

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto De Ciências Exatas
Especialização em Estatística

Viviany da Silva Bezerra

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA CARTA \bar{X} COM USO REGRA
SUPLEMENTAR 2-2 DE KHOO e ARIFFIN UTILIZANDO CADEIA DE MARKOV**

BELO HORIZONTE
2023

Viviany da Silva Bezerra

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA CARTA \bar{X} COM USO DA REGRA
SUPLEMENTAR 2-2 DE KHOO e ARIFFIN UTILIZANDO CADEIA DE MARKOV**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Roberto da Costa
Quinino

BELO HORIZONTE
2023

2023, Viviany da Silva Bezerra.
Todos os direitos reservados.

Bezerra, Viviany da Silva.

B574a Avaliação do desempenho da carta \bar{X} com uso da regra suplementar 2-2 de Khoo e Ariffin utilizando cadeia de Markov [recurso eletrônico] / Viviany da Silva Bezerra —2023.
1 recurso online (31 f. il, color.): pdf.

Orientador: Roberto da Costa Quinino.
Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística
Referências: 23.

1. Estatística. 2. Carta de controle X. 3. Controle estatístico de processo. 4. Markov, Processos de. I. Quinino, Roberto da Costa. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. III. Título.

CDU 519.2 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB 6/1510
Universidade Federal de Minas Gerais – ICEX



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
5924 Departamento de Estatística

E-mail: pgest@ufmg.br

Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-

Programa de Pós-Graduação /
Especialização Av. Pres. Antônio Carlos, 6627
- Pampulha 31270-901 – Belo Horizonte –
MG

ATA DO 278ª. TRABALHO DE FIM DE CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA DE VIVIANY DA SILVA BEZERRA.

Aos treze dias do mês de março de 2023, às 16:00 horas, com utilização de recursos de videoconferência a distância, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Estatística, para julgar a apresentação do trabalho de fim de curso do aluno **Viviany da Silva Bezerra**,

intitulado: “*Avaliação do Desempenho da Carta \bar{X} com Uso da Regra Suplementar 2-2 de Khoo e Ariffin Utilizando Cadeia de Mrkov*”, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Estatística. Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, Professor Roberto da Costa Quinino – Orientador, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra à candidata para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da candidata. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença da candidata e do público, para julgamento

e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a candidata foi considerada Aprovada condicional às modificações sugeridas pela banca examinadora no prazo de 30 dias a partir da data de hoje por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à candidata pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, a Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 13 de março de 2023.

Prof. Roberto da Costa Quinino
(Orientador)

Departamento de Estatística / UFMG

Frederico Rodrigues Borges da Cruz
Departamento de Estatística / UFMG

RESUMO

A carta de controle \bar{X} é uma importante ferramenta para o controle estatístico de processos. Ela é de fácil análise e implementação, por este motivo é muito comum o seu uso na indústria. No entanto não apresenta bom desempenho para deslocamentos pequenos na média. Nesse sentido o presente trabalho pretende avaliar o desempenho da carta de controle \bar{X} utilizando a regra suplementar de Khoo com uso de Cadeias de Markov. O desempenho das cartas de controle será medido utilizando o número médio de corridas para detectar uma mudança na média.

PALAVRAS-CHAVE: Carta de Controle \bar{X} , Simulação de Monte Carlo, Controle Estatístico de Processos, Average Run Lengths.

ABSTRACT

The \bar{x} control chart is an important tool for statistical process control. It is easy to analyze and implement, which is why its use in industry is very common. However, it does not perform well for small displacements on average. In this sense, the present work intends to evaluate the performance of the \bar{x} control chart using Khoo's supplementary rule with the use of Markov Chains. The performance of the control charts will be measured using the average number of runs to detect a change in media.

PALAVRAS-CHAVE: \bar{X} Control Chart, Monte Carlo Simulation, Statistical Process Control, Average Run Lengths.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Ilustração de um gráfico de controle	10
Figura 2 - LCI e LSC para $k = 3, \mu = 0$ e $\sigma = 1$;	11
Figura 3 - Representação gráfica do modelo <i>two-of-two</i> Khoo e Ariffin (2006).....	13
Figura 4 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra Khoo e Ariffin 2-2: n=1.....	20
Figura 5 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra Khoo e Ariffin 2-2: n=2.....	21
Figura 6 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra Khoo e Ariffin 2-2: n=3.	21
Figura 7 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra Khoo e Ariffin 2-2: n=4.....	22
Figura 8 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra Khoo e Ariffin 2-2: n=5.....	22

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – ARL's obtidos para X clássica e X com o uso da regra de Khoo e Ariffin (2-2).....	19
Tabela 3.2 - Resultados dos limites de controle obtidos para X e 2-2.	19

SUMÁRIO

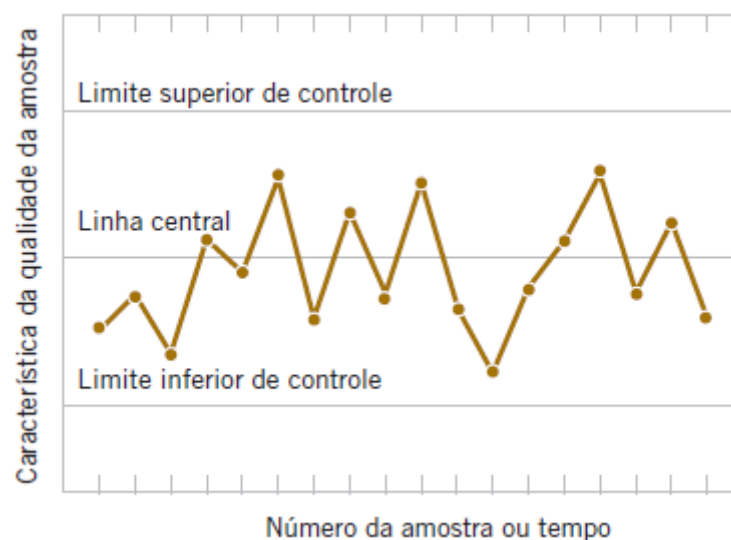
1 INTRODUÇÃO	10
2 MODELO TWO-OF-TWO KHOO E ARIFFIN (2006)	12
3 ABORDAGEM DE KHOO E ARIFFIN POR CADEIA DE MARKOV	14
3.1 CADEIA DE MARKOV	14
3.2 MODELANDO A REGRA DE KHOO E ARIFFIN 2-2 POR CADEIA DE MARKOV	16
4 RESULTADOS	18
5 CONCLUSÃO	23
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	24
ANEXO 1: PROGRAMA PARA ENCONTRAR OS LIMITES DE CONTROLE DA CARTA DE CONTROLE X COM REGRA SUPLEMENTAR 2-2 DE KHOO E ARIFFIN	25
ANEXO 2: PROGRAMA PARA ENCONTRAR ARL UTILIZANDO A REGRA 2-2	27
ANEXO 3: PROGRAMA PARA ENCONTRAR ARL UTILIZANDO A ABORDAGEM CLÁSSICA	30

1 INTRODUÇÃO

Segundo Vasconcelos et al. (2008), a globalização aumentou a competitividade entre as empresas e, como reflexo, o constante incremento a produtividade. Para as empresas sobreviverem no mercado atual, é necessário ter processos eficientes e que produzem o mínimo de produtos defeituosos. O Controle Estatístico do Processo (CEP) é uma coleção de ferramentas que tem como objetivo a prevenção de defeitos, melhoria da qualidade e redução de custos.

Uma importante ferramenta do CEP são os gráficos de controle. Segundo Montgomery e Runger (2021), um gráfico de controle é uma disposição gráfica de uma característica de qualidade que foi medida ou calculada a partir de uma amostra, em função do número da amostra ou do tempo. A Figura 1 ilustra um gráfico de controle para avaliar se a média do processo se deslocou da situação sob controle (μ_0) para situação fora de controle (μ_1). Os pontos no gráfico indicam as médias (\bar{X}) de cada amostra de tamanho n . Neste trabalho estamos supondo que a variância não se altera.

Figura 1 - Ilustração de um gráfico de controle



Fonte: (Montgomery e Runger, 2021).

A linha central (LC) representa o valor médio da característica de qualidade monitorada (μ_0). O limite superior de controle (LSC) e o limite inferior de controle (LIC) são os limites estatísticos da média dos valores da característica de qualidade baseado em uma amostra aleatória de tamanho n . Em geral, se o processo está sob controle, os pontos (média amostral) cairão entre o LSC e LIC. Um modelo geral para se obter LSC, LC e LIC estão descritos nas equações 1.1, 1.2 e 1.3 respectivamente:

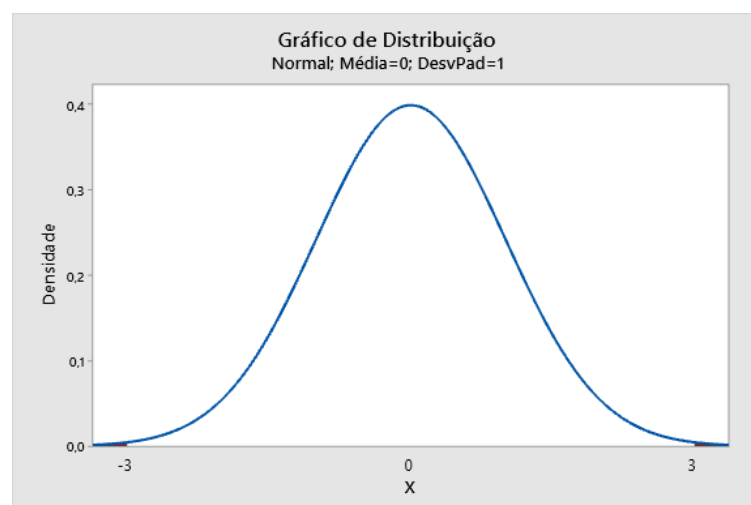
$$LSC = \mu_0 + k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.1)$$

$$LC = \mu_0 \quad (1.2)$$

$$LIC = \mu_0 - k \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1.3)$$

A abordagem clássica é definir $k=3$ (Shewhart) com objetivo de observarmos $ARL_0=370$. ARL_0 é o número médio de amostras em que se observa equivocadamente um ponto fora de controle (a média do processo não mudou, mas a carta de controle sinaliza uma mudança). O ARL_1 é o número médio de amostras necessário para observar no gráfico de controle uma efetiva mudança na média do processo de μ_0 para μ_1 . Por exemplo, para $n=1$, $\mu_0=0$, $\sigma=1$ e amostras independentes, os pontos para um processo fora de controle cairão na área hachurada (A) como mostrado na Figura 2.

Figura 2 - LCI e LSC para $k = 3, \mu = 0$ e $\sigma = 1$;



Fonte: (Montgomery e Runger, 2021).

De maneira geral as equações para os cálculos dos ARL's (ARL0 e ARL1) são definidas como:

$$ARL = [P(\bar{X} < LIC) + P(\bar{X} > LSC)]^{-1} \quad (1.4)$$

Quando desejarmos calcular ARL_0 então, usa-se a média do processo sob controle, isto é, μ_0 . Se o objetivo é calcular ARL_1 então, usa-se a média do processo fora de controle, isto é, μ_1 .

As probabilidades são calculadas considerando que a distribuição da média \bar{X} é normal com média μ e desvio padrão dado por σ/\sqrt{n} . Usualmente o desempenho de um gráfico de controle é avaliado fixando o valor do ARL_0 e verificando a magnitude de ARL_1 que deve ser o menor possível. Em geral é difícil termos um gráfico de controle que apresenta o melhor desempenho para todo o espaço paramétrico de μ_1 .

2 MODELO TWO-OF-TWO KHOO E ARIFFIN (2006)

Toda essa seção será destinada a abordar a regra discutida no paper "Two Improved Run Rules for the Shewhart \bar{X} Control Chart" escrito por Khoo e Ariffin (2006) e que é o modelo base dessa monografia.

Buscando ter um resultado mais assertivo (menor ARL_1 com ARL_0 fixado) para o controle de um processo, o autor observou que a carta de Shewhart apresentava uma perda de eficiência para desvios pequenos e médios da média (shift) e por isso propôs um método chamado two-of-two para cartas do tipo \bar{X} . Assim, foi proposto dois limites inferiores (LIC1 e LIC2) e dois limites superiores (LSC1 e LSC2), como pode ser visto na Figura 3, e a partir daí avaliar os resultados obtidos. Para o autor, o processo é considerado fora de controle quando:

- As médias plotadas são superiores ao limite LSC1 ou inferior ao limite de controle LIC1;

- Ou com dois resultados consecutivos entre LIC1 e LIC2 ou entre LSC2 e LSC1. O cálculo dos limites foi definido de tal forma que o ARL0 com $n=1$ fosse aproximadamente igual a 370.

Figura 3 - Representação gráfica do modelo *two-of-two* Khoo e Ariffin (2006)



Fonte: Khoo e Ariffin (2006)

O objetivo deste trabalho é comparar, com uso das cadeias de Markov, a eficiência em termos de ARL de uma carta de controle tradicional \bar{X} descrita aqui como uma abordagem clássica com uma carta \bar{X} de controle que utiliza a regra 2-2 Khoo e Ariffin (2006). Em todos os casos os tamanhos dos subgrupos (n) variaram de um a cinco ampliando assim o trabalho de Khoo e Ariffin (2006) que utilizou apenas $n=1$ e simulação de Monte Carlo para o cálculo do ARL1. Fernandes (Calazans) também discutiu o problema apresentado nesta monografia, mas considerou uma abordagem por simulação de Monte Carlo. Nessa monografia a abordagem é analítica, usando cadeias de Markov.

3 ABORDAGEM DE KHOO E ARIFFIN POR CADEIA DE MARKOV

3.1 CADEIA DE MARKOV

Nesta seção iremos realizar uma breve introdução dos conceitos de cadeia de Markov necessários para desenvolvermos a monografia. O texto foi baseado em Hillier & Liberman (2013).

Um processo estocástico $\{X_t\}$, só possui propriedade markoviana somente se

$$P\{X_{t+1} = j | X_0 = k_0, k_1, \dots, X_{t+1} = k_{t+1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$$

para todo $t = 0, 1, \dots$, e toda a sequência $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$.

A propriedade de Markov diz que a probabilidade de um evento futuro, dado o estado atual do sistema, é independente dos eventos passados e depende apenas do estado atual. Em outras palavras, o futuro do sistema não é afetado pelo seu passado, exceto pelo seu estado atual. Isso significa que o estado atual, contém toda a informação relevante sobre o passado e que as probabilidades futuras podem ser calculadas usando apenas informações sobre o estado atual.

As probabilidades de transição -uma etapa- (1.5) e a transição em n etapas (1.6) são representadas por

$$P_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\} \quad (1.5)$$

$$P_{ij}^{(n)} = P\{X_{t+n} = j | X_t = i\}. \quad (1.6)$$

A propriedade de ser estacionário implica que P_{ij} é constante ao longo do tempo, ou seja, $P_{ij} = P_{ij}$ para todo i e j . Além disso, a propriedade de ser estacionário, em n etapas, também implica que $P_{ij}^{(n)}$ é constante ao longo do tempo, ou seja, $P_{ij}^{(n)} = P_{ij}^{(n)}$ para todo i, j e n , ou seja, as probabilidades de transição em uma etapa e em n etapas são constantes ao longo do tempo.

Estas propriedades garantem que a matriz de probabilidades de transição seja uma representação válida da dinâmica do sistema, sendo elas:

- A soma das probabilidades de transição para qualquer estado de j a partir de um estado i deve ser igual a 1, ou seja, $\sum_{ij}^M P_{ij}^{(n)} = 1$ para todo $i; n = 0, 1, 2, \dots$
- As entradas da matriz não devem ser negativas, isto significa que para todo i e $j; n = 0, 1, 2, \dots$, $P_{ij}^{(n)} \geq 0$.

A propriedade de Estabilidade Ergódica Irredutível, é uma característica fundamental de cadeias de Markov irredutíveis e ergódicas, $\lim_{n \rightarrow \infty} P_{ij}^{(n)}$ independente de i , que é o resultado da presença de um estado estacionário, isto é, um vetor de probabilidades que não muda após uma grande série de transições.

A condição básica para a estabilidade ergódica é que a cadeia de Markov seja irredutível, indicando que o $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$, onde π_j deve satisfazer exclusivamente as equações de estado estável (1.7), sendo ela:

$$\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}, \text{ para todo } j = 0, 1, \dots, M \quad (1.7)$$

$$\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$$

Com essas condições, é possível garantir que, após uma grande série de transições, o sistema irá se estabilizar em um estado estacionário, independentemente do estado inicial. Isto sugere que, em longo prazo, a probabilidade de o sistema se encontrar em cada estado será a mesma, independentemente da posição inicial.

Para trabalhar com um sistema de equações de maneira matricial, no sistema deve ser retirado a somatória da equação = 1, podendo ser representado da seguinte forma (1.8):

$$\pi = \pi P \quad (1.8)$$

Os π_j são valores estacionários das probabilidades na cadeia de Markov, ou seja, após muitas transições, a probabilidade de se encontrar em um determinado estado j tende a ser o valor π_j , independentemente do estado inicial. Este valor não significa que o processo se acomode em um estado específico, mas sim que a

probabilidade de se encontrar em um determinado estado é estável ao longo do tempo.

3.2 MODELANDO A REGRA DE KHOO E ARIFFIN 2-2 POR CADEIA DE MARKOV

Considere uma cadeia de Markov onde o processo de inspeção e decisão seja modelado com uso de sete estados caracterizados por $Z = [(C), (SA); (SB; 1), (SB; 2), (IB; 1), (IB; 2); (IA)]$. A variável C indica que a média amostral caiu entre os limites de controle LIC2 e LSC2, SA que a média amostral foi superior ao LSC1 e IA indica que a média amostral foi inferior a LIC1. SB indica que a média amostral caiu entre os limites de controle LSC2 e LSC1 e IB que a média amostral caiu entre os limites de controle LIC1 e LIC2. Os valores numéricos que acompanham SB e IB indicam a quantidade de observações sucessivas observadas.

Com os estados contidos em Z podemos elaborar a cadeia de Markov descrita por P_1 . Por exemplo, $P[(SB; 1) | (C)] = p_{sa}$ representa a probabilidade condicional de que a próxima média amostral estará em SB dado que a anterior média amostral estava na região C. Observe que os registros numéricos de SB e IB são sempre zerados quando a média amostral cai na região C ou o processo é ajustado (média amostral cai na região AS ou IA). O processo também é ajustado em (SB;2) ou (IB;2).

$$\begin{array}{c}
 (C) \quad (SA) \quad (SB; 1) \quad (SB; 2) \quad (IB; 1) \quad (IB; 2) \quad (IA) \\
 \\
 \mathbf{P}_1 = \begin{array}{c}
 (C) \\
 (SA) \\
 (SB; 1) \\
 (SB; 2) \\
 (IB; 1) \\
 (IB; 2) \\
 (IA)
 \end{array} \left| \begin{array}{ccccccc}
 p_c & p_s & p_{sa} & 0 & p_{ia} & 0 & p_i \\
 p_c & p_s & p_{sa} & 0 & p_{ia} & 0 & p_i \\
 p_c & p_s & 0 & p_{sa} & p_{ia} & 0 & p_i \\
 p_c & p_s & p_{sa} & 0 & p_{ia} & 0 & p_i \\
 p_c & p_s & p_{sa} & 0 & 0 & p_{ia} & p_i \\
 p_c & p_s & p_{sa} & 0 & p_{ia} & 0 & p_i \\
 p_c & p_s & p_{sa} & 0 & p_{ia} & 0 & p_i
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

Onde:

$$p_s = 1 - P(\bar{x} \leq LSC_1) | \bar{x} \sim N(0; 1/\sqrt{n});$$

$$p_{sa} = P(\bar{x} \leq LSC_1) | \bar{x} \sim N(0; 1/\sqrt{n}) - P(\bar{x} \leq LSC_2) | \bar{x} \sim N(0; 1/\sqrt{n});$$

$$p_c = P(\bar{x} \leq LSC_2) | \bar{x} \sim N(0; 1/\sqrt{n}) - P(\bar{x} \leq LIC_2) | \bar{x} \sim N(0; 1/\sqrt{n});$$

$$p_{ia} = P(\bar{x} \leq LIC_2) | \bar{x} \sim N(0; 1/\sqrt{n}) - P(\bar{x} \leq LIC_1) | \bar{x} \sim N(0; 1/\sqrt{n});$$

$$p_i = P(\bar{x} \leq LSC_1) | \bar{x} \sim N(0; 1/\sqrt{n}).$$

Sem perda de generalidade estamos adotando que os dados estão padronizados. Os valores dos limites de controle precisam ser determinados de tal forma que ARL_0 seja o usual 370.4. Explicaremos nessa seção o procedimento para o cálculo dos limites de controle.

Considere que a distribuição estacionária seja expressa por $\pi = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7]$ e está associada respectivamente aos estados de Z. O vetor π é a solução do Sistema linear expresso por $\pi = \pi P_1$, sujeito a restrição de que $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1$. Uma das equações do sistema $\pi = \pi P_1$ são redundantes e pode ser eliminada.

Assim, podemos expressar o valor de ARL_0 por (1.5). Observe que ARL_0 depende dos limites de controle LIC_1 , LIC_2 , LSC_1 e LSC_2 (que são simétricos em relação a μ_0). Neste sentido se fixarmos ARL_0 (usualmente em 370.4) podemos obter os que garanta um ARL_0 igual ao valor fixado. Uma solução razoável e adotada nesta monografia é trabalhar com o LSC_1 igual ao LSC da carta tradicional acrescido de meio desvio padrão e então determinar o LSC_2 de tal forma a garantir ARL_0 aproximadamente 370,4. A solução é arbitrária, no entanto mostrou-se eficiente em relação ao objetivo do procedimento de Khoo e Ariffin.

$$ARL_0 = \frac{1}{\pi_2 + \pi_4 + \pi_6 + \pi_7}, \text{ adotando } \mu = \mu_0 \quad (1.5)$$

Uma vez fixado os limites de controle então usamos (1.6) para o cálculo do ARL_1 .

$$ARL_1 = \frac{1}{\pi_2 + \pi_4 + \pi_6 + \pi_7}, \text{ adotando } \mu = \mu_1 \quad (1.6)$$

4 RESULTADOS

O desempenho em termos de ARL da carta de controle \bar{X} clássica e da carta de controle \bar{X} com o uso da regra de Khoo e Ariffin (2-2) foram calculadas adotando $\mu_0 = 0$ e μ_1 variando de 0 a 3 com um incremento de 0,2. Utilizamos respectivamente a equação (1.4) e a abordagem por meio da cadeia de Markov, equações (1.5) e (1.6). Os resultados são apresentados na Tabela 3.1. A Tabela 3.2

apresenta os limites de controle usados para a carta de controle \bar{X} clássica e a carta de controle \bar{X} com o uso da regra de Khoo e Ariffin (2-2). Todos os cálculos apresentados nesta seção foram realizados com usos dos programas desenvolvidos no software R e apresentados no Anexo 1 e 2 (ARL e limites de controle para carta de controle \bar{X} com o uso da regra de Khoo e Ariffin 2-2), Anexo 3 (ARL e limites de controle para carta de controle \bar{X}).

Tabela 3.1 – ARL's obtidos para \bar{X} clássica e \bar{X} com o uso da regra de Khoo e Ariffin (2-2)

Média	n= 1		n= 2		n= 3		n= 4		n= 5	
	\bar{X}	2-2	\bar{X}	2-2	\bar{X}	2-2	\bar{X}	2-2	\bar{X}	2-2
0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
0,2	308,43	277,44	262,74	219,27	227,72	179,60	200,08	150,92	177,73	129,30
0,4	200,08	150,92	130,86	88,09	94,04	59,39	71,55	43,41	56,59	33,44
0,6	119,67	79,03	63,38	37,89	40,03	23,06	27,82	15,88	20,56	11,81
0,8	71,55	43,41	32,41	18,53	18,79	10,84	12,38	7,41	8,86	5,57
1,0	43,89	25,42	17,73	10,26	9,76	6,04	6,30	4,24	4,50	3,30
1,2	27,82	15,88	10,38	6,36	5,61	3,88	3,65	2,86	2,66	2,32
1,4	18,25	10,54	6,50	4,35	3,54	2,80	2,38	2,16	1,81	1,82
1,6	12,38	7,41	4,34	3,22	2,44	2,20	1,73	1,76	1,39	1,52
1,8	8,69	5,48	3,08	2,55	1,83	1,83	1,38	1,50	1,18	1,31
2,0	6,30	4,24	2,32	2,12	1,47	1,58	1,19	1,32	1,08	1,17
2,2	4,72	3,42	1,84	1,83	1,26	1,40	1,09	1,19	1,03	1,08
2,4	3,65	2,86	1,53	1,62	1,14	1,26	1,04	1,10	1,01	1,03
2,6	2,90	2,45	1,33	1,46	1,07	1,16	1,01	1,04	1,00	1,01
2,8	2,38	2,16	1,20	1,33	1,03	1,09	1,00	1,02	1,00	1,00
3,0	2,00	1,94	1,12	1,23	1,01	1,04	1,00	1,01	1,00	1,00

Tabela 3.2 - Resultados dos limites de controle obtidos para \bar{X} e 2-2.

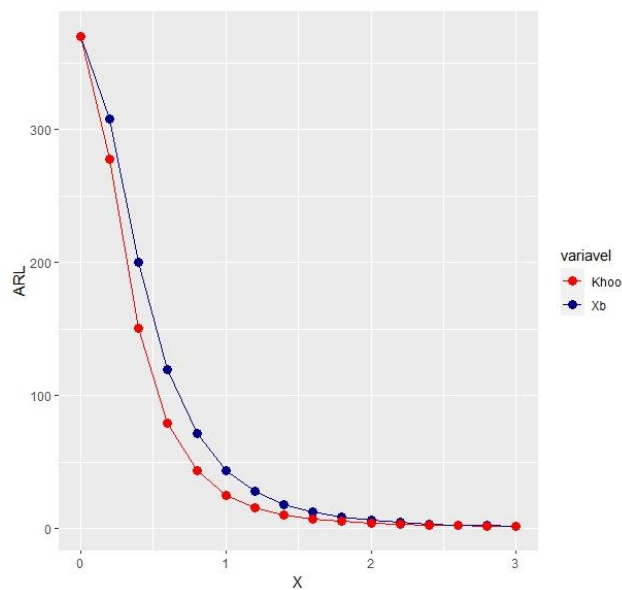
	n= 1	n= 2	n= 3	n= 4	n= 5
Limite Superior de controle \bar{X}	3	2.12132	1.732051	1.5	1.341641
LSC1	3.5	2.474874	2.02073	1.75	1.565248
LSC2	1.82208	1.288405	1.051978	0.91104	0.814859

Com base nos resultados encontrados na tabela 3.1, é possível verificar que para desvios menores da média (shift), a carta de controle \bar{X} com a provas suplementares de Khoo e Ariffin (2006) apresentou resultados mais satisfatórios que os apresentados na carta de Shewhart, isto é, valores menores de ARL1. Para desvios grandes da média a carta de controle \bar{X} e a carta de controle \bar{X} com a

regra suplementar de Khoo e Ariffin (2006) apresentaram valores de ARL1 similares. Dessa forma, a carta avaliada nesta monografia consegue identificar desvios menores mais rapidamente e com isso consegue gerar demandas de intervenção de processo também mais rapidamente minimizando assim custos.

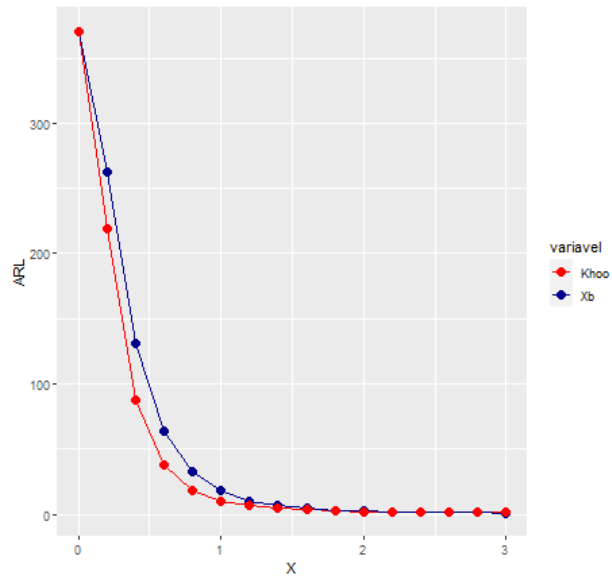
A fim de tornar o resultado mais visual, foram plotados nas Figuras 2-6 os resultados dos ARLs obtidos pelo algoritmo criado na monografia e os resultados obtidos por carta \bar{X} Shewhart respectivamente, para os valores de n igual a 1, 2, 3, 4 e 5. Todos os cinco gráficos mostram que os resultados obtidos na monografia (usando uma escala logarítmica para os ARLs), com base no modelo de Khoo e Ariffin (2006), foram mais eficientes que os obtidos pela carta tradicional de Shewhart. Notou-se também que para deslocamentos grandes a carta de controle \bar{X} de Shewhart tradicional e com o uso de provas suplementares se mostram similares.

Figura 4 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra Khoo e Ariffin 2-2: n=1.



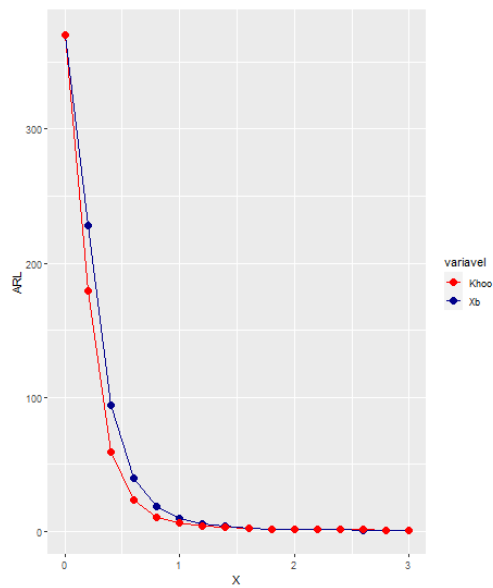
Fonte: Autor

Figura 5 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra Khoo e Ariffin 2-2: $n=2$.



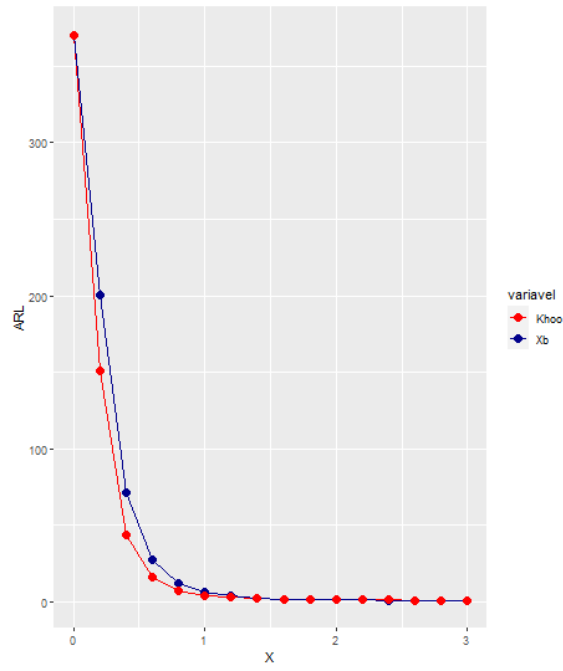
Fonte: Autor

Figura 6 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra Khoo e Ariffin 2-2: $n=3$.



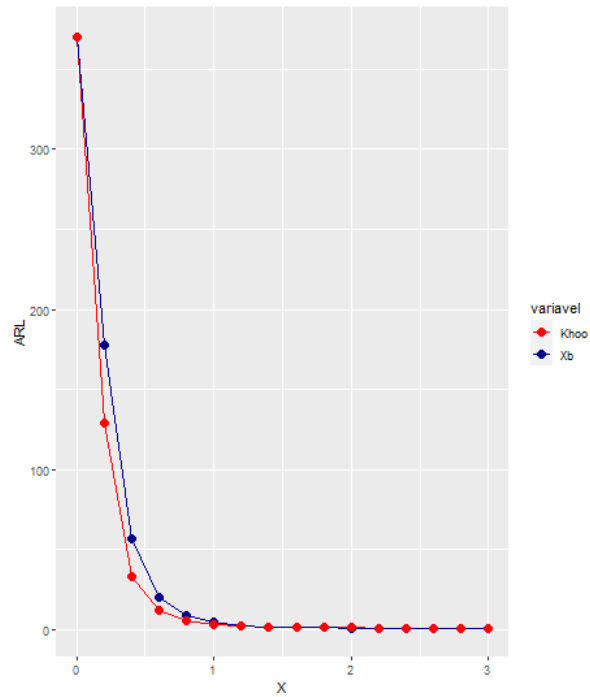
Fonte: Autor

Figura 7 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra Khoo e Ariffin 2-2: $n=4$.



Fonte: Autor

Figura 8 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e a regra Khoo e Ariffin 2-2: $n=5$.



Fonte: Autor

5 CONCLUSÃO

A utilização da carta \bar{X} com as provas suplementares de Khoo e Ariffin (2006) se mostrou mais eficiente que as cartas \bar{X} de Shewhart tradicional para os valores de n iguais a 1,2,3,4, e 5, que foram avaliados nesta monografia. Desta forma, o uso da carta avaliada neste trabalho tem potencial de ser usado frente as cartas \bar{X} de Shewhart quando é sabido que os desvios da média são pequenos, o que é cada vez mais comum, uma vez que os processos industriais estão cada vez mais robustos e com desvios menores da média.

Além disso, o algoritmo criado e apresentado no Apêndice 2 se mostrou bastante eficiente na determinação de novos limites em relação ao tamanho amostral, o que permite que os resultados desse trabalho possam ser extrapolados para diferentes valores de n .

A decisão de implementar ou não a regra 2-2 dependerá da importância da detecção de pequenos deslocamentos na média do processo uma vez que o procedimento de Khoo e Ariffin (2006) é mais complicado operacionalmente que a carta de controle tradicional \bar{X} . Como em processos industriais atuais grandes deslocamentos são cada vez menos presentes, a utilização da regra 2-2 se torna uma estratégia importante de ser considerada pelos gerentes de controle de qualidade. Como trabalho futuro sugerimos a avaliação da regra de Khoo e Ariffin 2-2 na carta de controle para avaliação da variância.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Edição Português por Frederick S. Hillier (Autor), Gerald J. Lieberman

Introdução à Pesquisa Operacional Capa comum – 17 outubro 2012

KHOO, Michael Boon Chong; ARIFFIN, Khotrun Nada bt. ***Two Improved Runs Rules for the Shewhart \bar{X} Control Chart***. Quality Engineering, v. 18, n. 2, 2006.

Montgomery, D. C.;Runger, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. 7^a. ed.Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda.2021. p.513-554.

R Core Team (2020). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. URL <https://www.R-project.org/>.

Vasconcelos, Y. L.; Yoshitake, M.; Santos, M. A.; Fraga, M. S.Reflexos Da Globalização: Uma Análise Das Formas De Inserção No Mercado Internacional. **Sitientibus**, n. 39, p. 95-129. 2008.

Willis A. Jensen, L. Allison Jones-Farmer, Charles W. Champ & William H. Woodall (2006) Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review, **Journal of Quality Technology**, v. 38, n. 4, p. 349-364. 2006.

ANEXO 1: PROGRAMA PARA ENCONTRAR OS LIMITES DE CONTROLE DA CARTA DE CONTROLE \bar{X} COM REGRA SUPLEMENTAR 2-2 DE KHOO E ARIFFIN

```
##### Markov Khoo - Limites #####
```

```
rm(list=ls())
```

```
## Pacotes Utilizados ##
```

```
library(pracma)
```

```
## Desenvolvimento ##
```

```
tic()
```

```
n=3 ## Varia de acordo com o n desejado
```

```
u=0 ## Não varia
```

```
desvio=1 ## Não varia
```

```
LSC1=3/(sqrt(n))+1/sqrt(n)/2
```

```
LIC1=-LSC1
```

```
U<-seq(0.5,min(2,LSC1),0.000001)
```

```
U1<-size(U)
```

```
U2<-U1[2]
```

```
Resultados<-matrix(0,U2,3)
```

```
for (j in 1:U2){
```

```
  LSC2=U[j]
```

```
  LIC2=-LSC2
```

```
  ps<-1-pnorm(LSC1,u,desvio/(sqrt(n)))
```

```
  psa<-pnorm(LSC1,u,desvio/(sqrt(n)))-pnorm(LSC2,u,desvio/(sqrt(n)))
```

```

pc<-pnorm(LSC2,u,desvio/(sqrt(n)))-pnorm(LIC2,u,desvio/(sqrt(n)))
pia<-pnorm(LIC2,u,desvio/(sqrt(n)))-pnorm(LIC1,u,desvio/(sqrt(n)))
pi<-pnorm(LIC1,u,desvio/(sqrt(n)))
c1<-c(pc,ps, psa,0,pia,0,pi)
c2<-c(pc,ps, psa,0,pia,0,pi)
c3<-c(pc,ps, 0,psa,pia,0,pi)
c4<-c(pc,ps, psa,0,pia,0,pi)
c5<-c(pc,ps, psa,0,0,pia,pi)
c6<-c(pc,ps, psa,0,pia,0,pi)
c7<-c(pc,ps, psa,0,pia,0,pi)
M<-rbind(c1, c2, c3, c4, c5,c6,c7)

```

```
## Resolvendo o Sistema Linear no R ##
```

```

A = t(M) - eye(7)
A[7,] = ones(1,7)
B = zeros(7, 1)
B[7,1] = 1
MMa = solve(A)%*%B

PP<-1/(MMa[2,1]+MMa[4,1]+MMa[6,1]+MMa[7,1])

Resultados[j,1]=LSC2
Resultados[j,2]=PP

}

Resultados[,3]=abs(Resultados[,2]-370.4)

```

```
Resultados=sortrows(Resultados,3)
cat('ARL0=',Resultados[1,2],"\n")
cat('LSC2=',Resultados[1,1],"\n")
cat('LSC1=',LSC1,"\n")
toc()
```

ANEXO 2: PROGRAMA PARA ENCONTRAR ARL UTILIZANDO A REGRA 2-2

```
##### Markov Khoo - Loop #####

rm(list=ls())

## Pacotes Utilizados ##

library(pracma)

## Desenvolvimento ##

LSC1= 2.020726
LIC1=-LSC1
LSC2= 1.051978
LIC2=-LSC2

n= 3
desvio=1
Saida=c()
uA=seq(0,3,0.2)
for (i in uA){
u=i
ps<-1-pnorm(LSC1,u,desvio/(sqrt(n)))
```

```

psa<-pnorm(LSC1,u,desvio/(sqrt(n)))-pnorm(LSC2,u,desvio/(sqrt(n)))
pc<-pnorm(LSC2,u,desvio/(sqrt(n)))-pnorm(LIC2,u,desvio/(sqrt(n)))
pia<-pnorm(LIC2,u,desvio/(sqrt(n)))-pnorm(LIC1,u,desvio/(sqrt(n)))
pi<-pnorm(LIC1,u,desvio/(sqrt(n)))

```

```

c1<-c(pc,ps, psa,0,pia,0,pi)
c2<-c(pc,ps, psa,0,pia,0,pi)
c3<-c(pc,ps, 0,psa,pia,0,pi)
c4<-c(pc,ps, psa,0,pia,0,pi)
c5<-c(pc,ps, psa,0,0,pia,pi)
c6<-c(pc,ps, psa,0,pia,0,pi)
c7<-c(pc,ps, psa,0,pia,0,pi)
M<-rbind(c1, c2, c3, c4, c5,c6,c7)

```

```
## Resolvendo o Siste Linear no R ##
```

```

A = t(M) - eye(7)
A[7,] = ones(1,7)
B = zeros(7, 1)
B[7,1] = 1
MMa = solve(A)%*%B

PP<-1/(MMa[2,1]+MMa[4,1]+MMa[6,1]+MMa[7,1]) #ARL0 ou ARL1
Saida=rbind(Saida,c(u,PP))

colnames(Saida)<- c("u1","ARL0")

```

```
}
```

```
write.csv(Saida,"Saida.csv")
```

ANEXO 3: PROGRAMA PARA ENCONTRAR ARL UTILIZANDO A ABORDAGEM CLÁSSICA

```
##### Xbarra Tradicional #####

rm(list=ls())

## Desenvolvimento ##

desvio=1

n=3

u0=0

LSC=u0+3*(desvio/sqrt(n))

LIC=u0-3*(desvio/sqrt(n))

SaidaT=c()

uA=seq(0,3,0.2)

for (i in uA){

u=i

pi<-pnorm(LIC,u,desvio/sqrt(n))

ps<-1-pnorm(LSC,u,desvio/sqrt(n))

ARL<-1/(pi+ps)

SaidaT=rbind(SaidaT,c(u,ARL))

colnames(SaidaT)<- c("u1","ARL")

}

## Saída Excel (csv) ##
```

```
write.csv(SaidaT,"SaidaT.csv")
```

