

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
Escola de Engenharia  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

Beatriz Borges Faria Fonseca

**PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE FADIGA BIDIMENSIONAL  
UTILIZANDO A FORMULAÇÃO DUAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO**

Belo Horizonte  
2023

Beatriz Borges Faria Fonseca

**PROGRAMA COMPUTACIONAL PARA ANÁLISE DE FADIGA BIDIMENSIONAL  
UTILIZANDO A FORMULAÇÃO DUAL DO MÉTODO DOS ELEMENTOS DE  
CONTORNO**

**Versão Final**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de “Mestre em Engenharia de Estruturas”.

Orientador: Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto

Belo Horizonte  
2023

F676p

Fonseca, Beatriz Borges Faria.

Programa computacional para análise de fadiga bidimensional utilizando a formulação dual do método dos elementos de contorno [recurso eletrônico] / Beatriz Borges Faria Fonseca. - 2023.

1 recurso online (215 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Rodrigo Guerra Peixoto.

Apêndices: f. 201 a 215.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 196-200.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Fadiga - Teses. 3. Mecânica da fratura - Teses. 4. Método de elementos de contorno - Teses. I. Peixoto, Rodrigo Guerra. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



**ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº:  
395 DA ALUNA BEATRIZ BORGES FARIA FONSECA.**

Às **14:00** horas do dia **03** do mês de **março** de **2023**, reuniu-se em ambiente virtual, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **14 de fevereiro de 2023**, para julgar a defesa da Dissertação de Mestrado intitulada "**Programa Computacional para Análise de Fadiga Bidimensional Utilizando a Formulação Dual do Método dos Elementos de Contorno**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de MESTRE EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de Estruturas.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra à candidata para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa da candidata. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença da candidata e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foram atribuídas as seguintes indicações:

**Prof. Dr. Rodrigo Guerra Peixoto - DEES - UFMG (Orientador)**

**Prof. Dr. Samuel Silva Penna - DEES - UFMG**

**Prof. Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro - DEES - UFMG**

**Prof. Dr. Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro - Instituto Tecnológico de Aeronáutica**

Pelas indicações acima, a candidata foi considerada **APROVADA**, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente à candidata pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 03 de março de 2023.

Observações:

1. A aprovação da candidata na defesa da Dissertação de Mestrado não significa que a mesma tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Estruturas;
2. Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.



Documento assinado eletronicamente por **Rodrigo Guerra Peixoto, Professor do Magistério Superior**, em 03/03/2023, às 17:47, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Samuel Silva Penna, Professor do Magistério Superior**, em 03/03/2023, às 17:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Sérgio Gustavo Ferreira Cordeiro, Usuário Externo**, em 08/03/2023, às 14:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Gabriel de Oliveira Ribeiro, Professor Magistério Superior - Voluntário**, em 13/03/2023, às 16:30, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



Documento assinado eletronicamente por **Felício Bruzzi Barros, Coordenador(a) de curso de pós-graduação**, em 27/04/2023, às 10:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).

---



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2106537** e o código CRC **C4958C9C**.

---

*A todos que contribuíram, direta ou indiretamente, para a realização desse trabalho.*

# Agradecimentos

A Deus e à Nossa Senhora do Perpétuo Socorro, pelos incontáveis milagres na minha vida e por estarem sempre me protegendo e guiando.

À minha mãe Neide, por todo amor, carinho e orações dedicados a mim e por ser meu porto seguro, levantando-me e apoiando-me sempre que precisei.

Ao meu pai João, por todo amor, por ser exemplo de fé, esperança e luta e por ser o motivo pelo qual me tornei engenheira.

Ao meu orientador Professor Rodrigo Peixoto, pelos ensinamentos compartilhados e pelo suporte e apoio ao longo desse trabalho.

Aos professores Roque, Samuel, Felício, Hermes, Lapo e Ariel, que contribuíram diretamente na minha formação no mestrado, e aos demais professores do PROPEEs.

Aos meus amigos, que tornaram a caminhada mais leve e divertida.

Ao Luciell, à Juliana, à Patrícia, à Luciola e aos demais funcionários do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, por serem sempre solícitos e sempre me recepcionarem com um sorriso.

À CAPES pelo apoio financeiro.

A cada um de vocês, minha eterna gratidão.

*O mais corajoso dos atos ainda é pensar com a própria cabeça.*

Coco Chanel



# Resumo

O estudo de fadiga é de extrema importância, pois acredita-se que a fadiga seja responsável por 90% das falhas ocorridas em componentes metálicos. Pensando nisso, desenvolve-se um programa computacional completo, codificado em linguagem Fortran 95, capaz de analisar situações reais de componentes sujeitos a fadiga em modo I, II ou modo misto de fratura. Os campos elásticos são obtidos pelo Método dos Elementos de Contorno Dual, que permite analisar o comportamento de trincas pela colocação de Equações Integrais de Contorno linearmente independentes em cada uma de suas faces. As integrais singulares são resolvidas através da expansão da parte não singular do integrando em polinômios da distância radial entre os pontos fonte e campo, metodologia com eficácia comprovada através de testes. Os fatores de intensidade de tensão são avaliados pelo método da Integral J a partir de seu desacoplamento nos modos I e II, devido a sua maior precisão. A direção de propagação é obtida através do critério da Máxima Tensão Circunferencial. A propagação subcrítica das trincas por fadiga é avaliada pela Mecânica da Fratura Elástica Linear, com base na Equação de Paris, modificada de forma a considerar a influência de razões de tensão diferentes de zero e de modos mistos de fratura. Ao final da análise, os resultados de interesse, tais como distribuição de tensões e deformações, fatores de intensidade de tensão e número de ciclos transcorridos, são fornecidos em uma série de arquivos de texto e em arquivos XML, que permitem a visualização gráfica dos resultados no *software* INSANE.

Palavras-chave: Fadiga. Mecânica da Fratura Elástica Linear. Método dos Elementos de Contorno Dual. Integral J.

# Abstract

The study of fatigue is extremely important, as it is believed that fatigue is responsible for 90% of failures in metallic components. With that in mind, a complete computational program is developed, coded in Fortran 95 language, capable of analysing real situations of components subject to fatigue in mode I, II or mixed-mode. The elastic fields are obtained by the Dual Boundary Element Method, which allows analysing the behavior of cracks by placing linearly independent Boundary Integral Equations on each of their faces. Singular integrals are solved by expanding the non-singular part of the integrand into polynomials of the radial distance between the source and field points, a methodology with proven effectiveness through tests. Stress intensity factors are evaluated by the J Integral method from its decoupling in modes I and II, due to its greater accuracy. The propagation direction is obtained through the Maximum Circumferential Stress criterion. The subcritical propagation of fatigue cracks is evaluated by Linear Elastic Fracture Mechanics, based on the Paris Equation, modified in order to consider the influence of non-zero stress ratios and mixed-mode loadings. At the end of the analysis, the results of interest, such as distribution of stresses and strains, stress intensity factors and number of elapsed cycles, are provided in a series of text files and XML files, which allow graphical visualization of results in the INSANE software.

Keywords: Fatigue. Linear Elastic Fracture Mechanics. Dual Boundary Element Method. J Integral.

# Lista de Figuras

2.1	Estratégia para discretização do contorno na aplicação do Método dos Elementos de Contorno Dual (Adaptado de Portela et al. (1992 <i>a,b</i> , 1993)). . .	48
2.2	Variáveis em um elemento singular (Adaptado de Gao (2006)). . . . .	53
2.3	Elemento quadrático e descontínuo, parametrizado na coordenada $\eta$ . . . .	55
2.4	Elementos usados na análise . . . . .	56
2.5	Representação das coordenadas originais e locais . . . . .	62
3.1	Modos I, II e III de fratura (Feng et al., 2017). . . . .	66
3.2	Representação da tensão tendendo a infinito na ponta da trinca (Dowling, 2013). . . . .	67
3.3	Representação da zona plástica na ponta da trinca (adaptado de Dowling (2013)). . . . .	67
3.4	Componentes de tensão nas coordenadas polares . . . . .	68
3.5	Trinca interna em uma placa infinita tracionada . . . . .	69
3.6	Deslocamentos usados pelo método da correlação de deslocamentos . . . .	72
3.7	Sistema cartesiano de referência e contorno usados na Integral J . . . . .	74
3.8	Componentes simétricas dos campos de deslocamento ( $u^I$ ) e de tensão ( $\sigma^I$ )	76
3.9	Componentes assimétricas dos campos de deslocamento ( $u^{II}$ ) e de tensão ( $\sigma^{II}$ ) . . . . .	77
3.10	Contorno composto por 20 pontos para a integração da integral J por meio da regra dos trapézios . . . . .	79
3.11	Contorno composto por 20 pontos de integração de Gauss . . . . .	80
3.12	Contorno circular composto por 20 elementos quadráticos . . . . .	81
3.13	Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: discretização e condições de contorno . . . . .	84
3.14	Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: configuração deformada para a trinca de comprimento $a = 0, 2w$ . . . . .	88

3.15	Placa retangular com trinca interna inclinada a 45 <sup>o</sup> : discretização e condições de contorno . . . . .	89
3.16	Placa retangular com trinca interna dobrada: discretização e condições de contorno . . . . .	95
3.17	Placa retangular com trinca interna dobrada: ampliação da trinca dobrada	95
3.18	<i>Compact Tension Test Specimen</i> : discretização e condições de contorno . .	104
3.19	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: discretização e condições de contorno . . . . .	108
3.20	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: discretização e condições de contorno . . . . .	112
3.21	Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: discretização e condições de contorno . . . . .	116
3.22	Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: discretização e condições de contorno . . . . .	120
3.23	Representação dos fatores de intensidade de tensão de modo I e II, sendo a) ambos positivos, b) $K_I$ positivo e $K_{II}$ negativo . . . . .	125
3.24	Determinação da direção de propagação da trinca (Adaptado de de Santana (2015)). . . . .	126
4.1	Carregamento cíclico de amplitude constante . . . . .	129
4.2	Gráfico $\frac{da}{dN}$ x $\Delta K$ em escala log-log . . . . .	130
4.3	Variáveis da regra de Simpson (Dowling, 2013). . . . .	135
4.4	Carregamento cíclico com amplitude variável . . . . .	136
4.5	Reorganização do carregamento cíclico com amplitude variável . . . . .	136
4.6	Ciclo equivalente de amplitude constante . . . . .	138
5.1	Placa retangular com trinca interna: discretização e condições . . . . .	141
5.2	Placa retangular com trinca interna: representação gráfica do carregamento cíclico de amplitude constante . . . . .	141
5.3	Placa retangular com trinca interna: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) . . . . .	143
5.4	Placa retangular com trinca interna: número de ciclos x comprimento da trinca . . . . .	143
5.5	Placa retangular com trinca interna: configuração final . . . . .	144
5.6	Placa retangular com trinca interna: configuração final deformada . . . . .	144

5.7	Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: discretização e condições de contorno . . . . .	147
5.8	Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: carregamento . . . . .	148
5.9	Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: variação do fator de intensidade de tensão . . . . .	149
5.10	Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: número de ciclos x comprimento da trinca . . . . .	149
5.11	Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: configuração final . . . . .	150
5.12	Placa retangular com duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante: discretização e condições de contorno . . . . .	152
5.13	Placa retangular com duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante: variação do fator de intensidade de tensão . . . . .	153
5.14	Placa retangular com duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante: número de ciclos x comprimento da trinca . . . . .	153
5.15	Placa retangular com duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante: configuração final . . . . .	154
5.16	Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: discretização e condições de contorno . . . . .	156
5.17	Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: carregamento com amplitude variável . . . . .	156
5.18	Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: carregamento equivalente com amplitude constante . . . . .	157
5.19	Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: variação do fator de intensidade de tensões . . . . .	158
5.20	Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: número de ciclos x comprimento da trinca . . . . .	158
5.21	Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: configuração final . . . . .	159
5.22	<i>Compact Mixed Mode</i> : dimensões . . . . .	160
5.23	<i>Compact Mixed Mode</i> : geometria analisada e eixos cartesianos . . . . .	161
5.24	<i>Compact Mixed Mode</i> : gráfico $da/dN$ x $\Delta K$ . . . . .	162
5.25	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 90^\circ$ e $\theta = -3^\circ$ : discretização e condições de contorno . . . . .	164

5.26	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 90^\circ$ e $\theta = -3^\circ$ : trajetória . . . . .	165
5.27	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 90^\circ$ e $\theta = -3^\circ$ : configurações finais . . . . .	166
5.28	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 90^\circ$ e $\theta = -3^\circ$ : configurações finais deformadas	167
5.29	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 90^\circ$ e $\theta = -3^\circ$ : número de ciclos x variação do comprimento da trinca . . . . .	168
5.30	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 90^\circ$ e $\theta = -3^\circ$ : da/dN x dK . . . . .	169
5.31	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 110^\circ$ e $\theta = -1,5^\circ$ : discretização e condições de contorno . . . . .	171
5.32	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 110^\circ$ e $\theta = -1,5^\circ$ : trajetória . . . . .	172
5.33	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 110^\circ$ e $\theta = -1,5^\circ$ : configuração final e defor- mada . . . . .	173
5.34	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 110^\circ$ e $\theta = -1,5^\circ$ : número de ciclos x variação do comprimento da trinca . . . . .	173
5.35	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 110^\circ$ e $\theta = -1,5^\circ$ : da/dN x dK . . . . .	174
5.36	Representação do processo em um forno de endurecimento de minério de ferro do tipo grelha móvel reta (Adaptado de de Moraes et al. (2018)) . . .	175
5.37	Dimensões do carro de grelha . . . . .	177
5.38	Corte ilustrativo de uma roda tipo engrenagem que realiza o transporte dos carros de grelha entre os percursos de carga e retorno no forno de endurecimento . . . . .	177
5.39	Roda (engrenagem) de acionamento de grelha reta . . . . .	178
5.40	Roda de acionamento de grelha reta: representação do carregamento . . . . .	181
5.41	Discretização e condições de contorno do modelo numérico do inserto . . . . .	182
5.42	Discretização e condições de contorno do modelo numérico do corpo do dente	183
5.43	Carregamentos para $c_{rr} = 0,075$ . . . . .	184
5.44	Gráfico $\Delta a$ x $N$ para $c_{rr} = 0,075$ . . . . .	185
5.45	Roda de acionamento de grelha reta com $c_{rr} = 0,075$ : configuração final sem acionamento partindo do repouso . . . . .	186
5.46	Roda de acionamento de grelha reta com $c_{rr} = 0,075$ : configuração final com acionamento partindo do repouso . . . . .	186
5.47	Carregamentos para $c_{rr} = 0,090$ . . . . .	187
5.48	Gráfico $\Delta a$ x $N$ para $c_{rr} = 0,090$ . . . . .	187
5.49	Roda de acionamento de grelha reta com $c_{rr} = 0,090$ : configuração final sem acionamento partindo do repouso . . . . .	188

5.50	Roda de acionamento de grelha reta com $c_{rr} = 0,090$ : configuração final com acionamento partindo do repouso . . . . .	188
5.51	Carregamentos para $c_{rr} = 0,100$ . . . . .	189
5.52	Gráfico $\Delta a \times N$ para $c_{rr} = 0,100$ . . . . .	189
5.53	Roda de acionamento de grelha reta com $c_{rr} = 0,100$ : configuração final sem acionamento partindo do repouso . . . . .	190
5.54	Roda de acionamento de grelha reta com $c_{rr} = 0,100$ : configuração final com acionamento partindo do repouso . . . . .	190
B.1	Fluxograma do algoritmo para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão	203
B.2	Fluxograma do algoritmo para a determinação da direção de propagação .	204
B.3	Fluxograma do algoritmo para a contagem de ciclos pelo método <i>rainflow</i> e obtenção de um carregamento cíclico equivalente com amplitude constante e $R = 0$ . . . . .	205
B.4	Fluxograma do algoritmo para a determinação do incremento da trinca $\Delta a$	206
B.5	Fluxograma do algoritmo para a propagação de trincas . . . . .	207
B.6	Fluxograma geral do programa computacional . . . . .	208
D.1	Ciclo de amplitude variável reorganizado . . . . .	211
D.2	Retirada do pico H e do vale G . . . . .	212
D.3	Retirada do pico J e do vale K . . . . .	212
D.4	Retirada do pico L e do vale A . . . . .	213
D.5	Retirada do pico D e do vale C . . . . .	213
D.6	Retirada do pico B e do vale E . . . . .	214

# Lista de Tabelas

2.1	Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral $u_{ij}^*$ obtidos com o MSS e com a quadratura logarítmica (com 12 pontos de integração) . . . . .	57
2.2	Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral $u_{ij}^*$ obtidos com o método proposto e com a quadratura logarítmica (com 12 pontos de integração) . . . . .	58
2.3	Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral $t_{ij}^*$ obtidos com o MSS e analiticamente por Portela (1993) . . . . .	58
2.4	Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral $t_{ij}^*$ obtidos com o método proposto e analiticamente por Portela (1993) . . . . .	58
2.5	Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral $t_{ijk}^*$ obtidos com o MSS e analiticamente por Portela (1993) . . . . .	59
2.6	Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral $t_{ijk}^*$ obtidos com o método proposto e analiticamente por Portela (1993) . . . . .	59
3.1	Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos . . . . .	85
3.2	Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios) . . . . .	85
3.3	Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss) . . . . .	86
3.4	Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos) . . . . .	86
3.5	Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: erro máximo obtido para $K_I$ . . . . .	87
3.6	Placa retangular com trinca interna inclinada a $45^\circ$ : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos . . . . .	90



3.7	Placa retangular com trinca interna inclinada a 45 <sup>o</sup> : fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela correlação de deslocamentos . . .	90
3.8	Placa retangular com trinca interna inclinada a 45 <sup>o</sup> : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios) . . .	91
3.9	Placa retangular com trinca interna inclinada a 45 <sup>o</sup> : fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios) . . .	91
3.10	Placa retangular com trinca interna inclinada a 45 <sup>o</sup> : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss) . . .	92
3.11	Placa retangular com trinca interna inclinada a 45 <sup>o</sup> : fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss) . . .	92
3.12	Placa retangular com trinca interna inclinada a 45 <sup>o</sup> : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos) . . . . .	93
3.13	Placa retangular com trinca interna inclinada a 45 <sup>o</sup> : fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos) . . . . .	93
3.14	Placa retangular com trinca interna inclinada a 45 <sup>o</sup> : erro máximo obtido para $K_I$ . . . . .	93
3.15	Placa retangular com trinca interna inclinada a 45 <sup>o</sup> : erro máximo obtido para $K_{II}$ . . . . .	94
3.16	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta A, calculado pela correlação de deslocamentos	96
3.17	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta A, calculado pela correlação de deslocamentos	96
3.18	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta B, calculado pela correlação de deslocamentos	97
3.19	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta B, calculado pela correlação de deslocamentos	97
3.20	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (regra dos trapézios)	97
3.21	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (regra dos trapézios) . . . . .	98
3.22	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (regra dos trapézios)	98

3.23	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (regra dos trapézios) . . . . .	98
3.24	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (pontos de Gauss)	99
3.25	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (pontos de Gauss)	99
3.26	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (pontos de Gauss)	99
3.27	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (pontos de Gauss)	100
3.28	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos) . . . . .	100
3.29	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos) . . . . .	101
3.30	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos) . . . . .	101
3.31	Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos) . . . . .	101
3.32	Placa retangular com trinca interna dobrada: erro máximo obtido para $K_I$ , na ponta A . . . . .	102
3.33	Placa retangular com trinca interna dobrada: erro máximo obtido para $K_{II}$ , na ponta A . . . . .	102
3.34	Placa retangular com trinca interna dobrada: erro máximo obtido para $K_I$ , na ponta B . . . . .	102
3.35	Placa retangular com trinca interna dobrada: erro máximo obtido para $K_{II}$ , na ponta B . . . . .	102
3.36	<i>Compact Tension Test Specimen</i> : dimensões . . . . .	103
3.37	<i>Compact Tension Test Specimen</i> : dimensões e elementos da trinca . . . . .	104
3.38	<i>Compact Tension Test Specimen</i> : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos . . . . .	105

3.39	<i>Compact Tension Test Specimen</i> : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios) . . . . .	106
3.40	<i>Compact Tension Test Specimen</i> : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss) . . . . .	106
3.41	<i>Compact Tension Test Specimen</i> : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos) . . .	107
3.42	<i>Compact Tension Test Specimen</i> : erro máximo obtido para $K_I$ . . . . .	107
3.43	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos . . . . .	109
3.44	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios) . . . . .	109
3.45	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss) . . . . .	110
3.46	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos) . . . . .	110
3.47	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: erro máximo obtido para $K_I$ . . . . .	111
3.48	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela correlação de deslocamentos . . . . .	113
3.49	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios) . . . . .	113
3.50	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss) . . . . .	114
3.51	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos) . . . . .	114
3.52	Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: erro máximo obtido para $K_{II}$ . . . . .	115

3.53	Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos	117
3.54	Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios)	117
3.55	Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss)	118
3.56	Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)	118
3.57	Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: erro máximo obtido para $K_I$	119
3.58	Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos	121
3.59	Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios)	121
3.60	Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss)	122
3.61	Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)	122
3.62	Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: erro máximo obtido para $K_I$	123
5.1	Placa retangular com trinca interna: propriedades do material	140
5.2	Placa retangular com trinca interna: dimensões	140
5.3	Placa retangular sujeita à tração com diferentes configurações de trinca: propriedades do material	146
5.4	Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: dimensões	147
5.5	Placa retangular com duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante: dimensões	151

5.6	Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: dimensões . . . . .	155
5.7	<i>Compact Mixed Mode</i> : propriedades do material . . . . .	162
5.8	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 90^\circ$ e $\theta = -3^\circ$ : dados dos testes . . . . .	163
5.9	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 90^\circ$ e $\theta = -3^\circ$ : resultados para o número de ciclos total . . . . .	168
5.10	<i>Compact Mixed Mode</i> com $\alpha = 110^\circ$ e $\theta = -1,5^\circ$ : dados dos testes . . . . .	170
5.11	Roda de acionamento de grelha reta: propriedades do material . . . . .	183
D.1	Ciclos . . . . .	214

# Lista de Abreviaturas e Siglas

AF	<i>After-firing Zone</i> – Zona de pós-queima
C1	<i>First Cooling Zone</i> – Primeira zona de resfriamento
C3	<i>Second Cooling Zone</i> – Segunda zona de resfriamento
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior
CMM	<i>Compact Mixed Mode</i>
COD	<i>Crack Opening Displacement</i> – Deslocamento relativo de abertura da trinca
CSD	<i>Crack Sliding Displacement</i> – Deslocamento relativo de deslizamento da trinca
CT	<i>Compact Tension Test Specimen</i>
°C	Graus Celsius
DDD	<i>Downdraft Drying Zone</i> – Zona de secagem descendente
DEES	Departamento de Engenharia de Estruturas
EIC	Equação Integral de Contorno
EPD	Estado Plano de Deformação
EPT	Estado Plano de Tensão
F	<i>Firing Zone</i> – Zona de queima
FIT	Fator de Intensidade de Tensão
IDE	<i>Integrated Development Environment</i>
INSANE	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
kg	Quilograma

kg/m <sup>3</sup>	Quilograma por metro cúbico
kN	Quilonewton
m	Metro
m <sup>3</sup>	Metro cúbico
MEC	Método dos Elementos de Contorno
MECD	Método dos Elementos de Contorno Dual
MEF	Método dos Elementos Finitos
MEIC	Método da Equação Integral de Contorno
MFEL	Mecânica da Fratura Elástica Linear
min	Minuto
mm	Milímetro
m/min	Metro por minuto
MPa	Megapascal
m/s <sup>2</sup>	Metro por segundo ao quadrado
MSS	Método da Subtração de Singularidade
MTC	Máxima Tensão Circunferencial
PFH	Parte Finita de Hadamard
PH	<i>Pre-heating Zone</i> – Zona de pré-aquecimento
rad/min	Radianos por minuto
s	Segundos
UDD	<i>Updraft Drying Zone</i> – Zona de secagem ascendente
UFMG	Universidade Federal de Minas Gerais
VPC	Valor Principal de Cauchy

# Lista de Símbolos

## Capítulo 2

$\xi$	Ponto fonte
$\xi^*$	Ponto fonte coincidente a $\xi$
$\boldsymbol{x}$	Ponto campo
$\Gamma$	Contorno do problema
$i, j, k$	Componentes cartesianas
$u_j$	Componentes de deslocamento
$t_j$	Componentes de força de superfície
$n_i$	Componentes do vetor normal
$\oint$	Integral existe no sentido do valor principal de Cauchy (VPC)
$\oint$	Integral existe no sentido da parte finita de Hadamard (PFH)
$u_{ij}^*, t_{ij}^*, u_{ijk}^*, t_{ijk}^*$	Termos da solução fundamental de Kelvin
$\boldsymbol{u}$	Vetor de deslocamento
$\boldsymbol{t}$	Vetor de força de superfície
$\boldsymbol{H}$	Matriz cujos coeficientes vêm das integrais que contêm $t_{ij}^*$ e $t_{ijk}^*$
$\boldsymbol{G}$	Matriz cujos coeficientes vêm das integrais que contêm $u_{ij}^*$ e $u_{ijk}^*$
$r$	Distância entre o ponto fonte e o ponto campo
$x_1$	Eixo cartesiano na direção 1
$x_2$	Eixo cartesiano na direção 2



$A$	Matriz do sistema linear que contém os coeficientes que acompanham as incógnitas
$x$	Vetor do sistema linear que contém as incógnitas
$f$	Vetor do sistema linear, obtido pela multiplicação da matriz de coeficientes e do vetor de variáveis conhecidas
$\ln$	Logarítmo neperiano
$I_i(\boldsymbol{\xi}), J_i(\boldsymbol{\xi})$	Integrais singulares gerais do método apresentado por Gao (2006)
$f_i(\boldsymbol{\xi})$	Núcleo das integrais singulares gerais
$\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi})$	Parte regular das integrais singulares gerais
$\beta$	Indica o nível de singularidade das integrais gerais
$d\Gamma$	Diferencial no contorno
$dr$	Diferencial na distância $r$
$\epsilon$	Coordenada paramétrica que assume valores entre -1 e +1
$d\epsilon$	Diferencial em $\epsilon$
$r_{,1}$	Derivada da distância $r$ em relação a $x_1$
$r_{,2}$	Derivada da distância $r$ em relação a $x_2$
$x_{1,\epsilon}$	Derivada de $x_1$ em relação a $\epsilon$
$x_{2,\epsilon}$	Derivada de $x_2$ em relação a $\epsilon$
$\partial r$	Diferencial parcial em $r$
$\partial x_1$	Diferencial parcial na direção 1
$\partial x_2$	Diferencial parcial na direção 2
$J_e$	Jacobiano
$\partial \epsilon$	Diferencial parcial na coordenada $\epsilon$
$\hat{\mathbf{r}}$	Vetor unitário da distância $r$
$\hat{\mathbf{l}}$	Vetor unitário tangencial a $d\Gamma$

$e$	Elemento de contorno
$r(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}^e)$	Distância entre o ponto fonte e o ponto final do elemento
$\boldsymbol{x}^e$	Ponto final do elemento
$\sum$	Somatório
$C_i^n$	Coefficientes do método proposto por Gao (2006)
$N$	Ordem dos polinômios de expansão
$n$	Índice relativo ao ponto
$F^n$	Monômio de $r$ envolvido na expansão da integral singular $I_i(\boldsymbol{\xi})$
$H^n$	Monômio de $r$ envolvido na expansão da integral singular $J_i(\boldsymbol{\xi})$
$\lambda_i$	Distância entre os pontos de colocação e o centro de um elemento parametrizado
$\eta$	Coordenada paramétrica que assume valores entre -1 e + 1
$N_\alpha$	Componentes da função de interpolação
%	Porcentagem
$\Omega$	Domínio do problema
$\sigma_{ij}$	Componentes do tensor de tensões
$\epsilon_{ij}$	Componentes do tensor de deformações
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$E$	Módulo de elasticidade
$u_{i,j}$	Componentes do gradiente de deslocamentos
$x_1, x_2$	Coordenadas originais
$u_j(\eta)$	Componentes de deslocamento na coordenada $\eta$
$u_j^\alpha$	Componentes de deslocamento nos pontos nodais
$\alpha$	Índice referente ao ponto de interpolação

$\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$	Coordenadas locais
$\tilde{u}_i$	Componentes de deslocamento nas coordenadas locais
$L_{ij}$	Componentes da matriz de rotação
sen	Seno
cos	Cosseno
$\theta$	Ângulo
$\partial\eta$	Derivada parcial na coordenada $\eta$
$\partial\tilde{u}_i$	Derivada parcial das componentes de deslocamento nas coordenadas locais
$\tilde{\sigma}_{ij}$	Componentes de tensão nas coordenadas locais
$\tilde{t}_i$	Componentes de força de superfície nas coordenadas locais
$t_i$	Componentes de força de superfície nas coordenadas originais
$\bar{\lambda}, \mu$	Constantes de Lamé
$\tilde{\epsilon}_{ij}$	Componentes do tensor de deformações nas coordenadas locais
$\delta_{ij}$	Delta de Kronecker
$\tilde{u}_{i,j}$	Componentes do tensor gradiente de deformações nas coordenadas locais
$dN_\alpha$	Diferencial da função de interpolação
$m$	Coordenadas cartesianas

### Capítulo 3

$K$	Fator de Intensidade de Tensão
$K_I$	Fator de intensidade de tensão de modo I
$K_{II}$	Fator de intensidade de tensão de modo II
$K_{III}$	Fator de intensidade de tensão de modo III
$F$	Fator dependente da geometria da trinca
$\sigma$	Tensão remota aplicada

$a$	Comprimento característico da trinca
$K_c$	Tenacidade à fratura
B	Nó pertencente à trinca
B'	Nó pertencente à trinca, oposto a B
$u_1$	Componente de deslocamento na direção do eixo $x_1$
$u_2$	Componente de deslocamento na direção do eixo $x_2$
$\mu$	Módulo de cisalhamento
$r$	Raio medido a partir de um sistema centrado na ponta da trinca
$\theta$	Ângulo medido a partir de um sistema centrado na ponta da trinca
cos	Cosseno
sen	Seno
$\kappa$	Variável dependente do coeficiente de Poisson $\nu$ e do estado plano adotado
$x_1$	Eixo cartesiano
$x_2$	Eixo cartesiano
$\theta_{B'}$	Ângulo de B' em relação ao eixo da trinca
$\theta_B$	Ângulo de B em relação ao eixo da trinca
$r_{B'}$	Raio do ponto B' em relação à ponta da trinca
$r_B$	Raio do ponto B em relação à ponta da trinca
$u'_i$	Componentes de deslocamento do ponto B'
$u_i$	Componentes de deslocamento do ponto B
$\Gamma$	Contorno da integral J
$n$	Vetor normal ao contorno
$J_k$	Componentes da integral J
$k$	Componente cartesiana

$W$	Densidade de energia de deformação
$n_k$	Componentes do vetor normal
$t_i$	Componentes do vetor de força de superfície
$u_{i,j}$	Componentes do tensor gradiente de deslocamento
$\sigma_{ij}$	Componentes de tensão
$\epsilon_{ij}$	Componentes de deformação
$u_{ij,k}^*, t_{ij,k}^*$	Termos da solução fundamental de Kelvin
$u_j$	Componentes de deslocamento
$t_j$	Componentes de força de superfície
$\xi$	Ponto fonte
$\boldsymbol{x}$	Ponto campo
$E$	Módulo de elasticidade
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$J_1^I$	Parte simétrica da integral $J_1$
$J_1^{II}$	Parte assimétrica da integral $J_1$
$\sigma^I$	Parte simétrica do campo de tensão
$\sigma^{II}$	Parte assimétrica do campo de tensão
$u^I$	Parte simétrica do campo de deslocamento
$u^{II}$	Parte assimétrica do campo de deslocamento
$\sigma_{ij}$	Componentes de tensão do ponto analisado
$u_i$	Componentes de deslocamento do ponto analisado
$\sigma'_{ij}$	Componentes de tensão do ponto simétrico ao analisado
$u'_i$	Componentes de deslocamento do ponto simétrico ao analisado
$M$	Modo de fratura

$n_p$	Número de pontos que compõe o contorno circular da integral J na regra dos trapézios
$\eta$	Coordenada paramétrica que assume valores entre -1 e + 1
$n_{pi}$	Número de pontos de integração que compõe o contorno circular da integral J
$w_k$	Peso para cada ponto de integração
$J(\eta_k)$	Jacobiano
$k$	Índice referente ao ponto de integração
$N_\alpha(\eta)$	Componentes da função de interpolação na coordenada $\eta$
$\alpha$	Índice referente ao nó
$\lambda_i$	Distância dos pontos de colocação do centro de um elemento parametrizado
$K_{normalizado}$	Fator de intensidade de tensão normalizado
$w, h, b, c, h_1, s$	Dimensões geométricas
$D$	Diâmetro
$P$	Carga aplicada
$F_1, F_2$	Fatores geométricos
$\tau$	Tensão de cisalhamento remotamente aplicada
$\sigma_{\theta\theta}$	Tensão circunferencial
$\sigma_{r\theta}$	Tensão de cisalhamento
arctan	Arcotangente
$\beta^i$	Ângulo de correção
$\theta_0$	Ângulo inicial
$\Delta a$	Incremento de propagação da trinca

## Capítulo 4

$\sigma$	Tensão
----------	--------

$\sigma_{max}$	Tensão máxima
$\sigma_{min}$	Tensão mínima
$t$	Tempo
$R$	Razão de tensões
$K_{max}$	Fator de intensidade de tensão máximo
$K_{min}$	Fator de intensidade de tensão mínimo
$\frac{\partial a}{\partial N}$	Taxa de crescimento da trinca
$a$	Comprimento da trinca
$N$	Número de ciclos
$\Delta K$	Variação do fator de intensidade de tensão
$\Delta K_{th}$	Limiar à fadiga
$K_{IC}$	Tenacidade à fratura
$K_{Ieq}$	Fator de intensidade de tensão equivalente de modo I
$K_I$	Fator de intensidade de tensão de modo I
$K_{II}$	Fator de intensidade de tensão de modo II
$\sigma_{\theta\theta}$	Tensão circunferencial
$r$	Raio medido a partir de um sistema centrado na ponta da trinca
$\theta$	Ângulo de propagação da trinca, medindo a partir de um sistema centrado na ponta da trinca
cos	Cosseno
sen	Seno
$\sigma_{22}$	Tensão normal na direção $x_2$
$\Delta K_{Ieq}$	Variação do fator de intensidade de tensão equivalente de modo I
$K_{Ieq}^{max}$	Fator de intensidade de tensão equivalente de modo I máximo

$K_{Ieq}^{min}$	Fator de intensidade de tensão equivalente de modo I mínimo
$C, m$	Parâmetros do material, usados na Equação de Paris
$\overline{\Delta K_{Ieq}}$	Variação do fator de intensidade de tensão equivalente de modo I para $R = 0$
$\gamma$	Propriedade do material
$C_0$	Parâmetro $C$ para $R = 0$
$dN$	Diferencial relativo ao número de ciclos
$da$	Diferencial relativo ao comprimento da trinca
$\Delta a$	Incremento de propagação da trinca
$\Delta a_{max}$	Incremento máximo a ser adotado na propagação da trinca
$y$	Núcleo da integral
$y_j$	Núcleo da integral relativo ao passo de propagação
$i, j$	Índices
$N_{total}$	Número de ciclos total da análise
$N_i$	Número de ciclos contabilizados a cada dois passos
$n_p$	Número de passos
$\sigma_i$	Valor de tensão referente ao pico ou vale
$\overline{\Delta \sigma_j}$	Tensão equivalente para $R = 0$
$N_B$	Número total de ciclos do carregamento cíclico de amplitude variável
$\Delta \sigma_q$	Tensão máxima do carregamento equivalente de amplitude constante

## Capítulo 5

$R$	Razão de tensões
$E$	Módulo de elasticidade
$\nu$	Coefficiente de Poisson
$C_0$	Parâmetro usado na Equação de Paris para $R = 0$



$m$	Parâmetro usado na Equação de Paris
$h, b, W$	Dimensões geométricas
$a$	Comprimento ou semi-comprimento da trinca
$K_I$	Fator de intensidade de tensão de modo I
$\sigma$	Tensão remota aplicada
$F$	Fator geométrico
$K_{Ieq}$	Fator de intensidade de tensão equivalente de modo I
$\Delta K_{Ieq}$	Variação do fator de intensidade de tensão equivalente de modo I
$K_I^{max}$	Fator de intensidade de tensão de modo I máximo
$\frac{da}{dN}$	Taxa de crescimento da trinca por fadiga
$\sigma_{max}$	Tensão máxima
$\Delta N$	Incremento do número de ciclos
$a_i$	Comprimento inicial da trinca
$a_f$	Comprimento final da trinca
$da$	Diferencial do comprimento da trinca
$\Delta a_{inicial}$	Incremento inicial
$r$	Fator multiplicador de $\Delta a$
$\theta$	Ângulo referente ao eixo tangencial à ponta da trinca
$K_I^{min}$	Fator de intensidade de tensão de modo I mínimo
$\Delta\sigma$	Variação da tensão remota aplicada
$\gamma$	Propriedade do material
$K_{IC}$	Tenacidade à fratura
$a_c$	Comprimento crítico da trinca
$P$	Carga aplicada

$\alpha$	Ângulo de aplicação da carga
$P_{max}$	Carga máxima aplicada
$P_{min}$	Carga mínima aplicada
$CMM1, CMM2, CMM3, CMM4$	Experimentos realizados por Chambers et al. (1991)
$CMM_{num}$	Modelo numérico testado com código desenvolvido
$\Delta a$	Incremento da trinca
$N_{total}$	Número de ciclos total
$c_{rr}$	Coefficiente de resistência ao rolamento
$m_{cg}$	Massa de um carro de grelha
$V_{cg}$	Volume de pelotas em um carro de grelha
$m_p$	Massa da carga de pelotas de minério de ferro
$\rho_p$	Densidade das pelotas de minério de ferro
$P_c$	Peso total dos 130 carros de grelha carregados
$F_{mov}$	Carga relativa à continuação de movimento
$\mu$	Coefficiente de atrito
$F_{rep}$	Carga relativa ao impulsionamento a partir do repouso
$F$	Força

## Apêndice A

$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$	Termo da solução fundamental de Kelvin presente na equação de deslocamento
$t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$	Termo da solução fundamental de Kelvin presente na equação de deslocamento
$u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$	Termo da solução fundamental de Kelvin presente na equação de força de superfície
$t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$	Termo da solução fundamental de Kelvin presente na equação de força de superfície

$u_{ij,k}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$  Termo da solução fundamental de Kelvin presente na equação do gradiente de deslocamentos

$t_{ij,k}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$  Termo da solução fundamental de Kelvin presente na equação do gradiente de deslocamentos

$\boldsymbol{\xi}$  Ponto fonte

$\boldsymbol{x}$  Ponto campo

$\mu$  Módulo de cisalhamento

$\bar{\nu}$  Função do coeficiente de Poisson e do estado plano adotado

$\ln$  Logarítmo neperiano

$r$  Distância entre o ponto fonte e o ponto campo

$\delta_{ij}$  Delta de Kronecker

$r_{,i}$  Derivada da distância  $r$  na direção  $i$

$n_i$  Componentes do vetor normal

$\frac{\partial r}{\partial n}$  Derivada parcial da distância  $r$  pelo vetor normal  $n$

$r_i$  Componente da distância  $r$  na direção  $i$

$x_i$  Componente da coordenada do ponto campo  $\boldsymbol{x}$  na direção  $i$

$\xi_i$  Componente da coordenada do ponto fonte  $\boldsymbol{\xi}$  na direção  $i$

$E$  Módulo de elasticidade

$\nu$  Coeficiente de Poisson

## Apêndice B

*Key* Chave que determina o método de avaliação do fator de intensidade de tensão

$\theta_0$  Ângulo de propagação inicial

$i, j$  Índices

$\beta_i$  Ângulo de correção

$\Delta a_i$	Incremento da trinca
$\sigma_i$	Tensão referente ao pico ou vale
$\sigma_{max}$	Tensão máxima
$R$	Razão de tensões
$\overline{\Delta\sigma_j}$	Tensão equivalente para $R = 0$
$N_B$	Número total de ciclos do carregamento cíclico de amplitude variável
$\Delta\sigma_q$	Tensão máxima do carregamento equivalente de amplitude constante
$\gamma$	Propriedade do material
$m$	Propriedade do material, presente na Equação de Paris
$\Delta a_{inicial}$	Incremento de trinca inicial
$r$	Fator multiplicador
$\Delta a_{max}$	Incremento de trinca máximo
$n_p$	Número de passos para a propagação
$K_I$	Fator de intensidade de tensão de modo I
$K_{II}$	Fator de intensidade de tensão de modo II
$\Delta K_{Ieq}$	Variação do fator de intensidade de tensão equivalente de modo I
$K_{Ieq}^{max}$	Fator de intensidade de tensão equivalente de modo I máximo
$\Delta K_{th}$	Limiar à fadiga
$N$	Número de ciclos
$N_{total}$	Número de ciclos total
$N_{2\Delta a}$	Número de ciclos a cada dois passos
$K_{IC}$	Tenacidade à fratura

## Apêndice C

$r$	Raio medido a partir de um sistema centrado na ponta da trinca
-----	--

$\theta$	Ângulo medido a partir de um sistema centrado na ponta da trinca
$K_I$	Fator de intensidade de tensão de modo I
$K_{II}$	Fator de intensidade de tensão de modo II
sen	Seno
cos	Cosseno
tg	Tangente
arctan	Arcotangente

## Apêndice D

$\sigma$	Tensão medida no pico ou vale
$\gamma$	Propriedade do material
$m$	Propriedade do material, presente na Equação de Paris
$N_B$	Número total de ciclos do carregamento cíclico de amplitude variável
$\sigma_{max}$	Tensão máxima
$R$	Razão de tensões
$\Delta\sigma_j$	Tensão equivalente para $R = 0$ do ciclo
$j$	Índice referente ao ciclo
$\Delta\sigma_q$	Tensão máxima do carregamento equivalente de amplitude constante

# Sumário

## Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>40</b>
1.1	Objetivos . . . . .	42
1.1.1	Objetivo Geral . . . . .	42
1.1.2	Objetivos Específicos . . . . .	42
1.2	Metodologia . . . . .	43
1.3	Organização do Texto . . . . .	45
<b>2</b>	<b>Método dos Elementos de Contorno</b>	<b>46</b>
2.1	Formulação Dual do Método dos Elementos de Contorno . . . . .	48
2.2	Tratamento das Integrais Singulares . . . . .	51
2.3	Deslocamento, Tensões e Deformações nos Pontos Internos . . . . .	60
2.4	Tensões e Deformações nos Pontos do Contorno . . . . .	61
2.4.1	Recuperação de Tensões . . . . .	61
2.4.2	Integração Singular das Equações de Contorno . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Mecânica da Fratura Elástica Linear</b>	<b>65</b>
3.1	Fator de Intensidade de Tensões . . . . .	70
3.1.1	Correlação de Deslocamentos . . . . .	71
3.1.2	Integral J . . . . .	73
3.1.3	Exemplos . . . . .	82
3.2	Direção de Propagação . . . . .	124
<b>4</b>	<b>Fadiga</b>	<b>128</b>
4.1	Taxa de Crescimento de Trincas por Fadiga . . . . .	129
4.1.1	Critérios de Propagação da Trinca por Fadiga . . . . .	131
4.1.2	Propagação Subcrítica de Fissuras . . . . .	132
4.1.3	Estimativa da Vida Útil . . . . .	134
4.2	Carregamento Cíclico de Amplitude Variável . . . . .	135
<b>5</b>	<b>Exemplos numéricos</b>	<b>139</b>
5.1	Placa retangular com trinca interna . . . . .	140
5.2	Placa retangular sujeita à tração com diferentes configurações de trinca . . . . .	144
5.2.1	Uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante . . . . .	146
5.2.2	Duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante . . . . .	150
5.2.3	Trinca interna e carregamento de amplitude variável . . . . .	154

5.3	<i>Compact Mixed Mode (CMM)</i> . . . . .	159
5.3.1	Primeira configuração: $\alpha = 90^\circ$ e $\theta = -3^\circ$ . . . . .	163
5.3.2	Segunda configuração: $\alpha = 110^\circ$ e $\theta = -1,5^\circ$ . . . . .	170
5.4	Estudo de caso: fadiga na roda acionada de um forno de pelotização de minério de ferro do tipo grelha reta móvel . . . . .	174
5.4.1	$c_{rr} = 0,075$ . . . . .	184
5.4.2	$c_{rr} = 0,09$ . . . . .	186
5.4.3	$c_{rr} = 0,1$ . . . . .	188
5.4.4	Discussão . . . . .	190
<b>6</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>192</b>
6.1	Sugestões para Trabalhos Futuros . . . . .	195
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>196</b>
<b>A</b>	<b>Solução Fundamental de Kelvin</b>	<b>201</b>
<b>B</b>	<b>Fluxogramas</b>	<b>203</b>
<b>C</b>	<b>Dedução da Fórmula do Ângulo de Propagação</b>	<b>209</b>
<b>D</b>	<b><i>Rainflow Cycle Counting</i></b>	<b>211</b>

# Capítulo 1

## Introdução

A fadiga, causada pela variação cíclica do carregamento, de amplitude constante ou variável, consiste em um processo de acúmulo de danos e, posterior falha. Componentes estruturais, bem como máquinas e equipamentos, estão muitas vezes sujeitos a esse tipo de carregamento. A contínua aplicação de carregamentos cíclicos ocasiona o crescimento de trincas e outras descontinuidades presentes no material. Esses defeitos irão se propagar de maneira subcrítica e estável, até que se atinja a resistência à fratura, momento no qual ocorre a fratura frágil e repentina, tornando a falha ocasionada por fadiga uma das mais recorrentes no âmbito da engenharia, segundo Sajith et al. (2020). A falha brusca e inesperada de componentes mecânicos e estruturais pode ocasionar perdas materiais, financeiras e humanas. Dessa forma, o estudo da propagação subcrítica de trincas por fadiga e determinação da vida útil restante é de extrema importância. A análise da propagação subcrítica de fissuras realizada é baseada na Equação de Paris, proposta por Paris et al. (1961), modificada de forma a contabilizar a influência da razão de tensões, por meio da Equação de Walker, e de modos mistos de fratura, pelo critério da Máxima Tensão Circunferencial (MTC).

As descontinuidades, que irão se propagar devido a carregamentos cíclicos, podem surgir no material ainda na fase de manufatura ou serem geradas com o uso, segundo de Lima et al. (2010). A presença de trincas preexistentes, geradas na etapa de fabricação ou montagem, reduz a vida útil do componente e interfere na resistência mecânica inicialmente proposta para o material, considerado como sem descontinuidades. Pensando nisso, Meguid (1989) afirma ser necessário considerar na fase de projeto, não só o limite



de resistência do material, mas também as condições operacionais de solicitação devido à presença de defeitos e descontinuidades já existentes no material, para que seja garantida a integridade da estrutura. A abordagem pela Mecânica da Fratura é indicada para a análise de componentes que já apresentem fissuras. Ela parte do princípio de que exista uma trinca ou outra descontinuidade semelhante no material analisado, a qual irá se propagar de forma subcrítica por fadiga, até atingir dimensões críticas e ocasionar a fratura. Dessa forma, a análise de fadiga pela abordagem da mecânica da fratura tem o intuito de minimizar os prejuízos, ao determinar a vida útil restante, a necessidade de manutenções e inspeções e o intervalo seguro para que sejam realizados tais procedimentos.

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) tem se destacado na análise de trincas em componentes sujeitos à fadiga. Isso porque, além da capacidade da malha de acompanhar o crescimento da trinca, o MEC fornece resultados com melhor precisão em análises que envolvem concentração de tensões, como é o caso da propagação de fissuras. Essa maior precisão ocorre devido à existência da Equação Integral de Contorno (EIC) de tensão, a qual permite o cálculo direto das componentes de tensão. O mesmo não ocorre no Método dos Elementos Finitos padrão, no qual as componentes de tensão são obtidas através da derivação da equação de deslocamentos, diminuindo a precisão. Para a análise de trincas gerais pela Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL), torna-se necessário a aplicação do Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD). Essa formulação, proposta por Hong e Chen (1988) e sistematizada para a aplicação por Portela et al. (1992*a*), consiste na aplicação via colocação da Equação Integral de Contorno relativa ao deslocamento em uma das faces da fissura, enquanto, na outra face, é aplicada a EIC relativa à força de superfície. Ao realizar a integração dos elementos de contorno, a partir do ponto fonte, a EIC pode apresentar singularidades, que precisam ser anuladas. Nesse contexto, o método para tratamento de integrais singulares proposto por Gao (2006) é utilizado, o qual consiste em expandir a parte não singular do integrando em polinômios da distância  $r$  entre o ponto fonte e o ponto campo e, então, remover as singularidades analiticamente.

## 1.1 Objetivos

### 1.1.1 Objetivo Geral

Esta dissertação de mestrado tem como objetivo a implementação de um programa computacional em linguagem Fortran 95 para análise subcrítica de fadiga usando conceitos da Mecânica da Fratura Elástica Linear acoplados com a formulação dual do Método dos Elementos de Contorno.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos, com base no objetivo geral, são:

1. Implementação das equações integrais de contorno advindas do MECD, para a avaliação do comportamento e da propagação de trincas;
2. Implementação e análise de eficácia, no contexto do MECD, dos métodos recentes para a solução de integrais fortemente singulares e hipersingulares do Método dos Elementos de Contorno;
3. Estudar e implementar diferentes métodos para avaliação do fator de intensidade de tensões na ponta de uma trinca;
4. Implementação da Lei de Paris, modificada de forma a considerar o efeito da razão de tensões e de modos mistos de fratura, para a análise de fadiga acoplada à formulação dual do Método dos Elementos de Contorno;
5. Implementar um algoritmo de contagem de ciclos irregulares e transformação em um ciclo de amplitude constante, incorporando-o ao programa principal;
6. Aplicação do programa a problemas práticos.

## 1.2 Metodologia

Com a finalidade de atingir os objetivos gerais e específicos propostos nessa dissertação, foram implementados programas menores e mais simples, os quais foram sendo aprimorados e melhorados ao decorrer desse trabalho. Ao final, foi desenvolvido um programa computacional completo para a análise de fadiga bidimensional.

O primeiro programa implementado, `ProgIntegracao`, foi voltado exclusivamente para a solução de integrais singulares, por meio do método proposto por Gao (2006). As integrais foram avaliadas em um único elemento, com a quantidade de pontos fonte fornecida pelo usuário. O programa realizava a integração singular ao longo do elemento e retornava a solução das integrais do MECD nos pontos fonte. Após sua implementação, a metodologia foi testada, através do cálculo de integrais singulares de diferentes ordens, ao longo de elementos quadráticos com diferentes graus de distorção. Os resultados estão em Fonseca e Peixoto (2022).

Após a realização de testes bem sucedidos com a metodologia de integração e com o código implementado, esse foi introduzido como um módulo no programa `Elasticity_2d`. Inicialmente, esse programa resolvia problemas de elasticidade linear com base nas EIC de deslocamento. A partir daí, desenvolveu-se subrotinas para que os mesmos problemas fossem resolvidos através da EIC de força de superfície. A realização de testes, baseados em Brebbia e Dominguez (1992), Katsikadelis (2002) e Aliabadi (2002), comprovou a correta implementação da EIC de força de superfície ao obter resultados muito próximos àqueles retornados pela EIC de deslocamento.

O primeiro programa implementado capaz de analisar componentes trincados, com a implementação da formulação dual do Método dos Elementos de Contorno, foi o `Fracture_2d_v1.0`. Nesse programa, o contorno geral era integrado com base na EIC de deslocamento e cada face da trinca era integrada com base em uma EIC: de deslocamento ou de força de superfície. Além disso, essa primeira versão era capaz de retornar o fator de intensidade de tensão (FIT) medido a partir de dois métodos: correlação de deslocamentos ou integral J.

A segunda versão desse programa `Fracture_2d_v2.0` foi aprimorada, para que, além

do FIT, fosse capaz de retornar também o ângulo de propagação, medido a partir do critério da Máxima Tensão Circunferencial.

Por fim, chegou-se ao código computacional desenvolvido para a análise de fadiga bidimensional. Na terceira e definitiva versão, o programa `Fracture_2d_v3.0` é capaz de realizar a análise completa de fadiga causada por carregamentos cíclicos, de amplitude constante ou variável, retornando a vida útil restante. Para isso, o programa realiza a leitura de dados a partir de um arquivo de texto, que contém as informações necessárias para a análise. Se, na leitura de dados, for detectado que o carregamento cíclico possui amplitude variável, realiza-se a contagem de ciclos pelo algoritmo denominado *Rainflow Cycle Counting* (Dowling, 2013) e, com esses dados, o carregamento é transformado em um equivalente de amplitude constante. Realizada essa etapa, o programa inicia a propagação de trincas. Primeiramente, o componente trincado é analisado através do MECD e são definidos os campos de deslocamento e força de superfície do contorno. Os campos de tensão e deformação no contorno são obtidos com uma de duas técnicas: recuperação de tensões ou integração direta da EIC hipersingular. Após a definição de todos os campos do contorno, caso haja pontos internos, eles são analisados. A determinação dos fatores de intensidade de tensão pode ser feita pela correlação de deslocamentos ou pela integral  $J$ , sendo essa última mais utilizada. O ângulo de propagação da trinca é determinado e a variação do fator de intensidade de tensão equivalente de modo I, bem como seu valor máximo, são calculados. Caso os critérios de propagação sejam atendidos, a trinca é propagada de um incremento  $\Delta a$  definido. O número de ciclos é contabilizado pelo programa, através da integração, pela Regra de Simpson, da Equação de Paris modificada. Os dados do número de ciclos são armazenados e incrementados até que o número de passos escolhido pelo usuário seja atingido. Ao fim da análise, o programa retorna os resultados obtidos em uma série de arquivos de texto, separados por passos e por trincas, contendo os dados de interesse, como distribuição de tensões e deformações, fatores de intensidade de tensão, ângulo de propagação, comprimento da trinca, número de ciclos transcorridos, entre outros. Além disso, a cada passo de propagação, retorna-se um arquivo do tipo

XML específico para visualização gráfica dos resultados no INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*) (INSANE, 2023), *software* desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas (DEES) da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG).

### 1.3 Organização do Texto

Esta dissertação está organizada em 6 capítulos e 4 apêndices.

O Capítulo 1 apresenta breve explicação acerca dos temas a serem tratados, além dos objetivos do trabalho, sua metodologia e a organização do texto.

No Capítulo 2 são apresentadas as bases teóricas do Método dos Elementos de Contorno e de sua formulação dual. Apresenta-se uma metodologia para tratamento de integrais singulares e discute-se como serão obtidas as variáveis pertencentes ao contorno e aos pontos internos.

O Capítulo 3 detalha a abordagem pela Mecânica da Fratura Elástica Linear, com foco na obtenção dos fatores de intensidade de tensão e na direção de propagação da trinca.

O Capítulo 4 refere-se à propagação de trincas por fadiga, com a determinação da vida útil.

No Capítulo 5 são apresentados os exemplos numéricos, os quais têm o intuito de avaliar o desempenho do programa computacional implementado, analisando sua eficiência, confiabilidade e aplicabilidade à problemas práticos.

O Capítulo 6 apresenta as considerações finais a respeito do trabalho desenvolvido.

O Apêndice A apresenta os termos da solução fundamental de Kelvin.

O Apêndice B contém os fluxogramas relativos aos algoritmos implementados.

O Apêndice C apresenta a dedução matemática para a obtenção do ângulo que determina a direção de propagação da trinca.

O Apêndice D detalha, por fim, a técnica de contagem de ciclos *Rainflow*.

## Capítulo 2

# Método dos Elementos de Contorno

O Método dos Elementos de Contorno (MEC) foi baseado no método proposto por Green (1828), conhecido como Método da Equação Integral de Contorno (MEIC). O método foi então sendo aprimorado e aplicado em trabalhos posteriores. Levando em consideração a análise de problemas de potencial, destacam-se os trabalhos de Fredholm (1903), o qual foi o primeiro a aplicar as equações integrais de contorno na solução de variáveis desconhecidas para problemas de potencial, e Mikhlin (1957). Já no âmbito de problemas de elasticidade, destacam-se os trabalhos de Betti (1872), Somigliana (1885) e Kupradze (1965). A implementação computacional do método aconteceu somente na década de 60, com o avanço dos computadores. Os trabalhos de Jaswon (1963), Jaswon e Ponter (1963) e Symm (1963, 1966) foram os primeiros a realizar a implementação computacional da formulação de Fredholm (1903) para a solução de problemas bidimensionais de potencial.

Segundo Brebbia e Dominguez (1992), o Método dos Elementos de Contorno resolve problemas físicos através da solução de equações integrais de contorno, as quais são obtidas a partir das equações diferenciais que regem o problema. O método requer a discretização apenas do contorno, sem a necessidade de discretizar a área, em problemas bidimensionais, ou o volume, em problemas tridimensionais. Além disso, a discretização se torna ainda mais simples com a utilização de elementos descontínuos, o que não é possível no Método dos Elementos Finitos (MEF) padrão. Outra vantagem do uso de elementos de contorno

é a obtenção de resultados com melhor precisão na análise de problemas que envolvem concentração de tensões, como, por exemplo, a propagação de trincas por fadiga.

De acordo com Katsikadelis (2002), o Método dos Elementos de Contorno apresenta-se como uma técnica para analisar o comportamento de estruturas submetidas a carregamentos externos. No presente trabalho, esses carregamentos externos se referem a deslocamentos ou forças de superfície. O método permite avaliar não só a solução das variáveis básicas, mas também suas derivadas, em qualquer ponto do domínio, visto que a solução é representada por uma equação integral, a qual pode ser diferenciada.

Segundo Aliabadi (2002), uma outra característica importante do Método dos Elementos de Contorno é a precisão dos deslocamentos e tensões em pontos internos, uma vez que podem ser utilizadas equações integrais que fornecem diretamente cada um desses campos em pontos internos.

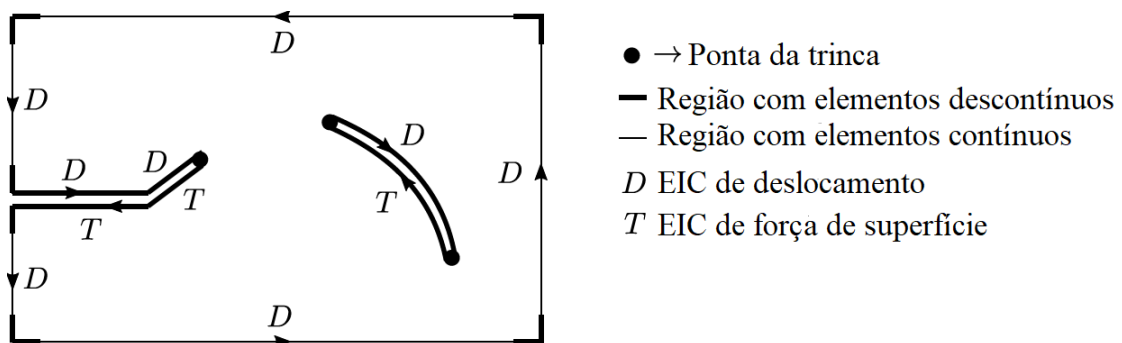
Por apresentar as demais vantagens citadas, Brebbia e Dominguez (1992) afirmam que o uso de elementos de contorno é uma ferramenta robusta para projetos de engenharia, uma vez que facilita a geração dos dados exigidos pelo problema e as modificações necessárias para otimizar o projeto.

De acordo com Aliabadi (1997), a propagação de trincas representa uma das aplicações mais promissoras do Método dos Elementos de Contorno. Isso porque, além de sua alta precisão na análise de problemas que envolvem concentração de tensões, o MEC tem como vantagem em relação ao MEF padrão a capacidade da malha de acompanhar o crescimento da trinca, sem a necessidade de refazer a malha a cada incremento da fissura (Aliabadi (2002); Portela et al. (1993)). Em concordância, Portela et al. (1992b) afirmam que o MEC tem sido aplicado com sucesso para problemas de elasticidade linear, de forma que para trincas simétricas, o método pode ser utilizado com o uso de apenas uma região. Porém, para a análise de trincas gerais, o Método dos Elementos de Contorno não pode ser aplicado em uma única região diretamente. Isso porque as equações para um ponto de colocação localizado em uma das faces da trinca são idênticas às equações para um ponto localizado nas mesmas coordenadas, porém na face oposta da trinca. Isso gera um sistema de equações singular, porque o caminho para a integração das mesmas integrais

é coincidente em pontos opostos. Um método de colocação eficiente para solucionar problemas de trincas gerais, sem a necessidade de dividir o domínio em subregiões, é o Método dos Elementos de Contorno Dual (MECD), o qual será apresentado a seguir.

## 2.1 Formulação Dual do Método dos Elementos de Contorno

As bases teóricas da formulação dual do Método dos Elementos de Contorno foram propostas no trabalho de Hong e Chen (1988) e o método foi posteriormente sistematizado para a aplicação em problemas da Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) por Portela et al. (1992a). O método foi proposto para resolver trincas gerais em uma única região, eliminando, portanto, o sistema singular gerado pelo MEC. O Método dos Elementos de Contorno Dual consiste em aplicar a equação integral de contorno (EIC) relativa ao deslocamento em uma das faces da fissura e a equação de tensão, transformada em força de superfície, na face oposta. Dessa forma, segundo Portela et al. (1992a), torna-se possível resolver problemas de trincas gerais em uma única região. A estratégia de colocação do MECD é apresentada na Figura 2.1.



**Figura 2.1:** Estratégia para discretização do contorno na aplicação do Método dos Elementos de Contorno Dual (Adaptado de Portela et al. (1992a,b, 1993)).

Como apresentado na Figura 2.1, o contorno é discretizado com a colocação da equação de deslocamento, conforme Portela et al. (1992b), porém Kzam (2009) afirma que a colocação da equação de força de superfície produziria o mesmo resultado. Já a região da



trinca é modelada com equações específicas, sendo a equação de deslocamento aplicada via colocação em uma das faces da fissura, enquanto na face oposta é aplicada a equação de força de superfície. Tais equações são apresentadas abaixo. Além disso, as regiões de quina e de fissura são discretizadas utilizando elementos descontínuos, a fim de tratar as descontinuidades da força de superfície.

- EIC para deslocamento em pontos do contorno ( $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$ ):

$$\frac{1}{2}u_j(\boldsymbol{\xi}) + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) t_j(\boldsymbol{x}) d\Gamma \quad (2.1)$$

- EIC para força de superfície em pontos do contorno ( $\boldsymbol{\xi} \in \Gamma$ ):

$$n_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) t_k(\boldsymbol{x}) d\Gamma - \frac{1}{2}t_j(\boldsymbol{\xi}) = n_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) u_k(\boldsymbol{x}) d\Gamma \quad (2.2)$$

- EIC para deslocamento em pontos do contorno pertencentes à trinca:

$$\frac{1}{2}u_j(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2}u_j(\boldsymbol{\xi}^*) + \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) u_j(\boldsymbol{x}) d\Gamma = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) t_j(\boldsymbol{x}) d\Gamma \quad (2.3)$$

- EIC para força de superfície em pontos do contorno pertencentes à trinca:

$$n_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) t_k(\boldsymbol{x}) d\Gamma - \frac{1}{2}t_j(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{2}t_j(\boldsymbol{\xi}^*) = n_i(\boldsymbol{\xi}) \int_{\Gamma} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) u_k(\boldsymbol{x}) d\Gamma \quad (2.4)$$

Nas equações (2.1) a (2.4),  $\boldsymbol{\xi}$  é o ponto fonte,  $\boldsymbol{\xi}^*$  é o ponto fonte coincidente a  $\boldsymbol{\xi}$  porém localizado na face oposta da trinca,  $\boldsymbol{x}$  se refere ao ponto campo analisado,  $\Gamma$  se refere ao contorno,  $i, j$  e  $k$  são as componentes cartesianas, as quais assumem valores  $i, j, k = 1, 2$  para o caso bidimensional e  $i, j, k = 1, 2, 3$  para o caso tridimensional,  $u_j$  são as componentes de deslocamento e  $t_j$ , as componentes de força de superfície,  $n_i$  se refere às componentes do vetor normal, os símbolos  $\int$  e  $\int$  indicam que as integrais existem apenas, respectivamente, nos sentidos do valor principal de Cauchy (VPC) e da parte finita de Hadamard (PFH) e  $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$ ,  $t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$ ,  $u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$  e  $t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$  são termos da solução fundamental de Kelvin, apresentados no Apêndice A, nas equações (A.1), (A.2), (A.3) e (A.4). A EIC relativa a força de superfície (equação (2.2)) é obtida impondo o equilíbrio de superfície de Cauchy na equação de tensão para pontos do contorno com o vetor normal ao contorno ( $\Gamma$ ) do problema.

Introduzindo aproximações numéricas nas equações integrais e impondo a nulidade do resíduo para um número finito de pontos, chega-se ao sistema linear apresentado abaixo, no qual os coeficientes das matrizes  $H$  e  $G$  são obtidos a partir da solução das integrais sobre cada elemento, fixando-se um ponto fonte do contorno para cada linha.

$$[H]\{u\} = [G]\{t\} \quad (2.5)$$

Onde os vetores  $\{u\}$  e  $\{t\}$  contêm as componentes de deslocamento e força de superfície nos pontos de colocação do contorno. A matriz  $[H]$  contém coeficientes provenientes das integrais envolvendo  $t_{ij}^*$  das equações (2.1) e (2.3) e  $t_{ijk}^*$  da equação (2.4). Já a matriz  $[G]$  contém coeficientes provenientes das integrais envolvendo  $u_{ij}^*$  e  $u_{ijk}^*$  das equações citadas. Essas integrais podem ser regulares ou singulares a depender da localização do ponto fonte analisado. Quando o elemento que está sendo integrado não contém o ponto fonte analisado, tais integrais são regulares e são resolvidas usando a quadratura de Gauss-Legendre, com 20 pontos de integração. Porém, quando o ponto fonte pertence ao elemento que está sendo integrado, a distância  $r$ , entre os pontos fonte e campo, tende a 0. Dessa forma, as integrais são singulares, tornando-se necessário avaliar essas integrais por métodos que anulem essa singularidade. O método usado ao longo desse trabalho foi apresentado por Gao (2006) e é detalhado na seção 2.2. No caso de pontos fonte muito próximos do elemento a ser integrado, um esquema de subdivisão do elemento de contorno para efeitos de integração numérica foi adotado, a fim de evitar problemas de quase singularidade.

Para a resolução do sistema apresentado na equação (2.5) deve-se separar as incógnitas das variáveis conhecidas. Para isso, aplica-se as condições de contorno fornecidas para cada nó. Se para um determinado nó, o deslocamento é prescrito, ocorrem modificações tanto nas matrizes  $[H]$  e  $[G]$  quanto nos vetores  $\{u\}$  e  $\{t\}$ . Nas matrizes, a coluna relativa ao nó pertencente à matriz  $[H]$  é transferida para a matriz  $[G]$  com o sinal trocado e vice-versa. Há também a troca das componentes de deslocamento e força de superfície dos vetores  $\{u\}$  e  $\{t\}$ . Caso a condição prescrita seja força de superfície, não são feitas alterações. Para ilustrar a reorganização das matrizes, considere um problema bidimensional de 2

nós. As matrizes  $[H]$  e  $[G]$  e os vetores  $\{u\}$  e  $\{t\}$  são:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & H_{13} & H_{14} \\ H_{21} & H_{22} & H_{23} & H_{24} \\ H_{31} & H_{32} & H_{33} & H_{34} \\ H_{41} & H_{42} & H_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^1 \\ t_2^1 \\ t_1^2 \\ t_2^2 \end{Bmatrix} \quad (2.6)$$

onde o índice subscrito das componentes  $u$  e  $t$  se refere à direção  $x_1$  ou  $x_2$  e o índice sobrescrito se refere ao nó.

Considerando que no nó 1 foram prescritos força de superfície na direção  $x_1$  e deslocamento na direção  $x_2$  e no nó 2, deslocamento em  $x_1$  e força de superfície em  $x_2$ , o sistema seria reorganizado da seguinte maneira:

$$\begin{bmatrix} H_{11} & -G_{12} & -G_{13} & H_{14} \\ H_{21} & -G_{22} & -G_{23} & H_{24} \\ H_{31} & -G_{32} & -G_{33} & H_{34} \\ H_{41} & -G_{42} & -G_{43} & H_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^1 \\ t_2^1 \\ t_1^2 \\ u_2^2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & -H_{12} & -H_{13} & G_{14} \\ G_{21} & -H_{22} & -H_{23} & G_{24} \\ G_{31} & -H_{32} & -H_{33} & G_{34} \\ G_{41} & -H_{42} & -H_{43} & G_{44} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} t_1^1 \\ u_2^1 \\ u_1^2 \\ t_2^2 \end{Bmatrix} \quad (2.7)$$

de forma que todas as incógnitas sejam agrupadas do lado esquerdo da equação, enquanto as variáveis conhecidas estão no lado direito. Multiplica-se então as variáveis conhecidas, retornando o sistema:

$$[A]\{x\} = \{f\} \quad (2.8)$$

em que  $x$  contém as variáveis desconhecidas a serem calculadas. Após a reorganização do sistema, é possível resolvê-lo por métodos de solução de sistemas lineares.

## 2.2 Tratamento das Integrais Singulares

Aliabadi (2002) classifica as equações integrais em regulares, quase singular, fracamente singular, fortemente singular e hipersingular. Segundo essa classificação e considerando o caso bidimensional, quando  $r \rightarrow 0$ , a integral que contém o termo  $u_{ij}^*$  é fracamente singular, com singularidade de ordem  $\ln(r)$ . Já as integrais com os termos  $t_{ij}^*$  e  $u_{ijk}^*$  são fortemente singulares, com ordem de singularidade  $r^{-1}$  e a integral que contém a solução fundamental  $t_{ijk}^*$  se classifica como hipersingular, devido ao termo  $r^{-2}$ .

Gao (2006) propõe um método para avaliar de maneira unificada qualquer tipo de integral de contorno singular bidimensional. O método consiste em expressar as partes não

singulares do integrando como polinômios da distância  $r$  e, então, remover analiticamente as singularidades. Para uma região finita, as integrais regulares ou fracamente singulares sempre existem, apresentando valor finito, enquanto que as integrais fortemente singulares e hipersingulares existem somente aplicando algumas condições.

A formulação parte de duas integrais singulares gerais, apresentadas nas seguintes equações:

$$I_i(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} f_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) d\Gamma(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})}{r^\beta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})} d\Gamma(\boldsymbol{x}) \quad (2.9)$$

$$J_i(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} f_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) d\Gamma(\boldsymbol{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) \ln[r(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})]}{r^\beta(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})} d\Gamma(\boldsymbol{x}) \quad (2.10)$$

em que  $\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$  é limitada em qualquer ponto do domínio ou do contorno,  $r(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x})$  é a distância entre o ponto fonte  $\boldsymbol{\xi}$  e o ponto campo  $\boldsymbol{x}$  e  $\beta$  indica o nível de singularidade das equações, que o autor divide em regular, fracamente singular, fortemente singular, hipersingular e supersingular, de forma que:

$\beta = 0$ ,  $I_i(\boldsymbol{\xi})$  regular e  $J_i(\boldsymbol{\xi})$  fracamente sing.

$0 < \beta < 1$ ,  $I_i(\boldsymbol{\xi})$  fracamente sing. e  $J_i(\boldsymbol{\xi})$  fortemente sing.

$\beta = 1$ ,  $I_i(\boldsymbol{\xi})$  fortemente sing. e  $J_i(\boldsymbol{\xi})$  hipersingular

$1 < \beta \leq 2$ ,  $I_i(\boldsymbol{\xi})$  hipersingular e  $J_i(\boldsymbol{\xi})$  supersingular

$\beta > 2$ ,  $I_i(\boldsymbol{\xi})$  e  $J_i(\boldsymbol{\xi})$  supersingular

Para remover as singularidades, primeiramente, o diferencial  $d\Gamma$  precisa ser expresso em função de  $dr$ . O método será desenvolvido partindo da definição de  $r$ , apresentada na equação:

$$r(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| = \sqrt{(x_1 - \xi_1)^2 + (x_2 - \xi_2)^2} \quad (2.11)$$

O diferencial em  $r$  se relaciona com o diferencial em  $\epsilon$ , coordenada paramétrica que assume valores entre -1 e +1, através da equação:

$$dr = (r_{,1}x_{1,\epsilon} + r_{,2}x_{2,\epsilon})d\epsilon \quad (2.12)$$

em que:

$$r_{,1} = \frac{\partial r}{\partial x_1} = \frac{x_1 - \xi_1}{r}, \quad r_{,2} = \frac{\partial r}{\partial x_2} = \frac{x_2 - \xi_2}{r} \quad (2.13a,b)$$

O diferencial  $d\Gamma$  pode ser escrito em função do diferencial  $d\epsilon$  em termos do módulo do Jacobiano ( $J_e$ ), de forma que:

$$d\Gamma = |J_e| d\epsilon \quad (2.14)$$

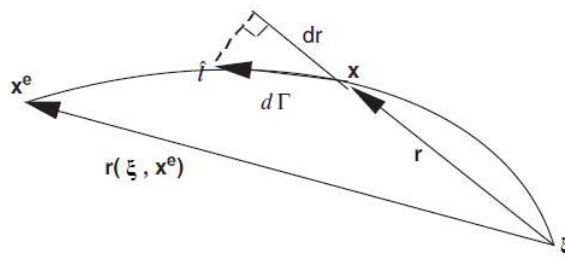
em que:

$$|J_e| = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \epsilon}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \epsilon}\right)^2} \quad (2.15)$$

Utilizando a equação (2.15), em conjunto com as equações (2.14) e (2.12), o diferencial  $d\Gamma$  em função de  $dr$  é dado por:

$$d\Gamma = \frac{dr}{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{l}}} \quad (2.16)$$

em que  $\hat{\mathbf{r}}$  é o vetor unitário da distância  $r$ , obtido com as componentes dadas na equação (2.13) e  $\hat{\mathbf{l}}$  é o vetor unitário tangencial a  $d\Gamma$ , conforme Figura 2.2.



**Figura 2.2:** Variáveis em um elemento singular (Adaptado de Gao (2006)).

O vetor  $\hat{\mathbf{l}}$  se divide em componentes, tais que:

$$\hat{l}_1 = \frac{\frac{\partial x_1}{\partial \epsilon}}{|J_e|}, \quad \hat{l}_2 = \frac{\frac{\partial x_2}{\partial \epsilon}}{|J_e|} \quad (2.17a,b)$$

Substitui-se então, a equação (2.16) nas equações (2.9) e (2.10), de forma que, para o elemento  $e$ :

$$I_i^e(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)} \frac{\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{l}} r^\beta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})} dr(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \quad (2.18)$$

$$J_i^e(\boldsymbol{\xi}) = \int_0^{r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)} \frac{\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \ln[r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})]}{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{l}} r^\beta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})} dr(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \quad (2.19)$$

em que o limite superior das integrais,  $r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)$  se refere à distância entre o ponto fonte  $\boldsymbol{\xi}$  e o ponto final do elemento,  $\mathbf{x}^e$ . Essa distância está representada na Figura 2.2.

Para a solução das integrais singulares, o método expande a parte não singular dos integrandos em polinômios em função de  $r$ , conforme apresentado na equação:

$$\frac{\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{l}}} = \sum_{n=0}^N C_i^n r^n(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \quad (2.20)$$

em que  $N$  é a ordem dos polinômios e  $C_i^N$  são os coeficientes. Esses coeficientes são obtidos colocando a coordenada  $\mathbf{x}$  em  $N + 1$  pontos entre os pontos fonte ( $\boldsymbol{\xi}$ ) e final ( $\mathbf{x}^e$ ), igualmente espaçados. Para o primeiro ponto,  $n = 0$ , e, portanto,  $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{l}} = 1$ , tem-se:

$$C_i^0 = \bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\xi})$$

Os outros coeficientes podem ser obtidos pela equação matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & r^1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^1) & \dots & r^{N-1}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^1) \\ 1 & r^1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^2) & \dots & r^{N-1}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^2) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & r^1(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^N) & \dots & r^{N-1}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_i^1 \\ C_i^2 \\ \vdots \\ C_i^N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^1)/(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) - C_i^0)/r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^1) \\ (\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^2)/(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) - C_i^0)/r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^2) \\ \vdots \\ (\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^N)/(\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{l}}) - C_i^0)/r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^N) \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

em que  $x^n$  representa a coordenada do ponto ( $n + 1$ ).

Aplicando a equação (2.20) na equação (2.18), tem-se:

$$\begin{aligned} I_i^e(\boldsymbol{\xi}) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)} \frac{\bar{f}_i(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})}{\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{l}} r^\beta(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})} dr(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N C_i^n \int_{\epsilon}^{r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)} r^{n-\beta} dr \\ &= \sum_{n=0}^N C_i^n \frac{r^{n-\beta+1}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)}{n - \beta + 1} - \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \sum_{n=0}^N \frac{C_i^n}{(n - \beta + 1) \epsilon^{\beta-n-1}} \end{aligned} \quad (2.22)$$

Com  $n - \beta + 1 \neq 0$

Considerando que a integral exista, o último termo da equação (2.22) deve ser nulo, após somar a contribuição de todos os elementos de tamanho  $\epsilon$  ao redor do ponto fonte. Baseado nisso e considerando que  $n - \beta + 1$  pode ser igual a 0, o método retorna então a solução da integral  $I_i^e$  conforme equação:

$$I_i^e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^N C_i^n F^n \quad (2.23)$$

em que:

$$F^n = \begin{cases} \frac{r^{n-\beta+1}(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)}{n-\beta+1} & \text{para } n-\beta+1 \neq 0 \\ \ln[r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)] & \text{para } n-\beta+1 = 0 \end{cases} \quad (2.24)$$

A integral  $J_i^e$  da equação (2.19) pode ser resolvida de maneira análoga, resultando em:

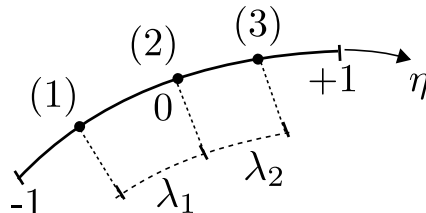
$$J_i^e(\boldsymbol{\xi}) = \sum_{n=0}^N C_i^n H^n \quad (2.25)$$

onde:

$$H^n = \begin{cases} \frac{-\{a \ln[r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)] + 1\}}{a^2 r^a(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)} & \text{para } a = \beta - n - 1 \neq 0 \\ \frac{1}{2} \{\ln[r(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}^e)]\}^2 & \text{para } a = \beta - n - 1 = 0 \end{cases} \quad (2.26)$$

Quando  $\boldsymbol{\xi}$  não é um ponto extremo do elemento de contorno, ele divide o elemento em duas partes. Dessa forma, deve-se aplicar esse procedimento em ambos os trechos e somar os resultados. Segundo Gao (2006) as equações (2.23) e (2.25) podem ser usadas na avaliação de EIC singulares de ordem arbitrária. Se a integral singular existir, as equações devolvem o resultado no Valor Principal de Cauchy (VPC). Se a integral não existir, é devolvida a parte finita do resultado.

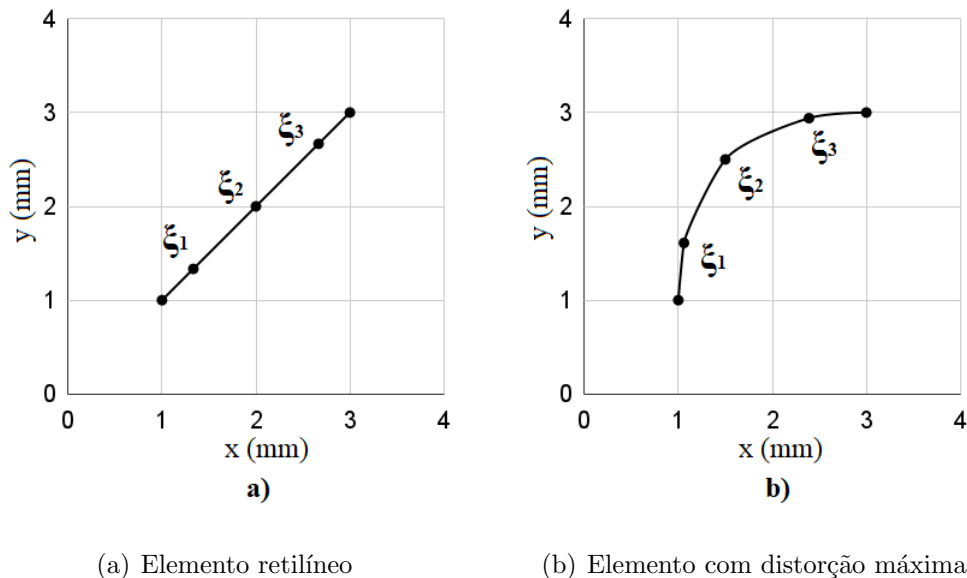
A fim de testar a eficiência do método, a sua aplicabilidade no MECD e a confiabilidade dos resultados, ele foi implementado em uma rotina à parte. Essa rotina foi utilizada para analisar um elemento quadrático e descontínuo, com  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2/3$ . As variáveis  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  são ilustradas na Figura 2.3, a qual apresenta um elemento quadrático e descontínuo, parametrizado na coordenada  $\eta$ , que assume valores de -1 a +1.



**Figura 2.3:** Elemento quadrático e descontínuo, parametrizado na coordenada  $\eta$

O elemento é inicialmente retilíneo, porém o seu grau de curvatura é aumentado em 5 diferentes configurações, relativos à posição do segundo ponto fonte ( $\boldsymbol{\xi}_2$ ), de forma que

o elemento mais distorcido é aquele em que  $\xi_2$  possui coordenadas (1,5; 2,5). O elemento retilíneo e aquele com maior grau de distorção são ilustrados na Figura 2.4. A análise é realizada em Estado Plano de Deformação (EPD), com módulo de elasticidade igual a 26 710,3 MPa e coeficiente de Poisson de 0,245.



**Figura 2.4:** Elementos usados na análise

Foram testadas as integrais que contêm os termos  $u_{ij}^*$ ,  $t_{ij}^*$  e  $t_{ijk}^*$ . A integral que contém  $u_{ijk}^*$  não foi testada, pois as faces das trincas são consideradas livres de tração. Calculou-se os resultados para diferentes valores de  $N$ , variando de 3 a 15, de 2 em 2, gerando 7 resultados. Para efeitos comparativos, calculou-se, também, os resultados pelo Método da Subtração de Singularidade (MSS) (Aliabadi e Hall, 1989), por ser um método bastante difundido e utilizado para soluções de integrais singulares. Na aplicação do MSS, utilizou-se três diferentes graus de truncamento da função de interpolação,  $N_\alpha$ , isto é, usando um, dois ou os três termos da função de interpolação, dada pela equação:

$$N_\alpha(\eta) \approx N_\alpha(\eta_0) + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \eta}(\eta_0)(\eta - \eta_0) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 N_\alpha}{\partial \eta^2}(\eta_0)(\eta - \eta_0)^2, \quad (2.27)$$

mantendo os outros termos do núcleo da integral truncados no termo de ordem zero. Para um elemento quadrático, como o apresentado na Figura 2.3, as componentes da função



de interpolação  $N_\alpha$  presentes na equação (2.27) são dadas por:

$$N_1(\eta) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \eta \left( \frac{\eta - \lambda_2}{\lambda_1} \right) \quad (2.28a)$$

$$N_2(\eta) = 1 - \eta \left( \frac{\eta + \lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 \cdot \lambda_2} \right) \quad (2.28b)$$

$$N_3(\eta) = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \eta \left( \frac{\eta + \lambda_1}{\lambda_2} \right) \quad (2.28c)$$

Para testar a confiabilidade, os 7 resultados obtidos com o método proposto por Gao (2006) e os 3 resultados obtidos com o MSS são comparados com outras formulações numéricas e analíticas. A integral  $u_{ij}^*$ , que é fracamente singular, é testada para o elemento retilíneo e para todos os 5 elementos curvos e os resultados são comparados com os resultados obtidos numericamente pela quadratura logarítmica, usando 12 pontos de integração. Já as integrais  $t_{ij}^*$ , que é fortemente singular, e  $t_{ijk}^*$ , que é hipersingular, foram testadas para o elemento retilíneo apenas e os resultados comparados com resultados obtidos analiticamente por Portela (1993). O erro percentual entre os resultados obtidos e a respectiva referência foram calculados e os resultados são apresentados em função do erro máximo obtido com cada formulação.

Primeiramente, apresenta-se os resultados para a integral  $u_{ij}^*$  obtidos com o MSS e com o método proposto por Gao (2006), respectivamente, nas Tabelas 2.1 e 2.2.

**Tabela 2.1:** Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral  $u_{ij}^*$  obtidos com o MSS e com a quadratura logarítmica (com 12 pontos de integração)

Elemento	$N_\alpha$ (1 termo)	$N_\alpha$ (2 termos)	$N_\alpha$ (3 termos)
Retilíneo	3,534	0,471	0,463
$\xi_2$ (1,9; 2,1)	3,881	0,554	0,520
$\xi_2$ (1,8; 2,2)	4,417	0,693	0,630
$\xi_2$ (1,7; 2,3)	5,215	0,981	0,809
$\xi_2$ (1,6; 2,4)	6,387	1,934	1,085
$\xi_2$ (1,5; 2,5)	13,342	13,342	1,503

**Tabela 2.2:** Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral  $u_{ij}^*$  obtidos com o método proposto e com a quadratura logarítmica (com 12 pontos de integração)

Elemento	N = 3	N = 5	N = 7	N = 9	N = 11	N = 13	N = 15
Retilíneo	0	0	0	0	2,503E-06	8,599E-05	3,152E-03
$\xi_2$ (1,9; 2,1)	0,099	7,652E-04	1,805E-05	0	3,092E-06	5,053E-05	3,021E-03
$\xi_2$ (1,8; 2,2)	0,235	0,021	1,561E-03	8,876E-05	8,069E-06	2,824E-05	2,243E-03
$\xi_2$ (1,7; 2,3)	0,491	0,194	0,027	3,411E-03	4,165E-04	1,203E-04	3,772E-03
$\xi_2$ (1,6; 2,4)	2,487	1,055	0,243	0,052	0,011	2,504E-03	0,010
$\xi_2$ (1,5; 2,5)	14,744	4,319	1,488	0,493	0,163	0,054	7,480E-03

É possível perceber pela Tabela 2.1 que, aumentando o número de termos da expansão da função de interpolação no MSS, os erros caem consideravelmente, mas ainda assim não é possível obter o valor esperado pela quadratura logarítmica. Já com o método proposto por Gao (2006) (Tabela 2.2), para o elemento retilíneo, é possível obter o resultado esperado pela referência em sua formulação mais básica, com 3 termos polinomiais de expansão. Com o aumento da curvatura do elemento, o erro aumenta para  $N = 3$ , mas esse erro cai consideravelmente quando aumenta-se a quantidade de termos polinomiais.

Os resultados obtidos com o MSS e com o método proposto por Gao (2006) para a integral  $t_{ij}^*$  são apresentados, respectivamente, nas Tabelas 2.3 e 2.4.

**Tabela 2.3:** Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral  $t_{ij}^*$  obtidos com o MSS e analiticamente por Portela (1993)

Elemento	$N_\alpha$ (1 termo)	$N_\alpha$ (2 termos)	$N_\alpha$ (3 termos)
Retilíneo	0	0	0

**Tabela 2.4:** Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral  $t_{ij}^*$  obtidos com o método proposto e analiticamente por Portela (1993)

Elemento	N = 3	N = 5	N = 7	N = 9	N = 11	N = 13	N = 15
Retilíneo	0	0	0	0	0	1,204E-05	1,191E-04

Como visto nas Tabelas 2.3 e 2.4, os dois métodos foram capazes de retornar o valor esperado pela referência para a integral  $t_{ij}^*$ .

Por fim, apresenta-se os resultados da integral  $t_{ijk}^*$  obtidos com o MSS e com o método proposto por Gao (2006), respectivamente, nas Tabelas 2.5 e 2.6.

**Tabela 2.5:** Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral  $t_{ijk}^*$  obtidos com o MSS e analiticamente por Portela (1993)

Elemento	$N_\alpha$ (1 termo)	$N_\alpha$ (2 termos)	$N_\alpha$ (3 termos)
Retilíneo	870,079	0	0

**Tabela 2.6:** Erro máximo absoluto (%) quando comparados os resultados para a integral  $t_{ijk}^*$  obtidos com o método proposto e analiticamente por Portela (1993)

Elemento	N = 3	N = 5	N = 7	N = 9	N = 11	N = 13	N = 15
Retilíneo	0	0	0	0	1,347E-06	2,829E-05	3,124E-03

Com base nas Tabelas 2.5 e 2.6, percebe-se que, para a integral  $t_{ijk}^*$ , enquanto o método proposto por Gao (2006) consegue fornecer o valor esperado pela referência em sua formulação mais básica, o MSS requer que a função de interpolação seja expandida até, pelo menos, o seu segundo termo, sendo, portanto, mais trabalhoso.

Com a realização desses testes, fica claro a confiabilidade dos resultados fornecidos pelo método proposto por Gao (2006). Além disso, o método se apresenta menos trabalhoso, por gerar resultados confiáveis em sua formulação mais básica, para elementos retilíneos, além de ter uma implementação computacional bem simples e geral, a qual permite tratar integrais singulares de ordem qualquer em um único procedimento numérico.

Após a comprovação da eficiência, aplicabilidade e confiabilidade do método descrito por Gao (2006), opta-se por utilizá-lo para eliminar as singularidades que aparecem nas EIC para os deslocamentos e as forças de superfície, quando analisadas no elemento que contém o ponto fonte.

## 2.3 Deslocamento, Tensões e Deformações nos Pontos Internos

Como explicado em Aliabadi (2002), as componentes de deslocamento, tensão e deformação relativas aos pontos internos são obtidas após o cálculo de todas as componentes de deslocamento e força de superfície desconhecidas do contorno. As equações integrais usadas para obter tais grandezas em pontos internos são:

- EIC para deslocamento em pontos internos ( $\xi \in \Omega$ ,  $\xi \notin \Gamma$ ):

$$u_i(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij}^*(\xi, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2.29)$$

- EIC para tensão em pontos internos ( $\xi \in \Omega$ ,  $\xi \notin \Gamma$ ):

$$\sigma_{ij}(\xi) = \int_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2.30)$$

As integrais apresentadas nas equações (2.29) e (2.30) são sempre regulares, por não pertencerem ao contorno, e são resolvidas pela quadratura de Gauss-Legendre, usando 20 pontos de integração. Quando o ponto fonte interno está muito próximo do elemento integrado, utiliza-se a técnica de subdivisão do elemento de contorno, como forma de evitar situações de quase singularidade. A fim de calcular as variáveis nos pontos internos, substitui-se as componentes de deslocamento ( $u_j$ ) e de força de superfície ( $t_j$ ) obtidas para o contorno nas equações (2.29) e (2.30) e, assim, obtém-se as componentes de deslocamento ( $u_i$ ) e de tensão ( $\sigma_{ij}$ ) para os pontos internos.

Para um material homogêneo, com comportamento linear elástico e isotrópico, as componentes de deformação são obtidas pela Lei de Hooke, conforme equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{E}} & \frac{-\bar{\nu}}{\bar{E}} & 0 \\ \frac{-\bar{\nu}}{\bar{E}} & \frac{1}{\bar{E}} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\nu}{\bar{E}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{12} \end{Bmatrix} \quad (2.31)$$

em que:

$$\bar{\nu} = \begin{cases} \nu & (EPT) \\ \frac{\nu}{(1-\nu)} & (EPD) \end{cases}$$

$$\bar{E} = \begin{cases} E & (EPT) \\ \frac{E}{(1-\nu^2)} & (EPD) \end{cases}$$

Nessa equações,  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson. Dessa forma, com as equações (2.29), (2.30) e (2.31) obtêm-se as componentes de deslocamento, tensão e deformação, respectivamente, nos pontos internos.

## 2.4 Tensões e Deformações nos Pontos do Contorno

Por fim, existem duas abordagens para calcular as componentes de tensão e deformação nos pontos do contorno. A primeira abordagem é indireta, pela técnica de recuperação de tensões. Já a segunda abordagem é direta, pela integração da EIC para tensão em pontos do contorno e, posteriormente, aplicação da Lei de Hooke (equação (2.31)) para determinação das componentes de deformação. As duas abordagens serão detalhadas a seguir.

### 2.4.1 Recuperação de Tensões

A técnica de recuperação de tensões é um método indireto para a obtenção das tensões e deformações no contorno. As componentes de tensão e de deformação são obtidas através do gradiente dos deslocamentos ( $u_{i,j}$ ). Parte-se então da equação que fornece as componentes de deslocamento em um ponto arbitrário ( $\eta$ ) nas coordenadas originais ( $x_1, x_2$ ), dada por:

$$u_j(\eta) \approx N_\alpha(\eta)u_j^\alpha \quad (2.32)$$

em que  $u_j(\eta)$  se refere às componentes de deslocamento na coordenada  $\eta$ ,  $j$  se refere aos eixos cartesianos e, no caso bidimensional, assume valores de 1 ou 2,  $N_\alpha(\eta)$  representa as funções de interpolação, dadas na equação (2.28),  $u_j^\alpha$ , refere-se às componentes de deslocamento nos pontos nodais e  $\alpha$  indica o ponto de interpolação, variando de 1 ao número total de pontos de interpolação do elemento de contorno. Reescrevendo o vetor de deslocamentos nas coordenadas locais ( $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ ), tem-se:

$$\tilde{u}_i = L_{ij}u_j = L_{ij}N_\alpha(\eta)u_j^\alpha \quad (2.33)$$

em que  $i = 1, 2$  no problema bidimensional e  $L_{ij}$  se refere às componentes da matriz de rotação, dada por:

$$L = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & n_2 \\ -n_2 & n_1 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

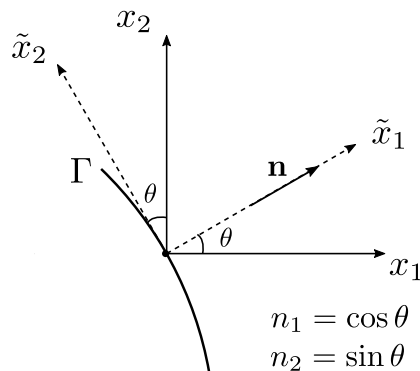
onde  $n_1$  e  $n_2$  se referem às componentes do vetor normal nas direções  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, tal que:

$$n_1 = \frac{1}{J(\eta)} \frac{\partial x_2}{\partial \eta}$$

$$n_2 = \frac{1}{J(\eta)} \frac{\partial x_1}{\partial \eta}$$

em que  $J(\eta)$  representa o Jacobiano para o elemento analisado.

As coordenadas originais  $(x_1, x_2)$  e locais  $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ , bem como o vetor normal  $n$  e o ângulo  $\theta$  são apresentados na Figura 2.5.



**Figura 2.5:** Representação das coordenadas originais e locais

Para o eixo que tangencia o contorno, isto é, para o eixo  $\tilde{x}_2$ , é válida a seguinte relação:

$$\frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}_2} = \frac{\partial \eta}{\partial \Gamma} = \frac{1}{J(\eta)} \quad (2.35)$$

Com base nas equações (2.33) e (2.35), torna-se possível determinar as componentes tangenciais, ou seja, na direção  $x_2$ , do gradiente de deslocamento, dadas por:

$$\tilde{u}_{i,2} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \tilde{x}_2} = \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial \tilde{x}_2} = \frac{1}{J(\eta)} \frac{dN_\alpha(\eta)}{d\eta} L_{ij} u_j^\alpha \quad (2.36)$$

De maneira similar, as componentes de tensão também podem ser reescritas em coordenadas locais, tal que:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{t}_1 = L_{1j} t_j \quad (2.37)$$

$$\tilde{\sigma}_{12} = \tilde{t}_2 = L_{2j}t_j \quad (2.38)$$

em que  $\tilde{\sigma}_{11}$  e  $\tilde{\sigma}_{12}$  são as componentes de tensão e  $\tilde{t}_1$  e  $\tilde{t}_2$ , as componentes do vetor força de superfície nas componentes locais e  $t_j$  se refere às componentes do vetor força de superfície nas coordenadas originais.

As componentes de tensão são também descritas pela Lei de Hooke, conforme equação:

$$\tilde{\sigma}_{ij} = \bar{\lambda}\tilde{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + 2\mu\tilde{\epsilon}_{ij} = \bar{\lambda}\tilde{u}_{k,k}\delta_{ij} + \mu(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i}) \quad (2.39)$$

onde:

$$\begin{aligned} \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \bar{\lambda} &= \frac{2\mu\bar{\nu}}{1-2\bar{\nu}} \\ \bar{\nu} &= \begin{cases} \nu & (EPD) \\ \frac{\nu}{(1+\nu)} & (EPT) \end{cases} \end{aligned}$$

Igualando as equações (2.37) e (2.39), tem-se:

$$\tilde{\sigma}_{11} = \tilde{t}_1 = L_{1j}t_j = (2\mu + \bar{\lambda})\tilde{u}_{1,1} + \bar{\lambda}\tilde{u}_{2,2} \quad (2.40)$$

Isolando a componente  $\tilde{u}_{1,1}$  do gradiente de deslocamento e substituindo a componente  $\tilde{u}_{2,2}$  dada pela equação (2.36), tem-se:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{1,1} &= \frac{1}{(2\mu + \bar{\lambda})}L_{1j}t_j - \frac{\bar{\lambda}}{(2\mu + \bar{\lambda})} \frac{1}{J(\eta)} \frac{dN_\alpha(\eta)}{d\eta} L_{2j}u_j^\alpha \\ &= \frac{1}{(2\mu + \bar{\lambda})} \left[ L_{1j}t_j - \frac{\bar{\lambda}}{J(\eta)} \frac{dN_\alpha(\eta)}{d\eta} L_{2j}u_j^\alpha \right] \end{aligned} \quad (2.41)$$

De maneira análoga, com base nas equações (2.36), (2.38) e (2.39), é possível obter a componente  $\tilde{u}_{2,1}$  do gradiente de deslocamento, dada por:

$$\tilde{u}_{2,1} = \frac{1}{\mu}L_{2j}t_j - \frac{1}{J(\eta)} \frac{dN_\alpha(\eta)}{d\eta} L_{1j}u_j^\alpha \quad (2.42)$$

Transformando o tensor do gradiente de deslocamento para as coordenadas originais, tem-se:

$$u_{k,m} = L_{ik}L_{jm}\tilde{u}_{i,j} = L_{1k}L_{1m}\tilde{u}_{1,1} + L_{1k}L_{2m}\tilde{u}_{1,2} + L_{2k}L_{1m}\tilde{u}_{2,1} + L_{2k}L_{2m}\tilde{u}_{2,2} \quad (2.43)$$

em que  $k, m = 1, 2$ .

Substituindo as quatro componentes do gradiente de deslocamento  $\tilde{u}_{1,1}$  (equação (2.41)),  $\tilde{u}_{2,1}$  (equação (2.42)) e  $\tilde{u}_{1,2}$  e  $\tilde{u}_{2,2}$  (equação (2.36)), na equação (2.43):

$$u_{k,m} = \left[ -\frac{\bar{\lambda}}{(2\mu + \bar{\lambda})} L_{1k} L_{1m} L_{2j} + L_{1k} L_{2m} L_{1j} - L_{2k} L_{1m} L_{1j} + L_{2k} L_{2m} L_{2j} \right] \cdot \left[ \frac{1}{J(\eta)} \frac{dN_\alpha(\eta)}{d\eta} \right] u_j^\alpha + \left[ \frac{1}{(2\mu + \bar{\lambda})} L_{1k} L_{1m} L_{1j} + \frac{1}{\mu} L_{2k} L_{1m} L_{2j} \right] t_j \quad (2.44)$$

Com base nas componentes do gradiente de deslocamento nas coordenadas originais calculadas pela equação (2.44), as componentes de deformação e tensão podem ser obtidas, respectivamente, pelas equações a seguir:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.45)$$

$$\sigma_{ij} = \bar{\lambda} u_{k,k} \delta_{ij} + \mu(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.46)$$

## 2.4.2 Integração Singular das Equações de Contorno

A equação integral de contorno relativa às componentes de tensão em pontos do contorno ( $\xi \in \Gamma$ ) é apresentada na equação:

$$\frac{1}{2} \sigma_{ij}(\xi) = \oint_{\Gamma} u_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) t_k(\mathbf{x}) d\Gamma - \oint_{\Gamma} t_{ijk}^*(\xi, \mathbf{x}) u_k(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (2.47)$$

em que  $\sigma_{ij}$  se refere às componentes de tensão em pontos do contorno,  $u_{ijk}^*$  e  $t_{ijk}^*$  são termos da solução fundamental de Kelvin apresentados no Apêndice A nas equações (A.3) e (A.4), respectivamente, e  $u_k$  e  $t_k$  se referem às componentes de deslocamento e força de superfície já calculadas no contorno.

As integrais que aparecem na equação (2.47) pertencem ao contorno e, portanto, podem ser regulares ou singulares a depender da localização do ponto fonte analisado. Caso as integrais sejam regulares, são resolvidas pela quadratura de Gauss-Legendre com 20 pontos de integração e com subdivisão quando necessário. Caso sejam singulares, são calculadas pelo método apresentado na seção 2.2. Com a solução das integrais, as componentes de tensão para pontos pertencentes ao contorno são obtidas substituindo, na equação (2.47), as componentes de deslocamento ( $u_k$ ) e de força de superfície ( $t_k$ ) já calculadas no contorno a partir da solução da equação (2.8).

As componentes de deformação são obtidas pela Lei de Hooke, conforme equação (2.31).



## Capítulo 3

# Mecânica da Fratura Elástica Linear

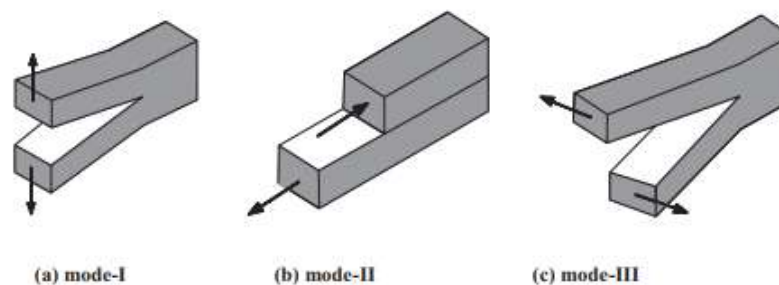
Como apresentado por Schettini (2017), os componentes metálicos usados no âmbito da engenharia normalmente apresentam defeitos preexistentes, vindos das etapas de projeto, fabricação ou montagem, e até mesmo danos causados em serviço, os quais podem evoluir para uma trinca. Porém, a presença de trincas não significa o fim da vida útil desses componentes. Com o uso de conceitos da mecânica da fratura, é possível analisar componentes trincados e, com isso, avaliar a necessidade de manutenções e os intervalos seguros para a realização de tais procedimentos. Dessa forma, torna-se possível reduzir custos e evitar perdas materiais e humanas.

Segundo Lee et al. (2005), a abordagem da mecânica da fratura parte do princípio de que já existam trincas ou outras descontinuidades semelhantes no componente analisado, de forma que os conceitos da mecânica da fratura sejam empregados na análise da propagação dessas trincas, não sendo, portanto, capazes de mensurar o estágio de nucleação. Conforme Kanninem e Popelar (1985), a mecânica da fratura parte dos conceitos da mecânica aplicada e da ciência dos materiais para analisar o comportamento de trincas. De acordo com Zerbst et al. (2017), a abordagem pela mecânica da fratura considera de forma implícita fatores como tensão média, razão de tensões, entalhes, rugosidade da superfície e danos. Quando a abordagem é utilizada com o conceito de tolerância ao dano, o foco está na determinação da vida útil restante, baseando-se no processo de crescimento de uma trinca preexistente, detectada e medida por ensaios não destrutivos, até que atinja

um comprimento crítico. De acordo com Dowling (2013), quando esse processo de crescimento da trinca ocorre devido a um carregamento cíclico, o comportamento é denominado crescimento de trinca por fadiga.

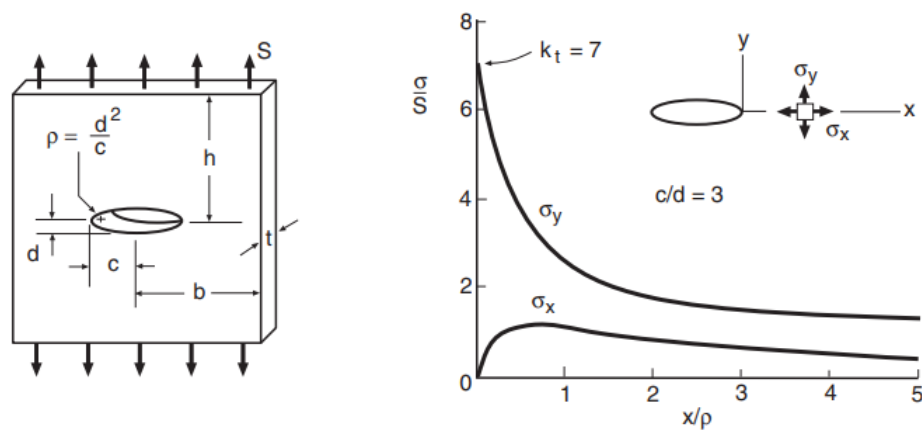
A Mecânica da Fratura Elástica Linear (MFEL) é um ramo da Mecânica da Fratura e é voltada para análises em que a região de deformação plástica e as não linearidades sejam limitadas a uma pequena região ao redor da ponta da trinca.

Existem três modos básicos de propagação de fratura, os quais se diferenciam pelo tipo de carga aplicada. Os modos estão ilustrados na Figura 3.1 e são eles: modo I, relativo à tração e refere-se à abertura da trinca; modo II, relativo ao cisalhamento no plano e refere-se ao deslizamento da trinca no plano; e modo III, relativo ao cisalhamento fora do plano e, conseqüentemente, ao deslizamento da trinca fora do plano. Além disso, podem haver combinações entre os modos, as quais originam os modos mistos.

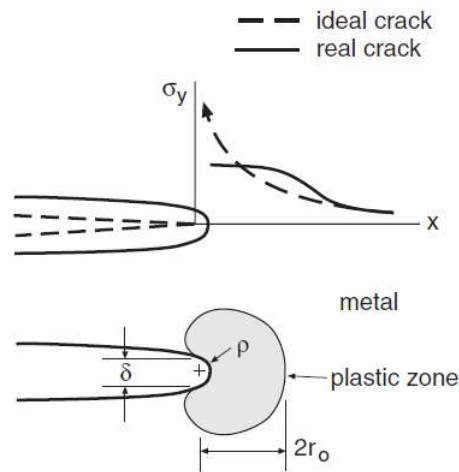


**Figura 3.1:** Modos I, II e III de fratura (Feng et al., 2017).

Segundo Dowling (2013), a tensão na ponta da trinca tende a um valor infinito, devido à concentração de tensões, como apresentado na Figura 3.2. Valores infinitos de tensão não têm sentido físico, de forma que fenômenos de dissipação energética são desencadeados, mantendo valores finitos para essa grandeza. Tais fenômenos dissipativos variam de acordo com o material. Em materiais dúcteis, essa acomodação é obtida por uma deformação plástica intensa na ponta da trinca, gerando uma região conhecida como região plástica, mostrada na Figura 3.3, a qual tende a tornar a ponta da trinca arredondada, de forma a diminuir a concentração de tensão nesse local.



**Figura 3.2:** Representação da tensão tendendo a infinito na ponta da trinca (Dowling, 2013).



**Figura 3.3:** Representação da zona plástica na ponta da trinca (adaptado de Dowling (2013)).

Baseando-se em conceitos energéticos, Griffith (1921) concluiu que energia é liberada à medida que a trinca é propagada, de forma que a energia potencial  $\Pi$  reduz com o avanço da trinca. Irwin (1956), com base nessa relação entre a variação da energia potencial com o avanço da trinca, definiu um parâmetro global, conhecido como taxa de liberação de energia ( $G$ ) no avanço da trinca, dado por:

$$G = -\frac{d\Pi}{dA} \quad (3.1)$$

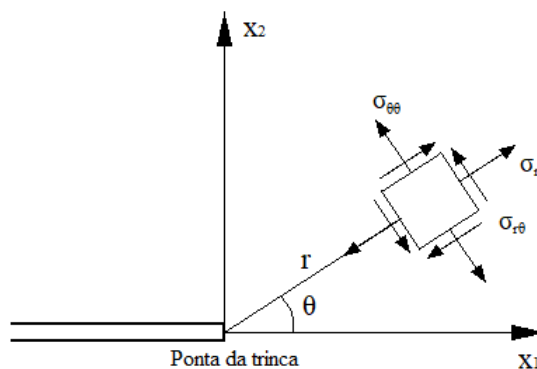
em que  $d\Pi$  se refere à variação da energia potencial com a expansão infinitesimal da área da trinca  $dA$ . Com base nessa relação, foi possível determinar um valor crítico para  $G$ ,

identificado por  $G_c$ , o qual representa uma condição necessária para a propagação da trinca.

Com os avanços dos estudos e com base na abordagem por tensões, a variação de tensão em pontos próximos à ponta da trinca em coordenadas polares foi definida por meio da expressão:

$$\sigma_{ij}(r, \theta) = \left( \frac{K}{\sqrt{2\pi r}} \right) f_{ij}(\theta) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m r^{\frac{m}{2}} g_{ij}^{(m)}(\theta) \quad (3.2)$$

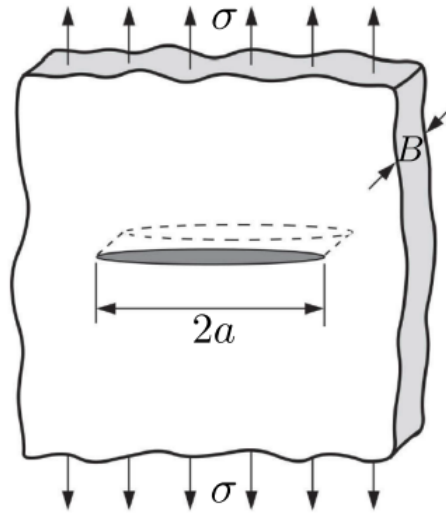
em que  $K$  é um parâmetro local conhecido como fator de intensidade de tensões (FIT),  $A_m$  é uma constante dependente das geometrias do corpo e da trinca e da tensão remota aplicada,  $f_{ij}(\theta)$  e  $g_{ij}^{(m)}(\theta)$  são funções adimensionais e  $r$  e  $\theta$  são as coordenadas do ponto analisado, referindo-se, respectivamente, à distância e ao ângulo medidos a partir de um sistema centrado na ponta da trinca. As componentes de tensão e o sistema de coordenadas polares é ilustrado na Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Componentes de tensão nas coordenadas polares

Com a diminuição da distância e conseqüente aproximação do ponto analisado da ponta da trinca, o primeiro termo do lado direito da equação passa a ser predominante, tendendo a infinito. Dessa forma, o comportamento da trinca pode ser descrito pelo parâmetro  $K$ , o qual representa a magnitude dos esforços internos na região próxima à ponta da trinca. De forma similar ao que acontece na abordagem baseada em energia, é possível determinar um valor crítico para o fator de intensidade de tensões, através de experimentos. Esse valor é conhecido como tenacidade à fratura, identificado por  $K_c$ , e define uma condição necessária para a propagação instável da trinca.

Em materiais elásticos lineares, é possível traçar uma relação entre a taxa de liberação de energia ( $G$ ) e o fator de intensidade de tensões ( $K$ ). Para ilustrar essa relação, considere o caso da trinca interna em uma placa infinita tracionada, conforme Figura 3.5.



**Figura 3.5:** Trinca interna em uma placa infinita tracionada

Para esse caso, a taxa de liberação de energia pode ser dada por:

$$G = \frac{\pi\sigma^2 a}{E} \quad (3.3)$$

enquanto que o fator de intensidade de tensões de modo I pode ser expresso por:

$$K_I = \sigma\sqrt{\pi a} \quad (3.4)$$

Dessa forma, o parâmetro global ( $G$ ) se relaciona com o parâmetro local ( $K$ ) de modo I pela expressão:

$$G = \frac{K_I^2}{E'} \quad (3.5)$$

em que

$$E' = \begin{cases} E & (EPT) \\ \frac{E}{(1-\nu^2)} & (EPD) \end{cases}$$

A relação apresentada na equação (3.5) é mesma obtida ao aplicar a Integral J para a determinação do FIT, como será visto adiante. Portanto, nessas condições, a Integral J equivale à taxa de liberação de energia ( $G$ ). O fator de intensidade de tensões, bem como formas de obtenção desse parâmetro, são apresentados a seguir.

### 3.1 Fator de Intensidade de Tensões

Segundo Broek (1986), no âmbito da Mecânica da Fratura Elástica Linear, o fator de intensidade de tensão (FIT) é o parâmetro mais importante para descrever o comportamento de componentes fraturados. Isso porque esse parâmetro consegue caracterizar completamente os campos de tensões e deformações próximos à ponta da trinca. O fator de intensidade de tensão indica a magnitude da tensão presente na ponta da trinca e depende do tamanho da trinca, da carga aplicada e da geometria. Usualmente, adota-se o parâmetro  $K$  para designar o fator de intensidade de tensões, que depende também do modo de fratura ao qual o componente está submetido. O FIT para o modo I é identificado por  $K_I$  e é dado pela equação:

$$K_I = F\sigma\sqrt{\pi a} \quad (3.6)$$

em que  $F$  é um fator dependente da geometria da trinca,  $\sigma$  é a tensão remota aplicada e  $a$  é o comprimento característico da trinca. Os parâmetros  $K_{II}$  e  $K_{III}$ , relativos aos modos II e III de fratura, respectivamente, são encontrados de forma análoga.

Uma vez que o FIT descreve o comportamento mecânico na ponta de uma trinca, ele pode ser usado como um critério de falha para um dado material. Neste caso, como dito anteriormente, um valor limite para  $K$ , conhecido por tenacidade à fratura e designado por  $K_c$ , pode ser obtido em laboratório para um dado material. A partir daí, uma vez que  $K$  atinge o valor limite, tem-se uma condição necessária para a fratura frágil (propagação instável da trinca).

Existem diversas maneiras de obter o fator de intensidade de tensão. A seguir, são citadas algumas delas.

- Formulações analíticas: baseadas na equação (3.6), sendo que a tensão e o comprimento da trinca são dados da análise, enquanto o fator geométrico  $F$  é fornecido em diversas bibliografias, como Dowling (2013), Anderson (2005), Tada et al. (2000), Murakami (1987) e Sih (1973). Essa formulação é limitada a geometrias mais simples, para as quais existem a solução analítica do fator geométrico.
- Formulações experimentais: tais como a técnica de correlação de imagens digitais,

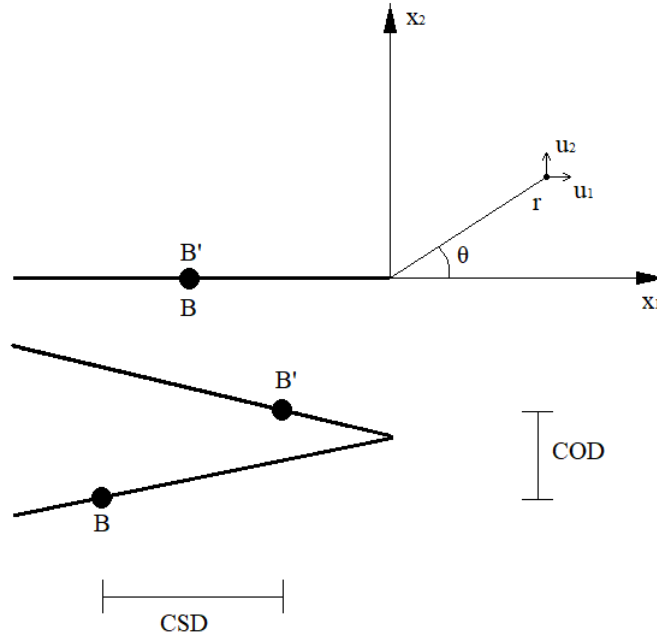
usada por Sato (2009), ou o uso de extensores (*strain gauges*), os quais podem fornecer dados de carregamento e comprimento da trinca.

- Formulações numéricas: aplicadas em casos de geometrias mais complexas, para as quais não há a solução analítica, ou para situações em que não é viável a medição experimental. Esse trabalho se baseia em duas metodologias numéricas: a técnica de correlação de deslocamentos e a integral J. As formulações serão detalhadas, respectivamente, nas seções 3.1.1 e 3.1.2.

O fluxograma do algoritmo implementado nesse trabalho para a determinação do fator de intensidade de tensão é apresentado na Figura B.1, presente no Apêndice B.

### 3.1.1 Correlação de Deslocamentos

A técnica de correlação de deslocamentos, apresentada por Paris e Sih (1965), propõe calcular os fatores de intensidade de tensão  $K_I$  e  $K_{II}$ , referentes ao modo I e modo II de fratura, respectivamente, com base nos deslocamentos dos nós próximos à ponta da trinca. Considere os nós B e B', ilustrados na Figura 3.6. Inicialmente, esses nós possuem as mesmas coordenadas, porém estão localizados em faces opostas da trinca. Com a aplicação de carregamento, esses nós podem apresentar um deslocamento relativo de abertura (COD - *crack opening displacement*), mensurado no eixo  $x_2$ , e um deslocamento relativo de deslizamento (CSD - *crack sliding displacement*), mensurado no eixo  $x_1$ .



**Figura 3.6:** Deslocamentos usados pelo método da correlação de deslocamentos

Utilizando o termo predominante da série que estabelece os campos de deslocamentos na ponta da trinca, as componentes do deslocamento nos eixos  $x_1$  e  $x_2$  são dadas por:

$$u_1 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 + 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] + \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 + 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (3.7)$$

$$u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa + 1 - 2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] - \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ \kappa - 1 - 2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (3.8)$$

Nessas equações,  $u_1$  e  $u_2$  são as componentes de deslocamento nos eixos  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente,  $r$  é a distância e  $\theta$  é o ângulo, ambos medidos a partir de um sistema centrado na ponta da trinca, conforme Figura 3.6,  $\mu$  é o módulo de cisalhamento e  $\kappa$  é dado por:

$$\kappa = \begin{cases} 3 - 4\nu & (EPT) \\ 3 - \frac{4\nu}{1 + \nu} & (EPD) \end{cases}$$

De acordo com o ilustrado na Figura 3.6,  $\theta_{B'} = 180^\circ$ ,  $\theta_B = -180^\circ$  e  $r_{B'} = r_B = r$ . Dessa forma, as componentes de deslocamento para esses pontos são dadas por:

$$u'_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1), \quad u_1 = -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) \quad (3.9a,b)$$



$$u'_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1), \quad u_2 = -\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) \quad (3.10a,b)$$

em que  $u'_1$  e  $u'_2$  se referem às componentes de deslocamento do ponto B', enquanto que  $u_1$  e  $u_2$  são as componentes de deslocamento do ponto B. Nessas condições, ao determinar o deslocamento relativo de abertura (COD) e de deslizamento (CSD) entre os pontos B' e B, tem-se:

$$COD = u'_2 - u_2 = \frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) - \left[ -\frac{K_I}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) \right] \quad (3.11)$$

$$CSD = u'_1 - u_1 = \frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) - \left[ -\frac{K_{II}}{2\mu} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (\kappa + 1) \right] \quad (3.12)$$

Isolando os fatores de intensidade de tensão de modo I e modo II nas equações (3.11) e (3.12), tem-se:

$$K_I = (u'_2 - u_2) \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (3.13)$$

$$K_{II} = (u'_1 - u_1) \frac{\mu}{\kappa + 1} \sqrt{\frac{2\pi}{r}} \quad (3.14)$$

em que  $K_I$  e  $K_{II}$  são, respectivamente os FIT de modo I e modo II. Nessas condições, o fator de intensidade de tensão de modo I, relativo à abertura da trinca, é obtido com base no deslocamento COD, enquanto que o FIT de modo II, relativo ao cisalhamento no plano, é obtido a partir do deslocamento CSD.

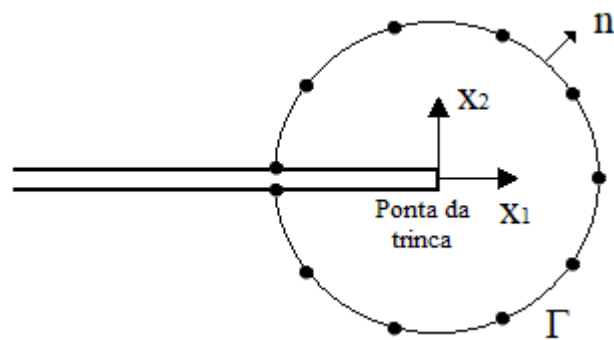
Dessa forma, os FIT de modo I e modo II são calculados pelas equações (3.13) e (3.14). A distância  $r$ , entre o nó escolhido e a ponta da trinca, deve ser suficientemente pequena para assegurar que os deslocamentos sejam avaliados dentro da zona de domínio do parâmetro  $K$ .

### 3.1.2 Integral J

Na ausência de forças de corpo, a Integral J foi introduzida por Rice (1968). Segundo Portela et al. (1992b), o método é efetivo para a determinação do fator de intensidade de tensões, uma vez que o campo elástico pode ser determinado de maneira precisa com o Método dos Elementos de Contorno. Além disso, os autores frisam que a performance do

Método dos Elementos de Contorno Dual é excelente quando a Integral J é usada para avaliar o fator de intensidade de tensões.

Uma vez que tal integral é independente do caminho, pode-se escolher um contorno circular com centro na extremidade da trinca, o qual deve se iniciar em uma face da fissura e terminar na face oposta. O sistema de referência cartesiano, definido na ponta da trinca, assumida como livre de forças de superfície em suas faces internas, juntamente com um exemplo de contorno circular usado na Integral J são apresentados na Figura 3.7.



**Figura 3.7:** Sistema cartesiano de referência e contorno usados na Integral J

As Integrais J correspondem à taxa de liberação de energia com o avanço da trinca na direção de cada eixo do sistema cartesiano com a origem definida em sua ponta. Desta forma, pode-se escrever:

$$J_k = \int_{\Gamma} (W n_k - t_i u_{i,k}) d\Gamma \quad (3.15)$$

onde  $J_k$  se refere à componente da integral J na direção  $k$  que, no caso bidimensional, assume valores 1 ou 2,  $n_k$  é a componente do vetor normal ao contorno arbitrário  $\Gamma$ , enquanto  $t_i$  é o vetor força de superfície atuando sobre  $\Gamma$ ,  $W$  é a densidade de energia de deformação e  $u_{i,k}$  se refere às componentes do tensor gradiente de deslocamento, estes três últimos são dados, respectivamente, por:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j \quad (3.16)$$

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (3.17)$$

$$u_{i,k}(\boldsymbol{\xi}) = \int_{\Gamma} u_{ij,k}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) t_j(\mathbf{x}) d\Gamma - \int_{\Gamma} t_{ij,k}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) u_j(\mathbf{x}) d\Gamma \quad (3.18)$$

onde  $\sigma_{ij}$  é o tensor de tensões de Cauchy,  $\epsilon_{ij}$  o tensor de deformações lineares e  $u_{ij,k}^*$  e  $t_{ij,k}^*$  são termos da solução fundamental de Kelvin, apresentados nas equações (A.5) e (A.6) no Apêndice A. As equações (3.16) e (3.17) são equações gerais, enquanto que a equação (3.18) é uma EIC a ser usada no MEC. A equação que descreve o tensor de deformações lineares, presente na equação (3.17), é:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (3.19)$$

De acordo com Portela et al. (1992b), as componentes  $J_1$  e  $J_2$  da Integral J se relacionam com os fatores de intensidade de tensões  $K_I$  e  $K_{II}$ , relativos ao modo I e II de fratura de acordo com as seguintes equações:

$$J_1 = \frac{K_I^2 + K_{II}^2}{E'}, \quad J_2 = -\frac{2K_I K_{II}}{E'} \quad (3.20a,b)$$

em que:

$$E' = \begin{cases} E & (EPT) \\ \frac{E}{(1 - \nu^2)} & (EPD) \end{cases}$$

A aplicação dessa formulação para modos mistos de fratura, envolvendo modos I e II, foi limitada, frente à dificuldade de desacoplar as componentes  $K_I$  e  $K_{II}$  na avaliação das Integrais  $J_k$ . Conforme proposto por Kitagawa et al. (1976, 1978), uma forma de realizar essa separação é a decomposição do campo elástico em partes simétricas e assimétricas, de forma que a Integral  $J_1$  seja representada pela soma de duas outras integrais, conforme a equação:

$$J_1 = J_1^I + J_1^{II} \quad (3.21)$$

Os campos elásticos de tensão e deslocamento são decompostos, de forma que:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{11}^I \\ \sigma_{22}^I \\ \sigma_{12}^I \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} + \sigma'_{11} \\ \sigma_{22} + \sigma'_{22} \\ \sigma_{12} - \sigma'_{12} \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{II} \\ \sigma_{22}^{II} \\ \sigma_{12}^{II} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \sigma_{11} - \sigma'_{11} \\ \sigma_{22} - \sigma'_{22} \\ \sigma_{12} + \sigma'_{12} \end{Bmatrix} \quad (3.22a,b)$$

$$\begin{cases} u_1^I \\ u_2^I \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} u_1 + u'_1 \\ u_2 - u'_2 \end{cases}, \quad \begin{cases} u_1^{II} \\ u_2^{II} \end{cases} = \frac{1}{2} \begin{cases} u_1 - u'_1 \\ u_2 + u'_2 \end{cases} \quad (3.23a,b)$$

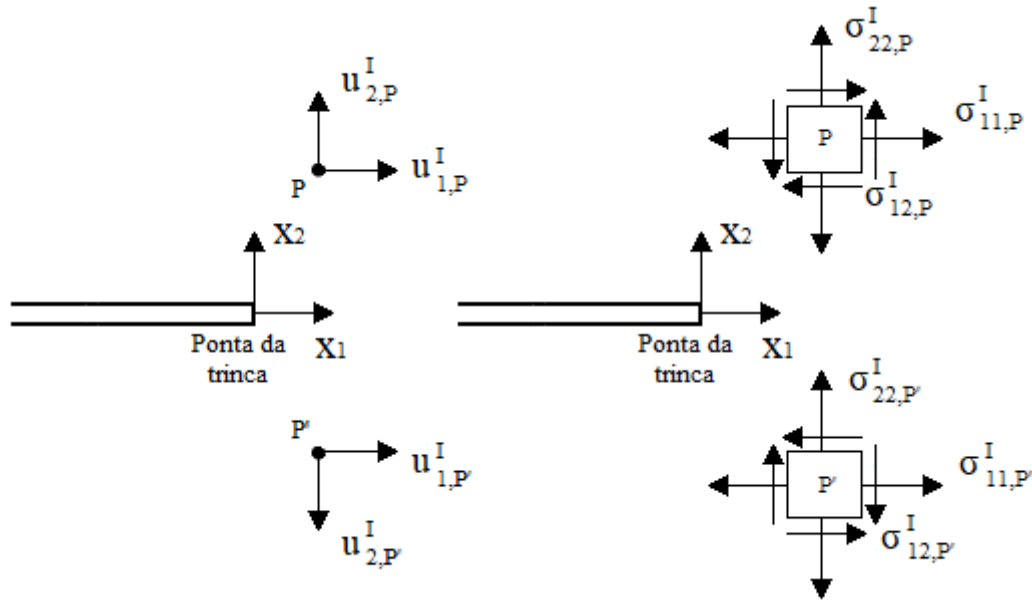
em que  $\sigma^I$  e  $u^I$  se referem à parte simétrica dos campos de tensão e deslocamento, respectivamente, enquanto que  $\sigma^{II}$  e  $u^{II}$  se referem à parte assimétrica. As componentes  $\sigma_{ij}$  e  $u_i$  se referem à tensão e ao deslocamento do ponto analisado e  $\sigma'_{ij}$  e  $u'_i$  são as componentes de tensão e deslocamento do ponto simétrico ao eixo  $x_1$ , de forma que:

$$\sigma'_{ij}(x_1, x_2) = \sigma_{ij}(x_1, -x_2)$$

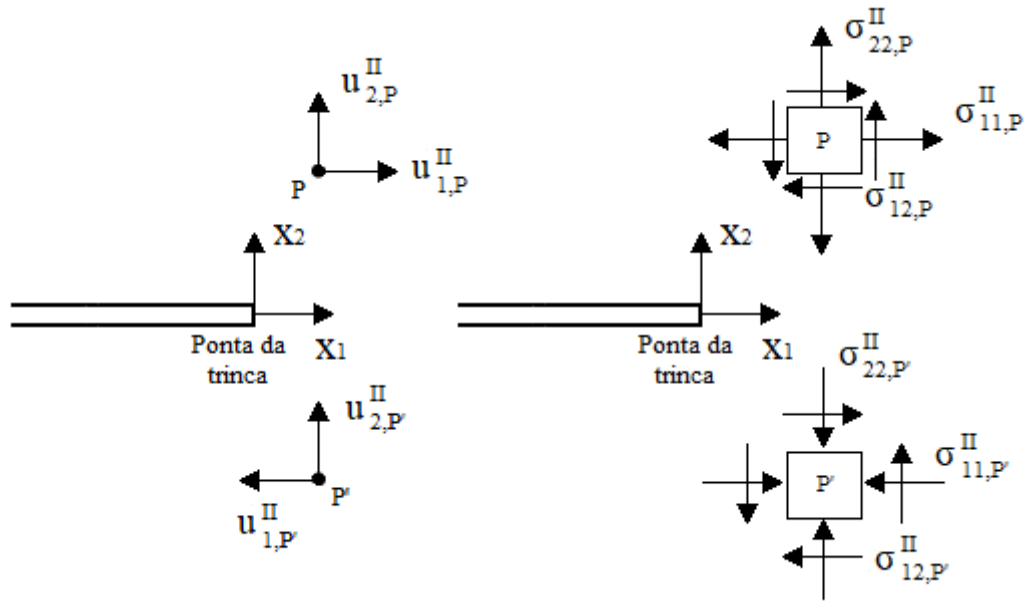
e

$$u'_i(x_1, x_2) = u_i(x_1, -x_2)$$

As posições relativas entre os pontos analisados e as componentes simétricas e assimétricas dos campos de tensão e de deslocamento são apresentados nas Figuras 3.8 e 3.9.



**Figura 3.8:** Componentes simétricas dos campos de deslocamento ( $u^I$ ) e de tensão ( $\sigma^I$ )



**Figura 3.9:** Componentes assimétricas dos campos de deslocamento ( $u^{II}$ ) e de tensão ( $\sigma^{II}$ )

Dessa forma, os campos elásticos de tensão e deslocamento ficam descritos pelas equações:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^I + \sigma_{ij}^{II} \quad (3.24)$$

$$u_i = u_i^I + u_i^{II} \quad (3.25)$$

A Integral  $J_1$  é então obtida:

$$J_1^M = \int_{\Gamma} (W^M n_1 - t_j^M u_{j,1}^M) d\Gamma \quad (3.26)$$

Em que  $M$  se refere aos modos de fratura, assumindo os valores de I ou II. Após manipulações matemáticas, chega-se à relação entre cada uma das integrais e os fatores de intensidade de tensões dos modos de fratura I e II. Essa relação é apresentada nas equações a seguir.

$$J_1^I = \frac{K_I^2}{E'} \quad (3.27)$$

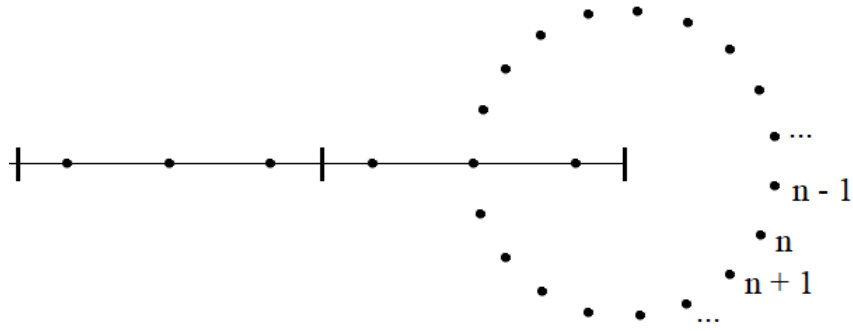
$$J_1^{II} = \frac{K_{II}^2}{E'} \quad (3.28)$$

Portanto, com as equações (3.27) e (3.28) é possível obter o fator de intensidade de tensões do modo I e do modo II, respectivamente, a partir da solução numérica da equação (3.26), considerando os campos apresentados nas equações (3.22) e (3.23).

Foram implementadas três formas diferentes para realizar a integração do caminho da integral J. Em todas as três formulações, utiliza-se a distribuição de pontos internos para a formação de um contorno circular, com centro na ponta da trinca. Todos os pontos pertencentes a esse contorno possuem um ponto simétrico, em relação ao eixo  $x_1$ . Caso haja um ponto localizado no eixo  $x_1$ , o simétrico é o próprio ponto. Em todos os pontos do contorno circular, calculam-se as variáveis necessárias à integral J, como as componentes de tensão, deformação, força de superfície e gradiente de deslocamento, obtidas pelas equações (2.30), (2.31), (3.16) e (3.18), além da densidade de energia de deformação (equação (3.17)). As formulações se diferenciam pela distribuição dos pontos no contorno circular, bem como pela integração numérica utilizada para o cálculo da integral J. As peculiaridades de cada método são apresentadas a seguir.

### 3.1.2.1 Regra Trapezoidal

Para a integração por meio da regra trapezoidal, distribui-se pontos igualmente espaçados ao redor da ponta da trinca, a fim de formar um contorno circular. O primeiro e o último ponto pertencem à trinca, sendo eles os nós coincidentes localizados em faces opostas da fissura, e os demais pontos são internos. A distribuição de pontos é ilustrada na Figura 3.10, para um contorno iniciado e finalizado no segundo nó anterior à ponta da trinca.



**Figura 3.10:** Contorno composto por 20 pontos para a integração da integral J por meio da regra dos trapézios

Para a aplicação da regra trapezoidal, realiza-se um somatório de 1 até  $n_p - 1$ , em que  $n_p$  é o número de pontos pertencentes ao contorno da integral J. Em cada etapa do somatório, é utilizado um par de pontos, de forma que, baseando-se nos pontos  $n$  e  $n + 1$  apresentados na Figura 3.10, as componentes  $J^I$   $J^{II}$  da integral J podem ser calculados por:

$$J_1^I = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_p-1} [(W^I n_1^I - t_k^I u_{k,1}^I)_n + (W^I n_1^I - t_k^I u_{k,1}^I)_{n+1}] \cdot r \cdot \theta \quad (3.29)$$

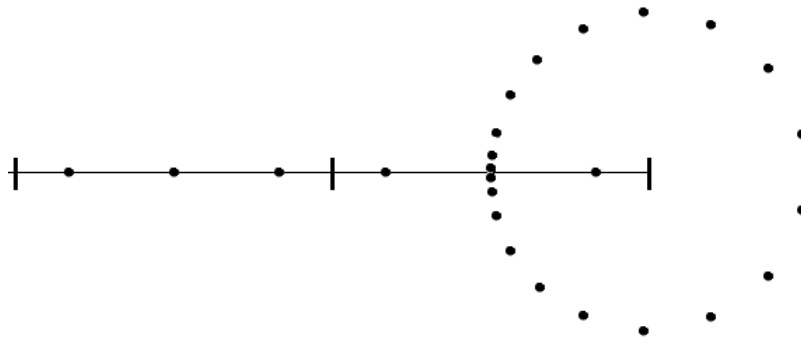
$$J_1^{II} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{n_p-1} [(W^{II} n_1^{II} - t_k^{II} u_{k,1}^{II})_n + (W^{II} n_1^{II} - t_k^{II} u_{k,1}^{II})_{n+1}] \cdot r \cdot \theta \quad (3.30)$$

em que  $r$  é o raio do contorno circular e  $\theta$  é o ângulo, em radianos, entre os dois pontos adjacentes.

Após o cálculo das componentes  $J_1^I$  e  $J_1^{II}$ , através das equações (3.29) e (3.30), é possível encontrar os fatores de intensidade de tensão por meio das equações (3.27) e (3.28).

### 3.1.2.2 Pontos de Integração de Gauss

A segunda forma de integração consiste em definir pontos sobre o contorno circular correspondentes aos pontos de integração numérica segundo a quadratura de Gauss-Legendre. Para isso, o contorno circular é parametrizado na coordenada  $\eta$  a qual varia de -1 a 1. Nesse caso, os pontos não ficam igualmente espaçados. A Figura 3.11 apresenta um contorno circular gerado com 20 pontos de integração de Gauss.



**Figura 3.11:** Contorno composto por 20 pontos de integração de Gauss

Após a definição do contorno circular, as integrais  $J$  são obtidas por meio das equações:

$$J_1^I = \sum_{k=1}^{n_{pi}} [W_k^I (n_1^I)_k - (t_j^I)_k (u_{j,1}^I)_k] \cdot J(\eta_k) \cdot w_k \quad (3.31)$$

$$J_1^{II} = \sum_{k=1}^{n_{pi}} [W_k^{II} (n_1^{II})_k - (t_j^{II})_k (u_{j,1}^{II})_k] \cdot J(\eta_k) \cdot w_k \quad (3.32)$$

em que  $n_{pi}$  é o número de pontos de integração,  $w_k$  se refere ao peso para cada ponto de integração e  $J(\eta_k)$  é o jacobiano, dado, nesse caso, por:

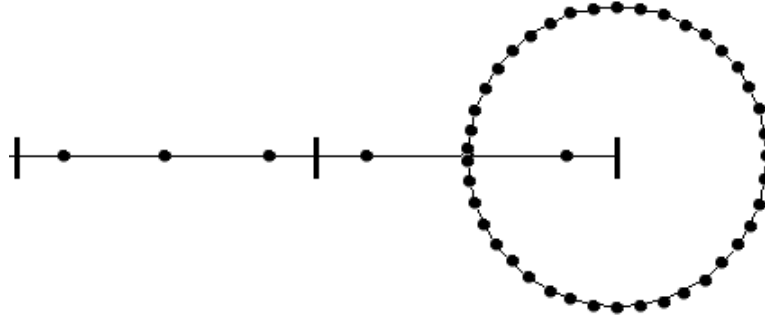
$$J(\eta_k) = \pi \cdot r$$

Encontrados os valores das componentes  $J_1^I$  e  $J_1^{II}$ , os FIT de modo I e modo II podem ser encontrados pelas equações (3.27) e (3.28), respectivamente.

### 3.1.2.3 Divisão do Contorno Circular em Elementos

Por fim, a terceira opção para a integração da integral  $J$  é criar um contorno circular, dividido em elementos de mesmo comprimento, os quais são integrados por meio da quadratura de Gauss-Legendre. O contorno circular é criado com a quantidade de elementos predefinida e cada elemento é integrado com a quantidade de pontos de integração também predefinida. A Figura 3.12 ilustra um contorno circular, dividido em 20 elementos quadráticos.





**Figura 3.12:** Contorno circular composto por 20 elementos quadráticos

As grandezas relativas à integral  $J$  são calculadas nos nós dos elementos, sendo que cada nó possui um nó simétrico em relação ao eixo  $x_1$ . As variáveis de tensão, gradiente de deslocamentos e densidade de energia de deformação, relativas aos pontos de integração de Gauss, são calculadas com base nos valores nodais e na função de interpolação  $N(\eta)$ , de forma que:

$$u_{i,j}^I = N_\alpha(\eta)(u_{i,j}^I)^\alpha, \quad u_{i,j}^{II} = N_\alpha(\eta)(u_{i,j}^{II})^\alpha \quad (3.33a,b)$$

$$\sigma_{ij}^I = N_\alpha(\eta)(\sigma_{ij}^I)^\alpha, \quad \sigma_{ij}^{II} = N_\alpha(\eta)(\sigma_{ij}^{II})^\alpha \quad (3.34a,b)$$

$$W^I = N_\alpha(\eta)(W^I)^\alpha, \quad W^{II} = N_\alpha(\eta)(W^{II})^\alpha \quad (3.35a,b)$$

com o somatório implícito pela repetição do índice  $\alpha$ , referente ao nó. As componentes de força de superfície são encontradas após a definição das componentes de tensão, de forma que:

$$t_i^I = \sigma_{ij}^I n_j, \quad t_i^{II} = \sigma_{ij}^{II} n_j \quad (3.36a,b)$$

Após a definição das variáveis nos pontos de integração de Gauss definidos no interior dos elementos, a integração da integral  $J$  pode ser concluída, com o auxílio de dois somatórios, um referente ao número de pontos de integração por elemento e outro referente ao número de elementos presente no contorno, tal que:

$$J_1^I = \sum_{i=1}^{n_e} \left\{ \sum_{k=1}^{n_p} [W_k^I (n_1^I)_k - (t_j^I)_k (u_{j,1}^I)_k] \cdot J(\eta_k) \cdot w_k \right\}_i \quad (3.37)$$

$$J_1^{II} = \sum_{i=1}^{n_e} \left\{ \sum_{k=1}^{n_p} [W_k^{II} (n_1^{II})_k - (t_j^{II})_k (u_{j,1}^{II})_k] \cdot J(\eta_k) \cdot w_k \right\}_i \quad (3.38)$$

em que  $i = 1, n_e$  elementos e  $k = 1, n_p$  pontos de integração de Gauss por elemento e  $j = 1, 2$ , referente às coordenadas cartesianas no caso bidimensional.

Ao fim, com a determinação das componentes  $J_1^I$  e  $J_1^{II}$ , através das equações (3.37) e (3.38), respectivamente, os FIT de modo I e modo II podem ser calculados pelas equações (3.27) e (3.28).

Com a finalidade de determinar qual a melhor abordagem para avaliar o fator de intensidade de tensão são apresentados a seguir exemplos de modo I, modo II e modo misto I e II de fratura.

### 3.1.3 Exemplos

Nessa seção, o fator de intensidade de tensões é calculado com o método da correlação dos deslocamentos e com as três diferentes formas de avaliação da integral J. Cada uma das três metodologias para solução dessa integral são testadas também para diferentes quantidades de pontos, sendo elas:

- Regra dos trapézios: contornos de 4, 6, 8, 10, 12 e 20 pontos;
- Pontos de Gauss: contornos de 4, 6, 8, 10, 12 e 20 pontos de integração de Gauss;
- Contorno circular dividido em elementos: contornos de 4, 6, 8, 10, 12 e 20 elementos quadráticos, integrados com a mesma quantidade de pontos de integração de Gauss, ou seja, no contorno de 4 elementos, cada elemento é integrado com 4 pontos de Gauss. O primeiro e o último elemento do contorno são semi-descontínuos, com  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2/3$ .

Os testes são realizados em componentes sujeitos a carregamentos de modo I, modo II ou modo misto I e II, com magnitude unitária, módulo de elasticidade igual a 100 e coeficiente de Poisson igual a 0,25. Todas as grandezas possuem unidades arbitrárias. Os elementos de quina são semi-descontínuos e os elementos de trinca são descontínuos,

todos com  $\lambda_1 = \lambda_2 = 2/3$ . Para todas as abordagens, o fator de intensidade de tensões é calculado no segundo nó anterior à ponta da trinca, ou seja, no nó do meio do último elemento da trinca, conforme mostrado nas Figuras 3.10, 3.11 e 3.12.

A seguir são apresentados os dados específicos de cada exemplo e sua configuração. Os três primeiros exemplos foram realizados por Portela et al. (1992b) e os cinco últimos foram retirados de Tada et al. (2000). O último exemplo também está presente em Gonzalez et al. (2015). Os resultados são normalizados, conforme equação a seguir, e são apresentados em tabelas específicas para cada metodologia adotada.

$$K_{normalizado} = \frac{K}{\sigma\sqrt{\pi a}} \quad (3.39)$$

Na equação (3.39),  $K$  se refere ao fator de intensidade de tensão, que pode ser de modo I ou modo II,  $\sigma$  se refere à tensão aplicada e  $a$  é o comprimento característico da trinca.

Por fim, é apresentado também o erro máximo, em percentual, obtido com cada formulação. Para os métodos de avaliação da integral J, os erros máximos foram calculados com base no contorno mais refinado, ou seja, composto por 20 pontos ou elementos.

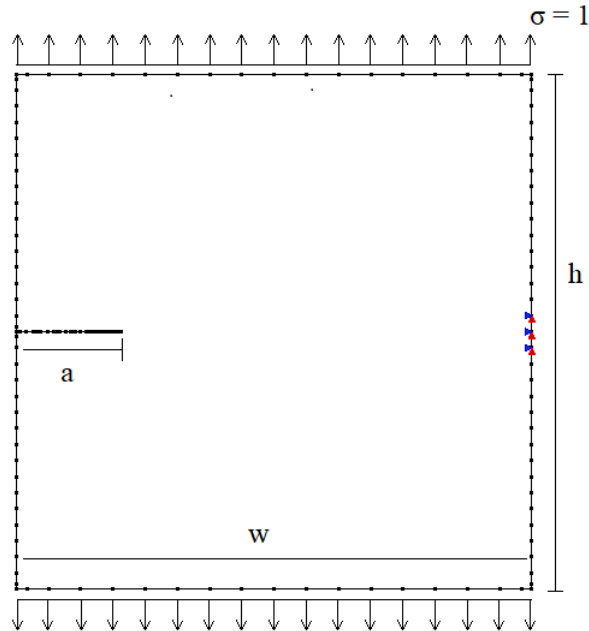
### 3.1.3.1 Placa quadrada com trinca de superfície horizontal

O primeiro exemplo consiste em uma placa quadrada, com dimensões 10 x 10, com uma trinca de superfície, localizada na metade da altura. A placa está sujeita a carregamento de tração  $\sigma = 1$ , sendo a trinca, portanto, submetida a modo I puro de fratura. A placa é discretizada com 64 elementos no total, sendo 8 elementos na largura  $w$  e 16 elementos na altura  $h$ . Além disso, cada face da trinca é discretizada com 8 elementos, com comprimentos divididos gradativamente, com diferentes percentuais do comprimento da trinca, sendo:

- 2 elementos de 20%, cada;
- 2 elementos de 15%, cada;
- 2 elementos de 10%, cada;

- 2 elementos de 5%, cada;

A discretização e as condições de contorno são apresentadas na Figura 3.13.



**Figura 3.13:** Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: discretização e condições de contorno

O fator de intensidade de tensões é calculado para 5 diferentes relações  $a/w$ . O resultado é comparado com o valor de referência obtido por Civelek e Erdogan (1982). Nessa referência, os autores utilizam o Método dos Elementos Finitos padrão, além de outros métodos analíticos e numéricos.

Primeiramente, na Tabela 3.1, é apresentado o resultado obtido com o método da correlação de deslocamentos, comparado com a referência.

**Tabela 3.1:** Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos

$K_I$ normalizado		
$a/w$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	1,555	1,488
0,3	1,940	1,848
0,4	2,451	2,324
0,5	3,189	3,010
0,6	4,423	4,152

Passando ao método da integral J, são apresentados, na Tabela 3.2, os resultados obtidos pelo primeiro método de integração: a regra dos trapézios.

**Tabela 3.2:** Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_I$ normalizado							
$a/w$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	1,603	1,487	1,487	1,487	1,487	1,488	1,488
0,3	1,986	1,844	1,845	1,846	1,846	1,847	1,848
0,4	2,488	2,314	2,316	2,318	2,319	2,320	2,324
0,5	3,211	2,988	2,992	2,995	2,996	2,998	3,010
0,6	4,408	4,105	4,110	4,113	4,115	4,118	4,152

A Tabela 3.3 apresenta os resultados obtidos quando o contorno da integral J é composto por pontos de integração de Gauss.

**Tabela 3.3:** Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_I$ normalizado							
$a/w$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	1,657	1,496	1,488	1,488	1,488	1,488	1,488
0,3	2,060	1,858	1,848	1,848	1,848	1,848	1,848
0,4	2,589	2,335	2,322	2,321	2,321	2,321	2,324
0,5	3,347	3,017	3,000	2,999	2,999	2,999	3,010
0,6	4,599	4,143	4,120	4,120	4,120	4,120	4,152

Por fim, a Tabela 3.4 apresenta os resultados do fator de intensidade de tensões calculados por meio da integral J, quando o contorno circular é discretizado em elementos quadráticos e integrado por meio da quadratura de Gauss-Legendre.

**Tabela 3.4:** Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_I$ normalizado							
$a/w$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	1,472	1,487	1,488	1,488	1,488	1,488	1,488
0,3	1,828	1,847	1,848	1,848	1,848	1,848	1,848
0,4	2,296	2,320	2,322	2,322	2,322	2,322	2,324
0,5	2,967	2,997	3,000	3,000	3,000	3,000	3,010
0,6	4,074	4,116	4,120	4,120	4,120	4,120	4,152

Na Tabela 3.5 são apresentados os erros máximos, em percentual, obtidos para o cálculo de  $K_I$ .

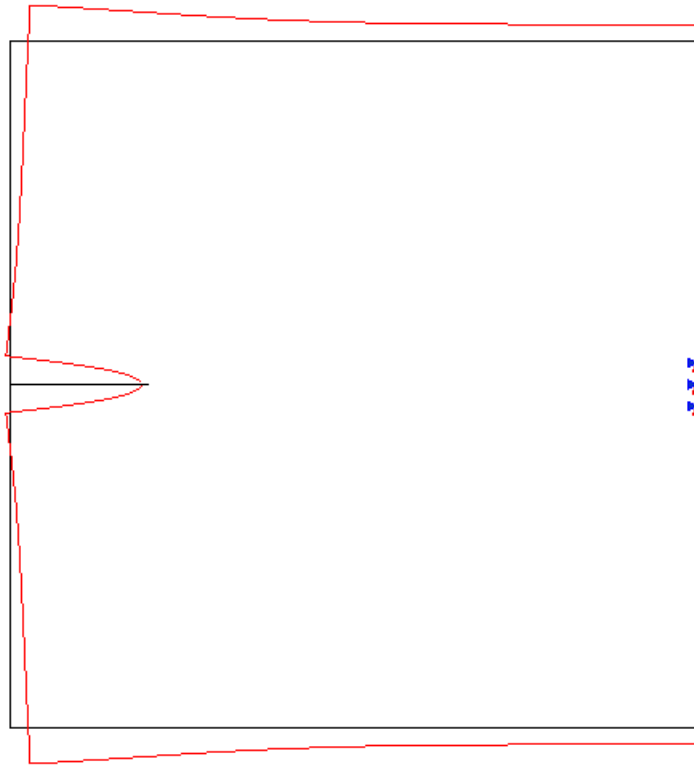
**Tabela 3.5:** Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: erro máximo obtido para  $K_I$ 

Erro máximo obtido para $K_I$			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
6,52%	0,81%	0,78%	0,78%

Através da Tabela 3.5, conclui-se que o método da integral J apresenta resultados mais confiáveis para o fator de intensidade de tensões do que o método da correlação de deslocamentos. Isso porque, as três metodologias de integração propostas para a integral J apresentam erros menores do que o método da correlação de deslocamentos.

Analisando apenas os valores obtidos por meio da integral J, as três metodologias de integração apresentam resultados próximos entre si, sendo que os contornos compostos por pontos de Gauss e os divididos em elementos são os que apresentam resultados ligeiramente melhores. No geral, a partir do segundo teste, ou seja, usando 6 ou mais pontos ou elementos, as três metodologias apresentam erros menores do que 1%. Além disso, percebe-se a estabilidade do terceiro método de integração da integral J, uma vez que, a partir do contorno composto por 8 elementos, o método apresenta resultados constantes, sem interferência do número de elementos.

A configuração deformada para a trinca de comprimento  $a = 0,2w$  é apresentada na Figura 3.14.



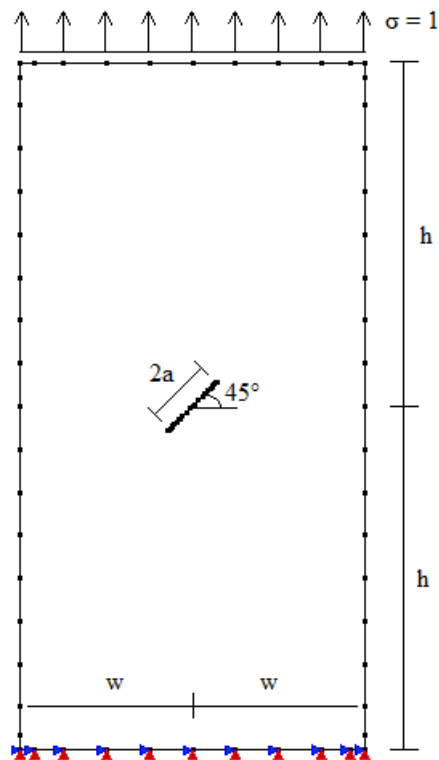
**Figura 3.14:** Placa quadrada com trinca de superfície horizontal: configuração deformada para a trinca de comprimento  $a = 0,2w$

### 3.1.3.2 Placa retangular com trinca interna, inclinada a $45^\circ$

O segundo exemplo consiste em uma placa retangular, de semi-largura  $w$  igual a 5, semi-altura  $h$  igual a 10, sujeita a tração, com  $\sigma$  igual a 1. A placa apresenta uma trinca interna, inclinada à  $45^\circ$ , com comprimento  $2a$ . Os testes são realizados para 5 diferentes relações  $a/w$ .

A placa é discretizada com um total de 36 elementos quadráticos, sendo 4 elementos na largura  $2w$ , 8 elementos na altura  $2h$  e 6 elementos em cada face da fissura, sendo eles distribuídos de maneira gradativa do meio para a ponta, com comprimentos de 25%, 15% e 10% do comprimento  $2a$  da trinca. A Figura 3.15 apresenta a discretização utilizada para o contorno, bem como as condições de contorno impostas.





**Figura 3.15:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^\circ$ : discretização e condições de contorno

Como a trinca apresentada é inclinada, o carregamento de tração aplicado gera modo misto de fratura, composto pelos modos I e II. Por isso, serão apresentados os resultados de  $K_I$  e  $K_{II}$ , para cada um dos métodos, os quais serão comparados com os valores de referência apresentados por Murakami (1987).

Primeiramente, são apresentados, nas Tabelas 3.6 e 3.7, os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$ , respectivamente, obtidos com o método da correlação de deslocamentos.

**Tabela 3.6:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^\circ$ : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos

$K_I$ normalizado		
$a/w$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	0,531	0,518
0,3	0,554	0,541
0,4	0,588	0,572
0,5	0,632	0,612
0,6	0,688	0,661

**Tabela 3.7:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^\circ$ : fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela correlação de deslocamentos

$K_{II}$ normalizado		
$a/w$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	0,523	0,507
0,3	0,532	0,516
0,4	0,545	0,529
0,5	0,561	0,546
0,6	0,582	0,567

Os resultados para  $K_I$  e  $K_{II}$  obtidos com a integral J, integrada com a regra dos trapézios, são apresentados nas Tabelas 3.8 e 3.9, respectivamente.

**Tabela 3.8:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^{\circ}$ : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_I$ normalizado							
$a/w$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,559	0,519	0,519	0,520	0,520	0,520	0,518
0,3	0,584	0,542	0,542	0,543	0,543	0,543	0,541
0,4	0,619	0,574	0,574	0,574	0,575	0,575	0,572
0,5	0,664	0,616	0,616	0,616	0,616	0,616	0,612
0,6	0,720	0,667	0,666	0,666	0,666	0,666	0,661

**Tabela 3.9:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^{\circ}$ : fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_{II}$ normalizado							
$a/w$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,252	0,418	0,448	0,464	0,474	0,491	0,507
0,3	0,254	0,424	0,456	0,472	0,482	0,499	0,516
0,4	0,258	0,434	0,467	0,483	0,493	0,511	0,529
0,5	0,263	0,447	0,481	0,498	0,509	0,527	0,546
0,6	0,269	0,464	0,500	0,518	0,529	0,548	0,567

Já os resultados da integral J, quando o contorno utilizado é criado com base nos pontos de integração de Gauss, são apresentados a seguir. Na Tabela 3.10, estão os resultados relativos ao fator de intensidade de tensão de modo I, enquanto a Tabela 3.11 apresenta os resultados do FIT de modo II.

**Tabela 3.10:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^\circ$ : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_I$ normalizado							
$a/w$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,580	0,523	0,520	0,520	0,520	0,520	0,518
0,3	0,605	0,546	0,543	0,543	0,543	0,543	0,541
0,4	0,640	0,578	0,575	0,575	0,575	0,575	0,572
0,5	0,686	0,619	0,616	0,616	0,616	0,616	0,612
0,6	0,742	0,670	0,666	0,666	0,666	0,666	0,661

**Tabela 3.11:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^\circ$ : fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_{II}$ normalizado							
$a/w$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,456	0,510	0,513	0,513	0,513	0,513	0,507
0,3	0,464	0,519	0,522	0,522	0,522	0,522	0,516
0,4	0,476	0,531	0,534	0,534	0,534	0,534	0,529
0,5	0,492	0,548	0,551	0,551	0,551	0,551	0,546
0,6	0,512	0,569	0,572	0,572	0,572	0,572	0,567

Por fim, apresenta-se os resultados obtidos com a terceira forma de avaliação da integral J. As Tabelas 3.12 e 3.13 contêm os resultados para  $K_I$  e  $K_{II}$  quando o contorno circular é subdividido em elementos quadráticos, integrados de maneira regular por meio da quadratura de Gauss-Legendre.

**Tabela 3.12:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^\circ$ : fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_I$ normalizado							
$a/w$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,515	0,520	0,520	0,520	0,520	0,520	0,518
0,3	0,537	0,543	0,543	0,543	0,543	0,543	0,541
0,4	0,569	0,574	0,575	0,575	0,575	0,575	0,572
0,5	0,609	0,615	0,616	0,616	0,616	0,616	0,612
0,6	0,659	0,666	0,666	0,666	0,666	0,666	0,661

**Tabela 3.13:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^\circ$ : fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_{II}$ normalizado							
$a/w$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,520	0,514	0,513	0,513	0,513	0,513	0,507
0,3	0,529	0,522	0,522	0,522	0,522	0,522	0,516
0,4	0,541	0,535	0,534	0,534	0,534	0,534	0,529
0,5	0,558	0,552	0,551	0,551	0,551	0,551	0,546
0,6	0,579	0,573	0,572	0,572	0,572	0,572	0,567

Nas Tabelas 3.14 e 3.15 são apresentados os erros máximos, em percentual, para  $K_I$  e  $K_{II}$ , obtidos pelas 4 formulações apresentadas.

**Tabela 3.14:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^\circ$ : erro máximo obtido para  $K_I$

Erro máximo obtido para $K_I$			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
4,15%	0,79%	0,76%	0,76%

**Tabela 3.15:** Placa retangular com trinca interna inclinada a  $45^\circ$ : erro máximo obtido para  $K_{II}$ 

Erro máximo obtido para $K_{II}$			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
3,15%	3,43%	1,19%	1,19%

Com base nos resultados apresentados nas Tabelas 3.14 e 3.15, a integral J proporciona resultados mais próximos da referência do que o método da correlação de deslocamentos, para fraturas em modo misto I e II.

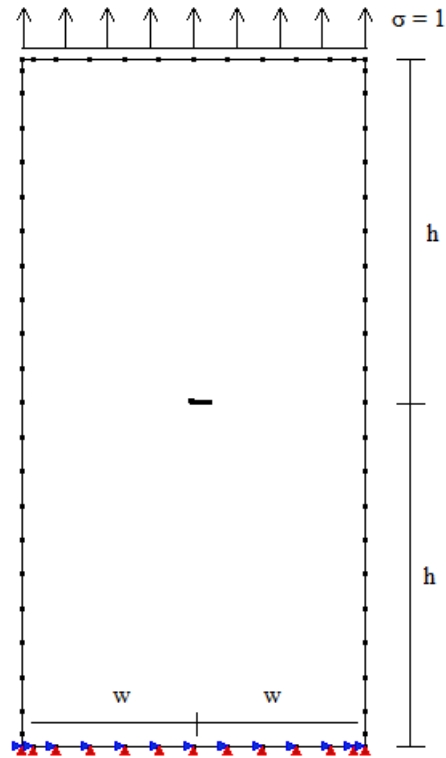
Ao analisar especificamente as três formas de integração da integral J, fica claro que as abordagens mais próximas da referência são aquelas em que o caminho de integração é composto por pontos de integração de Gauss ou subdivido em elementos, pois essas duas metodologias apresentam os mesmos erros percentuais. Percebe-se também que, apesar de a regra dos trapézios gerar bons resultados para  $K_I$ , o mesmo não acontece para  $K_{II}$ . Isso porque, conforme observado por Portela et al. (1992b), a regra trapezoidal não consegue representar de maneira precisa a variação do campo elástico em modo II.

### 3.1.3.3 Placa retangular com trinca interna dobrada

O terceiro exemplo consiste em uma placa retangular, sujeita a tração, cujas dimensões são  $w$  igual a 5 e  $h$  igual a 10. A placa apresenta uma trinca interna, posicionada no centro da placa, a qual é dobrada, de forma a ter um segmento horizontal e um segmento inclinado à  $45^\circ$ . Como a trinca apresenta mudança de direção, o carregamento de tração  $\sigma = 1$  aplicado provoca modo misto I e II de fratura.

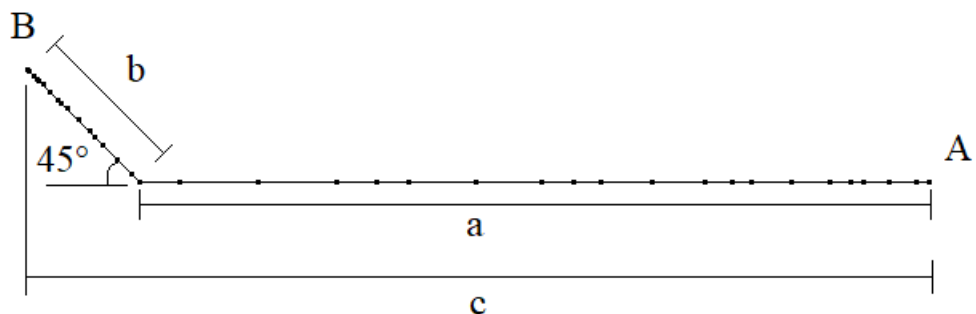
O modelo discretizado é dividido em 48 elementos quadráticos, sendo 5 elementos na largura  $2w$ , 10 elementos na altura  $2h$  e 9 elementos em cada face da trinca. A parte horizontal da trinca é discretizada com 5 elementos, divididos de maneira gradativa, indo do ponto central da placa até a ponta A com comprimentos de 30%, 25%, 20%, 15% e 10% do comprimento  $a$ . Já a parte inclinada da trinca é discretizada com 4 elementos quadráticos, divididos de maneira gradativa, indo do ponto central até a ponta B, com

comprimentos iguais a 40%, 30%, 20% e 10% do comprimento  $b$ . A discretização adotada, bem como as condições de contorno impostas, são apresentadas na Figura 3.16.



**Figura 3.16:** Placa retangular com trinca interna dobrada: discretização e condições de contorno

Para melhor visualização do formato e das dimensões, a trinca é ampliada e apresentada na Figura 3.17.



**Figura 3.17:** Placa retangular com trinca interna dobrada: ampliação da trinca dobrada

A Figura 3.17,  $a$  é o comprimento da parte horizontal, a qual tem ponta A;  $b$  é o comprimento da parte inclinada a  $45^\circ$ , a qual tem ponta B. O comprimento  $a$  é constante

e igual a  $0,1w$ , ou seja,  $a = 0,5$ . Já  $b$  varia com a relação  $b/a$ , a qual assume três valores: 0,2, 0,3 e 0,4. O comprimento  $c$  é a projeção da trinca no plano horizontal, sendo:

$$2c = a + \frac{\sqrt{2}b}{2}$$

de forma que, a normalização do fator de intensidade de tensão, apresentada na equação (3.39), será feita com base nesse comprimento  $c$ , transformando-se em:

$$K_{normalizado} = \frac{K}{\sigma\sqrt{\pi c}} \quad (3.40)$$

Os resultados de FIT obtidos com o método da correlação de deslocamentos e os valores de referência encontrados em Murakami (1987) são apresentados nas Tabelas 3.16, 3.17, 3.18 e 3.19, onde as duas primeiras se referem a  $K_I$  e  $K_{II}$ , respectivamente, relativos à ponta A e as duas últimas se referem a  $K_I$  e  $K_{II}$ , respectivamente, relativos à ponta B.

**Tabela 3.16:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta A, calculado pela correlação de deslocamentos

$K_I$ normalizado para a ponta A		
$b/a$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	1,026	0,995
0,3	1,023	0,990
0,4	1,022	0,986

**Tabela 3.17:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta A, calculado pela correlação de deslocamentos

$K_{II}$ normalizado para a ponta A		
$b/a$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	0,031	0,028
0,3	0,036	0,033
0,4	0,032	0,030



**Tabela 3.18:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta B, calculado pela correlação de deslocamentos

$K_I$ normalizado para a ponta B		
$b/a$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	0,636	0,598
0,3	0,604	0,574
0,4	0,596	0,568

**Tabela 3.19:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta B, calculado pela correlação de deslocamentos

$K_{II}$ normalizado para a ponta B		
$b/a$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	0,592	0,557
0,3	0,641	0,607
0,4	0,663	0,627

Passando para os métodos de avaliação da integral J, primeiramente, nas Tabelas 3.20, 3.21, 3.22 e 3.23, tem-se os resultados, respectivamente, de  $K_I$  e  $K_{II}$  da ponta A e  $K_I$  e  $K_{II}$  da ponta B, calculados por meio da regra dos trapézios.

**Tabela 3.20:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_I$ normalizado para a ponta A							
$b/a$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	1,138	1,035	1,024	1,019	1,016	1,010	0,995
0,3	1,125	1,025	1,016	1,012	1,009	1,004	0,990
0,4	1,116	1,019	1,011	1,007	1,004	1,000	0,986

**Tabela 3.21:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_{II}$ normalizado para a ponta A							
$b/a$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,012	0,023	0,025	0,026	0,026	0,028	0,028
0,3	0,016	0,027	0,029	0,030	0,031	0,032	0,033
0,4	0,016	0,025	0,027	0,028	0,028	0,029	0,030

**Tabela 3.22:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_I$ normalizado para a ponta B							
$b/a$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,651	0,606	0,606	0,607	0,607	0,607	0,598
0,3	0,622	0,578	0,578	0,578	0,579	0,579	0,574
0,4	0,616	0,572	0,572	0,572	0,573	0,573	0,568

**Tabela 3.23:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_{II}$ normalizado para a ponta B							
$b/a$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,276	0,455	0,490	0,508	0,520	0,540	0,557
0,3	0,295	0,493	0,531	0,551	0,563	0,586	0,607
0,4	0,303	0,510	0,550	0,570	0,583	0,606	0,627

Nas Tabelas 3.24, 3.25, 3.26 e 3.27, são apresentados os resultados de  $K_I$  e  $K_{II}$ , obtidos com a integral J integrada a partir dos pontos de Gauss, para as pontas A e B.

**Tabela 3.24:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_I$ normalizado para a ponta A							
$b/a$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	1,111	1,009	1,003	1,003	1,003	1,003	0,995
0,3	1,106	1,003	0,998	0,998	0,998	0,998	0,990
0,4	1,103	1,000	0,995	0,995	0,995	0,995	0,986

**Tabela 3.25:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_{II}$ normalizado para a ponta A							
$b/a$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,025	0,029	0,029	0,029	0,029	0,029	0,028
0,3	0,030	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0,033
0,4	0,027	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031	0,030

**Tabela 3.26:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_I$ normalizado para a ponta B							
$b/a$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,678	0,611	0,608	0,608	0,608	0,608	0,598
0,3	0,646	0,583	0,579	0,579	0,579	0,579	0,574
0,4	0,639	0,576	0,573	0,573	0,573	0,573	0,568

**Tabela 3.27:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_{II}$ normalizado para a ponta N							
$b/a$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,498	0,565	0,568	0,568	0,568	0,568	0,557
0,3	0,541	0,613	0,616	0,616	0,616	0,616	0,607
0,4	0,560	0,634	0,637	0,638	0,637	0,637	0,627

E por fim, apresenta-se os resultados obtidos com a integral J, cujo caminho de integração é discretizado em elementos quadráticos. Nas Tabelas 3.28 e 3.29 estão os resultados de  $K_I$  e  $K_{II}$  obtidos na ponta A, enquanto as Tabelas 3.30 e 3.31 apresentam os resultados do FIT de modo I e modo II para a ponta B.

**Tabela 3.28:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_I$ normalizado para a ponta A							
$b/a$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,994	1,003	1,003	1,003	1,003	1,003	0,995
0,3	0,989	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,990
0,4	0,985	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,986

**Tabela 3.29:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta A, calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_{II}$ normalizado para a ponta A							
$b/a$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,030	0,029	0,029	0,029	0,029	0,029	0,028
0,3	0,035	0,034	0,034	0,034	0,034	0,034	0,033
0,4	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031	0,031	0,030

**Tabela 3.30:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_I$ normalizado para a ponta B							
$b/a$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,601	0,607	0,608	0,608	0,608	0,608	0,598
0,3	0,573	0,579	0,579	0,579	0,579	0,579	0,574
0,4	0,567	0,573	0,573	0,573	0,573	0,573	0,568

**Tabela 3.31:** Placa retangular com trinca interna dobrada: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ), para a ponta B, calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_{II}$ normalizado para a ponta B							
$b/a$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,577	0,569	0,568	0,568	0,568	0,568	0,557
0,3	0,626	0,617	0,616	0,616	0,616	0,616	0,607
0,4	0,647	0,639	0,638	0,638	0,637	0,637	0,627

Os erros máximos em percentual obtidos com cada formulação são apresentados nas Tabelas 3.32, 3.33, 3.34 e 3.35. As duas primeiras se referem a  $K_I$  e  $K_{II}$  obtidos na ponta A e as duas últimas na ponta B.

**Tabela 3.32:** Placa retangular com trinca interna dobrada: erro máximo obtido para  $K_I$ , na ponta A

Erro máximo obtido para $K_I$ , na ponta A			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
3,62%	1,55%	0,88%	0,88%

**Tabela 3.33:** Placa retangular com trinca interna dobrada: erro máximo obtido para  $K_{II}$ , na ponta A

Erro máximo obtido para $K_{II}$ , na ponta A			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
11,26%	2,23%	4,19%	4,19%

**Tabela 3.34:** Placa retangular com trinca interna dobrada: erro máximo obtido para  $K_I$ , na ponta B

Erro máximo obtido para $K_I$ , na ponta B			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
6,42%	1,57%	1,61%	1,61%

**Tabela 3.35:** Placa retangular com trinca interna dobrada: erro máximo obtido para  $K_{II}$ , na ponta B

Erro máximo obtido para $K_{II}$ , na ponta B			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
6,30%	3,45%	2,04%	2,04%

Por meio das tabelas apresentadas acima, percebe-se que o método da Integral J apresenta resultados melhores que o método da Correlação de Deslocamentos, independente de

como o caminho de integração é discretizado. A Tabela 3.33, relativa ao erro máximo em percentual do fator de intensidade de tensão de modo II calculado na ponta A, apresenta erros maiores do que aqueles normalmente vistos para o método da Integral J. Isso se deve ao baixo valor de  $K_{II}$  na ponta A, pois os resultados apresentados nas Tabelas 3.21, 3.25 e 3.29 estão próximos da referência, apresentando diferenças a partir da terceira casa decimal.

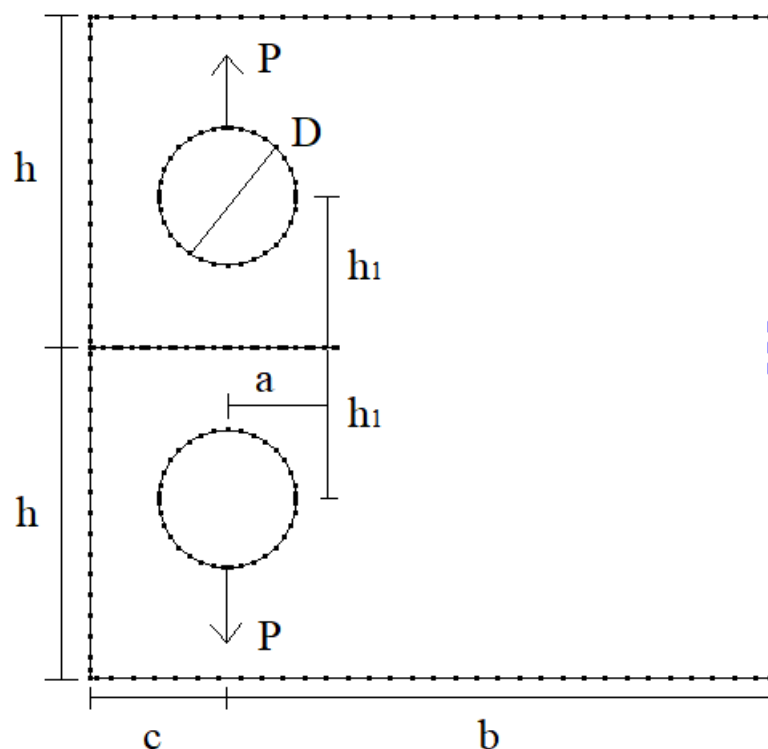
### 3.1.3.4 *Compact Tension Test Specimen (CT)*

O quarto exemplo apresentado se refere a um corpo de prova para teste de tração. O corpo de prova possui dimensões padronizadas, conforme Tada et al. (2000), e dependentes da largura  $b$ , sendo elas apresentadas na Tabela 3.36.

**Tabela 3.36:** *Compact Tension Test Specimen*: dimensões

Dimensões do CT		
Identificação	Relação com b	Valor
$b$	-	2,00
$h$	0,6b	1,20
$h_1$	0,275b	0,55
$D$	0,25b	0,50
$c$	0,25b	0,50

Essas dimensões são mostradas na Figura 3.18.



**Figura 3.18:** *Compact Tension Test Specimen*: discretização e condições de contorno

O CT está sujeito a uma carga unitária de tração, provocando modo I de fratura na trinca. A malha inicial possui 114 elementos quadráticos, sendo que cada lado e cada furo é discretizado com 16 elementos. A trinca de tamanho inicial igual a  $0,2b$  é discretizada com 9 elementos quadráticos e descontínuos em cada face. Essa discretização está apresentada na Figura 3.18. Diferentes comprimentos de trinca foram analisados. A relação entre o comprimento da trinca  $a$  e a largura  $b$ , bem como a quantidade de elementos usados para discretizar o comprimento total da trinca  $a + c$  estão apresentados na Tabela 3.37.

**Tabela 3.37:** *Compact Tension Test Specimen*: dimensões e elementos da trinca

Dimensões e elementos da trinca			
Identificação	Relação com b	Valor	Elementos por face
$a$	0,2b	0,40	9
	0,3b	0,60	11
	0,4b	0,80	13
	0,5b	1,00	15
	0,6b	1,20	17



Essas divisões em elementos, destacadas na Tabela 3.37, foram realizadas a fim de manter elementos de mesmo tamanho ao longo de todo o comprimento  $a + c$ .

Os valores de referência para o fator de intensidade de tensão de modo I são obtidos conforme formulação apresentada em Tada et al. (2000):

$$K_I = \sigma \sqrt{a} F_1 \quad (3.41)$$

em que:

$$\sigma = \frac{P}{b} \quad (3.42)$$

e

$$F_1 = \frac{2 \left(2 + \frac{a}{b}\right)}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{a}{b}}} \cdot F_2 \quad (3.43)$$

Com  $F_2$  dado por:

$$F_2 = 0,443 + 2,32 \left(\frac{a}{b}\right) - 6,66 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 7,36 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 2,8 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (3.44)$$

Os valores de referência, calculados pela equação (3.41), bem como os resultados de  $K_I$  obtidos pelos 4 métodos são normalizados em função do comprimento  $a$ , conforme equação (3.39). Após a normalização, os resultados obtidos pelo método da correlação de deslocamentos para o fator de intensidade de tensões de modo I,  $K_I$ , bem como os valores de referência, são apresentados na Tabela 3.38.

**Tabela 3.38:** *Compact Tension Test Specimen*: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos

$K_I$ normalizado		
$a/b$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	2,929	2,696
0,3	3,115	2,895
0,4	3,485	3,247
0,5	4,129	3,853
0,6	5,333	4,973

Os resultados para  $K_I$  obtidos por meio da integral J, avaliada pela regra dos trapézios, são apresentados na Tabela 3.39.

**Tabela 3.39:** *Compact Tension Test Specimen*: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$a/b$	$K_I$ normalizado						Referência
	Pontos						
	4	6	8	10	12	20	
0,2	2,944	2,728	2,727	2,726	2,726	2,726	2,696
0,3	3,104	2,889	2,892	2,894	2,895	2,897	2,895
0,4	3,449	3,214	3,218	3,221	3,222	3,223	3,247
0,5	4,071	3,793	3,798	3,800	3,801	3,802	3,853
0,6	5,229	4,872	4,877	4,881	4,882	4,884	4,973

Já a Tabela 3.40 apresenta os resultados do FIT de modo I obtidos por meio da Integral J, calculada pela adoção de pontos de Gauss ao longo do contorno circular.

**Tabela 3.40:** *Compact Tension Test Specimen*: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$a/b$	$K_I$ normalizado						Referência
	Pontos de Gauss						
	4	6	8	10	12	20	
0,2	3,047	2,739	2,723	2,723	2,723	2,723	2,696
0,3	3,237	2,913	2,897	2,896	2,896	2,896	2,895
0,4	3,602	3,241	3,223	3,222	3,222	3,222	3,247
0,5	4,249	3,822	3,801	3,800	3,800	3,800	3,853
0,6	5,457	4,909	4,882	4,881	4,881	4,881	4,973

Por fim, a Tabela 3.41 apresenta os resultados do fator de intensidade de tensão de modo I obtidos quando o caminho de integração da integral J é subdividido em elementos quadráticos.

**Tabela 3.41:** *Compact Tension Test Specimen*: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$b/a$	$K_I$ normalizado						Referência
	Elementos						
	4	6	8	10	12	20	
0,2	2,692	2,720	2,723	2,723	2,723	2,723	2,696
0,3	2,863	2,894	2,897	2,897	2,897	2,897	2,895
0,4	3,185	3,219	3,223	3,223	3,223	3,222	3,247
0,5	3,756	3,797	3,801	3,801	3,801	3,800	3,853
0,6	4,824	4,877	4,882	4,882	4,882	4,882	4,973

Os erros máximos percentuais obtidos com cada metodologia são apresentados na Tabela 3.42.

**Tabela 3.42:** *Compact Tension Test Specimen*: erro máximo obtido para  $K_I$

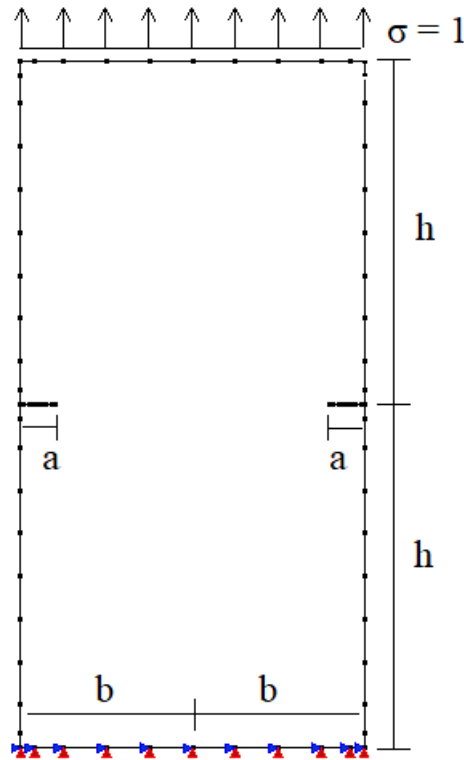
Erro máximo obtido para $K_I$			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
8,63%	1,79%	1,84%	1,84%

Percebe-se, pela Tabela 3.42, que a Integral J apresenta resultados melhores que o método da Correlação de Deslocamentos na análise do corpo de prova de teste compacto, sujeito a tração. Quanto aos métodos de integração da Integral J, todos eles apresentam resultados próximos, sendo que a integração por meio da regra dos trapézios apresenta um erro ligeiramente menor.

### 3.1.3.5 Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração

O quinto exemplo consiste em uma placa retangular, com duas trincas de superfície, sujeita a um esforço de tração  $\sigma = 1$ . A placa possui largura  $2b$  igual a 1 e altura  $2h$  igual a 2. A trinca assume 5 diferentes comprimentos, de acordo com diferentes razões  $a/b$ . A placa é, inicialmente, discretizada com 32 elementos, sendo 4 elementos na largura  $2b$ , 8

elementos na altura  $2h$  e 2 elementos por face em cada uma das trincas, quando  $a = 0,2b$ . A cada aumento na razão  $a/b$ , aumenta-se 1 elemento por face das trincas, de forma a manter os elementos da fissura com comprimento constante. A discretização inicial, as dimensões da placa e as condições de contorno são apresentadas na Figura 3.19.



**Figura 3.19:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: discretização e condições de contorno

O valor de referência para o fator de intensidade de tensão de modo I calculado nas pontas das trincas apresentadas na Figura 3.19, é apresentado em Tada et al. (2000) com a seguinte formulação:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F \quad (3.45)$$

em que  $F$  é dado por:

$$F = \frac{1,122 - 0,561 \left(\frac{a}{b}\right) - 0,205 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0,471 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0,190 \left(\frac{a}{b}\right)^4}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}}$$

Devido à simetria da placa, o resultado do FIT de modo I é o mesmo nas pontas das duas trincas. Por essa razão, é apresentado somente um resultado para cada metodologia utilizada. Primeiramente, tem-se na Tabela 3.43 os resultados de  $K_I$  obtidos com o método da Correlação de Deslocamentos, bem como os valores de referência, obtidos com a equação (3.45).

**Tabela 3.43:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos

$K_I$ normalizado		
$a/b$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	1,121	1,124
0,3	1,142	1,131
0,4	1,163	1,149
0,5	1,203	1,184
0,6	1,273	1,247

A Tabela 3.44 apresenta os resultados para o FIT de modo I, obtidos por meio da Integral J, integrada pela regra dos trapézios.

**Tabela 3.44:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_I$ normalizado							
$a/b$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	1,238	1,133	1,126	1,123	1,121	1,118	1,124
0,3	1,234	1,133	1,129	1,126	1,125	1,123	1,131
0,4	1,246	1,147	1,143	1,141	1,140	1,139	1,149
0,5	1,282	1,182	1,178	1,177	1,176	1,175	1,184
0,6	1,352	1,247	1,244	1,243	1,243	1,242	1,247

Na Tabela 3.45, constam os resultados de  $K_I$  obtidos pela Integral J, cujo caminho de integração é definido pelos pontos de integração de Gauss.

**Tabela 3.45:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_I$ normalizado							
$a/b$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	1,236	1,120	1,114	1,114	1,114	1,114	1,124
0,3	1,245	1,127	1,121	1,121	1,121	1,121	1,131
0,4	1,263	1,143	1,137	1,137	1,137	1,137	1,149
0,5	1,304	1,180	1,173	1,173	1,173	1,173	1,184
0,6	1,379	1,247	1,240	1,240	1,240	1,240	1,247

Por fim, na Tabela 3.46, são apresentados os resultados obtidos pela Integral J, com caminho circular de integração subdividido em elementos quadráticos.

**Tabela 3.46:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_I$ normalizado							
$b/a$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	1,103	1,113	1,114	1,114	1,114	1,114	1,124
0,3	1,110	1,120	1,121	1,121	1,121	1,121	1,131
0,4	1,126	1,136	1,137	1,137	1,137	1,137	1,149
0,5	1,162	1,172	1,173	1,173	1,173	1,173	1,184
0,6	1,228	1,240	1,240	1,241	1,240	1,240	1,247

O erro máximo percentual relativo a cada uma das metodologias é apresentado na Tabela 3.47.

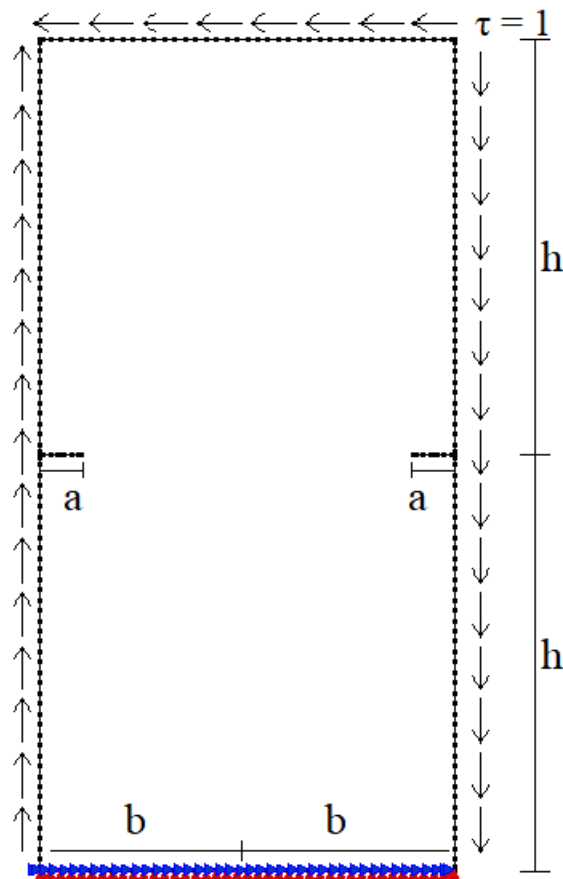
**Tabela 3.47:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita à tração: erro máximo obtido para  $K_I$

Erro máximo obtido para $K_I$			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
2,08%	0,89%	1,06%	1,05%

A Tabela 3.47 mostra que os resultados de  $K_I$  para as duas trincas de superfície presentes na placa retangular, sujeita à tração, obtidos com o método da Integral J são mais confiáveis e apresentam erro percentual menor do que aqueles obtidos com o método da Correlação de Deslocamentos. Limitando a análise apenas às três metodologias de integração da Integral J, a regra dos trapézios é a metodologia que fornece os resultados mais próximos da referência, com erro percentual máximo menor que 1%.

### 3.1.3.6 Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento

O sexto exemplo é uma placa retangular, com duas trincas de superfície, sujeita a carregamento de cisalhamento com magnitude igual a 1 ( $\tau = 1$ ). Nesse exemplo, portanto, as trincas estão sujeitas a modo II puro de fratura. A placa possui largura  $2b$  igual a 1, altura  $2h$  igual a 2 e duas trincas de comprimento  $a$ , o qual varia com diferentes razões  $a/b$ . A malha inicial é composta por 128 elementos, sendo 20 elementos na largura, 40 elementos na altura e 2 elementos por face da trinca de tamanho  $a = 0,2b$ . Com o aumento de  $a$ , aumenta-se também um elemento por face de cada trinca, a fim de manter os elementos da fissura com comprimento constante. As dimensões da placa, bem como a discretização citada, estão apresentadas na Figura 3.20.



**Figura 3.20:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: discretização e condições de contorno

O fator de intensidade de tensão de modo II é definido em Tada et al. (2000), por meio da formulação:

$$K_{II} = \tau \sqrt{\pi a} F \quad (3.46)$$

em que  $F$  é dado por:

$$F = \frac{1,122 - 0,561 \left(\frac{a}{b}\right) - 0,205 \left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0,471 \left(\frac{a}{b}\right)^3 - 0,190 \left(\frac{a}{b}\right)^4}{\sqrt{1 - \frac{a}{b}}} \quad (3.47)$$

Devido à simetria da placa, os valores de  $K_{II}$  são os mesmos nas duas trincas. Por isso, os resultados são apresentados apenas uma vez. Na Tabela 3.48, estão os resultados normalizados de  $K_{II}$  obtidos por meio do método da Correlação de Deslocamentos, bem como os resultados de referência, obtidos com a equação (3.46).



**Tabela 3.48:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela correlação de deslocamentos

$K_{II}$ normalizado		
$a/b$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	1,124	1,124
0,3	1,148	1,131
0,4	1,174	1,149
0,5	1,214	1,184
0,6	1,282	1,247

A Tabela 3.49 traz os resultados para o FIT de modo II obtidos com a avaliação da Integral J por meio da regra dos trapézios.

**Tabela 3.49:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_{II}$ normalizado							
$a/b$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,641	0,937	0,993	1,022	1,040	1,073	1,124
0,3	0,612	0,930	0,991	1,023	1,042	1,078	1,131
0,4	0,609	0,939	1,003	1,036	1,057	1,095	1,149
0,5	0,624	0,967	1,033	1,068	1,089	1,129	1,184
0,6	0,661	1,020	1,090	1,126	1,149	1,190	1,247

A Tabela 3.50 apresenta os resultados obtidos com a Integral J, com caminho de integração composto pelos pontos de Gauss.

**Tabela 3.50:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_{II}$ normalizado							
$a/b$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	0,986	1,111	1,117	1,117	1,117	1,117	1,124
0,3	0,991	1,120	1,126	1,127	1,127	1,127	1,131
0,4	1,005	1,139	1,145	1,145	1,145	1,145	1,149
0,5	1,035	1,175	1,182	1,182	1,182	1,182	1,184
0,6	1,090	1,239	1,246	1,246	1,246	1,246	1,247

Por fim, na Tabela 3.51, são apresentados os resultados obtidos com a terceira metodologia de integração da Integral J.

**Tabela 3.51:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: fator de intensidade de tensão de modo II ( $K_{II}$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_{II}$ normalizado							
$b/a$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	1,131	1,119	1,118	1,117	1,117	1,117	1,124
0,3	1,142	1,128	1,127	1,127	1,127	1,127	1,131
0,4	1,162	1,147	1,146	1,145	1,145	1,145	1,149
0,5	1,199	1,184	1,182	1,182	1,182	1,182	1,184
0,6	1,265	1,249	1,247	1,246	1,246	1,246	1,247

Após a comparação dos resultados fornecidos pelas 4 metodologias e a referência, obtida pela equação (3.46), calcula-se o erro máximo percentual entre o resultado obtido e o valor esperado, que é apresentado na Tabela 3.52.

**Tabela 3.52:** Placa retangular com duas trincas de superfície, sujeita a cisalhamento: erro máximo obtido para  $K_{II}$

Erro máximo obtido para $K_{II}$			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
2,77%	4,73%	0,59%	0,59%

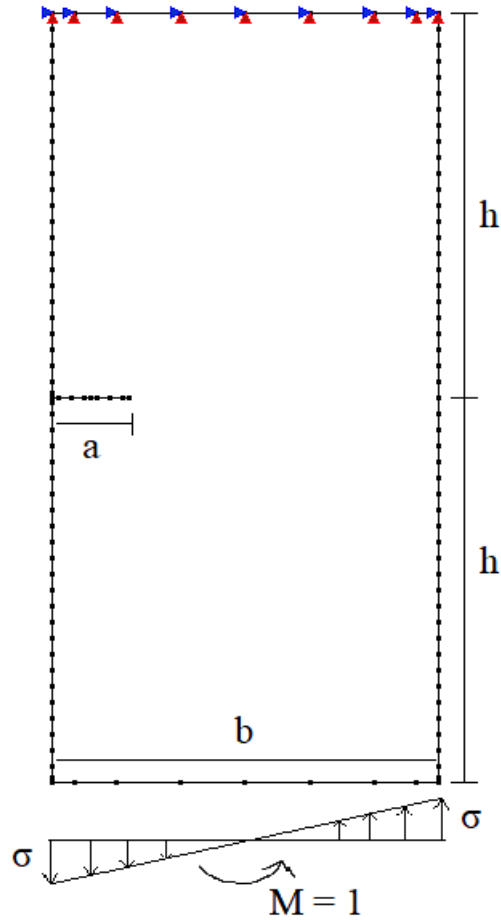
Conforme Tabela 3.52, a Integral J fornece resultados mais confiáveis para o fator de intensidade de tensão de modo II, se integrada com base nos pontos de integração de Gauss ou se o caminho de integração for subdivido em elementos quadráticos. Isso porque, por meio da integração pela regra dos trapézios, o método da Integral J retorna um erro maior inclusive do que o obtido com a correlação de deslocamentos. Isso se deve ao fato de a regra dos trapézios não conseguir representar de maneira precisa a variação do campo elástico em modo II, conforme observado por Portela et al. (1992b).

Por meio da Tabela 3.48, é possível perceber que o método da Correlação de Deslocamentos fornece resultados ótimos para trincas menores, porém o método perde precisão com o aumento da trinca. O inverso ocorre com os dois últimos métodos de integração da Integral J. Apesar de ambos os métodos serem estáveis e apresentarem bons resultados para os diferentes comprimentos da trinca, as Tabelas 3.50 e 3.51 mostram que os valores se aproximam mais da referência para trincas maiores.

### 3.1.3.7 Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão

No sétimo exemplo, tem-se uma placa retangular com uma trinca de superfície, sujeita a um momento fletor unitário. A placa possui largura  $b$  igual a 1, comprimento  $2h$  igual a 2 e trinca com comprimento  $a$ , que pode assumir 5 valores diferentes, variando com a relação  $a/b$ . A placa é inicialmente discretizada com 58 elementos, sendo 3 elementos na largura  $b$ , 12 elementos no comprimento  $h$  e 2 elementos quadráticos e descontínuos por face da trinca, cujo comprimento  $a$  é igual a  $0,2b$ . Com o aumento de  $a$ , aumenta-se também 1 elemento por face da trinca, de forma a manter os elementos pertencentes

à trinca com comprimento constante. A discretização, as dimensões e as condições de contorno são apresentadas na Figura 3.21.



**Figura 3.21:** Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: discretização e condições de contorno

Como a placa está sujeita a carregamento de tração, provocado por um momento unitário, a trinca apresenta modo I de fratura. O fator de intensidade de tensão de modo I é encontrado em Tada et al. (2000) e é apresentado na equação:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F \quad (3.48)$$

em que  $\sigma$ :

$$\sigma = \frac{6M}{b^2} \quad (3.49)$$

e  $F$  é dado por:

$$F = 1,122 - 1,40 \left(\frac{a}{b}\right) + 7,33 \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 13,08 \left(\frac{a}{b}\right)^3 + 14,0 \left(\frac{a}{b}\right)^4 \quad (3.50)$$

A equação (3.48) fornece os resultados de referência de  $K_I$ . A seguir, na Tabela 3.53, estão apresentados tais resultados, como também os resultados obtidos com o método da Correlação de Deslocamentos.

**Tabela 3.53:** Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos

$K_I$ normalizado		
$a/b$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	6,791	6,318
0,3	7,380	6,732
0,4	8,408	7,536
0,5	10,149	8,967
0,6	13,241	11,460

Na Tabela 3.54 constam os resultados obtidos com o primeiro método de apuração da Integral J: a regra dos trapézios.

**Tabela 3.54:** Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_I$ normalizado							
$a/b$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	6,929	6,402	6,389	6,385	6,383	6,380	6,318
0,3	7,283	6,770	6,774	6,778	6,780	6,784	6,732
0,4	8,123	7,575	7,587	7,595	7,600	7,607	7,536
0,5	9,638	9,002	9,020	9,030	9,035	9,044	8,967
0,6	12,345	11,539	11,562	11,574	11,580	11,588	11,460

Já os resultados obtidos com a divisão de pontos baseada nos pontos de integração de Gauss estão apresentados na Tabela 3.55.

**Tabela 3.55:** Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_I$ normalizado							
$a/b$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	7,097	6,411	6,376	6,375	6,375	6,375	6,318
0,3	7,563	6,824	6,786	6,786	6,786	6,786	6,732
0,4	8,490	7,654	7,612	7,611	7,611	7,611	7,536
0,5	10,100	9,098	9,048	9,047	9,047	9,047	8,967
0,6	12,942	11,653	11,589	11,588	11,588	11,588	11,460

Os resultados obtidos pela Integral J, cujo caminho de integração é dividido em elementos quadráticos, são apresentados na Tabela 3.56.

**Tabela 3.56:** Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_I$ normalizado							
$b/a$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	6,306	6,370	6,376	6,376	6,376	6,375	6,318
0,3	6,710	6,780	6,786	6,787	6,786	6,786	6,732
0,4	7,523	7,604	7,611	7,612	7,612	7,611	7,536
0,5	8,938	9,039	9,048	9,048	9,048	9,047	8,967
0,6	11,442	11,576	11,588	11,589	11,589	11,588	11,46

Depois de analisados os resultados apresentados nas Tabelas 3.53, 3.54, 3.55 e 3.56, calcula-se o erro máximo percentual obtido com cada uma das formulações. Os resultados estão apresentados na Tabela 3.57.

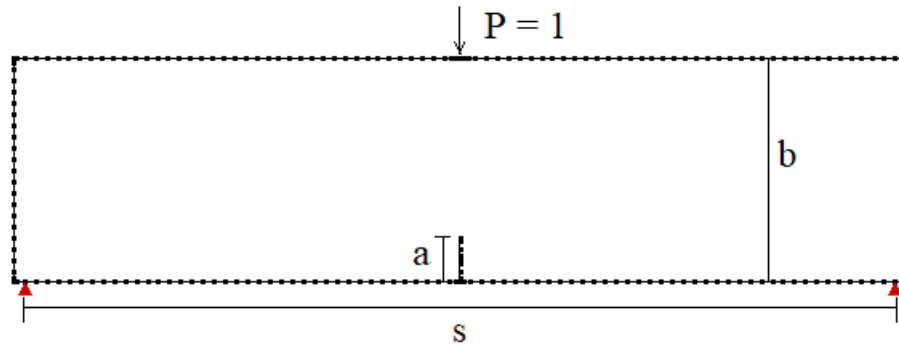
**Tabela 3.57:** Placa retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão: erro máximo obtido para  $K_I$

Erro máximo obtido para $K_I$			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
15,54%	1,12%	1,11%	1,12%

A Tabela 3.57 torna evidente a superioridade da Integral J na análise do fator de intensidade de tensão de modo I de placa sujeita à flexão. O erro apresentado pelo método da Correlação de Deslocamentos é quase 14 vezes maior que o erro apresentado pelos métodos de integração da Integral J. Além disso, fica claro também a similaridade entre as formas de avaliação da Integral J na análise de FIT de modo I, uma vez que as três metodologias de integração apresentam praticamente o mesmo erro máximo percentual.

### 3.1.3.8 Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos

Por fim, o oitavo exemplo apresenta uma viga de seção retangular, com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos. A placa possui dimensões  $s = 4$  e  $b = 1$ , de forma a manter a relação  $s/b$  igual a 4. Além disso, possui uma trinca inicial de comprimento  $a = 0,2b$ . A placa está sujeita a uma força unitária, aplicada na metade do comprimento  $s$ . A malha de contorno inicialmente utilizada é composta por 105 elementos, sendo 40 elementos no comprimento  $s$ , 10 elementos na altura  $b$ , 1 elemento para aplicação da carga e 2 elementos por face da trinca inicial. Conforme a trinca cresce, aumenta-se 1 elemento por face, de forma a manter o comprimento do elemento constante. A discretização da malha, as dimensões e as condições de contorno são apresentadas na Figura 3.22.



**Figura 3.22:** Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: discretização e condições de contorno

Uma vez que a trinca e a carga estão alinhadas, é provocado apenas modo I de fratura na ponta da fissura. Dessa forma, os resultados estão apresentados em função de  $K_I$ . Os valores de referência são obtidos por Tada et al. (2000), conforme equação:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F \quad (3.51)$$

em que  $\sigma$  é:

$$\sigma = \frac{6Ps}{4b^2} \quad (3.52)$$

e  $F$ , para  $s/b = 4$ , é dado por:

$$F = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1,99 - \left(\frac{a}{b}\right) \left(1 - \frac{a}{b}\right) \left[2,15 - 3,93\frac{a}{b} + 2,7\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]}{\left(1 + 2\frac{a}{b}\right) \left(1 - \frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad (3.53)$$

Após normalização, realizada pela equação (3.39), são apresentados os resultados fornecidos pelo método da Correlação de Deslocamentos e os valores de referência, obtidos com a equação (3.51), na Tabela 3.58.



**Tabela 3.58:** Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela correlação de deslocamentos

$K_I$ normalizado		
$a/b$	Correlação de Deslocamentos	Referência
0,2	6,077	5,781
0,3	6,577	6,111
0,4	7,522	6,895
0,5	9,164	8,285
0,6	12,108	10,714

Os resultados obtidos pela integral J, integrada pela regra dos trapézios, estão na Tabela 3.59.

**Tabela 3.59:** Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (regra dos trapézios)

$K_I$ normalizado							
$a/b$	Pontos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	6,189	5,715	5,703	5,699	5,697	5,694	5,781
0,3	6,512	6,044	6,044	6,046	6,047	6,049	6,111
0,4	7,310	6,802	6,809	6,814	6,818	6,823	6,895
0,5	8,759	8,164	8,177	8,185	8,189	8,197	8,285
0,6	11,350	10,592	10,611	10,622	10,628	10,637	10,714

Os resultados obtidos pela segunda metodologia de integração da integral J, pontos de Gauss, estão apresentados na Tabela 3.60.

**Tabela 3.60:** Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (pontos de Gauss)

$K_I$ normalizado							
$a/b$	Pontos de Gauss						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	6,333	5,722	5,690	5,690	5,690	5,690	5,781
0,3	6,740	6,084	6,050	6,050	6,050	6,050	6,111
0,4	7,610	6,865	6,827	6,826	6,826	6,826	6,895
0,5	9,149	8,247	8,201	8,201	8,201	8,201	8,285
0,6	11,877	10,701	10,642	10,641	10,641	10,641	10,714

Por fim, são apresentados, na Tabela 3.61, os resultados obtidos com a integral J, cujo contorno circular é discretizado em elementos quadráticos.

**Tabela 3.61:** Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ ) calculado pela integral J (contorno discretizado em elementos)

$K_I$ normalizado							
$b/a$	Elementos						Referência
	4	6	8	10	12	20	
0,2	5,628	5,685	5,690	5,691	5,690	5,690	5,781
0,3	5,982	6,045	6,050	6,050	6,050	6,050	6,111
0,4	6,748	6,820	6,826	6,827	6,827	6,826	6,895
0,5	8,103	8,193	8,201	8,202	8,202	8,201	8,285
0,6	10,509	10,631	10,642	10,643	10,642	10,642	10,714

Após análise dos resultados, o erro máximo obtido com cada uma das 4 formulações é apresentado na Tabela 3.62.

**Tabela 3.62:** Viga de seção retangular com trinca de superfície, sujeita à flexão em três pontos: erro máximo obtido para  $K_I$

Erro máximo obtido para $K_I$			
Correlação de Deslocamentos	Regra dos Trapézios	Pontos de Integração de Gauss	Contorno dividido em elementos
13,01%	1,49%	1,57%	1,57%

A Tabela 3.62 evidencia a diferença entre os métodos da Integral J e da Correlação de Deslocamentos. A Integral J consegue fornecer resultados muito mais confiáveis e próximos da referência, apresentando um erro percentual muito menor do que o método da Correlação de Deslocamentos. Além disso, ao analisar as metodologias de integração, percebe-se a similaridade dos três métodos na análise de  $K_I$ , apresentando entre si erros percentuais muito próximos.

### 3.1.3.9 Conclusões acerca dos testes realizados para o cálculo do FIT

Com base nos resultados apresentados para os exemplos, fica claro a superioridade do método da Integral J quando comparado com o método da Correlação de Deslocamentos. A diferença fica consideravelmente maior nos problemas envolvendo flexão. A Integral J fornece resultados próximos às referências, com erros percentuais menores que 5% para todos os exemplos apresentados.

Analisando especificamente as metodologias de avaliação da Integral J, todas as três formulações retornam valores próximos da referência e próximos entre si quando analisado o fator de intensidade de tensão de modo I. Isso demonstra uma boa estabilidade dos métodos de integração na análise de  $K_I$ . Porém, o mesmo não ocorre na análise de  $K_{II}$ . A regra dos trapézios não consegue analisar de maneira tão precisa, quando comparado com as integrações numéricas envolvendo a quadratura de Gauss, o FIT de modo II e, por isso, apresenta valores ligeiramente destoantes das outras metodologias. Dessa forma, para que modos mistos, compostos por modos I e II, sejam analisados de maneira correta, deve-se utilizar a Integral J, integrada a partir dos pontos de integração de Gauss ou com

caminho de integração dividido em elementos.

Por essas razões apresentadas, o método da Integral J é usado para a análise dos fatores de intensidade de tensão de modo I e II ao longo desse trabalho, sendo integrado pela metodologia que subdivide o contorno circular de integração em 20 elementos quadráticos. Cabe ressaltar, no entanto, que, considerando os testes realizados, tal subdivisão em elementos não seria necessária, bastando utilizar uma integração direta da envoltória por quadratura de Gauss.

## 3.2 Direção de Propagação

Após a determinação dos fatores de intensidade de tensão necessários numa análise de MFEL, define-se a direção de propagação da fissura. O critério da Máxima Tensão Circunferencial (MTC), o qual foi proposto por Erdogan e Sih (1963), propõe que a trinca irá crescer na direção da máxima tensão circunferencial presente na ponta da trinca, ou seja, na direção perpendicular à máxima tensão principal na vizinhança dessa região. Dessa forma, reescrevendo as componentes de tensão em coordenadas polares, considerando a origem na ponta da trinca (Figura 3.4), e sendo  $\theta = 0$  a direção tangencial à trinca nesse ponto, tem-se:

$$\sigma_{\theta\theta} = \frac{1}{\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right] \quad (3.54)$$

$$\sigma_{r\theta} = \frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ K_I \sin(\theta) + K_{II} [3 \cos(\theta) - 1] \right\} \quad (3.55)$$

A tensão circunferencial  $\sigma_{\theta\theta}$  será máxima ao redor da ponta da trinca no ponto onde a componente de cisalhamento  $\sigma_{r\theta}$  for nula. Dessa forma, igualando a equação (3.55) a 0 e realizando as manipulações matemáticas necessárias, apresentadas no Apêndice C, tem-se que o ângulo de propagação é dado por:

$$\theta = 2 \arctan \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\frac{K_I^2}{K_{II}^2} + 8} \right] \right\} \quad (3.56)$$

O fator de intensidade de tensão de modo I,  $K_I$ , sempre terá sinal positivo, porém  $K_{II}$  pode assumir valores positivos ou negativos. A Integral J fornece apenas o módulo

de  $K_{II}$ , de forma que torna-se necessário avaliar o deslocamento relativo de deslizamento (CSD) entre as faces da fissura e, assim, definir o sinal de  $K_{II}$ . O CSD, apresentado na Figura 3.6, é definido como a diferença entre o deslocamento na direção  $x_1$  de pontos inicialmente coincidentes, pertencentes a face superior e inferior da trinca, de forma que:

$$CSD = u_1^{\text{superior}} - u_1^{\text{inferior}} \quad (3.57)$$

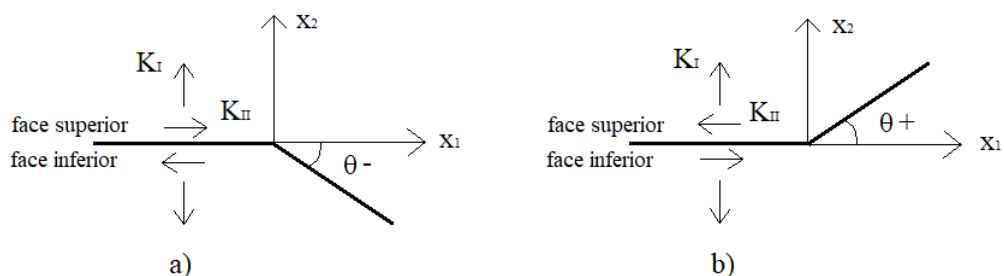
Dessa forma, tem-se que se:

$$\begin{aligned} u_1^{\text{superior}} > u_1^{\text{inferior}} &\rightarrow \text{CSD positivo} \rightarrow K_{II} \text{ positivo} \\ u_1^{\text{superior}} < u_1^{\text{inferior}} &\rightarrow \text{CSD negativo} \rightarrow K_{II} \text{ negativo} \end{aligned}$$

O sinal de  $K_{II}$  é, portanto, definido pelo sinal do deslocamento relativo de deslizamento. Assim, torna-se possível aplicar a equação que define o ângulo de propagação da trinca, de forma que:

$$\theta = \begin{cases} 0 & \rightarrow K_{II} = 0 \\ 2 \arctan \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{K_I}{K_{II}} + \sqrt{\frac{K_I^2}{K_{II}^2} + 8} \right] \right\} & \rightarrow K_{II} < 0 \\ 2 \arctan \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{K_I}{K_{II}} - \sqrt{\frac{K_I^2}{K_{II}^2} + 8} \right] \right\} & \rightarrow K_{II} > 0 \end{cases} \quad (3.58)$$

O sinal de  $K_{II}$  interfere diretamente no sinal do ângulo  $\theta$ , o qual assume sinal positivo no sentido anti-horário. Na Figura 3.23 estão apresentadas as duas configurações possíveis para as grandezas relacionadas a trinca, bem como o ângulo de propagação.



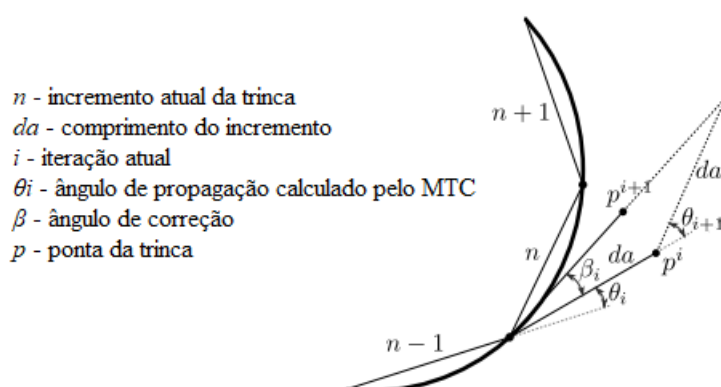
**Figura 3.23:** Representação dos fatores de intensidade de tensão de modo I e II, sendo a) ambos positivos, b)  $K_I$  positivo e  $K_{II}$  negativo

Como visto na Figura 3.23, se  $K_{II}$  for positivo,  $\theta$  será negativo, sendo o inverso também verdadeiro.

O ângulo da direção de propagação da trinca é então definido pela equação (3.58). Porém, o MTC não leva em consideração o comprimento do incremento que será estendido à trinca, o que geraria a perda de unicidade do caminho de propagação, isto é, a fissura não percorreria o mesmo caminho caso, na mesma análise, fossem usados incrementos de trinca menores. Por isso, é proposto por Portela (1993), um ângulo de correção  $\beta^i$ , o qual tem o intuito de corrigir a direção tangencial do caminho da fissura e manter a sua unicidade. Inicialmente, calcula-se o ângulo  $\theta_0$  pelo critério da Máxima Tensão Circunferencial, através da equação (3.58). A partir daí, a determinação de  $\beta^i$  ocorre de maneira iterativa, seguindo os seguintes passos:

- propaga-se a trinca com um incremento  $\Delta a$ , na direção  $\theta_{i-1}$ ;
- os fatores de intensidade de tensão são calculados para a nova ponta, ao fim do incremento, e um novo ângulo ( $\theta_i$ ) é obtido pelo MTC (equação (3.58));
- o ângulo de correção é calculado, de forma que  $\beta^i = \theta_i/2$ ;
- atualiza-se o ângulo  $\theta_i$ , tal que:  $\theta_i = \theta_{i-1} + \beta^i$ ;
- esses passos são repetidos enquanto  $|\beta^i| < |\beta^{i-1}|$ .

A Figura 3.24 ilustra o passo a passo apresentado.



**Figura 3.24:** Determinação da direção de propagação da trinca (Adaptado de de Santana (2015)).

Com isso, ao fim do processo iterativo, fica definida a direção de propagação da fissura.

O fluxograma relativo ao algoritmo de determinação do ângulo de propagação da trinca está na Figura B.2 no Apêndice B.

## Capítulo 4

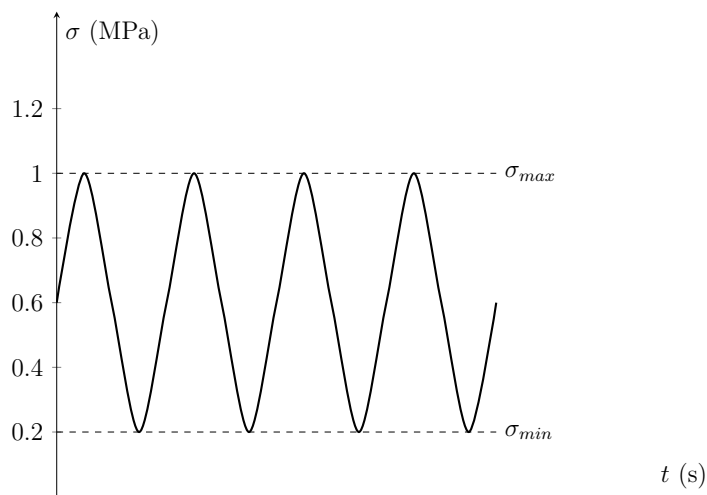
# Fadiga

A fadiga representa um processo de dano e falha devido a carregamentos cíclicos. Segundo Dowling (2013), a falha por fadiga pode ocorrer abaixo do limite de resistência do material. Isso porque, a cada ciclo de variação da carga, vão sendo acumulados danos no componente, o que leva à falha. Segundo Callister Júnior (2002), a fadiga é a principal causa de falhas, ocasionando cerca de 90% das falhas em componentes mecânicos. Isso representa um sério problema social e para a indústria, de acordo com Moreira (2018), uma vez que gera prejuízos financeiros e pode colocar em risco vidas humanas. Por isso, o estudo de fadiga é de extrema importância.

A trinca por fadiga se desenvolve em três estágios. O primeiro estágio se refere à nucleação ou iniciação da trinca, o segundo se refere ao crescimento e propagação da fissura e o terceiro representa a fratura frágil do componente, momento em que a trinca atinge um comprimento crítico, não suportando a carga aplicada e se rompe abruptamente. Este último estágio está associado à situação na qual o FIT atingiu o valor crítico da tenacidade à fratura do material. A análise de fadiga pela abordagem da Mecânica da Fratura Elástica Linear parte do pressuposto de que já existem trincas no componente e, portanto, não é possível mensurar o primeiro estágio, referente à nucleação. A vida útil contabilizada é, portanto, referente aos estágios de propagação e fratura. Em termos práticos, tal limitação não é preponderante, uma vez que as trincas são identificáveis por métodos de inspeção apenas quando já possuem um tamanho macroscópico (1 a 2 mm).



Os carregamentos cíclicos responsáveis pelo processo de fadiga podem apresentar amplitude constante ou amplitude variável. O carregamento cíclico com amplitude constante é aquele que mantém suas tensões máxima e mínima constantes ao longo de todo o tempo de aplicação. A Figura 4.1 ilustra um carregamento cíclico de amplitude constante.



**Figura 4.1:** Carregamento cíclico de amplitude constante

Conforme ilustrado na Figura 4.1, o carregamento cíclico de amplitude constante possui picos e vales com valores fixos, os quais definem a tensão máxima e a tensão mínima, respectivamente. Para a análise de fadiga de componentes sujeitos a carregamentos cíclicos, torna-se necessário definir o carregamento. A definição de um carregamento cíclico de amplitude constante é simples e basta fornecer a tensão máxima e uma das duas grandezas: tensão mínima ou razão de tensões ( $R$ ), a qual é dada por:

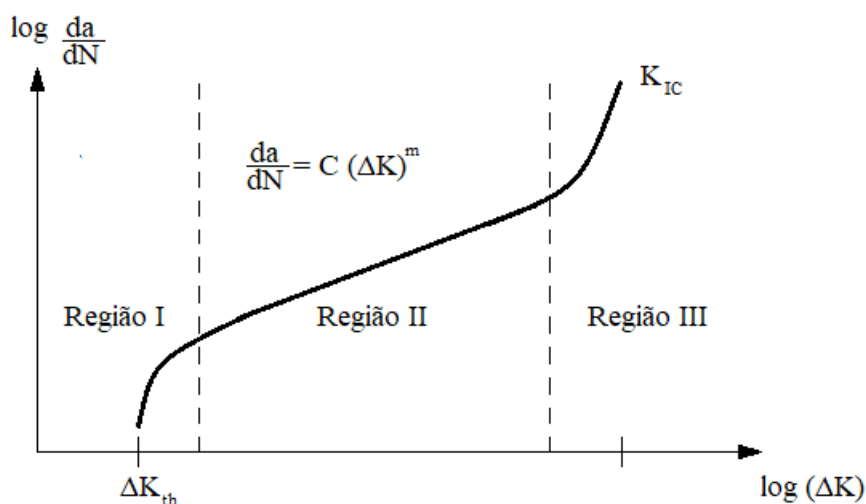
$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} = \frac{K_{min}}{K_{max}} \quad (4.1)$$

Caso seja fornecido a tensão máxima e a tensão mínima, pode-se encontrar a razão de tensões  $R$  de maneira simples, pela equação (4.1). Após definir o carregamento, é possível analisar o comportamento à fadiga do componente.

## 4.1 Taxa de Crescimento de Trincas por Fadiga

Segundo, Dowling (2013), a taxa de crescimento da trinca por fadiga é dada pela relação  $\frac{da}{dN}$ , que corresponde à inclinação de uma curva  $a$  x  $N$ , em que  $a$  é o comprimento

da fissura e  $N$  o número de ciclos. O comportamento da trinca por fadiga descrito pela abordagem da mecânica da fratura elástica linear é representado em um gráfico  $\frac{da}{dN} \times \Delta K$  em escala log-log, onde  $\Delta K$  refere-se à variação do fator de intensidade de tensão durante o carregamento cíclico, por ora assumido como de amplitude constante. Um gráfico típico  $\frac{da}{dN} \times \Delta K$  é apresentado na Figura 4.2.



**Figura 4.2:** Gráfico  $\frac{da}{dN} \times \Delta K$  em escala log-log

É possível ver na Figura 4.2 que há três regiões distintas no gráfico. A região I é governada pelo parâmetro  $\Delta K_{th}$ , o qual representa o limiar à fadiga, de forma que se o fator de intensidade de tensão calculado estiver abaixo desse valor a trinca não se propaga a priori. A região II representa a maior parte da vida útil do componente e é descrita pela chamada Equação de Paris, proposta por Paris et al. (1961), a ser detalhada mais adiante. Com a evolução da trinca, atinge-se a região III, que é governada pelo parâmetro  $K_{Ic}$ , denominado tenacidade à fratura, o qual representa o valor crítico do fator de intensidade de tensões. Segundo Dowling (2013) e Lee et al. (2005), esse parâmetro é uma propriedade do material e representa a resistência à falha do componente devido a uma fissura, de forma que, se  $K$  ultrapassar esse valor, o componente pode sofrer a ruptura final de forma frágil.

Ao observar o gráfico proposto na Figura 4.2, percebe-se que o comprimento da fissura varia com o número de ciclos em valores de  $\Delta K$  abaixo da tenacidade à fratura. Dessa forma, é possível que o crescimento da trinca ocorra antes do fator de intensidade de tensão atingir o parâmetro  $K_{Ic}$ , em um fenômeno conhecido como propagação subcrítica

de fissuras.

Portanto, o estudo de fadiga, usando os conceitos da mecânica da fratura, é baseado no fenômeno de propagação subcrítica de fissuras, com base na lei de crescimento proposta por Paris e co-autores, de forma que seja possível analisar o comportamento do crescimento da trinca e estimar a vida útil da estrutura.

#### 4.1.1 Critérios de Propagação da Trinca por Fadiga

Curvas como a apresentada na Figura 4.2 são usualmente obtidas em laboratório para um material específico, um dado valor de  $R$  do carregamento cíclico e para modo I puro de sollicitação. Dessa forma, em análises de modo misto de fratura, é necessário definir um fator de intensidade de tensão equivalente de modo I ( $K_{Ieq}$ ), conforme Broek (1986), o qual é dado pela combinação de  $K_I$  e  $K_{II}$ , considerando também o ângulo de propagação. O  $K_{Ieq}$  pode ser obtido pelo critério da máxima tensão circunferencial, com base na componente  $\sigma_{\theta\theta}$ , de forma que:

$$\sigma_{\theta\theta} \cdot \sqrt{2\pi r} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right] \quad (4.2)$$

em que  $\theta$  é o ângulo de propagação da trinca e  $K_I$  e  $K_{II}$  são os FIT de modo I e modo II obtidos na análise. O lado esquerdo da equação (4.2) apresenta a mesma unidade dos fatores de intensidade de tensão e é, portanto, definido como  $K_{Ieq}$ , uma vez que pelo critério de propagação da máxima tensão circunferencial, descrito na seção 3.2, a trinca se direcionaria para uma direção de modo I puro, na qual,  $\sigma_{\theta\theta}$  corresponderia a  $\sigma_{22}$  ( $\theta = 0$ ). O ângulo  $\theta$ , bem como as componentes de tensão, estão ilustrados na Figura 3.4. Dessa forma, o fator de intensidade de tensão equivalente de modo I fica definido como:

$$K_{Ieq} = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[ K_I \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) - \frac{3}{2} K_{II} \sin(\theta) \right] \quad (4.3)$$

Sabendo que:

$$\sin(\theta) = 2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$K_{Ieq}$  pode também ser reescrito como:

$$K_{Ieq} = K_I \cos^3\left(\frac{\theta}{2}\right) - 3K_{II} \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (4.4)$$

O FIT equivalente de modo I é um parâmetro importante na análise de fadiga de modo misto, pois ele irá definir se a trinca analisada se propaga e como ocorre essa propagação. Desta forma, basta substituir  $\Delta K$  por  $\Delta K_{Ieq}$  nas discussões apresentadas anteriormente, onde:

$$\Delta K_{Ieq} = K_{Ieq}^{max} - K_{Ieq}^{min} = K_{Ieq}^{max}(1 - R) \quad (4.5)$$

sendo  $K_{Ieq}^{max}$  e  $K_{Ieq}^{min}$  os fatores de intensidade de tensão associados a  $\sigma_{max}$  e  $\sigma_{min}$ , respectivamente.

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta K_{Ieq} < \Delta K_{th} &\rightarrow \text{a trinca não se propaga} \\ \Delta K_{th} \leq \Delta K_{Ieq} < K_{IC} &\rightarrow \text{a trinca se propaga de maneira estável} \\ K_{Ieq}^{max} > K_{IC} &\rightarrow \text{ruptura abrupta} \end{aligned}$$

Portanto, o parâmetro  $K_{Ieq}$ , definido nas equações (4.3) e (4.4), determina se a trinca analisada irá se propagar e se essa propagação ocorrerá de maneira estável e subcrítica, seguindo a Equação de Paris, ou de maneira instável, levando o componente à ruptura final.

Cabe ressaltar aqui que esta metodologia para definição de  $K_{Ieq}$ , baseada na tensão circunferencial máxima (Erdogan e Sih, 1963) é a mais usada em problemas bidimensionais e a que se adapta de forma mais adequada à maioria dos experimentos. De fato, ao aplicá-la, observa-se a tendência da trinca que se propaga por fadiga em assumir uma direção que conduza a configuração a modo I puro. Entretanto, em alguns casos, outras expressões para se definir  $\Delta K_{Ieq}$  mostram-se necessárias como, por exemplo, em Tanaka (1974).

### 4.1.2 Propagação Subcrítica de Fissuras

Considerando, portanto, que a variação do fator de intensidade de tensão equivalente de modo I,  $\Delta K_{Ieq}$  encontra-se na região II do gráfico apresentado na Figura 4.2, a trinca irá se propagar de maneira subcrítica. A região II do gráfico é governada pela Equação de Paris, proposta por Paris et al. (1961), a qual relaciona a taxa de crescimento da trinca com o número de ciclos, da seguinte maneira:

$$\frac{da}{dN} = C (\Delta K_{Ieq})^m \quad (4.6)$$

em que  $C$  e  $m$  são parâmetros do material e  $\Delta K_{Ieq}$  é determinado pela equação (4.5). Em particular, o parâmetro  $C$  depende também da razão  $R$ .

Segundo Anderson (2005), Paris mostrou, com sua lei de crescimento de trinca, que a abordagem da mecânica da fratura é uma ferramenta importante ao caracterizar o crescimento de trincas por fadiga. Além disso, de acordo com Schettini (2017), a lei de crescimento de trinca por fadiga proposta por Paris é a mais simples e mais usada para descrever tal comportamento.

A dependência da constante  $C$  em relação ao parâmetro  $R$  do carregamento cíclico se traduz da seguinte maneira: aumentos na razão  $R$ , ocasionam maiores taxas de crescimento da trinca para um mesmo  $\Delta K_{Ieq}$ . Por isso, torna-se necessário avaliar a influência de  $R \neq 0$  na propagação de fissuras. Uma das formulações mais disseminadas para caracterizar a influência de  $R$  na taxa de crescimento é a Equação de Walker, a qual usa a relação:

$$\overline{\Delta K_{Ieq}} = K_{Ieq}^{max}(1 - R)^\gamma = \frac{\Delta K_{Ieq}}{(1 - R)^{1-\gamma}} \quad (4.7)$$

em que  $\gamma$  é também uma propriedade do material e  $\overline{\Delta K_{Ieq}}$  é a variação do fator de intensidade de tensão equivalente para  $R = 0$ . Substituindo, portanto, a equação (4.7) na equação (4.6), tem-se:

$$\frac{da}{dN} = C_0 (\overline{\Delta K_{Ieq}})^m = C_0 \left[ \frac{\Delta K_{Ieq}}{(1 - R)^{1-\gamma}} \right]^m \quad (4.8)$$

em que  $C_0$  representa o valor da constante  $C$  para o caso  $R = 0$ , tratando-se, portanto, de uma propriedade exclusivamente do material. Após manipulações matemáticas,

$$\frac{da}{dN} = \frac{C_0}{(1 - R)^{m(1-\gamma)}} (\Delta K_{Ieq})^m \quad (4.9)$$

Portanto, a equação (4.9) representa uma modificação da Equação de Paris, com base na Equação de Walker, a fim de considerar o efeito da razão de tensões  $R$  diferente de zero na taxa de crescimento da trinca por fadiga.

### 4.1.3 Estimativa da Vida Útil

Para determinar a vida útil restante de um componente trincado sujeito à fadiga, é necessário integrar a equação (4.9), na forma de:

$$dN = \int_a^{a+\Delta a} \frac{da}{\frac{C_0}{(1-R)^{m(1-\gamma)}} (\Delta K_{Ieq}(a))^m} \quad (4.10)$$

O fator de intensidade de tensão depende, entre outras coisas, do comprimento da trinca. Observando que a variação do fator de intensidade de tensão equivalente  $\Delta K_{Ieq}(a)$  é uma função do comprimento da trinca  $a$ , torna-se necessário realizar a integração numérica da equação (4.10).

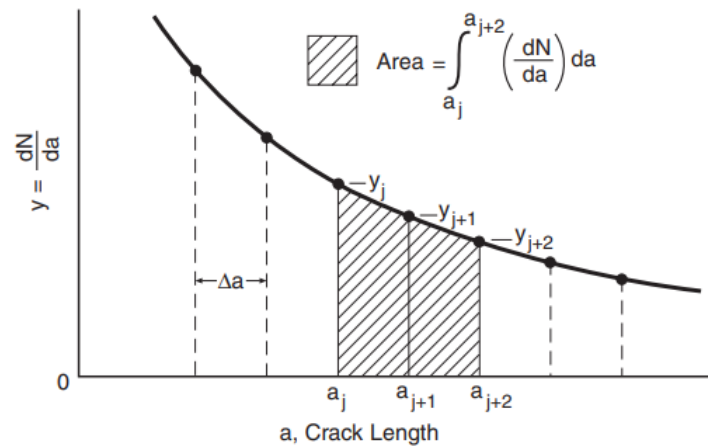
Primeiramente, é necessário determinar o incremento de propagação da trinca,  $\Delta a$ . Na implementação numérica, o usuário fornece um  $\Delta a$  inicial, um fator multiplicador, um  $\Delta a_{max}$  e o número de passos em que a trinca será propagada. O  $\Delta a$  inicial equivale, normalmente, a 10% do comprimento inicial da trinca, pois deve ser pequeno o suficiente para que seja capaz de capturar corretamente a contagem de ciclos no começo da propagação. Esse incremento é mantido nos dois primeiros passos de propagação. A cada dois passos, o  $\Delta a$  é atualizado, multiplicando-o por um fator predeterminado pelo usuário. Esse fator é normalmente igual a 1,10, de forma que o incremento aumente 10% a cada dois passos, não ultrapassando o  $\Delta a_{max}$  fornecido pelo usuário. Após a definição do incremento da trinca, a integração ocorre numericamente pela regra de Simpson, de forma que:

$$\int_{a_j}^{a_{j+2}} y da = \frac{\Delta a}{3} (y_j + 4y_{(j+1)} + y_{(j+2)}) \quad (4.11)$$

Onde, considerando a equação (4.10),

$$y_j = \frac{1}{\frac{C_0}{(1-R)^{m(1-\gamma)}} (\Delta K_{Ieq}(a_j))^m} \quad (4.12)$$

As variáveis da regra de Simpson são apresentadas na Figura 4.3.



**Figura 4.3:** Variáveis da regra de Simpson (Dowling, 2013).

Por meio da equação (4.11), calcula-se o número de ciclos necessários para que a trinca cresça o incremento de  $2\Delta a$ . O número de ciclos total é obtido pelo somatório do número de ciclos obtidos a cada 2 passos, de forma que:

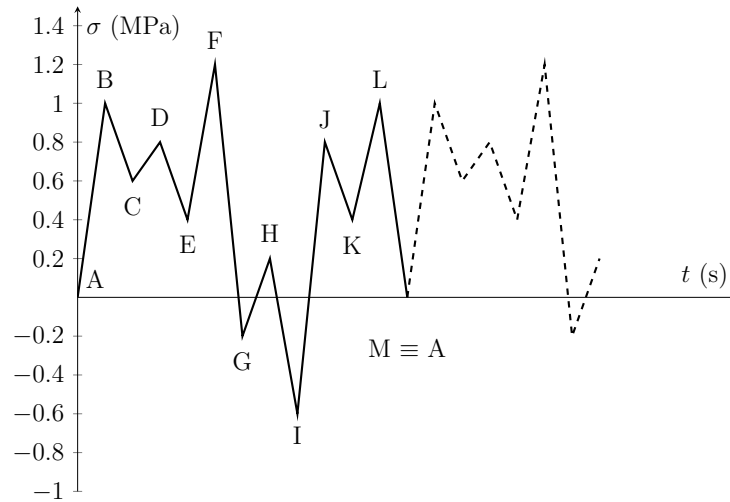
$$N_{total} = \sum_{i=1}^{\frac{n_p}{2}} N_i \quad (4.13)$$

em que  $N_{total}$  representa o número de ciclos total da análise,  $n_p$  é o número de passos fornecido previamente e  $N_i$  é o número de ciclos contabilizados a cada dois passos.

Com isso, é possível quantificar o tempo gasto para que a trinca inicial se propague e atinja o comprimento final, a ser determinado pela quantidade de passos na propagação. Os fluxogramas dos algoritmos para obtenção de  $\Delta a$  e para a propagação da trinca estão nas Figuras B.4 e B.5.

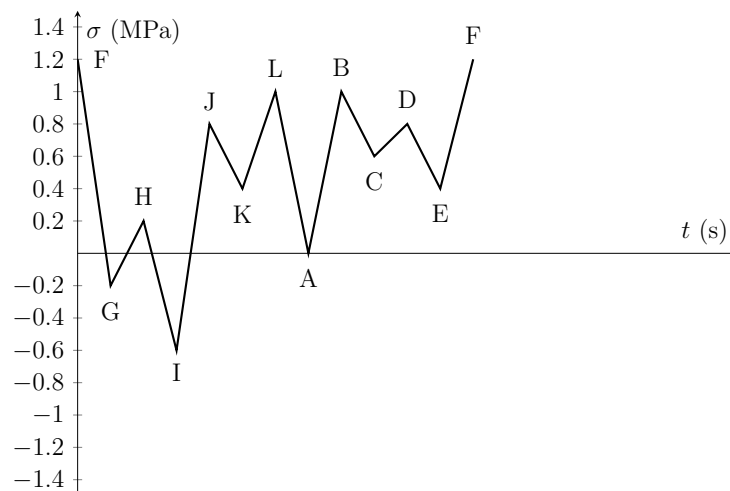
## 4.2 Carregamento Cíclico de Amplitude Variável

Carregamentos de amplitude variável possuem ondulações irregulares ao longo do tempo de aplicação. Nesse tipo de carregamento, não está claro qual a tensão máxima ou a tensão mínima no período de aplicação. A Figura 4.4 ilustra uma repetição de um carregamento cíclico de amplitude variável.



**Figura 4.4:** Carregamento cíclico com amplitude variável

Para analisar a fadiga em componentes sujeitos a carregamentos de amplitude variável é necessário transformar os ciclos irregulares em uma repetição de amplitude constante que geraria o mesmo efeito. Para isso, a técnica mais utilizada é chamada *Rainflow Cycle Counting*, a qual consiste em identificar os ciclos, definindo para cada ciclo  $\sigma_{max}$  e  $R$ , e quantificá-los numa dada repetição. Com esses resultados, pode-se então, fazer a transformação para um carregamento cíclico de amplitude constante e  $R = 0$ . Inicialmente, organiza-se o ciclo apresentado na Figura 4.4, de forma que o primeiro pico ou vale seja aquele com maior valor, alterando a representação gráfica conforme Figura 4.5.



**Figura 4.5:** Reorganização do carregamento cíclico com amplitude variável

Após a reorganização gráfica, inicia-se a contagem de ciclos. O método de contagem



de ciclos *rainflow* diz que um conjunto de pico-vale-pico (ou vale-pico-vale), identificado por  $i - i + 1 - i + 2$ , será considerado um ciclo quando:

$$|\sigma_{i+2} - \sigma_{i+1}| \geq |\sigma_{i+1} - \sigma_i| \quad (4.14)$$

Caso a equação (4.14) seja falsa, analisa-se o próximo conjunto de picos e vales, designado por  $i + 1 - i + 2 - i + 3$ . Caso a equação (4.14) seja verdadeira, retira-se o conjunto pico-vale-pico (ou vale-pico-vale) do carregamento, contabiliza-se um ciclo e são armazenados os valores de tensão máxima ( $\sigma_{max}$ ) e razão de tensões ( $R$ ). Com esses valores, obtém-se para esse ciclo a tensão equivalente para  $R = 0$ , conforme equação:

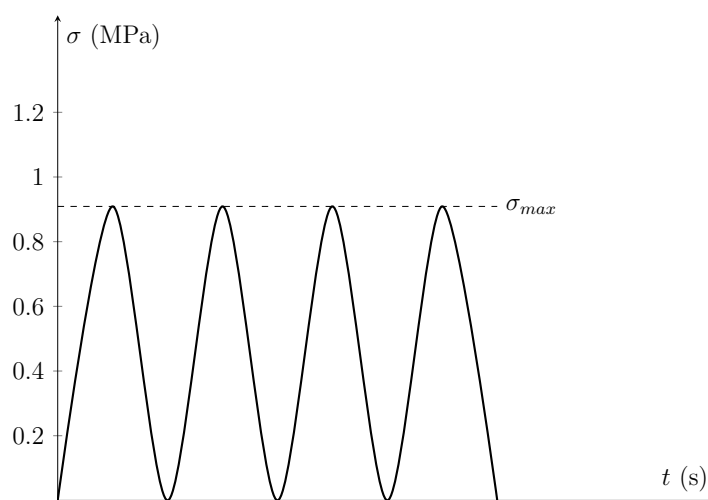
$$\overline{\Delta\sigma_j} = \sigma_{max}^j (1 - R_j)^\gamma \quad (4.15)$$

em que  $\overline{\Delta\sigma_j}$  é a tensão equivalente para  $R = 0$ ,  $\gamma$  é uma constante do material e  $j$  refere-se ao ciclo analisado. Após a contagem de todos os  $N_B$  ciclos, transforma-se o carregamento de amplitude variável em amplitude constante com  $R = 0$  por meio da equação:

$$\Delta\sigma_q = \left[ \frac{\sum_{j=1}^{N_B} (\overline{\Delta\sigma_j})^m}{N_B} \right]^{\frac{1}{m}} \quad (4.16)$$

em que  $\Delta\sigma_q$  é tensão máxima do carregamento equivalente de amplitude constante,  $N_B$  é o número total de ciclos e  $m$  é uma constante do material, presente na Equação de Paris. Dessa forma, o carregamento cíclico de amplitude variável é transformado em um carregamento cíclico de amplitude constante, com  $\sigma_{max} = \Delta\sigma_q$  e  $R = 0$ .

O fluxograma do algoritmo de contagem de ciclos está na Figura B.3 no Apêndice B. A contagem de ciclos do carregamento apresentado na Figura 4.4 pelo método *rainflow* e a sua posterior transformação em um ciclo equivalente de amplitude constante estão detalhadas no Apêndice D. Por fim, o carregamento cíclico de amplitude variável apresentado na Figura 4.4 é transformado no carregamento cíclico equivalente de amplitude constante apresentado na Figura 4.6.



**Figura 4.6:** Ciclo equivalente de amplitude constante

Com o ciclo correspondente de amplitude constante, torna-se possível analisar a fadiga do componente, fornecendo a tensão máxima e a tensão mínima ou razão de tensões, sendo as duas últimas iguais a zero.

## Capítulo 5

### Exemplos numéricos

Para a análise de fadiga bidimensional, os conceitos apresentados são aplicados e um código computacional é implementado. Esse programa é codificado na linguagem Fortran 95, compilado pelo *GNU Fortran Compiler* e escrito na IDE (*Integrated Development Environment*) gratuita do Code::Blocks (Code::Blocks, 2023). O fluxograma geral do programa computacional está na Figura B.6, no Apêndice B. Como saída do programa, além de uma série de arquivos de textos com os resultados de interesse – tais como distribuição de tensões e deformações, valores dos fatores de intensidade de tensões nas pontas das trincas, número de ciclos de carregamento transcorridos, todas essas informações a medida que as trincas avançam – são gerados arquivos XML específicos para visualização gráfica dos resultados no *software* INSANE (INSANE, 2023).

A fim de testar a confiabilidade e a aplicabilidade do código desenvolvido, são apresentados alguns exemplos nas seções a seguir. Em todos esses exemplos, são utilizados 3 termos polinomiais de expansão na integração singular, usando a metodologia de Gao (2006), e na integração regular são usados 20 pontos de Gauss. Considera-se estado plano de tensão (EPT) e a tensão em pontos do contorno é obtida diretamente pela solução da EIC hipersingular (equação (2.47)). O método de avaliação dos fatores de intensidade da tensão é a integral J, integrada por meio da divisão do contorno circular em 20 elementos quadráticos, e partindo do segundo nó do último elemento da trinca. A discretização do contorno é feita com elementos quadráticos, sendo eles semi-descontínuos nas quinas e

descontínuos nas trincas. Além disso, carregamentos cíclicos de amplitude variável são avaliados pelo método *Rainflow Cycle Counting*.

## 5.1 Placa retangular com trinca interna

O primeiro exemplo, apresentado em Andrade (2017), analisa uma placa retangular com uma trinca interna, sujeita a carregamento cíclico de modo I puro, com amplitude constante e  $R = 0$ . As propriedades do material são apresentadas na Tabela 5.1 a seguir.

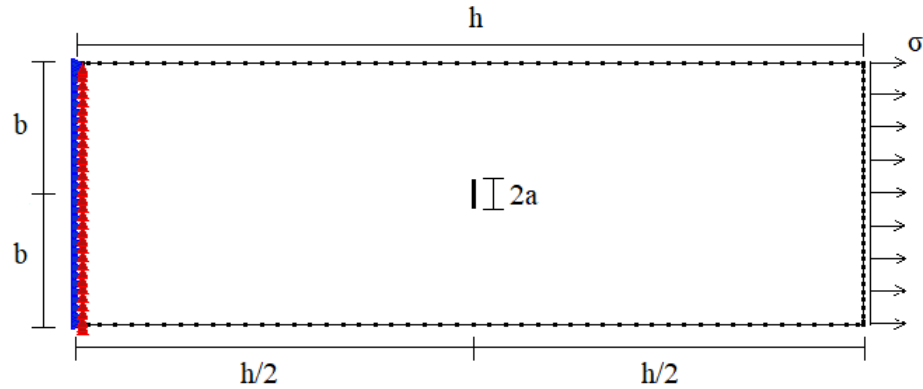
**Tabela 5.1:** Placa retangular com trinca interna: propriedades do material

Propriedades do material	
Propriedade	Valor
E	30000
$\nu$	0
$C_0$	$1,5 \cdot 10^{-8}$
m	2,25

A placa é discretizada inicialmente com 88 elementos, sendo 24 elementos na largura  $h$ , 16 elementos na altura  $b$  e 4 elementos em cada face da trinca central, com comprimento  $2a$ . Todas as grandezas, tanto de propriedade do material, quanto de dimensões, possuem unidades arbitrárias. As dimensões da placa estão na Tabela 5.2, enquanto a discretização e as condições de contorno são apresentadas na Figura 5.1.

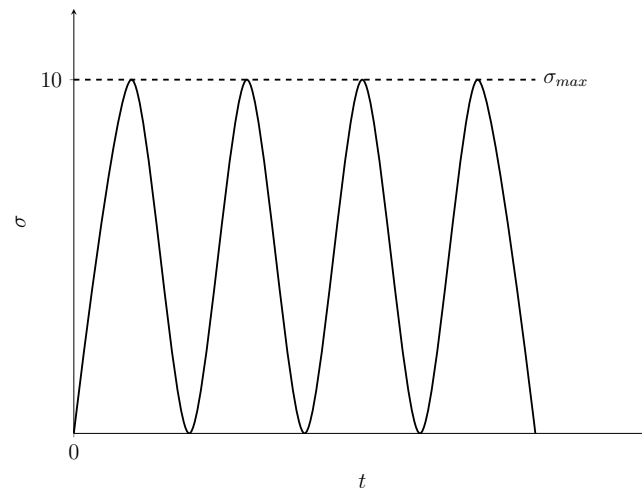
**Tabela 5.2:** Placa retangular com trinca interna: dimensões

Dimensões	
Dimensão	Valor
h	3
b	0,5
2a	0,1



**Figura 5.1:** Placa retangular com trinca interna: discretização e condições

O carregamento cíclico de amplitude constante é aplicado na direção perpendicular à trinca e, por isso, gera modo I puro de fratura na fissura. A representação gráfica do carregamento é apresentada na Figura 5.2.



**Figura 5.2:** Placa retangular com trinca interna: representação gráfica do carregamento cíclico de amplitude constante

Esse problema é analisado em Isida (1971), o qual fornece diversos valores para o fator de intensidade de tensões de modo I usando diferentes razões  $h/b$ . Baseando-se no trabalho de Isida (1971), Tada et al. (2000) diz que  $K_I$  pode ser obtido por:

$$K_I = \sigma \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{b}\right) \quad (5.1)$$

em que  $K_I$  é o fator de intensidade de tensão de modo I,  $\sigma$  é a tensão aplicada,  $a$  é a metade do comprimento da trinca,  $b$  é a metade da altura da placa e  $F(\frac{a}{b})$  é o fator

geométrico, dado pela equação:

$$F\left(\frac{a}{b}\right) = \left[1 - 0,025\left(\frac{a}{b}\right)^2 + 0,06\left(\frac{a}{b}\right)^4\right] \sqrt{\sec\left(\frac{\pi a}{2b}\right)} \quad (5.2)$$

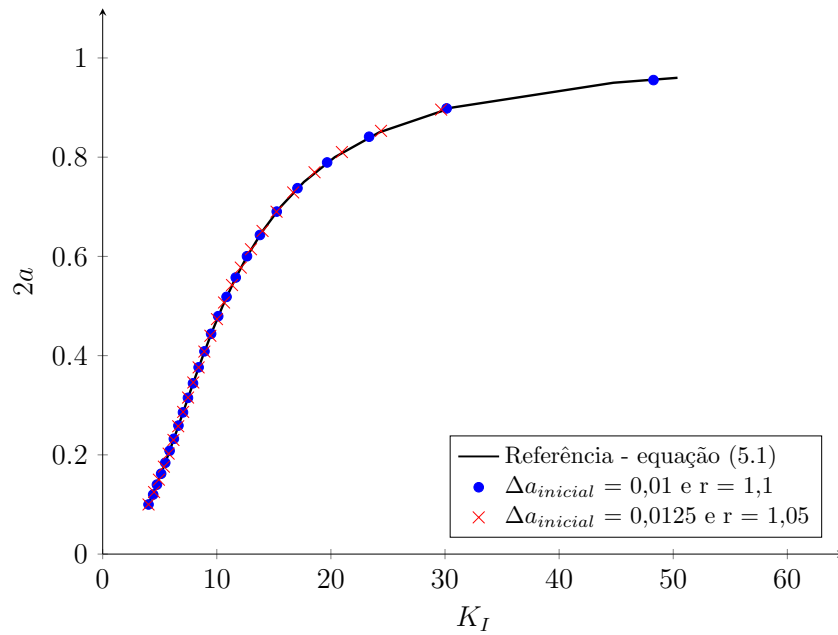
Como a placa está sujeita a modo I puro de fratura,  $K_{Ieq}$  é o próprio  $K_I$ , e como a tensão mínima é igual a zero,  $\Delta K_{Ieq}$  é igual a  $K_I^{max}$ , encontrado quando a tensão é máxima. Dessa forma, a Equação de Paris para a propagação da trinca é então dada por:

$$\frac{da}{dN} = C_0 \left[ \sigma_{max} \sqrt{\pi a} F\left(\frac{a}{b}\right) \right]^m \quad (5.3)$$

Integrando a partir de  $a$ :

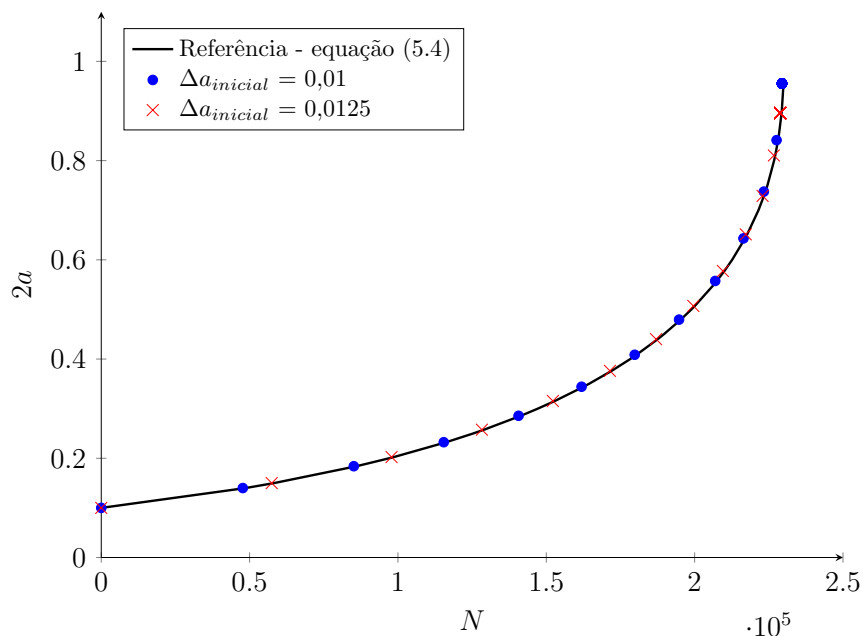
$$\Delta N = \frac{1}{C(\sigma_{max} \sqrt{\pi})^m} \int_{a_i}^{a_f} \frac{1}{[\sqrt{a} F(a)]^m} da \quad (5.4)$$

A integração da equação (5.4) é feita numericamente, pela regra dos trapézios. Analisa-se, portanto, a propagação da trinca interna com o código computacional desenvolvido e os resultados são comparados com aqueles fornecidos pelas equações (5.1) e (5.4). A trinca é propagada usando 24 passos, para dois valores diferentes de incremento inicial: o primeiro incremento  $\Delta a_{inicial} = 0,01$ , com um fator multiplicador  $r = 1,1$  e o segundo incremento  $\Delta a_{inicial} = 0,0125$ , com um fator multiplicador  $r = 1,05$ . Para  $\Delta a_{inicial} = 0,01$ , o comprimento final é de 0,955, enquanto que para  $\Delta a_{inicial} = 0,0125$  a propagação termina em  $2a = 0,896$ . A Figura 5.3 apresenta a comparação dos resultados de fator de intensidade de tensão de modo I,  $K_I$ , quando comparados os resultados obtidos pelo programa computacional com aqueles obtidos pela equação (5.1).



**Figura 5.3:** Placa retangular com trinca interna: fator de intensidade de tensão de modo I ( $K_I$ )

Já na Figura 5.4, são apresentados os resultados para o número de ciclos  $N$  obtidos com os dois diferentes incrementos iniciais e fatores multiplicadores, comparados com a solução dada na equação (5.4).

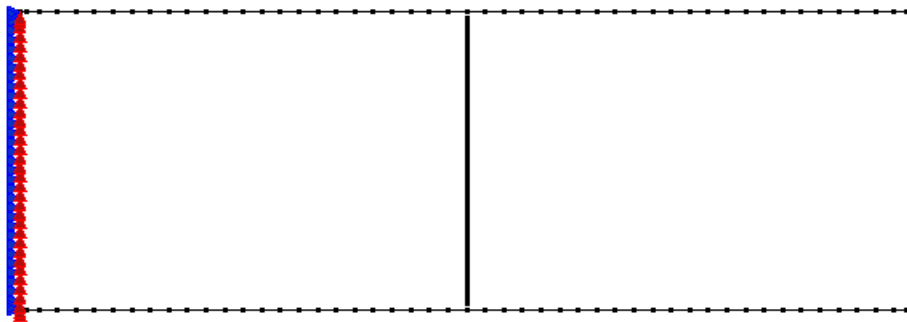


**Figura 5.4:** Placa retangular com trinca interna: número de ciclos x comprimento da trinca

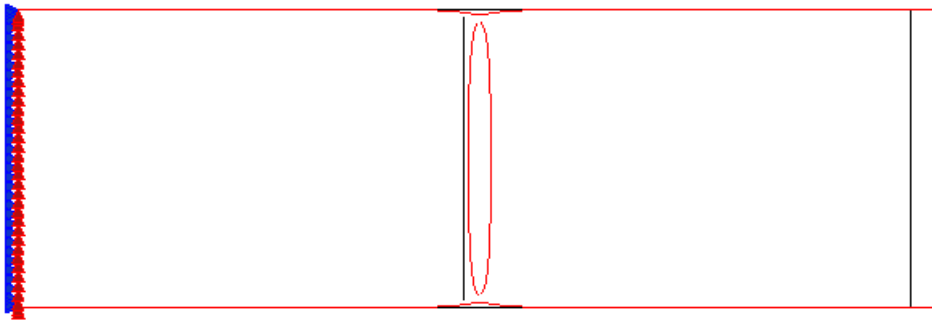
Portanto, com base nas Figuras 5.3 e 5.4, a análise realizada pelo código computacional implementado está de acordo com os resultados esperados. Os resultados obtidos com os

diferentes  $\Delta a_{inicial}$  e  $r$ , tanto para  $K_I$  quanto para o número de ciclos  $N$ , correspondem àqueles esperados pelas equações (5.1) e (5.4).

A trinca se propaga com ângulo  $\theta$  igual a zero, referente à ponta da trinca, e, por isso, cresce verticalmente. As Figuras 5.5 e 5.6 apresentam o comprimento final da trinca, cujo incremento inicial é igual a 0,01, e sua configuração deformada, na qual os deslocamentos foram ampliados em 40 vezes.



**Figura 5.5:** Placa retangular com trinca interna: configuração final



**Figura 5.6:** Placa retangular com trinca interna: configuração final deformada

## 5.2 Placa retangular sujeita à tração com diferentes configurações de trinca

Nos exemplos a seguir são analisadas três geometrias de trincas diferentes, em uma placa retangular sujeita à tração. Assim como no exemplo anterior, as configurações



aqui estudadas possuem expressões conhecidas para o fator de intensidade de tensões nas pontas das trincas, de forma que a Equação de Paris pode ser integrada numericamente e os resultados obtidos comparados com aqueles fornecidos pelo programa computacional desenvolvido. Para os três casos estudados, o fator de intensidade de tensões em modo I é dado genericamente por (Dowling, 2013):

$$K_I = F(a)\sigma\sqrt{\pi a} \quad (5.5)$$

onde  $F$  é um fator geométrico que é específico para cada geometria de trinca e, por isso, será detalhado nas próximas subseções,  $\sigma$  é a tensão aplicada e  $a$  se refere ao comprimento da trinca. Os carregamentos aplicados geram modo I puro (portanto,  $K_{Ieq} = K_I$ ) nas trincas. Por isso, a variação do FIT pode ser dada por:

$$\Delta K_I = K_I^{max} - K_I^{min} = F(a)\Delta\sigma\sqrt{\pi a} \quad (5.6)$$

Substituindo essa grandeza na Equação de Paris, para a propagação de trincas, tem-se:

$$\frac{da}{dN} = C(\Delta K_I)^m = C(F(a)\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m \quad (5.7)$$

A integração ocorre em função do comprimento de trinca  $a$ , ou seja:

$$\int_{N_i}^{N_f} dN = \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{C(F(a)\Delta\sigma\sqrt{\pi a})^m} = \frac{1}{C(\Delta\sigma\sqrt{\pi})^m} \int_{a_i}^{a_f} \frac{da}{[F(a) \cdot a]^m} \quad (5.8)$$

Devido ao fator geométrico  $F$  ser uma função do comprimento da trinca  $a$ , a equação (5.8) é integrada numericamente, pela regra de Simpson, conforme equação (4.11). Como material, para os 3 casos, é adotado o aço AISI 4340, cujas propriedades estão detalhadas na Tabela 5.3.

**Tabela 5.3:** Placa retangular sujeita à tração com diferentes configurações de trinca: propriedades do material

Propriedades do material	
Propriedade	Valor
$E$	207 GPa
$\nu$	0,3
$C_0$	$5,11 \cdot 10^{-13} \frac{\text{m/ciclo}}{(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^m}$
$m$	3,24
$\gamma$	0,42
$K_{Ic}$	130 MPa $\sqrt{\text{m}}$

Todas as três diferentes geometrias de trinca são propagadas até que seja atingida a tenacidade à fratura  $K_{Ic}$  do material e o número de ciclos obtido ao longo da propagação é comparado com a solução da equação (5.8). As dimensões, os carregamentos, os fatores geométricos e os resultados obtidos são apresentados de maneira individual para cada geometria nas subseções a seguir.

### 5.2.1 Uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante

A primeira geometria apresentada é uma trinca de superfície, posicionada, em apenas uma das bordas, no meio da altura da placa. O fator geométrico  $F$  é dado por (Dowling, 2013):

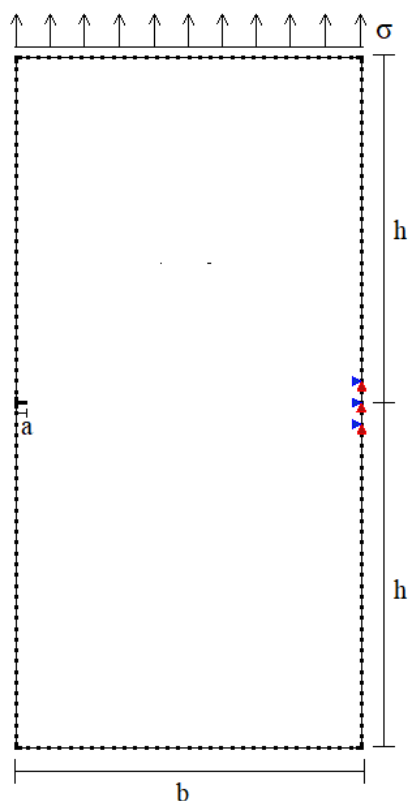
$$F = 0,265 \left(1 - \frac{a}{b}\right)^4 + \frac{0,857 + 0,265 \frac{a}{b}}{\left(1 - \frac{a}{b}\right)^{\frac{3}{2}}} \quad \left(\frac{h}{b} \geq 1,0\right) \quad (5.9)$$

em que  $a$  é o comprimento da trinca,  $b$  é a largura e  $h$  é a metade da altura da placa. A solução para o número de ciclos é obtida substituindo o fator geométrico  $F$ , dado pela equação (5.9), na equação (5.8), e aplicando a regra de Simpson. Essa formulação vale para qualquer valor de  $a/b$ , porém é limitado a valores de  $h/b \geq 1$ . Portanto, para que seja atendida essa relação, a placa assume as dimensões apresentadas na Tabela 5.4.

**Tabela 5.4:** Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: dimensões

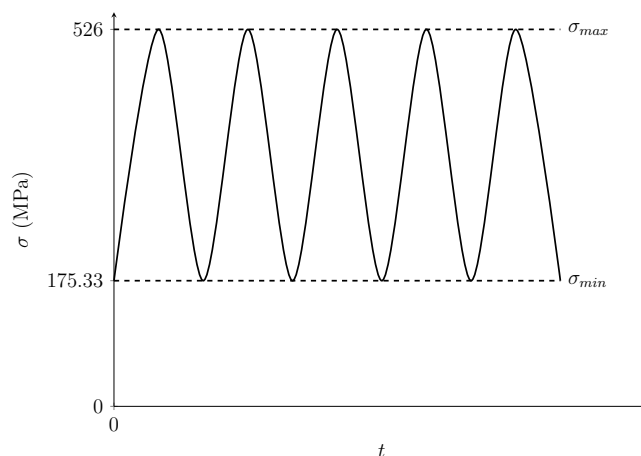
Dimensões	
Dimensão	Valor
$b$	76 mm
$h$	76 mm
$a$	2 mm

A placa é discretizada com 16 elementos na largura  $b$ , 32 elementos na altura  $2h$  e 20 elementos por face da trinca com comprimento inicial  $a$ . A discretização e as condições de contorno são apresentadas na Figura 5.7.



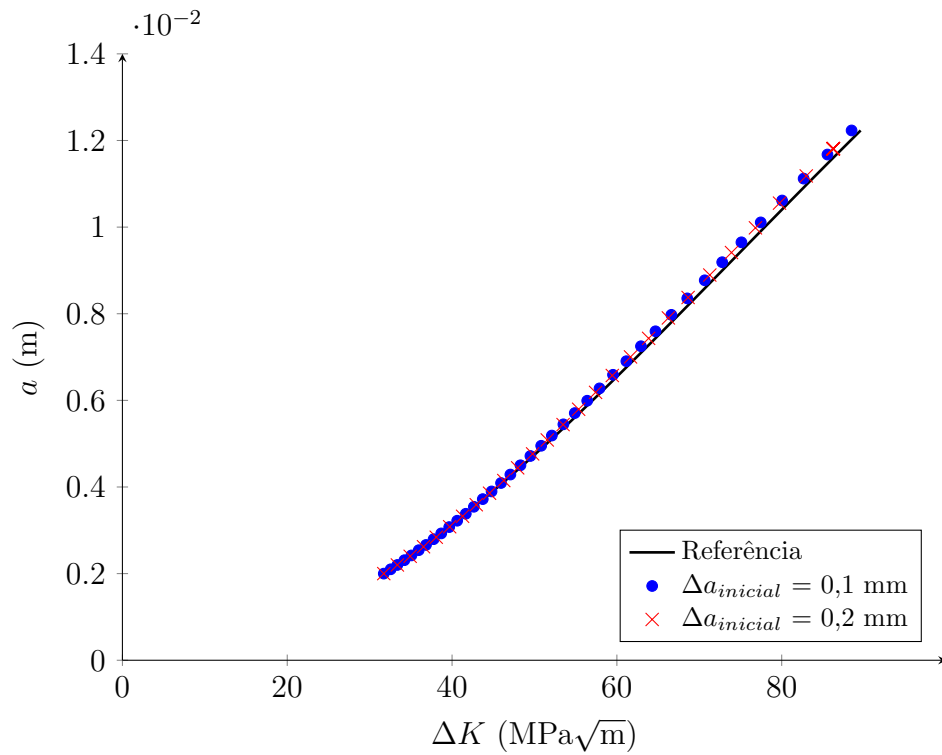
**Figura 5.7:** Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: discretização e condições de contorno

A placa está submetida a um carregamento cíclico, de amplitude constante, conforme Figura 5.8.

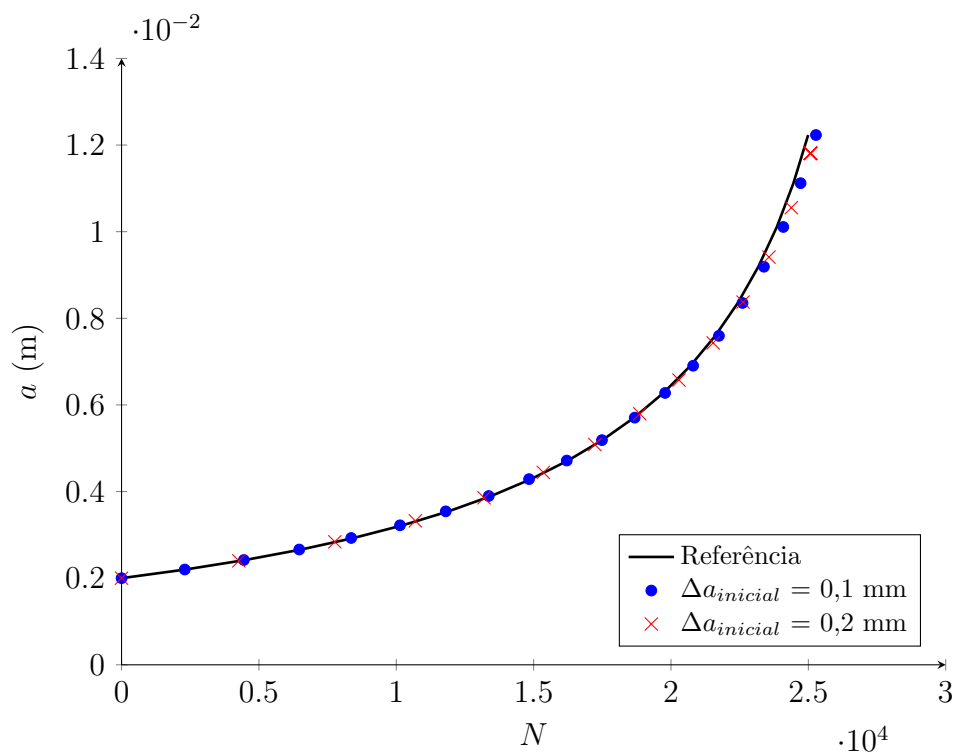


**Figura 5.8:** Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: carregamento

De acordo com a Figura 5.8, a tensão máxima aplicada ( $\sigma_{max}$ ) é de 526 MPa, com um  $R = 0,333$ . A trinca é propagada até que a tenacidade a fratura seja atingida. Utiliza-se dois incrementos iniciais diferentes, sendo eles:  $\Delta a_{inicial} = 0,1$  mm e 0,2 mm. O primeiro apresenta o mesmo comprimento que os elementos da trinca e o segundo é o dobro desse comprimento. O fator multiplicador é mantido constante em  $r = 1,1$ . Os resultados da variação do fator de intensidade de tensão e do número de ciclos obtidos pelo código computacional usando as duas configurações de incremento inicial são comparados com as respostas obtidas diretamente das equações (5.6) e (5.8), e são apresentados nas Figuras 5.9 e 5.10, respectivamente.



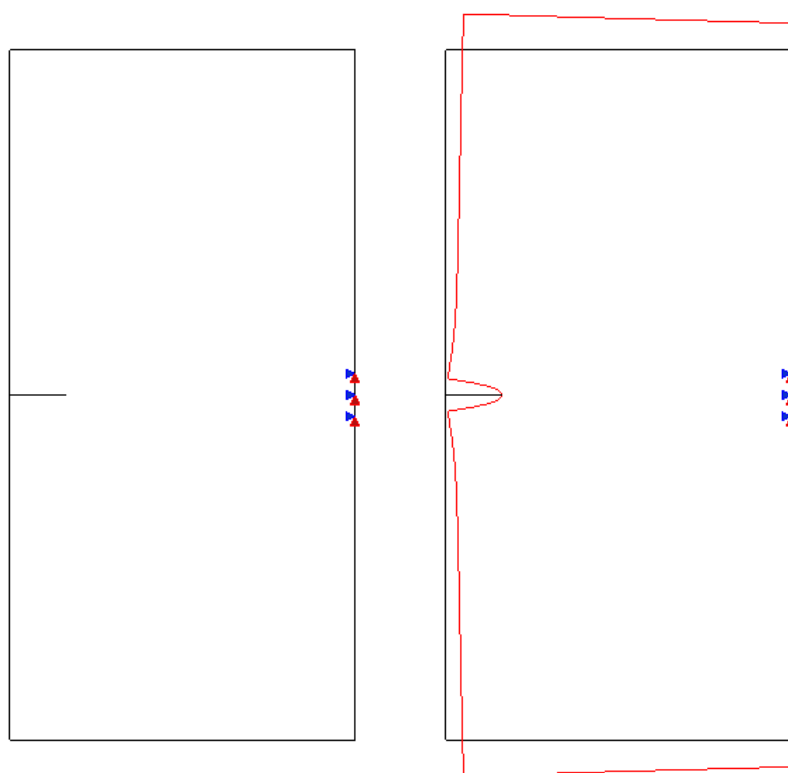
**Figura 5.9:** Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: variação do fator de intensidade de tensão



**Figura 5.10:** Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: número de ciclos x comprimento da trinca

Por meio das Figuras 5.9 e 5.10, percebe-se que os resultados obtidos a partir do código computacional implementado apresentam boa correspondência com os valores esperados.

A Figura 5.11(a) apresenta a configuração final da trinca, cujo incremento inicial é de 0,1 mm. Nessa configuração, a trinca possui comprimento  $a = 12,232$  mm, momento em que  $K_{Ieq}^{max}$  atinge  $K_{Ic}$ . Dessa forma, esse comprimento de trinca representa o comprimento crítico,  $a_c$ , no qual a fratura frágil é esperada. A deformada dessa configuração é apresentada na Figura 5.11(b), com deslocamentos ampliados em 40 vezes.



(a) Comprimento final

(b) Configuração final deformada

**Figura 5.11:** Placa retangular com uma trinca de superfície e carregamento de amplitude constante: configuração final

## 5.2.2 Duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante

A segunda geometria apresentada são duas trincas de superfície, posicionadas no meio da altura da placa, cujo fator geométrico  $F$  é (Dowling, 2013):

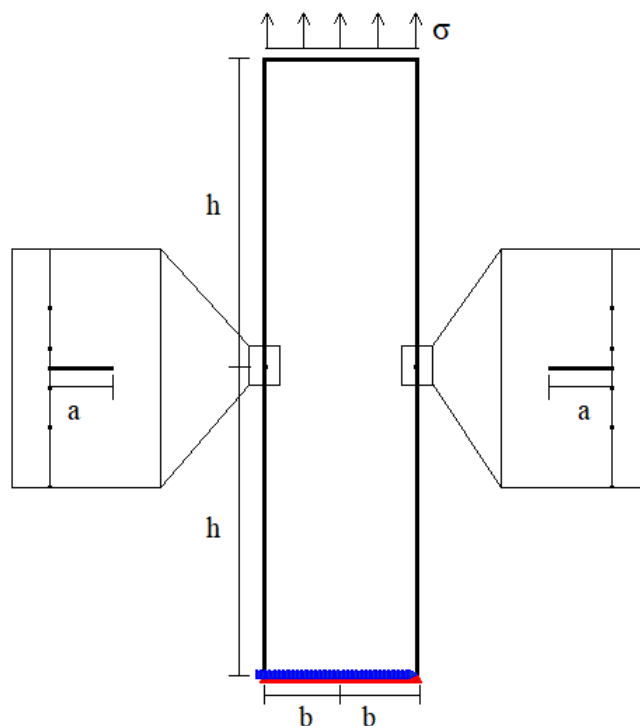
$$F = \left(1 + 0,122 \cos^4 \frac{\pi a}{2b}\right) + \sqrt{\frac{2b}{\pi a} \operatorname{tg} \frac{\pi a}{2b}} \quad \left(\frac{h}{b} \geq 2,0\right) \quad (5.10)$$

em que  $a$  é o comprimento de cada trinca,  $b$  é a metade da largura e  $h$  é a metade da altura da placa. Ao substituir o fator geométrico  $F$  (equação (5.10)) na equação (5.8), é possível obter a solução para o número de ciclos envolvidos na propagação. Essa formulação vale para qualquer valor de  $a/b$ , porém é limitado a valores de  $h/b \geq 2$ . Para que seja atendida essa relação, a placa tem as dimensões apresentadas na Tabela 5.5.

**Tabela 5.5:** Placa retangular com duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante: dimensões

Dimensões	
Dimensão	Valor
$b$	38 mm
$h$	152 mm
$a$	1 mm

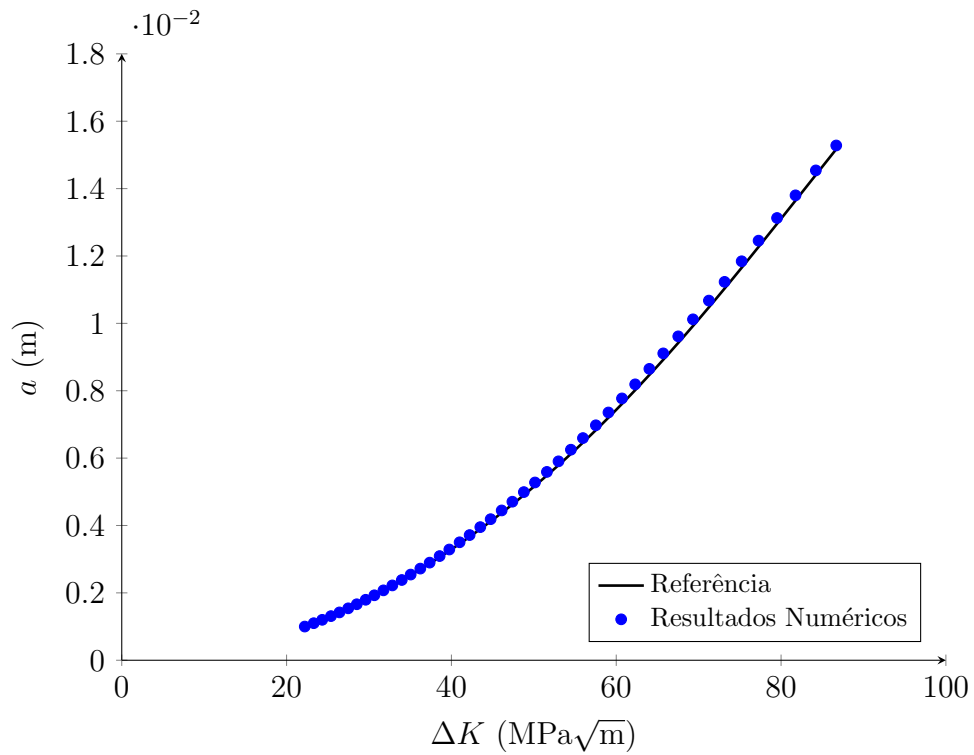
A placa apresenta relação  $h/b = 4$ , cumprindo os requisitos necessários, e é discretizada com 38 elementos na largura  $2b$ , 76 elementos na altura  $2h$  e 10 elementos por face da trinca com comprimento inicial  $a$ . A discretização e as condições de contorno são apresentadas na Figura 5.12.



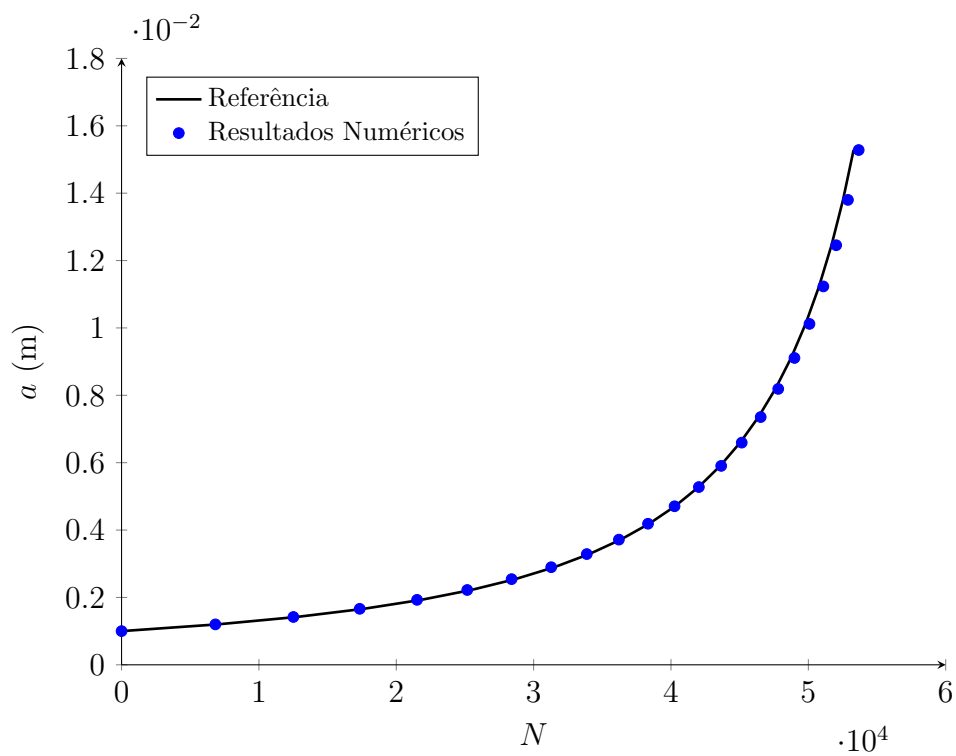
**Figura 5.12:** Placa retangular com duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante: discretização e condições de contorno

A placa está submetida ao mesmo carregamento cíclico do exemplo anterior, apresentado na Figura 5.8. A trinca se propaga até atingir a tenacidade a fratura  $K_{Ic}$ . O incremento inicial é de 0,1 mm, com fator multiplicador igual a  $r = 1,1$ . Esse  $\Delta a$  inicial se iguala ao comprimento dos elementos da trinca inicial. Com o uso do código computacional desenvolvido, obtêm-se os resultados da variação do fator de intensidade de tensão ( $\Delta K$ ) e do número de ciclos ( $N$ ), os quais são comparados com as respostas dadas, respectivamente, pelas equações (5.6) e (5.8). Tais comparações são apresentadas nas Figuras 5.13 e 5.14.





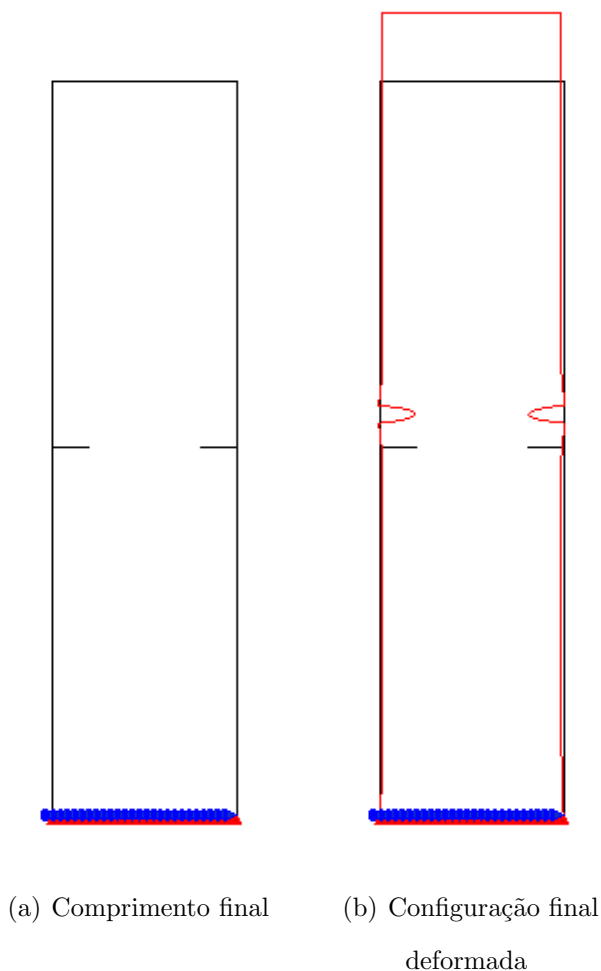
**Figura 5.13:** Placa retangular com duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante: variação do fator de intensidade de tensão



**Figura 5.14:** Placa retangular com duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante: número de ciclos x comprimento da trinca

Os resultados obtidos com o uso do código computacional desenvolvido apresentam boa acórdância com aqueles esperados, conforme Figuras 5.13 e 5.14.

A configuração final das trincas, cujos comprimentos são  $a = 15,281$  mm, é apresentada na Figura 5.15(a). Já a configuração final deformada, com deslocamentos ampliados em 40 vezes, é apresentada na Figura 5.15(b).



**Figura 5.15:** Placa retangular com duas trincas de superfície e carregamento de amplitude constante: configuração final

### 5.2.3 Trinca interna e carregamento de amplitude variável

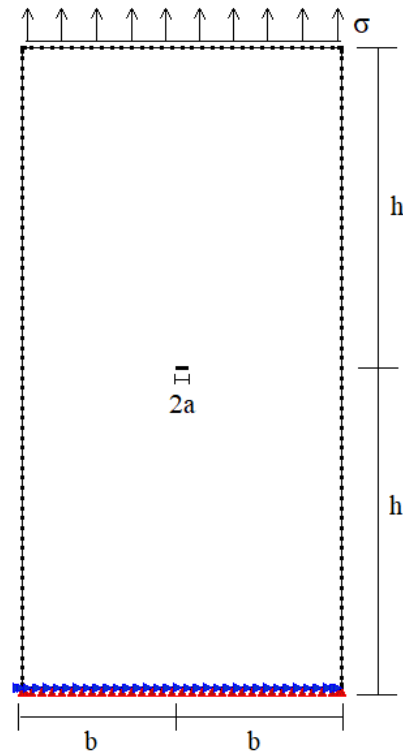
A terceira geometria apresentada se refere a uma trinca interna, posicionada no centro da placa, cujo fator geométrico  $F$  é fornecido na equação (5.2). A geometria da trinca é

similar à apresentada anteriormente, na seção 5.1, porém, nesse exemplo, aplica-se carregamento cíclico de amplitude variável. Substituindo  $F$  na equação (5.8) e integrando pela regra de Simpson, obtém-se a solução para o número de ciclos relativos à propagação. Essa formulação vale para qualquer valor de  $a/b$ . A placa apresenta as dimensões apresentadas na Tabela 5.6.

**Tabela 5.6:** Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: dimensões

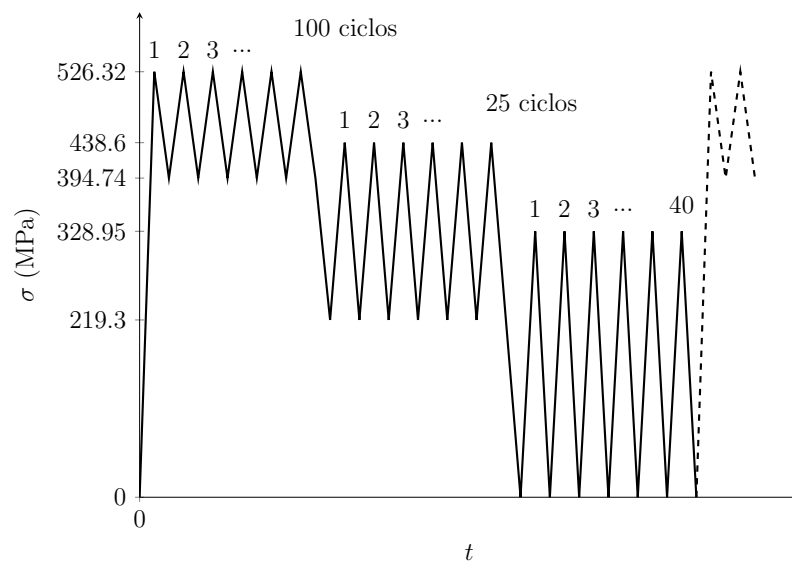
Dimensões	
Dimensão	Valor
$b$	38 mm
$h$	76 mm
$a$	1 mm

A placa é discretizada com 16 elementos na largura  $2b$ , 32 elementos na altura  $2h$  e 20 elementos por face da trinca com comprimento inicial  $2a$ . A discretização e as condições de contorno são apresentadas na Figura 5.16.



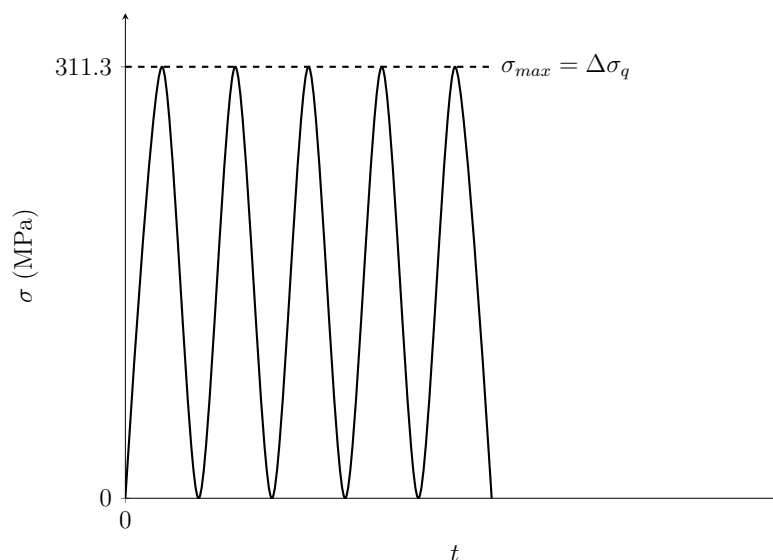
**Figura 5.16:** Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: discretização e condições de contorno

A placa está submetida a um carregamento cíclico de amplitude variável, representado na Figura 5.17.



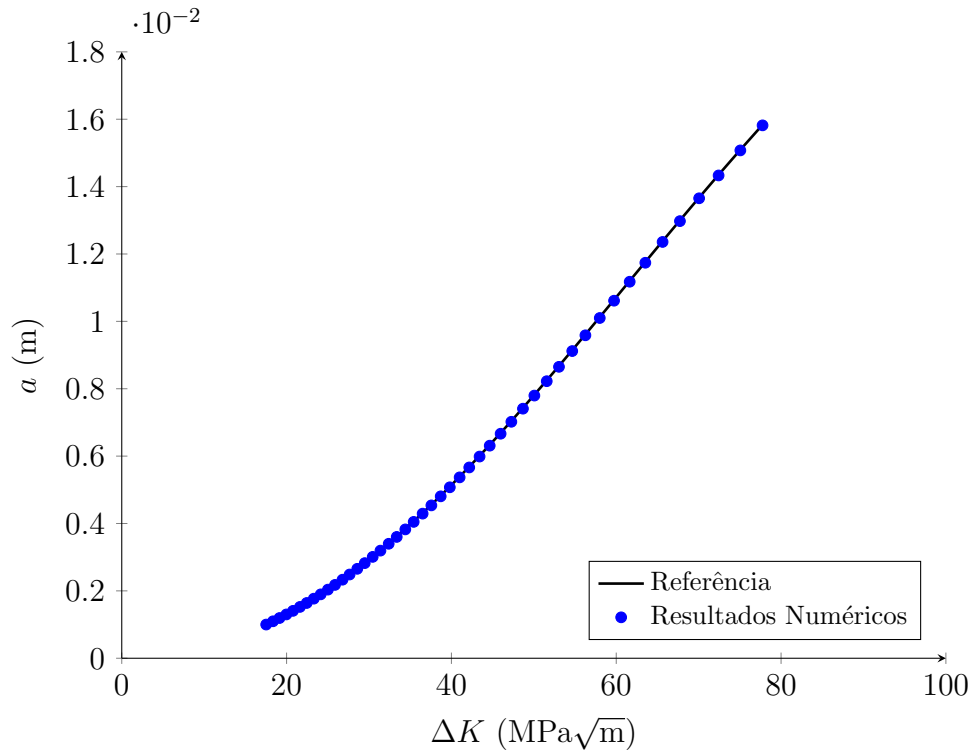
**Figura 5.17:** Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: carregamento com amplitude variável

Conforme demonstrado na Figura 5.17, o carregamento cíclico aplicado possui amplitude variável e, por isso, é avaliado pelo método de contagem de ciclos *rainflow*. Após a aplicação do método, o carregamento cíclico de amplitude variável é transformado no carregamento cíclico equivalente de amplitude constante, mostrado na Figura 5.18.

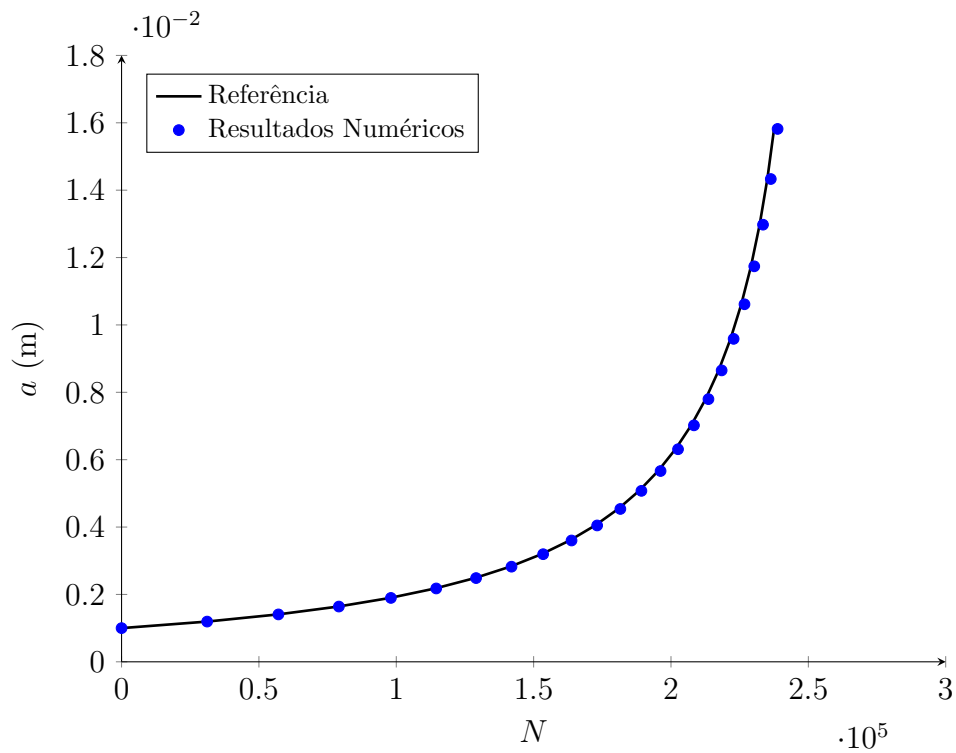


**Figura 5.18:** Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: carregamento equivalente com amplitude constante

Portanto, conforme Figura 5.18, a tensão máxima aplicada ( $\sigma_{max}$ ) é de 311,3 MPa, com um  $R = 0$ , no carregamento cíclico equivalente de amplitude constante. A trinca é propagada até atingir a tenacidade a fratura  $K_{Ic}$ . O  $\Delta a$  inicial é de 0,097 mm, com fator multiplicador  $r$  igual a 1,097. O incremento inicial e o fator multiplicador foram escolhidos dessa forma para que a trinca atinja um comprimento final  $a$  igual a 15,82 mm, o qual é o comprimento crítico da fissura. Obtêm-se, então, os resultados da variação do FIT e do número de ciclos com a aplicação do código computacional desenvolvido e compara-se com as soluções fornecidas nas equações (5.6) e (5.8). Os resultados são apresentados nas Figuras 5.19 e 5.20, respectivamente.



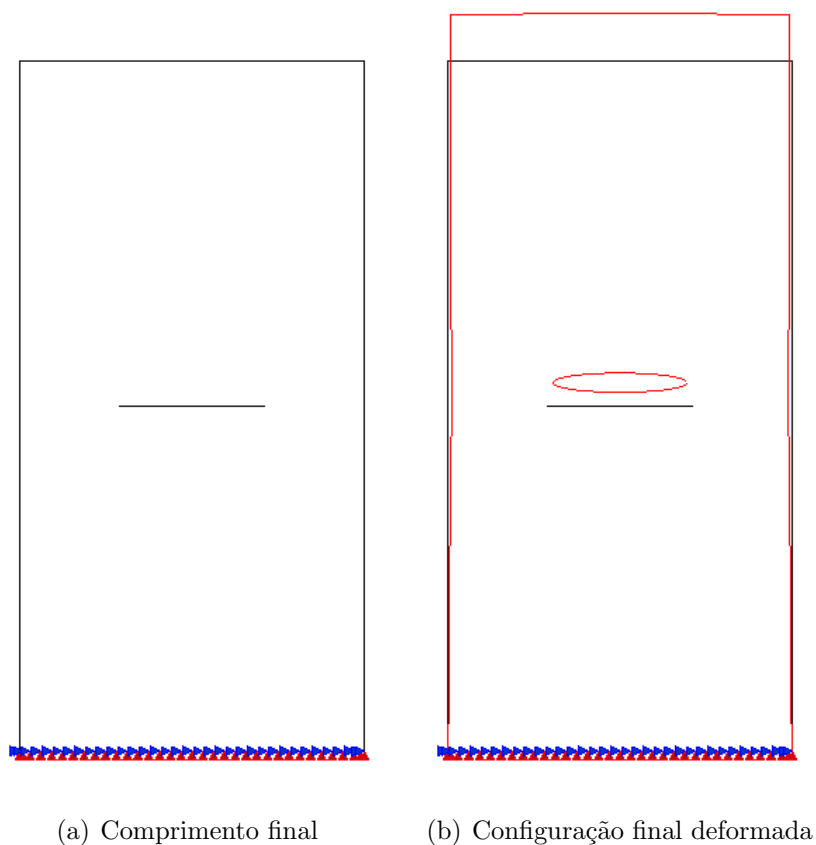
**Figura 5.19:** Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: variação do fator de intensidade de tensões



**Figura 5.20:** Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: número de ciclos x comprimento da trinca

Conforme apresentado nas Figuras 5.19 e 5.20, existe uma boa correspondência entre os valores obtidos com a aplicação do código computacional desenvolvido e os resultados esperados.

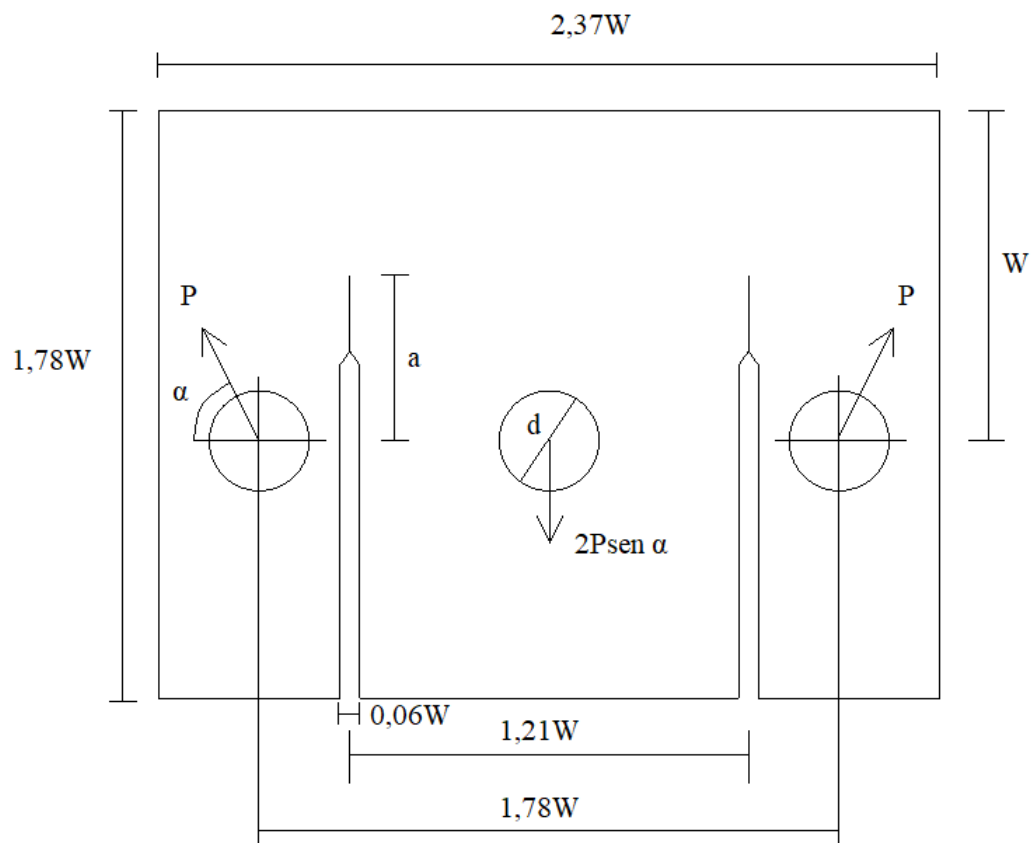
A Figura 5.21(a) apresenta a configuração final da trinca centrada, cujo comprimento  $2a$  é igual a 31,64 mm, enquanto que a deformada dessa configuração é apresentada na Figura 5.21(b), com deslocamentos ampliados em 40 vezes.



**Figura 5.21:** Placa retangular com trinca interna e carregamento de amplitude variável: configuração final

### 5.3 *Compact Mixed Mode (CMM)*

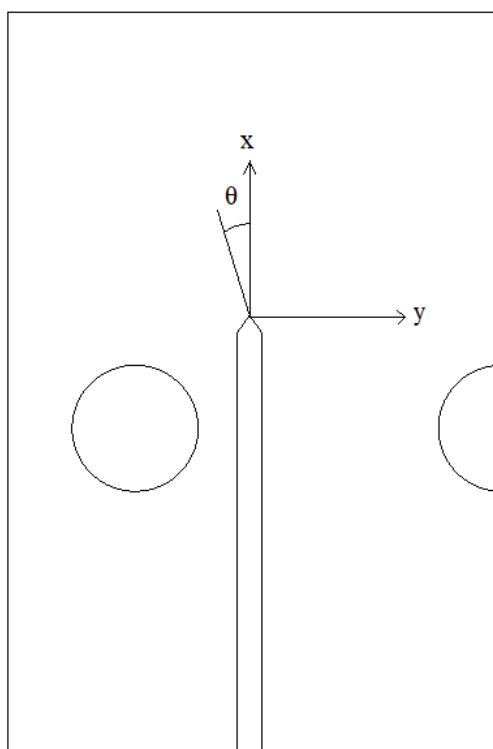
Os exemplos a seguir se referem à propagação em modo misto de fratura em um espécime de teste compacto de modo misto (CMM), apresentado em Chambers et al. (1991). As dimensões do corpo de prova CMM são apresentadas na Figura 5.22.



**Figura 5.22:** *Compact Mixed Mode*: dimensões

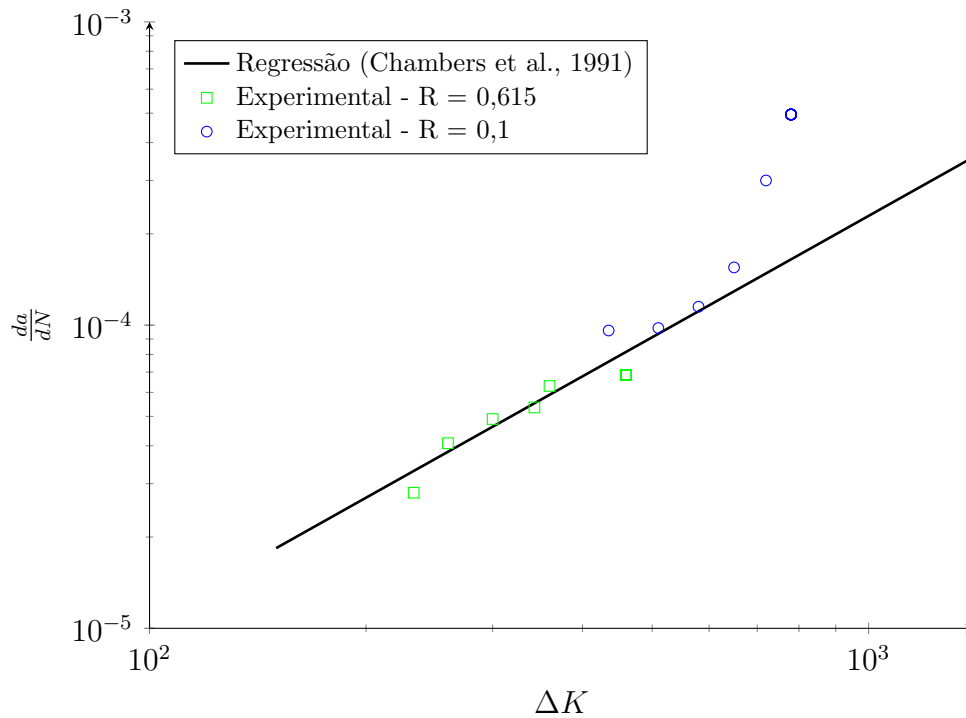
Na Figura 5.22,  $W$  equivale a 33 mm. É feita uma pré-trinca no espécime, de forma que  $a$  seja igual a  $W/2$ . Devido à simetria do problema, o modelo numérico é composto de apenas metade do corpo de prova. Dessa forma, a geometria a ser analisada, bem como a convenção de eixos adotada, são apresentadas na Figura 5.23.





**Figura 5.23:** *Compact Mixed Mode*: geometria analisada e eixos cartesianos

Chambers et al. (1991) realizaram experimentos preliminares em espécimes de teste compacto de modo I puro, a fim de determinar as constantes da Equação de Paris para o material utilizado, que é o aço Jethete M152 a uma temperatura de 550°C. Para isso, os autores realizaram dois conjuntos de testes com diferentes razões de tensões, sendo elas  $R = 0,1$  e  $R = 0,615$ . Chambers et al. (1991) alegam que tal variação na razão de tensões não impacta na constante  $C$  da Equação de Paris para o material e temperatura em questão, um comportamento que não é comum. Os dados experimentalmente obtidos para os corpos de prova de modo I e a curva representativa da Equação de Paris, cujas constantes foram obtidas na referência em questão, com esses dados, são apresentados na Figura 5.24.



**Figura 5.24:** *Compact Mixed Mode*: gráfico  $da/dN$  x  $\Delta K$

Determinadas as constantes da Equação de Paris, os dados referentes ao material são apresentados na Tabela 5.7.

**Tabela 5.7:** *Compact Mixed Mode*: propriedades do material

Propriedades do material	
Propriedade	Valor
E	200 GPa
$\nu$	0,25
C	$2,3459 \cdot 10^{-8} \frac{\text{mm/ciclo}}{(\text{MPa}\sqrt{\text{mm}})^m}$
m	1,33

Dessa forma, a relação entre a taxa de avanço das fissuras e a variação do fator de intensidade de tensões em modo I, obtida por Chambers et al. (1991), é dada por:

$$\frac{da}{dN} = 2,3459 \cdot 10^{-8} (\Delta K)^{1,33} \quad (5.11)$$

São apresentados dois exemplos, realizados com o corpo de prova CMM. Os exemplos referem-se a ensaios reportados em Chambers et al. (1991) e se diferenciam pela carga

aplicada e seu ângulo de aplicação ( $\alpha$ ), bem como no ângulo da trinca inicial ( $\theta$ ) – ver Figura 5.23. As especificações de cada exemplo e seus resultados são apresentados nas subseções a seguir.

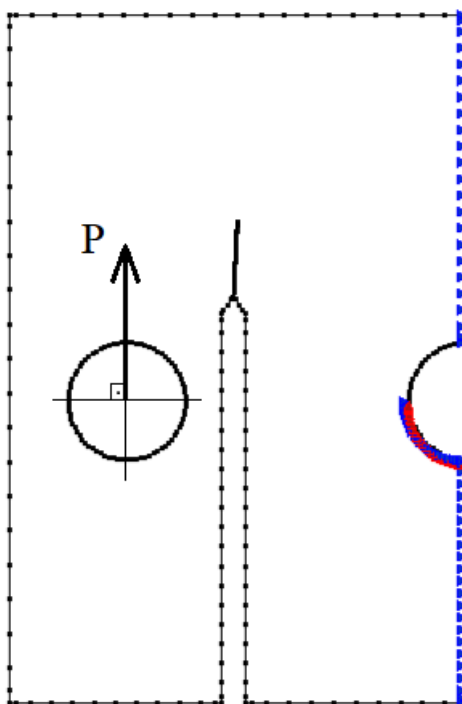
### 5.3.1 Primeira configuração: $\alpha = 90^\circ$ e $\theta = -3^\circ$

No primeiro exemplo, a carga é aplicada com ângulo  $\alpha$  igual a  $90^\circ$ , gerando modo misto de fratura com uma relação  $K_I/K_{II} \approx 1,8$ . Já a trinca possui um ângulo inicial  $\theta$  igual a  $-3^\circ$ , o qual foi escolhido como a média dos ângulos reportados em 3 repetições experimentais por Chambers et al. (1991). Os dados utilizados nos experimentos e nesse exemplo são apresentados na Tabela 5.8.

**Tabela 5.8:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 90^\circ$  e  $\theta = -3^\circ$ : dados dos testes

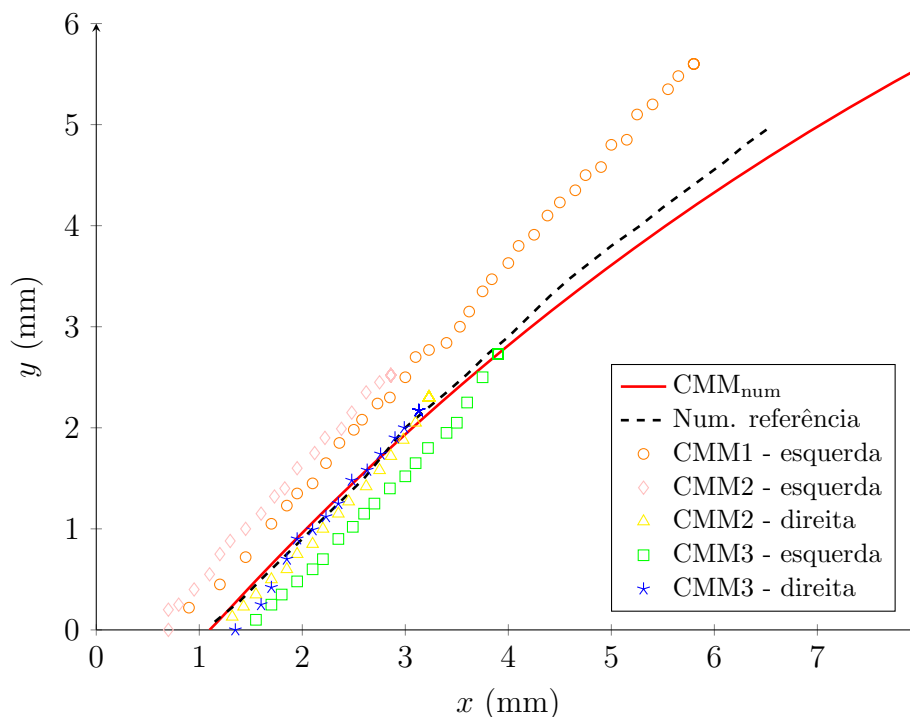
Dados				
Identificação	$\theta$ ( $^\circ$ )	$P_{min}$ (kN)	$P_{max}$ (kN)	R
CMM1	-1,3	0,5	4,5	0,111
CMM2	-2,7	0,5	4,5	0,111
	-4,7	0,5	4,5	0,111
CMM3	-3,4	0,5	4,5	0,111
	-2,5	0,5	4,5	0,111
CMM <sub>num</sub>	-3	0,5	4,5	0,111

A identificação CMM<sub>num</sub> se refere ao modelo numérico testado com o código computacional desenvolvido. A malha de elementos de contorno é composta, inicialmente, por 172 elementos, sendo que cada face da trinca é discretizada com 20 elementos. A discretização e as condições de contorno são apresentadas na Figura 5.25.



**Figura 5.25:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 90^\circ$  e  $\theta = -3^\circ$ : discretização e condições de contorno

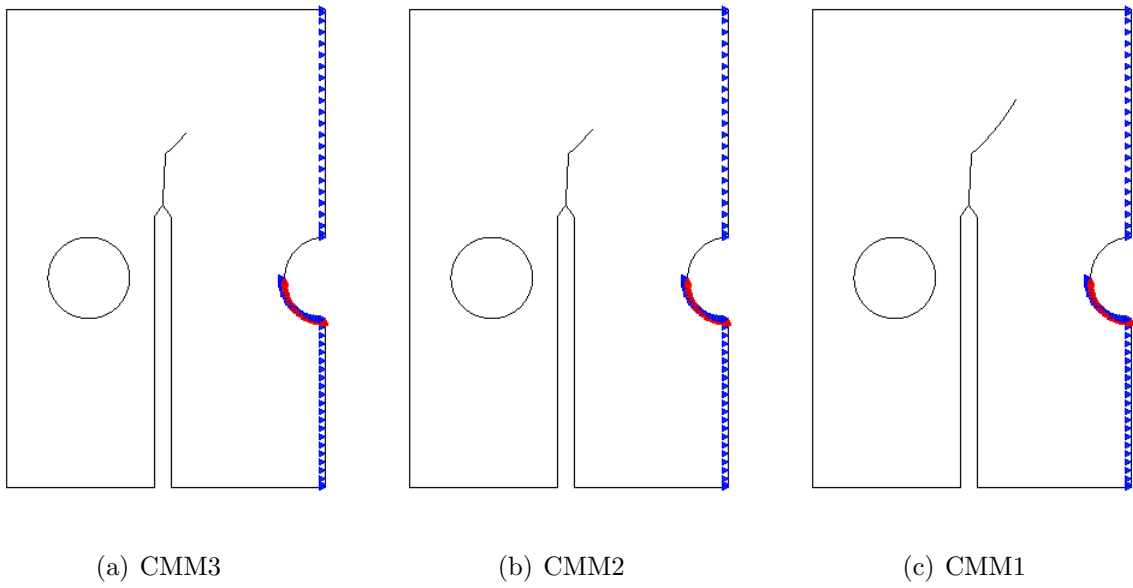
A trinca se propaga por 10,23 mm, a partir do comprimento inicial, atingindo um comprimento final de 16,5 mm. A Figura 5.26 ilustra a trajetória percorrida pela trinca analisada no código computacional desenvolvido e compara-a com os resultados obtidos experimentalmente e numericamente por Chambers et al. (1991). A análise numérica reportada na referência refere-se a um modelo de elementos finitos, com fator de intensidade de tensões obtidos através do método da integral J e direção de propagação definida pelo critério da Máxima Tensão Circunferencial.



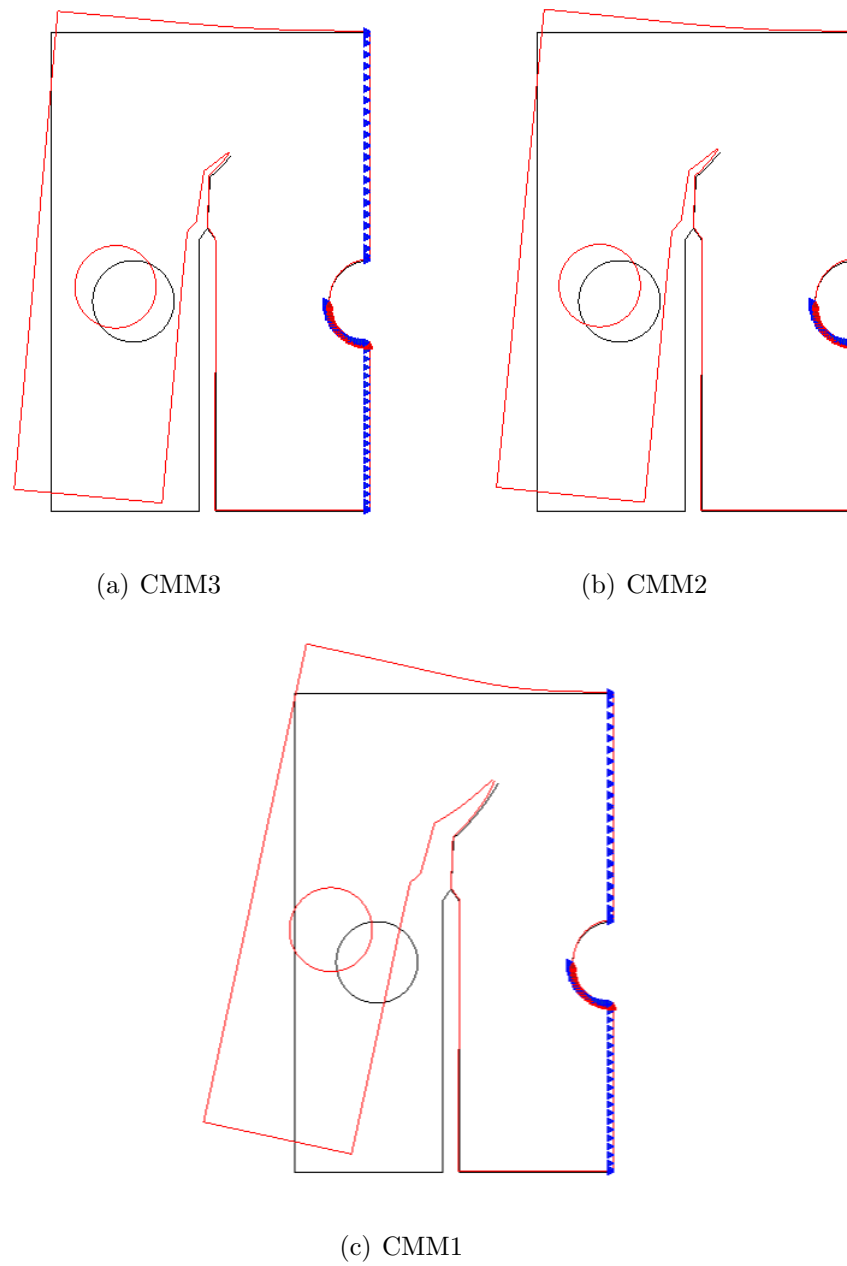
**Figura 5.26:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 90^\circ$  e  $\theta = -3^\circ$ : trajetória

Conforme Figura 5.26, percebe-se uma boa concordância entre os resultados obtidos com o código desenvolvido e a referência numérica. Além disso, a trajetória percorrida pelo  $CMM_{num}$  é intermediária àquela dos experimentos, como esperado, visto que utilizou-se um ângulo  $\theta$  médio.

Os experimentos possuem diferentes comprimentos máximos de propagação para a trinca e, por isso, diferentes números de ciclos finais. Na Figura 5.27 são ilustradas as configurações finais para cada experimento e, na Figura 5.28, estão as configurações finais deformadas, com deslocamentos ampliados em 40 vezes.



**Figura 5.27:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 90^\circ$  e  $\theta = -3^\circ$ : configurações finais



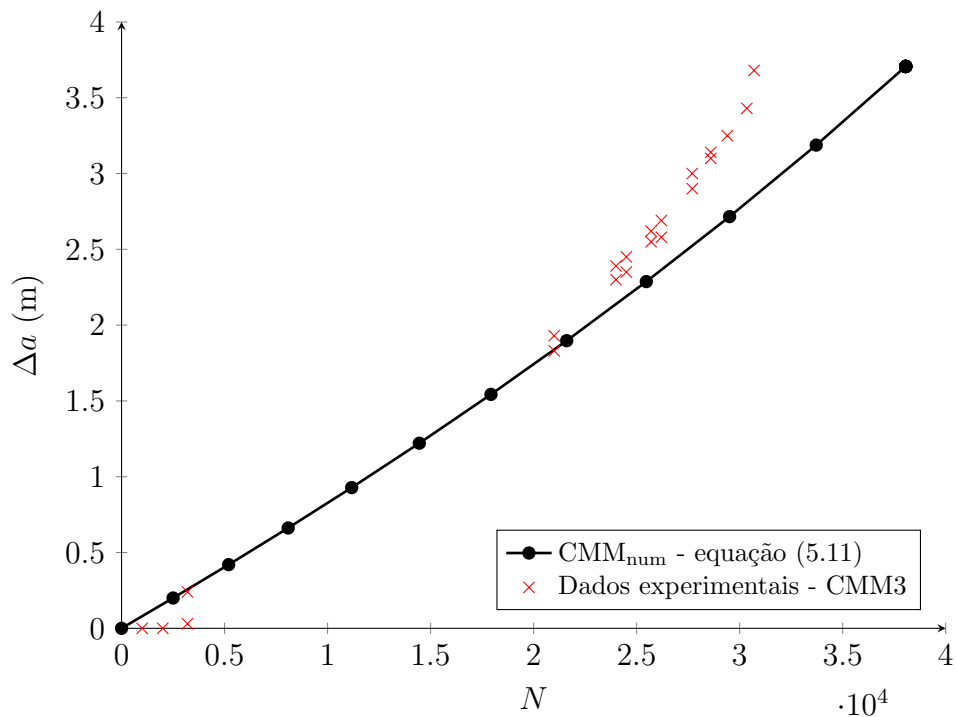
**Figura 5.28:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 90^\circ$  e  $\theta = -3^\circ$ : configurações finais deformadas

Na Tabela 5.9, são apresentados os resultados dos diferentes avanços máximos das trincas ( $\Delta a$ ) e do número de ciclos total obtidos experimentalmente, bem como os resultados obtidos no modelo numérico, usando a equação (5.11).

**Tabela 5.9:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 90^\circ$  e  $\theta = -3^\circ$ : resultados para o número de ciclos total

Identificação	$\Delta a$ (mm)	Resultados	
		$N_{total}$ (ciclos)	
		Experimental	$CMM_{num}$
CMM1	8,52	51166	66550
CMM2	4,24	37455	42508
CMM3	3,64	30007	38059

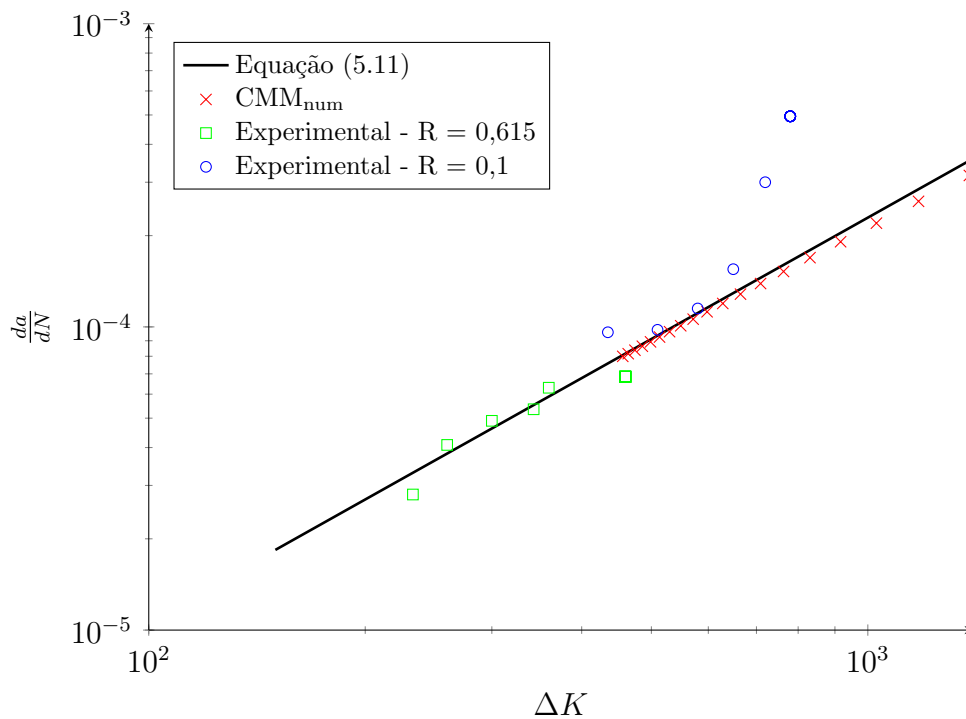
Especificamente para o ensaio CMM3, alguns pontos experimentais referentes ao número de ciclos transcorridos são apresentados no artigo de referência. Uma reprodução desses pontos sobre a curva obtida numericamente no programa desenvolvido é apresentada na Figura 5.29.



**Figura 5.29:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 90^\circ$  e  $\theta = -3^\circ$ : número de ciclos x variação do comprimento da trinca



Percebe-se, pela Figura 5.29, que existe uma boa acordância até  $\Delta a = 2,5$  mm, aproximadamente. A partir desse ponto, os dados experimentais começam a se afastar ligeiramente dos dados numéricos e isso fica perceptível ao comparar o número de ciclos finais para cada experimento com aqueles obtido no  $CMM_{num}$ , na Tabela 5.9. Essa diferença pode ser explicada pelo gráfico ilustrado na Figura 5.30, que se refere à representação gráfica da equação (5.11), juntamente com os dados experimentais utilizados por Chambers et al. (1991) para a determinação das constantes  $C$  e  $m$ , além dos pontos obtidos na análise numérica com o código desenvolvido.



**Figura 5.30:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 90^\circ$  e  $\theta = -3^\circ$ :  $da/dN$  x  $dK$

Percebe-se que os dados experimentais para  $R = 0,1$  começam próximos à equação (5.11), porém, com o aumento de  $\Delta K$ , esses dados se afastam. Essa é a mesma região na qual os experimentos e a análise numérica, descritos nessa seção, ocorrem, como sugere os dados identificados como  $CMM_{num}$  na Figura 5.30. Esses experimentos, cujo  $R = 0,111$ , acontecem (assumindo como verdadeira a hipótese de que a diferença em  $R$  no conjunto de dados referentes ao experimento de modo I puro não influi significativamente na constante  $C$ ) numa zona de transição entre a região II e a região III do gráfico  $da/dN$

x  $\Delta K$  (ver Figura 4.2), ou seja, os valores de  $K_{Ieq}^{max}$  estão se aproximando da tenacidade à fratura. Essa proximidade faz com que as trincas se propaguem com uma velocidade maior do que a prevista pela Equação de Paris e se afaste da curva gerada. Dessa forma, quando esse experimento se afasta da região II, a análise realizada pelo código desenvolvido, baseado na Equação de Paris com as constantes obtidas por Chambers et al. (1991), prevê um número de ciclos maior do que aquele que realmente acontece, pois a Equação de Paris não é válida na região III.

Além disso, um aumento na razão  $R$  usualmente está relacionado a um aumento na constante  $C$  e, conseqüentemente, representaria taxas maiores de propagação. Como a equação (5.11) está respaldada principalmente nos dados experimentais referentes a  $R = 0,615$  – ver Figura 5.24 – a constante  $C$  aqui adotada pode estar superdimensionada para análises com  $R \approx 0,1$ .

Por fim, cabe ressaltar que o número de ciclos obtido numericamente está dentro da mesma ordem de grandeza dos experimentos apresentados na referência.

### 5.3.2 Segunda configuração: $\alpha = 110^\circ$ e $\theta = -1,5^\circ$

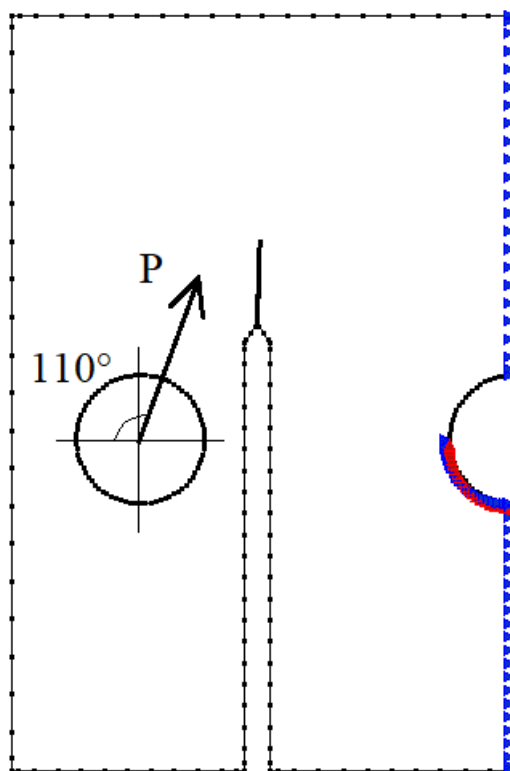
No segundo exemplo, a carga é aplicada com ângulo  $\alpha = 110^\circ$ , o que gera modo misto de fratura, porém com grande predominância do modo II. A relação  $K_I/K_{II}$  é aproximadamente 0,086. O ângulo inicial  $\theta$  da trinca é igual a  $-1,5^\circ$ , sendo igual ao ângulo reportado experimentalmente por Chambers et al. (1991). A Tabela 5.10 apresenta os dados utilizados no experimento e nesse exemplo.

**Tabela 5.10:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 110^\circ$  e  $\theta = -1,5^\circ$ : dados dos testes

Dados				
Identificação	$\theta$ ( $^\circ$ )	$P_{min}$ (kN)	$P_{max}$ (kN)	R
CMM4	-2,0	0,5	8,0	0,0625
	-1,5	0,5	8,0	0,0625
CMM <sub>num</sub>	-1,5	0,5	8,0	0,0625

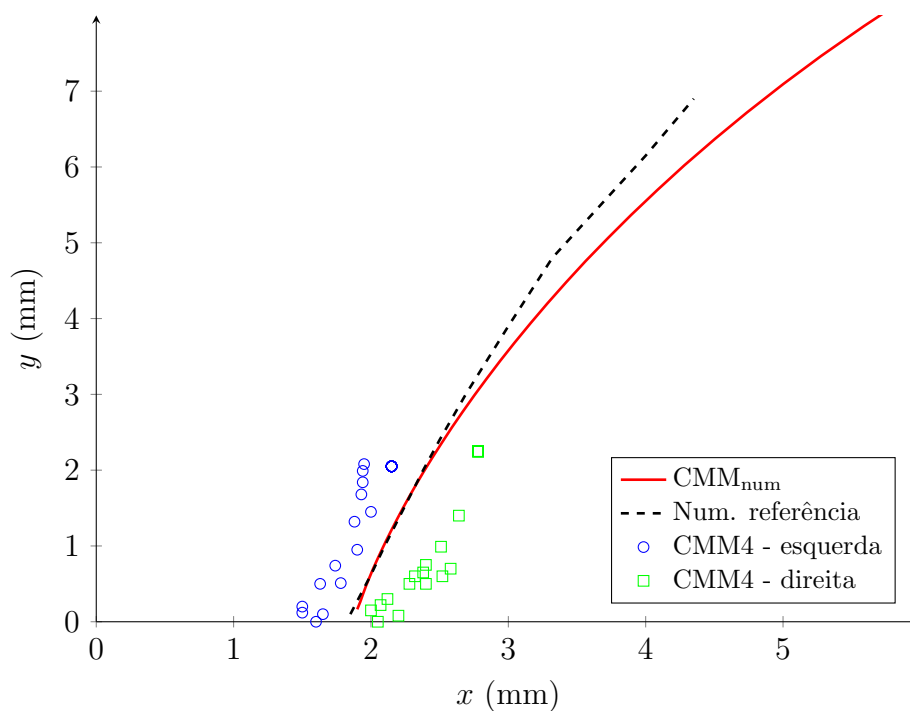
O teste realizado com o código computacional desenvolvido é identificado por CMM<sub>num</sub>,

enquanto que CMM4 se refere ao ensaio experimental. O contorno inicial é novamente discretizado com 172 elementos, sendo que, desses elementos, 20 estão em cada face da trinca. A Figura 5.31 ilustra a discretização e as condições de contorno utilizadas.



**Figura 5.31:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 110^\circ$  e  $\theta = -1,5^\circ$ : discretização e condições de contorno

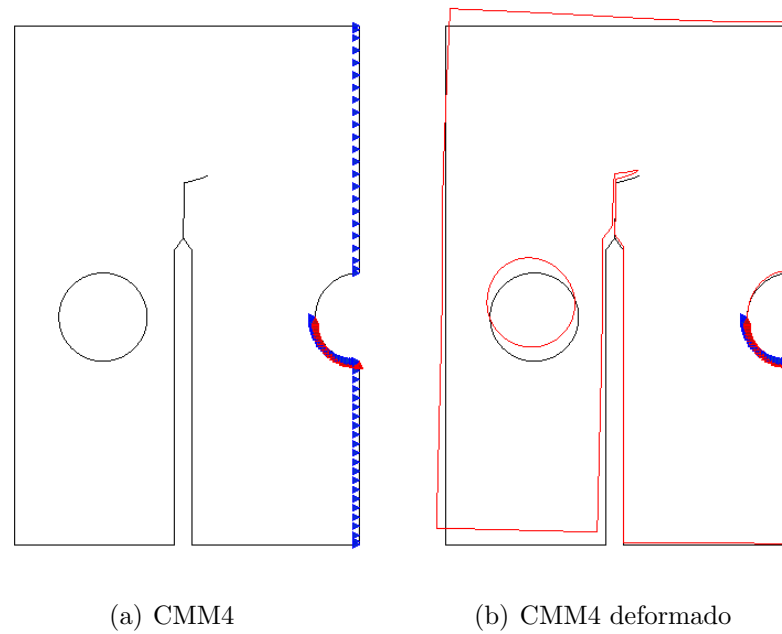
Partindo do comprimento inicial, a trinca é propagada por 10,23 mm e atinge um comprimento final de 16,5 mm. A trinca analisada pelo código desenvolvido tem sua trajetória apresentada na Figura 5.26, juntamente com os resultados obtidos experimentalmente e numericamente para o CMM4.



**Figura 5.32:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 110^\circ$  e  $\theta = -1,5^\circ$ : trajetória

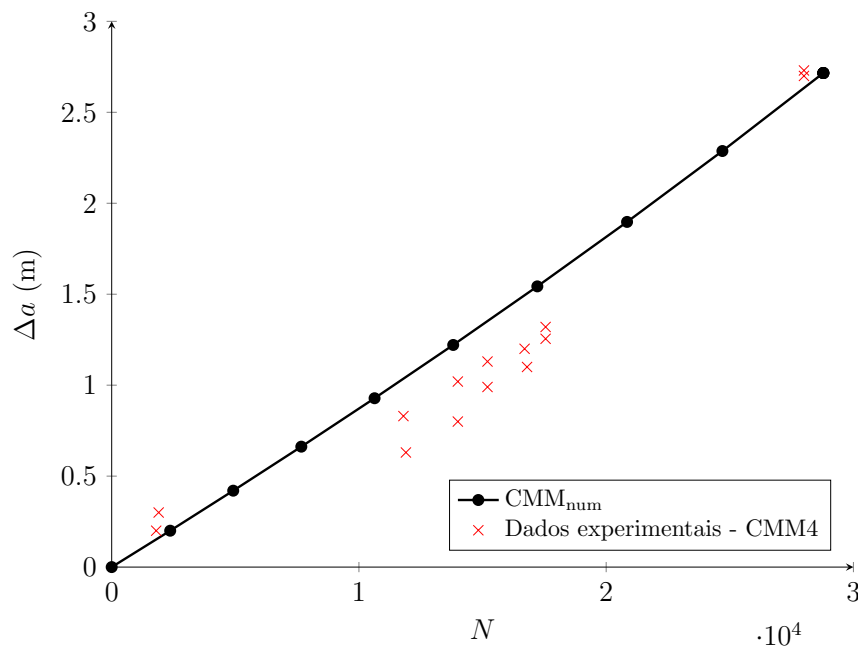
Os resultados obtidos com o código desenvolvido apresentam boa correspondência com os resultados esperados pela referência numérica e também com os dados experimentais obtidos para o CMM4.

O experimento CMM4 foi propagado até que  $\Delta a$  atingisse 2,7 mm. Nessa condição, o número de ciclos medido experimentalmente é de 27782 ciclos. Para que o CMM\_num atinja o mesmo  $\Delta a$ , são necessários 28783 ciclos. A configuração final do CMM4 é apresentada na Figura 5.33(a) e a deformada dessa configuração, com os deslocamentos ampliados em 40 vezes é apresentada na Figura 5.33(b).



**Figura 5.33:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 110^\circ$  e  $\theta = -1,5^\circ$ : configuração final e deformada

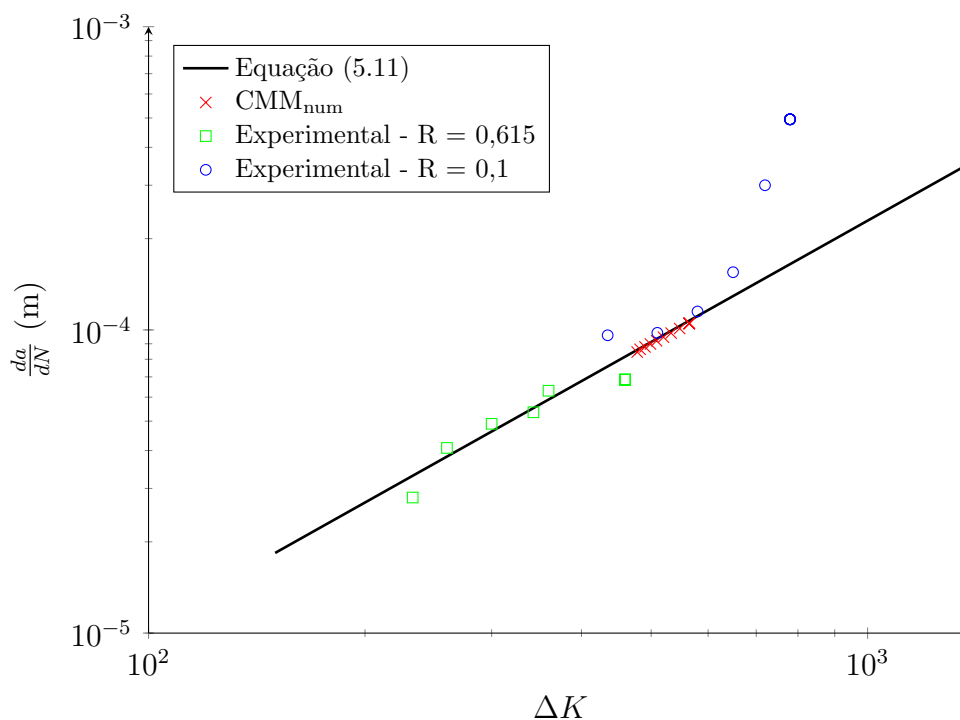
A representação gráfica de  $\Delta a \times N$  é apresentada na Figura 5.34.



**Figura 5.34:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 110^\circ$  e  $\theta = -1,5^\circ$ : número de ciclos x variação do comprimento da trinca

Na Figura 5.35 são apresentados os valores de  $\Delta K_{Ieq}$  sobre a curva adotada pela referência na definição das constantes de Paris. Os dados numéricos restringem-se à

propagação até 2,7 mm, correspondente aos dados experimentais disponíveis.



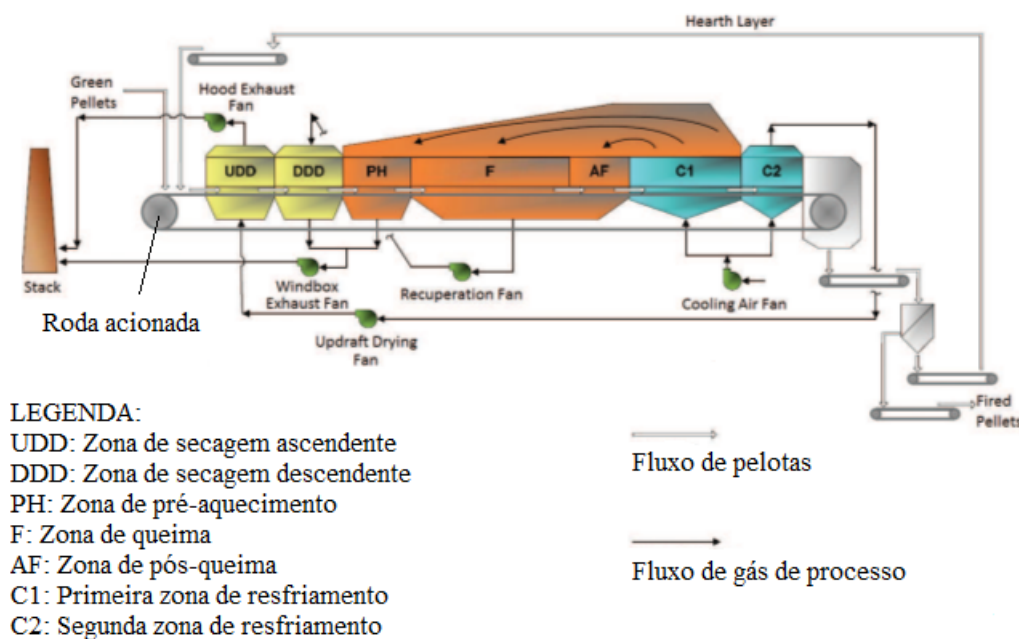
**Figura 5.35:** *Compact Mixed Mode* com  $\alpha = 110^\circ$  e  $\theta = -1,5^\circ$ :  $da/dN \times dK$

Pela Figura 5.34, percebe-se que os dados experimentais do CMM4 e os dados obtidos pelo código desenvolvido estão bem próximos. Como esse experimento cresce até  $\Delta a = 2,7$  mm, ele ainda se encontra na região II, governada pela Equação de Paris e, por isso, há uma grande concordância entre os dados experimentais de Chambers et al. (1991) e os dados numéricos obtidos pelo código computacional.

## 5.4 Estudo de caso: fadiga na roda acionada de um forno de pelletização de minério de ferro do tipo grelha reta móvel

Nessa seção é apresentado um estudo de caso hipotético referente à fadiga em um componente de um equipamento real, bastante comum na indústria de mineração, sobretudo no Brasil. O processo de grelha reta é muito utilizado em mineração para a secagem e endurecimento de pelotas de minério de ferro. O processo consiste na secagem, aquecimento

e resfriamento das pelotas, a fim de melhorar as propriedades mecânicas do minério de ferro a ser utilizado nos alto fornos da indústria siderúrgica para produção de aço. A Figura 5.36 ilustra o equipamento, conhecido como forno de endurecimento, utilizado nesse processo. Os fornos de endurecimento mais modernos possuem comprimento da ordem de 200 m.

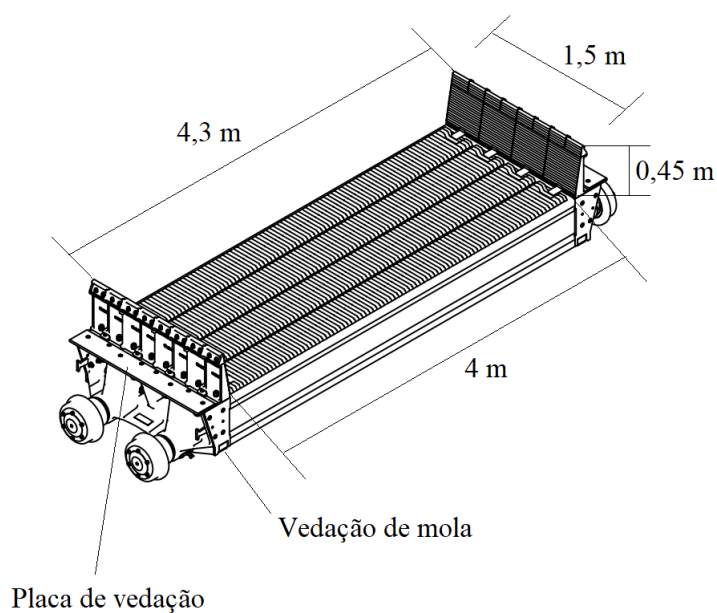


**Figura 5.36:** Representação do processo em um forno de endurecimento de minério de ferro do tipo grelha móvel reta (Adaptado de de Moraes et al. (2018))

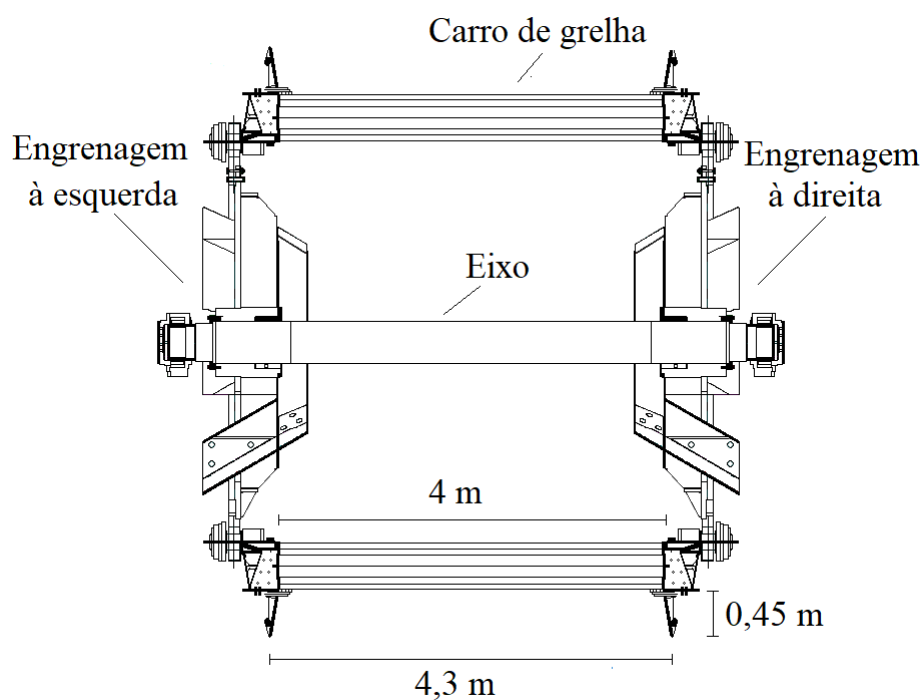
Conforme de Moraes et al. (2018), as pelotas de minério recém produzidas e ainda úmidas são transportadas ao longo de um único forno, subdivido em regiões. Inicialmente, o processo de secagem das pelotas ocorre nas zonas identificadas por UDD e DDD. Nesse processo, o fluxo de ar é soprado de forma ascendente (UDD) e descendente (DDD), para que a secagem das pelotas de minério ocorra de maneira uniforme. O fluxo de ar utilizado nesse processo vem do reaproveitamento do ar quente gerado no processo de resfriamento das pelotas, que ocorre na região final do forno. Após a secagem, o minério passa ao processo de altas temperaturas, o qual é dividido em três fases: o pré-aquecimento (PH), a queima (F) e a pós-queima (AF). Para finalizar o processo de endurecimento das pelotas de minério de ferro, passa-se por duas etapas de resfriamento, identificadas por C1 e C2. Nas etapas de resfriamento, o ar é aquecido, devido à alta temperatura das

pelotas. A fim de otimizar o processo e evitar desperdício de energia, esse ar aquecido é redirecionado para a etapa de secagem e reaproveitado. O processo de grelha reta é, portanto, constituído por um fluxo contínuo de carros, denominados carros de grelha, carregados de pelotas. Os carros de grelha apresentam 4 rodas e possuem dimensões horizontais de 1,5 m por 4 m, conforme ilustrado na Figura 5.37, e se deslocam por trilhos no interior do forno. Esses carros não são motorizados e o movimento se dá exclusivamente pelos motores elétricos acoplados à roda acionada do forno (ver Figura 5.36), sendo que o impulso fornecido deve ser suficiente para movimentar todos os carros carregados com minério. Essa roda é composta por duas grandes engrenagens, com diâmetro primitivo superior a 4 m e cujos dentes impulsionam os carros de grelha nos eixos de suas rodas, conforme ilustrado na Figura 5.38. As duas engrenagens são interligadas por um eixo único. Ao final do processo, após percorrer todo o comprimento do forno, há outra roda similar, porém sem acionamento elétrico, que recebe os carros de grelha em movimento e gira impulsionada pelo peso desses carros. Nesse processo, as pelotas endurecidas são descarregadas num silo, seguindo adiante por transportadores de correia. Essa segunda roda é usualmente denominada de roda da descarga do forno. Após o descarregamento, os carros de grelha retornam sobre os trilhos ligeiramente inclinados e de “cabeça para baixo” até serem capturados novamente pela roda acionada.





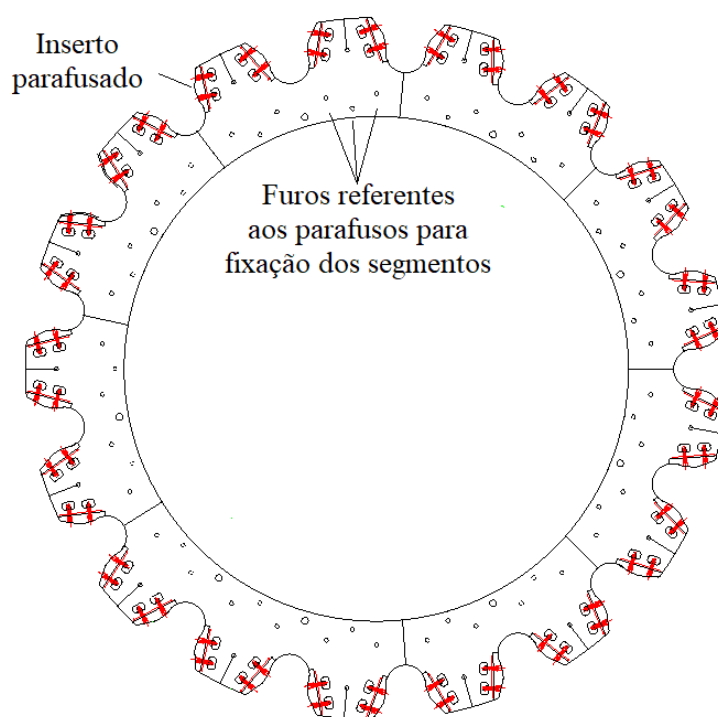
**Figura 5.37:** Dimensões do carro de grelha



**Figura 5.38:** Corte ilustrativo de uma roda tipo engrenagem que realiza o transporte dos carros de grelha entre os percursos de carga e retorno no forno de endurecimento

Cada engrenagem das rodas citadas possui 17 dentes e diâmetro primitivo igual a 4136 mm. Os 17 dentes são divididos em 7 segmentos com 2 dentes e 1 segmento com 3 dentes, todos eles parafusados a um disco que se liga ao eixo. A Figura 5.39 ilustra esse conjunto

de segmentos. Ao longo da operação é comum a ocorrência de desgaste nesses dentes em função do contato repetido com os eixos dos carros. Desta forma, os projetos mais recentes têm um inserto parafusado nessa região de contato que pode ser mais facilmente removido e substituído durante o processo de manutenção. Entretanto, o projeto com insertos faz com que sejam gerados novos pontos de concentração de tensão, pontos esses que são o foco da análise de fadiga aqui apresentada.



**Figura 5.39:** Roda (engrenagem) de acionamento de grelha reta

A roda de acionamento, posicionada no início do processo, é responsável por carregar os carros de grelha do trilho inferior até o trilho superior. Cada carro tem peso de, aproximadamente, 100 kN e, de forma conservadora, assume-se que um único dente de cada lado da roda fica responsável por metade desse peso, suportando, portanto, uma carga máxima de 50 kN a cada rotação. Além disso, ao atingir o trilho superior, a roda deve impulsionar a fileira de carros carregados com pelotas já em movimento, ao introduzir esse novo carro à ela. Assumindo um forno com 195 m de comprimento, essa fileira é composta por 130 carros e considera-se, além da resistência ao rolamento das rodas desses carros, os seguintes pontos de atrito entre as estruturas do forno e o carro:

- entre a placa de vedação e a parede do forno;
- e na vedação de mola.

A placa de vedação e a vedação de mola estão identificadas na Figura 5.37. Essas estruturas de vedação são necessárias para evitar o escape de ar quente de dentro do forno e consequente perda energética no processo. Esses pontos de vedação recebem lubrificação constante para redução do atrito, porém, é muito comum a ocorrência de falhas nessas linhas de lubrificação, gerando incertezas com relação às forças atuantes nesses contatos.

Com relação à resistência ao rolamento, tem-se como valores típicos para rodas de ferro fundido em contato com trilhos de aço um  $c_{rr} = 0,002$  a  $0,0065$ . Tal coeficiente deve ser multiplicado à força normal total para se obter a força horizontal de resistência. Ressalta-se, entretanto, que é também comum, no meio de tantas rodas dos carros de grelha, a ocorrência de defeitos nos rolamentos, o que levaria a um aumento desse coeficiente. Desalinhamentos, também comuns nesse tipo de equipamento, podem levar ao atrito das abas laterais das rodas às laterais dos trilhos.

Com base nesses argumentos, decidiu-se por majorar o coeficiente  $c_{rr}$ , introduzindo nele os efeitos relativos ao atrito nas vedações, bem como os defeitos e atrito nas rodas dos carros. Três casos foram considerados nas análises numéricas:  $c_{rr} = 0,075$ ,  $0,090$  e  $0,100$ . Numa aplicação real, tais coeficientes poderiam ser melhor estimados com base no histórico de corrente elétrica registrado para os motores do acionamento da roda inicial do forno.

Os cálculos para a obtenção da carga relativa ao impulsionamento dos 130 carros estão detalhados abaixo.

- Massa de um carro de grelha ( $m_{cg}$ ):

$$m_{cg} = 10,25 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

- Volume de pelotas em um carro de grelha ( $V_{cg}$ ) – ver Figura 5.37:

$$V_{cg} = \frac{(4,3 \text{ m} + 4 \text{ m})}{2} \cdot 1,5 \text{ m} \cdot 0,45 \text{ m} = 2,80125 \text{ m}^3$$

- Massa da carga de pelotas de minério de ferro ( $m_p$ ), cuja densidade  $\rho_p$  é igual a  $2,1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$ :

$$m_p = 2,80125 \text{ m}^3 \cdot 2,1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3 = 5,883 \cdot 10^3 \text{ kg}$$

- Peso dos 130 carros de grelha carregados:

$$P_c = 130 \cdot (10,25 \cdot 10^3 \text{ kg} + 5,883 \cdot 10^3 \text{ kg}) \cdot 9,81 \text{ m/s}^2 \approx 20575 \text{ kN} \quad (5.12)$$

A carga a ser aplicada a cada rotação depende do coeficiente de resistência ao rolamento adotada. Dessa forma, a carga relativa à continuação do movimento dos carros ( $F_{mov}$ ) é:

$$F_{mov} = c_{rr} \cdot P_c = 20575 \text{ kN} \cdot c_{rr} \quad (5.13)$$

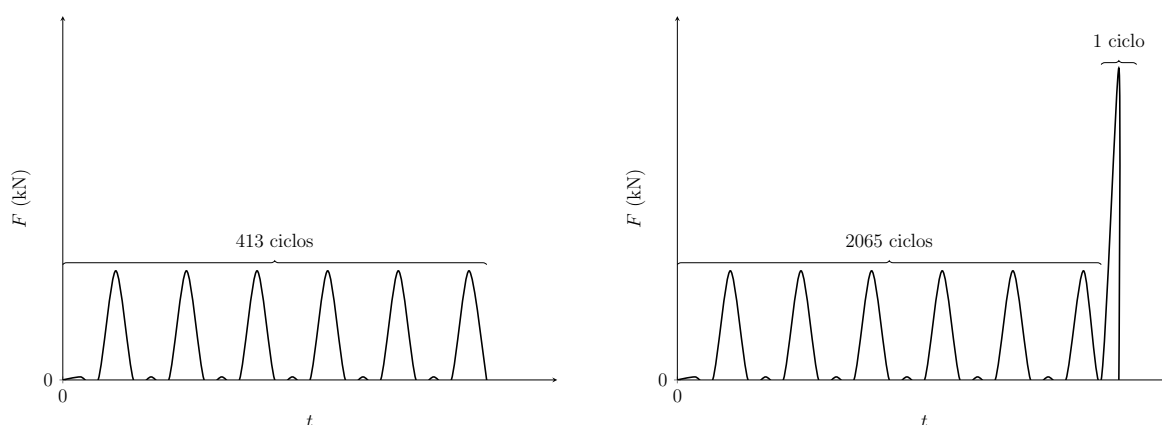
A velocidade de translação dos carros de grelha ao longo do forno é de, aproximadamente, 4,5 m/min. Essa translação gera uma velocidade de rotação aproximada na roda igual a 1,8 rad/min (considerando que o centro de massa de um carro encontra-se a, aproximadamente, 2,5 m do centro do eixo da roda), o que corresponde a 0,2865 rotações por minuto. Por dia, essa engrenagem realiza 413 rotações, representando, portanto, 413 repetições das cargas de carregamento de um carro, com magnitude de 50 kN, e impulsionamento de 130 carros de grelha, com magnitude dada pela equação (5.13).

Além disso, todos os dias, o processo é interrompido, com a parada da grelha por aproximadamente 5 min, para a troca de um dos carros. No reinício do processo, a roda de acionamento precisa impulsionar todos os carros de grelha a partir do repouso. Esse reinício apresenta um atrito maior do que aquele envolvido na continuação do movimento. Nesse processo, utiliza-se um coeficiente de atrito  $\mu$  igual a 0,25, referente à carga dos 130 carros de grelha carregados (equação (5.12)). A carga envolvida nesse processo é dada por:

$$F_{rep} = \mu \cdot P = 0,25 \cdot 20575 \text{ kN} = 5143,75 \text{ kN} \quad (5.14)$$

Essa carga pode, no entanto, ser evitada. Basta que, a partir da identificação de uma trinca, o dente de engrenagem trincado passe a ser monitorado, evitando que a parada aconteça quando esse dente está carregado, ou seja, na posição superior, uma vez que apenas o dente nessa posição terá a função de empurrar todos os carros a partir do

repouso. Nesse caso, a carga apresentada na equação (5.14) não seria considerada na análise de fadiga desse dente. Porém, caso não ocorra o monitoramento, esse dente fica sujeito a um pico de carga muito elevado. Portanto, serão consideradas duas situações. A primeira situação envolve o monitoramento das paradas, evitando sempre que o dente trincado seja submetido a essa carga. Nessa situação, o carregamento à fadiga é composto por 413 carregamentos diários do peso de meio carro de grelha e da carga de continuação do movimento, dada pela equação (5.13). Na segunda situação, o dente trincado não é evitado e, de maneira conservadora, considera-se que esse dente será responsável por reiniciar o movimento da grelha, a partir do repouso, uma vez a cada 5 dias. Dessa forma, o carregamento cíclico será composto por 2065 ciclos, relativos ao peso de meio carro e à carga de continuação do movimento, e 1 ciclo relativo ao reinício da translação dos 130 carros de grelha carregados, repetidos periodicamente. A representação genérica desses carregamentos é apresentada na Figura 5.40.



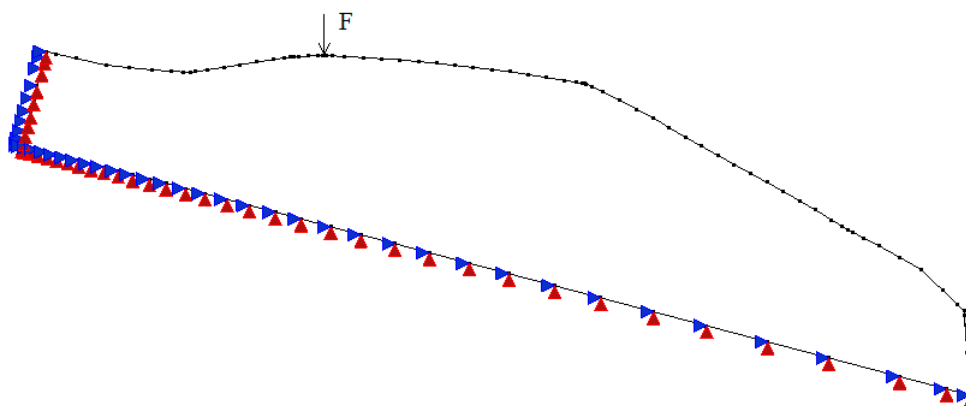
(a) Sem acionamento do repouso

(b) Com acionamento do repouso a cada 5 dias

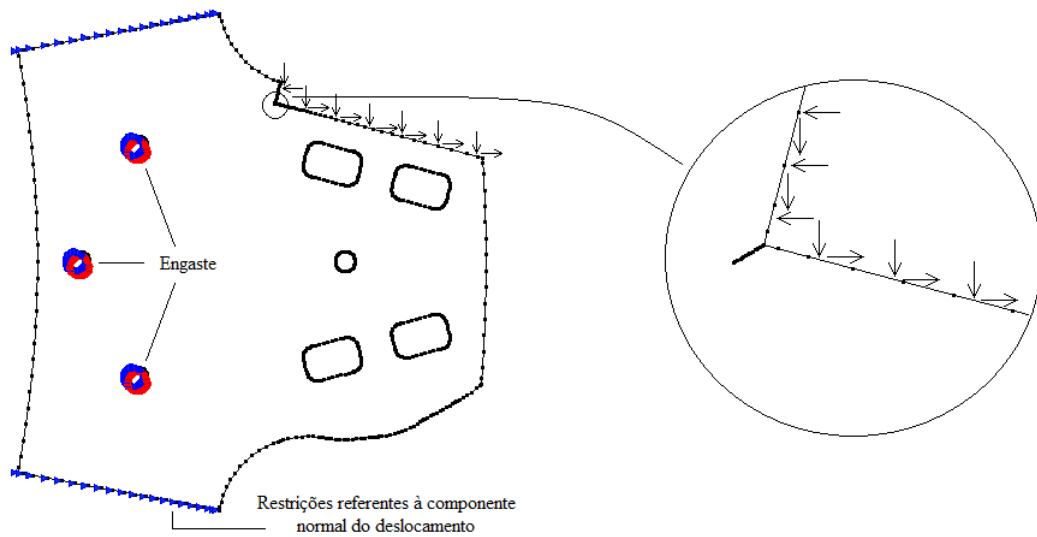
**Figura 5.40:** Roda de acionamento de grelha reta: representação do carregamento

Para a avaliação do comportamento à fadiga, analisa-se um dente da engrenagem representada na Figura 5.39. Considera-se que esse dente apresenta uma trinca posicionada na quina de encontro entre a peça parafusada, i.e., o inserto, e o corpo do dente, com comprimento inicial igual a 2 mm, que corresponde a uma dimensão identificável em inspeções usuais. A análise foi realizada em duas etapas: inicialmente foi desenvolvido um modelo do inserto ao qual os carregamentos foram aplicados e uma análise elástica foi

realizada. As forças de superfície obtidas na região de contato com o corpo principal do dente foram então transmitidas a um segundo modelo, correspondente a essa região e com a presença da trinca. Essa troca de informações foi automatizada no programa. A carga é aplicada no ponto de contato do dente com o eixo da roda de um carro no ponto superior. Esse ponto de contato está localizado 10 mm acima do diâmetro primitivo, no inserto parafusado, o qual é considerado engastado no encontro com o corpo do dente. As reações geradas são aplicadas no corpo do dente e a trinca é analisada sob fadiga. Com relação ao corpo do dente, os furos de fixação ao disco foram considerados engastados, enquanto a componente normal de deslocamentos no contorno antes e após o dente foram consideradas nulas. A malha do inserto é composta por 51 elementos de contorno quadráticos, enquanto o corpo do dente é discretizado, inicialmente, com 278 elementos quadráticos. Desses elementos, 270 estão no contorno geral e 4 compõem cada face da trinca. A discretização e as condições de contorno da peça e do corpo do dente da engrenagem são apresentadas nas Figuras 5.41 e 5.42.



**Figura 5.41:** Discretização e condições de contorno do modelo numérico do inserto



**Figura 5.42:** Discretização e condições de contorno do modelo numérico do corpo do dente

Considera-se que o material da engrenagem seja o aço AISI 4340, cujas propriedades são dadas na Tabela 5.11.

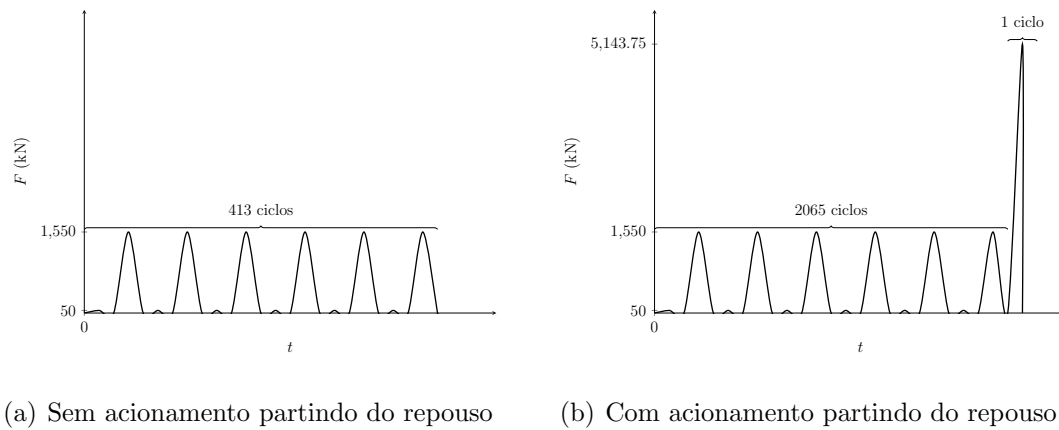
**Tabela 5.11:** Roda de acionamento de grelha reta: propriedades do material

Dados	
Grandeza	Valor
$E$	207 GPa
$\nu$	0,3
$C_0$	$5,11 \cdot 10^{-13} \frac{\text{m/ciclo}}{(\text{MPa}\sqrt{\text{m}})^m}$
$m$	3,24
$\gamma$	0,42
$K_{Ic}$	$130 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$

Em cada uma das situações propostas, a trinca é propagada até que  $K_{Ieq}^{max}$  atinja a tenacidade à fratura  $K_{Ic}$  do material. Para cada valor de  $c_{rr}$  são testadas duas hipóteses: evitando a carga de impulsão a partir do repouso ou permitindo que essa carga aconteça a cada 5 dias. Os resultados são apresentados nas subseções a seguir.

### 5.4.1 $c_{rr} = 0,075$

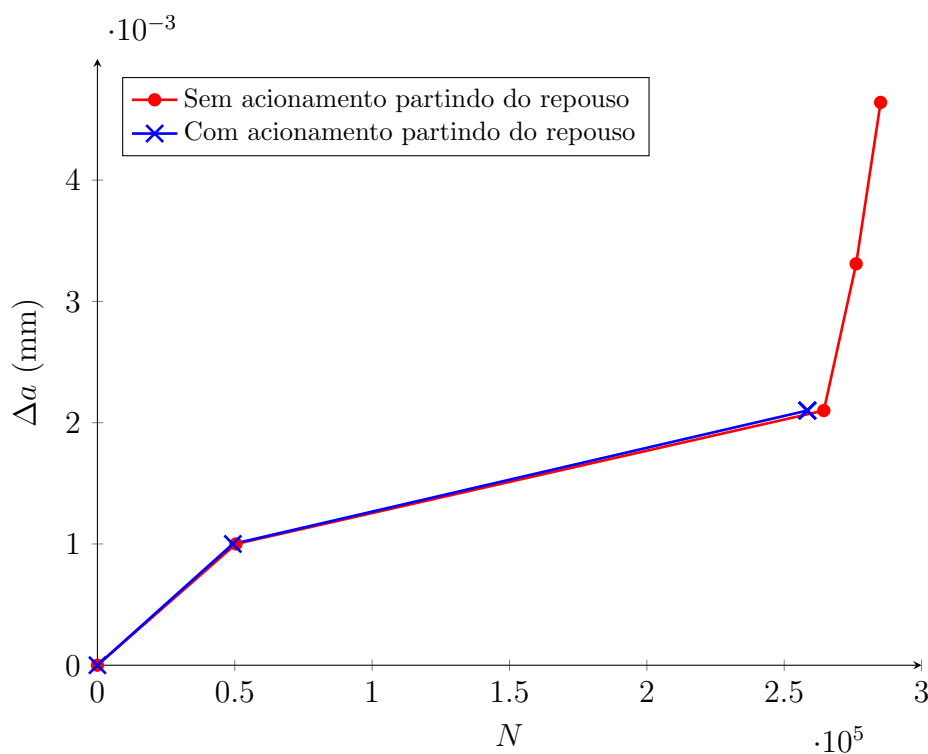
Considerando o coeficiente de resistência ao rolamento igual a 0,075, a carga referente à continuação do movimento apresenta valor aproximadamente igual a 1550 kN. Nessa condição, os carregamentos cíclicos são representados graficamente pela Figura 5.43.



**Figura 5.43:** Carregamentos para  $c_{rr} = 0,075$

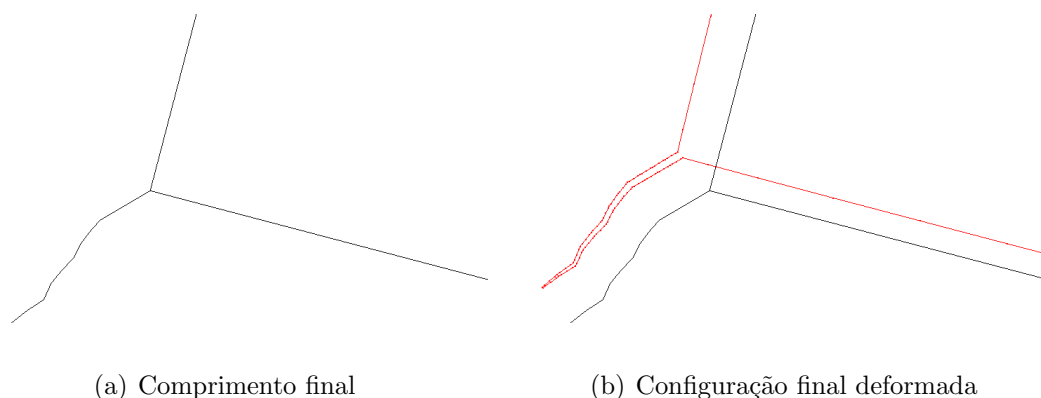
Ao fim da análise de fadiga, são fornecidos os valores do número de ciclos envolvidos na propagação. A Figura 5.44 apresenta o gráfico do número de ciclos gastos na propagação com relação ao  $\Delta a$  desenvolvido, para as duas hipóteses de carregamento.



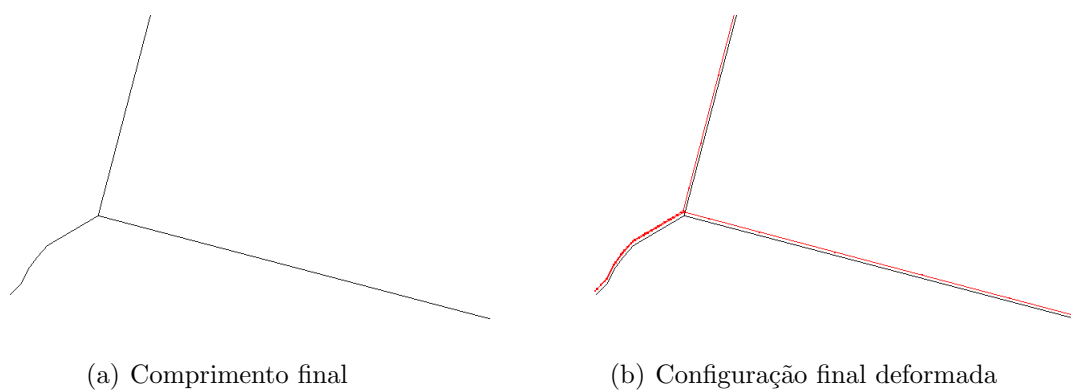


**Figura 5.44:** Gráfico  $\Delta a \times N$  para  $c_{rr} = 0,075$

Quando a análise é realizada considerando-se o monitoramento do dente trincado e, por consequência, evitando a carga de acionamento partindo do repouso, a trinca se propaga até atingir um comprimento final  $a_c = 6,61$  mm, sendo transcorridos 285090 ciclos. Considerando que a roda realiza 0,2865 rotações por minuto, isso representaria uma vida útil de 691 dias para o dente trincado. Ao considerar o acionamento partindo do repouso a cada 5 dias, a trinca se propaga até 4,07 mm, com 258420 ciclos, tendo, portanto uma vida útil igual a 626,3 dias. Em ambas as situações, a vida útil estaria entre 1,5 e 2 anos. As configurações finais e suas deformadas são ilustradas nas Figuras 5.45 e 5.46, em que a primeira se refere ao dente monitorado e a segunda se refere àquele que reinicia o movimento a cada 5 dias. Apenas a região da trinca é apresentadas nessas figuras.



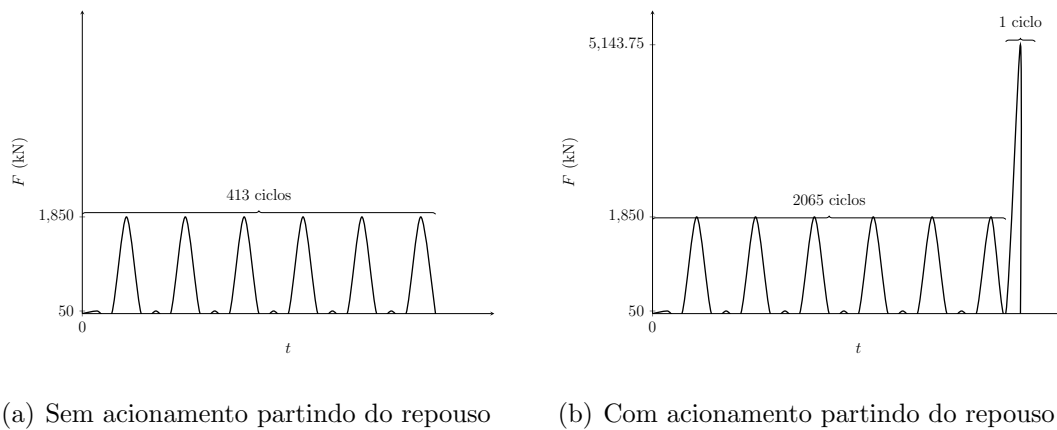
**Figura 5.45:** Roda de acionamento de grelha reta com  $c_{rr} = 0,075$ : configuração final sem acionamento partindo do repouso



**Figura 5.46:** Roda de acionamento de grelha reta com  $c_{rr} = 0,075$ : configuração final com acionamento partindo do repouso

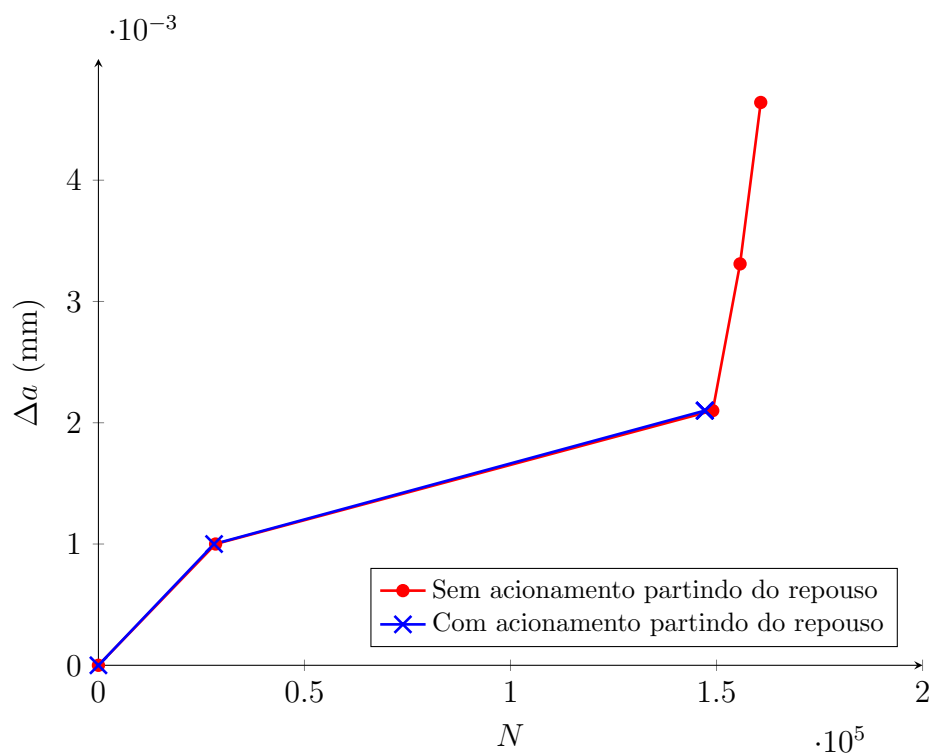
#### 5.4.2 $c_{rr} = 0,09$

A segunda hipótese considera o coeficiente de resistência ao rolamento igual a 0,09. Dessa forma, a carga relativa à impulsão para continuação do movimento tem valor aproximadamente igual a 1850 kN. A representação gráfica para os carregamentos cíclicos estão na Figura 5.47.



**Figura 5.47:** Carregamentos para  $c_{rr} = 0,090$

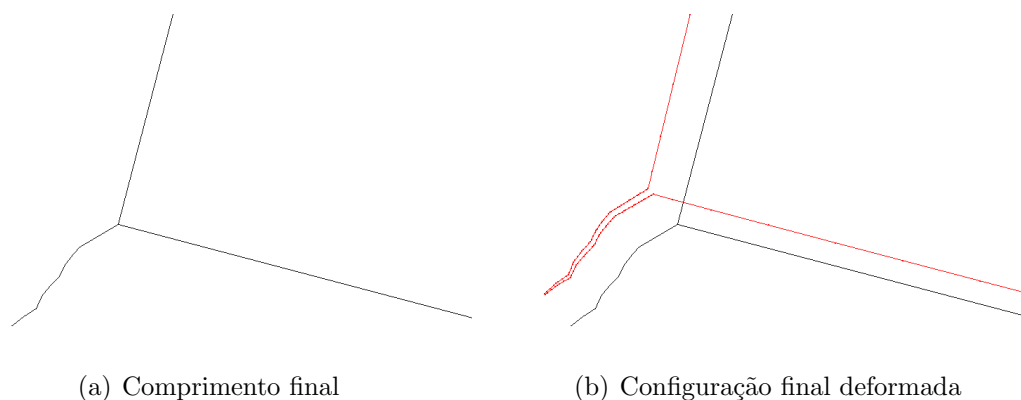
O número de ciclos necessários para a propagação até  $K_{Ieq}^{max}$  atingir a tenacidade à fratura são contabilizados com a aplicação do código computacional desenvolvido e estão apresentados na Figura 5.48.



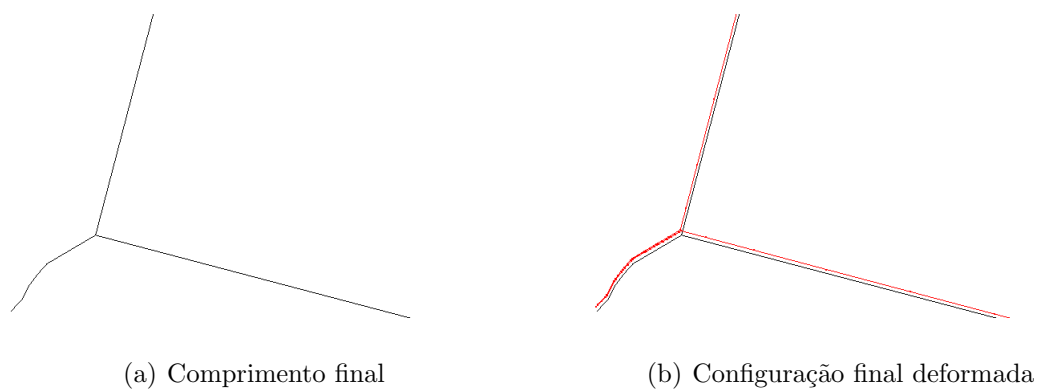
**Figura 5.48:** Gráfico  $\Delta a \times N$  para  $c_{rr} = 0,090$

No caso em que o dente trincado é monitorado e evita-se a carga de reinício do processo, a trinca atinge um comprimento final igual a 6,61 mm, com  $N = 160729$  ciclos. Nessa situação, a vida útil do componente seria de 389,6 dias. Caso esse cuidado não seja tomado

e o dente fique responsável por reiniciar a translação dos carros de grelha a cada 5 dias, a trinca atingiria um comprimento igual a 4,07 mm, propagando-se em 147161 ciclos, apresentando uma vida útil de 356,7 dias. Nos dois casos, a vida útil estaria próxima de 1 ano. As configurações finais, relativas à situação sem e com acionamento partindo do repouso, são ilustradas nas Figuras 5.49 e 5.50, respectivamente.



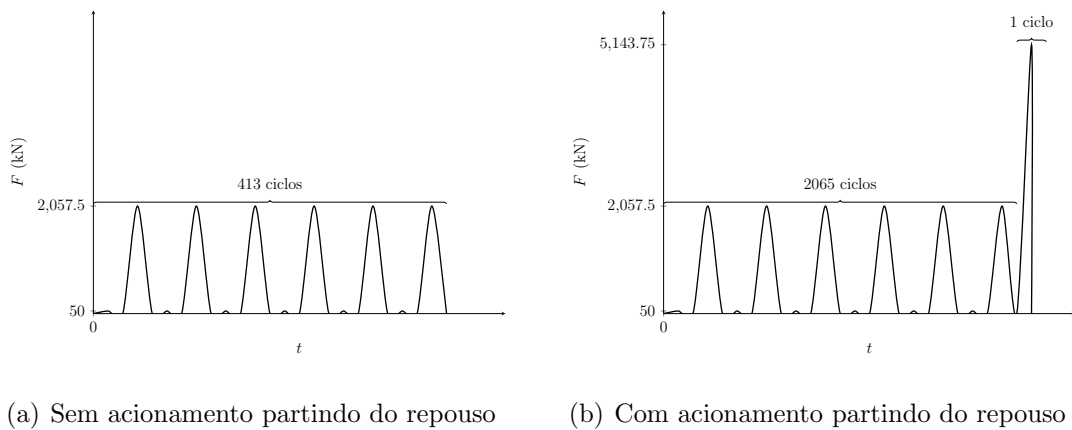
**Figura 5.49:** Roda de acionamento de grelha reta com  $c_{rr} = 0,090$ : configuração final sem acionamento partindo do repouso



**Figura 5.50:** Roda de acionamento de grelha reta com  $c_{rr} = 0,090$ : configuração final com acionamento partindo do repouso

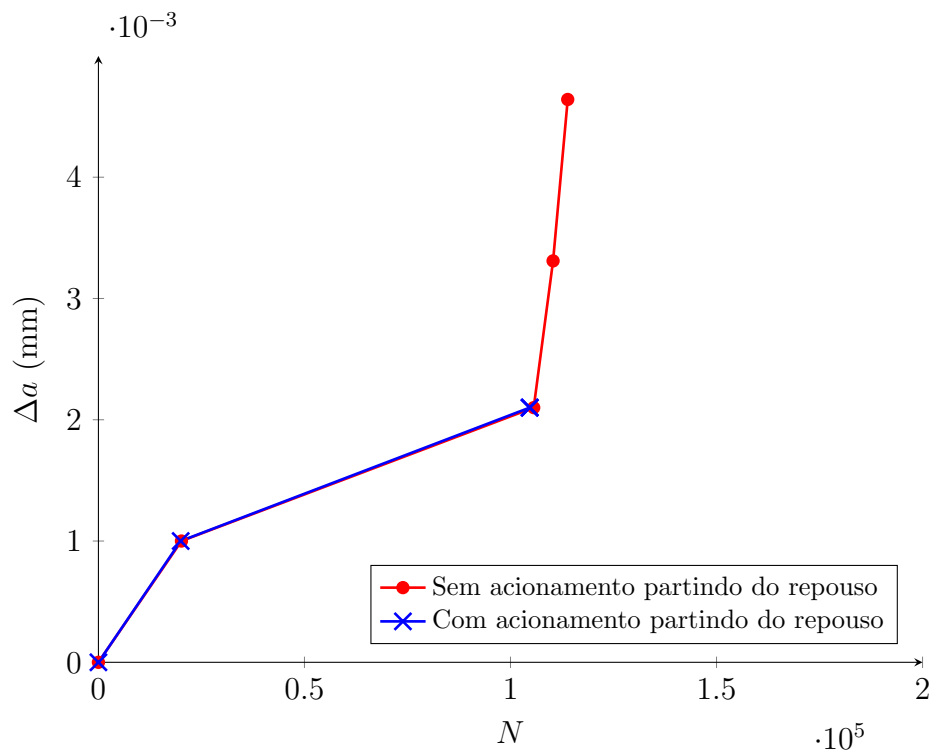
### 5.4.3 $c_{rr} = 0,1$

Por fim, a terceira hipótese considera que o coeficiente de resistência ao rolamento seria igual a 0,1. Nesse caso, a carga necessária para manter o movimento da grelha seria de 2057,5 kN. O carregamento cíclico referente a essa situação está representado na Figura 5.51.



**Figura 5.51:** Carregamentos para  $c_{rr} = 0,100$

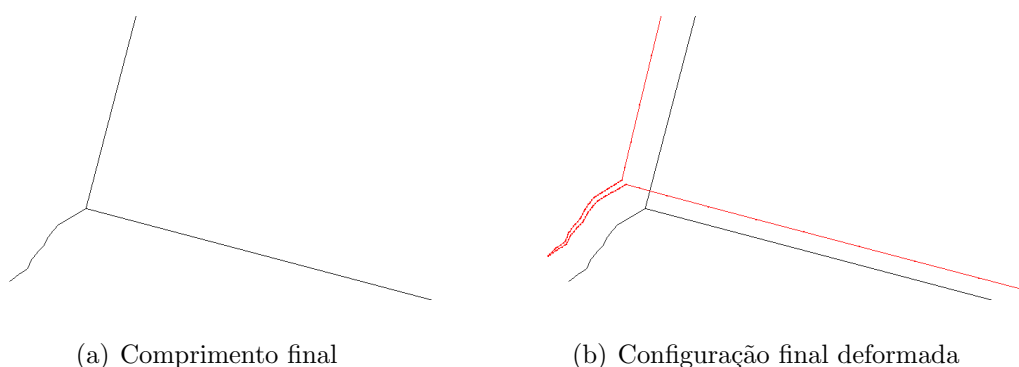
Ao analisar a fadiga nesse dente de engrenagem trincado com as cargas acima descritas, o código computacional desenvolvido retorna o número de ciclos necessários para que a trinca se propague até  $K_{Ieq}^{max}$  atingir  $K_{Ic}$ . Os resultados obtidos estão na Figura 5.52.



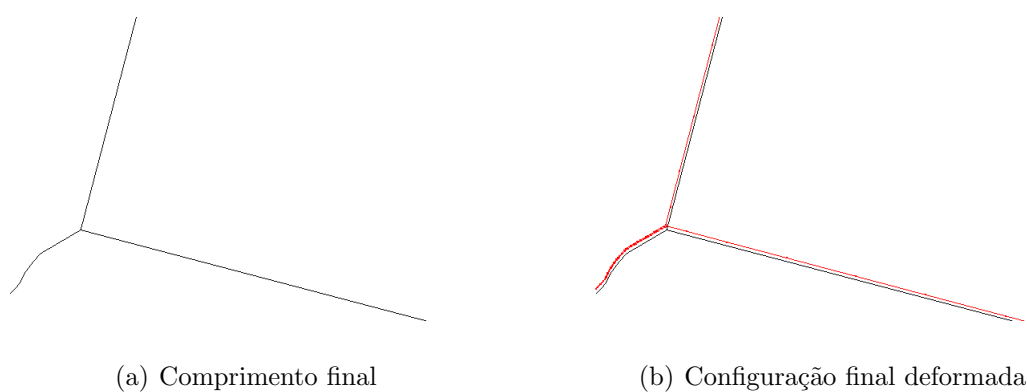
**Figura 5.52:** Gráfico  $\Delta a \times N$  para  $c_{rr} = 0,100$

Quando o dente trincado analisado não é utilizado para reiniciar o processo, são necessários, aproximadamente, 113890 ciclos para que ocorra a fratura frágil, momento em que a trinca atinge um comprimento final igual a 6,61 mm. Isso representa uma vida

útil de 276 dias. Caso seja necessário que o dente reinicie o movimento dos carros de grelha a cada 5 dias, a trinca atinge um comprimento de 4,07 mm, em um total de 104661 ciclos. Nessas condições, a vida útil do dente de engrenagem trincado seria de 253,7 dias. Portanto, para a utilização do  $c_{rr}$  igual a 0,1, a vida útil do equipamento estaria abaixo de 1 ano. A configuração final das hipóteses sem e com acionamento a partir do repouso são apresentadas nas Figuras 5.53 e 5.54, respectivamente.



**Figura 5.53:** Roda de acionamento de grelha reta com  $c_{rr} = 0,100$ : configuração final sem acionamento partindo do repouso



**Figura 5.54:** Roda de acionamento de grelha reta com  $c_{rr} = 0,100$ : configuração final com acionamento partindo do repouso

#### 5.4.4 Discussão

Um programa de manutenção típico desse equipamento prevê paradas com tempo suficiente para substituição de um segmento dentado do tipo analisado com uma frequência anual, ou seja, a cada 12 meses. Os estudos aqui apresentados mostram que, dependendo

da intensidade do atrito entre as partes móveis e fixas do forno, além da condição mecânica geral dos carros de grelha, há o risco de fratura frágil num tempo inferior ao intervalo programado entre essas intervenções. Isso significaria uma eventual perda de produção que poderia ser compensada a partir de um remanejamento nos planos de manutenção. Evidentemente, as perdas seriam ainda maiores, envolvendo paradas não planejadas, se a presença da trinca fosse negligenciada.

Cabe ressaltar, como dito anteriormente, que para uma avaliação mais precisa da vida útil do componente trincado, seria necessário analisar o histórico de correntes elétricas do motor de acionamento. Dessa forma, seria possível avaliar as cargas envolvidas no processo de transposição do carro de grelha, de continuação do movimento e de reinício do processo com maior precisão.

## Capítulo 6

### Considerações Finais

Nesse trabalho, foi desenvolvido um programa computacional baseado no método dos elementos de contorno dual para análise de fadiga. Nesse programa, as integrais singulares são resolvidas utilizando o método proposto por Gao (2006). Os fatores de intensidade de tensão podem ser obtidos pelo método da correlação de deslocamentos ou pela integral J, sendo essa última técnica mais utilizada devido a sua maior precisão. O ângulo referente à direção de propagação das trincas é obtido pelo critério da Máxima Tensão Circunferencial e corrigido através da técnica proposta por Portela (1993). Por fim, o número de ciclos é contabilizado através da integração, pela Regra de Simpson, da Equação de Paris, modificada de forma a considerar a influência da razão de tensões e de modos mistos de fratura. O programa permite, ainda, a análise de fadiga de componentes sujeitos a carregamentos cíclicos irregulares, cujos ciclos são contados pelo algoritmo denominado *Rainflow Cycle Counting*.

O método utilizado para a solução de integrais singulares, proposto por Gao (2006), é eficiente e confiável no tratamento das integrais singulares, retornando resultados mais próximos dos valores de referência do que o Método da Subtração de Singularidade, a depender da ordem de truncamento das funções que compõem o integrando. Para elementos retilíneos, o método apresentado por Gao (2006) consegue fornecer o resultado esperado por outras metodologias em sua formulação mais básica, com 3 termos polinomiais de expansão, para todas as integrais analisadas. Já o MSS, consegue retornar o resultado



esperado com a função de interpolação truncada no primeiro termo apenas na análise da integral fortemente singular. Na análise da integral hipersingular, o método requer que a função de interpolação seja expandida até, pelo menos, o segundo termo. Já na análise da integral fracamente singular, mesmo com a função de interpolação completamente expandida não é possível obter o resultado esperado pela referência. Para elementos curvos, enquanto o MSS necessita que outras variáveis presentes no núcleo da integral sejam expandidas, sendo uma tarefa muito trabalhosa, o método proposto por Gao (2006) só requer o aumento do número de termos polinomiais, para a obtenção de resultados mais confiáveis, o que é realizado facilmente no arquivo de entrada, sem a necessidade de reimplementar o código. Portanto, essa metodologia apresenta uma implementação simples e rápida, é eficiente na análise e solução das integrais e fornece resultados confiáveis, permitindo avaliar integrais singulares de ordem qualquer em um único procedimento numérico. Dessa forma, todas as integrais singulares que surgem ao longo do desenvolvimento do MECD e na análise de fadiga são resolvidas por esse procedimento.

A aplicação do MECD se mostrou crucial para a otimização do processo de análise de fadiga, sendo uma ferramenta eficaz e confiável. O método permite a rápida e direta avaliação dos campos pertencentes aos pontos internos que compõem o contorno da integral  $J$ , facilitando a obtenção dos fatores de intensidade de tensão. Além disso, a capacidade da malha de acompanhar o crescimento da trinca se mostrou muito vantajosa na análise de propagação. O contorno anterior ao crescimento da fissura é mantido e são incluídos apenas os novos elementos referentes ao incremento propagado. Isso permite o reaproveitamento do sistema de equações já gerado para o contorno, sendo necessário apenas a introdução das equações referentes aos novos pontos fonte e elementos, diminuindo, assim, o custo computacional.

Para a obtenção dos fatores de intensidade de tensão, implementou-se o método da correlação de deslocamentos e três diferentes métodos de avaliação da integral  $J$ . O método da integral  $J$  se provou mais preciso que a correlação de deslocamentos através da realização de testes, sendo capaz de retornar resultados mais confiáveis, com base em outras referências, na análise de modo I ou modo II puro de fratura e também modos mistos

I e II. Quanto às diferentes metodologias de avaliação da integral  $J$ , fica claro que não há a necessidade de subdividir o contorno da integral  $J$ , sejam essas subdivisões para emprego da regra dos trapézios ou para interpolação de funções polinomiais. A simples integração direta nos pontos de integração de Gauss fornece resultados tão precisos quanto aqueles obtidos com as outras duas metodologias, que envolvem a divisão do contorno circular em elementos.

Com base nos exemplos apresentados no Capítulo 5, percebe-se que as modificações realizadas na Equação de Paris, de forma a incorporar os efeitos da razão de tensões diferente de zero e de modos mistos de fratura apresentaram resultados confiáveis. O código implementado com essa metodologia é capaz de analisar modo I, modo II e modo misto I e II de fratura, com igual precisão e eficiência. Além disso, percebe-se, pelo apresentado no exemplo contido na subseção 5.3.1, que variações na razão de tensões influenciam na vida à fadiga e devem ser levadas em consideração nas análises. Percebe-se, também, pelo exemplo apresentado na subseção 5.2.3, que o código desenvolvido é capaz de analisar, corretamente, componentes sujeitos a carregamentos cíclicos de amplitude variável. Isso se deve à correta implementação do método *Rainflow Cycle Counting* e posterior transformação do carregamento cíclico de amplitude variável em um carregamento equivalente, com amplitude constante.

Por fim, com a implementação das metodologias apresentadas, foi desenvolvido um programa computacional completo para a análise de fadiga bidimensional, capaz de analisar os campos elásticos envolvidos no problema, calcular os fatores de intensidade de tensão na ponta da trinca, determinar o caminho de propagação e contabilizar o número de ciclos até a fratura frágil. Como demonstrado nos exemplos presentes na seção 5.4, o código desenvolvido é aplicável a situações reais de análise de fadiga bidimensional, com base na abordagem de tolerância ao dano, sendo capaz de prever a vida útil remanescente do componente analisado.

## 6.1 Sugestões para Trabalhos Futuros

Algumas sugestões para trabalhos futuros são apresentadas, como forma de dar continuidade ao que foi desenvolvido nessa dissertação:

1. Implementação de subrotina para a avaliação de múltiplas trincas ou trincas com múltiplas pontas, sendo capaz de avaliar diferentes taxas de crescimento para cada ponta;
2. Implementação de metodologias que considerem a plasticidade envolvida no processo de fadiga e de propagação de trincas, considerando a intensa deformação plástica ocorrida na ponta da trinca e ao longo do comprimento de propagação;
3. Aplicação de metodologias capazes de avaliar materiais heterogêneos ou a presença de dois ou mais materiais diferentes em um mesmo componente;
4. Aplicação de diferentes soluções fundamentais, de forma a contemplar materiais anisotrópicos ;
5. Implementação de outras metodologias para a avaliação da direção de propagação da trinca e do fator de intensidade de tensão equivalente de modo I;
6. Implementação de outras formulações, além da Equação de Walker, que considerem a interferência da razão de tensões  $R$  diferente de zero na taxa de crescimento da trinca por fadiga;
7. Implementação de formulações e metodologias capazes de analisar situações de fadiga tridimensional.

## Referências Bibliográficas

- Aliabadi, M. H., 1997. ‘A new generation of boundary elements for fracture mechanics’. *International Journal of Fracture*, vol. 86, pp. 91–125.
- Aliabadi, M. H., 2002. *The boundary element method. Applications in solids and structures*. John Wiley & Sons Inc, Chichester.
- Aliabadi, M. H. e Hall, W. S., 1989. ‘Two-dimensional boundary element kernel integration using series expansions’. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, vol. 6, pp. 140–143.
- Anderson, T. L., 2005. *Fracture Mechanics: Fundamentals and Applications*. third edn, Taylor & Francis Group.
- Andrade, H. C., 2017. Análise da propagação de fissuras em estruturas bidimensionais não-homogêneas via método dos elementos de contorno. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos - SP, Brasil.
- Betti, E., 1872. ‘Teoria dell elasticita’. *Il Nuovo Cimento*, pp. 7–10.
- Brebbia, C. A. e Dominguez, J., 1992. *Boundary Elements: An Introductory Course*. WIT Press/Computational Mechanics Publications.
- Broek, D., 1986. *Elementary Engineering Fracture Mechanics*. Martinus Nijhoff Publishers.
- Callister Júnior, W. D., 2002. *Ciência e Engenharia dos Materiais: Uma Introdução*. LTC, Rio de Janeiro.
- Chambers, A. C., Hyde, T. H. e Webster, J. J., 1991. ‘Mixed mode fatigue crack growth at 550°C under plane stress conditions in jethete m152’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 39, pp. 603–619.

- Civelek, M. B. e Erdogan, F., 1982. ‘Crack problems for a rectangular sheet and an infinite strip’. *Int. J. Fract.*, vol. 19, pp. 139–159.
- Code::Blocks, 2023, ‘Code::blocks’.  
**URL:** <https://www.codeblocks.org/>
- de Lima, A. G., da Silva Cunha, K. A., Carvalho, M. C. e Machado, H. A. G., 2010. ‘Fadiga em componentes mecânicos: estudo para redução de perdas econômicas e de vidas.’. *Simpósio de Excelência em Gestão e Tecnologia*, .
- de Moraes, S. L., de Lima, J. R. B. e Ribeiro, T. R., (2018), Iron ore pelletizing process: An overview, *in* V. Shatokha, ed., ‘Iron Ores and Iron Oxide Materials’, IntechOpen, chapter 3, pp. 41–59.
- de Santana, E. P., 2015. Análise do crescimento à fadiga, interação e coalescência de múltiplas trincas com o método dos elementos de contorno dual. Dissertação de Mestrado, Universidade de Brasília, Brasília, DF, Brasil.
- Dowling, N. E., 2013. *Mechanical Behavior of Materials: Engineering Methods for Deformation Fracture, and Fatigue*. fourth edn, Pearson.
- Erdogan, F. e Sih, G. C., 1963. ‘On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear’. *Journal of Basic Engineering*, pp. 519–525.
- Feng, G., Kang, Y., Chen, F., wei Liu, Y. e chuan Wang, X., 2017. ‘The influence of temperatures of mixed-mode (i+ii) and mode-ii fracture toughness of sandstone’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 189, pp. 51–63.
- Fonseca, B. B. F. e Peixoto, R. G., (2022), An efficiency study of the radial polynomial expansion method for solving singular integrals in the dual-bem, *in* ‘XLIII Ibero-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, ABMEC’, Foz do Iguaçu, Paraná, Brazil.
- Fredholm, I., 1903. ‘Sur une classe d’ equations fonctionnelles’. *Acta Mathematica*, vol. 27, pp. 365–390.
- Gao, X.-W., 2006. ‘Numerical evaluation of two-dimensional singular boundary integrals - theory and fortran code’. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 188, pp. 44–64.

- Gonzalez, M., Teixeira, P., Wrobel, L. C. e Martinez, M., 2015. 'A new displacement-based approach to calculate stress intensity factors with the boundary element method'. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 12, pp. 1677–1697.
- Green, G., 1828. *An Essay on the Application on Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism*. Nottingham.
- Griffith, A. A., 1921. 'The phenomena of rupture and flow in solids'. *Philosophical Transactions Of The Royal Society of London*, vol. 221, pp. 163–198.
- Hong, H. e Chen, J., 1988. 'Derivations of integral equations of elasticity'. *J. Eng. Mech*, vol. 114, pp. 1028–1044.
- INSANE, 2023, '*INTERactive Structural ANalysis Environment*'.  
**URL:** <https://www.insane.dees.ufmg.br/>
- Irwin, G. R., 1956. 'Onset of crack fast propagation in hih strength steel and aluminium alloys'. *Sagamore Research Conference Proceedings*, vol. 2, pp. 289–305.
- Isida, M., 1971. 'Effect of width and lengh on stress intensity factor of internally cracked plates under various boundary conditions'. *International Journal of Fracture Mechanics*, vol. 7, pp. 301–316.
- Jaswon, M. A., 1963. 'Integral equation methods in potential theory i'. *Proceedings of the Royal Society*, vol. 275, pp. 23–32.
- Jaswon, M. A. e Ponter, A. R., 1963. 'An integral equation solution of the torsion problem'. *Proceedings of the Royal Society*, vol. 275, pp. 237–246.
- Kanninem, M. F. e Popelar, C. H., 1985. *Advanced Fracture Mechanics*. Oxford University Press, London.
- Katsikadelis, J. T., 2002. *Boundary Elements: Theory and Applications*. Elsevier.
- Kitagawa, H., Okamura, H. e Ishikawa, H., 1976. 'Application of j-integral to mixed-mode crack problems'. *Trans. JSME*, (760-13), pp. 46–48.
- Kitagawa, H., Okamura, H. e Ishikawa, H., 1978. 'Application of j-integral to mixed-mode crack problems'. *Trans. JSME*, (780-4), pp. 52–54.

- Kupradze, V., 1965. *Potential Methods in the Theory of Elasticity*. Israel Programme for Scientific Translations.
- Kzam, A. K. L., 2009. Formulação dual em mecânica da fratura utilizando elementos de contorno curvos de ordem qualquer. Dissertação de Mestrado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Lee, Y.-L., Pan, J., Hathaway, R. B. e Barkey, M. E., 2005. *Fatigue testing and analysis (theory and practice)*. Elsevier.
- Meguid, S. A., 1989. *Engineering fracture mechanics*. Springer.
- Mikhlin, S., 1957. *Integral Equations*. Pergamon Press.
- Moreira, W. L., 2018. Estudo da propagação de trincas por fadiga em caçambas de recuperadoras de minério. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Murakami, Y., 1987. *Stress Intensity Factors Handbook*. Pergamon Press.
- Paris, P. C., Gomez, M. P. e Anderson, W. P., 1961. ‘A rational analytic theory of fatigue’. *The Trend in Engineering*, vol. 13, pp. 9–14.
- Paris, P. C. e Sih, G. C., 1965. ‘Stress analysis of cracks’. *ASTM STP 381*, pp. 30–83.
- Portela, A., 1993. *Dual boundary element analysis of crack growth*. Computational Mechanics Publications: Topics in engineering.
- Portela, A., Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., 1992a. ‘Dual boundary element analysis of cracked plates: singularity subtraction technique’. *International Journal of Fracture*, vol. 55, pp. 17–28.
- Portela, A., Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., 1992b. ‘The dual boundary element method: effective implementation for crack problems’. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 33, pp. 1269–1287.
- Portela, A., Aliabadi, M. H. e Rooke, D. P., 1993. ‘Dual boundary element incremental analysis of crack propagation’. *Computers & Structures*, vol. 46(2), pp. 237–247.
- Rice, J. R., 1968. ‘A path independent integral and the approximate analysis of strain concentration by notches and cracks’. *J. Appl. Mech*, vol. 35(2), pp. 379–386.

- Sajith, S., Murthy, K. S. R. K. e Robi, P. S., 2020. 'Experimental and numerical investigation of mixed mode fatigue crack growth models in aluminum 6061-t6'. *International Journal of Fatigue*, vol. 130.
- Sato, M., 2009. Modelagem de problemas da mecânica da fratura e propagação de trincas em fadiga. Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, SP, Brasil.
- Schettini, L. C. V., 2017. Análise de propagação de trincas por fadiga em uma viga da estrutura de um forno de reaquecimento. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Sih, G. C., 1973. *Handbook of Stress-Intensity Factors*. Lehigh University, Institute of Fracture and Solid Mechanics.
- Somigliana, C., 1885. 'Sopra l' equilibrio di' un corpo elastico isotropo'. *Il Nuovo Cimento*, pp. 17–20.
- Symm, G. T., 1963. 'Integral equation methods in potential theory ii'. *Proceedings of the Royal Society*, vol. 275, pp. 33–46.
- Symm, G. T., 1966. 'An integral solution in conformal mapping'. *Numerische Mathematik*, vol. 9, pp. 250–258.
- Tada, H., Paris, P. C. e Irwin, G. R., 2000. *The stress analysis of cracks handbook*. third edn, ASME Press.
- Tanaka, H., 1974. 'Fatigue crack propagation from a crack inclined to the cyclic tensile axis'. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 6, pp. 493–507.
- Zerbst, U., Madia, M., Vormwald, M. e Beier, H. T., 2017. 'Fatigue strength and fracture mechanics - a general perspective'. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 198, pp. 2–23.



## Apêndice A

### Solução Fundamental de Kelvin

Para obter uma representação integral de um problema de valor de contorno é necessário conhecer a solução fundamental do operador diferencial que rege o problema, a qual representa a solução das equações que governam o problema quando esse está submetido a uma força unitária. Para materiais isotrópicos, utiliza-se a solução fundamental de Kelvin. Os termos da solução fundamental de Kelvin estão presentes nas equações de deslocamento, gradiente de deslocamento e tensão. Para casos bidimensionais, os termos  $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  e  $t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  são utilizados na equação de deslocamento, seja ela relativa a pontos internos ou a pontos de contorno. Já para a EIC relativa à tensão, em pontos internos ou pontos do contorno, os termos utilizados são  $u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  e  $t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$ . Por fim, para a equação integral de contorno relativa ao gradiente de deslocamento, são utilizados os termos  $u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  e  $t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  da solução fundamental. Esses termos são apresentados nas equações a seguir.

- Termos  $u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  e  $t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  presentes nas equações integrais de contorno relativas ao deslocamento (equações (2.1), (2.3) e (2.29))

$$u_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{-1}{8\pi\mu(1-\bar{\nu})} [(3-4\bar{\nu}) \ln(r) \delta_{ij} - r_{,i}r_{,j}] \quad (\text{A.1})$$

$$t_{ij}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} \left\{ \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\bar{\nu})\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] - (1-2\bar{\nu})(n_j r_{,i} - n_i r_{,j}) \right\} \quad (\text{A.2})$$

- Termos  $u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  e  $t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  presentes nas equações integrais de contorno relativas à tensão ou à força de superfície (equações (2.2), (2.4), (2.30) e (2.47))

$$u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi(1-\bar{\nu})r} [(1-2\bar{\nu})(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ij}r_{,k}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (\text{A.3})$$

$$\begin{aligned} t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) &= \frac{\mu}{2\pi(1-\bar{\nu})r^2} \{ (1-2\bar{\nu})(2n_k r_{,i}r_{,j} + n_j \delta_{ik} + n_i \delta_{jk}) \\ &\quad + 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\bar{\nu})\delta_{ij}r_{,k} + \bar{\nu}(\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) - 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \\ &\quad + 2\bar{\nu}(n_i r_{,j}r_{,k} + n_j r_{,i}r_{,k}) - (1-4\bar{\nu})n_k \delta_{ij} \} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

- Termos  $u_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  e  $t_{ijk}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x})$  presentes na equação integral de contorno relativa ao gradiente de deslocamento (equações (3.18))

$$u_{ij,k}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\bar{\nu}r)} [(3-2\bar{\nu})\delta_{ij}r_{,k} - (\delta_{ik}r_{,j} + \delta_{jk}r_{,i}) + 2r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \quad (\text{A.5})$$

$$\begin{aligned} t_{ij,k}^*(\boldsymbol{\xi}, \mathbf{x}) &= \frac{-1}{4\pi(1-\bar{\nu})r^2} \{ n_i(1-2\bar{\nu})(2r_{,j}r_{,k} - \delta_{jk}) \\ &\quad + n_j(1-2\bar{\nu})(\delta_{ik} - 2r_{,i}r_{,k}) - n_k[(1-2\bar{\nu})\delta_{ij} + 2r_{,i}r_{,j}] \\ &\quad + 2 \frac{\partial r}{\partial n} [(1-2\bar{\nu})\delta_{ij}r_{,k} - \delta_{jk}r_{,i} - \delta_{ik}r_{,j} + 4r_{,i}r_{,j}r_{,k}] \} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

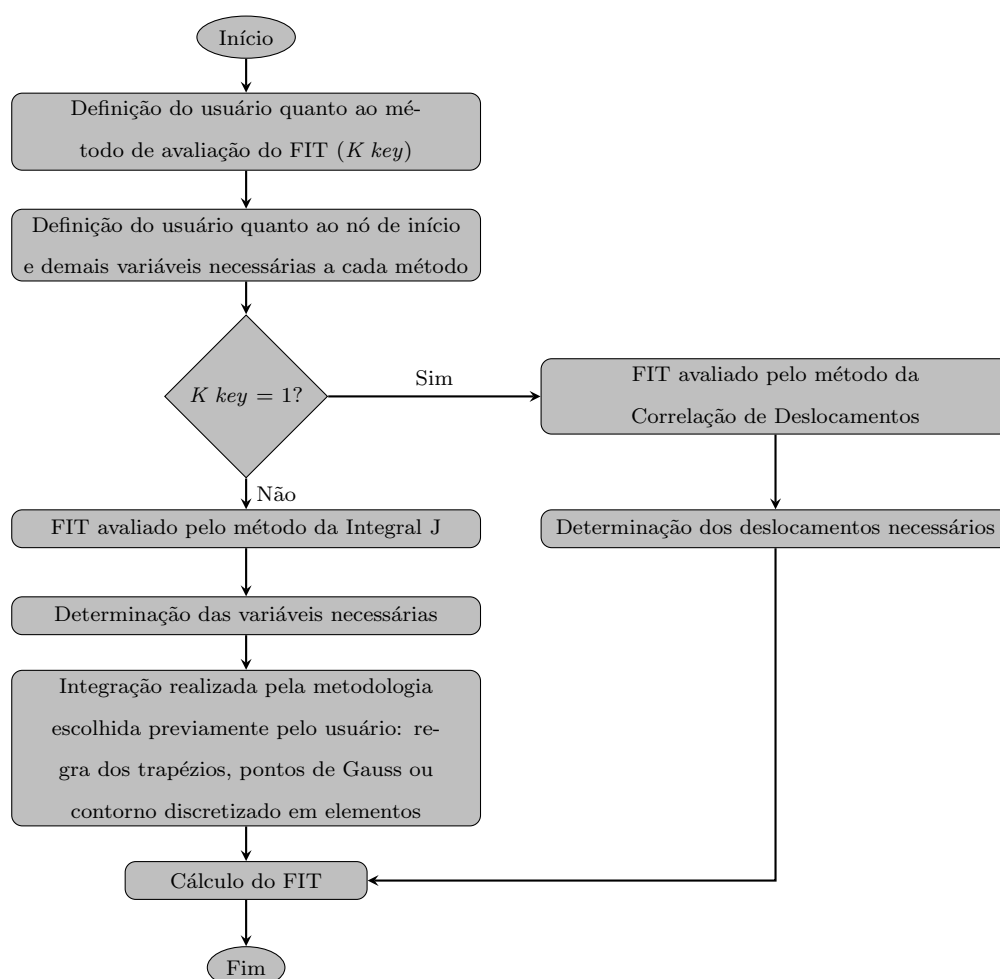
Nessas equações:

$$\begin{aligned} r_i &= x_i - \xi_i \\ r &= (r_i r_i)^{\frac{1}{2}} \\ r_{,i} &= \frac{r_i}{r} \\ \frac{\partial r}{\partial n} &= \frac{r_i}{r} n_i = r_{,i} n_i \\ \mu &= \frac{E}{2(1+\nu)} \\ \bar{\nu} &= \begin{cases} \nu & (EPD) \\ \frac{\nu}{(1+\nu)} & (EPT) \end{cases} \end{aligned}$$

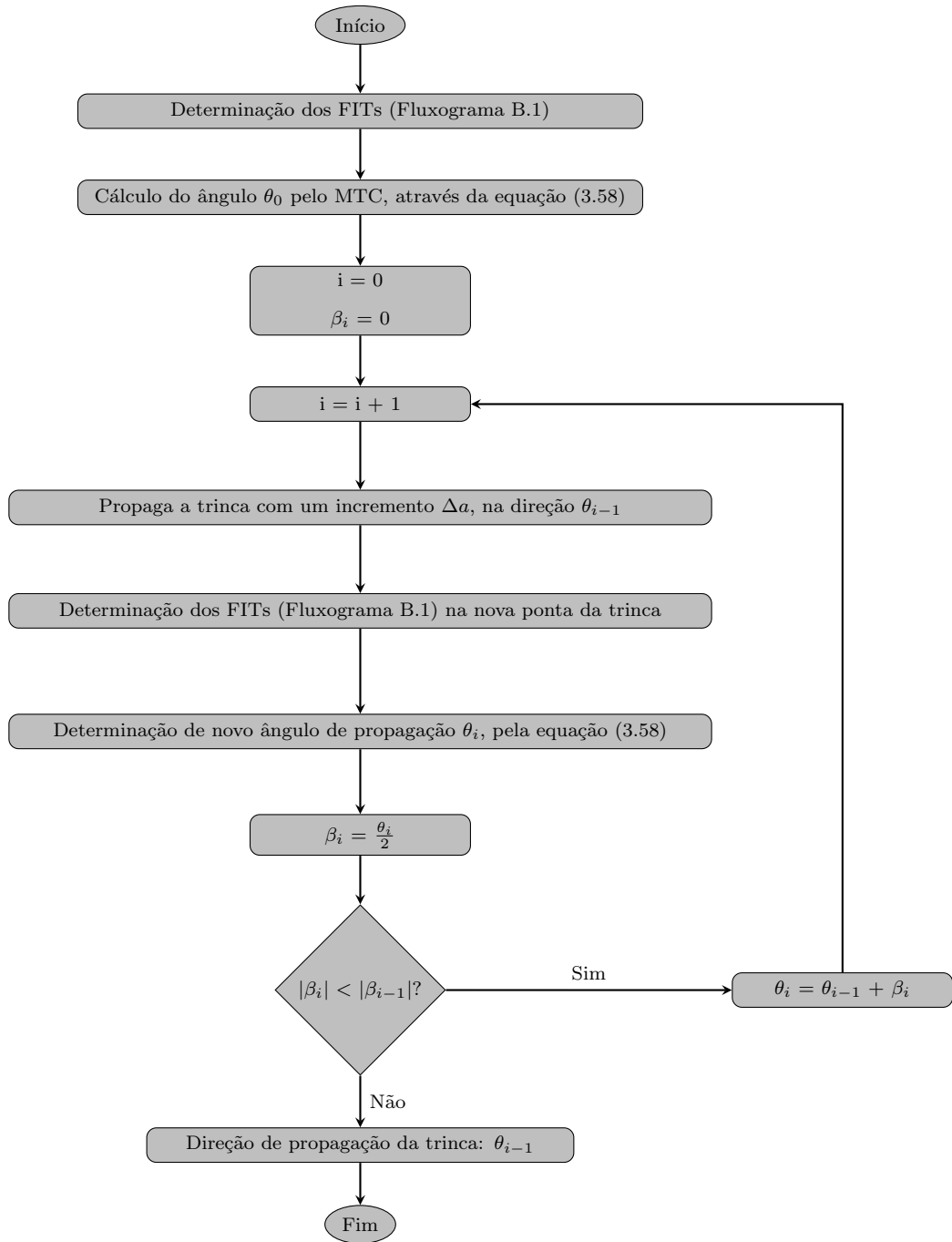
Nessas equações,  $E$  é o módulo de elasticidade e  $\nu$  é o coeficiente de Poisson, ambas propriedades do material.

## Apêndice B

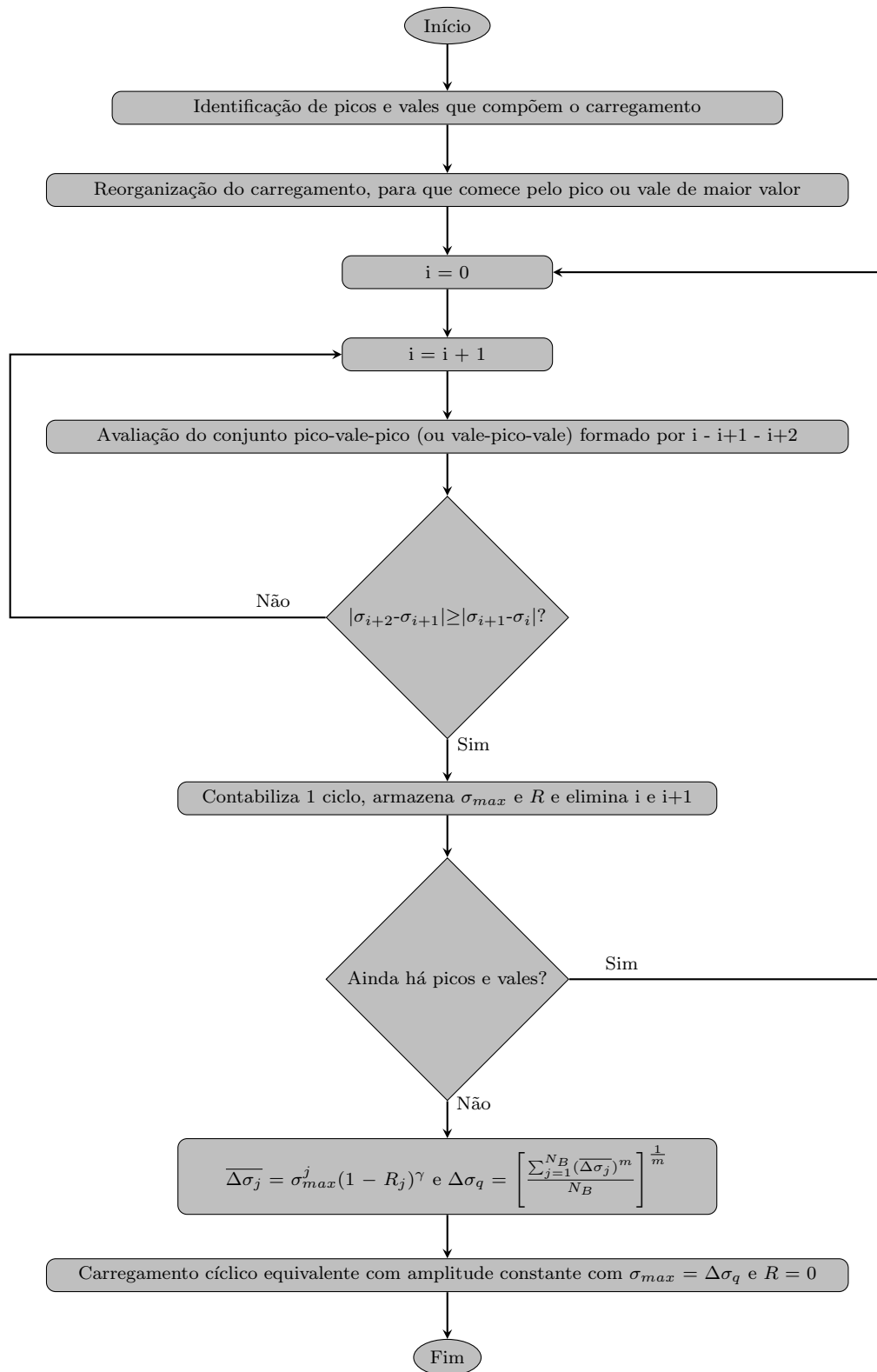
### Fluxogramas



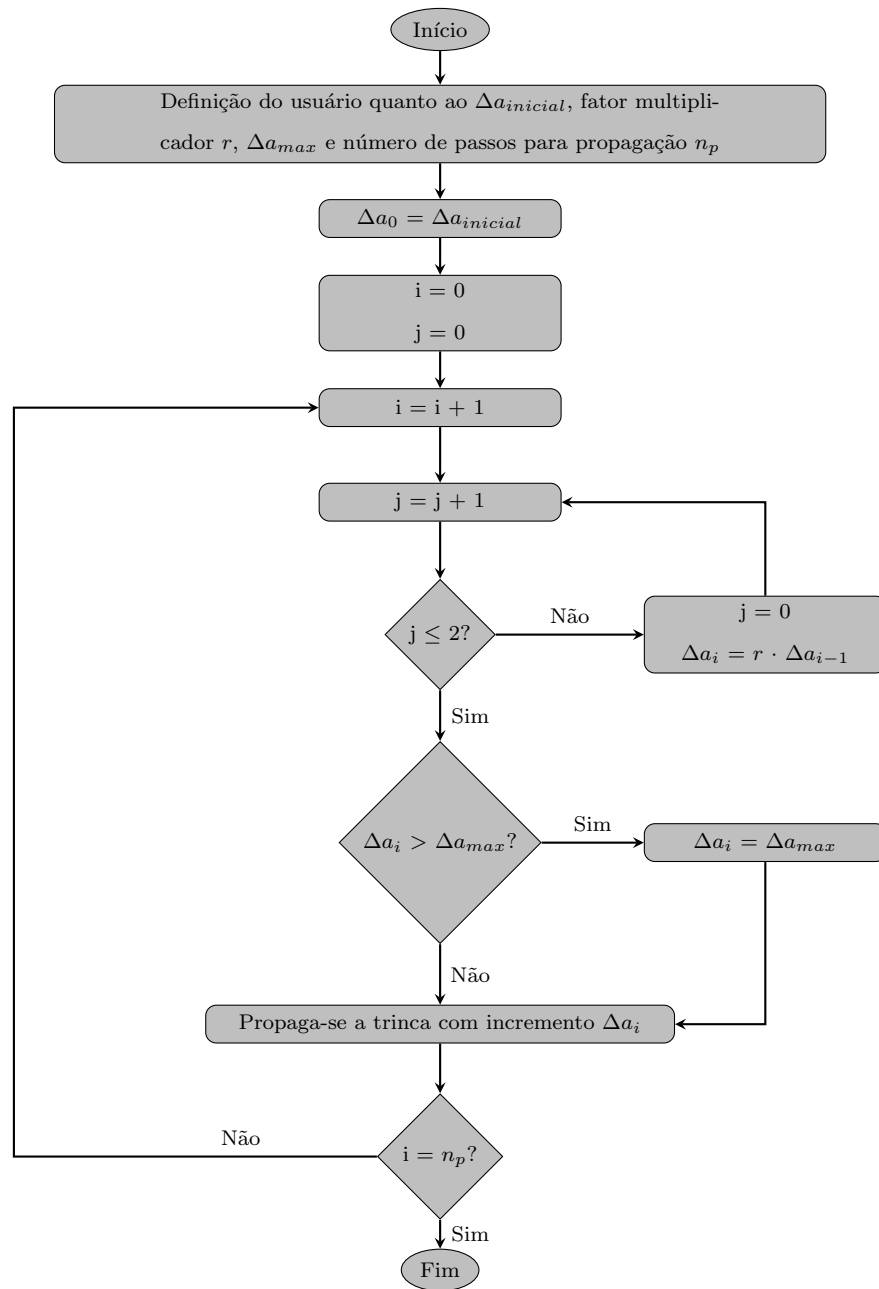
**Figura B.1:** Fluxograma do algoritmo para o cálculo dos fatores de intensidade de tensão



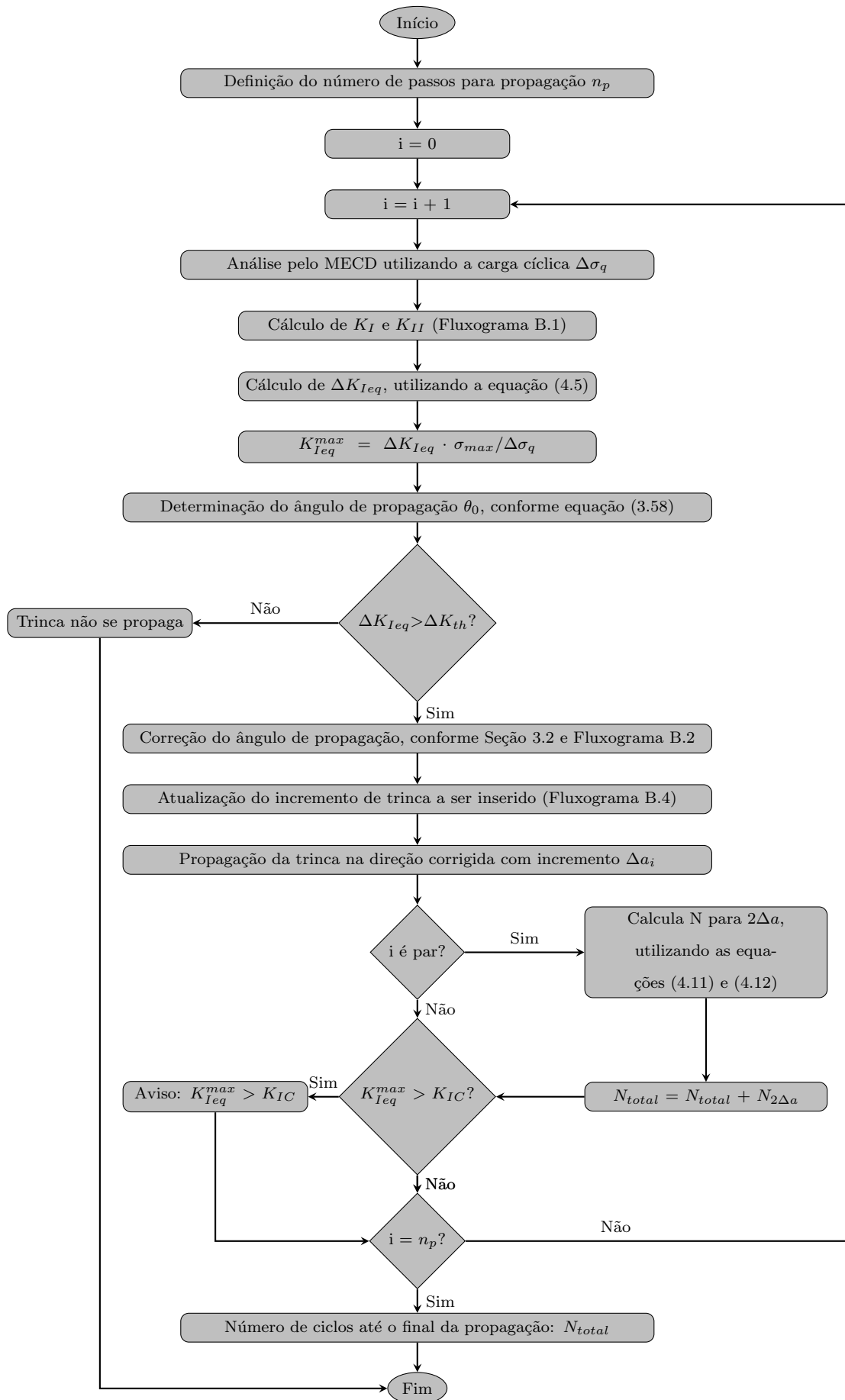
**Figura B.2:** Fluxograma do algoritmo para a determinação da direção de propagação



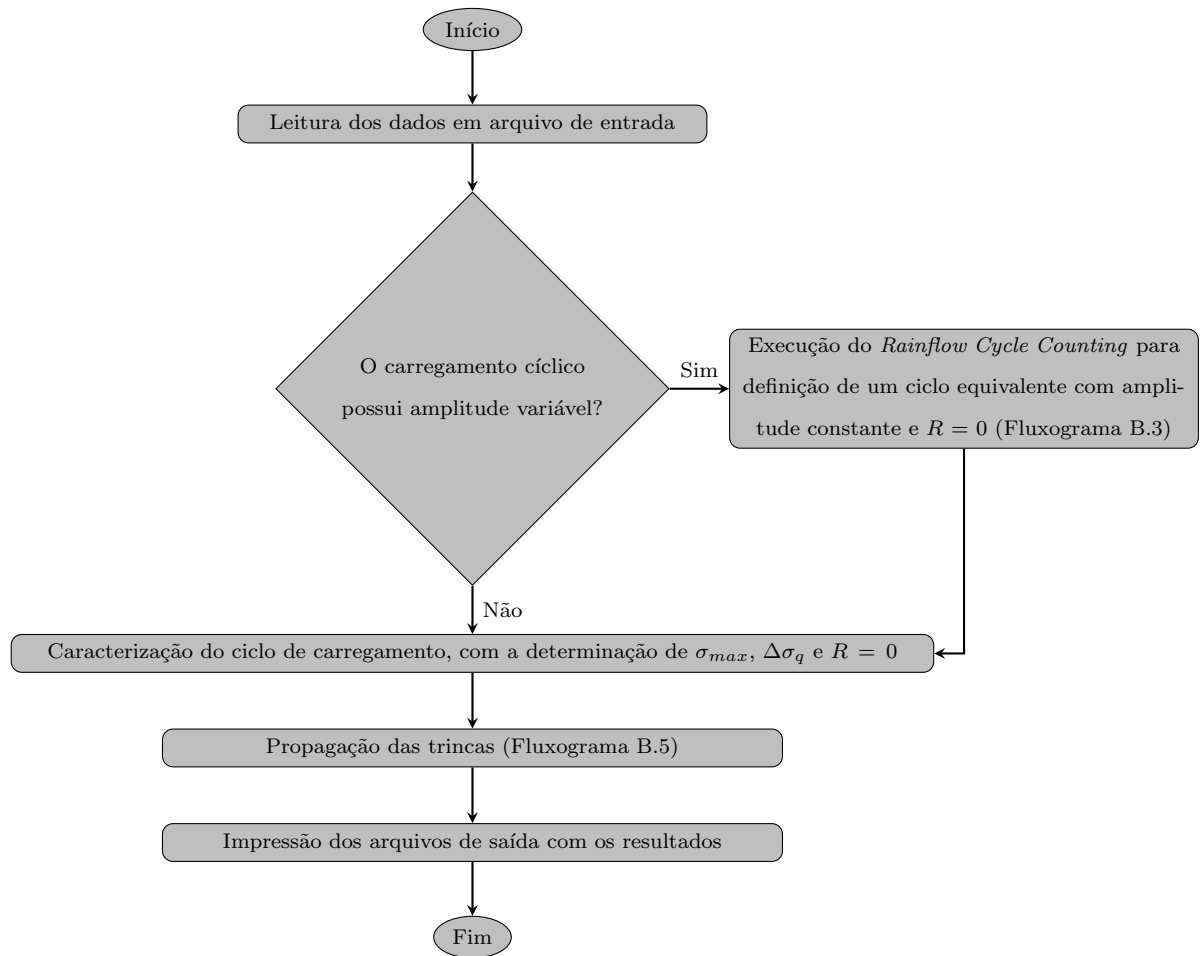
**Figura B.3:** Fluxograma do algoritmo para a contagem de ciclos pelo método *rainflow* e obtenção de um carregamento cíclico equivalente com amplitude constante e  $R = 0$



**Figura B.4:** Fluxograma do algoritmo para a determinação do incremento da trinca  $\Delta a$



**Figura B.5:** Fluxograma do algoritmo para a propagação de trincas



**Figura B.6:** Fluxograma geral do programa computacional



## Apêndice C

# Dedução da Fórmula do Ângulo de Propagação

Partindo da equação (3.55) igualada a 0, tem-se:

$$\frac{1}{2\sqrt{2\pi r}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left\{ K_I \operatorname{sen}(\theta) + K_{II} [3 \cos(\theta) - 1] \right\} = 0$$

$$K_I \operatorname{sen}(\theta) + K_{II} [3 \cos(\theta) - 1] = 0 \cdot \frac{2\sqrt{2\pi r}}{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}$$

Portanto,

$$K_I \operatorname{sen}\theta + K_{II}(3 \cos \theta - 1) = 0$$

$$K_I \operatorname{sen}\theta = K_{II}(1 - 3 \cos \theta)$$

$$K_I \operatorname{sen}\theta = K_{II}(1 - \cos \theta) - 2K_{II} \cos \theta$$

$$K_I = K_{II} \frac{(1 - \cos \theta)}{\operatorname{sen}\theta} - 2K_{II} \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Sabendo que:

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2} = \frac{1 - \cos \theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

e

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\theta} = \frac{\cos \theta}{\operatorname{sen}\theta}$$

Tem-se que:

$$K_I = K_{II} \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} - \frac{2}{\operatorname{tg} \theta}$$

Sabendo que:

$$\operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2 \operatorname{tg} \theta}{1 - \operatorname{tg}^2 \theta}$$

Tem-se, portanto:

$$\frac{K_I}{K_{II}} = \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) - \left[ \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)}{\operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right)} \right]$$

$$\frac{K_I}{K_{II}} \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) = \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - 1 + \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right)$$

$$2 \operatorname{tg}^2 \left( \frac{\theta}{2} \right) - \frac{K_I}{K_{II}} \operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) - 1 = 0$$

Resolvendo a equação de segundo grau:

$$\operatorname{tg} \left( \frac{\theta}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[ \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\frac{K_I^2}{K_{II}^2} + 8} \right]$$

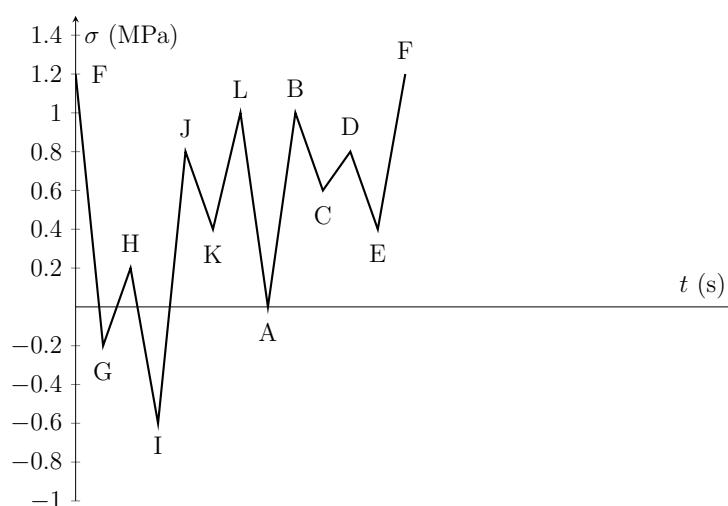
Por fim, o ângulo de propagação é dado por:

$$\theta = 2 \arctan \left\{ \frac{1}{2} \left[ \frac{K_I}{K_{II}} \pm \sqrt{\frac{K_I^2}{K_{II}^2} + 8} \right] \right\} \quad (\text{C.1})$$

## Apêndice D

### *Rainflow Cycle Counting*

Repetindo a Figura 4.5 por conveniência, tem-se:



**Figura D.1:** Ciclo de amplitude variável reorganizado

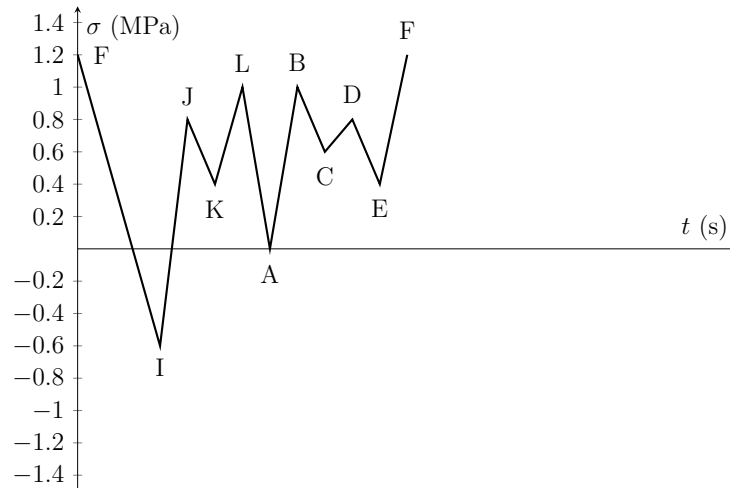
Para a contagem de ciclos, inicia-se pelo pico-vale-pico designado pelas letras F-G-H e aplica-se a equação (4.14), de forma que:

$$|\sigma_H - \sigma_G| \geq |\sigma_G - \sigma_F| \rightarrow 0,4 \geq 1,4 \rightarrow \text{Não}$$

Passa-se então ao próximo conjunto de picos e vales, designado pelas letras G-H-I.

$$|\sigma_I - \sigma_H| \geq |\sigma_H - \sigma_G| \rightarrow 0,8 \geq 0,4 \rightarrow \text{Sim} \rightarrow 1 \text{ ciclo H - G}$$

Contabiliza-se, portanto, um ciclo com pico H e vale G e elimina-os, de forma que:



**Figura D.2:** Retirada do pico H e do vale G

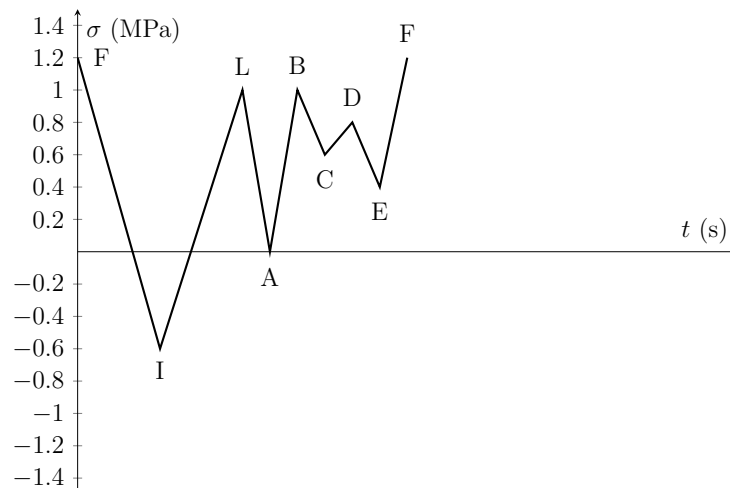
Após a atualização do carregamento, inicia-se no pico F novamente:

$$|\sigma_J - \sigma_I| \geq |\sigma_I - \sigma_F| \rightarrow 1,4 \geq 1,8 \rightarrow \text{Não}$$

$$|\sigma_K - \sigma_J| \geq |\sigma_J - \sigma_I| \rightarrow 0,4 \geq 1,4 \rightarrow \text{Não}$$

$$|\sigma_L - \sigma_K| \geq |\sigma_K - \sigma_J| \rightarrow 0,6 \geq 0,4 \rightarrow \text{Sim} \rightarrow 1 \text{ ciclo J - K}$$

Contabiliza-se o ciclo formado pelo pico J e o vale K e retira-os do carregamento:



**Figura D.3:** Retirada do pico J e do vale K

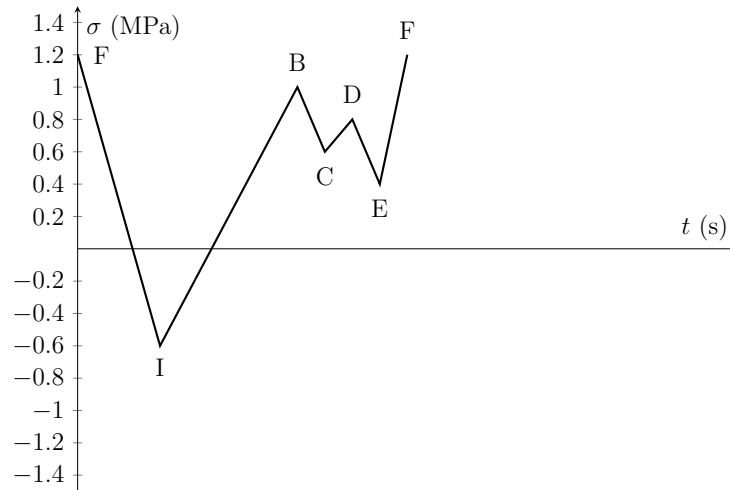
Iniciando-se, novamente, no pico F, tem-se:

$$|\sigma_L - \sigma_I| \geq |\sigma_I - \sigma_F| \rightarrow 1,6 \geq 1,8 \rightarrow \text{Não}$$

$$|\sigma_A - \sigma_L| \geq |\sigma_L - \sigma_I| \rightarrow 1,0 \geq 1,6 \rightarrow \text{Não}$$

$$|\sigma_B - \sigma_A| \geq |\sigma_A - \sigma_L| \rightarrow 1,0 \geq 1,0 \rightarrow \text{Sim} \rightarrow 1 \text{ ciclo L - A}$$

Contabiliza-se 1 ciclo, formado pelo pico L e pelo vale A, e atualiza-se a representação gráfica:



**Figura D.4:** Retirada do pico L e do vale A

Volta-se ao pico F, de forma que:

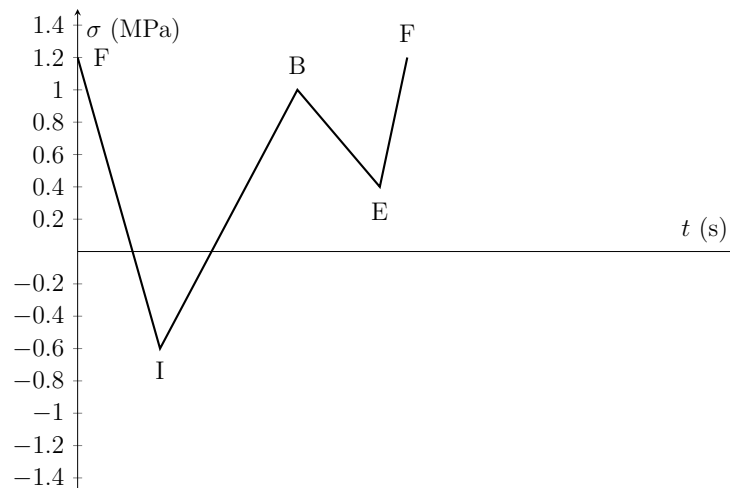
$$|\sigma_B - \sigma_I| \geq |\sigma_I - \sigma_F| \rightarrow 1,6 \geq 1,8 \rightarrow \text{Não}$$

$$|\sigma_C - \sigma_B| \geq |\sigma_B - \sigma_I| \rightarrow 0,4 \geq 1,6 \rightarrow \text{Não}$$

$$|\sigma_D - \sigma_C| \geq |\sigma_C - \sigma_B| \rightarrow 0,2 \geq 0,4 \rightarrow \text{Não}$$

$$|\sigma_E - \sigma_D| \geq |\sigma_D - \sigma_C| \rightarrow 0,4 \geq 0,2 \rightarrow \text{Sim} \rightarrow 1 \text{ ciclo D - C}$$

Contabiliza 1 ciclo e retira o pico D e o vale C, transformando-se em:



**Figura D.5:** Retirada do pico D e do vale C

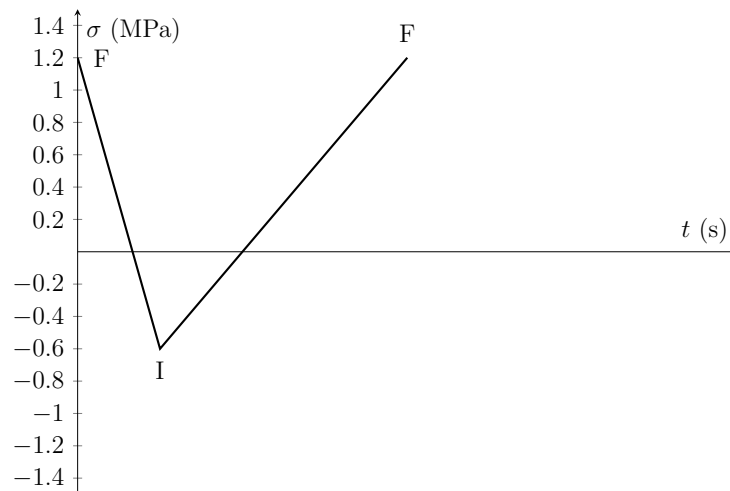
Recomeçando no pico F, tem-se:

$$|\sigma_B - \sigma_I| \geq |\sigma_I - \sigma_F| \rightarrow 1,6 \geq 1,8 \rightarrow \text{Não}$$

$$|\sigma_E - \sigma_B| \geq |\sigma_B - \sigma_I| \rightarrow 0,6 \geq 1,6 \rightarrow \text{Não}$$

$$|\sigma_F - \sigma_E| \geq |\sigma_E - \sigma_B| \rightarrow 0,8 \geq 0,6 \rightarrow \text{Sim} \rightarrow 1 \text{ ciclo B - E}$$

Retirando, portanto, o pico B e o vale E:



**Figura D.6:** Retirada do pico B e do vale E

Por fim:

$$|\sigma_F - \sigma_I| \geq |\sigma_I - \sigma_F| \rightarrow 1,8 \geq 1,8 \rightarrow \text{Sim} \rightarrow 1 \text{ ciclo F - I}$$

Dessa forma, ao final do algoritmo *rainflow* e considerando  $\gamma = 1$  e  $m = 2$ , tem-se:

<b>Tabela D.1:</b> Ciclos						
Variáveis dos ciclos						
$N_B$	Pico - Vale	$\sigma_{max}$	R	$\overline{\Delta\sigma}_j$	$(\overline{\Delta\sigma}_j)^m$	
1	H - G	0,2	-1,0	0,4	0,16	
1	J - K	0,8	0,5	0,4	0,16	
1	L - A	1,0	0,0	1,0	1,0	
1	D - C	0,8	0,75	0,2	0,04	
1	B - E	1,0	0,4	0,6	0,36	
1	F - I	1,2	-0,5	1,8	3,24	
$\sum N_B$	6			$\sum (\overline{\Delta\sigma}_j)^m$	4,96	

Por fim, aplicando a equação (4.16):

$$\Delta\sigma_q = \left[ \frac{\sum_{j=1}^6 (\overline{\Delta\sigma_j})^m}{N_B} \right]^{\frac{1}{m}} = \left[ \frac{4,96}{6} \right]^{\frac{1}{2}} = 0,909 \text{ MPa}$$

Portanto, o carregamento cíclico com amplitude variável, apresentado na Figura 4.4 é transformado em um carregamento cíclico de amplitude constante com  $\sigma_{max} = \Delta\sigma_q = 0,909 \text{ MPa}$  e  $R = 0$ .