

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas

William Luiz Fernandes

**ANÁLISE PARAMÉTRICA DA INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS
RETICULADAS PLANAS ESBELTAS COM COMPORTAMENTO
DINÂMICO GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR PELO MÉTODO
POSICIONAL DOS ELEMENTOS FINITOS**

Belo Horizonte

2022

William Luiz Fernandes

**ANÁLISE PARAMÉTRICA DA INSTABILIDADE DE ESTRUTURAS
RETICULADAS PLANAS ESBELTAS COM COMPORTAMENTO DINÂMICO
GEOMETRICAMENTE NÃO LINEAR PELO MÉTODO POSICIONAL DOS
ELEMENTOS FINITOS**

Versão Final

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Marcelo Greco

Belo Horizonte

2022

F363a

Fernandes, William Luiz.

Análise paramétrica da instabilidade de estruturas reticuladas planas esbeltas com comportamento dinâmico geometricamente não linear pelo método posicional dos elementos finitos [recurso eletrônico] / William Luiz Fernandes. - 2022.

1 recurso online (210 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Marcelo Greco.

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 203-210.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Algoritmos - Teses.
3. Integração numérica - Teses. 4. Método dos elementos finitos - Teses.
5. Métodos iterativos (Matemática) - Teses. I. Greco, Marcelo.
II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia.
III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº: 87 DO ALUNO WILLIAN LUIZ FERNANDES

Às **14:00** horas do dia **23** do mês de **setembro** de **2022**, reuniu-se, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **24 de junho de 2022**, para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada "**Análise Paramétrica da Instabilidade de Estruturas Reticuladas Planas Esbeltas com Comportamento Dinâmico Geometricamente não Linear pelo Método Posicional dos Elementos Finitos**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Marcelo Greco**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foram atribuídas as seguintes indicações:

Prof. Dr. Marcelo Greco - DEES-UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros - DEES - UFMG

Prof. Dr. Lapo Gori - DEES - UFMG

Prof. Dr. Paulo Batista Gonçalves - PUC-RIO

Prof. Dr. Ricardo Azoubel da Mota Silveira - UFOP

Após reunião, a Comissão considerou o candidato **APROVADO**, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 23 de setembro de 2022.

Observações:

1. A aprovação do candidato na defesa da Tese de Doutorado não significa que o mesmo tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Estruturas;
2. Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.



Documento assinado eletronicamente por **Lapo Gori, Professor do Magistério Superior**, em 23/09/2022, às 16:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Ricardo Azoubel da Mota Silveira, Usuário Externo**, em 23/09/2022, às 16:55, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Paulo Batista Gonçalves, Usuário Externo**, em 23/09/2022, às 16:56, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felicio Bruzzi Barros, Professor do Magistério Superior**, em 23/09/2022, às 16:57, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marcelo Greco, Professor do Magistério Superior**, em 23/09/2022, às 16:58, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1768782** e o código CRC **EFDCB33C**.

Ao Deus uno e trino: o maior de todos os engenheiros na pessoa do Criador, e o maior de todos os professores na pessoa de Jesus Cristo.

AGRADECIMENTOS

A Deus, a quem devo tudo o que sou e tenho. Honra e glória a quem é de direito.

À minha esposa Panmela, pelo amor incondicional, paciência e incentivo dado não só ao longo de todo este trabalho, mas em todas as ocasiões de minha vida. Minha companhia em todos os momentos, dos mais difíceis às grandes vitórias. Registro nestas linhas o amor que sinto por você.

Ao meu orientador, prof. Dr. Marcelo Greco, por sua paciência e exemplar orientação. Aprendi muito ao longo deste tempo. E, de orientador, tornou-se um amigo.

Aos meus familiares: minha mãe, Lurdinha; meu pai, Jorge; meus irmãos, prof. Dr. Walliston e Lorena, pelo apoio e convívio.

Aos professores do Departamento de Engenharia de Estruturas da UFMG, por todo o aprendizado ao longo do doutorado.

Aos amigos do Departamento de Engenharia Civil da PUC Minas, e a todos os meus alunos (e ex-alunos) pelo contínuo incentivo e torcida por este trabalho.

Aos amigos do Departamento de Engenharia Civil da UFOP, em especial o prof. Dr. Ricardo Azoubel, amigo e grande incentivador, que acompanha há muitos anos minha trajetória acadêmica.

Aos professores do Departamento de Engenharia Civil da PUC Rio, em especial o prof. Dr. Paulo Batista, com quem muito aprendi. Uma das minhas referências acadêmicas.

Aos demais professores avaliadores deste trabalho. Certamente a contribuição de vocês é valiosa e muito bem-vinda.

Por fim, a todos aqueles que contribuíram direta ou indiretamente para que este trabalho fosse realizado.

“[...] mas os que esperam no Senhor renovarão as suas forças; subirão com asas como águias; correrão, e não se cansarão; andarão, e não se fatigarão.”

– Isaías 40:31

“Those who wish to succeed must ask the right preliminary questions.”

– Aristóteles (Metaphysics)

RESUMO

A atual demanda por sistemas estruturais mais leves faz com que estes, por consequência, estejam susceptíveis a problemas de vibração que podem vir a comprometer seu desempenho e confiabilidade. Com o avanço na tecnologia de materiais as estruturas tornam-se mais esbeltas e com vãos cada vez maiores, aumentando a probabilidade de perda de estabilidade. Assim, a análise dinâmica geometricamente não linear se torna indispensável nas etapas de um projeto estrutural. As várias técnicas desenvolvidas ao longo dos últimos anos visam auxiliar os engenheiros em análises de vibração em estruturas complexas. Assim, o auxílio dos recursos computacionais é fundamental. Programas que realizem análises dinâmicas de forma eficiente, aliados à precisão e confiabilidade dos resultados, se tornam mais necessários no dia a dia das atividades dos engenheiros. A análise e o projeto de estruturas esbeltas sob efeitos de vibração requerem o ajuste de parâmetros físicos e/ou geométricos de forma a se atender um nível necessário de desempenho e confiabilidade. Neste cenário se insere este trabalho de pesquisa, onde foi desenvolvida uma metodologia para análise da instabilidade dinâmica em sistemas estruturais reticulados esbeltos planos usando uma formulação posicional geometricamente não linear do Método dos Elementos Finitos para todas as implementações. O estudo pode ser sistematicamente apresentado da seguinte forma: (i) avaliação da perda de estabilidade por *snap-through* dinâmico em arcos abatidos e pórticos planos; (ii) cálculo das frequências naturais de vibração a partir do método de Iteração por Subespaços Vetoriais usando-se a matriz Hessiana; (iii) métodos de integração numérica temporal não-lineares com controle de dissipação numérica, clássicos (Generalizado- α , HHT- α e WBZ- α) e recentes (*Truly Self-starting Two Sub-steps Method* e *Three-parameter Single-step Method*), comparando-os com soluções analíticas e/ou com o método de Newmark; (iv) classificação dos sistemas em termos do comportamento caótico a partir dos expoentes de Lyapunov obtidos por algoritmo preditor não-linear e por análise da matriz Jacobiana, bem como o traçado das seções de Poincaré. Vários exemplos da literatura foram usados para comparativo de resultados e validação das implementações realizadas. Dentro de uma certa condição, o método de Iteração por Subespaços Vetoriais usando matriz Hessiana apresentou resultados muito consistentes para as primeiras frequências naturais de vibração. A maior parte dos métodos de integração numérica se mostrou eficiente nas análises propostas, com ênfase ao método Generalizado- α , por sua grande estabilidade. Os algoritmos propostos para cálculo dos expoentes de Lyapunov também mostraram resultados satisfatórios frente aos exemplos propostos.

Palavras-chave: Análise dinâmica geometricamente não-linear, Método dos Elementos Finitos Posicional, Iteração por Subespaços Vetoriais, algoritmos de integração numérica no tempo, Expoentes de Lyapunov.

ABSTRACT

The demand for lightweight structural systems makes them susceptible to vibration problems that may compromise their performance and reliability. With the advancement in material technology, structures become more slender and with increasing spans, increasing the probability of loss of stability. Thus, geometrically nonlinear dynamic analysis becomes indispensable in structural design. The techniques developed over the last few years aim to assist engineers in the vibration analysis of complex structures. Thus, computational resources are essential. Software that performs dynamic analysis efficiently, allied to the accuracy and reliability of the results, becomes more necessary for engineers. The analysis and design of slender structures under vibration require the adjustment of physical and/or geometric parameters to meet a required level of performance and reliability. This research work proposes a methodology for dynamic instability analysis in plane frames using a geometrically nonlinear positional formulation of the Finite Element Method for all implementations. The study can be systematically presented as follows: (i) the evaluation of instability by dynamic *snap-through* in shallow arches and plane frames; (ii) calculus of the natural frequencies of vibration from the Subspace Iteration Method using the Hessian matrix; (iii) classical time-step integration methods with numerical dissipation control (Generalized- α , HHT- α , and WBZ- α), as well as recent algorithms (Truly Self-starting Two Sub-steps method and Three-parameter Single-step method) applied to nonlinear dynamic systems; (iv) classification of the systems (chaotic behavior) from the Lyapunov exponents obtained by nonlinear predictor algorithm and by Jacobian matrix analysis, as well as the Poincaré sections. Several examples from the literature were used to compare results and validate the performed implementations. Within a certain condition, the method of Iteration by Vector Subspaces using the Hessian matrix presented consistent results for the first natural frequencies of vibration. Most of the numerical integration methods proved to be efficient in the proposed analyses, with emphasis on the Generalized- α method due to its stability. The proposed algorithms for calculating the Lyapunov exponents also showed satisfactory results for the proposed examples.

Keywords: Geometrically nonlinear analysis, Positional Finite Element Method, Subspace Iteration method, time-step integration methods, Lyapunov exponents.

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: Eixo do elemento de pórtico plano com suas coordenadas local e global.....	28
Figura 2.2: Respostas dinâmicas no diagrama de fase: (a) estável, amortecida; (b) estável, não amortecida e (c) instável.....	41
Figura 2.3: Exemplos de sistemas que podem exibir snap-through: (a) treliça simples; (b) treliça simples atirantada; (c) arco abatido articulado e (d) arco abatido articulado atirantado.	42
Figura 2.4: Sistema de 1 grau de liberdade: (a) Treliça de Von Mises e (b) Fenômeno snap-through. Fonte: Pignataro et al. (1991). Adaptado.....	44
Figura 2.5: Arco abatido e três formas de perda de estabilidade.....	45
Figura 2.6: Arco senoidal abatido biarticulado com molas de rotação: (a) modelo não discretizado; (b) modelo discretizado com elementos mudos e função do carregamento aplicado.....	46
Figura 2.7: Posições do nó central (nó 12) em função do tempo.....	47
Figura 2.8: Diagrama de fase do nó central para diferentes valores de k nos seguintes intervalos de tempo: (a) $0 < t < 1.0s$; (b) $0.5s < t < 1.0s$ e (c) $0.8s < t < 1.0s$	48
Figura 2.9: Arco senoidal abatido biarticulado com molas de rotação submetido à carga concentrada: (a) geometria e (b) discretização e variação do carregamento para o intervalo de 0 a 3s.....	49
Figura 2.10: Posições do nó central em função do tempo para arco com ligações birrotulada, biengastada e rotulada-engastada.....	50
Figura 2.11: Posições do nó central em função do tempo para arco com ligações semirrígidas.	51
Figura 2.12: Diagramas de Fase do nó central para arco com ligações semirrígidas: (a) $0 < t \leq 2.0s$ e (b) $0 < t \leq 3.0s$	52
Figura 2.13: Diagramas de Fase do nó central para arco com ligações birrotulada, biengastada e rotulada-engastada: (a) $0 < t \leq 2.0s$ e (b) $0 < t \leq 3.0s$	53
Figura 2.14: Pórtico triarticulado assimétrico: (a) geometria estrutural e (b) função de variação do carregamento no tempo.....	54
Figura 2.15: Análise transiente do nó 1: (a) Posições no plano da estrutura; (b) Posição vertical; (c) velocidade (vertical) e (d) aceleração (vertical).....	55
Figura 2.16: Diagramas de fase do nó 1: (a) Posição em x; (b) Posição em y; (c) Rotações...	56
Figura 2.17: Análise transiente do nó 2: (a) Posições no plano da estrutura; (b) Posição	

vertical; (c) velocidade (vertical) e (d) aceleração (vertical).....	57
Figura 2.18: Configuração deformada do pórtico triarticulado: (a) em $t=1.84s$; (b) em $t=3.0s$	57
Figura 2.19: Diagramas de fase do nó 2: (a) Posição em x; (b) Posição em y; (c) Rotações...	58
Figura 2.20: Coluna rígida com molas de rigidez rotacional: (a) configuração indeformada; (b) configuração deformada e (c) Carregamento para a análise numérica.....	59
Figura 2.21: Imperfeições geométricas adotadas para a coluna rígida: (a) caso 1: $\alpha_1=\alpha_2$; (b) caso 2: $\alpha_1\neq 0$ e $\alpha_2=0$; (c) caso 3: $\alpha_1=0$; $\alpha_2\neq 0$	61
Figura 2.22: Posição horizontal do ponto C da coluna: (a) 0 a 1.2s; (b) 0.8s a 1s; (c) 1s a 1.2s e (d) diagrama de fase.....	62
Figura 2.23: Velocidade e aceleração (horizontal) do ponto C da coluna: (a) velocidade de 0 a 1.2s; (b) velocidade de 1.0s a 1.2s; (c) aceleração de 0 a 1.2s e (d) aceleração de 1s a 1.2s....	63
Figura 3.1: Dois primeiros modos de vibração para o arco em estudo, considerando apoios rotulados.....	80
Figura 3.2: Variação das duas frequências naturais fundamentais com a altura z_0 para diferentes condições de extremidade.....	80
Figura 3.3: Shear building de 6 andares.....	81
Figura 3.4: Variação das frequências naturais de vibração com o deslocamento prescrito vertical do engaste esquerdo, para o shear building de 6 andares.....	83
Figura 3.5: Pórtico de baias múltiplas de 1 andar.....	84
Figura 3.6: Pórticos de dois andares acoplados a partir de graus de liberdade de interface utilizado para o exemplo proposto.....	86
Figura 4.1: Variação da taxa de amortecimento modal em relação à frequência natural.....	111
Figura 4.2: Barra engastada e livre sob uma carga axial súbita.....	112
Figura 4.3: Posições horizontais do nó 51 (meio da barra) ao longo do tempo para os algoritmos implementados ($\rho_\infty=0.0$).....	113
Figura 4.4: Posições horizontais do nó 51 (meio da barra) ao longo do tempo para os algoritmos implementados ($\rho_\infty=0.0$) – detalhe região final da Figura 4.3.....	114
Figura 4.5: Velocidades do nó 51 (meio da barra) ao longo do tempo para os algoritmos implementados ($\rho_\infty=0.0$).....	115
Figura 4.6: Velocidades horizontais do nó 51 (meio da barra) ao longo do tempo para os algoritmos implementados ($\rho_\infty=0.0$) – detalhe região final da Figura 4.5.....	116
Figura 4.7: Barra biapoiada carregada axialmente por uma força súbita.....	117
Figura 4.8: Posição versus tempo (sistema não amortecido) para a extremidade direita, com	

$\rho_{\infty}=0.0$	118
Figura 4.9: Posição versus tempo (sistema não amortecido) para a extremidade direita, com $\rho_{\infty}=0.9$	119
Figura 4.10: Viga engastada e livre submetido a momento linear crescente.....	120
Figura 4.11: Posição vertical versus tempo para a extremidade livre da viga engastada para cada método de integração ($\rho_{\infty}=0.0$).....	121
Figura 4.12: Posição vertical versus tempo para a extremidade livre da viga engastada para cada método de integração ($\rho_{\infty}=0.9$).....	122
Figura 4.13: Pórtico com ligação rígida sob carga concentrada harmônica (senoidal).....	123
Figura 4.14: Posição vertical versus tempo para o nó submetido à carga senoidal (1 elem. por barra): (a) $\rho_{\infty}=0.0$; (b) $\rho_{\infty}=0.9$; (c) $\rho_{\infty}=0.0$; (d) $\rho_{\infty}=0.9$	125
Figura 4.15: Posição vertical versus tempo para o nó submetido à carga senoidal (2 elem. por barra): (a) $\rho_{\infty}=0.0$; (b) $\rho_{\infty}=0.9$; (c) $\rho_{\infty}=0.0$; (d) $\rho_{\infty}=0.9$	126
Figura 4.16: Posição vertical versus tempo para o nó submetido à carga senoidal (4 elem. por barra): (a) $\rho_{\infty}=0.0$; (b) $\rho_{\infty}=0.9$; (c) $\rho_{\infty}=0.0$; (d) $\rho_{\infty}=0.9$	127
Figura 4.17: Posição vertical versus tempo considerando o amortecimento proporcional de Rayleigh (contribuição de M) – $\rho_{\infty}=0.0$	128
Figura 4.18: Posição vertical versus tempo considerando o amortecimento proporcional de Rayleigh (contribuição de M e H) – $\rho_{\infty}=0.0$	129
Figura 4.19: Amortecimento proporcional de Rayleigh (contribuição de M e H) – $\rho_{\infty}=0.9$..	130
Figura 4.20: Diagramas de fase para o algoritmo Generalizado- α obtidos pela combinação das contribuições da massa, Hessiana e raio espectral.....	131
Figura 4.21: Mecanismo de Peaucellier submetido a um momento $M(t)$ em duas diferentes Posição versus tempo (sistema não amortecido) com $\rho_{\infty}=0.0$	132
Figura 4.22: Desvio horizontal versus tempo (nó extremo direito) para o Mecanismo de Peaucellier – Carregamento (I).....	132
Figura 4.23: Desvio horizontal versus tempo (nó extremo direito) para o Mecanismo de Peaucellier usando diferentes algoritmos de integração numérica – Carregamento (I).....	134
Figura 4.24: Posição vertical versus tempo (nó extremo direito) para o Mecanismo de Peaucellier usando diferentes algoritmos de integração numérica – Carregamento (II).....	135
Figura 4.25: Trajetória no plano do nó extremo direito ao longo do tempo para o Mecanismo de Peaucellier usando diferentes algoritmos de integração numérica – Carregamento (II)....	136
Figura 4.26: Configuração deformada do Mecanismo de Peaucellier para diferentes algoritmos de integração numérica – Carregamento (II) – $t=3.0s$	137

Figura 4.27: Configuração deformada do Mecanismo de Peaucellier para diferentes algoritmos de integração numérica – Carregamento (II) – $t=9.0s$	138
Figura 5.1: Atrator de Rössler.....	144
Figura 5.2: Mapa de ferradura de um retângulo: processo iterativo de alongamento e compressão seguido de uma dobra da área.....	145
Figura 5.3: Mapa quadrático de conservação de área de Hénon [$\cos(\alpha)=0.24$, $X_0=0.6$ e $Y_0=0.13$ – 100000 pontos].....	147
Figura 5.4: Detalhe de uma região entre ilhas do Mapa quadrático de conservação de área de Hénon (retângulo da Figura 5.3).....	147
Figura 5.5: Mapa Gingerbreadman [$X_0=0.5$ e $Y_0=3.7$ – 100000 pontos].....	148
Figura 5.6: Mapa de Teia Caótico [$m=4$, $k=1$, $X_0=0.0$ e $Y_0=3.0$ – 100000 pontos].....	149
Figura 5.7: Mapa tridimensional caótico de Lorenz [$X_0=0.5$, $Y_0=0.5$ e $Z_0=-1.0$ – 100000 pontos].....	150
Figura 5.8: Mapa de Hénon [$a=1.4$, $b=0.3$, $X_0=0.0$ e $Y_0=0.9$ – 100000 pontos].....	151
Figura 5.9: Mapa de Lozi [$a=1.7$, $b=0.5$, $X_0=-0.1$ e $Y_0=0.1$ – 100000 pontos].....	152
Figura 5.10: Mapa de Ikeda [$\alpha=6.0$, $\beta=0.4$, $\gamma=1.0$, $\mu=0.9$, $X_0=0.0$ e $Y_0=0.0$ – 100000 pontos].	153
Figura 5.11: Mapa Delayed Logistic [$a=2.27$, $X_0=0.001$ e $Y_0=0.001$ – 100000 pontos]: (a) trajetória completa e (b) no intervalo $[0; 0.1]$ para X_n e Y_n	154
Figura 5.12: Representação no plano do subconjunto R relacionado ao teorema de Poincaré-Bendixson: (a) trajetória C sendo (ou tendendo a) uma órbita fechada e (b) campo vetorial atraído para o subconjunto R.....	163
Figura 5.13: Superfície S transversal a um sistema N-dimensional e trajetórias se desenvolvendo através dela.....	165
Figura 5.14: Evolução das trajetórias em função do número de iterações n (anos).....	171
Figura 5.15: Logaritmo natural das diferenças das trajetórias em termos de n para as combinações $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$ e $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$	172
Figura 5.16: Ajuste dos pontos referentes às combinações $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$ e $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$ por retas ($1 \leq n \leq 9$).....	173
Figura 5.17: Oscilador de Duffing.....	175
Figura 5.18: Diagramas de fase para o oscilador de Duffing: (a) $\Gamma=0.2$; (b) $\Gamma=0.3$; (c) $\Gamma=0.31$; (d) $\Gamma=0.37$; (e) $\Gamma=0.5$ e (f) $\Gamma=0.8$	176
Figura 5.19: Seções de Poincaré para o oscilador de Duffing: (a) $\Gamma=0.2$; (b) $\Gamma=0.3$; (c) $\Gamma=0.31$; (d) $\Gamma=0.37$; (e) $\Gamma=0.5$ e (f) $\Gamma=0.8$	177

Figura 5.20: Convergência do maior expoente de Lyapunov (algoritmo LPNV2) em função do número de pontos mais próximos ao ponto de análise (N) para mapas dissipativos: (a) Hénon, Lozi e Delayed Logistic e (b) Ikeda.....	179
Figura 5.21: Arco abatido sob carga uniformemente distribuída variando de forma triangular crescente no tempo.....	181
Figura 5.22: Posições versus tempo (nó central) para uma taxa de amortecimento $\xi=0.10$ e $\lambda=0.2$ para os algoritmos Newmark e Generalizado- α : a) $0 \leq t \leq 4.5s$; b) $4.3 \leq t \leq 4.5s$ e c) $0 \leq t \leq 5.67s$	182
Figura 5.23: Convergência do maior expoente de Lyapunov (algoritmo LPNV2) em função do número de pontos mais próximos ao ponto de análise (N) para Newmark e Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$).....	183
Figura 5.24: Diagramas de fase para o arco senoidal abatido obtidos pelos algoritmos de Newmark e Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$).....	184
Figura 5.25: Treliça de von Mises com um sistema massa-mola acoplado submetida a um carregamento harmônico.....	186
Figura 5.26: Treliça de von Mises com um sistema massa-mola acoplado: configurações indeformada (linha pontilhada) e deformada (linha contínua).....	187
Figura 5.27: Posição versus tempo para a massa m_2 da treliça de von Mises para os três algoritmos considerando: (a) Ressonância em $\omega=\omega_1$ e (b) Ressonância em $\omega=\omega_2$	189
Figura 5.28: Diagramas de Fase para os três algoritmos de integração com ressonância no 1º modo ($\omega=\omega_1$).....	190
Figura 5.29: Seções de Poincaré para os três algoritmos de integração com ressonância no 1º modo ($\omega=\omega_1$).....	192
Figura 5.30: Diagramas de Fase para os três algoritmos de integração com ressonância no 2º modo ($\omega=\omega_2$).....	193
Figura 5.31: Seções de Poincaré para os três algoritmos de integração com ressonância no 2º modo ($\omega=\omega_2$).....	194
Figura 5.32: Convergência do maior expoente de Lyapunov (algoritmo LPNV2) em função do número de pontos mais próximos ao ponto de análise (N) para a treliça de von Mises: (a) Ressonância em ω_1 e (b) Ressonância em ω_2	196

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1: Comparativo das Frequências Naturais de Vibração para o Arco Senoidal Abatido.	79
Tabela 3.2: Frequências Naturais de Vibração para o shear building de 6 andares, sem deslocamento prescrito.....	82
Tabela 3.3: Valores das Frequências Naturais de Vibração em função do deslocamento vertical do engaste esquerdo, para o shear building de 6 andares.....	82
Tabela 3.4: Comparativo da Frequência Fundamental de Vibração para o Pórtico de Baias Múltiplas.....	84
Tabela 3.5: Comparativo das Frequências Naturais de Vibração para os Pórticos de dois Andares Acoplados.....	87
Tabela 3.6: Variação das primeiras frequências naturais com a discretização do modelo para o exemplo proposto.....	87
Tabela 5.1: Trajetórias X_n para o mapa logístico e diferenças absolutas $d_n^{(i)}$ entre as trajetórias ($A=3.99$). Fonte: Hilborn (2001). Adaptada.....	171
Tabela 5.2: Expoentes de Lyapunov para as combinações $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$ e $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$ no exemplo proposto usando o algoritmo LPNV1.....	174
Tabela 5.3: Expoentes de Lyapunov para as combinações $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$ no exemplo proposto usando o algoritmo LPNV2.....	174
Tabela 5.4: Comparativo entre os expoentes de Lyapunov para os mapas dissipativos: Hénon, Lozi, Ikeda e Delayed Logistic a partir do algoritmo LPNV2.....	180
Tabela 5.5: Comparativo entre os expoentes de Lyapunov para os mapas dissipativos de Hénon, Lozi, Ikeda e Delayed Logistic a partir do algoritmo LPNV3.....	180
Tabela 5.6: Espectro dos expoentes de Lyapunov para o arco senoidal (algoritmo LPNV3), com $t+\Delta t=5.66s$	185
Tabela 5.7: Frequências naturais de vibração (rad/s) para a referida treliça de von Mises.....	189
Tabela 5.8: Maiores expoentes de Lyapunov (algoritmo LPNV2) para a treliça de von Mises considerando as situações de ressonância em ω_1 e ω_2	195
Tabela 5.9: Espectro dos expoentes de Lyapunov para a treliça de von Mises com sistema massa-mola acoplado (algoritmo LPNV3), para ressonância na frequência ω_1	197
Tabela 5.10: Espectro dos expoentes de Lyapunov para a treliça de von Mises com sistema massa-mola acoplado (algoritmo LPNV3), para ressonância na frequência ω_2	197

LISTA DE QUADROS

Quadro 3.1: Algoritmo para o Método de Diagonalização de Jacobi.....	70
Quadro 3.2: Algoritmo para o Método de Cholesky.....	72
Quadro 3.3: Algoritmo para o método de iteração por subespaços vetoriais.....	77
Quadro 5.1: Determinação do maior Expoente de Lyapunov a partir de 2 séries de Dados (Algoritmo LPNV1).....	158
Quadro 5.2: Algoritmo Preditor Não-Linear para o maior Expoente de Lyapunov (Algoritmo LPNV2).....	159
Quadro 5.3: Determinação do espectro dos expoentes de Lyapunov (Algoritmo LPNV3)....	162

SUMÁRIO

Capítulo 1: INTRODUÇÃO.....	18
1.1 Objetivo.....	20
1.2 Justificativa.....	22
Capítulo 2: INSTABILIDADE DINÂMICA EM SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULADOS PLANOS ESBELTOS.....	25
2.1 Formulação.....	27
2.1.1 Energia de deformação.....	27
2.1.2 Formulação aplicada a problemas dinâmicos.....	32
2.1.3 Integração direta usando o método de Newmark.....	35
2.2 Definição de estabilidade.....	38
2.3 Snap-through.....	41
2.4 Exemplos.....	45
2.4.1 Arco senoidal abatido biarticulado com molas de rotação.....	45
2.4.2 Arco senoidal abatido triarticulado com molas de rotação.....	49
2.4.3 Pórtico triarticulado assimétrico.....	53
2.4.4 Coluna rígida com molas de rigidez rotacional.....	58
Capítulo 3: SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE AUTOVALOR A PARTIR DA MATRIZ HESSIANA.....	64
3.1 Formulação do problema de autovalor.....	66
3.2 Solução numérica da equação característica do problema de autovalor.....	69
3.2.1 Método de Jacobi.....	69
3.2.2 Método de Cholesky.....	71
3.2.3 Quociente de Rayleigh.....	72
3.2.4 Método de iteração por subespaços vetoriais.....	75
3.2.4.1 Vetores de partida.....	77
3.3 Exemplos.....	78
3.3.1 Arco senoidal abatido.....	78
3.3.2 <i>Shear building</i> de 6 andares.....	81
3.3.3 Pórticos de baias múltiplas com 1 andar.....	83
3.3.4 Pórticos de dois andares acoplados.....	85
Capítulo 4: ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA E AMORTECIMENTO	

PROPORCIONAL DE RAYLEIGH PARA PROBLEMAS GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEARES.....	88
4.1 Características dos métodos de integração direta.....	91
4.1.1 Algoritmos explícitos, implícitos e autoinicializáveis.....	91
4.1.2 Estabilidade.....	92
4.1.3 Ordem de precisão e erro de truncamento local.....	95
4.1.4 Eficiência.....	96
4.1.5 Erro.....	96
4.2 Os algoritmos Generalizado- α , HHT- α , e WBZ- α	97
4.2.1 Formulação.....	97
4.3 <i>Truly self-starting two sub-steps method</i> – TSTSM.....	100
4.3.1 Formulação.....	101
4.3.1.1 Primeiro subpasso.....	101
4.3.1.2 Segundo subpasso.....	103
4.3.1.3 Atualização das variáveis para o passo seguinte.....	104
4.4 <i>Three-parameter single-step method</i> – TPSM.....	105
4.4.1 Formulação.....	106
4.5 Amortecimento proporcional de Rayleigh.....	108
4.6 Exemplos.....	111
4.6.1 Propagação de onda em uma barra engastada e livre carregada axialmente.....	112
4.6.2 Barra biapoiada carregada axialmente.....	116
4.6.3 Viga engastada e livre submetida a momento fletor.....	120
4.6.4 Pórtico com ligação rígida.....	123
4.6.5 Arco senoidal abatido biarticulado com molas de rotação.....	128
4.6.6 Mecanismo de Peaucellier flexível.....	131
Capítulo 5: CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO COMPORTAMENTO CAÓTICO EM ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS ESBELTAS SUBMETIDAS À INSTABILIDADE DINÂMICA.....	140
5.1 Atratores.....	142
5.1.1 Atratores Estranhos.....	143
5.2 Mapas de alguns sistemas caóticos determinísticos clássicos.....	145
5.2.1 Sistemas conservativos.....	145
5.2.1.1 Mapa quadrático de conservação de área de Hénon (<i>Hénon Area Preserving Quadratic Map</i>).....	146

5.2.1.2	Mapa <i>Gingerbreadman</i> (<i>Gingerbreadman Map</i>).....	148
5.2.1.3	Mapa de Teia Caótico (<i>Chaotic Web Map</i>).....	149
5.2.1.4	Mapa Tridimensional Caótico de Lorenz (<i>Lorenz Three-Dimensional Chaotic Map</i>).....	150
5.2.2	Sistemas dissipativos.....	151
5.2.2.1	Mapa de Hénon.....	151
5.2.2.2	Mapa de Lozi.....	152
5.2.2.3	Mapa de Ikeda (<i>Ikeda Map</i>).....	153
5.2.2.4	Mapa <i>Delayed Logistic</i>	154
5.3	Expoentes de Lyapunov.....	155
5.3.1	Cálculo do maior expoente de Lyapunov a partir de duas séries de dados.....	156
5.3.2	Cálculo do maior expoente de Lyapunov usando algoritmo preditor não linear.....	159
5.3.3	Espectro dos expoentes de Lyapunov para dimensões arbitrárias.....	160
5.4	Teorema De Poincaré-Bendixson.....	162
5.5	Seções de Poincaré.....	164
5.5.1	O mapa do período.....	166
5.5.2	Fase da seção e seções de Poincaré.....	167
5.5.2.1	Fase da seção:.....	167
5.5.2.2	Seções de Poincaré:.....	168
5.5.3	Periodicidade.....	168
5.6	Exemplos.....	169
5.6.1	Modelo matemático para descrição de populações biológicas.....	169
5.6.2	Oscilador de Duffing.....	174
5.6.3	Expoentes de Lyapunov para mapas de sistemas dissipativos.....	178
5.6.4	Arco senoidal abatido sob carga triangular crescente.....	181
5.6.5	Treliça de von Mises com um sistema massa-mola acoplado.....	186
Capítulo 6: CONCLUSÃO.....		199
6.1	Sugestões de trabalhos futuros.....	201
REFERÊNCIAS.....		203

CAPÍTULO 1: INTRODUÇÃO

As falhas em grande parte das estruturas na Engenharia se enquadram em uma das duas seguintes categorias: falha de material ou falha por instabilidade estrutural. O primeiro tipo de falha, tratado em cursos introdutórios sobre a resistência de materiais e mecânica estrutural, geralmente pode ser previsto adequadamente analisando a estrutura com base em condições de equilíbrio ou equações de movimento escritas para a configuração inicial não-deformada da estrutura. Por outro lado, a previsão de falhas devido à instabilidade estrutural requer que as equações de equilíbrio ou de movimento sejam formuladas com base na configuração deformada da estrutura. Como a configuração deformada não é conhecida antecipadamente, mas depende das deflexões a serem resolvidas, o problema é, em princípio, não linear, embora frequentemente possa ser linearizado para facilitar a análise (BAZANT e CEDOLIN, 2010). Na engenharia aeroespacial, por exemplo, o regime pós-crítico elástico é uma realidade de projeto.

Além disso, as falhas estruturais causadas pela falha do material são governadas pelo valor da resistência do material ou do limite de escoamento. Por outro lado, a carga na qual uma estrutura se torna instável pode ser, na abordagem mais simples, considerada independente da resistência do material ou da tensão limite de escoamento. Ela depende da geometria estrutural e do tamanho (bem como da esbeltez), e é governada principalmente pela rigidez do material, caracterizada, por exemplo, pelo módulo de elasticidade do mesmo. Falhas nas estruturas elásticas devido à instabilidade estrutural têm sua principal causa nos efeitos geométricos: a geometria da deformação introduz não-linearidades que amplificam as tensões calculadas com base na configuração inicial, não deformada, da estrutura (BAZANT e CEDOLIN, 2010).

Não obstante, outra consideração relevante é o fato de que os sistemas estruturais podem apresentar um comportamento peculiar quando sob instabilidade. Na verdade, quando um sistema estrutural encontra-se submetido a ações de caráter dinâmico, isso indica que seu comportamento é um processo evolutivo no tempo, que pode ser determinístico ou estocástico. As previsões de longo prazo de alguns sistemas, em geral, são impossíveis. Mesmo suas trajetórias não podem ser representadas pela geometria usual. Assim, não só em fenômenos naturais ou sociais, a imprevisibilidade está presente. Além disso, como destaca Layek (2015), a imprevisibilidade é uma propriedade intrínseca presente no próprio

fenômeno.

Os sistemas dinâmicos são geralmente descritos por equações diferenciais parciais. Os estudos neste campo da matemática foram dedicados principalmente a encontrar soluções analíticas de equações. Entretanto, os comportamentos dinâmicos de um sistema nem sempre podem ser determinados por soluções analíticas ou de forma fechada. Além disso, é difícil obter uma solução analítica de equações não lineares, exceto em alguns casos. A dinâmica de um sistema pode ser expressa como um processo de tempo contínuo ou como um processo evolutivo de tempo discreto. Os modelos matemáticos mais simples de sistemas contínuos são aqueles que consistem em equações diferenciais de primeira ordem. No sistema autônomo de primeira ordem (explícito no tempo), a dinâmica é uma classe de sistema muito restritiva, pois seu movimento está na linha real (LAYEK, 2015).

Este é o contexto em que este trabalho de pesquisa se insere: estudar a instabilidade dinâmica de sistemas planos com comportamento geometricamente não-linear, bem como o comportamento caótico que estes mesmos sistemas podem vir a apresentar quando submetidos a certas condições. Para tanto, esta proposta de pesquisa abordará o assunto da forma descrita nos parágrafos seguintes. Vale ressaltar que a revisão bibliográfica será apresentada no respectivo capítulo.

O Capítulo 2 aborda a instabilidade por *snap-through* dinâmico em sistemas estruturais de arcos abatidos e pórticos planos esbeltos utilizando uma formulação posicional geometricamente não-linear do Método dos Elementos Finitos. Apresenta-se neste capítulo a dedução da referida formulação aplicada a problemas dinâmicos. Uma breve definição de Estabilidade é apresentada, bem como do fenômeno *snap-through*. São demonstrados quatro exemplos, entre pórticos e arcos, onde se observa o correspondente fenômeno e se pode avaliar o histórico das posições dos nós estruturais analisados, bem como os diagramas de fase nestes mesmos nós.

O Capítulo 3 trata da solução numérica do problema de autovalor considerando a matriz Hessiana em lugar da matriz de Rigidez. Formula-se o problema e, utilizando métodos numéricos como o de Jacobi, de Cholesky e o Quociente de Rayleigh, apresenta-se o Método de Iteração por Subespaços Vetoriais. Uma breve discussão sobre os vetores de partida é feita e, em seguida, são apresentados 4 exemplos, entre arcos e pórticos, de forma a validar os resultados da rotina implementada. Procurou-se também discutir a variação das frequências com a altura do arco abatido, bem como com o número de elementos do modelo dos pórticos.

No capítulo 4 são apresentados alguns métodos de integração direta no domínio do tempo, clássicos e recentes, como alternativas ao método de Newmark, todos escritos em formulação posicional do Método dos Elementos Finitos. Esta é a principal contribuição (inérita) deste trabalho. Os algoritmos implementados possuem controle de dissipação numérica (contribuição das altas frequências na resposta), quais sejam: Generalizado- α , HHT- α e WBZ- α ; método autoinicializável com marcha em dois subpassos de tempo (*Truly Self-starting Two Sub-steps Method*) e método com três parâmetros (*Three-parameter Single-step Method*). Discute-se características como a diferença entre algoritmos explícitos, implícitos, e autoinicializáveis; eficiência, estabilidade, erro, ordem de precisão, e outras. De forma complementar, apresenta-se a implementação do amortecimento proporcional de Rayleigh na formulação posicional do Método dos Elementos Finitos. Nos seis exemplos ao final do capítulo procura-se demonstrar a validade dos métodos implementados, realizar um comparativo entre os mesmos, demonstrar a influência do raio espectral na resposta de problemas fortemente não-lineares e validar o amortecimento proporcional de Rayleigh.

Com o Capítulo 5 pretende-se contribuir como o estudo do comportamento caótico em estruturas reticuladas esbeltas submetidas à instabilidade dinâmica. Apresenta-se inicialmente um breve conceito de atratores, seguido por mapas de sistemas caóticos determinísticos clássicos (conservativos e dissipativos). Os expoentes de Lyapunov são definidos e três estratégias de implementação são mostradas: duas para se determinar o maior expoente de Lyapunov e uma que fornece o espectro desses expoentes a partir da análise direta da matriz Jacobiana. O Teorema de Poincaré Bendixson e a seção de Poincaré são mostrados em seguida. Cinco exemplos são usados para validar os algoritmos implementados.

O Capítulo 6, finalmente, aborda as conclusões obtidas a partir dos estudos, implementações e comparações realizadas. São ainda propostos temas e sugestões para futuros trabalhos.

1.1 Objetivo

O objetivo geral do presente trabalho é realizar a análise de instabilidade de estruturas reticuladas planas esbeltas com comportamento dinâmico geometricamente não linear usando uma formulação posicional do Método dos Elementos Finitos. Partindo-se deste método, apresenta-se uma estratégia para cálculo das frequências naturais de vibração para essas e

outras estruturas que possuam matrizes de massa singulares; algoritmos de integração numérica no domínio do tempo, recentes e clássicos, em alternativa ao algoritmo de Newmark, para estudo dessas estruturas quando sob condições severas de não-linearidade geométrica e perda de estabilidade, bem como uma estratégia para consideração do amortecimento proporcional de Rayleigh nesta formulação para as mesmas condições; e finalmente verificar o comportamento caótico destes sistemas estruturais a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov.

Para se alcançar o objetivo geral proposto, ao final deste trabalho, pretende-se cumprir os seguintes objetivos específicos:

- Investigar o comportamento dinâmico não-linear dos sistemas estruturais planos reticulados esbeltos, objetos de estudo deste trabalho, verificando seu comportamento quando submetidos à perda de estabilidade por *snap-through*. A análise será estendida a esses sistemas considerando também apoios elásticos;
- Apresentar uma estratégia para solução do problema de autovalor para a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos, de forma a verificar como a matriz Hessiana pode ser utilizada neste contexto em substituição à matriz de rigidez, particularmente no caso em que a matriz de massa é obtida desprezando-se os termos relacionados à rigidez rotacional, situação esta favorável à utilização do Método de Iteração por Subespaços Vetoriais;
- Propor esquemas de integração numérica no domínio do tempo, recentes (*Truly Self-starting Two Sub-steps Method* e *Three-parameter Single-step Method*) e clássicos (Generalizado- α , HHT- α e WBZ- α), com parâmetro de controle da dissipação numérica das altas frequências na resposta, em alternativa ao método de Newmark. Será realizado um comparativo entre esses métodos para os sistemas estruturais propostos neste trabalho, submetendo-os à perda de estabilidade e severas condições de não-linearidade geométrica;
- Verificar o possível comportamento caótico dos sistemas estruturais em estudo neste trabalho, nas condições propostas, a partir da determinação dos expoentes de Lyapunov para os mesmos, usando-se três estratégias: duas para se determinar o maior expoente de Lyapunov a partir de séries de dados e uma para obtenção do espectro dos expoentes a partir da análise direta da matriz Jacobiana. De forma adicional, serão

também determinadas as seções de Poincaré para alguns dos exemplos propostos.

1.2 Justificativa

Os principais argumentos para justificar o desenvolvimento deste trabalho são descritos a seguir.

A formulação posicional do Método dos Elementos Finitos baseia-se na estratégia Lagrangiana Total, e traz algumas vantagens. A principal delas é estabelecer o gradiente de deformações sem o uso explícito da regra da cadeia, que ocorre como simples inversão de matriz, conforme destacado em Reis e Coda (2014). Desta forma, pode-se generalizar o procedimento para vários problemas mecânicos não-lineares (CODA e PACCOLA, 2011). De maneira complementar, a estratégia pode ser estabelecida diretamente no sistema de eixos globais, sem a necessidade de eixos corrotacionais (CAVALCANTE *et al.*, 2017; CODA e GRECO, 2004; GRECO e CODA, 2006; CODA e PACCOLA, 2011; CODA *et al.*, 2013).

A solução do problema de autovalor pelo Método de Jacobi, amplamente utilizado para este fim, leva à solução simultânea de todos os autovalores do sistema, o que o torna eficiente nos casos em que as matrizes de massa e de rigidez (ou Hessiana, como é proposto neste trabalho) possuem pequenos tamanho e largura de banda. No entanto, eles perdem sua eficiência para matrizes densas e esparsas, visto que a transformação destas matrizes ao longo do processo destrói sua característica esparsa (TEDESCO *et al.*, 1999). Além disso, três outros empecilhos podem ser elencados: casos em que os sistemas a serem investigados possuem matrizes de grande tamanho (o que leva a um maior uso de recursos computacionais); possibilidade de singularidade da matriz de massa, quando esta é obtida por meio de massas concentradas e se despreza a rigidez rotacional das mesmas; e situações em que as frequências de interesse são apenas uma pequena parcela do total (em geral, as primeiras, para uma boa parte dos problemas de Engenharia). Neste cenário, o método de Iteração por Subespaços Vetoriais se enquadra adequadamente neste presente trabalho, pois permite definir o número de frequências naturais e modos a serem obtidos (partindo-se dos inferiores), elimina o problema da singularidade da matriz de massa e, conseqüentemente, reduz o uso dos recursos computacionais na solução dos problemas.

O método de Newmark, especificamente o que considera a regra trapezoidal, é em geral reconhecido como o mais eficaz e amplamente utilizado em sistemas dinâmicos. Porém,

apesar de amplamente utilizado para solução das equações de movimento, o método possui limitações. Borrvall e Lawson (2020) apontaram que o método de Newmark é propenso à instabilidade numérica quando os modelos são submetidos a movimentos rotacionais, apesar de sua estabilidade incondicional e conservação de energia. Fernandes *et al.* (2022) também verificaram que o Método de Newmark apresenta instabilidade numérica em problemas fortemente não-lineares, especialmente aqueles em que as estruturas estão susceptíveis à perda de estabilidade por *snap-through*. Bathe (2007) pontua que, quando são realizadas análises dinâmicas em sistemas com grandes deformações que exigem integrações em intervalos de tempo relativamente longos, a regra trapezoidal (na qual o método de Newmark geralmente é utilizado) pode se tornar instável, sendo esta manifesta na medida em que a resposta cresce e a energia e o momento não são conservados. Portanto, faz-se necessário avaliar alternativas a esse método para a solução de problemas dinâmicos, especialmente os que envolvem não-linearidade geométrica e física.

A condição de não linearidade é encontrada em um grande número de sistemas naturais e em fenômenos físicos, assim como em sistemas estruturais de forma particular. Em diversos casos, a não linearidade é a responsável pelo surgimento dos comportamentos complexos e imprevisíveis nos sistemas dinâmicos, sendo talvez o mais interessante chamado caos, que se caracteriza pela alta imprevisibilidade observada em sistemas oscilatórios, extremamente sensíveis às condições iniciais (STROGATZ, 2018). Assim, sistemas estruturais podem apresentar diferentes (e divergentes) comportamentos e respostas ao longo do tempo. Portanto, identificar a sensibilidade do sistema e sua estabilidade para condições iniciais torna-se fundamental, na medida em que se procura estratégias para minimizar a probabilidade de falha estrutural por características geométricas ou físicas. Neste contexto, os expoentes de Lyapunov são uma ferramenta adequada para esta tarefa. Ademais, há uma certa dificuldade de comparação de respostas obtidas por métodos de integração temporal em longos valores de tempo. Nesse sentido, a construção de mapas de Poincaré é uma opção interessante.

Por fim, destaca-se a contribuição (original) no desenvolvimento do Método Posicional dos Elementos Finitos com a inclusão das seguintes estratégias: (i) método de Iteração por Subespaços Vetoriais; (ii) Algoritmos de integração numérica no domínio do tempo, recentes (*Truly Self-starting Two Sub-steps Method* e *Three-parameter Single-step Method*) e clássicos (Generalizado- α , HHT- α e WBZ- α), com parâmetro de controle de

dissipação numérica; e (iii) cálculos dos Expoentes de Lyapunov a partir de três diferentes esquemas.

CAPÍTULO 2: INSTABILIDADE DINÂMICA EM SISTEMAS ESTRUTURAIS RETICULADOS PLANOS ESBELTOS

Usualmente a formulação convencional para o Método dos Elementos Finitos é desenvolvida em termos de deslocamentos nodais. Uma variação desta formulação, inicialmente desenvolvida por Bonet *et al.* (2000) e posteriormente por Coda (2003), permite descrever o comportamento de um elemento tendo como incógnitas as posições de seus nós. Esta formulação foi denominada Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos, cujas equações de equilíbrio são obtidas partindo-se do Princípio da Energia Potencial Total Estacionária. Considera-se a formulação Lagrangiana Total, a cinemática de Bernoulli-Euler e o comportamento linear elástico no material.

A citada formulação vem sendo amplamente aplicada em estudos diversos no campo da Engenharia. Rabelo (2015) estudou o comportamento viscoelástico de fluência nos materiais compósitos em treliças utilizando formulação posicional do Método dos Elementos Finitos. A formulação inclui o modelo reológico de Zener para retratar o fenômeno da fluência através de uma taxa de deformação temporal.

Becho *et al.* (2015) e Becho (2016) tratam do desenvolvimento de uma formulação numérica não linear que tem por objetivo descrever o comportamento mecânico viscoelástico de vigas e pórticos submetidos a estado constante de tensão (fluência). A base para a formulação proposta é baseada na Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos utilizando a teoria clássica de Bernoulli-Euler para vigas.

Filipov *et al.* (2016) exploraram tubos de origami com seções transversais simétricas poligonais que podem ser reconfiguradas em várias geometrias, com aplicações que vão desde tubulações e micro-robótica até arquitetura em edifícios. Segundo os autores, essas estruturas satisfazem as definições matemáticas para dobrabilidade plana e rígida, de forma a poderem se desdobrar totalmente a partir de um estado achatado com deformações ocorrendo apenas nas linhas de dobra. Eles discutem a variedade de estruturas tubulares que podem ser concebidas e mostram as limitações que regem o desenho geométrico.

Kzam (2016) aplica a formulação em questão na análise de instabilidade de estruturas tridimensionais para três diferentes elementos finitos: barra simples, casca e barra geral. A Matriz Hessiana foi utilizada para se identificar possíveis modos de colapso da estrutura próximo aos pontos críticos das trajetórias de equilíbrio. Além disso, o referido autor destaca

que é possível identificar os modos de falha locais e distorcionais com a metodologia proposta. Estratégias de solução, como o método das faixas finitas e a teoria generalizadas de vigas, foram utilizadas para comparações dos resultados.

Madeira e Coda (2016) utilizaram um modelo reológico de Kelvin-Voigt aplicado a controle de vibrações. Através de multiplicadores de Lagrange, os autores realizaram a introdução de massas de forma que o movimento das mesmas fosse imposto ao longo do elemento finito. Como vantagem, os autores destacam a possibilidade de considerar modelos reológicos mais complexos sem a necessidade de se resolver analiticamente as equações diferenciais.

Mecanismos planos que incluem ligações deslizantes foram analisados por Siqueira (2016) e Siqueira e Coda (2016). A introdução destas ligações nos referidos mecanismos foi realizada utilizando-se o Método dos Multiplicadores de Lagrange. De acordo com os autores, a formulação demonstrou, para os casos analisados, versatilidade e precisão para análises estáticas e dinâmicas.

Cavalcante (2016) analisou numericamente treliças sob ações térmicas, mecânicas e suas interações. O estudo foi realizado considerando-se não-linearidades física e geométrica, e a solução transiente foi obtida a partir de diferentes algoritmos de integração temporal, explícitos e implícitos. Problemas de impacto entre treliças e anteparo rígido também foram abordados.

Uma metodologia de análise dinâmica de mecanismos multicorpos planos considerando colapso progressivo foi apresentada por Sanches e Coda (2017). Os referidos autores utilizaram a cinemática de Timoshenko, com multiplicadores de Lagrange, para descrever o comportamento dos elementos finitos. Isso permitiu considerar a ruptura das barras durante as análises.

Silva (2017) estudou a influência dos efeitos térmicos (utilizando fundamentos da primeira e segunda leis da termodinâmica, bem como da energia livre de Helmholtz) no comportamento dinâmico de estruturas de pórtico plano com não-linearidade física e geométrica, onde há predominância de esforços de flexão e cisalhamento.

Vasconcellos (2018) aplicou a referida formulação na análise de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações viscoelásticas não lineares. Na modelagem das ligações foi considerado o modelo reológico de Kelvin-Voigt. O mesmo autor apresenta uma pesquisa bibliográfica interessante sobre os trabalhos que utilizaram Formulação Posicional

do Método dos Elementos Finitos na última década, incluindo Lacerda (2014), Reis (2012), Oliveira (2012), Oliveira e Greco (2015), Rigobello (2011), Greco (2004), dentre outros.

Neste capítulo do presente trabalho, a Formulação Posicional do Método dos Elementos será utilizada para análise da perda de estabilidade por *snap-through* dinâmico em sistemas estruturais esbeltos reticulados planos, como pórticos e arcos abatidos.

2.1 Formulação

O equacionamento foi devidamente dividido em duas partes. A primeira consiste em obter a parcela de energia de deformação total. Na segunda, ela é inserida no funcional de energia característico de problemas dinâmicos.

2.1.1 Energia de deformação

A função da energia interna de deformação U_t é considerada armazenada no volume inicial do corpo V_0 e é descrita como a integral da energia específica de deformação u_e (energia por unidade de volume), da seguinte forma:

$$U_t = \int_{V_0} u_e dV_0 \quad (2.1)$$

sendo:

$$u_e = \int_{\epsilon} \sigma d\epsilon = \int_{\epsilon} E \epsilon d\epsilon = E \left[\frac{\epsilon^2}{2} \right] \quad (2.2)$$

de forma que a energia específica de deformação u_e (relacionada à tensão σ , normal à seção transversal), neste trabalho, é definida apenas em relação às deformações no regime elástico (ϵ). Logo, a energia interna de deformação U_t pode ser reescrita como:

$$U_t = \int_{V_0} u_e dV_0 = \int_{V_0} E \left[\frac{\epsilon^2}{2} \right] dV_0 = \frac{E}{2} \int_{V_0} \epsilon^2 dV_0 \quad (2.3)$$

sendo E o Módulo de Elasticidade Longitudinal do material. Neste trabalho não será considerada a inelasticidade do material. Então:

$$U_t = \frac{E}{2} \int_{V_0} \varepsilon^2 dV_0 \quad (2.4)$$

A Figura 2.1 apresenta o eixo do elemento de pórtico plano com suas coordenadas global (xy) e local (variável adimensional ξ , no domínio de 0 a 1). Ao nó 1 associam-se as coordenadas (X_1, Y_1) e a rotação θ_1 em relação à horizontal. Raciocínio análogo se aplica ao nó 2.

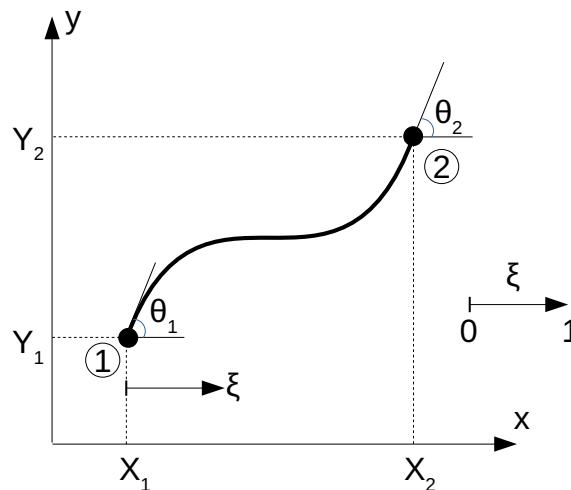


Figura 2.1: Eixo do elemento de pórtico plano com suas coordenadas local e global.

Para se determinar as relações entre a deformação ε e as posições dos nós do elemento, inicia-se com a parametrização da curva do eixo e escreve-se a relação ξ e os eixos x e y da seguinte forma:

$$x = X_1 + l_x \xi \quad (2.5)$$

$$l_x = X_2 - X_1 \quad (2.6)$$

$$x = X_1 + (X_2 - X_1) \xi = X_1 (1 - \xi) + X_2 \xi \quad (2.7)$$

$$l_y = Y_2 - Y_1 \quad (2.8)$$

$$y = c_1 \xi^3 + c_2 \xi^2 + c_3 \xi + c_4 \quad (2.9)$$

As constantes c_1 , c_2 , c_3 e c_4 são obtidas a partir das condições de contorno aplicadas ao elemento:

$$y_{(\xi=0)} = c_4 = Y_1 \quad (2.10)$$

Derivando-se a Equação (2.9) para se aplicar as condições de contorno de rotação, tem-se:

$$\frac{dy}{d\xi} = 3c_1\xi^2 + 2c_2\xi + c_3 \quad (2.11)$$

$$\left. \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=0} = c_3 = \left. \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \tan(\theta_1)l_x \quad (2.12)$$

$$\left. \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 3c_1 + 2c_2 + \tan(\theta_1)l_x \quad (2.13)$$

Levando-se a Equação (2.12) em (2.13):

$$\begin{aligned} \left. \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=1} = \tan(\theta_2)l_x = 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 3c_1 + 2c_2 + \tan(\theta_1)l_x \Rightarrow \\ 3c_1 + 2c_2 = [\tan(\theta_2) - \tan(\theta_1)]l_x \end{aligned} \quad (2.14)$$

A outra expressão para se determinar as constantes c_1 e c_2 é obtida da seguinte forma:

$$\begin{aligned} y_{(\xi=1)} = Y_2 = c_1 + c_2 + \tan(\theta_1)l_x + Y_1 \Rightarrow \\ c_1 + c_2 = Y_2 - Y_1 - \tan(\theta_1)l_x = l_y - \tan(\theta_1)l_x \end{aligned} \quad (2.15)$$

Resolvendo o sistema definido pelas Equações (2.14) e (2.15), chega-se a:

$$c_1 = [\tan(\theta_2) + \tan(\theta_1)]l_x - 2l_y \quad (2.16)$$

$$c_2 = 3l_y - [\tan(\theta_2) + 2\tan(\theta_1)]l_x \quad (2.17)$$

A deformação média, considerada de forma linear neste trabalho, é obtida por:

$$\varepsilon_{\text{med}} = \frac{ds - ds_0}{ds_0} \quad (2.18)$$

sendo ds o comprimento de um segmento do elemento estrutural paralelo ao eixo médio em uma posição qualquer e ds_0 seu comprimento na configuração de referência. A configuração de referência de um elemento inicialmente reto fica:

$$x^0 = X_1^0 + l_x^0 \xi \quad (2.19)$$

$$y^0 = Y_1^0 + l_y^0 \xi \quad (2.20)$$

Os comprimentos ds e ds_0 ficam:

$$\frac{ds_0}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx^0}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy^0}{d\xi}\right)^2} \quad (2.21)$$

$$\frac{ds_0}{d\xi} = \sqrt{(l_x^0)^2 + (l_y^0)^2} = l_0 \Rightarrow ds_0 = l_0 d\xi \quad (2.22)$$

$$\frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} = \sqrt{(l_x)^2 + (3c_1 \xi^2 + 2c_2 \xi + c_3)^2} \quad (2.23)$$

$$ds = \sqrt{(l_x)^2 + (3c_1 \xi^2 + 2c_2 \xi + c_3)^2} d\xi \quad (2.24)$$

Logo, a deformação normal pode ser obtida como:

$$\varepsilon_{\text{med}} = \frac{1}{l_0} \sqrt{(l_x)^2 + (3c_1 \xi^2 + 2c_2 \xi + c_3)^2} - 1 \quad (2.25)$$

Considerando uma coordenada em curva s é possível definir uma coordenada z , posicionada ortogonalmente a xy . Desta forma é possível definir a deformação no elemento finito, de acordo com a cinemática de Euler-Bernoulli, proporcionalmente à diferença de curvatura entre as configurações final e inicial. Sendo a curvatura nula na configuração inicial:

$$\varepsilon = \varepsilon_{\text{med}} + \frac{1}{r} z \quad (2.26)$$

Neste trabalho será utilizada a medida de deformação de Biot (válida para deformações moderadas) e seu respectivo par energético conjugado (tensor de tensões de Jaumann). A curvatura é dada pela seguinte expressão:

$$\frac{1}{r} = \frac{\frac{dx}{d\xi} \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \frac{d^2 x}{d\xi^2} \frac{dy}{d\xi}}{\left(\sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi} \right)^2} \right)^3} \quad (2.27)$$

Substituindo na Equação (2.27) as Equações (2.5) a (2.9), obtém-se:

$$\frac{1}{r} = \frac{I_x (6c_2 \xi + 2c_3)}{\left(\sqrt{(I_x)^2 + (3c_1 \xi^2 + 2c_2 \xi + c_3)^2} \right)^3} \quad (2.28)$$

sendo as constantes c_1 , c_2 , e c_3 expressas pelas Equações (2.16), (2.17) e (2.12), respectivamente.

Assim, a expressão para a Energia Potencial Total U_t , Equação (2.4), pode ser reescrita como:

$$U_t = \frac{E}{2} \int_{V_0} \varepsilon^2 dV_0 = \frac{E}{2} \int_{V_0} \left(\varepsilon_{\text{med}} + \frac{1}{r} z \right)^2 dV_0 = \frac{E}{2} \int_0^L \int_A \left(\varepsilon_{\text{med}} + \frac{1}{r} z \right)^2 dA dx \quad (2.29)$$

sendo as propriedades geométricas área, momento estático e momento de inércia definidas, respectivamente, como:

$$\begin{aligned} \int_A dA &= A \\ \int_A z dA &= Q_a = 0 \\ \int_A z^2 dA &= I_z \end{aligned} \quad (2.30)$$

2.1.2 Formulação aplicada a problemas dinâmicos

A conservação de energia em um sistema mecânico ocorre se a entrada e a saída desta grandeza estiverem em equilíbrio. Se houver algum tipo de dissipação, a energia total do sistema varia ao longo do tempo. A energia potencial total de um sistema pode ser descrita da seguinte forma:

$$\Pi_0 = \Pi + Q(X, t) \quad (2.31)$$

sendo $Q(X, t)$ é a quantidade de energia subtraída da energia idealizada conservativa simples Π_0 , Π é a energia mecânica remanescente (real) do sistema, X é a coordenada posicional e t o tempo. Para um problema estrutural associado a um sistema de referência fixo, a função de energia potencial ideal pode ser escrita como a composição da energia de deformação U_t , a energia potencial das forças aplicadas P , a energia cinética K e a dissipação Q como segue:

$$\Pi_0 = U_t + P + K + Q \quad (2.32)$$

sendo a função da energia interna de deformação U_t dada na Equação (2.29). Na posição inicial (não deformada), a energia de deformação é assumida nula. O trabalho das forças conservativas P é escrito como:

$$P = -F_i X \quad (2.33)$$

Na Equação (2.33), F_i representa as forças (ou momentos) aplicadas na direção i e X_i é a i -ésima coordenada posicional do ponto onde a carga é aplicada. A energia cinética é dada por:

$$K = \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{X}_i \dot{X}_i dV_0 \quad (2.34)$$

sendo \dot{X}_i a i -ésima velocidade no ponto em análise e ρ_0 a massa específica do elemento em análise. O termo dissipativo é escrito em sua forma diferencial da seguinte forma:

$$\frac{\partial Q(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}_i} = \int_{V_0} \frac{\partial q(\mathbf{X}, t)}{\partial \mathbf{X}_i} dV_0 = \int_{V_0} \lambda_m \dot{\mathbf{X}}_i dV_0 \quad (2.35)$$

Na Equação (2.35), $q(\mathbf{X}, t)$ é o funcional específico de dissipação e λ_m é uma constante de proporcionalidade. A energia potencial das forças aplicadas pode não ser nula na configuração de referência (GRECO e CODA, 2006). Assim, a Equação (2.35) pode ser reescrita como:

$$\Pi_0 = \int_{V_0} u_e dV_0 - \mathbf{F}_i \mathbf{X}_i + \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{\mathbf{X}}_i \dot{\mathbf{X}}_i dV_0 + Q \quad (2.36)$$

ou ainda, a partir da seguinte aproximação:

$$\Pi_0 = \int_{V_0} u_e(\xi, \mathbf{X}_i) dV_0 - \mathbf{F}_i \mathbf{X}_i + \frac{1}{2} \int_{V_0} \rho_0 \dot{\mathbf{X}}_i^2(\xi, \mathbf{X}_i) dV_0 + Q(\xi, \mathbf{X}_i) \quad (2.37)$$

O princípio da energia potencial mínima consiste nos valores reais que satisfazem as equações de equilíbrio e tornam a energia potencial estacionária para todos os deslocamentos admissíveis em um determinado sistema. Este princípio é usado em Π_0 diferenciando-se a Equação (2.37) em relação a uma posição nodal genérica \mathbf{X}_s , que resulta na seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_0}{\partial \mathbf{X}_s} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e(\xi, \mathbf{X}_i)}{\partial \mathbf{X}_s} dV_0 - \mathbf{F}_s + \int_{V_0} \rho_0 \dot{\mathbf{X}}_i(\xi, \mathbf{X}_i) \frac{\partial \dot{\mathbf{X}}_i(\xi, \mathbf{X}_i)}{\partial \mathbf{X}_s} dV_0 \\ + \int_{V_0} \lambda_m \rho_0 \dot{\mathbf{X}}_s(\xi, \mathbf{X}_i) dV_0 = 0 \end{aligned} \quad (2.38)$$

Na Equação (2.38), $\dot{\mathbf{X}}_s$ é uma velocidade nodal genérica. De forma vetorial, a Equação (2.38) pode ser reescrita como segue:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\text{inert}} + \mathbf{F}_{\text{damp}} = \mathbf{0} \quad (2.39)$$

sendo os vetores de forças internas $\partial U_t / \partial \mathbf{X}$, de forças de inércia $\mathbf{F}_{\text{inert}}$ e de forças de

amortecimento \mathbf{F}_{damp} dados, respectivamente, por:

$$\frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} = \int_{V_0} \frac{\partial u_e(\xi, X_i)}{\partial X_s} dV_0 \quad (2.40)$$

$$\mathbf{F}_{\text{inert}} = \int_{V_0} \rho_0 \dot{X}_i(\xi, X_i) \frac{\partial \dot{X}_i(\xi, X_i)}{\partial X_s} dV_0 = \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} \quad (2.41)$$

$$\mathbf{F}_{\text{damp}} = \int_{V_0} \lambda_m \rho_0 \dot{X}_s(\xi, X_i) dV_0 = \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \quad (2.42)$$

Nas Equações (2.41) e (2.42), $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ são os vetores de velocidade e aceleração, respectivamente. De forma aproximada, para um elemento, as matrizes de massa \mathbf{M} e de amortecimento \mathbf{C} podem ser escritas como:

$$\mathbf{M} = \frac{\rho_0 A L}{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.43)$$

$$\mathbf{C} = 2 c_m \mathbf{M} \quad (2.44)$$

Na Equação (2.44), c_m é coeficiente de amortecimento. Neste caso, foi considerada somente a proporcionalidade em relação à massa para a determinação da matriz de amortecimento \mathbf{C} . No Capítulo 4 apresenta-se como ela pode ser obtida a partir do amortecimento proporcional de Rayleigh.

Logo, a Equação (2.39) torna-se:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{F} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \quad (2.45)$$

Nesta etapa torna-se necessário realizar uma integração numérica no domínio do tempo para, em seguida, efetuar a segunda derivação em relação à posição para a Equação (2.45). Reescrevendo-a para o instante de tempo $t+\Delta t$, obtém-se:

$$\left. \frac{\partial \Pi_0}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \mathbf{0} \quad (2.46)$$

A Equação (2.46) representa a condição de equilíbrio dinâmico não linear geométrico para o problema em análise. O vetor representativo dos carregamentos nodais $\mathbf{F}_{t+\Delta t}$ é conhecido em cada instante de tempo.

2.1.3 Integração direta usando o método de Newmark

O método de Newmark é um dos mais utilizados para integração direta das equações de movimento devido à sua relação entre custo computacional, precisão e simplicidade de implementação. É incondicionalmente estável em problemas dinâmicos em regime linear elástico (OLLER, 2014). No entanto, pode apresentar instabilidade numérica em problemas com forte não-linearidade geométrica. Neste item apresenta-se o método de Newmark para solução da Equação (2.46). No Capítulo 4 serão apresentados outros métodos, clássicos e recentes, para solução da mesma equação. A posição e a velocidade podem ser obtidos a partir das seguintes relações:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \Delta t \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{X}}_t + \beta \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \right] \quad (2.47)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_t + \gamma \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} \quad (2.48)$$

em que os parâmetros $\beta=0.25$ e $\gamma=0.5$, valores usados neste trabalho, referem-se ao critério da aceleração constante no intervalo de tempo. Como vantagem, Soriano (2014) destaca que o Método de Newmark com aceleração constante é simples, incondicionalmente estável e não introduz amortecimento numérico. A aceleração nodal inicial é determinada, com base na Equação (2.46), como:

$$\ddot{\mathbf{X}}_0 = \mathbf{M}^{-1} \left[\mathbf{F}_0 - \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_0 - \left. \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \right|_0 \right] \quad (2.49)$$

Como a formulação proposta neste capítulo é baseada na descrição das posições, os

deslocamentos não são utilizados ao longo do processo. Entretanto, conhecidas as posições, pode-se fazer:

$$\mathbf{X} = \mathbf{X}_0 + \mathbf{U} \Rightarrow \mathbf{U} = \mathbf{X} - \mathbf{X}_0 \quad (2.50)$$

Desta forma é possível obter diretamente a velocidade e a aceleração da seguinte forma:

$$\dot{\mathbf{U}} = \dot{\mathbf{X}} \quad (2.51)$$

$$\ddot{\mathbf{U}} = \ddot{\mathbf{X}} \quad (2.52)$$

Se as Equações (2.50), (2.51) e (2.52) fossem substituídas nas Equações (2.47) e (2.48), seriam obtidas as expressões para o Método de Newmark em função dos deslocamentos.

Tomando-se a Equação (2.47) e isolando-se as acelerações no tempo $t+\Delta t$, chega-se a:

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} - \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} - \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (2.53)$$

Levando-se as Equações (2.53) e (2.48) na Equação (2.46), obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} &= \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} \mathbf{D}_M + \mathbf{C} \mathbf{D}_C \\ &\quad + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{X}_{t+\Delta t} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{D}_M = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.54)$$

em que os vetores \mathbf{D}_M e \mathbf{D}_C , da Equação (2.54) contêm as contribuições das variáveis consideradas no instante anterior t , e são dados por:

$$\mathbf{D}_M = \frac{\mathbf{X}_t}{\beta \Delta t^2} + \frac{\dot{\mathbf{X}}_t}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1 \right) \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (2.55)$$

$$\mathbf{D}_C = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (2.56)$$

Retornando-se à Equação (2.46) e derivando-a em relação às posições no instante

atual, chega-se a:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(\mathbf{X}^0) = \left. \frac{\partial^2 U_t}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (2.57)$$

A Equação (2.57) representa a expressão da matriz Hessiana para o problema dinâmico.

Para a solução do problema dinâmico não linear, aplica-se o Método de Newton-Raphson à Equação (2.54). A correção das posições durante as iterações é realizada conforme a Equação (2.58):

$$g(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \simeq g(\mathbf{X}^0) + \nabla g(\mathbf{X}^0) \Delta \mathbf{X} \quad (2.58)$$

O vetor dos resíduos é dado como:

$$g(\mathbf{X}^0) = \left. \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} \mathbf{X}_{t+\Delta t} - \mathbf{M} \mathbf{D}_M + \mathbf{C} \mathbf{D}_C + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \mathbf{X}_{t+\Delta t} - \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{D}_M \quad (2.59)$$

As correções nas posições nodais é realizada durante o processo iterativo, resolvendo-se a Equação (2.58) em relação a $\Delta \mathbf{X}$:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \Delta \mathbf{X} \quad (2.60)$$

Já as correções nas acelerações ficam:

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \frac{\mathbf{X}_{t+\Delta t}}{\beta \Delta t^2} - \mathbf{D}_M \quad (2.61)$$

Em seguida, pode-se atualizar as velocidades utilizando a Equação (2.48).

Por se tratar de um processo iterativo, o Método de Newton-Raphson requer um critério de parada para verificação da precisão nas correções. Neste trabalho usa-se a norma

Euclidiana do vetor de resíduos $g(\mathbf{X}^0)$ comparada a um valor de tolerância a partir da seguinte relação:

$$\|g(\mathbf{X}^0)\| = \sqrt{g(\mathbf{X}^0) \cdot g(\mathbf{X}^0)} \leq \text{tol} \quad (2.62)$$

Obedecido o critério dado pela Equação (2.62), atualiza-se as variáveis de estado \mathbf{X} , $\dot{\mathbf{X}}$ e $\ddot{\mathbf{X}}$ para o passo seguinte.

2.2 Definição de estabilidade

Segundo Bazant e Cedolin (2010, p. 174), a estabilidade das estruturas deve ser avaliada do ponto de vista dinâmico pois, em geral, uma avaliação estática é insuficiente.

Partindo-se da equação de movimento – Equação (2.45) – para um sistema com n graus de liberdade, e introduzindo um novo conjunto de variáveis Y_1, Y_2, \dots, Y_N , com $N=2n$, de forma que:

$$Y_{2i-1} = X_i - (X_0)_i \quad (2.63)$$

$$Y_{2i} = \dot{X}_i \quad (2.64)$$

$$\dot{Y}_{2i-1} = Y_{2i} \quad (2.65)$$

com $i=1, 2, \dots, n$ de forma a converter, por conveniência, a Equação (2.45) em um sistema de equações diferenciais de primeira ordem, chega-se a um sistema $2n$ de equações diferenciais de primeira ordem para as incógnitas $Y_k(t)$. Em notação indicial:

$$M_{ij} \dot{Y}_{2j} + C_{ij} Y_{2j} + \frac{\partial U_t}{\partial X_i} = F_i \quad (2.66)$$

com $j=1, 2, \dots, n$. É importante ressaltar que, em formulação posicional, o termo Y_{2i-1} encontra-se implícito na matriz Hessiana, não aparecendo, portanto, na Equação (2.66).

Dividindo-se a Equação (2.66) por M_{ij} , chega-se a um sistema de $2n$ equações diferenciais de primeira ordem na forma padrão (canônica):

$$\dot{Y}_k = F_k(Y_1, Y_2, \dots, Y_N, t) \quad k=1,2,\dots,N \quad (2.67)$$

Na Equação (2.67), as variáveis Y_1, Y_2, \dots, Y_N compõem o espaço N -dimensional denominado espaço de fase. Em problemas geometricamente não lineares, a matriz Hessiana e a matriz de amortecimento podem depender das posições, de forma que as funções F_k tornam-se, também, não-lineares (BAZANT e CEDOLIN, 2010).

A principal questão com relação à estabilidade estrutural é analisar o que ocorre ao se perturbar o sistema em estudo, ou seja, quando os valores iniciais Y_k^0 são alterados para valores iniciais ligeiramente diferentes $Y_k^0 + v_k^0$, onde v_k^0 são pequenas perturbações iniciais. Assim, a solução associada aos valores iniciais é, então, definida por:

$$Y_k(t) = Y_k^0(t) + v_k(t) \quad (2.68)$$

Os termos $v_k(t)$ na Equação (2.68) representam a mudança da solução oriunda da alteração nas condições iniciais. Nos problemas em geral, as funções são contínuas e suaves; logo, podem ser expandidas em séries de Taylor em relação a Y_k^0 . Desta forma, chega-se a:

$$\begin{aligned} \dot{Y}_k = \dot{Y}_k^0 + \dot{v}_k = F_k(Y_1^0, Y_2^0, \dots, Y_N^0, t) + \sum_{m=1}^N a_{km} v_m \\ + \frac{1}{2!} \sum_{m=1}^N \sum_{p=1}^N \frac{\partial^2 F_k}{\partial Y_m \partial Y_p} v_m v_p + \dots \end{aligned} \quad (2.69)$$

sendo os termos a_{km} expressos por:

$$a_{km} v_m = \frac{\partial F_k}{\partial Y_m} \quad (2.70)$$

Além disso, por definição:

$$\dot{Y}_k^0 = F_k(Y_1^0, Y_2^0, \dots, Y_N^0, t) \quad k=1,2,\dots,N \quad (2.71)$$

Levando a Equação (2.71) na Equação (2.69), chega-se às seguintes equações diferenciais:

$$\dot{v}_k = \sum_{m=1}^N a_{km} v_m + \psi_k(v_1, v_2, \dots, v_N, t) \quad k=1,2, \dots, N \quad (2.72)$$

sendo ψ_k funções associadas ao segundo e demais termos de maior ordem da expansão da série de Taylor. Bazant e Cedolin (2010) destacam que esses termos têm a propriedade particular de que suas expansões em série de Taylor sobre $v_k=0$ não contêm termos constantes ou lineares em v_k .

As Equações (2.72), introduzidas por Poincaré (BAZANT e CEDOLIN, 2010), reduzem a análise de estabilidade de qualquer solução para a análise de estabilidade de uma solução trivial $v_k=0$.

Feitas estas considerações, pode-se definir estabilidade de forma adequada: se existir um número positivo δ para um valor positivo arbitrário μ de forma que todas as soluções com valores iniciais:

$$|v_k^0| \leq \delta \quad k=1,2, \dots, N \quad (2.73)$$

satisfaçam as desigualdades:

$$|v_k(t)| < \mu \quad k=1,2, \dots, N \quad (2.74)$$

para qualquer tempo $t > t_0$, então a solução Y_k^0 é dita estável (pelo conceito de Lyapunov). Se, adicionalmente, a seguinte condição for obedecida:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} v_k = 0 \quad (2.75)$$

pode-se afirmar que a solução é assintoticamente estável.

Em resumo, um determinado sistema ou estrutura é estável se uma pequena mudança nas condições iniciais conduzir a uma pequena mudança na resposta do problema. Esta definição é atribuída a Lyapunov (1892).

Graficamente, pode-se exemplificar o fato a partir de um sistema linear (como um oscilador, por exemplo) cujo diagrama típico de fase é apresentado na Figura 2.2

(deslocamento no eixo das abscissas, velocidade no das ordenadas). Se o sistema for amortecido, o movimento após um deslocamento imposto leva o sistema de volta à posição original de equilíbrio (Figura 2.2a). Caso não haja amortecimento, um movimento semelhante ao diagrama da Figura 2.2b ocorre. Caso a rigidez do sistema se torne negativa, uma instabilidade estática é observada; mas se o amortecimento se torna negativo, uma instabilidade dinâmica, segundo Bazant e Cedolin (2010), é verificada (Figura 2.2c).

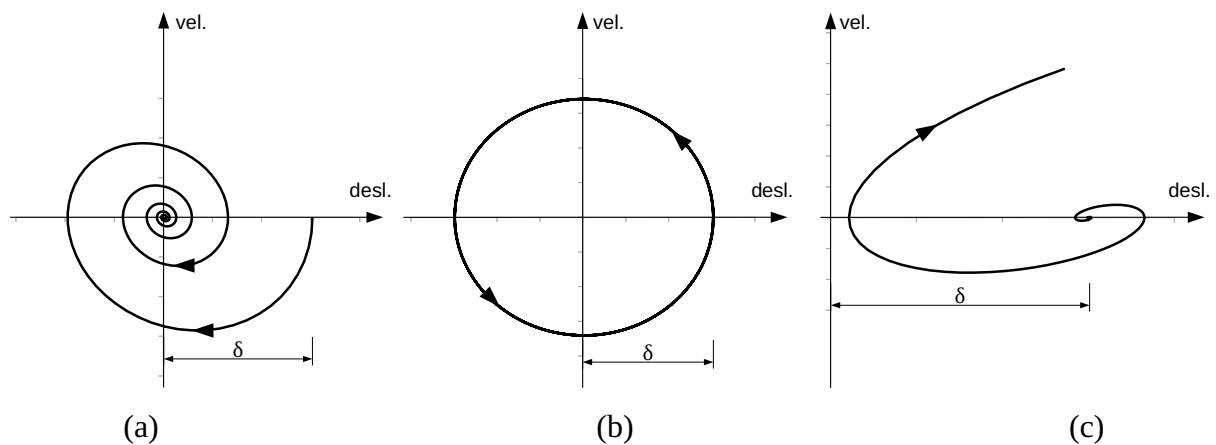


Figura 2.2: Respostas dinâmicas no diagrama de fase: (a) estável, amortecida; (b) estável, não amortecida e (c) instável.

2.3 Snap-through

De acordo com Pignataro *et al.* (1991), o fenômeno de instabilidade chamado *snap-through* ou ponto limite de instabilidade está associado, fisicamente, à mudança súbita de configuração a partir da qual um sistema, encontrando-se em uma posição de equilíbrio instável (próxima de sua posição inicial), salta para uma nova configuração de equilíbrio estável, remota, estando submetido à mesma carga.

Algumas estruturas susceptíveis a este fenômeno são a treliça simples de duas barras (treliça de Von Mises) e os arcos abatidos. Estas estruturas, quando atirantadas, também podem apresentar a mesma instabilidade (Figura 2.3). Imperfeições também influenciam significativamente no *snap-through* como, por exemplo, uma perturbação dinâmica inicial (Bazant e Cedolin, 2010). Além disso, os mesmos autores destacam que o principal aspecto da instabilidade por *snap-through* é o fato de que ela conduz a um problema não-linear que não pode ser linearizado.

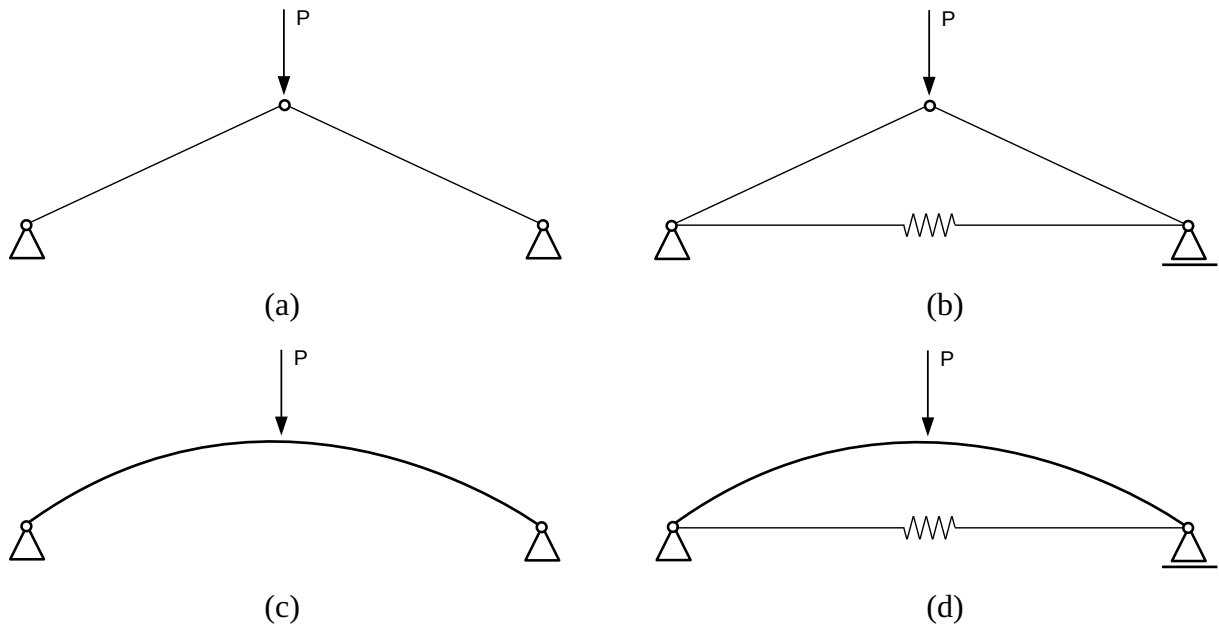


Figura 2.3: Exemplos de sistemas que podem exibir *snap-through*: (a) treliça simples; (b) treliça simples atirantada; (c) arco abatido articulado e (d) arco abatido articulado atirantado.

Trabalhos recentes descrevem a ocorrência do ponto limite de instabilidade em situações variadas da Engenharia Estrutural. Gomez *et al.* (2019) analisaram a dinâmica do *snap-through* na presença de efeitos viscoelásticos em uma forma modificada da treliça de von Mises. A ideia dos autores foi baseada no salto lento e anômalo que se observa em domos elásticos esféricos e na dinâmica do limite em que a escala de tempo de relaxamento viscoso é muito maior do que a escala de tempo elástica característica. Como meio de validação da metodologia empregada, dados experimentais e numéricos de tempos de *snap-through* viscoelásticos relatados em literatura foram utilizados.

Uma investigação numérica e experimental da dinâmica não linear e limites de *snap-through* de chapas laminadas compostas em diferentes situações de carregamento harmônico foi realizada por Kim e Wiebe (2019). Métodos de campo completo e de detecção de ponto único foram usados para explorar o comportamento complexo espaço-temporal e a influência dos parâmetros das placas em situação pós-flambagem. Os autores geraram o modelo numérico usando um elemento finito escrito em MATLAB com base na teoria clássica de placas laminadas, combinado a elementos Hermite cúbicos não conformes (continuidade semi- C_1) e amortecimento de Rayleigh.

She *et al.* (2019) estudaram o *snap-through* com classificação funcional (FG) de nanovigas porosas em curva baseado em três parâmetros elásticos utilizados em fundações. As

nanovigas foram submetidas a cargas transversais uniformes. As equações não lineares que regem o problema foram obtidas com base na Teoria do Gradiente de Deformação não-local com a Teoria de deformação por cisalhamento de Vigas com termos de ordem elevada de Reddy.

Gao *et al.* (2018) apresentaram um novo método de dimensionamento para vigas pré-comprimidas em forma de arco com reforços localizados, obtidas através da compressão axial de suas correspondentes vigas retas no estado pós-flambagem. Essas vigas são denominadas biestáveis. Os autores utilizaram propriedades inerentes ao *snap-through*, como a força limite para a ocorrência do fenômeno e a altura do ápice do arco. Associadas a essas propriedades, foram utilizados parâmetros de controle como a posição e dimensões dos reforços localizados, além da variação do comprimento devido à pré-compressão.

Keibolahi *et al.* (2018) investigaram a instabilidade dinâmica de um arco abatido submetido a um tipo transiente de carregamento térmico utilizando o critério de Budiansky-Hutchinson. Os autores utilizaram a relação de tensão-deslocamento de von Kármán, e verificam que estas estruturas podem apresentar *snap-through* sob aquecimento rápido de uma determinada superfície quando certas restrições geométricas são atendidas.

Watts *et al.* (2018) investigaram a instabilidade não-linear por flexão e *snap-through* de painéis cônicos isotrópicos e compostos (mistos) usando o Método sem Malha de Galerkin (EFG) com funções de forma do tipo *moving kriging* (MK). Os mesmos autores empregaram a teoria de cascas de Sanders e a relação deformação-deslocamento de von Kármán para derivar as equações não lineares de equilíbrio. As mesmas foram resolvidas usando-se o Método de Riks modificado em conjunto com o método de Newton-Raphson.

Plaut (2018) verificou a instabilidade por *snap-through* de domos rasos reticulados sujeitos a um deslocamento descendente quasi-estático ou a uma força nodal. O tensor de deformações de Green-Lagrange foi utilizado, bem como a deformação de engenharia. O autor demonstra as trajetórias de equilíbrio na situação de controle de carga e controle de deslocamento.

Yan *et al.* (2018) investigaram analiticamente um arco abatido biarticulado não uniforme sob uma carga concentrada, considerando o efeito de imperfeição. As equações de equilíbrio governantes do problema, que incluem o efeito de imperfeição, são derivadas através do Princípio da Mínima Energia Potencial e os critérios para possível ocorrência de *snap-through* simétrico são apresentados explicitamente usando-se a regra de L'Hospital após

identificar dois parâmetros de rigidez modificados.

O fenômeno em estudo, do ponto de vista estático, pode ser detalhado graficamente a partir da Figura 2.4b. Sejam λ e θ o parâmetro de carga e o ângulo de rotação do nó esquerdo, respectivamente, para a treliça de duas barras mostrada na Figura 2.4a. Neste caso, a curva é representativa do *snap-through* estático, analisado sob controle de carga.

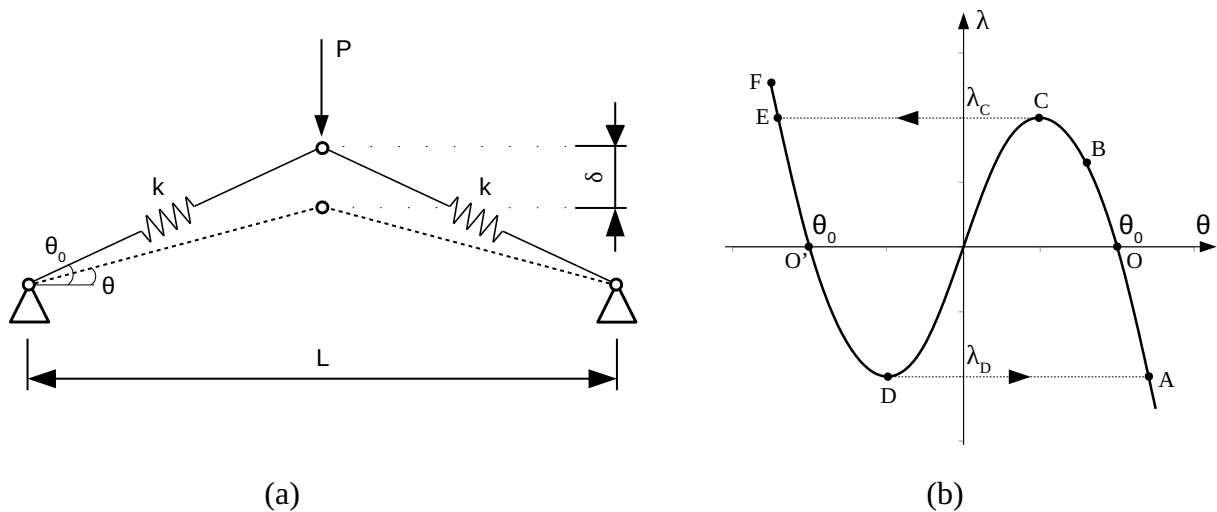


Figura 2.4: Sistema de 1 grau de liberdade: (a) Treliça de Von Mises e (b) Fenômeno snap-through. Fonte: Pignataro et al. (1991). Adaptado.

Supondo o ponto O como representativo do sistema em seu estado natural, um aumento de carga (iniciado em zero) fará com que o ponto de equilíbrio representativo se mova ao longo da curva OC descrevendo uma trajetória não linear, caracterizando configurações estáveis de equilíbrio. Caso seja descarregado em um ponto aleatório B contido em OC , o sistema retornará à sua configuração inicial em O . Entretanto, se o ponto representativo B alcançar C , a posição de equilíbrio se torna instável e o sistema salta para o ponto E onde encontra, sob a mesma carga, uma posição de equilíbrio estável. Um incremento de carga nesta etapa moverá B ao longo da curva EF . Caso seja feita, ao longo deste trecho, uma descarga completa, o sistema se moverá o ponto O' , simétrico a O . Supondo que λ assuma valores negativos, outro salto ocorre em D e o sistema se move para A , pertencente ao trecho original da curva. Salienta-se que todas as configurações de equilíbrio no trecho CD são instáveis, não podendo ser alcançadas a partir da configuração natural. Caso o sistema se encontre em uma dessas configurações, qualquer pequena perturbação tende a levá-lo a uma das duas posições de equilíbrio estável correspondentes à carga especificada.

Quanto aos arcos abatidos, pode-se defini-los como aqueles que possuem uma relação

entre comprimento do vão L e flecha z dada por:

$$0 < \frac{z}{L} \leq 0.3 \quad (2.76)$$

Em arcos abatidos deformáveis deve-se considerar a variação do comprimento devido ao esforço de compressão. Isso resulta em perda de estabilidade nestas estruturas (Karnovsky, 2012). Seja, portanto, um arco abatido conforme a Figura 2.5. Três casos de perda de estabilidade são apresentados. No 1º caso, esta perda ocorre na forma simétrica de uma meia-onda, resultando em um mesmo sinal de curvatura nos estados inicial e deformado. Por outro lado, apesar do 2º caso corresponder, também, a uma flambagem simétrica em meia-onda, as curvaturas nos estados deformável e inicial têm sinais diferentes. Já no 3º caso, a perda de estabilidade corresponde a duas meias-ondas associadas de forma antissimétrica. Segundo Karnovsky (2012), os casos 2 e 3 são representativos do *snap-through*.

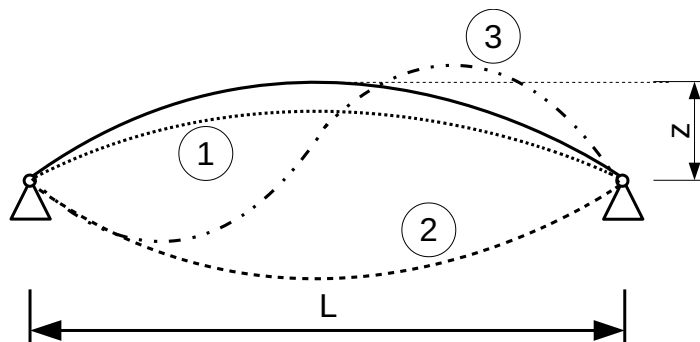


Figura 2.5: Arco abatido e três formas de perda de estabilidade.

2.4 Exemplos

Nos quatro exemplos a seguir procura-se demonstrar, a partir da formulação proposta, a ocorrência de instabilidade dinâmica em sistemas submetidos a diferentes condições de carregamento.

2.4.1 Arco senoidal abatido biarticulado com molas de rotação

Seja o arco abatido com apoios elásticos de amplitude 20mm sob uma carga concentrada $P(t)$ conforme mostrado na Figura 2.6a. Este sistema foi estudado por Rosas

(2016) e por Fernandes *et al.* (2018), utilizando a formulação posicional apresentada neste capítulo. A seção transversal possui forma quadrada (20mmx20mm), e o Módulo de Elasticidade Longitudinal é igual a 200GPa. A massa específica considerada foi 7800kg/m³.

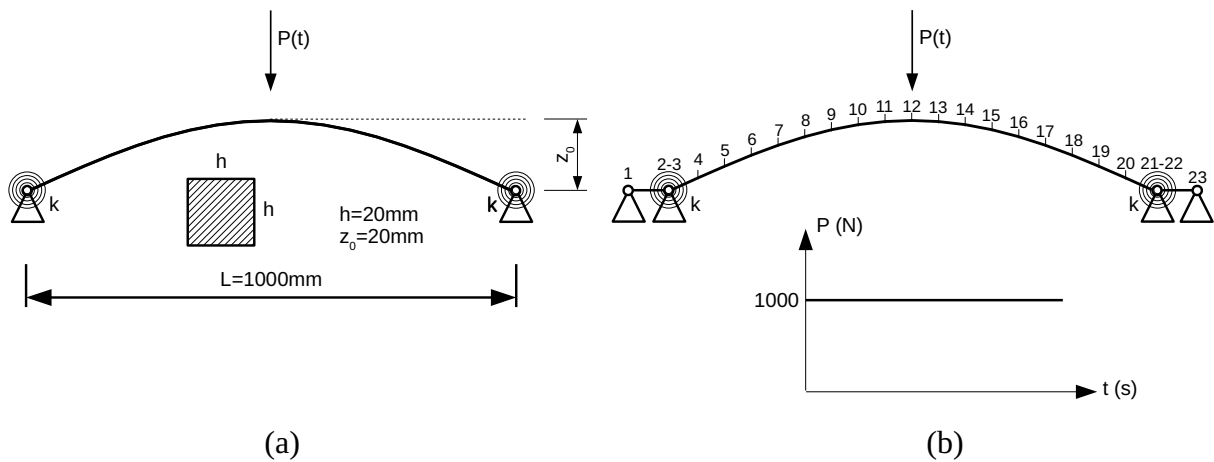


Figura 2.6: Arco senoidal abatido biarticulado com molas de rotação: (a) modelo não discretizado; (b) modelo discretizado com elementos mudos e função do carregamento aplicado.

Foram considerados 20 elementos finitos, dos quais 2 são elementos mudos, situados nas extremidades do arco (Figura 2.6b). Estes elementos foram utilizados somente para permitir a inserção das molas. Quanto aos nós, foram utilizados 23, sendo 2 nós duplos (2-3 e 21-22), conforme mostra a Figura 2.6b. Estes nós duplos permitem que as rotações entre os elementos adjacentes sejam consideradas independentes entre si. No que diz respeito à rigidez das molas de rotação, o valor utilizado foi $k=2.8\text{MNm/rad}$, com taxa de amortecimento de 0.010 e intervalo de tempo de 0.5s para a análise.

A Figura 2.7 mostra as posições do nó central em função do tempo. Os resultados do presente trabalho demonstram menor amplitude se comparados com o obtido por Rosas (2016), provavelmente por ter sido considerado amortecimento associado ao 1º modo de vibração apenas. O mesmo problema será novamente discutido no Capítulo 4, item 4.6.5. Neste caso não há ocorrência do *snap-through*. Isso fica evidenciado ao se observar a amplitude das posições do nó central para as três respostas, situada no intervalo entre 20 e 17.5mm. Os resultados tendem a um valor constante com o aumento do tempo (aproximadamente 18.7mm), visto ser o sistema amortecido. Observa-se ainda pequenas diferenças de amplitude para $k=2.8\text{MNm/rad}$ e $k=0$ para o carregamento considerado, enquanto a resposta para $k \rightarrow \infty$ apresenta menores amplitudes que os casos anteriores. Isso

ocorre devido ao aumento de rigidez do sistema ocasionado pelas ligações. Este fato também se reflete na defasagem entre as respostas: $k \rightarrow \infty$ apresenta um período de oscilação menor que $k=0$, ficando a resposta $k=2.8\text{MNm/rad}$ em uma situação intermediária.

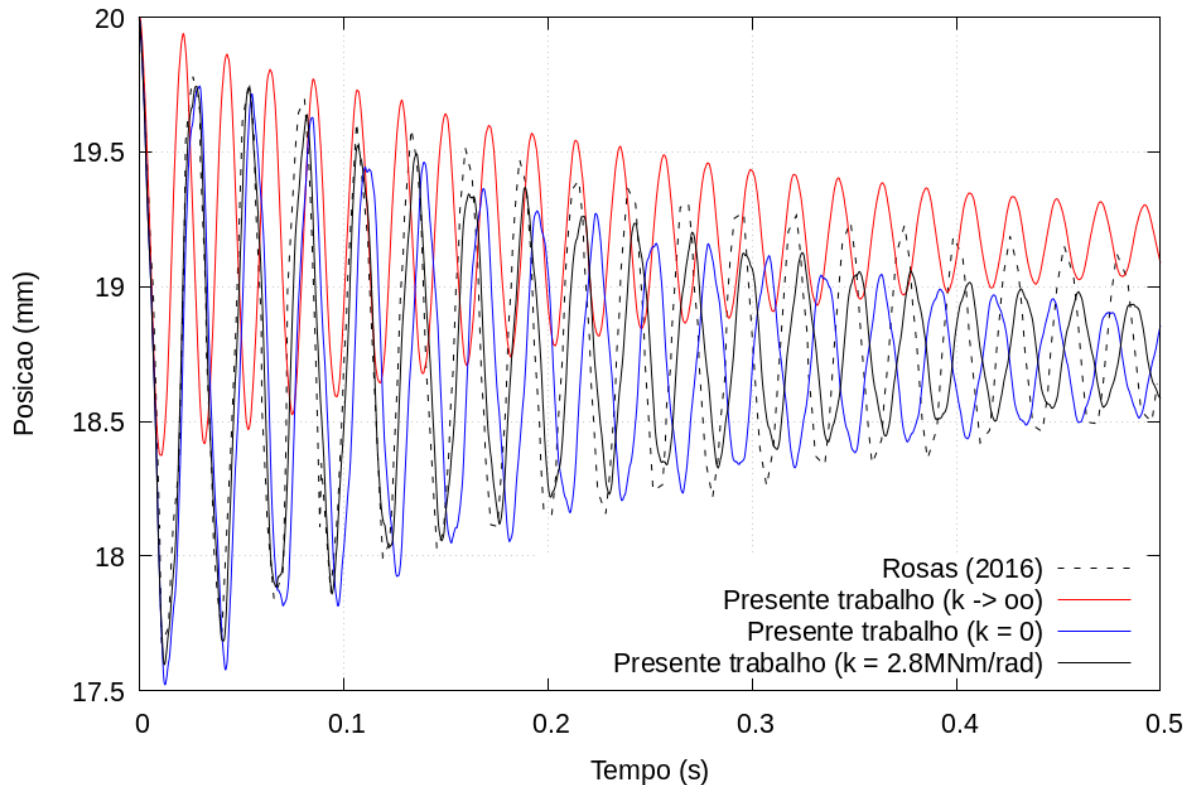
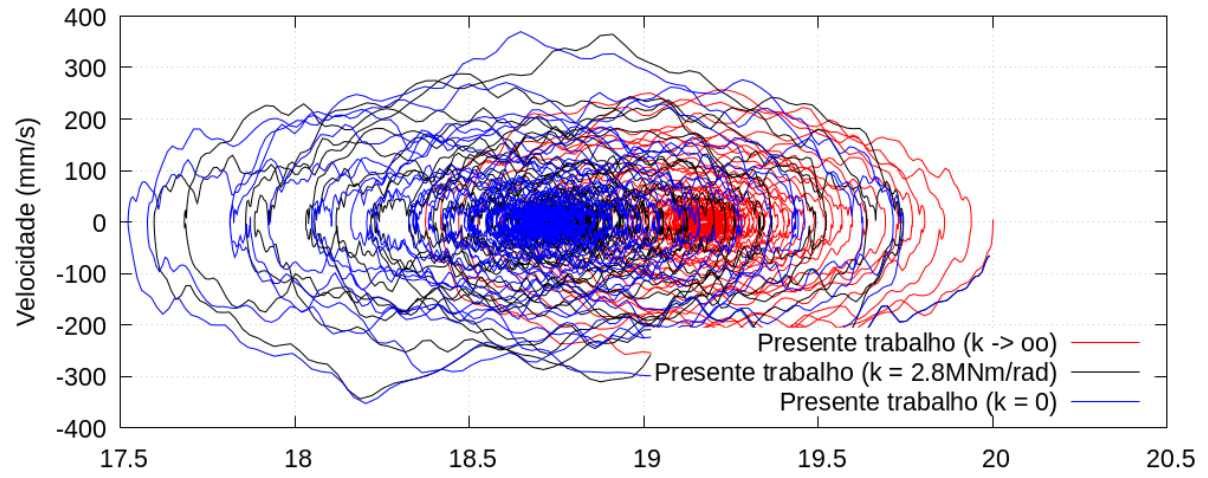


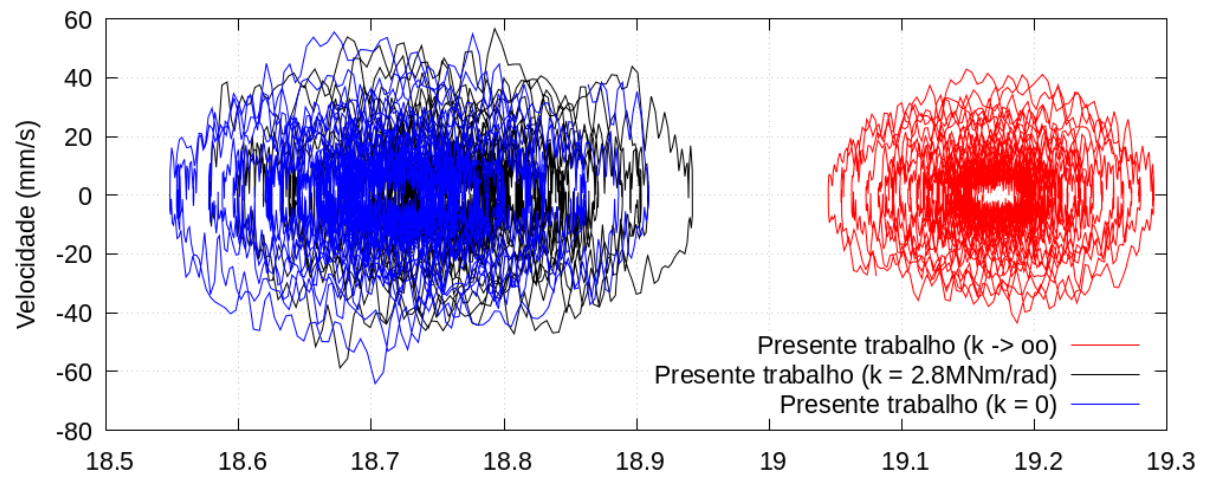
Figura 2.7: Posições do nó central (nó 12) em função do tempo.

Para o diagrama de fase (Figura 2.8a) foi utilizado um intervalo de tempo maior ($t=1.0\text{s}$) para que, desta forma, houvesse melhor visualização do ponto de foco (ou atrator). Este é ponto para o qual, sendo o sistema amortecido, o diagrama de fase converge, apresentando velocidade nula e posição correspondente à resposta em análise estática.

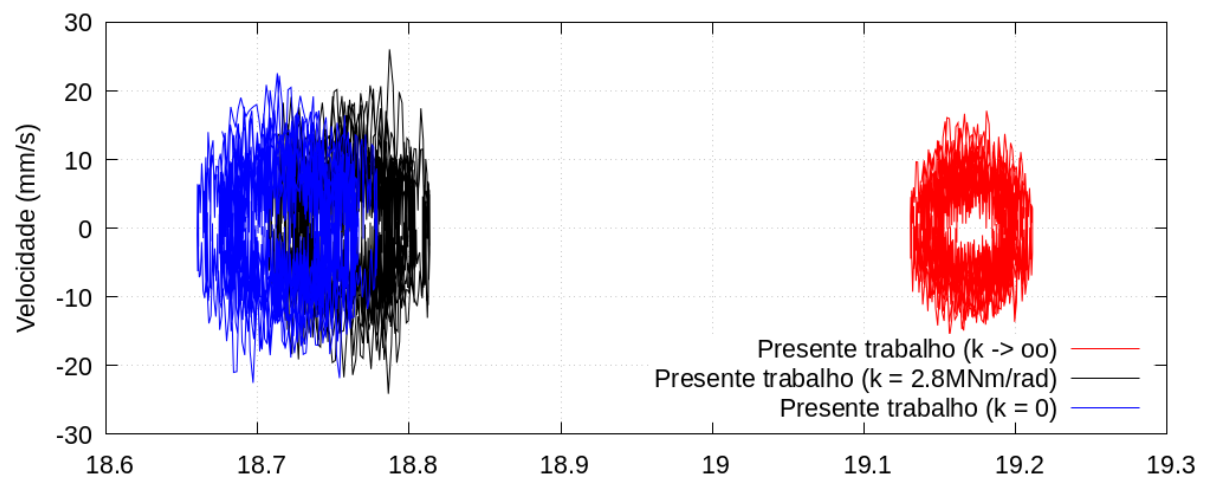
Os diagramas de fase para ligações com rigidezes $k=2.8\text{MNm/rad}$ e $k=0$ mostram comportamento semelhante no intervalo de análise da resposta. Isso é reflexo dos resultados para os 2 casos mostrados na Figura 2.7. Observa-se, entretanto, para $k \rightarrow \infty$, uma espiral de menor tamanho cujo foco se situa mais à direita do gráfico. Isso ocorre pela maior rigidez do sistema neste caso, resultando em menores variações das posições. Aproximando-se dos pontos de foco, observa-se de forma mais nítida a separação entre eles na Figura 2.8b ($0.5\text{s} < t < 1.0\text{s}$) e na Figura 2.8c ($0.8\text{s} < t < 1.0\text{s}$) onde, em velocidade nula, os valores de posição são 0.83mm para $k \rightarrow \infty$, 1.24mm para $k=2.8\text{MNm/rad}$, 1.28mm para $k=0$.



(a) Posicao (mm)



(b) Posicao (mm)



(c) Posicao (mm)

Figura 2.8: Diagrama de fase do nó central para diferentes valores de k nos seguintes intervalos de tempo: (a) $0 < t < 1.0\text{s}$; (b) $0.5\text{s} < t < 1.0\text{s}$ e (c) $0.8\text{s} < t < 1.0\text{s}$.

2.4.2 Arco senoidal abatido triarticulado com molas de rotação

O segundo exemplo consiste no arco do caso anterior considerando uma rótula em seu topo (Figura 2.9a). Este arco foi analisado por Fernandes *et al.* (2018). Os dados referentes à geometria, propriedades de seção e material são os mesmos. Diferentes condições de extremidade são consideradas neste exemplo: semirrígidas e idealizadas (birrotulada, biengastada e rotulada-engastada). A rigidez da mola para os apoios elásticos foi obtida utilizando a seguinte relação:

$$k(x) = \frac{x}{(1-x)} \frac{EI}{L} \quad (2.77)$$

sendo $0 \leq x < 1$. Se $x=0$, tem-se uma rótula perfeita e, para $x=1$, um engaste perfeito. Os valores escolhidos para a variável x nesta análise são: 0.333, 0.666 e 0.999. Foi considerado um carregamento $P(t)$ constante aplicado subitamente até 0.5 segundos, crescente no tempo de 0.5 a 2 segundos e nulo de 2 a 3 segundos, conforme apresentado na Figura 2.9b.

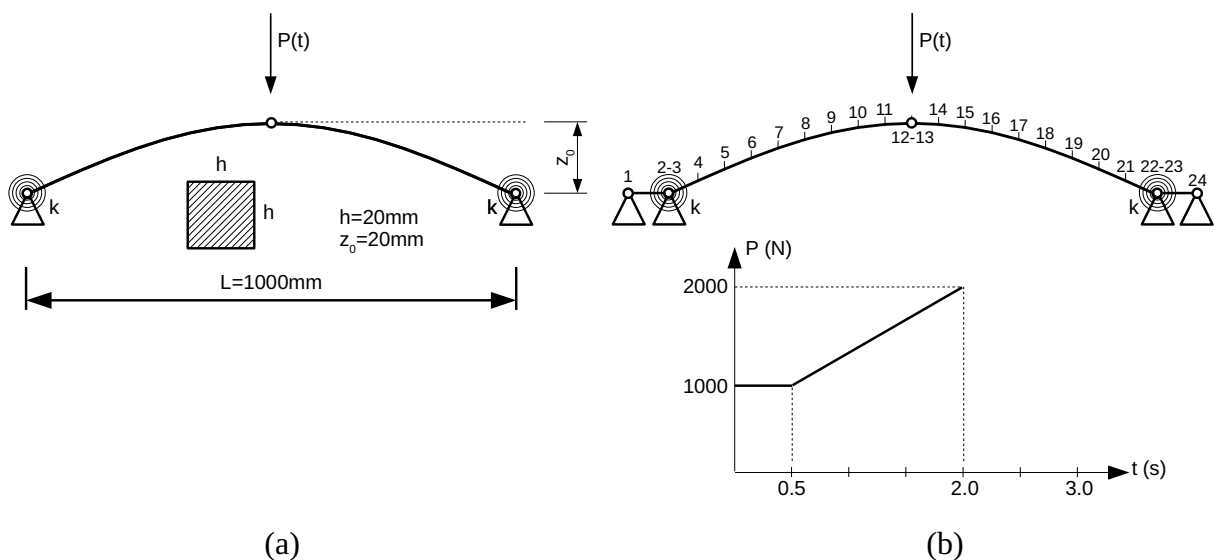


Figura 2.9: Arco senoidal abatido biarticulado com molas de rotação submetido à carga concentrada: (a) geometria e (b) discretização e variação do carregamento para o intervalo de 0 a 3s.

As posições do nó 12 para ligações ideais são apresentados na Figura 2.10. O comportamento da estrutura, representado por este nó, difere nos três intervalos em que houve variação do carregamento. A amplitude da resposta para o arco biengastado aumenta

ligeiramente no intervalo entre 0.5s e 1.5s. A situação birrotulada é a primeira a apresentar *snap-through*, seguido pelo caso de arco com ligação rotulada-engastada ($\sim 1.6s$) e biengastada ($\sim 1.7s$). O fato pode ser percebido face à mudança súbita vertical da região em que as respostas se encontram. As três respostas exibem, ainda, oscilação em torno da configuração original em vibração livre após 2.0s. Ressalta-se, no entanto, a amplitude exibida pelo caso birrotulado, oscilando no intervalo aproximado de -30mm a 30mm, e retornando, como os outros casos, a vibrar próximo à geometria inicial.

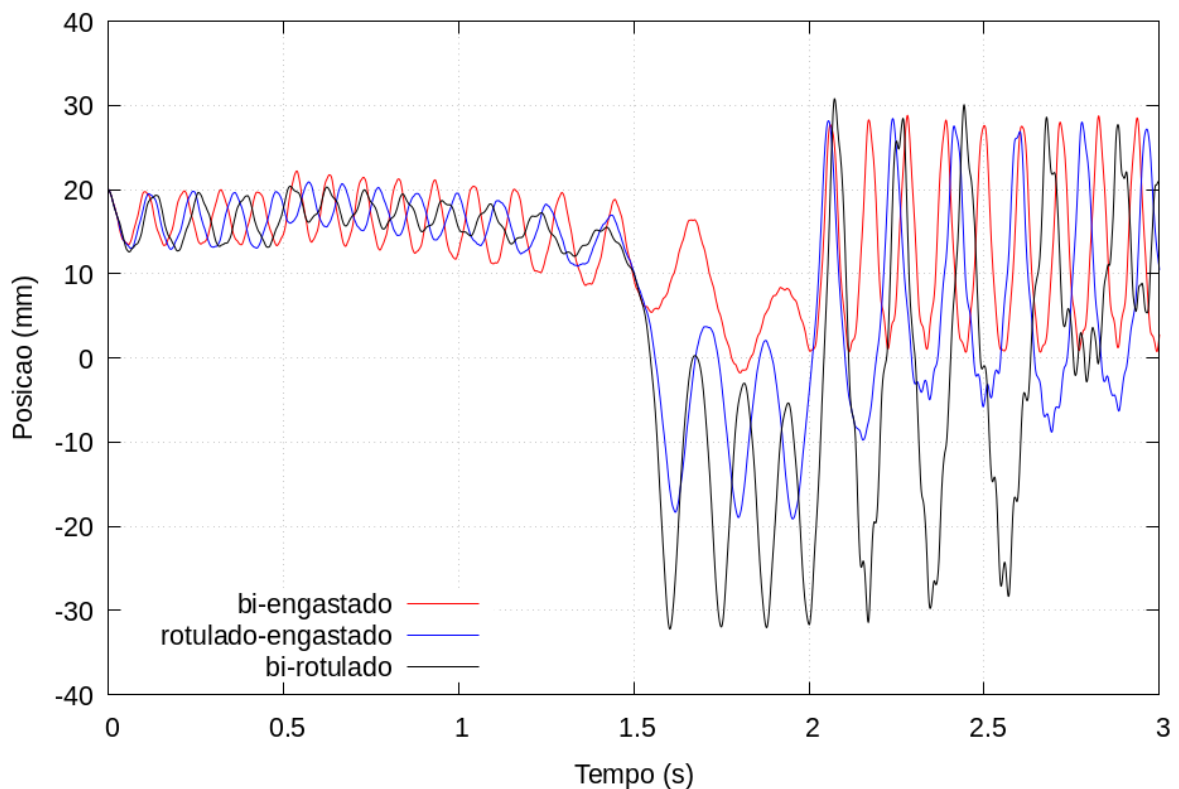


Figura 2.10: Posições do nó central em função do tempo para arco com ligações birrotulada, biengastada e rotulada-engastada.

Para as ligações semirrígidas, as respostas são semelhantes às vistas no caso anterior (Figura 2.11), considerando-se, entretanto, o fato de que o *snap-through* ocorre antes de 1.5s para o caso em que $x=0.333$ e depois deste marco de tempo para os valores $x=0.666$ e $x=0.999$. Ademais, para $x=0.666$, a amplitude das posições é bem maior que a dos outros casos, mostrando um acúmulo de energia no sistema.

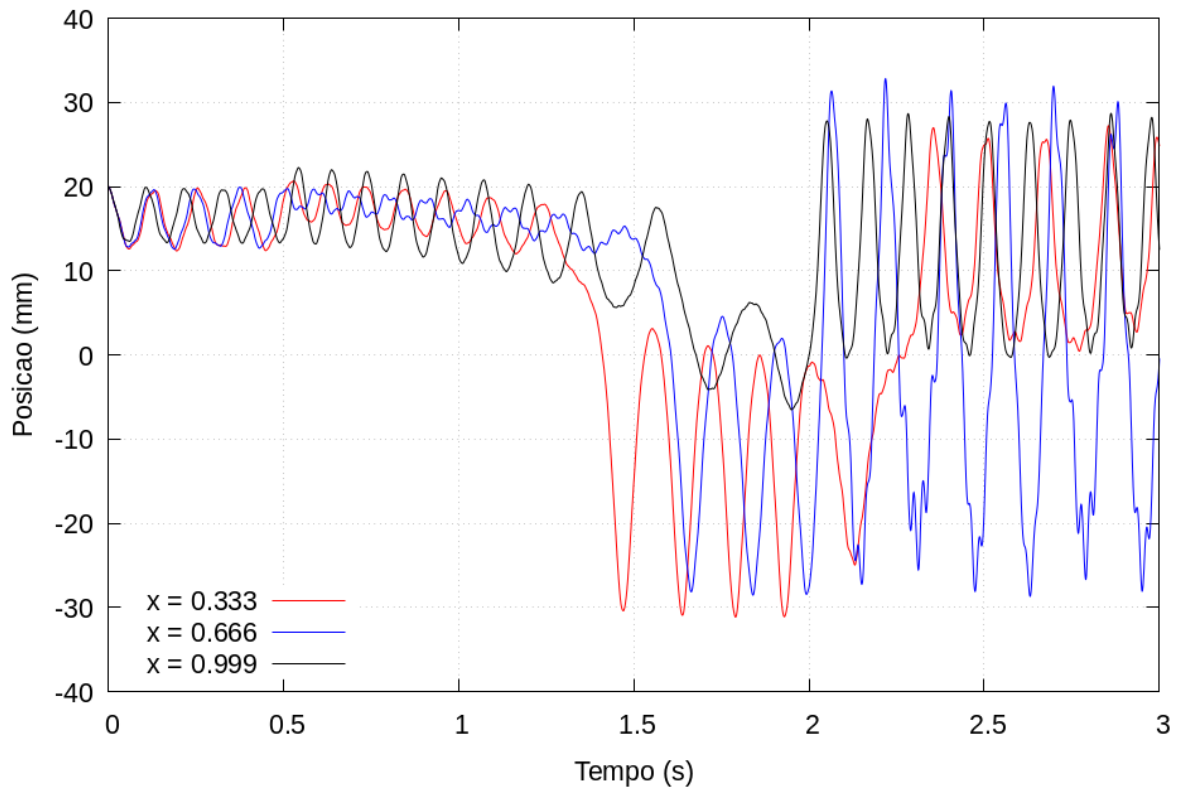


Figura 2.11: Posições do nó central em função do tempo para arco com ligações semirrígidas.

Para os diagramas de fase (Figuras 2.12a e 2.12b), optou-se por apresentá-los em distintos intervalos de tempo ($0 < t \leq 2.0s$ e $0 < t \leq 3.0s$), de forma a se demonstrar adequadamente as configurações de equilíbrio. Além disso, como não foram considerados efeitos de amortecimento, os diagramas não apresentam ponto de foco.

Os 3 casos analisados apresentam *snap-through* (Figura 2.12a). Para $x=0.333$ e $x=0.666$, os diagramas em espiral mostram tamanhos equivalentes. De forma complementar, observa-se que as velocidades alcançadas e a abrangência de seus contornos são maiores após o *snap-through*. Em contrapartida, pela condição de maior rigidez do sistema devido às ligações, o caso em que $x=0.999$ apresenta espiral menor e situa-se mais à direita do gráfico após o *snap-through*.

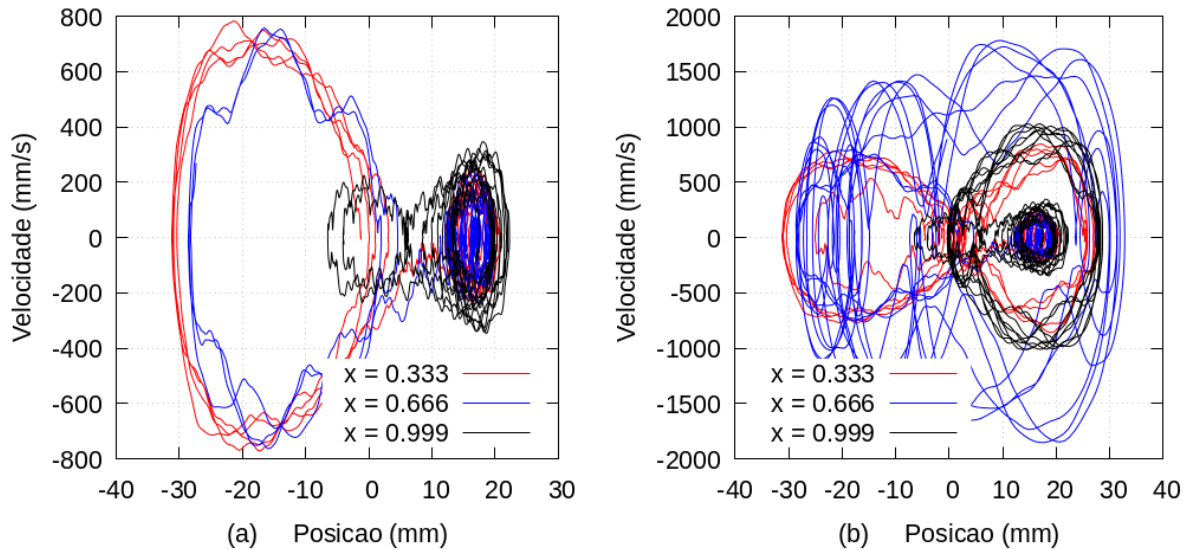


Figura 2.12: Diagramas de Fase do nó central para arco com ligações semirrígidas: (a) $0 < t \leq 2.0s$ e (b) $0 < t \leq 3.0s$.

Na Figura 2.12b pode ser observado que, para os valores de x correspondentes a 0.333 e 0.999, as espirais parecem ter, como centro, a região anterior à ocorrência do *snap-through*. Em outras palavras, em ambos os casos, o nó central vibra próximo à sua configuração original no arco. Por outro lado, o nó em análise, para $x=0.666$, oscila entre as duas situações de equilíbrio remotas por não haver perda de energia no sistema. A trajetória no espaço fase não se apresenta bem definida neste caso, guardando em seu interior as duas outras trajetórias em estudo. Pode-se ainda evidenciar que, para este mesmo x e por não haver amortecimento, o sistema apresenta maior acúmulo de energia, ocasionando maiores deslocamentos, particularmente na situação de vibração livre.

Analogamente à situação de ligações semirrígidas, observa-se a ocorrência do *snap-through* para as três situações de ligação ideais analisadas para o arco, quais sejam: birrotulada, biengastada e rotulada-engastada (Figura 2.13a). Por apresentar maior flexibilidade, o arco com ligações rotuladas apresenta maior amplitude de velocidade e posição e, conforme esperado, para o arco biengastado, ocorre o oposto.

Para ligações do tipo biengastada e rotulada-engastada, o nó central do arco mostra comportamento semelhante e, nos dois casos, a vibração ocorre próxima à geometria inicial do arco. Entretanto, o arco na condição birrotulada vibra apresentando *snap-through* de forma alternada. Além disso, essa condição é a que apresenta, dentre os casos estudados, a maior energia potencial, considerando-se a situação de velocidade nula. A amplitude das posições

supera os valores -30mm e $+30\text{mm}$. Analogamente, para ligações engastadas, a energia potencial acumulada é a menor dentre os 3 casos, ficando o caso rótula-engaste situado de forma intermediária entre ambos.

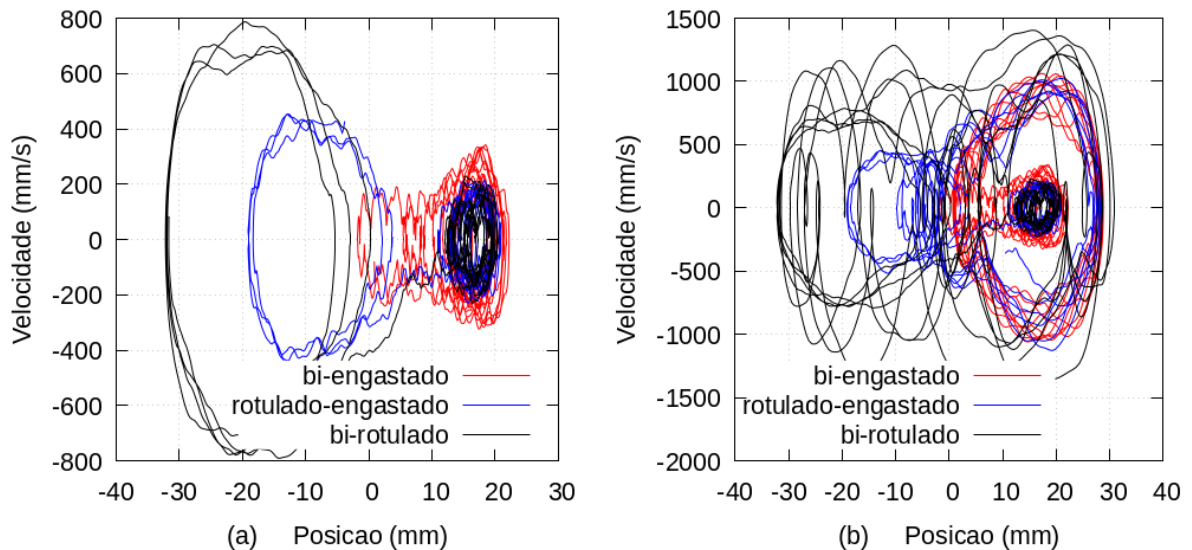


Figura 2.13: Diagramas de Fase do nó central para arco com ligações birrotulada, biengastada e rotulada-engastada: (a) $0 < t \leq 2.0\text{s}$ e (b) $0 < t \leq 3.0\text{s}$.

2.4.3 Pórtico triarticulado assimétrico

Neste exemplo avalia-se um pórtico triarticulado assimétrico constituído de três barras em perfil tubular circular em aço ($E=200\text{GPa}$; $\rho=7850\text{kg/m}^3$) com diâmetro externo 60mm e 3mm de espessura de parede (Figura 2.14a). O ângulo θ vale 30° . A carga concentrada $P(t)$ varia em intensidade conforme mostra a Figura 2.14b, com $P_0=1\text{kN}$. O sistema foi discretizado em 12 elementos finitos (4 por barra), com 2 nós duplos. A tolerância de convergência adotada foi 10^{-8} , com incrementos de tempo Δt iguais a $5 \times 10^{-4}\text{s}$.

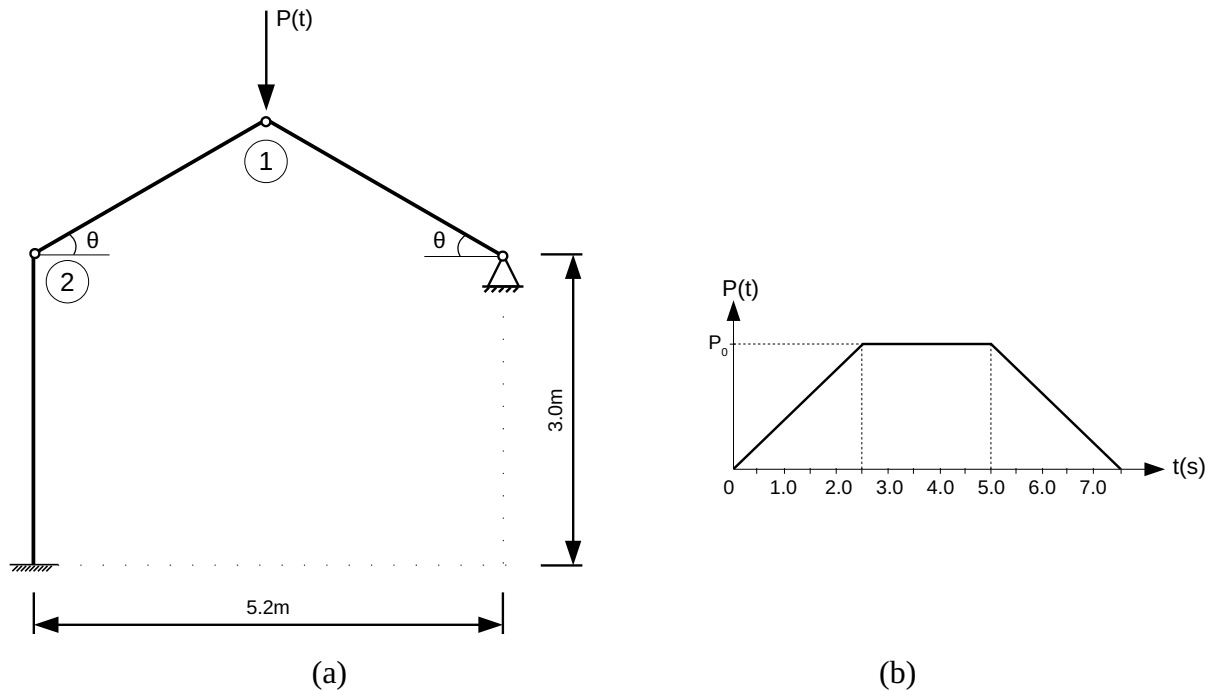


Figura 2.14: Pórtico triarticulado assimétrico: (a) geometria estrutural e (b) função de variação do carregamento no tempo.

Na Figura 2.15a pode-se observar a trajetória em forma de arco do ponto 1 do pórtico no plano. Esta apresenta pequenos desvios na região interna à concavidade a partir de $t > 5s$ (com $y > 3m$). O *snap-through* ocorre em $t \sim 1.5s$ (Figura 2.15b). As maiores amplitudes podem ser vistas entre $2.5s < t < 5s$, pois não há perda de energia no sistema. Por outro lado, elas diminuem entre $5s < t < 7.5s$ devido à diminuição da intensidade de carga. Nota-se um aumento significativo na amplitude da velocidade na ocorrência do *snap-through* ($t > 1.5s$) de acordo com a Figura 2.15c, com a velocidade se apresentando aperiódica com amplitude variável ($t > 5s$). Ademais, percebe-se que, para velocidades muito baixas ou com periodicidade e amplitude constantes, a aceleração permanece nula ou muito pequena ($t < 5s$), ao passo que a mesma aumenta significativamente devido à não-periodicidade da velocidade ($t > 5s$).

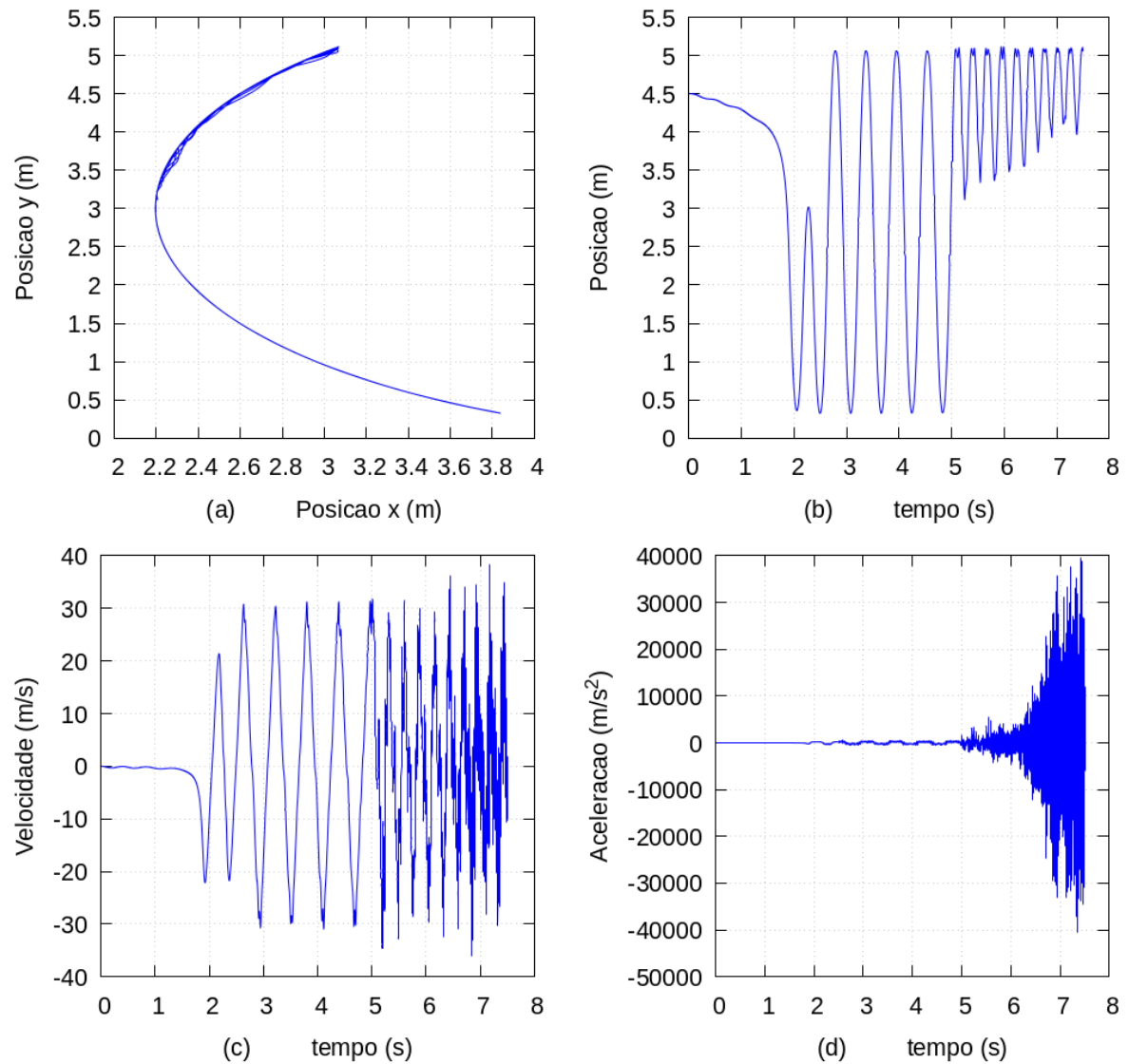


Figura 2.15: Análise transiente do nó 1: (a) Posições no plano da estrutura; (b) Posição vertical; (c) velocidade (vertical) e (d) aceleração (vertical)

Quanto aos diagramas de fase, nota-se ciclos definidos nos intervalos de tempo com periodicidade e amplitude constantes. No entanto, há uma maior instabilidade presente na resposta em torno da configuração inicial do nó (Figura 2.16).

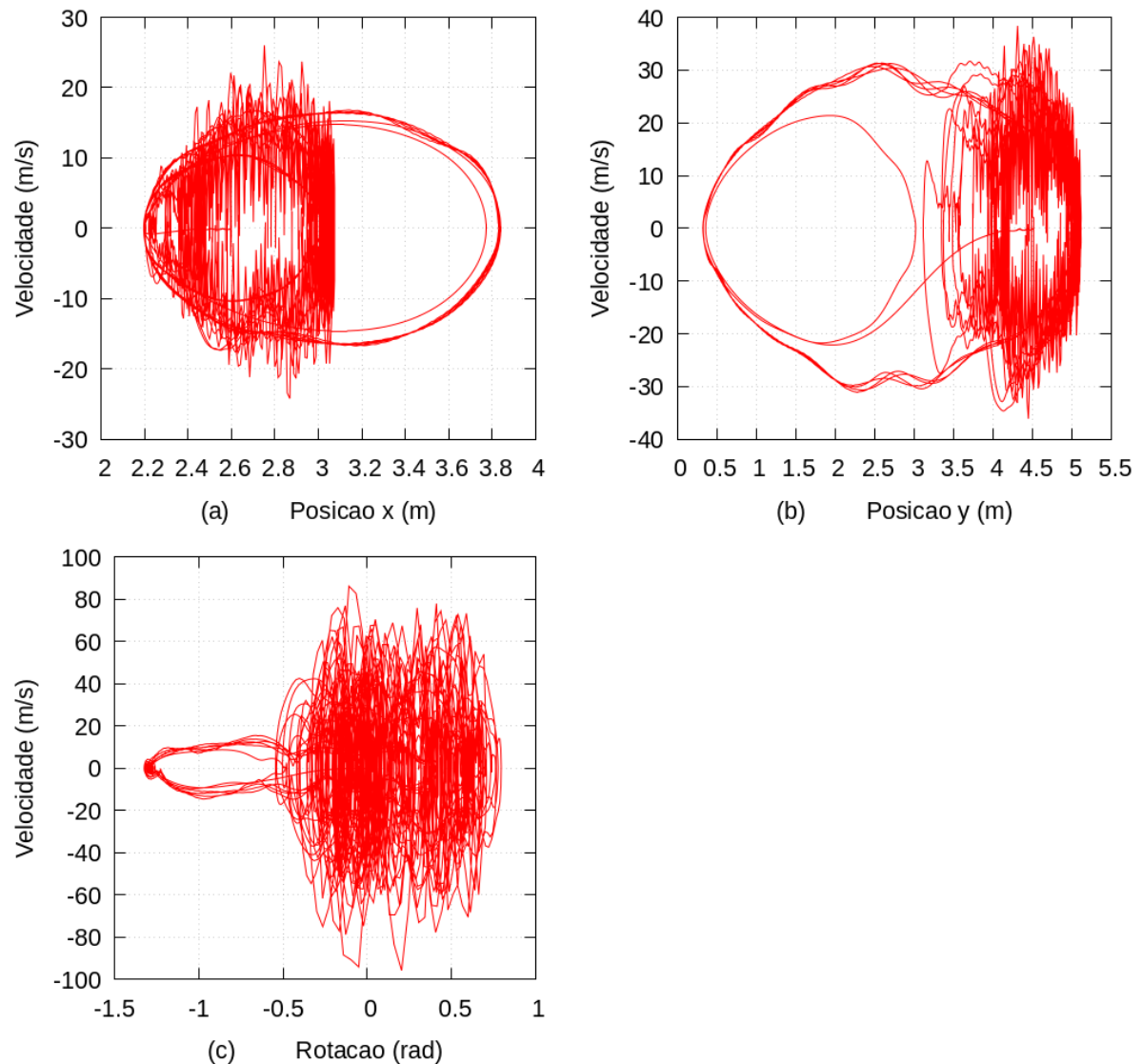


Figura 2.16: Diagramas de fase do nó 1: (a) Posição em x; (b) Posição em y; (c) Rotações

Na Figura 2.17a, observa-se também que as posições no plano assumidas pelo ponto 2 no tempo resultam em um formato arqueado, com extremos em $x \sim -0.20$ m e $x \sim 1.80$ m, indicando que as barras inclinadas não apresentaram, aparentemente, flambagem localizada (Figura 2.18a). A posição, velocidade e aceleração do ponto 2 são mostrados nas Figuras 2.17b, c e d, respectivamente. A configuração deformada em $t=3$ s se encontra na Figura 2.18b.

A partir dos diagramas de fase (Figura 2.19) referentes ao ponto 2, nota-se a presença de instabilidade devido à não-linearidade geométrica em todo o entorno do diagrama, e não somente próximo à configuração inicial deste ponto.

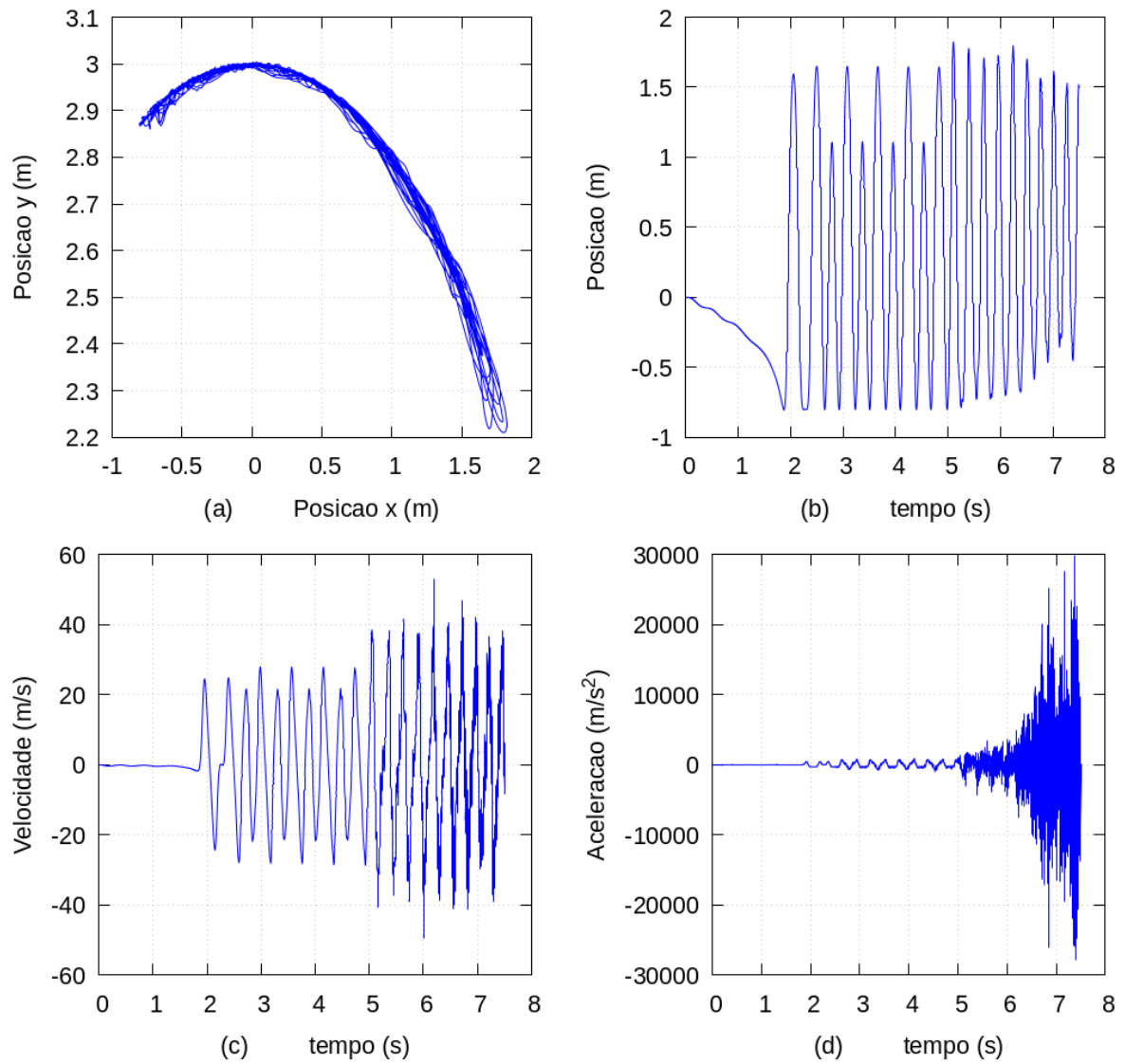


Figura 2.17: Análise transiente do nó 2: (a) Posições no plano da estrutura; (b) Posição vertical; (c) velocidade (vertical) e (d) aceleração (vertical)

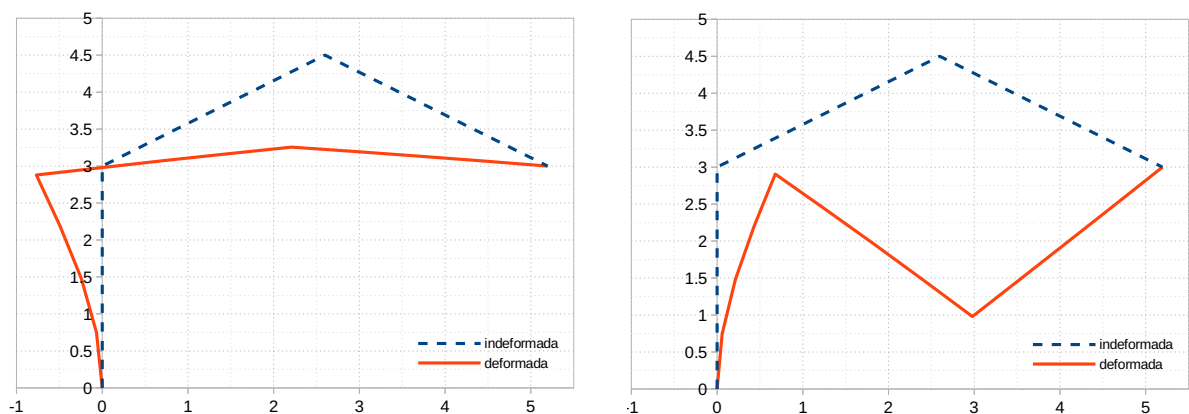


Figura 2.18: Configuração deformada do pórtico triarticulado: (a) em $t=1.84s$; (b) em $t=3.0s$

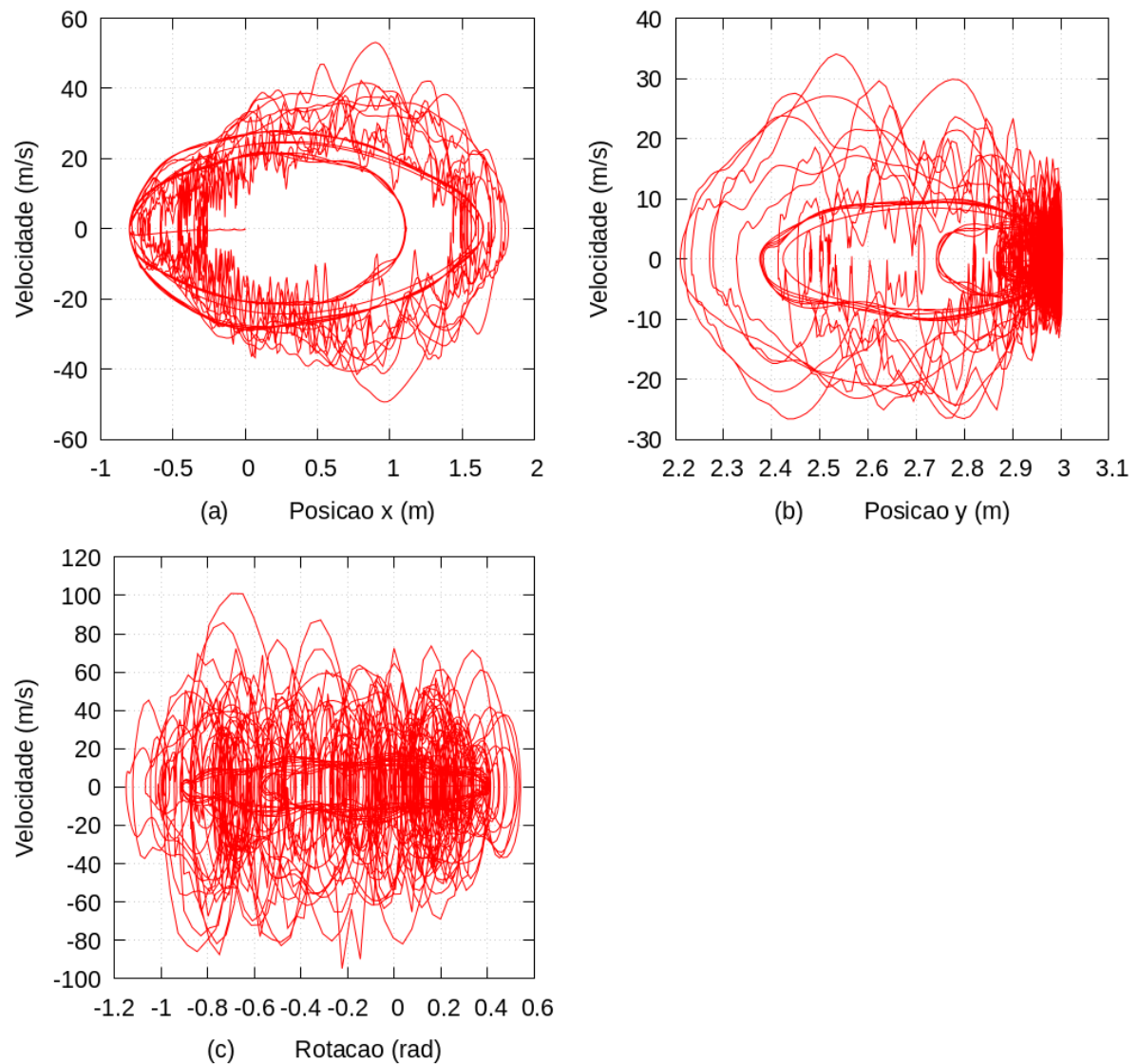


Figura 2.19: Diagramas de fase do nó 2: (a) Posição em x; (b) Posição em y; (c) Rotações

2.4.4 Coluna rígida com molas de rigidez rotacional

O último exemplo consiste em uma coluna formada por 2 barras rígidas conectadas por molas de rigidez rotacional β (Figura 2.20a). A massa específica das barras foi adotada como desprezível, e as rigidezes axial e flexional das mesmas consideradas, respectivamente, como $EI=\infty$ e $EA=\infty$. Pretende-se obter, primeiramente, a solução analítica (estática) para a carga crítica do sistema, considerando-o perfeitamente reto.

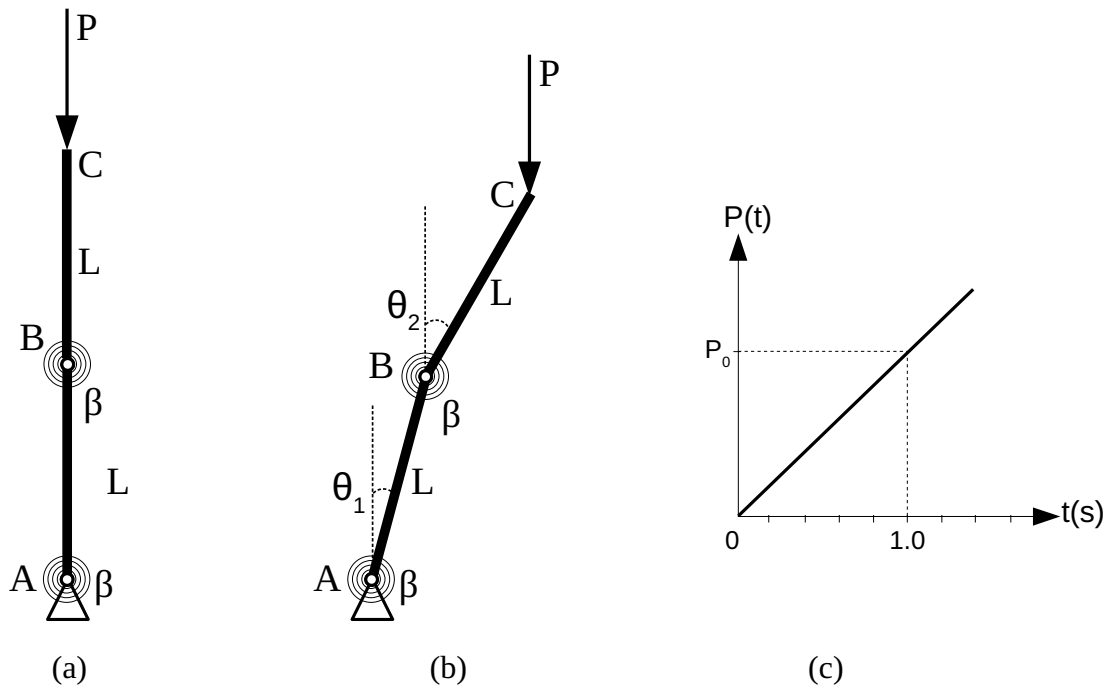


Figura 2.20: Coluna rígida com molas de rigidez rotacional: (a) configuração indeformada; (b) configuração deformada e (c) Carregamento para a análise numérica.

A carga P mantém-se vertical, permanecendo assim conservativa ao longo da análise, ou seja, sua derivada em relação a qualquer posição X_i é nula ($\partial F/\partial X_i=0$). Partindo-se da configuração deformada expressa na Figura 2.20b, com $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1 > 0$ e $\theta_2 > 0$, pode-se escrever a energia interna de deformação da seguinte maneira:

$$U = \frac{1}{2}\beta(\theta_1)^2 + \frac{1}{2}\beta(\theta_2 - \theta_1)^2 \quad (2.78)$$

O deslocamento vertical do ponto situado no topo, considerando a configuração deformada adotada, pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \delta_1 &= L - L\cos(\theta_2) \\ \delta_2 &= L - L\cos(\theta_1) \\ \delta &= \delta_1 + \delta_2 = 2L - L\cos(\theta_2) - L\cos(\theta_1) \end{aligned} \quad (2.79)$$

O trabalho virtual da força externa fica:

$$W = P\delta \quad (2.80)$$

Portanto, a variação da Energia Potencial é dada por:

$$\Pi = U - W = \frac{1}{2}\beta(\theta_1)^2 + \frac{1}{2}\beta(\theta_2 - \theta_1)^2 - P\delta \quad (2.81)$$

O vetor gradiente dos resíduos para o caso em análise é dado por:

$$\mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_1} \\ \frac{\partial \Pi}{\partial \theta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\beta(\theta_2 - \theta_1) - PL\sin(\theta_1) + \beta\theta_1 \\ \beta(\theta_2 - \theta_1) - PL\sin(\theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.82)$$

A matriz Hessiana, por sua vez, fica:

$$\nabla \mathbf{g}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1^2} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} \\ \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2 \partial \theta_1} & \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \theta_2^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\beta - PL\cos(\theta_1) & -\beta \\ -\beta & \beta - PL\cos(\theta_2) \end{bmatrix} \quad (2.83)$$

O problema de estabilidade é solucionado fazendo-se o determinante da matriz Hessiana ser nulo. Então:

$$\det(\mathbf{H}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2\beta - PL\cos(\theta_1) & -\beta \\ -\beta & \beta - PL\cos(\theta_2) \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \\ (2\beta - PL\cos(\theta_1))(\beta - PL\cos(\theta_2)) - \beta^2 = 0 \quad (2.84)$$

Expandindo a equação característica e linearizando os termos em cosseno, chega-se a:

$$\beta^2 - 3PL\beta + P^2L^2 = 0 \quad (2.85)$$

A solução em P conduz a duas raízes:

$$P_1 = 0.38197 \frac{\beta}{L} \quad P_2 = 2.61803 \frac{\beta}{L} \quad (2.86)$$

sendo a menor delas a carga crítica para o problema, a saber, $P_{cr}=P_1$.

A análise numérica dinâmica foi realizada para o nó superior, considerando-se a rigidez rotacional $\beta=1.0\text{MNm/rad}$ e o comprimento $L=3\text{m}$. Adotou-se 1 elemento finito por barra, com incrementos de tempo $\Delta t=10^{-4}\text{s}$ e tolerância para convergência 10^{-8} . Para o carregamento, adotou-se $P_0=P_{cr}$ (Figura 2.20c).

Adicionalmente à situação de coluna perfeitamente reta, considerou-se três outros casos de imperfeição geométrica, os quais podem ser visualizados na Figura 2.21. No caso 1, adotou-se $\alpha_1=\alpha_2=0.0191^\circ$ (Figura 2.21a); no segundo caso, $\alpha_1=0.0191^\circ$ (Figura 2.21b) e no terceiro, igualmente, $\alpha_2=0.0191^\circ$ (Figura 2.21c).

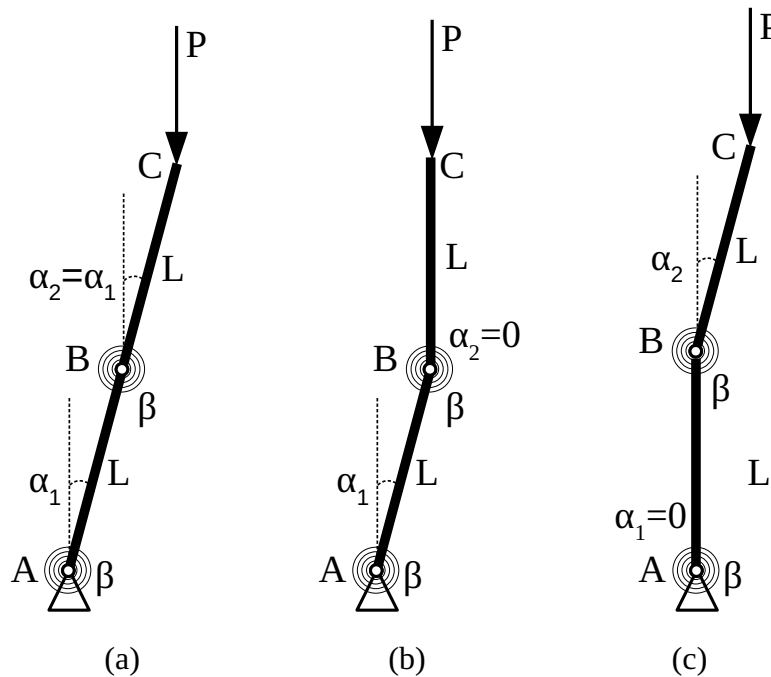


Figura 2.21: Imperfeições geométricas adotadas para a coluna rígida: (a) caso 1: $\alpha_1=\alpha_2$; (b) caso 2: $\alpha_1\neq 0$ e $\alpha_2=0$; (c) caso 3: $\alpha_1=0$; $\alpha_2\neq 0$.

As Figuras 2.22 e 2.23 apresentam a resposta para o exemplo em questão. Sabe-se que um valor pequeno de massa específica e a ausência de massas concentradas conduz a uma solução quasi-estática do problema, visto a presença da parcela remanescente relativa às forças de inércia (Figura 2.22a). A Flambagem ocorre em $t\sim 0.92\text{s}$ (Figura 2.22b), primeiramente para as colunas com as imperfeições referentes aos casos 1 e 3. Sua ocorrência antes de $t=1\text{s}$ se deve ao fato da solução ser numérica e à presença da pequena parcela de força de inércia, acelerando o processo de perda de estabilidade. A amplitude das posições se

limita ao comprimento total da coluna (6m), com a imperfeição do caso 1 exibindo perda de estabilidade mais rapidamente (Figura 2.22c e d).

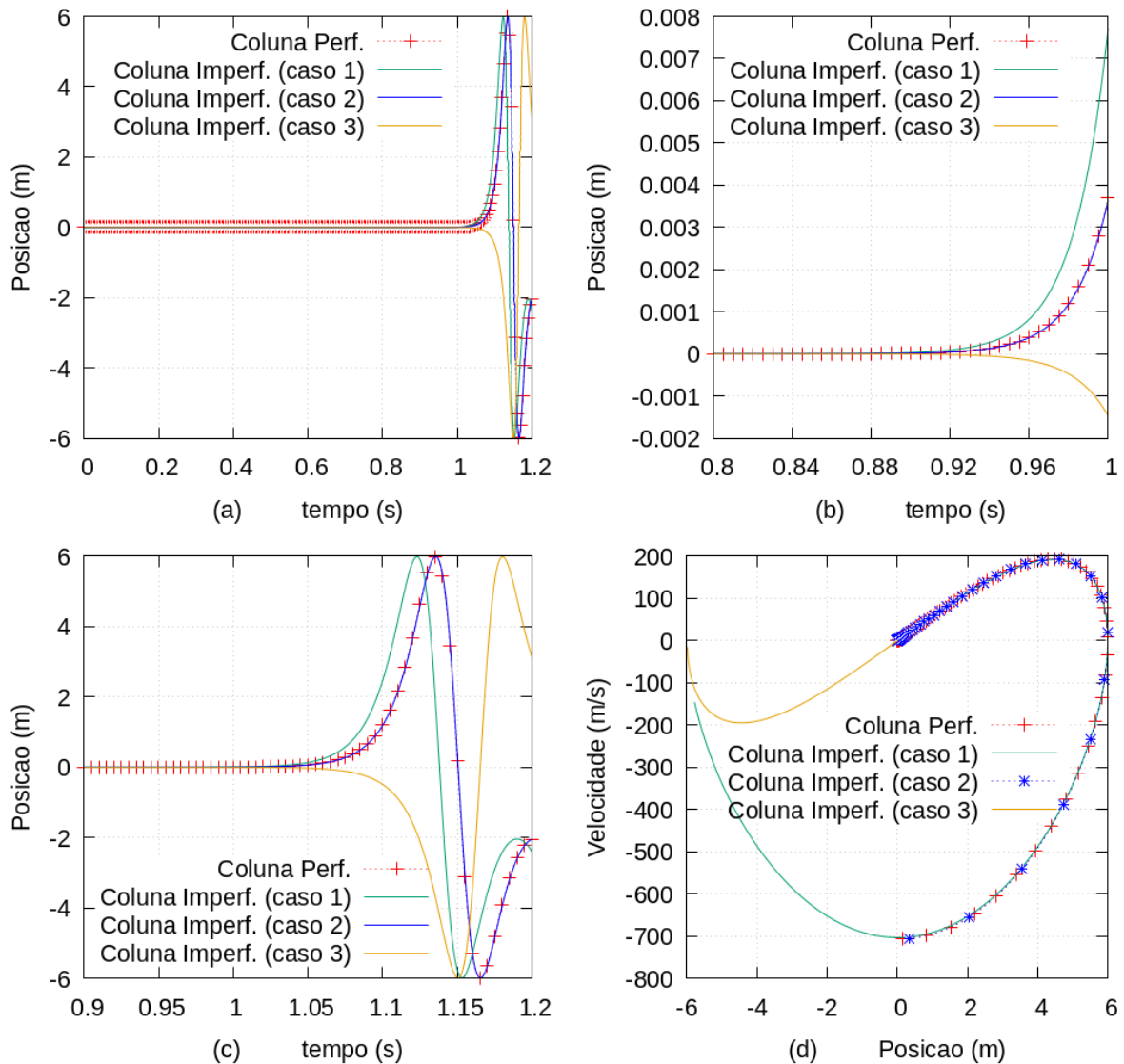


Figura 2.22: Posição horizontal do ponto C da coluna: (a) 0 a 1.2s; (b) 0.8s a 1s; (c) 1s a 1.2s e (d) diagrama de fase.

A imperfeição associada ao caso 2 apresenta a trajetória temporal para o ponto C mais próxima da coluna perfeitamente reta, o que se mostra consistente com a solução da carga crítica para os 2 sistemas (ver Equações 2.87 e 2.89). Curiosamente, a imperfeição associada ao caso 3 torna o sistema mais rígido, visto o fato de que a perda de estabilidade ocorre mais lentamente que os demais casos (Figuras 2.22 e 2.23), o que pode também ser confirmado pela solução analítica (ver Equações 2.87 e 2.90). Para as velocidades e acelerações, verifica-

se que em todos os casos a amplitude é, aproximadamente, a mesma (Figuras 2.23c e d).

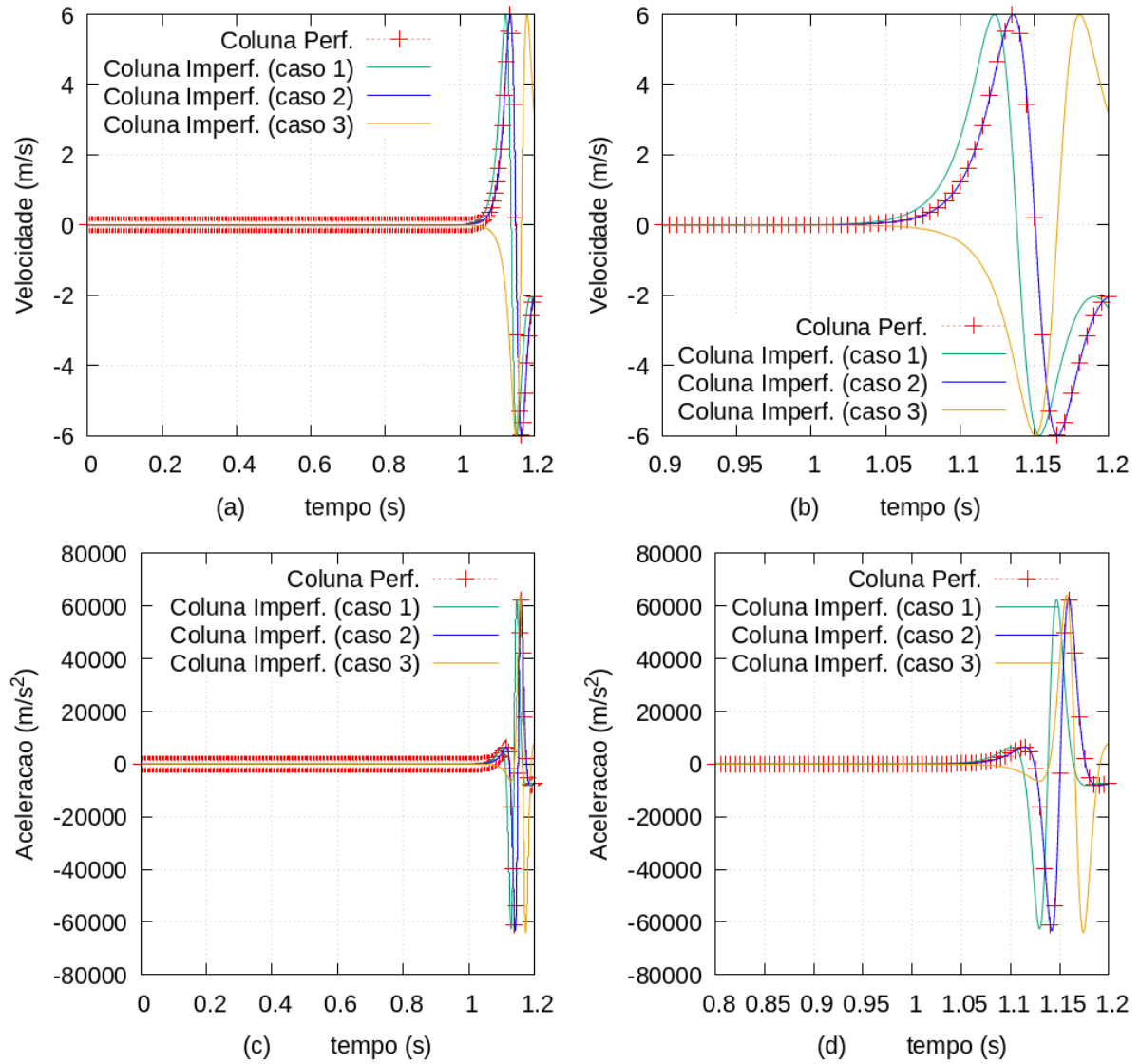


Figura 2.23: Velocidade e aceleração (horizontal) do ponto C da coluna: (a) velocidade de 0 a 1.2s; (b) velocidade de 1.0s a 1.2s; (c) aceleração de 0 a 1.2s e (d) aceleração de 1s a 1.2s.

CAPÍTULO 3: SOLUÇÃO NUMÉRICA DO PROBLEMA DE AUTOVALOR A PARTIR DA MATRIZ HESSIANA

Entende-se por vibração livre o movimento de um sistema estrutural sem excitações dinâmicas como, por exemplo, forças externas ou deslocamento de base. O estudo de problemas de vibração livre consiste em provocar uma pequena perturbação na estrutura a partir de sua posição de equilíbrio, podendo esta perturbação ser um deslocamento inicial, velocidade inicial ou ambos simultaneamente (CHOPRA, 2012). Neste contexto insere-se os problemas de autovalor, cujo estudo permite a determinação não somente dos modos de vibração (autovetores do problema), mas também das frequências a eles associadas (autovalores).

As frequências naturais e os respectivos modos naturais de vibração de um sistema mecânico ou estrutural dependem, em geral, da geometria, das propriedades dos materiais e das condições de contorno deste sistema. Desta forma, quando imposto a um modelo não amortecido a configuração de um de seus modos naturais de vibração, e quando lhe são retiradas as restrições externas que impõem essa configuração, este modelo tende, então, a vibrar em movimento harmônico simples, com a frequência associada à sua forma modal, em torno de sua configuração neutra (SORIANO, 2014).

Nos últimos tempos, alguns trabalhos relevantes foram publicados demonstrando as várias técnicas de solução numérica do problema de autovalor nos campos das engenharias mecânica, civil e aeronáutica. Liu *et al.* (2018) investigaram a instabilidade dinâmica em arcos circulares fixos com carga concentrada periódica devida à ressonância paramétrica. As frequências naturais de vibração foram obtidas experimentalmente e numericamente, utilizando o ANSYS[®]. Freitag *et al.* (2017) estudaram a convergência do GMRES (*Generalised Minimum Residual Algorithm*) para a solução de sistemas lineares de autovalor, propondo limites e pré-condicionantes (sintonizados e polinomiais, por exemplo) para autovalores problemáticos.

Kim e Bathe (2017) apresentam uma nova extensão do método de Iteração por Subespaço de Bathe para a solução do problema de autovalor generalizado em dinâmica estrutural, enriquecendo o subespaço utilizando *turning vectors* para substituir os vetores de iteração atuais. Bathe (2013) faz uma resenha dos desenvolvimentos recentes no que se refere a melhorias no Método da Iteração por Subespaço para a obtenção das frequências naturais de vibração e seus respectivos modos de vibração. Estas melhorias se concentram na aceleração

do método, na escolha de vetores de iteração estratégicos e no uso de processamento paralelo.

Mei (2012) analisou a vibração livre em pórticos planos de um único andar com múltiplas baias, obtendo a solução analítica utilizando uma abordagem de vibração de onda, sendo estas consideradas propagando ao longo de elementos uniformes e transmitidas em descontinuidades estruturais. Arjmandi e Lotfi (2011) propuseram uma versão melhorada da técnica do Método de Iteração por Subespaço pseudossimétrico para obtenção dos modos de vibração e frequências naturais de vibração em sistemas que envolvem interação fluido-estrutura.

Ye e Zhang (2011) apresentam um método inexato de Iteração por Subespaço Inversa para obtenção de alguns autopares do problema generalizado de autovalor. É feita, ainda, uma análise de convergência do método, relacionando a precisão na iteração interna em relação à taxa de convergência da iteração externa. Kim *et al.* (2005) aplicam o Método de Iteração por Subespaço com vetores de partida, empregando a matriz dinâmica quadrada na geração dos vetores de Lanczos e, conseqüentemente, melhorando o processo de convergência.

De acordo com Bhatt (2002), existem basicamente quatro técnicas para se obter a resposta aproximada do Problema de Autovalor, quais sejam:

1. Métodos de Iteração de Vetores;
2. Métodos de Transformação;
3. Métodos baseados na Sequência de Sturm;
4. Métodos de Fatorização.

O primeiro método, segundo o referido autor, é mais adequado para se determinar os autopares inferiores do espectro de frequência (primeiras frequências naturais de vibração). O segundo método é utilizado para se determinar todos os autopares de determinado problema (os Métodos de Jacobi e de Lanczos se enquadram neste grupo). O terceiro consiste na procura numérica pelas raízes da equação característica do problema analítico utilizando as propriedades da Sequência de Sturm. O quarto método tem como algoritmo mais conhecido a Fatorização QR.

3.1 Formulação do problema de autovalor

A equação de movimento para a análise de equilíbrio dinâmico em sistemas não amortecidos, considerando formulação posicional, é obtida a partir da Equação (2.45):

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} - \mathbf{F} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}} = \mathbf{0} \quad (3.1)$$

sendo Π_0 o funcional de energia potencial total, U_t a energia interna de deformação, \mathbf{X} o vetor de posições nodais, \mathbf{F} o vetor de forças internas e \mathbf{M} a matriz de massa do sistema.

Utilizando notação indicial para indicar derivações em sistemas com múltiplos graus de liberdade, pode-se reescrever a Equação (3.1) como:

$$U_{,j} - F_i + M_{ij} \ddot{X}_j = 0 \quad \Rightarrow \quad U_{,j} = F_i - M_{ij} \ddot{X}_j \quad (3.2)$$

Considerando a formulação clássica do Método dos Elementos Finitos para a equação de movimento em vibração sem amortecimento, tem-se:

$$K_{ij} u_j - M_{ij} \ddot{u}_j = F_i \quad (3.3)$$

Na Equação (3.3), u_j são os termos associados ao vetor de deslocamentos, os termos \ddot{u}_j dizem respeito ao vetor de acelerações e K_{ij} representa os termos associados à matriz de rigidez. A parcela referente à força interna no problema não-linear pode ser expressa como:

$$K_{ij} u_j = F_i \quad (3.4)$$

A relação entre o deslocamento e a posição é dada por:

$$u_j = X_j - X_j^0 \quad (3.5)$$

Ressalta-se que, para a formulação posicional, o vetor de posições iniciais X_j^0 é constante. A partir da Equação (3.5) é possível enunciar que:

$$u_{j,i} = X_{j,i} = \begin{cases} 1, & \text{se } j=i \\ 0, & \text{se } j \neq i \end{cases} \quad (3.6)$$

sendo válida, neste caso, a propriedade da função Delta de Kronecker.

Assim, a Equação (3.3) pode ser reescrita como:

$$K_{ij} u_j = F_i - M_{ij} \ddot{X}_j \quad (3.7)$$

Substituindo-se a Equação (3.2) em (3.7), chega-se a:

$$K_{ij} u_j = U_{,i} \quad (3.8)$$

Aplicando-se a Regra da Cadeia na Equação (3.8), obtém-se:

$$(K_{ij} u_j)_{,i} = U_{,ji} = H_{ji} = H_{ij} \quad (3.9)$$

em que H_{ij} são os termos da matriz Hessiana do problema. Desenvolvendo-se a Equação (3.9):

$$K_{ij,i} u_j + K_{ij} u_{j,i} = H_{ij} \quad (3.10)$$

$$\left(\frac{\partial K_{ij}}{\partial u_j} u_{j,i} \right) u_j + K_{ij} u_{j,i} = H_{ij} \quad (3.11)$$

$$H_{ij} = \left(\frac{\partial K_{ij}}{\partial u_j} u_j + K_{ij} \right) u_{j,i} = \frac{\partial K_{ij}}{\partial u_j} u_j + K_{ij} \quad (3.12)$$

Rearranjando-se a Equação (3.12) de forma a isolar a parcela de rigidez:

$$K_{ij} = H_{ij} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial u_j} u_j = H_{ij} - K_{ij,j} u_j \quad (3.13)$$

Para que se tenha a igualdade $K_{ij} = H_{ij}$ deve-se resolver o sistema de equações de equilíbrio considerando-se $F_i = 0$, de forma a se obter a matriz de rigidez a partir da matriz

Hessiana, ou seja:

$$H_{ij} X_j = 0 \quad (3.14)$$

Ressalta-se, neste ponto, que a igualdade $K_{ij}=H_{ij}$ é uma situação particular imposta ao sistema para a solução do problema de autovalor.

Desta forma, para o problema de vibração livre, pode-se escrever:

$$M_{ij} \ddot{u}_j + K_{ij} u_j = 0 \quad (3.15)$$

sendo a solução da equação de movimento dada da seguinte forma:

$$u_i = a_i \sin(\omega t - \alpha); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (3.16)$$

Na Equação (3.16), a_i é a amplitude do movimento na i -ésima coordenada e n é o número de graus de liberdade. Substituindo-se a Equação (3.16) na Equação (3.15), chega-se a:

$$-\omega^2 M_{ij} a_i \sin(\omega t - \alpha) + K_{ij} a_i \sin(\omega t - \alpha) = 0 \quad (3.17)$$

que, após ser fatorada pelo termo $\sin(\omega t - \alpha)$, torna-se:

$$(K_{ij} - \omega_i^2 M_{ij}) a_i = 0 \quad (3.18)$$

a qual, para o caso geral, é definida para um sistema de n equações algébricas lineares com n incógnitas a_i .

Desprezando-se a solução trivial $a_i=0$, a obtenção dos autovalores é feita fazendo-se o determinante da equação matricial ser nulo:

$$\det(K_{ij} - \lambda_i M_{ij}) = 0 \quad (3.19)$$

O desenvolvimento do determinante da Equação (3.19) resulta na equação

característica do sistema, onde $\lambda_i = \omega_i^2$ são os autovalores do mesmo e ω_i suas frequências naturais de vibração.

3.2 Solução numérica da equação característica do problema de autovalor

Dentre os métodos disponíveis na literatura para solução do problema de autovalor, optou-se, neste trabalho, pelo método da Iteração por Subespaços Vetoriais, devido às características da base de dados existente na qual o presente trabalho pretende intervir, base esta desenvolvida inicialmente por Greco (2004), utilizando a linguagem de programação Fortran©. A mesma se encontra em constante desenvolvimento, e utiliza matriz de massa diagonal, desprezando os efeitos de rigidez rotacional.

O método de Iteração por Subespaços Vetoriais utiliza outras técnicas associadas a problemas de autovalor. As mesmas são apresentadas a seguir.

3.2.1 Método de Jacobi

Segundo Soriano (2014), o método de Jacobi é um dos mais antigos e confiáveis para a solução do problema de autovalor. Por meio deste método tem-se a resolução completa do problema, ou seja, todos os autovalores e respectivos autovetores a eles associados. A forma de solução é reduzida, utilizando-se matriz real e simétrica. Foi idealizado pelo matemático alemão Carl Gustav Jacob Jacobi, em 1846.

A ideia principal é transformar, de forma iterativa, as matrizes de massa e rigidez (ou Hessiana, neste caso, de acordo com as considerações feitas no item 3.1, Equação 3.13) em duas matrizes diagonais, de forma que o problema de autovalor definido pelas matrizes diagonais seja exatamente o mesmo do par de matrizes originais (BHATT, 2002).

O Quadro 3.1 apresenta o algoritmo utilizado neste trabalho, baseado em Bhatt (2002), para solução intermediária do Problema de Autovalor no método de Iteração por Subespaços Vetoriais.

Apesar de ter sido concebido há mais de 100 anos, o Método de Jacobi é ainda usado com frequência em análise dinâmica modal de estruturas. Certamente se caracteriza por grande estabilidade e relativa simplicidade de implementação, podendo ser aplicado sem restrições a matrizes simétricas para obtenção de autovalores positivos, negativos ou nulos (GÉRADIN e RIXEN, 2015).

No entanto, o Método de Jacobi pode ser utilizado somente em problemas cuja matriz de massa seja positiva definida, ou seja, não pode apresentar termos nulos em sua diagonal principal (SORIANO, 2014). Isso se torna um complicador nos casos em que a formulação para a matriz de massa discreta desconsidera a rigidez à rotação.

Todavia, este método é adequado quando utilizado em conjunto com outras rotinas de cálculo para compor o método de Iteração por Subespaços Vetoriais, onde se busca a resolução completa de sucessivos problemas de autovalor de ordem reduzida. Pretende-se, desta forma, solucionar o problema de elementos nulos (referentes à inércia rotacional) na diagonal principal da matriz de massa neste trabalho.

Quadro 3.1: Algoritmo para o Método de Diagonalização de Jacobi.

Enquanto a convergência não for obtida:

 para (j=1, n-1)

 para (i=j+1, n)

$$p = k_{jj} m_{ji} - m_{jj} k_{ji}$$

$$q = k_{ii} m_{ji} - m_{ii} k_{ji}$$

$$r = k_{jj} m_{ii} - k_{ii} m_{jj}$$

 se (r > 0)

$$x = 0.5 + \sqrt{0.25 r^2 + pq}$$

 senão

$$x = 0.5 + \sqrt{0.25 r^2 + pq}$$

 fim se

$$\alpha = \frac{q}{x} \quad ; \quad \beta = -\frac{p}{x}$$

 Montagem da matriz **P** (possui diagonal principal unitária, demais termos nulos); em seguida: $P_{ji} = \alpha$; $P_{ij} = \beta$

 Diagonalização das matrizes: $\mathbf{K} = \mathbf{P}^T \mathbf{K} \mathbf{P}$, $\mathbf{M} = \mathbf{P}^T \mathbf{M} \mathbf{P}$,
 $\Phi = \Phi \mathbf{P}$

 fim para

 fim para

 para (i=1, n)

$$\omega_i = \sqrt{\frac{k_{ii}}{m_{ii}}}$$

 fim para

 Verificação da Convergência: $\left| \frac{\omega_i^2 - \omega_{i-1}^2}{\omega_i^2} \right| \leq \text{Tol}$

 fim enquanto

3.2.2 Método de Cholesky

Este método de fatorização foi idealizado pelo cartógrafo militar francês André-Louis Cholesky (SORIANO, 2014). São duas as utilidades, segundo Bhatt (2002), da fatorização em problemas que podem ser aproximados por equações algébricas, a saber:

- Solução de equações simultâneas;
- Conversão de problemas gerais de autovalor em problemas especiais de autovalor (diagonalizados).

Seja um problema de dinâmica estrutural com uma matriz \mathbf{K} simétrica positiva e definida. A fatorização é feita da seguinte forma (BHATT, 2002):

$$\mathbf{K} = \mathbf{U}^T \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ u_{12} & u_{22} & 0 & \dots & 0 \\ u_{13} & u_{23} & u_{33} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ u_{1n} & u_{2n} & u_{3n} & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \dots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \dots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & u_{nn} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

em que \mathbf{U} é uma matriz triangular superior de coeficientes diagonais positivos e \mathbf{U}^T a sua transposta.

Os termos da matriz \mathbf{U} são dados pelas seguintes expressões:

$$u_{11} = \sqrt{k_{11}} \quad (3.21)$$

$$u_{ii} = \sqrt{k_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} (u_{ki})^2}; \quad i \geq 2 \quad (3.22)$$

$$u_{ij} = \frac{k_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}}, \quad j > i \quad (3.23)$$

$$u_{ij} = 0, \quad j < i \quad (3.24)$$

O Quadro 3.2 apresenta o algoritmo para a obtenção das matrizes triangulares superior e inferior, conforme sugerido por Bhatt (2002), matrizes essas necessárias para o método de

Iteração por Subespaços Vetoriais.

Quadro 3.2: Algoritmo para o Método de Cholesky.

-
-
1. Fatorização da matriz Hessiana (coincidente com a de Rigidez, conforme considerações feitas no início do capítulo): $\mathbf{K} \mathbf{X} = \mathbf{F} \Rightarrow [\mathbf{U}^T \mathbf{U}] \mathbf{X} = \mathbf{F}$, onde $\mathbf{K} = \mathbf{U}^T \mathbf{U}$
 2. Determina-se a solução da equação matricial $\mathbf{U}^T \mathbf{Y} = \mathbf{F}$ para \mathbf{Y} por retro-substituição;
 3. Determina-se a solução da equação matricial $\mathbf{U} \mathbf{X} = \mathbf{Y}$ para \mathbf{X} pelo substituição direta.
-
-

3.2.3 Quociente de Rayleigh

Este quociente estabelece uma estimativa da frequência fundamental de vibração de sistemas estruturais ou mecânicos sem, necessariamente, solucionar o problema de autovalor (SORIANO, 2014).

Seja a Equação (3.19) reescrita em termos de autovetores normalizados em relação à matriz \mathbf{M} :

$$\mathbf{K} \Phi = \mathbf{M} \Phi \Omega \quad (3.25)$$

Neste caso, Φ é a matriz dos autovetores, \mathbf{K} é a Matriz de Rigidez (ou Matriz Hessiana, conforme recomendações dadas no item 3.1), \mathbf{M} é a Matriz de Massa e Ω é a matriz diagonal que contém os autovalores $\lambda_i = \omega_i^2$, sendo ω as frequências naturais de vibração da estrutura analisada. A diagonalização de \mathbf{K} e \mathbf{M} são feitas da seguinte maneira:

$$\Phi^T \mathbf{M} \Phi = \mathbf{I} \quad (3.26)$$

$$\Phi^T \mathbf{K} \Phi = \Omega \quad (3.27)$$

Seja \mathbf{q} um vetor arbitrário. Define-se, então o Quociente de Rayleigh como sendo a razão:

$$r(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q}}{\mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q}} \quad (3.28)$$

Segundo Bhatt (2002), \mathbf{q} pode ser expresso em termos dos autovetores Φ da seguinte forma:

$$\mathbf{q} = \Phi \mathbf{C} \quad (3.29)$$

sendo \mathbf{C} uma matriz diagonal cujos elementos são dados por:

$$c_i = \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{q} \quad (3.30)$$

Portanto, o denominador da Equação (3.28) pode ser desenvolvido da seguinte forma:

$$\mathbf{q}^T \mathbf{M} \mathbf{q} = \mathbf{C}^T [\Phi^T \mathbf{M} \Phi] \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \mathbf{C} = \sum_{i=1}^n c_i^2 \quad (3.31)$$

Da mesma forma, o numerador da Equação (3.28) fica:

$$\mathbf{q}^T \mathbf{K} \mathbf{q} = \mathbf{C}^T [\Phi^T \mathbf{K} \Phi] \mathbf{C} = \mathbf{C}^T \mathbf{\Omega} \mathbf{C} = \sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2 \quad (3.32)$$

Reescrevendo a Equação (3.28), chega-se a:

$$r(\mathbf{q}) = \frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} \quad (3.33)$$

Sabendo-se que:

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_n \quad (3.34)$$

então pode-se escrever:

$$\frac{r(\mathbf{q})}{\lambda_1} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_1} c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} > 1 \quad (3.35)$$

e ainda:

$$\frac{r(\mathbf{q})}{\lambda_n} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} c_i^2}{\sum_{i=1}^n c_i^2} < 1 \quad (3.36)$$

Conclui-se, portanto, que:

$$\lambda_1 < r(\mathbf{q}) < \lambda_n \quad (3.37)$$

Se o vetor \mathbf{q} é \mathbf{M} -ortogonal aos primeiros j autovetores, então:

$$c_i = 0 \quad i = 1, 2, \dots, j \quad (3.38)$$

Desta forma, dividindo-se a Equação (3.33) por λ_{j+1} , chega-se a:

$$\frac{r(\mathbf{q})}{\lambda_{j+1}} = \frac{\sum_{i=j+1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_{j+1}} c_i^2}{\sum_{i=j+1}^n c_i^2} > 1 \quad (3.39)$$

Procedendo-se da mesma forma, na mesma equação, utilizando-se λ_n , obtém-se:

$$\frac{r(\mathbf{q})}{\lambda_n} = \frac{\sum_{i=j+1}^n \frac{\lambda_i}{\lambda_n} c_i^2}{\sum_{i=j+1}^n c_i^2} < 1 \quad (3.40)$$

$$\lambda_{j+1} < r(\mathbf{q}) < \lambda_n \quad (3.41)$$

Conclui-se, portanto, que, para todo valor de \mathbf{q} que satisfaz a condição:

$$c_i = \Phi_i^T \mathbf{M} \mathbf{q} = 0; \quad i=1,2,\dots,j \quad (3.42)$$

o valor mínimo de $r(\mathbf{q}) = \lambda_{j+1}$.

3.2.4 Método de iteração por subespaços vetoriais

O método de Iteração por Subespaço possui como característica a determinação dos m primeiros autopares da Equação (3.18). Sua estrutura é composta pelos algoritmos descritos nos itens 3.2.1 a 3.2.3. Soriano (2014) afirma que este é o mais eficaz método de solução do problema generalizado de autovalor, apresentando as vantagens de ser estável e eficiente nos casos em que o modelo possui elevado número de graus de liberdade permitindo, ainda, o aproveitamento da esparsidade das matrizes de rigidez e de massa. Além disso, a matriz de massa pode apresentar termos nulos em sua diagonal principal, situação observada nos casos em que se despreza a rigidez à rotação em problemas dinâmicos.

Bathe e Wilson (1973) comentam que, no método de Iteração por Subespaço, os autovalores e autovetores requeridos são determinados diretamente a partir do problema generalizado de autovalor.

A técnica consiste em combinar iterações inversas simultâneas de vetores com a análise de Rayleigh-Ritz. Utiliza-se, nestas iterações, pelo menos $m+1$ vetores para se obter aproximações adequadas dos primeiros autovetores (SORIANO, 2014).

Este método consiste, basicamente, em iniciar-se com uma matriz \mathbf{V} que contém um conjunto $m+1$ de vetores arbitrários, sendo m o número de autopares desejados para a análise (BHATT, 2002). Deve-se, primeiramente, obter $\bar{\mathbf{V}}$ a partir da Equação (3.25):

$$\mathbf{K} \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{M} \mathbf{V} \quad (3.43)$$

Em seguida, é possível a obtenção das matrizes diagonalizadas para o problema de autovalor utilizando as Equações (3.26) e (3.27):

$$\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{V}} \quad (3.44)$$

$$\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{V}} \quad (3.45)$$

Assim, o problema de autovalor generalizado a ser resolvido toma a forma:

$$\bar{\mathbf{K}} \Phi = \bar{\mathbf{M}} \Phi \Omega \quad (3.46)$$

Na Equação (3.46), Φ é a matriz que contém os autovetores e Ω a matriz diagonal com os autovalores a eles associados.

Para a iteração seguinte utiliza-se, como vetor de partida:

$$\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} \Phi \quad (3.47)$$

A convergência adotada neste trabalho para o método da Iteração por Subespaços Vetoriais é dada pela seguinte relação:

$$\frac{\omega_1}{\sqrt{r(\mathbf{q})}} \leq \text{Tol} \quad (3.48)$$

em que o numerador é a frequência fundamental obtida na iteração corrente e o denominador é o Quociente de Rayleigh, definido através da Equação (3.28). A tolerância na Equação (3.48) é um parâmetro de entrada e, para os exemplos analisados, foi definida como 10^{-4} .

O Quadro 3.3 apresenta o algoritmo utilizado neste trabalho para a obtenção das frequências naturais de vibração.

Quadro 3.3: Algoritmo para o método de iteração por subespaços vetoriais.

-
1. Determinar $\mathbf{U}^T \mathbf{U} = \mathbf{K}$, $\mathbf{K}_{(n \times n)}$ pelo Método de Cholesky (ver Quadro 3.2);
 2. Definir m vetores arbitrários que constituirão a matriz $\mathbf{V}_{(n \times m)}$;
 3. Determinar a matriz $\mathbf{M}_v = \mathbf{M} \mathbf{V}$, $\mathbf{M}_{v(n \times m)}$
 4. Obtenção de $\bar{\mathbf{V}}_{(n \times m)}$ na equação matricial $\mathbf{K} \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{M}_v$ utilizando o Método de Cholesky. Sugere-se:
 - 4.1. Obter $\mathbf{Y}_{(n \times n)}$ da equação matricial $\mathbf{U}^T \mathbf{Y} = \mathbf{M}_v$ por substituição direta;
 - 4.2. Obter $\bar{\mathbf{V}}$ da equação matricial $\mathbf{U} \bar{\mathbf{V}} = \mathbf{Y}$ por retrossubstituição.
 5. Obtenção das matrizes diagonalizadas:
 - 5.1. Rigidez: $\bar{\mathbf{K}} = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{K} \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{M}_v$, $\bar{\mathbf{K}}_{(m \times m)}$
 - 5.2. Massa: $\bar{\mathbf{M}} = \bar{\mathbf{V}}^T \mathbf{M} \bar{\mathbf{V}} = \bar{\mathbf{V}}^T \bar{\mathbf{M}}_v$, $\bar{\mathbf{M}}_{(m \times m)}$
 6. Resolver o Problema de Autovalor Generalizado $\bar{\mathbf{K}} \Phi = \bar{\mathbf{M}} \Phi \Omega$ utilizando o Método de Diagonalização de Jacobi (ver Quadro 3.1);
 7. Posicionar corretamente as colunas da matriz modal Φ correspondentes aos autovalores;
 8. Fazer $\mathbf{V} = \bar{\mathbf{V}} \Phi$ como o novo conjunto de vetores de partida e repetir a sequência desde o passo 3 até que a Equação 3.47 seja satisfeita.
-

3.2.4.1 Vetores de partida

Um dos aspectos importantes a serem observados na utilização do Método de Iteração por Subespaço é a escolha dos vetores de partida para obtenção dos autopares do problema de autovalor. Eles devem ser escolhidos de forma a acelerar a convergência dos primeiros autopares.

Soriano (2014) destaca que aqueles de menor ordem são obtidos com maior precisão que os de ordem mais elevada. Desta forma, o aumento do número de vetores de iteração favorece a convergência aos m primeiros autopares. Em contrapartida, o aumento de vetores de iteração implica maior processamento computacional. Assim, deve-se escolher adequadamente a quantidade e os elementos que constituem os vetores de partida.

Bathe e Wilson (1973), bem como Bhatt (2002), verificaram numericamente que é eficaz utilizar vetores de partida em número igual ao menor valor entre $2m$ e $(m + 8)$, sendo m o número de autopares, diferentemente do que observa Soriano (2014), que destaca este número como sendo o menor entre $2m$ e $(m+10)$. A seguinte formação de vetores é recomendada segundo o mesmo autor:

1. Define-se a primeira coluna da matriz \mathbf{V} com os elementos da diagonal principal da matriz \mathbf{M} , e a última coluna de \mathbf{V} com um vetor escolhido aleatoriamente. Assim, os graus de liberdade associados à massa serão excitados e há grande possibilidade dos vetores colunas não serem ortogonais a nenhum dos m modos de vibração que se deseja;
2. As demais colunas da matriz \mathbf{V} devem ser vetores de termos nulos, exceto aquele da posição da ordem do grau de liberdade de maior razão m_{ij}/k_{ij} , cujo valor deve ser igual a 1.0. Desta forma os vetores colunas serão linearmente independentes entre eles e irão excitar os graus de liberdade com as maiores forças de inércia e menores forças elásticas.

Neste trabalho as duas recomendações acima foram implementadas. Entretanto, mesmo esses vetores de partida não garantem a convergência para os m primeiros autopares e, para os problemas que serão apresentados a seguir, as recomendações quanto ao número de vetores não demonstraram diferenças significativas no que diz respeito à precisão dos resultados e, em algumas ocasiões, até mesmo dificultaram a convergência das respostas.

De acordo com Soriano (2014), a experiência tem mostrado que, ocasionalmente, pode não ocorrer convergência para um ou alguns poucos desses pares. O mesmo autor recomenda a utilização do Teste da sequência de Sturm para contornar o problema.

3.3 Exemplos

Com os exemplos a seguir propõe-se demonstrar a eficiência do algoritmo implementado. São apresentadas descrições detalhadas, na medida do possível, de modelagem e de análise de resultados.

3.3.1 Arco senoidal abatido

O primeiro exemplo escolhido para análise é o arco senoidal abatido apresentado no capítulo 2, item 2.4.1, Figura 2.6. Foram utilizadas as mesmas propriedades mecânicas para o material e geométricas para a seção transversal, bem como o mesmo valor de massa específica. Utilizou-se, ainda, 3 vetores de partida, com tolerância de 10^{-4} para a análise.

Tabela 3.1: Comparativo das Frequências Naturais de Vibração para o Arco Senoidal Abatido.

Altura do arco z_0 (mm)	Descrição	Frequência (rad/s)		Varição
		Silva (2009)	Presente Trabalho	percentual (%)
20	ω_1	246.21	246.88	0.27
	ω_2	372.82	371.04	0.48
30	ω_1	353.46	349.41	1.15
	ω_2	371.35	366.34	1.35
40	ω_1	369.32	365.59	1.01
	ω_2	462.59	458.09	0.97

Os resultados obtidos para as frequências naturais de vibração são apresentados na Tabela 3.1. Observa-se boa concordância com os resultados obtidos por Silva (2009) para as três alturas de arco analisadas. A maior variação percentual pode ser observada para a 2ª frequência do arco de amplitude $z_0=30\text{mm}$, com valor correspondente a 1.37%. Em contrapartida, o menor valor desta variação encontra-se no estudo para o arco com amplitude $z_0=20\text{mm}$, para a 1ª frequência natural (ou frequência fundamental), cujo valor é 0.27%.

A Figura 3.2 mostra a variação das duas primeiras frequências naturais, ω_1 e ω_2 , com a altura z_0 para três diferentes condições de extremidade: arco birrotulado, biengastado e rotulado-engastado. Observa-se que, na situação em que $z_0=0$ (geometria de uma viga reta), estas duas frequências possuem o mesmo valor, a saber, 14.70Hz para o caso de apoios rotulados e 22.95Hz para rótula e engaste. O arco biengastado, no entanto, não apresenta, para a mesma condição ($z_0=0$), ω_1 e ω_2 iguais.

No intervalo de z_0 compreendido entre 5mm e 30mm, verifica-se que, para o caso birrotulado, ω_2 permanece com valor aproximadamente constante (58.71Hz) e ω_1 aumenta de forma gradativa. Este fato ocorre, segundo Silva (2009), porque o primeiro modo de vibração apresenta simetria em relação à geometria do arco, enquanto o segundo modo se apresenta de forma assimétrica a esta mesma geometria (Figura 3.1). Na altura $z_0=30\text{mm}$, as duas frequências novamente se aproximam em intensidade ($\omega_1=55.61\text{Hz}$ e $\omega_2=58.31\text{Hz}$) e, em seguida, divergem, de forma que ω_2 aumenta gradativamente e ω_1 permanece aproximadamente constante ($\omega_1=58.04\text{Hz}$), ocasionando a inversão dos modos de vibração em questão (SILVA, 2009).

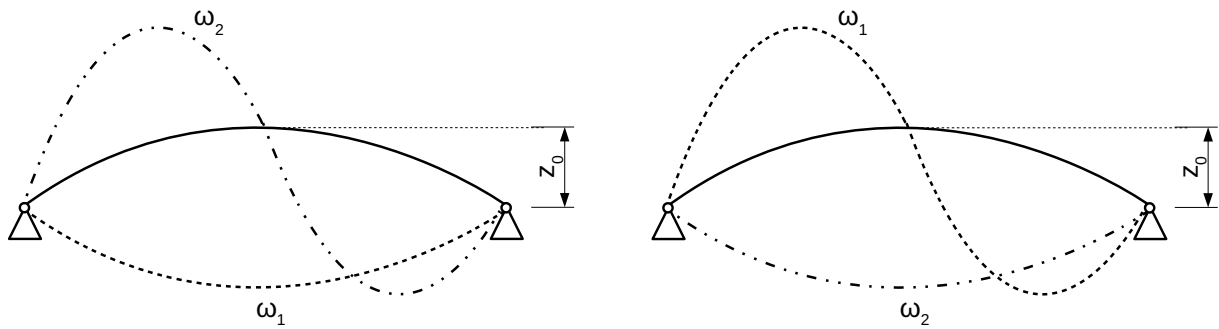


Figura 3.1: Dois primeiros modos de vibração para o arco em estudo, considerando apoios rotulados.

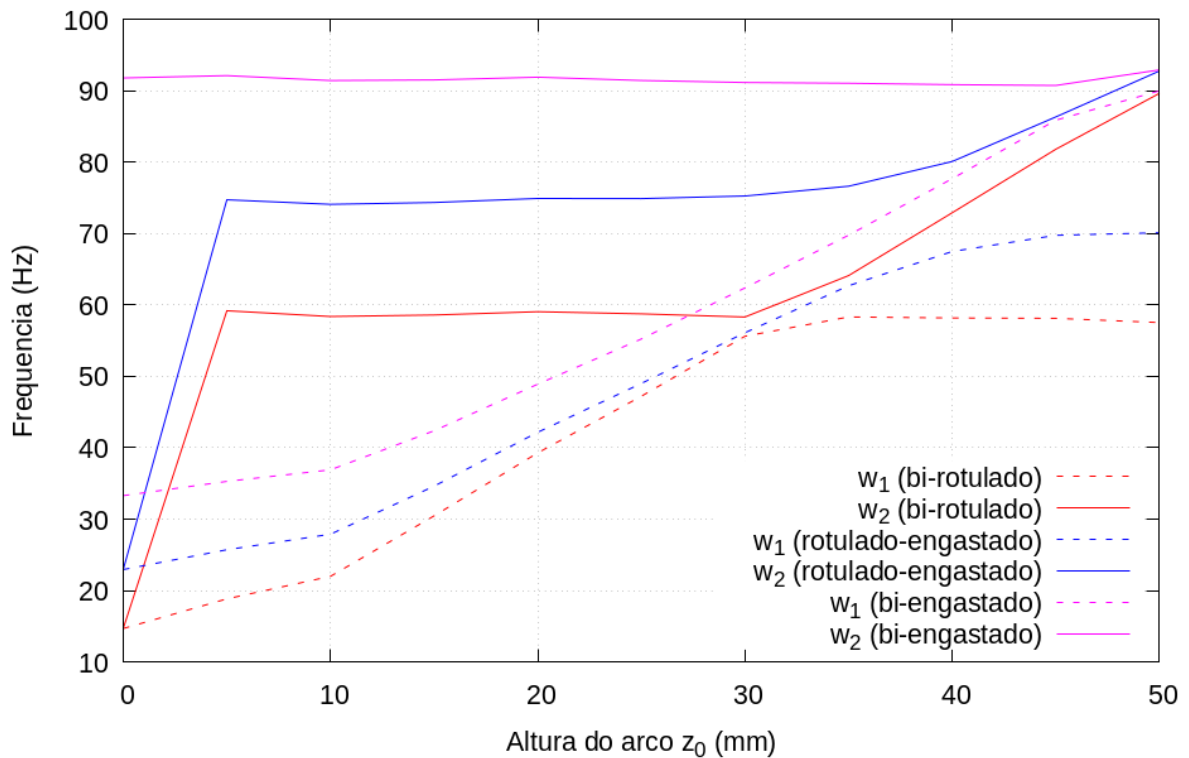


Figura 3.2: Variação das duas frequências naturais fundamentais com a altura z_0 para diferentes condições de extremidade.

O arco com condição de contorno definida por engastes mostra um comportamento muito semelhante ao birrotulado. Observa-se na Figura 3.2 uma tendência de aproximação das duas frequências para $z_0=50\text{mm}$, com ω_2 aproximadamente constante até a altura de 45mm e com um pequeno acréscimo entre as alturas 45 e 50mm.

Por outro lado, o arco rotulado e engastado não demonstra, a partir dos resultados, a tendência de aproximação entre as duas menores frequências, com uma diferença em magnitude aproximada de 12Hz em $z_0=40\text{mm}$.

3.3.2 *Shear building* de 6 andares

Paz e Leigh (2004) apresentam um problema de vibração livre em um *shear building* de 6 andares (Figura 3.3) modelado utilizando o programa SAP2000[®]. As colunas são perfis W14×82, com módulo de elasticidade longitudinal igual e 30×10^6 psi (206.84GPa) e massa específica desprezível comparada à dos pavimentos.

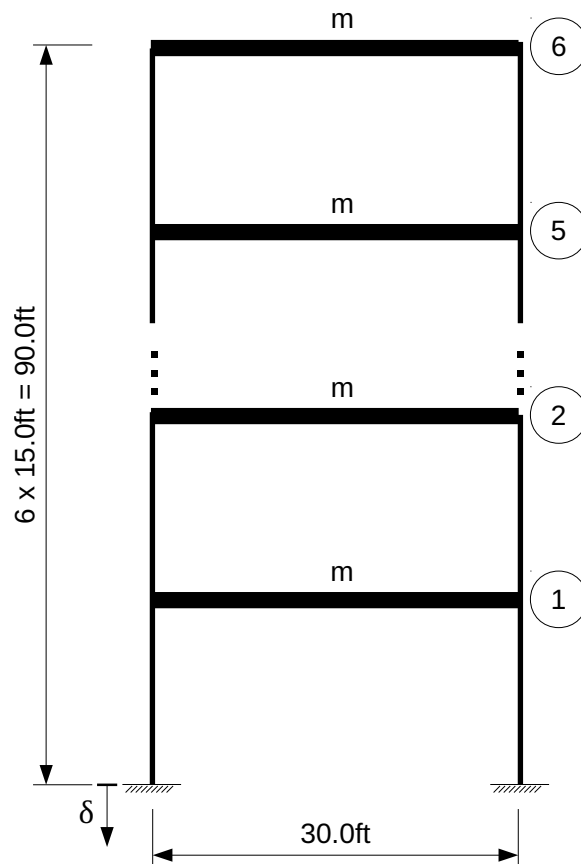


Figura 3.3: *Shear building* de 6 andares.

As massas m concentradas, de valor 66lb (29.937kg), foram consideradas, pelo referido autor, posicionadas nos nós da extremidade esquerda do sistema estrutural, o que foi também feito no presente trabalho. A inércia para os pavimentos foi tomada como infinita, e as colunas com flexão na maior inércia. As bases dos pilares são engastadas. A modelagem foi feita utilizando-se 14 nós, com 18 elementos finitos (1 por viga ou coluna). Considerou-se 6 vetores de partida, com tolerância de 10^{-4} para a análise.

A Tabela 3.2 apresenta os resultados para o exemplo em questão. Para as duas primeiras frequências naturais de vibração apresentadas, observa-se pouca divergência para a

frequência fundamental (1.67%) e grande divergência para a 4ª frequência (29.95%). Provavelmente o fato ocorreu porque Paz e Leigh (2004) consideraram, para os pavimentos, a inércia à flexão como $1.0 \times 10^6 \text{in}^4$ (0.4162m^4) e a área com o valor $1.0 \times 10^6 \text{in}^2$ (645.16m^2) para simular uma rigidez infinita nos mesmos. Entretanto, no presente código, ao se utilizar esses valores, obteve-se grande dificuldade em encontrar uma quantidade de vetores de partida que conduzisse à convergência da resposta. E, quando esta foi obtida, os valores apresentaram grandes divergências em relação ao referido autor. Desta forma, optou-se por utilizar, no modelo do presente trabalho, uma área de 24.0in^2 (0.01548m^2), um momento de inércia à flexão de $1.0 \times 10^6 \text{in}^4$ e 6 vetores de partida, com tolerância de 10^{-4} para a convergência, o que conduziu os resultados a valores mais coerentes.

Tabela 3.2: Frequências Naturais de Vibração para o shear building de 6 andares, sem deslocamento prescrito.

Descrição	Frequência (rad/s)		Variação percentual (%)
	Paz e Leigh (2004)	Presente Trabalho	
ω_1	9.19	9.34	1.67
ω_2	25.67	27.54	7.32
ω_3	38.69	45.41	17.36
ω_4	48.71	63.29	29.95

Tabela 3.3: Valores das Frequências Naturais de Vibração em função do deslocamento vertical do engaste esquerdo, para o shear building de 6 andares.

Recalque δ (in)	Frequências (rad/s)			
	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4
0.000	9.345	27.545	45.410	63.293
0.500	9.206	27.145	44.933	62.722
1.000	9.039	26.690	44.428	62.175
1.500	8.835	26.169	43.898	61.653
2.000	8.579	25.566	43.342	61.150
2.500	8.252	24.873	42.769	60.688
3.000	7.814	24.071	42.180	60.222

Considerando-se, em seguida, um deslocamento prescrito em sentido descendente no engaste esquerdo, observa-se as variações nas frequências naturais de vibração apresentadas na Tabela 3.3. Seis situações de deslocamento foram escolhidas em uma faixa de valores

compreendidos entre 0.5in e 3.0in (0.0127m e 0.0762m).

Graficamente, observa-se um decaimento mais acentuado na primeira frequência natural de vibração com o aumento do recalque comparado ao das demais frequências (Figura 3.4). Dentro do intervalo de deslocamento considerado, nota-se que as duas primeiras frequências naturais de vibração apresentam decaimento não linear, enquanto as duas outras demonstram decaimento aproximadamente em linha. A quarta frequência natural apresenta a razão $\omega_4/\omega_{4\max}$ igual a 0.951 em $\delta=3\text{in}$ (0.0762m), enquanto a primeira apresenta uma razão $\omega_1/\omega_{1\max}$ de 0.836, para o mesmo deslocamento. As frequências ω_2 e ω_3 possuem razões iguais a 0.874 e 0.929, respectivamente, para o referido δ .

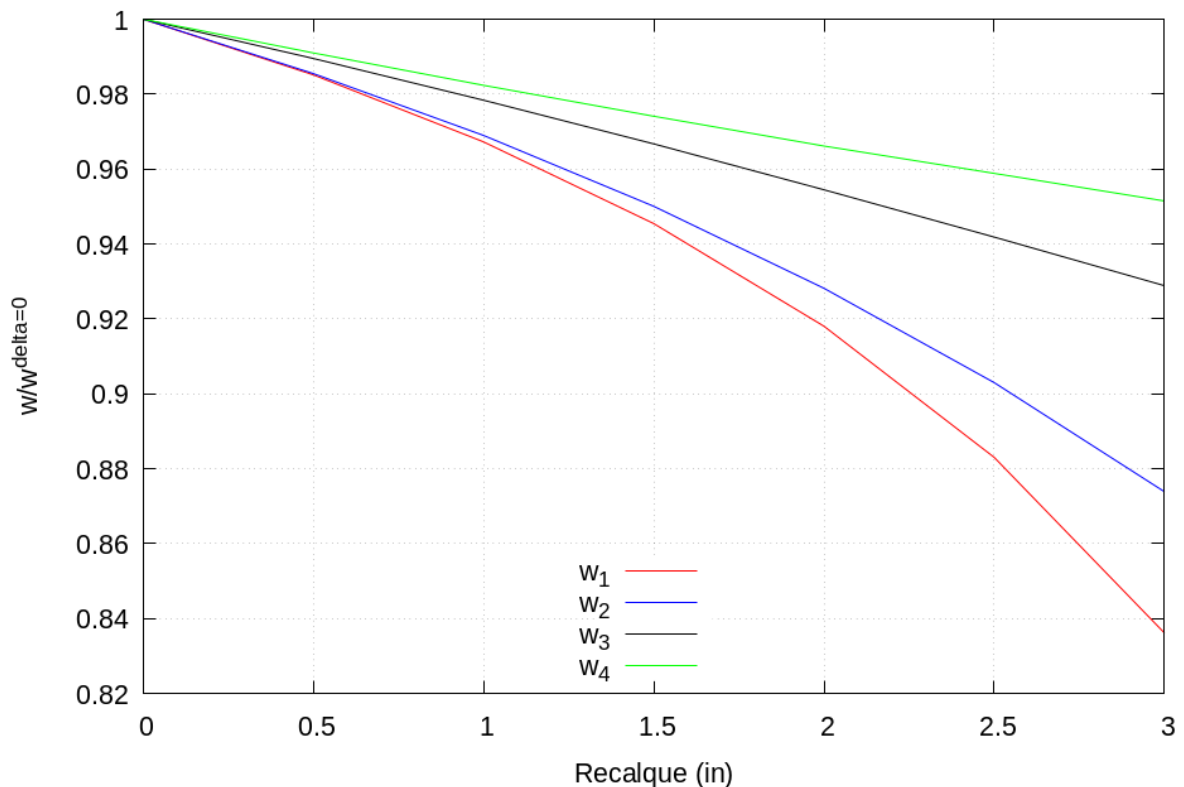


Figura 3.4: Variação das frequências naturais de vibração com o deslocamento prescrito vertical do engaste esquerdo, para o shear building de 6 andares.

3.3.3 Pórticos de baias múltiplas com 1 andar

O exemplo a seguir consiste em estruturas aporticadas analisadas por Mei (2012) — utilizando uma aproximação para as vibrações a partir de propagação de ondas — e experimentalmente por Rieger e McCallion (1965). O primeiro caso trata de um pórtico

composto por um único quadro cujas colunas e vigas possuem 6.0in de comprimento (Figura 3.5). A seção transversal das mesmas é retangular ($3/16 \times 5/16$)in² ou (4.763×7.938)mm². O módulo de elasticidade longitudinal e a massa específica do material que as constitui são 28.3×10^6 lbf/in² (195.122GPa) e 0.2782 lbm/in³ (7700.55 kg/m³), respectivamente. Para as colunas, considerou-se a possibilidade de flexão na menor inércia, e para as vigas o oposto. A base das colunas são engastadas.

A modelagem foi feita considerando-se 4 nós e 3 elementos finitos (1 por elemento estrutural). Foram utilizados 3 vetores de partida, e a tolerância para a análise foi de 10^{-4} .

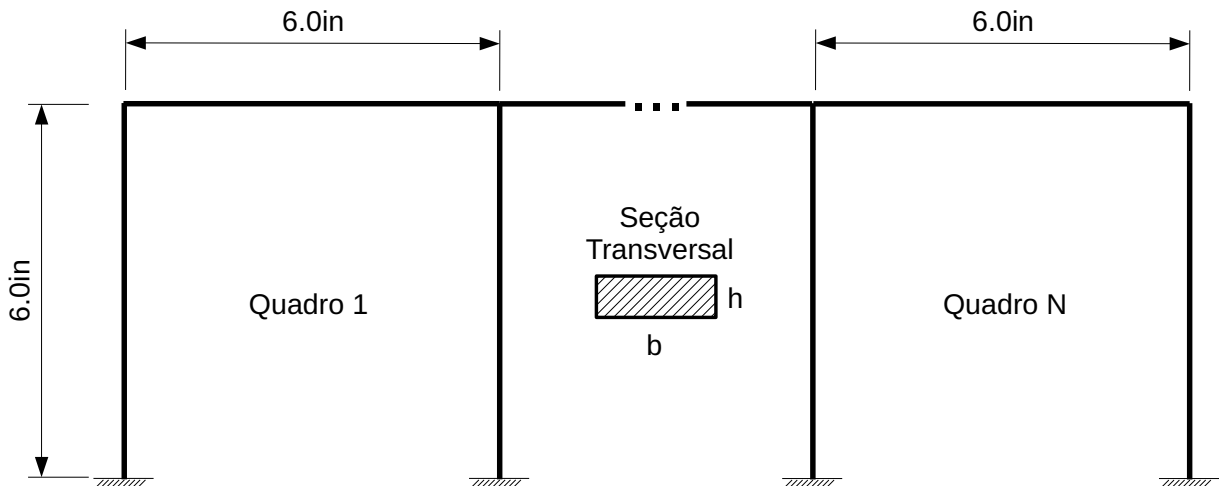


Figura 3.5: Pórtico de baias múltiplas de 1 andar.

Observa-se boa concordância entre os valores obtidos pelo presente trabalho e os dos referidos autores (Tabela 3.4). Para o pórtico de 1 baia, a variação percentual dos resultados é de 0.30% em relação a Mei (2012) e de 0.26% comparado a Rieger e McCallion (1965).

Tabela 3.4: Comparativo da Frequência Fundamental de Vibração para o Pórtico de Baias Múltiplas.

Número de Quadros	Frequência (Hz)			Frequência (rad/s)			Variação percentual (%)	
	Mei (2012)	Rieger e McCallion (1965)	Presente Trabalho	Mei (2012)	Rieger e McCallion (1965)	Presente Trabalho	Mei (2012) vs. Presente Trabalho	Rieger e McCallion (1965) vs. Presente Trabalho
1	152.00	152.07	152.46	955.04	955.48	957.96	0.30	0.26
8	131.70	132.00	133.03	827.50	829.38	835.84	1.00	0.77

O segundo caso trata de um pórtico de 8 quadros sequenciais conforme pode ser visto na Figura 3.5. Os dados geométricos para os elementos que o constituem, bem como as propriedades do material e as condições de base para os pilares, são os mesmos do caso anterior. Na modelagem, considerou-se 18 nós e 17 elementos finitos (1 por viga ou coluna).

No que se refere aos resultados quanto ao pórtico de 8 baias, a variação percentual mostra-se superior se comparada ao pórtico de 1 baia, mas ainda satisfatória, considerando-se uma margem de 5% de divergência. A maior variação obtida foi para os resultados analíticos de Mei (2012), cujo valor é 1.00%, e a menor para Rieger e McCallion (1965), de valor 0.77% (Tabela 3.4).

3.3.4 Pórticos de dois andares acoplados

O último exemplo deste capítulo consiste em dois pórticos planos (de dois andares cada) interligados utilizando-se o conceito de acoplamento a partir de graus de liberdade de interface (MAPA, 2018). Cada pórtico possui vigas e colunas com 3m de comprimento (Figura 3.6). A parte inferior, denominada subestrutura A, foi considerada engastada em sua base e a mesma possui elementos estruturais constituídos de perfis metálicos W310x143. De forma semelhante, a subestrutura B (parte superior) é formada de perfis metálicos W360x72. O módulo de elasticidade longitudinal utilizado para o aço foi 200GPa e a massa específica igual a 7850kg/m³.

Mapa (2018) considerou as vigas e as colunas discretizadas em 10 elementos finitos, totalizando 120 elementos no pórtico completo, tanto para a análise a partir da implementação via Método de Craig-Bampton quanto para a análise utilizando o SAP2000©. O presente trabalho utilizou vigas e colunas discretizados em 2 elementos finitos, totalizando 22 nós e 24 elementos em todo o pórtico. Foram considerados, ainda, 8 vetores de partida com tolerância para a análise de 1.0×10^{-4} para a obtenção das frequências naturais de vibração.

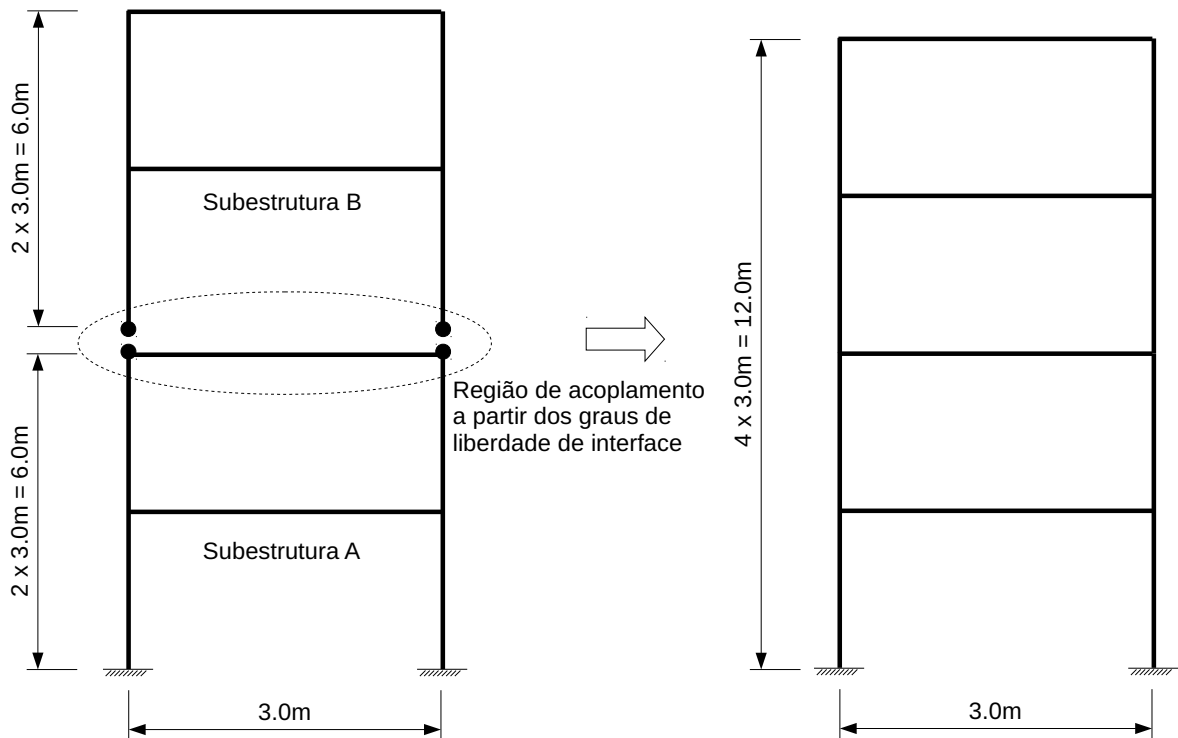


Figura 3.6: Pórticos de dois andares acoplados a partir de graus de liberdade de interface utilizado para o exemplo proposto.

Observa-se, na Tabela 3.5 que foi necessária uma pequena quantidade de elementos, utilizando-se o algoritmo do presente trabalho. A menor diferença percentual ocorreu para a frequência ω_2 : 0.22% em relação à resposta do SAP2000[®] e 0.24% para o Método de Craig-Bampton, respectivamente. Para a 4a frequência verifica-se a maior diferença entre o método de Iteração por Subespaços Vetoriais e o Método de Craig-Bampton (33.03%). Em seu trabalho, Mapa (2018) destacou que, neste problema específico, a faixa de frequências de interesse foi de 0 a 30Hz. Nestas condições, ω_3 (58.668rad/s) e ω_4 (111.776rad/s) se encontram além deste intervalo. Esta é, provavelmente, a razão da maior divergência entre o resultado da autora frente aos obtidos no presente trabalho para frequências acima de 30Hz.

Um estudo sobre a variação das frequências naturais de vibração com a discretização do modelo é apresentado a seguir (Tabela 3.6). Os dados de geometria do sistema, propriedades mecânicas do material e propriedades geométricas da seção foram mantidos, bem como a tolerância para a análise. As cinco primeiras frequências foram obtidas. O número de vetores de partida utilizados em cada discretização encontra-se também na Tabela 3.6. A modelagem com 120 elementos finitos, conforme proposto por Mapa (2018), também foi analisada.

Tabela 3.5: Comparativo das Frequências Naturais de Vibração para os Pórticos de dois Andares Acoplados.

Descrição	Frequência (Hz)			Variação percentual (%)	
	Mapa (2018): Craig-Bampton (120 elementos)	Mapa (2018): SAP2000© (120 elementos)	Presente Trabalho (24 elementos)	Craig-Bampton (MAPA, 2018) vs. Presente Trabalho	SAP2000© (MAPA, 2018) vs. Presente Trabalho
ω_1	10.162	10.156	10.457	2.90	2.96
ω_2	26.435	26.312	26.371	0.24	0.22
ω_3	58.668	53.431	52.972	9.71	0.86
ω_4	111.776	74.330	74.857	33.03	0.71

Tabela 3.6: Variação das primeiras frequências naturais com a discretização do modelo para o exemplo proposto.

Descrição	Frequência (Hz)			
	12 elementos (8 vetores de partida)	24 elementos (7 vetores de partida)	48 elementos (8 vetores de partida)	120 elementos (130 vetores de partida)
ω_1	6.936	10.457	8.337	11.356
ω_2	15.395	26.371	26.169	27.481
ω_3	20.672	52.972	53.225	60.428
ω_4	42.982	74.857	75.331	90.180
ω_5	56.630	96.141	96.778	92.811

A frequência fundamental apresenta aumento com o refinamento da discretização, a menos do modelo construído com 48 elementos. Comparando-se os resultados obtidos a partir da discretização com 24 e 48 elementos, verifica-se que os valores das 5 frequências estão relativamente próximos quando comparados com os das demais discretizações. Verifica-se ainda que um maior grau de refinamento (120 elementos), com uma maior quantidade de vetores de partida (130 vetores), contribuiu para uma diferença mais significativa em comparação aos resultados das discretizações anteriores. Além disso, a discretização com 12 elementos não se mostrou adequada em vista das demais, apresentando grande divergência, principalmente, para a frequência ω_5 .

CAPÍTULO 4: ALGORITMOS DE INTEGRAÇÃO DIRETA E AMORTECIMENTO PROPORCIONAL DE RAYLEIGH PARA PROBLEMAS GEOMETRICAMENTE NÃO-LINEARES

Quando se pretende obter a resposta das equações de movimento em sistemas estruturais sob vibração forçada, três abordagens podem ser, a princípio, consideradas: solução analítica, técnicas de superposição modal e métodos de integração direta no tempo. O primeiro caso se aplica apenas à condição da excitação externa ser expressa como uma função harmônica sendo, portanto, caracteristicamente restritivo (CIMELLARO e MARASCO, 2018). As técnicas de superposição modal, tanto para sistemas discretos como contínuos, são baseadas em resultados de análises modais lineares e consistem em expressar a resposta dinâmica por uma expansão em série dos modos de vibração e seus respectivos fatores de participação modais. A eficácia do método de superposição modal é notável, desde que os modos fundamentais sejam predominantes na resposta. No entanto, o método se limita ao caso linear e, além disso, quando o espectro de frequências requer a inclusão de grande número de modos de vibração para garantir uma boa convergência quasi-estática e espectral da resposta, o método se torna inviável (GÉRADIN e RIXEN, 2015).

Neste contexto, os Métodos de Integração Direta representam uma alternativa mais viável, visto que permitem considerar a contribuição das altas frequências na resposta de maneira direta. Em complemento, esses métodos podem ser usados em análises lineares e facilmente estendidos a problemas não-lineares sendo, portanto, fundamentais no contexto da dinâmica estrutural (GÉRADIN e RIXEN, 2015). Para Clough (2003), os Métodos de Integração Direta fornecem a única abordagem completamente geral para a análise da resposta não-linear, e são igualmente válidos na análise da resposta linear pois podem ser aplicados independentemente da estrutura estar se comportando linearmente ou não.

No Método da Integração Direta a Equação (2.46) é integrada por um procedimento numérico passo a passo (como o Método de Newmark, apresentado no Capítulo 2, item 2.1.2). O significado do termo “direto” na descrição se refere ao fato de que não é realizada nenhuma transformação das equações de movimento em uma forma diferente antes do processo de integração numérica (BATHE, 2014). Segundo o mesmo autor, a integração numérica direta se baseia em duas ideias. A primeira se refere ao fato de que a equação de movimento não precisa ser satisfeita em qualquer momento t , e sim em intervalos de tempo discretos. Em outras palavras, o equilíbrio (considerado estático), e incluindo forças de inércia e

amortecimento, deve ser satisfeito em pontos discretos no intervalo de solução. A segunda ideia é que se deve assumir uma variação para os deslocamentos (ou posições), velocidades e acelerações dentro de cada intervalo de tempo, e essa suposição será determinante na precisão, estabilidade e recurso computacional utilizado no procedimento de solução.

Nas últimas duas décadas várias pesquisas têm sido desenvolvidas com o objetivo de propor melhorias nos métodos de integração tradicionais ou mesmo apresentar novos métodos. Chung e Hulbert (1993) apresentaram a família de algoritmos denominada Generalizado- α , que possui dissipação numérica controlável pelo usuário. O parâmetro em questão permite ao algoritmo atingir a dissipação de alta frequência e minimizar a dissipação de baixa frequência. Além disso, o algoritmo proposto, com a escolha adequada dos parâmetros, resulta em três outros também conhecidos: Newmark, Hilber-Hughes-Taylor- α (HHT- α) e Wood-Bossak-Zienkiewicz (WBZ- α).

Zdravković *et al.* (2004) compararam os esquemas de integração temporal Generalizado- α , Newmark, HHT e WBZ para um problema de valor de contorno associado a uma fundação profunda submetida a carregamentos de terremotos. O comparativo é feito considerando-se precisão, tempo de CPU e controle de dissipação numérica de altas frequências.

Um esquema simples implícito de integração no tempo para sistemas sob grandes deformações e tempo de longa duração foi proposto por Bathe (2007), para os casos em que o método de Newmark não conserva a energia do sistema, e é instável.

Kuo *et al.* (2012) desenvolveram um algoritmo de integração direta para análise dinâmica não-linear de estruturas cuja precisão é de quarta ordem no tempo. O algoritmo é autoinicializável, de forma que os erros causados pela estimativa da aceleração são eliminados. Ainda de acordo com os autores é possível utilizar longos passos de tempo.

Rostami *et al.* (2013) apresentaram um algoritmo onde o método cúbico B-spline é desenvolvido para sistemas de múltiplos graus de liberdade. O método utiliza funções de base periódicas cúbicas em relação ao tempo, e é condicionalmente estável. Os autores realizaram análises de estabilidade e precisão, além de comparativo de resultados com outros métodos.

Soares Jr. (2015) propôs uma nova família de algoritmos autoinicializáveis para análise dinâmica. A formulação implícita é incondicionalmente estável, enquanto a explícita possui estabilidade condicionada. Além disso, o método possui segunda ordem de precisão, além de um parâmetro para controle de dissipação numérica.

Noh e Bathe (2019a) procuraram aprimorar o método ρ_∞ -Bathe a partir da taxa de divisão do passo de tempo e do raio espectral ρ_∞ (parâmetro para controle da dissipação numérica das altas frequências na resposta dinâmica, ver Capítulo 4, Equação 4.4) em grandes intervalos de tempo, utilizando a menor quantidade possível de parâmetros. Malakiyeh *et al.* (2019) consideram o método de Bathe no estudo de propagação de ondas. Destacam ainda que o método é incondicionalmente estável e é frequentemente usado sem ajuste de parâmetros. No entanto, pode-se fazer uso destes parâmetros, mas experimentações numéricas mais detalhadas devem ser feitas.

Para Zhang e Xing (2019), métodos de integração no tempo que possuem três parâmetros e consistem em um passo de solução (como o Generalizado- α) perdem a precisão ao interpolar os vetores de força externa, apesar de melhorarem a dissipação numérica ao modificarem a equação de equilíbrio nos pontos discretos de tempo. Para contornar este problema e ainda permitir a aplicação destes métodos na solução de equações diferenciais não-lineares de segunda ordem, os autores propõem um novo método (também de três parâmetros e um passo de solução), de nome TPSM, mas com uma variável adicional inserida nas equações de atualização das variáveis.

Zhang (2020) procurou realizar ainda um estudo abrangente acerca dos métodos de integração no tempo de 2 subpassos, além de apresentar um novo método, denominado OALTS, implícito, com precisão de segunda ordem para obtenção do deslocamento, velocidade e aceleração de forma simultânea, além de possuir dissipação numérica controlável.

Li e Yu (2020) desenvolveram um algoritmo implícito, autoinicializável, incondicionalmente estável e com precisão de segunda ordem para solução de problemas dinâmicos não-lineares. O mesmo consiste na obtenção da resposta por meio de 2 etapas (subpassos) em um mesmo incremento de tempo, e utiliza 2 parâmetros para controle da dissipação numérica em altas e baixas frequências.

Borrvall e Lawson (2020) destacam que o método de Newmark, apesar de se destacar por sua estabilidade incondicional e conservação de energia, é propenso a instabilidade numérica quando os modelos são submetidos a movimentos rotacionais. Assim sendo, os autores utilizaram algoritmos implementados no LS-DYNA®, como Bathe, HHT (Hughes-Hilber-Taylor) e FRD (Finite Rotational Dynamics), para investigar tais instabilidades e indicar os algoritmos mais adequados para esse fim.

Behnoudfar *et al.* (2020) estenderam o método Generalizado- α , cuja precisão é de segunda ordem no tempo, para terceira ordem de precisão, mas controlado por um único parâmetro de dissipação numérica. Os autores afirmam que o método é incondicionalmente estável, e apresentam uma direção para a generalização do método em esquemas de ordem superior.

Kim (2020) revisou e analisou, de forma crítica, algoritmos explícitos e implícitos de integração numérica, incluindo um algoritmo explícito implementado pelo autor. Aspectos computacionais, semelhanças e orientações sobre suas aplicações em análises transitórias foram detalhados a partir de exemplos.

Neste capítulo serão apresentados alguns métodos de integração direta no domínio do tempo como alternativas ao método de Newmark, todos escritos em formulação posicional do Método dos Elementos Finitos. Características como eficiência, estabilidade, erro, dentre outras são também discutidas. Optou-se neste trabalho por escolher métodos que possuam parâmetros de controle de dissipação numérica na contribuição das altas frequências na resposta de sistemas lineares e não-lineares. Nos seis exemplos ao final do capítulo procura-se demonstrar a validade dos métodos implementados e discutir aspectos concernentes à resposta.

4.1 Características dos métodos de integração direta

É desejável que os algoritmos de integração direta possuam algumas propriedades de forma a se garantir que a resposta obtida seja a mais próxima possível do problema real, principalmente em problemas não-lineares. A seguir são descritas algumas de forma genérica.

4.1.1 Algoritmos explícitos, implícitos e autoinicializáveis

A primeira distinção a ser feita diz respeito aos algoritmos explícitos e implícitos. Nos algoritmos explícitos, os valores atualizados da grandeza posição $\mathbf{X}_{t+\Delta t}$ (ou deslocamento), bem como suas derivadas (velocidade e aceleração) calculados em cada passo dependem somente das grandezas obtidas no passo anterior, de forma que a análise avança de forma direta de um passo para o seguinte. Por outro lado, nos algoritmos implícitos, as expressões que fornecem as grandezas atualizadas incluem um ou mais valores das mesmas pertencentes a essa mesma etapa, de forma que os valores de teste de algumas grandezas devem ser

assumidos e, em seguida, refinados por iterações sucessivas (CLOUGH, 2003).

De acordo com Chopra (2020), métodos explícitos possuem a vantagem de poderem ser convenientemente programados para uso de computação paralela usando grande número de processadores. Muitas aplicações a sistemas complexos diagonalizam a matriz de amortecimento, de forma a tornar a matriz de rigidez (ou Hessiana, no caso posicional) também diagonal (contanto que a matriz de massa seja também diagonalizada), de forma a se resolver mais rapidamente o sistema de equações de equilíbrio.

De forma complementar, Kim (2020) salienta que procedimentos de obtenção da solução não-linear para o processo iterativo (como o método Newton-Raphson ou o de Picard) e critérios de convergência são desnecessários em análises não-lineares com esquemas explícitos. Desta forma, os custos computacionais de esquemas explícitos são muito mais baixos comparados aos implícitos análises transientes lineares e não-lineares. Por outro lado, os esquemas explícitos são condicionalmente estáveis, de forma que pequenos intervalos de tempo devem ser usados para satisfazer as condições de estabilidade numérica.

Na solução da equação de movimento a partir de Métodos de Integração Direta é comumente empregada a Equação (2.45) para obtenção da aceleração no instante inicial t_0 . Benítez e Montáns (2013) demonstram que o cálculo apropriado do vetor de aceleração inicial não só garante a precisão da resposta numérica mas também evita alguns *overshoots* inesperados no deslocamento e/ou velocidade. Os algoritmos (métodos) ditos autoinicializáveis são aqueles em que a aceleração no instante inicial não é necessária para se obter os vetores deslocamento e velocidade no instante seguinte. No entanto, ainda podem ser computadas como um parâmetro de saída independente.

4.1.2 Estabilidade

Um método numérico é considerado instável, por definição, se os efeitos produzidos pelos erros de truncamento introduzidos na solução numérica em cada passo aumentam com o passar do tempo de análise (HUMAR, 2012). A utilização de notações e conceitos de álgebra linear se fazem pertinentes para o entendimento da estabilidade dos métodos de integração.

Em geral o estudo da estabilidade do método de integração numérica é realizado com referência à solução da equação da vibração livre não amortecida. Apesar da condição de estabilidade ser influenciada pela presença do amortecimento (HUMAR, 2012), esta

influência pode ser ignorada para pequenas quantidades de amortecimento. Em qualquer caso, a presença de amortecimento tornará as condições de estabilidade menos restritivas. Se um método de solução é instável sob vibração livre, também é provável que o será para problemas de vibração forçada. Afinal, a instabilidade na solução complementar logo tornará a solução total sem significado.

Assim, seja \mathbf{A} uma matriz quadrada de ordem N . Sabendo-se que seu traço é a soma dos elementos de sua diagonal principal e definindo-o como $2\alpha_1$ (também chamado primeiro invariante), pode-se escrever:

$$2\alpha_1 = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{NN} \quad (4.1)$$

Os autovalores λ de \mathbf{A} são obtidos pela solução da equação característica:

$$\det[\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}] = 0 \quad (4.2)$$

Particularmente, se \mathbf{A} for uma matriz de ordem 3, o polinômio característico é dado por:

$$\lambda^3 - 2\alpha_1\lambda^2 + \alpha_2\lambda - \alpha_3 = 0 \quad (4.3)$$

sendo α_2 a soma dos menores principais (ou segundo invariante) de \mathbf{A} e α_3 o determinante (ou terceiro invariante) de \mathbf{A} . Definindo-se o determinante de uma matriz \mathbf{M} de ordem $N-1$ (obtida pela exclusão da linha i e coluna j da matriz original) como o menor M_{ij} de \mathbf{A} , então denomina-se menor principal de \mathbf{A} o caso em que $i=j$.

Desta forma o maior valor absoluto dentre as raízes da Equação (4.3) é chamado raio espectral de \mathbf{A} :

$$\rho(\mathbf{A}) = \max(|\lambda_1|, |\lambda_2|, |\lambda_3|) \quad (4.4)$$

Os parâmetros de resposta (posição, velocidade e aceleração) no instante atual podem ser expressos em termos de seus valores no instante t , a partir de um vetor \mathbf{r} , da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{t+\Delta t} &= \mathbf{A} \mathbf{r}_t \\ \mathbf{r}_t^T &= [\mathbf{X}_t \quad \Delta t \dot{\mathbf{X}}_t \quad \Delta t^2 \ddot{\mathbf{X}}_t] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Neste caso, \mathbf{A} é denominada matriz de amplificação. Reescrevendo-se a Equação (4.5) em dois instantes anteriores:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_t &= \mathbf{A} \mathbf{r}_{t-\Delta t} \\ \mathbf{r}_{t-\Delta t} &= \mathbf{A} \mathbf{r}_{t-2\Delta t} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Tomando-se as Equações (4.5) e (4.6), manipulando-as matricialmente e eliminando-se as velocidades e acelerações, chega-se a (HUMAR, 2012):

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} - 2\alpha_1 \mathbf{X}_t + \alpha_2 \mathbf{X}_{t-\Delta t} - \alpha_3 \mathbf{X}_{t-2\Delta t} = \mathbf{0} \quad (4.7)$$

definida como Equação da Diferença, cuja solução possui a forma:

$$X_n = c \rho^n \quad (4.8)$$

sendo c uma constante. Substituindo a Equação (4.8) em (4.7) obtém-se:

$$\rho^3 - 2\alpha_1 \rho^2 + \alpha_2 \rho - \alpha_3 = 0 \quad (4.9)$$

cujas raízes, pode-se concluir, são iguais aos autovalores da matriz \mathbf{A} , comparando-se a Equação (4.9) com a Equação (4.3). A solução geral pode então ser escrita como:

$$X_n = \sum_{i=1}^3 c_i \rho_i^n \quad (4.10)$$

sendo c_i constantes arbitrárias definidas por condições iniciais.

Segundo Humar (2012), se o valor absoluto de quaisquer das três raízes da Equação (4.9) for maior que 1, a solução dada pela Equação (4.10) não terá limite ao avançar do tempo

t , ou seja, o procedimento de solução será considerado instável. A estabilidade, portanto, requer que o valor absoluto de cada uma das três raízes da Equação (4.9) seja menor ou igual a 1 ou, de forma equivalente, que o raio espectral da matriz \mathbf{A} seja menor ou igual a 1.

4.1.3 Ordem de precisão e erro de truncamento local

Para se definir a ordem de precisão de um algoritmo deve-se considerar o número de termos da expansão em série de Taylor usado para aproximação do deslocamento (ou posição), velocidade e aceleração. Como exemplo genérico, seja novamente a Equação (4.7), com a posição \mathbf{X} descrita nos instantes $(t+\Delta t)$, $(t-\Delta t)$ e $(t-2\Delta t)$ aproximadas por expansão em série de Taylor, respectivamente, como:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \Delta t \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{X}}_t + O(\Delta t^3) \quad (4.11)$$

$$\mathbf{X}_{t-\Delta t} = \mathbf{X}_t - \Delta t \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{X}}_t + O(\Delta t^3) \quad (4.12)$$

$$\mathbf{X}_{t-2\Delta t} = \mathbf{X}_t - 2\Delta t \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{(2\Delta t)^2}{2} \ddot{\mathbf{X}}_t + O(\Delta t^3) \quad (4.13)$$

Levando-se as Equações (4.11), (4.12) e (4.13) em (4.7), e agrupando-se os termos em \mathbf{X} , chega-se a:

$$(1 - 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3) \mathbf{X}_t + \Delta t (1 - \alpha_2 + 2\alpha_3) \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} (1 + \alpha_2 - 4\alpha_3) \ddot{\mathbf{X}}_t = O(\Delta t^3) \quad (4.14)$$

Nas Equações (4.11) a (4.14), $O(\Delta t^3)$ relaciona-se aos termos de maior ordem da expansão da série e representa o erro de truncamento local (de ordem 3 neste caso). Verifica-se ainda que os termos que multiplicam a posição \mathbf{X} no instante t e suas derivadas são todos constantes (invariantes), e que o termo de maior ordem associado ao incremento de tempo Δt apresenta expoente 2. Desta forma, algoritmos com esta aproximação em série de Taylor são conhecidos por possuir 2ª ordem de precisão no tempo.

4.1.4 Eficiência

A Eficiência está relacionada com o recurso computacional (tempo de processamento) necessário para se alcançar a precisão desejada ao longo do intervalo de tempo para o qual a resposta é necessária. Segundo Clough (2003), por si só, não se deve utilizar a precisão como critério de escolha em um método de integração pois, em geral, qualquer grau desejado de precisão pode ser obtido por qualquer método caso o intervalo de tempo seja suficientemente pequeno. Em qualquer caso, os intervalos de tempo devem ser suficientemente curtos para definir adequadamente o carregamento e o histórico de resposta.

4.1.5 Erro

Conforme Humar (2012), os erros envolvidos na integração numérica de equações diferenciais, dentre elas a equação de movimento, podem ser classificados em três tipos:

1. Erros de arredondamento introduzidos por cálculos repetidos usando um pequeno passo de tempo.
2. Erros de truncamento envolvidos na representação de deslocamento (ou posição) e velocidade por um número finito de termos na expansão da série de Taylor.
3. Erro propagado devido à substituição da equação diferencial por uma diferença finita equivalente.

De acordo com o mesmo autor, os erros de arredondamento, apesar de sua influência na resposta, são de natureza aleatória e, portanto, devem ser tratados por métodos estatísticos. Os limites de erro obtidos por meios estatísticos frequentemente superestimam grosseiramente os erros reais. Em cálculos de computador, quase sempre é possível reduzir os erros de arredondamento usando maior precisão nos cálculos.

Já os erros de truncamento são acumulados localmente em cada etapa. A menos que o método de integração usado seja instável, o erro de truncamento é um bom indicativo da precisão de uma solução numérica. Os termos de erro de truncamento fornecem, portanto, um critério útil para avaliar a precisão relativa de um método de integração numérica (HUMAR, 2012).

4.2 Os algoritmos Generalizado- α , HHT- α , e WBZ- α

O Método Generalizado- α foi idealizado por Chung e Hulbert (1993) com o objetivo de solucionar equações hiperbólicas em problemas de dinâmica estrutural. Em seguida, foi então aplicado para resolver equações parabólicas, como as de navier-stokes na dinâmica de fluidos computacional (JANSEN *et al.*, 2000; BEHNOUDFAR *et al.*, 2020).

O Método apresenta as seguintes características: implícito, precisão de segunda ordem no tempo, estabilidade incondicional, controle do usuário na dissipação numérica das altas frequências a partir do parâmetro ρ_∞ . Além deste, há ainda outros dois parâmetros: um relativo aos termos associados à massa (α_m) e outro para os demais termos (α_f), usados para representar discretamente a equação diferencial de movimento. Segundo Chung e Hulbert (1993), bem como Behnoudfar *et al.* (2020), ao mesmo tempo em que a dissipação numérica é acentuada nas frequências superiores, ela é atenuada nas baixas frequências. Ambos os efeitos são desejáveis na obtenção da solução, na medida em que o primeiro facilita o processo de convergência do algoritmo e o segundo não compromete a precisão da solução.

Da forma proposta por Chung e Hulbert (1993), o Método Generalizado- α contém outros três métodos: WBZ- α (Wood *et al.*, 1980), HHT- α (Hilber *et al.*, 1977) e Newmark, bastando para tal escolher o valor apropriado para os parâmetros α_m e α_f .

Neste trabalho apresenta-se o Método Generalizado- α aplicado à formulação posicional do Método dos Elementos Finitos. Por consequência, tem-se também os métodos WBZ- α e HHT- α para a mesma formulação. Os referidos parâmetros para obtenção dos métodos derivados do Generalizado- α serão mostrados ao fim da formulação.

4.2.1 Formulação

Tomando-se novamente a Equação (2.46), apresentada no Capítulo 2, item 2.1.2, pode-se reescrevê-la da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\Delta t-\alpha_f} - \mathbf{F}_{t+\Delta t-\alpha_f} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t-\alpha_m} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t-\alpha_f} = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

sendo os vetores posição e velocidade atualizados dados pelas Equações (2.45) e (2.45), respectivamente. Desta forma, torna-se necessário definir uma relação entre os parâmetros α_m ,

α_f , γ e β do algoritmo. As ponderações nos vetores posição, velocidade, aceleração e força são dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\mathbf{X}_{t+\Delta t} + \alpha_f\mathbf{X}_t \quad (4.16)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} + \alpha_f\dot{\mathbf{X}}_t \quad (4.17)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t-\alpha_m} = (1-\alpha_m)\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} + \alpha_m\ddot{\mathbf{X}}_t \quad (4.18)$$

$$\mathbf{F}_{t+\Delta t-\alpha_f} = (1-\alpha_f)\mathbf{F}_{t+\Delta t} + \alpha_f\mathbf{F}_t \quad (4.19)$$

Nota-se que o parâmetro α_m , é atribuído à aceleração (e, conseqüentemente, à massa) do sistema. O vetor aceleração no instante inicial é dado, como no Método de Newmark, pela Equação (2.53):

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = -\frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{X}}_t - \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{X}_t + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{X}_{t+\Delta t} - \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{X}}_t + \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (4.20)$$

Fazendo-se semelhante procedimento com o vetor velocidade no mesmo instante, levando-se a Equação (4.20) na Equação (2.46), chega-se a:

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = -\frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{X}}_t + \dot{\mathbf{X}}_t - \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{X}_t - \frac{\gamma\Delta t}{2\beta}\ddot{\mathbf{X}}_t + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{X}_{t+\Delta t} + \Delta t\ddot{\mathbf{X}}_t \quad (4.21)$$

Substituindo-se a Equação (4.20) na Equação (4.18):

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t-\alpha_m} = \ddot{\mathbf{X}}_t - \frac{1}{\beta\Delta t}\dot{\mathbf{X}}_t + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{X}_t + \frac{1}{\beta\Delta t^2}\mathbf{X}_{t+\Delta t-\alpha_f} - \frac{1}{2\beta}\ddot{\mathbf{X}}_t \quad (4.22)$$

e, de forma similar, levando-se a Equação (4.21) na Equação (4.17):

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t-\alpha_f} = \dot{\mathbf{X}}_t - \frac{\gamma}{\beta}\dot{\mathbf{X}}_t + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{X}_t - \frac{\Delta t\gamma}{2\beta}\ddot{\mathbf{X}}_t + \frac{\gamma}{\beta\Delta t}\mathbf{X}_{t+\Delta t-\alpha_f} + \Delta t\ddot{\mathbf{X}}_t \quad (4.23)$$

Retornando-se à Equação de Equilíbrio dinâmico, dada em (4.15), e a ela levando-se as Equações (4.23), (4.22) e (4.19), pode-se então escrever:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} = & (\alpha_f - 1) \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} - ((1 - \alpha_f) \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \alpha_f \mathbf{F}_t) + \frac{(\alpha_m - 1)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \\ & + \mathbf{M} \mathbf{D}_M + \mathbf{C} \mathbf{D}_C + \frac{\gamma (\alpha_f - 1)}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.24)$$

Destaca-se os vetores \mathbf{D}_M e \mathbf{D}_C , cujos termos se relacionam com o instante de tempo anterior (conhecidos), e se associam, respectivamente à matriz de massa \mathbf{M} e à matriz de amortecimento \mathbf{C} . Ambos são dados como:

$$\mathbf{D}_M = \ddot{\mathbf{X}}_t + \frac{(\alpha_m - 1)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{X}_t + \frac{(\alpha_m - 1)}{\beta \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{(\alpha_m - 1)}{2\beta} \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (4.25)$$

$$\mathbf{D}_C = \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{(\alpha_f - 1)\gamma}{\beta} \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{(\alpha_f - 1)\Delta t \gamma}{2\beta} \ddot{\mathbf{X}}_t + (1 - \alpha_f) \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (4.26)$$

A matriz Hessiana do sistema dinâmico para o Método Generalizado- α é obtida fazendo-se a segunda derivada parcial do Funcional de Energia em relação às posições:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{X}^2} \Big|_{t+\Delta t} = \nabla g(\mathbf{X}^0) = (\alpha_f - 1) \frac{\partial^2 U_t}{\partial \mathbf{X}^2} \Big|_{t+\Delta t} + \frac{(\alpha_m - 1)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(\alpha_f - 1)\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad (4.27)$$

A solução do problema não-linear é realizada aplicando-se o Método de Newton-Raphson à Equação (4.24), e a correção das posições no processo iterativo é realizada conforme a Equação (2.58), sendo o vetor de resíduos para o método dado pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}^0) = & (\alpha_f - 1) \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\Delta t} - ((1 - \alpha_f) \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \alpha_f \mathbf{F}_t) + \frac{(\alpha_m - 1)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \\ & + \mathbf{M} \mathbf{D}_M + \mathbf{C} \mathbf{D}_C + \frac{\gamma (\alpha_f - 1)}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.28)$$

Os parâmetros γ e β são dados por:

$$\beta = \frac{(1 - \alpha_m + \alpha_f)^2}{4} \quad (4.29)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} - \alpha_m + \alpha_f \quad (4.30)$$

e, por sua vez, os parâmetros α_m , α_f , são funções do raio espectral ρ_∞ , sendo dados por:

$$\alpha_m = \frac{2\rho_\infty - 1}{\rho_\infty + 1} \quad (4.31)$$

$$\alpha_f = \frac{\rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (4.32)$$

Das Equações (4.31) e (4.32) pode-se obter os métodos WBZ- α , fazendo-se $\alpha_f=0$, bem como o HHT- α , impondo-se a condição $\alpha_m=0$. De forma complementar, é também possível obter-se o método de Newmark fazendo-se $\alpha_m=\alpha_f=0$, de maneira que γ e β assumem os valores 0.5 e 0.25, respectivamente. O algoritmo, porém, passa a não mais ter a propriedade de controle da dissipação numérica.

4.3 *Truly self-starting two sub-steps method* – TSTSM

O método proposto por Li e Yu (2020), que neste trabalho será denotado por TSTSM (*Truly Self-Starting Two Sub-Steps Method*) apresenta, segundo os autores, as seguintes propriedades:

1. Aceleração não é necessária para inicialização do algoritmo, apesar de poder ser extraída como resposta em conjunto com a velocidade e o deslocamento (ou posição);
2. A precisão de segunda ordem se estende ao deslocamento (ou posição), velocidade e aceleração.
3. Estabilidade incondicional para problemas elásticos lineares.
4. Sem picos (*overshoots*) em deslocamento (posição) e velocidade.
5. Dissipações numéricas controláveis na baixa e alta frequências.

A obtenção de respostas precisas de segunda ordem para a aceleração requer o uso subpassos no algoritmo, o que significa que duas etapas de processo iterativo, para cada passo de tempo, devem ser realizadas. Neste trabalho, a formulação proposta por Li e Yu (2020) é

apresentada de forma posicional para o Método dos Elementos Finitos.

4.3.1 Formulação

Conforme previamente mencionado, o método proposto se divide em 2 subpassos, e em cada um deles deve-se aplicar um algoritmo corretor. Neste trabalho o método de Newton-Raphson é aplicado.

4.3.1.1 Primeiro subpasso

Partindo-se da Equação (2.46), a equação de movimento é escrita como:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\gamma \Delta t} = \left. \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\gamma \Delta t} - \mathbf{F}_{t+\gamma \Delta t} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} = \mathbf{0} \quad (4.33)$$

e os vetores posição, velocidade e força externa atualizados (no instante $t+\gamma \Delta t$) dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{X}_{t+\gamma \Delta t} = \mathbf{X}_t + \Delta t \gamma \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} \quad (4.34)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t \gamma \ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} \quad (4.35)$$

$$\mathbf{F}_{t+\gamma \Delta t} = (1-\gamma) \mathbf{F}_{t+\gamma \Delta t} + \gamma \mathbf{F}_t \quad (4.36)$$

Isolando-se o vetor velocidade atualizado na Equação (4.34):

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} = \frac{1}{\gamma \Delta t} (\mathbf{X}_{t+\gamma \Delta t} - \mathbf{X}_t) \quad (4.37)$$

Fazendo-se o mesmo com a aceleração atualizada na Equação (4.35) e, simultaneamente, levando-se o resultado da Equação (4.23):

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} = -\frac{1}{\gamma \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{1}{(\gamma \Delta t)^2} (\mathbf{X}_{t+\gamma \Delta t} - \mathbf{X}_t) \quad (4.38)$$

Levando-se as Equações (4.37) e (4.38) na Equação (4.33), tem-se então o sistema de equações de equilíbrio dinâmico para o primeiro subpasso em função do vetor posição atualizado $\mathbf{X}_{t+\gamma\Delta t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\gamma\Delta t} &= \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\gamma\Delta t} - [(1-\gamma)\mathbf{F}_{t+\gamma\Delta t} + \gamma\mathbf{F}_t] + \frac{1}{\gamma\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{X}_{t+\gamma\Delta t} \\ &+ \mathbf{M} \mathbf{D}_M + \mathbf{C} \mathbf{D}_C + \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{C} \mathbf{X}_{t+\gamma\Delta t} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.39)$$

sendo os vetores \mathbf{D}_M e \mathbf{D}_C dados por:

$$\mathbf{D}_M = -\frac{1}{\gamma\Delta t} \dot{\mathbf{X}}_t - \frac{1}{(\gamma\Delta t)^2} \mathbf{X}_t \quad (4.40)$$

$$\mathbf{D}_C = \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{X}_t \quad (4.41)$$

A matriz Hessiana deste subpasso é obtida a partir da segunda derivada parcial do Funcional de Energia em relação às posições:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{X}^2} \Big|_{t+\gamma\Delta t} = \nabla g(\mathbf{X}^0) = \frac{\partial^2 U_t}{\partial \mathbf{X}^2} \Big|_{t+\gamma\Delta t} + \frac{1}{(\beta\Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{C} \quad (4.42)$$

e o vetor de resíduos do subpasso para a correção das posições no processo iterativo (Equação 2.58) é dado por:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}^0) &= \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\gamma\Delta t} - [(1-\gamma)\mathbf{F}_{t+\gamma\Delta t} + \gamma\mathbf{F}_t] + \frac{1}{\gamma\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{X}_{t+\gamma\Delta t} \\ &+ \mathbf{M} \mathbf{D}_M + \mathbf{C} \mathbf{D}_C + \frac{1}{\gamma\Delta t} \mathbf{C} \mathbf{X}_{t+\gamma\Delta t} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Ao fim do processo de convergência e consequente obtenção de $\mathbf{X}_{t+\gamma\Delta t}$, retorna-se às Equações (4.37) e (4.38) para se atualizar a velocidade e aceleração, respectivamente.

4.3.1.2 Segundo subpasso

A partir dos resultados obtidos no subpasso anterior, pode-se estabelecer a Equação de Movimento referente ao instante $t+\gamma_1\Delta t$ da seguinte forma:

$$\left. \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\gamma_1\Delta t} = \left. \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\gamma_1\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\gamma_1\Delta t} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma_1\Delta t} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma_1\Delta t} = \mathbf{0} \quad (4.44)$$

e os vetores posição, velocidade e força externa atualizados (no instante $t+\gamma_1\Delta t$) dados, respectivamente, como:

$$\mathbf{X}_{t+\gamma_1\Delta t} = \mathbf{X}_t + \Delta t [(\gamma_1 - \alpha) \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} + \alpha \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma_1\Delta t}] \quad (4.45)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma_1\Delta t} = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t [(\gamma_1 - \alpha) \ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} + \alpha \ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma_1\Delta t}] \quad (4.46)$$

$$\mathbf{F}_{t+\gamma_1\Delta t} = (1 - \gamma_1) \mathbf{F}_{t+\gamma\Delta t} + \gamma_1 \mathbf{F}_t \quad (4.47)$$

Isolando-se o vetor velocidade atualizado na Equação (4.45):

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma_1\Delta t} = -\frac{\gamma_1}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} + \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{X}_{t+\gamma_1\Delta t} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{X}_t \quad (4.48)$$

Repetindo-se o procedimento com a aceleração atualizada na Equação (4.46) e, concomitantemente, substituindo-se na mesma o resultado da Equação (4.48):

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma_1\Delta t} = & -\frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_t - \frac{\gamma_1}{\alpha} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} + \ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} - \frac{\gamma_1}{\alpha^2 \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} \\ & + \frac{1}{(\alpha \Delta t)^2} \mathbf{X}_{t+\gamma_1\Delta t} - \frac{1}{(\alpha \Delta t)^2} \mathbf{X}_t \end{aligned} \quad (4.49)$$

Voltando-se na Equação (4.44) e a ela levando-se as Equações (4.48) e (4.49), chega-se à Equação de Equilíbrio Dinâmico em função do vetor posição atualizado $\mathbf{X}_{t+\gamma_1\Delta t}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\gamma_1 \Delta t} = \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\gamma_1 \Delta t} & - [(1-\gamma_1) \mathbf{F}_{t+\gamma_1 \Delta t} + \gamma_1 \mathbf{F}_t] + \frac{1}{(\alpha \Delta t)^2} \mathbf{M} \mathbf{X}_{t+\gamma_1 \Delta t} \\ & + \mathbf{M} \mathbf{D}_M + \mathbf{C} \mathbf{D}_C + \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} \mathbf{X}_{t+\gamma_1 \Delta t} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.50)$$

e os vetores \mathbf{D}_M e \mathbf{D}_C dados por:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_M = -\frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_t - \frac{\gamma_1}{\alpha} \ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} + \ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} - \frac{\gamma_1}{\alpha^2 \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} \\ + \frac{1}{\alpha \Delta t} \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} - \frac{1}{(\alpha \Delta t)^2} \mathbf{X}_t \end{aligned} \quad (4.51)$$

$$\mathbf{D}_C = -\frac{\gamma_1}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} + \dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma \Delta t} - \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{X}_t \quad (4.52)$$

Fazendo-se a segunda derivada parcial do Funcional de Energia em relação às posições, tem-se a matriz Hessiana:

$$\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{X}^2} \Big|_{t+\gamma \Delta t} = \nabla g(\mathbf{X}^0) = \frac{\partial^2 U_t}{\partial \mathbf{X}^2} \Big|_{t+\gamma \Delta t} + \frac{1}{(\alpha \Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} \quad (4.53)$$

e o vetor de resíduos para o processo iterativo, Equação (2.58), dado como:

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}^0) = \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \Big|_{t+\gamma_1 \Delta t} & - [(1-\gamma_1) \mathbf{F}_{t+\gamma_1 \Delta t} + \gamma_1 \mathbf{F}_t] + \frac{1}{(\alpha \Delta t)^2} \mathbf{M} \mathbf{X}_{t+\gamma_1 \Delta t} \\ & + \mathbf{M} \mathbf{D}_M + \mathbf{C} \mathbf{D}_C + \frac{1}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} \mathbf{X}_{t+\gamma_1 \Delta t} \end{aligned} \quad (4.54)$$

Ao fim do processo de convergência e conseqüente obtenção de $\mathbf{X}_{t+\gamma_1 \Delta t}$, retorna-se às Equações (4.48) e (4.49) para se atualizar a velocidade e aceleração, respectivamente.

4.3.1.3 Atualização das variáveis para o passo seguinte

Dados os resultados dos 2 subpassos, a atualização dos vetores posição, velocidade e aceleração no instante $t+\Delta t$ é feita, respectivamente, da seguinte forma:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \Delta t [(1-\beta)\dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} + \beta\dot{\mathbf{X}}_{t+\gamma_1\Delta t}] \quad (4.55)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t [(1-\beta)\ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} + \beta\ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma_1\Delta t}] \quad (4.56)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = (1-\chi)\ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma\Delta t} + \chi\ddot{\mathbf{X}}_{t+\gamma_1\Delta t} \quad (4.57)$$

Os parâmetros que aparecem nesta formulação são dados por:

$$\alpha = \frac{1-2\gamma}{2(p_\infty\gamma - \gamma + 1)} \quad (4.58)$$

$$\gamma_1 = \alpha + \gamma + \sqrt{\alpha^2 + \gamma^2} \quad (4.59)$$

$$\chi = \frac{\gamma - 1}{\gamma - \gamma_1} \quad (4.60)$$

$$\beta = \frac{2\gamma - 1}{2(\gamma - \gamma_1)} \quad (4.61)$$

Desta forma, tem-se somente 2 parâmetros independentes, quais sejam, γ e p_∞ . O primeiro é responsável pelo controle de dissipação numérica em baixas frequências e, de acordo com Li e Yu (2020), deve ser tomado no intervalo entre [0; 0.5] sendo 0 dissipação completa. Já o segundo deve situar-se no intervalo [0; 1.0] conforme os mesmos autores. Ambas as condições garantem a estabilidade incondicional do método.

4.4 *Three-parameter single-step method – TPSM*

Para Zhang e Xing (2019) os métodos de passo único e três parâmetros tendem a melhorar a dissipação numérica devido à introdução de parâmetros extras na equação de movimento. Por outro lado, o fato resulta em perda de precisão para as soluções de equações não homogêneas e dificuldade na resolução de equações não lineares. O método por eles proposto, de nome *Three-Parameter Single-Step Method (TPSM)*, satisfaz estritamente a equação de equilíbrio em cada passo de tempo e, segundo os autores, possui um desempenho favorável.

Neste trabalho, a formulação proposta por Zhang e Xing (2019) é apresentada de forma posicional para o Método dos Elementos Finitos.

4.4.1 Formulação

A Equação de Equilíbrio Dinâmico não-linear dada em (2.46) é resolvida numericamente considerando-se os vetores posição, velocidade e aceleração dados, respectivamente, por:

$$\mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{X}_t + \Delta t \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\mathbf{X}}_t + \frac{\Delta t^3}{6} [(1-\alpha)\ddot{\boldsymbol{\theta}}_t + \alpha\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{t+\Delta t}] \quad (4.62)$$

$$\dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \dot{\mathbf{X}}_t + \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} [\delta\ddot{\boldsymbol{\theta}}_t + (1-\delta)\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{t+\Delta t}] \quad (4.63)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = \ddot{\mathbf{X}}_t + \Delta t [(1-\gamma)\ddot{\boldsymbol{\theta}}_t + \gamma\ddot{\boldsymbol{\theta}}_{t+\Delta t}] \quad (4.64)$$

Zhang e Xing (2019) desenvolvem a solução da equação de movimento para o vetor intermediário $\boldsymbol{\theta}_t$ para, em seguida, atualizar as demais variáveis de estado (posição, velocidade e aceleração). Segundo os autores, $\boldsymbol{\theta}_t$ é utilizado apenas para prever variáveis de estado e ele mesmo não precisa satisfazer nenhuma equação de estado. Inclusive, utilizam-no como nulo no primeiro passo para se evitar uma nova condição inicial além do deslocamento (ou posição) e velocidade. Assim, a aceleração inicial pode ser calculada da forma convencional, Equação (2.45). Neste trabalho a equação de movimento é resolvida para as posições (como nos métodos descritos anteriormente), sob a justificativa de que, sendo o $\boldsymbol{\theta}$ no instante $t=0$ arbitrário, é conveniente que ele seja atualizado ao fim do passo de tempo e não definido no início, resolvendo de forma direta o problema da condição inicial. Além disso, não há necessidade de significativas mudanças no algoritmo iterativo já existente. Isolando-se $\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t}$ na Equação (4.62), tem-se:

$$\boldsymbol{\theta}_{t+\Delta t} = -\frac{6}{\alpha\Delta t^2} \dot{\mathbf{X}}_t - \frac{\boldsymbol{\theta}_t}{\alpha} + \boldsymbol{\theta}_t - \frac{6}{\alpha\Delta t^3} \mathbf{X}_t - \frac{3}{\alpha\Delta t} \ddot{\mathbf{X}}_t + \frac{6}{\alpha\Delta t^3} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \quad (4.65)$$

Levando-se a Equação (4.65) nas Equações (4.63) e (4.64), chega-se a:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = & -\frac{3\delta}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}_t + \dot{\mathbf{X}}_t - \frac{\delta\Delta t^2}{2\alpha} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_t + \frac{\Delta t^2}{2} \ddot{\boldsymbol{\theta}}_t - \frac{3\delta}{\alpha\Delta t} \mathbf{X}_t - \frac{3\delta\Delta t}{2\alpha} \ddot{\mathbf{X}}_t \\ & + \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_t + \frac{3\delta}{\alpha\Delta t} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.66)$$

$$\ddot{\mathbf{X}}_{t+\Delta t} = -\frac{6\gamma}{\alpha\Delta t}\dot{\mathbf{X}}_t - \frac{\Delta t\gamma}{\alpha}\boldsymbol{\theta}_t + \Delta t\boldsymbol{\theta}_t - \frac{6\gamma}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{X}_t + \frac{6\gamma}{\alpha\Delta t^2}\mathbf{X}_{t+\Delta t} - \frac{3\gamma}{\alpha}\ddot{\mathbf{X}}_t + \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (4.67)$$

de forma que o vetor de posição no instante atual $\mathbf{X}_{t+\Delta t}$ torna-se a única incógnita do problema. Substituindo-se as Equações (4.66) e (4.67) na Equação (2.46):

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\Delta t} &= \left. \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{6\gamma}{\alpha\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \\ &+ \mathbf{M} \mathbf{D}_M + \mathbf{C} \mathbf{D}_C + \frac{3\delta}{\alpha\Delta t} \mathbf{C} \mathbf{X}_{t+\Delta t} = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (4.68)$$

sendo os vetores \mathbf{D}_M e \mathbf{D}_C definidos como:

$$\mathbf{D}_M = \frac{6\gamma}{\alpha\Delta t} \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{\Delta t\gamma}{\alpha} \boldsymbol{\theta}_t - \Delta t \boldsymbol{\theta}_t + \frac{6\gamma}{\alpha\Delta t^2} \mathbf{X}_t + \frac{3\gamma}{\alpha} \ddot{\mathbf{X}}_t - \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (4.69)$$

$$\mathbf{D}_C = \frac{3\delta}{\alpha} \dot{\mathbf{X}}_t - \dot{\mathbf{X}}_t + \frac{\delta\Delta t^2}{2\alpha} \boldsymbol{\theta}_t - \frac{\Delta t^2}{2} \boldsymbol{\theta}_t + \frac{3\delta}{\alpha\Delta t} \mathbf{X}_t + \frac{3\delta\Delta t}{2\alpha} \ddot{\mathbf{X}}_t - \Delta t \ddot{\mathbf{X}}_t \quad (4.70)$$

e a matriz Hessiana do método, bem como o vetor de resíduos, a serem substituídos na Equação (2.58), são definidos, respectivamente, como:

$$\left. \frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{t+\Delta t} = \nabla g(\mathbf{X}^0) = \left. \frac{\partial^2 U_t}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{6\gamma}{\alpha\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3\gamma}{\alpha\Delta t} \mathbf{C} \quad (4.71)$$

$$\begin{aligned} g(\mathbf{X}^0) &= \left. \frac{\partial U_t}{\partial \mathbf{X}} \right|_{t+\Delta t} - \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \frac{6\gamma}{\alpha\Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \\ &+ \mathbf{M} \mathbf{D}_M + \mathbf{C} \mathbf{D}_C + \frac{3\delta}{\alpha\Delta t} \mathbf{C} \mathbf{X}_{t+\Delta t} \end{aligned} \quad (4.72)$$

Os três parâmetros do método, em função do raio espectral ρ_∞ , são dados por:

$$\alpha = \frac{6}{(\rho_\infty + 1)^3} \quad (4.73)$$

$$\delta = \frac{2\rho_\infty^2 - 5\rho_\infty + 11}{3(\rho_\infty + 1)^2} \quad (4.74)$$

$$\gamma = \frac{2 - \rho_\infty}{\rho_\infty + 1} \quad (4.75)$$

A atualização das variáveis velocidade, aceleração e vetor intermediário $\theta_{t+\Delta t}$ devem ser feitas a partir das Equações (4.63), (4.64) e (4.65), respectivamente.

4.5 Amortecimento proporcional de Rayleigh

A energia vibracional em um sistema estrutural ou mecânico é dissipada por vários mecanismos, como os efeitos térmicos causados pela repetição de ciclos de tensão e pelo atrito interno de um elemento deformado. Nestes sistemas, os mecanismos dissipativos dependem dos materiais e de suas interações (CIMELLARO e MARASCO, 2018). Assim, é de grande dificuldade a determinação dos coeficientes da matriz de amortecimento de forma direta a partir das dimensões do sistema estrutural, tamanhos dos seus membros e propriedades de amortecimento dos materiais estruturais usados. Logo, o amortecimento é geralmente especificado por valores numéricos para as taxas de amortecimento modais, e estes são suficientes para a análise de sistemas lineares com amortecimento clássico (CHOPRA, 2020).

Dentre as diferentes fontes de origem do amortecimento, Mead (1998), *apud* Géradin e Rixen (2015), cita:

- o amortecimento intrínseco ao material estrutural;
- atrito de Coulomb e perda de energia por impacto parcial entre as interfaces estruturais;
- energia perdida no ar circundante, água ou solo e nos fluidos confinados;
- atrito entre a estrutura e equipamentos montados, mobiliário, carga útil e pessoas;
- amortecimento viscoso entre superfícies deslizantes e lubrificadas de máquinas.

Felipe (2019) apresenta a formulação para consideração do amortecimento proporcional de Rayleigh na formulação posicional do método dos elementos finitos. Neste trabalho, a mesma será apresentada e implementada, e exemplos de literatura serão utilizados para sua validação.

A energia de amortecimento pode ser escrita da seguinte forma:

$$Q(t, \mathbf{X}) = \oint_{\gamma} \mathbf{F}^{\text{damp}} d\mathbf{X} \quad (4.76)$$

Na forma diferencial, a mesma energia de amortecimento assume a forma:

$$\delta Q(t, \mathbf{X}) = \frac{\partial Q(t, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \delta \mathbf{X} \quad (4.77)$$

onde o vetor força de amortecimento \mathbf{F}^{damp} equivale a:

$$\mathbf{F}^{\text{damp}} = \frac{\partial Q(t, \mathbf{X})}{\partial \mathbf{X}} \quad (4.78)$$

Como a força de amortecimento é função do vetor de velocidades $\dot{\mathbf{X}}$, pode-se fazer:

$$\mathbf{F}^{\text{damp}}(\dot{\mathbf{X}}) = \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \quad (4.79)$$

Então, a energia Q é dada por:

$$Q(t, \mathbf{X}) = \oint_{\gamma} \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} d\mathbf{X} = \oint_{\gamma} \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \frac{d\mathbf{X}}{dt} dt = \oint_{\gamma} \mathbf{C} \dot{\mathbf{X}} \dot{\mathbf{X}} dt \quad (4.80)$$

Supondo que os elementos de sistemas planos sejam submetidos aos mesmos efeitos de amortecimento, pode-se obter a matriz de amortecimento a partir da técnica do amortecimento proporcional, conforme a série de Caughey (PAULTRE, 2011; FELIPE, 2019). Para tal, assume-se que são conhecidos p valores de taxa de amortecimento modal ξ_i (i=1, 2, ..., p) para se determinar a matriz de amortecimento \mathbf{C} , da seguinte forma:

$$\mathbf{C} = \mathbf{M} \sum_{k=0}^{p-1} \zeta_k (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}_0)_k \quad (4.81)$$

e os coeficientes ζ_k , que devem satisfazer as condições de ortogonalidade (PAULTRE, 2011), sendo determinados por um sistema de p equações:

$$\xi_i = \frac{1}{2\omega_i} \left[\sum_{k=0}^{p-1} \varsigma_k \omega_i^{2k} \right] \quad (4.82)$$

Na Equação (4.81), \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{H}_0 a matriz Hessiana avaliada na configuração inicial, e ω_i as frequências naturais de vibração ($i=1, 2, \dots, p$). O método de Rayleigh é obtido para $p=2$, de modo que a Equação (4.81) fica:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} &= \mathbf{M} \left[\varsigma_0 (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}_0)_0 + \varsigma_1 (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}_0)_1 \right] = \mathbf{M} \left[\varsigma_0 \mathbf{I} + \varsigma_1 (\mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}_0)_1 \right] \Rightarrow \\ &\mathbf{C} = \varsigma_0 \mathbf{M} \mathbf{I} + \varsigma_1 \mathbf{M} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{H}_0 \Rightarrow \mathbf{C} = \varsigma_0 \mathbf{M} + \varsigma_1 \mathbf{H}_0 \end{aligned} \quad (4.83)$$

e os coeficientes ς_0 e ς_1 são obtidos a partir das frequências naturais de vibração ω_i e dos fatores de amortecimento ξ_i da seguinte maneira:

$$\xi_i = \frac{\varsigma_0}{2\omega_i} + \frac{\varsigma_1 \omega_i}{2} \quad (4.84)$$

Para que se tenha amortecimento proporcional somente à rigidez ($\varsigma_0=0$) ou à massa ($\varsigma_1=0$), os coeficientes ς_1 e ς_0 devem ser escritos, respectivamente, como:

$$\xi_i = \frac{\varsigma_1 \omega_i}{2} \Rightarrow \varsigma_1 = \frac{2\xi_i}{\omega_i} \quad (4.85)$$

$$\xi_i = \frac{\varsigma_0}{2\omega_i} \Rightarrow \varsigma_0 = 2\xi_i \omega_i \quad (4.86)$$

Observa-se na Figura 4.1 que, para a parcela associada à massa, a taxa de amortecimento é inversamente proporcional à frequência natural. Assim, a massa exerce a influência mais significativa para o amortecimento do sistema nas frequências naturais mais baixas. Por outro lado, a taxa de amortecimento aumenta linearmente com a frequência natural para a parcela associada à rigidez. Desta forma, a rigidez atua de forma mais preponderante no amortecimento do sistema para as frequências mais altas.

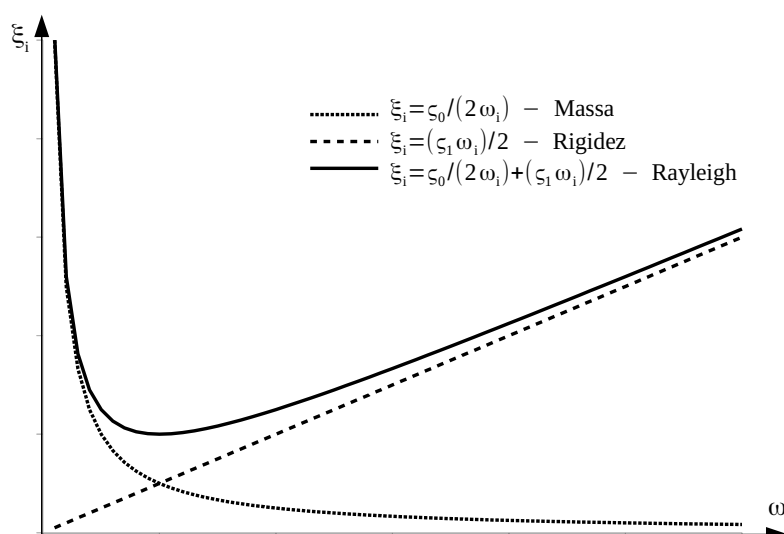


Figura 4.1: Variação da taxa de amortecimento modal em relação à frequência natural.

Nos casos em que a massa possui maior influência no amortecimento do sistema, pode-se obter a matriz de amortecimento fazendo-se:

$$\mathbf{C} = 2 \xi \omega_0 \mathbf{M} = 2 c_m \mathbf{M} \quad (4.87)$$

sendo c_m o coeficiente de amortecimento presente na Equação (2.44).

4.6 Exemplos

A seguir são apresentados 6 exemplos para validação dos métodos de integração temporal implementados, bem como da formulação para emprego do amortecimento proporcional de Rayleigh para o Método Posicional dos Elementos Finitos. Para o algoritmo de Newmark, os parâmetros γ e β usados em todos os casos foram, respectivamente, por 0.25 e 0.5.

4.6.1 Propagação de onda em uma barra engastada e livre carregada axialmente

O primeiro exemplo consiste em avaliar a propagação unidimensional de onda em uma barra engastada e livre. Este sistema é comumente encontrado na literatura para avaliação de algoritmos de integração numérica para avaliar sua capacidade de eliminação dos modos espúrios de vibração relativos às altas frequências. Pode-se citar, por exemplo, Li e Yu (2020), Noh e Bathe (2019a), Noh e Bathe (2019b), Malakiyeh *et al.* (2019) e Zhang (2020). A barra possui seção quadrada de 1m de lado, e comprimento $L=200\text{m}$. O módulo de elasticidade longitudinal vale 30MPa , e a massa específica 0.00073kg/m^3 . A carga, aplicada subitamente na extremidade, possui magnitude $P_0=10\text{kN}$. Foram usados 100 elementos finitos na discretização da barra (igual à das referências citadas), e a integração numérica no tempo foi realizada com $\Delta t=9.8658 \times 10^{-6}\text{s}$, e tolerância de convergência para o processo iterativo de 10^{-8} .

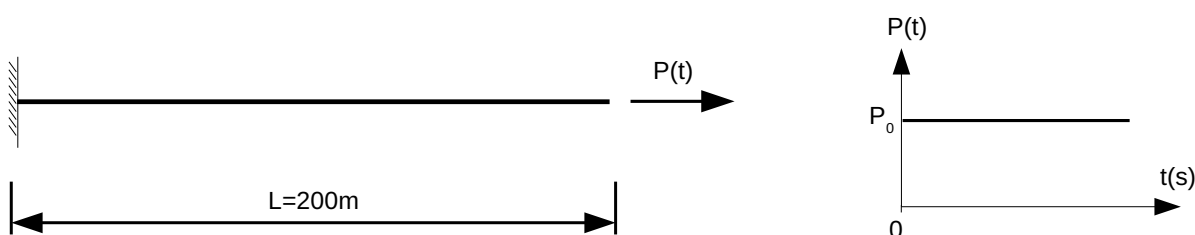


Figura 4.2: Barra engastada e livre sob uma carga axial súbita.

Na Figura 4.3 pode-se verificar oscilações numéricas espúrias, conforme também observado por Li e Yu (2020). Sua influência na resposta parece aumentar a cada período de tempo decorrido, o que pode ser observado na amplitude das oscilações em torno da resposta de referência nas posições 100m e 100.067m (Figura 4.4). Os algoritmos WBZ- α e Generalizado- α (cujas respostas estão sobrepostas) apresentam maior dificuldade em amortecer numericamente essas oscilações (Figura 4.3a), ao passo que o algoritmo HHT- α mostrou melhor desempenho. O algoritmo TSTSM ($\gamma=0.25$) sobrepõe a resposta TPSM, e Newmark mostra desempenho semelhante na dissipação da resposta, com uma pequena defasagem comparado aos dois últimos (Figura 4.4b).

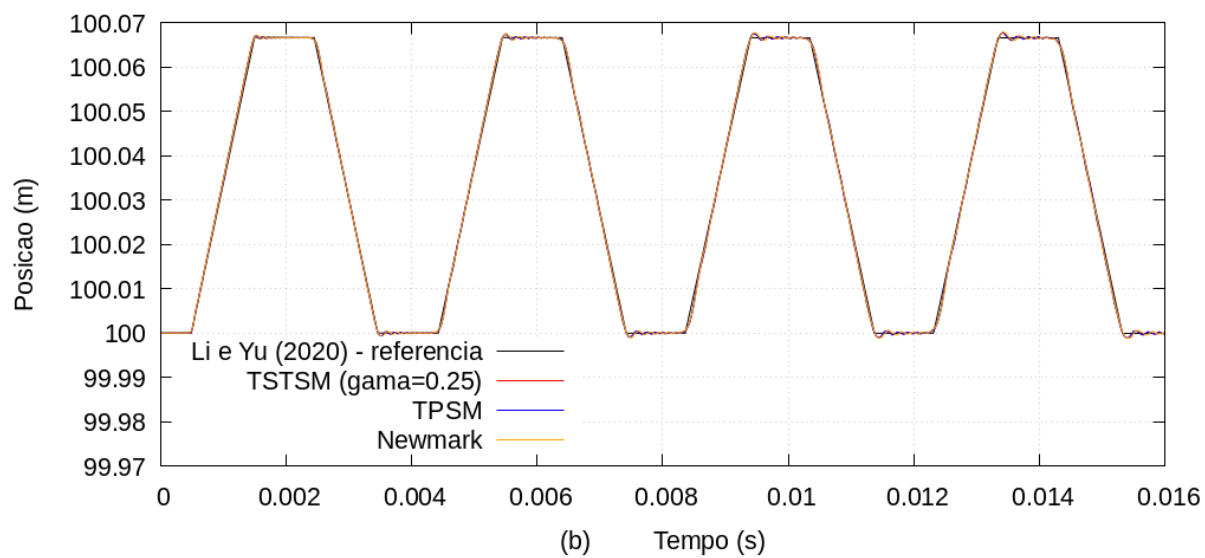
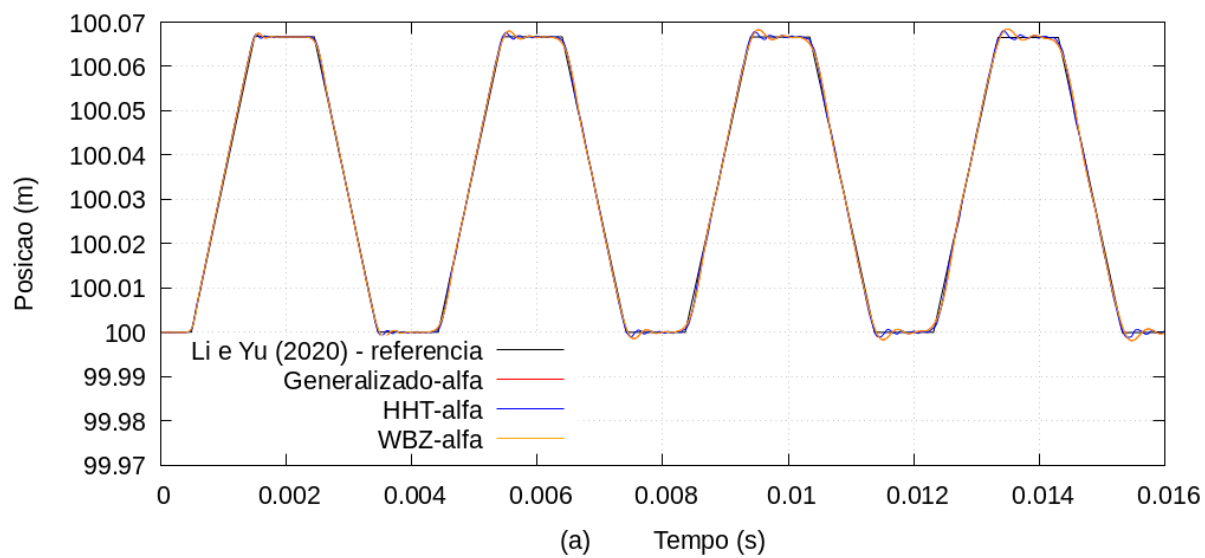


Figura 4.3: Posições horizontais do nó 51 (meio da barra) ao longo do tempo para os algoritmos implementados ($\rho_{\infty}=0.0$).

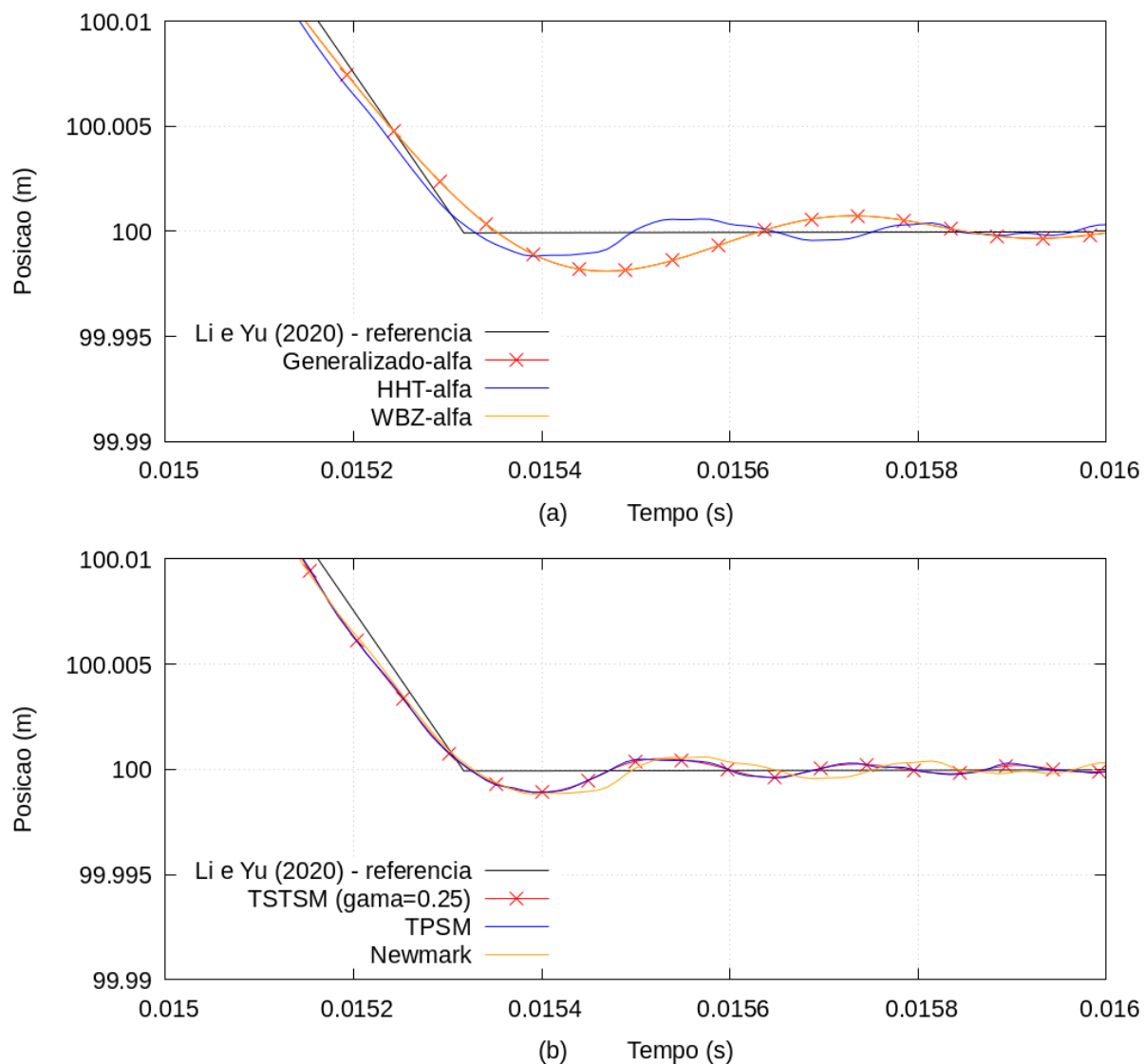


Figura 4.4: Posições horizontais do nó 51 (meio da barra) ao longo do tempo para os algoritmos implementados ($\rho_{\infty}=0.0$) – detalhe região final da Figura 4.3.

No que se refere à velocidade (Figura 4.5) ocorre o oposto: os algoritmos WBZ- α e Generalizado- α (repostas sobrepostas) mostram curvas mais suaves e decrescentes em torno da resposta de referência, enquanto o HHT- α mostra uma oscilação de caráter irregular, não amortecendo numericamente os modos espúrios (Figura 4.6a). Comportamento semelhante se observa nos algoritmos TPSM e Newmark (Figura 4.6b).

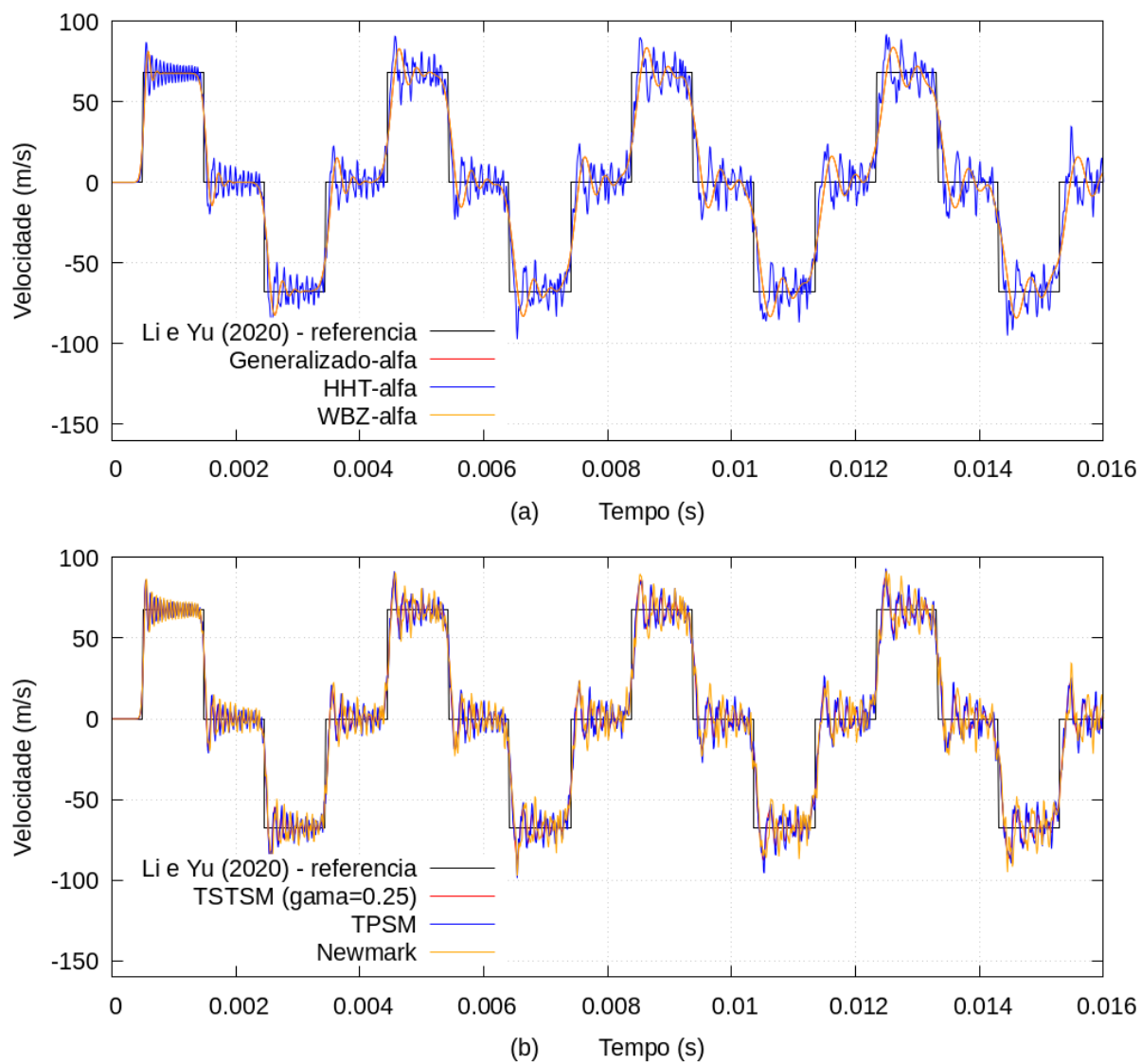


Figura 4.5: Velocidades do nó 51 (meio da barra) ao longo do tempo para os algoritmos implementados ($\rho_{\infty}=0.0$).

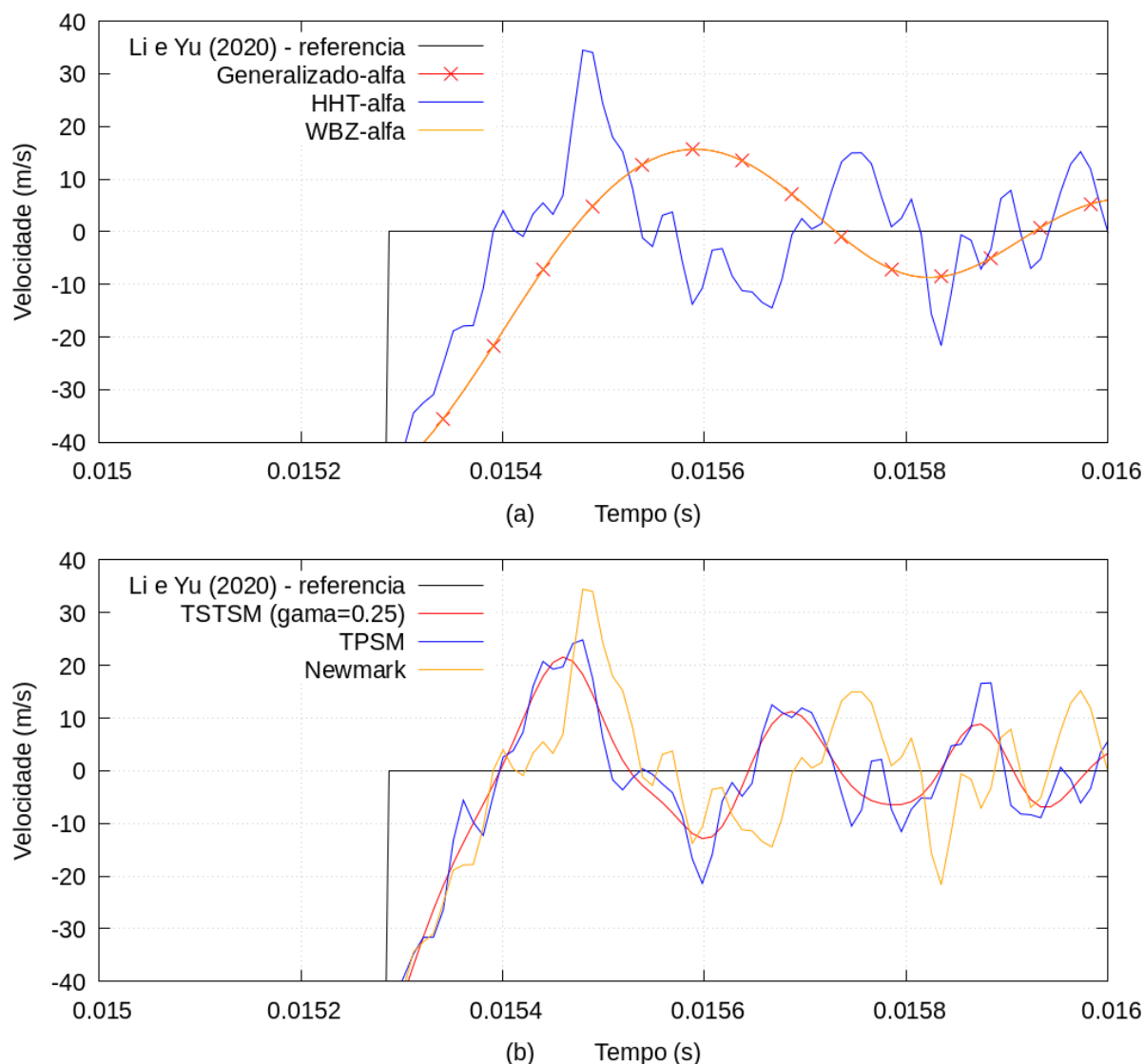


Figura 4.6: Velocidades horizontais do nó 51 (meio da barra) ao longo do tempo para os algoritmos implementados ($\rho_\infty=0.0$) – detalhe região final da Figura 4.5.

4.6.2 Barra biapojada carregada axialmente

O segundo exemplo, avaliado por Felipe (2019) e Paultre (2011), consiste em uma barra biapojada carregada axialmente por uma carga concentrada dinâmica de intensidade constante ($P_0=1\text{N}$) e aplicada de forma súbita (Figura 4.7). A geometria da barra foi obtida considerando-se a área A e o comprimento L iguais a 1m^2 e 1m , respectivamente. O módulo de elasticidade longitudinal E e a massa específica ρ são dados por 10kPa e 1kg/m^3 , respectivamente. A frequência natural fundamental de vibração do sistema vale $\omega_0=141.42136\text{rad/s}$ (obtida pelo Método de Iteração por Subespaços Vetoriais, apresentado no

Capítulo 3). Um único elemento foi utilizado para a modelagem, e um único grau de liberdade dinâmico foi avaliado. Para os algoritmos de integração numérica propostos, um incremento de tempo de 0.002s em cada passo de tempo foi utilizado, e os extremos do intervalo de possíveis valores para o raio espectral ρ_∞ foram utilizados, quais sejam, 0.0 (dissipação numérica) e 0.9 (contribuição das altas frequências na resposta dinâmica).

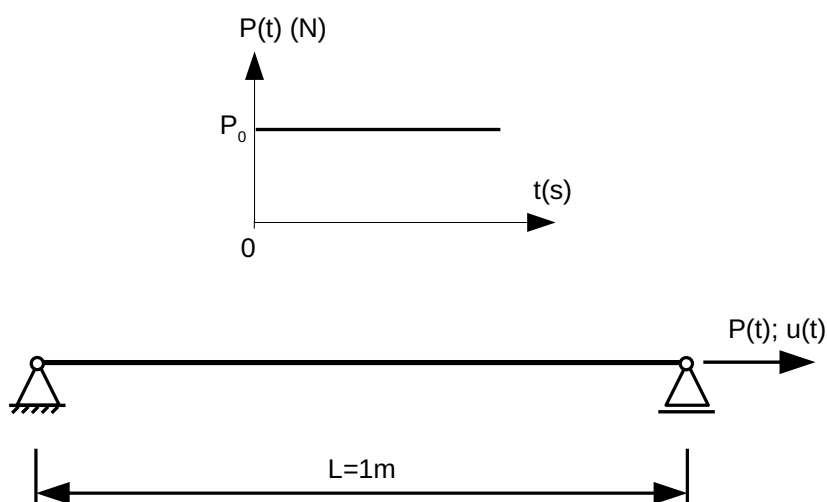


Figura 4.7: Barra biapoiada carregada axialmente por uma força súbita.

A resposta analítica para o sistema sem a presença de amortecimento físico é fornecida pela seguinte expressão, obtida via Integral de Duhamel (PAULTRE, 2011):

$$u(t) = \frac{P(t)}{(EA/L)} [1 - \cos(\omega_0 t)] \quad (4.88)$$

sendo EA/L a rigidez axial da barra.

Na presença do amortecimento físico, a resposta analítica, também obtida via Integral de Duhamel, é dada por (PAULTRE, 2011):

$$u(t) = \frac{P(t)}{(EA/L)} \left\{ 1 - e^{-\xi \omega_d t} \left[\cos(\omega_d t) + \frac{\xi \omega_0}{\omega_d} \sin(\omega_d t) \right] \right\} \quad (4.89)$$

sendo ξ o fator de amortecimento e ω_d a frequência de vibração amortecida, calculada como:

$$\omega_d = \omega_0 \sqrt{1 - \xi^2} \quad (4.90)$$

Observa-se na Figura 4.8a a mesma amplitude para todos os métodos em relação à resposta analítica para $\rho_\infty=0.0$, embora estes mesmos algoritmos apresentem alongamento do período, exceto o TSTSM ($\gamma=0.4$), conforme mostra a Figura (4.6b). Newmark e HHT- α tiveram o maior alongamento de período. Por outro lado, os algoritmos Generalizado- α e WBZ- α mostraram amplitude de decaimento significativa em relação à resposta analítica (Figuras 4.8c e 4.8d).

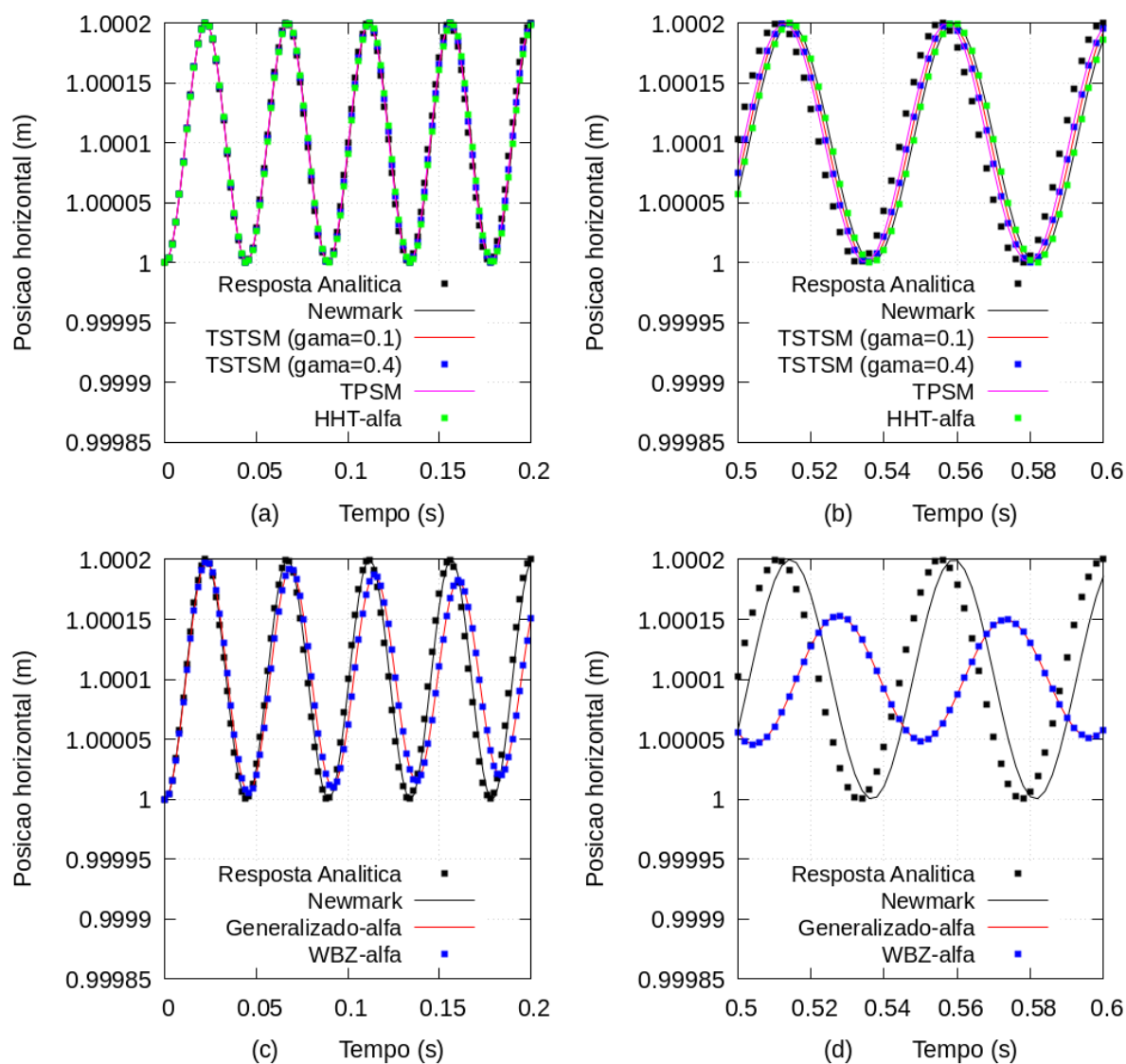


Figura 4.8: Posição versus tempo (sistema não amortecido) para a extremidade direita, com $\rho_\infty=0.0$.

Para $\rho_\infty=0.9$, contribuição das altas frequências na resposta induziu um aumento muito significativo no alongamento do período das respostas para o algoritmo o TSTSM ($\gamma=0.1$ e $\gamma=0.4$), como se pode notar na Figura (Figura 4.9a e 4.9b). O mesmo ocorreu com a amplitude de decaimento (algoritmos Generalizado e HHT), levando a um amortecimento numérico praticamente completo no intervalo de análise (Figura 4.9c e 4.9d).

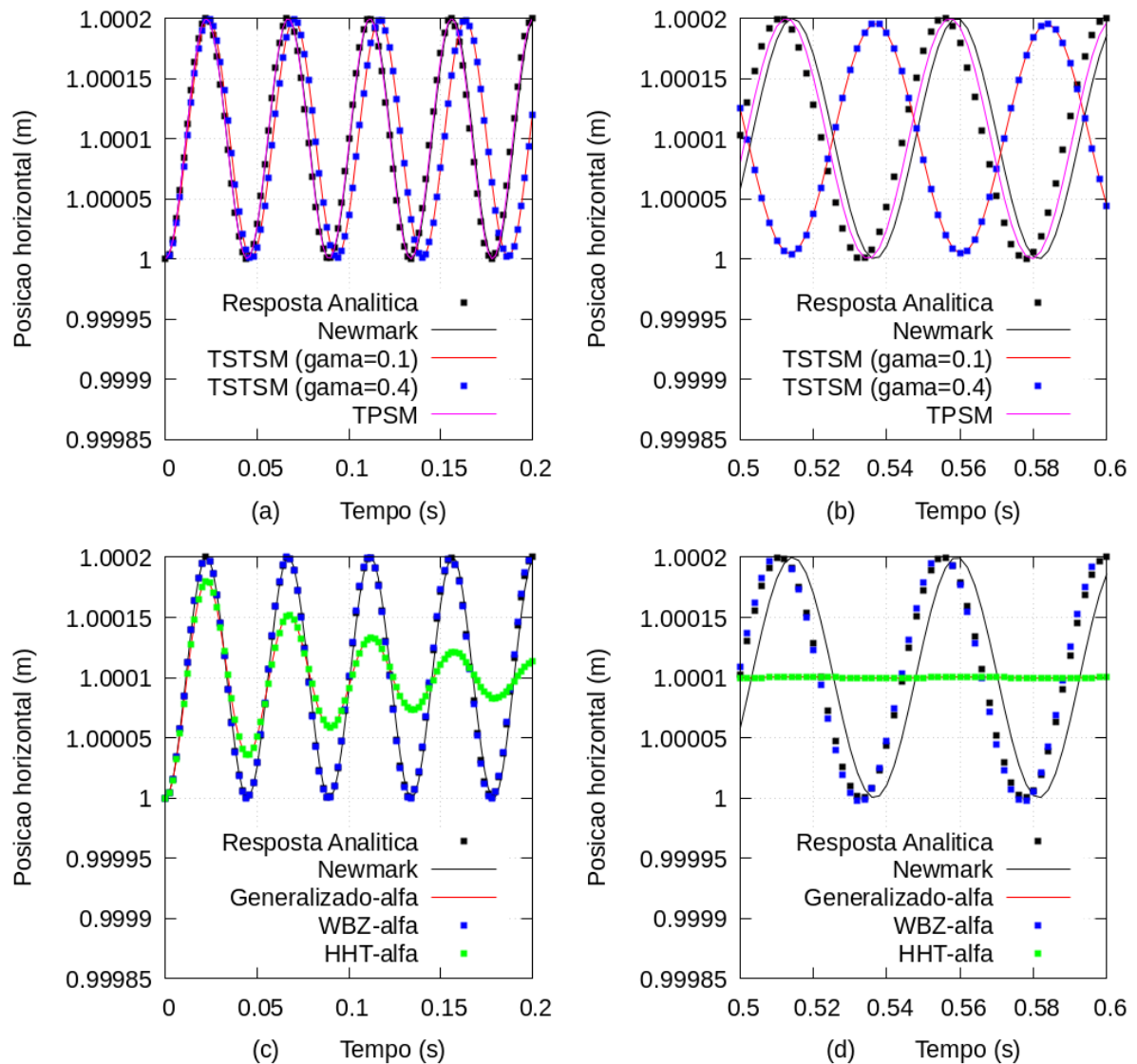


Figura 4.9: Posição versus tempo (sistema não amortecido) para a extremidade direita, com $\rho_\infty=0.9$.

4.6.3 Viga engastada e livre submetida a momento fletor

Este exemplo trata de uma viga engastada e livre submetida a um momento linear crescente em sua extremidade (Figura 4.10), sendo $M_0=2\pi EI/L$ e $M(t)=2M_0t$, e pode ser encontrado em Silva (2009), Crisfield (1997) e outros. Os dados geométricos usados para a modelagem da viga são: área $A=1\text{m}^2$, comprimento $L=10\text{m}$ e inércia $I=0.083\text{m}^4$. As características do material adotadas foram: módulo de elasticidade longitudinal $E=205\text{GPa}$ e massa específica $\rho=7830\text{kg/m}^3$. Foram ainda considerados 10 elementos finitos e tolerância de convergência no processo iterativo igual a 10^{-8} . Optou-se por avaliar três diferentes incrementos de tempo Δt : 10^{-3}s , 10^{-4}s e 10^{-5}s .

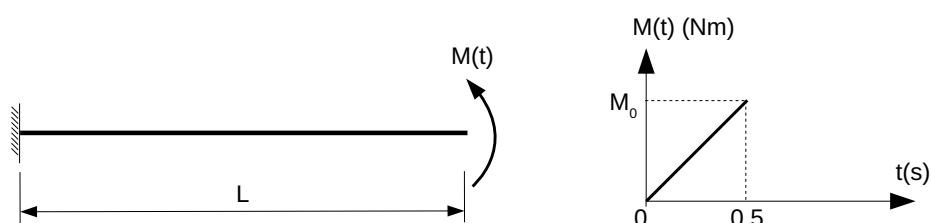


Figura 4.10: Viga engastada e livre submetida a momento linear crescente.

A Figura 4.11 mostra a posição versus tempo para a extremidade livre da viga engastada considerando todos os métodos de integração implementados, com $\rho_\infty=0.0$. Os resultados apresentam boa concordância com Silva (2009). Entretanto, divergências mais significativas pode ser notadas para $t>0.3\text{s}$, apesar do comportamento semelhante entre as curvas. Entre os métodos implementados, não houve diferença entre as respostas para os três valores de incremento de tempo Δt avaliados.

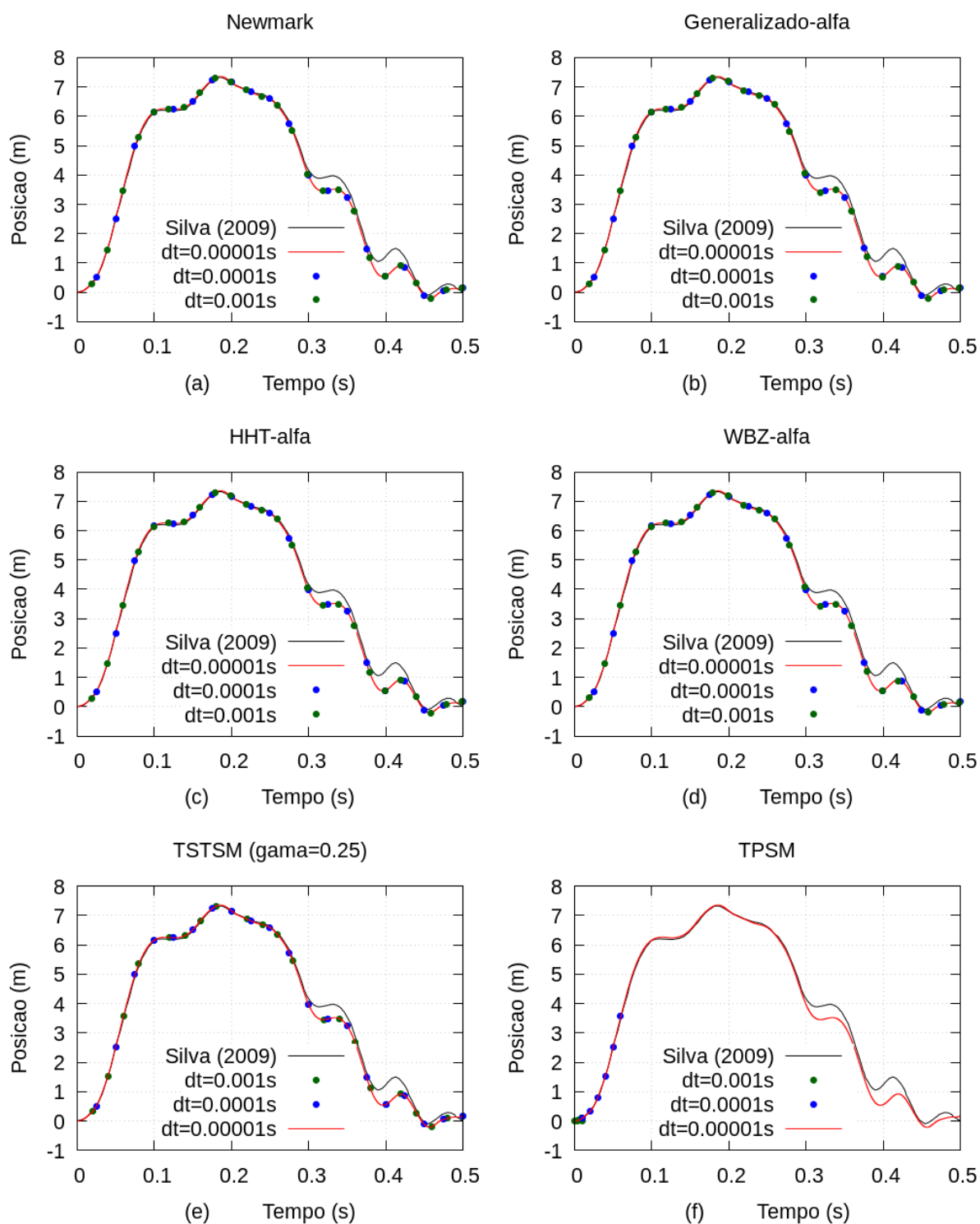


Figura 4.11: Posição vertical versus tempo para a extremidade livre da viga engastada para cada método de integração ($\rho_\infty=0.0$).

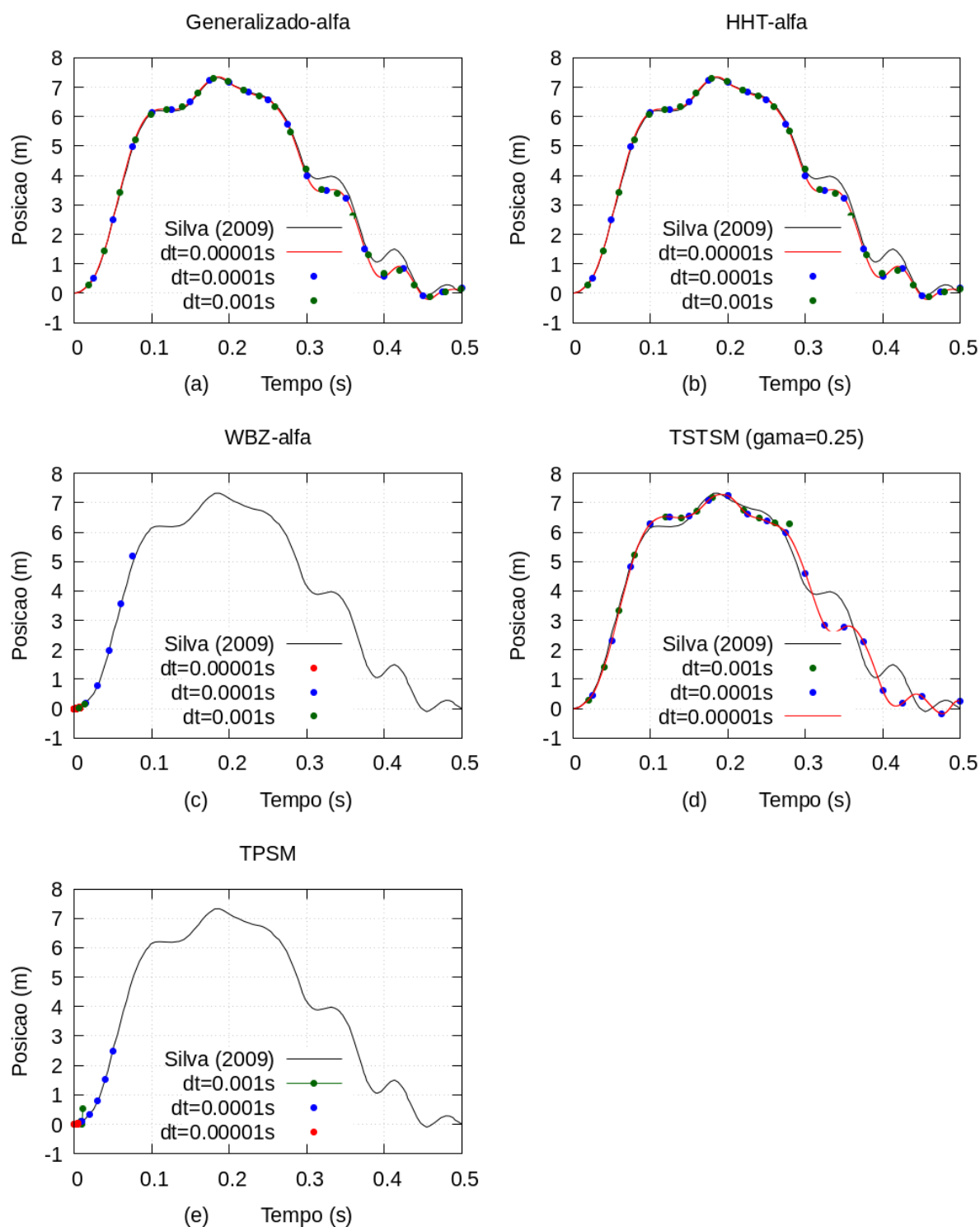


Figura 4.12: Posição vertical versus tempo para a extremidade livre da viga engastada para cada método de integração ($\rho_\infty=0.9$).

Na Figura 4.12 pode-se observar as respostas dos referidos métodos de integração, desta vez com $\rho_\infty=0.9$. Os algoritmos Generalizado- α e HHT- α apresentam respostas iguais no

intervalo de análise (Figuras 4.12a e 4.12b). Nota-se uma influência mais significativa do raio espectral na resposta apenas para o TSTSM ($\gamma=0.25$, Figura 4.12d), e pode ser vista a partir de $t \sim 0.1s$, se tornando mais acentuada depois de $t=0.3s$. Este mesmo algoritmo não apresentou resposta completa para $\Delta t=10^{-3}s$. Os algoritmos WBZ- α e TPSM falharam nos primeiros passos de tempo ou não apresentaram resposta completa (Figuras 4.12c e 4.12e).

4.6.4 Pórtico com ligação rígida

O pórtico proposto neste exemplo consiste em 2 barras ligadas rigidamente submetido a uma carga concentrada de variação harmônica (senoidal) no tempo (Figura 4.13). As barras possuem seção tubular circular, com diâmetro externo 60mm e espessura de parede 3mm. O ângulo θ possui o valor 30° . O módulo de elasticidade longitudinal e a massa específica são dados, respectivamente, pelos valores 200GPa e $7850kg/m^3$. A amplitude da carga P_0 vale 2kN, e a frequência de excitação ω da mesma foi adotada como sendo 43.41566rad/s, igual à frequência natural fundamental de vibração ω_0 (obtido via método de Iteração por Subespaços Vetoriais, capítulo III), de forma a induzir ressonância para o 1º modo de vibração. O incremento de tempo considerado foi $\Delta t=5 \times 10^{-5}s$ e a tolerância de convergência no processo iterativo igual a 10^{-8} .

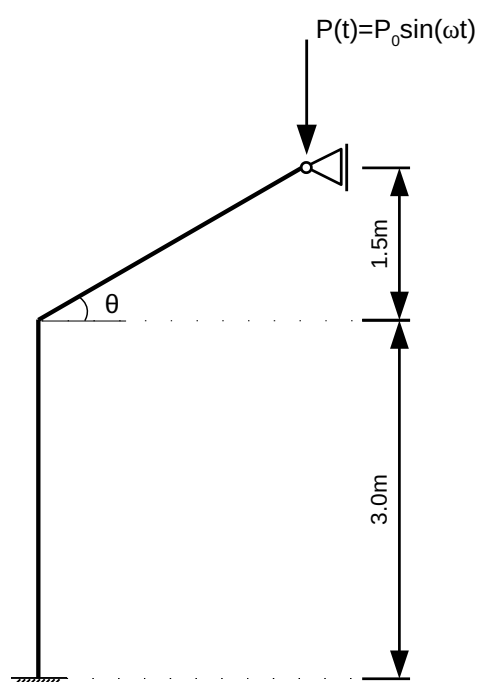


Figura 4.13: Pórtico com ligação rígida sob carga concentrada harmônica (senoidal).

Neste exemplo procura-se avaliar as respostas a partir do número de elementos utilizados no modelo para cada método de integração. As respostas de referência, obtidas pelo método de Newmark, consideram 8 e 16 elementos por barra. Três análises de discretização foram realizadas: 1 elemento por barra, 2 elementos por barra e 4 elementos por barra.

É importante salientar que a diferença no número de elementos usados na modelagem influencia na obtenção da frequência natural de vibração para o pórtico, na medida em que há a modificação nas matrizes de massa e Hessiana do sistema. Logo, para induzir a ressonância no primeiro modo, o carregamento usou a frequência de excitação correspondente à frequência natural fundamental de vibração para discretização com 4 elementos por barra. Assim, o carregamento aplicado não necessariamente acarreta ressonância nas demais malhas.

A resposta da posição vertical do nó onde atua a carga senoidal, com modelo composto por 1 elemento em cada barra, é praticamente a mesma para os métodos não-Newmark, com pequenas amplitudes, considerando $\rho_{\infty}=0.0$ (Figura 4.14a). Para $\rho_{\infty}=0.9$, nota-se semelhante comportamento destes mesmos algoritmos não-Newmark no mesmo intervalo, com exceção do esquema WBZ- α , que falhou na convergência já nos primeiros passos de tempo (Figura 4.14b). Na Figura (4.14c), o esquema TPSM apresentou falha na convergência em $t\sim 0.3s$, e falha já nos primeiros passos de tempo na Figura (4.14d). Nota-se que o algoritmo TSTSM exhibe pequena diferença nas amplitudes, bem como mudança de período, ao se considerar $\rho_{\infty}=0.0$ (Figura 4.14c) e $\rho_{\infty}=0.9$ (Figura 4.14d).

Porém, para 2 elementos por barra, as respostas dos algoritmos já se aproximam da amplitude e do período obtidas pelo método de Newmark com 8 e 16 elementos para $t < 0.9s$ (Figura 4.15a). Novamente, os algoritmos WBZ- α (Figura 4.15b) e TPSM (Figura 4.15c e 4.15d) falharam em obter a resposta no intervalo de tempo em análise (0 a 2s). De forma semelhante ao caso com 1 elemento por barra, o algoritmo TSTSM com $\rho_{\infty}=0.0$ (Figura 4.15c) ainda mostra menores amplitudes comparadas a $\rho_{\infty}=0.9$ (Figura 4.15d).

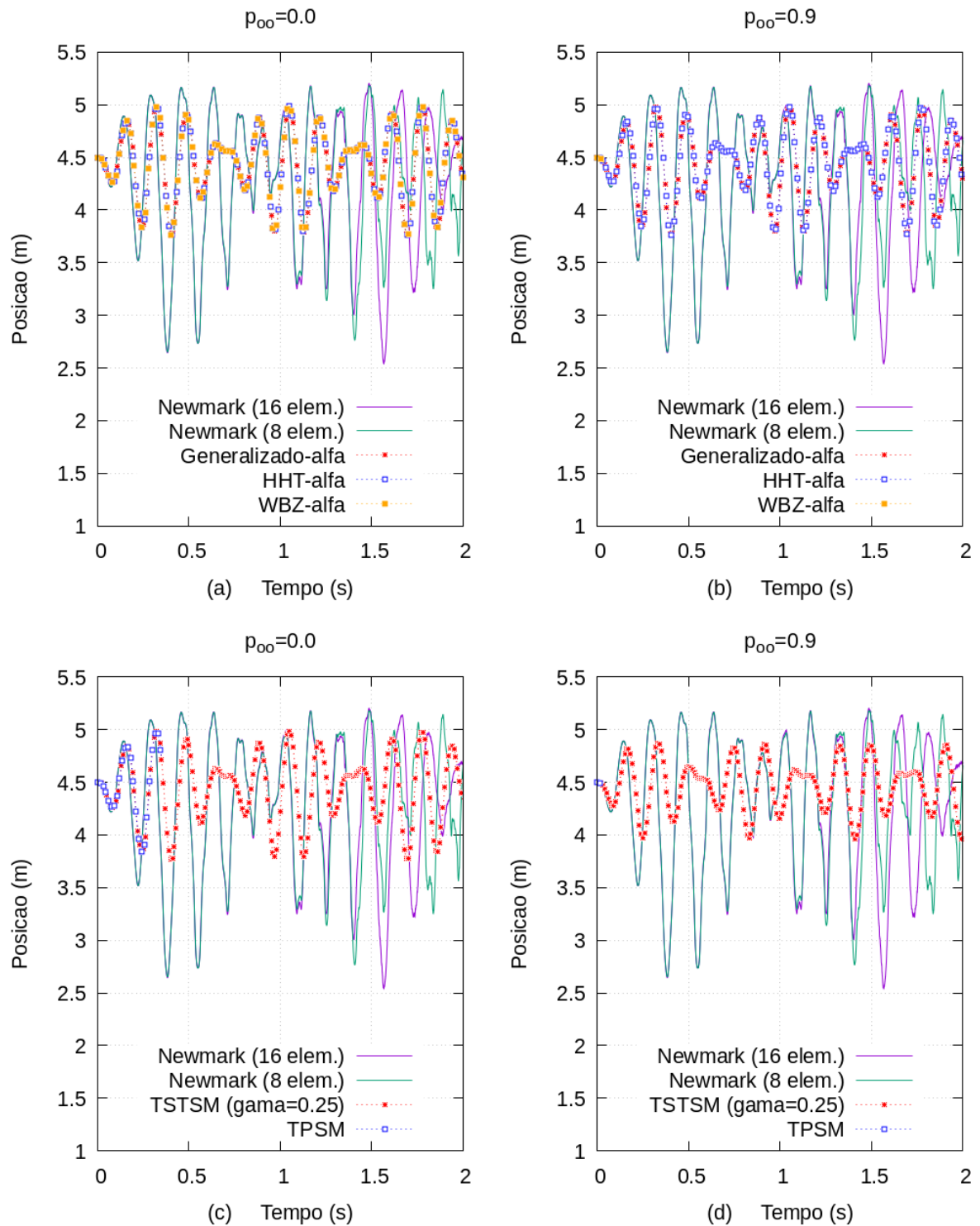


Figura 4.14: Posição vertical versus tempo para o nó submetido à carga senoidal (1 elem. por barra): (a) $\rho_{\infty}=0.0$; (b) $\rho_{\infty}=0.9$; (c) $\rho_{\infty}=0.0$; (d) $\rho_{\infty}=0.9$.

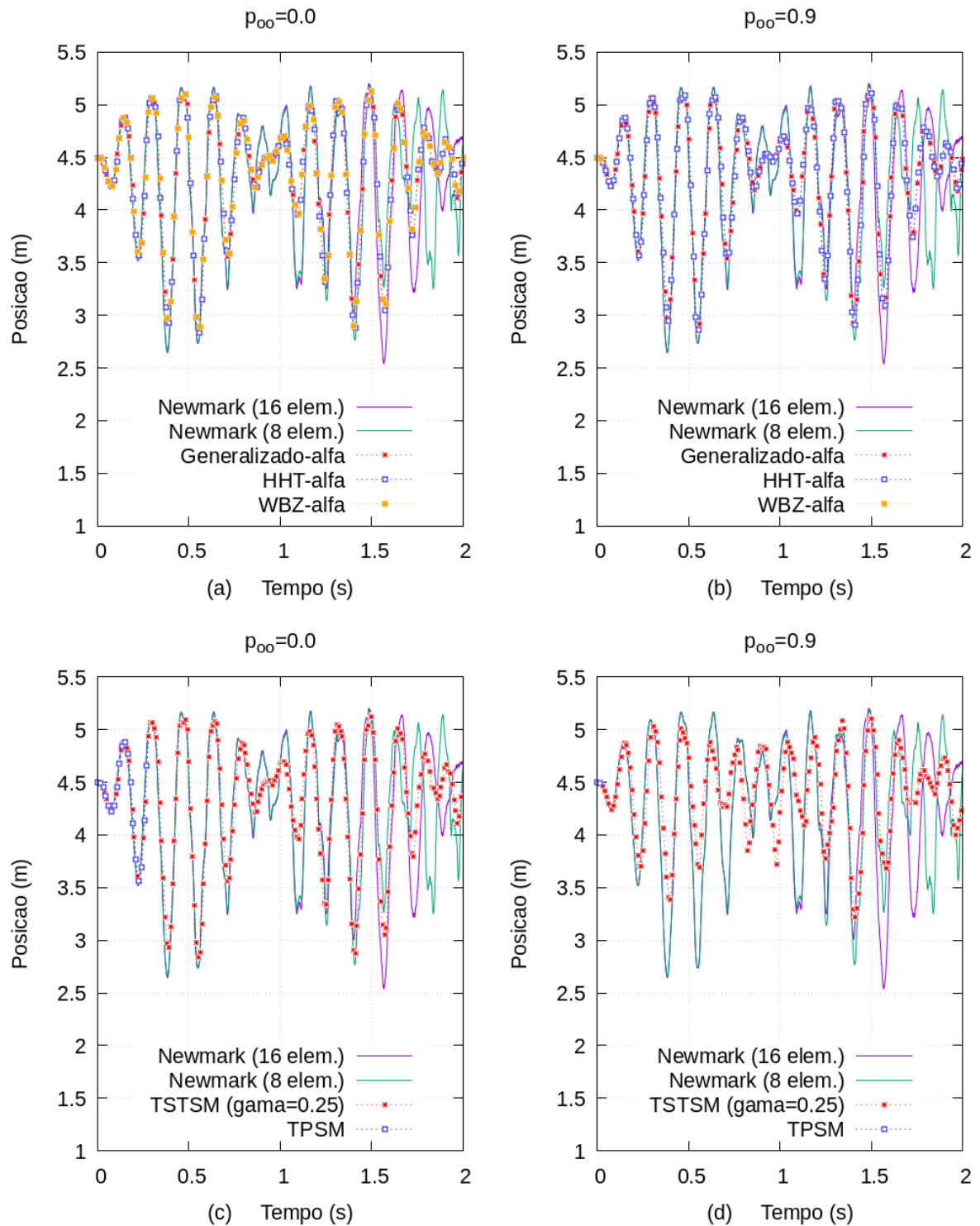


Figura 4.15: Posição vertical versus tempo para o nó submetido à carga senoidal (2 elem. por barra): (a) $\rho_{\infty}=0.0$; (b) $\rho_{\infty}=0.9$; (c) $\rho_{\infty}=0.0$; (d) $\rho_{\infty}=0.9$.

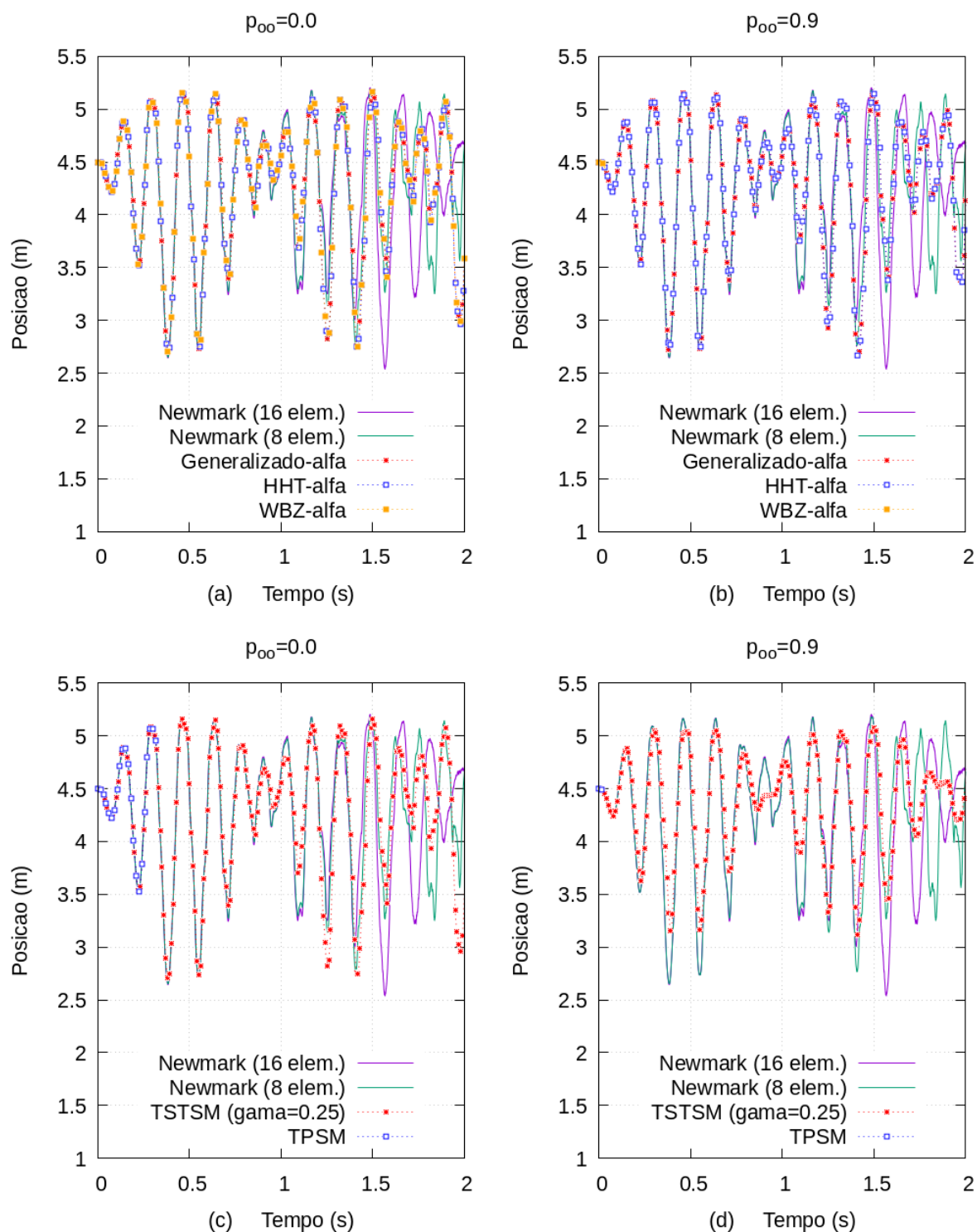


Figura 4.16: Posição vertical versus tempo para o nó submetido à carga senoidal (4 elem. por barra): (a) $\rho_{\infty}=0.0$; (b) $\rho_{\infty}=0.9$; (c) $\rho_{\infty}=0.0$; (d) $\rho_{\infty}=0.9$.

Finalmente, considerando 4 elementos por barra, tem-se respostas mais próximas da amplitude e do período obtidas pelo método de Newmark com 8 e 16 elementos (para $t < 1s$), e

8 elementos ($1s < t < 2s$) ao longo de quase todo o intervalo, com diferença imperceptível quanto ao valor do raio espectral ρ_∞ (Figura 4.16a e 4.16b). Algoritmos WBZ- α e TPSM exibem a mesma situação de falha relatada nos casos anteriores (Figuras 4.16b a 4.16d).

4.6.5 Arco senoidal abatido biarticulado com molas de rotação

Retoma-se novamente o caso do arco senoidal abatido biarticulado com molas de rotação apresentado no Cap. 2, item 2.4.1, deste trabalho. Na ocasião, a resposta amortecida foi obtida de forma proporcional à massa somente. Neste exemplo pretende-se testar a formulação do amortecimento proporcional de Rayleigh, com a contribuição da matriz Hessiana. Os dados do material, geometria e carga são os mesmos previamente utilizados. Neste exemplo, a taxa de amortecimento $\xi=0.010$ foi considerada nos 2 primeiros modos de vibração, cujas frequências naturais associadas são $\omega_1=246.88\text{rad/s}$ e $\omega_2=371.04\text{rad/s}$.

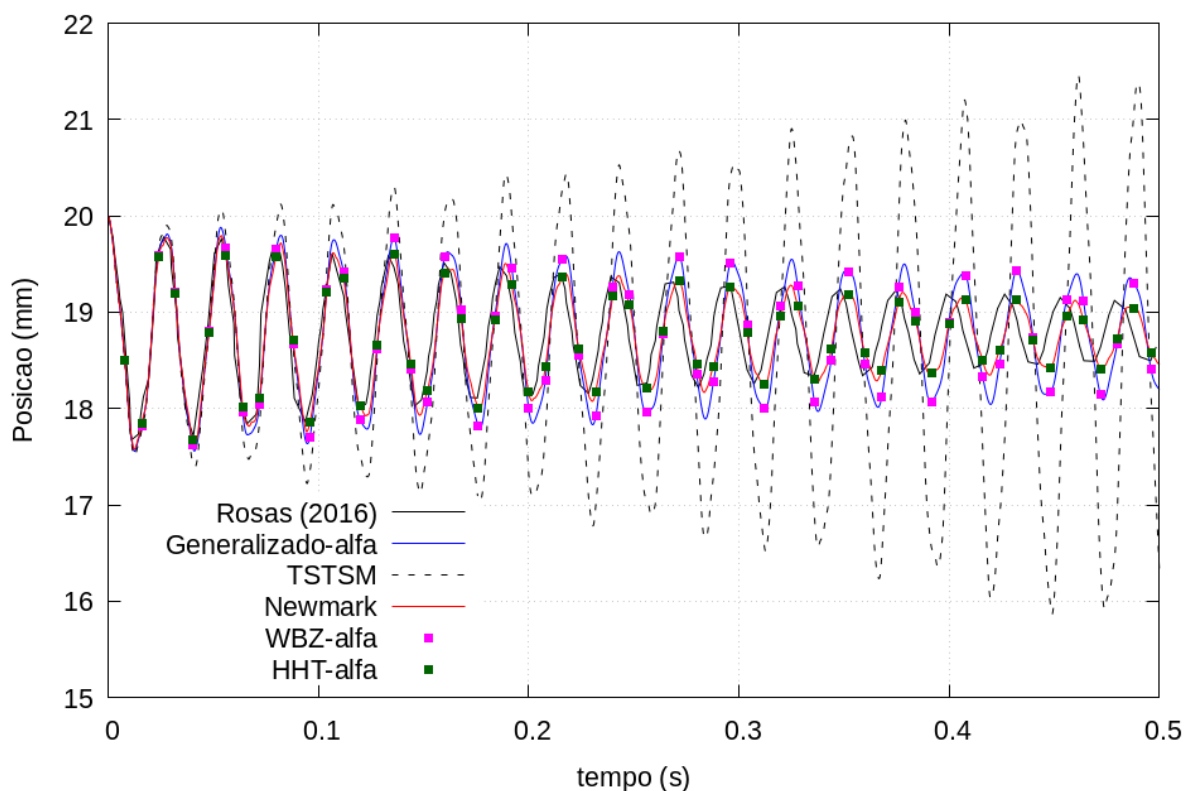


Figura 4.17: Posição vertical versus tempo considerando o amortecimento proporcional de Rayleigh (contribuição de \mathbf{M}) – $\rho_\infty=0.0$.

A Figura 4.17 mostra a Posição versus tempo para o nó central do arco abatido

biarticulado, considerando a contribuição da massa do sistema e raio espectral nulo para os algoritmos que o utilizam. Verifica-se que os algoritmos de Newmark e HHT- α se aproximam da resposta obtida por Rosas (2016), possivelmente por ter sido considerado a taxa de amortecimento para os 2 primeiros modos de vibração, diferentemente da análise feita no Cap. 2, item 2.4.1, onde o coeficiente de amortecimento c_m foi determinado pela Equação (2.44) para o 1º modo somente. No entanto, nota-se um alongamento de período em ambos métodos. Por outro lado, os algoritmos Generalizado- α e WBZ- α demonstram um amortecimento físico ocorrendo mais lentamente que nos algoritmos anteriores, apresentando assim uma amplitude ligeiramente superior.

Para o esquema TSTSM ($\gamma=0.25$), nota-se um aumento da amplitude com o passar do tempo, resultado inesperado comparando-se a resposta com a dos demais métodos.

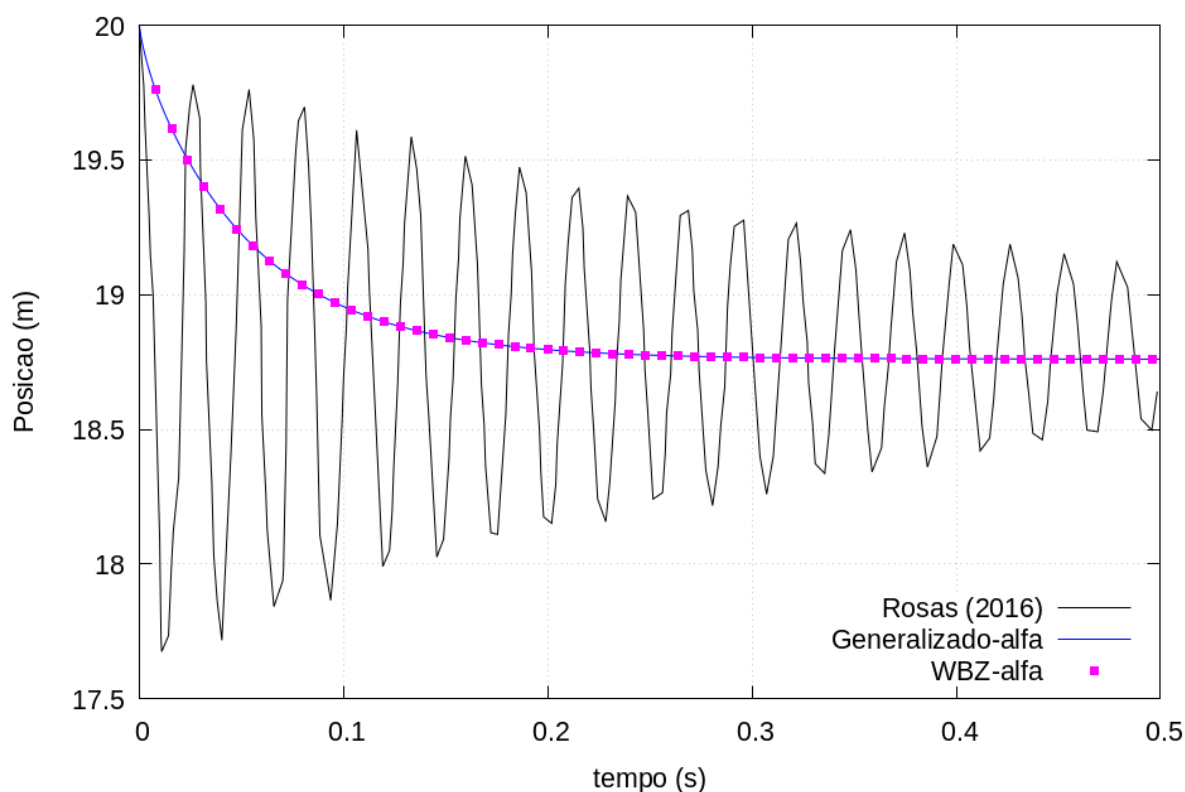


Figura 4.18: Posição vertical versus tempo considerando o amortecimento proporcional de Rayleigh (contribuição de \mathbf{M} e \mathbf{H}) – $\rho_\infty=0.0$.

Na Figura 4.18, relativa ao amortecimento proporcional de Rayleigh levando-se em conta a contribuição da massa e da Hessiana (com $\rho_\infty=0.0$), vê-se que a contribuição desta última gerou uma resposta no arco, para os esquemas Generalizado- α e WBZ- α , semelhante

àquelas associadas a um amortecimento crítico, com posição final próxima de 18.75mm.

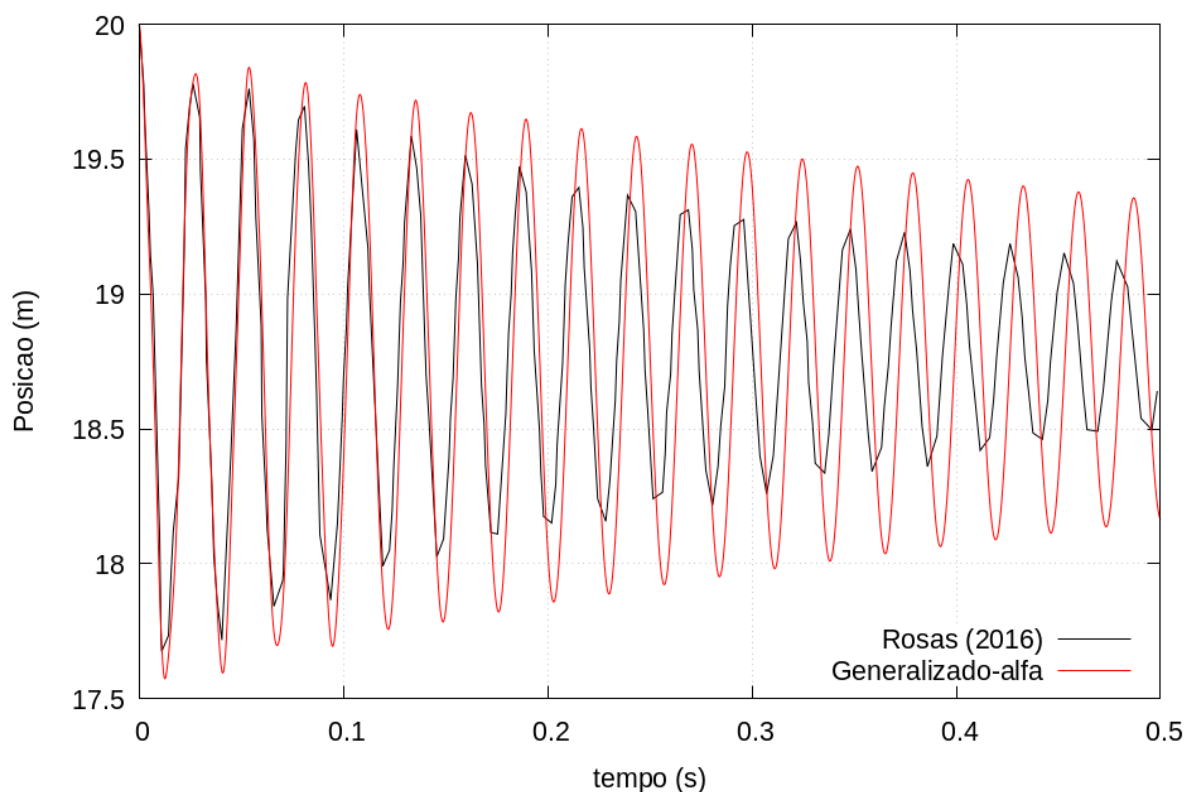


Figura 4.19: Amortecimento proporcional de Rayleigh (contribuição de \mathbf{M} e \mathbf{H}) – $\rho_{\infty}=0.9$.

Por outro lado, o algoritmo Generalizado- α mostra um decaimento da resposta de forma mais lenta que aquela obtida por Rosas (2016), ao se aplicar $\rho_{\infty}=0.9$ e considerar a contribuição da massa e da Hessiana no amortecimento, como mostra a Figura 4.19. A resposta exibe contornos mais suaves (contínuos) em seus extremos. O esquema WBZ- α apresentou falha na convergência nos primeiros passos de tempo.

De forma complementar, quanto aos diagramas de fase (Figura 4.20), o método Generalizado- α exibe uma configuração com aparente instabilidade numérica na análise, sem a ocorrência de *snap-through* ($\rho_{\infty}=0.0$). Quando se considera também a Hessiana no amortecimento, não há movimento oscilatório na resposta, sendo esta conduzida ao ponto de foco, cujo valor equivalente estático é aproximadamente 18.75mm. Ao se alterar o raio espectral para 0.9, após os primeiros ciclos de aparente instabilidade numérica, a resposta é conduzida de forma gradativa, lenta e numericamente estável ao ponto de foco.

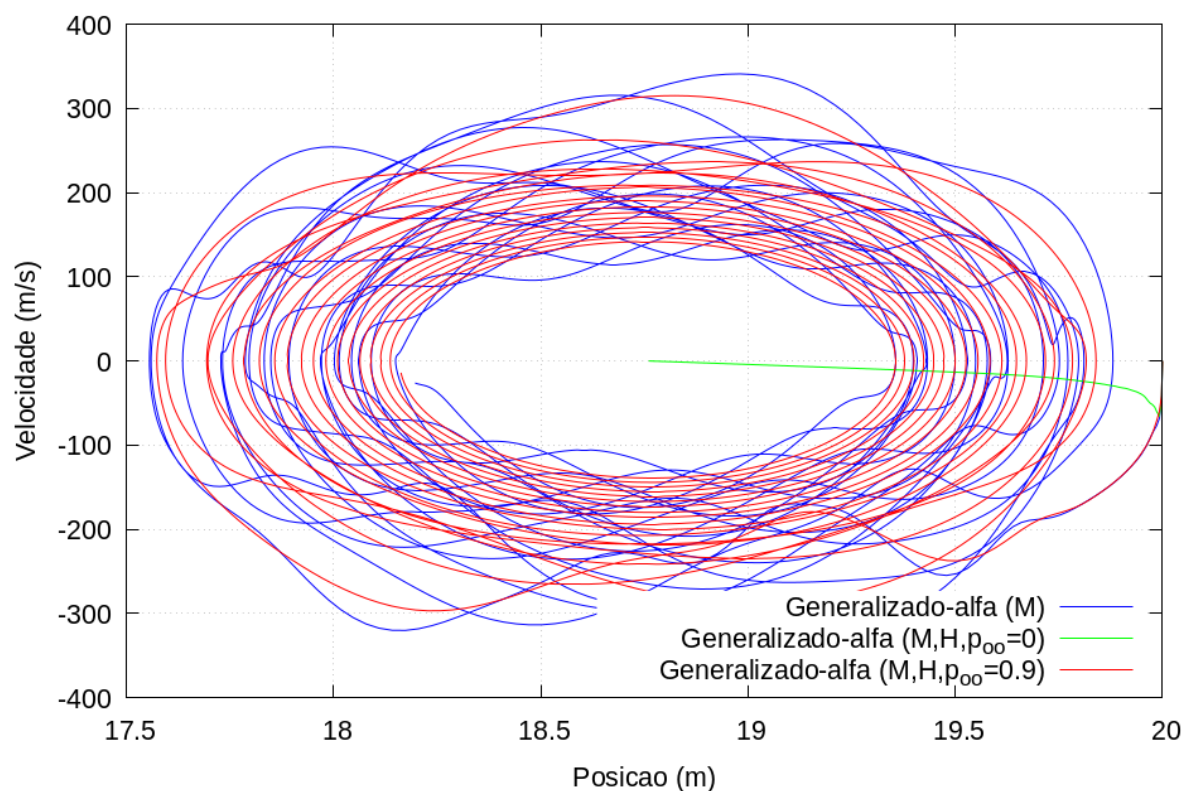


Figura 4.20: Diagramas de fase para o algoritmo Generalizado- α obtidos pela combinação das contribuições da massa, Hessiana e raio espectral.

4.6.6 Mecanismo de Peaucellier flexível

O exemplo a seguir é conhecido como Mecanismo de Peaucellier (Figura 4.21), e é responsável por transformar um movimento circular em movimento retilíneo (neste caso, vertical, no nó da extremidade direita). Em geral, o mesmo é composto por elementos rígidos. Greco (2004) realizou o estudo deste mecanismo com elementos flexíveis usando o algoritmo de Newmark e avaliando os desvios de trajetória na direção horizontal do nó da extremidade direita devidos à flexibilidade do mecanismo. Neste trabalho pretende-se verificar o mesmo considerando os algoritmos implementados, além do deslocamento vertical da mesma extremidade. O braço apresenta as seguintes características mecânicas e geométricas: $E=210\text{GPa}$, $I=4.32 \times 10^{-6}\text{m}^4$, $A=0.0036\text{m}^2$, $\rho=7700\text{Ns}^2/\text{m}^4$. As demais barras, por sua vez, foram modeladas com os seguintes valores: $E=210\text{GPa}$, $I=0.54 \times 10^{-7}\text{m}^4$, $A=0.0018\text{m}^2$ e $\rho=7700\text{Ns}^2/\text{m}^4$.

A estrutura foi discretizada em 45 elementos finitos, e é composta de nós duplos ou triplos na região das rótulas. O carregamento (I) apresenta mudança no sentido de aplicação,

de forma a amplificar as vibrações nos elementos estruturais, e o carregamento (II) permanece constante ao longo de toda a análise (Figura 4.21). O intervalo de tempo considerado foi $\Delta t=10^{-3}$ s, e a tolerância para a convergência no processo iterativo foi 10^{-8} .

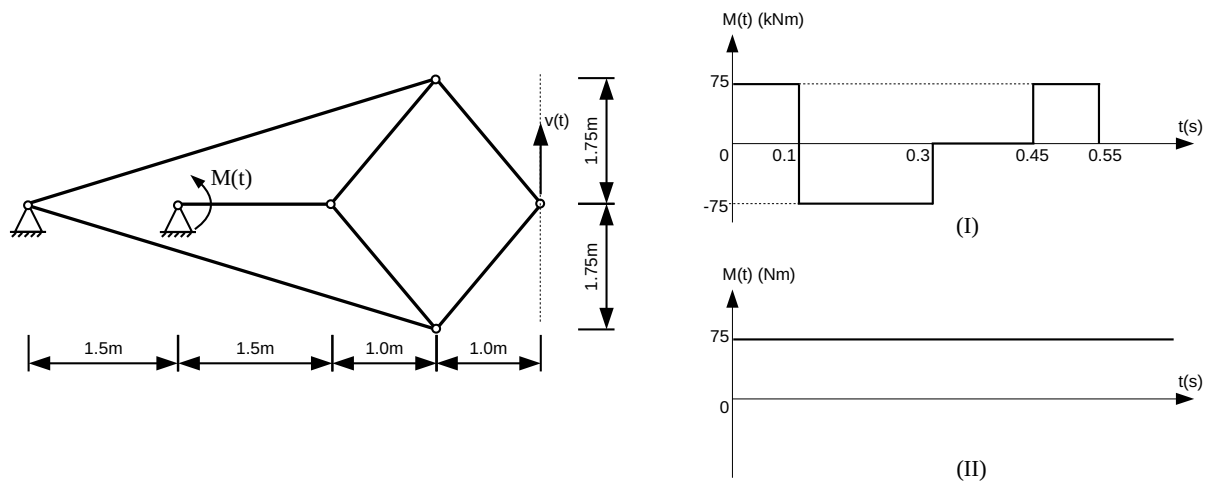


Figura 4.21: Mecanismo de Peaucellier submetido a um momento $M(t)$ em duas diferentes Posição versus tempo (sistema não amortecido) com $\rho^\infty=0.0$.

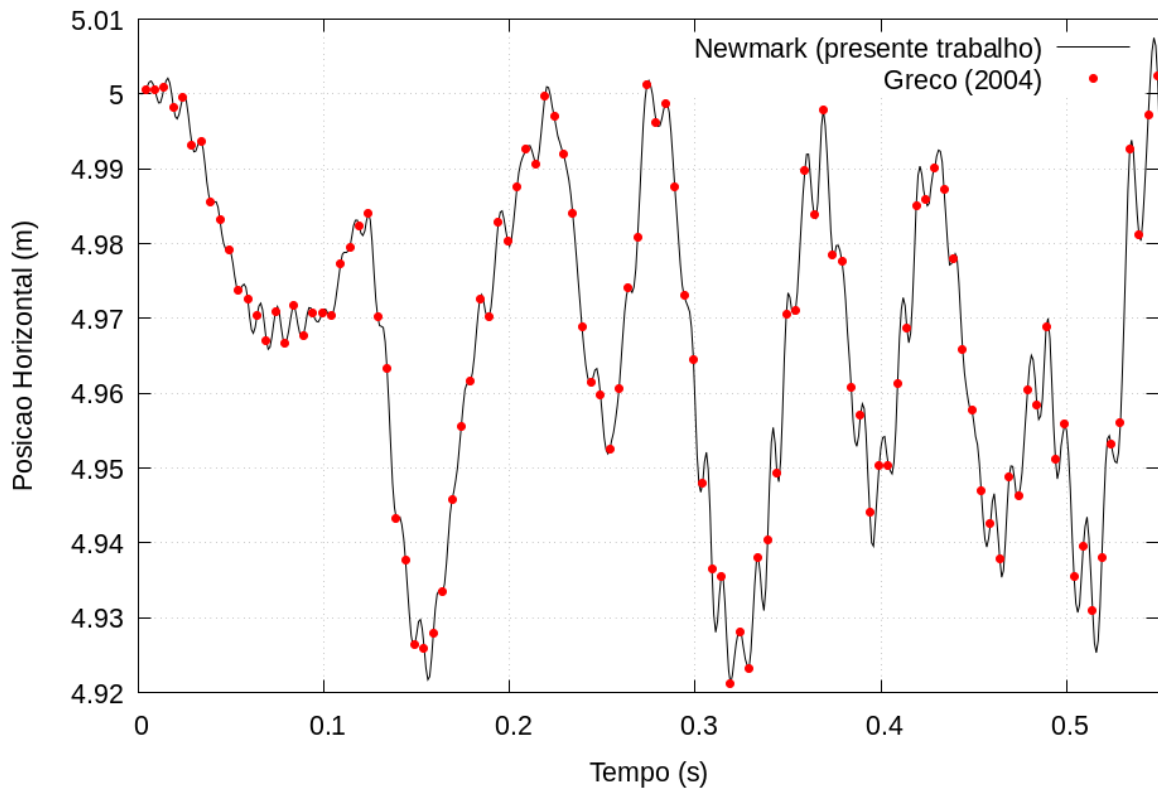


Figura 4.22: Desvio horizontal versus tempo (nó extremo direito) para o Mecanismo de Peaucellier – Carregamento (I).

Na Figura 4.22 verifica-se excelente concordância entre Greco (2004) e o presente trabalho. No intervalo analisado, a amplitude do desvio possui valor aproximado de 0.08m para o método de Newmark, o que pode ser inadequado em máquinas de alta precisão. Já na Figura 4.23a, percebe-se que a resposta obtida via Newmark demonstra um comportamento oscilatório, diferentemente dos métodos Generalizado- α e WBZ- α , cujas respostas são mais suaves, mesmo sem a contribuição das altas frequências ($\rho_\infty=0.0$). Este fato sugere um melhor desempenho destes algoritmos em relação a Newmark. A resposta do algoritmo HHT- α coincide com a do algoritmo de Newmark neste caso.

Considerando maior participação das altas frequências na resposta ($\rho_\infty=0.9$), ainda para o Carregamento (I), verifica-se um amortecimento numérico na resposta obtida pelos algoritmos Generalizado- α e HHT- α , reduzindo a amplitude dos desvios com o passar do tempo, tendo Newmark como referência (Figura 4.23b).

Por outro lado, alguns algoritmos não apresentaram respostas completas, como o TPSM, cujos incrementos não alcançaram 0.01s (Figura 4.23a). Outros, ainda, falharam na convergência já no primeiro processo iterativo, como o WBZ- α ($\rho_\infty=0.9$), o TSTSM (para todos os parâmetros propostos) e o TPSM ($\rho_\infty=0.9$).

Considerando a análise com o Carregamento (II), para o raio espectral nulo, os algoritmos HHT- α e Newmark apresentam instabilidade numérica a partir de $t\sim 4.6s$, e divergem entre si a partir de $t\sim 6.4s$. Os esquemas Generalizado- α e WBZ- α exibem o mesmo comportamento ao longo de todo o intervalo de análise, com uma pequena instabilidade entre 7.4s e 7.8s. Os demais algoritmos não foram capazes de fornecer a resposta para os dados considerados (Figura 4.24a).

Já para raio espectral $\rho_\infty=0.9$, a posição vertical limite se mantém em 4m para os algoritmos Generalizado- α e HHT- α , e os mesmos apresentam resposta em curva suave no intervalo analisado, porém exibindo decaimento na amplitude (Figura 4.24b).

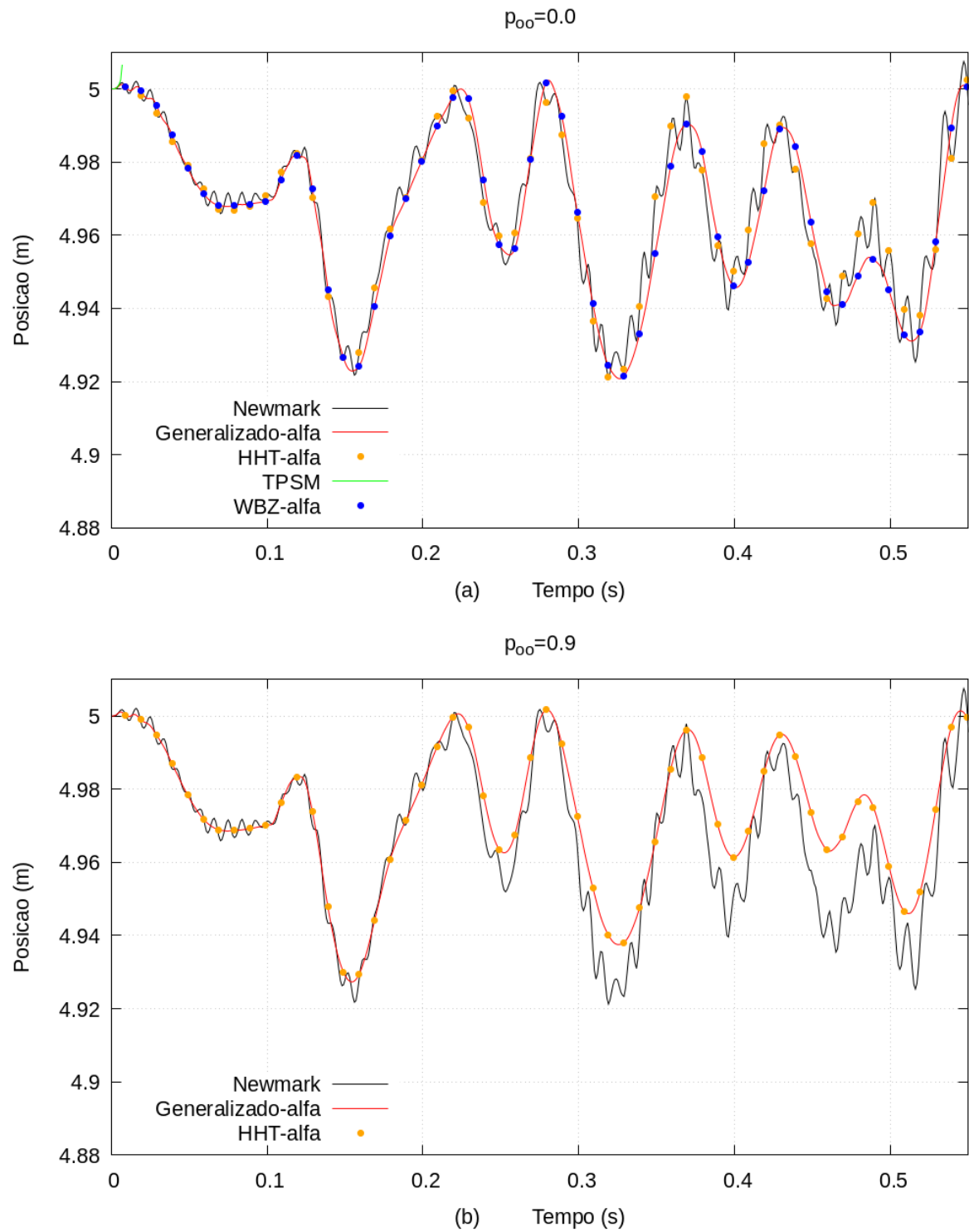


Figura 4.23: Desvio horizontal versus tempo (nó extremo direito) para o Mecanismo de Peaucellier usando diferentes algoritmos de integração numérica – Carregamento (I).

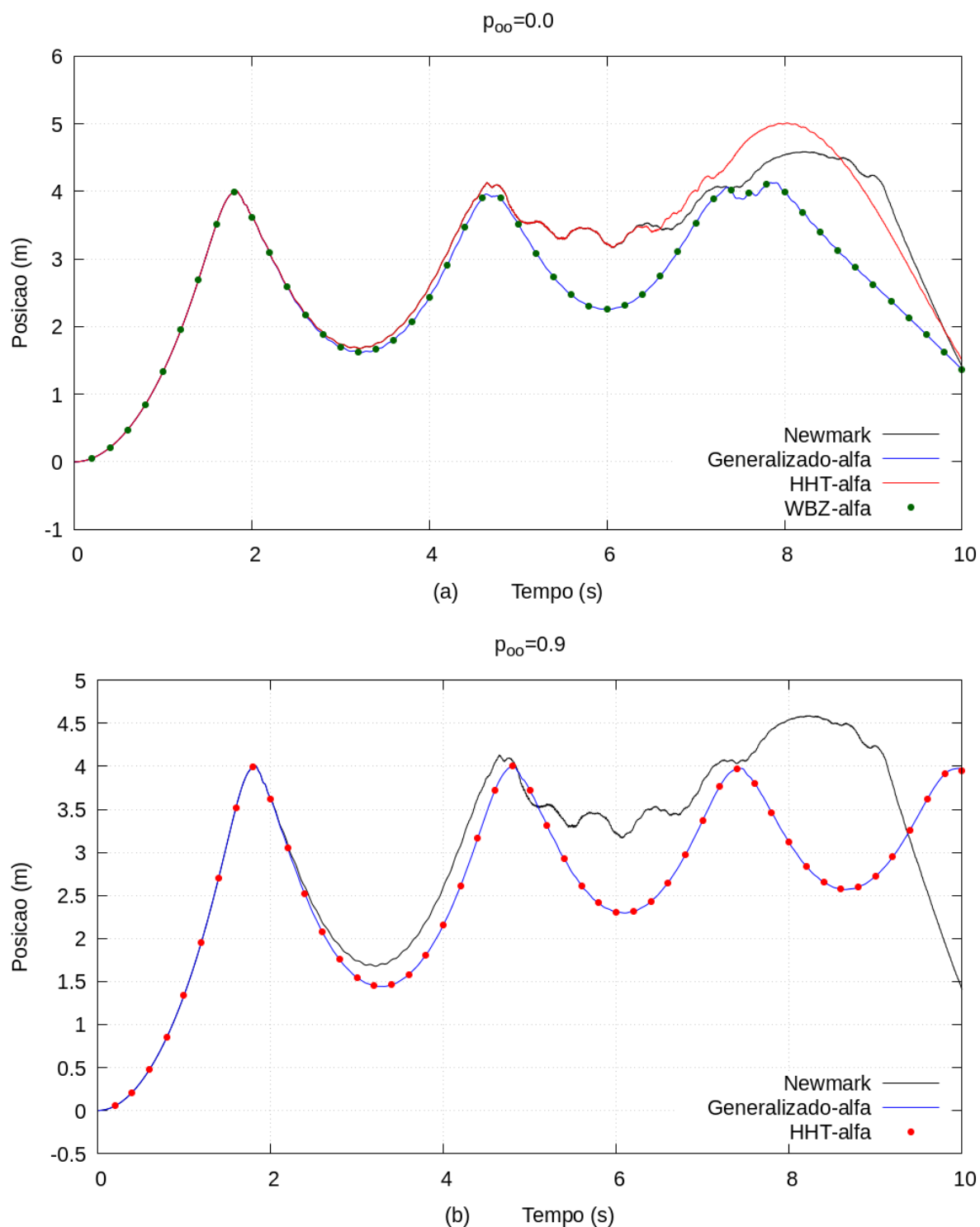


Figura 4.24: Posição vertical versus tempo (nó extremo direito) para o Mecanismo de Peaucellier usando diferentes algoritmos de integração numérica – Carregamento (II).

Considerando $\rho_{oo}=0.0$, também para o Carregamento (II), nota-se que os métodos Newmark, Generalizado- α , WBZ- α e HHT- α apresentam desvios horizontais significativos na

resposta, provavelmente por instabilidade numérica (Figuras 4.25a e 4.25b). A resposta do método HHT- α sugere ainda uma trajetória em arco do nó extremo direito (Figura 4.25a).

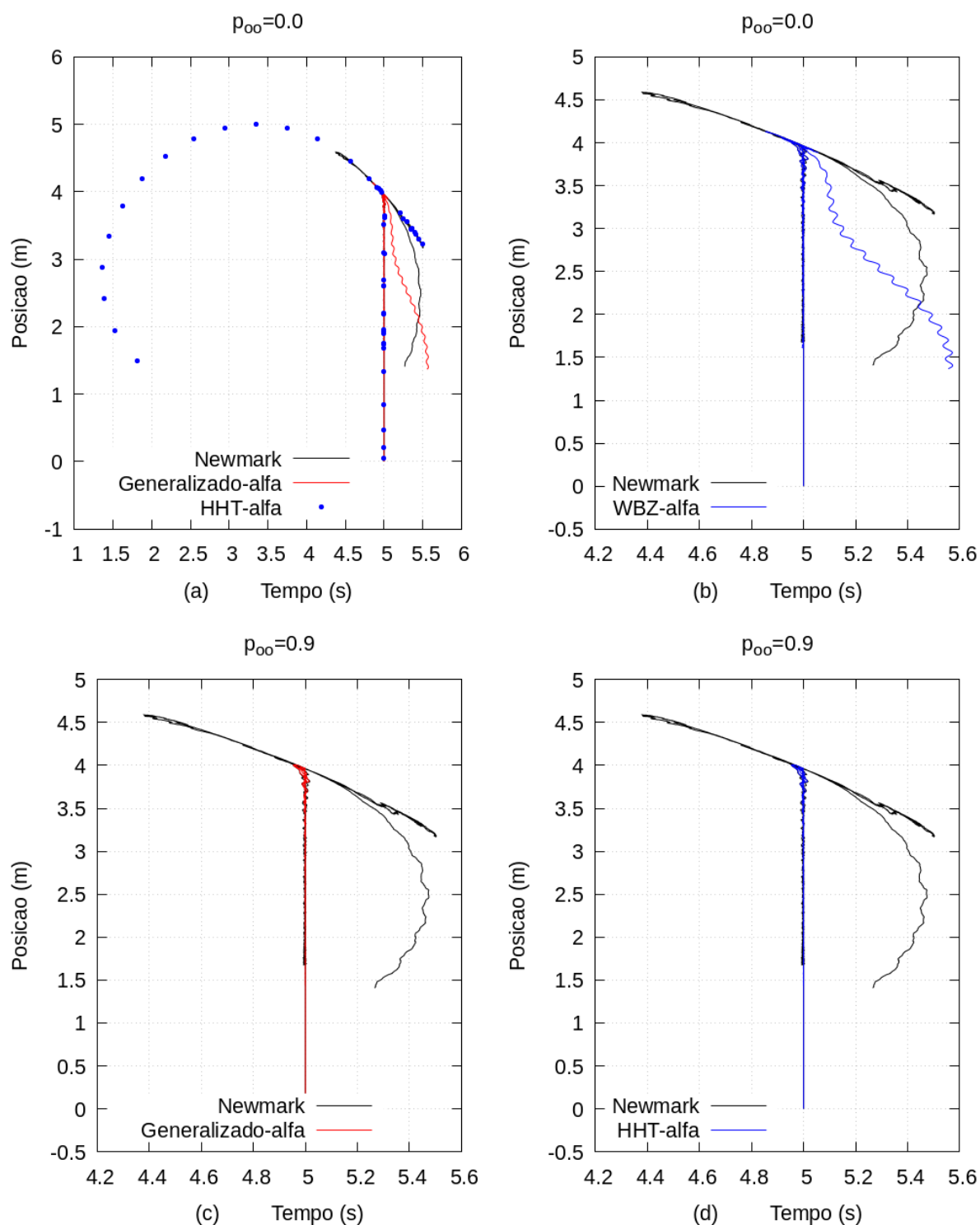


Figura 4.25: Trajetória no plano do nó extremo direito ao longo do tempo para o Mecanismo de Peaucellier usando diferentes algoritmos de integração numérica – Carregamento (II).

Para $\rho_\infty=0.9$, a trajetória no plano do nó direito permanece vertical, com pequenos desvios próximos a 4m, para os métodos Generalizado- α e HHT- α , o que é desejável para este mecanismo (Figuras 4.25c e 4.25d). Provavelmente os modos de vibração relacionados às frequências mais altas contribuem significativamente para a resposta.

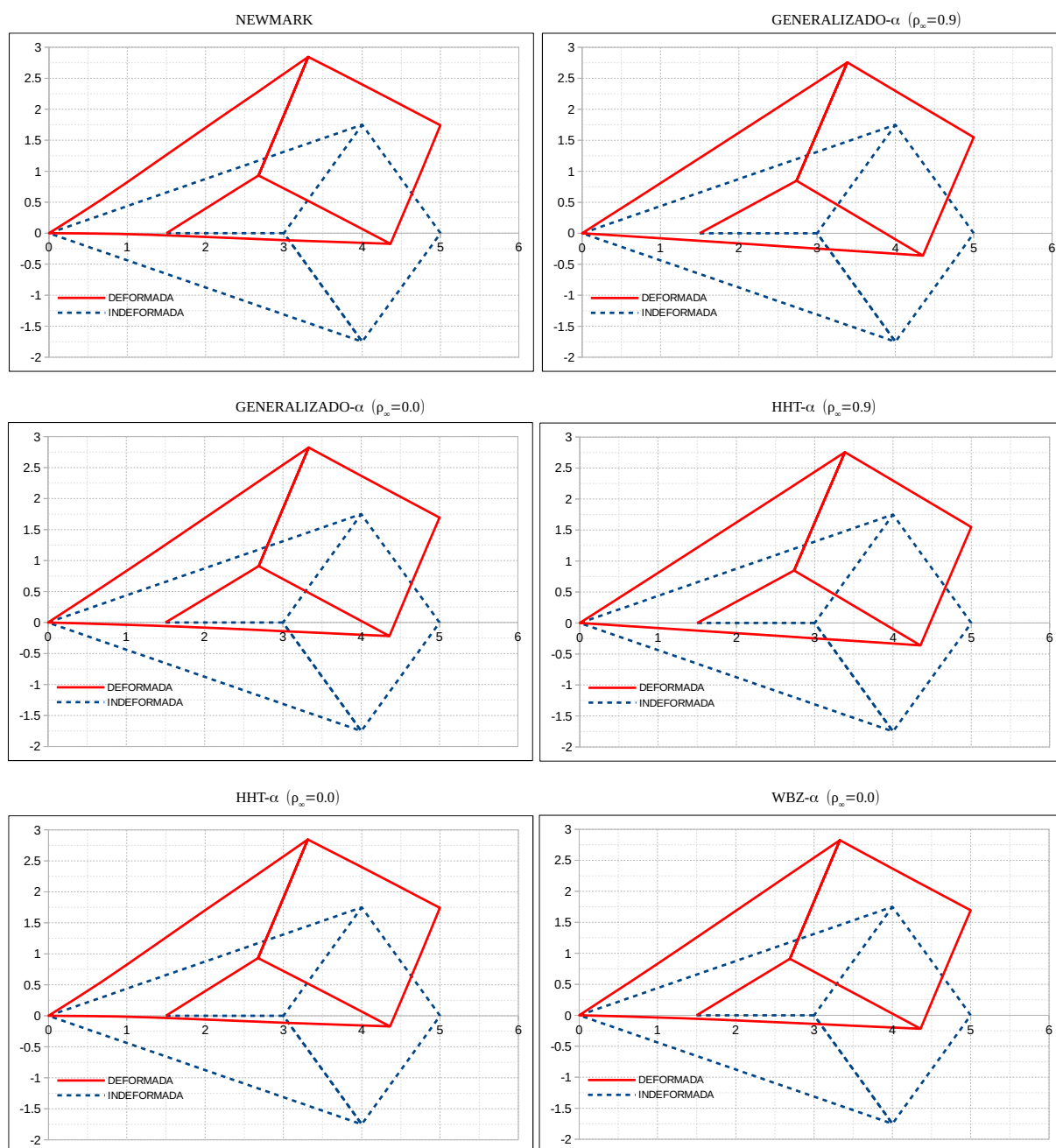


Figura 4.26: Configuração deformada do Mecanismo de Peaucellier para diferentes algoritmos de integração numérica – Carregamento (II) – $t=3.0s$.

Todos os métodos mostram comportamento semelhante, apresentando pequenas variações na posição vertical do nó extremo direito. Curiosamente, o raio espectral ρ_∞ influenciou igualmente os algoritmos de integração utilizados neste caso. Para $\rho_\infty=0.9$, tem-se $y\sim 1.5m$ para os métodos Generalizado- α e HHT- α . Por outro lado, com $\rho_\infty=0.0$, tem-se $y\sim 1.75m$ para os métodos Newmark, Generalizado- α , HHT- α e WBZ- α (Figura 4.26).

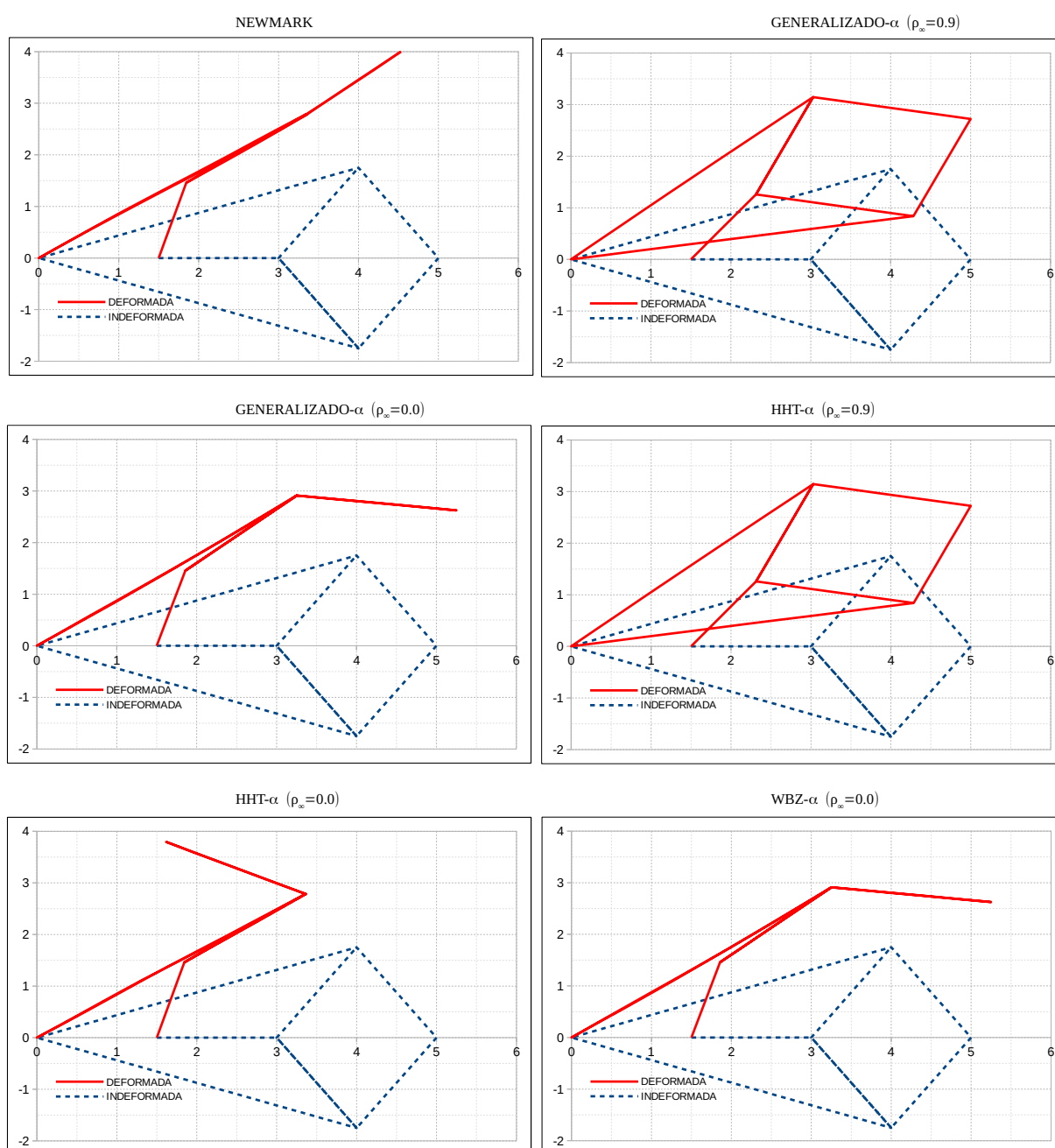


Figura 4.27: Configuração deformada do Mecanismo de Peaucellier para diferentes algoritmos de integração numérica – Carregamento (II) – $t=9.0s$.

A contribuição das altas frequências na resposta ($\rho_{\infty}=0.9$) possibilitou a representação da deformada da estrutura para os métodos Generalizado- α e HHT- α , com $y \sim 2.75m$, ao passo que a instabilidade numérica das demais respostas conduziram a configurações deformadas distorcidas (Figura 4.27).

CAPÍTULO 5: CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DO COMPORTAMENTO CAÓTICO EM ESTRUTURAS RETICULADAS PLANAS ESBELTAS SUBMETIDAS À INSTABILIDADE DINÂMICA

Sistemas não lineares submetidos a mudanças súbitas ou dramáticas, ou mesmo nos casos de interação entre fenômenos (interação entre fluido e estrutura, por exemplo) podem originar um comportamento complexo denominado caos. Apesar de não haver uma definição universalmente aceita acerca do assunto, a maior parte dos pesquisadores concordam que o caos é um comportamento aperiódico de longo prazo de um sistema restrito e determinístico, o qual exibe sensível dependência das condições iniciais (SPROTT, 2003).

Segundo Hilborn (2001), o termo é frequentemente usado para descrever o comportamento aperiódico e aparentemente aleatório destes sistemas no tempo. Neste contexto, apesar da aleatoriedade aparente, existe uma ordem determinada (em certo sentido) pelas equações diferenciais que descrevem o sistema. Hilborn (2001) ainda destaca que são 3 os aspectos determinantes para o comportamento de um sistema: as equações de evolução temporal, os valores dos parâmetros que o descrevem e as condições iniciais do mesmo.

Algumas pesquisas relevantes concernentes ao assunto podem ser destacadas. Liang e Mosalam (2016) apresentam análises sistemáticas de estabilidade e precisão de Lyapunov para vários algoritmos de integração direta em análise estrutural dinâmica não linear, como os da família Newmark, o algoritmo TRBDF2 (*Trapezoidal Rule with the second order Backward Difference Formula*) e os métodos explícitos de algoritmos de divisão de operadores (*operator-splitting* – OS), usando formulações de rigidez inicial e tangente. Os autores concluíram que alguns argumentos de estabilidade em relação a esses algoritmos de integração direta são considerados infundados, e que o algoritmo OS baseado em rigidez tangente apresenta propriedades de estabilidade semelhantes à integração implícita de Newmark.

Jog *et al.* (2016) mostraram que a maioria dos algoritmos existentes, conhecidos por serem robustos para problemas parabólicos ou hiperbólicos, podem ser inseridos na formulação de elementos finitos para análise dinâmica. Os elementos obtidos por esta técnica demonstram desempenho robusto em vários exemplos da literatura onde o comportamento da solução é conhecido por ser caótico, devido à sua propriedade inerente de conservação momento-energia.

Mareca e Bordel (2017) apresentaram um novo sistema dinâmico hipercaótico

quadridimensional, baseado na dinâmica de Lorenz, projetado para melhorar a complexidade da dinâmica de Lorenz. Os autores destacam que o sistema clássico de Lorenz apresenta grande vulnerabilidade quando utilizado em comunicações seguras. Seu sistema proposto 4D proposto aumenta a complexidade da dinâmica de Lorenz. Foram estudadas a simetria, a estabilidade do sistema proposto, seções de Poincaré e diagramas de bifurcação que caracterizar o comportamento global do sistema, além espectro de Lyapunov e a dimensão de Kaplan-Yorke das equações propostas.

Premraj *et al.* (2017) estudou a passagem lenta pela bifurcação de Hopf de um circuito periodicamente forçado da série LCR (indutor L, capacitor C e resistor R) com um diodo de Chua como elemento não linear. Os autores identificaram que o atraso nesta bifurcação é uma quantidade única e pode ser prevista usando várias análises numéricas, e que quando uma força periódica adicional é inserida no sistema, o atraso na bifurcação se torna caótico, levando a uma imprevisibilidade no atraso da bifurcação. Em suas análises foram aplicados os expoentes de Lyapunov, análises de espectro contínuo singular e mapas de Poincaré.

Outa (2017) elaborou um controlador linear ótimo, capaz de reduzir um sinal caótico de rotor dinâmico, em um sinal controlado. Para a tarefa, o autor desenvolveu atividades ligadas à caracterização do experimento, análise de estabilidade pelo método de Lyapunov, aplicação da função de Lyapunov, análise da sensibilidade das condições iniciais a partir do expoente de Lyapunov e o desenvolvimento do projeto do controle ótimo linear. Como resultado, obteve-se uma redução de sinal para um comportamento estável e controlado.

Brandão (2018) avaliou um conjunto de mapas de Lorenz em contração, demonstrando que se o referido mapa não possui órbita periódica atrativa, então existe um atrator topológico único. O mesmo autor classificou ainda os possíveis tipos de atratores que podem ocorrer.

Awrejcewicz *et al.* (2018) analisou diferentes métodos de cálculo dos expoentes de Lyapunov para problemas clássicos por diferentes equações diferenciais (mapa de Hénon, mapa de Hénon hipercaótico, mapa logístico, atrator de Rössler e atrator de Lorenz), estudando sua convergência e identificando os algoritmos mais adequados para tipos de sistemas e objetivos específicos. Os mesmos autores propuseram um algoritmo de cálculo do espectro de expoentes de Lyapunov baseado em uma rede neural treinada, com bons resultados para diferentes tipos de sistemas, sem requer conhecimento prévio das equações do sistema.

Neste trabalho pretende-se contribuir como o estudo do comportamento caótico em

estruturas reticuladas esbeltas submetidas à instabilidade dinâmica. Serão apresentadas três estratégias para determinação dos expoentes de Lyapunov: duas baseadas em séries determinísticas e uma baseada na análise direta da matriz Jacobiana. Apresenta-se ainda o Teorema de Poincaré-Bendixson como base para a definição de Seção de Poincaré. Para validar os algoritmos propostos, cinco exemplos são usados.

5.1 Atratores

Para Hilborn (2001), atrator é o conjunto de pontos para os quais as trajetórias se aproximam à medida que o número de iterações tende ao infinito. Em sistemas mais complexos, pode-se ter mais de um atrator para certo valor de determinado parâmetro.

Por outro lado, Alligood (1996) utiliza o termo atrator para descrever o tempo futuro limite (ou suficiente) de uma órbita que atrai uma porção significativa das condições iniciais de um determinado sistema. O mesmo autor apresenta duas propriedades fundamentais para um atrator:

1. *Atratividade*: o atrator deve ter a propriedade de que um ponto escolhido aleatoriamente deve ter uma probabilidade maior que zero de convergir para o conjunto. Um ponto fixo de sela é irreduzível no sentido acima e atrai órbitas: por exemplo, aquele cuja condição inicial é o próprio ponto fixo. No entanto, essa condição inicial é muito especial; a definição requer que um atrator atraia um conjunto de valores iniciais de volume de espaço de estado diferente de zero.
2. *Irreduzibilidade*: um atrator deve ser irreduzível, ou seja, incluir apenas o necessário. O conjunto que consiste na bacia de atração acompanhada de uma das órbitas que se aproxima da bacia também é um conjunto que atrai condições iniciais, mas pelo motivo de conter a bacia. Somente a bacia de atração é realmente necessária. Garante-se esta propriedade exigindo que o atrator contenha uma órbita densa que se aproxime arbitrariamente de cada ponto do atrator;

De forma complementar, Ruele (1989) apresenta, além das propriedades anteriores, as que se seguem para um atrator:

3. *Invariância*: operadores de evolução não linear no tempo f^t aplicados a um conjunto atrativo A devem obedecer à seguinte relação: $f^t[A]=A$ para todos os valores de tempo t .
4. *Dependência sensível das condições iniciais*: a presença do comportamento caótico implica uma forte sensibilidade a pequenas flutuações das condições iniciais;
5. *Estabilidade sob pequenas perturbações aleatórias*: o movimento de um sistema dinâmico submetido a pequenas perturbações aleatórias (como erros de arredondamento devido ao truncamento do ponto flutuante nas operações computacionais, por exemplo) seja assintoticamente concentrada em atratores e que a medida assintótica utilizada seja estável sob tais perturbações.

5.1.1 Atratores Estranhos

No contexto do estudo do caos em sistemas dinâmicos expressos em duas ou mais variáveis de estado encontram-se os atratores Estranhos. Ao tratar do assunto, segundo Peitgen *et al.* (2004), deve-se considerar os sistemas dinâmicos dissipativos, ou seja, aqueles que apresentam perda de energia.

De forma generalizada, atratores estranhos podem ser descritos como padrões altamente complexos que caracterizam o estado final dos sistemas dissipativos, mostrando todos os sinais que evidenciam o comportamento caótico destes sistemas (PEITGEN *et al.*, 2004).

Para Korsch *et al.* (2008), um atrator estranho é um conjunto limite, de natureza complexa, identificado como um objeto fractal, caracterizado por uma dimensão fractal não inteira. Um atrator estranho tem propriedades auto-semelhantes, ou seja, uma ampliação de uma parte dele é semelhante a todo o conjunto. Além disso, a dinâmica do atrator estranho é caótica e caracterizada por uma extrema sensibilidade a pequenas variações nas condições iniciais. As trajetórias próximas divergem exponencialmente, o que pode ser medido quantitativamente pelo expoente de Lyapunov (ver item 5.4).

Essas duas características peculiares, a saber, a divergência exponencial de trajetórias vizinhas e a contração do espaço de fase, parecem incompatíveis à primeira vista e, de fato, não podem ocorrer simultaneamente no espaço de fase bidimensional. No entanto, para espaços de fase tridimensionais ou maiores, essa dinâmica dissipativa caótica é possível. Isso

pode ser entendido usando um modelo simples: uma fina faixa de trajetórias no espaço de fase tridimensional é primeiro alongada (divergência exponencial) e comprimida (contração do espaço de fase). Ele é então dobrado e reinjetado em si mesmo. Este processo pode ser visto no atrator de Rössler (Figura 5.1). Este processo é então iterado. Deve-se notar que as trajetórias do espaço de fase não podem se cruzar (KORSCH *et al.* 2008).

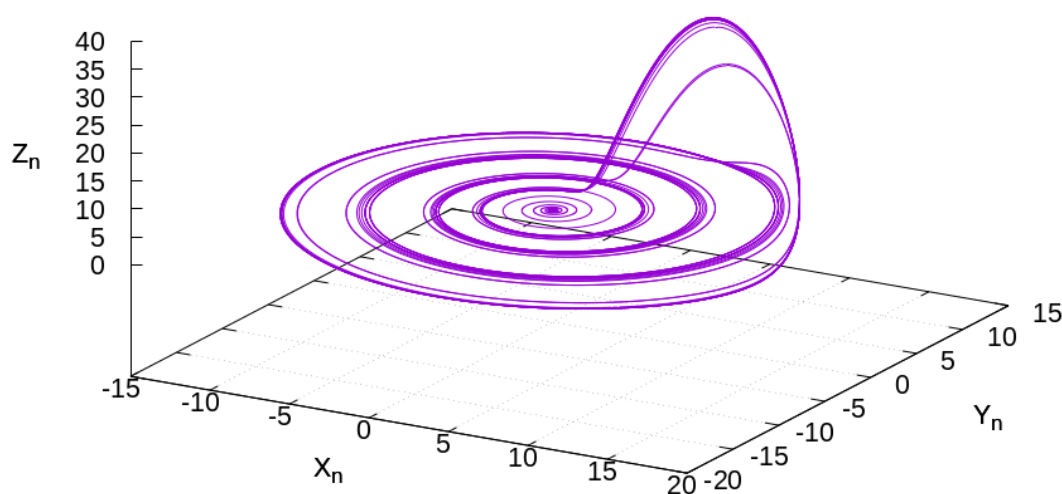


Figura 5.1: Atrator de Rössler.

O processo de esticar e dobrar (divergência exponencial) pode ser ilustrado pelo mapa de ferradura pequeno, que consiste em um alongamento de um quadrado bidimensional seguido por uma dobra em forma de ferradura (Figura 5.2). Isso define um mapa do quadrado sobre si mesmo, que contrai a área e separa os pontos próximos. Quando este processo é iterado, um conjunto muito complexo de pontos é gerado. Uma seção vertical através do quadrado revela que o conjunto consiste em 2^n segmentos disjuntos após n iterações. Matematicamente, tal conjunto limitante é chamado de conjunto de Cantor, ou seja, um conjunto compacto, incontável e desconectado, um objeto fractal (para mais detalhes ver STROGATZ, 2018), caracterizado por uma dimensão não inteira.



Figura 5.2: Mapa de ferradura de um retângulo: processo iterativo de alongamento e compressão seguido de uma dobra da área.

5.2 Mapas de alguns sistemas caóticos determinísticos clássicos

Denomina-se caos determinístico ao comportamento irregular de sistemas dinâmicos decorrentes de uma evolução temporal estritamente determinística sem qualquer fonte de ruído ou estocasticidade externa. Esta irregularidade manifesta-se numa dependência extremamente sensível das condições iniciais, o que impossibilita qualquer previsão da dinâmica a longo prazo. Mais surpreendentemente, descobriu-se que esse comportamento caótico já pode ser encontrado para sistemas com um grau de liberdade muito baixo e, além disso, é típico para a maioria dos sistemas (KORSCH *et al.*, 2008).

A seguir são apresentados os mapas de sistemas caóticos determinísticos clássicos.

5.2.1 Sistemas conservativos

Nos casos em que a dissipação no sistema é pequena, o tempo necessário para sua ocorrência é longo, e é natural se perguntar o que ocorre quando a dissipação tende a zero. Matematicamente, tal situação é não-genérica, e as equações que a descrevem são estruturalmente instáveis, mas há muitas situações físicas nas quais não é possível uma aproximação razoável (SPROTT, 2003).

Esses casos apresentam conservação de uma certa quantidade como, por exemplo, energia mecânica ou momento angular. Portanto, esses sistemas são chamados Conservativos, e surgem naturalmente na formulação Hamiltoniana de sistemas mecânicos clássicos

(Newtonianos), sendo portanto chamados sistemas Hamiltonianos (SPROTT, 2003).

Sistemas conservativos não possuem atratores, e a ausência de um atrator significa que cada condição inicial tem um potencial comportamento dinâmico distinto. Algumas condições iniciais podem produzir caos, enquanto outras condições vizinhas podem ser periódicas, e as regiões podem se entrelaçar de formas complicadas. Na medida em que há conservação de energia, a dinâmica do sistema para uma dada condição inicial assume o lugar em um subespaço de menor dimensão do espaço completo de variáveis dinâmicas. Entretanto, este subespaço é um número inteiro, diferentemente da dimensão não inteira de atratores estranhos. Soluções numéricas de sistemas conservativos devem ser feitas cuidadosamente de forma a garantir que a conservação as quantidades permaneça constante (SPROTT, 2003).

5.2.1.1 Mapa quadrático de conservação de área de Hénon (*Hénon Area Preserving Quadratic Map*)

Este mapa é regido pelo seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \cos(\alpha) - (Y_n - X_n^2) \sin(\alpha) \\ Y_{n+1} &= X_n \sin(\alpha) + (Y_n - X_n^2) \cos(\alpha) \end{aligned} \quad (5.1)$$

A Figura 5.3 mostra o referido mapa, onde se pode observar cinco ilhas quasi-periódicas. No centro de cada ilha há um ponto fixo elíptico e entre cada ilha há um ponto fixo hiperbólico.

Para valores maiores de $\cos(\alpha)$, a região caótica encolhe, e para valores menores ela se expande, com a maioria das órbitas divergindo para o infinito. Existem infinitas bifurcações, com novas ilhas e seus pontos fixos que as acompanham, aparecendo e desaparecendo com pequenas mudanças do ângulo α (Figura 5.4).

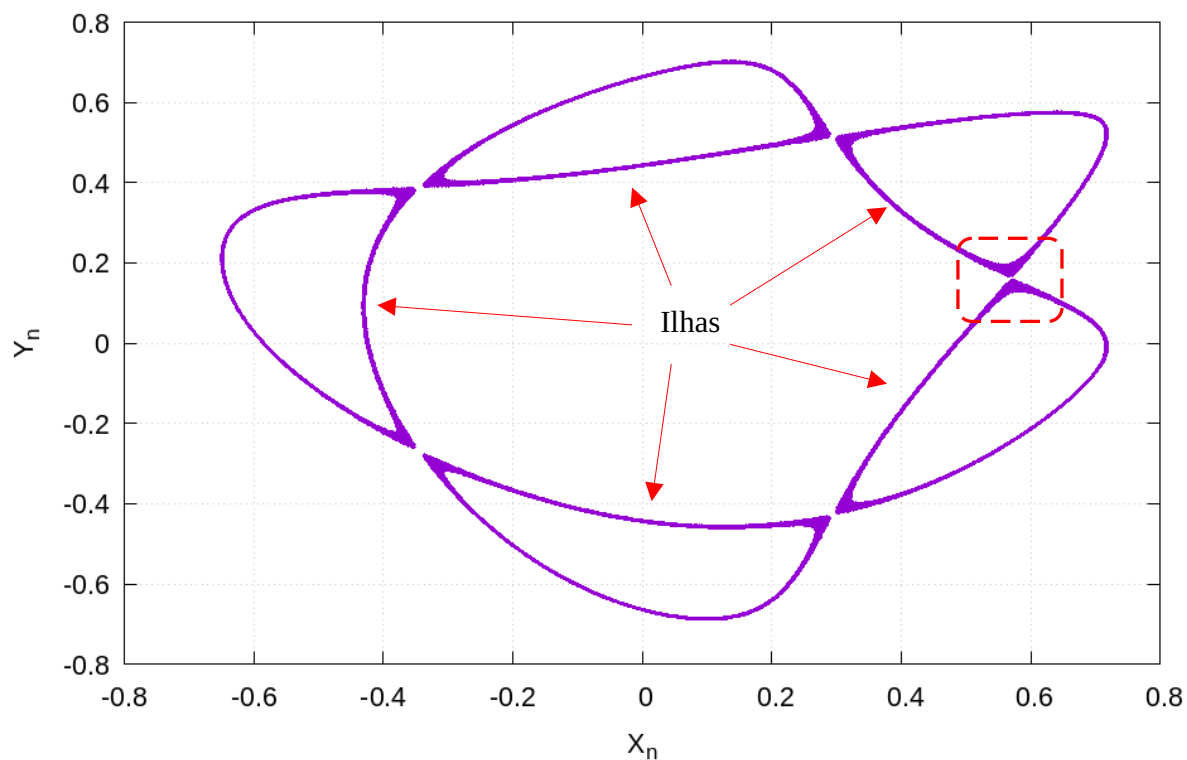


Figura 5.3: Mapa quadrático de conservação de área de Hénon [$\cos(\alpha)=0.24$, $X_0=0.6$ e $Y_0=0.13$ – 100000 pontos].

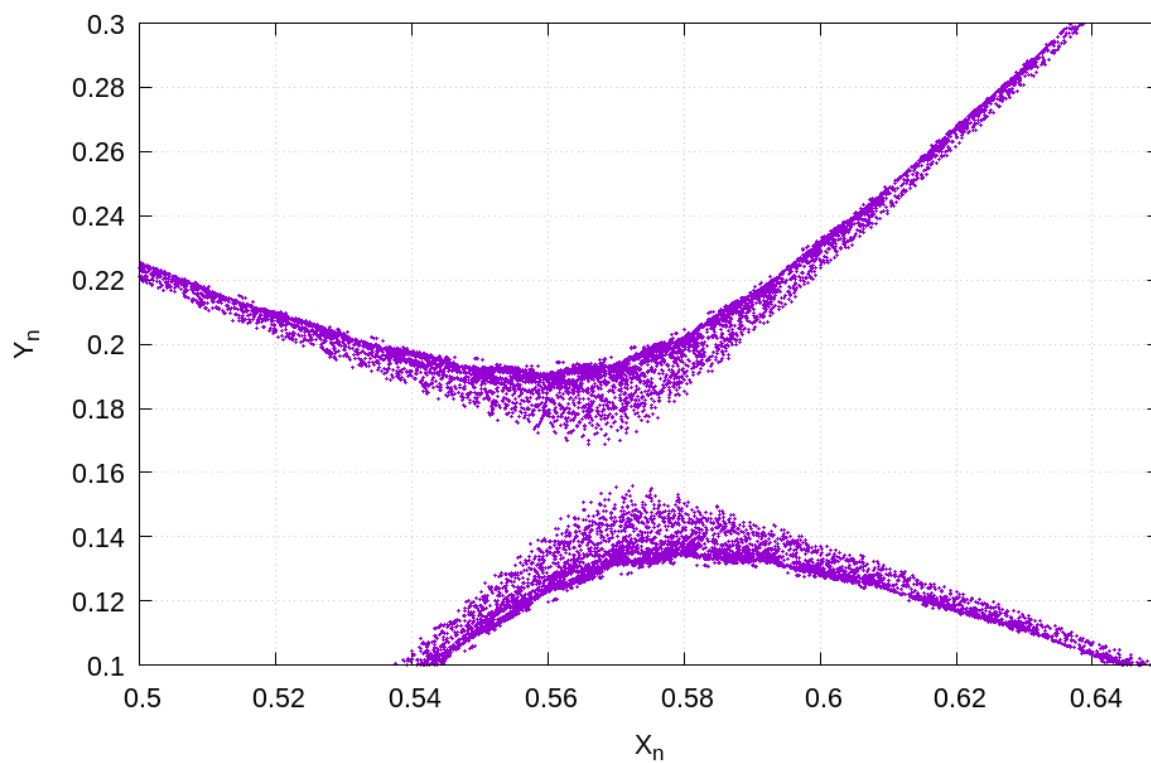


Figura 5.4: Detalhe de uma região entre ilhas do Mapa quadrático de conservação de área de Hénon (retângulo da Figura 5.3).

5.2.1.2 Mapa *Gingerbreadman* (*Gingerbreadman Map*)

Este mapa conservativo é obtido a partir das seguintes expressões:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 + |X_n| - Y_n \\ Y_{n+1} &= X_n \end{aligned} \quad (5.2)$$

Para as condições iniciais indicadas (Figura 5.5), a órbita se desenvolve caoticamente ao redor de uma região. Há cinco ilhas hexagonais com órbitas periódicas. O ponto (1,1) é um ponto fixo. Outros pontos no interior do hexágono possuem período 6 e permanecem confinados dentro da região. Órbitas dos outros 5 hexágonos circulam entre eles com uma órbita única de período 5 em (-1,3), (-1,-1), (3,-1), (5,3) e (3,5), e todas as outras órbitas de período 30.

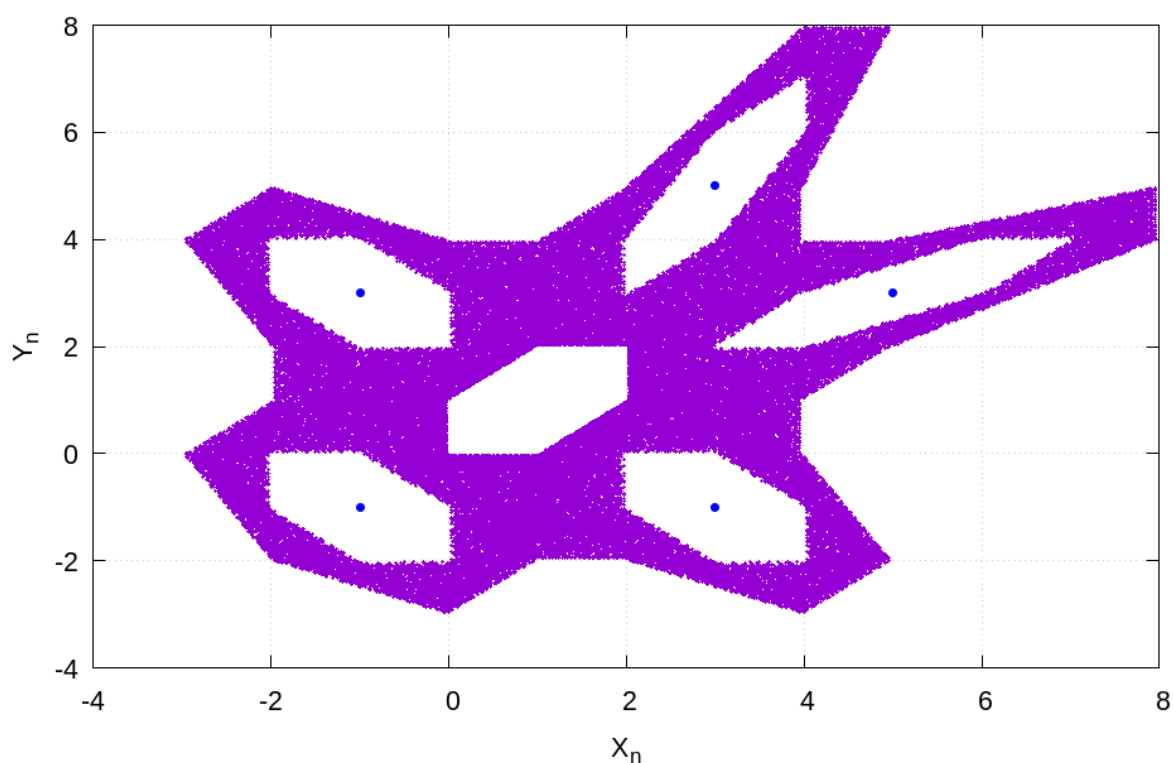


Figura 5.5: Mapa *Gingerbreadman* [$X_0=0.5$ e $Y_0=3.7$ – 100000 pontos].

5.2.1.3 Mapa de Teia Caótico (*Chaotic Web Map*)

Este mapa é semelhante ao quadrático de Hénon, mas com periodicidade. Obtido por:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n \cos(\alpha) - (Y_n + k \sin(X_n)) \sin(\alpha) \\ Y_{n+1} &= X_n \sin(\alpha) + (Y_n + k \sin(X_n)) \cos(\alpha) \\ \alpha &= 2\pi/m \end{aligned} \quad (5.3)$$

com $m=[1,2,3,\dots]$. Elas modelam um oscilador harmônico com valores de partida periódicos impulsivos. A grandeza k é a intensidade deste valor, e m sua periodicidade. Para $m=4$, o plano fase contém uma teia infinita com forma próxima a uma grade quadrada (Figura 5.6). A teia existe para quaisquer k , mas a espessura tende a zero quando $k \rightarrow 0$. Para $m=3$ e $m=6$, a teia forma uma grade hexagonal. Para outros valores de m (diferentes de 1, 2, 3, 4 e 6), uma rede não periódica se forma com simetria de quasi-cristal. A teia preenche o plano com simetria ligeiramente deteriorada pela espessura finita. A órbita se move através da teia em um processo chamado Difusão de Arnold. A difusão é lenta para pequenos valores de k , mas existe para todos eles.

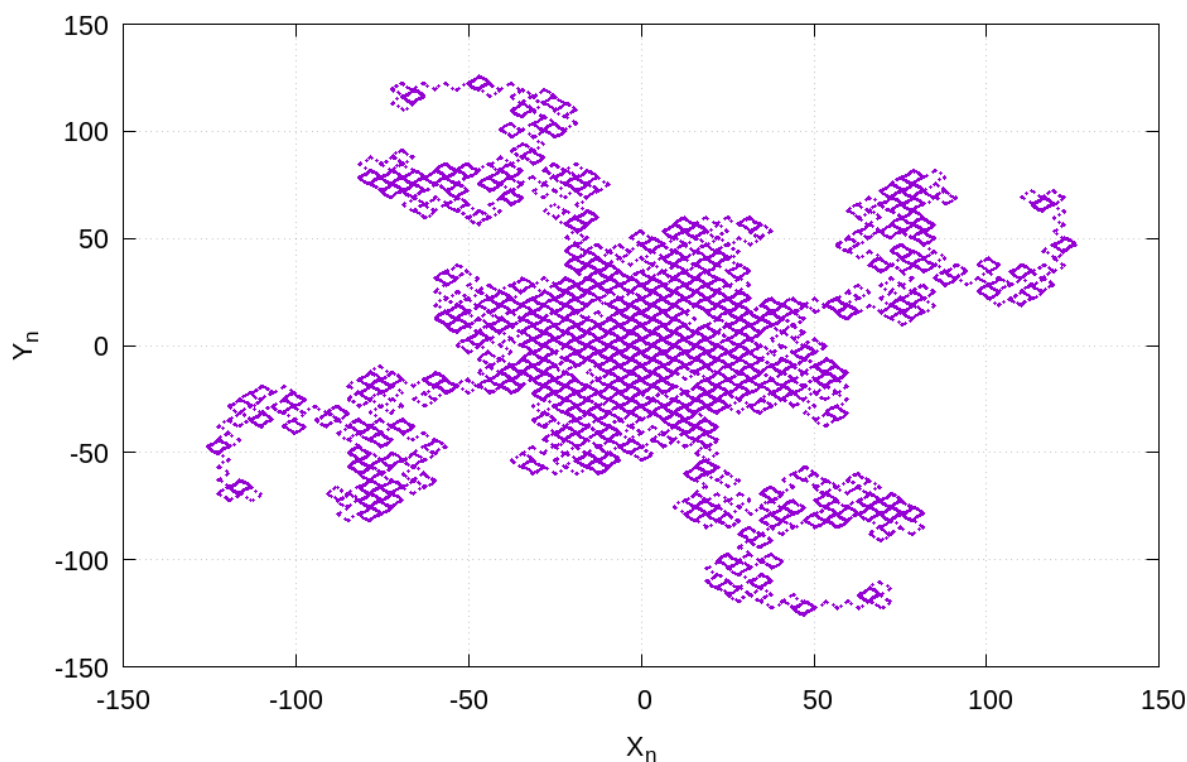


Figura 5.6: Mapa de Teia Caótico [$m=4$, $k=1$, $X_0=0.0$ e $Y_0=3.0$ – 100000 pontos].

5.2.1.4 Mapa Tridimensional Caótico de Lorenz (*Lorenz Three-Dimensional Chaotic Map*)

Diferentemente dos casos apresentados anteriormente, o mapa tridimensional caótico de Lorenz é dado por três variáveis, sem a presença de constantes:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= X_n Y_n - Z_n \\ Y_{n+1} &= X_n \\ Z_{n+1} &= Y_n \end{aligned} \quad (5.4a)$$

De forma mais simples, pode-se ainda escrever (SPROTT, 2003):

$$X_{n+1} = X_n X_{n-1} - X_{n-2} \quad (5.4b)$$

de forma que a série leva a uma superfície no espaço tridimensional, superfície esta que se repete ao se projetá-la no plano (X_n vs. Y_n) ou (Y_n vs. Z_n) (Figura 5.7).

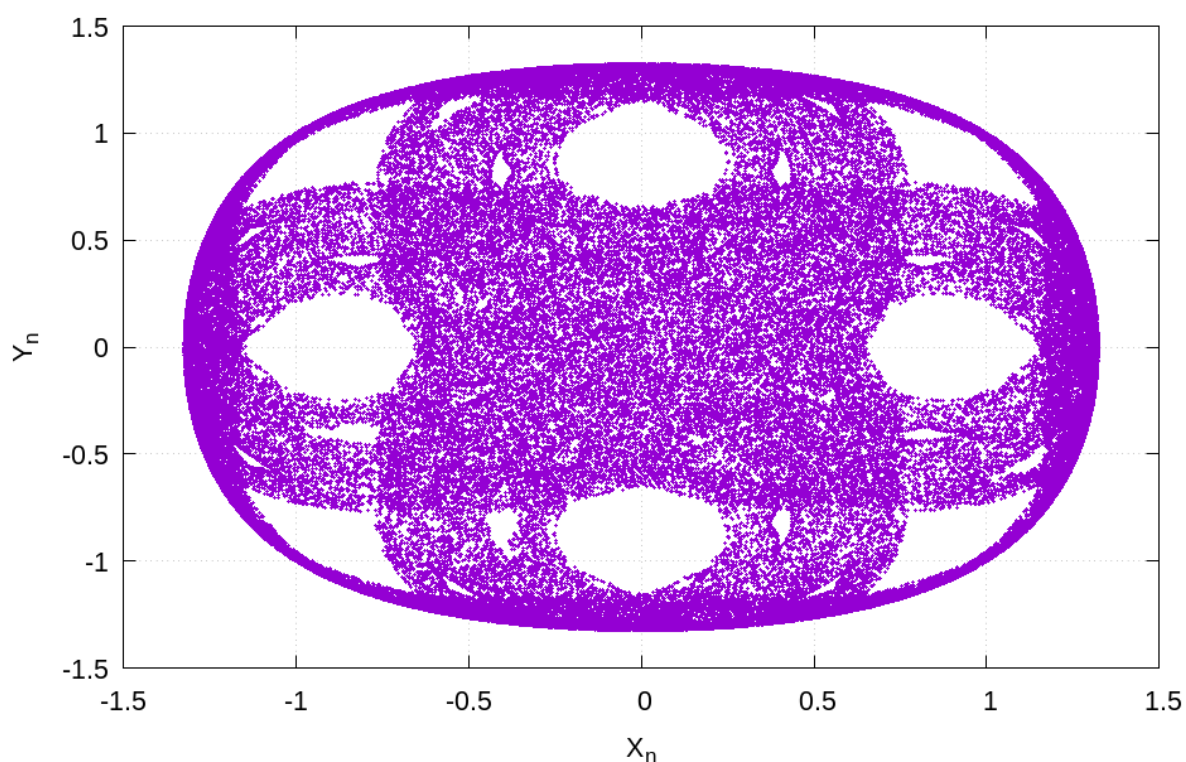


Figura 5.7: Mapa tridimensional caótico de Lorenz [$X_0=0.5$, $Y_0=0.5$ e $Z_0=-1.0$ – 100000 pontos].

5.2.2 Sistemas dissipativos

Em contrapartida aos conservativos, os sistemas dissipativos têm por característica mapas ou órbitas que contraem volumes no espaço de fase. Essa característica resulta de mecanismos físicos da modelagem matemática que incluem atrito, viscosidade ou algum outro processo que promova dissipação de energia (STROGATZ, 2018).

Neste cenário, os atratores existentes são classificados como atratores estranhos. A seguir são apresentados quatro sistemas clássicos de mapas dissipativos.

5.2.2.1 Mapa de Hénon

Um mapa dissipativo, de estrutura bidimensional, que apresenta um atrator estranho é o mapa de Hénon (Figura 5.8). Seu idealizador, o astrônomo Michel Hénon, procurou uma forma simplificada de resolver o sistema de equações diferenciais de Lorenz: ele buscou um mapeamento que capturasse as características essenciais deste sistema, mas que também tivesse uma quantidade justificada de dissipação.

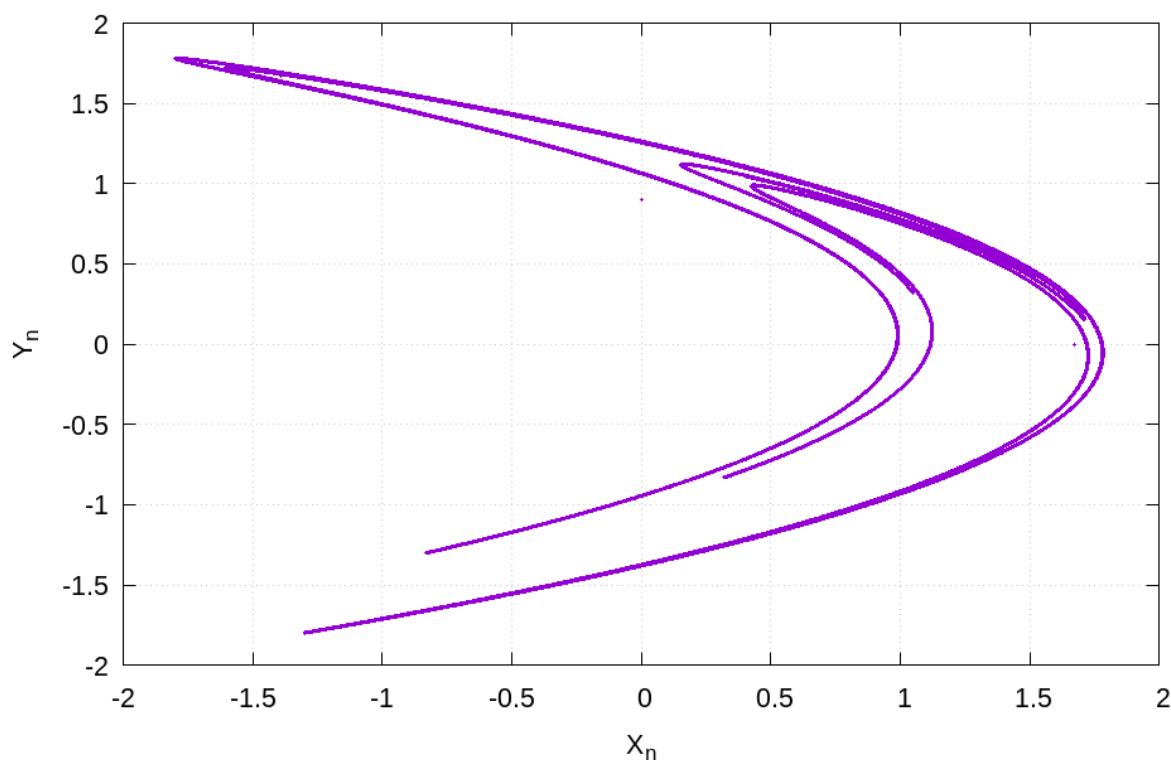


Figura 5.8: Mapa de Hénon [$a=1.4$, $b=0.3$, $X_0=0.0$ e $Y_0=0.9$ – 100000 pontos].

Hénon escolheu estudar mapeamentos em vez de equações diferenciais visto que os mapas são mais rápidos para simular e suas soluções podem ser seguidas com mais precisão e por mais tempo (STROGATZ, 2018). O Mapa de Hénon é obtido a partir das seguintes relações, apresentadas em forma discreta (ALLIGOOD, 1996):

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= a - X_n^2 + b Y_n \\ Y_{n+1} &= X_n \end{aligned} \quad (5.5)$$

5.2.2.2 Mapa de Lozi

O mapa de Lozi (Figura 5.9) possui similaridades com o de Hénon, seja em sua geometria ou mesmo em seu sistema de equações, dado por:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= 1 - a|X_n| + bY_n \\ Y_{n+1} &= X_n \end{aligned} \quad (5.6)$$

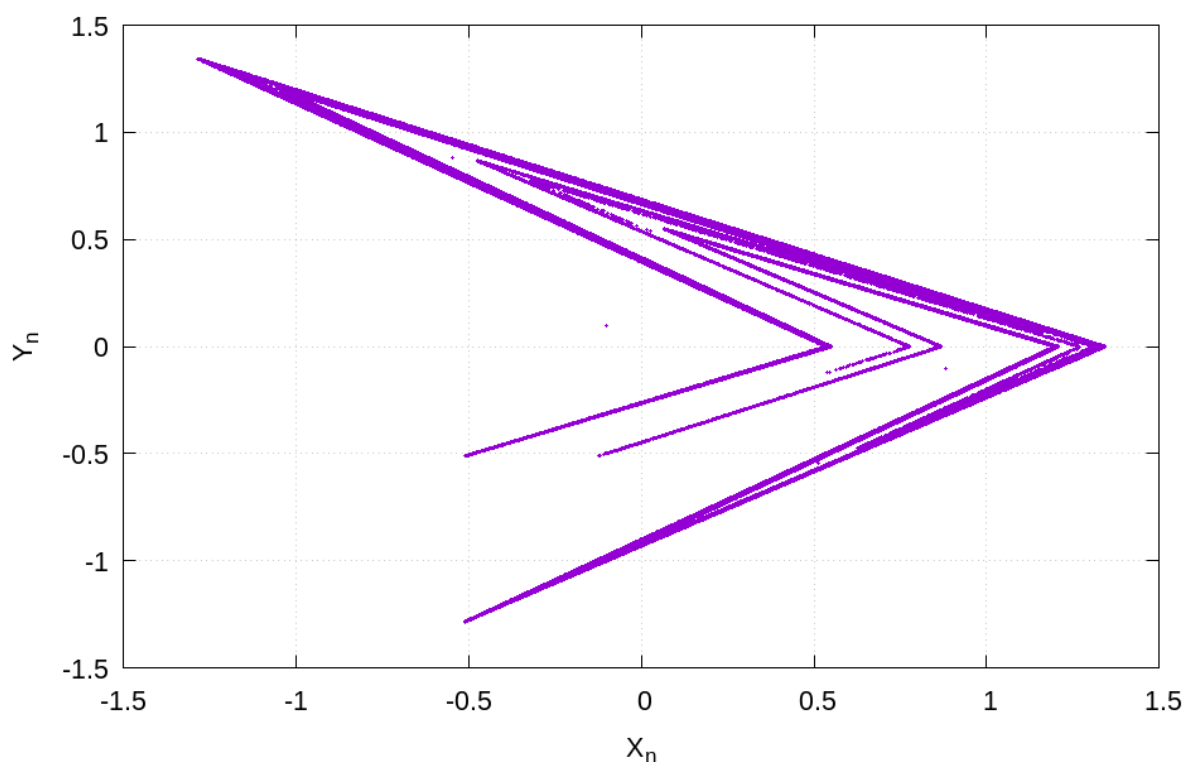


Figura 5.9: Mapa de Lozi [$a=1.7$, $b=0.5$, $X_0=-0.1$ e $Y_0=0.1$ – 100000 pontos].

Na Equação (5.6), a e b são valores reais, com $-1 \leq b \leq 1$. Este foi o primeiro sistema de

equações a ser provado como possuindo um atrator estranho (MISIUREWICZ 1980, *apud* SPOTT, 2003).

5.2.2.3 Mapa de Ikeda (*Ikeda Map*)

O mapa dissipativo de Ikeda (Figura 5.10) é gerado por um sistema de equações relativo ao efeito de propagação de ondas de luz através de fibra óptica não linear, fenômeno que pode ser observado em um ressonador de anel de fibra simples (*Simple Fiber Ring Resonator – SFR*). O referido sistema é dado por:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \gamma + \mu(X_n \cos(\phi) - Y_n \sin(\phi)) \\ Y_{n+1} &= \mu(X_n \sin(\phi) - Y_n \cos(\phi)) \\ \phi &= \beta - \alpha / (1 + X_n^2 + Y_n^2) \end{aligned} \quad (5.7)$$

sendo ϕ uma variável de conveniência, podendo ser eliminada das equações por substituição.

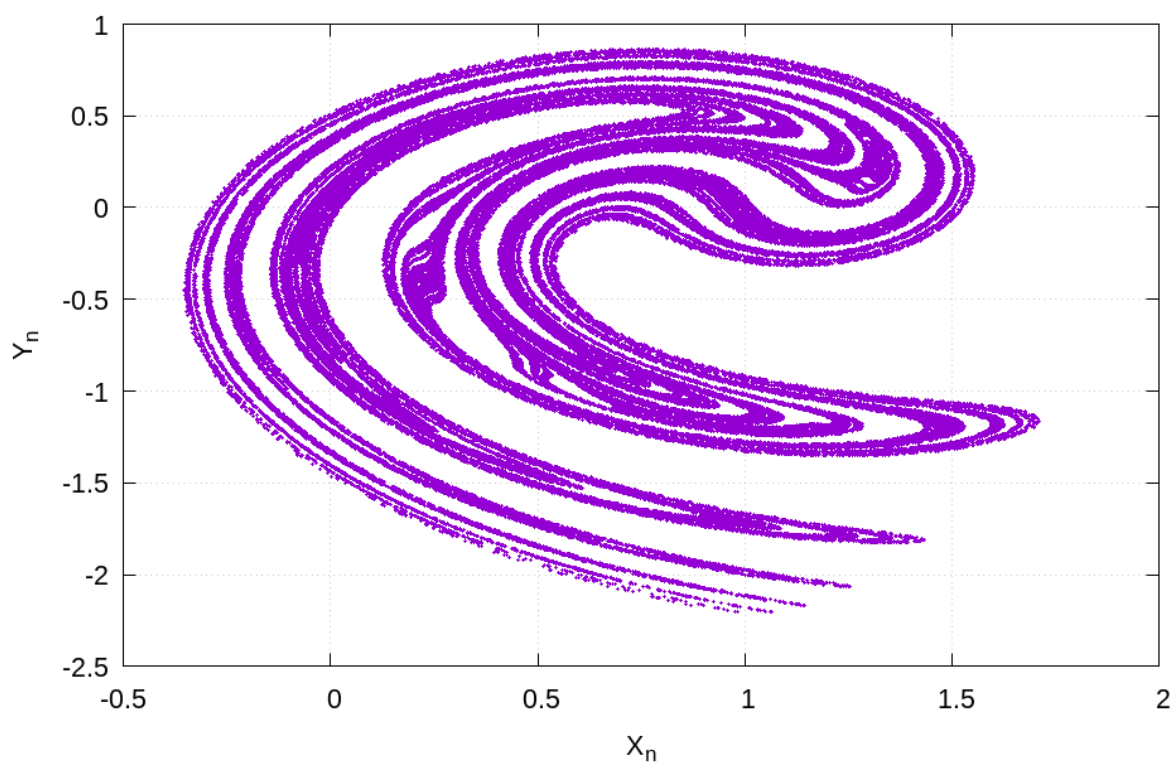


Figura 5.10: Mapa de Ikeda [$\alpha=6.0$, $\beta=0.4$, $\gamma=1.0$, $\mu=0.9$, $X_0=0.0$ e $Y_0=0.0$ – 100000 pontos].

5.2.2.4 Mapa *Delayed Logistic*

O mapa *Delayed Logistic* é regido pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= aX_n(1 - Y_n) \\ Y_{n+1} &= X_n \end{aligned} \quad (5.8)$$

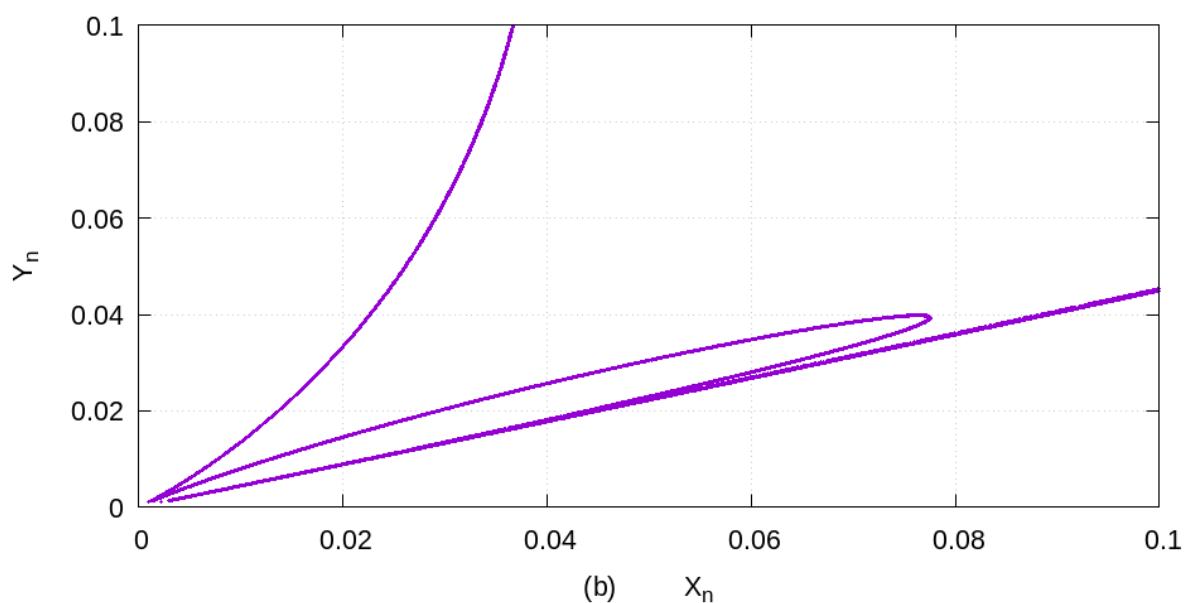
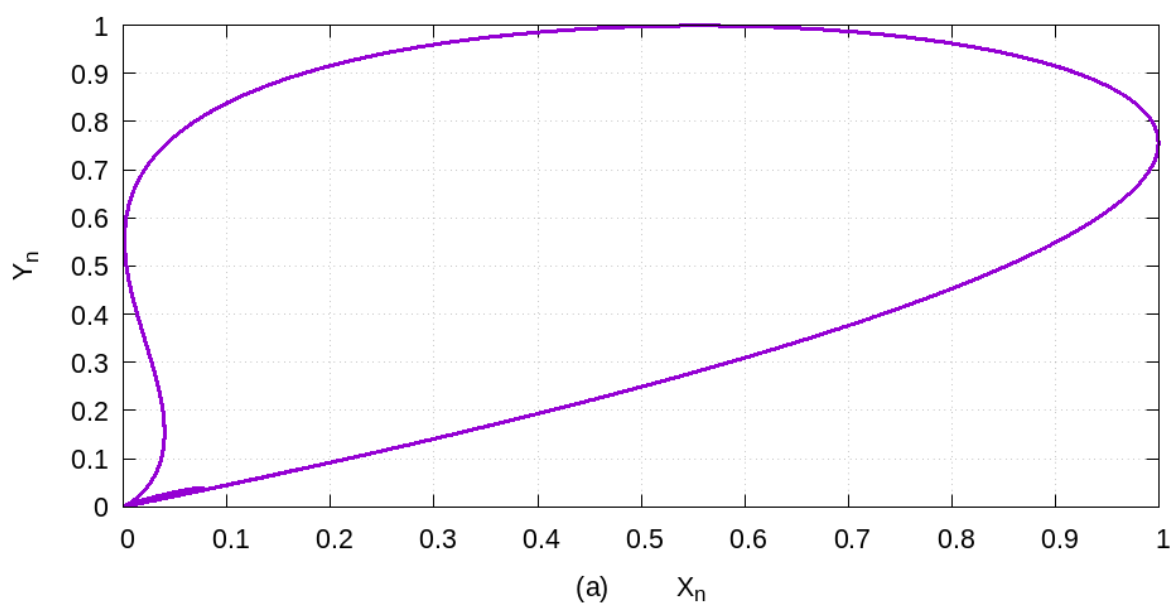


Figura 5.11: Mapa *Delayed Logistic* [$a=2.27$, $X_0=0.001$ e $Y_0=0.001$ – 100000 pontos]: (a) trajetória completa e (b) no intervalo $[0; 0.1]$ para X_n e Y_n .

A dinâmica deste mapa passa por variações complexas ao se variar o parâmetro a . Neste caso em particular, o sistema exibe um atrator estranho (Figura 5.11a), visto que a curva fechada perde sua suavidade e se rompe, mostrando a estrutura indicada na Figura (5.11b) próximo à origem.

5.3 Expoentes de Lyapunov

Os expoentes de Lyapunov são baseados no Teorema de Estabilidade Assintótica, atribuído ao mesmo autor, e indicam a convergência de uma órbita periódica (soluções) a partir da sensibilidade às condições iniciais das equações diferenciais. Ou ainda, pode-se dizer que esses expoentes mostram a instabilidade (índice) de um atrator. Um valor negativo indica um estado de estabilidade; se positivo, um estado de instabilidade (ARIO, 2004). Sprott (2003) enfatiza que, por definição, os expoentes de Lyapunov descrevem a taxa média de perda de previsibilidade da resposta para um sistema dinâmico restrito.

Normalmente, esses expoentes são apresentados em uma sequência de valores em ordem decrescente. Por exemplo, (+, 0, -) significa que, para o atrator analisado, há uma direção em um espaço 3D, onde o alongamento exponencial é exibido, a segunda direção indica estabilidade neutra e a terceira indica compressão exponencial. Deve-se notar que todos os atratores diferentes de pontos estacionários estáveis sempre têm, pelo menos, um expoente igual a zero (AWREJCEWICZ *et al.*, 2018). As relações entre os expoentes de Lyapunov e os tipos de atratores podem ser resumidas da seguinte forma:

1. **n=1** → neste caso apenas um ponto fixo estável pode ser um atrator (nó ou foco). Existe um expoente negativo denotado por $\lambda_1=(-)$;
2. **n=2** → em sistemas 2D, existem dois tipos de atratores: pontos fixos estáveis e ciclos limites, que podem ser identificados pelos expoentes de Lyapunov como:
 - $(\lambda_1, \lambda_2)=(-, -)$: ponto fixo estável;
 - $(\lambda_1, \lambda_2)=(0, -)$: ciclo limite estável.
3. **n=3** → no espaço fase 3D há quatro tipos de atratores: pontos estáveis, ciclos limites, *torus* 2D (superfície de revolução gerada pela rotação de um círculo no espaço tridimensional em torno de um eixo coplanar a si mesmo) e atratores estranhos. As possíveis situações dinâmicas são:

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=(-, -, -)$: ponto fixo estável;
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=(0, -, -)$: ciclo limite estável;
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=(0, 0, -)$: torus 2D estáveis;
- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)=(+, 0, -)$: atrator estranho.

Awrejcewicz *et al.* (2018) enfatiza que, na maioria dos problemas, é impossível dar uma definição analítica dos expoentes de Lyapunov, uma vez que a solução analítica para as equações diferenciais governantes teria que ser conhecida. No entanto, é possível desenvolver algoritmos a partir de técnicas confiáveis para se encontrar o espectro desses expoentes numericamente.

5.3.1 Cálculo do maior expoente de Lyapunov a partir de duas séries de dados

Os expoentes de Lyapunov podem ser determinados a partir de dados de séries temporais (posições ao longo no tempo, por exemplo) conforme descrito em Hilborn (2001). Seja, então, uma série no tempo dada por $x(t_0)$, $x(t_1)$, $x(t_2)$, ..., $x(t_n)$. Fazendo-se, por simplicidade, $x(t_i)=x_i$ para $i=0, 1, 2, \dots, N$ e assumindo a igualdade entre os intervalos de tempo τ , pode-se fazer:

$$t_n - t_0 = N \tau \quad (5.9)$$

em que N é o número de dados conhecidos no intervalo de tempo analisado.

Caso o sistema em estudo possuir comportamento caótico, a divergência entre trajetórias próximas irá se manifestar da seguinte forma: sejam duas séries obtidas por um mesmo sistema de equações onde se aplicou uma pequena variação nas condições iniciais. Se um certo valor x_i de uma das séries for selecionado e, em seguida, for feita uma busca na outra série por um valor x_j próximo a x_i , a sequência das diferenças expressas por:

$$\begin{aligned} d_0 &= |x_j - x_i| \\ d_1 &= |x_{j+1} - x_{i+1}| \\ d_2 &= |x_{j+2} - x_{i+2}| \\ &\vdots \\ d_n &= |x_{j+n} - x_{i+n}| \end{aligned} \quad (5.10)$$

é assumida aumentar exponencialmente (pelo menos, na média) com o aumento de n . Em outras palavras, a função que expressa o aumento das diferenças é dada por:

$$d_n = d_0 e^{\lambda_1 n} \quad (5.11)$$

Manipulando-se algebricamente a Equação (5.11), tem-se:

$$e^{\lambda_1 n} = \frac{d_n}{d_0} \Rightarrow \ln(e^{\lambda_1 n}) = \ln\left(\frac{d_n}{d_0}\right) \Rightarrow \lambda_1 n = \ln\left(\frac{d_n}{d_0}\right) \quad (5.12)$$

Define-se, portanto, o primeiro Expoente de Lyapunov como:

$$\lambda_1 = \frac{1}{n} \ln\left(\frac{d_n}{d_0}\right) \quad (5.13)$$

Na Equação (5.13), se λ_1 for positivo, o comportamento é caótico.

Vale a pena ressaltar que, quando se conhece as equações que regem o comportamento do sistema, pode-se obter, a partir de uma pequena variação nas condições iniciais, duas séries de dados, e então realizar o monitoramento da sequência de diferença entre as mesmas de acordo com a Equação (5.10), conforme foi adotado neste presente trabalho.

De forma complementar, uma segunda possibilidade seria usar atraso de tempo (*time-delay*) na mesma série, de forma que a série seja defasada em relação a si mesma, para então se proceder com o monitoramento da sequência de diferenças conforme a Equação (5.10).

Continuando, ressalta-se, entretanto, que foi considerada uma taxa exponencial de separação das duas trajetórias. E essa consideração, segundo Hilborn (2001), deve ser examinada cuidadosamente. O autor recomenda analisar gráficos do logaritmo (natural) da diferença d_n versus o índice n . Se a divergência for exponencial, os pontos estarão próximos (ou sobre) uma linha reta cujo coeficiente angular é o expoente de Lyapunov. Caso contrário, então o expoente não tem sentido naquele intervalo.

Há uma outra forma em que se pode expressar o Expoente de Lyapunov. Para tal, considera-se a seguinte variação para as diferenças:

$$d_n = d_0 e^{\lambda_1 n} \quad (5.14)$$

Fazendo-se manipulação algébrica análoga àquela feita na Equação (5.14), chega-se à seguinte relação:

$$\hat{\lambda}_1 = \frac{1}{n} \log_2 \left(\frac{d_n}{d_0} \right) \quad (5.15)$$

Na Equação (5.15), $\hat{\lambda}_1$ é definido como uma taxa de divergência da série discreta de valores \mathbf{X} escritos em forma de número binário (0 e 1) e expressa em bits por unidade de tempo. Em outras palavras, pode-se dizer que $\hat{\lambda}_1$ é a medida da taxa de perda de informação contida no valor inicial de x .

A caracterização de um sistema pode ser feita a partir de um valor médio dos expoentes de Lyapunov, conforme as relações a seguir:

$$(\lambda_1)_{\text{med}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \lambda_1(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\lambda_1)_i \quad (5.16)$$

$$(\hat{\lambda}_1)_{\text{med}} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \hat{\lambda}_1(x_i) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\hat{\lambda}_1)_i \quad (5.17)$$

Hilborn (2001) recomenda utilizar um valor N de expoentes representativos para o atrator entre 30 e 40. O Quadro 5.1 apresenta o algoritmo para a determinação do maior Expoente de Lyapunov a partir de 2 séries de dados (algoritmo LPNV1).

Quadro 5.1: Determinação do maior Expoente de Lyapunov a partir de 2 séries de Dados (Algoritmo LPNV1).

-
-
1. Obtenção das séries de dados ${}^1\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ e ${}^2\mathbf{X} = \{x_1, x_2, x_3, \dots, x_N\}$ para a qual se deseja obter o maior Expoente de Lyapunov;
 2. Selecionado o trecho da série para análise, calcular a sequência de diferenças d_n , conforme a Equação (5.10);
 3. Determinação do maior expoente de Lyapunov pela Equação (5.13);
 4. Cálculo do valor médio do maior expoente de Lyapunov pela Equação (5.16);
-
-

5.3.2 Cálculo do maior expoente de Lyapunov usando algoritmo preditor não linear

Segundo Sprott (2003), algoritmos preditores possuem a característica de redução do ruído na resposta e estimar a sensibilidade das condições iniciais. É relevante destacar que, neste caso, basta que se conheça a série de dados correspondente a uma única condição inicial.

Seja um vetor $\mathbf{X}=\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_N\}$ que contém uma série para a qual se deseja calcular o maior expoente de Lyapunov. O algoritmo, neste trabalho denominado LPNV2 (Quadro 5.2), consiste em tomar os k valores da série mais próximos a um certo valor de referência X_i , armazená-los em um vetor \mathbf{X}^k e monitorar a variação deste vetor à medida em que os novos pontos de análise $X_{i+1}, X_{i+2}, \dots, X_N$ são escolhidos. Esse monitoramento permite fazer uma predição dos valores da série original. Esta série predita, em conjunto com a série real, possibilita avaliar a variação da divergência entre as mesmas, de forma semelhante ao que está descrito no algoritmo LPNV1.

Quadro 5.2: Algoritmo Preditor Não-Linear para o maior Expoente de Lyapunov (Algoritmo LPNV2).

-
-
1. Obtenção da série de dados $\mathbf{X}=\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_N\}$ para a qual se deseja obter o maior Expoente de Lyapunov;
 2. Para $i=(N-k+1)$ até N , faça:
 - a) Escolher os k valores da série, no intervalo ($j=1, 2, 3, \dots, i-1$) mais próximos ao valor de X_i
 - b) Armazenar os valores em um vetor \mathbf{X}^k
 - c) Calcular a variação entre os valores mais próximos de X_i e os mais próximos obtidos no passo anterior: $\Delta \mathbf{X}^k = |\mathbf{X}^k - \mathbf{X}_{ant}^k|$
 - d) Calcular a média dos elementos de $\Delta \mathbf{X}^k$: $dX_k^{med} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (\Delta \mathbf{X}^k)_i$
 - e) Fazer a predição do ponto de análise: $(X_{pred})_i = X_{i-1} + dX_k^{med}$
 fim para
 3. Para $i=(N-k+1)$ até N , faça:
 - a) Cálculo do erro na predição: $\varepsilon_j^{pred} = \frac{|(X_{pred})_i - X_i|}{(X_{pred})_i}$; $j=1,2,\dots,k$
 fim para
 4. Cálculo do maior expoente de Lyapunov: $\lambda_1 = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \varepsilon_j$
-
-

5.3.3 Espectro dos expoentes de Lyapunov para dimensões arbitrárias

Para os casos em que se deseja determinar se um sistema é caótico ou não, somente o maior expoente de Lyapunov é suficiente. Quando se deseja estimar a previsibilidade média de um sistema, necessita-se de todos os expoentes positivos. Porém, é possível se determinar o espectro de expoentes de Lyapunov para um sistema dinâmico (SPROTT, 2003).

Neste caso é necessário conhecer (ou estimar) a matriz Jacobiana do sistema de equações e avaliá-la em cada ponto ao longo da trajetória. Este método equivale, conceitualmente, a monitorar a evolução de um conjunto de condições iniciais associado a uma hipersfera que se distorce em um elipsóide com os eixos principais mais longos sendo, respectivamente, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ (SPROTT, 2003).

Seja $\mathbf{X}=\{X_1, X_2, X_3, \dots, X_N\}$ um conjunto de variáveis independentes relacionadas entre si por um sistema de N equações $F_i(\mathbf{X})$ sendo $i=1, 2, \dots, N$. A matriz Jacobiana \mathbf{J} deste sistema é obtida da seguinte forma:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} j_{11} & j_{12} & j_{13} & \dots & j_{1N} \\ j_{21} & j_{22} & j_{23} & \dots & j_{2N} \\ j_{31} & j_{32} & j_{33} & \dots & j_{3N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ j_{N1} & j_{N2} & j_{N3} & \dots & j_{NN} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_1(\mathbf{X})}{\partial X_N} \\ \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_2(\mathbf{X})}{\partial X_N} \\ \frac{\partial F_3(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial F_3(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial F_3(\mathbf{X})}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_3(\mathbf{X})}{\partial X_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_N(\mathbf{X})}{\partial X_1} & \frac{\partial F_N(\mathbf{X})}{\partial X_2} & \frac{\partial F_N(\mathbf{X})}{\partial X_3} & \dots & \frac{\partial F_N(\mathbf{X})}{\partial X_N} \end{bmatrix} \quad (5.18)$$

Para um instante de tempo $t+\Delta t$, a matriz Jacobiana pode ser obtida, discretamente, como (WU e BALEANU, 2015):

$$\mathbf{J}(\mathbf{X}_{t+\Delta t}) = \mathbf{J}(\mathbf{X}_0) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{X}_{\Delta t}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{X}_{2\Delta t}) \cdot \dots \cdot \mathbf{J}(\mathbf{X}_{t-2\Delta t}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{X}_{t-\Delta t}) \cdot \mathbf{J}(\mathbf{X}_t) \Rightarrow \quad (5.19)$$

$$\mathbf{J}_{t+\Delta t} = \mathbf{J}_0 \cdot \mathbf{J}_{\Delta t} \cdot \mathbf{J}_{2\Delta t} \cdot \dots \cdot \mathbf{J}_{t-2\Delta t} \cdot \mathbf{J}_{t-\Delta t} \cdot \mathbf{J}_t$$

A obtenção do espectro dos expoentes de Lyapunov λ_i ($i=1, 2, \dots, N$) em $t+\Delta t$ é feita a partir da solução do problema de autovalor:

$$\mathbf{J}_{t+\Delta t} - \lambda \mathbf{I} = \mathbf{0} \Rightarrow \det|\mathbf{J}_{t+\Delta t} - \lambda \mathbf{I}| = 0 \quad (5.20)$$

Para os sistemas dinâmicos regidos pela Equação (2.46) e formulados em termos dos deslocamentos, Xu *et al.* (2020) apresentam a seguinte expressão para a matriz Jacobiana \mathbf{J} , usando-se o método de Newmark:

$$\mathbf{J}_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial \mathbf{F}_s}{\partial \mathbf{U}} \right|_{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \quad (5.21)$$

ao fim do processo iterativo em cada passo, o que conduz ao fato de que a matriz Hessiana (em relação ao funcional de energia potencial total Π_0 , Equação 2.31) é a matriz Jacobiana quando se tem por referência o sistema de equações de movimento (Equação 2.46), em relação a cada grau de liberdade. Generalizando, portanto, para os métodos de integração usados neste presente trabalho, a matriz Jacobiana para os algoritmos de Newmark, (*)- α (Generalizado- α , HHT- α , WBZ- α), TSTSM e TPSM é dada, respectivamente, por:

$$\mathbf{J}_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial^2 U_t}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{M}}{\beta \Delta t^2} + \frac{\gamma \mathbf{C}}{\beta \Delta t} \quad (5.22)$$

$$\mathbf{J}_{t+\Delta t} = (\alpha_f - 1) \left. \frac{\partial^2 U_t}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{(\alpha_m - 1)}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{(\alpha_f - 1) \gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \quad (5.23)$$

$$\mathbf{J}_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial^2 U_t}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{t+\gamma \Delta t} + \frac{1}{(\beta \Delta t)^2} \mathbf{M} + \frac{1}{\gamma \Delta t} \mathbf{C} \quad (5.24)$$

$$\mathbf{J}_{t+\Delta t} = \left. \frac{\partial^2 U_t}{\partial \mathbf{X}^2} \right|_{t+\Delta t} + \frac{6\gamma}{\alpha \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3\gamma}{\alpha \Delta t} \mathbf{C} \quad (5.25)$$

e os seus correspondentes parâmetros.

O Quadro 5.3 apresenta o algoritmo, neste trabalho denominado LPNV3, para determinação dos expoentes de Lyapunov a partir da matriz Jacobiana \mathbf{J} , usando o Método de Jacobi Generalizado. Apesar de ser uma abordagem direta, Parker e Chua (1989, p. 73) destacam limitações do método. Os mesmos autores recomendam o uso do algoritmo de ortogonalização de Gram-Schmidt.

Quadro 5.3: Determinação do espectro dos expoentes de Lyapunov (Algoritmo LPNV3).

-
-
1. Determinação, para o tempo estabelecido $T=t+\Delta t$, da matriz Jacobiana $\mathbf{J}_{t+\Delta t}$ (Equação 5.19);
 2. Enquanto a convergência não for obtida:
 - para ($j=1, n-1$)
 - para ($i=j+1, n$)
 - $p = j_{jj} i_{ji} - i_{jj} j_{ji}$
 - $q = j_{ii} i_{ji} - i_{ii} j_{ji}$
 - $r = j_{jj} i_{ii} - j_{ii} i_{jj}$
 - se ($r > 0$)
 - $x = 0.5 + \sqrt{0.25 r^2 + p q}$
 - senão
 - $x = 0.5 - \sqrt{0.25 r^2 + p q}$
 - fim se
 - $\alpha = \frac{q}{x}$; $\beta = -\frac{p}{x}$
 - Montagem da matriz \mathbf{P} (possui diagonal principal unitária, demais termos nulos); em seguida: $P_{ji} = \alpha$; $P_{ij} = \beta$
 - Diagonalização da matriz Jacobiana: $\bar{\mathbf{J}} = \mathbf{P}^T \mathbf{J} \mathbf{P}$
 - fim para
 - fim para
 - Verificação da Convergência: $\left| \frac{\bar{J}_i^2 - \bar{J}_{i-1}^2}{\bar{J}_i^2} \right| \leq \text{Tol}$
 - fim enquanto
 3. Obtenção do espectro dos expoentes de Lyapunov, para cada autovalor \bar{j}_i , de cada elemento da matriz diagonal transformada $\bar{\mathbf{J}}$ pela expressão: $\lambda_i = \frac{1}{kT} \ln(|\bar{j}_i|)$, sendo k o número (inteiro) de passos de tempo.
-
-

5.4 Teorema De Poincaré-Bendixson

O teorema de Poincaré-Bendixson é um dos poucos métodos conhecidos a estabelecer que órbitas fechadas existem em sistemas particulares, sendo ainda um dos principais resultados teóricos em dinâmica não linear, pois implica que o caos não pode ocorrer no plano de fase (STROGATZ, 2018). Sejam as suposições a seguir:

1. R é um subconjunto fechado e limitado do plano;

2. $\dot{\mathbf{x}}=\mathbf{f}(\mathbf{x})$ é um campo vetorial continuamente diferenciável em um conjunto aberto contendo R;
3. R não contém pontos fixos;
4. Existe uma trajetória C confinada em R, na medida em que se inicia em R e nele permanece para todos os tempos futuros (Figura 5.12).

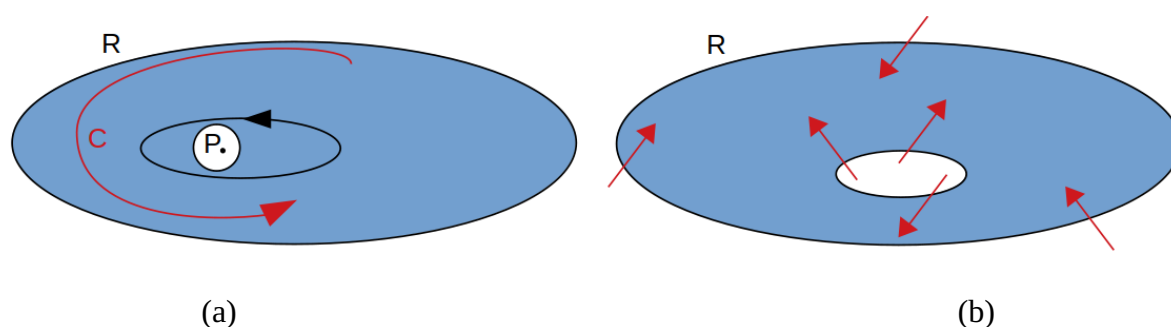


Figura 5.12: Representação no plano do subconjunto R relacionado ao teorema de Poincaré-Bendixson: (a) trajetória C sendo (ou tendendo a) uma órbita fechada e (b) campo vetorial atraído para o subconjunto R.

Destas suposições, pode-se concluir: ou C é uma órbita fechada, ou C se desenvolve em forma espiral em direção a uma órbita fechada na medida em que $t \rightarrow \infty$. Em ambos os casos, R contém uma órbita fechada (Figura 5.12). Maiores detalhes e referências sobre a prova deste teorema pode ser encontrada em Wiggins (2003).

Na Figura 5.12, a região R foi representada em forma de anel pois qualquer órbita fechada deve circundar um ponto fixo (P na Figura 5.12a) e nenhum ponto fixo é permitido em R pelas suposições anteriormente descritas.

Ao aplicar o teorema de Poincaré-Bendixson, as suposições (1) a (3) são satisfeitas mais facilmente, ao passo que a condição (4) é a mais difícil, pois a princípio não se pode ter certeza da existência de uma trajetória confinada em C. No entanto, segundo Strogatz (2018), o artifício consiste em construir uma região de “aprisionamento” ou “captura” R, ou seja, um conjunto conectado fechado tal que o campo vetorial aponte “para dentro” em todo e qualquer lugar na fronteira de R (Figura 5.12b). Conseqüentemente, todas as trajetórias em R são confinadas. Este fato, associado à suposição (3), garante que R contém uma órbita fechada. De acordo com o mesmo autor, o teorema de Poincaré-Bendixson pode ser difícil de se aplicar na prática.

Assim, o teorema de Poincaré-Bendixson é um dos resultados centrais da dinâmica

não linear, pois destaca que as possibilidades dinâmicas no plano de fase são muito limitadas: se uma trajetória está confinada a uma região fechada e limitada que não contém pontos fixos, então a trajetória deve eventualmente se aproximar de uma órbita fechada. Nada mais complexo é possível (STROGATZ, 2018).

Mas este resultado depende essencialmente da bidimensionalidade do plano. Em sistemas de dimensões superiores ($n \geq 3$), sendo n o número de variáveis de estado do problema, o teorema de Poincaré-Bendixson não mais se aplica, e um novo cenário é possível: trajetórias podem se desenvolver indefinidamente em uma região limitada sem se estabelecer em um ponto fixo ou uma órbita fechada, inclusive podendo ser atraídas por um objeto geométrico complexo (atrator estranho), um conjunto fractal cujo movimento é aperiódico e altamente sensível a pequenas mudanças nas condições iniciais. Essa sensibilidade torna o movimento imprevisível a longo prazo. Em resumo, o teorema de Poincaré-Bendixson implica que o caos nunca poderá ocorrer no plano de fase.

5.5 Seções de Poincaré

Na maior parte dos sistemas contínuos não-lineares, as soluções analíticas são muito complexas e, por vezes, impossíveis. Porém, em vez de se estudar o sistema contínuo, é possível observar os tempos discretos em que a trajetória de uma grandeza (posição, deslocamento, velocidade ou aceleração, por exemplo) seja representada por uma sequência de pontos em um plano de fase ou espaço (LAYEK, 2015).

A técnica proposta por Henri Poincaré, conhecida como Seção (ou Mapa) de Poincaré, estabelece uma ligação entre o sistema contínuo e o seu análogo discreto. No entanto, esta representação não fornece nenhuma informação sobre a história temporal da evolução da trajetória (LAYEK, 2015).

Os mapas de Poincaré são úteis para estudar trajetórias em espiral, como aquelas próximas a uma órbita periódica. Seja um sistema N -dimensional $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e S uma superfície transversal à trajetória com dimensão $n-1$ (Figura 5.13). Desta forma, todas as trajetórias iniciadas em S se desenvolvem através dele, e não paralelas a ele (STROGATZ, 2018).

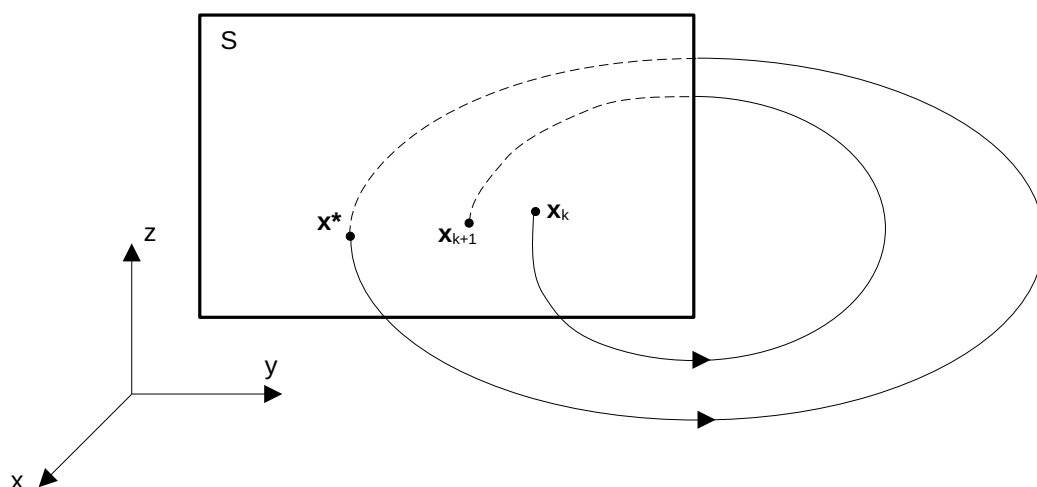


Figura 5.13: Superfície S transversal a um sistema N -dimensional e trajetórias se desenvolvendo através dela.

Define-se o mapa de Poincaré P como um mapeamento a partir de S para si mesmo, obtido seguindo trajetórias de uma interseção com S até a próxima. Se $\dot{\mathbf{x}}_k \in S$ denota a k -ésima interseção, então o mapa de Poincaré é definido como

$$\dot{\mathbf{x}}_{k+1} = P(\dot{\mathbf{x}}_k) \quad (5.26)$$

Supondo que \mathbf{x}' seja um ponto fixo de P , ou seja, $P(\mathbf{x}') = \mathbf{x}'$. Então uma trajetória iniciando em \mathbf{x}' retorna a este mesmo ponto após algum tempo t sendo, portanto, uma órbita fechada para o sistema original $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Além disso, observando o comportamento de P próximo a esse ponto fixo, pode-se determinar a estabilidade da órbita fechada (STROGATZ, 2018).

Portanto, o mapa de Poincaré converte problemas relativos a órbitas fechadas em problemas discretos de pontos fixos de um mapeamento (em princípio, mais simples), embora nem sempre na prática (STROGATZ, 2018).

De acordo com Davies (2018), uma questão crucial para o estudo do caos é a definição de uma órbita caótica como aquela que não é periódica (nem mesmo na bacia de atração de uma órbita periódica estável) e que tem um expoente de Lyapunov positivo. A questão da periodicidade de longo prazo pode ser resolvida apenas na seção de Poincaré.

5.5.1 O mapa do período

Ao se tirar *snapshots* (ou retratos, ou instantâneos) de onde o sistema se encontra no plano de fase, em uma sequência temporal, sempre se obtém um conjunto de pontos no plano. E o fundamental, de acordo com Davies (2018), é sua relação com a frequência da perturbação externa, vinda da seguinte propriedade das equações diferenciais: se $[x(t), y(t)]$ é uma solução, então também o é $[x(t+2\pi/\Omega), y(t+2\pi/\Omega)]$.

Isso é consequência da premissa de que, ao se mudar a variável de tempo:

$$t \rightarrow t' = t + \frac{2\pi}{\Omega} \quad (5.27)$$

não há mudança nas equações diferenciais. Por um lado, $d/dt = d/dt'$. Por outro, a força periódica (regente) permanece inalterada, pois:

$$k \cos \Omega t' = k \cos \Omega (t + 2\pi/\Omega) = k \cos \Omega (t) \quad (5.28)$$

Em geral, as duas soluções não são as mesmas. Chamando-as de $[x_0(t), y_0(t)]$ e $[x_1(t), y_1(t)]$, a relação entre ambas é dada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= x_0(t + 2\pi/\Omega) \\ y_1(t) &= y_0(t + 2\pi/\Omega) \end{aligned} \quad (5.29)$$

O primeiro par $[x_0(t), y_0(t)]$ é a única solução com os valores iniciais:

$$\begin{aligned} x_0(t_0) &= x_0 \\ y_0(t_0) &= y_0 \end{aligned} \quad (5.30)$$

e, após um ciclo, eles assumem os valores:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0(t_0 + 2\pi/\Omega) \\ y_1 &= y_0(t_0 + 2\pi/\Omega) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Estes são os valores iniciais para a solução $[x_1(t), y_1(t)]$, partindo-se de $t=t_0$. As duas soluções são, de fato, parte da mesma órbita (infinita).

Segundo Davies (2018), o argumento que leva a essa conclusão se aplica a qualquer sistema com regência periódica, não apenas ao caso em que o termo de regência é trigonométrico.

5.5.2 Fase da seção e seções de Poincaré

Um tempo inicial t_0 é equivalentemente especificado por uma fase inicial $\varphi_0=\Omega t_0$, que pode ser incrementada por qualquer múltiplo inteiro de 2π . Deste fato, pode-se fazer duas definições, de acordo com Davies (2018).

5.5.2.1 Fase da seção:

Dado um tempo inicial t_0 , a fase correspondente da seção é dada por:

$$\varphi_0 = \Omega t_0; \quad \text{mod}(2\pi) \quad (5.32)$$

ou seja, φ_0 é reduzido por um múltiplo inteiro de 2π , de modo a permanecer no intervalo $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$.

Dado um ponto inicial qualquer (x_0, y_0) , começando na fase inicial φ_0 , as equações diferenciais determinam uma órbita única, que chega a um ponto

$$(x_1, y_1) = [x_0(t_0 + 2\pi/\Omega), y_0(t_0 + 2\pi/\Omega)] = [x_1(t_0), y_1(t_0)] \quad (5.33)$$

após um período da força regente. Apesar de o tempo ser incrementado em $2\pi/\Omega$, a fase permanece a mesma. Em outras palavras, este é um mapa bidimensional do plano de fase para si mesmo, no qual a fase aparece como parâmetro. O ponto vital é que este mapa contém informações completas sobre a dinâmica do sistema (DAVIES, 2018).

5.5.2.2 Seções de Poincaré:

Dada uma fase da seção φ_0 , a órbita do mapa:

$$(x_0, y_0) \rightarrow (x_1, y_1) \rightarrow \dots \rightarrow (x_k, y_k) \rightarrow \dots \quad (5.34)$$

gerado por posições de amostragem no plano de fase em uma sequência de valores discretos de tempo

$$t = t_0 \rightarrow t_1 = t_0 + 2\pi/\Omega \rightarrow \dots \rightarrow t_k = t_{k-1} + 2\pi/\Omega \rightarrow \dots \quad (5.35)$$

é uma seção de Poincaré da órbita correspondente da equação diferencial.

Como consequência, para especificar a condição inicial de um sistema sob força periódica, basta especificar (x_0, y_0) , restringindo φ_0 por $0 \leq \varphi_0 < 2\pi$.

5.5.3 Periodicidade

Qualquer órbita periódica, cujo período seja o mesmo da força externa, será um ponto fixo da seção de Poincaré. Por outro lado, se uma órbita é um ponto fixo da seção de Poincaré, então ela será periódica em função do tempo, satisfazendo a seguinte relação:

$$\begin{aligned} x(t + 2\pi/\Omega) &= x(t) \\ y(t + 2\pi/\Omega) &= y(t) \end{aligned} \quad (5.36)$$

visto que as novas condições iniciais, após um certo período, são idênticas às originais. Generalizando, se uma solução determina uma órbita de período n da seção de Poincaré (como um mapa), então ela é periódica em função do tempo, de forma que:

$$\begin{aligned} x(t + 2\pi n/\Omega) &= x(t) \\ y(t + 2\pi n/\Omega) &= y(t) \end{aligned} \quad (5.37)$$

Isso significa que as seções Poincaré possuem informações relevantes sobre a periodicidade da solução completa correspondente, embora as informações de frequência

sejam restritas a valores não superiores a $\Omega/2$. Naturalmente, a solução completa terá componentes de frequência mais alta (detalhes mais finos) que são perdidos ao se investigar a seção de Poincaré ao invés das equações diferenciais (DAVIES, 2018).

5.6 Exemplos

Com o intuito de validar os códigos para cálculo dos expoentes de Lyapunov e para o traçado da seção de Poincaré, implementados em linguagem FORTRAN, cinco exemplos são apresentados. Apesar de alguns deles não serem diretamente relacionados à área de Engenharia Estrutural, os mesmos são tidos como boas referências para testes de algoritmos aplicados à quantificação do caos.

5.6.1 Modelo matemático para descrição de populações biológicas

O primeiro exemplo consiste em um modelo matemático simples usado para descrever o crescimento de populações biológicas. Devido à sua simplicidade matemática, esse modelo é frequentemente usado como plataforma de teste para novas ideias a respeito do caos (HILBORN, 2001).

Seja uma certa espécie de insetos que tenha como característica o fato de sua população nascer e morrer na mesma estação do ano. Seja N_0 a população inicial desta espécie. Pode-se determinar a população nos n anos seguintes a partir da seguinte relação:

$$\begin{aligned} N_1 &= A N_0 - B N_0^2 \\ N_2 &= A N_1 - B N_1^2 \\ N_3 &= A N_2 - B N_2^2 \\ &\vdots \\ N_{n+1} &= A N_n - B N_n^2 \end{aligned} \tag{5.38}$$

sendo A um parâmetro que depende das condições da natureza/ambiente (alimento, condições climáticas etc) e B um parâmetro que considera, em situação de crescimento populacional desenfreado, fatores como escassez de alimento para a população em estudo, vulnerabilidade ante a predadores etc.

Nota-se na Equação (5.38) que, para pequenos valores de N , o termo quadrático não

exerce influência significativa na estimativa populacional do ano seguinte.

O valor limite para a população pode ser obtido fazendo-se:

$$N_{n+1} > 0 \Rightarrow A N_n - B N_n^2 = 0 \Rightarrow N_n = N^{\max} = \frac{A}{B} \quad (5.39)$$

Seja a fração da população em relação à população máxima no ano corrente X_n definida como:

$$X_n = \frac{N_n}{N^{\max}} = \frac{N_n}{A/B} \quad 0 < X_n \leq 1 \quad (5.40)$$

Nos anos posteriores, a fração da população X_{n+1} é determinada da seguinte forma:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= \frac{N_{n+1}}{N^{\max}} = A \frac{N_n}{N^{\max}} - B \left[\frac{N_n}{N^{\max}} \right]^2 = A \frac{N_n}{N^{\max}} - B \left[\frac{N_n}{N^{\max}} X_n \frac{A}{B} \right] \Rightarrow \\ X_{n+1} &= A X_n - A X_n^2 = A X_n (1 - X_n) = f_A(X_n) \end{aligned} \quad (5.41)$$

sendo $f_A(X_n)$ chamada função de iteração por descrever a fração populacional nos anos subsequentes iterando as operações matemáticas indicadas.

A Tabela 5.1 apresenta o mapa logístico para $A=3.99$ na Equação (5.41). Três diferentes trajetórias de crescimento foram consideradas ($X_n^{(A)}$, $X_n^{(B)}$ e $X_n^{(C)}$), a partir de pontos iniciais X_i diferentes ($0 \leq i < n$). Foram realizadas duas combinações de trajetórias ($X_n^{(A)}$; $X_n^{(B)}$) e ($X_n^{(A)}$; $X_n^{(C)}$). A mesma tabela mostra as diferenças absolutas d_n relativas a cada combinação. A evolução das trajetórias em função do número de passos n é apresentada na Figura 5.14.

Tabela 5.1: Trajetórias X_n para o mapa logístico e diferenças absolutas $d_n^{(i)}$ entre as trajetórias ($A=3.99$). Fonte: Hilborn (2001). Adaptada.

n	$X_n^{(A)}$	$X_n^{(B)}$	$X_n^{(C)}$	$d_n^{(1)}= X_n^{(A)} - X_n^{(B)} $	$d_n^{(2)}= X_n^{(A)} - X_n^{(C)} $
0	0.4000	0.4010	0.4005	0.00100	0.00050
1	0.9576	0.9584	0.9580	0.00080	0.00040
2	0.1620	0.1591	0.1605	0.00290	0.00150
3	0.5417	0.5338	0.5377	0.00790	0.00400
4	0.9906	0.9929	0.9918	0.00230	0.00120
5	0.0373	0.0280	0.0324	0.00930	0.00490
6	0.1432	0.1085	0.1250	0.03470	0.01820
7	0.4894	0.3860	0.4365	0.10340	0.05290
8	0.9971	0.9456	0.9814	0.05150	0.01570
9	0.0117	0.2052	0.0727	0.19350	0.06100
10	0.0462	0.6507	0.2691	0.60450	0.22290
11	0.1758	0.9069	0.7847	0.73110	0.60890
12	0.5781	0.3368	0.6740	0.24130	0.09590
13	0.9731	0.8912	0.8767	0.08190	0.09640
14	0.1043	0.3870	0.4314	0.28270	0.32710
15	0.3727	0.9465	0.9787	0.57380	0.60600

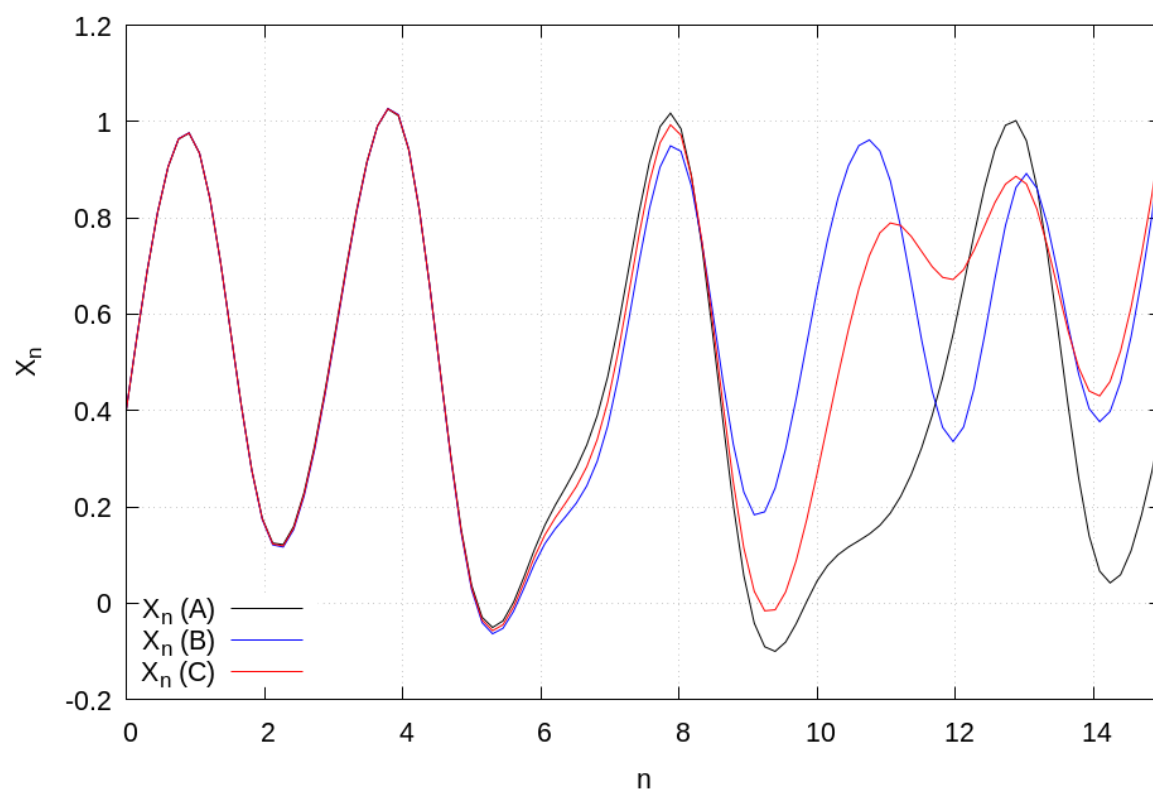


Figura 5.14: Evolução das trajetórias em função do número de iterações n (anos).

A Figura 5.15 mostra o logaritmo natural das diferenças das trajetórias como função do número de passos n do mapa logístico para as duas combinações em estudo. Em média, a divergência de trajetórias próximas entre si é exponencial (e aproximadamente reta quando se traça os gráficos do logaritmo natural desta divergência), mas podem ocorrer dispersões consideráveis em relação a essa média. No exemplo proposto, observa-se que a divergência não é mais exponencial para $n \geq 10$. Considerando-se o gráfico da Figura 5.15 e os dados da Tabela 5.1, verifica-se que há um aumento súbito nas diferenças entre as trajetórias $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$ e $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$.

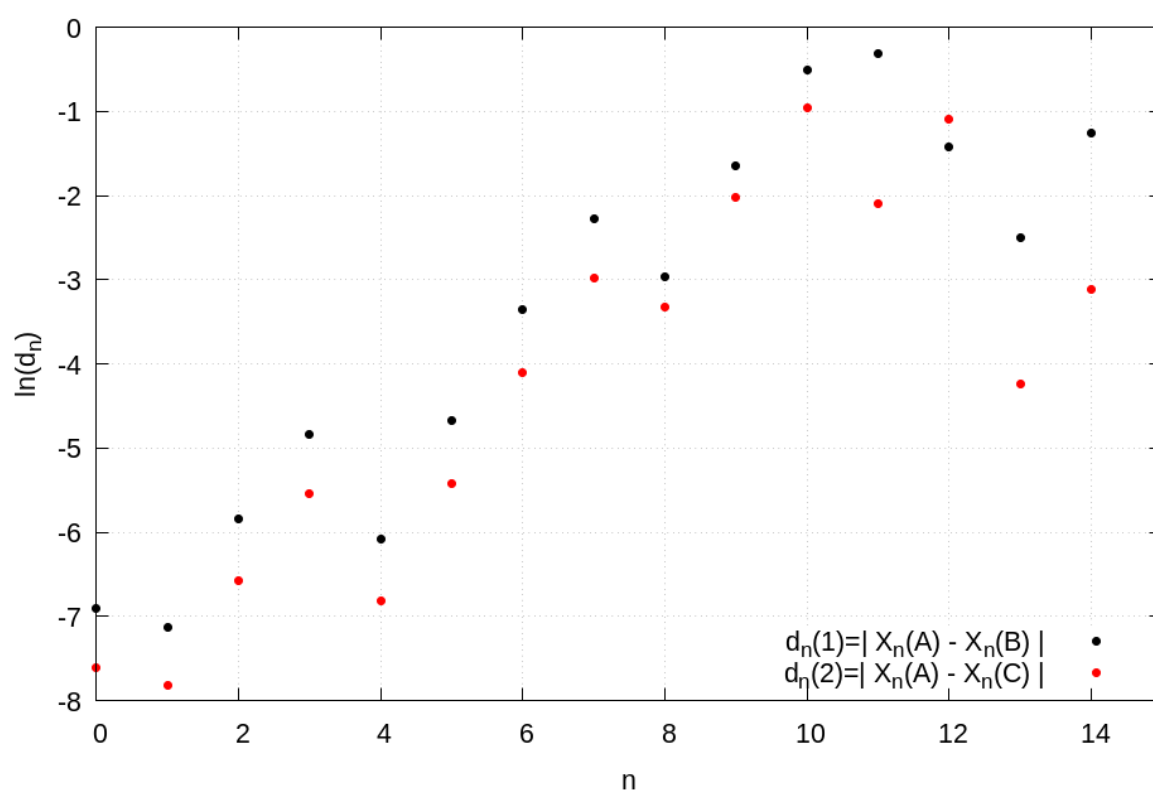


Figura 5.15: Logaritmo natural das diferenças das trajetórias em termos de n para as combinações $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$ e $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$.

Segundo Hilborn (2001), isso ocorre sempre que o tamanho da diferença entre as duas trajetórias aumenta para o tamanho do atrator. Pelo fato do sistema ser limitado, a diferença entre as trajetórias não pode exceder esse tamanho. Assim, torna-se importante delimitar o intervalo de tempo (ou equivalentemente, o número de iterações n) para o ajuste da linha (algoritmo LPNV1). Para demonstrar o fato, na Figura 5.16 são apresentadas as retas que melhor se ajustam aos conjuntos de pontos para $n \leq 9$.

A inclinação da reta que melhor se ajusta ao conjunto de pontos com pequenas dispersões entre si fornece o Expoente de Lyapunov. Na Figura 5.16, observa-se que o Expoente de Lyapunov é $\lambda_1=0.640687$ para a combinação $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$ e $\lambda_1=0.679428$ para a combinação $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$.

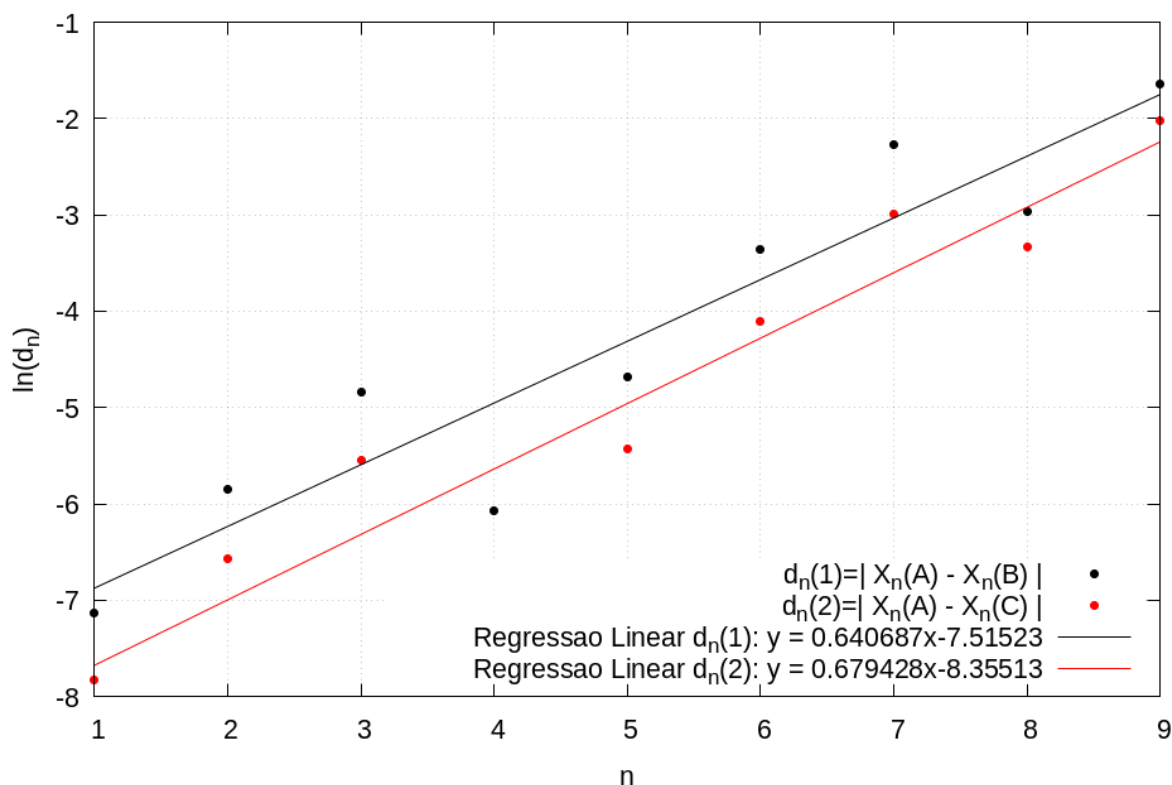


Figura 5.16: Ajuste dos pontos referentes às combinações $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$ e $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$ por retas ($1 \leq n \leq 9$).

A Tabela 5.2 mostra os valores dos expoentes de Lyapunov obtidos para o exemplo proposto (utilizando a rotina computacional em FORTRAN). Verifica-se boa concordância entre o valor apresentado por Hilborn (2001) e o obtido no presente trabalho. Além disso, os valores estão consistentes com aqueles obtidos graficamente (Figura 5.16). A variação percentual relativa à diferença entre as trajetórias $X_n^{(A)}$ e $X_n^{(B)}$ é de 0.07%. O presente trabalho apresenta ainda o valor de λ_1 obtido pela combinação entre as trajetórias $X_n^{(A)}$ e $X_n^{(C)}$, bem como o de $\hat{\lambda}_1$ relativo às duas combinações. Ressalta-se que os valores positivos indicam comportamento caótico do sistema no intervalo considerado.

Tabela 5.2: Expoentes de Lyapunov para as combinações $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$ e $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$ no exemplo proposto usando o algoritmo LPNV1.

Expoente de Lyapunov	Hilborn (2001)		Presente Trabalho		Variação Percentual (%)	
	Combinação $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$	Combinação $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$	Combinação $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$	Combinação $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$	Combinação $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$	Combinação $(X_n^{(A)}; X_n^{(C)})$
λ_1	0.64	-	0.640440	0.609987	0.07	-
$\overset{\circ}{\lambda}_1$	-	-	1.006953	0.976500	-	-
(bits/anos)						

A Tabela 5.3 mostra os resultados obtidos pelo Algoritmo LPNV2, usando apenas 1 ponto mais próximo ao ponto de análise. Observa-se, como no caso anterior, boa concordância com o valor apresentado em Hilborn (2001) para a série $X_n^{(A)}$, com variação de 2.018%, com a vantagem de se obter o valor a partir de uma única série conhecida, sem necessidade de se alterar as condições iniciais. Por outro lado, o valor obtido para a série $X_n^{(B)}$ mostra resultado mais divergente em relação aos demais (21.747%).

Tabela 5.3: Expoentes de Lyapunov para as combinações $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$ no exemplo proposto usando o algoritmo LPNV2.

Expoente de Lyapunov	Hilborn (2001)	Presente Trabalho		Variação Percentual (%)	Variação Percentual (%)	Número de pontos mais próximos ao ponto de análise
	Combinação $(X_n^{(A)}; X_n^{(B)})$	Série $X_n^{(A)}$	Série $X_n^{(B)}$	Relativo à Série $X_n^{(A)}$	Relativo à Série $X_n^{(B)}$	
λ_1	0.64	0.627082	0.779184	2.018	21.747	1

5.6.2 Oscilador de Duffing

O oscilador de Duffing é comumente empregado para se estudar vibrações não lineares, na modelagem de circuitos resistor-indutor-capacitor forçados periodicamente, ou mesmo em estudos de estabilidade, soluções harmônicas, soluções subarmônicas, transitórias, comportamento caótico, controle do caos e mapas de Poincaré (BANERJEE *et al.*, 2011).

Matematicamente, o oscilador de Duffing pode ser representado pela seguinte expressão:

$$m \ddot{x} + c \dot{x} + F_i = F_{\text{ext}} \quad (5.42)$$

sendo:

$$\begin{aligned} F_i &= a x^3 - b x \\ F_{\text{ext}} &= \Gamma \cos(\theta) = \Gamma \cos(\omega t) \end{aligned} \quad (5.43)$$

Fisicamente, a Equação (5.42) pode ser interpretada como um sistema de 1 grau de liberdade formado por uma massa m acoplada a um mecanismo de amortecimento c e a uma mola não-linear cuja força restauradora F_i é polinomial de ordem 3, e submetido a uma força externa harmônica F_{ext} de amplitude Γ e frequência de excitação ω (Figura 5.17).

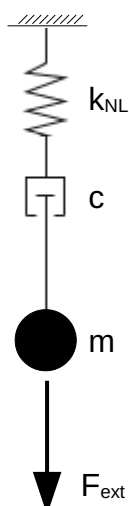


Figura 5.17: Oscilador de Duffing.

A solução do sistema pode ser obtida fazendo-se $\dot{x}=y$ e rearranjando-se a Equação (5.42) da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= bx - cy - ax^3 + F_{\text{ext}} \end{aligned} \quad (5.44)$$

No presente exemplo, para vibração forçada, foram considerados os seguintes parâmetros para a Equação (5.44): $b=1.0$, $c=0.3$, $a=1.0$ e $\omega=1.25$. Para integração numérica no tempo foi usada o método de Runge-Kutta, a partir do *software* wxMaxima, com $t_f=200$ e

$\Delta t=0.05$ (para os diagramas de fase) e $\Delta t=0.05(2\pi/\omega)$ para as seções de Poincaré. A condição inicial foi adotada como $[x,y]=[1,0]$.

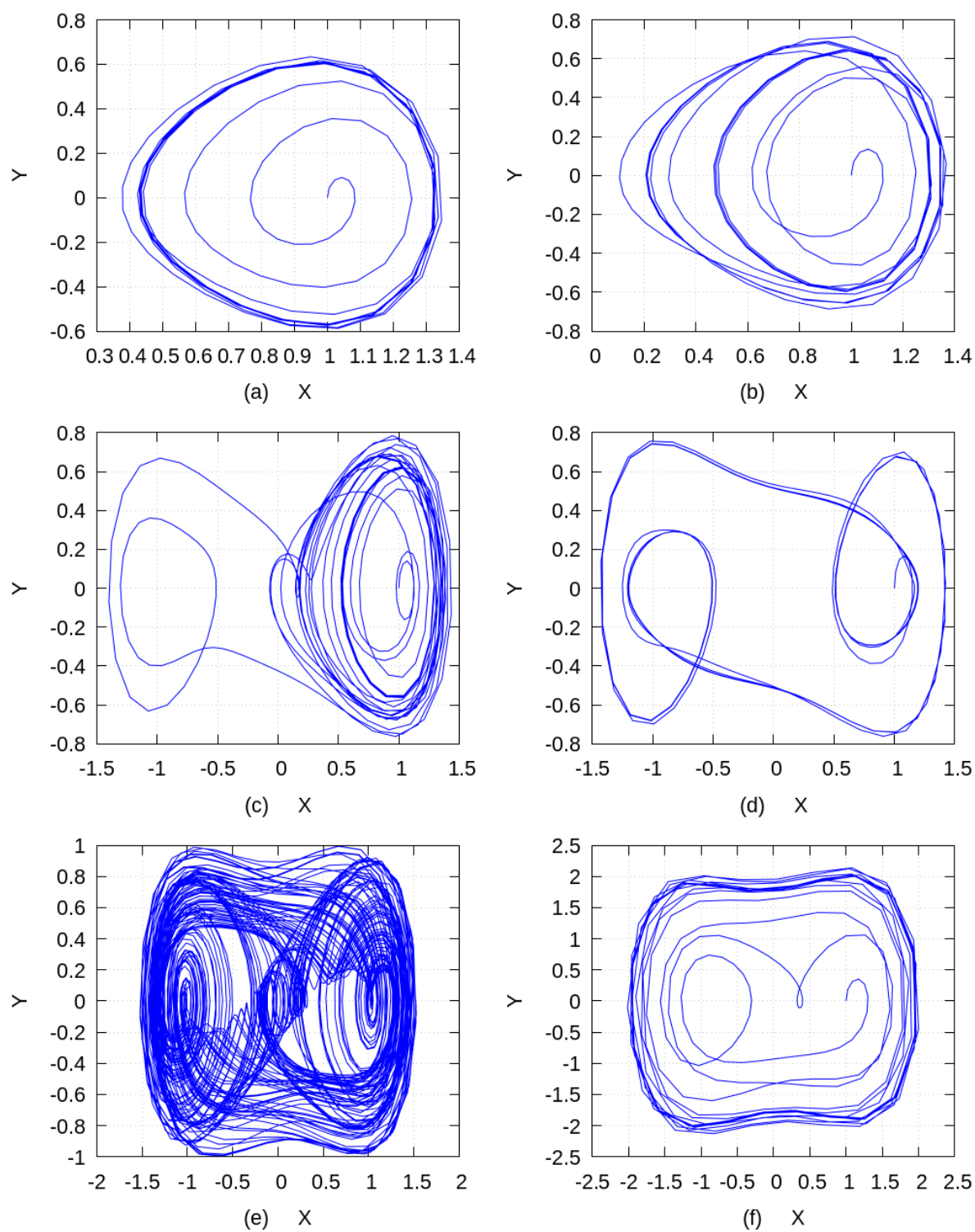


Figura 5.18: Diagramas de fase para o oscilador de Duffing: (a) $\Gamma=0.2$; (b) $\Gamma=0.3$; (c) $\Gamma=0.31$; (d) $\Gamma=0.37$; (e) $\Gamma=0.5$ e (f) $\Gamma=0.8$.

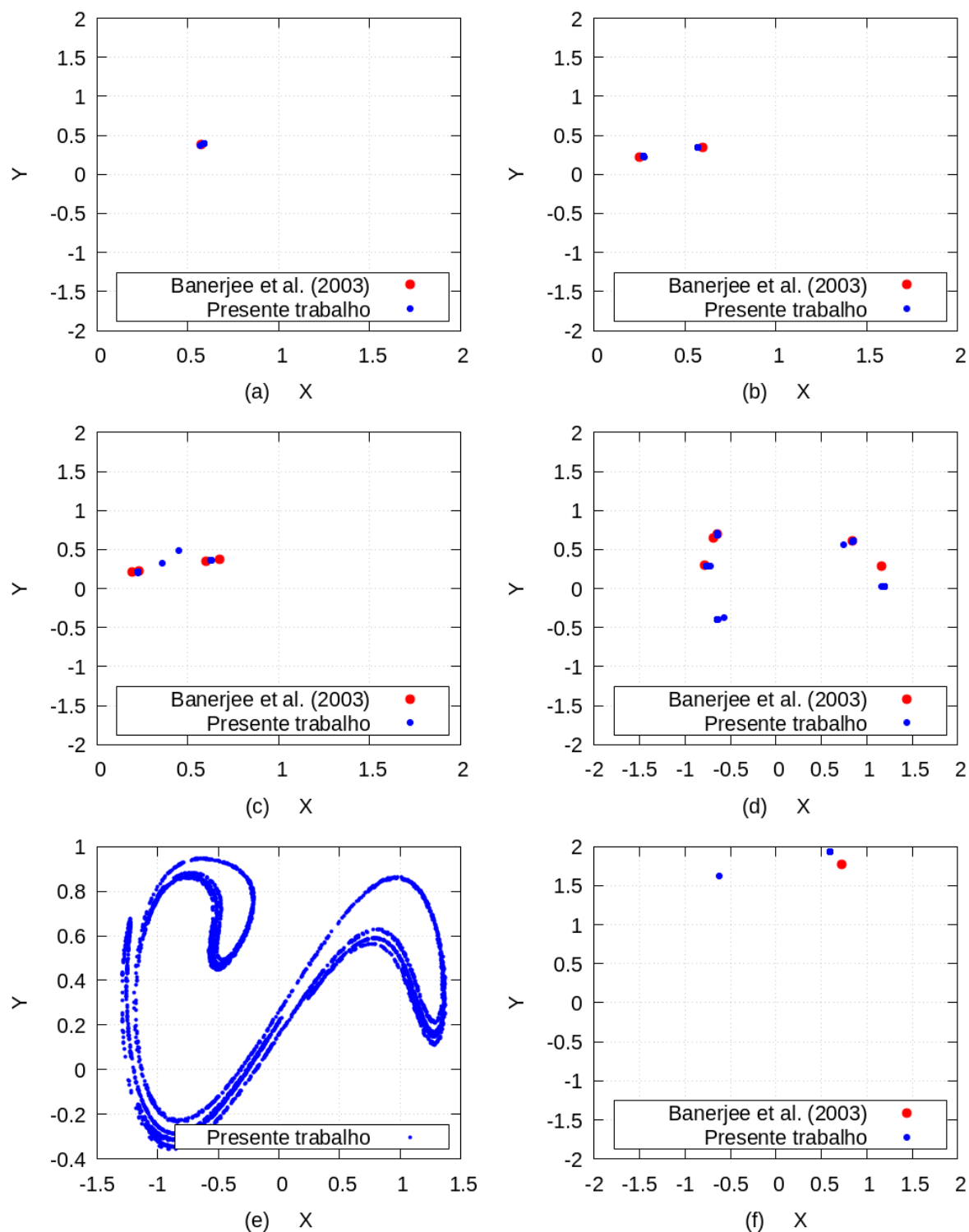


Figura 5.19: Seções de Poincaré para o oscilador de Duffing: (a) $\Gamma=0.2$; (b) $\Gamma=0.3$; (c) $\Gamma=0.31$; (d) $\Gamma=0.37$; (e) $\Gamma=0.5$ e (f) $\Gamma=0.8$.

A Figura 5.18 mostra os diagramas de fase para o oscilador de Duffing para diferentes valores de amplitude de carregamento Γ . Os resultados mostram boa concordância com

Banerjee *et al.* (2011, págs. 20 e 21). O mesmo se observa para as seções de Poincaré (Figura 5.19). Quando $\Gamma=0.2$ existe uma solução cujo ciclo possui um único período $T=2\pi/\omega$, que é representada como uma curva fechada no plano de fase (destacada pela região mais espessa do gráfico, Figura 5.18a), e como um único ponto no plano $\theta=0$ (Figura 5.19a).

Quando $\Gamma=0.3$ aparece um ciclo com dois períodos cujo $T=4\pi/\omega$ (Figura 5.18b), ou seja, um subarmônico de ordem 1/2. Este ciclo resulta em dois pontos na seção de Poincaré (Figura 5.19b). Nota-se que a trajetória se cruza neste caso.

Um ciclo com quatro períodos ($T=8\pi/\omega$) ocorre quando $\Gamma=0.31$ (Figuras 5.18c e 5.19c) e, quando $\Gamma=0.37$, há um ciclo de cinco períodos (Figura 5.19d) com centro em $[x,y]=[0,0]$ (Figura 5.18d).

No entanto, para $\Gamma=0.5$, o sistema se comporta de forma caótica. Uma única trajetória no diagrama de fase se cruza várias vezes, tornando este gráfico um tanto quanto confuso (Figura 5.18e). No entanto, a se traçar os primeiros retornos na seção de Poincaré, obtém-se um atrator estranho que mostra certa estrutura/formato (Figura 5.19e). Segundo Banerjee *et al.* (2011), o atrator caótico pode ter formas diferentes em diferentes seções de Poincaré.

Finalmente, em $\Gamma=0.8$, observa-se mais uma solução estável com ciclo de período um, centrado em O (Figuras 5.18f e 5.19f). Vale ressaltar que alguns pontos não coincidem com a resposta de Banerjee *et al.* (2011) na Figura 5.19, visto que os referidos autores consideraram, ao que parece, a resposta somente nas regiões em que as trajetórias são periódicas, depois de um certo tempo t , ao passo que, neste trabalho, as seções passaram a ser traçadas desde o instante inicial.

5.6.3 Expoentes de Lyapunov para mapas de sistemas dissipativos

Neste exemplo procura-se determinar os expoentes de Lyapunov pelos algoritmos LPNV2 e LPNV3 para os mapas dissipativos de Hénon, Lozi, Ikeda e *Delayed Logistic* previamente apresentados neste capítulo, com os respectivos coeficientes e condições iniciais, e comparando-os com resultados clássicos da literatura.

A Tabela 5.4 apresenta um comparativo entre os expoentes de Lyapunov para os mapas dissipativos usando o algoritmo LPNV2. Verifica-se muito boa concordância entre os resultados de Sprott (2003) e os do presente trabalho, exceto para o mapa de Ikeda, que mostrou a maior variação (23.55%), e 135 pontos mais próximos ao ponto analisado (neste

caso, o atrator), e com o mapa *Delayed Logistic* mostrando a menor variação (0.22%) com o menor número de pontos próximos ao atrator (10 pontos).

Na Figura 5.20 são mostradas as curvas de convergência do maior expoente de Lyapunov em relação ao número de pontos mais próximos ao ponto de análise N . Destaca-se os gráficos de Lozi (Figura 5.20a) que mostra picos de valor no intervalo $20 \leq N \leq 35$, sendo o mais acentuado para N entre 20 e 25, e o de Ikeda, que mostra picos iniciais nos valores de expoente e posterior estabilidade com o aumento de N .

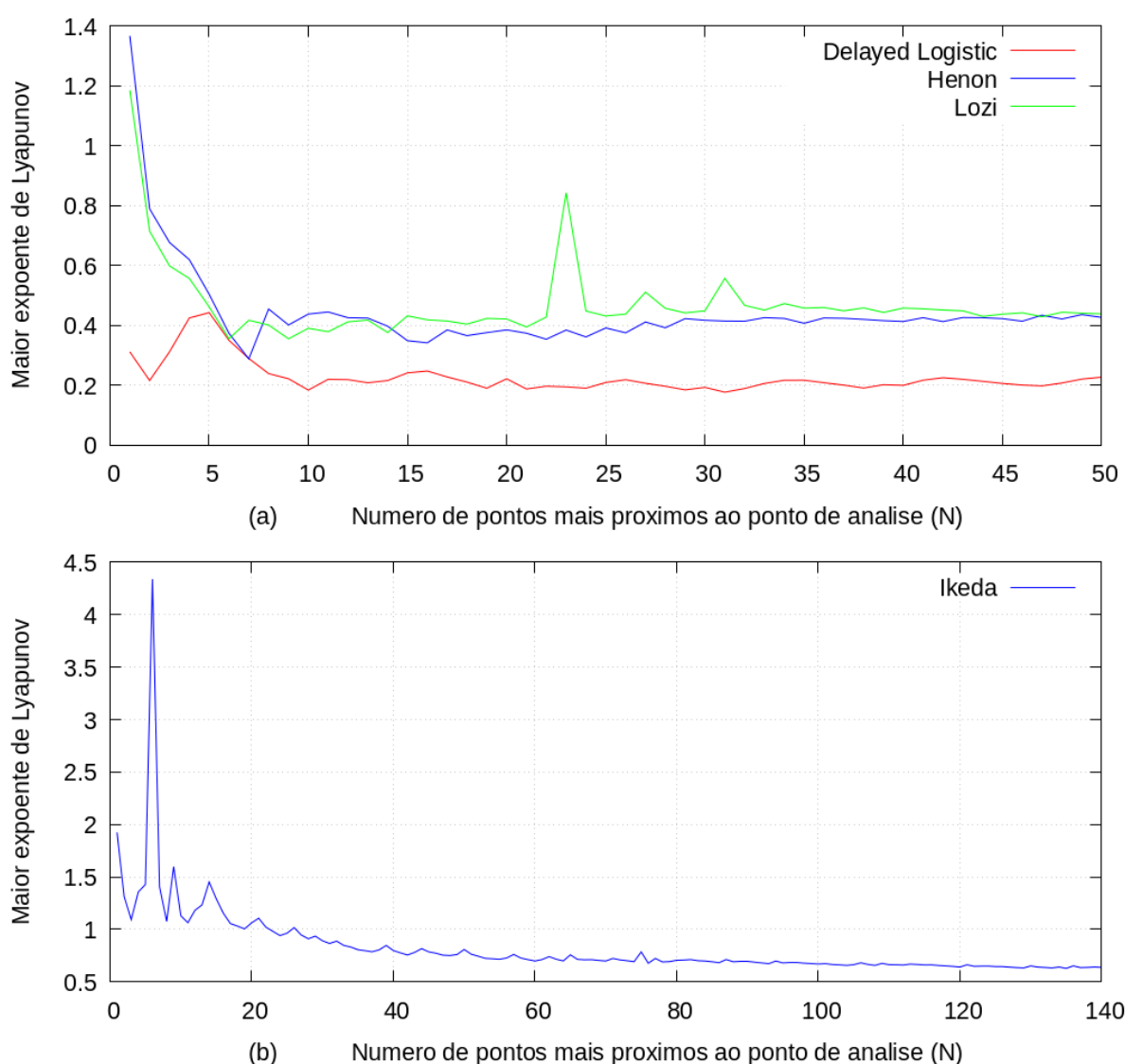


Figura 5.20: Convergência do maior expoente de Lyapunov (algoritmo LPNV2) em função do número de pontos mais próximos ao ponto de análise (N) para mapas dissipativos: (a) Hénon, Lozi e Delayed Logistic e (b) Ikeda.

Tabela 5.4: Comparativo entre os expoentes de Lyapunov para os mapas dissipativos: Hénon, Lozi, Ikeda e Delayed Logistic a partir do algoritmo LPNV2.

Mapa	Expoente	Sprott (2003)	Presente Trabalho (algoritmo preditor NL)	Variação Percentual (%)	Número de pontos mais próximos ao ponto de análise
Hénon	λ_1	0.41922	0.42605	1.63	50
	λ_2	-1.62319	-	-	
Lozi	λ_1	0.47023	0.47228	6.90	50
	λ_2	-1.16338	-	-	
Ikeda	λ_1	0.5076	0.62712	23.55	135
	λ_2	-0.71832	-	-	
Delayed	λ_1	0.18312	0.18352	0.22	10
Logistic	λ_2	-1.24199	-	-	

Com relação ao algoritmo LPNV3, a Tabela 5.5 apresenta os resultados do espectro dos expoentes de Lyapunov em comparação a Sprott (2003). Verifica-se boa concordância também entre os resultados, com um menor número de pontos próximos ao ponto de análise. Diferentemente do algoritmo LPNV2, a variação para o mapa *Delayed Logistic* foi de 39.39% para o maior expoente λ_1 e 0.08% para o segundo expoente λ_2 , ao passo que o mapa de Ikeda mostra uma variação de 5.06% para o maior expoente λ_1 e 1.74% para o segundo expoente λ_2 .

Tabela 5.5: Comparativo entre os expoentes de Lyapunov para os mapas dissipativos de Hénon, Lozi, Ikeda e Delayed Logistic a partir do algoritmo LPNV3.

Mapa	Expoente	Sprott (2003)	Presente Trabalho (matriz Jacobiana)	Variação Percentual (%)	Número de pontos mais próximos ao ponto de análise
Hénon	λ_1	0.41922	0.4799849	14.49	16
	λ_2	-1.62319	-1.6098506	0.82	
Lozi	λ_1	0.47023	0.4267107	9.25	25
	λ_2	-1.16338	-1.1084908	4.72	
Ikeda	λ_1	0.5076	0.5332690	5.06	16
	λ_2	-0.71832	-0.7308200	1.74	
Delayed	λ_1	0.18312	0.2552428	39.39	28
Logistic	λ_2	-1.24199	-1.2429776	0.08	

5.6.4 Arco senoidal abatido sob carga triangular crescente

Neste exemplo, retorna-se novamente ao arco senoidal apresentado no Capítulo 2 (item 2.4.1) submetido, porém, a uma carga uniformemente distribuída com variação triangular crescente no tempo conforme mostra a Figura 5.21. Este arco foi estudado por Galvão (2004), Silva (2009), Rosas (2016) e Fernandes *et al.* (2018). O material possui massa específica de $78 \times 10^{-8} \text{Ns}^2/\text{mm}^4$ e módulo de elasticidade longitudinal 210GPa. O arco foi discretizado em 18 elementos. A taxa de amortecimento considerada na análise foi $\xi=0.10$, o intervalo de tempo $t=0.0004\text{s}$ e o fator de carga $\lambda=0.2$. Neste caso, considerou-se a proporcionalidade em relação à massa.

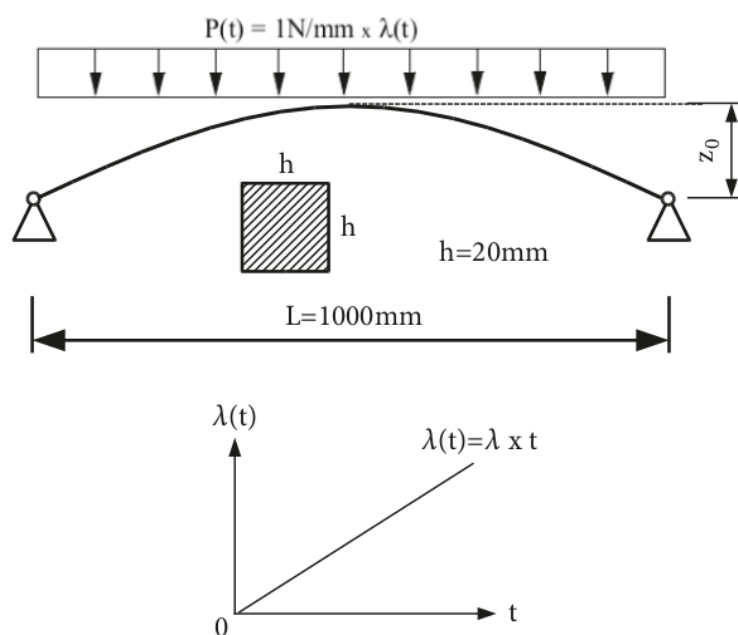


Figura 5.21: Arco abatido sob carga uniformemente distribuída variando de forma triangular crescente no tempo.

A Figura 5.22a mostra a resposta transiente relativa às posições verticais para o nó central, considerando uma taxa de amortecimento $\xi=0.10$. O intervalo de tempo entre 0s e 1.7s corresponde ao período antes do *snap-through*, sendo que a resposta para o esquema Generalizado- α exibe esse comportamento antes daquela relacionada a Newmark. A mudança súbita de posição ocorre após 1.7s e, neste caso, a resposta amortecida tende a um valor estático para a posição nodal, a saber, 18mm para $t=4.5\text{s}$. Percebe-se, entretanto, um comportamento peculiar da resposta do problema, para o algoritmo de Newmark, no intervalo

de 4.37s a 4.5s (Figura 5.22b), indicando provável instabilidade numérica. Assim, torna-se conveniente realizar o cálculo dos expoentes de Lyapunov neste caso.

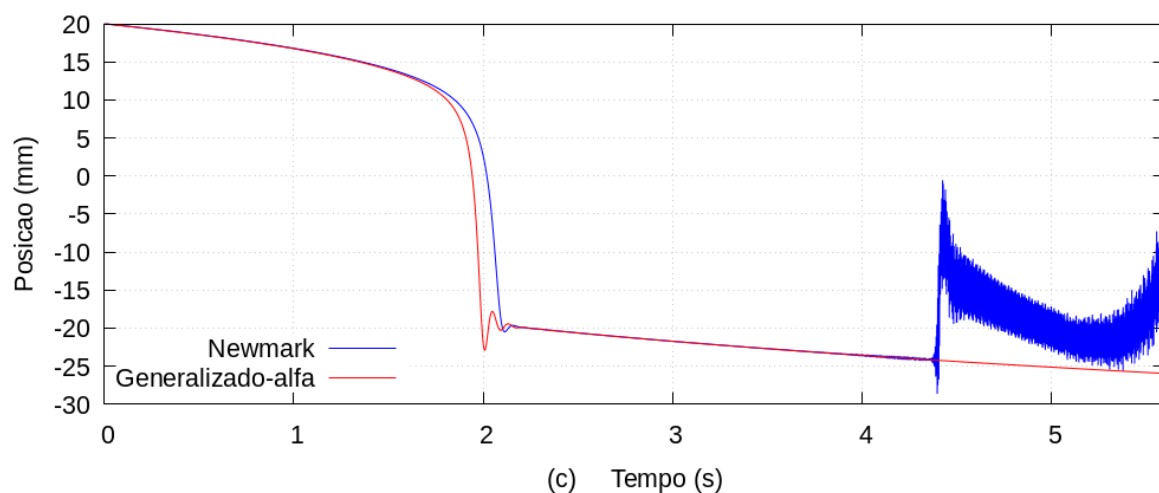
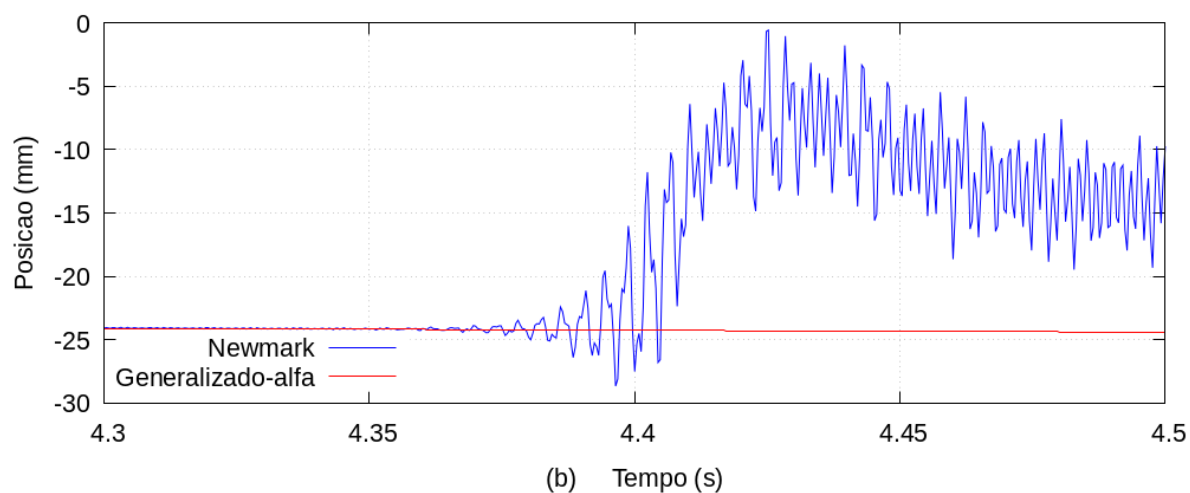
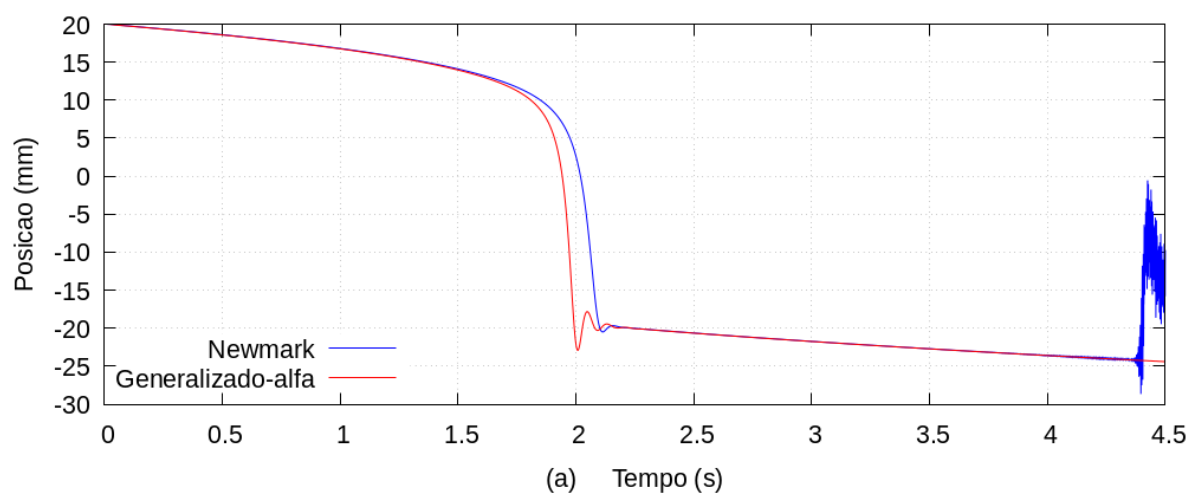


Figura 5.22: Posições versus tempo (nó central) para uma taxa de amortecimento $\xi=0.10$ e $\lambda=0.2$ para os algoritmos Newmark e Generalizado- α : a) $0 \leq t \leq 4.5$ s; b) $4.3 \leq t \leq 4.5$ s e c) $0 \leq t \leq 5.67$ s.

O algoritmo Generalizado- α , por outro lado, não apresenta esse comportamento no intervalo de análise. A Figura 5.22c mostra a resposta para t compreendido entre 0 e 5.67s. A partir deste instante, não houve convergência do algoritmo de Newmark no processo iterativo.

A Figura 5.23 mostra a convergência do maior expoente de Lyapunov (algoritmo LPNV2) em função do número de pontos mais próximos ao ponto de análise (N) para os métodos de Newmark e Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$). Optou-se por usar $N=100$ pontos. Não há variação do maior expoente em ambos métodos nos intervalos [0 a 1.7s] e [0 a 4.5s], e no intervalo [0 a 5.6s] para o esquema Generalizado- α , indicando que a resposta aponta para um ciclo limite estável de acordo com o algoritmo LPNV2.

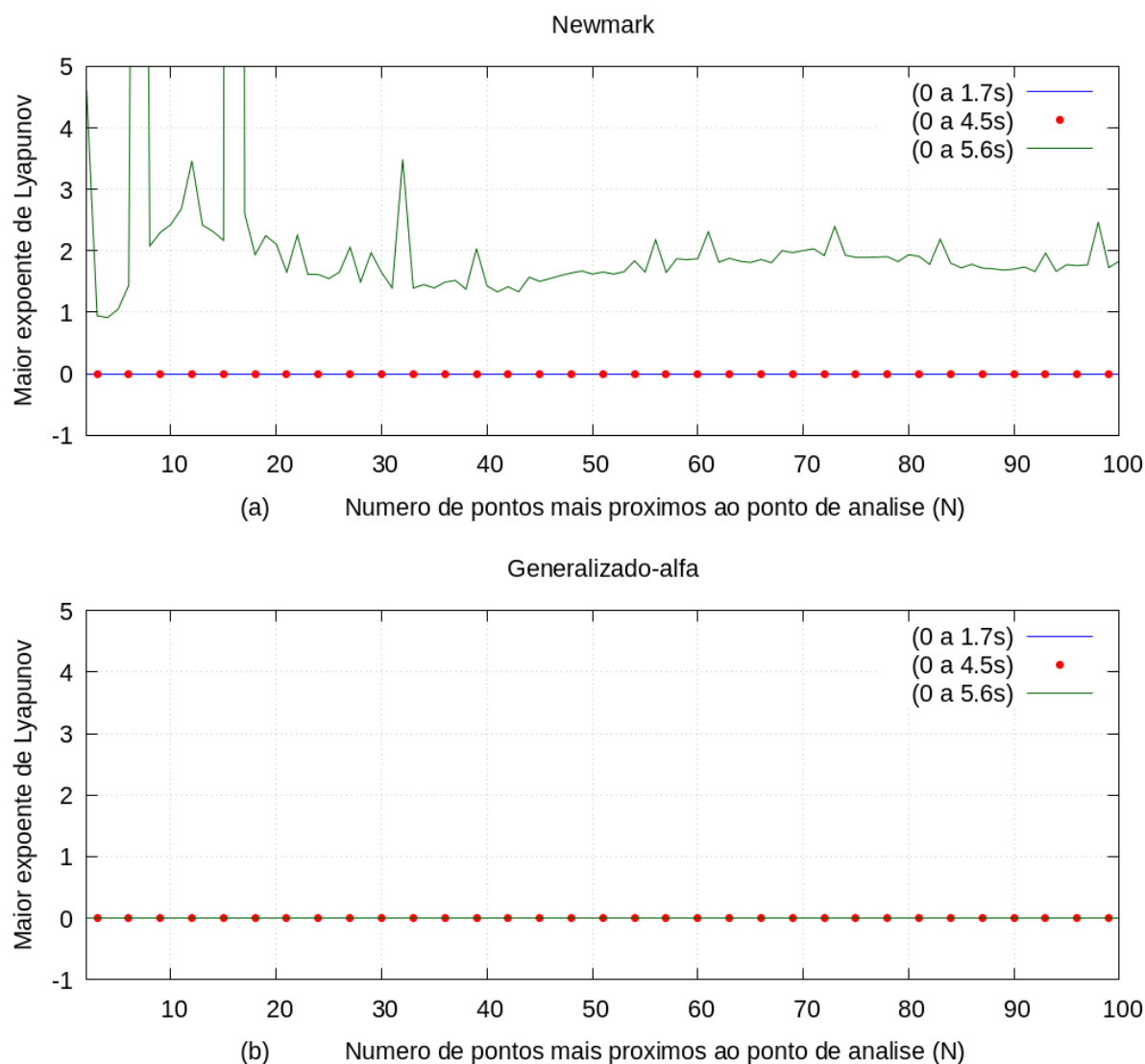


Figura 5.23: Convergência do maior expoente de Lyapunov (algoritmo LPNV2) em função do número de pontos mais próximos ao ponto de análise (N) para Newmark e Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$).

No entanto, a variação dos expoentes no intervalo [0 a 5.6s], para o método de Newmark, é acentuada (Figura 5.23b), indicando comportamento caótico do sistema neste intervalo, e apresentando $\lambda_1=1.83219$ em $N=100$. Observa-se picos de valores em $N<35$, sendo estes menos acentuados para $N>35$.

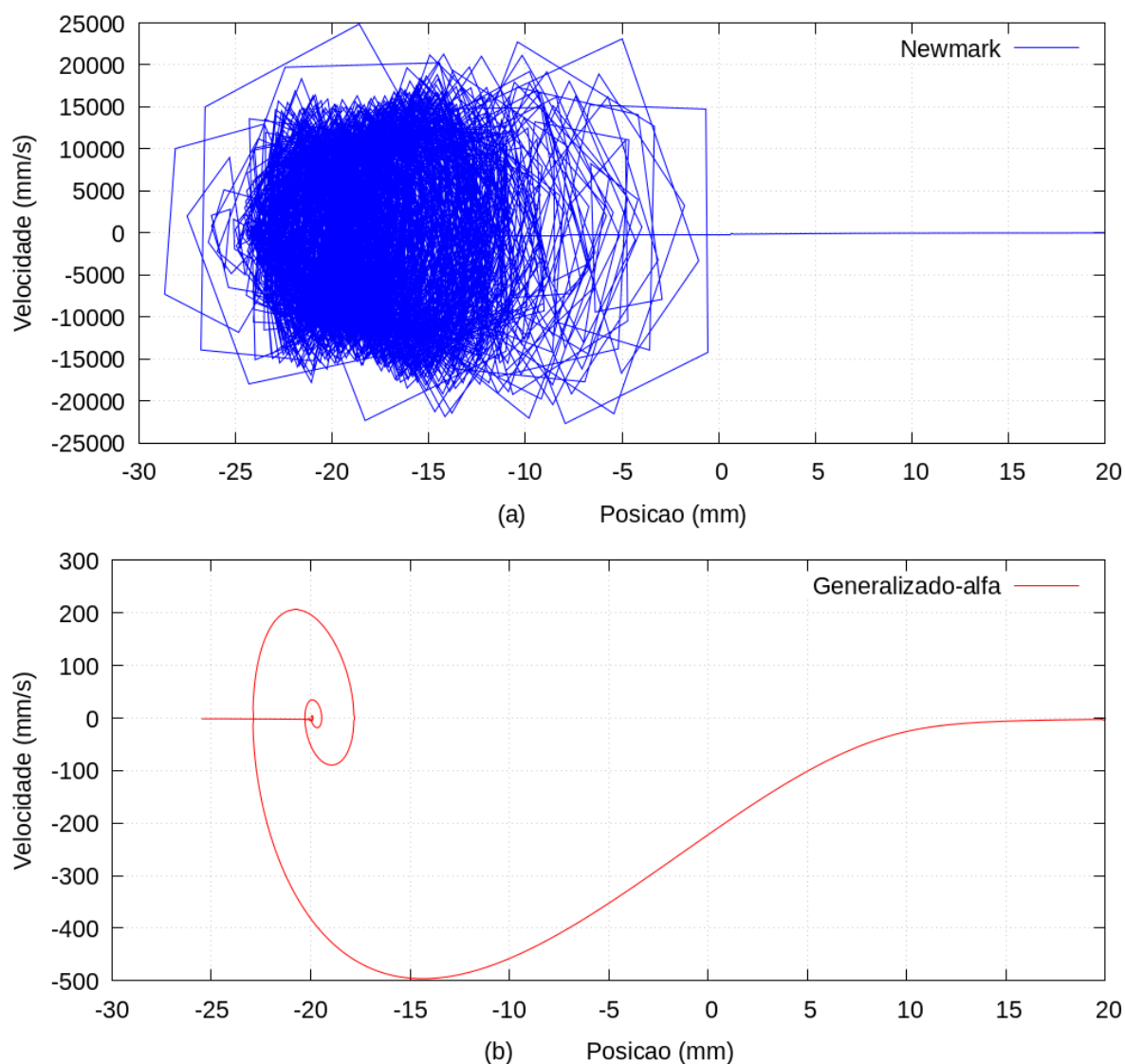


Figura 5.24: Diagramas de fase para o arco senoidal abatido obtidos pelos algoritmos de Newmark e Generalizado- α ($\rho^\infty=0.0$).

Com relação aos diagramas de fase, pode-se dizer que o comportamento caótico da resposta obtida pelo esquema de Newmark (devido à instabilidade numérica, deve-se frisar) resulta no diagrama apresentado na Figura 5.24a. Quanto à resposta para o esquema Generalizado- α (Figura 5.24b), a resposta converge para um atrator (não caótico), após o

snap-through, situado na posição -20mm, variando em seguida esta a uma velocidade praticamente nula, e mostrando que a estrutura se comporta de forma quasi-estática, sem oscilação, neste trecho.

Tabela 5.6: Espectro dos expoentes de Lyapunov para o arco senoidal (algoritmo LPNV3), com $t+\Delta t=5.66s$.

Exp.	Newm.	Gen.- α ($\rho_\infty=0.0$)	Exp.	Newm.	Gen.- α ($\rho_\infty=0.0$)	Exp.	Newm.	Gen.- α ($\rho_\infty=0.0$)
λ_1	-1.191E-04	-1.260E-04	λ_{19}	-2.841E-04	-2.685E-04	λ_{37}	-3.456E-04	-3.250E-04
λ_2	-1.565E-04	-1.321E-04	λ_{20}	-2.903E-04	-2.721E-04	λ_{38}	-3.466E-04	-3.346E-04
λ_3	-1.881E-04	-1.860E-04	λ_{21}	-3.017E-04	-2.773E-04	λ_{39}	-3.561E-04	-3.350E-04
λ_4	-2.019E-04	-1.961E-04	λ_{22}	-3.026E-04	-2.795E-04	λ_{40}	-3.602E-04	-3.452E-04
λ_5	-2.155E-04	-2.058E-04	λ_{23}	-3.053E-04	-2.807E-04	λ_{41}	-3.715E-04	-3.458E-04
λ_6	-2.233E-04	-2.155E-04	λ_{24}	-3.064E-04	-2.815E-04	λ_{42}	-3.740E-04	-3.466E-04
λ_7	-2.238E-04	-2.165E-04	λ_{25}	-3.086E-04	-2.819E-04	λ_{43}	-3.759E-04	-3.478E-04
λ_8	-2.291E-04	-2.166E-04	λ_{26}	-3.113E-04	-2.942E-04	λ_{44}	-3.868E-04	-3.593E-04
λ_9	-2.359E-04	-2.173E-04	λ_{27}	-3.138E-04	-2.951E-04	λ_{45}	-3.892E-04	-3.670E-04
λ_{10}	-2.421E-04	-2.252E-04	λ_{28}	-3.184E-04	-2.960E-04	λ_{46}	-4.109E-04	-3.748E-04
λ_{11}	-2.427E-04	-2.302E-04	λ_{29}	-3.187E-04	-3.002E-04	λ_{47}	-4.180E-04	-3.839E-04
λ_{12}	-2.481E-04	-2.350E-04	λ_{30}	-3.200E-04	-3.024E-04	λ_{48}	-4.199E-04	-3.848E-04
λ_{13}	-2.563E-04	-2.449E-04	λ_{31}	-3.239E-04	-3.059E-04	λ_{49}	-4.210E-04	-3.941E-04
λ_{14}	-2.610E-04	-2.466E-04	λ_{32}	-3.301E-04	-3.107E-04	λ_{50}	-4.549E-04	-4.175E-04
λ_{15}	-2.644E-04	-2.484E-04	λ_{33}	-3.303E-04	-3.124E-04	λ_{51}	-4.762E-04	-4.487E-04
λ_{16}	-2.700E-04	-2.541E-04	λ_{34}	-3.328E-04	-3.152E-04	λ_{52}	-4.776E-04	-4.494E-04
λ_{17}	-2.800E-04	-2.557E-04	λ_{35}	-3.329E-04	-3.200E-04	λ_{53}	-4.966E-04	-4.608E-04
λ_{18}	-2.815E-04	-2.614E-04	λ_{36}	-3.425E-04	-3.247E-04	-	-	-

A Tabela 5.6 mostra, em ordem decrescente, o espectro dos expoentes de Lyapunov para o arco senoidal obtido pelo algoritmo LPNV3 considerando os métodos Newmark e Generalizado- α . Optou-se por obter a matriz Jacobiana em $t+\Delta t=5.66s$. Diferentemente do que foi obtido pelo algoritmo LPNV2, o maior expoente de Lyapunov, apesar de próximo de zero, apresenta os valores -1.191×10^{-4} e -1.260×10^{-4} para os esquemas de Newmark e Generalizado- α , respectivamente. O sinal negativo indica que o sistema não se comporta de forma caótica, e sim indica um ponto fixo (visto o sinal dos demais expoentes), condizente com o histórico de posições no tempo, ou mesmo o diagrama de fase, de acordo com a resposta do método

Generalizado- α . Há uma pequena variação entre os resultados obtidos para os dois esquemas.

5.6.5 Treliça de von Mises com um sistema massa-mola acoplado

O último exemplo consiste na análise da treliça de von Mises (Figura 5.25), cujo comprimento L e altura h valem, respectivamente, $2m$ e $0.02m$. Suas extremidades são rotuladas, com o coeficiente de mola $k=2 \times 10^7 \text{ kN/m}$ e massa $m=392.57849 \text{ kg}$ (nas extremidades das barras), de forma que $m_1=2m$. Foi ainda considerada uma massa concentrada adicional, na extremidade inferior da mola, de valor $m_2=20m$. Foi usado somente 1 elemento finito por barra e, para cada uma, tem-se $E=200 \text{ GPa}$, $I=800 \times 10^{-8} \text{ m}^4$ e $A=100 \times 10^{-3} \text{ m}^2$. A amplitude da carga P_0 foi adotada como 50 kN . O intervalo de tempo para a análise foi adotado como $\Delta t=5 \times 10^{-4} \text{ s}$, com tolerância de convergência para o processo iterativo igual a 10^{-10} .

Este sistema é também conhecido como Amortecedor Sintonizado de Massa Passivo, e um interessante campo de estudo consiste em dimensionar as massas e a mola de forma a se evitar o *snap-through* dinâmico.

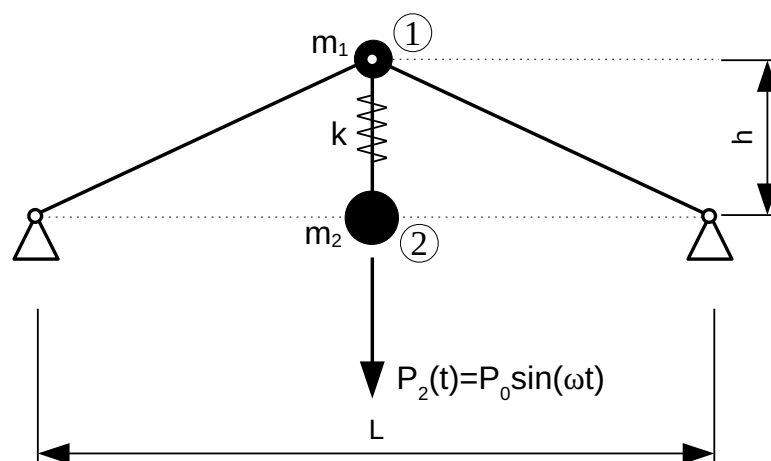


Figura 5.25: Treliça de von Mises com um sistema massa-mola acoplado submetida a um carregamento harmônico

Deseja-se para este exemplo, uma análise mais abrangente, envolvendo:

- expressões analíticas das equações de movimento do sistema usando o Princípio de Hamilton;
- as frequências naturais de vibração do sistema obtidas analiticamente (por

- linearização) e numericamente pelo método de Iteração por Subespaços Vetoriais, mostrada no Capítulo 3 do presente trabalho;
- avaliação da resposta considerando ressonância no 1º e 2º modos de vibração a partir dos algoritmos de Newmark e Generalizado- α ;
 - O maior expoente de Lyapunov usando o algoritmo preditor, e o espectro dos expoentes de Lyapunov obtidos por análise direta da matriz Jacobiana;
 - O diagrama de fase e a Seção de Poincaré para o sistema nas condições anteriores.

Optando-se por seguir a ordem acima proposta, e partindo-se da configuração deformada do sistema (Figura 5.26), o funcional de energia potencial total do sistema (Equação 2.32, desconsiderando-se a parcela de energia dissipativa) é dado por:

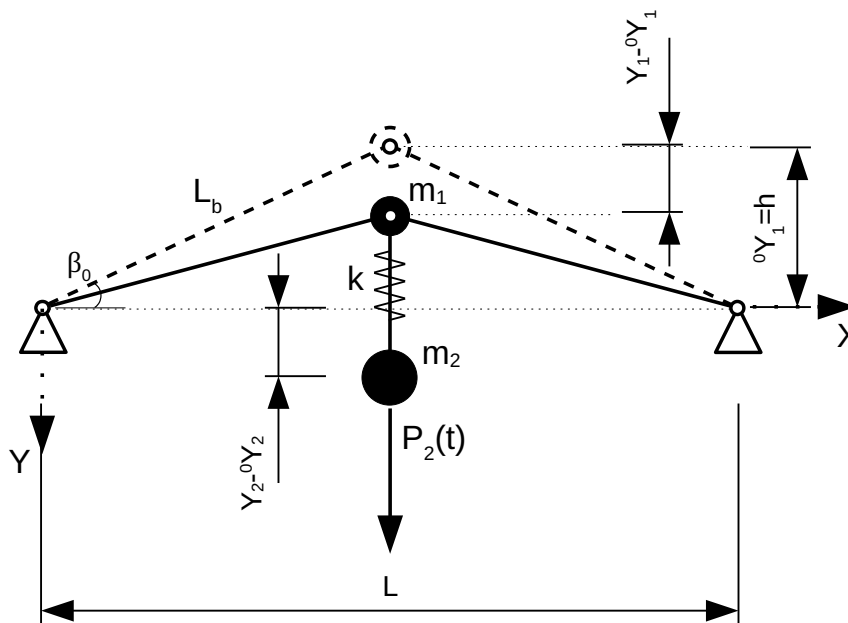


Figura 5.26: Treliça de von Mises com um sistema massa-mola acoplado: configurações indeformada (linha pontilhada) e deformada (linha contínua)

$$\begin{aligned} \Pi = U_t + P + K = & \frac{1}{2} m_1 \dot{Y}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \dot{Y}_2^2 + \frac{k}{2} ((Y_2 - {}^0Y_2) - (Y_1 - {}^0Y_1))^2 \\ & + \frac{EA}{L_b} (L' - L_b)^2 - F_2 (Y_2 - {}^0Y_2) \end{aligned} \quad (5.45)$$

$$L' = \sqrt{(Y_1 - {}^0Y_1)^2 - 2L_b \sin(\beta_0)(Y_1 - {}^0Y_1) + L_b^2} \quad (5.46)$$

sendo 0Y_1 e 0Y_2 as posições verticais dos pontos 1 e 2 na configuração indeformada da

estrutura. De igual maneira, para a posição deformada, tem-se Y_1 e Y_2 . O comprimento das barras, bem como o seu ângulo com a horizontal, são dados por L_b e β_0 , respectivamente.

O Princípio de Hamilton é dado por:

$$\int_{t_1}^{t_2} \sum_{s=1}^n \left[-\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_s} - \frac{\partial U}{\partial q_s} + p_s \right] \delta q_s dt = 0 \quad (5.47)$$

sendo δq_s arbitrário e compatível em todo o intervalo de tempo, e a expressão em somatório no interior da integral, chamada Equações de Lagrange, descrita como:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_s} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_s} + \frac{\partial U}{\partial q_s} = p_s \quad s=1,2,\dots,n \quad (5.48)$$

leva então às equações de equilíbrio dinâmico não lineares do sistema, dadas por:

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial Y_1} = m_1 \ddot{Y}_1 + \frac{EA(2(Y_1 - {}^0Y_1) - 2L_b \sin(\beta_0))(L' - L_b)}{L_b L'} - k((Y_2 - {}^0Y_2) - (Y_1 - {}^0Y_1)) = 0 \quad (5.49)$$

$$\frac{\partial \Pi_0}{\partial Y_2} = m_2 \ddot{Y}_2 + k((Y_2 - {}^0Y_2) - (Y_1 - {}^0Y_1)) = F_2(t) \quad (5.50)$$

Linearizando-se as Equações (5.49) e (5.50), e resolvendo-se o problema de autovalor referente à Equação (3.19):

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0; \quad \mathbf{K} = \mathbf{H} \quad \text{para} \quad \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (5.51)$$

leva às frequências naturais de vibração do sistema, apresentadas na Tabela 5.7. Observa-se excelente concordância entre as respostas analítica e de Iteração por Subespaços Vetoriais.

Tabela 5.7: Frequências naturais de vibração (rad/s) para a referida treliça de von Mises

Frequência	Solução Analítica	Método Iteração por	Variação Percentual (%)
	Linearizada	Subespaços Vetoriais	
ω_1	43.0281097	43.02811	5.79×10^{-7}
ω_2	37430.0979036	37430.09800	2.58×10^{-7}

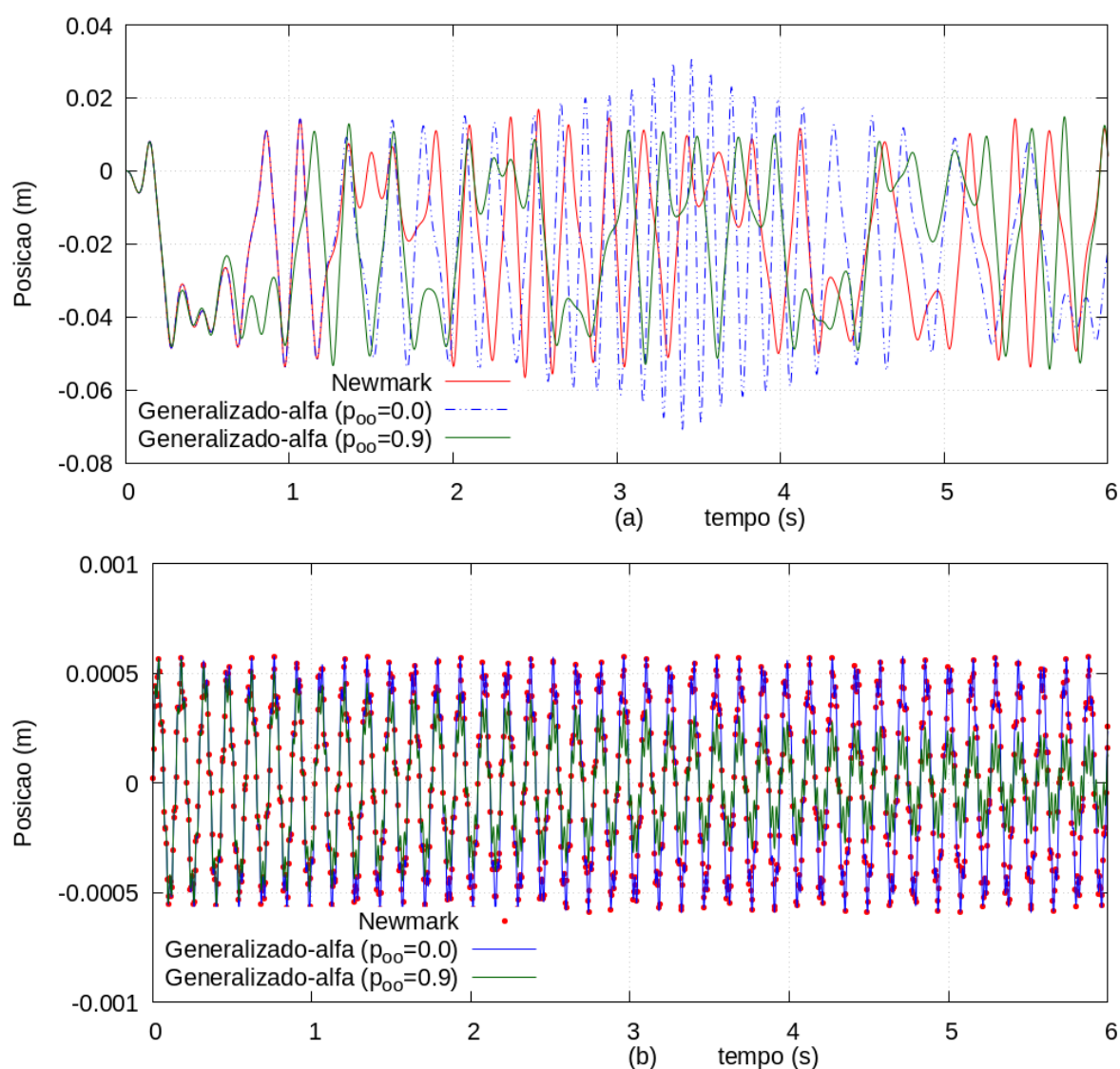


Figura 5.27: Posição versus tempo para a massa m_2 da treliça de von Mises para os três algoritmos considerando: (a) Ressonância em $\omega = \omega_1$ e (b) Ressonância em $\omega = \omega_2$.

A Figura 5.27 mostra a posição versus tempo da massa m_2 na treliça de von Mises para os três algoritmos. Verifica-se que a ressonância na frequência ω_1 é mais acentuada (Figura 5.27a), em termos de amplitude do movimento posicional desta massa, que aquela devida a ω_2 (Figura 5.27b).

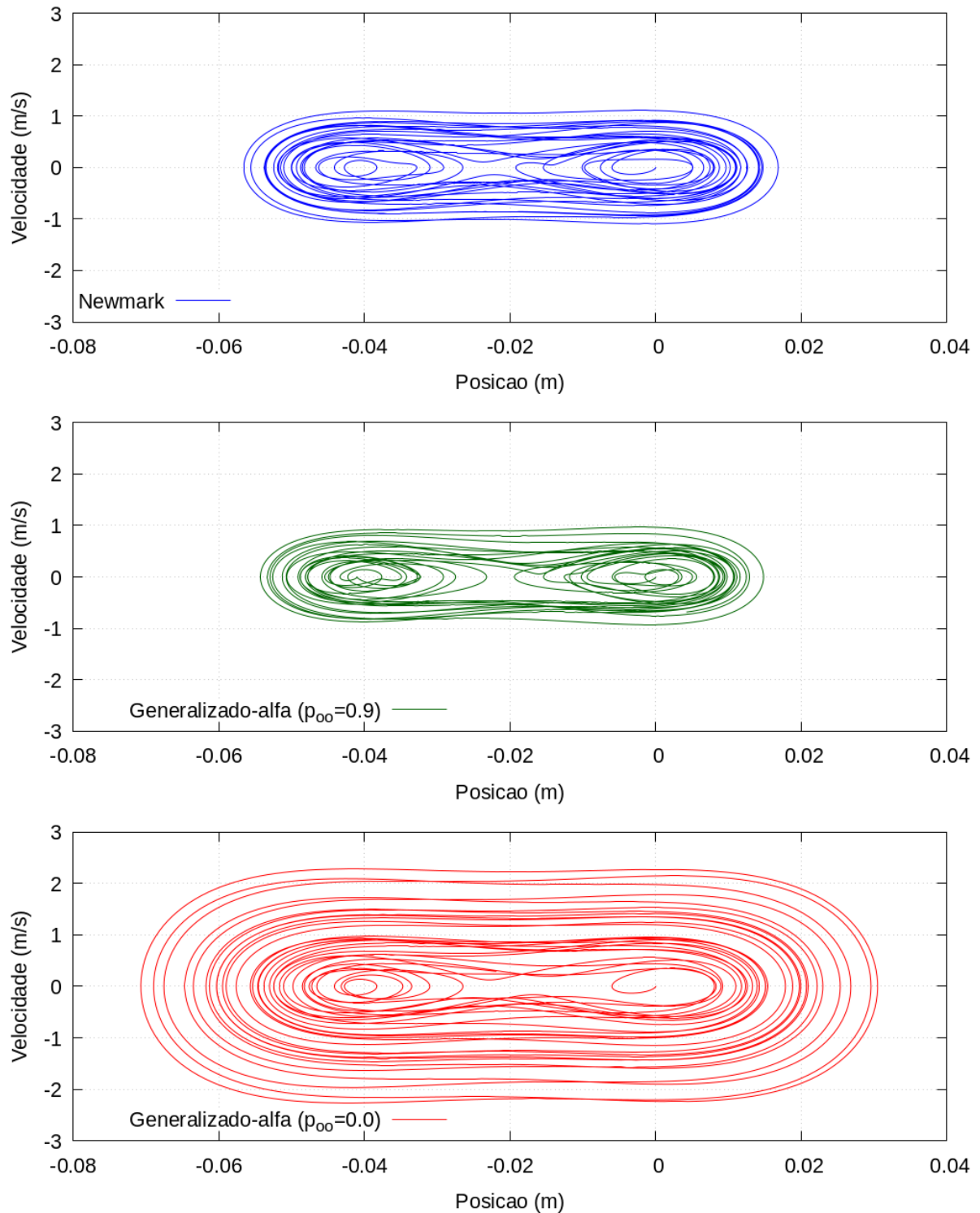


Figura 5.28: Diagramas de Fase para os três algoritmos de integração com ressonância no 1º modo ($\omega=\omega_1$).

Ainda para a Figura 5.27a, verifica-se graficamente o efeito *snap-through* quando $\omega=\omega_1$, ao se avaliar as posições, em $t\sim 0.2$ s. Os métodos de integração divergem na resposta

após $t \sim 0.5s$. Nota-se ainda as maiores amplitudes ocorrendo para o método Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$), entre 2s e 4s. Na Figura 5.27b, apesar da ressonância na frequência ω_2 gerar pequenas amplitudes na resposta (aproximadamente $\pm 0.5mm$) para os algoritmos Newmark e Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$), observa-se, para este último esquema, com $\rho_\infty=0.9$, um amortecimento numérico (amplitude de decaimento).

Nos diagramas de fase para os três algoritmos de integração com ressonância no 1º modo ($\omega=\omega_1$, Figura 5.28), pode-se notar dois pontos de foco (atratores) nas posições 0 e -0.04m. A abrangência do diagrama no plano de fase do Generalizado- α ($\rho_\infty=0.9$), Figura 5.28b, é menor que a dos demais. Isso se deve ao fato de que, para os outros 2 algoritmos, não há perda de energia no sistema por amortecimento, seja físico ou numérico. Por outro lado, o diagrama relativo ao algoritmo Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$), Figura 5.28c, apresenta a maior abrangência no plano de fase.

Para o traçado das seções de Poincaré da Figura 5.29, considerou-se o seguinte intervalo de tempo:

$$(\Delta t)^p = \Delta t [T_1] = \Delta t \left[\frac{2\pi}{\omega_1} \right] = 7.30126 \times 10^{-5} s \quad (5.52)$$

A Figura 5.29 apresenta as seções de Poincaré para os três algoritmos de integração com ressonância no 1º modo ($\omega=\omega_1$). As seções foram obtidas considerando 1.2×10^6 incrementos de tempo, e tomando-se períodos T_1 (Equação 5.52). Percebe-se um comportamento aperiódico da resposta, na medida em que a nuvem de pontos se distribui de forma peculiar nos diagramas de fase, estando aquela obtida pelo esquema Generalizado- α ($\rho_\infty=0.9$) no interior do contorno definido pelas demais. A defasagem do período que originou as seções foi considerada como $T_1(1+t^*)$, sendo $t^*=0$ (Figura 5.29a), $t^*=1/4$ (Figura 5.29b), $t^*=1/2$ (Figura 5.29c) e $t^*=3/4$ (Figura 5.29d). Dois fatos curiosos devem ser mencionados: a simetria observada nos casos (Figura 5.29a) e (Figura 5.29c), bem como nos casos (Figura 5.29b) e (Figura 5.29d); e uma espiral de pontos tendendo às coordenadas $[-0.02m; -1.5m/s]$ (Figura 5.29e) e $[-0.02m; 1.5m/s]$ (Figura 5.29f) no diagrama de fase.

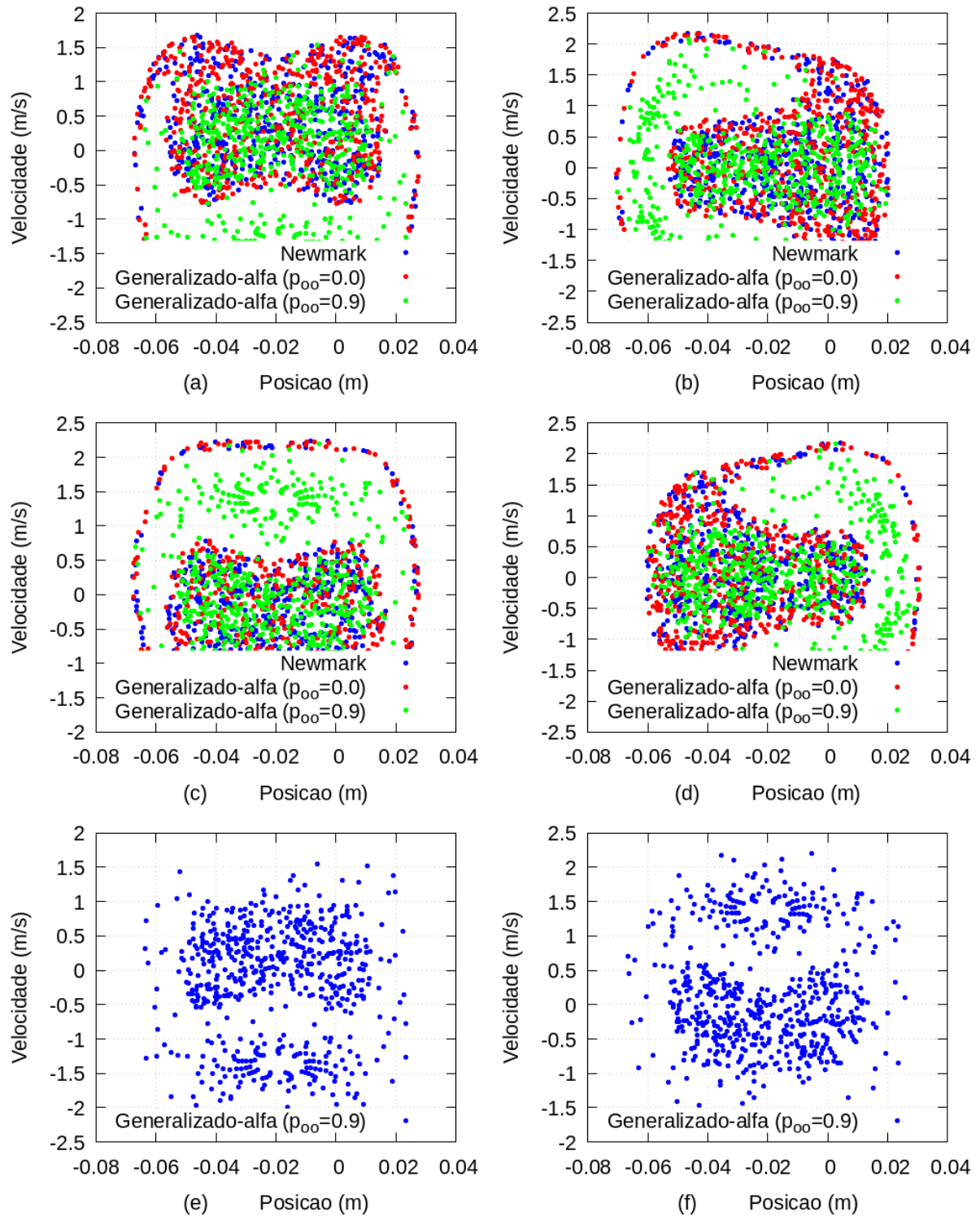


Figura 5.29: Seções de Poincaré para os três algoritmos de integração com ressonância no 1º modo ($\omega = \omega_1$).

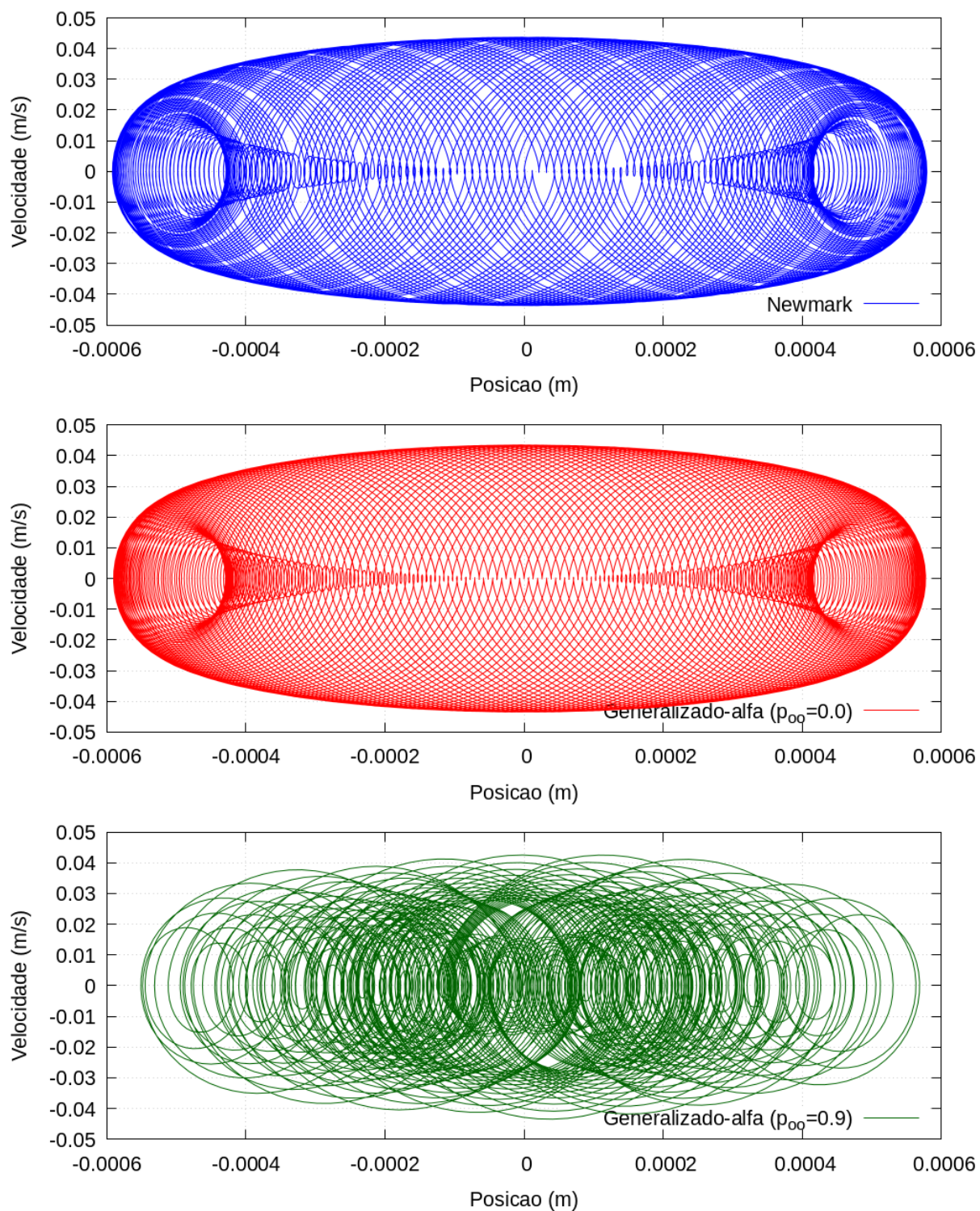


Figura 5.30: Diagramas de Fase para os três algoritmos de integração com ressonância no 2º modo ($\omega=\omega_2$).

Para o traçado das seções de Poincaré da Figura 5.31 o intervalo de tempo considerado foi obtido da seguinte forma:

$$(\Delta t)^P = \Delta t [T_2] = \Delta t \left[\frac{2\pi}{\omega_2} \right] = 1.67865 \times 10^{-6} \text{ s} \quad (5.53)$$

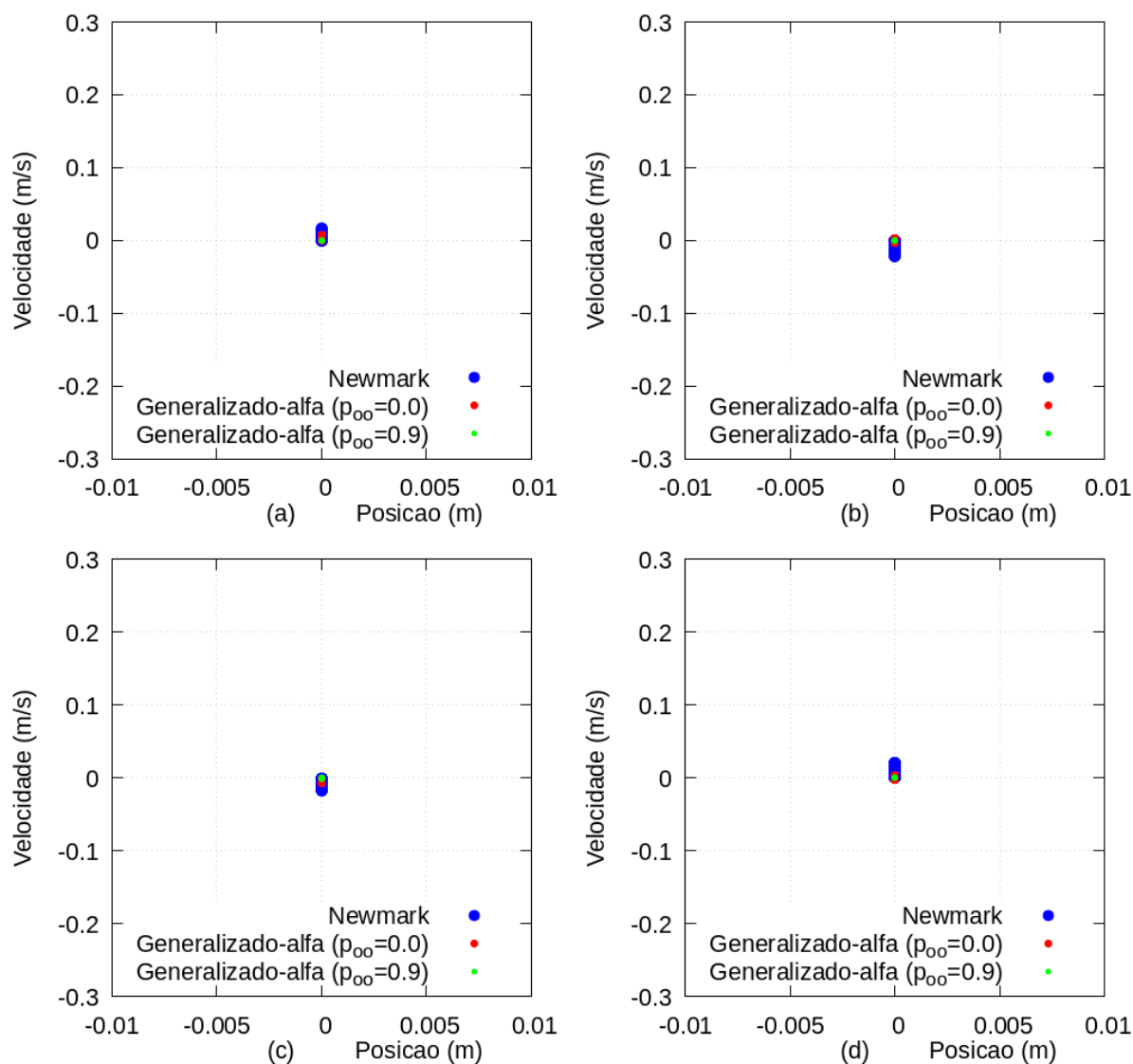


Figura 5.31: Seções de Poincaré para os três algoritmos de integração com ressonância no 2º modo ($\omega = \omega_2$).

Em contraste com a Figura 5.29, as seções de Poincaré para $\omega = \omega_2$ em todos os casos se reduzem a uma pequena região do diagrama de fase, com pontos praticamente sobrepostos (Figura 5.31). As seções foram obtidas de forma semelhante àquela indicada na Figura 5.29. Pode-se dizer que a proximidade dos pontos indica um comportamento quasi-periódico da resposta e, ao mesmo tempo, quasi-estático (visto a baixa velocidade apresentada e a invariância, no gráfico, destes pontos em relação à posição). Por consequência, os diagramas de fase (Figuras 5.30a e b) parecem apresentar a

topologia de um *torus* 2D. Nota-se que os pontos relativos ao esquema Generalizado- α ($\rho_\infty=0.9$) encontram-se ainda mais próximos da origem, visto o caráter dissipativo da resposta devido ao amortecimento numérico, resultando no diagrama de fase mostrado na Figura 5.30c.

Na Tabela 5.8 se encontram os maiores expoentes de Lyapunov, obtidos pelo algoritmo LPNV2, para a treliça de von Mises, considerando a situação de ressonância nas duas frequências propostas. Foram usados 160 pontos mais próximos ao ponto de análise. Percebe-se que o sistema se comporta de forma caótica de acordo com todos os algoritmos. No entanto, para $\omega=\omega_1$, o algoritmo de Newmark apresenta a maior taxa média de perda de previsibilidade da resposta para o sistema em estudo. Por outro lado, no caso de $\omega=\omega_2$, verifica-se esse fato para o esquema Generalizado- α , visto seu caráter dissipativo da resposta, do ponto de vista numérico.

Tabela 5.8: Maiores expoentes de Lyapunov (algoritmo LPNV2) para a treliça de von Mises considerando as situações de ressonância em ω_1 e ω_2 .

Algoritmo	λ_1 (relativo a ω_1)	λ_1 (relativo a ω_2)	Número de pontos mais próximos ao ponto de análise
Newmark	0.070196	0.043334	160
Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$)	0.011550	0.047088	160
Generalizado- α ($\rho_\infty=0.9$)	0.064693	0.570117	160

Graficamente, a convergência do maior expoente de Lyapunov para a treliça de von Mises em relação às frequências propostas se encontram na Figura 5.32. O expoente obtido a partir da resposta do Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$), no caso $\omega=\omega_1$, mostra rápida convergência (antes de $N=20$), com o expoente relativo ao algoritmo Newmark mostrando pequena oscilação no intervalo avaliado, e o relacionado ao método Generalizado- α ($\rho_\infty=0.9$) mostrando um pico acentuado para N entre 120 e 140 (Figura 5.32a). Para o caso $\omega=\omega_2$, a convergência do expoente para os esquemas Newmark e Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$) ocorre de forma semelhante. Por outro lado, para o algoritmo Generalizado- α ($\rho_\infty=0.9$), ocorre um salto em $N\sim 40$, a partir do qual a convergência não foi estabelecida, provavelmente pelo efeito de amortecimento numérico (amplitude de decaimento) causado pelo valor do raio espectral adotado.

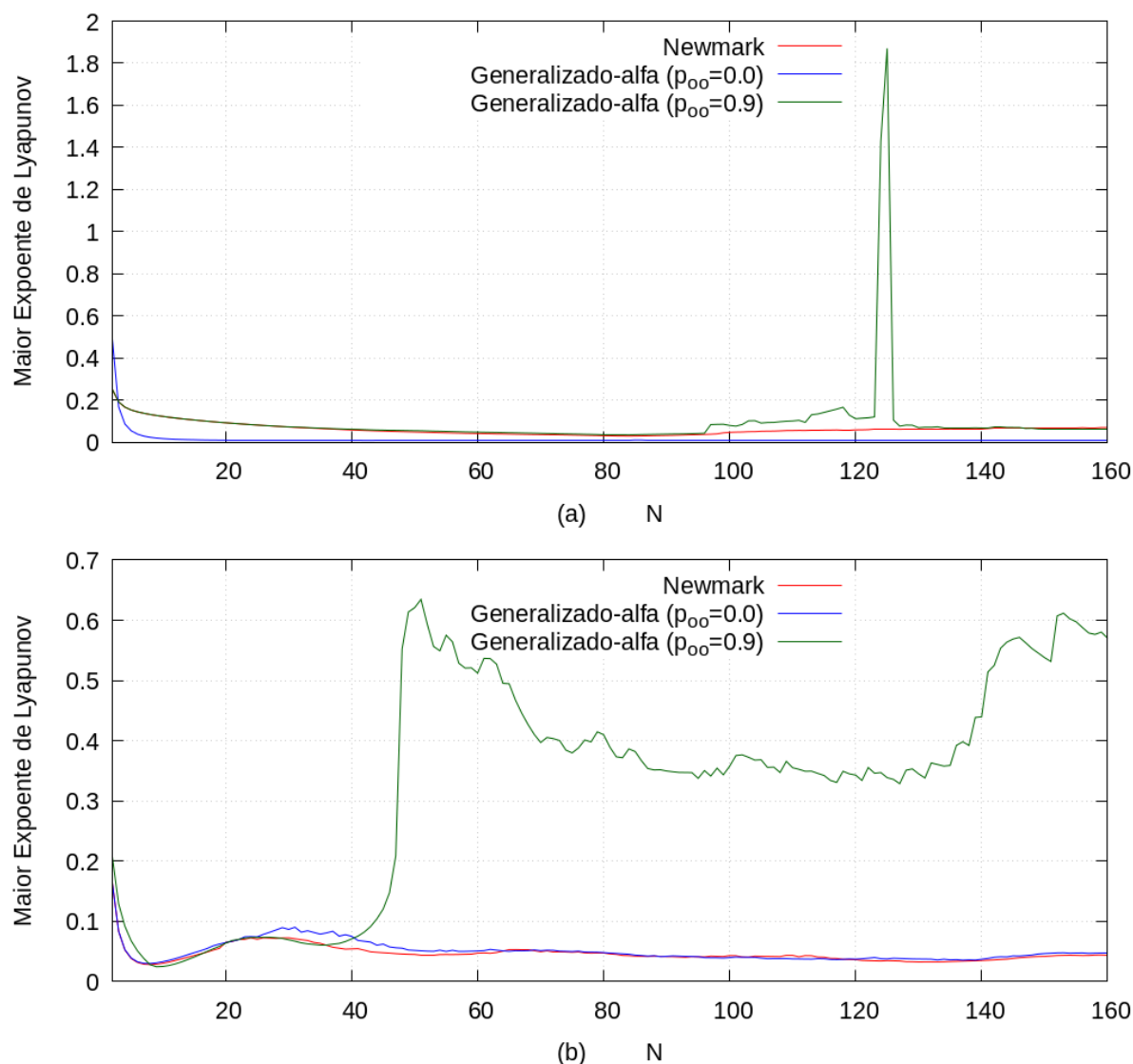


Figura 5.32: Convergência do maior expoente de Lyapunov (algoritmo LPNV2) em função do número de pontos mais próximos ao ponto de análise (N) para a treliça de von Mises: (a) Ressonância em ω_1 e (b) Ressonância em ω_2

O espectro dos expoentes de Lyapunov para a treliça de von Mises com sistema massa-mola acoplado, obtido com o algoritmo LPNV3, em ordem decrescente, é mostrado nas Tabelas 5.9 e 5.10, para as frequências ω_1 e ω_2 , respectivamente. Foi adotado um valor de 10^{-4} como tolerância de convergência do método de Jacobi Generalizado.

Nota-se uma boa concordância entre os valores encontrados para os 2 algoritmos no que diz respeito ao maior expoente de Lyapunov (Tabela 5.9). A maior diferença encontrada foi aquela obtida pelos resultados advindos do método de Newmark (9.90%); a menor, por sua vez, se refere à resposta oriunda do método Generalizado- α com raio espectral 0.9 (4.48%).

Tabela 5.9: Espectro dos expoentes de Lyapunov para a treliça de von Mises com sistema massa-mola acoplado (algoritmo LPNV3), para ressonância na frequência ω_1 .

Exp.	Algor. LPNV3			Algor. LPNV2 (160 pontos)			Variação percentual (%)		
	Newm.	Gen.- α ($\rho_\infty=0.0$)	Gen.- α ($\rho_\infty=0.9$)	Newm.	Gen.- α ($\rho_\infty=0.0$)	Gen.- α ($\rho_\infty=0.9$)	Newm.	Gen.- α ($\rho_\infty=0.0$)	Gen.- α ($\rho_\infty=0.9$)
λ_1	0.0772	0.0123	0.0618	0.0702	0.0116	0.0647	9.90	6.69	4.48
λ_2	0.0031	0.0010	-0.0079	-	-	-	-	-	-
λ_3	0.0025	0.0010	-0.0088	-	-	-	-	-	-
λ_4	-0.0325	-0.0043	-0.0277	-	-	-	-	-	-
λ_5	-0.1426	-0.0208	-0.1184	-	-	-	-	-	-
λ_6	-0.1426	-0.0208	-0.1184	-	-	-	-	-	-
λ_7	-0.1426	-0.0208	-0.1184	-	-	-	-	-	-
λ_8	-0.1436	-0.0208	-0.1263	-	-	-	-	-	-
λ_9	-0.1479	-0.0215	-0.1340	-	-	-	-	-	-
λ_{10}	-0.1526	-0.0221	-0.1381	-	-	-	-	-	-

Tabela 5.10: Espectro dos expoentes de Lyapunov para a treliça de von Mises com sistema massa-mola acoplado (algoritmo LPNV3), para ressonância na frequência ω_2 .

Exp.	Algor. LPNV3			Algor. LPNV2 (160 pontos)			Variação percentual (%)		
	Newm.	Gen.- α ($\rho_\infty=0.0$)	Gen.- α ($\rho_\infty=0.9$)	Newm.	Gen.- α ($\rho_\infty=0.0$)	Gen.- α ($\rho_\infty=0.9$)	Newm.	Gen.- α ($\rho_\infty=0.0$)	Gen.- α ($\rho_\infty=0.9$)
λ_1	0.04340	0.0463	0.4177	0.0433	0.0471	0.5701	0.14	1.76	26.73
λ_2	0.0018	0.0037	-0.0536	-	-	-	-	-	-
λ_3	0.0014	0.0037	-0.0595	-	-	-	-	-	-
λ_4	-0.0183	-0.0161	-0.1872	-	-	-	-	-	-
λ_5	-0.0802	-0.0779	-0.8005	-	-	-	-	-	-
λ_6	-0.0802	-0.0780	-0.8005	-	-	-	-	-	-
λ_7	-0.0802	-0.0780	-0.8005	-	-	-	-	-	-
λ_8	-0.0808	-0.0780	-0.8540	-	-	-	-	-	-
λ_9	-0.0832	-0.0806	-0.9055	-	-	-	-	-	-
λ_{10}	-0.0858	-0.0829	-0.9334	-	-	-	-	-	-

Mesmo comentário pode ser feito em relação à Tabela 5.10. Porém, se verifica a menor diferença percentual para Newmark (0.14%) e a maior para o Generalizado- α com raio espectral 0.9 (26.73%). Salienta-se que, para cada um dos três métodos, a saber, Newmark, Generalizado- α ($\rho_\infty=0.0$) e Generalizado- α ($\rho_\infty=0.9$) os valores de expoente apresentados na

Tabela 5.9 foram obtidos nos tempos $t+\Delta t$ iguais a, respectivamente: 0.3s, 0.775s e 0.325s. De forma análoga, para a Tabela 5.10, os tempos $t+\Delta t$ foram, respectivamente: 0.4s, 0.4s e 0.125s.

CAPÍTULO 6: CONCLUSÃO

Este trabalho teve por objetivo realizar uma análise de instabilidade de estruturas reticuladas planas esbeltas com comportamento dinâmico geometricamente não linear a partir do Método Posicional dos Elementos Finitos. Foi apresentado o método de Iteração por Subespaços Vetoriais para o cálculo das frequências naturais de vibração nas estruturas propostas, considerando a situação de singularidade na matriz de massa. Cinco algoritmos de integração numérica foram propostos em alternativa ao algoritmo de Newmark, quais sejam: Generalizado- α , HHT- α , WBZ- α , *Truly Self-starting Two Sub-steps Method* e *Three-parameter Single-step Method*, com exemplos estruturais sob condições severas de não-linearidade geométrica e perda de estabilidade. Foi ainda apresentada uma estratégia para consideração do amortecimento proporcional de Rayleigh nesta formulação. Por fim, foi possível investigar o comportamento caótico dos exemplos propostos a partir do cálculo dos expoentes de Lyapunov.

A partir dos exemplos propostos, foi verificado que o Método Posicional dos Elementos Finitos mostrou-se eficiente para a análise dos problemas dinâmicos propostos que envolvem perda de estabilidade por *snap-through*. No entanto, o algoritmo de Newmark, aplicado aos exemplos deste capítulo demonstrou, por vezes, um comportamento oscilatório não desejado como, por exemplo, nos extremos da amplitude da resposta posição em relação ao tempo, indicando provável instabilidade numérica, o que não necessariamente impediu o processo de convergência do algoritmo para o passo de tempo escolhido e os intervalos de tempo avaliados. O fato pôde ser observado especialmente na situação em que os sistemas foram deixados em vibração livre, após um acúmulo de energia de deformação devido ao potencial das cargas externas (conservação de energia), ou mesmo com a inclusão de molas de rotação no problema. Portanto, conclui-se neste caso que o método de Newmark pode, de fato, não ser a melhor escolha para análise de problemas de instabilidade dinâmica fortemente não-lineares do ponto de vista geométrico.

Quanto à solução do problema de autovalor para a formulação posicional do Método dos Elementos Finitos, primeiramente foi possível constatar que, para a condição imposta à Equação (3.13), é possível tirar proveito da igualdade entre a matriz Hessiana e a matriz de rigidez na formulação do problema de autovalor, cuja solução, obtida usando-se o método de Iteração por Subespaços vetoriais, mostrou-se muito satisfatória ao se comparar os resultados

encontrados em literatura, que em geral utilizam a matriz de rigidez, advinda da formulação clássica do Método dos Elementos Finitos. No entanto, pela própria natureza do método, essa condição imposta limita a determinação das frequências e dos modos de vibração para o caso da força interna ser diferente de zero, na medida em que a matriz de rigidez tangente, usada no processo, não é constante.

Com relação aos algoritmos de integração numérica propostos, em alternativa ao método de Newmark, pode-se dizer que método Generalizado- α foi o que apresentou o melhor desempenho em todos os exemplos analisados. A resposta se mostrou numericamente estável e suave em todos os intervalos de tempo dos sistemas analisados, mesmo em condições de severa não-linearidade geométrica. No entanto, a inclusão das altas frequências na contribuição da resposta introduziu grande decaimento na amplitude das respostas para o raio espectral próximo a 1.0, o que é um efeito indesejado. Menção particular deve ser feita para o método TSTSM que, entre os 2 algoritmos recentes avaliados, foi o que mostrou melhor desempenho para os problemas avaliados. No entanto, ressalta-se que o uso dos parâmetros γ e raio espectral ρ_∞ , em seus valores extremos de intervalo, induziram à não convergência no processo iterativo para os sistemas estruturais avaliados, apesar Li e Yu (2020) destacarem que esses extremos se incluem no intervalo. Além disso, o raio espectral próximo a 1.0 introduziu um alongamento de período na resposta, o que também é um efeito indesejado. O TPSM mostrou, para a implementação aqui apresentada e para os sistemas estruturais analisados, que pode não ser adequado para avaliar problemas sob grande não-linearidade geométrica. A falha na convergência durante o processo iterativo foi verificada em quase todos os casos, exceto nos 2 primeiros exemplos do capítulo, cuja análise foi preponderantemente linear do ponto de vista geométrico.

Finalmente, quanto ao possível comportamento caótico dos sistemas em estudo neste trabalho, nas condições propostas, verificou-se que os algoritmos propostos de obtenção dos expoentes de Lyapunov se mostraram adequados, visto os resultados condizentes com a literatura. Ressalta-se que o algoritmo LPNV3, baseado em análise direta da matriz Jacobiana, mostrou-se adequado para análise do espectro dos expoentes de Lyapunov, apesar da divergência dos resultados para o exemplo do arco senoidal abatido. Pode-se dizer, então, que os métodos de integração numérica, bem como o raio espectral, exercem significativa influência nos expoentes de Lyapunov, tanto para o maior valor quanto para o espectro, em geral.

São essas, portanto, as conclusões obtidas por este autor na elaboração deste presente trabalho.

6.1 Sugestões de trabalhos futuros

Este autor sugere, com base nas análises realizadas, os seguintes temas e assuntos para futuras pesquisas:

- Avaliar os problemas apresentados incluindo a não-linearidade do material e sua influência no fenômeno *snap-through*, nos algoritmos de integração numérica no domínio do tempo (especialmente nos que possuem controle de dissipação numérica) e nos expoentes de Lyapunov;
- Estudo da estabilidade dos algoritmos de integração numérica implementados neste trabalho, destacando aspectos relativos à matriz de amplificação e o raio espectral;
- Implementação do método de Caughey (CHOPRA, 2020) para determinação de matriz de amortecimento e comparar com o amortecimento proporcional de Rayleigh;
- Implementação do processo iterativo de Picard (KIM, 2020) para solução do sistema de equações de movimento não-linear e comparar com o método de Newton-Raphson para o Método Posicional dos Elementos Finitos;
- Implementar o método de ortogonalização de Gram-Schmidt para obtenção do espectro dos expoentes de Lyapunov e comparar com o método de análise direta da matriz Jacobiana na formulação posicional do Método dos Elementos Finitos
- Comparar a variação dos expoentes de Lyapunov em relação aos métodos de integração e a influência do raio espectral neste processo;
- Determinação dos expoentes de Lyapunov usando reconstrução de órbitas a partir de séries temporais;
- Incluir, no algoritmo existente, a dimensão de Kaplan-York (dimensão de Lyapunov), de forma a classificar atratores gerados por respostas de sistemas susceptíveis à severa não-linearidade;
- Analisar o vetor intermediário θ_t do método TPSM, de forma a verificar a sua influência, no Método Posicional dos Elementos Finitos, em problemas com grande não-linearidade geométrica.

- Analisar a interação solo-estrutura, a partir do modelo de Winkler, usando o Método Posicional dos Elementos Finitos;
- Analisar estruturas biestáveis usando o Método Posicional dos Elementos Finitos;

Finalmente, na medida em que a amplitude de cargas harmônicas pode variar em uma faixa de valores, nem sempre a resposta expressa pelos diagramas de fase ou as seções de Poincaré serão mais adequadas para se obter um panorama dos comportamentos possíveis do sistema. Sugere-se neste caso que se faça um estudo dos diagramas de bifurcação obtidos pelos diferentes métodos de integração numérica no domínio do tempo.

REFERÊNCIAS

ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. **CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems**. New York, USA: Springer-Verlag, 1996. 603 p.

ARIO, I. **Homoclinic bifurcation and chaos attractor in elastic two-bar truss**, in *International Journal of Non-Linear Mechanics*, 2004, vol 39, pp 605-617.

ARJMANDI, S. A.; LOTFI, V. **Computing mode shapes of fluid-structure systems using subspace iteration methods**, in *Scientia Iranica A*, 2011, vol 18(6), pp 1159-1169.

AWREJCEWICZ, J.; KRYSKO, A. V.; EROFEEV, N. P.; DOBRIYAN, V.; BARULINA, M. A.; KRYSKO, V. A. **Quantifying Chaos by Various Computational Methods**. Part 1: Simple Systems, in *Entropy* 2018, vol 20(175), pp 1-28.

BANERJEE, S.; MITRA, M.; RONDONI, L. **Applications of Chaos and Nonlinear Dynamics in Engineering**. Heidelberg, Germany: Springer, 2011. 347 p. v. 1.

BATHE, K. J.; WILSON, E. L. **Solution Methods for Eigenvalue Problems in Structural Mechanics**, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1973, vol 6, pp 213-226.

BATHE, K. J. **Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: A simple implicit time integration scheme**, in *Journal of Computers and Structures*, 2007, vol 85, pp.437-445.

BATHE, K. J. **The subspace iteration method – Revisited**, in *Computers and Structures*, 2013, vol 126, pp 177-183.

BATHE, K. J. **Finite Element Procedures**. United States Of America: Prentice Hall, 2014. 1065p.

BAZANT, Z.; CEDOLIN, L. **Stability of Structures: Elastic, Inelastic, Fracture and Damage Theories**. Singapore: World Scientific, 2010. 1039 p.

BECHO, J. S. **Formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos para descrição do comportamento mecânico viscoelástico de fluência em vigas e estruturas de pórtico**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2016.

BECHO, J. S.; BARROS, F. B.; GRECO, M. **Formulação posicional para descrição do comportamento mecânico de fluência em vigas e estruturas de pórtico**, in *Ciência & Engenharia*, 2015, v 24, n 1, p 31-41.

BEHNOUDFAR, P.; DENG, Q.; CALO, V. M. **High-order generalized-alpha method**, in *Applications in Engineering Science*, 2020, vol 4, 100021.

BENÍTEZ, J. M.; MONTÁNS, F. J. **The value of numerical amplification matrices in time integration methods**, in *Computers and Structures*, 2013, vol 128, pp 243-250.

BHATT, P.; **Programming the dynamic analysis of structures**. New York: Spon Press, 2002. 460p.

BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. **Finite element analysis of air supported membrane structures**, in *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2000, vol 190, pp 579-595.

BORRVALL, T.; LAWSON, M. R. **On Accuracy and Stability of Implicit Time Integration Schemes for Rotating Structures**, in *16th International LS-DYNA® Users Conference*, 2020.

BRANDÃO, P. **Topological attractors of contracting Lorenz maps**, in *Ann. I. H. Poincaré – AN*, 2018, vol 35, pp 1409-1433.

CAVALCANTE, J. P. B. **Contribuição ao estudo de treliças não lineares considerando efeitos térmicos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2016.

CAVALCANTE, J. P. B.; MACIEL, D. N.; GRECO, M.; SILVA FILHO, J. N. **A Simple FEM Formulation Applied to Nonlinear Problems of Impact with Thermomechanical Coupling**, in *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2017, v 14, n 5, pp 2439-2462.

CHOPRA, A. K. **Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering**. 5. ed. United States Of America: Prentice Hall, 2020. 994p.

CHUNG, J.; HULBERT, G. M. **A Time Integration Algorithm for Structural Dynamics With Improved Numerical Dissipation: The Generalized- α Method**, in *Journal of Applied Mechanics*, 1993, vol 60, pp 371-375.

CIMELLARO, G. P.; MARASCO, S. **Introduction to Dynamics of Structures and Earthquake Engineering**. Switzerland: Springer, 2018. 607p. v 45.

CLOUGH, R. W. **Dynamics of Structures**. Berkeley, USA: Computers & Structures, 2003. 752p.

CODA, H. B. **An exact FEM geometric non-linear analysis of frames based on position description**, in *XVIII Brazilian Congress of Mechanical Engineering*, São Paulo, Brazil, 2003.

CODA, H. B.; GRECO M. **A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description**, in *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 2004, vol 193, pp 3541-3557.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R. **A FEM procedure based on positions and unconstrained vectors applied to nonlinear dynamic of 3D frames**, in *Finite Elements in Analysis and*

Design, 2011, vol 47, pp 319-333.

CODA, H. B.; PACCOLA, R. R.; SAMPAIO, M. S. M. **Positional description applied to the solution of geometrically non-linear plates and shells**, in *Finite Elements in Analysis and Design*, 2013, vol 67, pp 66-75.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures: Advanced Topics**. England: John Wiley & Sons, 1997. 509 p. v. 2.

DAVIES, B. **Exploring Chaos: Theory and Experiment**. USA: CRC Press, 2018. 256p.

FELIPE, T. R. C. **Análise Mecânica e Probabilística de Estruturas Treliçadas Sujeitas ao Colapso Progressivo**. Tese de Doutorado em Engenharia Civil (Estruturas), Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, Brasil, 2019.

FERNANDES, W. L.; VASCONCELLOS, D. B.; GRECO, M. **Dynamic Instability in Shallow Arches under Transversal Forces and Plane Frames with Semirigid Connections**, in *Mathematical Problems in Engineering*, 2018, vol 2018, ID 1985907, 14 p.

FERNANDES, W. L.; BARBOSA, G. B. GRECO, M.; SILVEIRA, R. A. M. **Comparison between recent implicit time integration methods with frequency dissipation for nonlinear structural applications**, in *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2022, vol 19(3), pp 1-22.

FILIPOV, E.T.; PAULINO G.H.; TACHI, T. **Origami tubes with reconfigurable polygonal cross-sections**, in *Proc. R. Soc.*, 2016, A472: 20150607, pp 1-23.

FREITAG, M. A.; KÜRSCHNER, P.; PESTANA, J. **GMRES convergence bounds for eigenvalue problems**, in *Computational Methods in Applied Mathematics*, 2017, vol 18(2), 1-22

GALVÃO, A. S. **Instabilidade Estática e Dinâmica de Pórticos Planos com Ligações Semi-rígidas**. Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, Brasil, 2004.

GAO, R.; LI, M.; WANG, Q.; ZHAO, J.; LIU, S. **A novel design method of bistable structures with required snap-through properties**, in *Sensors and Actuators A*, 2018, vol 272, pp 295-300.

GÉRADIN, M.; RIXEN, D. J. **Mechanical Vibrations: Theory And Application To Structural Dynamics**. 3. ed. United Kingdom: John Wiley & Sons, 2015. 598 p.

GOMEZ, M.; MOULTON, D. E.; VELLA, D. **Dynamics of viscoelastic snap-through**, in *Journal of the Mechanics and Physics of Solids*, 2019, vol 124, pp 781-813.

GRECO, M. **Análise de problemas de contato / impacto em estruturas de comportamento não linear pelo Método dos Elementos Finitos**. 2004. 163 p. PhD thesis, Universidade de São Paulo.

GRECO, M.; CODA, H. B. **Positional FEM formulation for flexible multi-body dynamic analysis**, in *Journal of Sound and Vibration*, 2006, vol 290, pp 1141-1174.

HILBER, H. M.; HUGHES, T. J. R.; TAYLOR, R. L. **Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics**, in *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 1977, vol 5, n 3, pp 283-292.

HILBORN, R. C. **Chaos and Nonlinear Dynamics: An Introduction for Scientists and Engineers**. England: Oxford University Press, 2001. 2nd ed. 672 p.

HUMAR, J. L. **Dynamics Of Structures**. 1. ed. USA: CRC Press, 2012. 1048p.

JANSEN, K.E.; WHITING, C.H.; HULBERT, G.M. **A generalized- α method for integrating the filtered Navier–Stokes equations with a stabilized finite element method**, in *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2000, vol 190, n 3-4, pp 305-319.

KARNOVSKY, I. A. **Theory of Arched Structures: Strength, Stability, Vibration**. New York: Springer, 2012. 458p.

KEIBOLAH, A.; KIANI, Y.; ESLAMI, M. R. **Dynamic snap-through of shallow arches under thermal shock**, in *Aerospace Science and Technology*, 2018, vol 77, pp 545-554.

KIM, B.; CHO, S.; KIM, C.; LEE, I. **Determination of Natural Frequencies and Mode Shapes of Structures Using Subspace Iteration Method with Accelerated Starting Vectors**, in *Journal of Structural Engineering*, 2005, vol 131(7), pp 1146-1149.

KIM, K. T.; BATHE, K. J. **The Bathe subspace iteration method enriched by turning vectors**, in *Computers and Structures*, 2017, vol 186, pp 11-21.

KIM, H. G.; WIEBE, R. **Experimental and numerical investigation of nonlinear dynamics and snap-through boundaries of post-buckled laminated composite plates**, in *Journal of Sound and Vibration*, 2019, vol 439, pp 362-387.

KIM, W. **A Comparative Study of Implicit and Explicit Composite Time Integration Schemes**, in *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2020, vol 20, n 13, 25p.

KORSCH, H. J.; JODL, H. J.; HARTMANN, T. **Chaos: A Program Collection for the PC**. 3. ed. Germany: Springer Berlin Heidelberg, 2008. 358p.

KUO, S.; YAU, J. D.; YANG, Y. B. **A Robust Time-integration Algorithm For Solving Nonlinear Dynamic Problems With Large Rotations And Displacements**, in *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, 2012, vol 12, n 6, 24p.

KZAM, A. K. L. **Análise da instabilidade estrutural global e local pelo MEF posicional com determinação de pontos críticos na trajetória de equilíbrio**. Tese de Doutorado em

Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2016.

LACERDA, E. G. M. **Análise não linear de treliças pelo método dos elementos finitos posicional**. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2014.

LAYEK, G. C. **An Introduction to Dynamical Systems and Chaos**. New Delhi: Springer India, 2015. 632p.

LI, J., YU, K. **A truly self-starting implicit family of integration algorithms with dissipation control for nonlinear dynamics**, in *Nonlinear Dynamics*, 2020, vol 102, pp 2503-2530.

LIANG, X.; MOSALAM, K. M. **Lyapunov Stability and Accuracy of Direct Integration Algorithms Applied to Nonlinear Dynamic Problems**, in *Journal of Engineering Mechanics*, 2016, vol 04016022, pp 1-9.

LIU, A.; YANG, Z.; LU, H.; FU, J.; PI, Y. **Experimental and analytical investigation on the in-plane dynamic instability of arches owing to parametric resonance**, in *Journal of Vibration and Control*, 2018, vol 24(19), pp 4419-4432.

MADEIRA, R. H.; CODA, H. B. **Kelvin viscoelasticity and Lagrange multipliers applied to the simulation of nonlinear structural vibration control**, in *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2016, v 13, n 5, pp 964-991.

MALAKIYEH, M. M.; SHOJAEE, S.; BATHE, K. J. **The Bathe time integration method revisited for prescribing desired numerical dissipation**, in *Computers and Structures*, 2019, vol 212, pp 289-298.

MAPA, L. P. P. **Subestruturação Dinâmica por meio do Método de Craig-Bampton aplicada a Pórticos Planos**. 2018. 63 p. Master of Science, Universidade Federal de Ouro Preto.

MARECA, M. P.; BORDEL, B. **Improving the Complexity of the Lorenz Dynamics**, in *Complexity*, 2017, vol 2017, ID 3204073, 16p.

MEI, C. **Free vibration analysis of classical single-story multi-bay planar frames**, in *Journal of Vibration and Control*, 2012, vol 19(13), pp 2022-2035.

NOH, G.; BATHE, K. J. **The Bathe time integration method with controllable spectral radius: The ρ_∞ -Bathe method**, in *Computers and Structures*, 2019a, vol 212, pp 299-310.

NOH, G.; BATHE, K. J. **For direct time integrations: A comparison of the Newmark and ρ_∞ -Bathe schemes**, in *Computers and Structures*, 2019b, vol 225, 12p.

OLIVEIRA, F. M.; GRECO, M. **Nonlinear dynamic analysis of beams with layered cross sections under moving masses**, in *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 2015, v 37, pp 451-462.

OLIVEIRA, F. M. **Análise dinâmica não linear de problemas envolvendo massas móveis aplicadas em cabos e elementos de viga.** Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2012.

OLLER, S. **Nonlinear Dynamics of Structures.** Barcelona: Artes Gráficas Torres S.L., 2014. 203p.

OUTA, R. **SUPRESSÃO DO MOVIMENTO CAÓTICO DE UM ROTOR DINÂMICO UTILIZANDO O CONTROLE LINEAR ÓTIMO.** Tese de Doutorado em Engenharia Mecânica, Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira, Universidade Estadual Paulista, São Paulo, Brasil, 2017.

PARKER, T. S.; CHUA, L. O. **Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems.** New York: Springer-Verlag, 1989, 353p.

PAULTRE, P. **Dynamics of Structures.** United States: John Wiley & Sons, 2011. 802p.

PAZ, M.; LEIGH, W. **Structural Dynamics: Theory and Computation.** 5. ed. Massachusetts, USA: Kluwer Academic Publishers, 2004. 844 p.

PEITGEN, H. O.; JÜRGENS, H.; SAUPE, D. **Chaos and Fractals: New Frontiers of Science.** 2. ed. New York: Springer Science, 2004. 895p.

PIGNATARO, M.; RIZZI, N.; LUONGO, A. **Stability, Bifurcation and Postcritical Behaviour of Elastic Structures.** USA: ELSEVIER, 1991. 358 p.

PLAUT, R. H. **snap-through of shallow reticulated domes under unilateral displacement control,** in *International Journal of Solids and Structures*, 2018, vol 148-149, pp 24-34.

PREMRAJ, D.; SURESH, K.; PALANIVEL, J.; THAMILMARAN, K. **Dynamic bifurcation and strange nonchaos in a two-frequency parametrically driven nonlinear oscillator,** in *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2017, vol 50, pp 103-114.

RABELO, J. M. G. **Formulação posicional não linear utilizando viscoelasticidade para análise de estruturas treliçadas.** Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2015.

REIS, M. C. J. **Análise não linear geométrica de pórticos planos considerando ligações semirrígidas elastoplásticas.** Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2012.

REIS, M. C. J.; CODA, H. B. **Physical and Geometrical non-linear analysis of plane frames considering elastoplastic semi-rigid connections by the positional FEM,** in *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2014, vol 11, pp 1163-1189.

RIEGER, N. F.; McCALLION, H. **The natural frequencies of portal frames,** in *International Journal of Mechanical Science*, 1965, v 7, pp 263-276.

RIGOBELLO, R. **Desenvolvimento e aplicação de código computacional para análise de estruturas de aço aporticadas em situação de incêndio.** Tese de Doutorado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2011.

ROSAS, L. R. B. **Análise Dinâmica de Sistemas Estruturais Reticulados com Restrições de Contato.** Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil, 2016.

ROSTAMI, S.; SHOJAEI, S.; SAFFARI, H. **An explicit time integration method for structural dynamics using cubic B-spline polynomial functions,** in *Scientia Iranica A*, 2013, vol 20, n 1, pp 23-33.

RUELLE, D. **Chaotic evolution and strange attractors:** The statistical analysis of time series for deterministic nonlinear systems. ENGLAND: Cambridge University Press, 1989. 107p.

SANCHES, R. A. K.; CODA, H. B. **Flexible multibody dynamics finite element formulation applied to structural progressive collapse analysis,** in *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2017, v 14, n 01, pp 52-71.

SHE, G. L.; REN, Y. R.; YAN, K. M. **On snap-buckling of porous FG curved nanobeams,** in *Acta Astronautica*, 2019, vol 161, pp 475-484.

SILVA, R. L. D. **Estudo de pórticos planos não lineares considerando efeitos térmicos.** Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Natal, 2017.

SILVA, A. R. D. **Sistema Computacional para Análise Avançada Estática e Dinâmica de Estruturas Metálicas.** Tese de Doutorado em Construção Metálica, Universidade Federal de Ouro Preto, Ouro Preto, Brasil, 2009.

SIQUEIRA, T. M. **Análise dinâmica não linear geométrica de estruturas e mecanismos reticulados planos com ligações deslizantes.** Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil, 2016.

SIQUEIRA, T. M.; CODA, H. B. **Development of sliding connections for structural analysis by a total Lagrangian FEM formulation,** in *Latin American Journal of Solids and Structures*, 2016, v 13, n 11, pp 2059-2087.

SOARES JÚNIOR, D. **A simple and effective new family of time marching procedures for dynamics,** in *Journal of Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 2015, vol 283, pp 1138-1166.

SORIANO, H. L. **Introdução à Dinâmica das Estruturas.** 1. ed. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014. 464 p.

SPROTT, J. C. **Chaos and Time-Series Analysis.** UK: Oxford U. Press, 2003. 527p.

STROGATZ, S. H. **Nonlinear Dynamics and Chaos: with applications to Physics, Biology, Chemistry and Engineering**. 2. ed. USA: Addison-Wesley, 2018. 532 p.

TEDESCO, J. W.; McDOUGAL, W. G.; ROSS, C. A. **Structural Dynamics: Theory and Applications**. California: Addison Wesley Longman, 1999. 828p.

VASCONCELLOS, D. B. **Análise de Estruturas e Mecanismos Reticulados Planos com Ligações Viscoelásticas pela Formulação Posicional do Método dos Elementos Finitos**. Dissertação de Mestrado em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, Brasil, 2018.

WATTS, G.; SINGHA, M. K.; PRADYUMNA, S. **Nonlinear bending and snap-through instability analyses of conical shell panels using element free Galerkin method**, in *Thin-Walled Structures*, 2018, vol 122, pp 452-462.

WIGGINS, S. **Introduction To Applied Nonlinear Dynamical Systems And Chaos**. New York, USA: Springer-Verlag, 2003. 2nd ed. 843 p.

WOOD, W. L.; BOSSAK, M.; ZIENKIEWICZ, O. C. **An alpha modification of Newmark's method**, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1980, vol 15, n 10, pp 1562-1566.

WU, G. C.; BALEANU, D. **Jacobian matrix algorithm for Lyapunov exponents of the discrete fractional maps**, in *Commun Nonlinear Sci Numer Simulat*, 2015, vol 22, pp 95-100.

Xu, J.; Huang, Y.; Qu, Z. **An efficient and unconditionally stable numerical algorithm for nonlinear structural dynamics**, in *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2020, vol 121(20), pp 4614-4629.

YAN, S. T.; SHEN, X.; CHEN, Z.; JIN, Z. **Symmetric snap-through and equal potential energy load of non-uniform shallow arch under a concentrated load considering imperfection effect**, in *International Journal of Mechanical Sciences*, 2018, vol 146-147, pp 152-179.

YE, Q; ZHANG, P. **Inexact inverse subspace iteration for generalized eigenvalue problems**, in *Linear Algebra and its Applications*, 2011, vol 434, pp 1697-1715.

ZDRAVKOVIĆ, L.; KONTTOE, S.; POTTS, D. M. **Performance of the generalized- α integration method in dynamic geotechnical problems**, in *Numerical Models in Geomechanics - NUMOG IX*, 2004, pp 211-216.

ZHANG, H.; XING, Y. **A three-parameter single-step time integration method for structural dynamic analysis**, in *Acta Mechanica Sinica*, 2019. vol 35, n 1, pp 112-128.

ZHANG, J. **A-stable two-step time integration methods with controllable numerical dissipation for structural dynamics**, in *International Journal for Numerical Methods in*

Engineering, 2020, vol 121, pp 54-92.