

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Instituto de Ciências Exatas  
Programa de Pós-graduação em Matemática

Wilson Berrocal Meza

Índice do catenoide capilar imerso na bola unitária Euclidiana

Belo Horizonte

2022

Wilson Berrocal Meza

## **Índice do catenoide capilar imerso na bola unitária Euclidiana.**

### **Versão final**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues  
Barbosa.

Belo Horizonte

2022

Meza, Wilson Berrocal

M617i Índice do catenoide capilar imerso na bola unitária euclidiana / Wilson Berrocal Meza – 2022.  
1 recurso online (115 f. il, color.): pdf.

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa.  
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f: 113-115.

1. Matemática – Teses. 2. Hipersuperfícies – Teses. 3. Índice de Morse – Teses. 4. Aplicação de Gauss – Teses. I. Barbosa, Ezequiel Rodrigues. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

*Índice do Catenóide Capilar Imerso na Bola  
Unitária Euclidiana*

**WILSON BERROCAL MEZA**

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa  
UFMG

Prof. Allan George de Carvalho Freitas  
UFPB

Prof. Celso dos Santos Viana  
UFMG

Prof. Emerson Alves Mendonça de Abreu  
UFMG

Prof. Marcos Petrucio de Almeida Cavalcante  
UFAL

Belo Horizonte, 02 de dezembro de 2022.

*Dedico este trabalho aos meus pais,  
Pelágio e Alejandrina.*

Depois de escalar uma montanha  
muito alta, descobrimos que há  
muitas outras montanhas por escalar.

---

NÉLSON MANDELA

# Agradecimentos

Sou muitíssimo grato aos meus pais, Pelágio e Alejandrina, pelo exemplo, carinho e motivação, vocês são os maiores de todos os meus professores, a minha base, nossa história de lutas e vitórias começa bem antes daqui.

Agradeço aos meus irmãos, Marline, Adrián e Diany, que me deram coragem e incentivo para que pudesse encarar esse desafio.

Agradeço a minha namorada, Margoth, pela paciência e apoio desde o primeiro momento me incentivou. Por todo tempo caminhamos juntos, gozando da cumplicidade que a sorte do destino realizou em nós.

Ao professor Ezequiel pela amizade e confiança em mim depositada. Foi através da sua valiosa orientação que conheci o caminho de aprender e produzir matemática. Entretanto, nossas conversas ensinou-me muito mais que isso através de sua integridade, ética e conduta profissional. Sua pessoa inspira o conceito de grandeza como ser humano.

Agradeço aos meus amigos e colegas de curso pela amizade, momentos de descontração e de estudos. Vocês fizeram parte da minha formação e vão continuar presentes em minha vida com certeza.

Ao departamento de matemática da UFMG, por toda estrutura que tive durante o doutorado. Aos professores e funcionários, por colaborarem com a minha formação e pelos eficientes serviços prestados.

Finalmente, agradeço à CAPES pelo apoio financeiro indispensável para a realização deste trabalho.

# Resumo

Esta tese consiste de vários resultados sobre hipersuperfícies mínimas capilares contidas na bola unitária Euclidiana  $\mathbb{B}_1^{n+1}(0)$ . Na primeira parte, estudamos o índice de Morse das catenoides capilares contidas na bola Euclidiana  $\mathbb{B}_1^3(0)$ . Nós provamos que, se  $\Sigma_c$  é uma catenoide capilar contida em  $\mathbb{B}_1^3(0)$  onde  $c$  é constante de capilaridade, então o índice de Morse de  $\Sigma_c$  está entre 3 e 7 ( $3 \leq \text{Ind}(\Sigma_c) \leq 7$ ). Além disso, obtemos que qualquer catenoide capilar com ângulo de contato próximo de  $\frac{\pi}{2}$  possui índice de Morse igual a 4, assim como a catenoide crítica. Também, verificamos que não existe catenoide capilar na bola unitária com ângulo de contato menor que  $\tilde{\theta} \approx 1.3421$ . Para encontrarmos nossa estimativa do índice das catenoides capilares, focamos na análise de dois problemas de autovalores mais simples associados à nossa superfície mínima capilar (Jacobi-Steklov e bordo fixo). Na segunda parte, mostramos alguns resultados de classificação de hipersuperfícies mínimas capilares considerando que as funções coordenadas da aplicação normal de Gauss são autofunções de Jacobi-Steklov. Para  $n = 2$ , mostramos que, se algum dos autovalores associados às funções coordenadas da aplicação normal de Gauss é zero, então a superfície é um disco totalmente geodésico. Ainda para  $n = 2$ , provamos que, se dois autovalores associadas às funções coordenadas da aplicação normal de Gauss são iguais e diferentes de zero, então a superfície é uma catenoide capilar. Na última parte, encontramos duas identidades integrais que nos permitir apresentar uma prova diferente do seguinte resultado que já foi mostrado por outros autores: se  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície estacionária estável de tipo-II (estabilidade no espaço de funções que têm média zero no bordo) na bola unitária, então  $\Sigma^n$  é um  $n$ -disco totalmente geodésico.

**Palavras-chaves:** Hipersuperfícies mínimas capilares. Índice de Morse. Aplicação normal de Gauss. Hipersuperfície estacionária estável.

# Abstract

This thesis consists of several results on minimal capillary hypersurfaces contained in the Euclidean unit ball  $\mathbb{B}_1^{n+1}(0)$ . In the first part, we studied the Morse index of the capillary catenoids contained in the Euclidean ball  $\mathbb{B}_1^3(0)$ . We prove that, if  $\Sigma_c$  is a capillary catenoid contained in  $\mathbb{B}_1^3(0)$  where  $c$  is the capillary constant, then the Morse index of  $\Sigma_c$  is between 3 and 7 ( $3 \leq \text{Ind}(\Sigma_c) \leq 7$ ). Furthermore, we obtain that any capillary catenoid with a contact angle close to  $\frac{\pi}{2}$  a Morse index equal to 4, as does the critical catenoid. Also, we verify that there is no capillary catenoid in the unit ball with a contact angle less than  $\tilde{\theta} \approx 1.3421$ . To find our estimate of the capillary catenoid index, we focused on the analysis of two simpler eigenvalue problems associated with our minimal capillary surface (Jacobi-Steklov and fixed boundary). In the second part, we show some results of classification of minimal capillary hypersurfaces considering that the coordinate functions of the Gauss map are Jacobi-Steklov eigenfunctions. For  $n = 2$ , we show that, if any of the eigenvalues associated with the coordinate functions of the Gauss map is zero, then the surface is a totally geodesic disk. Still for  $n = 2$ , we prove that, if two eigenvalues associated with the coordinate functions of the Gauss map are equal and different from zero, then the surface is a capillary catenoid. In the last part, we find two integral identities that allow us to present a different proof of the following result that has already been shown by other authors: if  $\Sigma^n$  is a type-II stable stationary hypersurface (stability in the space of functions that have zero mean on the boundary) on the unit ball, then  $\Sigma^n$  is a totally geodesic  $n$ -disk.

**Keywords:** Capillary minimal hypersurfaces. Morse Index. Normal application of Gauss. Stable stationary hypersurface.

# Lista de Figuras

1	Catenoide estável e catenoide instável . . . . .	16
1.1	Hipersuperfície capilar, $\Sigma^n = x(\Sigma^n)$ e $\partial\Sigma^n = x(\partial\Sigma^n)$ . . . . .	32
2.1	$F(T) = \frac{1 - T \tanh T}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}}$ e $T_1 \approx 2,26489$ . . . . .	45
2.2	Catenoide $\Sigma_c$ com $c = \frac{3}{2}$ . . . . .	61
2.3	$g(t) = \tanh t$ . . . . .	63
2.4	$p(t) = \frac{1}{\cosh t}$ . . . . .	64
2.5	$e(t) = 1 - t \tanh t$ e $T_0 \approx 1,19968$ . . . . .	65
2.6	Catenoide instável $\Sigma_c$ , $0 < c < c_0$ . . . . .	69
2.7	Catenoide estável $\Sigma_c$ , $c_0 \leq c < 1$ . . . . .	69
2.8	$\frac{\cosh^3 x + \cosh x - x \sinh x}{\sinh x(\sinh x \cosh x + x)}$ . . . . .	72
2.9	$\frac{1}{\sinh^2 x}$ e $x_1 \approx 0.8813$ . . . . .	72
2.10	$\frac{\sinh x \cosh x + x}{\sinh x(x \cosh x - \cosh x)}$ e $x_2 \approx 2.169$ . . . . .	73
2.11	$\coth x \frac{(3(3 - \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{3x} - (3(3 + \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{-3x}}{(3 - \tanh x)e^{3x} + (3 + \tanh x)e^{-3x}}$ . . . . .	74
2.12	$\coth x \frac{(3(3 - \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{3x} + (3(3 + \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{-3x}}{(3 - \tanh x)e^{3x} - (3 + \tanh x)e^{-3x}}$ . . . . .	75

# Sumário

<b>INTRODUÇÃO</b>	<b>11</b>
<b>1 PRELIMINARES</b>	<b>25</b>
1.1 Conceitos básicos . . . . .	25
1.2 Imersões e subvariedades Riemannianas . . . . .	27
1.3 Primeira e segunda fórmula de variação de energia . . . . .	30
<b>2 ÍNDICE DO CATENOIDE CAPILAR IMERSO NA BOLA UNITÁ- RIA</b>	<b>42</b>
2.1 Problema de Jacobi-Steklov no catenoide capilar . . . . .	44
2.2 Problema de variação de bordo fixo no catenoide capilar . . . . .	60
2.3 Índice do catenoide capilar imerso na bola unitária . . . . .	70
<b>3 APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS EM UMA HIPERSUPERFÍCIE MÍNIMA CAPILAR</b>	<b>82</b>
3.1 Aplicação normal de Gauss como autofunção de Jacobi-Steklov . . . . .	83
<b>4 ÍNDICE DE UMA HIPERSUPERFÍCIE MÍNIMA CAPILAR</b>	<b>96</b>
4.1 Hipersuperfícies estáveis de tipo I e II . . . . .	106
<b>REFERÊNCIAS</b>	<b>112</b>

# INTRODUÇÃO

Considere uma variedade Riemanniana  $(M^{n+1}, \bar{g})$ , um domínio  $B \subset M^{n+1}$  compacto e suave difeomorfo à bola Euclidiana com  $\partial B \neq \emptyset$ , e uma hipersuperfície  $\Sigma^n \hookrightarrow B$  tal que  $\text{int}(\Sigma^n) \subset \text{int}(B)$  e  $\partial\Sigma^n \subset \partial B$ . Dizemos que  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície capilar quando sua curvatura média  $H$  tem valor constante e  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B$  em um ângulo constante. Para uma variação admissível  $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^n \rightarrow B$  qualquer, a primeira fórmula de variação diz que uma hipersuperfície capilar é um ponto crítico do funcional energia  $t \mapsto E(t) = A(t) - \cos\theta W(t)$ , em que

$$A(t) = \int_{\Sigma} d\Sigma_t \quad \text{e} \quad W(t) = \int_{[0,t] \times \partial\Sigma} \phi^* dA_{\partial B}$$

e  $\theta$  denota o ângulo de interseção de  $\Sigma^n$  e  $\partial B$  (veja Seção 1.3). Alguns exemplos, para o caso quando  $M^{n+1} = \mathbb{R}^{n+1}$  e  $B = \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$ , temos: os  $n$ -discos, calotas esféricas, os catenoides, pedaços de superfícies de Delaunay.

Na última década, o estudo da existência e classificação de hipersuperfície capilares teve grande preferência por parte dos pesquisadores. Por exemplo, entre os trabalhos que estudaram essas questões estão: Struwe [19] sobre existência de discos mínimos em uma classe de domínios em  $\mathbb{R}^3$ , Maximo-Nunes-Smith [12] sobre superfícies mínimas com topologia de um anel e Nitsche [15] sobre a classificação de um disco capilar na bola Euclidiana tridimensional como sendo totalmente umbílico. Por outro lado, estudos do índice de Morse e estabilidade de hipersuperfícies mínimas capilares, grande progresso foi feito até agora. Por exemplo, Ambrozio-Carlotto-Sharp em [2] obtiveram uma estimativa do índice para o caso de fronteira livre (veja Teorema 0.10 e Corolário 3), e uma significativa generalização foi feita por Guo-Xia em [24], para o caso de mínima capilar (veja Teorema 0.11). Um caso particular, onde o índice de Morse foi encontrado com sucesso é

o do catenoide crítico, que é exatamente 4. Dentre as pesquisas que abordaram de forma independente estão: Tran em [21], Simth-Zhou em [18] e Devyver em [6]. Continuando nesta linha de estudo, em nosso trabalho apresentamos alguns resultados sobre estimativas do índice de hipersuperfícies mínimas capilares e uma estimativa exata do índice de Morse, para o caso da catenoide capilar imersa na bola unitária Euclidiana. A seguir, descrevemos brevemente nossas contribuições dentro dessa linha de pesquisa.

## Índice da catenoide capilar imersa na bola unitária.

Consideremos  $Q$  a forma bilinear simétrica induzida pela segunda fórmula de variação  $E''(0)$  do funcional de energia dada por

$$Q(\varphi, \varphi) = - \int_{\Sigma} \varphi \mathcal{J} \varphi d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \varphi (\bar{\nabla}_{\nu} \varphi - q\varphi) d\partial\Sigma, \quad (1)$$

onde  $\mathcal{J} = \Delta_{\Sigma} + |A|^2 + \text{Ric}^M(N, N)$  é o operador de Jacobi,  $q = \frac{1}{\sin \theta} A^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot \theta A(\nu, \nu)$  e  $\varphi \in C^{\infty}(\Sigma)$  (veja Seção 1.3). O índice de Morse da forma bilinear simétrica  $Q$  é precisamente o número de autovalores negativos do problema com condição de fronteira de Robin

$$\begin{cases} \mathcal{J}u = -\lambda u, & \text{em } \Sigma^n, \\ \bar{\nabla}_{\nu} u = qu, & \text{em } \partial\Sigma^n. \end{cases} \quad (2)$$

Em [21] e [22], Tran e Zhou mostraram que  $\text{Ind}(\Sigma^n)$  pode ser determinado com dois problemas de autovalores mais simples. Em primeiro lugar, considera-se apenas as variações que fixem o bordo:

$$\begin{cases} \mathcal{J}u = -\mu u, & \text{em } \Sigma^n, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Sigma^n. \end{cases} \quad (3)$$

Por outro lado, a influência do bordo é capturado pelo problema de Jacobi-Steklov. Suponhamos que  $q \in C^{\infty}(\partial\Sigma^n)$  é tal que  $q \geq 0$  e considere o problema

$$\begin{cases} \mathcal{J}u = 0, & \text{em } \Sigma^n, \\ \bar{\nabla}_{\nu} u = \lambda qu, & \text{em } \partial\Sigma^n. \end{cases} \quad (4)$$

Considerando os problemas acima, Tran e Zhou mostraram o seguinte resultado:

**Teorema 0.1.** (Tran-Zhou (2020) [22, Theorem 4.1])

Seja  $\Sigma^n \subset B$  uma hipersuperfície capilar e  $q(x) \geq 0$  para todo  $x \in \partial\Sigma^n$ . Então

$$\text{Ind}(\Sigma^n) = a + b, \quad (5)$$

onde  $a$  é o número de autovalores não positivos de (3), contando a multiplicidade, e  $b$  é o número de autovalores menores que 1 de (4), contando a multiplicidade.

Para nossa estimativa do índice de Morse da catenoide capilar faremos uso do teorema anterior, onde consideraremos o caso particular  $M^3 = \mathbb{R}^3$  o espaço tridimensional Euclidiano e  $B = \mathbb{B}_1^3(0)$  a bola unitária centrada na origem. O que significa que estudaremos os problemas de autovalor de Jacobi-Steklov (4) e de borde fixo (3) no catenoide.

### Problema de Jacobi-Steklov na catenoide capilar imersa na bola unitária.

Primeiro, estudamos o problema de Jacobi-Steklov (4) na catenoide. Consideramos a catenoide  $\Sigma_c \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  parametrizado por  $x : [-T, T] \times (0, 2\pi) \rightarrow \Sigma_c \subset \mathbb{B}_1^3(0)$ ,

$$x(t, v) = (c \cosh t \cos v, c \cosh t \sin v, ct). \quad (6)$$

Como nosso interesse é na parte da catenoide dentro na bola unitária  $\mathbb{B}_1^3(0)$ , o parâmetro  $c$  fica entre  $0 < c < 1$ . Assim, para cada valor de  $c$  temos uma catenoide  $\Sigma_c$  que intersecta  $\mathbb{S}^2$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ , desta forma temos uma família de catenóides  $\{\Sigma_c\}_{0 < c < 1}$  imersas na bola unitária. Como foi mencionado, estudaremos o problema de autovalor de Jacobi-Steklov no catenoide capilar. Nas coordenadas  $(t, v)$ , o problema de Jacobi-Steklov (4) fica reduzido em:

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \frac{2}{\cosh^2 t} - k^2) f = 0, & \text{em } \Sigma_c, \\ \partial_t f|_{t=T} = \lambda \tanh T f(T), & \text{em } \Gamma_+ \\ \partial_t f|_{t=-T} = -\lambda \tanh T f(-T), & \text{em } \Gamma_- \end{cases} \quad (7)$$

onde  $\partial\Sigma_c = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  e  $k$  é um inteiro não negativo. No seguinte teorema, encontramos a solução de (7) e também calcularemos os autovalores do problema de Jacobi-Steklov (4).

**Teorema 0.2.** *Considere a catenoide capilar dada pela parametrização (6). Então as autofunções e autovalores do problema de Jacobi-Steklov (4) são dados pelas soluções da equação diferencial ordinária (7) para inteiros não negativos  $k$ . Em particular, temos os seguintes casos:*

- Para  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} u &= b_1 \tanh t + b_2(1 - t \tanh t) \\ \lambda &= \frac{1}{\sinh^2 T}, \quad \text{se } b_1 \neq 0 \quad e \quad b_2 = 0; \\ \lambda &= \frac{\sinh T \cosh T + T}{\sinh T(T \sinh T - \cosh T)}, \quad \text{se } b_1 = 0, \quad b_2 \neq 0 \quad e \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- Para  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} u &= (a_1 \cos v + a_2 \sin v) \left( b_1 \frac{1}{\cosh t} + b_2 \left( \sinh t + \frac{t}{\cosh t} \right) \right) \\ \lambda &= -1, \quad \text{se } b_1 \neq 0 \quad e \quad b_2 = 0; \\ \lambda &= \frac{\cosh^3 T + \cosh T - T \sinh T}{\sinh T(\sinh T \cosh T + T)}, \quad \text{se } b_1 = 0 \quad e \quad b_2 \neq 0. \end{aligned}$$

- Para cada  $k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} u &= (a_1 \cos kv + a_2 \sin kv) \left( (k - \tanh t)e^{kt} + (k + \tanh t)e^{-kt} \right) \\ \lambda &= \coth T \frac{(k(k - \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T) e^{kT} - (k(k + \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T) e^{-kT}}{(k - \tanh T)e^{kT} + (k + \tanh T)e^{-kT}} \\ u &= (a_1 \cos kv + a_2 \sin kv) \left( (k - \tanh t)e^{kt} - (k + \tanh t)e^{-kt} \right) \\ \lambda &= \coth T \frac{(k(k - \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T) e^{kT} + (k(k + \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T) e^{-kT}}{(k - \tanh T)e^{kT} - (k + \tanh T)e^{-kT}}. \end{aligned}$$

A importância do teorema anterior está no fato de que os autovalores  $\lambda$  têm uma forma explícita e que, de fato, isso nos ajudará posteriormente, a determinar em quais valores de  $T$  eles são menores que 1.

## Problema de variação de bordo fixo na catenoide capilar imersa na bola unitária.

Agora, vamos nos concentrar em estudar o problema de variação que fixe o bordo (3) na catenoide imersa em  $\mathbb{R}^3$ . Bérard em [4] e Bérard-Earp em [5] estudaram os domínios simétricos contidos no catenoide e conseguiram classificar os domínios estável e instável.

Seja a catenoide com a parametrização  $x_c : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \Sigma_c \subset \mathbb{R}^3$  dada por:

$$x_c(t, v) = (c \cosh t \cos v, c \cosh t \sin v, ct) . \quad (8)$$

Agora, considerando o domínio compacto  $\Sigma_{c,T}$  simétrico da catenoide imersa em  $\mathbb{R}^3$  definido para  $T > 0$ , por  $\Sigma_{c,T} = x_c([-T, T] \times [0, 2\pi])$ . O problema de autovalores para o operador  $\mathcal{J}_c$ , associado a uma variação de bordo fixo de  $\Sigma_{c,T}$ , é dado por:

$$\begin{cases} \mathcal{J}_c u = -\mu u, & \text{em } \Sigma_{c,T}, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Sigma_{c,T}. \end{cases} \quad (9)$$

Sob estas considerações, Bérard mostrou o seguinte resultado:

**Teorema 0.3.** (H. Bérard (2008) [4, Theorem 3.1])

Sejam  $\mathcal{J}_c = \Delta_c + |A|^2$  o operador de Jacobi com condições de fronteira dado por (9) e  $T_0$  o zero positivo da função  $e(t) = 1 - t \tanh t$ . Então:

1. Para  $0 < T < T_0$ , o operador  $\mathcal{J}_c$  tem somente autovalores positivos. Daí o domínio  $\Sigma_c$  é estritamente estável.
2. Para  $T = T_0$ , o operador  $\mathcal{J}_c$  é não negativo e tem o zero como autovalor simples. Daí o domínio  $\Sigma_c$  é estável.
3. Para  $T_0 < T$ , o operador  $\mathcal{J}_c$  tem exatamente um autovalor negativo e o resto positivos. Daí  $\Sigma_c$  é instável e tem índice 1.

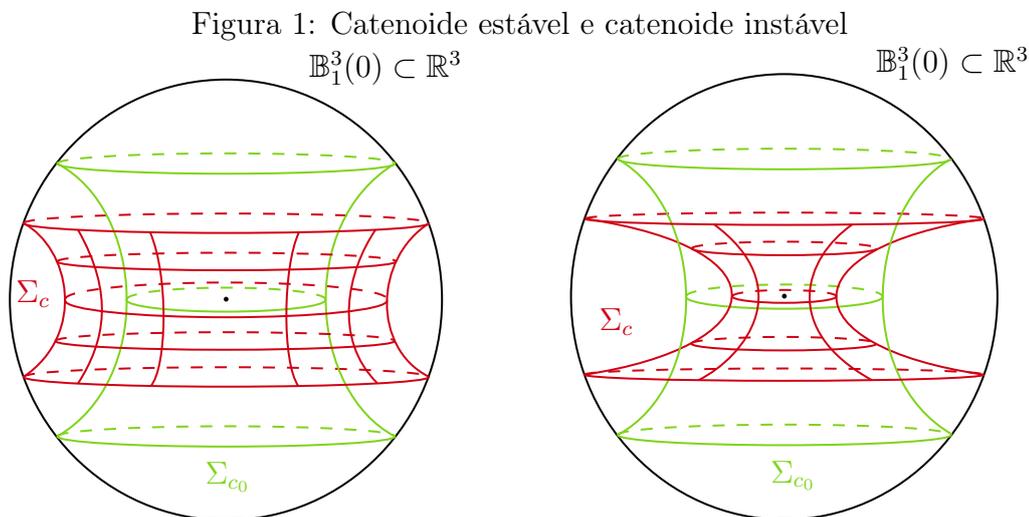
Adaptamos o resultado anterior para o caso de catenoides capilares imersos na bola unitária ( $0 < c < 1$ ). Se  $c(T_0) = c_0$ , então podemos dividir a família dos catenoides  $\{\Sigma_c\}_{0 < c < 1}$  imersos na bola unitária  $\Sigma_c \subset \mathbb{B}_1^3(0)$ , em duas subfamílias  $\{\Sigma_c\}_{0 < c < c_0}$  e

$\{\Sigma_c\}_{c_0 \leq c < 1}$ . Na seguinte proposição, conseguimos classificar essas famílias como domínios instáveis e estáveis, respectivamente.

**Proposição 0.1.** *Sejam  $T_0$  o zero positivo da função  $e(t) = 1 - t \tanh t$  e  $\{\Sigma_c\}_{0 < c < 1}$  a família de catenoides imersas em  $\mathbb{B}_1^3(0)$  dadas pela parametrização (6), onde  $c = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}}$ . Então*

1. *Se  $0 < c < c_0$ , a catenóide capilar  $\Sigma_c$  é instável.*
2. *Se  $c = c_0$ , a catenóide  $\Sigma_{c_0}$  (catenóide crítico) é fracamente estável.*
3. *Se  $c_0 < c < 1$ , a catenóide capilar  $\Sigma_c$  é estritamente estável.*

Considerando  $\Sigma_{c_0}$  a catenóide crítica, na figura 1 representamos. No lado esquerdo, a catenóide estável (onde  $c_0 < c < 1$  e de cor vermelho), em relação à catenóide crítica (verde) e, no lado direito a uma catenóide instável (onde  $0 < c < c_0$  e de cor vermelho), em relação à catenóide crítica (verde).



Fonte: Elaborado pelo autor.

### Índice do catenóide capilar imerso na bola unitária.

Nos últimos anos, estudos têm sido realizados sobre estimativa do índice de Morse de superfícies de fronteira livre imersos na bola unitária. Particularmente o índice da catenóide crítica foi encontrado com sucesso. Dentre os trabalhos que abordaram esses

temas podemos citar: Tran em [21], Simth-Zhou em [18] e Devyver em [6]. Em concreto, eles mostraram para o caso de  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , o índice de  $\Sigma_{c_0}$  é exatamente 4, e o resultado é.

**Teorema 0.4.** (Tran (2022) [21, Theorem 4.3])

*A catenoide crítica  $\Sigma_{c_0}$  tem o índice de Morse igual a 4 e nulidade 3.*

Levando em conta o Teorema 0.1, Proposição 0.1, Teorema 0.2 e seguindo as ideias do trabalho de Tran [21], conseguimos estimar o índice de Morse da catenoide capilar contida na bola unitária  $\Sigma_c \subset \mathbb{B}_1^3(0)$ , para todo  $\theta \in (0, \pi)$ . Nosso resultado é.

**Teorema 0.5.** *Seja  $\{\Sigma_c\}_{0 < c < 1}$  a família de catenoides capilares imersas na bola unitária  $\mathbb{B}_1^3(0)$  centrada na origem dados por (6), onde  $c = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}}$ . Temos os seguintes casos:*

1. Se  $0 < T \leq T_1$ , onde  $\frac{1}{\sinh^2 T_1} = 1$ , então

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = 3. \quad (10)$$

2. Se  $T_1 < T < T_0$ , onde  $T_0$  é o zero positivo da função  $e(t) = 1 - t \tanh t$ , então

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = 4. \quad (11)$$

3. Se  $T = T_0$ , então  $c = \frac{1}{T_0 \cosh T_0}$ ,  $\Sigma_c$  é o catenoide crítico e

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = 4. \quad (12)$$

4. Se  $T_0 < T \leq T_2$ , onde  $\frac{\sinh T_2 \cosh T_2 + T_2}{\sinh T_2 (T_2 \sinh T_2 - \cosh T_2)} = 1$ , então

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = 6. \quad (13)$$

5. Se  $T_2 < T$ , então

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = 7. \quad (14)$$

*En particular, não existe catenoide capilar do índice de Morse igual a 5.*

Em suma, a prova do resultado consiste em analisar os autovalores do problema de Jacobi-Steklov, dados no Teorema 0.2, e do problema de bordo fixo dados pelo Teorema 0.3. Nosso resultado anterior nos sugere falar sobre muitas questões interessantes, por exemplo caracterizar as superfícies mínimas capilares topologicamente um anel contidas na bola unitária, que possui índice de Morse 3, 4, 6 e 7. O caso de uma superfície mínima de fronteira livre que tem índice de Morse 4 já foi feito por H. Tran.

**Teorema 0.6.** (H. Tran (2022) [21, Corollary 3.11] )

*Suponhamos que  $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^2(0)$  é uma superfície mínima de fronteira livre mergulhada topologicamente um anel, com índice de Morse 4. Então  $\Sigma$  é congruente ao catenoide crítico.*

Na verdade, na literatura existe a seguinte conjectura dada por Fraser-Li [8, Conjecture 1.1]: **Se  $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$  uma superfície mínima de fronteira livre mergulhada na bola euclidiana unitária que é topologicamente um anel, então  $\Sigma$  é congruente ao catenoide crítico?** Alguns resultados parciais da conjectura foram provados por Fraser-Schoen em [9, Theorem 1.2], com a hipótese que se, as funções coordenadas do vetor posição são as primeiras autofunções de Steklov, então  $\Sigma$  é congruente ao catenoide crítico. McGrath em [13, Theorem 1] obteve outro resultado parcial assumindo que  $\Sigma$  seja invariante sob reflexão através de três hiperplanos ortogonais  $\Pi_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , então  $\Sigma$  é congruente ao catenoide crítico. O Teorema 0.6 também é um resultado parcial da conjectura, só que neste caso tem o conceito de índice de Morse como hipótese adicional.

Da conjectura dada por Fraser-Li [8, Conjecture 1.1], é natural se perguntar, o que acontece se  $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  é uma superfície mínima capilar. Esperamos que, para o caso de superfícies mínimas capilares mergulhadas topologicamente um anel  $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^3(0)$ , tenhamos uma caracterização semelhante ao Teorema 0.6. Isto é: se  $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  é uma superfície mínima capilar mergulhada topologicamente um anel, com índice de Morse 3 (4, 6 ou 7), então  $\Sigma$  é congruente ao catenoide capilar.

## Aplicação normal de Gauss em uma hipersuperfície mínima capilar.

No capítulo 3 de nosso trabalho, estudaremos a aplicação normal de Gauss em uma hipersuperfícies mínimas capilares imersos na bola unitária Euclidiana. Basicamente

seguiremos as ideias do trabalho de Tran em [20]. Os resultados que obtivemos são:

**Proposição 0.2.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima capilar imersa na bola unitária. Suponhamos que as funções coordenadas do campo normal  $N = (N_1, \dots, N_{n+1})$  ao longo de  $\partial\Sigma^n$  satisfazem:*

$$D_\nu N_i = \lambda_i q N_i, \quad (15)$$

para todo  $i = 1, \dots, n+1$ , em que  $\lambda_i$  são constantes e  $q = \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta A(\nu, \nu)$ .

1. Se  $\lambda_i = 0$  para algum  $i$ , então  $H^{\partial\Sigma} = -\frac{n-1}{\sin \theta}$  ou  $x_i = cte$  em  $\partial\Sigma^n$ .
2. Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = \lambda$ , então  $\lambda = 0$  e  $H^{\partial\Sigma} = -\frac{n-1}{\sin \theta}$ .
3. Se  $\lambda_i \neq 0$  para cada  $i$ , então  $q \neq 0$  e  $A(\nu, \nu) \neq 0$  em todo ponto de  $\partial\Sigma^n$ .

Uma consequência da Proposição anterior é que podemos caracterizar as hipersuperfícies que satisfazem (15). Nosso próximo resultado mostra exatamente isso.

**Teorema 0.7.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima capilar, sendo  $\theta \in (0, \pi)$  o ângulo de interseção de  $\Sigma^n$  e  $\mathbb{S}^n$ . Assuma que as funções coordenadas do campo normal  $N$  em  $\Sigma^n$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov, isto é  $D_\nu N_i = \lambda_i q N_i$  para todo  $i$ . Temos os seguintes casos.*

1. Se  $\lambda_i = 0$  para algum  $i$ , então  $\Sigma^n$  é um  $n$ -disco totalmente geodésico ou cada componente conexa de  $\partial\Sigma^n \subset \mathbb{S}^n$  é totalmente umbílica.
2. Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = \lambda$ , então cada componente conexa de  $\partial\Sigma^n \subset \mathbb{S}^n$  é totalmente umbílica.
3. Se  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$ , então para  $x \in \partial\Sigma^n$  existe uma vizinhança de  $x$  tal que as funções coordenadas do vetor posição são dadas por:

$$x_i(u_1, \dots, u_{n-1}) = \sin \theta (b_{0i} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji} u_j)^{1/2} - \cos \theta \frac{1}{\lambda_i q^2} \left( \frac{b_{0i} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji} u_j}{P_0 + \sum_{j=1}^{n-1} P_j u_j} \right)^{1/2} \quad (16)$$

onde  $b_{ij}, P_j \in \mathbb{R}$  e  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  são os parâmetros.

Para o caso particular  $n = 2$  e os item 1 e 2 do Teorema 0.7, conseguimos classificar as superfícies mínimas capilares contidas na bola unitária Euclidiana satisfazendo (15). No resultado a seguir mostramos o mencionado.

**Corolário 1.** *Seja  $\Sigma^2 \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  uma superfície mínima capilar. Se as funções coordenadas do campo normal a  $\Sigma^2$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov tal que  $\lambda_i = 0$  para algum  $i = 1, 2, 3$ , então  $\Sigma^2$  é um disco totalmente geodésico.*

Observarmos que na catenoide os autovalores associados às funções de coordenadas  $N_1$  e  $N_2$  do campo normal são iguais, isto é,  $\lambda_1 = \lambda_2$  (veja Proposição 2.2). O que nos leva a perguntar o seguinte: Se dois autovalores associados às funções coordenadas do campo normal  $N$  são iguais, então  $\Sigma^2$  é o catenoide? A resposta é sim, e a seguir apresentaremos os resultados que afirmam o dito anteriormente. Nosso próximo resultado é para o caso geral com a hipótese: se todos os autovalores associados às funções coordenadas do campo normal forem iguais e apenas um deles for diferente, então cada componentes conexa do bordo é interseção de um plano com a esfera unitária.

**Teorema 0.8.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima capilar, sendo  $\theta \in (0, \pi)$  ângulo de interseção de  $\Sigma^n$  e  $\mathbb{S}^n$ . Assuma que as funções coordenadas do campo normal  $N$  a  $\Sigma^n$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov, tal que  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$  e  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{n+1}$ , então ao longo de cada componente conexa de  $\partial\Sigma^n$  a função  $x_j$  é constante.*

Uma consequência do teorema anterior é que pode-se afirmar que  $\Sigma^n$  tem pelo menos duas componentes conexas de bordo (veja a Observação 5).

Para o caso  $n = 2$  e  $\lambda_1 = \lambda_2$ , pelo Teorema 0.8 tem-se que uma componente conexa do bordo é um círculo plano, o que será suficiente para garantir que  $\Sigma^2$  é uma catenoide capilar. Nosso seguinte resultado afirma exatamente isso.

**Corolário 2.** *Seja  $\Sigma^2 \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  uma superfície mínima capilar. Assuma que as funções coordenadas do campo normal  $N$  a  $\Sigma^2$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov, tal que  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, 2, 3$  e  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Então  $\Sigma^2$  é uma catenoide capilar.*

Nos corolários 1 e 2, conseguimos classificar as superfícies capilares mínimas que satisfaziam (3.4). No entanto, ainda está pendente demonstrar um resultado que generalize o teorema que H. Tran obteve. O resultado que obteve é.

**Teorema 0.9.** (Tran (2019) [20, Theorem 1.1])

*Seja  $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$  uma superfície mínima de fronteira livre tal que as funções coordenadas do campo normal  $N$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov. Então  $\Sigma$  é rotacionalmente simétrico.*

Esperando no futuro provar a seguinte questão: assuma que  $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$  é uma superfície mínima capilar tal que as funções coordenadas do campo normal  $N$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov. Então  $\Sigma$  é rotacionalmente simétrico? Se a questão anterior for provada, teremos uma generalização do Teorema 0.9.

## Estimativa do índice de Morse de uma hipersuperfície mínima capilar.

Na última parte, apresentaremos alguns resultados relacionados ao índice de Morse sobre uma hipersuperfície mínima capilar contida na bola unitária  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$ . Também, faremos estudo do índice e estabilidade em subespaços especiais de  $C^\infty(\Sigma^n)$ .

Sejam  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima capilar imersa na bola unitária centrada na origem e a forma bilinear simétrica  $Q$  induzida pela segunda variação de energia (veja a equação 1.55)

$$Q(\psi, \varphi) = - \int_{\Sigma} \psi \mathcal{J} \varphi d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \psi (D_\nu \varphi - q\varphi) d\partial\Sigma, \quad (17)$$

onde  $q = \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta A(\nu, \nu)$ ,  $\mathcal{J} = \Delta_\Sigma + |A|^2$  e  $\psi, \varphi \in C^\infty(\Sigma)$ . Na última década, a forma bilinear simétrica  $Q$  levou ao estudo do índice de Morse e estabilidade de hipersuperfícies mínimas capilares. Dentre os que obtiveram estimativas do índice do Morse, podemos citar o trabalho de Ambrozio-Carlotto-Sharp [2]. Especificamente, eles obtiveram o seguinte resultado para o caso de fronteira livre ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ).

**Teorema 0.10.** (Ambrozio-Carlotto-Sharp (2018) [2, Theorem A])

*Seja  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$  um domínio compacto estritamente mean convexo ( $H > 0$ ), com  $n \geq 2$ . Se  $\Sigma^n \subset B$  é uma hipersuperfície mínima de fronteira livre, orientável e propriamente*

imersa em  $B$ , então

$$\text{Ind}(\Sigma^n) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_1(\Sigma^n, \partial\Sigma, \mathbb{R}), \quad (18)$$

onde  $H_1(\Sigma^n, \partial\Sigma, \mathbb{R})$  denota o primeiro grupo de homologia com coeficientes reais.

Em particular, obtiveram uma estimativa para o índice em termos do número de componentes conexas do bordo.

**Corolário 3.** (Ambrozio-Carlotto-Sharp [2, Corollary B]) *Seja  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$  um domínio compacto estritamente mean convexo, com  $n \geq 3$ . Se  $\Sigma^n \subset B$  é uma hipersuperfície mínima de fronteira livre, orientável e propriamente imersa em  $B$  com  $r \geq 1$  componentes conexas de bordo, então*

$$\text{Ind}(\Sigma^n) \geq \frac{2}{n(n+1)}(r-1). \quad (19)$$

As demonstrações dos resultados acima estão baseadas na análise de função teste, tais funções são definidas em termos de 1-formas harmônicas. Uma generalização significativa do Teorema 0.10 foi feita por Guo-Xia em [24] que, seguindo a mesma ideia de Ambrozio-Carlotto-Sharp em [2], eles encontraram uma estimativa do índice de Morse para o caso de hipersuperfícies mínimas capilares. O resultado é:

**Teorema 0.11.** (Guo-Xia (2021) [10, Corollary 1.1]) *Seja  $B \subset \mathbb{R}^{n+1}$  um domínio compacto estritamente mean convexo, com  $n \geq 2$ . Se  $\Sigma^n \subset B$  é uma hipersuperfície mínima capilar, orientável e propriamente imersa em  $B$ , então*

$$\text{Ind}(\Sigma^n) \geq \frac{2}{n(n+1)} \dim H_1(\Sigma^n, \partial\Sigma, \mathbb{R}) - 1, \quad (20)$$

onde  $H_1(\Sigma^n, \partial\Sigma, \mathbb{R})$  denota o primeiro grupo de homologia com coeficientes reais.

Continuando nesta linha de pesquisa, encontramos duas identidades para certas funções teste que tem propriedades interessantes em  $\partial\Sigma^n$  e  $\Sigma^n$ . Assim, começamos mostrando a proposição.

**Proposição 0.3.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima contida na bola unitária-*

ria, tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\mathbb{S}^n$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então

$$Q(N_a, N_a) = -\frac{n}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} N_a^2 d\Sigma + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma \quad (21)$$

$$Q(\psi_a, \psi_a) = -\int_{\Sigma} |A|^2 \langle x, a \rangle^2 d\Sigma - \cos \theta \int_{\Sigma} |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma, \quad (22)$$

onde  $N_a = \langle N, a \rangle$ ,  $\psi_a = \langle x + \cos \theta N, a \rangle$  e  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante.

Da proposição anterior, podemos observar que quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , tem-se

$$Q(N_a, N_a) = -n \int_{\Sigma} \langle N, a \rangle^2 d\Sigma < 0.$$

Então para  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , as funções coordenadas do campo normal  $N_1, \dots, N_{n+1}$  satisfazem

$$Q(N_i, N_i) = -n \int_{\Sigma} \langle N, e_i \rangle^2 d\Sigma < 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n+1.$$

Assim, para  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  de fronteira livre não plana, as funções coordenadas do campo normal  $N_1, \dots, N_{n+1}$  contribuem ao índice de  $\Sigma^n$ . São exatamente as funções que foram usadas por Tran em [21], para provar o seguinte resultado.

**Teorema 0.12.** (Tran (2019) [21, Corollary 2.10])

Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima de fronteira livre, não plana. Então

$$\text{Ind}(\Sigma^n) \geq n + 1. \quad (23)$$

Vale mencionar aqui, que a estimativa anterior do índice de Morse foi provada pela primeira vez por Fraser-Schoen em [9, Theorem 3.1], especificamente eles mostraram que se  $\Sigma^k \subset \mathbb{B}_1^n(0)$  é uma superfície mínima de fronteira livre não plana com  $k < n$ , então o índice de  $\Sigma^k$  é pelo menos  $n$ . Por outro lado, estudo do índice e estabilidade em subespaços de  $C^\infty(\Sigma^n)$  são muito frequentes. Dentre os trabalhos que existem na literatura, podemos citar [23], [10] e [24], onde fazem o estudo da estabilidade e do índice nos subespaços

$$Z = \left\{ u \in C^\infty(\Sigma^n) : \int_{\Sigma} u d\Sigma = 0 \right\} \text{ e } U = \left\{ u \in C^\infty(\Sigma^n) : \int_{\partial\Sigma} u d\partial\Sigma = 0 \right\},$$

que eles estão relacionados aos problemas de particionamento tipo I e II, respectivamente (veja Capítulo 4). Guo-Xia em [10, Theorem 3.1] e Wang-Xia em [24, Theorem 3.1] mostraram o seguinte resultado.

**Teorema 0.13.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície contida na bola unitária com  $n \geq 2$ , tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\mathbb{S}^n$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então,  $\Sigma^n$  é estacionária estável do tipo-II se é um  $n$ -disco totalmente geodésico.*

Uma motivação da Proposição 0.3 é que, as identidades nos permite fornecer uma demonstração diferente do Teorema 0.13, das fornecidas por Guo-Xia em [10] e Wang-Xia em [24]. Para o caso de  $\Sigma^n$  seja mínima estável de tipo I, também temos que  $\Sigma^n$  é um  $n$ -disco totalmente geodésico (veja a Observação 8).

# Capítulo 1

## PRELIMINARES

Nesse capítulo fixaremos notações e daremos uma descrição geral dos conceitos básicos necessários para os capítulos seguintes. As principais referências, citamos [7] e [11], as demais referências necessárias serão inseridas no decorrer do texto.

### 1.1 Conceitos básicos

Seja  $(M^{n+1}, \bar{g})$  uma variedade Riemanniana com a métrica  $\bar{g}$ . O teorema de Levi-Civita garante a existência de uma única aplicação denominada conexão Riemanniana de  $M^{n+1}$  ou derivada covariante. Uma conexão  $\bar{\nabla}$  em  $M^{n+1}$  é uma aplicação

$$\begin{aligned}\bar{\nabla} : \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathfrak{X}(M) \\ (X, Y) &\longrightarrow \bar{\nabla}_X Y,\end{aligned}$$

onde  $\mathfrak{X}(M)$  é o conjunto de campos vetoriais diferenciáveis em  $M^{n+1}$ , que satisfaz as seguintes propriedades

- $\bar{\nabla}_{fY+hZ}X = f\bar{\nabla}_YX + h\bar{\nabla}_ZX.$
- $\bar{\nabla}_YfX = Y(f)X + f\bar{\nabla}_YX$
- $\bar{\nabla}_Y(X+Z) = \bar{\nabla}_YX + \bar{\nabla}_YZ.$
- $\bar{\nabla}_XY - \bar{\nabla}_YX = [X, Y]$
- $X(\bar{g}(Y, Z)) = \bar{g}(\bar{\nabla}_XY, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_XZ)$

para todo campo de vetores  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  e para as funções  $f, h \in C^\infty(M)$ , em que  $[X, Y] = XY - YX$  denota o colchete de Lie dos campos  $X$  e  $Y$ . A conexão  $\bar{\nabla}$  nos permite estudar várias propriedades geométricas e topológicas impostas pela métrica  $\bar{g}$  sobre  $M^{n+1}$ , como as geodésicas. Mas a principal ferramenta na geometria que permite estudar as propriedades com mais detalhes de uma variedade Riemanniana é o conceito de curvatura. O endomorfismo de curvatura em  $M^{n+1}$  é um campo tensorial

$$\bar{R} : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

e definido por:

$$\bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X, Y]} Z. \quad (1.1)$$

**Definição 1.1.** *Dada uma variedade Riemanniana  $(M^{n+1}, \bar{g})$ , o tensor curvatura em  $M^{n+1}$  é uma aplicação*

$$R : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow C^\infty(M)$$

definido por

$$R(X, Y, Z, W) = \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, W). \quad (1.2)$$

O tensor curvatura nos permite definir a curvatura seccional em  $M^{n+1}$  em  $p$  no plano bi-dimensão  $\sigma_p \subset T_p M$  e dado por:

$$K(E_1, E_2) = \bar{g}(\bar{R}(E_1, E_2)E_2, E_1),$$

onde  $\{E_1, E_2\}$  é uma base ortonormal de  $\sigma_p \subset T_p M$ .

**Definição 1.2.** *Seja uma variedade Riemanniana  $(M^{n+1}, \bar{g})$ , o tensor simétrico dado por:*

$$\text{Ric}(X, Y) = \sum_{i=1}^{n+1} \bar{g}(\bar{R}(E_i, X)Y, E_i)$$

é chamado de tensor de Ricci, onde  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  e  $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$  é uma base ortonormal do plano tangente  $T_p M$ .

Agora, fixado um campo vetorial unitário  $N$ , tal que o conjunto  $\{E_1, \dots, E_n, N_p\}$  seja um base ortonormal para  $T_p M$ . Tem-se a curvatura de Ricci em  $p$  na direção de  $N$

por:

$$\text{Ric}(N, N) = \sum_{i=1}^n \bar{g}(\bar{R}(E_i, N)N, E_i) = \sum_{i=1}^n K(N, E_i). \quad (1.3)$$

Em outras palavras, para cada vetor unitário  $N_p \in T_p M$ ,  $\text{Ric}(N, N)$  é a soma das curvaturas seccionais de planos gerados por  $N$  e os outros vetores de uma base ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\}$ .

**Definição 1.3.** *Dada uma variedade Riemanniana  $(M^{n+1}, \bar{g})$ , a curvatura escalar de  $M$  em  $p$  é definida por:*

$$S = \sum_{i=1}^{n+1} \text{Ric}(E_i, E_i) = \sum_{i \neq j} K(E_i, E_j)$$

onde o conjunto  $\{E_1, \dots, E_{n+1}\}$  é uma base ortonormal de  $T_p M$ .

Em outras palavras, a curvatura escalar é a soma de todas as curvaturas seccionais de planos gerados por pares de vetores de uma base ortonormal.

## 1.2 Imersões e subvariedades Riemannianas

Sejam  $(M^{n+1}, \bar{g})$  uma variedade Riemanniana e se  $\Sigma^k$  é uma variedade diferenciável tal que existe uma imersão  $\phi : \Sigma^k \rightarrow M^{n+1}$ , e  $\Sigma^k$  é dotada da métrica induzida por esta imersão, então dizemos que é uma imersão isométrica de  $(\Sigma^k, g)$  em  $(M^{n+1}, \bar{g})$  e assim, chamamos  $\Sigma^k$  de subvariedade de  $M^{n+1}$ .

**Definição 1.4.** *Sejam  $(\Sigma^k, g)$  uma variedade Riemanniana e  $(M, \bar{g})$  sua variedade ambiente. Então, para cada  $p \in \Sigma^k$  o produto interno em  $T_p M$  decompõe este espaço na soma direta*

$$T_p M = T_p \Sigma \oplus T_p \Sigma^\perp,$$

onde  $T_p \Sigma^\perp$  é o complemento ortogonal de  $T_p \Sigma$  em  $T_p M$ .

A conexão Riemanniana de  $\Sigma^k$  com respeito à métrica induzida de  $M^{n+1}$  é dada por:

$$\nabla_X Y = (\bar{\nabla}_X Y)^\top$$

onde  $X, Y \in \mathfrak{X}(\Sigma^k)$ . Um conceito importante associado à geometria de  $\Sigma^k$ , induzida pela geometria de  $(M^{n+1}, \bar{g})$ , é o da segunda forma fundamental.

**Definição 1.5.** *Seja  $\Sigma^k \hookrightarrow M^{n+1}$  uma subvariedade de  $M^{n+1}$ . A segunda forma fundamental de  $\Sigma^k$  em  $M^{n+1}$  é uma aplicação bilinear simétrica definida por:*

$$B(X, Y) = (\bar{\nabla}_X Y)^\perp = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y. \quad (1.4)$$

Embora a segunda forma fundamental seja definida em termos de derivadas covariantes de campos vetoriais tangentes a  $\Sigma^k$ , ela também pode ser usada para calcular derivadas covariantes de campos vetoriais normais a  $\Sigma^k$ . Para um campo vetorial normal unitário  $N$  a  $\Sigma^k$ , podemos então definir uma forma bilinear simétrica por:

$$\begin{aligned} \Pi_N : \mathfrak{X}(\Sigma) \times \mathfrak{X}(\Sigma) &\longrightarrow C^\infty(\Sigma) \\ (X, Y) &\longrightarrow \Pi_N(X, Y) = \bar{g}(B(X, Y), N). \end{aligned}$$

A Equação de Weingarten relaciona a forma bilinear  $\Pi_N$  com a derivada covariante através da expressão:

$$\Pi_N(X, Y) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_X N, Y) \quad (1.5)$$

e para  $p \in \Sigma^k$  e um vetor normal unitário  $N_p$  a  $T_p \Sigma^k$  a aplicação linear auto-adjunta associada é  $A_N : T_p \Sigma^k \rightarrow T_p \Sigma^k$  que cumpre  $g(A_N(X), Y) = \bar{g}(B(X, Y), N)$ . Decorre de (1.5) que

$$A_N(X) = -(\bar{\nabla}_X N)^\top.$$

**Observação 1.** Para  $p \in \Sigma^k$  e um vetor unitário normal  $N \in (T_p \Sigma)^\perp$ .

- As aplicações  $A_N$  e  $\Pi_N$  são conhecidos como a segunda forma fundamental de  $\Sigma^k$  seguindo o vetor normal  $N$ .
- Quando  $k = n$ , existe apenas uma escolha para vetor normal  $N$  ou  $-N$ , assim, denotaremos nos capítulos posteriores a segunda forma fundamental por  $A(X) = -(\bar{\nabla}_X N)^\top$  e  $A(X, Y) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_X N, Y)$ .

Dado um ponto  $p \in \Sigma^n$  e um plano  $\sigma \subset T_p \Sigma^n \subset T_p M$  gerado por vetores ortonormais  $\{E_1, E_2\}$ , as curvaturas seccionais intrínsecas de  $\Sigma^n$  e  $M^{n+1}$  na direção de  $\sigma$  são relacionadas pela segunda forma fundamental através da equação de Gauss:

$$K_M(\sigma) - K_\Sigma(\sigma) = |A(E_1, E_2)|^2 - \bar{g}(A(E_1, E_1), A(E_2, E_2)). \quad (1.6)$$

Para uma base  $\{E_1, \dots, E_k\}$  ortonormal de  $T_p\Sigma$ . Definimos o vetor curvatura média de  $\Sigma^k$  em  $p$  por:

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^k B(E_i, E_i) \quad (1.7)$$

e o quadrado da norma da segunda forma fundamental é

$$|B|^2 = \sum_{i,j=1}^k |B(E_i, E_j)|^2. \quad (1.8)$$

Agora, se consideremos uma imersão  $\Sigma^n \rightarrow M^{n+1}$  de codimensão um, isto é  $k = n$ . Então, para  $p \in \Sigma^n$ , uma base  $\{E_1, \dots, E_k\}$  ortonormal de  $T_p\Sigma$  e um vetor normal  $N \in (T_p\Sigma)^\perp$  a curvatura média é definido

$$H = \sum_{i=1}^n \bar{g}(A_N(E_i), E_i) = \sum_{i=1}^n \bar{g}(-\bar{\nabla}_{E_i} N, E_i). \quad (1.9)$$

Dizemos que  $\Sigma^n$  é uma hipersuperfície CMC se tem curvatura média constante  $H \equiv c$  para algum  $c \in \mathbb{R}$ . De maneira semelhante definimos o quadrado da norma da segunda forma fundamental por

$$|A|^2 = \sum_{ij=1}^n |\Pi(E_i, E_j)|^2. \quad (1.10)$$

Seja  $X \in \mathfrak{X}(\Sigma)$  um campo vetorial, definimos o divergente de  $X$  sobre  $\Sigma^n$  como uma aplicação  $\text{div}_\Sigma : \mathfrak{X}(\Sigma) \rightarrow C^\infty(\Sigma)$  dada por:

$$\text{div}_\Sigma(X) = \sum_{i=1}^n \bar{g}(\nabla_{E_i} X, E_i) \quad (1.11)$$

onde  $\{E_1, \dots, E_n\}$  é uma base ortonormal de  $T_p\Sigma$ .

Para uma função  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$  infinitamente diferenciável, definimos o gradiente de  $f$  como sendo um vetor  $\bar{\nabla} f$  que cumpre

$$\bar{g}(\bar{\nabla} f, v) = df_p(v) = v(f) \quad \text{para todo } v \in T_pM. \quad (1.12)$$

Sejam  $\Sigma^n \hookrightarrow M^{n+1}$  uma imersão isométrica e  $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ . Então o gradiente de  $f$  restrito

a  $\Sigma^n$  e denotaremos por  $\nabla f$  é dado pela projeção de  $\bar{\nabla} f$  sobre  $T_p \Sigma^n$ , isto é

$$\nabla f = (\bar{\nabla} f)^\top = \bar{\nabla} f - (\bar{\nabla} f)^\perp.$$

O operador laplaciano restrito a  $\Sigma^n$  e denotaremos por  $\Delta_\Sigma$  e é definido por

$$\Delta_\Sigma f = \operatorname{div}_\Sigma(\nabla f). \quad (1.13)$$

Em termos de um referencial ortonormal  $\{E_1, \dots, E_n\} \subset \mathfrak{X}(U)$ , onde  $U$  é uma vizinhança de  $p$  em  $\Sigma^n$  temos

$$\Delta f = \operatorname{div}_\Sigma(\nabla f) = \sum_{i=1}^n g(\nabla_{E_i} \nabla f, E_i) = \sum_{i=1}^n (E_i(E_i(f)) - \nabla_{E_i} E_i(f)). \quad (1.14)$$

### 1.3 Primeira e segunda fórmula de variação de energia

Seja  $(M^{n+1}, \bar{g})$  uma variedade Riemanniana orientável  $(n+1)$ -dimensional e  $B$  um domínio compacto suave em  $M$  que é difeomorfo à bola Euclidiana. Seja  $x : (\Sigma^n, g) \rightarrow B$  uma imersão isométrica de uma variedade compacta  $n$ -dimensional  $\Sigma^n$  com bordo  $\partial \Sigma^n \neq \emptyset$  em  $B$ , que leva pontos de  $\operatorname{int}(\Sigma^n)$  em  $\operatorname{int}(B)$  e  $\partial \Sigma^n$  em  $\partial B$ .

**Definição 1.6.** *Uma variação admissível de  $\Sigma^n$  em  $M$  é uma aplicação diferenciável  $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^n \rightarrow B \subset M$  tal que para cada  $t$   $\phi_t : \Sigma^n \rightarrow B$  é uma imersão satisfazendo  $\phi_t(\operatorname{int}(\Sigma)) \subset \operatorname{int}(B)$  e  $\phi_t(\partial \Sigma) \subset \partial B$  e para  $t = 0$   $\phi_0 = x$ .*

Vamos considerar para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$   $\Sigma_t = \phi_t(\Sigma)$ , então para uma variação admissível, o funcional de área  $A : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  e o funcional de volume  $V : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  são definidos por:

$$A(t) = \int_{\Sigma} d\Sigma_t \quad (1.15)$$

$$V(t) = \int_{[0,t] \times \Sigma} \phi^* dM, \quad (1.16)$$

onde  $d\Sigma_t$  é o elemento de área de  $\Sigma^n$  em relação à métrica induzida por  $\phi_t$  e  $\phi^* dM$  denota o pullback do elemento de volume em  $(M, \bar{g})$ . Dizemos que uma variação preserva o volume

se  $V(t) = V(0) = 0$  para cada  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . Outro funcional, chamado o funcional da área molhada  $W : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por:

$$W(t) = \int_{[0,t] \times \partial\Sigma} \phi^* dA_{\partial B}, \quad (1.17)$$

onde  $dA_{\partial B}$  é o elemento de área de  $\partial B$ . Finalmente, fixando um número real  $\theta \in (0, \pi)$ , o funcional energia  $E : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  é definido por:

$$E(t) = A(t) - \cos \theta W(t). \quad (1.18)$$

Usaremos a seguinte notação:  $N$  campo vetorial ortonormal ao longo de  $\Sigma^n$ ,  $\nu$  campo co-normal exterior a  $\partial\Sigma^n$  e tangente a  $\Sigma^n$ ,  $\bar{N}$  campo ortonormal a  $\partial B$  e  $\bar{\nu}$  campo ortonormal a  $\partial\Sigma^n$  e tangente a  $\partial B$ . De modo que,  $\{N, \nu\}$  e  $\{\bar{\nu}, \bar{N}\}$  possuem a mesma orientação no fibrado normal  $T\partial\Sigma^\perp$  em  $M^{n+1}$  (veja Figura 1.1).

**Teorema 1.1.** (Primeira fórmula de variação de área [1, Proposition 14]) *Sejam  $x : \Sigma^n \rightarrow B$  uma imersão e  $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^n \rightarrow B$  uma variação tal que o campo variacional será denotado por  $Y = \frac{\partial\phi}{\partial t}(0, x)$ . Então*

$$A'(0) = \int_{\Sigma} H\bar{g}(Y, N)d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \nu)d\partial\Sigma \quad (1.19)$$

e

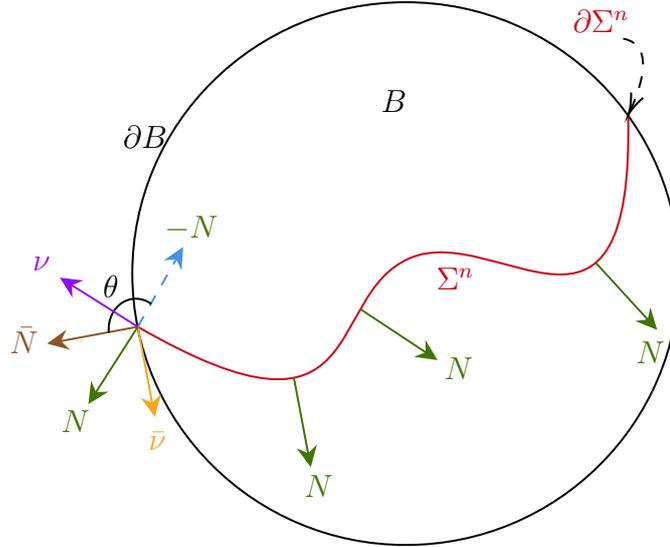
$$W'(0) = \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \bar{\nu})d\partial\Sigma, \quad (1.20)$$

onde  $N$  é o campo normal a  $\Sigma^n$ ,  $\nu$  é o campo co-normal exterior ao bordo  $\partial\Sigma^n$  e tangente a  $\Sigma^n$  e  $\bar{\nu}$  é normal a  $\partial\Sigma^n$  e tangente a  $\partial B$  (veja a Figura 1.1).

Dizemos que uma variação admissível  $\phi$  que preserva o volume, se  $V(t) = V(0) = 0$  para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ . De (1.19) e (1.20) a primeira fórmula de variação de  $V(t)$  e  $E(t)$  para uma variação admissível com campo vetorial variacional  $Y = \frac{\partial\phi}{\partial t}(0, x)$  são dados por:

$$V'(0) = \int_{\Sigma} \bar{g}(Y, N)d\Sigma \quad (1.21)$$

$$E'(0) = \int_{\Sigma} H\bar{g}(Y, N)d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \nu - \cos \theta \bar{\nu})d\partial\Sigma, \quad (1.22)$$

Figura 1.1: Hipersuperfície capilar,  $\Sigma^n = x(\Sigma^n)$  e  $\partial\Sigma^n = x(\partial\Sigma^n)$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

onde  $H$  é a curvatura média de  $\Sigma^n$  e todas os elementos de volume nos integrandos são as induzidas por  $\phi$  nos respectivos domínios de integração com relação à métrica de  $M^{n+1}$ . Assim, dizemos que uma imersão  $x : \Sigma^n \rightarrow B$  é capilar se  $x$  é ponto crítico do funcional energia  $E$  para qualquer variação admissível  $\phi : (-\epsilon, \epsilon) \times \Sigma^n \rightarrow B$  que preserva o volume. Das fórmulas (1.21) e (1.22) temos que,  $\Sigma^n$  é capilar se e somente se, a curvatura média  $H$  é constante e o ângulo  $\theta$  determinado por  $\nu$  e  $\bar{\nu}$  chamado ângulo de contato de  $\Sigma^n$  com  $\partial B$  é constante. Para ser mais preciso, no fibrado normal  $T\partial\Sigma^\perp$ , temos as seguintes identidades:

$$\nu = \sin \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu} \quad (1.23)$$

$$N = -\cos \theta \bar{N} + \sin \theta \bar{\nu}, \quad (1.24)$$

ou equivalentemente

$$\bar{N} = \sin \theta \nu - \cos \theta N \quad (1.25)$$

$$\bar{\nu} = \cos \theta \nu + \sin \theta N. \quad (1.26)$$

Nesse contexto, uma hipersuperfície  $\Sigma^n$  é de fronteira livre se  $H \equiv 0$  e o ângulo de contato de  $\Sigma^n$  com  $\partial B$  é  $\theta = \frac{\pi}{2}$ . A seguir apresentaremos a segunda fórmula de variação da funcional área, para o caso particular em que a variação preserva a área molhada. Dizemos que uma variação admissível  $\phi$  preserva a área molhada se  $W(t) = W(0) = 0$

para todo  $t \in (-\epsilon, \epsilon)$ .

Para  $Y \in \mathfrak{X}(\partial B)$ , de (1.24) e do fato  $\bar{g}(Y, \bar{N}) = 0$ , vemos que para uma variação que preserva a área molhada  $\phi$  com  $Y = Y_0 + \varphi N$ , onde  $Y_0$  é a parte tangencial de  $Y$ , satisfaz

$$\int_{\partial\Sigma} \varphi d\partial\Sigma = 0. \quad (1.27)$$

Para mais detalhes sobre a existência de variações que preservam a área molhada, ver [10, Proposition 2.1]. Primeiro, aplicando a condição de capilaridade (1.23) e (1.24) em  $\partial\Sigma^n$ , nós temos

$$0 = \bar{g}(Y, \bar{N}) = \bar{g}(Y, \sin\theta\nu - \cos\theta N) = \sin\theta\bar{g}(Y, \nu) - \varphi\cos\theta.$$

Portanto,

$$\bar{g}(Y, \nu) = \varphi\cot\theta, \quad \text{em } \partial\Sigma^n. \quad (1.28)$$

Então podemos definir

$$Y = Y_0 + \varphi N = Y_1 + \cot\theta\varphi\nu + \varphi N \quad \text{em } \partial\Sigma^n \quad (1.29)$$

onde  $Y_1$  denota a parte tangente de  $Y$  em  $\partial\Sigma^n$ . Por outro lado, de (1.25)  $Y$  também pode ser expresso da seguinte forma

$$Y = Y_1 + \frac{\varphi}{\sin\theta}(\cos\theta\nu + \sin\theta N) = Y_1 + \frac{\varphi}{\sin\theta}\bar{\nu}. \quad (1.30)$$

**Proposição 1.1.** *Se  $\tilde{\nabla}$  denota o gradiente em  $\partial\Sigma^n$  da métrica induzida por  $\phi$  e onde  $Y_0, Y_1$  é a parte tangente de  $Y$  em  $\Sigma^n$  e  $\partial\Sigma^n$ , respectivamente. Sejam também  $S_N, S_\nu$  e  $S_{\bar{\nu}}$  denotam os operadores associados a segunda forma fundamental de  $\Sigma^n$  em  $M^{n+1}$  com respeito a  $N$ , de  $\partial\Sigma^n$  em  $\Sigma^n$  com respeito a  $\nu$  e de  $\partial\Sigma^n$  em  $\partial B$  com respeito a  $\bar{\nu}$ , respectivamente. Então*

1.  $N' = S_N(Y_0) - \nabla\varphi.$
2.  $\nu' = (-A(Y_0, \nu) + \nabla\varphi)N - \varphi S_N(\nu) + \varphi A(\nu, \nu)\nu + S_\nu(Y_1) - \cot\theta\tilde{\nabla}\varphi.$
3.  $\bar{\nu}' = -A^{\partial B}(Y, \bar{\nu})\bar{N} + S_{\bar{\nu}}(Y_1) - \frac{1}{\sin\theta}\tilde{\nabla}\varphi.$

*Demonstração.* Antes de provar a proposição, esclarecemos sobre a notação que usaremos:

se  $Y = \frac{\partial \phi}{\partial t}(0, x)$ , então

$$N'(0) = \left. \frac{d}{dt} N(t) \right|_{t=0} = \bar{\nabla}_Y N, \quad \nu'(0) = \left. \frac{d}{dt} \nu(t) \right|_{t=0} = \bar{\nabla}_Y \nu, \quad \bar{\nu}'(0) = \left. \frac{d}{dt} \bar{\nu}(t) \right|_{t=0} = \bar{\nabla}_Y \bar{\nu} \quad (1.31)$$

Para o item 1. Seja  $\{e_i\}_{i=1}^n$  uma referência ortonormal de  $T_p \Sigma$  para algum  $p \in \Sigma^n$  tal que,  $e_i(t) = d\phi(t, \cdot)(e_i)$ . Então usando o fato que  $\bar{g}(e_i(t), N(t)) = 0$  e  $[e_i(t), Y(t)] = 0$ , tem-se  $\bar{g}(e'_i, N) = -\bar{g}(e_i, N')$  e  $\bar{\nabla}_{e_i} Y = \bar{\nabla}_Y e_i$ , logo

$$\begin{aligned} N' &= \sum_{i=1}^n \bar{g}(N', e_i) e_i = - \sum_{i=1}^n \bar{g}(N, e'_i) e_i \\ &= - \sum_{i=1}^n \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{e_i} Y) e_i = - \sum_{i=1}^n \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{e_i} (Y_0 + \varphi \nu)) e_i \\ &= - \sum_{i=1}^n \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{e_i} Y_0) e_i + \sum_{i=1}^n \bar{g}(N, (e_i(\varphi) N + \varphi \bar{\nabla}_{e_i} N)) e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \bar{g}(S_N(Y_0), e_i) e_i - \sum_{i=1}^n e_i(\varphi) e_i - \varphi \sum_{i=1}^n \bar{g}(N, \bar{\nabla}_{e_i} N) e_i \\ &= S_N(Y_0) - \nabla \varphi. \end{aligned}$$

pois  $\bar{g}(N, \bar{\nabla}_{e_i} N) = 0$ . Uma consequência do item 1 em  $\partial \Sigma^n$ : como  $\bar{g}(\nu, N) = 0$ , então

$$\begin{aligned} \bar{g}(\nu', N) &= -\bar{g}(\nu, N') = -\bar{g}(\nu, S_N(Y_0) - \nabla \varphi) \\ &= A(Y_0, \nu) + \bar{g}(\nu, \nabla \varphi) = -A(Y_0, \nu) + \nabla_\nu \varphi. \end{aligned} \quad (1.32)$$

Para o item 2. Seja  $\{\partial_\alpha\}_{\alpha=1}^{n-1}$  uma referência ortonormal de  $T_p \partial \Sigma^n$  para algum  $p \in \partial \Sigma^n$  de modo que  $\partial_\alpha(t) = d\phi(t, \cdot)(\partial_\alpha)$ . Então, do fato  $\bar{g}(\partial_\alpha(t), N(t)) = 0$ , (1.29) e  $[\partial_\alpha(t), Y(t)] = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned} \bar{g}(\nu', \partial_\alpha) &= -\bar{g}(\nu, \partial'_\alpha) = -\bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} Y) = -\bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} (Y_1 + \cot \theta \varphi \nu + \varphi N)) \\ &= -\bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} Y_1) - \cot \theta \bar{g}(\nu, \varphi \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} \nu + \nu \partial_\alpha(\varphi)) - \bar{g}(\nu, \varphi \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} N + \partial_\alpha(\varphi) N) \\ &= -\bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} Y_1) - \cot \theta \partial_\alpha(\varphi) - \varphi \bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} N), \end{aligned} \quad (1.33)$$

pois  $\bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} \nu) = 0$ . Logo de (1.32) e (1.33) temos

$$\begin{aligned}
\nu' &= \bar{g}(\nu', \nu)\nu + \bar{g}(\nu', N)N + \sum_{\alpha=1}^{n-1} \bar{g}(\nu', \partial_\alpha)\partial_\alpha \\
&= (-A(Y_0, \nu) + \nabla_\nu \varphi)N - \sum_{\alpha=1}^{n-1} \bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} Y_1)\partial_\alpha - \cot \theta \sum_{\alpha=1}^{n-1} \partial_\alpha(\varphi)\partial_\alpha - \varphi \sum_{\alpha=1}^{n-1} \bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} N) \\
&= (-A(Y_0, \nu) + \nabla_\nu \varphi)N + S_\nu(Y_1) - \cot \theta \tilde{\nabla} \varphi - \varphi \sum_{\alpha=1}^{n-1} \bar{g}(S_N(\nu), \partial_\alpha)\partial_\alpha \\
&= (-A(Y_0, \nu) + \nabla_\nu \varphi)N + S_\nu(Y_1) - \cot \theta \tilde{\nabla} \varphi - \varphi(S_N(\nu) - A(\nu, \nu)\nu) \\
&= (-A(Y_0, \nu) + \nabla \varphi)N - \varphi S_N(\nu) + \varphi A(\nu, \nu)\nu + S_\nu(Y_1) - \cot \theta \tilde{\nabla} \varphi, \tag{1.34}
\end{aligned}$$

$$\text{pois } S_N(\nu) = \sum_{\alpha=1}^{n-1} \bar{g}(S_N(\nu), \partial_\alpha)\partial_\alpha + A(\nu, \nu)\nu.$$

Para item 3. Usaremos o fato  $[\partial_\alpha(t), Y(t)] = 0$ , isto é  $\bar{\nabla}_{\partial_\alpha} Y = \bar{\nabla}_Y \partial_\alpha$  e de (1.30) obtemos

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{\nu}', \partial_\alpha) &= -\bar{g}(\bar{\nu}, \partial'_\alpha) = -\bar{g}(\bar{\nu}, \bar{\nabla}_Y \partial_\alpha) = -\bar{g}(\bar{\nu}, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} Y) \\
&= -\bar{g}\left(\bar{\nu}, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} \left(Y_1 + \frac{1}{\sin \theta} \bar{\nu}\right)\right) = -\bar{g}(\bar{\nu}, \bar{\nabla}_{\partial_\alpha} Y_1) - \frac{\varphi}{\sin \theta} \partial_\alpha(\varphi) \\
&= \bar{g}(S_{\bar{\nu}}(Y_1), \partial_\alpha) - \frac{1}{\sin \theta} \partial_\alpha(\varphi). \tag{1.35}
\end{aligned}$$

Portanto, de (1.35) e  $\bar{g}(\bar{\nu}', \bar{\nu}) = 0$  tem-se

$$\begin{aligned}
\bar{\nu}' &= \sum_{\alpha=1}^{n-1} \bar{g}(\bar{\nu}', \partial_\alpha)\partial_\alpha + \bar{g}(\bar{\nu}', \bar{N})\bar{N} \\
&= \sum_{\alpha=1}^{n-1} \bar{g}(S_{\bar{\nu}}(Y_1), \partial_\alpha)\partial_\alpha - \frac{1}{\sin \theta} \sum_{\alpha=1}^{n-1} \partial_\alpha(\varphi)\partial_\alpha - \bar{g}(\bar{\nu}, \bar{N}')\bar{N}' \\
&= S_{\bar{\nu}}(Y_1) - \frac{1}{\sin \theta} \tilde{\nabla} \varphi - A^{\partial B}(Y, \bar{\nu})\bar{N}' \tag{1.36}
\end{aligned}$$

pois,  $\bar{g}(\bar{\nu}, \bar{N}) = 0$  e consequentemente  $\bar{g}(\bar{\nu}', \bar{N}) = -\bar{g}(\bar{\nu}, \bar{N}') = -\bar{g}(\bar{\nu}, \bar{\nabla}_Y \bar{N}) = -A^{\partial B}(Y, \bar{\nu})$ .

□

**Proposição 1.2.** *Ao longo de  $\partial\Sigma^n$  satisfaz*

$$\bar{g}(S_\nu(Y_1), Y_1) - \cot \theta \bar{g}(\tilde{\nabla} \varphi, Y_1) = \cos \theta \bar{g}(Y, \bar{\nu}') + \sin \theta A^{\partial B}(Y_1, Y_1). \tag{1.37}$$

*Demonstração.* De (1.36) e  $\bar{g}(Y, \bar{N}) = 0$  em  $\partial\Sigma^n$ , obtemos

$$\begin{aligned}
\cos\theta\bar{g}(Y, \bar{\nu}') &= \cos\theta\bar{g}\left(Y, S_{\bar{\nu}}(Y_1) - \frac{1}{\sin\theta}\tilde{\nabla}\varphi - A^{\partial B}(Y, \bar{\nu})\bar{N}\right) \\
&= \cos\theta\bar{g}(Y, S_{\bar{\nu}}(Y_1)) - \cot\theta\bar{g}(Y, \tilde{\nabla}\varphi) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}(\cos\theta\bar{\nu}), Y_1) - \cot\theta\bar{g}(Y, \tilde{\nabla}\varphi) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}(\nu - \sin\theta\bar{N}), Y_1) - \cot\theta\bar{g}(Y, \tilde{\nabla}\varphi) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}\nu, Y_1) - \sin\theta\bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}\bar{N}, Y_1) - \cot\theta\bar{g}(Y, \tilde{\nabla}\varphi) \\
&= \bar{g}(S_{\nu}(Y_1), Y_1) - \sin\theta A^{\partial B}(Y_1, Y_1) - \cot\theta\bar{g}(Y, \tilde{\nabla}\varphi)
\end{aligned}$$

□

Agora, estamos prontos para provar a segunda fórmula de variação da funcional de área  $A$ , sob variações admissíveis que preserva volume e a área molhada e é dada como segue.

**Teorema 1.2.** (Segunda fórmula de variação: Guo-Xia [10, Proposition 2.2]) *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow B \subset M^{n+1}$  uma imersão própria de uma hipersuperfície mínima capilar. Seja  $\phi$  uma variação admissível que preserva a área molhada, com campo variacional  $Y = \frac{\partial\phi}{\partial t}(0, x)$ , tendo  $\varphi N$  como sua parte normal a  $\Sigma^n$ . Então*

$$A''(0) = - \int_{\Sigma} \varphi(\Delta_{\Sigma}\varphi + (|A|^2 + \text{Ric}^M(N, N))\varphi)d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \varphi(\bar{\nabla}_{\nu}\varphi - q\varphi)d\partial\Sigma, \quad (1.38)$$

com

$$q = \frac{1}{\sin\theta}A^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot\theta A(\nu, \nu), \quad (1.39)$$

onde  $\text{Ric}^M$  é o tensor de Ricci de  $M^{n+1}$ ,  $A$  é a segunda forma fundamental dado por  $A(X, Y) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X N, Y)$  e  $A^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\nu}}\bar{N}, \bar{\nu})$  é a segunda forma fundamental de  $\partial B$  em  $M^{n+1}$ .

*Demonstração.* Como  $Y = Y_0 + \varphi N$ , então  $\varphi = \bar{g}(Y, N)$ , logo em (1.19) temos

$$A'(t) = \int_{\Sigma} H\varphi d\Sigma_t + \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \nu)d\partial\Sigma_t. \quad (1.40)$$

Derivando com respeito a  $t$  e em  $t = 0$ , obtemos

$$A''(0) = \int_{\Sigma} (H'\varphi + H\varphi) d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} (\bar{g}(Y', \nu) + \bar{g}(Y, \nu')) d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \nu) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\partial\Sigma_t. \quad (1.41)$$

Lembrando,  $A'(0) = 0$  para quaisquer variação admissível que preserva o volume e a área molhada se e somente se  $H = 0$  em  $\Sigma^n$  e  $\theta$  é constante. Além disso, a derivada da curvatura média, é dada pela fórmula conhecida (veja [17])

$$H' = -(\Delta_{\Sigma}\varphi + |A|^2\varphi + \text{Ric}^M(N, N)\varphi). \quad (1.42)$$

Segue em (1.41)

$$\begin{aligned} A''(0) &= - \int_{\Sigma} \varphi(\Delta_{\Sigma}\varphi + |A|^2\varphi + \text{Ric}(N, N)\varphi) d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} (\bar{g}(Y', \nu) + \bar{g}(Y, \nu')) d\partial\Sigma \\ &\quad + \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \nu) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\partial\Sigma_t. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Assim, para encontrar a fórmula de  $A''(0)$ , só precisamos calcular

$$\int_{\partial\Sigma} (\bar{g}(Y', \nu) + \bar{g}(Y, \nu')) d\partial\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \nu) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\partial\Sigma_t. \quad (1.44)$$

Primeiramente, calculamos o primeiro termo de (1.44). De (1.23) tem-se

$$\begin{aligned} \bar{g}(Y', \nu) &= \bar{g}(Y', \sin \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu}) \\ &= \sin \theta \bar{g}(\bar{\nabla}_Y Y, \bar{N}) + \cos \theta \bar{g}(Y', \bar{\nu}) \\ &= -\sin \theta A^{\partial B}(Y, Y) + \cos \theta \bar{g}(Y', \bar{\nu}). \end{aligned} \quad (1.45)$$

De (1.30) e  $[Y(t), \bar{\nu}(t)] = 0$ , seguiu-se

$$\begin{aligned} A^{\partial B}(Y, Y) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_Y Y, \bar{N}) = \bar{g}\left(\bar{\nabla}_Y \left(Y_1 + \frac{\varphi}{\sin \theta} \bar{\nu}\right), \bar{N}\right) \\ &= \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{Y_1 + \frac{\varphi}{\sin \theta} \bar{\nu}} Y_1, \bar{N}\right) + \frac{1}{\sin \theta} \bar{g}\left(\bar{\nabla}_{Y_1 + \frac{\varphi}{\sin \theta} \bar{\nu}} \bar{\nu}, \bar{N}\right) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} Y_1, \bar{N}) + \frac{\varphi}{\sin \theta} \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\nu}} Y_1, \bar{N}) + \frac{\varphi}{\sin \theta} \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_1} \bar{\nu}, \bar{N}) + \frac{\varphi^2}{\sin \theta} \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\nu}} \bar{\nu}, \bar{N}) \\ &= A^{\partial B}(Y_1, Y_1) + \frac{2\varphi}{\sin \theta} A^{\partial B}(Y_1, \bar{\nu}) + \frac{\varphi^2}{\sin^2 \theta} A^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}). \end{aligned} \quad (1.46)$$

Substituindo (1.45) e (1.46) em (1.44), tem-se

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y', \nu) d\partial\Sigma &= -\sin\theta \int_{\partial\Sigma} A^{\partial B}(Y, Y) d\partial\Sigma + \cos\theta \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y', \bar{\nu}) d\partial\Sigma \\
&= -\sin\theta \int_{\partial\Sigma} \left( A^{\partial B}(Y_1, Y_1) + \frac{2\varphi}{\sin\theta} A^{\partial B}(Y_1, \bar{\nu}) + \frac{\varphi^2}{\sin^2\theta} A^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) \right) d\partial\Sigma \\
&\quad + \cos\theta \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y', \bar{\nu}) d\partial\Sigma
\end{aligned} \tag{1.47}$$

Por outro lado, de (1.23) e (1.24)

$$\begin{aligned}
A(Y_1, \nu) &= \bar{g}(\nu, \bar{\nabla}_{Y_1} N) = \bar{g}(\sin\theta \bar{N} + \cos\theta \bar{\nu}, \bar{\nabla}_{Y_1}(-\cos\theta \bar{\nu} + \sin\theta \bar{N})) \\
&= -\sin\theta \cos\theta \bar{g}(\bar{N}, \bar{\nabla}_{Y_1} \bar{N}) + \sin^2\theta \bar{g}(\bar{N}, \bar{\nabla}_{Y_1} \bar{\nu}) - \cos^2\theta \bar{g}(\bar{\nu}, \bar{\nabla}_{Y_1} \bar{N}) \\
&\quad + \sin\theta \cos\theta \bar{g}(\bar{\nu}, \bar{\nabla}_{Y_1} \bar{\nu}) \\
&= -\bar{g}(\bar{\nu}, \bar{\nabla}_{Y_1} \bar{N}) = -A^{\partial B}(Y_1, \bar{\nu}),
\end{aligned} \tag{1.48}$$

pois  $\bar{g}(\bar{N}, \bar{\nabla}_{Y_1} \bar{N}) = \bar{g}(\bar{\nu}, \bar{\nabla}_{Y_1} \bar{\nu}) = 0$  e  $\bar{g}(\bar{\nu}, \bar{N}) = 0$ . Portanto, substituindo (1.48) em (1.47), obtemos o primeiro termo de (1.44)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y', \nu) d\partial\Sigma &= -\sin\theta \int_{\partial\Sigma} \left( A^{\partial B}(Y_1, Y_1) - \frac{2\varphi}{\sin\theta} A(Y_1, \nu) + \frac{\varphi^2}{\sin^2\theta} A^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) \right) d\partial\Sigma \\
&\quad + \cos\theta \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y', \bar{\nu}) d\partial\Sigma
\end{aligned} \tag{1.49}$$

Agora, o segundo termo de (1.44) será calculado. De (1.29), (1.34) e (1.37), segue-

se

$$\begin{aligned}
\bar{g}(Y, \nu') &= \bar{g}(Y, (-A(Y_0, \nu) + \nabla\varphi)N - \varphi S_N(\nu) + \varphi A(\nu, \nu)\nu + S_\nu(Y_1) - \cot\theta\tilde{\nabla}\varphi) \\
&= (-A(Y_0, \nu) + \nabla\varphi)\bar{g}(Y_0 + \varphi N, N) - \varphi\bar{g}(Y, S_N(\nu)) + \varphi A(\nu, \nu)\bar{g}(Y, \nu) \\
&\quad + \bar{g}(S_\nu(Y_1), Y) - \cot\theta\bar{g}(\tilde{\nabla}\varphi, Y) \\
&= \varphi\nabla\varphi - 2\varphi A(Y_0, \nu) + \varphi A(\nu, \nu)\bar{g}(Y_1 + \varphi\cot\theta\nu + \varphi N, \nu) + \bar{g}(S_\nu(Y_1), Y) \\
&\quad - \cot\theta\bar{g}(\tilde{\nabla}\varphi, Y) \\
&= \varphi\nabla\varphi - 2\varphi A(Y_0, \nu) + \cot\theta\varphi^2 A(\nu, \nu) + \bar{g}(S_\nu(Y_1), Y) - \cot\theta\bar{g}(\tilde{\nabla}\varphi, Y) \\
&= \varphi\nabla_\nu\varphi - 2\varphi A(Y_1 + \varphi\cot\theta\nu, \nu) + \varphi^2\cot\theta A(\nu, \nu) + \bar{g}(S_\nu(Y_1), Y) \\
&\quad - \cot\theta\bar{g}(\tilde{\nabla}\varphi, Y) \\
&= \varphi\nabla_\nu\varphi - 2\varphi A(Y_1, \nu) - \varphi^2\cot\theta A(\nu, \nu) + \bar{g}(S_\nu(Y_1), Y) \\
&\quad - \cot\theta\bar{g}(\tilde{\nabla}\varphi, Y). \tag{1.50}
\end{aligned}$$

De (1.23) e (1.30)

$$\begin{aligned}
\bar{g}(S_\nu(Y_1), \nu) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}\nu, \nu) = \sin\theta\bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}\bar{N}, Y) + \cos\theta\bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_1}\bar{\nu}, Y) \\
&= \sin\theta\bar{g}\left(\bar{\nabla}_{Y_1}\bar{N}, Y_1 + \frac{\varphi}{\sin\theta}\bar{\nu}\right) + \cos\theta\bar{g}(\bar{\nu}', Y) \\
&= \sin\theta A^{\partial B}(Y_1, Y_1) + \cos\theta\bar{g}(\bar{\nu}', Y) + \varphi A^{\partial B}(Y_1, \bar{\nu}). \tag{1.51}
\end{aligned}$$

Logo, substituindo (1.51) em (1.50), obtemos o segundo termo de (1.44) que é

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \nu') &= \int_{\partial\Sigma} (\varphi\nabla\varphi - 2\varphi A(Y_0, \nu) - \varphi^2\cot\theta A(\nu, \nu) + \cos\theta\bar{g}(Y, \bar{\nu}') \\
&\quad + \sin\theta A^{\partial B}(Y_1, Y_1))d\partial\Sigma. \tag{1.52}
\end{aligned}$$

Em seguida, calculamos o terceiro termo de (1.44). De (1.23)

$$\begin{aligned}
\int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \nu) \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\partial\Sigma_t &= \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \sin\theta\bar{N} + \cos\theta\bar{\nu}) \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\partial\Sigma_t \\
&= \cos\theta \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \bar{\nu}) \frac{d}{dt}\Big|_{t=0} d\partial\Sigma_t. \tag{1.53}
\end{aligned}$$

Portanto, colocando (1.49), (1.52), (1.53) em (1.44), obtemos

$$\begin{aligned} A''(0) &= - \int_{\Sigma} \varphi(\Delta_{\Sigma}\varphi + (|A|^2 + \text{Ric}(N, N))\varphi)d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \varphi(\bar{\nabla}_{\nu}\varphi - q\varphi)d\partial\Sigma \\ &\quad \cos\theta \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \bar{\nu}) \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} d\partial\Sigma_t \\ &= - \int_{\Sigma} \varphi(\Delta_{\Sigma}\varphi + (|A|^2 + \text{Ric}^M(N, N))\varphi)d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \varphi(\bar{\nabla}_{\nu}\varphi - q\varphi)d\partial\Sigma, \end{aligned}$$

onde na última igualdade usamos a condição de que  $\phi$  preserva a área molhada, isto é

$$W'(0) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \left( \int_{\partial\Sigma} \bar{g}(Y, \bar{\nu}) d\partial\Sigma_t \right) = 0 \quad (1.54)$$

e lembrado que  $q = \frac{1}{\sin\theta} A^{\partial B}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) + \cot\theta A(\nu, \nu)$ . Concluindo a demonstração.  $\square$

A segunda fórmula de variação da área  $A''(0)$  dada em (1.38) induz uma forma bilinear simétrica  $Q$  sobre o espaço de funções diferenciáveis, definida por:

$$Q(\psi, \varphi) = - \int_{\Sigma} \psi \mathcal{J} \varphi d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \psi (D_{\nu}\varphi - q\varphi) d\partial\Sigma \quad (1.55)$$

para todo  $\psi$  e  $\varphi \in C^{\infty}(\Sigma)$  e onde  $\mathcal{J} = \Delta_{\Sigma} + |A|^2 + \text{Ric}^M(N, N)$  é o operador de Jacobi. Uma consequência da forma bilinear simétrica  $Q$ , é estudar o índice de Morse associada a  $Q$  e é definido como segui.

**Definição 1.7.** *O índice de Morse com respeito à forma bilinear  $Q$ , é a máxima dimensão de um subespaço  $V \subset C^{\infty}(\Sigma^n)$  onde  $Q$  é definida negativa, isto é,  $Q(u, u) < 0$  para todo  $u \in V$ .*

Denotaremos por  $\text{Ind}(Q)$  o índice de Morse da forma bilinear  $Q$ . Além disso, vamos considerar o índice de  $\Sigma^n$  como sendo o índice de  $Q$ , ou seja

$$\text{Ind}(\Sigma^n) = \text{Ind}(Q).$$

Por fim, apresentamos algumas entidades que serão utilizadas ao longo dos capítulos seguintes. Se  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  é uma hipersuperfície mínima capilar contida na bola

unitária centrado na origem, então ao longo de  $\partial\Sigma^n$  tem-se:

$$D_\nu x = \nu \quad (1.56)$$

$$D_\nu N = A(\nu, \nu)\nu \quad (1.57)$$

$$D_\nu \langle x, N \rangle = A(\nu, \nu) \sin \theta \quad (1.58)$$

onde  $\theta \in (0, \pi)$  é o ângulo de contato de  $\Sigma^n$  e  $\mathbb{S}^n$ , e  $D$  é a conexão de  $\mathbb{R}^{n+1}$  induzida pela métrica  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . De fato, se  $\{e_i\}_{i=1}^{n+1}$  é a base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$  então as funções coordenadas de  $x$  e  $\nu$  são  $x_i = \langle x, e_i \rangle$  e  $\nu_i = \langle \nu, e_i \rangle$  respectivamente, para todo  $i = 1, \dots, n+1$ .

Para (1.56).

$$\begin{aligned} D_\nu x_i &= \nu \langle x, e_i \rangle = \langle \nabla x_i, \nu \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla} x_i - \langle \bar{\nabla} x_i, N \rangle N, \nu \rangle = \langle e_i - N_i N, \nu \rangle \\ &= \langle e_i, \nu \rangle = \nu_i \end{aligned}$$

pois  $\langle N, \nu \rangle = 0$ . Os detalhes da prova de (1.57) é fornecido na Proposição 4.2. Finalmente de (1.56) e (1.57) temos

$$\begin{aligned} D_\nu \langle x, N \rangle &= \langle D_\nu x, N \rangle + \langle x, D_\nu N \rangle \\ &= \langle \nu, N \rangle + \langle x, A(\nu, \nu)\nu \rangle \\ &= A(\nu, \nu) \langle x, \nu \rangle = A(\nu, \nu) \sin \theta, \end{aligned}$$

pois, de (1.23) tem-se  $\langle x, \nu \rangle = \sin \theta$  em  $\partial\Sigma^n$ .

## Capítulo 2

# ÍNDICE DO CATENOIDE CAPILAR IMERSO NA BOLA UNITÁRIA

Nos últimos anos, estudos têm sido realizados sobre estimativas do índice de Morse em superfícies de fronteira livre imersas na bola unitária. Particularmente o índice da catenoide crítica foi encontrado com sucesso ( $\text{Ind}(\Sigma_{c_0}) = 4$ ). Dentre os trabalhos que abordaram, podemos citar: Tran em [21], Smith-Zhou em [18] e Devyver em [6]. Dando continuidade nesta linha de pesquisa, em neste capítulo apresentaremos nosso resultado mais relevante, concretamente forneceremos o índice de Morse da catenoide capilar imersa na bola unitária  $\mathbb{B}_1^3(0)$  e como caso particular mostraremos que a catenoide crítica possui, índice de Morse igual a 4. Recuperando assim, o resultado obtidos em [21], [18] e [6].

Lembrando do capítulo anterior. A forma bilinear simétrica  $Q$ , induzida pela segunda fórmula de variação de  $E$  é dado por:

$$Q(u, u) = \int_{\Sigma} (\langle \nabla u, \nabla u \rangle - (\text{Ric}^M(N, N) + |A|^2)u^2) d\Sigma - \int_{\partial\Sigma} qu^2 d\partial\Sigma,$$

para uma função  $u \in C^\infty(\Sigma^n)$ . Considerando  $\mathcal{J} = \Delta_{\Sigma} + \text{Ric}^M(N, N) + |A|^2$  o operador de Jacobi, e por integração por partes obtemos:

$$Q(u, u) = - \int_{\Sigma} u \mathcal{J} u d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} u (\bar{\nabla}_{\nu} u - qu) d\partial\Sigma. \quad (2.1)$$

Por outro lado, sabe-se também que o índice de Morse é exatamente o numero de auto

valores negativos do seguinte problema:

$$\begin{cases} \mathcal{J}u = -\lambda u, & \text{em } \Sigma^n, \\ \bar{\nabla}_\nu u = qu, & \text{em } \partial\Sigma^n. \end{cases} \quad (2.2)$$

Tran-Zhou em [21] e [22] mostraram que, o  $\text{Ind}(\Sigma^n)$  pode ser determinado por dois problemas de autovalores mais simples. Em primeiro lugar, considera-se apenas as variações que fixem o bordo. O problema de autovalores associado a uma variação de bordo fixo, é dado pela seguinte consideração de Dirichlet:

$$\begin{cases} \mathcal{J}u = -\mu u, & \text{em } \Sigma^n, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Sigma^n, \end{cases} \quad (2.3)$$

logo, para uma função que satisfaz (2.3), tem-se em (2.1) que

$$Q(u, u) = \mu \int_{\Sigma} u^2 d\Sigma.$$

Assim, uma autofunção  $u$  contribui ao índice se, seu autovalor associado  $\mu$  é menor ou igual que zero. Os autovalores de Dirichlet podem ser caracterizados variacionalmente. Sejam  $V_k \subset C^\infty(\Sigma^n)$  um subespaço  $k$ -dimensional e  $p = \text{Ric}^M(N, N) + |A|^2$ , então

$$\mu_k = \min_{V_k} \max_{0 \neq u \in V_k} \frac{\int_{\Sigma} (|\nabla u|^2 - pu^2) d\Sigma}{\int_{\Sigma} u^2 d\Sigma}.$$

Por outro lado, a influência do bordo é capturado pelo problema de Jacobi-Steklov. Suponhamos que  $q \in C^\infty(\partial\Sigma)$  é  $q(x) \geq 0$  para todo  $x \in \partial\Sigma^n$ , o problema é dado por:

$$\begin{cases} \mathcal{J}u = 0, & \text{em } \Sigma^n, \\ \bar{\nabla}_\nu u = \lambda qu, & \text{em } \partial\Sigma^n, \end{cases} \quad (2.4)$$

logo, para uma função  $u \in C^\infty(\Sigma^n)$  tal que satisfaz (2.4), em (2.1) temos:

$$Q(u, u) = (\lambda - 1) \int_{\partial\Sigma} u^2 d\partial\Sigma.$$

Assim, uma autofunção  $u$  contribui ao índice se, seu autovalor associado  $\lambda$  for menor que 1. Os autovalores de Jacobi-Steklov podem ser caracterizado variacionalmente. Seja

$V_k \subset C^\infty(\Sigma^n)$  um subespaço  $k$ -dimensional, então

$$\lambda_k = \min_{V_k} \max_{0 \neq u \in V_k} \frac{\int_{\Sigma} (|\nabla u|^2 - pu^2) d\Sigma}{\int_{\partial\Sigma} qu^2 d\Sigma}.$$

## 2.1 Problema de Jacobi-Steklov no catenoide capilar

Nesta seção, estudaremos o problema de autovalor de Jacobi-Steklov (2.4) da catenoide capilar imersa na bola unitária centrada na origem  $\mathbb{B}_1^3(0)$ .

Consideramos a catenoide capilar  $\Sigma_c^2 \subset \mathbb{B}_1^3(0)$ , cuja parametrização  $x_c : [-T, T] \times [0, 2\pi] \rightarrow \Sigma_c \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  esta dada por:

$$x_c(t, v) = (c \cosh t \cos v, c \cosh t \sin v, ct). \quad (2.5)$$

Conseqüentemente, seus campos de vetores tangentes associados à parametrização são:

$$\begin{aligned} (x_c)_t &= c(\sinh t \cos v, \sinh t \sin v, 1) \\ (x_c)_v &= c(-\cosh t \sin v, \cosh t \cos v, 0) \end{aligned}$$

e seu campo normal em  $\Sigma_c^2$  é

$$N = -\frac{x_t \times x_v}{|x_t \times x_v|} = \frac{1}{\cosh t}(\cos v, \sin v, -\sinh t). \quad (2.6)$$

Agora, fixando um número real  $\theta \in (0, \pi)$  como sendo o ângulo de intersecção de  $\Sigma_c^2$  e  $\mathbb{S}^2$ , então pela condição de capilaridade dadas nas identidades (1.23) e (1.24) tem-se  $\langle N, x \rangle|_{\partial\Sigma} = -\cos \theta$ . Assim, o valor de  $c$  é determinado por

$$|x_c(T, v)|^2 = c^2(\cosh^2 T + T^2) = 1,$$

então

$$c = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}}, \quad (2.7)$$

e o valor de  $T$  é determinado por

$$\langle N, x \rangle|_{t=\pm T} = c(1 - T \tanh T) = -\cos \theta. \quad (2.8)$$

**Observação 2.** O ângulo de interseção de  $\Sigma_c^2$  e  $\mathbb{S}^2$  é determinado por (2.8). De (2.7) e (2.8) obtemos

$$F(T) = \frac{1 - T \tanh T}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}} = -\cos \theta \quad (2.9)$$

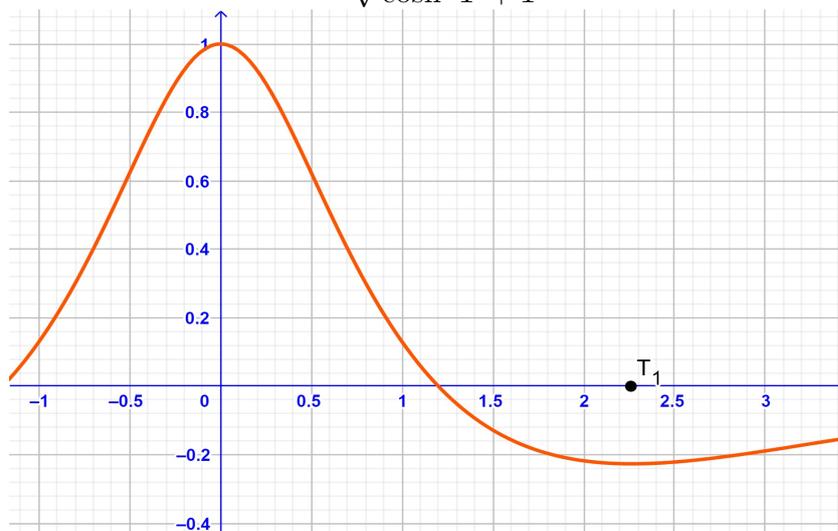
isto é, para cada  $T > 0$  obtemos seu ângulo  $\theta$  correspondente. Alguns casos particulares: para  $T_0 \approx 1.19968$  tem-se  $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$  e para  $T = 0$  seu ângulo correspondente é  $\theta = \pi$ .

Por outro lado, se na equação (2.9) variarmos o ângulo  $\theta$  ao longo de  $(0, \pi)$ , não sempre é possível encontrar uma solução  $T$  real. Por exemplo, se  $\theta = \frac{\pi}{3}$  a equação (2.9) não tem solução  $T$  real. A seguir, determinamos o intervalo de solução em  $(0, \pi)$ . Derivando a equação (2.9) tem-se

$$F'(T) = \frac{-T^3 \cosh^{-2} T - 2 \cosh T \sinh T + T(-2 + \sinh^2 T)}{(\cosh^2 T + T^2)^{3/2}} = 0, \quad (2.10)$$

onde as soluções de (2.10) são  $T = 0$  e  $T_1 \approx 2.26489$ , que representam o ponto máximo e o ponto mínimo de  $F(T)$ , respetivamente (veja a figura 2.1).

Figura 2.1:  $F(T) = \frac{1 - T \tanh T}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}}$  e  $T_1 \approx 2,26489$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Assim,  $-0.226627 \leq F(T) \leq 1$ , então de (2.9) existe  $\tilde{\theta} \in (0, \pi)$  tal que  $-0.226627 =$

–  $\cos \tilde{\theta}$ , daí o valor aproximado de  $\tilde{\theta} \approx 1.3421$ . Portanto, para  $\theta \in (0, \tilde{\theta})$  a equação (2.9) não tem solução  $T$  real, em outras palavras não existe uma catenoide capilar que intersecta  $\mathbb{S}^2$  com ângulos  $\theta \in (0, \tilde{\theta})$ .  $\diamond$

**Observação 3.** Outras coisas que podemos concluir são:

1. Se  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , tem-se o caso de fronteira livre.  $\Sigma_c^2$  é a catenoide crítica e de (2.8) obtemos:

$$\cosh T_0 = T_0 \sinh T_0 \quad \text{e} \quad c_0 = \frac{1}{T_0 \cosh T_0} \quad (2.11)$$

onde  $T_0$  é o zero positivo da função  $e(t) = 1 - t \tanh t$ , com  $T_0 \approx 1.19968$ .

2. Se  $\theta \in \left(\tilde{\theta}, \frac{\pi}{2}\right)$ , de (2.8) tem-se que  $T > T_0$  e  $c = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}} < c_0$ .
3. Se  $\theta \in \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$ , de (2.8) temos que  $T < T_0$  e  $c = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}} > c_0$ .  $\diamond$

A seguir, calculamos o campo vetorial unitário co-normal  $\nu \perp \partial \Sigma_c$ , os módulos de  $(x_c)_t$  e  $(x_c)_v$  e o quadrado da segunda forma fundamental  $|A|^2$  no sistema de coordenada  $(t, v)$ , isto é:

**Proposição 2.1.** *Assuma que  $\Sigma_c^2 \subset \mathbb{B}^3$  é a catenoide dada pela parametrização (2.5).*

*Então*

$$|(x_c)_t| = |(x_c)_v| = c \cosh t \quad (2.12)$$

$$\langle N, x_c \rangle = c(1 - t \tanh t) \quad (2.13)$$

$$\nu = \frac{(x_c)_t}{|(x_c)_t|} \Big|_{t=\pm T} = \frac{1}{\cosh T} (\sinh T \cos v, \sinh T \sin v, \pm 1) \quad (2.14)$$

$$|A|^2 = \frac{2}{c^2 \cosh^4 t} \quad (2.15)$$

$$\Delta_c = \frac{1}{c^2 \cosh^2 t} \Delta, \quad (2.16)$$

onde  $\Delta = \partial_{tt} + \partial_{vv}$  é o laplaciano usual.

*Demonstração.* As igualdades (2.12), (2.13) e (2.14) são imediatas.

Para (2.15). Primeiro observamos que a parametrização (2.5) é normal, isto é  $\langle (x_c)_t, (x_c)_v \rangle = 0$ , daí podemos considerar a base ortonormal  $\{\hat{\nu}, \omega\}$  de  $T_{x_c} \Sigma_c^2$ , onde  $\hat{\nu} =$

$\frac{(x_c)_t}{|(x_c)_t|}$  e  $\omega = \frac{(x_c)_v}{|(x_c)_v|}$ . Portanto, as derivada covariante na direção de  $\hat{\nu}$  e  $\omega$  são dadas por:

$$D_{\hat{\nu}} = D_{\frac{(x_c)_t}{|(x_c)_t|}} = \frac{1}{c \cosh t} D_{(x_c)_t} = \frac{1}{c \cosh t} \partial_t, \quad (2.17)$$

$$D_{\omega} = D_{\frac{(x_c)_v}{|(x_c)_v|}} = \frac{1}{c \cosh t} D_{(x_c)_v} = \frac{1}{c \cosh t} \partial_v. \quad (2.18)$$

Logo, a segunda forma fundamental de  $\hat{\nu} = \frac{x_t}{|x_t|}$  é

$$\begin{aligned} A(\hat{\nu}, \hat{\nu}) &= -\langle D_{\hat{\nu}} N, \hat{\nu} \rangle = -\frac{1}{c \cosh t} \left\langle \frac{dN}{dt}, \hat{\nu} \right\rangle \\ &= -\frac{1}{c \cosh^4 t} (-\cos^2 v \sinh^2 t - \sin^2 v \sinh^2 t - 1) \\ &= \frac{1}{c \cosh^4 t} (\sinh^2 t + 1) = \frac{1}{c \cosh^2 t}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Por outro lado, a segunda forma fundamental de  $\omega = \frac{x_v}{|x_v|}$  é

$$\begin{aligned} A(\omega, \omega) &= -\langle D_{\omega} N, \omega \rangle = -\frac{1}{c \cosh^2 t} \left\langle \frac{dN}{dv}, \omega \right\rangle \\ &= -\frac{1}{c \cosh^2 t} (\sin^2 v + \cos^2 v) = -\frac{1}{c \cosh^2 t}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Finalmente, como  $\{\hat{\nu}, \omega\}$  é uma base ortonormal de  $T_{x_c} \Sigma_c^2$ , de (2.19) e (2.20) obtemos

$$|A|^2 = A^2(\hat{\nu}, \hat{\nu}) + A^2(\omega, \omega) = \frac{2}{c^2 \cosh^4 t}.$$

Para (2.5). A métrica  $g_c$  de  $\Sigma_c^2$  associada à parametrização  $x_c : [-T, T] \times (0, \pi) \rightarrow \Sigma_c^2 \subset \mathbb{B}^3$  é dada por:

$$G = \begin{pmatrix} \langle (x_c)_t, (x_c)_t \rangle & \langle (x_c)_t, (x_c)_v \rangle \\ \langle (x_c)_v, (x_c)_t \rangle & \langle (x_c)_v, (x_c)_v \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c^2 \cosh^2 t & 0 \\ 0 & c^2 \cosh^2 t \end{pmatrix}, \quad (2.21)$$

e

$$g_c = c^2 \cosh^2 t g,$$

onde  $g = \langle \cdot, \cdot \rangle$  é a métrica riemanniana usual de  $\mathbb{R}^3$ . Assim, podemos observar que  $g_c$  é conforme com respeito a  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . A conformidade de  $g_c$  nos permite expressar o Laplaciano

$\Delta_c$  com respeito a  $g_c$  em termos do Laplaciano  $\Delta$  de  $g$  pela seguinte fórmula:

$$\Delta_c = \frac{1}{c^2 \cosh^2 t} \Delta. \quad (2.22)$$

□

Consideremos a aplicação normal de Gauss  $N : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  sobre uma hipersuperfície mínima capilar  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ . Por (4.15), sabe-se que as funções coordenadas da aplicação normal de Gauss são de Jacobi, isto é  $\mathcal{J}N_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$ . H. Tran em [21], mostrou que as funções coordenadas da aplicação normal de Gauss  $N$  da catenoide crítica ( $\theta = \frac{\pi}{2}$  e  $q = 1$ ) no sistema de coordenadas  $(t, v)$ , são autofunções do problema de Jacobi-Steklov (2.4). Na seguinte Proposição, mostramos que as funções coordenadas da aplicação normal de Gauss  $N$  da catenoide capilar, continuam sendo autofunções do problema de Jacobi-Steklov (2.4).

**Proposição 2.2.** *Assuma que  $\Sigma_c^2 \subset \mathbb{B}^3$  é a catenoide capilar dada pela parametrização (2.5). Então as funções coordenadas de  $N$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov (2.4).*

*Demonstração.* De (2.14) e (2.17) temos  $\widehat{\nu}|_{\partial\Sigma} = \nu$  e

$$D_\nu = D_{\widehat{\nu}}|_{t=\pm T} = \frac{1}{c \cosh T} \partial_t \Big|_{t=\pm T}. \quad (2.23)$$

A seguir calculamos a derivada covariante das funções coordenadas de  $N$  dada em (2.6), na direção do campo co-normal  $\nu$  ao longo de  $\partial\Sigma_c$ .

$$\begin{aligned} D_\nu N_1 &= \frac{1}{|(x_c)_t|} \partial_t \left( \frac{-\cos v}{\cosh t} \right) \Big|_{t=\pm T} = \frac{1}{c \cosh T} \frac{\cos v \sinh T}{\cosh^2 T} \\ &= -\frac{\sinh T}{c \cosh^2 T} \frac{-\cos v}{\cosh T} = -\frac{\sinh T}{c \cosh^2 T} N_1 \end{aligned} \quad (2.24)$$

$$\begin{aligned} D_\nu N_2 &= \frac{1}{|(x_c)_t|} \partial_t \left( \frac{-\sin v}{\cosh t} \right) \Big|_{t=\pm T} = \frac{1}{c \cosh T} \frac{\sin v \sinh T}{\cosh^2 T} \\ &= -\frac{\sinh T}{c \cosh^2 T} \frac{-\sin v}{\cosh T} = -\frac{\sinh T}{c \cosh^2 T} N_2 \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$\begin{aligned} D_\nu N_3 &= \frac{1}{|(x_c)_t|} \partial_t \left( \frac{\sinh t}{\cosh t} \right) \Big|_{t=\pm T} = \frac{1}{c \cosh T} \frac{1}{\cosh^2 T} \\ &= \frac{1}{c \cosh^2 T} \frac{\sinh T}{\sinh T} \frac{1}{\cosh T} = \frac{\sinh T}{c \cosh^2 T} \frac{1}{\sinh^2 T} N_3 \end{aligned} \quad (2.26)$$

Por outro lado, de (1.23) e (1.24) temos

$$\begin{aligned}\sin \theta &= \langle \nu, x_c \rangle = \frac{c}{\cosh T}(\sinh T \cosh T + T) \\ -\cos \theta &= \langle x_c, N \rangle|_{\partial \Sigma} = c(1 - T \tanh T),\end{aligned}$$

de (1.39) e (2.20)

$$\begin{aligned}q &= \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta A(\nu, \nu) = \frac{1 + \cos \theta A(\nu, \nu)}{\sin \theta} \\ &= \frac{1 + c(1 - T \tanh T) \frac{-1}{c \cosh^2 T}}{\frac{c}{\cosh T}(\sinh T \cosh T + T)} = \frac{\frac{1}{\cosh^3 T}(\cosh^3 T - \cosh T + T \sinh T)}{\frac{c}{\cosh T}(\cosh T \sinh T + T)} \\ &= \frac{1}{c \cosh^2 T} \cdot \frac{\cosh T + \cosh T \sinh^2 T + T \sinh T - \cosh T}{\cosh T \sinh T + T} \\ &= \frac{\sinh T}{c \cosh^2 T}.\end{aligned}\tag{2.27}$$

Logo, de (2.24), (2.25), (2.26) e (2.27) obtemos

$$D_\nu N_1 = -qN_1, \quad D_\nu N_2 = -qN_2 \quad \text{e} \quad D_\nu N_3 = \frac{1}{\sinh^2 T} qN_3.$$

Assim, as funções coordenadas  $N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov (2.4), com autovalores  $-1$ ,  $-1$  e  $\frac{1}{\sinh^2 T}$  respectivamente.  $\square$

Como foi mencionado no início da seção, estudaremos o problema de autovalor de Jacobi-Steklov na catenoide capilar. Pelas equações (2.15) e (2.16), o operador de Jacobi fica

$$\begin{aligned}\mathcal{J}_c &= \Delta_c + |A|^2 = \frac{1}{c^2 \cosh^2 t} \Delta + \frac{2}{c^2 \cosh^4 t} \\ &= \frac{1}{c^2 \cosh^2 t} \left( \Delta + \frac{2}{\cosh^2 t} \right).\end{aligned}\tag{2.28}$$

Dai, no problema de Jacobi-Steklov

$$\begin{cases} \mathcal{J}_c u = 0, & \text{em } \Sigma_c^2, \\ D_\nu u = \lambda q u, & \text{em } \partial \Sigma_c^2 \end{cases}\tag{2.29}$$

para uma função  $u \in C^\infty(\Sigma_c^2)$ . De (2.28) em  $\Sigma_c^2$  tem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{J}_c u \\ &= \frac{1}{c^2 \cosh^2 t} \left( \Delta + \frac{2}{\cosh^2 t} \right) u, \end{aligned}$$

como  $\frac{1}{c^2 \cosh^2 t} > 0$  obtemos

$$\left( \Delta + \frac{2}{\cosh^2 t} \right) u = 0. \quad (2.30)$$

De (2.23) e (2.27) em  $\partial\Sigma_c^2$

$$\begin{aligned} D_\nu u &= \lambda q u \\ \frac{1}{c \cosh T} \partial_t u|_{t=\pm T} &= \lambda \frac{\sinh T}{c \cosh^2 T} u \\ \partial_t u|_{t=\pm T} &= \lambda \tanh T u. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Portanto de (2.30) e (2.31), o problema de Jacobi-Steklov (2.29) fica

$$\begin{cases} \left( \Delta + \frac{2}{\cosh^2 t} \right) u = 0, & \text{em } \Sigma_c, \\ \partial_t u|_{t=\pm T} = \lambda \tanh T u, & \text{em } \partial\Sigma_c \end{cases} \quad (2.32)$$

Por outro lado, como a catenoide capilar  $\Sigma_c^2$  dada pela parametrização (2.5)  $x_c : [-T, T] \times (0, 2\pi) \rightarrow \Sigma_c$  é rotacionalmente simétrica, o método de separação de variáveis pode-se aplicar. Isto é, para uma função  $u \in C^\infty(\Sigma)$  existem funções  $f : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u(t, v) = f(t)h(v)$  e em (2.32) tem-se:

$$\begin{aligned} \left( \Delta + \frac{2}{\cosh^2 t} \right) f(t)h(v) &= 0 \\ \partial_{tt}(f(t)h(v)) + \partial_{vv}(f(t)h(v)) &= -\frac{2}{\cosh^2 t} f(t)h(v) \\ h(v)\partial_{tt}f(t) + f(t)\partial_{vv}h(v) &= -\frac{2}{\cosh^2 t} f(t)h(v) \\ \frac{f_{tt}}{f} + \frac{h_{vv}}{h} &= -\frac{2}{\cosh^2 t}, \end{aligned} \quad (2.33)$$

e em  $\partial\Sigma$

$$\begin{aligned}\partial_t(f(t)h(v))|_{t=\pm T} &= \lambda q f(t)h(v)|_{t=\pm T} \\ \partial_t f|_{t=\pm T} &= \lambda \tanh t \cdot f|_{t=\pm T}.\end{aligned}\tag{2.34}$$

De (2.33) podemos observar, como  $h$  é uma função de  $v$ , então  $\frac{h_{vv}}{h} = \rho$ , onde  $\rho$  é uma constante. Dai,  $h_{vv} - \rho h = 0$  é uma equação diferencial homogênea da segundo ordem e tem como solução:

1. Se  $\rho \geq 0$ , então  $\sqrt{\rho}$  é real, logo  $h(v) = a_1 e^{\sqrt{\rho}v} + a_2 e^{-\sqrt{\rho}v}$ .
2. Se  $\rho \leq 0$ , então  $\sqrt{\rho}$  é complexo, logo  $h(v) = a_1 \cos(\sqrt{-\rho}v) + a_2 \sin(\sqrt{-\rho}v)$ .

Como  $\Sigma_c^2$  é rotacionalmente simétrica, nas coordenadas  $(t, v)$  tem-se  $x_c(t_0, 0) = x_c(t_0, 2\pi)$  para  $t_0 \in [-T, T]$ , logo

$$\begin{aligned}u(x_c(t_0, 0)) &= u(x_c(t_0, 2\pi)) \\ f(t_0)h(0) &= f(t_0)h(2\pi) \\ h(0) &= h(2\pi) \quad \text{se } f(t_0) \neq 0.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Se  $\rho \geq 0$  em (2.35), tem-se  $a_1(1 - e^{\sqrt{\rho}2\pi}) = a_2(e^{-\sqrt{\rho}2\pi} - 1)$ . Uma vez que  $a_1$  e  $a_2$  são constantes que podem assumir qualquer valor e não dependem uma da outra, a igualdade anterior é verdadeira se  $\rho = 0$ , daí  $h$  é constante. Se  $\rho \leq 0$  em (2.35), temos

$$\begin{aligned}a_1 &= a_1 \cos(\sqrt{-\rho}2\pi) + a_2 \sin(\sqrt{-\rho}2\pi) \\ a_1(1 - \cos(\sqrt{-\rho}2\pi)) &= a_2 \sin(\sqrt{-\rho}2\pi),\end{aligned}$$

pelo mesmo argumento do caso anterior,  $a_1$  e  $a_2$  são constantes que podem assumir qualquer valor e não dependem uma da outra, a igualdade anterior é verdadeira se

$$\cos(\sqrt{-\rho}2\pi) = 1 \quad \text{e} \quad \sin(\sqrt{-\rho}2\pi) = 0,\tag{2.36}$$

isto é,  $\sqrt{-\rho} \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ . Considerando  $\sqrt{-\rho} = k$ , então  $\rho = -k^2$  e a solução da equação

deferencial  $h_{vv} + k^2 h = 0$  é:

$$h_k(v) = a_1 \cos(kv) + a_2 \sin(kv), \quad a_1, a_2 \in \mathbb{R} \quad \text{e para } k \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \quad (2.37)$$

$$h_0(v) = a_1, \quad \text{para } k = 0. \quad (2.38)$$

Portanto, de (2.33), (2.34) e considerando  $\rho = -k^2$  o problema de Jacobi-Steklov (2.32) é reduzido a uma equação diferencial ordinária homogênea da segundo ordem, isto é

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \frac{2}{\cosh^2 t} - k^2) f = 0, & \text{em } \Sigma_c^2, \\ \partial_t f|_{t=T} = \lambda \tanh T f(T), & \text{em } \Gamma_+ \\ \partial_t f|_{t=-T} = -\lambda \tanh T f(-T), & \text{em } \Gamma_- \end{cases} \quad (2.39)$$

onde  $\partial\Sigma_c = \Gamma_+ \cup \Gamma_-$  e  $k$  não negativo. Em nosso próximo Teorema damos a solução da equação diferencial ordinária (2.39) e também calcularemos os autovalores do problema de Jacobi-Steklov.

**Teorema 2.1.** *Considere a catenoide capilar dada pela parametrização (2.5). Então as autofunções e autovalores do problema de Jacobi-Steklov (2.29) são dados pelas soluções da equação diferencial ordinária (2.39) para inteiros não negativos  $k$ . Em particular, temos os seguintes casos:*

- Para  $k = 0$ :

$$\begin{aligned} u &= b_1 \tanh t + b_2(1 - t \tanh t) \\ \lambda &= \frac{1}{\sinh^2 T}, \quad \text{se } b_1 \neq 0 \quad \text{e } b_2 = 0; \\ \lambda &= \frac{\sinh T \cosh T + T}{\sinh T(T \sinh T - \cosh T)}, \quad \text{se } b_1 = 0, \quad b_2 \neq 0 \quad \text{e } \theta \neq \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

- Para  $k = 1$ :

$$\begin{aligned} u &= (a_1 \cos v + a_2 \sin v) \left( b_1 \frac{1}{\cosh t} + b_2 \left( \sinh t + \frac{t}{\cosh t} \right) \right) \\ \lambda &= -1, \quad \text{se } b_1 \neq 0 \quad \text{e } b_2 = 0; \\ \lambda &= \frac{\cosh^3 T + \cosh T - T \sinh T}{\sinh T(\sinh T \cosh T + T)}, \quad \text{se } b_1 = 0 \quad \text{e } b_2 \neq 0. \end{aligned}$$

- Para cada  $k \geq 2$ :

$$\begin{aligned} u &= (a_1 \cos kv + a_2 \sin kv) \left( (k - \tanh t)e^{kt} + (k + \tanh t)e^{-kt} \right) \\ \lambda &= \coth T \frac{(k(k - \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T) e^{kT} - (k(k + \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T) e^{-kT}}{(k - \tanh T)e^{kT} + (k + \tanh T)e^{-kT}} \\ u &= (a_1 \cos kv + a_2 \sin kv) \left( (k - \tanh t)e^{kt} - (k + \tanh t)e^{-kt} \right) \\ \lambda &= \coth T \frac{(k(k - \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T) e^{kT} + (k(k + \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T) e^{-kT}}{(k - \tanh T)e^{kT} - (k + \tanh T)e^{-kT}}. \end{aligned}$$

*Demonstração.* Usaremos o método fator de integração para encontrar a solução da equação diferencial ordinária (2.39).

Para  $k = 0$ . A função  $y_1 = \tanh t$  é uma solução da equação diferencial (2.39), pois

$$y_1' = \frac{1}{\cosh^2 t} \quad \text{e} \quad y_1'' = -\frac{2 \sinh t}{\cosh^3 t},$$

e logo substituindo em (2.39), pode-se verificar que:

$$y_1'' + \frac{2}{\cosh^2 t} y_1 = -\frac{2 \sinh t}{\cosh^3 t} + \frac{2}{\cosh^2 t} \tanh t = 0.$$

Então a solução geral da equação diferencial tem a forma  $y = zy_1 = z \tanh t$ , onde  $z$  é uma função e derivando  $y$

$$\begin{aligned} y' &= z' \tanh t + \frac{z}{\cosh^2 t} \\ y'' &= z'' \tanh t + \frac{2z'}{\cosh^2 t} - 2 \frac{z \sinh t}{\cosh^3 t}. \end{aligned}$$

Como  $y$  é a solução de (2.39) tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= y_2'' + \frac{2}{\cosh^2 t} y_2 = z'' \tanh t + \frac{2z'}{\cosh^2 t} - 2 \frac{z \sinh t}{\cosh^3 t} + \frac{2}{\cosh^2 t} \tanh tz \\ &= z'' \tanh t + 2 \frac{z'}{\cosh^2 t} \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned}\ln(z') &= \int \frac{d(z')}{z'} = -2 \int \frac{dt}{\tanh t \cosh^2 t} = \ln(\tanh^{-2} t) + C \\ z' &= \frac{C_1}{\tanh^2 t} \\ z &= C_1 \int \frac{dt}{\tanh t} = C_1(t - \coth t) + C_2,\end{aligned}\tag{2.40}$$

com  $C_1$  e  $C_2$  constantes. De (2.40) temos

$$y = z \tanh t = C_1((t - \coth t) + C_2) \tanh t = -C_1(1 - t \tanh t) + C_2 \tanh t.$$

Por tanto a solução geral da equação diferencial (2.39), para  $k = 0$  esta dado pela combinação linear das funções linearmente independentes  $\{\tanh t, 1 - t \tanh t\}$ . Assim, para  $k = 0$  de (2.38) tem-se  $h_0 = a_1$ ,  $f_0(t) = b_1 \tanh t + b_2(1 - t \tanh t)$  e

$$\begin{aligned}u(v, t) &= a_1(b_1 \tanh t + b_2(1 - t \tanh t)), \\ f_0'(t) &= b_1 \frac{1}{\cosh^2 t} - b_2 \frac{\cosh t \sinh t + t}{\cosh^2 t}.\end{aligned}\tag{2.41}$$

A seguir, calcularemos  $\lambda$  em (2.39). Avaliando os valores  $T$  e  $-T$  em (2.41) temos:

$$\begin{aligned}f_0'(T) + f_0'(-T) &= \lambda(\tanh T f_0(T) - \tanh T f_0(-T)) \\ 2b_1 \frac{1}{\cosh^2 T} &= 2b_1 \lambda \tanh^2 T \\ \lambda &= \frac{1}{\sinh^2 T}, \quad \text{se } b_1 \neq 0,\end{aligned}$$

por outro lado, se

$$\begin{aligned}f_0'(T) - f_0'(-T) &= \lambda(\tanh T f_0(T) + \tanh T f_0(-T)) \\ -2b_2 \frac{\cosh T \sinh T + T}{\cosh^2 T} &= 2b_2 \lambda \tanh T (1 - T \tanh T) \\ \lambda &= \frac{\sinh T \cosh T + T}{\sinh T (T \sinh T - \cosh T)}, \quad \text{se } b_2 \neq 0 \text{ e } \theta = \frac{\theta}{2}.\end{aligned}$$

Para  $k = 1$ . A função  $y_1 = \frac{1}{\cosh t}$  é solução da equação diferencial (2.39), pois

$$y_1' = -\frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \quad \text{e} \quad y_1'' = -\frac{1 - \sinh^2 t}{\cosh^3 t},$$

e logo substituindo em (2.39), podemos verificar que:

$$y_1'' + \left( \frac{2}{\cosh^2 t} - 1 \right) y_1 = -\frac{1 - \sinh^2 t}{\cosh^3 t} + \frac{2 - \cosh^2 t}{\cosh^3 t} = 0.$$

Então a solução geral da equação diferencial tem a forma  $y = zy_1 = z \frac{1}{\cosh t}$ , onde  $z$  é uma função. Derivando  $y$

$$\begin{aligned} y' &= z' \frac{1}{\cosh t} - z \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} \\ y'' &= z'' \frac{1}{\cosh t} - 2z' \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} - z \frac{1 - \sinh^2 t}{\cosh^3 t}. \end{aligned}$$

Como  $y$  é a solução de (2.39) tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + \left( \frac{2}{\cosh^2 t} - 1 \right) y \\ &= z'' \frac{1}{\cosh t} - 2z' \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} - z \frac{1 - \sinh^2 t}{\cosh^3 t} + \frac{1 - \sinh^2 t}{\cosh^3 t} \frac{z}{\cosh t} \\ &= z'' \frac{1}{\cosh t} - 2z' \frac{\sinh t}{\cosh^2 t}, \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \ln(z') &= \int \frac{d(z')}{z'} = 2 \int \tanh t dt = 2 \ln(\cosh t) + D \\ z' &= D_1 \cosh^2 t \\ z &= D_1 \int \cosh^2 t dt = \frac{D_1}{2} (t + \sinh t \cosh t) + D_2 \end{aligned} \quad (2.42)$$

com  $D_1$  e  $D_2$  constantes. De (2.42) obtemos

$$y = \left( \frac{D_1}{2} (t + \sinh t \cosh t) + D_2 \right) \frac{1}{\cosh t} = \frac{D_1}{2} \left( \sinh t + \frac{t}{\cosh t} \right) + D_2 \frac{1}{\cosh t}$$

Por tanto a solução geral da equação diferencial (2.39), para  $k = 1$  esta dada pela combinação linear das funções linearmente independentes  $\left\{ \frac{1}{\cosh t}, \sinh t + \frac{t}{\cosh t} \right\}$ . Assim, para

$k = 1$  de (2.37) tem-se  $h_1(v) = a_1 \cos(v) + a_2 \sin(v)$ ,  $f_1(t) = b_1 \frac{1}{\cosh t} + b_2 \left( \sinh t + \frac{t}{\cosh t} \right)$   
e

$$\begin{aligned} u(v, t) &= (a_1 \cos v + a_2 \sin v) \left( b_1 \frac{1}{\cosh t} + b_2 \left( \sinh t + \frac{t}{\cosh t} \right) \right), \\ f_1'(t) &= -b_1 \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} + b_2 \left( \cosh t + \frac{\cosh t - t \sinh t}{\cosh^2 t} \right). \end{aligned} \quad (2.43)$$

A seguir, calcularemos  $\lambda$  em (2.39). Avaliando os valores  $T$  e  $-T$  em (2.43) tem-se:

$$\begin{aligned} f_1'(T) - f_1'(-T) &= \lambda(\tanh T f_1(T) + \tanh T f_1(-T)) \\ -2b_1 \frac{\sinh T}{\cosh^2 T} &= \lambda \tanh T \frac{2b_1}{\cosh T} \\ \lambda &= -1, \quad \text{se } b_1 \neq 0; \end{aligned}$$

por outro lado, se

$$\begin{aligned} f_1'(T) + f_1'(-T) &= \lambda \tanh T (f_1(T) - f_1(-T)) \\ 2b_2 \left( \cosh T + \frac{\cosh T - T \sinh T}{\cosh^2 T} \right) &= 2b_2 \lambda \tanh T \left( \sinh T + \frac{T}{\cosh T} \right), \end{aligned}$$

então,

$$\lambda = \frac{\cosh^3 T + \cosh T - T \sinh T}{\sinh T (\sinh T \cosh T + T)}, \quad \text{se } b_2 \neq 0.$$

Para  $k \geq 2$ . A função  $y_1 = (k - \tanh t)e^{kt}$  é uma solução da equação diferencial (2.39), pois

$$\begin{aligned} y_1' &= -\frac{1}{\cosh^2 t} e^{kt} + (k - \tanh t) k e^{kt} \\ y_1'' &= 2 \frac{\sinh t}{\cosh^3 t} e^{kt} - \frac{2}{\cosh^2 t} k e^{kt} + (k - \tanh t) k^2 e^{kt}, \end{aligned}$$

e substituindo em (2.39), podemos verificar

$$\begin{aligned} y_1'' + \left( \frac{2}{\cosh^2 t} - k^2 \right) y_1 &= 2 \frac{\sinh t}{\cosh^3 t} e^{kt} - \frac{2}{\cosh^2 t} k e^{kt} + (k - \tanh t) k^2 e^{kt} \\ &+ 2 \frac{k e^{kt}}{\cosh^2 t} - 2 \frac{\sinh t}{\cosh^2 t} e^{kt} - k^3 e^{kt} + k^2 \tanh t e^{kt} = 0. \end{aligned}$$

Então a solução geral da equação diferencial (2.39) tem a forma  $y = z y_1 = z(k - \tanh t)e^{kt}$ ,

onde  $z$  é uma função. Derivando  $y$

$$\begin{aligned} y' &= z'(k - \tanh t)e^{kt} + z \left( -\frac{e^{kt}}{\cosh^2 t} + (k - \tanh t)ke^{kt} \right) \\ y'' &= z''(k - \tanh t)e^{kt} + z' \left( -\frac{e^{kt}}{\cosh^2 t} + (k - \tanh t)ke^{kt} \right) \\ &\quad + z \left( 2\frac{\sinh t}{\cosh^3 t}e^{kt} - 2\frac{ke^{kt}}{\cosh^2 t} + (k - \tanh t)k^2e^{kt} \right). \end{aligned}$$

Como  $y$  é solução de (2.39) tem-se

$$\begin{aligned} 0 &= y'' + \left( \frac{2}{\cosh^2 t} - k^2 \right) y \\ &= z''(k - \tanh t)e^{kt} + z' \left( -\frac{e^{kt}}{\cosh^2 t} + (k - \tanh t)ke^{kt} \right), \end{aligned}$$

então

$$\begin{aligned} \ln(z') &= \int \frac{d(z')}{z'} = -2 \int \left( k - \frac{1}{\cosh^2 t(k - \tanh t)} \right) dt = -2(kt + \ln(k - \tanh t)) + E \\ z' &= E_1 e^{-2kt} (k - \tanh t)^{-2} \\ z &= \frac{E_1}{2(k-1)k(k+1)} \frac{(k + \tanh t)e^{-2kt}}{k - \tanh t} + E_2 \end{aligned} \quad (2.44)$$

com  $E_1$  e  $E_2$  constantes. De (2.44) obtemos

$$\begin{aligned} y = zy_1 &= \left( \frac{E_1}{2(k-1)k(k+1)} e^{-2kt} \frac{k + \tanh t}{k - \tanh t} + E_2 \right) (k - \tanh t)e^{kt} \\ &= \bar{E}_1 (k + \tanh t)e^{-kt} + \bar{E}_2 (k - \tanh t)e^{kt} \end{aligned}$$

onde  $\bar{E}_1 = \frac{E_1}{2(k-1)k(k+1)}$  e  $\bar{E}_2 = E_2$ . Por tanto, a solução geral da equação diferencial (2.39), para  $k \geq 2$  esta dada pela combinação lineal das funções linearmente independentes  $\{(k - \tanh t)e^{kt}, (k + \tanh t)e^{-kt}\}$ . Assim, para  $k \geq 2$  de (2.37) tem-se  $h_k(v) = a_1 \cos kv + a_2 \sin kv$ ,  $f_k(t) = b_1(k - \tanh t)e^{kt} + b_2(k + \tanh t)e^{-kt}$  e

$$\begin{aligned} u(v, t) &= (a_1 \cos(kv) + a_2 \sin(kv)) (b_1(k - \tanh t)e^{kt} + b_2(k + \tanh t)e^{-kt}), \\ f'_k(t) &= b_1(k(k - \tanh t) - \operatorname{sech}^2 t) e^{kt} - b_2(k(k + \tanh t) - \operatorname{sech}^2 t) e^{-kt}. \end{aligned}$$

A seguir, calcularemos  $\lambda$  em (2.39). Avaliando os valores  $T$  e  $-T$  em (2.44) tem-se:

$$\begin{aligned}\lambda \tanh T(b_1 f_k(T) - b_2 f_k(-T)) &= b_1 f'_k(T) + b_2 f'_k(-T) \\ \lambda \tanh T(b_1^2 - b_2^2)(k - \tanh T)e^{kT} &= (b_1^2 - b_2^2)(k(k - \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T)e^{kT},\end{aligned}$$

por outro lado, se

$$\begin{aligned}\lambda \tanh T(b_2 f_k(T) - b_1 f_k(-T)) &= b_2 f'_k(T) + b_1 f'_k(-T) \\ \lambda \tanh T(b_2^2 - b_1^2)(k + \tanh T)e^{-kT} &= (b_1^2 - b_2^2)(k(k + \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T)e^{-kT}.\end{aligned}$$

Das igualdades anteriores podemos concluir que  $b_1^2 - b_2^2 = 0$ . Caso contrário, se  $b_1 - b_2 \neq 0$  das igualdades acima, teríamos

$$\lambda = \frac{k(k - \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T}{\tanh T(k - \tanh T)} = -\frac{k(k + \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T}{\tanh T(k + \tanh T)},$$

dai  $k^2 = \operatorname{sech}^2 T + \tanh^2 T = 1$ , isto é  $k = \pm 1$  que é absurdo pois  $k \geq 2$ . Portanto  $b_1 = \pm b_2$ ,  $u_k(t) = \pm u_k(-t)$  e além disso

$$\begin{aligned}\lambda &= \coth T \frac{u'_k(T)}{u_k(T)} \\ &= \coth T \frac{(k(k - \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T)e^{kT} \mp (k(k + \tanh T) - \operatorname{sech}^2 T)e^{-kT}}{(k - \tanh T)e^{kT} \pm (k + \tanh T)e^{-kT}}.\end{aligned}$$

□

**Observação 4.** No Teorema 2.1 é importante esclarecer o porquê os casos onde  $b_1 \neq 0$  e  $b_2 \neq 0$  para  $k = 0, 1$ , não foram considerados:

1. Quando  $k = 0$ , temos  $u(v, t) = b_1 \tanh t + b_2(1 - t \tanh t)$ . Se  $b_1 \neq 0$  e independente do valor que leva  $b_2$ , tem-se

$$\lambda = \frac{1}{\sinh^2 T}. \quad (2.45)$$

Por outro lado, se  $b_2 \neq 0$  e qualquer valor que for  $b_1$  obtemos

$$\lambda = \frac{\sinh T \cosh T + T}{\sinh T(T \sinh T - \cosh T)}. \quad (2.46)$$

Agora, se  $b_1 \neq 0$  e  $b_2 \neq 0$  obtêm-se ao mesmo tempo o valor de  $\lambda$  dadas nas equações

(2.45) e (2.46), isto é

$$\begin{aligned}\frac{1}{\sinh^2 T} &= \frac{\sinh T \cosh T + T}{\sinh T(T \sinh T - \cosh T)} \\ T \sinh T - \cosh T &= \sinh^2 T \cosh T + T \sinh T \\ -1 &= \sinh^2 T\end{aligned}$$

com solução

$$\begin{aligned}T &= \frac{2k-1}{2}\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}; \\ T &= \frac{4k+3}{2}\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}.\end{aligned}$$

Assim, como as soluções são complexas, descartamos este caso.

2. Quando  $k = 1$ , temos

$$u(u, t) = (a_1 \cos v + a_2 \sin v) \left( b_1 \frac{1}{\cosh t} + b_2 \left( \sinh t + \frac{t}{\cosh t} \right) \right).$$

Se  $b_1 \neq 0$  e independente do valor que leva  $b_2$ , tem-se

$$\lambda = -1. \tag{2.47}$$

Por outro lado, se  $b_2 \neq 0$  e qualquer valor que for  $b_1$ , obtemos

$$\lambda = \frac{\cosh^3 T + \cosh T - T \sinh T}{\sinh T(\sinh T \cosh T + T)}. \tag{2.48}$$

Da mesma forma do caso anterior, se  $b_1 \neq 0$  e  $b_2 \neq 0$  se obtém ao mesmo tempo o valor de  $\lambda$  dadas nas equações (2.47) e (2.48), isto é

$$\begin{aligned}-1 &= \frac{\cosh^3 T + \cosh T - T \sinh T}{\sinh T(\sinh T \cosh T + T)} \\ -\sinh^2 T \cosh T - T \sinh T &= \cosh T(\cosh T + 1) - T \sinh T \\ \cosh^2 T + \sinh^2 T &= -1\end{aligned}$$

cuja solução é

$$\begin{aligned} T &= \frac{2k-1}{2}\pi i, & k \in \mathbb{Z}; \\ T &= \frac{2k+1}{2}\pi i, & k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Assim, o casos onde  $b_1 \neq 0$  e  $b_2 \neq 0$  não foram considerados.  $\diamond$

A importância do Teorema 2.1 está no fato de que os autovalores  $\lambda$  têm uma forma explícita e que isso nos ajudará posteriormente, a determinar em quais valores de  $T$  eles são menores que 1.

## 2.2 Problema de variação de bordo fixo no catenoide capilar

Nesta seção, vamos nos concentrar em estudar o problema de variação que fixem o bordo (2.3) na catenoide imersa em  $\mathbb{R}^3$ . Também estudaremos a estabilidade e instabilidade de domínios simétricos contidos na catenoide associado ao problema (2.3). A seguir, adaptamos os resultados para o caso de catenoides capilares imersas na bola unitária centrada na origem.

Consideremos a família de catenoides cuja parametrização  $x_c : \mathbb{R} \times [0, 2\pi] \rightarrow \Sigma_c \subset \mathbb{R}^3$  é dada por:

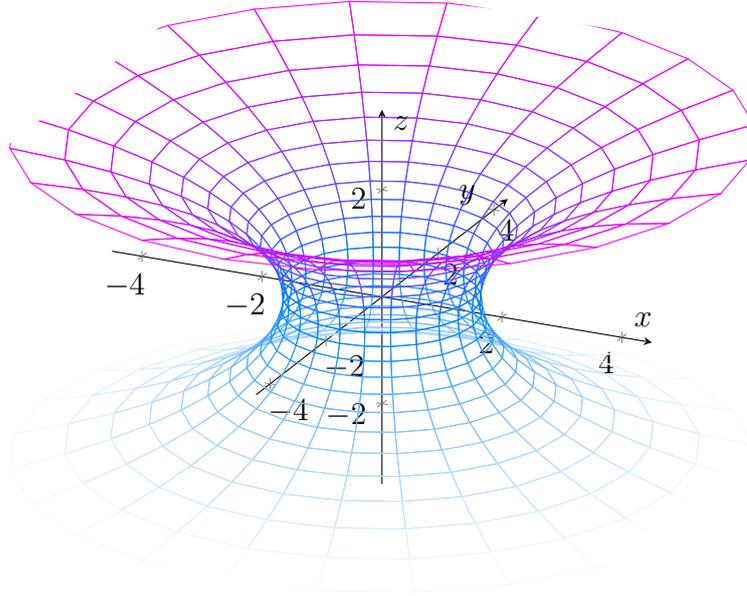
$$x_c(t, v) = (c \cosh t \cos v, c \cosh t \sin v, ct), \quad (2.49)$$

onde  $c > 0$  (veja a Figura 2.2). Pela seção anterior, o operador de Jacobi no sistema de coordenadas  $(t, v)$  tem a forma explícita dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_c &= \Delta_\Sigma + |A|^2 = \frac{1}{c^2 \cosh^2 t} \Delta + \frac{2}{c^2 \cosh^4 t} \\ &= \frac{1}{c^2 \cosh^2 t} \left( \Delta + \frac{2}{\cosh^2 t} \right). \end{aligned}$$

Agora, consideremos os domínios simétricos compactos  $\Sigma_{c,T}$  contidos na catenoide definidos para  $T > 0$  por:

$$\Sigma_{c,T} = x_c([-T, T] \times [0, 2\pi]), \quad (2.50)$$

Figura 2.2: Catenoide  $\Sigma_c$  com  $c = \frac{3}{2}$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

e o problema de autovalores do operador  $\mathcal{J}_c$  associado à variação de bordo fixo em  $\Sigma_{c,T}$ , este é dado por:

$$\begin{cases} \mathcal{J}_c u = -\mu u, & \text{em } \Sigma_{c,T}, \\ u = 0, & \text{em } \partial\Sigma_{c,T}. \end{cases} \quad (2.51)$$

Sob estas condições, Bérard em [4] mostrou o seguinte teorema:

**Teorema 2.2.** *Sejam  $\mathcal{J}_c = \Delta_c + |A|^2$  o operador de Jacobi com condições de fronteira em  $\Sigma_{c,T}$  dado por (2.51) e  $T_0$  o zero positivo da função  $e(t) = 1 - t \tanh t$ . Então:*

1. *Para  $0 < T < T_0$ , o operador  $\mathcal{J}_c$  tem somente autovalores positivos. Daí o domínio  $\Sigma_{c,T}$  é estritamente estável.*
2. *Para  $T = T_0$ , o operador  $\mathcal{J}_{c_0}$  é não negativo e tem o zero como autovalor simples. Daí o domínio  $\Sigma_{c,T}$  é estável.*
3. *Para  $T_0 < T$ , o operador  $\mathcal{J}_c$  tem exatamente um autovalor negativo e o resto positivos. Daí  $\Sigma_{c,T}$  é instável e tem índice 1.*

*Demonstração.* Vamos procurar o valor de  $T$  para o qual os autovalores podem passar de um valor positivo para um valor negativo. Nos parâmetros  $(t, v)$ , escrevemos (2.51) no

domínio  $\Sigma_{c,T}$  como:

$$\frac{1}{c^2 \cosh^2 t} (\partial_{tt} + \partial_{vv}) u(t, v) + \frac{2u(t, v)}{c^2 \cosh^4 t} = -\mu u(t, v) \quad (2.52)$$

com  $u(-T, v) = u(T, v) = 0$ . A catenoide  $\Sigma_c$  dada pela parametrização (2.5)  $x_c : [-T, T] \times (0, 2\pi) \rightarrow \Sigma_c$  é rotacionalmente simétrica, então o método de separação de variáveis pode-se aplicar. Isto é, para uma função  $u \in C^\infty(\Sigma)$  existem funções  $f : [-T, T] \rightarrow \mathbb{R}$  e  $h : (0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $u(t, v) = f(t)h(v)$ . Então em (2.52):

$$\begin{aligned} f_{tt}h + fh_{vv} + \frac{2}{\cosh^2 t} f \cdot h &= -\mu c^2 \cosh^2 t \cdot fh \\ \frac{f_{tt}}{f} + \frac{h_{vv}}{h} + \frac{2}{\cosh^2 t} &= -\mu c^2 \cosh^2 t \end{aligned}$$

e pela seção anterior tem-se que  $\frac{h_{vv}}{h} = -k^2$ , para  $k$  inteiros não negativos. Assim,

$$-f_{tt} + \left( k^2 - \frac{2}{\cosh^2 t} \right) f = \mu c^2 \cosh^2 t f \quad (2.53)$$

com condição de fronteira  $f(-T) = f(T) = 0$ . Agora, vamos introduzir operadores de tipo Sturm Liouville a partir de (2.53) dados por:

$$L_k(f) = -\ddot{f}(t) + \left( k^2 - \frac{2}{\cosh^2 t} \right) f(t).$$

Para examinar os autovalores de nosso problema, consideremos a forma quadrática associada a  $L_k$  dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_k(f) &= \langle L_k(f), f \rangle = \int_{-T}^T \left( -\ddot{f}(t)f(t) + \left( k^2 - \frac{2}{\cosh^2 t} \right) f^2(t) \right) dt \\ &= \int_{-T}^T \left( (\dot{f}(t))^2 + \left( k^2 - \frac{2}{\cosh^2 t} \right) f^2(t) \right) dt + \underbrace{f(T)f'(t)}_0 - \underbrace{f(-T)f'(t)}_0. \end{aligned}$$

De (2.53) tem-se

$$\mathcal{L}_k(f) = \int_{-T}^T \left( (\dot{f}(t))^2 + \left( k^2 - \frac{2}{\cosh^2 t} \right) f^2(t) \right) dt = \mu \int_{-T}^T c^2 \cosh^2 t f(t) dt. \quad (2.54)$$

Portanto, se o nosso problema (2.51) tem autovalores negativos ou positivos depende

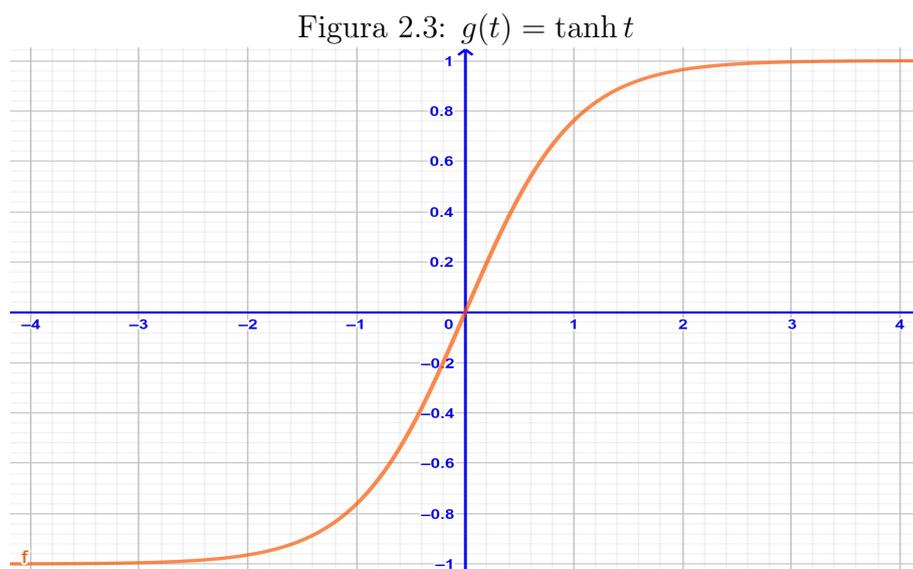
exclusivamente do valor que assume  $k^2 - \frac{2}{\cosh^2 t}$ . Podemos observar, para  $k \geq 2$  tem-se  $k^2 - \frac{2}{\cosh^2 t} \geq 0$ , nesse caso os autovalores seriam todos positivos. Assim, somente resta estudar o que acontece quando  $k = 0$  e  $k = 1$ . Pois seriam as únicas possibilidade de ter autovalor negativo. Para fazer em detalhes este estudo precisamos do seguinte lema prévio.  $\square$

**Lema 2.1.** *Sejam as funções  $g(t) = \tanh t$ ,  $p(t) = \frac{1}{\cosh t}$  e  $e(t) = 1 - t \tanh t$ . Então,*

1. *A função  $g$  é positiva para  $t > 0$  e satisfaz  $L_0(g) = 0$ .*
2. *A função  $p$  é positiva em  $\mathbb{R}$  e satisfaz  $L_1(p) = 0$ .*
3. *A função  $e$  tem exatamente um zero  $T_0$  em  $\mathbb{R}^+$  e satisfaz  $L_0(e) = 0$ .*

*Demonstração.* Para  $g(t) = \tanh t$ . Se  $t > 0$  sabemos que por sua definição  $g(t)$  é positiva (veja a Figura 2.3). Por outro lado

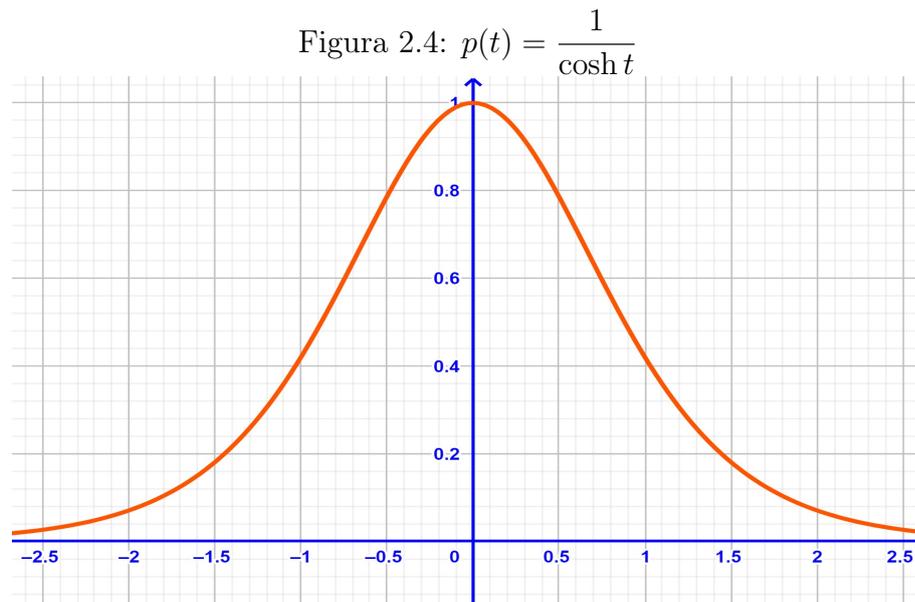
$$\begin{aligned} L_0(g) &= -\ddot{g}(t) - \frac{2}{\cosh^2 t} g(t) \\ &= -\left(-\frac{2}{\cosh^2 t} \tanh t\right) - \frac{2}{\cosh^2 t} \tanh t = 0 \end{aligned}$$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Para  $p(t) = \frac{1}{\cosh t}$ . Por sua definição  $g$  é positiva em  $\mathbb{R}$  (veja a Figura 2.4) e

$$\begin{aligned} L_1(p) &= -\ddot{p}(t) + \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 t}\right) p(t) \\ &= -\frac{1}{\cosh t} \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 t}\right) + \left(1 - \frac{2}{\cosh^2 t}\right) \frac{1}{\cosh t} = 0 \end{aligned}$$



Fonte: Elaborado pelo autor.

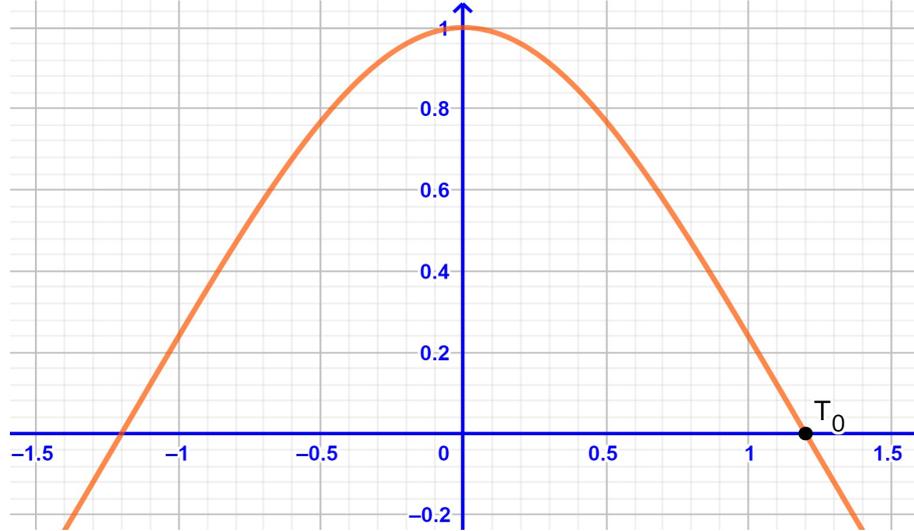
Para  $e(t) = 1 - t \tanh t$ . Tem um zero  $T_0 \approx 1.19968$ , e a função  $e(t)$  é estritamente positivo em  $[0, T_0)$  (veja a Figura 2.5) e

$$\begin{aligned} L_0(e) &= -\ddot{e}(t) + \left(-\frac{2}{\cosh^2 t}\right) e(t) \\ &= \frac{2}{\cosh^2 t} (1 - t \tanh t) + \left(-\frac{2}{\cosh^2 t}\right) (1 - t \tanh t) = 0. \end{aligned}$$

□

*Demonstração.* (Continuação de Teorema 2.53).

Analisemos primeiramente para  $k = 0$  e  $L_0$ . Para o autovalor zero temos  $e(t)$  como a primeira autofunção que satisfaz o problema, pois  $L_0(e) = 0$  em  $[-T_0, T_0]$ ,  $e(-T_0) = e(T_0) = 0$  e não tem zero em  $(-T, T)$ . Logo, pela monotonicidade estrita dos autovalores para o operador de Sturm Liouville  $L_0$  concluímos que  $\mathcal{L}_0(f)$  é positivo em  $[-T, T]$  para

Figura 2.5:  $e(t) = 1 - t \tanh t$  e  $T_0 \approx 1,19968$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

$T < T_0$ . Como  $\mathcal{L}_k \geq \mathcal{L}_0$  vamos ter somente autovalores positivos para todo  $k$  no intervalo  $[-T, T]$  com  $T < T_0$ . Então, para  $0 < T < T_0$  temos estabilidade estrita, completando a prova do item 1.

Por outro lado, para  $k \geq 2$  tem-se que  $\mathcal{L}_k$  é positivo. Afirmamos que  $\mathcal{L}_1$  também é positivo. De fato, tomando a função  $p(t)$  que é positiva em  $\mathbb{R}$  e satisfaz  $L_1(p) = 0$ , logo segue-se que  $L_1$  tem somente autovalores positivos, assim  $\mathcal{L}_1 > 0$ . Então para  $T = T_0$  se tem o primeiro autovalor zero associado ao operador  $L_0$  com autofunção  $e(t)$  e para  $k \geq 1$ ,  $\mathcal{L}_k$  é positivo. Assim, para todo  $k \geq 0$   $\mathcal{L}_k$  é não negativo em  $T = T_0$  e o autovalor zero é simples, o que prova o item 2.

Pelo mostrado anteriormente, os autovalores negativos podem estar associados somente a  $L_0$ . Para  $T > T_0$  deve existir pelo menos um autovalor negativo pois o problema possui autovalores negativos para soluções não triviais. Para mostrar que existe exatamente um autovalor negativo, suponhamos que  $T_0 \in (-T, T)$  e que o operador  $L_0$  tem pelo menos dois autovalores negativos. Então a autofunção associada ao segundo autovalor negativo possui exatamente um zero no intervalo  $(-T, T)$ . Tomando a função  $g(t)$  que cumpre com  $L_0(g) = 0$  e tem um único zero  $t_0 = 0 \in (-T, T)$ , então existe a possibilidade de que zero seja o segundo autovalor, mas desde  $g(-T) \neq 0$  e  $g(T) \neq 0$ , pode-se deduzir que o segundo autovalor é positivo o que é uma contradição. Portanto, existe exatamente um autovalor negativo, que conclui a prova do item 3.

□

Os resultados obtidos por Lindelöf são relevantes pois a estabilidade pode ser estudada a partir de uma construção geométrica conhecida como construção de Lindelöf. Bérard e Earp em [5] mostraram o Teorema de Lindelöf para a catenoide em  $\mathbb{R}^3$ .

**Teorema 2.3. (Teorema de Lindelöf em  $\mathbb{R}^3$ )** *Seja  $T_0$  o zero positivo da função  $e(t) = 1 - t \tanh t$ , então*

1. *O domínio  $\Sigma_{1,T_0} = x_1([-T_0, T_0] \times [0, 2\pi])$  é um domínio maximal de estabilidade da catenoide  $\Sigma_1 = x_1(\mathbb{R} \times [0, 2\pi])$ .*
2. *O domínio  $\Sigma_+ = x_1(\mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi])$  é um domínio maximal de estabilidade invariante por rotações na catenoide  $\Sigma$ . Mas precisamente, dado  $\alpha > 0$  qualquer, a função*

$$e(\alpha, t) = v(\alpha)e(t) + e(\alpha)v(t) \quad (2.55)$$

*com  $v(t) = \tanh t$  tem um único zero positivo  $\beta(\alpha)$  e o domínio  $\Sigma_{\alpha,\beta} = x_1((-\alpha, \beta(\alpha)) \times [0, 2\pi])$  é um domínio maximal de estabilidade invariante por rotações na catenoide  $\Sigma$ .*

Uma consequência dos Teoremas 2.2 e 2.3 é:

**Corolário 4.** *Seja  $T_0$  o zero positivo da função  $1 - t \tanh t$ , então*

$$\Sigma_{c,T_0} = x_c([-T_0, T_0] \times [0, 2\pi])$$

*é um domínio maximal de estabilidade da catenoide  $\Sigma_c = x_c(\mathbb{R} \times [0, 2\pi])$ .*

*Demonstração.* Pelo item 2 do Teorema 2.2 tem-se que  $\Sigma_c$  é fracamente estável. Do Teorema 2.3, para  $c = 1$  o domínio  $\Sigma_{1,T_0} = x_1([-T_0, T_0] \times [0, 2\pi])$  é um domínio maximal de estabilidade do catenoide  $\Sigma_1 = x_1(\mathbb{R} \times [0, 2\pi])$  e o operador de Jacobi  $\mathcal{J}_1$  tem o primeiro autovalor em (2.51)  $\lambda_1(\Sigma_{1,T_0}) = 0$ .

Por outro lado, para as coordenadas  $(t, v)$ , temos a forma explícita do operador de

Jacobi em  $\Sigma_c = x_c(\mathbb{R} \times [0, 2\pi])$ , que é dado por:

$$\mathcal{J}_c = \frac{1}{c^2 \cosh^2 t} \left( \Delta + \frac{2}{\cosh^2 t} \right).$$

Assim, para  $c = 1$  e  $u \in C^\infty(\Sigma_{1,T_0})$  se tem

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 u &= -\mu(\Sigma_{1,T_0})u \\ \frac{1}{\cosh^2 t} \left( \Delta + \frac{2}{\cosh^2 t} \right) u &= -\mu(\Sigma_{1,T_0})u \\ \frac{1}{c^2 \cosh^2 t} \left( \Delta + \frac{2}{\cosh^2 t} \right) u &= -\frac{\mu(\Sigma_{1,T_0})}{c^2} u, \quad \text{pois } c > 0 \\ \mathcal{J}_c u &= -\mu(\Sigma_{c,T_0})u, \quad \text{onde } \mu(\Sigma_{c,T_0}) = \frac{\mu(\Sigma_{1,T_0})}{c^2} \end{aligned}$$

O que significa que existe uma correspondência dos autovalores de  $\mathcal{J}_1$  e  $\mathcal{J}_c$ . Além disso, a correspondência preserva o sinal dos autovalores.

Agora, suponhamos que existe  $T > T_0$  tal que  $\Sigma_{c,T}$  é um domínio estável e  $\Sigma_{c,T_0} \subset \Sigma_{c,T}$ , então pela propriedade de monotonicidade temos que

$$\mu_1(\Sigma_{c,T}) < \mu_1(\Sigma_{c,T_0}) = \frac{\mu_1(\Sigma_{1,T_0})}{c^2} = 0,$$

que é uma contradição, pois  $\Sigma_{c,T}$  é estável. Assim,  $\Sigma_{c,T_0}$  é um domínio fracamente maximal de estabilidade.  $\square$

Como nosso estudo é da família de catenoides imersas na bola unitária  $\mathbb{B}_1^3(0)$ , então  $0 < c < 1$ . Além disso, da parametrização  $x_c : [-T, T] \times [0, 2\pi] \rightarrow \Sigma_{c,T} \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  definida por:

$$x_c(t, v) = (c \cosh t \cos v, c \cosh t \sin v, ct), \quad (2.56)$$

e pela condição de capilaridade  $\Sigma_{c,T} \cap \mathbb{S}^2 \neq \emptyset$  isto é, para cada  $c > 0$  existe um  $T > 0$  tal que

$$1 = |x_c(T, v)| = c^2(\cosh^2 T + T^2) \quad \Rightarrow \quad c(T) = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}},$$

obtendo a fórmula explícita da constante que depende de  $T$ . Desta forma, vamos denotar o domínio  $\Sigma_{c,T} \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  da catenoide, simplesmente por  $\Sigma_c$ .

Adaptamos o Teorema 2.3, para o caso de catenoides capilares imersos na bola uni-

tária ( $0 < c < 1$ ). Se  $c(T_0) = c_0$ , então podemos dividir a família das catenoides  $\{\Sigma_c\}_{0 < c < 1}$  imersas na bola unitária  $\Sigma_c \subset \mathbb{B}_1^3(0)$ , em duas subfamílias  $\{\Sigma_c\}_{0 < c < c_0}$  e  $\{\Sigma_c\}_{c_0 \leq c < 1}$ . Na seguinte proposição, conseguimos classificar essas famílias como domínios instáveis e estáveis, respectivamente.

**Proposição 2.3.** *Sejam  $T_0$  o zero positivo da função  $e(t) = 1 - t \tanh t$  e  $\{\Sigma_c\}_{0 < c < 1}$  a família de catenoides imersas em  $\mathbb{B}_1^3(0)$  dadas pela parametrização (2.5), onde  $c = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}}$ . Então:*

1. *Se  $0 < c < c_0$ , a catenoide capilar  $\Sigma_c$  é instável.*
2. *Se  $c = c_0$ , a catenoide  $\Sigma_{c_0}$  (catenoide crítico) é fracamente estável.*
3. *Se  $c_0 < c < 1$ , a catenoide capilar  $\Sigma_c$  é estritamente estável.*

*Demonstração.* Se consideramos a constante  $c$  como uma função com respeito a  $T$ , então  $c$  es estritamente decrescente, pois

$$c'(T) = -\frac{\cosh T \sinh T + T}{\cosh^2 T + T^2} < 0, \quad \text{para todo } T > 0. \quad (2.57)$$

1. Se  $0 < c < c_0$ . Pelo parágrafo anterior,  $c$  é decrescente e portanto  $T_0 < T$ , do item 3 do Teorema 2.2, podemos concluir que  $\Sigma_c$  é instável. Além disso, o operador de Jacobi  $\mathcal{J}_c$  (no problema de borde fixo dada em (2.51)) tem exatamente um autovalor negativo (veja a Figura 2.6).

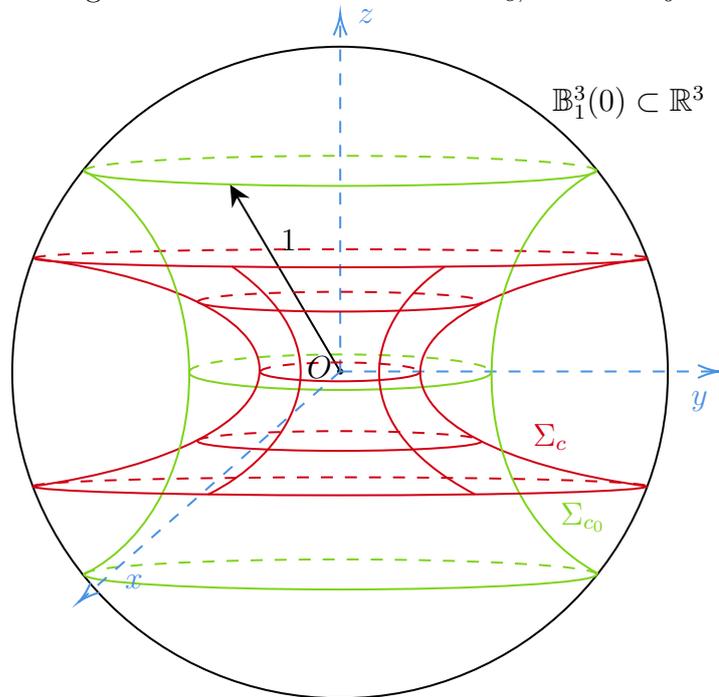
2. Se  $c = c_0$ . Como que  $c_0 = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 T_0 + T_0^2}}$  e  $1 - T_0 \tanh T_0 = 0$ , então  $T_0 \sinh T_0 = \cosh T_0$  e

$$c_0 = \frac{1}{T_0 \cosh T_0}.$$

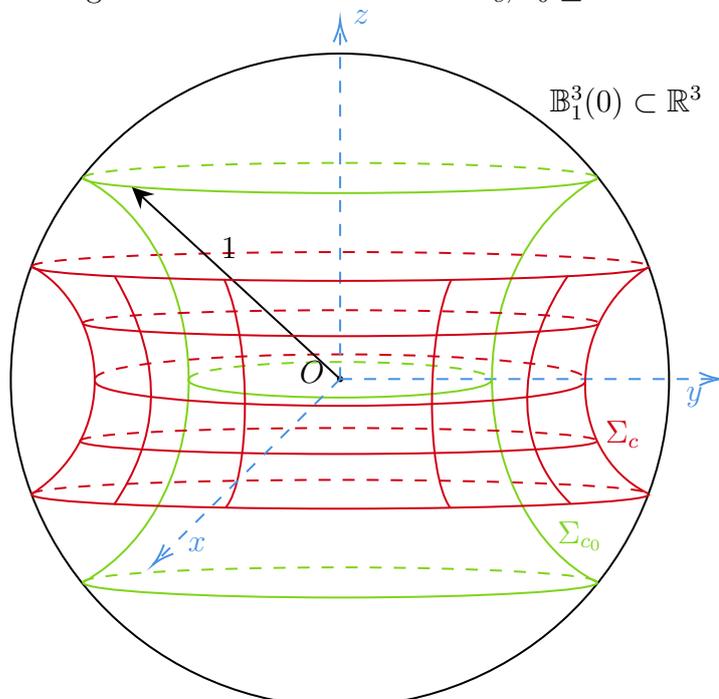
Assim,  $\Sigma_{c_0}$  é a catenoide crítico. Por outro lado, como  $c$  é decrescente e injetiva, temos  $T = T_0$ . Finalmente, pelo item 2 do Teorema 2.2 o operador  $\mathcal{J}_c$  no problema (2.51) tem o zero como autovalor simples isto é,  $\Sigma_{c_0}$  é fracamente estável (veja das Figuras 2.6 e 2.7  $\Sigma_{c_0}$ ).

3. Se  $c_0 < c$ . O fato de  $c$  ser decrescente implica que  $T < T_0$ . Logo, pelo primeiro item do Teorema 2.2 temos que  $\Sigma_c$  é estritamente estável, o que significa que todos o autovalores do operador  $\mathcal{J}_c$  no problema (2.51) são positivos (veja a Figura 2.7).

□

Figura 2.6: Catenoide instável  $\Sigma_c$ ,  $0 < c < c_0$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 2.7: Catenoide estável  $\Sigma_c$ ,  $c_0 \leq c < 1$ 

Fonte: Elaborado pelo autor.

## 2.3 Índice do catenoide capilar imerso na bola unitária

Nesta seção, vamos enunciar e provar nosso resultado mais importante. Concretamente, forneceremos o índice de Morse da catenoide capilar imersa na bola unitária centrada na origem  $\mathbb{B}_1^3(0)$ , e como caso particular apresentaremos que a catenoide crítica possui índice de Morse igual a 4. Recuperando assim o resultado obtido em [21], [18] e [6].

Vamos começar a seção mencionando o resultado que foi demonstrado por Tran-Zhou em [22, Theorem 4.1], que será o suporte do nosso resultado mais relevante. Basicamente o teorema relaciona  $\text{Ind}(\Sigma)$ , o número de autovalores negativos de (2.2), o número de autovalores não positivos de (2.3) e o número de autovalores menores que 1 de (2.4).

**Teorema 2.4.** (Tran-Zhou (2020) [22, Theorem 4.1]) *Seja  $\Sigma^n \subset B$  uma hipersuperfície capilar e  $q(x) \geq 0$  para todo  $x \in \partial\Sigma^n$ . Então*

$$\text{Ind}(\Sigma^n) = a + b, \quad (2.58)$$

onde  $a$  é o número de autovalores não positivos de (2.3), contando a multiplicidade, e  $b$  é o número de autovalores menores que 1 de (2.4), contando a multiplicidade.

Para nossa estimativa do índice de Morse da catenoide capilar, faremos uso do teorema anterior. Antes de apresentar nosso resultado, provaremos uma sequência de resultados para funções de variável real, que são necessárias para entender melhor a prova de nosso resultado.

**Lema 2.2.** *Seja  $0 < x_0$  o zero da função  $\tau(x) = x \tanh x - 1$ . Então*

1. *Para  $0 < x < x_0$ , temos*

$$x \sinh x - \cosh x < 0 \quad (2.59)$$

$$\frac{\cosh^3 x + \cosh x - x \sinh x}{\sinh x(\sinh x \cosh x + x)} > 1 \quad (2.60)$$

2. Para  $x_0 < x$ , temos

$$\frac{1}{\sinh^2 x} < 1 \quad (2.61)$$

$$\frac{\cosh^3 x + \cosh x - x \sinh x}{\sinh x(\sinh x \cosh x + x)} < 1 \quad (2.62)$$

*Demonstração.* Seja  $\tau(x) = x \tanh x - 1$ , temos  $\tau(0) = -1$ ,  $\tau(x_0) = 0$  e sua derivada  $\tau'(x) = \tanh x + \frac{x}{\cosh^2 x} > 0$  para todo  $x > 0$ , o que significa que  $\tau(t)$  é estritamente crescente em  $(0, x_0)$ .

1. Para  $0 < x < x_0$ , temos  $\tau(x) < \tau(x_0)$ , isto é

$$\begin{aligned} x \tanh x - 1 &< x_0 \tanh x_0 - 1 = 0, \text{ pois } e(x_0) = 0 \\ x \sinh x - \cosh x &< 0. \end{aligned}$$

Para o segundo caso:

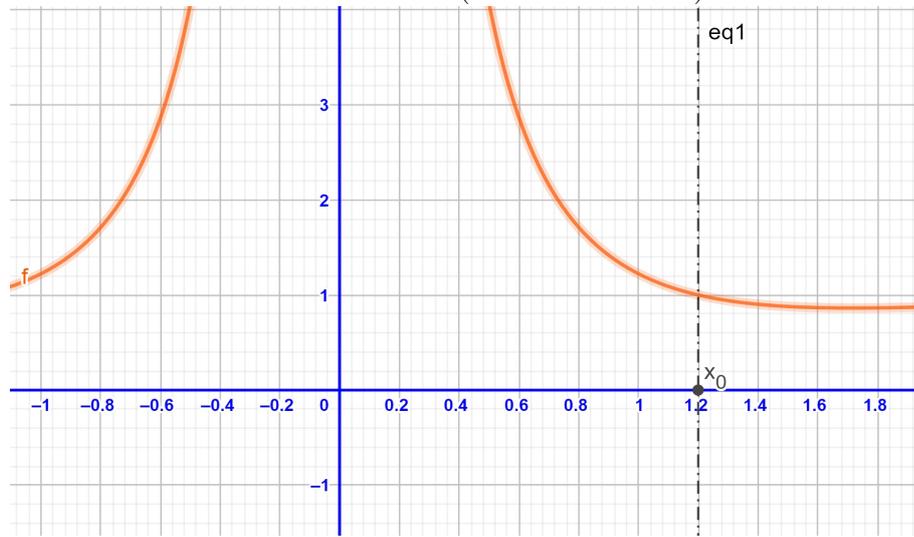
$$\begin{aligned} x \sinh x - \cosh x &< 0 \\ x \sinh x &< \cosh x \\ \sinh^2 x \cosh x + 2x \sinh x &< \cosh x(2 + \sinh^2 x) \\ \sinh x(\sinh x \cosh x + x) &< \cosh x(\cosh^2 x + 1) - x \sinh x \\ 1 &< \frac{\cosh^3 x + \cosh x - x \sinh x}{\sinh x(\sinh x \cosh x + x)}, \quad (\text{veja a Figura 2.8}) \end{aligned}$$

2. Para  $x_0 < x$ . Como  $x_0$  é zero de  $\tau$ , temos  $x_0 \tanh x_0 - 1 = 0$ , logo  $\cosh^2 x_0 = x_0^2 \sinh^2 x_0$ . Sabe-se também que  $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$  para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então

$$\frac{1}{\sinh^2 x_0} = x_0^2 - 1 < 1, \quad \text{pois } x_0 \approx 1,1996... \quad (2.63)$$

Por outro lado, a função  $\sinh x$  é crescente para todo  $x \in \mathbb{R}$ , então se  $0 < x_0 < x$

Figura 2.8:  $\frac{\cosh^3 x + \cosh x - x \sinh x}{\sinh x (\sinh x \cosh x + x)}$

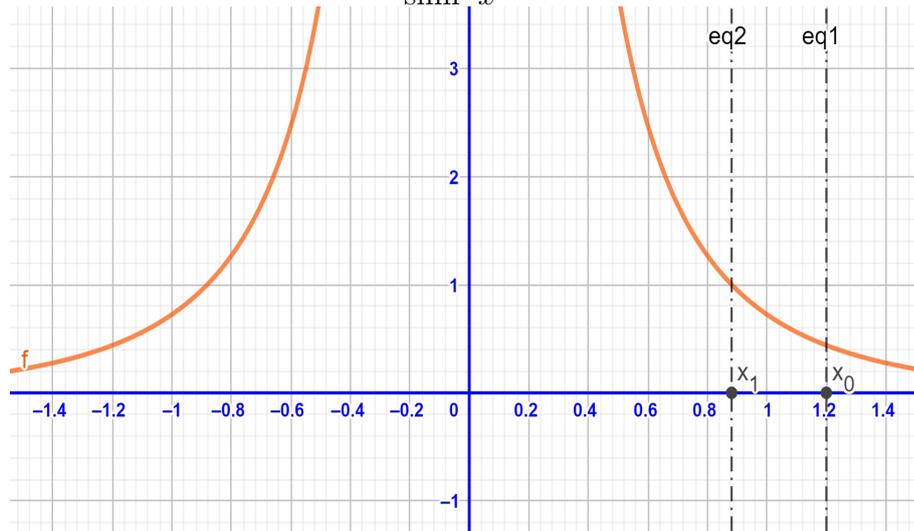


Fonte: Elaborado pelo autor.

temos  $\sinh x_0 < \sinh x$ . Portanto (veja a Figura 2.8)

$$\begin{aligned} \sinh^2 x_0 &< \sinh^2 x \\ \frac{1}{\sinh^2 x} &< \frac{1}{\sinh^2 x_0} < 1, \quad \text{por (2.63)} \end{aligned}$$

Figura 2.9:  $\frac{1}{\sinh^2 x}$  e  $x_1 \approx 0.8813$



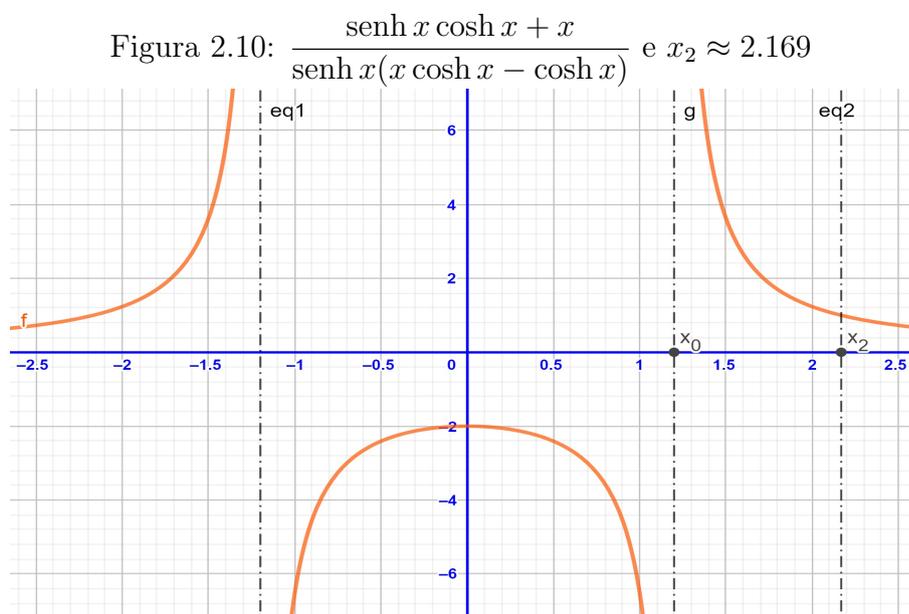
Fonte: Elaborado pelo autor.

Finalmente, para  $x_0 < x$  e como a função  $\tau$  é crescente temos  $0 = \tau(x_0) < \tau(x)$ ,

isto é

$$\begin{aligned}
 0 &< x \sinh x - \cosh x \\
 \cosh x &< x \sinh x \\
 \cosh x(2 + \sinh^2 x) &< \sinh^2 x \cosh x + 2x \sinh x \\
 \cosh x(\cosh^2 x + 1) - x \sinh x &< \sinh x(\sinh x \cosh x + x) \\
 \frac{\cosh^3 x + \cosh x - x \sinh x}{\sinh x(\sinh x \cosh x + x)} &< 1, \quad (\text{veja a Figura 2.9})
 \end{aligned}$$

Assim, concluímos a prova do Lema. □



Fonte: Elaborado pelo autor.

**Lema 2.3.** *Sejam  $x \in \mathbb{R}$ , tal que  $x > 0$  e  $k \in \mathbb{N}$  com  $k \geq 2$ . Então*

$$k < \coth x \frac{(k(k - \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{kx} \pm (k(k + \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{-kx}}{(k - \tanh x) e^{kx} \mp (k + \tanh x) e^{-kx}} \quad (2.64)$$

*Demonstração.* Como  $x > 0$  e  $k \geq 2$  temos que  $2x(k - 1) > 0$ , logo  $1 < e^{2x(k-1)}$ . Sabe-se que  $0 < e^{-x(k-1)}$ , então

$$\begin{aligned}
 e^{-x(k-1)} &< e^{x(k-1)} \\
 e^{x(k+1)} - e^{x(k-1)} + e^{-x(k-1)} - e^{-x(k+1)} &< e^{x(k+1)} - e^{-x(k-1)} + e^{x(k-1)} - e^{-x(k+1)} \\
 (e^{kx} + e^{-kx})(e^x - e^{-x}) &< (e^{kx} - e^{-kx})(e^x + e^{-x}) \\
 \coth kx &< \coth x.
 \end{aligned}$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned}
 k \coth kx &< \coth x(k - 1 + \tanh^2 x) \\
 k(k + 1) \coth kx &< \coth x(k^2 - 1) + \tanh^2 x(k + 1) \\
 \tanh x \cosh kx(k^2 + k) &< \sinh kx((k^2 - 1) + \tanh^2 x(k + 1)) \\
 k(k \cosh kx - \tanh^2 x \sinh kx) &< \coth x((k^2 - 1) \sinh kx - k \tanh x \cosh kx \\
 &\quad + \tanh^2 x \sinh kx) \\
 k(k - \tanh x)e^{kx} - (k + \tanh x)e^{-kx} &< \coth x \{ (k(k - \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{kx} \\
 &\quad + (k(k + \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{-kx} \}
 \end{aligned}$$

Portanto (veja a Figura 2.11, para  $k = 3$ )

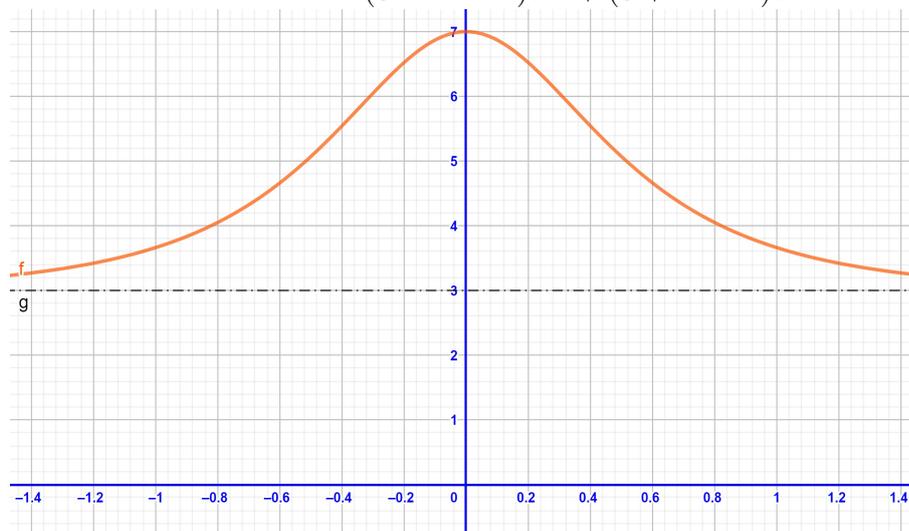
$$k < \coth x \frac{(k(k - \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{kx} + (k(k + \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{-kx}}{(k - \tanh x)e^{kx} - (k + \tanh x)e^{-kx}}$$

De maneira semelhante podemos mostrar que (veja a Figura 2.12, para  $k = 3$ )

$$k < \coth x \frac{(k(k - \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{kx} - (k(k + \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{-kx}}{(k - \tanh x)e^{kx} + (k + \tanh x)e^{-kx}}.$$

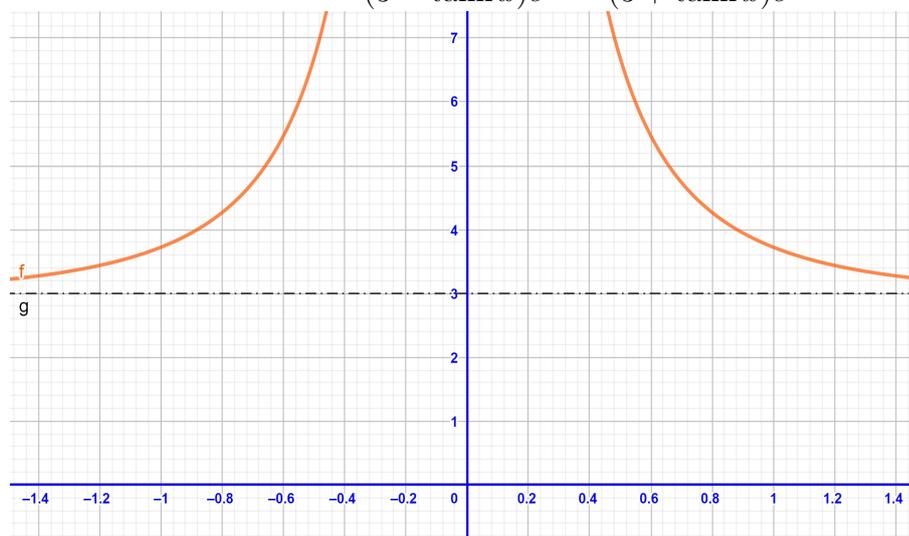
□

Figura 2.11:  $\coth x \frac{(3(3 - \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{3x} - (3(3 + \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{-3x}}{(3 - \tanh x)e^{3x} + (3 + \tanh x)e^{-3x}}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Figura 2.12:  $\coth x \frac{(3(3 - \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{3x} + (3(3 + \tanh x) - \operatorname{sech}^2 x) e^{-3x}}{(3 - \tanh x)e^{3x} - (3 + \tanh x)e^{-3x}}$



Fonte: Elaborado pelo autor.

Consideremos  $\Sigma_c$  a catenoide capilar imersa na bola unitária  $\mathbb{B}_1^3(0)$ , dada pela parametrização (2.5). Das observações 2 e 3, tem-se que: se  $\theta \in (\tilde{\theta}, \frac{\pi}{2})$ , então  $T > T_0$  e se  $\theta \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$ , então  $T < T_0$ . Levando em conta o Teorema 2.4, Proposição 2.3, Teorema 2.1 e seguindo as ideias do trabalho de Tran [21], conseguimos estimar o índice de Morse da catenoide capilar contida na bola unitária  $\Sigma_c \subset \mathbb{B}_1^3(0)$ , para todo  $\theta \in (\tilde{\theta}, \pi)$ . Nosso resultado é.

**Teorema 2.5.** *Seja  $\{\Sigma_c\}_{0 < c < 1}$  a família de catenoides capilares imersas na bola unitária  $\mathbb{B}_1^3(0)$  centrada na origem dadas por (2.5), onde  $c = \frac{1}{\sqrt{\cosh^2 T + T^2}}$ . Temos os seguintes casos:*

1. Se  $0 < T \leq T_1$ , onde  $\frac{1}{\sinh^2 T_1} = 1$ , então

$$\operatorname{Ind}(\Sigma_c) = 3. \quad (2.65)$$

2. Se  $T_1 < T < T_0$ , onde  $T_0$  é o zero positivo da função  $\tau(t) = 1 - t \tanh t$ , então

$$\operatorname{Ind}(\Sigma_c) = 4. \quad (2.66)$$

3. Se  $T = T_0$ , então  $c = \frac{1}{T_0 \cosh T_0}$ ,  $\Sigma_c$  é o catenoide crítico e

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = 4. \quad (2.67)$$

4. Se  $T_0 < T \leq T_2$ , onde  $\frac{\sinh T_2 \cosh T_2 + T_2}{\sinh T_2 (T_2 \sinh T_2 - \cosh T_2)} = 1$ , então

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = 6. \quad (2.68)$$

5. Se  $T_2 < T$ , então

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = 7. \quad (2.69)$$

En particular, não existe catenoide capilar do índice de Morse igual a 5.

*Demonstração.* Para uma função  $u \in C^\infty(\Sigma_c)$  tal que  $\mathcal{J}_c u = -\mu u$  em  $\Sigma_c$  e  $u = 0$  em  $\partial\Sigma_c$ , então a forma quadrática  $Q$  dada em (1.55) se reduz-se a

$$Q(u, u) = - \int_{\Sigma_c} u \mathcal{J}_c u d\Sigma = \mu \int_{\Sigma_c} u^2 d\Sigma.$$

Assim,  $Q(u, u) \leq 0$  se o autovalor  $\mu$  é menor ou igual que zero. Por outro lado, para uma função  $u \in C^\infty(\Sigma_c)$  tal que satisfaz  $\mathcal{J}_c u = 0$  em  $\Sigma_c$  e  $D_\nu u = \lambda q u$  em  $\partial\Sigma_c$ , então a forma quadrática  $Q$  dada em (1.55) fica reduzido em

$$Q(u, u) = (\lambda - 1) \int_{\partial\Sigma_c} u^2 q d\partial\Sigma,$$

e por (2.27) tem-se  $q > 0$  para todo  $T > 0$ . Então  $Q(u, u) < 0$  se  $\lambda$  for menor que 1.

No Teorema 2.1 tem-se a forma explicita dos autovalores do operador  $\mathcal{J}_c$  no problema de Jacobi-Setklov (2.4), então nosso trabalho é verificar em quais casos, os autovalores  $\lambda$  são menores que 1. Vamos começar verificando os autovalores calculados no Teorema 2.1 para o caso de  $k \geq 2$ , isto é

$$\lambda = \coth T \frac{(k(k - \tanh T) - \text{sech}^2 T) e^{kT} \pm (k(k + \tanh T) - \text{sech}^2 T) e^{-kT}}{(k - \tanh T) e^{kT} \mp (k + \tanh T) e^{-kT}}.$$

Do Lema 2.3, podemos concluir que  $\lambda > k \geq 2 > 1$ , para todo  $T > 0$  (veja a Figura 2.11 e

2.12). Ou seja, as autofunções associadas a esses autovalores não contribui para o índice de  $\Sigma_c$ , para todo  $T > 0$ . Portanto resta verificar somente os casos  $k = 0$  e  $k = 1$ .

Se  $0 < T \leq T_1$ , onde  $\frac{1}{\sinh^2 T_1} = 1$  e  $T_1 \approx 0,8813\dots$

1. Para  $k = 0$ , tem-se:

- (a)  $\lambda = \frac{1}{\sinh^2 T} \geq \frac{1}{\sinh^2 T_1} = 1$ , pois  $\frac{1}{\sinh^2 t}$  é decrescente. Assim,  $\lambda \geq 1$  e portanto não contribui ao índice (veja a Figura 2.9).
- (b)  $\lambda = \frac{\sinh T \cosh T + T}{\sinh T (T \sinh T - \cosh T)} < 0 < 1$ , pois do Lema 2.2 tem-se  $T \sinh T - \cosh T < 0$  para  $0 < T < T_0$ . Assim,  $\lambda < 1$  e é um autovalor simples, portanto contribui ao índice com 1 (veja a Figura 2.10).

2. Para  $k = 1$ , tem-se:

- (a)  $\lambda = -1 < 1$  o autovalor satisfaz trivialmente e tem multiplicidade 2. Assim,  $\lambda = -1$  contribui ao índice com 2.
- (b)  $\lambda = \frac{\cosh^3 T + \cosh T - T \sinh T}{\sinh T (\sinh T \cosh T + T)} > 1$ , isto é por causa do Lema 2.2 e equação (2.60). Assim,  $\lambda$  não contribui ao índice de  $\Sigma_c$  (veja a Figura 2.8).

Portanto o operador  $\mathcal{J}_c$  no problema de Jacobi-Steklov (2.4) contribui ao índice com 3. Por outro lado, do item 1 do Teorema 2.2,  $\Sigma_c$  é estritamente estável para  $0 < T < T_0$ , ou seja  $\mathcal{J}_c$  tem somente autovalores positivos ( $\mu > 0$ ) no problema de bordo fixo (2.3). Logo, do Teorema 2.4 temos

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = a + b = 0 + 3 = 3. \quad (2.70)$$

Se  $T_1 < T < T_0$ , onde  $T_0 \approx 1,1996\dots$  é o zero positivo de  $\tau(t) = 1 - t \tanh t$ .

1. Para  $k = 0$ , tem-se:

- (a)  $\lambda = \frac{1}{\sinh^2 T} < \frac{1}{\sinh^2 T_1} = 1$ , pois  $\frac{1}{\sinh^2 t}$  é decrescente. Assim,  $\lambda < 1$  e é um autovalor simples, logo contribui ao índice com 1 (veja a Figura 2.9).
- (b)  $\lambda = \frac{\sinh T \cosh T + T}{\sinh T (T \sinh T - \cosh T)} < 0 < 1$ , pois do Lema 2.2 tem-se  $T \sinh T - \cosh T < 0$  para  $0 < T < T_0$ . Assim,  $\lambda < 1$  e é um autovalor simples, portanto contribui ao índice com 1 (veja a Figura 2.10).

2. Para  $k = 1$ , tem-se:

- (a)  $\lambda = -1 < 1$  o autovalor satisfaz trivialmente e tem multiplicidade 2. Assim,  $\lambda = -1$  contribui ao índice com 2.
- (b)  $\lambda = \frac{\cosh^3 T + \cosh T - T \sinh T}{\sinh T(\sinh T \cosh T + T)} > 1$ , isto é por causa do Lema 2.2 e equação (2.60). Assim,  $\lambda$  não contribui ao índice de  $\Sigma_c$  (veja a Figura 2.8).

Resumindo, o operador  $\mathcal{J}_c$  no problema de Jacobi-Steklov (2.4) contribui ao índice com 4. Por outro lado, do item 1 do Teorema 2.2,  $\Sigma_c$  é estritamente estável para  $0 < T < T_0$ , ou seja  $\mathcal{J}_c$  tem somente autovalores positivos ( $\mu > 0$ ) no problema de bordo fixo (2.3), pelo que não contribui ao índice de  $\Sigma_c$ . Logo, do Teorema 2.4 obtemos

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = a + b = 0 + 4 = 4. \quad (2.71)$$

Se  $T = T_0$ , onde  $T_0 \approx 1,1996\dots$

Pela condição de capilaridade de  $\Sigma_{c_0}$  temos

$$\langle N, x_c \rangle|_{t=\pm T_0} = c \frac{\cosh T_0 - T_0 \sinh T_0}{\cosh T_0} = -\cos \theta, \quad (2.72)$$

e como  $T_0$  é o zero da função  $e(t) = 1 - t \tanh t$ , então  $\cosh T_0 - T_0 \sinh T_0 = 0$ , daí em (2.72)

$$\langle N, x_c \rangle|_{t=\pm T_0} = 0 = -\cos \theta,$$

então  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , pois  $\theta \in (0, \pi)$ . Assim,  $\Sigma_{c_0}$  é o catenoide crítico. Pela demonstração do item 2 da Proposição 2.3 tem-se

$$c = \frac{1}{T_0 \cosh T_0}.$$

Agora vamos verificar os autovalores:

1. Para  $k = 0$  tem-se:

- (a)  $\lambda = \frac{1}{\sinh^2 T_0} < 1$ , por (2.63). Assim,  $\lambda < 1$  e é um autovalor simples, portanto contribui ao índice com 1 (veja a Figura 2.9).

2. Para  $k = 1$ , tem-se:

- (a)  $\lambda = -1 < 1$  o autovalor satisfaz trivialmente e tem multiplicidade 2. Assim,  $\lambda = -1$  contribui ao índice com 2.
- (b)  $\lambda = \frac{\cosh^3 T_0 + \cosh T_0 - T_0 \sinh T_0}{\sinh T_0 (\sinh T_0 \cosh T_0 + T_0)} = 1$ , esse fato ocorre e é fácil de verificar pois  $T_0$  é o zero da função  $1 - t \tanh t$ . Assim,  $\lambda = 1$  não contribui ao índice de  $\Sigma_{c_0}$  (veja a Figura 2.8).

Resumindo, o operador  $\mathcal{J}_c$  no problema de Jacobi-Steklov (2.4) contribui ao índice com 3. Por outro lado, pelo item 2 do Teorema 2.2,  $\Sigma_{c_0}$  é fracamente estável para  $T = T_0$ , ou seja  $\mathcal{J}_{c_0}$  no problema de bordo fixo (2.3), tem o primeiro autovalor  $\mu_1 = 0$  que é simples e o resto dos autovalores positivos. Portanto contribui ao índice de  $\Sigma_{c_0}$  com 1. Logo, do Teorema 2.4 obtemos

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = a + b = 1 + 3 = 4. \quad (2.73)$$

Se  $T_0 < T \leq T_2$ , onde  $\frac{\sinh T_2 \cosh T_2 + T_2}{\sinh T_2 (T_2 \sinh T_2 - \cosh T_2)} = 1$  e  $T_2 \approx 2,169\dots$

1. Para  $k = 0$ , tem-se:

- (a)  $\lambda = \frac{1}{\sinh^2 T} < 1$ , por Lema 2.2 equação (2.61). Assim,  $\lambda < 1$  e é um autovalor simples, portanto contribui ao índice com 1 (veja a Figura 2.9).
- (b)  $\lambda = \frac{\sinh T \cosh T + T}{\sinh T (T \sinh T - \cosh T)} \geq 1$ , para  $T_0 < T \leq T_2$ . Assim,  $\lambda > 1$  e portanto não contribui ao índice (veja a Figura 2.10).

2. Para  $k = 1$ , tem-se:

- (a)  $\lambda = -1 < 1$  o autovalor satisfaz trivialmente e tem multiplicidade 2. Assim,  $\lambda = -1$  contribui ao índice com 2.
- (b)  $\lambda = \frac{\cosh^3 T + \cosh T - T \sinh T}{\sinh T (\sinh T \cosh T + T)} < 1$  pela equação (2.62) do Lema 2.2. Assim,  $\lambda < 1$  e tem multiplicidade 2, pelo que contribui ao índice de  $\Sigma_c$  com 2 (veja a Figura 2.8).

Resumindo, tem-se que o operador  $\mathcal{J}_c$  no problema de Jacobi-Steklov (2.4) contribui ao índice com 5. Por outro lado, do item 3 do Teorema 2.3,  $\Sigma_c$  é instável para  $T > T_0$ , além disso  $\mathcal{J}_c$  no problema de bordo fixo (9), tem exatamente um autovalor negativo ( $\mu_1 < 0$ )

e o resto positivos. Portanto contribui ao índice de  $\Sigma_c$  com 1. Logo, do Teorema 2.4 obtemos

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = a + b = 1 + 5 = 6. \quad (2.74)$$

Se  $T_2 < T$ .

1. Para  $k = 0$ , temos:

- (a)  $\lambda = \frac{1}{\sinh^2 T} < 1$ , por Lema 2.2 equação (2.61). Assim,  $\lambda < 1$  e é um autovalor simples, portanto contribui ao índice com 1 (veja a Figura 2.9).
- (b)  $\lambda = \frac{\sinh T \cosh T + T}{\sinh T(T \sinh T - \cosh T)} < \frac{\sinh T_2 \cosh T_2 + T_2}{\sinh T_2(T_2 \sinh T_2 - \cosh T_2)} = 1$ , pois a função  $\frac{\sinh t \cosh t + t}{\sinh t(t \sinh t - \cosh t)}$  é decrescente para  $T > T_2$ . Assim,  $\lambda < 1$  e é um autovalor simples, portanto contribui ao índice com 1 (veja a Figura 2.10).

2. Para  $k = 1$ , temos:

- (a)  $\lambda = -1 < 1$  o autovalor satisfaz trivialmente e tem multiplicidade 2. Assim,  $\lambda = -1$  contribui ao índice com 2.
- (b)  $\lambda = \frac{\cosh^3 T + \cosh T - T \sinh T}{\sinh T(\sinh T \cosh T + T)} < 1$ , por Lema 2.2 equação (2.62). Assim,  $\lambda < 1$  e tem multiplicidade 2, pelo que contribui ao índice de  $\Sigma_c$  com 2 (veja a Figura 2.8).

Finalmente, o operador  $\mathcal{J}_c$  no problema de Jacobi-Steklov (2.4) contribui ao índice com 6. Por outro lado, pelo item 3 do Teorema 2.2,  $\Sigma_c$  é instável para  $T > T_0$ , além disso  $\mathcal{J}_c$  no problema de bordo fixo (2.3), tem exatamente um autovalor negativo ( $\mu_1 < 0$ ) e o resto positivos. Portanto contribui ao índice de  $\Sigma_c$  com 1. Logo, do Teorema 2.4 obtemos

$$\text{Ind}(\Sigma_c) = a + b = 1 + 6 = 7. \quad (2.75)$$

□

Nossas estimativas encontradas no Teorema 2.5 nos sugere falar sobre muitas questões interessantes. Por exemplo, caracterizar as superfícies mínimas capilares topologicamente um anel contidas na bola unitária que possuem índice de Morse 3, 4, 6 e 7. O caso

de uma superfície mínima de fronteira livre que tem índice de Morse 4 já foi feito por H. Tran, e o resultado é:

**Teorema 2.6.** (H. Tran (2022) [21, Corollary 3.11] ) *Suponhamos que  $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^2(0)$  é uma superfície mínima de fronteira livre mergulhada topologicamente um anel, com índice de Morse 4. Então  $\Sigma$  é congruente ao catenoide crítico.*

Esperamos que, para o caso de superfícies mínimas capilares mergulhadas topologicamente um anel  $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^2(0)$ , tenhamos uma caracterização semelhante. Isto é: se  $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^2(0)$  é uma superfície mínima capilar mergulhada topologicamente um anel, com índice de Morse 3 (4, 6 ou 7), então  $\Sigma$  é congruente ao catenoide capilar.

## Capítulo 3

# APLICAÇÃO NORMAL DE GAUSS EM UMA HIPERSUPERFÍCIE MÍNIMA CAPILAR

Nesta parte de nosso trabalho, estudaremos a aplicação normal de Gauss sobre hipersuperfícies mínimas capilares contidas na bola unitária Euclidiana. Seguindo as ideias do trabalho de H. Tran [20], conseguimos provar alguns resultados de classificação para hipersuperfícies mínimas capilares. Entretanto, resta demonstrar um resultado que generalize o seguinte teorema, para o caso em que  $\Sigma^n$  seja uma hipersuperfície mínima capilar:

**Teorema 3.1.** (Tran (2019) [20, Theorem 1.1]) *Seja  $\Sigma \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  uma superfície mínima de fronteira livre tal que as funções coordenadas do campo normal  $N$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov. Então  $\Sigma$  é rotacionalmente simétrica.*

A seguir apresentamos os resultados que obtivemos.

### 3.1 Aplicação normal de Gauss como autofunção de Jacobi-Steklov

Lembrando que, ao longo da seção, vamos considerar  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  como uma hipersuperfície imersa na bola unitária Euclidiana. Dada a função  $h \in C^\infty(\partial\Sigma^n)$ , uma função  $\bar{h} \in C^\infty(\Sigma^n)$  é dito uma  $\mathcal{J}$ -extensão de  $h$  se:

$$\begin{cases} \mathcal{J}\bar{h} = 0 & \text{em } \Sigma^n \\ \bar{h} = h & \text{em } \partial\Sigma^n. \end{cases}$$

A  $\mathcal{J}$ -extensão existe e é única, se e somente se  $\bar{h}$  é  $L^2$ -perpendicular ao kernel de  $\mathcal{J}$  com condição de Dirichlet (veja [21, Lemma 2.5]). A aplicação de Dirichlet-Neumann  $L_{\mathcal{J}} : C^\infty(\partial\Sigma^n) \rightarrow C^\infty(\partial\Sigma^n)$  é definido por

$$L_{\mathcal{J}}h = D_\nu\bar{h} = \frac{\partial}{\partial\nu}\bar{h}. \quad (3.1)$$

Assim, se define o problema de Jacobi-Steklov em uma hipersuperfície mínima capilar.

**Definição 3.1. (Jacobi-Steklov)** *Uma função  $u \in C^\infty(\Sigma^n)$  é uma autofunção com autovalor  $\lambda$  de (3.1) se satisfaz o seguinte:*

$$\begin{cases} \mathcal{J}u = 0, & \text{em } \Sigma^n, \\ D_\nu u = \lambda qu, & \text{em } \partial\Sigma^n. \end{cases} \quad (3.2)$$

onde  $q = \frac{1}{\sin\theta} + \cot\theta A(\nu, \nu)$  e  $\theta$  denota o ângulo de interseção de  $\Sigma^n$  e  $\mathbb{S}^n$ .

Motivados nos resultados obtidos por H. Tran em [20] e [21], estudaremos algumas classificações de hipersuperfícies mínimas capilares  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$ . Sabe-se que a aplicação normal de Gauss  $N : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  sobre uma hipersuperfície mínima capilar  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  está intrinsecamente relacionado ao problema de Jacobi-Steklov (3.2), pois  $\mathcal{J}N_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$ . Antes de apresentar os resultados, vamos fazer algumas considerações. Suponhamos que  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  é um conjunto analítico e cada função coordenada da aplicação normal de Gauss  $N = (N_1, \dots, N_{n+1}) : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{S}^n$  são autofunções do problema

de Jacobi-Steklov (3.1), isto é:

$$D_\nu N_i = \lambda_i q N_i, \quad (3.3)$$

para todo  $i = 1, \dots, n + 1$ . Entre as superfícies que satisfazem (3.3), podemos mencionar: O  $n$ -disco totalmente geodésico, pois neste caso  $N$  é um campo constante e portanto  $D_\nu N_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n + 1$ , daí tem-se  $\lambda_i = 0$  para todo  $i$ . Outra superfície que satisfaz (3.3) é a catenoide capilar (veja Proposição 2.2).

**Proposição 3.1.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima capilar imersa na bola unitária. Suponhamos que as funções coordenadas do campo normal  $N = (N_1, \dots, N_{n+1})$  ao longo de  $\partial\Sigma^n$  satisfazem:*

$$D_\nu N_i = \lambda_i q N_i, \quad (3.4)$$

para todo  $i = 1, \dots, n + 1$ , em que  $\lambda_i$  são constantes e  $q = \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta A(\nu, \nu)$ .

1. Se  $\lambda_i = 0$  para algum  $i$ , então  $H^{\partial\Sigma} = -\frac{n-1}{\sin \theta}$  ou  $x_i = \text{cte}$  em  $\partial\Sigma^n$ .
2. Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = \lambda$ , então  $\lambda = 0$  e  $H^{\partial\Sigma} = -\frac{n-1}{\sin \theta}$ .
3. Se  $\lambda_i \neq 0$  para cada  $i$ , então  $q \neq 0$  e  $A(\nu, \nu) \neq 0$  em todo ponto de  $\partial\Sigma^n$ .

*Demonstração.* Se  $\lambda_i = 0$  para algum  $i$ . Das identidades (1.57) e (3.3) obtemos  $D_\nu N_i = \lambda_i q N_i = A(\nu, \nu) \nu_i = 0$ . Daí  $A(\nu, \nu) \nu_i = 0$ , e como  $\Sigma^n$  é um conjunto analítico ao longo de  $\partial\Sigma^n$ , temos os seguintes casos:  $A(\nu, \nu) \equiv 0$  ou  $\nu_i \equiv 0$  em  $\partial\Sigma^n$ .

(a) Se  $A(\nu, \nu) \equiv 0$ . Para  $p \in \partial\Sigma^n$  e  $\Sigma^n$  sendo mínima tem-se

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), N \rangle + A(\nu, \nu) = 0, \quad (3.5)$$

onde  $\{\partial_1, \dots, \partial_{n-1}\} \subset T_p \partial\Sigma$  é uma base ortonormal de  $T_p \partial\Sigma^n$  e  $\{\partial_1, \dots, \partial_{n-1}, \nu\} \subset$

$T_p\Sigma$  é uma base ortonormal de  $T_p\Sigma$  em  $p$ . Daí,

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), N \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), -\cos \theta \bar{N} + \sin \theta \bar{\nu} \rangle \\ &= -\cos \theta \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{N} \rangle + \sin \theta \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{\nu} \rangle \\ &= \cos \theta (n-1) + \sin \theta \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{\nu} \rangle, \end{aligned}$$

onde na segunda igualdade foi usada a identidade (1.24) e na última  $A^{\mathbb{S}^n}(\partial_i, \partial_i) = -1$ , pois  $\partial_i$  são campo de vetores unitários tangentes ao esfera. Assim,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{\nu} \rangle = -(n-1) \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \quad (3.6)$$

Por outro lado, a curvatura media de  $\partial\Sigma^n \subset \Sigma^n$  e por (1.23) obtemos

$$\begin{aligned} H^{\partial\Sigma} &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \nu \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \sin \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu} \rangle \\ &= \sin \theta \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{N} \rangle + \cos \theta \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{\nu} \rangle \\ &= -\sin \theta (n-1) - \cos \theta (n-1) \frac{\cos \theta}{\sin \theta} = -\frac{n-1}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

- (b) Se  $\nu_i \equiv 0$ . Como para  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$ , então  $\bar{N}(x) = x$  para todo  $x \in \partial\Sigma^n$  e das identidades (1.23) e (1.24)  $x_i = \sin \theta \nu_i - \cos \theta N_i$  e também  $\langle x, \nu \rangle = \sin \theta$ . Como  $\nu_i \equiv 0$ , então

$$x_i = -\cos \theta N_i. \quad (3.7)$$

Suponhamos sem perda de generalidade que  $i = n+1$ , então  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_n, 0)$  e como  $\langle x, \nu \rangle = \sin \theta$ , podemos parametrizar uma componente conexa de  $\partial\Sigma^n$ , pela parametrização  $x : U \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \partial\Sigma^n$  dada por:

$$x(u_1, \dots, u_{n-1}) = \sin \theta \left( \prod_{i=1}^{n-1} \cos u_i, \sin u_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \cos u_i, \dots, \sin u_1, \cot \theta \right). \quad (3.8)$$

Agora, consideremos os campos de vetores tangentes unitários ao longo de  $\partial\Sigma^n$ ,

associados à parametrização  $x$ :

$$\partial_{u_j} = \frac{x_{u_j}}{|x_{u_j}|}, \quad (3.9)$$

onde

$$x_{u_j} = \sin \theta \left( -\sin u_j \prod_{i \neq j}^{n-1} \cos u_i, -\sin u_{n-1} \sin u_j \prod_{i \neq j}^{n-2} \cos u_i, \dots, \right. \\ \left. -\sin u_{j+1} \sin u_j \prod_{i=1}^{j-1} \cos u_i, \cos u_j \prod_{i=1}^{j-1} \cos u_i, 0, \dots, 0 \right),$$

para  $j = 1, \dots, n-1$  e  $|x_{u_j}| = \sin \theta \prod_{i=1}^{j-1} \cos u_i$ . Por outro lado, de (3.8) e  $\langle x, \nu \rangle = \sin \theta$  conseguimos:

$$\nu = \left( \prod_{i=1}^{n-1} \cos u_i, \sin u_{n-1} \prod_{i=1}^{n-2} \cos u_i, \dots, \sin u_1, 0 \right).$$

Finalmente sabe-se que,  $\langle x_{u_j}, \nu \rangle = \langle x_{u_j}, N \rangle = 0$  e  $\langle N, \nu \rangle = 0$ , para  $i = 1, \dots, n-2$ .

Então

$$\partial_{u_1} \times \partial_{u_2} \times \dots \times \partial_{u_{n-1}} \times \nu = \pm(0, \dots, 1) = \pm e_{n+1} = N \quad (3.10)$$

e por (3.7) concluímos que  $x_{n+1} = \pm \cos \theta$ .

Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = \lambda$ . De (1.57) e (3.3)

$$\begin{aligned} \lambda q N_i &= A(\nu, \nu) \nu_i \quad \Leftrightarrow \quad \lambda q N_i \nu_i = A(\nu, \nu) \nu_i^2 \\ &\Rightarrow \quad \lambda q \langle N, \nu \rangle = A(\nu, \nu) |\nu|^2 = 0 \end{aligned}$$

pois  $\langle N, \nu \rangle = 0$  e  $|\nu| = 1$ . Assim,  $A(\nu, \nu) \equiv 0$  e pelo item (a) do caso anterior conclui-se que

$$H^{\partial \Sigma} = -\frac{n-1}{\sin \theta}. \quad (3.11)$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
\lambda q N_i = A(\nu, \nu) \nu_i &\Leftrightarrow \lambda q N_i^2 = A(\nu, \nu) N_i \nu_i \\
&\Rightarrow \lambda q |N|^2 = A(\nu, \nu) \langle N, \nu \rangle \\
&\Rightarrow \lambda q = 0,
\end{aligned} \tag{3.12}$$

pois  $\langle N, \nu \rangle = 0$  e  $|N| = 1$ .

Afirmamos que  $q(x) \neq 0$  para todo  $x \in \partial\Sigma^n$ . De fato, de (3.12) temos que  $q \equiv 0$  ou  $\lambda = 0$ . Se  $q \equiv 0$ , então

$$0 \equiv q = \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta A(\nu, \nu)$$

daí  $A(\nu, \nu) = -\frac{1}{\cos \theta}$  com  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ . Para  $p \in \partial\Sigma^n$  e  $\Sigma^n$  sendo mínima tem-se

$$H(p) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), N \rangle + A(\nu, \nu) = 0, \tag{3.13}$$

onde  $\{\partial_1, \dots, \partial_{n-1}\} \subset T_p \partial\Sigma^n$  é uma base ortonormal tal que  $\{\partial_1, \dots, \partial_{n-1}, \nu\} \subset T_p \Sigma$  é uma base ortonormal de  $T_p \Sigma$  em  $p$ . De (1.24),  $N = -\cos \theta \bar{N} + \sin \theta \bar{\nu}$  e em (3.13)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos \theta} &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), N \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), -\cos \theta \bar{N} + \sin \theta \bar{\nu} \rangle \\
&= -\cos \theta \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{N} \rangle + \sin \theta \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{\nu} \rangle \\
&= \cos \theta (n-1) + \sin \theta \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{\nu} \rangle,
\end{aligned}$$

onde na segunda igualdade  $A^{\mathbb{S}^n}(\partial_i, \partial_i) = \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{N} \rangle = -1$ , pois  $\partial_i$  são campos de vetores unitários tangentes a  $\mathbb{S}^n$ . Assim,

$$\sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{\nu} \rangle = \frac{1 - \cos^2 \theta (n-1)}{\sin \theta \cos \theta}. \tag{3.14}$$

Finalmente calculando a curvatura média de  $\partial\Sigma^n \subset \Sigma^n$ . Como  $\nu = \sin \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu}$  em

$\partial\Sigma^n$ , então

$$\begin{aligned}
H^{\partial\Sigma} &= \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \nu \rangle = \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \sin\theta \bar{N} + \cos\theta \bar{\nu} \rangle \\
&= \sin\theta \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{N} \rangle + \cos\theta \sum_{i=1}^{n-1} \langle A(\partial_i, \partial_i), \bar{\nu} \rangle \\
&= -\sin\theta(n-1) + \cos\theta \frac{1 - \cos^2\theta(n-1)}{\sin\theta \cos\theta} = -\frac{n-2}{\sin\theta}. \tag{3.15}
\end{aligned}$$

Comparando os valores obtidos em (3.11) e (3.15) conseguimos um absurdo. Assim,  $q \neq 0$  para todo  $x \in \partial\Sigma^n$  e por (3.12) concluímos que  $\lambda = 0$ .

Se  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$ . Primeiro vamos provar  $A(\nu, \nu) \neq 0$  para todo ponto de  $\partial\Sigma^n$ . Suponhamos que existe  $x_0 \in \partial\Sigma^n$  tal que  $A(\nu, \nu)(x_0) = 0$ , então  $q = \frac{1}{\sin\theta}$ . De (1.57) e (3.3)

$$\begin{aligned}
\lambda_i q N_i(x_0) = A(\nu, \nu)(x_0) \nu_i(x_0) &\Rightarrow \lambda_i q N_i = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n+1. \\
&\Rightarrow \lambda_i N_i(x_0) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n+1. \tag{3.16}
\end{aligned}$$

Por outro lado,  $|N| = 1$  então existe  $k \in \{1, \dots, n+1\}$  tal que  $N_k(x_0) \neq 0$  assim, de (3.16)  $\lambda_k N_k(x_0) = 0$ , isto é  $\lambda_k = 0$  que é absurdo, pois  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$ . A seguir, vamos provar  $q \neq 0$  em todo ponto de  $\partial\Sigma^n$ . Se  $\theta = \frac{\pi}{2}$  tem-se  $q = 1$ . Assim, resta verificar o caso quando  $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ . Suponhamos que existe  $x_0 \in \partial\Sigma^n$  tal que

$$0 = q(x_0) = \frac{1}{\sin\theta} + \cot\theta A(\nu, \nu)(x_0) \Rightarrow A(\nu, \nu)(x_0) = -\frac{1}{\cos\theta}, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}.$$

De (1.57) e (3.3)

$$\begin{aligned}
0 = \lambda_i q(x_0) N_i(x_0) = A(\nu, \nu)(x_0) \nu_i(x_0) &\Rightarrow A(\nu, \nu)(x_0) \nu_i(x_0) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n+1. \\
&\Rightarrow -\frac{1}{\cos\theta} \nu_i(x_0) = 0, \quad \theta \neq \frac{\pi}{2}. \\
&\Rightarrow \nu(x_0) = 0, \quad \forall i = 1, \dots, n+1,
\end{aligned}$$

que é absurdo, pois  $|\nu| = 1$ . Concluindo a demonstração da Proposição.  $\square$

Como uma consequência da Proposição anterior, podemos caracterizar as hipersu-

perfícies que satisfazem (3.3). Nosso próximo resultado mostra exatamente isso.

**Teorema 3.2.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima capilar, sendo  $\theta \in (0, \pi)$  o ângulo de interseção de  $\Sigma^n$  e  $\mathbb{S}^n$ . Assuma que as funções coordenadas do campo normal  $N$  em  $\Sigma^n$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov, isto é  $D_\nu N_i = \lambda_i q N_i$  para todo  $i$ . Temos os seguintes casos.*

1. *Se  $\lambda_i = 0$  para algum  $i$ , então  $\Sigma^n$  é um  $n$ -disco totalmente geodésico ou cada componente conexa de  $\partial\Sigma^n \subset \mathbb{S}^n$  é totalmente umbílica.*
2. *Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = \lambda$ , então cada componente conexa de  $\partial\Sigma^n \subset \mathbb{S}^n$  é totalmente umbílica.*
3. *Se  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$ , então para  $x \in \partial\Sigma^n$  existe uma vizinhança de  $x$  tal que as funções coordenadas do vetor posição são dadas por:*

$$x_i(u_1, \dots, u_{n-1}) = \sin \theta (b_{0i} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji} u_j)^{1/2} - \cos \theta \frac{1}{\lambda_i q^2} \left( \frac{b_{0i} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji} u_j}{P_0 + \sum_{j=1}^{n-1} P_j u_j} \right)^{1/2} \quad (3.17)$$

onde  $b_{ij}, P_j \in \mathbb{R}$  e  $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$  são os parâmetros.

*Demonstração.* Se  $\lambda_i = 0$  para algum  $i$ , segue do item 1 da Proposição 3.1 que  $\nu_i \equiv 0$  ou  $A(\nu, \nu) \equiv 0$  em  $\partial\Sigma^n$ . Primeiro, se  $\nu_i \equiv 0$  em  $\partial\Sigma^n$  e  $\Delta_\Sigma x_i = 0$  (pois  $\Sigma^n$  é mínima), então de (1.56) e por integração partes

$$\begin{aligned} 0 &= \int_\Sigma x_i \Delta_\Sigma x_i d\Sigma = - \int_\Sigma |\nabla x_i|^2 d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} x_i D_\nu x_i d\partial\Sigma \\ &= - \int_\Sigma |\nabla x_i|^2 d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} x_i \nu_i d\partial\Sigma = - \int_\Sigma |\nabla x_i|^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Daí segue  $|\nabla x_i|^2 = 0$  e  $\nabla x_i = 0$ . Por outro lado,

$$\begin{aligned} e_i = \bar{\nabla} x_i &= \nabla x_i + \langle \bar{\nabla} x_i, N \rangle N \\ &= N_i N, \end{aligned} \quad (3.19)$$

pois  $\bar{\nabla} x_i = e_i$ . Daí  $N_i^2 = 1$  e portanto  $N = \pm e_i$  é constante em  $\Sigma^n$ , pelo que podemos concluir  $\Sigma^n$  é um  $n$ -disco paralelo ao plano coordenado  $x_i = 0$ . Para o segundo caso,

se  $A(\nu, \nu) \equiv 0$  em  $\partial\Sigma^n$  de (3.6) cada componente conexa de  $\partial\Sigma^n \subset \mathbb{S}^n$  tem curvatura média constante e do Teorema de Alexandrov [14, Theorem 10], cada componente conexa de  $\partial\Sigma^n \subset \mathbb{S}^n$  é totalmente umbílica, isto é, para  $\Gamma \subset \partial\Sigma^n$  uma componente conexa,  $\Gamma = \mathbb{S}^n \cap \Pi$  onde  $\Pi$  é um hiperplano.

Se  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n+1} = \lambda$ , então do item 2 da Proposição 3.1 tem-se que cada componente conexa de  $\partial\Sigma^n \subset \mathbb{S}^n$  tem curvatura média constante (3.6) e do Teorema de Alexandrov [14, Theorem 10], pode-se concluir que, para  $\Gamma \subset \partial\Sigma^n$  uma componente conexa,  $\Gamma = \mathbb{S}^n \cap \Pi$  onde  $\Pi$  é um hiperplano.

Se consideramos  $\lambda_i \neq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n+1$ , segue de (1.57) e (3.3) que  $A(\nu, \nu)\nu_i = \lambda_i q N_i$ . Daí,

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\nu_i^2}{\lambda_i} = q \frac{\langle N, \nu \rangle}{A(\nu, \nu)} = 0 \quad (3.20)$$

pois  $\langle N, \nu \rangle = 0$ . Por outro lado, consideremos a aplicação  $F : \mathbb{S}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  dada por

$$F(s_1, \dots, s_{n+1}) = (s_1^2, \dots, s_{n+1}^2). \quad (3.21)$$

Pode-se observar que  $F$  é um difeomorfismo local nos pontos  $s \in \mathbb{S}^n$  tal que  $s$  não pertence aos planos coordenados, isto é,  $s \notin \Pi_i$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$ . Como  $\nu(\partial\Sigma) \subset \mathbb{S}^n$ , então  $F(\nu(\partial\Sigma))$  está contido no plano  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$  e por (3.20) temos que  $F(\nu(\partial\Sigma))$  é perpendicular ao vetor constante  $\bar{\lambda} = \left( \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right)$ .

Como  $\lambda_i \neq 0$ , para todo  $i = 1, \dots, n+1$ , pode-se afirmar que:  $\bar{\lambda}$  não é perpendicular ao plano  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$ . De fato, suponhamos que  $\bar{\lambda}$  é perpendicular ao plano  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$ . Então  $\bar{\lambda}$  é paralelo ao vetor  $(1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , isto é

$$\bar{\lambda} = \left( \frac{1}{\lambda_1}, \dots, \frac{1}{\lambda_{n+1}} \right) = a(1, \dots, 1) \quad (3.22)$$

para algum  $a \in \mathbb{R}$ . Logo  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{n+1}$  e do item 2 da Proposição 3.1,  $\lambda_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$ . O que é um absurdo pois por hipótese  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$ . Assim,  $F(\nu(\partial\Sigma)) \perp (1, \dots, 1)$ ,  $F(\nu(\partial\Sigma)) \perp \bar{\lambda}$  e  $\bar{\lambda} \nparallel (1, \dots, 1)$ , então cada componente conexa de  $F(\nu(\partial\Sigma))$  é um pedaço do plano de dimensão  $n-1$  contido em  $\sum_{i=1}^{n+1} x_i = 1$ . Logo, sem perda de generalidade escolhemos um ponto  $\nu \in \nu(\partial\Sigma)$  tal que  $\nu \notin \Pi_i$  para

todo  $i = 1, \dots, n + 1$ , então  $F(\nu)$  tem a forma

$$F(\nu) = \vec{b}_0 + u_1 \vec{b}_1 + \dots + u_{n-1} \vec{b}_{n-1}, \quad (3.23)$$

onde  $\vec{b}_j = (b_{j1}, \dots, b_{j(n+1)}) \in \mathbb{R}^{n+1}$  são vetores constantes linearmente independente, com  $j = 1, \dots, n - 1$  e  $(u_1, \dots, u_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1}$  são parâmetros. Como  $F$  é um difeomorfismo local, existe uma vizinhança de  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_{n+1})$  tal que

$$\nu_i = (b_{0i} + b_{1i}u_1 + \dots + b_{(n-1)i}u_{n-1})^{1/2}, \quad i = 1, \dots, n + 1 \quad (3.24)$$

e como  $|\nu| = 1$  temos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n+1} b_{0i} &= 1 \\ \sum_{i=1}^{n+1} b_{ji} &= 0, \quad \forall j = 1, \dots, n - 1. \end{aligned}$$

Por outro lado, para  $x \in \partial\Sigma^n$ ,  $\bar{N}(x) = x$ . Pelas identidades (1.23) e (1.24), as funções coordenadas do vetor posição podem ser escritas como:

$$x_i = \langle x, e_i \rangle = \sin \theta \nu_i - \cos \theta N_i. \quad (3.25)$$

Além disso, como  $A(\nu, \nu)\nu_i = \lambda_i q N_i$ , segue-se que.

$$\sum_{i=1}^{n+1} \frac{\nu_i^2}{\lambda_i^2} = \frac{q^2}{A^2(\nu, \nu)}. \quad (3.26)$$

Por (3.24), conseguimos

$$A^2(\nu, \nu) = \frac{1}{q^2} \frac{1}{P_0 + \sum_{j=1}^{n-1} P_j u_j}, \quad (3.27)$$

onde  $P_j = \sum_{i=1}^{n+1} b_{ji} \lambda_i^{-2}$  para  $j = 0, \dots, n - 1$ . Assim, as funções coordenadas da aplicação

normal de Gauss são dadas por:

$$N_i = \frac{1}{\lambda_i q^2} \left( \frac{b_{0i} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji} u_j}{P_0 + \sum_{j=1}^{n-1} P_j u_j} \right)^{1/2}. \quad (3.28)$$

Finalmente, pelas equações (3.24), (3.25) e (3.28), conseguimos uma parametrização em uma vizinhança de  $x \in \partial\Sigma^n$  dada por:

$$x_i(u_1, \dots, u_{n-1}) = \sin \theta (b_{0i} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji} u_j)^{1/2} - \cos \theta \frac{1}{\lambda_i q^2} \left( \frac{b_{0i} + \sum_{j=1}^{n-1} b_{ji} u_j}{P_0 + \sum_{j=1}^{n-1} P_j u_j} \right)^{1/2} \quad (3.29)$$

para  $i = 1, \dots, n + 1$ . □

A parametrização dada por (3.29) é uma generalização da que foi obtida por H. Tran em [20]. Pois, quando  $\Sigma^2 \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  seja uma superfície mínima de fronteira livre ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ), temos

$$x_i(u) = (b_{0i} + b_{1i}u)^{1/2} \quad \forall i = 1, 2, 3. \quad (3.30)$$

Para o caso particular  $n = 2$ , e dos item 1 e 2 do Teorema 3.2, conseguimos classificar as superfícies mínimas capilares contidas na bola unitária Euclidiana satisfazendo (3.3). No resultado a seguir, mostramos o mencionado.

**Corolário 5.** *Seja  $\Sigma^2 \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  uma superfície mínima capilar. Se as funções coordenadas do campo normal a  $\Sigma^2$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov tal que  $\lambda_i = 0$  para algum  $i = 1, 2, 3$ , então  $\Sigma^2$  é um disco totalmente geodésico.*

*Demonstração.* Pelos itens 1 e 2 de Teorema 3.2, temos que  $\Sigma^2$  é um disco plano paralelo a plano coordenados  $x_i = 0$  ou cada componente conexa de  $\partial\Sigma^2$  é a intersecção da esfera com um plano (circulo plano). O primeiro caso cumpre trivialmente. Para o segundo caso, temos que cada componente conexa de  $\partial\Sigma^2$  é um círculo plano. Então pelo Teorema de Pyo [16, Theorem 1.2], tem-se que  $\Sigma^2$  ou é uma catenoide capilar ou é um disco plano. Da Proposição 2.2, os autovalores associadas às funções coordenadas do campo normal da catenoide capilar são diferentes de zero, e como por hipótese temos que um dos autovalores é zero, podemos concluir que  $\Sigma^2$  não é uma catenoide capilar. Assim, deixando a única opção para  $\Sigma^2$  ser um disco plano, o que conclui a prova. □

Observamos que na catenoide os autovalores associados às funções de coordenadas  $N_1$  e  $N_2$  do campo normal são iguais, isto é,  $\lambda_1 = \lambda_2$  (veja Proposição 2.2). O que nos leva a perguntar o seguinte: Se dois autovalores associados às funções coordenadas do campo normal  $N$  são iguais, então  $\Sigma^2$  é uma catenoide capilar? A resposta é sim, e a seguir apresentaremos os resultados que afirmam o dito anteriormente. Nosso próximo resultado é para o caso geral com a hipótese: se todos os autovalores associados às funções coordenadas do campo normal forem iguais e apenas um deles for diferente, então cada componentes conexa do bordo é interseção de um plano com a esfera unitária.

**Teorema 3.3.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima capilar, sendo  $\theta \in (0, \pi)$  ângulo de interseção de  $\Sigma^n$  e  $\mathbb{S}^n$ . Assuma que as funções coordenadas do campo normal  $N$  a  $\Sigma^n$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov, tal que  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, \dots, n+1$  e  $\lambda_1 = \dots = \lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{n+1}$ , então ao longo de cada componente conexa de  $\partial\Sigma^n$ , a função  $x_j$  é constante.*

*Demonstração.* Seja  $\lambda = \lambda_1 = \dots = \lambda_{j-1} = \lambda_{j+1} = \dots = \lambda_{n+1}$ , pelo item 2 da Proposição 3.1 podemos verificar que  $\lambda \neq \lambda_j$ . De (1.57) e (3.3)

$$\begin{aligned} D_\nu N_i = \lambda q N_i = A(\nu, \nu) \nu_i &\Rightarrow \lambda q N_i \nu_i = A(\nu, \nu) \nu_i^2 \\ &\Rightarrow \lambda q \sum_{i \neq j}^{n+1} N_i \nu_i = A(\nu, \nu) \sum_{i \neq j}^{n+1} \nu_i^2 \\ &\Rightarrow -\lambda q N_j \nu_j = A(\nu, \nu) (1 - \nu_j^2) \end{aligned}$$

pois,  $|N|^2 = 1$  e  $\langle N, \nu \rangle = 0$ . Como  $D_\nu N_j = \lambda_j q N_j = A(\nu, \nu) \nu_j$  da equação acima nós obtemos

$$\begin{aligned} A(\nu, \nu) &= q N_j \nu_j (\lambda_j - \lambda) \\ &= A(\nu, \nu) \nu_j^2 \left( \frac{\lambda_j - \lambda}{\lambda_j} \right), \end{aligned}$$

e pelo item 3 da Proposição 3.1  $A(\nu, \nu) \neq 0$ , portanto da equação acima nós obtemos:

$$\nu_j^2 = \frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda} \Rightarrow \nu_j = \pm \sqrt{\frac{\lambda_j}{\lambda_j - \lambda}} \quad (3.31)$$

Por outro lado, de (1.57) e (3.3)

$$\begin{aligned} D_\nu N_i = \lambda q N_i = A(\nu, \nu) \nu_i &\Rightarrow \lambda q N_i^2 = A(\nu, \nu) N_i \nu_i \\ &\Rightarrow \lambda q \sum_{i \neq j}^{n+1} N_i^2 = A(\nu, \nu) \sum_{i \neq j}^{n+1} N_i \nu_i \\ &\Rightarrow \lambda q (1 - N_j^2) = -A(\nu, \nu) N_j \nu_j \end{aligned}$$

pois  $|N|^2 = 1$  e  $\langle N, \nu \rangle = 0$ . Como  $D_\nu N_j = \lambda_j q N_j = A(\nu, \nu) \nu_j$  da equação anterior nós obtemos

$$\lambda q (1 - N_j^2) = -\lambda_j q N_j^2 \Rightarrow q(\lambda + (\lambda_j - \lambda) N_j^2) = 0 \quad (3.32)$$

e pelo item 3 da Proposição  $q \neq 0$ , tem-se

$$N_j^2 = \frac{-\lambda}{\lambda_j - \lambda} \Rightarrow N_j = \pm \sqrt{\frac{-\lambda}{\lambda_j - \lambda}} \quad (3.33)$$

Finalmente pela condição de capilaridade (1.25) e como  $x|_{\partial\Sigma^n} = \bar{N}$  nós obtemos:

$$\begin{aligned} x_j = \langle e_j, x \rangle &= \langle e_j, \bar{N} \rangle = \langle e_j, \sin \theta \nu - \cos \theta N \rangle \\ &= \sin \theta \langle e_j, \nu \rangle - \cos \theta \langle e_j, N \rangle = \sin \theta \nu_j - \cos \theta N_j. \end{aligned} \quad (3.34)$$

Como as funções  $\nu_j, N_j$  e  $x_j$  são contínuas, então de (3.31), (3.33) e (3.34) conclui-se que  $x_j$  é constante em cada componente conexa de  $\partial\Sigma^n$ , isto é, para  $\Gamma \subset \partial\Sigma^n$  uma componente conexa temos que  $\Gamma = \mathbb{S}^n \cap \Pi_j$  onde  $\Pi_j$  é um hiperplano paralelo ao plano coordenado  $x_j = 0$ .  $\square$

**Observação 5.** Uma consequência do teorema anterior é que pode-se afirmar que  $\Sigma^n$  tem pelo menos duas componentes conexas de bordo. De fato, suponhamos que  $\partial\Sigma^n$  tenha só uma componente conexa. De (3.31),  $\nu_j$  é constante em  $\partial\Sigma^n$ . Como  $D_\nu x_j = \nu_j$ , tem-se

$$0 = \int_\Sigma \Delta_\Sigma x_j d\Sigma = \int_{\partial\Sigma} D_\nu x_j d\partial\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \nu_j d\partial\Sigma = \nu_j |\partial\Sigma|. \quad (3.35)$$

Daí,  $\nu_j = 0$ . Por outro lado,  $D_\nu N_j = \lambda_j q N_j = A(\nu, \nu) \nu_j = 0$ . Isto implica que  $N_j = 0$ , pois  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n+1$  e  $q(x) \neq 0$  para todo  $x \in \partial\Sigma^n$ . Agora, em (3.34)

$x_j = 0$  em  $\partial\Sigma^n$ . Por integração partes, temos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Sigma} x_j \Delta_{\Sigma} x_j d\Sigma = - \int_{\Sigma} |\nabla x_j|^2 d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} x_j D_{\nu} x_j d\partial\Sigma \\ &= - \int_{\Sigma} |\nabla x_j|^2 d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} x_j \nu_j d\partial\Sigma = - \int_{\Sigma} |\nabla x_j|^2 d\Sigma. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Daí,  $\nabla x_i = 0$  o que implica que  $x_j$  é constante em  $\Sigma^n$ . Como  $x_j = 0$  em  $\partial\Sigma^n$ , obtemos que  $x_j = 0$  em  $\Sigma^n$ , isto é,  $\Sigma^n$  é um  $n$ -disco equatorial. Isso contradiz a hipótese, pois se  $\Sigma^n$  é disco equatorial então  $D_{\nu} N_i = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n + 1$ , pelo que  $\lambda_i = 0$  para todo  $i$ . Assim,  $\Sigma^n$  tem pelo menos duas componentes conexas.  $\diamond$

Para o caso  $n = 2$  e  $\lambda_1 = \lambda_2$ , pelo Teorema 3.3 tem-se que uma componente conexa do bordo é um círculo plano, o que será suficiente para garantir que  $\Sigma^2$  é uma catenoide capilar. Nosso seguinte resultado afirma exatamente isso.

**Corolário 6.** *Seja  $\Sigma^2 \subset \mathbb{B}_1^3(0)$  uma superfície mínima capilar. Assuma que as funções coordenadas do campo normal  $N$  a  $\Sigma^2$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov tal que  $\lambda_i \neq 0$  para todo  $i = 1, 2, 3$  e  $\lambda_1 = \lambda_2$ . Então  $\Sigma^2$  é uma catenoide capilar.*

*Demonstração.* Pelo Teorema 3.3, cada componente conexa de  $\partial\Sigma^2$  são círculos planos paralelos ao plano coordenado  $x_3 = 0$  e do Teorema de Pyo [16, Theorem 1.2],  $\Sigma^2$  faz parte do catenoide ou é um disco plano. Suponhamos que  $\Sigma^2$  é um disco plano, então o campo normal  $N$  é constante em  $\Sigma^2$  e portanto  $D_{\nu} N_i = 0$  para todo  $i = 1, 2, 3$ , isso implica que  $\lambda_i = 0$ , pois  $q(x) \neq 0$  para todo  $x \in \partial\Sigma^2$ , chegando a uma contradição, pois por hipótese  $\lambda_i \neq 0$ . Assim, deixando a única opção para  $\Sigma^2$  ser uma catenoide o que conclui a prova.  $\square$

Nos corolários 5 e 6, conseguimos classificar as superfícies mínimas capilares que satisfazem (3.3). No entanto, ainda está pendente demonstrar o resultado que generalize o teorema que H. Tran obteve (Teorema 3.1). Esperando no futuro responder a seguinte questão: Se  $\Sigma \subset \mathbb{B}^3$  uma superfície mínima capilar tal que as funções coordenadas do campo normal  $N$  são autofunções do problema de Jacobi-Steklov. Então  $\Sigma$  é rotacionalmente simétrico? Se a questão anterior for provada, teremos uma generalização do Teorema 3.1.

## Capítulo 4

# ÍNDICE DE UMA HIPERSUPERFÍCIE MÍNIMA CAPILAR

Nesta última parte, apresentaremos alguns resultados relacionados ao índice de Morse sobre uma hipersuperfície capilar mínima contida na bola unitária  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$ . Na literatura, existem dois tipos de problemas de particionamento sobre hipersuperfícies em  $\mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  que divide  $\mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  em dois domínios disjuntos  $B_1$  e  $B_2$  de maneiras diferentes: **Problema de particionamento tipo-I.** Encontre as hipersuperfícies que minimizem a área entre todas as hipersuperfícies em  $\mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  que divide  $\mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  em dois domínios disjuntos  $B_1$  e  $B_1$  com volume prescrito, ou seja,

$$|B_1| = s|\mathbb{B}_1^{n+1}(0)| \quad \text{e} \quad |B_2| = (1-s)|\mathbb{B}_1^{n+1}(0)|, \quad s \in (0, 1).$$

**Problema de particionamento tipo-II.** Encontre as hipersuperfícies minimizem a área entre todas as hipersuperfícies em  $\mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  que divide  $\mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  em dois domínios disjuntos  $B_1$  e  $B_1$  com a área molhamento no bordo prescrita, ou seja,

$$|B_1 \cap \mathbb{S}^n| = s|\mathbb{S}^n| \quad \text{e} \quad |B_2 \cap \mathbb{S}^n| = (1-s)|\mathbb{S}^n|, \quad s \in (0, 1).$$

Levando em conta o que foi dito acima, também faremos estudo do índice e estabilidade em subespaços especiais de  $C^\infty(\Sigma^n)$ . Dentre os trabalhos que abordam esse tema, podemos citar: Guo-Xia em [23] e Tran-Zhou em [10], onde fazem o estudo da estabilidade e do índice nos subespaços

$$Z = \left\{ u \in C^\infty(\Sigma^n) : \int_{\Sigma} u d\Sigma = 0 \right\} \text{ e } U = \left\{ u \in C^\infty(\Sigma^n) : \int_{\partial\Sigma} u d\partial\Sigma = 0 \right\},$$

que eles estão relacionados aos problemas de particionamento tipo I e II, respectivamente. Uma motivação de nosso resultado dado no Teorema 4.1 é fornecer uma demonstração diferente do resultado obtido por Gou-Xia [10, Teorema 3.1]. Primeiramente vamos demonstrar a seguinte proposição:

**Proposição 4.1.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima contida na bola unitária, tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\mathbb{S}^n$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então*

$$Q(N_a, N_a) = -\frac{n}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} N_a^2 d\Sigma + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma \quad (4.1)$$

$$Q(\psi_a, \psi_a) = -\int_{\Sigma} |A|^2 \langle x, a \rangle^2 d\Sigma - \cos \theta \int_{\Sigma} |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma \quad (4.2)$$

onde  $N_a = \langle N, a \rangle$ ,  $\psi_a = \langle x + \cos \theta N, a \rangle$  e  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante.

Para deixar a demonstração da Proposição 4.1 o mais clara possível, vamos começar provando alguns resultados auxiliares, pois eles serão usados diretamente na demonstração.

**Proposição 4.2.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow B$  uma imersão cujo bordo intersecta  $\partial B$  em um ângulo constante  $\theta$ . Suponhamos que  $\partial B$  é totalmente umbílico, então  $\nu$  é uma direção principal de  $\partial\Sigma^n$  em  $\Sigma^n$ , ou seja,  $A(\omega, \nu) = 0$  para qualquer  $\omega \in \mathfrak{X}(\partial\Sigma^n)$ . Além disso,*

$$\bar{\nabla}_{\nu} N = A(\nu, \nu)\nu. \quad (4.3)$$

*Demonstração.* Seja  $\omega \in \mathfrak{X}(\partial\Sigma)$ . Pelas identidades (1.23) e (1.24), temos

$$\begin{aligned} A(\omega, \nu) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\omega} N, \nu) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\omega}(-\cos \theta \bar{N} + \sin \theta \bar{\nu}), \sin \theta \bar{N} + \sin \theta \bar{\nu}) \\ &= -\sin \theta \cos \theta \bar{g}(\bar{\nabla}_{\omega} \bar{N}, \bar{N}) - \cos^2 \theta \bar{g}(\bar{\nabla}_{\omega} \bar{N}, \bar{\nu}) + \sin^2 \theta \bar{g}(\bar{\nabla}_{\omega} \bar{\nu}, \bar{N}) \\ &\quad + \sin \theta \cos \theta \bar{g}(\bar{\nabla}_{\omega} \bar{\nu}, \bar{\nu}) \\ &= -\cos^2 \theta \bar{g}(\bar{\nabla}_{\omega} \bar{N}, \bar{\nu}) + \sin^2 \theta \bar{g}(\bar{\nabla}_{\omega} \bar{\nu}, \bar{N}), \end{aligned}$$

pois  $\bar{g}(\bar{\nabla}_\omega \bar{N}, \bar{N}) = 0$  e  $\bar{g}(\bar{\nabla}_\omega \bar{\nu}, \bar{\nu}) = 0$ . Logo, temos

$$A(\omega, \nu) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_\omega \bar{N}, \bar{\nu}) = -A^{\partial B}(\omega, \bar{\nu}) = 0$$

isto é devido a  $\bar{g}(\bar{\nabla}_\omega \bar{N}, \bar{\nu}) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_\omega \bar{\nu}, \bar{N})$ ,  $\partial B$  é totalmente umbílico e  $\partial B \perp \bar{N}$ , com  $\omega, \bar{\nu} \in \mathfrak{X}(\partial B)$ . Assim, mostra-se que  $\nu$  é uma direção principal de  $\partial \Sigma^n$  em  $\Sigma^n$  e além disso,

$$\bar{\nabla}_\nu N = \varrho \nu, \quad (4.4)$$

pois  $\nu$  é uma direção principal, logo  $\varrho = A(\nu, \nu) = \bar{g}(\bar{\nabla}_\nu N, \nu)$ .  $\square$

Agora, consideremos  $(M^{n+1}, \bar{g}) = (\mathbb{R}^{n+1}, \delta)$ ,  $B = \bar{\mathbb{B}}_1^{n+1}(0)$  a bola unitária fechada Euclidiana com centro na origem e  $\Sigma^n \subset \bar{\mathbb{B}}_1^{n+1}(0)$  é uma hipersuperfície imersa. Da mesma forma do capítulo anterior, denotaremos por  $D = \bar{\nabla}$  a conexão determinada pela métrica  $\delta$  (conexão de Levi-Civita). Então, pelas considerações acima, tem-se  $\text{Ric}^M = 0$ ,  $A^{\mathbb{S}^n}(v, v) = 1$  para todo  $p \in \mathbb{S}^n$  e  $v \in T_p \mathbb{S}^n$  tal que  $|v| = 1$ ,  $\bar{N}(x) = x$  para  $x \in \partial \Sigma^n$  e o operador de Jacobi fica

$$\mathcal{J} = \Delta_\Sigma + |A|^2.$$

Para cada campo vetorial constante  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ , definimos um campo vetorial correspondente  $X_a$  em  $\mathbb{R}^{n+1}$  por

$$X_a = \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a. \quad (4.5)$$

$X_a$  é um campo de vetorial de Killing (veja Wang-Xia [24, Proposition 3.1]). Além disso, satisfazem as seguintes identidades.

**Proposição 4.3.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \bar{\mathbb{B}}_1^{n+1}(0)$  uma imersão isométrica sobre a bola unitária Euclidiana, cujo fronteira intersecta  $\mathbb{S}^n$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Seja  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo vetorial constante. Então, ao longo de  $\partial \Sigma^n$ ,*

$$D_\nu \langle x + \cos \theta N, a \rangle = q \langle x + \cos \theta N, a \rangle \quad (4.6)$$

$$D_\nu \langle X_a, N \rangle = q \langle X_a, N \rangle, \quad (4.7)$$

onde

$$q = \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta A(\nu, \nu). \quad (4.8)$$

*Demonstração.* Para (4.6). Da Proposição 4.2

$$\begin{aligned}
D_\nu \langle x + \cos \theta, a \rangle &= \langle D_\nu x + \cos \theta D_\nu N, a \rangle \\
&= \langle \nu + \cos \theta A(\nu, \nu) \nu, a \rangle \\
&= \sin \theta \left\langle \left( \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta A(\nu, \nu) \right) \nu, a \right\rangle = \sin \theta q \langle \nu, a \rangle. \quad (4.9)
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando (1.23) e (1.24) em  $\partial \Sigma^n$

$$\begin{aligned}
\langle x + \cos \theta N, a \rangle|_{\partial \Sigma} &= \langle \bar{N} + \cos \theta (-\cos \theta \bar{N} + \sin \theta \bar{\nu}), a \rangle \\
&= \langle (1 - \cos^2 \theta) \bar{N} + \sin \theta \cos \theta \bar{\nu}, a \rangle \\
&= \sin \theta \langle \sin \theta \bar{N} + \cos \theta \bar{\nu}, a \rangle = \sin \theta \langle \nu, a \rangle, \quad (4.10)
\end{aligned}$$

pois  $x|_{\partial \Sigma} = \bar{N}$  e por (1.25). Portanto das equações (4.9) e (4.10) obtemos (4.6).

Para (4.7). Usando a definição de  $X_a$  e a Proposição 4.2

$$\begin{aligned}
D_\nu \langle X_a, N \rangle &= \langle D_\nu X_a, N \rangle + \langle X_a, D_\nu N \rangle \\
&= \left\langle D_\nu \left( \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a \right), N \right\rangle + A(\nu, \nu) \langle X_a, \nu \rangle \\
&= \left\langle x D_\nu \langle x, a \rangle + \langle x, a \rangle D_\nu x - \frac{1}{2} a D_\nu \langle x, x \rangle, N \right\rangle + A(\nu, \nu) \langle X_a, \nu \rangle \\
&= \langle \langle \nu, a \rangle x + \langle x, a \rangle \nu - \langle \nu, x \rangle a, N \rangle + A(\nu, \nu) \langle \langle x, a \rangle x - a, \nu \rangle \\
&= \langle \nu, a \rangle \langle x, N \rangle + \langle x, a \rangle \langle \nu, N \rangle - \langle \nu, x \rangle \langle a, N \rangle + A(\nu, \nu) (\langle x, a \rangle \langle x, \nu \rangle - \langle a, \nu \rangle) \\
&= -\cos \theta \langle \nu, a \rangle - \sin \theta \langle a, N \rangle + A(\nu, \nu) (\sin \theta \langle x, a \rangle - \langle a, \nu \rangle),
\end{aligned}$$

pois de (1.25)  $x = \bar{N} = \sin \theta \nu - \cos \theta N$ , daí  $\nu = \frac{1}{\sin \theta} x + \cot \theta N$ .

Assim,

$$\begin{aligned}
D_\nu \langle X_a, N \rangle &= -\cos \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} \langle x, a \rangle + \cot \theta \langle N, a \rangle \right) - \sin \theta \langle N, a \rangle \\
&\quad + A(\nu, \nu) \left( \sin \theta \langle x, a \rangle - \frac{1}{\sin \theta} \langle x, a \rangle - \cot \theta \langle N, a \rangle \right) \\
&= - \left( \cot \theta - \frac{\cos^2 \theta - 1}{\sin \theta} A(\nu, \nu) \right) \langle x, a \rangle - (\cos \theta \cot \theta + A(\nu, \nu) \cot \theta) \langle N, a \rangle \\
&= -\cos \theta \left( \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta A(\nu, \nu) \right) \langle x, a \rangle - \left( \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta A(\nu, \nu) \right) \langle N, a \rangle \\
&= -q(\cos \theta \langle x, a \rangle + \langle N, a \rangle). \tag{4.11}
\end{aligned}$$

Por outro lado, em  $\partial\Sigma^n$

$$\begin{aligned}
\langle X_a, N \rangle|_{\partial\Sigma} &= \langle \langle x, a \rangle - a, N \rangle = \langle x, a \rangle \langle x, N \rangle - \langle N, a \rangle \\
&= -(\cos \theta \langle x, a \rangle + \langle N, a \rangle) \tag{4.12}
\end{aligned}$$

Portanto, de (4.11) e (4.12), obtemos (4.7).  $\square$

**Proposição 4.4.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$  uma imersão isométrica sobre o espaço Euclidiano. Se  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  é um campo vetorial constante. Então, as seguintes identidades se verificam ao longo de  $\Sigma^n$ :*

$$\Delta_\Sigma x = -HN, \tag{4.13}$$

$$\Delta_\Sigma \frac{1}{2}|x|^2 = n - H \langle x, N \rangle, \tag{4.14}$$

$$\Delta_\Sigma N = \nabla H - |A|^2 N, \tag{4.15}$$

$$\Delta_\Sigma \langle x, N \rangle = \langle x, \nabla H \rangle + H - |A|^2 \langle x, N \rangle, \tag{4.16}$$

$$\Delta_\Sigma \langle X_a, N \rangle = \langle X_a, \nabla H \rangle + \langle x, a \rangle H - |A|^2 \langle X_a, N \rangle - n \langle N, a \rangle. \tag{4.17}$$

*Demonstração.* Os detalhes das provas de (4.13), (4.14), (4.15) e (4.16) não serão fornecidos aqui, pois são conhecidos na literatura (os detalhes veja [24] e [17]). De particular interesse para o nosso caso é a identidade (4.17), para a qual forneceremos sua prova detalhada.

Para (4.17). Pelas propriedades do Laplaciano  $\Delta_\Sigma$  temos

$$\Delta_\Sigma \langle X_a, N \rangle = \langle \Delta_\Sigma X_a, N \rangle + 2 \langle \nabla X_a, \nabla N \rangle + \langle X_a, \Delta_\Sigma N \rangle \quad (4.18)$$

Vamos calcular cada fator do lado direito de (4.18). Usando a definição de  $X_a$ , (4.13) e (4.14)

$$\begin{aligned} \langle \Delta_\Sigma X_a, N \rangle &= \left\langle \Delta_\Sigma \left( \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a \right), N \right\rangle \\ &= \left\langle \langle x, a \rangle \Delta_\Sigma x + x \Delta_\Sigma \langle x, a \rangle - \Delta_\Sigma \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a, N \right\rangle \\ &= \langle -\langle x, a \rangle H N - \langle N, a \rangle H x - (n - H \langle x, N \rangle) a, N \rangle \\ &= -\langle x, a \rangle H - \langle N, a \rangle \langle x, N \rangle H - n \langle N, a \rangle + H \langle x, N \rangle \langle N, a \rangle \\ &= -H \langle x, a \rangle - n \langle N, a \rangle. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Também, para a base canônica  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , temos

$$\begin{aligned} \langle \nabla X_a, \nabla N \rangle &= \left\langle \nabla \left( \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a \right), \nabla N \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle \nabla \left( \langle x, a \rangle \langle x, e_i \rangle - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1) \langle a, e_i \rangle \right), \nabla \langle N, e_i \rangle \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \left\langle \langle x, e_i \rangle \nabla \langle x, a \rangle + \langle x, a \rangle \nabla \langle x, e_i \rangle - \langle a, e_i \rangle \nabla \frac{1}{2}(|x|^2 + 1), \nabla \langle N, e_i \rangle \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} \langle \langle x, e_i \rangle a^\top + \langle x, a \rangle e_i^\top - \langle a, e_i \rangle x^\top, \nabla \langle N, e_i \rangle \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (\langle x, e_i \rangle \langle a^\top, \nabla \langle N, e_i \rangle \rangle + \langle x, a \rangle \langle e_i^\top, \nabla \langle N, e_i \rangle \rangle - \langle a, e_i \rangle \langle x^\top, \nabla \langle N, e_i \rangle \rangle) \\ &= \sum_{i=1}^{n+1} (\langle x, e_i \rangle A(e_i, a^\top) + \langle x, a \rangle A(e_i^\top, e_i) - \langle a, e_i \rangle A(e_i, x^\top)) \\ &= \langle x, a \rangle H. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Finalmente, usando (4.15)

$$\begin{aligned} \langle X_a, \Delta_\Sigma N \rangle &= \langle X_a, \nabla H - |A|^2 N \rangle \\ &= \langle X_a, \nabla H \rangle - |A|^2 \langle X_a, N \rangle. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Portanto, de (4.19), (4.20) e (4.21), obtemos (4.17).  $\square$

**Observação 6.** Se  $\Sigma^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$  é uma hipersuperfície mínima, da Proposição 4.4 podemos deduzir

$$\Delta_\Sigma x = 0 \quad (4.22)$$

$$\Delta_\Sigma |x|^2 = 2n \quad (4.23)$$

$$\Delta_\Sigma N = -|A|^2 N \quad (4.24)$$

$$\Delta_\Sigma \langle x, N \rangle = -|A|^2 \langle x, N \rangle \quad (4.25)$$

$$\Delta_\Sigma \langle X_a, N \rangle = -|A|^2 \langle X_a, N \rangle - n \langle N, a \rangle, \quad (4.26)$$

cujas identidades são muito conhecidos.  $\diamond$

Quando  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  é uma hipersuperfície mínima capilar imersa na bola unitária centrada na origem, a forma bilinear  $Q$  induzida da segunda variação de energia dada em (1.55) fica reduzido em

$$\begin{aligned} Q(\psi, \varphi) &= - \int_\Sigma \psi (\Delta_\Sigma + |A|^2) \varphi d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \psi (D_\nu \varphi - q\varphi) d\partial\Sigma \\ &= - \int_\Sigma \psi \mathcal{J} \varphi d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \psi (D_\nu \varphi - q\varphi) d\partial\Sigma \end{aligned}$$

onde

$$q = \frac{1}{\sin \theta} + \cot \theta A(\nu, \nu),$$

pois  $A^{\mathbb{S}^n}(\bar{\nu}, \bar{\nu}) = 1$ ,  $\mathcal{J} = \Delta_\Sigma + |A|^2$  e  $\psi, \varphi \in C^\infty(\Sigma^n)$ . Levando em conta os resultados anteriores e o parágrafo acima, vamos provar a seguinte proposição.

**Proposição 4.5.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície mínima contida na bola unitária, tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\mathbb{S}^n$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então*

$$Q(N_a, N_a) = -\frac{n}{\sin^2 \theta} \int_\Sigma N_a^2 d\Sigma + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_\Sigma |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma \quad (4.27)$$

$$Q(\psi_a, \psi_a) = - \int_\Sigma |A|^2 \langle x, a \rangle^2 d\Sigma - \cos \theta \int_\Sigma |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma \quad (4.28)$$

onde  $N_a = \langle N, a \rangle$ ,  $\psi_a = \langle x + \cos \theta N, a \rangle$  e  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  um campo constante.

*Demonstração.* Para (4.27). Consideremos a função

$$\varphi_a = \langle X_a, N \rangle + \cos \theta \langle x + \cos \theta N, a \rangle,$$

então da definição de  $X_a$ , a função  $\varphi_a$  ao longo de  $\partial\Sigma^n$  reduz-se em:

$$\varphi_a|_{\partial\Sigma} = \left\langle \langle x, a \rangle x - \frac{1}{2}(|x|^2 + 1)a, N \right\rangle + \cos \theta (\langle x + \cos \theta N, a \rangle) \Big|_{\partial\Sigma} \quad (4.29)$$

$$\begin{aligned} &= \langle x, a \rangle \langle N, x \rangle - \langle N, a \rangle + \cos \theta (\langle x + \cos \theta N, a \rangle) \\ &= -\cos \theta \langle x, a \rangle - \langle N, a \rangle + \cos \theta \langle x, a \rangle + \cos^2 \theta \langle N, a \rangle \\ &= (\cos^2 \theta - 1) \langle N, a \rangle = -\sin^2 \theta N_a, \end{aligned} \quad (4.30)$$

pois de (1.24) tem-se  $\langle N, x \rangle|_{\partial\Sigma} = -\cos \theta$ . Também, usando (4.6) e (4.7) da Proposição 4.3

$$\begin{aligned} D_\nu \varphi_a &= D_\nu \langle X_a, N \rangle + \cos \theta D_\nu \langle x + \cos \theta N, a \rangle \\ &= q \langle X_a, N \rangle + \cos \theta q \langle x + \cos \theta N, a \rangle \\ &= q (\langle X_a, N \rangle + \cos \theta \langle x + \cos \theta N, a \rangle) = q \varphi_a. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Por outro lado, como  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  é mínima, por (4.26) temos

$$\begin{aligned} -n \langle N, a \rangle &= \Delta_\Sigma \langle X_a, N \rangle + |A|^2 \langle X_a, N \rangle \\ &= \mathcal{J} \langle X_a, N \rangle \end{aligned}$$

então, de (4.22) e (4.24)

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \varphi_a &= \mathcal{J} \langle X_a, N \rangle + \cos \theta \mathcal{J} \langle x + \cos \theta N, a \rangle \\ &= -n \langle N, a \rangle + \cos \theta (\mathcal{J} \langle x, a \rangle + \cos \theta \mathcal{J} \langle N, a \rangle) \\ &= -n \langle N, a \rangle + \cos \theta |A|^2 \langle x, a \rangle. \end{aligned} \quad (4.32)$$

Assim, de (4.24) e (4.30) temos:

$$\begin{aligned}
Q(\varphi_a, N_a) &= - \int_{\Sigma} \varphi_a \mathcal{J} N_a d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \varphi_a (D_{\nu} N_a - q N_a) d\partial\Sigma \\
&= - \sin^2 \theta \int_{\partial\Sigma} N_a (D_{\nu} N_a - q N_a) d\partial\Sigma
\end{aligned} \tag{4.33}$$

logo, de (4.24) e (4.33)

$$\begin{aligned}
Q(N_a, N_a) &= \int_{\Sigma} N_a \mathcal{J} N_a d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} N_a (D_{\nu} N_a - q N_a) d\partial\Sigma \\
&= - \frac{1}{\sin^2 \theta} \left( - \sin^2 \theta \int_{\partial\Sigma} N_a (D_{\nu} N_a - q N_a) d\partial\Sigma \right) \\
&= - \frac{1}{\sin^2 \theta} Q(\varphi_a, N_a).
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Por outro lado, sabe-se que  $Q(\varphi_a, N_a) = Q(N_a, \varphi_a)$ , pois  $Q$  é simétrico, logo de (4.31) e (4.32)

$$\begin{aligned}
Q(N_a, \varphi_a) &= - \int_{\Sigma} N_a \mathcal{J} \varphi_a d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} N_a (D_{\nu} \varphi_a - q \varphi_a) d\partial\Sigma \\
&= - \int_{\Sigma} N_a (-n N_a + \cos \theta |A|^2 \langle x, a \rangle) d\Sigma \\
&= n \int_{\Sigma} N_a^2 d\Sigma - \cos \theta \int_{\Sigma} |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma.
\end{aligned} \tag{4.35}$$

Finalmente, substituindo (4.35) em (4.34), obtemos:

$$Q(N_a, N_a) = - \frac{n}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} N_a^2 d\Sigma + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma.$$

Para (4.28). Consideremos a função  $\psi_a = \langle x + \cos \theta N, a \rangle$ , então de (4.6) da Proposição 4.3 e das identidades (4.22) e (4.24) podemos observar o seguinte:

$$D_{\nu} \langle x + \cos \theta N, a \rangle = q \langle x + \cos \theta N, a \rangle \tag{4.36}$$

$$\mathcal{J} \langle x + \cos \theta N, a \rangle = \mathcal{J} \langle x, a \rangle + \cos \theta \mathcal{J} \langle N, a \rangle = |A|^2 \langle x, a \rangle. \tag{4.37}$$

Assim, de (4.36) e (4.37), tem-se:

$$\begin{aligned}
Q(\psi_a, \psi_a) &= - \int_{\Sigma} \psi_a \mathcal{J} \psi_a d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} \psi_a (D_\nu \psi_a - q \psi_a) d\partial\Sigma \\
&= - \int_{\Sigma} \langle x + \cos \theta N, a \rangle |A|^2 \langle x, a \rangle d\Sigma \\
&= - \int_{\Sigma} |A|^2 \langle x, a \rangle^2 d\Sigma - \cos \theta \int_{\Sigma} |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma
\end{aligned}$$

□

**Observação 7.** A fórmula (4.27) da Proposição 4.3 é uma generalização do que obteve Tran em [21, Lemma 2.9], pois quando  $\theta = \frac{\pi}{2}$  tem-se

$$Q(N_a, N_a) = -n \int_{\Sigma} \langle N, a \rangle^2 d\Sigma < 0$$

onde  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  é um vector constante. Para  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , as funções coordenadas do campo normal  $N_1, \dots, N_{n+1}$  satisfazem

$$Q(N_i, N_i) = -n \int_{\Sigma} \langle N, e_i \rangle^2 d\Sigma < 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n+1,$$

então, para  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  de fronteira livre não plana, as funções coordenadas do campo normal  $N_1, \dots, N_{n+1}$  contribuem ao índice de  $\Sigma^n$ , isto é  $\text{Ind}(\Sigma^n) \geq n+1$ , que é exatamente o que Tran mostrou em [21, Corollary 2.10].

Por outro lado, da fórmula (4.28) e  $\theta = \frac{\pi}{2}$  tem-se  $\psi_a = \langle x, a \rangle = x_a$  e

$$Q(x_a, x_a) = - \int_{\Sigma} |A|^2 \langle x, a \rangle^2 d\Sigma < 0$$

logo, para  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  a base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , as funções coordenadas do vector posição  $x_i, \dots, x_{n+1}$  satisfazem

$$Q(x_i, x_i) = - \int_{\Sigma} |A|^2 \langle x, e_i \rangle^2 d\Sigma < 0, \text{ para todo } i = 1, \dots, n+1.$$

Assim, obtemos a mesma estimativa do caso anterior  $\text{Ind}(\Sigma^n) \geq n+1$ .

◇

## 4.1 Hipersuperfícies estáveis de tipo I e II

Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow B \subset M^{n+1}$  uma imersão própria sobre um domínio compacto suave, com  $\partial\Sigma^n \neq \emptyset$ . A forma bilinear  $Q$  induzida pela segunda variação de  $E$ , esta dada por

$$Q(u, u) = - \int_{\Sigma} u \mathcal{J} u d\Sigma + \int_{\partial\Sigma} u (\bar{\nabla}_{\nu} u - qu) d\partial\Sigma \quad (4.38)$$

onde  $\mathcal{J} = \Delta_{\Sigma} + |A|^2 + \text{Ric}^M(N, N)$  é operador de Jacobi e  $u \in C^{\infty}(\Sigma^n)$ . Como dito no capítulo 2 o índice de Morse da forma bilinear  $Q$  é precisamente o número de autovalores negativos do problema com condição de fronteira de Robin

$$\begin{cases} \mathcal{J}u = -\lambda u, & \text{em } \Sigma, \\ \bar{\nabla}_{\nu} u = qu, & \text{em } \partial\Sigma, \end{cases} \quad (4.39)$$

para o qual existe uma sequência não decrescente e divergente  $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_k \leq \uparrow \infty$  de autovalores associados a uma base  $L^2$ -ortonormal  $\{u_k\}_{k=1}^{\infty}$  de soluções para o problema de autovalor (4.39). Pelo Teorema de Rayleigh os autovalores  $\lambda_k$  tem a seguinte caracterização variacional

$$\lambda_k = \inf_{u \in V_{k-1}^{\perp} \setminus \{0\}} \frac{Q(u, u)}{\int_{\Sigma} u^2 d\Sigma},$$

onde  $V_{k-1} = \text{Span}\{u_1, \dots, u_k\}$  e  $V_{k-1}^{\perp}$  é o complemento ortogonal de  $V_{k-1}$  em relação ao produto interno  $L^2$ .

**Definição 4.1.** *Uma imersão  $x : \Sigma^n \rightarrow B$  é um particionamento de tipo-I, se for ponto crítico do funcional energia  $E$  preservando o volume prescrito  $V$ .*

O campo variacional  $Y = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t}(t, x) \right|_{t=0}$  preserva volume se

$$\int_{\Sigma} \langle Y, N \rangle d\Sigma = 0.$$

Pela primeira variação de  $E$ , temos que  $\Sigma^n$  é ponto crítico se e somente se ela tem curvatura média constante  $H$  e  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B$  em ângulo constante (hipersuperfícies capilares).

**Definição 4.2.** *O índice de Morse Tipo-I de uma hipersuperfície capilar  $\Sigma^n \subset B$  é o*

índice de  $Q$  em

$$Z = \left\{ u \in C^\infty(\Sigma^n) : \int_{\Sigma} u d\Sigma = 0 \right\} \subset C^\infty(\Sigma^n),$$

e denotaremos por  $\text{Ind}_1(\Sigma^n)$ .

Uma hipersuperfície capilar Tipo-I é dito estável, se seu índice Tipo-I for zero, isto é

$$Q(u, u) \geq 0, \text{ para todo } u \in Z = \left\{ u \in C^\infty(\Sigma^n) : \int_{\Sigma} u d\Sigma = 0 \right\}.$$

**Definição 4.3.** Uma imersão própria  $x : \Sigma^n \rightarrow B \subset M^{n+1}$  é dita estacionária tipo-II se  $E'(0) = 0$  para qualquer variação de  $x$  que preserva a área de molhada  $W$ .

O campo variacional  $Y = \left. \frac{\partial \phi}{\partial t}(p, x) \right|_{t=0}$  preserva a área molhada se

$$\int_{\partial\Sigma} \langle Y, \bar{\nu} \rangle d\partial\Sigma = 0.$$

Da primeira fórmula de variação de  $E$ , temos que  $x$  é estacionário tipo-II se e somente se  $x$  é uma imersão mínima e  $\Sigma^n$  intersecta  $\partial B$  em ângulo constante.

**Definição 4.4.** O índice de Morse Tipo-II de uma hipersuperfície estacionária  $\Sigma^n \subset B$  é o índice de  $Q$  em

$$U = \left\{ u \in C^\infty(\Sigma^n) : \int_{\partial\Sigma} u d\partial\Sigma = 0 \right\} \subset C^\infty(\Sigma^n),$$

e denotaremos por  $\text{Ind}_2(\Sigma^n)$ .

Uma hipersuperfície estacionária Tipo-II é dito estável, se seu índice Tipo-II for zero, isto é

$$Q(u, u) \geq 0, \text{ para todo } u \in U = \left\{ u \in C^\infty(\Sigma^n) : \int_{\partial\Sigma} u d\partial\Sigma = 0 \right\}.$$

Como o índice de Morse Tipo I e II foram definidos na mesma forma bilinear  $Q$ , tem-se que

$$\text{Ind}_1(\Sigma^n) \leq \text{Ind}(\Sigma) \text{ e } \text{Ind}_2(\Sigma^n) \leq \text{Ind}(\Sigma^n). \quad (4.40)$$

Levando em conta as definições anteriores, obtemos o seguinte resultado.

**Proposição 4.6.** *Seja  $x : \Sigma^n \rightarrow B \subset M^{n+1}$  uma hipersuperfície própria. Então*

1. *Se  $\Sigma^n$  é capilar de Tipo-I, tem-se*

$$\text{Ind}(\Sigma^n) - 1 \leq \text{Ind}_1(\Sigma^n) \leq \text{Ind}(\Sigma^n) \quad (4.41)$$

2. *Se  $\Sigma^n$  for estacionaria Tipo-II, tem-se*

$$\text{Ind}(\Sigma^n) - 1 \leq \text{Ind}_2(\Sigma^n) \leq \text{Ind}(\Sigma^n) \quad (4.42)$$

*Demonstração.* Seja  $V_k = \text{Span}\{\varphi_1, \dots, \varphi_k\}$  o subespaço gerado pelas primeiras  $k$  auto-funções de (2) tal que

$$Q(\varphi_i, \varphi_i) = \lambda_i \int_{\Sigma} \varphi_i^2 d\Sigma < 0, \text{ para } i = 1, \dots, k,$$

ou seja  $\text{Ind}(\Sigma^n) = k$ .

Para (4.41). Consideremos o operador linear  $L_1 : V_k \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$L_1(\varphi) = \int_{\Sigma} \varphi d\Sigma.$$

Pelo Teorema da dimensão para transformações lineares, tem-se

$$\begin{aligned} \dim \ker(L_1) &= \dim(V_k) - \dim \text{Im}(L_1) \\ \text{Ind}_1(\Sigma^n) &= \text{Ind}(\Sigma^n) - \dim \text{Im}(L_1) \geq \text{Ind}(\Sigma^n) - 1, \end{aligned} \quad (4.43)$$

logo, de (4.40) e (4.43) obtemos (4.41).

Para (4.42). Consideremos o operador linear  $L_2 : V_k \rightarrow \mathbb{R}$  definido por

$$L_2(\varphi) = \int_{\partial\Sigma} \varphi d\partial\Sigma.$$

Pelo Teorema da dimensão para transformações lineares, tem-se

$$\begin{aligned} \dim \ker(L_2) &= \dim(V_k) - \dim \text{Im}(L_2) \\ \text{Ind}_2(\Sigma^n) &= \text{Ind}(\Sigma^n) - \dim \text{Im}(L_2) \geq \text{Ind}(\Sigma^n) - 1, \end{aligned} \quad (4.44)$$

logo, de (4.40) e (4.44) obtemos (4.42).  $\square$

O próximo teorema que vai ser provado, já foi demonstrado por Guo-Xia em [10, Teorema 3.1], mas aqui apresentaremos uma prova diferente.

**Teorema 4.1.** *Seja  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  uma hipersuperfície contida na bola unitária com  $n \geq 2$ , tal que  $\Sigma^n$  intersecta  $\mathbb{S}^n$  em um ângulo constante  $\theta \in (0, \pi)$ . Então  $\Sigma^n$  é estacionária estável de Tipo-II se, é um  $n$ -disco totalmente geodésico.*

*Demonstração.* Faremos a prova por contradição. Suponhamos que a hipersuperfície  $\Sigma^n$  não é  $n$ -disco totalmente geodésico. Consideremos a função em  $\Sigma^n$  definida por:

$$\rho_a = \frac{1}{\sin \theta} \langle x, a \rangle + \cot \theta \langle N, a \rangle. \quad (4.45)$$

Das identidades (1.23) e (1.24), obtemos

$$\rho_a|_{\partial\Sigma^n} = \frac{1}{\sin \theta} \langle \bar{N}, a \rangle + \cot \theta (-\cos \theta \langle \bar{N}, a \rangle + \sin \theta \langle \bar{\nu}, a \rangle) \quad (4.46)$$

$$= \sin \theta \langle \bar{N}, a \rangle + \cos \theta \langle \bar{\nu}, a \rangle = \langle \nu, a \rangle. \quad (4.47)$$

Por outro lado, como  $\Sigma^n$  é mínima,  $\Delta_\Sigma \langle x, a \rangle = 0$ . Assim, por integração por partes

$$\int_{\partial\Sigma} \rho_a d\partial\Sigma = \int_{\partial\Sigma} \langle \nu, a \rangle d\partial\Sigma = \int_{\partial\Sigma} D_\nu \langle x, a \rangle d\partial\Sigma = \int_\Sigma \Delta_\Sigma \langle x, a \rangle d\Sigma = 0, \quad (4.48)$$

isto é, a função  $\rho \in U$ . Nas identidades (4.27) e (4.28) da Proposição 4.5, podemos observar que  $\rho_a = \frac{\psi_a}{\sin \theta}$ , onde  $\psi_a = \langle x + \cos \theta N, a \rangle$  e

$$Q(\rho_a, \rho_a) = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \int_\Sigma |A|^2 \langle x, a \rangle^2 d\Sigma - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_\Sigma |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma. \quad (4.49)$$

Como  $\rho_a \in U$  e  $\Sigma^n$  é estacionária estável do Tipo-II, temos

$$0 \leq Q(\rho_a, \rho_a) = -\frac{1}{\sin^2 \theta} \int_\Sigma |A|^2 \langle x, a \rangle^2 d\Sigma - \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_\Sigma |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma. \quad (4.50)$$

Portanto,

$$\frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_\Sigma |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma \leq -\frac{1}{\sin^2 \theta} \int_\Sigma |A|^2 \langle x, a \rangle^2 d\Sigma. \quad (4.51)$$

Daí, na identidade (4.27) da Proposição 4.5 e da desigualdade (4.51), observamos que

$$\begin{aligned} Q(N_a, N_a) &= -\frac{n}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} N_a^2 d\Sigma + \frac{\cos \theta}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} |A|^2 N_a \langle x, a \rangle d\Sigma \\ &\leq -\frac{n}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} N_a^2 d\Sigma - \frac{1}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} |A|^2 \langle x, a \rangle^2 d\Sigma \leq 0, \end{aligned} \quad (4.52)$$

isto é,  $Q(N_a, N_a) \leq 0$  para todo campo  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  constante. Se  $Q(N_a, N_a) = 0$  para algum campo  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  constante, então  $\Sigma^n$  é  $n$ -disco totalmente geodésico, pois de (4.52) teríamos que

$$0 = \frac{n}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} N_a^2 d\Sigma + \frac{1}{\sin^2 \theta} \int_{\Sigma} |A|^2 \langle x, a \rangle^2 d\Sigma, \quad (4.53)$$

onde concluimos que  $N_a = 0$  e  $|A|\langle x, a \rangle = 0$  para todo  $x \in \Sigma^n$ . Agora, suponhamos que existe  $x_0 \in \Sigma^n$  tal que  $\langle x_0, a \rangle \neq 0$  e  $|A(x_0)| = 0$ , como a função  $\langle x, a \rangle$  é contínua em  $\Sigma^n$  existe uma vizinhança  $U(x_0)$  onde  $\langle x, a \rangle \neq 0$  e  $|A(x)| = 0$  para todo  $x \in U(x_0)$ , e porque  $\Sigma^n$  é um conjunto analítico  $|A| = 0$  para todo  $x \in \Sigma^n$  isto é,  $\Sigma^n$  é  $n$ -disco totalmente geodésico. Como estamos assumindo que  $\Sigma^n$  não é um  $n$ -disco totalmente geodésico, tem-se que  $Q(N_a, N_a) < 0$ , para todo campo  $a \in \mathbb{R}^{n+1}$  constante.

Em particular, para a  $\{e_1, \dots, e_{n+1}\}$  base canônica de  $\mathbb{R}^{n+1}$ , as funções coordenadas do campo normal  $N_1, \dots, N_{n+1}$  satisfazem  $Q(N_i, N_i) < 0$ , para todo  $i = 1, 2, \dots, n+1$ . Seja  $V = \text{Span}\{N_1, \dots, N_{n+1}\}$ , como  $\Sigma^n$  não é um disco a  $\dim V = n+1$ . Afirmamos que  $Q(u, u) < 0$  para todo  $u \in V$ . De fato, para  $u \in V$  existem  $a_1, \dots, a_{n+1} \in \mathbb{R}$  constantes tal que:

$$\begin{aligned} u &= a_1 N_1 + a_2 N_2 + \dots + a_{n+1} N_{n+1} \\ &= \langle N, a_1 e_1 \rangle + \langle N, a_2 e_2 \rangle + \dots + \langle N, a_{n+1} e_{n+1} \rangle = \langle N, a \rangle = N_a, \end{aligned}$$

onde  $a = (a_1, \dots, a_{n+1})$ . De (4.52) tem-se que  $Q(u, u) = Q(N_a, N_a) < 0$ . Portanto, da definição de índice de Morse obtemos:

$$\text{Ind}(\Sigma^n) \geq n+1. \quad (4.54)$$

Segue de (4.42), da Proposição 4.6, temos

$$\text{Ind}(\Sigma^n) - 1 \leq \text{Ind}_2(\Sigma^n) = 0, \quad (4.55)$$

pois  $\Sigma^n$  é estável de tipo-II. Da desigualdade 4.54

$$\begin{aligned} 0 = \text{Ind}_2(\Sigma^n) &\geq \text{Ind}(\Sigma^n) - 1 \geq n + 1 - 1 \\ &\geq n, \end{aligned}$$

logo  $n \leq 0$ , que é absurdo, pois  $n \geq 2$ . Assim,  $\Sigma^n$  necessariamente tem que ser um  $n$ -disco totalmente geodésico.  $\square$

**Observação 8.** Se consideramos que,  $\Sigma^n \subset \mathbb{B}_1^{n+1}(0)$  é uma hipersuperfície mínima capilar estável de tipo I, então  $\Sigma^n$  é também um  $n$ -disco totalmente geodésico. De fato, do resultado obtido por Wang-Xia em [24, Proposition 3.2], temos

$$\int_{\Sigma} n \langle x + \cos \theta N, a \rangle d\Sigma = \int_{\Sigma} H \langle X_a, N \rangle d\Sigma. \quad (4.56)$$

Como,  $\Sigma^n$  é mínima e  $\rho_a = \frac{\psi_a}{\sin \theta}$  onde  $\psi_a = \langle x + \cos \theta N, a \rangle$ , de (4.56) tem-se

$$\frac{n}{\sin \theta} \int_{\Sigma} \langle x + \cos \theta N, a \rangle d\Sigma = \frac{n}{\sin \theta} \int_{\Sigma} \rho_a d\Sigma = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\Sigma} \rho_a d\Sigma = 0, \quad (4.57)$$

isto é,  $\rho_a \in Z$ . Portanto  $Q(\rho_a, \rho_a) \geq 0$ , pois estamos supondo que  $\Sigma^n$  é estável de tipo I. Note que, da nossa prova do Teorema 4.1, só precisamos que  $Q(\rho_a, \rho_a) \geq 0$  para garantir que  $\text{Ind}(\Sigma^n) \geq n + 1$ . Daí, por (4.41) da Proposição 4.6, obtemos

$$\begin{aligned} 0 = \text{Ind}_1(\Sigma^n) &\geq \text{Ind}(\Sigma^n) - 1 \geq n + 1 - 1 \\ &\geq n, \end{aligned}$$

logo  $n \leq 0$ , que é absurdo, pois  $n \geq 2$ . Assim,  $\Sigma^n$  necessariamente tem que ser um  $n$ -disco totalmente geodésico.  $\diamond$

## REFERÊNCIAS

- [1] Ambrozio, L. *Rigidity of Area-Minimizing Free Boundary Surfaces in Mean Convex Three-Manifolds*, J Geom Anal 25, 1001-1017 (2015). <https://doi.org/10.1007/s12220-013-9453-2>.
- [2] Ambrozio, L., Carlotto, A. and Sharp, B. *Index estimates for free boundary minimal hypersurfaces*, Math. Ann. 370, 1063-1078 (2018). <https://doi.org/10.1007/s00208-017-1549-8>.
- [3] Barbosa, J. L. and Do Carmo, M. *Stability of hypersurfaces with constant mean curvature*, Math Z 185, 339-353 (1984). <https://doi.org/10.1007/BF01215045>.
- [4] Bérard, P. *An elementary introduction to eigenvalue problems with an application to catenoids in  $\mathbb{R}^3$* , Notas da XV Escola de geometria diferencial, em homenagem aos 80 anos de Manfredo do Carmo, Fortaleza, (2008).
- [5] Bérard, P. and Sá Earp, R. *Lindelöf's theorem for catenoids revisited*, <http://arxiv.org/abs/0907.4294>, (2009).
- [6] Devyver, B. *Index of the critical catenoid*, Geom Dedicata 199(3), 355-371 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10711-018-0353-2>.
- [7] Do Carmo, M. *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (2008).
- [8] Fraser, A. and Li, M. *Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary*, J. Differential Geom. 96(2), 183-200, (2014).

- [9] Fraser, A. and Schoen, R. *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, Invent. Math. 203(3), 823-890, (2016).
- [10] Guo, J. and Xia, C. *Stability for a Second Type Partitioning Problem*, J Geom Anal 31, 2890-2923 (2021). <https://doi.org/10.1007/s12220-020-00378-2>.
- [11] Lee, J. M. *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvatura*, New York: Vol. 176. Springer Science & Business Media, 2006.
- [12] Maximo, D. Nunes, I. and Smith, G. *Free boundary minimal annuli in convex three-manifolds*, J. Differential Geom. 106(1) 139-186 (2017). <https://doi.org/10.4310/jdg/1493172096>.
- [13] McGrath, P. *A characterization of the critical catenoid*, Indiana Univ. Math. J. 67(2), 889-897, (2018).
- [14] Montiel, S. and Ros, A. *Compact Hypersurfaces: The Alexandrov Theorem for Higher Order Mean Curvatures*, In: B. Lawson and K. Tenenblat, Eds., Differential Geometry, Longman, Essex, pp. 279-296, (1991).
- [15] Nitsche, J. *Stationary partitioning of convex bodies*, Arch. Rational Mech. Anal. 89, 1-19 (1985). <https://doi.org/10.1007/BF00281743>.
- [16] Pyo, P. *Minimal annuli with constant contact angle along the planar boundaries*, Geom. Dedicata. 146, 159-164, (2010). <https://doi.org/10.1007/s10711-009-9431-9>.
- [17] Rosenberg, H. *Hypersurfaces of constant curvature in space forms*, Bull.Sc.Math 2de serie. 117, 211-239, (1993).
- [18] Smith, G. and Zhou, D. *The Morse index of the critical catenoid*. Geom Dedicata 201, 13-19 (2019). <https://doi.org/10.1007/s10711-018-0412-8>.
- [19] Struwe, M. *The existence of surfaces of constant mean curvature with free boundaries*, Acta Math 160, 19-64 (1988). <https://doi.org/10.1007/BF02392272>.
- [20] Tran, H. *The Gauss map of a free boundary minimal surface*, Comm. Anal. Geom. 29, 483-499 (2019). <https://dx.doi.org/10.4310/CAG.2021.v29.n2.a7>.

- 
- [21] Tran, H. *Index characterization for free boundary minimal surfaces*, *Comm. Anal. Geom.* 28, 189-222 (2020). <https://dx.doi.org/10.4310/CAG.2020.v28.n1.a6>.
- [22] Tran, H. and Zhou, D. *On the Morse index with constraints I: An abstract formulation*, arXiv:2010.05952v1. 2020.
- [23] Tran, H. and Zhou, D. *On the Morse index with constraints II: Application*, arXiv:2010.05951v1. 2020.
- [24] Wang, G. and Xia, C. *Uniqueness of stable capillary hypersurfaces in a ball*, *Math. Ann.* 374, 1845-1882 (2019). <https://doi.org/10.1007/s00208-019-01845-0>.