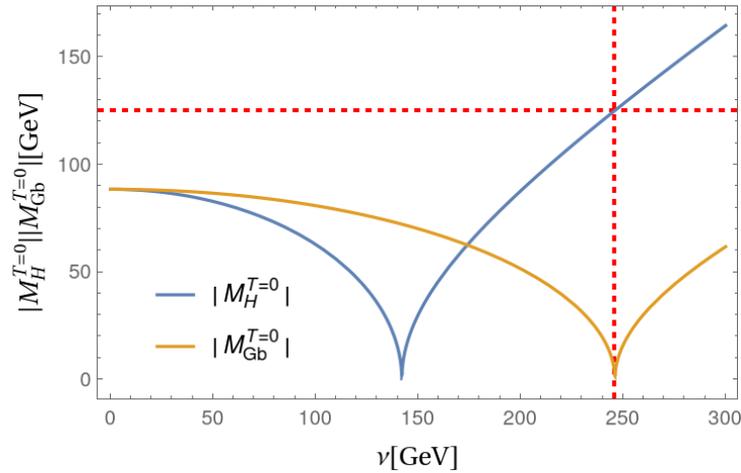


Figura 16 – Massas do bóson de Higgs e Goldstone. A linha tracejada mostra o valor da massa mensurada do Higgs em relação ao valor de $v = 246$ GeV.

de Higgs, $m_H = 125, 25$ GeV [10], e a massa do Goldstone, $m_{\text{Goldstone}} = 0$ no valor esperado do vácuo.

Os bósons de calibre adquirem massa através do mecanismo de Higgs. Para analisarmos as contribuições estudaremos o termo $A_\mu^{\dagger A} M_{AB}^2 A_B^\mu$, aplicado no valor esperado de vácuo,

$$v_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ v \end{pmatrix}, \quad (7.62)$$

da seguinte maneira

$$(\partial_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a + ig' \frac{1}{2} B_\mu) v_0 \quad \text{e} \quad v_0^* (\overleftarrow{\partial}_\mu + ig \frac{\tau^a}{2} A_\mu^a + ig' \frac{1}{2} B_\mu). \quad (7.63)$$

Os termos ∂_μ serão nulos, pois o campo em (7.62) é constante. Na forma matricial o termo $ig\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a + ig'\frac{1}{2}B_\mu$ pode ser escrito como

$$\frac{i}{2} \begin{bmatrix} gA_\mu^3 + g'B_\mu & g(A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ g(A_\mu^1 + iA_\mu^2) & g'B_\mu - gA_\mu^3 \end{bmatrix}, \quad (7.64)$$

ao escrever esse termo matricial então faremos $(D_\mu\phi)^\dagger D^\mu\phi$ obtemos a parte dos campos quadrados da Lagrangiana como

$$(\partial_\mu + ig\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a + ig'\frac{1}{2}B_\mu)v_0 = \frac{v}{2} \begin{bmatrix} g(A_\mu^1 - iA_\mu^2) \\ g'B_\mu - gA_\mu^3 \end{bmatrix} \quad (7.65)$$

e

$$v_0^*(\partial_\mu + ig\frac{\tau^a}{2}A_\mu^a + ig'\frac{1}{2}B_\mu) = \frac{v}{2} \begin{bmatrix} g(A_\mu^1 + iA_\mu^2) & g'B_\mu - gA_\mu^3 \end{bmatrix} \quad (7.66)$$

multiplicando os dois termos obtemos

$$\frac{v^2}{4} \left[g^2((A_\mu^1)^2 + (A_\mu^2)^2)(g'B_\mu - gA_\mu^3)^2 \right]. \quad (7.67)$$

Agora, se definirmos uma base composta por $A_\mu^A = (A_\mu^1, A_\mu^2, A_\mu^3, B_\mu)$. Usamos $A_\mu^A M_{AB}^2 A_\mu^B$, a matriz de massa toma a forma de

$$M_{AB}^2(v) = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} g^2v^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g^2v^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2v^2 & -gg'v^2 \\ 0 & 0 & -gg'v^2 & g'^2v^2 \end{bmatrix}. \quad (7.68)$$

Precisamos diagonalizar e encontrar os autovalores das massas de W_μ^\pm , Z_μ e A_μ como:

$$W_\mu^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(A_\mu^1 \mp iA_\mu^2), \quad (7.69)$$

$$Z_\mu = \frac{g'B_\mu - gA_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}}, \quad (7.70)$$

e

$$A_\mu = \frac{g'B_\mu + gA_\mu^3}{\sqrt{g^2 + g'^2}}. \quad (7.71)$$

as massas dos campos W^\pm , Z_μ e A_μ serão os autovalores da matriz,

$$m_W^2 = \frac{1}{4}g^2v^2, \quad m_Z^2 = \frac{1}{4}(g^2 + g'^2)v^2 \quad \text{e} \quad m_\gamma^2 = 0. \quad (7.72)$$

Podemos ver o comportamento das massas (7.72) no valor esperado de vácuo no gráfico (17) Como o esperado, o valor da massa de W , $m_W = 80.377$ GeV [10], e da massa do Z , $m_Z = 91.1876$ GeV [10], coincidem com os valores mensurados e apresentados para a massa do W em [24] e para a massa do Z em [25].

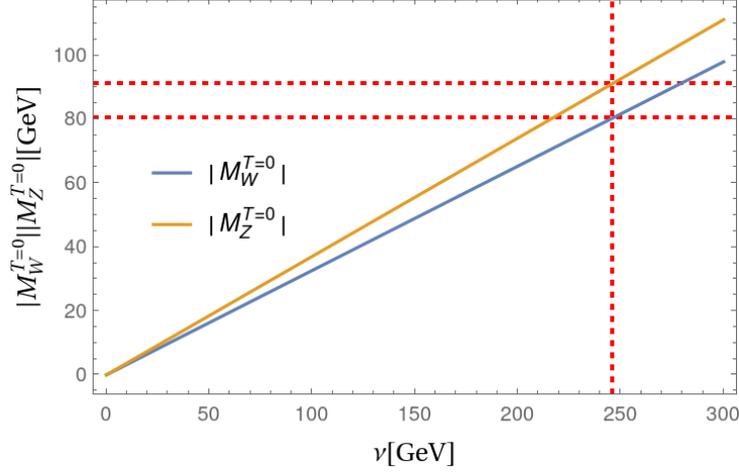


Figura 17 – Massas dos bósons W e Z . A linha tracejada mostra o valor da massa mensurada dos bósons de calibre em relação ao valor de $v = 246$ GeV.

Vemos que a Lagrangiana de fixação de calibre assume uma forma como

$$\mathcal{L}_{\text{fixação de calibre}} = -\frac{1}{2\xi} G^a G^a \quad (7.73)$$

Usaremos a seguinte função de fixação de calibre, ao invés de $G^a = \partial^\mu A_\mu^a$, como em (5.5)

$$G^a = \partial^\mu A_\mu^a - \frac{1}{2}\xi g v \chi^a, \quad (7.74)$$

que é conveniente, pois elimina os termos de mistura, $A^\mu \partial_\mu \chi$ que aparece em $(D_\mu \phi)^\dagger D^\mu \phi$ efetuando as devidas substituições, obtemos

$$\mathcal{L}_{\text{fixação de calibre}} = -\frac{1}{2\xi} (\partial^\mu A_\mu^a - \frac{1}{2}\xi g v \chi^a)^2 - \frac{1}{2\xi} (\partial^\mu B_\mu - \frac{1}{2}\xi g' v \chi^2)^2, \quad (7.75)$$

onde $\chi^a = \phi_{2,3,4}$. Escolhemos o calibre de Landau com o parâmetro $\xi \rightarrow 0$. Os termos cruzados nessa Lagrangiana combinado com o termo da derivada covariante na Lagrangiana do campo de Higgs formará uma divergência total e integrará para zero e a parte dos fantasmas que surgem de $\det \left[\frac{\delta G^a}{\delta \theta^b} \right]$ serão ignorados por não serem massivos e não contribuirão para o potencial efetivo.

Agora é tempo de estudarmos a massa dos quarks. A parte dos férmions na Lagrangiana é

$$\mathcal{L}_{\text{férmions}} = \bar{\psi}_R i \gamma^\mu \left[\partial_\mu + i \frac{g'}{2} Y B_\mu \right] \psi_R + \bar{\psi}_L i \gamma^\mu \left[\partial_\mu + i \frac{g'}{2} Y B_\mu + i \frac{g}{2} A_\mu^a \tau_a \right] \psi_L. \quad (7.76)$$

No Modelo Padrão os léptons ($e, \nu_e, \mu, \nu_\mu, \tau, \nu_\tau$) e quarks (d, u, s, c, b, t) esquerdos, associados em pares, dubletos de $SU(2)_L$ [26]

$$L^i = \begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L, \quad Q^i = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L, \begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L, \quad (7.77)$$

onde o índice $i = 1, 2, 3$ representa as gerações. Os férmions diretos são singletos de $SU(2)_L$

$$\begin{aligned} e^i &= (e, \mu, \tau)_R, & \nu^i &= (\nu_e, \nu_\mu, \nu_\tau)_R \\ u^i &= (u, c, t)_R, & d^i &= (d, s, b)_R. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Os neutrinos diretos ainda não foram observados, mas são colocados aqui, pois os neutrinos possuem massas e uma maneira de explicá-las é com eles, portanto, já estão introduzidos. Trabalharemos a aproximação onde o acoplamento de Yukawa do quark top será aproximadamente um e que o restante dos férmions tem acoplamentos tão pequenos que podem ser desconsiderados, como o do elétron que é da ordem de 10^{-6} . Quando o campo de Higgs é deslocado somente o quark top adquirirá massa, essa aproximação é equivalente a $\frac{m_\psi}{T} \sim 0$ para $m_\psi \neq m_t$. O termo de Yukawa é

$$\mathcal{L}_{\text{Yukawa}} = f \bar{Q}_L^i i \sigma_2 \phi^* t_R + H.c. \quad (7.79)$$

onde \bar{Q}_L^i é

$$\bar{Q}_L^i = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5) \begin{bmatrix} t \\ b \end{bmatrix}. \quad (7.80)$$

Neste trabalho desprezaremos misturas da matriz de Cabibbo-Kobayashi-Maskawa. Após considerar o deslocamento no campo de Higgs, o termo de Yukawa da Lagrangiana fica

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Yukawa}} &= f \frac{v}{\sqrt{2}} \bar{t} t + \frac{f}{\sqrt{2}} (\bar{t} \phi_1 t) - i \frac{f}{\sqrt{2}} (\bar{t} \gamma_5 \phi_2 t) \\ &+ \frac{f}{2\sqrt{2}} [\bar{b}(1 + \gamma_5)(-\phi_3 + i\phi_4)t - \bar{t}(1 - \gamma_5)(\phi_3 + i\phi_4)b]. \end{aligned} \quad (7.81)$$

A massa adquirida pelo do quark top é

$$m_t^2(v) = \frac{f^2 v^2}{2}. \quad (7.82)$$

Analisando (7.82) no valor esperado de vácuo pelo gráfico (18) como o esperado, o valor da massa do quark top, $m_t = 172,9$ GeV [10]. Assim, notamos que nossa análise esta consistente com os valores observados em experimentos.

Trabalharemos no Modelo Padrão da mesma forma que fizemos para o caso escalar. Calculamos a expansão de loops com início na ordem zero, e nas próximas seções calcularemos o potencial a um loop a temperatura finita, e as contribuições dos diagramas de anéis.

7.2.2 O potencial de Coleman–Weinberg do Modelo Padrão

Escrevermos a contribuição a temperatura zero e finita separadamente como feito em (7.7),

$$V_1(v) = V_1^{T=0}(v) + V_1^{T \neq 0}(v). \quad (7.83)$$

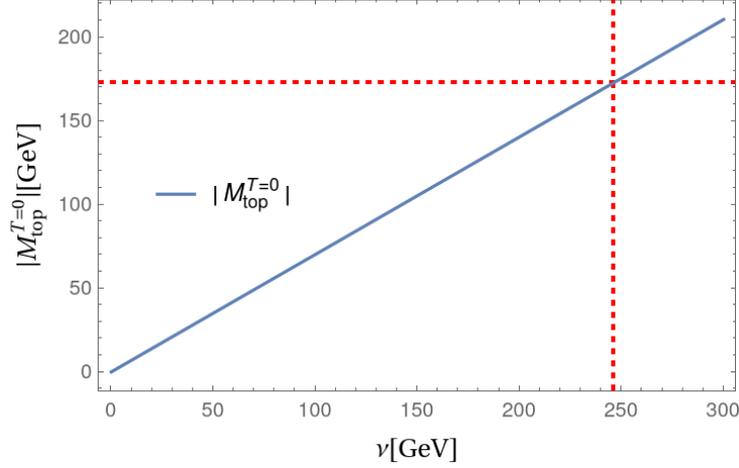


Figura 18 – Massas do quark top. A linha tracejada mostra o valor da massa mensurada do quark top em relação ao valor de $v = 246$ GeV.

De início vamos nos preocupar com o caso da temperatura zero, que como no caso escalar é encontrado como uma função que depende de um parâmetro de corte Λ como em (7.11)

$$f(m_x) = \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} m_x^2 + \frac{m_x^4}{64\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m_x^2}{\Lambda^2} \right) - \frac{1}{2} \right); \quad (7.84)$$

essa função tem termos finitos e infinitos que precisam ser regularizados

$$f(m_x) = f(m_x)_{\text{finito}} + f(m_x)_{\text{infinito}}, \quad (7.85)$$

onde

$$f(m_x)_{\text{finito}} = \frac{m_x^4}{64\pi^2} \left(\ln \left(\frac{m_x^2}{\kappa^2} \right) - \frac{1}{2} \right), \quad (7.86)$$

e

$$f(m_x)_{\text{infinito}} = \frac{\Lambda^2}{32\pi^2} m_x^2 + \frac{m_x^4}{64\pi^2} \ln \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2} \right), \quad (7.87)$$

onde κ é uma constante usada para dimensionar o logaritmo,

$$\ln \left(\frac{m^2}{\Lambda^2} \right) = \ln \left(\frac{m^2 \kappa^2}{\kappa^2 \Lambda^2} \right) = \ln \left(\frac{m^2}{\kappa^2} \right) + \ln \left(\frac{\kappa^2}{\Lambda^2} \right), \quad (7.88)$$

e será fixada usando as condições de renormalização (7.14).

O potencial efetivo no Modelo Padrão a temperatura zero tem os seguintes conjuntos de termos

$$\begin{aligned} V^{T=0}(m) = & V_{\text{contra termos}} + 3f(m_{\text{Goldstone}}) + f(m_{\text{Higgs}}) \\ & - 12f(m_t) + 6f(m_W) + 3f(m_Z) + V_{\text{tree}}, \end{aligned} \quad (7.89)$$

com as massas sendo, massa do Higgs e Goldstone dadas por (7.61), as massas dos bósons W e Z por (7.72) e a massa do quark top por (7.82). O potencial de contra termos vem da Lagrangiana de contra termos (7.13).

Os contra termos divergentes serão responsáveis por cancelar a parte infinita do potencial, restando assim somente o potencial regularizado

$$\begin{aligned}
 V_{\text{regularizado}}(m, \kappa) = & 3f_{\text{finito}}(m_{\text{Goldstone}}, \kappa_{\text{Goldstone}}) + f_{\text{finito}}(m_{\text{Higgs}}, \kappa_{\text{Higgs}}) \\
 & - 12f_{\text{finito}}(m_t, \kappa_{m_t}) + 6f_{\text{finito}}(m_W, \kappa_W) + 3f_{\text{finito}}(m_Z, \kappa_Z) \quad (7.90) \\
 & + V_{\text{contra termos finitos}} + V_{\text{tree}}.
 \end{aligned}$$

Para podermos encontrar os contra termos finitos A , B , e C , presentes em (7.13) e o termo κ_x , onde x representa o tipo de partícula, impomos as condições de renormalização (7.14). Aplicando a primeira condição

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{dV_{\text{regularizado}}}{dv} \right|_{v=v_0} = & A_f v_0 + B_f v_0^3 - c^2 v_0 + \lambda v_0^3 \\
 & + \left[\frac{1}{16\pi^2} m_{\text{Higgs}}^3 \ln \left(\frac{m_{\text{Higgs}}^2}{\kappa_{\text{Higgs}}^2} \right) \frac{dm_{\text{Higgs}}}{dv} \right]_{v_0} \\
 & - \left[\frac{3}{4\pi^2} m_{\text{top}}^3 \ln \left(\frac{m_{\text{top}}^2}{\kappa_{\text{top}}^2} \right) \frac{dm_{\text{top}}}{dv} \right]_{v_0} \quad (7.91) \\
 & + \left[\frac{3}{8\pi^2} m_W^3 \ln \left(\frac{m_W^2}{\kappa_W^2} \right) \frac{dm_W}{dv} \right]_{v_0} \\
 & + \left[\frac{3}{16\pi^2} m_Z^3 \ln \left(\frac{m_Z^2}{\kappa_Z^2} \right) \frac{dm_Z}{dv} \right]_{v_0} = 0.
 \end{aligned}$$

termos com logaritmos precisão ser anulados. No qual deduzimos que

$$\kappa_{\text{Higgs}} \rightarrow \sqrt{2c^2}, \quad \kappa_Z \rightarrow \sqrt{\frac{c^2(g^2 + g'^2)}{4\lambda}}, \quad \kappa_W \rightarrow \sqrt{\frac{c^2 g^2}{4\lambda}}, \quad \kappa_{\text{top}} \rightarrow \sqrt{\frac{c^2 f^2}{2\lambda}}. \quad (7.92)$$

Considerando que as partes logarítmicas foram anuladas, podemos resolver o restante da primeira condição encontrando

$$\frac{c(A_f \lambda + B_f c^2)}{\sqrt{\lambda}} = 0, \quad (7.93)$$

então

$$B_f = -\frac{A_f \lambda}{c^2}. \quad (7.94)$$

Podemos agora aplicar a segunda condição de renormalização, e encontrar

$$C_f = \frac{c^4}{64\pi^2} \left(-3 \ln \left(-\frac{c^2}{\kappa_{\text{Goldstone}}^2} \right) + 2 - i\pi + \ln(2) \right). \quad (7.95)$$

Como C_f é uma constante, não afetará a temperatura crítica e depende de $\kappa_{\text{Goldstone}}^2$. Podemos fazer uma escolha para que no potencial efetivo os termos que contenham dependência dos bósons de Goldstone seja zero no mínimo, $v = 0$. Sendo assim, a melhor escolha é

$$\kappa_{\text{Goldstone}}^2 = -c^2, \quad (7.96)$$

então obtemos

$$C_f = \frac{c^4(2 - i\pi + \ln(2))}{64\pi^2}. \quad (7.97)$$

O termo A_f ainda não foi definido e podemos fazer uma escolha perspicaz de $A_f \propto c^2\lambda$. Além disso, termo constante não afeta a temperatura crítica, como dito anteriormente, eliminamos assim os termos C_f e $-\frac{c^4}{32\pi^2}$. Assim obtemos o potencial regularizado

$$\begin{aligned} V_1^0 = & -\frac{c^2v^2}{2} + \frac{\lambda v^4}{4} - \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{3m_{\text{Goldstone}}^4}{2} + \frac{m_{\text{Higgs}}^4}{2} - \frac{12m_{\text{top}}^4}{2} + \frac{6m_{\text{W}}^4}{2} + \frac{3m_{\text{Z}}^4}{2} \right) \\ & + \frac{1}{64\pi^2} \left[3m_{\text{Z}}^4 \ln \left(\frac{4\lambda m_{\text{Z}}^2}{c^2(g^2 + g'^2)} \right) + 6m_{\text{W}}^4 \ln \left(\frac{4\lambda m_{\text{W}}^2}{c^2g^2} \right) \right. \\ & \left. + 3m_{\text{Goldstone}}^4 \ln \left(-\frac{m_{\text{Goldstone}}^2}{c^2} \right) + m_{\text{Higgs}}^4 \ln \left(\frac{m_{\text{Higgs}}^2}{2c^2} \right) - 12m_{\text{top}}^4 \ln \left(\frac{2\lambda m_{\text{top}}^2}{c^2f^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.98)$$

Substituindo os valores de m_x^2 , (7.61), (7.72) e (7.82)

$$\begin{aligned} V_1^0 = & v^2 \left(\frac{c^2(3\lambda)}{32\pi^2} - \frac{c^4}{2} \right) + v^4 \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{3}{32} (g^2 + g'^2)^2 + \frac{3g^4}{16} + 6\lambda^2 - \frac{3f^4}{2} \right) \right) \\ & + \frac{1}{64\pi^2} \left[3m_{\text{Goldstone}}^4 \ln \left(-\frac{m_{\text{Goldstone}}^2}{c^2} \right) + m_{\text{Higgs}}^4 \ln \left(\frac{m_{\text{Higgs}}^2}{2c^2} \right) \right. \\ & \left. - 12m_{\text{top}}^4 \ln \left(\frac{\lambda v^2}{c^2} \right) + 6m_{\text{W}}^4 \ln \left(\frac{\lambda v^2}{c^2} \right) + 3m_{\text{Z}}^4 \ln \left(\frac{\lambda v^2}{c^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.99)$$

Encontramos assim a contribuição para o potencial efetivo a 1-loop do Modelo Padrão a temperatura zero. Seguindo o caminho da seção anterior, calculamos em seguida a contribuição da temperatura para o potencial.

7.2.3 Potencial efetivo a temperatura finita no Modelo Padrão.

Assim como na equação (7.83) a contribuição da temperatura para o potencial a 1-loop para o Modelo Padrão, usaremos a equação

$$V_1^{T \neq 0}(v) = V_{1,\phi}^{T \neq 0}(v) + V_{1,gb}^{T \neq 0}(v) + V_{1,\psi}^{T \neq 0}(v), \quad (7.100)$$

onde

$$V_{1,\phi}^{T \neq 0}(v) = g(m_{\text{Higgs}}) + 3g(m_{\text{Goldstone}}), \quad (7.101)$$

$$V_{1,gb}^{T \neq 0}(v) = 3g(m_{\text{W}}) + 6g(m_{\text{Z}}), \quad (7.102)$$

$$V_{1,\psi}^{T \neq 0}(v) = 12h(m_t), \quad (7.103)$$

em que a função $g(m_x)$ é

$$g(m_x) = \frac{T}{2\pi^2} \int dp p^2 \ln \left[1 - e^{-\beta\sqrt{p^2+m_x^2}} \right]. \quad (7.104)$$

Essa função nos retornará a contribuição do potencial a temperatura finita dos campos escalares. A contribuição do quark top que é um férmion é dada por $h(m_t)$

$$h(m_t) = \frac{T}{2\pi^2} \int dp p^2 \ln \left[1 + e^{-\beta\sqrt{p^2+m_t^2}} \right]. \quad (7.105)$$

Nesse ponto não efetuaremos a aproximação como em (7.27), pois faremos o cálculo numérico em uma seção futura. Novamente, como no caso escalar, continuaremos a aprimorar a análise do potencial efetivo adicionando a contribuição dos diagramas de anéis para os campos do Modelo Padrão.

7.2.4 Contribuição dos diagramas de anéis

Conferimos na seção dos campos escalares o cálculo do tensor de polarização e do potencial dos diagramas de anéis no caso. Podemos escrever então os mesmos para o caso do campo de Higgs e do Goldstone.

$$\begin{aligned} V_\phi^T(v) &= V_{1\phi}^T(v) + V_{\text{rings}}^\phi(v) \\ &= g(m_1^2(v)) + 3g(m_2^2(v)) + V_{\text{rings}}^{\phi_1}(v) + V_{\text{rings}}^{\phi_2}(v) \\ &= g(m_1^2(v) + \pi_1(0)) + 3g(m_2^2(v) + \pi_2(0)), \end{aligned} \quad (7.106)$$

a função $g(m_x^2(v) + \pi_x(0))$ é análoga a (7.104), desde que feita a devida correção na massa, dada por

$$g(m_x^2(v) + \pi_x(0)) = \frac{T}{2\pi^2} \int dk k^2 \ln \left(1 - e^{-\beta[k^2+m_x^2(v)+\pi_x(0)]^{\frac{1}{2}}} \right). \quad (7.107)$$

Assim como encontramos a correção térmica (tensor de polarização) para a massa do campo escalar, podemos encontrá-la para os bósons de calibre. Com os valores de tais massas podemos então calcular o potencial de anéis no Modelo Padrão. O cálculo para a correção das massas é feito com o auxílio da expressão

$$\pi_x(0) = \frac{\partial^2 V_T^{\text{quad}}}{\partial v^2}, \quad (7.108)$$

aqui usaremos os valores de $\pi_x(0)$ apresentados no artigo da M. E. Carrington [27]. O potencial V_T^{quad} tem a forma

$$V_T^{\text{quad}} = \frac{T^2}{24} \left[m_1^2(v) + 3m_2^2(v) + 6m_W^2(v) + 3m_Z^2(v) + 6m_t^2(v) \right]. \quad (7.109)$$

As correções das massas térmicas são então

$$m_x^{T^2} = m_x^2 + \pi_x(0). \quad (7.110)$$

Sendo assim

$$\begin{aligned}
 (m_H^T)^2 &= \left((3v^2\lambda - c^2) + \frac{T^2}{48} (9g^2 + 3g'^2 + 24\lambda + 12f^2) \right), \\
 (m_G^T)^2 &= \left((v^2\lambda - c^2) + \frac{T^2}{48} (9g^2 + 3g'^2 + 24\lambda + 12f^2) \right), \\
 (m_W^T)^2 &= \left(\frac{11g^2T^2}{6} + \frac{g^2v^2}{2} \right), \\
 (m_Z^T)^2 &= \left(\frac{1}{24} (g^2 + g'^2) (3v^2 + 22T^2), \right. \\
 &\quad \left. + \sqrt{132v^2T^2 (g^2 - g'^2)^2 + 9v^4 (g^2 + g'^2)^2 + 484T^4 (g^2 - g'^2)^2} \right), \\
 (m_\gamma^T)^2 &= \left(\frac{1}{24} (g^2 + g'^2) (3v^2 + 22T^2), \right. \\
 &\quad \left. - \sqrt{132v^2T^2 (g^2 - g'^2)^2 + 9v^4 (g^2 + g'^2)^2 + 484T^4 (g^2 - g'^2)^2} \right),
 \end{aligned} \tag{7.111}$$

onde foi feito o uso dos tensores de polarização presentes no artigo [27]. Sendo eles

$$\begin{aligned}
 \pi_0^{(2)}(0) &= \pi_{gb}^{(2)}(0) + \pi_\phi^{(2)}(0) + \pi_\psi^{(2)}(0); \\
 \pi_0^{(1)}(0) &= \pi_\phi^{(1)}(0) + \pi_\psi^{(1)}(0); \\
 \pi_{gb}^{(2)}(0) &= \frac{2}{3}g^2T^2; \\
 \pi_\phi^{(2)}(0) &= \frac{1}{6}g^2T^2; \\
 \pi_\psi^{(2)}(0) &= g^2T^2; \\
 \pi_\phi^{(1)}(0) &= \frac{1}{6}g'^2T^2; \\
 \pi_\psi^{(1)}(0) &= \frac{5}{3}g'^2T^2;
 \end{aligned} \tag{7.112}$$

onde os índices (2) e (1) representam a contribuição dos bósons de calibre para o tensor de polarização de $SU(2)_L$ e $U(1)_Y$ respectivamente.

Obtemos o potencial das contribuições de anéis pelo mesmo método usado no caso escalar, mas aqui substituímos a massa pela massa térmica (7.111). Este método foi seguido sistematicamente por Parwani [28] e aplicado ao Modelo Padrão por Arnold e Espinosa [29]. Mesmo ao realizar o cálculo em (7.107) com a integral contendo as correções das massas térmicas, a contribuição dos diagramas de anéis será os termos cúbicos das massas como constatamos no caso do campo escalar. O cálculo que demonstra que somente o termo cúbico contribuirá pode ser encontrado em [30] na seção 3.4 e de forma mais atual em []. Sendo assim, podemos encontrar que o potencial das contribuições dos anéis é

$$V_{\text{rings}}(v) = -\frac{T}{12\pi} \left(2 \left((m_W^T)^3 - m_W^3 \right) + \left((m_Z^T)^3 - m_Z^3 \right) + (m_\gamma^T)^3 \right). \tag{7.113}$$

Temos assim as correções do potencial ao nível de árvore necessária para nossa análise. O potencial ao nível de árvore, somado ao potencial de Coleman-Wienberg apresentado em

(7.99), o potencial a temperatura finita em (7.104) e (7.105), ganha uma nova correção somando-se o potencial dos diagramas de anéis (7.113). Agora resta-nos avaliar os resultados e se soluções aproximadas serão uteis em comparação a solução numérica.

7.3 O potencial efetivo por uma abordagem aproximada.

Nessa seção analisaremos aproximações que facilitarão a implementação de um código para resolver o potencial efetivo, pois o mesmo tem um custo de processamento dos cálculos elevado. Para começar consideraremos a contribuição dos bósons

$$I_b[T] = \frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left[1 - e \left(-\sqrt{\frac{m^2(T,v)}{T^2} + x^2} \right) \right], \quad (7.114)$$

e dos férmions

$$I_f[T] = -\frac{T^4}{2\pi^2} \int_0^\infty dx x^2 \ln \left[1 + e \left(-\sqrt{\frac{m^2(T,h)}{T^2} + x^2} \right) \right], \quad (7.115)$$

onde $m^2(T, h)$ são as massas térmicas presentes em (7.111). Realizando uma expansão em potências para x entre 0 e 2 [32], obtemos

$$\begin{aligned} I_{b,p} = & -\frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^2 x^2}{12} - \frac{\pi x^3}{6} - \frac{x^4}{32} \left(\ln(x^2) - \left(\frac{3}{2} - 2\gamma + 2 \ln(4\pi) \right) \right) \\ & - 2\pi^{7/2} \sum_{l=1}^{\infty} \left[(-1)^l \frac{\zeta(2l+1)}{(l+2)!} \left(\frac{x}{2\pi} \right)^{2l+4} \Gamma \left(l + \frac{1}{2} \right) \right], \end{aligned} \quad (7.116)$$

e

$$\begin{aligned} I_{f,p} = & -\frac{7\pi^4}{360} + \frac{\pi^2 x^2}{24} + \frac{x^4}{32} \left(\ln(x^2) - \left(\frac{3}{2} - 2\gamma + 2 \ln(\pi) \right) \right) \\ & + \frac{\pi^{7/2}}{4} \sum_{l=1}^{\infty} \left[(-1)^l \frac{\zeta(2l+1)}{(l+2)!} \left(1 - \frac{1}{2^{2l+1}} \right) \left(\frac{x}{\pi} \right)^{2l+4} \Gamma \left(l + \frac{1}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (7.117)$$

onde o subíndice p descreve a contribuição pequena em x , $\gamma \approx 0.58$ sendo a constante de Euler; ζ é a função zeta de Riemann e Γ é a função gama. Para qualquer valor de x obtemos uma precisão adequada se deixarmos termos suficientes na expansão. Por exemplo, se fizermos $l = 5$ em I_b e $l = 12$ em I_f , obtemos uma precisão de 10^{-8} para $0 \geq x \geq 2$.

No caso que $x > 2$ a integral fica

$$I_{b,g} = -x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1)^{k+1}}{k^2} K_2(kx), \quad (7.118)$$

e

$$I_{f,g} = -x^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k^2} K_2(kx), \quad (7.119)$$

onde $K_2(kx)$ é a função Bessel de segunda espécie, no caso em que $x \geq 2$, mantendo somente termos até, $k = 7$ obtemos também a precisão de 10^{-8} [33]. Podemos escrever assim a aproximação para a solução de I_b e I_f

$$I_{b,\text{aprox.}}(x) = \begin{cases} I_{b,p}(x) & x \leq 2 \\ I_{b,g}(x) & x > 2 \end{cases} \quad (7.120)$$

e

$$I_{f,\text{aprox.}}(x) = \begin{cases} I_{f,p}(x) & x \leq 2 \\ I_{f,g}(x) & x > 2 \end{cases} \quad (7.121)$$

Podemos comparar a solução de (7.114) com (7.120) no gráfico (19) De maneira semelhante

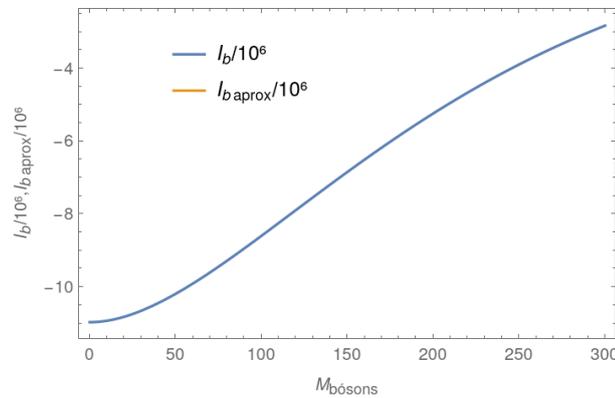


Figura 19 – Comportamento das funções I_b e $I_{b,\text{aprox.}}$.

podemos comparar a solução de (7.115) com (7.121) na figura (20)

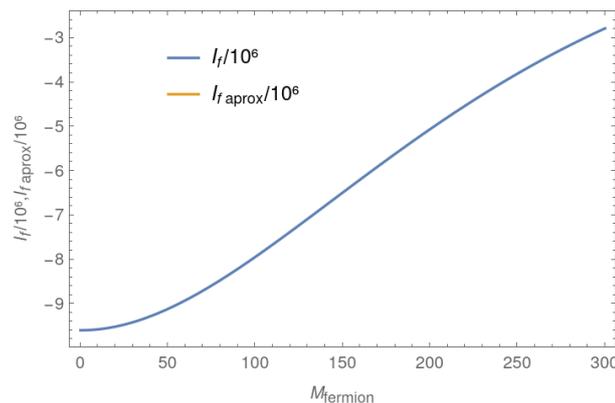


Figura 20 – Comportamento das funções I_f e $I_{f,\text{aprox.}}$.

Podemos ver com base nas figuras (19) e (20) que tanto a solução de I_b e I_f como suas aproximações nos retorna os mesmo resultados nos limites especificados. Sendo assim, podemos analisar o potencial efetivo como nos capítulos anteriores. Então temos o potencial ao nível de árvore somado ao potencial efetivo a temperatura zero é descrita pelo potencial

de Coleman-Weinberg (7.99)

$$\begin{aligned}
 V_1^{T=0} = & v^2 \left(\frac{c^2(3\lambda)}{32\pi^2} - \frac{c^4}{2} \right) + v^4 \left(\frac{\lambda}{4} - \frac{1}{64\pi^2} \left(\frac{3}{32} (g^2 + g'^2)^2 + \frac{3g^4}{16} + 6\lambda^2 - \frac{3f^4}{2} \right) \right) \\
 & + \left(\frac{1}{64\pi^2} \left(3m_{\text{Goldstone}}^4 \ln \left(-\frac{m_{\text{Goldstone}}^2}{c^2} \right) + m_{\text{Higgs}}^4 \ln \left(\frac{m_{\text{Higgs}}^2}{2c^2} \right) \right) \right. \\
 & \left. - 12m_{\text{top}}^4 \ln \left(\frac{\lambda v^2}{c^2} \right) + 6m_{\text{W}}^4 \ln \left(\frac{\lambda v^2}{c^2} \right) + 3m_{\text{Z}}^4 \ln \left(\frac{\lambda v^2}{c^2} \right) \right).
 \end{aligned} \tag{7.122}$$

O potencial a temperatura finita em função de I_b (7.114) e I_f (7.115) pode ser escrito em função das massas térmicas (7.111) como

$$\begin{aligned}
 V_1^{T \neq 0} = & I_b(m_H^T, T, v) + 3I_b(m_G^T, T, v) \\
 & + 6I_b(m_W^T, T, v) + 3I_b(m_Z^T, T, v) + 12I_f(m_t^T, T, v)
 \end{aligned} \tag{7.123}$$

Por fim podemos escrever o potencial efetivo do Modelo Padrão

$$V_{\text{eff}} = V_1^{T=0} + V_1^{T \neq 0} \tag{7.124}$$

Podemos então avaliar graficamente as contribuições de cada etapa da construção do potencial efetivo na figura (21).

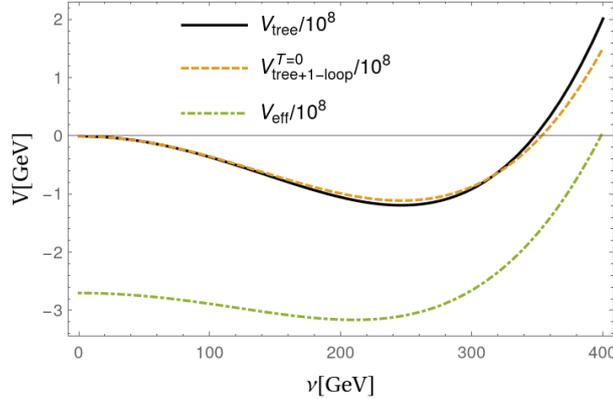
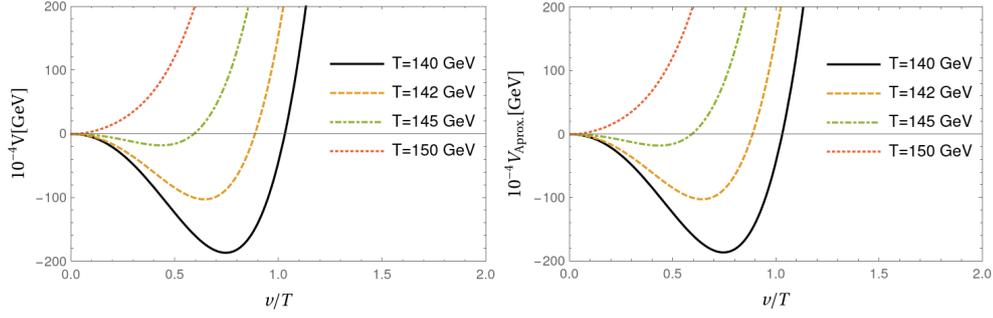


Figura 21 – Comportamento dos potenciais. O V_{eff} foi plotado com $T = 100$ GeV.

Agora analisemos se o potencial efetivo analisado de forma numérica também é compatível com sua forma aproximada. Assim podemos plotar os gráficos correspondentes na figura (22). Como esperado, não há diferença na comparação entre $V(T, \frac{v}{T})$ e $V_{\text{aprox.}}(T, \frac{v}{T})$.

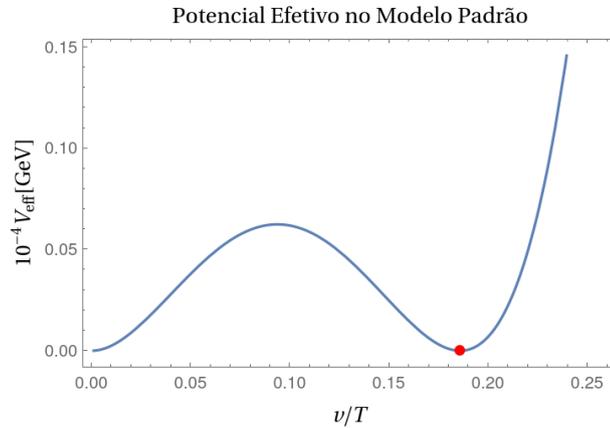

 Figura 22 – Comportamento de $V(T, \frac{v}{T})$ e $V_{\text{aprox.}}(T, \frac{v}{T})$, em relação a $\frac{v}{T}$.

7.4 A transição de fase de primeira ordem.

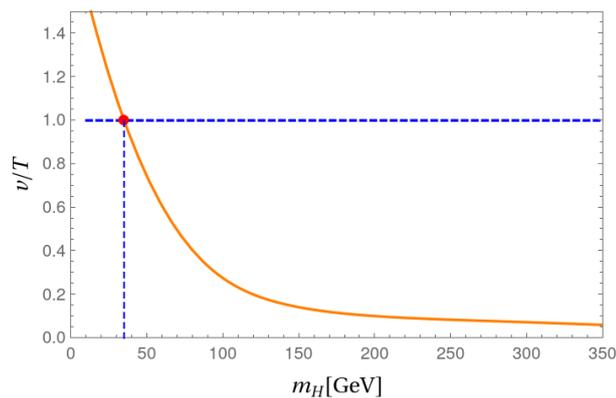
Uma vez que as principais aproximações foram descritas, analisemos qual a massa do Higgs nos dá uma transição de fase eletrofraca de primeira ordem forte. Mas antes analisaremos o comportamento do potencial em $\frac{v}{T_c}$.

$$V_{\text{ef}} = V_{\text{tree}} + V_{T=0}^1 + V_{T \neq 0}^1, \quad (7.125)$$

para encontrarmos a transição de fase eletrofraca precisamos analisá-lo com base na temperatura crítica que como definimos é a temperatura onde o mínimo do potencial efetivo é degenerado, podemos observar na figura (23)


 Figura 23 – Comportamento do potencial efetivo no Modelo Padrão em relação ao $\frac{v}{T_c}$.

A condição da transição de fase ser de primeira ordem não é suficiente para explicar a bariogênese, é preciso que a transição seja de primeira ordem forte. Para que essa condição seja satisfeita temos que obter uma massa do Higgs, m_H , que satisfaça a condição de que $\frac{v}{T} > 1$. Após isso podemos plotar o gráfico da figura (24)

Figura 24 – $\frac{v}{T}$ em relação à massa do Higgs.

Notamos que para a transição forte uma massa do Higgs menor que 45 GeV deveria ser encontrada, o que é muito menor que a massa real, $m_H = 125,25$ GeV. Isso nos indica que para a possibilidade de uma transição de fase eletrofraca forte ocorrer é necessária uma nova teoria na qual descreva os valores realmente medidos por experimentos.

8 Conclusão

O objetivo desta dissertação foi analisar as condições para uma transição de fase eletrofraca de primeira ordem forte no Modelo Padrão, com um foco no estudo do valor da massa do Higgs. Para isso no segundo capítulo estudando a mudança na ação clássica para que ela contemplasse a teoria de campos. Na ação efetiva está contida a principal ferramenta dessa dissertação que é o potencial efetivo. O potencial efetivo é uma correção quântica do potencial ao nível de árvore, no qual consideramos nessa dissertação as contribuições dos diagramas de 1-loop. Com isso foi possível avaliar o valor esperado do vácuo e a simetria do potencial, que para que a transição de fase ocorra deverá ser quebrada.

No terceiro capítulo estudamos duas formas possíveis de encontrar o potencial de Coleman-Weinberg para os campos escalares. A primeira foi o cálculo com base em uma integral de caminho de maneira análoga ao cálculo feito no primeiro capítulo, mas a integral encontrada para o potencial diverge e foi necessário realizar a renormalização e regularização para chegarmos de fato na equação do potencial efetivo a 1-loop para os campos escalares. A segunda foi com base nos cálculos dos diagramas de Feynman a 1-loop, analisando suas simetrias a fim de escrever o potencial na forma da integral do método anterior.

No quarto capítulo estudei as mesmas duas formas de cálculos para encontrar o potencial de Coleman-Weinberg para os campos fermiônicos como foi feito no campo escalar. Mas na primeira forma que foi pelo cálculo da integral de caminho, nesse método a integral foi calculada utilizando das soluções de integrais Gaussianas por meio de determinantes. A segunda forma foi a mesma aplicada ao campo escalar.

No quinto capítulo dedicado aos campos de calibre usei somente o método da solução de uma integral de caminho, mas diferenciando o caso abeliano do não abeliano. O principal ponto observado aqui é que as massas das partículas são os autovalores de uma matriz de massa encontrada no caso não abeliano.

Após encontrar todas as contribuições do potencial de Coleman-Weinberg dedicamos o sexto capítulo para encontrarmos a contribuição da temperatura finita ao potencial efetivo de 1-loop. Nesse capítulo em uma primeira parte analisei a evolução do universo primordial a fim de fazer uma analogia para ser possível aplicar ferramentas termodinâmicas na teoria de campos. Na segunda parte calculei de fato o potencial efetivo a temperatura finita, no fim fazendo um limite para altas temperaturas para ver uma aproximação da forma desse potencial.

No sétimo capítulo começamos aplicando todos os cálculos obtidos até aqui para o potencial efetivo do campo escalar. Ao transferirmos todas as ferramentas obtidas, foi

possível encontrar as massas das partículas que compõe a teoria e a temperatura crítica onde ocorreu a quebra de simetria. Encontramos o potencial efetivo no Modelo Padrão de forma numérica. Assim, analisamos as condições para uma transição de fase de primeira ordem forte.

A razão $\frac{v}{T}$ é uma forma de mensurar a força da transição de fase. Se impormos que essa razão deve ser maior ou igual a um, encontramos um limite para a massa de Higgs de 45 GeV que difere dos valores atuais encontrados no LHC que é 125,25 GeV. Sendo assim, a terceira condição imposta para que a transição de fase ocorra fora do equilíbrio não poderia ser satisfeita.

Por um longo período foi pensado que à transição de fase eletrofraca só traria resultados relevantes se a massa de Higgs estivesse no baixo valor encontrado no Modelo Padrão, mas atualmente notamos que a transição de fase realmente ocorreu mesmo com as condições atuais [34]. O modelo abordado nessa dissertação apesar de simples e falho nos concede a oportunidade de pensar sobre o modelo da transição de fase, então é possível pensar num futuro para a teoria com correções.

O estudo da transição de fase pode ser dividido em algumas áreas como: construir um potencial efetivo considerando divergências no infravermelho, estudando uma nucleação de bolhas aprimorada e examinando extensões para o Modelo Padrão. Um caso interessante é a transição de fase nos modelos 3-3-1. Neste modelo, diferente do estudado aqui, $SU(2) \rightarrow U(1)$, é necessária duas transições, $SU(3) \rightarrow SU(2)$, e em seguida, $SU(2) \rightarrow U(1)$. Como há diferentes modelos 3-3-1 temos algumas vantagens no estudo da transição de fase em relação ao Modelo Padrão [35].

Variações como a adição de um escalar ou até mesmo a suposição de dois Higgs são temas abordados para correção da falha do Modelo Padrão em obter os critérios para uma transição de fase de primeira ordem forte. Outra forma de melhorar a descrição é com a adição de um singlete de Higgs, como em [36], que tal adição torna a condição $\frac{v}{T}$ satisfeita para $m_H \lesssim 60$ GeV, que a época era o limite inferior do valor da massa de Higgs, pelos termos cúbicos no potencial ao nível de árvore. Outra correção proposta é a adição de um singlete de calibre complexo, com um valor esperado de vácuo igual a zero, que também nos retorna um termo cubico no potencial efetivo, como em [37].

Referências

- [1] Bailin, D. e A. Love: *Cosmology in Gauge Field Theory and String Theory*. Graduate Student Series in Physics. Taylor & Francis, 2004, ISBN 9781420057003. Citado 3 vezes nas páginas 13, 40 e 47.
- [2] Pathria, R.K. e P.D. Beale: *Statistical Mechanics*. Academic Press. Butterworth-Heinemann, 2011, ISBN 9780123821881. Citado na página 13.
- [3] Planck Collaboration, Aghanim, N., Akrami, Y., Arroja, F., Ashdown, M., Aumont, J., Baccigalupi, C., Ballardini, M., Banday, A. J., Barreiro, R. B. e et al.: *Planck 2018 results - I. Overview and the cosmological legacy of Planck*. A&A, 641:A1, 2020. <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201833880>. Citado na página 13.
- [4] Sarkar, Subir: *Measuring the baryon content of the universe: BBN vs CMB*. 2002. <https://arxiv.org/abs/astro-ph/0205116>. Citado na página 13.
- [5] Sakharov, A. D.: *Violation of CP Invariance, C asymmetry, and baryon asymmetry of the universe*. Pisma Zh. Eksp. Teor. Fiz., 5:32–35, 1967. Citado na página 13.
- [6] Ahriche, Amine: *What is the criterion for a strong first order electroweak phase transition in singlet models?* Phys. Rev. D, 75:083522, Apr 2007. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.75.083522>. Citado na página 13.
- [7] Shaposhnikov, Mikhail E: *Is there a hot electroweak phase transition at large Higgs masses?* 1997. <https://cds.cern.ch/record/369947>. Citado na página 14.
- [8] Yeomans, J.M.: *Statistical Mechanics of Phase Transitions*. Clarendon Press, 1992, ISBN 9780191589706. <https://books.google.com.br/books?id=3IUVSvOUtTMC>. Citado na página 14.
- [9] Blundell, S.J. e K.M. Blundell: *Concepts in Thermal Physics*. OUP Oxford, 2010, ISBN 9780199562091. <https://books.google.com.br/books?id=T0luBAAAQBAJ>. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 40.
- [10] Workman, R. L. e Others: *Review of Particle Physics*. PTEP, 2022:083C01, 2022. Citado 4 vezes nas páginas 14, 60, 61 e 63.
- [11] Hindmarsh, Mark, Marvin Lüben, Johannes Lumma e Martin Pauly: *Phase transitions in the early universe*. SciPost Physics Lecture Notes, feb 2021. <https://doi.org/10.21468/SciPostPhysLectNotes.24>. Citado na página 14.

- [12] Weinberg, S.: *Dreams of a Final Theory*. Vintage books. Vintage Books, 1994, ISBN 9780679744085. <https://books.google.com.br/books?id=Qd0MEtsBr7oC>. Citado na página 14.
- [13] Hatfield, B.: *Quantum field theory of point particles and strings*. 1992. Citado 4 vezes nas páginas 16, 23, 25 e 27.
- [14] Ramond, Pierre: *Field theory. A modern primer*, volume 51. 1981. Citado 4 vezes nas páginas 23, 30, 32 e 53.
- [15] Coleman, Sidney e Erick Weinberg: *Radiative Corrections as the Origin of Spontaneous Symmetry Breaking*. Phys. Rev. D, 7:1888–1910, Mar 1973. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.7.1888>. Citado na página 25.
- [16] Quiros, Mariano: *Finite temperature field theory and phase transitions*. Citado 2 vezes nas páginas 27 e 33.
- [17] Hawking, S. W.: *Zeta function regularization of path integrals in curved spacetime*. Communications in Mathematical Physics, 55(2):133 – 148, 1977. Citado na página 33.
- [18] Citado na página 33.
- [19] Bailin, D. e A. Love: *Introduction to gauge field theory*. 1986. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 41.
- [20] 'tHooft, G.: *Renormalization of massless Yang-Mills fields*. Nuclear Physics B, 33(1):173–199, 1971, ISSN 0550-3213. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0550321371903956>. Citado 2 vezes nas páginas 35 e 38.
- [21] Schroeder, D.V.: *An Introduction to Thermal Physics*. Addison Wesley, 1999, ISBN 9780201380279. <https://books.google.com.br/books?id=1gosQgAACAAJ>. Citado na página 40.
- [22] Dolan, L. e R. Jackiw: *Symmetry behavior at finite temperature*. Phys. Rev. D, 9:3320–3341, Jun 1974. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.9.3320>. Citado na página 53.
- [23] Peskin, Michael E. e Daniel V. Schroeder: *An Introduction to quantum field theory*. Addison-Wesley, Reading, USA, 1995, ISBN 978-0-201-50397-5. Citado na página 55.
- [24] Aaltonen, T, S Amerio, D Amidei, A Anastassov e et al: *High-precision measurement of the W boson mass with the CDF II detector*. Science (New York, N.Y.), 376:170–176, abril 2022. Citado na página 61.

- [25] G. Abbiendi, et al: *Precise determination of the Z resonance parameters at LEP: “Zedometry”*. The European Physical Journal C, 19(4):587–651, mar 2001. <https://doi.org/10.1007/s100520100627>. Citado na página 61.
- [26] Schwartz, M.D.: *Quantum Field Theory and the Standard Model*. Quantum Field Theory and the Standard Model. Cambridge University Press, 2014, ISBN 9781107034730. <https://books.google.com.br/books?id=HbdEAgAAQBAJ>. Citado na página 62.
- [27] Carrington, ME: *Effective potential at finite temperature in the standard model*. Physical Review D, 45(8):2933, 1992. Citado 2 vezes nas páginas 67 e 68.
- [28] Parwani, Rajesh R.: *Resummation in a hot scalar field theory*. Phys. Rev. D, 45:4695–4705, Jun 1992. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.45.4695>. Citado na página 68.
- [29] Arnold, Peter e Olivier Espinosa: *Effective potential and first-order phase transitions: Beyond leading order*. Phys. Rev. D, 47:3546–3579, Apr 1993. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.47.3546>. Citado na página 68.
- [30] Laine, Mikko e Aleksi Vuorinen: *Basics of thermal field theory*. Lect. Notes Phys, 925(1):1701–01554, 2016. Citado na página 68.
- [31] Löfgren, Johan: *Stop comparing resummation methods*, 2023. Nenhuma citação no texto.
- [32] Mégevand, Ariel e Alejandro D. Sánchez: *Supercooling and phase coexistence in cosmological phase transitions*. Physical Review D, 77(6), mar 2008. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.77.063519>. Citado na página 69.
- [33] Mégevand, Ariel e Alejandro D. Sánchez: *Supercooling and phase coexistence in cosmological phase transitions*. Phys. Rev. D, 77:063519, Mar 2008. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.77.063519>. Citado na página 70.
- [34] Dine, Michael, Robert G. Leigh, Patrick Huet, Andrei Linde e Dmitri Linde: *Towards the theory of the electroweak phase transition*. Phys. Rev. D, 46:550–571, Jul 1992. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevD.46.550>. Citado na página 75.
- [35] Phong, Vo Quoc, Vo Thanh Van e Hoang Ngoc Long: *Electroweak phase transition in the reduced minimal 3-3-1 model*. Physical Review D, 88(9), nov 2013. <https://doi.org/10.1103/PhysRevD.88.096009>. Citado na página 75.
- [36] Choi, J. e R.R. Volkas: *Real Higgs singlet and the electroweak phase transition in the standard model*. Physics Letters B, 317(3):385–391, nov 1993. <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/9308234>. Citado na página 75.

-
- [37] Espinosa, J.R. e M. Quirós: *The electroweak phase transition with a singlet*. Physics Letters B, 305(1-2):98–105, may 1993. <https://doi.org/10.48550/arXiv.hep-ph/9301285>. Citado na página 75.