

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-graduação em Engenharia de Estruturas

Guilherme Ribeiro Caetano

**FORMULAÇÃO DE MODELOS CONSTITUTIVOS DE DEGRADAÇÃO
ISOTRÓPICA PARA REPRESENTAÇÃO DO COMPORTAMENTO BIMODULAR
DO CONCRETO**

Belo Horizonte
2022

Guilherme Ribeiro Caetano

**FORMULAÇÃO DE MODELOS CONSTITUTIVOS DE DEGRADAÇÃO
ISOTRÓPICA PARA REPRESENTAÇÃO DO COMPORTAMENTO BIMODULAR
DO CONCRETO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de "Mestre em Engenharia de Estruturas".

Orientador: Samuel Silva Penna

Belo Horizonte

2022

C128f

Caetano, Guilherme Ribeiro.

Formulação de modelos constitutivos de degradação isotrópica para representação do comportamento bimodular do concreto [recurso eletrônico] / Guilherme Ribeiro Caetano. - 2022.

1 recurso online (193 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Samuel Silva Penna.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 186-193.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Modelagem - Teses. 3. Concreto - Teses. 4. Construção do concreto - Teses. 5. Mecânica do dano contínuo - Teses. I. Penna, Samuel Silva. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



ATA DA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº: 393 DO ALUNO GUILHERME RIBEIRO CAETANO

Às **08:00** horas do dia **02** do mês de **dezembro** de **2022**, reuniu-se, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **24 de outubro de 2022**, para julgar a defesa da Dissertação de Mestrado intitulada "**Formulação de Modelos Constitutivos de Degradação Isotrópica para Representação do Comportamento Bimodular do Concreto**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de MESTRE EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Samuel Silva Penna**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foram atribuídas as seguintes indicações:

Prof. Dr. Samuel Silva Penna - DEES - UFMG (Orientador)

Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros - DEES - UFMG

Prof. Dr. José Júlio de Cerqueira Pituba - UFCAT

Pelas indicações acima, o candidato foi considerado APROVADO, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 02 de dezembro de 2022.

Observações:

1. A aprovação do candidato na defesa da Dissertação de Mestrado não significa que o mesmo tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Mestre em Engenharia de Estruturas;

2. Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.



Documento assinado eletronicamente por **José Julio de Cerqueira Pituba, Usuário Externo**, em 02/12/2022, às 10:43, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Samuel Silva Penna, Professor do Magistério Superior**, em 02/12/2022, às 10:48, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Felicio Bruzzi Barros, Coordenador(a) de curso de pós-graduação**, em 02/12/2022, às 10:51, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **1917367** e o código CRC **DF77D4AD**.

Agradecimentos

A Deus, por ser minha fonte de paz espiritual e por iluminar o meu caminho.

Aos meus pais Sidneia e Ramon, por todos os ensinamentos de vida e pelo ser humano que hoje sou. Aos meus irmãos Roney e Camila, por fazerem parte da minha criação e por serem pessoas que torcem pela minha vitória.

A minha namorada Caroline, pelo amor, carinho e companheirismo durante a nossa trajetória.

Ao meu orientador Professor Samuel, no qual eu tenho grande sintonia e que me inspira todos os dias, pela sua dedicação e seu compromisso na missão de ensinar.

Aos meus professores e colegas do mestrado, que estive comigo durante essa etapa da vida.

Aos meus professores da graduação Euler e João batista, por me incentivarem a cursar o mestrado e por terem acreditado na minha capacidade.

“O mais importante é não parar de questionar. A curiosidade tem uma razão para existir.”

Albert Einstein

Dedico este trabalho à minha família

Resumo

O concreto é um material estrutural utilizado em grande escala na construção civil. Sua durabilidade, sua maleabilidade e sua resistência o faz ser um material preferido pelos engenheiros. Assim, estudar suas características e seu comportamento é de grande importância para os projetos estruturais.

A modelagem constitutiva do concreto tem sido objeto de estudo de vários autores, entretanto, não é uma tarefa muito simples. O concreto é um material heterogêneo e além disso, em regimes de tração, ele tem um comportamento mecânico distinto de quando está submetido a regimes de compressão. É sabido também que sua resistência à compressão é superior a sua resistência à tração. Esse comportamento assimétrico do concreto na tração e na compressão é denominado de bimodularidade.

Para modelar esse comportamento complexo, uma das formas é através da teoria do dano em meios contínuos que relaciona a perda progressiva de rigidez do material através de uma variável interna denominada dano. Essa variável indica o nível de degradação do meio material.

Normalmente, os modelos de dano que representam o comportamento bimodular do concreto adotam duas variáveis de dano para representar a degradação por tração e compressão. Neste trabalho, são formulados modelos de degradação isotrópica, com leis e parâmetros de tração e compressão independentes, de tal forma que proporcionam ao modelo uma melhor parametrização dos materiais bimodulares.

Palavras-Chave: Bimodularidade, Mecânica do dano em meios contínuos, Degradação isotrópica, Modelagem constitutiva do concreto.

Abstract

Concrete is a structural material used on a large scale in civil construction. Its durability, malleability and strength make it a material preferred by engineers. Then, studying its characteristics and behavior is of great importance for structural projects.

The constitutive modeling of concrete has been investigated by several authors, however, it is not a very simple task. Concrete is a heterogeneous material and, in addition, in tension regimes, concrete presents a different mechanical behavior compared to the compression regimes. It is also known that its compressive strength is superior to its tensile strength. This asymmetric behavior of concrete in tension and compression is called bimodularity.

To model this complex behavior, one of the ways is through the continuum damage theory that relates the progressive loss of stiffness of the material through an internal variable called damage. This variable indicates the level of degradation of the material media.

Usually, the damage models that represent the bimodular behavior of concrete adopt two damage variables to represent the degradation by tension and compression. In this work, isotropic degradation models are formulated, with independent parameters and laws of tension and compression, in such a way that they provide better parameterization of bimodular materials.

Keywords: Bimodularity, Continuum damage mechanics, Isotropic degradation, Constitutive modeling of concrete

Lista de Figuras

2.1	Fases da microestrutura do concreto (Teixeira, 2020)	33
2.2	Níveis de escala para análise das propriedades do concreto	34
2.3	Macroestrutura do concreto (Mehta e Monteiro, 2006)	35
2.4	Tipos de respostas dos materiais, adaptado de Wolff (2010)	35
2.5	Modos de abertura de fissura (Bazant e Gopalaratnam, 1989)	36
2.6	Decomposição da relação total tensão deformação para o concreto de acordo com o modelo de fissuração fictícia, adaptado de Hordijk (1992)	38
2.7	Mecanismos de fratura do concreto, adaptado de Álvares (1993)	38
2.8	Relação de tensão-deformação do concreto tracionado, adaptado de Terrien (1980)	39
2.9	Relação de tensão-deformação do concreto comprimido, adaptado Tran (2009)	40
2.10	Situações de carregamentos biaxiais	41
2.11	Relação de tensão-deformação do concreto sob compressão biaxial, adaptado de Kupfer et al. (1969)	41
2.12	Relação de tensão-deformação do concreto sob estado combinado de compressão e tração, adaptado de Kupfer et al. (1969)	42
2.13	Relação de tensão-deformação do concreto sob tração biaxial, adaptado de Kupfer et al. (1969)	42
2.14	Ruptura do concreto submetido a tensões biaxiais a partir dos experimentos de Kupfer et al. (1969)	43
2.15	Limite elástico e superfície de ruptura do concreto em estado plano de tensão, adaptado de Kupfer et al. (1969)	44
2.16	Resposta tensão-deformação axial para diferentes tipos de tensão de confinamento, adaptado de Sfer et al. (2002)	45

3.1	Sólido danificado e representação do EVR (Penna, 2011)	48
3.2	Hipótese de equivalência de deformação (Lemaitre e Chaboche, 1990)	50
3.3	Comportamento característico dos materiais (Penna, 2011)	52
3.4	Decomposição da deformação incremental em modelos de degradação elástica, adaptada de Penna (2011)	54
3.5	Relação das parcelas de deformação incremental, adaptada de Penna (2011)	56
3.6	Curvas de tensão-deformação experimental e idealizada na compressão	64
3.7	Curvas de tensão-deformação experimental e idealizada na tração . .	65
3.8	Ensaio da chapa tracionada, adaptado (Shah et al., 1995)	73
3.9	Deslocamentos medidos nos LVDTs em tempo de ensaio (Shah et al., 1995)	73
3.10	Formação de fissuras durante o carregamento (Shah et al., 1995) . . .	74
3.11	Localização de deformações numericamente induzida (Fuina, 2009) . .	75
3.12	Cálculo da média ponderada de uma variável em um domínio não local (Souza, 2016)	77
3.13	Função de peso Gaussiana e influência do parâmetro K	78
4.1	Representação do hiperplano divisor dos subdomínios de compressão e tração (Pituba, 2003)	81
4.2	Caracterização dos estados no espaço das tensões principais	81
5.1	Algoritmo para o processo incremental iterativo da análise fisicamente não linear Fuina (2004)	100
6.1	Tração e compressão direta	104
6.2	Resposta tensão-deformação dos modelos propostos em regime de tra- ção uniaxial com variação das funções de dano	106
6.3	Resposta tensão-deformação dos modelos propostos em regime de compressão uniaxial com variação das funções de dano	107
6.4	Malhas utilizadas no ensaio de regularização dos resultados	109
6.5	Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBM1 local	110
6.6	Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBM1 não local	110
6.7	Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBM2 local	111

6.8	Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBM2 não local	111
6.9	Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBV local .	112
6.10	Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBV não local	112
6.11	Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBLC1 local	113
6.12	Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBLC1 não local	113
6.13	Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBLC2 local	114
6.14	Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBLC2 não local	114
6.15	Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBM1 local	116
6.16	Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBM1 não local	117
6.17	Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBM2 local	117
6.18	Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBM2 não local	118
6.19	Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBV local	118
6.20	Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBV não local	119
6.21	Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBLC1 local	119
6.22	Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBLC1 não local	120
6.23	Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBLC2 local	120
6.24	Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBLC2 não local	121
6.25	Parametrização do modelo clássico de Mazars (1984)	125
6.26	Parametrização do MBM1	126
6.27	Parametrização do MBM2	126

6.28	Parametrização do modelo clássico de de Vree et al. (1995)	127
6.29	Parametrização do MBV	127
6.30	Parametrização do modelo clássico de Lemaitre e Chaboche (1990)	128
6.31	Parametrização do MBLC1	128
6.32	Parametrização do MBLC2	129
6.33	Parametrização do modelo clássico de Mazars (1984) com relação a resultados experimentais	131
6.34	Parametrização do MBM1 com relação a resultados experimentais	131
6.35	Parametrização do MBM2 com relação a resultados experimentais	131
6.36	Parametrização do modelo clássico de de Vree et al. (1995) com relação a resultados experimentais	132
6.37	Parametrização do MBV com relação a resultados experimentais	132
6.38	Parametrização do modelo clássico de Lemaitre e Chaboche (1990) com relação a resultados experimentais	133
6.39	Parametrização do MBLC1 com relação a resultados experimentais	133
6.40	Parametrização do MBLC2 com relação a resultados experimentais	134
6.41	Dados geométricos e malha para ensaio biaxial de Kupfer et al. (1969)	135
6.42	Superfície de ruptura de Mazars (1984) comparada com ensaio experimental	137
6.43	Superfície de ruptura do MBM1 comparada com ensaio experimental	138
6.44	Superfície de ruptura do MBM2 comparada com ensaio experimental	138
6.45	Superfície de ruptura de de Vree et al. (1995) comparada com ensaio experimental	139
6.46	Superfície de ruptura do MBV comparada com ensaio experimental	140
6.47	Superfície de ruptura de Lemaitre e Chaboche (1990) comparada com ensaio experimental	141
6.48	Superfície de ruptura do MBLC1 comparada com ensaio experimental	141
6.49	Superfície de ruptura do MBLC2 comparada com ensaio experimental	142
6.50	Dados geométricos da viga do ensaio de Petersson (1981)	143
6.51	Malha utilizada no ensaio de comparação com experimento do Petersson (1981)	144
6.52	Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga	144

6.53	Trajectoria de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga	145
6.54	Trajectoria de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga	146
6.55	Região danificada na viga	147
6.56	Dados geométricos da viga do ensaio de García-Álvarez et al. (2012) .	147
6.57	Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de García-Álvarez et al. (2012) com $e = 0$ e $a = 0,25d$	150
6.58	Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de García-Álvarez et al. (2012) com $e = 0,3125d$ e $a = 0,25d$	151
6.59	Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de García-Álvarez et al. (2012) com $e = 0,625d$ e $a = 0,25d$	151
6.60	Comparação de resultados do MBM1 local e não local com relação ao ensaio de García-Álvarez et al. (2012)	153
6.61	Comparação de resultados do MBM2 local e não local com relação ao ensaio de García-Álvarez et al. (2012)	154
6.62	Comparação de resultados do MBV local e não local com relação ao ensaio de García-Álvarez et al. (2012)	155
6.63	Comparação de resultados do MBLC1 local e não local com relação ao ensaio de García-Álvarez et al. (2012)	156
6.64	Comparação de resultados do MBLC2 local e não local com relação ao ensaio de García-Álvarez et al. (2012)	157
6.65	Caminhos percorridos pelo dano nas vigas pequenas	159
6.66	Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de García-Álvarez et al. (2012) com $e = 0$ e $a = 0,275d$	161
6.67	Trajectoria de equilíbrio da abertura da ponta da trinca com $e = 0$ para o MBM1	162
6.68	Trajectoria de equilíbrio da abertura da ponta da trinca com $e = 0$ para o MBM2	162
6.69	Trajectoria de equilíbrio da abertura da ponta da trinca com $e = 0$ para o MBV	163
6.70	Trajectoria de equilíbrio da abertura da ponta da trinca com $e = 0$ para o MBLC1	163

6.71	Trajetória de equilíbrio da abertura da ponta da trinca com $e = 0$ para o MBLC2	163
6.72	Caminho percorrido pelo dano na viga pequena do concreto de alta resistência	164
6.73	Dados geométricos do painel em L do ensaio de Winkler et al. (2001)	165
6.74	Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de Winkler et al. (2001)	166
6.75	Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o modelo MBM1	168
6.76	Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o modelo MBM2	168
6.77	Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o modelo MBV	168
6.78	Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o modelo MBLC1	169
6.79	Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o modelo MBLC2	169
6.80	Caminho percorrido pelo dano nas malhas modeladas	170
6.81	Propagação da trinca observada experimentalmente e numericamente por Winkler et al. (2001)	171
6.82	Dados geométricos da viga do ensaio de Gálvez et al. (1998)	171
6.83	Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de Gálvez et al. (1998)	172
6.84	Carga por CMOD utilizando o modelo MBM1	173
6.85	Carga por deslocamento vertical do ponto B utilizando o modelo MBM1	174
6.86	Carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga utilizando o modelo MBM1	174
6.87	Carga por CMOD utilizando o modelo MBM2	174
6.88	Carga por deslocamento vertical do ponto B utilizando o modelo MBM2	175
6.89	Carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga utilizando o modelo MBM2	175
6.90	Carga por CMOD utilizando o modelo MBV	175
6.91	Carga por deslocamento vertical do ponto B utilizando o modelo MBV	176

6.92	Carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga utilizando o modelo MBV	176
6.93	Carga por CMOD utilizando o modelo MBLC1	176
6.94	Carga por deslocamento vertical do ponto B utilizando o modelo MBLC1	177
6.95	Carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga utilizando o modelo MBLC1	177
6.96	Carga por CMOD utilizando o modelo MBLC2	177
6.97	Carga por deslocamento vertical do ponto B utilizando o modelo MBLC2	178
6.98	Carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga utilizando o modelo MBLC2	178
6.99	Região de degradação nas malhas modeladas	179

Lista de Tabelas

4.1	Identificação dos modelos propostos	83
6.1	Parâmetros das leis de dano de tração para os modelos formulados . .	105
6.2	Parâmetros das leis de dano de compressão para os modelos formulados	105
6.3	Propriedades do material	124
6.4	Parâmetros das leis de dano dos modelos clássicos	124
6.5	Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados	125
6.6	Parâmetros das leis de dano dos modelos clássicos	130
6.7	Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados	130
6.8	Parâmetros das leis de dano dos modelos clássicos	136
6.9	Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados	137
6.10	Altura (d) das vigas utilizadas no ensaio de García-Álvarez et al. (2012)	148
6.11	Propriedades do material	149
6.12	Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados	149
6.13	Propriedades do material	160
6.14	Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados	161
6.15	Propriedades do material	167
6.16	Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados	167
6.17	Propriedades do material	172
6.18	Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados	173

Lista de Abreviaturas e Siglas

- CMOD Do inglês, *Crack Mouth Opening Displacement* ou, do português, distanciamento de abertura da boca da trinca
- EVR Elemento Volumétrico Representativo
- LVDT Do inglês, *Linear Variable Displacement Transducer* ou, do português, Transdutor de Deslocamento Variável Linear
- MBM1 Modelo Bimodular baseado em Mazars (1984) - Primeira Versão
- MBM2 Modelo Bimodular baseado em Mazars (1984) - Segunda Versão
- MBV Modelo Bimodular baseado em de Vree et al. (1995)
- MBLC1 Modelo Bimodular baseado em Lemaitre e Chaboche (1990) - Primeira Versão
- MBLC2 Modelo Bimodular baseado em Lemaitre e Chaboche (1990) - Segunda Versão

Lista de Símbolos

A	Constante da função de dano apresentada por de Borst e Gutiérrez (1999)
A_c	Parâmetro da lei de compressão de Mazars (1984)
A_t	Parâmetro da lei de tração de Mazars (1984)
$[A]$	Matriz associada a variável de estado de segunda ordem
B	Constante da função de dano de de Borst e Gutiérrez (1999)
B_c	Parâmetro da lei de compressão de Mazars (1984)
B_t	Parâmetro da lei de tração de Mazars (1984)
$[B]^T$	Matriz transposta que relaciona as deformações com os deslocamentos
$[B]$	Matriz associada a variável de estado de primeira ordem
C_1	Constante da lei constitutiva linear baseada em Jirásek (2004)
C_2	Constante da lei constitutiva linear baseada em Jirásek (2004)
C	Tensor constitutivo de flexibilidade
\dot{C}	Variação do tensor constitutivo de flexibilidade
$[C]$	Matriz associada a variável de estado
D	Variável de dano
\mathcal{D}_*	Conjunto de variáveis de dano

D^-	Variável de dano devido à compressão
D^+	Variável de dano devido à tração
$\{D\}$	Vetor associado a variável de estado e suas derivadas
\mathbf{E}	Tensor constitutivo de rigidez
$\dot{\mathbf{E}}$	Varição do tensor constitutivo de rigidez
E_0	Módulo de elasticidade inicial
\mathbf{E}^0	Tensor constitutivo de rigidez inicial
E_s	Módulo de elasticidade secante
E_{ijkl}^0	Componentes do tensor de rigidez elástico
E_{ijkl}	Componentes do tensor de rigidez secante
E_{ijkl}^t	Componentes do tensor de rigidez tangente
\tilde{E}	Módulo de rigidez equivalente
f_c	Resistência à compressão do material
f_t	Resistência à tração do material
F	Função de carregamento
\mathbf{F}^e	Vetor de forças equivalentes ao estado de tensão interna
F^-	Função de carregamento de compressão
F^+	Função de carregamento de tração
F^\pm	Função de carregamento para o estado combinado de tração e compressão
$g(\tilde{\varepsilon})$	Função de dano em termos de deformação equivalente

g^-	Função de dano de compressão
g^+	Função de dano de tração
G_f	Energia de fratura
h	Comprimento característico
H	Módulo inelástico no domínio das tensões
\bar{H}	Módulo de inelástico no domínio das deformações
H_i	Função de Heavyside
I_1	Primeiro invariante do tensor de deformações
\mathbf{I}_4	Tensor identidade de quarta ordem
J	Jacobiano da transformação isoparamétrica
J_2	Segundo invariante do tensor de deformações desviadoras
k	Razão entre resistência à compressão e resistência à tração do material
k_b	Constante da deformação equivalente do MBV
K	Constante da função não local
$[\mathbf{K}]$	Matriz de rigidez
m_{kl}	Componentes do tensor de gradiente do potencial dissipativo no domínio das tensões
\bar{m}_{kl}	Componentes do tensor de gradiente do potencial dissipativo no domínio das deformações
\bar{M}_{ijkl}	Componentes do tensor que indica a direção da variação do tensor de rigidez

$\bar{\mathcal{M}}_*$	Direção da taxa de variação das variáveis de dano
n_{ij}	Componentes do tensor do gradiente da função de carregamento no domínio das tensões
\bar{n}_{ij}	Componentes do tensor do gradiente da função de carregamento no domínio das deformações
\bar{n}_{ij}^-	Componentes do tensor do gradiente da função de carregamento de compressão
\bar{n}_{ij}^+	Componentes do tensor do gradiente da função de carregamento de tração
\bar{n}_{ij}^\pm	Componentes do tensor do gradiente da função de carregamento para o estado combinado de tração e compressão
N_{GP}	Número de pontos de Gauss
\vec{n}	Vetor normal ao plano analisado
\mathbf{p}	Conjunto de variáveis da formulação baseada em tensão que determina a configuração corrente da superfície de carregamento
$\bar{\mathbf{p}}$	Conjunto de variáveis da formulação baseada em deformação que determina a configuração corrente da superfície de carregamento
P	Carga pontual de referência
\mathbf{P}	Conjunto de parâmetros da lei de dano
\mathbf{P}^-	Conjunto de parâmetros da lei de dano de compressão
\mathbf{P}^+	Conjunto de parâmetros da lei de dano de tração
$\{\mathbf{P}\}$	Vetor de forças nodais
q	Carga distribuída de referência

Q	Potencial dissipativo
$\{Q\}$	Vetor de forças residuais
r	Distância entre o ponto analisado e o ponto vizinho dentro do domínio não local
R	Raio não local
\mathbf{s}	Vetor de posição do ponto vizinho
T_{kj}	Tensor de transformação de bases
$\{U\}$	Vetor de deslocamentos
v	Volume
w	Peso de integração do ponto de Gauss
\mathbf{x}	Vetor de posição do ponto analisado
$\{X\}$	Vetor de de variáveis de estado do problema
$\{\dot{X}\}$	Vetor de variação de primeira ordem das variáveis de estado do problema
$\{\ddot{X}\}$	Vetor de variação de segunda ordem das variáveis de estado do problema
α	Variável de peso não local
α_0	Função de peso não local
α^-	Variável de peso de compressão
α^+	Variável de peso de tração
δF	Força aplicada na face do elemento volumétrico representativo
δS	Área do elemento volumétrico representativo
$\delta \tilde{S}$	Área efetiva do elemento volumétrico representativo

δS_D	Área de defeitos do elemento volumétrico representativo
$\{\delta U\}$	Vetor de deslocamentos incrementais
$\{\delta U^P\}$	Parcela do vetor de deslocamentos incrementais devida às cargas de referência
$\{\delta U^Q\}$	Parcela do vetor de deslocamentos incrementais devida às cargas residuais
$\delta \lambda$	Incremento do fator de cargas
ε	Deformação
$\tilde{\varepsilon}$	Deformação equivalente
$\tilde{\varepsilon}^-$	Deformação equivalente de compressão
$\tilde{\varepsilon}^+$	Deformação equivalente de tração
$\tilde{\varepsilon}^\pm$	Deformação equivalente para o estado combinado de tração e compressão
$\dot{\varepsilon}$	Deformação incremental
$\dot{\varepsilon}$	Tensor de deformações incrementais
$\dot{\varepsilon}^d$	Tensor de deformações incrementais devido à degradação
ε_1	Deformação principal na direção 1
ε_2	Deformação principal na direção 2
ε_3	Deformação principal na direção 3
ε^e	Parcela de deformação elástica
$\dot{\varepsilon}^e$	Tensor de deformações incrementais elásticas
ε^-	Tensor de deformações de compressão

$\boldsymbol{\varepsilon}^+$	Tensor de deformações de tração
ε_{ik}^{P+}	Componentes do tensor de deformações principais positivas
ε_{ik}^{P-}	Componentes do tensor de deformações principais negativas
γ	Constante da função de dano baseada na lei constitutiva de Carreira e Chu (1985)
λ	Fator de carga
$\dot{\lambda}$	Multiplicador inelástico
κ	Variável histórica
κ_0	Limite de deformação elástica
κ_0^-	Limite de deformação elástica de compressão
κ_0^+	Limite de deformação elástica de tração
κ^-	Variável histórica de compressão
κ_f	Deformação última do material
κ^+	Variável histórica de tração
κ^\pm	Variável histórica para o estado combinado de tração e compressão
ν	Coefficiente de Poisson
σ	Tensão
$\boldsymbol{\sigma}$	Tensor de tensões
$\{\boldsymbol{\sigma}\}$	Vetor de tensões
$\tilde{\sigma}$	Tensão efetiva
$\dot{\sigma}$	Tensão incremental

σ_1	Tensão na direção 1
σ_2	Tensão na direção 2
σ_L	Tensão lateral
σ_{max}	Tensão máxima
$\boldsymbol{\sigma}^+$	Tensor de tensões principais positivas
$\boldsymbol{\sigma}^-$	Tensor de tensões principais negativas
Ψ	Variável de integridade

Sumário

1	Introdução	28
1.1	Objetivos	30
1.1.1	Objetivos Gerais	30
1.1.2	Objetivos Específicos	30
1.2	Organização do texto	31
2	Comportamento mecânico do concreto	33
2.1	Comportamento do concreto sob tração uniaxial	37
2.2	Comportamento do concreto sob compressão uniaxial	39
2.3	Comportamento do concreto sob estados multiaxiais	40
3	Mecânica do dano em meios contínuos	46
3.1	Histórico	46
3.2	Conceitos da Mecânica do Dano em Meios Contínuos	48
3.2.1	Tensão efetiva	49
3.2.2	Hipótese de equivalência de deformação	50
3.3	Formulação geral para os modelos de dano	51
3.3.1	Formulação baseada em tensão	53
3.3.2	Formulação baseada em deformação	56
3.3.3	Regra da degradação generalizada	59
3.3.4	Formulação geral para modelos de dano isotrópico	60
3.4	Funções de dano	63
3.5	Modelos de dano isotrópico	67
3.5.1	Modelo de Mazars (1984)	68
3.5.2	Modelo de de Vree et al (1995)	70
3.5.3	Modelo de Lemaitre e Chaboche (1990)	71
3.6	Abordagem não local	72
4	Proposta de modelos de dano isotrópico bimodulares	79
4.1	Formulação dos modelos de dano isotrópico bimodulares	80

4.1.1	Modelos de dano isotrópico bimodulares baseados na deformação equivalente de Mazars (1984)	83
4.1.2	Modelo de dano isotrópico bimodular baseado na deformação equivalente de de Vree et al. (1995) (MBV)	88
4.1.3	Modelos de dano isotrópico bimodulares baseados na deformação equivalente de Lemaitre e Chaboche (1990)	91
4.2	Formulação não local dos modelos de dano isotrópico bimodulares . .	95
5	Implementação computacional	97
5.1	Análise estática fisicamente não linear	98
5.2	Implementação dos modelos constitutivos bimodulares	101
5.3	Implementação dos modelos não locais bimodulares	102
6	Simulações Numéricas	103
6.1	Ensaio de tração e compressão	103
6.1.1	Ensaio com variação de funções de dano	103
6.1.2	Ensaio de refinamento da malha para modelos locais e não locais	108
6.1.3	Ensaio de parametrização do material com relação a leis empíricas	123
6.1.4	Ensaio de parametrização do material com relação a resultados experimentais	129
6.2	Ensaio Multiaxiais	135
6.3	Ensaio de flexão	143
6.3.1	Viga sob flexão em três pontos de Petersson (1981)	143
6.3.2	Viga sob flexão em três pontos de García-Álvarez et al. (2012)	147
6.4	Ensaio de painel em forma de L de Winkler et al. (2001)	165
6.5	Ensaio de modo misto de fratura de Gálvez et al. (1998)	171
7	Considerações Finais	181
7.1	Sugestões para trabalhos futuros	184
	Referências Bibliográficas	186

Capítulo 1

Introdução

O concreto é um material estrutural amplamente utilizado na construção civil. Estudar e analisar o seu comportamento é de fundamental importância para a engenharia de estruturas. Estudos mais aprofundados das características mecânicas do concreto partem da descrição matemática do comportamento material. Tal representação é conhecida como modelagem constitutiva. Existem diversas bases teóricas para descrever a constituição do meio, podendo citar a teoria da elasticidade, teoria da plasticidade, mecânica da fratura e por fim, na qual será o foco deste trabalho, a mecânica do dano em meios contínuos.

O concreto é formado por um conglomerado de partículas de agregados unidas por um meio ligante (pasta de cimento), que ao ser hidratado pela água, forma uma pasta resistente. Assim, o concreto é um material heterogêneo que possui a presença de microvazios ou microcavidades em sua estrutura oriundos do processo de cura.

Uma das características mecânicas que se pode destacar do concreto é o seu comportamento assimétrico na tração e na compressão. Sabe-se que o concreto possui uma resistência à compressão superior a sua resistência à tração, além disso, ele se comporta de maneira mais frágil na tração. Essa diferenciação no comportamento do material na tração e na compressão é denominada de comportamento bimodular.

O comportamento fisicamente não linear do concreto e sua característica bimodular estão ligados com o processo de fissuração. Em suma, a fratura no concreto

ocorre na direção perpendicular de máxima deformação de alongamento. Por exemplo, quando o material está submetido a um carregamento de tração uniaxial, a formação de fissuras se dá em um plano perpendicular à solicitação, enquanto que na compressão uniaxial, a propagação das fissuras se dá em uma direção paralela ao carregamento, devido ao efeito de Poisson.

A mecânica do dano em meios contínuos é uma teoria constitutiva que relaciona a perda progressiva da integridade, resistência e rigidez do material com a propagação de fissuras e o surgimento de microvazios. Os microdefeitos presentes no meio material são caracterizados através de uma variável interna denominada dano.

Na prática, mensurar diretamente a quantidade de defeitos presentes na estrutura do material é algo difícil de ser feito, o que torna custoso o processo de modelagem do comportamento mecânico do concreto. Essa abordagem é dita micromecânica. Em contrapartida, tem-se a abordagem fenomenológica, cujos modelos levam em conta a influência do dano nas grandezas físicas e através da variação dessas, a variável de dano é quantificada de forma indireta.

De acordo com Chaboche (1988), o processo de danificação pode influenciar, por exemplo, a mudança de densidade, as propriedades de condução elétrica, a propagação de ondas sonoras e o comportamento mecânico do material.

Por simplificação, alguns modelos consideram que a área de microdefeitos e microvazios é igual em todas as direções analisadas no sólido. Essa hipótese caracteriza o dano isotrópico que é representado por uma variável escalar. Nos modelos de degradação isotrópica, a multiplicação da variável de dano pelo tensor de rigidez elástico representa a degradação das propriedades elásticas do material.

Usualmente, modelos de dano isotrópico que buscam representar os materiais bimodulares adotam duas variáveis escalares, uma para representar o dano devido à tração e outra devido à compressão, já que nesse tipo de material, a evolução dos processos de dano ocorrem de maneira distinta na tração e na compressão.

Neste trabalho, os aspectos mecânicos do concreto serão estudados e modelos de

dano isotrópico presentes na literatura serão revisados. São propostos e formulados modelos de degradação isotrópica para representar o comportamento de materiais bimodulares.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivos Gerais

Este trabalho tem como objetivo geral propor modelos para representação do comportamento bimodular de materiais parcialmente frágeis, especialmente o concreto. Para tanto, o comportamento mecânico do concreto em regimes de tração e compressão será estudado e modelos clássicos presentes na literatura serão revisados. Por fim, modelos de dano isotrópico baseados nos modelos clássicos investigados serão propostos para que possam representar adequadamente a referida bimodularidade.

1.1.2 Objetivos Específicos

Os objetivos específicos deste trabalho são listados abaixo:

1. Estudar o comportamento mecânico do concreto em estados de tração e compressão, observado em ensaios experimentais.
2. Revisar a formulação dos modelos clássicos de Mazars (1984), de Vree et al. (1995) e Lemaitre e Chaboche (1990) e identificar suas limitações quanto à capacidade de representar o comportamento bimodular.
3. Formular os modelos propostos através de uma abordagem não local, para regularização dos resultados numéricos.
4. Implementar os modelos propostos, generalizando a modelagem constitutiva

de materiais, cuja degradação se baseia em leis de dano, possibilitando diferenciar o comportamento do material em regimes predominantes de tração, predominantes de compressão e combinados de tração e compressão através de indicadores de estados de tensão e deformação, propiciando uma melhor adequação paramétrica na representação de materiais bimodulares.

5. Realizar ensaios numéricos para validar os modelos locais e não locais propostos, comparando as respostas dos mesmos com os resultados dos modelos clássicos e os resultados experimentais.

1.2 Organização do texto

Esta dissertação foi dividida em seis capítulos. No capítulo 2, são estudadas as principais características do concreto e o seu comportamento diante de estados de tração, compressão e multiaxiais observados em ensaios experimentais.

No capítulo 3, são apresentados um breve histórico e os conceitos fundamentais da mecânica do dano em meios contínuos. Uma proposta de formulação geral dos modelos de dano é explicitada e alguns tipos de funções de dano são exibidas. Por fim, as formulações de modelos clássicos e uma abordagem não local são revisados neste capítulo.

No capítulo 4, são propostos cinco modelos de dano isotrópico com leis específicas de tração e compressão e que visam a representação do comportamento bimodular dos materiais. Será apresentado também a formulação não local dos modelos propostos.

No capítulo 5, é explicada de forma geral a implementação dos modelos propostos.

No capítulo 6, ensaios numéricos para validação dos modelos são apresentados e comparados com os resultados dos modelos clássicos e com os resultados experimentais. Também são feitas comparações com resultados dos modelos locais e não

locais.

Concluindo-se a dissertação, o capítulo 7 apresenta as considerações finais e sugestões para trabalhos futuros.

Capítulo 2

Comportamento mecânico do concreto

O concreto é um material poroso e heterogêneo caracterizado por duas fases que são formadas por um meio ligante, constituído de uma mistura de cimento hidráulico e água, e por partículas granulares inertes, como brita e areia.

Alguns autores, como Mindess et al. (2003), Mehta e Monteiro (2006) e Teixeira (2020), indicam que a interface entre a pasta cimentícia e os agregados graúdos (Figura 2.1) pode ser considerada como uma terceira fase do concreto, já que essas regiões formam uma zona de pouca resistência devida ao processo de exsudação interna, causada pelo efeito parede dos agregados. Normalmente, nessa zona é onde ocorre a nucleação de microvazios.

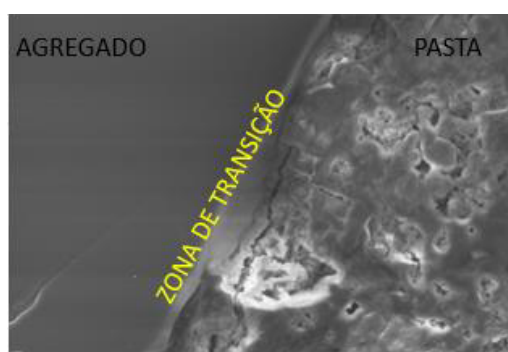


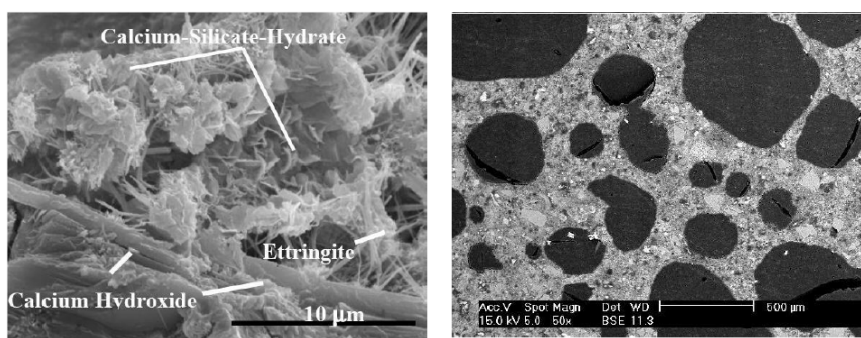
Figura 2.1: Fases da microestrutura do concreto (Teixeira, 2020)

O concreto endurecido é um conglomerado formado por agregados com diferentes tamanhos dispersos em uma pasta de cimento. Além disso, de acordo com Proença (1988), microvazios e microfissuras estão presentes no concreto mesmo antes do

carregamento, já que essas falhas são resultados do processo de retração e liberação de calor que se desenvolve na fase de cura.

Conforme Pianezzer et al. (2017), a análise das propriedades de materiais heterogêneos não é uma tarefa simples, entretanto esses tipos de materiais podem ser analisados a partir da utilização de técnicas de homogeneização, na qual se busca descrever a relação entre as propriedades conhecidas em escalas menores daquelas que ocorrem em escalas maiores.

Nessa perspectiva, van Mier (1984) define três níveis de escala para a análise das propriedades e dos mecanismos que influenciam o comportamento global do material. A microescala (Figura 2.2(a)) é definida por um comprimento característico em ordem de grandeza de 10^{-1} mm ou menos. Nessa escala é observada a influência dos processos químicos e físicos no comportamento do material. Segundo Rodrigues (2015), na mesoescala (Figura 2.2(b)), o concreto apresenta uma estrutura totalmente heterogênea, que por sua vez ocorrem concentrações de tensões entre as diferentes fases que constituem o material. O processo de formação e propagação de fissuras é estudado nesse nível de escala.



(a) Microescala (Stutzman, 2001) (b) Mesoescala (Roels et al., 2002)

Figura 2.2: Níveis de escala para análise das propriedades do concreto

Na escala macroscópica (Figura 2.3), o concreto é modelado como um material homogêneo e contínuo no qual as propriedades podem ser consideradas iguais em todos os pontos pertencentes ao sólido. O comportamento mecânico macroscópico

desse material pode ser representado por modelos constitutivos fenomenológicos baseados na teoria da elasticidade, teoria da plasticidade, teoria do dano em meios contínuos, mecânica da fratura ou até mesmo a combinação entre esses.

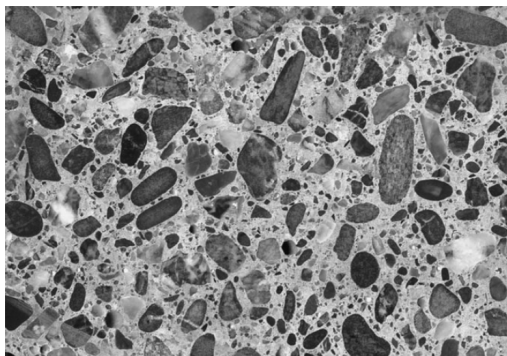


Figura 2.3: Macroestrutura do concreto (Mehta e Monteiro, 2006)

Além dessas considerações, é importante salientar que o comportamento mecânico dos materiais, quanto a sua resposta tensão-deformação, pode ser classificado como frágil, dútil ou parcialmente frágil. Na Figura 2.4, têm-se ilustrados os comportamentos idealizados de materiais em geral.

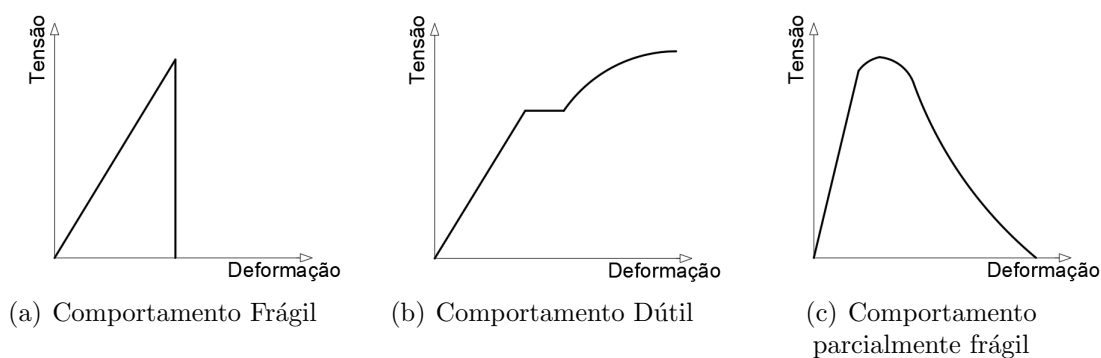


Figura 2.4: Tipos de respostas dos materiais, adaptado de Wolff (2010)

Como observado na Figura 2.4(a), o material frágil se rompe quando a resistência é alcançada. Já um material dútil, como os metais por exemplo, pode apresentar ou não um patamar de escoamento bem definido e se rompe a partir de grandes níveis de deformação, conforme Figura 2.4(b). O concreto é classificado como um material parcialmente frágil (Figura 2.4(c)), ou seja, ele não se rompe quando sua

resistência é atingida, porém, a medida que se incrementa a deformação, observa-se uma perda gradual de tensão após o pico de resistência. Esse ramo descendente do gráfico tensão-deformação é um fenômeno denominado de amolecimento ou *softening* (Wolff, 2010; Guetti, 2010).

De acordo com Rots et al. (1985), a resposta não linear do concreto é governada pela fissuração progressiva, resultando em falhas localizadas. Segundo van Mier (1984), no geral, as fissuras são observadas no concreto em zonas de interface argamassa-agregado e na matriz cimentícia.

Em regimes de compressão e tração uniaxiais, os materiais parcialmente frágeis, como o concreto, a cerâmica e rochas, possuem comportamentos distintos ou assimétricos, essa característica é denominada de comportamento bimodular.

Para melhor compreensão dos efeitos que levam o concreto a ter essa propriedade bimodular, é necessário revisar, do conceito da Mecânica da Fratura, as definições dos três tipos de abertura de fissura (Figura 2.5).

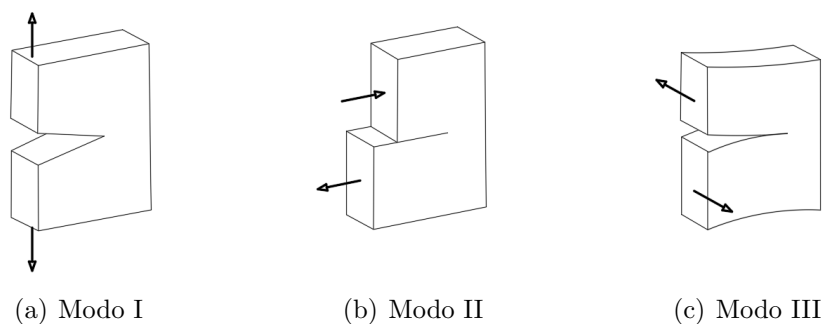


Figura 2.5: Modos de abertura de fissura (Bazant e Gopalaratnam, 1989)

- a) Modo I : Ocorre a abertura da fissura por um esforço perpendicular ao plano da trinca.
- b) Modo II : Com o esforço cisalhante aplicado paralelamente à trinca, ocorre o escorregamento das superfícies da fissura.
- c) Modo III : Corresponde ao escorregamento das superfícies de ruptura devido

ao esforço cisalhante aplicado na direção perpendicular à trinca.

Com esses conceitos explicitados, será estudado, a seguir, o comportamento do concreto diante de situações de tração uniaxial, compressão uniaxial e estados multiaxiais.

2.1 Comportamento do concreto sob tração uniaxial

Ensaio direto de tração são testes difíceis de realizar em materiais parcialmente frágeis. Geralmente, o concreto submetido a esse tipo de solicitação fornece apenas a primeira parte da curva, ou seja, até o pico do carregamento. Nesse ponto, ocorre a ruptura local do material, causando uma fissura transversal dentro do corpo de prova. (Torrenti et al., 2010)

Nesse tipo de ensaio, o comportamento antes do pico é representativo do material, já que os defeitos se distribuem de forma homogênea ao longo do corpo de prova. Já no ramo da curva após o pico, Petersson (1981) observou zonas de localização de deformações associadas à fissuração, causando a descarga elástica das outras regiões do corpo de prova, levando a perda de estabilidade do espécime. Portanto, a resposta desse trecho não é representativa do material.

A alternativa em se obter o ramo descendente do concreto submetido a tração, proposta por Petersson (1981), é o modelo de fissura fictícia, que consiste em se obter a relação tensão-deformação antes do pico em uma zona fora da fratura e uma relação tensão-abertura de fissura na banda de fissuração, conforme pode ser visto na Figura 2.6.

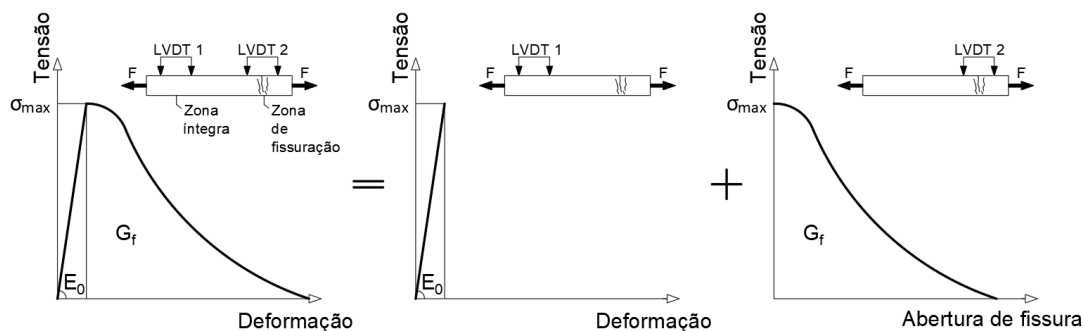
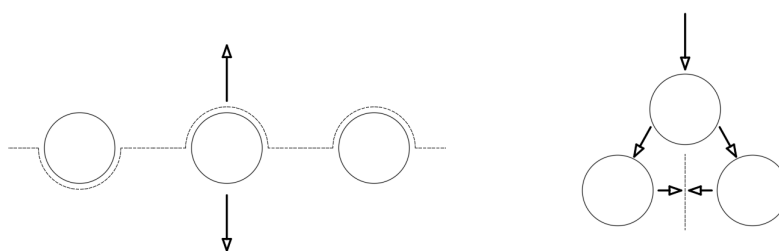


Figura 2.6: Decomposição da relação total tensão deformação para o concreto de acordo com o modelo de fissuração fictícia, adaptado de Hordijk (1992)

Geralmente, a resistência à tração do concreto é, em ordem de grandeza, 10 % de sua resistência à compressão, além disso, observa-se um comportamento mais frágil na tração. A razão disso está ligada ao processo de fissuração, pois na tração, a propagação das fissuras se dá na direção perpendicular de acordo com o modo I de abertura (Figura 2.7(a)). Já na compressão, o efeito do coeficiente de Poisson e a heterogeneidade do concreto produzem tensões de tração que fazem com que as microfissuras se desenvolvam em uma direção paralela à sollicitação a partir de um modo misto I e II de abertura (Figura 2.7(b)).



(a) Mecanismo de fratura na tração

(b) Mecanismo de fratura na compressão

Figura 2.7: Mecanismos de fratura do concreto, adaptado de Álvares (1993)

De acordo com Proença (1988), no início do carregamento até uma tensão igual a 60 % da resistência à tração, o concreto se comporta de forma linear elástica, conforme Figura 2.8. As fissuras que surgem a partir dessa fase fazem com que o material tenha uma resposta não linear pouco significativa. Somente então, a partir

do pico, a tensão decresce rapidamente devido à formação de fissuras de mesoescala causada pela união das microfissuras.

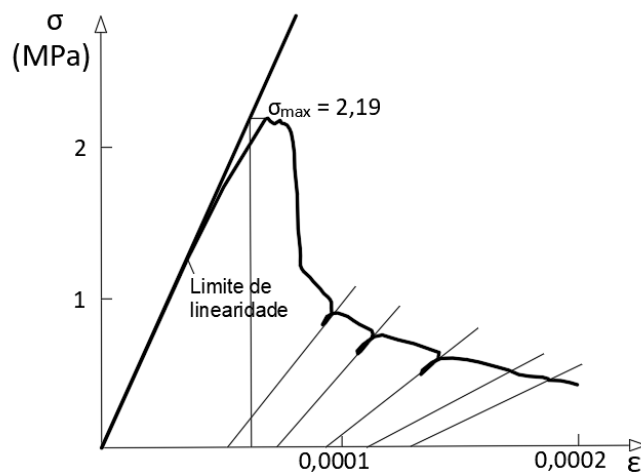


Figura 2.8: Relação de tensão-deformação do concreto tracionado, adaptado de Terrien (1980)

2.2 Comportamento do concreto sob compressão uniaxial

O concreto submetido à solicitação de compressão possui um comportamento mais dútil quando comparado com o regime de tração, verificando-se uma propagação de fissuras mais lenta e com maior consumo de energia.

Ao contrário do ensaio de tração, o teste de compressão direta para o concreto tem uma facilidade maior de ser realizado e sua resposta não linear é mais simples de ser obtida, já que a medida em que se incrementa a deformação, a capacidade de carga do material diminui gradativamente de forma mais lenta.

A curva típica de tensão-deformação do concreto na compressão é apresentada na Figura 2.9. No trecho em que a tensão se encontra numa faixa de até 50 % da resistência à compressão (OA), o material tem um comportamento linear.

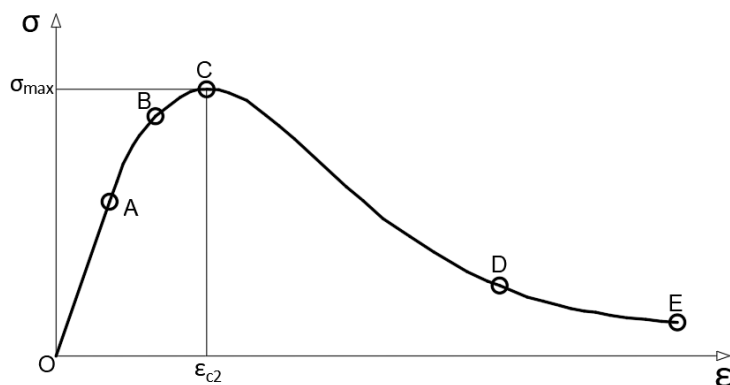


Figura 2.9: Relação de tensão-deformação do concreto comprimido, adaptado Tran (2009)

Conforme Tran (2009), aparecem as primeiras microfissuras que provocam uma ligeira diminuição no módulo de elasticidade num intervalo entre 50 % e 80 % da resistência do concreto (AB). O trecho de 80 % da resistência até máxima tensão (BC) é caracterizado pela rápida propagação de microfissuras. Logo após o pico (CD), surgem macrofissuras e a deformação aumenta acentuadamente. Na parte final do gráfico (DE), a velocidade de propagação das fissuras diminui devido ao atrito entre os agregados. Esse atrito confere resistência entre as superfícies da fissura, levando a uma lenta diminuição da tensão.

2.3 Comportamento do concreto sob estados multiaxiais

O conhecimento do comportamento uniaxial do concreto pode ser suficiente para prever respostas estruturais. Entretanto, em casos específicos, pode ser necessário o estudo do comportamento do concreto em estados multiaxiais.

O comportamento do concreto sob tensões multiaxiais tem sido investigado experimentalmente por vários pesquisadores, podendo citar Kupfer et al. (1969) e van Mier (1984).

Kupfer et al. (1969) realizaram o ensaio em espécimes de concreto de dimensões $20 \text{ cm} \times 20 \text{ cm} \times 5 \text{ cm}$. Em seu experimento, foram ensaiadas três tipos de situações de carregamento biaxiais com variadas taxas de tensões aplicadas nas faces

dos corpos de prova. Para o estado de compressão biaxial (Figura 2.10(a)), foram utilizadas as proporções de carregamento σ_1/σ_2 de $-1/0$, $-1/-1$ e $-1/-0,52$. Para o estado combinado de tração e compressão (Figura 2.10(b)), as taxas de carregamento utilizadas foram de $-1/0$, $-1/0,052$, $-1/0,103$ e $-1/0,204$. Para o estado de tração biaxial (Figura 2.10(c)), utilizaram-se as proporções de $1/0$, $1/1$ e $1/0,55$.

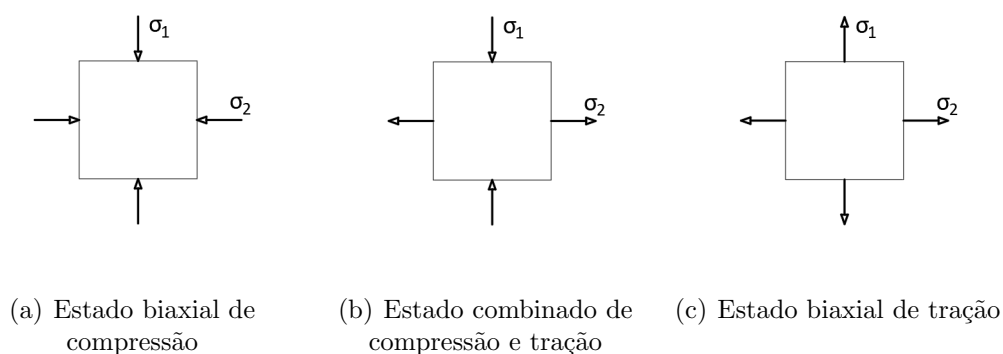


Figura 2.10: Situações de carregamentos biaxiais

O comportamento do concreto para essas três situações são vistos nas Figuras 2.11, 2.12 e 2.13.

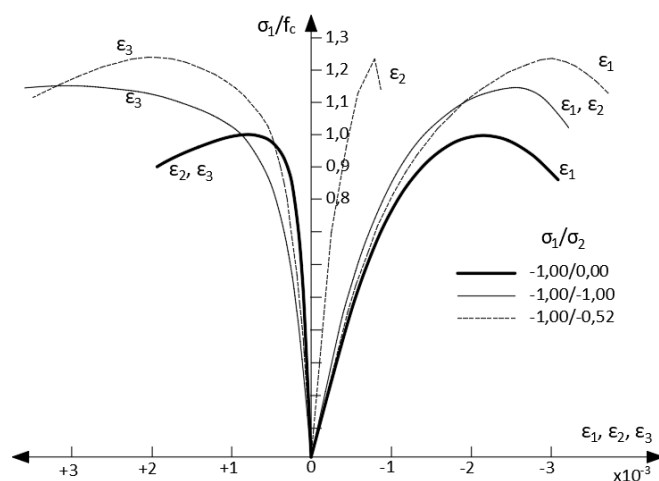


Figura 2.11: Relação de tensão-deformação do concreto sob compressão biaxial, adaptado de Kupfer et al. (1969)

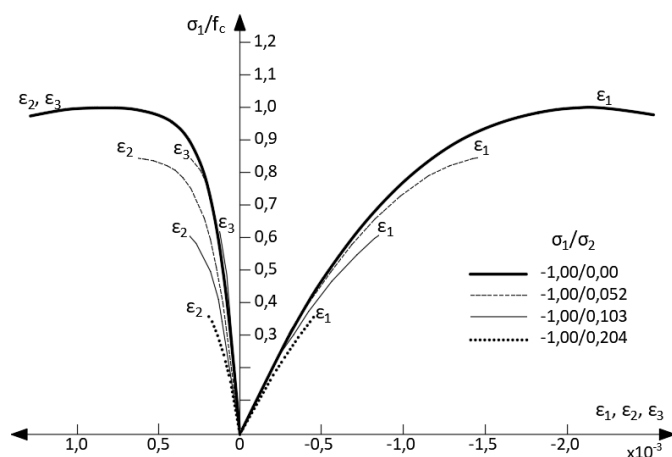


Figura 2.12: Relação de tensão-deformação do concreto sob estado combinado de compressão e tração, adaptado de Kupfer et al. (1969)

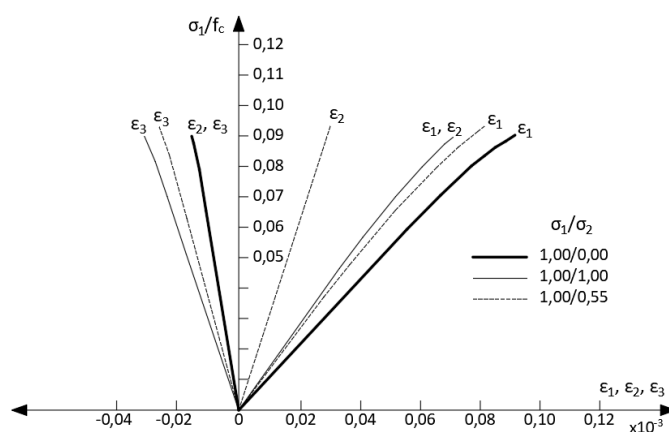


Figura 2.13: Relação de tensão-deformação do concreto sob tração biaxial, adaptado de Kupfer et al. (1969)

Algumas das principais características do concreto submetido a tensões biaxiais podem ser observadas nesse ensaio. Começando pelo o estado de compressão biaxial, verifica-se um aumento da resistência de aproximadamente 25 % quando $\sigma_1/\sigma_2 = -1,00/-0,52$ e de aproximadamente 15 % quando $\sigma_1/\sigma_2 = -1,00/-1,00$, além disso, nota-se uma ductilidade maior em compressão biaxial.

Para estados combinados de tração e compressão, a medida em que se aumenta a tensão de tração σ_2 , a resistência do concreto diminui cada vez mais. Já para estados biaxiais de tração, não há mudanças significativas de resistência.

Outra conclusão que se chegou nesse trabalho foi que a ruptura do concreto ocorre

por separação ortogonal à direção de tração principal máxima ou de alongamento principal máximo, conforme pode ser visto na Figura 2.14.

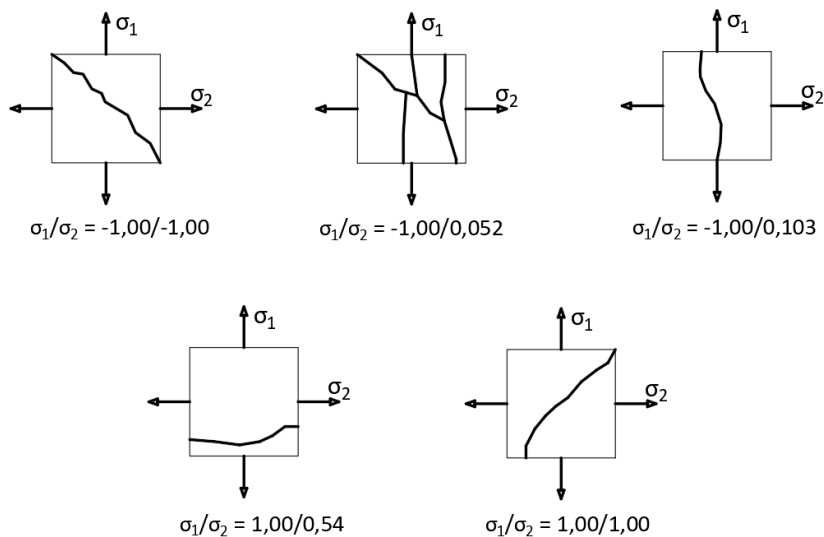


Figura 2.14: Ruptura do concreto submetido a tensões biaxiais a partir dos experimentos de Kupfer et al. (1969)

A tensão relativa da superfície que delimita o regime elástico e a superfície de ruptura do concreto ensaiado por Kupfer et al. (1969) são ilustrados na Figura 2.15.

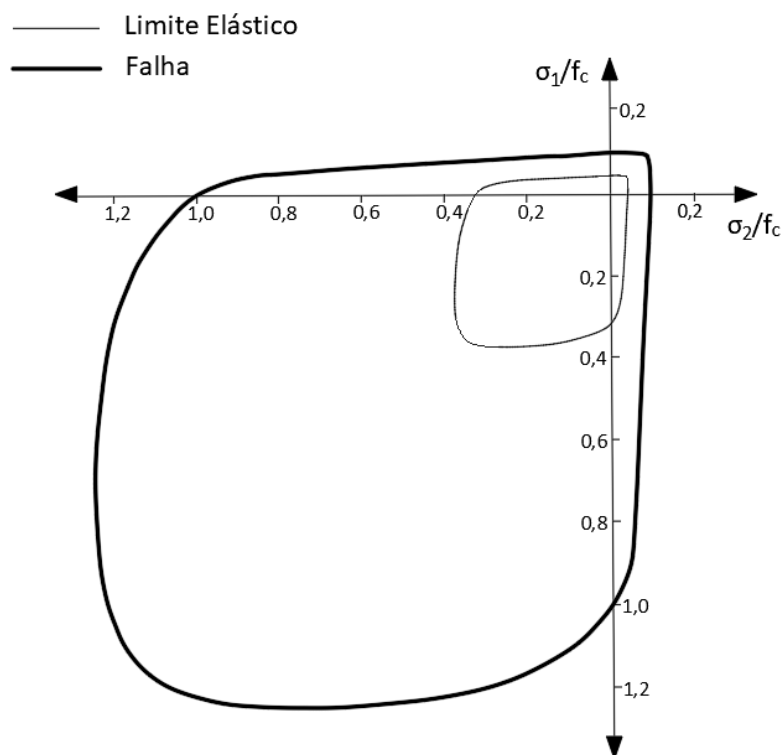


Figura 2.15: Limite elástico e superfície de ruptura do concreto em estado plano de tensão, adaptado de Kupfer et al. (1969)

Ao se observar a superfície de Kupfer et al. (1969) da Figura 2.15, verifica-se que o domínio das tensões de tração é delimitado pela resistência de aproximadamente 10 % da resistência à compressão do material. Já em regime de compressão biaxial, a resistência do material aumenta em torno de 10 % a 25 %. Por fim, no estado combinado de tração e compressão, observa-se um comportamento intermediário entre o comportamento da tração e da compressão, entretanto, a medida em que se aumenta a tensão de tração, os limites de resistência ficam mais próximos da resistência à tração do material, indicando que os efeitos de degradação por tração são preponderantes no comportamento do concreto nesse tipo de estado.

O comportamento do concreto sob níveis de tensão de confinamento é de importância significativa em vários problemas da engenharia, como por exemplo o projeto de ancoragem de armaduras de protensão, blocos de ancoragem, estacas, fundações

em geral etc. Esses estados de tensão são estudados a partir de ensaios de compressão triaxial, que são realizados em corpos de prova cilíndricos, onde uma tensão uniaxial é aplicada com pressões laterais constantes.

Sfer et al. (2002) realizaram ensaios experimentais de compressão triaxial no concreto e os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 2.16.

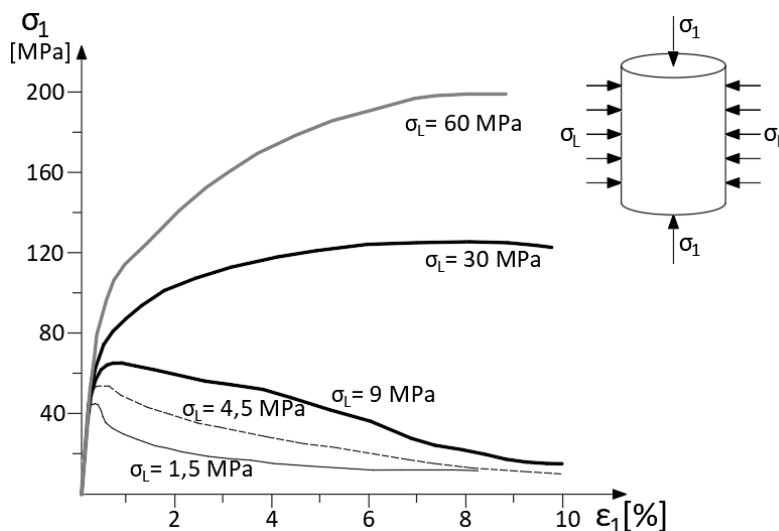


Figura 2.16: Resposta tensão-deformação axial para diferentes tipos de tensão de confinamento, adaptado de Sfer et al. (2002)

Os autores verificaram nesse ensaio que, em baixos níveis de pressão de confinamento ($\sigma_L = 4,5$ MPa), a falha ocorre com a propagação de várias fissuras ao longo do eixo longitudinal do corpo de prova. Por outro lado, com pressões laterais acima de 4,5 MPa, o espécime se rompe abruptamente de forma assimétrica em dois ou três pedaços.

Como esperado, a capacidade de carga do concreto aumentou a medida em que se aumentava a pressão confinante. Abaixo da pressão lateral de 9 MPa, as curvas apresentaram um pico de tensão bem definido e ramos descendentes suaves. Nos níveis de pressão de 30 e 60 MPa, não se observou um pico de tensão bem definido, indicando um comportamento mais dútil.

Capítulo 3

Mecânica do dano em meios contínuos

3.1 Histórico

A resposta não linear de materiais parcialmente frágeis é muitas das vezes governada por um conjunto de fissuras. Os modelos micromecânicos são aplicados de maneira satisfatória para explicar os efeitos que levam a nucleação de microdefeitos em materiais com a microestrutura heterogênea. Entretanto, o crescimento padrão de microdefeitos, suas interações, o seu agrupamento e a banda de defeitos são eventos que ocorrem de forma aleatória na estrutura e são de difícil determinação (Krajcinovic, 1996).

A dificuldade em se medir os defeitos nos materiais motivou o surgimento da teoria fenomenológica de dano em meios contínuos. O conceito da mecânica do dano foi introduzido por Kachanov (1958) e sua contribuição fundamental foi a proposta de uma variável interna que fornece uma medida contínua do efeito que os microdefeitos aleatoriamente distribuídos exercem sobre as propriedades de um material e seu comportamento macroscópico.

Portanto, a princípio foi proposto um “parâmetro de integridade” Ψ . Essa variável é de natureza escalar e varia entre um valor de 0 a 1, no qual 1 indica um material totalmente íntegro e 0 corresponde a um sólido destruído, conforme Equação 3.1

$$0 \leq \Psi \leq 1. \quad (3.1)$$

Essa teoria foi modificada por Rabotnov (1969) ao se introduzir uma variável complementar ao parâmetro de integridade. Essa variável foi denominada de “dano” D e caracteriza diretamente o nível de deterioração do material. Essa variável também assume valores em um intervalo de 0 a 1, porém quando igual a 0, determina um estado sem nenhum tipo de defeito e 1, indica um material totalmente danificado. Pela Equação 3.2 é possível recuperar o parâmetro definido por Kachanov (1958)

$$\Psi = 1 - D. \quad (3.2)$$

Alguns autores, como Mackenzie (1950), Elsheby (1957), Bristow (1960), Rabotnov (1969), Budiansky e O’Connell (1976), estudaram a influência da nucleação e crescimento de vazios, microfissuras e outros microdefeitos sobre as propriedades elásticas do material. De acordo com Kachanov (1993), a teoria das propriedades elásticas efetivas dos sólidos prevê a degradação da rigidez como consequência da fissuração.

Inicialmente, a variável de dano foi concebida como uma quantidade escalar. No entanto, estudos, como o de Lee et al. (1985) e Chow e Wang (1987), confirmaram experimentalmente o desenvolvimento de dano anisotrópico, mesmo que o material virgem seja isotrópico. Isso levou alguns autores a adotarem o dano de forma tensorial, podendo citar os trabalhos de Voyiadjis e Kattan (1996), Murakami e Ohno (1981) e Ju (1989).

Embora observações indicam que os processos de dano induzem a anisotropia do meio, Lemaitre (1984) e Ju (1990) afirmam que os modelos de dano isotrópico podem produzir respostas adequadas, quanto ao comportamento mecânico do material, para os sólidos com a presença de microfissuras e microvazios distribuídos.

Vários modelos fundamentados na mecânica do dano em meios contínuos foram concebidos para representar os materiais parcialmente frágeis, cujo comportamento tem característica bimodular. Dentre esses, podem ser citados os modelos de Mazars (1984), de Vree et al. (1995), Comi (2001), Pituba (2003), Badel et al. (2007), Babu

et al. (2010), Mazars et al. (2015) e Ahmed et al. (2021).

3.2 Conceitos da Mecânica do Dano em Meios Contínuos

Diversos autores, como Lemaitre (1984) e Kachanov (1986), apresentam uma hipótese para definição da variável de dano. Essa variável é relacionada com a redução da área, em uma dada direção, causada pela presença de microvazios na estrutura.

Para introduzir esse conceito para variável de dano, considera-se um sólido fissurado (Figura 3.1). Ao seccionar esse sólido em um plano de normal \vec{n} , verifica-se a existência de microvazios na área dessa seção.

O Elemento Volumétrico Representativo (EVR), ilustrado na Figura 3.1, é uma unidade volumétrica que permite a análise das propriedades do meio material contínuo e deve ter dimensões tais que seus defeitos tenham uma distribuição homogênea, conforme Lemaitre e Desmorat (2005).

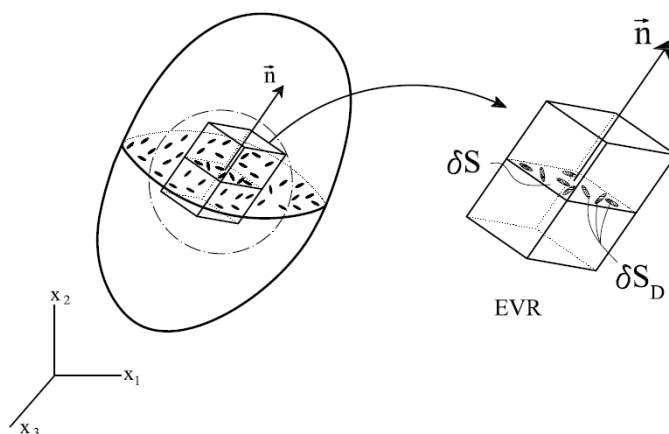


Figura 3.1: Sólido danificado e representação do EVR (Penna, 2011)

Na seção considerada, a área efetiva que resiste aos esforços $\delta\tilde{S}$ é a diferença dada por

$$\delta\tilde{S} = \delta S - \delta S_D \quad (3.3)$$

onde, δS é a área total e δS_D é a área de defeitos da face analisada do EVR.

Portanto, define-se a medida local do dano em função da direção \vec{n} através da razão

$$D_{\vec{n}} = \frac{\delta S_D}{\delta S}. \quad (3.4)$$

Em situação, no qual a área de defeitos seja aproximadamente igual em qualquer direção analisada, admite-se o dano como isotrópico, caso contrário, o dano é considerado como anisotrópico.

A área íntegra da face analisada do EVR, também denominada de área efetiva ($\delta\tilde{S}$), é correspondente a área total, descontando-se a área de vazios e também pode ser escrita em função do dano por

$$\delta\tilde{S} = (1 - D)\delta S. \quad (3.5)$$

A parcela de área correspondente aos vazios não é capaz de resistir aos esforços, uma vez que a tensão se distribui apenas na área íntegra de matéria. Portanto, é a partir dessa hipótese que se define a tensão efetiva e que será necessária para se definir uma relação constitutiva que considera o efeito da degradação nas propriedades elásticas do material.

3.2.1 Tensão efetiva

As microfissuras implicam em uma redução de área, portanto, apenas a área efetiva $\delta\tilde{S}$ é que resiste aos esforços. Considerando regime uniaxial e dano isotrópico, define-se o conceito de tensão efetiva $\tilde{\sigma}$ por

$$\tilde{\sigma} = \frac{\delta F}{\delta\tilde{S}}, \quad (3.6)$$

sendo δF o esforço na face do EVR.

A tensão nominal é dada por

$$\sigma = \frac{\delta F}{\delta S}. \quad (3.7)$$

Substituindo as Equações (3.5) e (3.7) em (3.6), obtém-se a tensão efetiva em função do dano e da tensão nominal σ

$$\tilde{\sigma} = \frac{\delta F}{(1-D)\delta S} = \frac{\sigma}{(1-D)}. \quad (3.8)$$

A relação da tensão efetiva com a nominal pode ser correlacionada à relação tensão-deformação em que variações das propriedades materiais estejam ligadas com a evolução do dano. Tal correlação é a base do dano fenomenológico e está associada à obtenção do módulo secante do material.

3.2.2 Hipótese de equivalência de deformação

Lemaitre e Chaboche (1990) propuseram a hipótese de que a deformação produzida por um sólido fissurado, submetido a uma tensão nominal, é de mesma intensidade de um material íntegro, submetido a uma tensão efetiva (Figura 3.2).

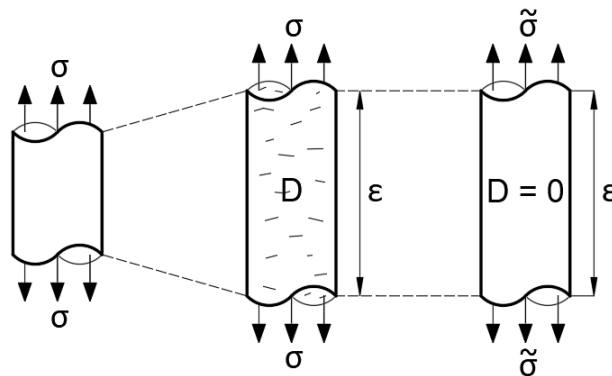


Figura 3.2: Hipótese de equivalência de deformação (Lemaitre e Chaboche, 1990)

A partir dessa hipótese, pode-se concluir que a tensão efetiva se relaciona com a deformação, através do módulo de rigidez elástico E_0 , dada por

$$\tilde{\sigma} = E_0 \varepsilon. \quad (3.9)$$

Substituindo (3.8) na relação acima, tem-se

$$\sigma = (1 - D)E_0 \varepsilon. \quad (3.10)$$

A relação total da lei tensão-deformação é definida pelo módulo de rigidez secante E_s , portanto, tem-se

$$\sigma = E_s \varepsilon. \quad (3.11)$$

A partir das Equações (3.10) e (3.11), tem-se o módulo de rigidez secante, dado por

$$E_s = (1 - D)E_0. \quad (3.12)$$

Fica explícito na Equação (3.12) que a medida em que o dano aumenta, cada vez mais o módulo de rigidez elástico se degrada, caracterizando assim o aspecto fenomenológico atribuído aos modelos de dano em meios contínuos.

Além da hipótese de equivalência de deformação apresentada, existem, na literatura, a hipótese de equivalência de tensão e a hipótese de equivalência de energia elástica. Essas hipóteses podem ser verificadas com maiores detalhes no trabalho de Pituba (2003).

3.3 Formulação geral para os modelos de dano

O fenômeno da plastificação e a degradação da rigidez do material são processos irreversíveis, isto é, são eventos que uma vez que ocorrem, não se restituem à configuração inicial. De acordo com Carol et al. (1994), os modelos de degradação elástica são adotados para formulações de materiais não lineares em que a degradação da

rigidez leva ao descarregamento total na direção da origem, sem deformação permanente (Figura 3.3(a)). Já os modelos elastoplásticos, o descarregamento acontece paralelamente à reta elástica, gerando deformação residual (Figura 3.3(b)).

Entretanto, os modelos são simplificações do que é observado experimentalmente, pois na prática, deformações permanentes e a degradação da rigidez podem ser combinados ao comportamento real do material (Figura 3.3(c)).

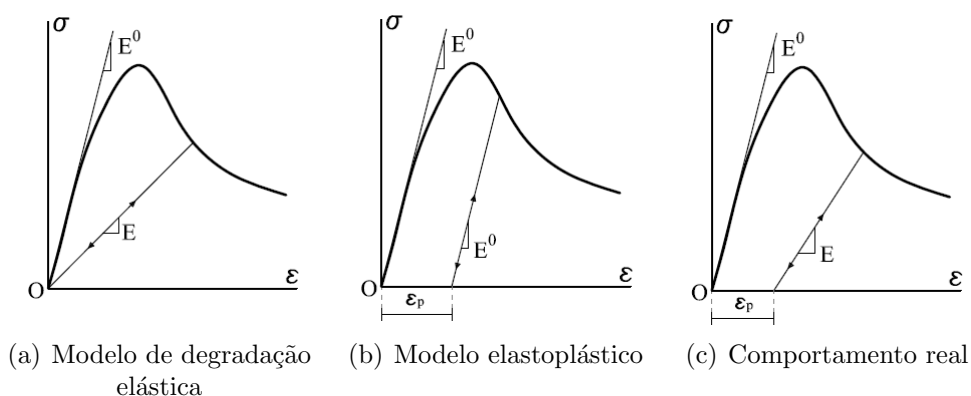


Figura 3.3: Comportamento característico dos materiais (Penna, 2011)

Com a formalização da mecânica do dano em meios contínuos nos preceitos da termodinâmica dos processos irreversíveis, vários modelos de degradação elástica foram concebidos durante os anos. Os modelos elastoplásticos são formulados a partir de uma arcabouço teórico que é bem aceito na comunidade científica, por outro lado, o que se observa nos modelos de degradação é uma diversidade de conceitos sem uma determinada padronização.

Carol et al. (1994) identificaram ser possível generalizar, através de uma estrutura teórica unificada, a formulação dos modelos de degradação elástica baseados em uma única superfície de carregamento. Penna (2011) complementa essa proposta com uma abordagem numérico-computacional aplicada aos métodos numéricos, expandindo-a para modelos com múltiplas funções de carregamento.

Seguindo os preceitos da referida estrutura teórica unificada, serão apresentadas a seguir as formulações dos modelos baseados em tensão e deformação, cujas funções de carregamento são expressas em termos de tensão e deformação respectivamente.

Será apresentada também a regra da degradação generalizada para dano isotrópico, que será necessária para o desenvolvimento da formulação geral para os modelos de degradação isotrópica.

3.3.1 Formulação baseada em tensão

A característica dos modelos constitutivos de degradação elástica é a existência de uma relação total de tensão-deformação, dada por

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (3.13a)$$

$$\varepsilon_{ij} = C_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (3.13b)$$

onde σ_{ij} são as componentes do tensor de tensões, ε_{ij} são as componentes do tensor de deformações, E_{ijkl} são as componentes do tensor constitutivo de rigidez e C_{ijkl} são as componentes do tensor constitutivo de flexibilidade.

As taxas das Equações (3.13a) e (3.13b) são dadas por

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}\dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{E}_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \quad (3.14a)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{C}_{ijkl}\sigma_{kl}. \quad (3.14b)$$

O tensor constitutivo de flexibilidade é o inverso do tensor constitutivo de rigidez, portanto $\mathbf{C} : \mathbf{E} = \mathbf{I}_4$, sendo \mathbf{I}_4 um tensor identidade de quarta ordem. Derivando essa equação, obtém-se a relação $\dot{\mathbf{C}} : \mathbf{E} + \mathbf{C} : \dot{\mathbf{E}} = 0$. Logo

$$\dot{E}_{ijkl} = -E_{ijpq}\dot{C}_{pqrs}E_{rskl}, \quad (3.15a)$$

$$\dot{C}_{ijkl} = -C_{ijpq}\dot{E}_{pqrs}C_{rskl}. \quad (3.15b)$$

As Equações (3.14a), (3.14b), (3.15a) e (3.15b) apresentam, respectivamente, as taxas de tensão, de deformação e dos tensores constitutivos de rigidez e flexibilidade e que serão fundamentais para a formulação geral dos modelos de dano isotrópico.

A função de carregamento é descrita em termos do tensor de tensões ($\boldsymbol{\sigma}$) e de um conjunto de variáveis internas (\boldsymbol{p}) que determina a configuração corrente da superfície de carregamento $F(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{p})$. A deformação incremental total ($d\varepsilon$) pode ser decomposta em uma parte elástica ($d\varepsilon^e$) e uma parte relacionada à degradação ($d\varepsilon^d$) conforme ilustrada na Figura 3.4.

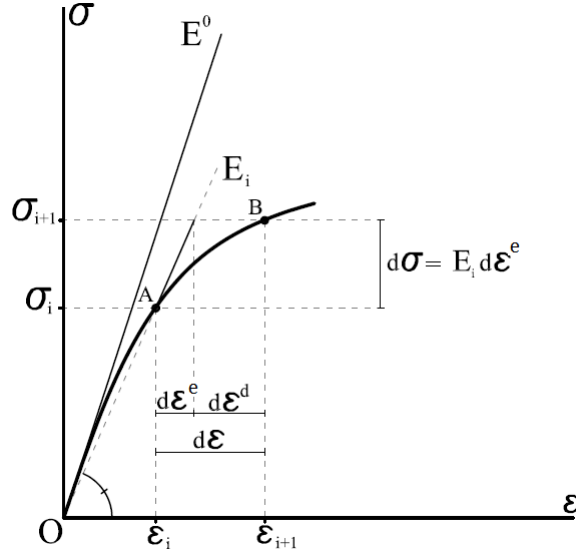


Figura 3.4: Decomposição da deformação incremental em modelos de degradação elástica, adaptada de Penna (2011)

A partir da parcela elástica e da rigidez secante, é possível obter a taxa da tensão total $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ e a parcela de deformação inelástica pode ser definida através de $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^d = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e$. Portanto, a taxa da tensão pode ser escrita como

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}(\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^d). \quad (3.16)$$

A taxa de deformação devido à degradação pode ser expressa por

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \dot{\lambda} m_{kl} \quad (3.17)$$

onde $\dot{\lambda}$ é o multiplicador inelástico que define a magnitude da taxa de deformação de degradação e m_{kl} é o gradiente do potencial dissipativo.

Seja a função de carregamento em um regime de carregamento com dano, ou seja, $F[\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{p}] = 0$, sua taxa pode ser escrita como

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial p_*} \dot{p}_* = 0. \quad (3.18)$$

O gradiente da função de carregamento é definido por

$$n_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}. \quad (3.19)$$

O módulo inelástico é expresso por

$$H = -\frac{\partial F}{\partial p_*} \frac{\partial p_*}{\partial \varepsilon_{kl}^d} m_{kl}. \quad (3.20)$$

Assumindo que o parâmetro p_* é uma função da deformação ε_{kl}^d e “*” representa uma variável que pode assumir a forma escalar, vetorial ou tensorial, tem-se

$$\dot{p}_* = \frac{\partial p_*}{\partial \varepsilon_{kl}^d} \dot{\varepsilon}_{kl}^d. \quad (3.21)$$

A partir dessas definições, a equação (3.18) pode ser reescrita de uma forma compacta por

$$\dot{F} = n_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - H \dot{\lambda} = 0. \quad (3.22)$$

Isolando-se o $\dot{\lambda}$ e substituindo $\dot{\sigma}_{ij}$ pela equação (3.16), tem-se

$$\dot{\lambda} = \frac{n_{pq} E_{pqrs} \dot{\varepsilon}_{rs}}{H + n_{ij} E_{ijkl} m_{kl}}. \quad (3.23)$$

Substituindo as equações (3.17) e (3.23) em (3.16) e fazendo as trocas apropriadas de índices, a relação incremental resulta em

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(E_{ijkl} - \frac{E_{ijab} m_{ab} n_{cd} E_{cdkl}}{H + n_{pq} E_{pqrs} m_{rs}} \right) \dot{\varepsilon}_{kl}. \quad (3.24)$$

Portanto, fica explícito em (3.24) que o operador tangente contínuo é definido por

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} - \frac{E_{ijab}m_{ab}n_{cd}E_{cdkl}}{H + n_{pq}E_{pqrs}m_{rs}}. \quad (3.25)$$

Os modelos estudados neste trabalho tem a superfície de carregamento definida no espaço das deformações, portanto, no próximo item, será demonstrada a formulação para modelos cujas funções de carregamento são definidas em termos da deformação.

3.3.2 Formulação baseada em deformação

De forma análoga, pode-se desenvolver a formulação a partir da função de carregamento definida em termos das deformações ($F[\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{p}}]$), onde $\bar{\boldsymbol{p}}$ é o conjunto de variáveis que determina a configuração corrente da superfície de carregamento no domínio da deformação. As parcelas da deformação elástica e da deformação devido à degradação são relacionadas, respectivamente, com a tensão total e a parcela de tensão devido à degradação, ilustradas na Figura 3.5.

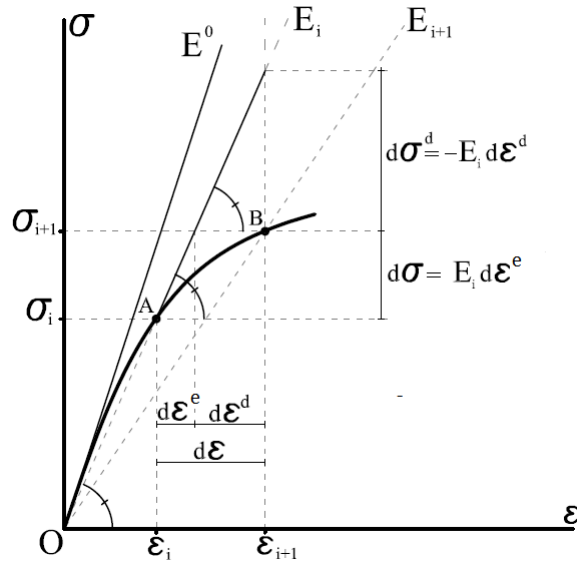


Figura 3.5: Relação das parcelas de deformação incremental, adaptada de Penna (2011)

De acordo com a Figura 3.5, as parcelas da deformação incremental podem ser calculadas por

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}; \quad (3.26a)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^d = -C_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl}^d \quad (3.26b)$$

A deformação incremental é decomposta por uma parcela elástica e por uma parcela devido a degradação, conforme descrito por

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^d. \quad (3.27)$$

Ao substituir as relações das Equações (3.26a) e (3.26b) na Equação (3.27), tem-se a relação incremental definida por

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl} (\dot{\sigma}_{kl} - \dot{\sigma}_{kl}^d), \quad (3.28)$$

onde $\dot{\sigma}_{kl}^d$ são as componentes de tensão relacionadas à degradação, sendo definidas por

$$\dot{\sigma}_{kl}^d = \dot{\lambda} \bar{m}_{kl}, \quad (3.29)$$

onde \bar{m}_{kl} é o gradiente do potencial dissipativo no domínio das deformações.

Em um regime de carregamento com dano, ou seja, $F[\boldsymbol{\varepsilon}, \bar{\boldsymbol{p}}] = 0$, a taxa da função de carregamento pode ser escrita como

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \bar{p}_*} \dot{\bar{p}}_* = 0. \quad (3.30)$$

O gradiente da função de carregamento no domínio das deformações é definido por

$$\bar{n}_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}. \quad (3.31)$$

O módulo inelástico no domínio das deformações é definido por

$$\bar{H} = -\frac{\partial F}{\partial \bar{p}_*} \frac{\partial \bar{p}_*}{\partial \sigma_{kl}^d} \bar{m}_{kl}. \quad (3.32)$$

O parâmetro \bar{p}_* é uma função da parcela de tensão σ_{kl}^d , portanto sua taxa é definida por

$$\dot{\bar{p}}_* = \frac{\partial \bar{p}_*}{\partial \sigma_{kl}^d} \dot{\sigma}_{kl}^d. \quad (3.33)$$

A taxa da função de carregamento, em termos da deformação, pode ser escrita por

$$\dot{F} = \bar{n}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} - \bar{H} \dot{\lambda} = 0. \quad (3.34)$$

Logo,

$$\dot{\lambda} = \frac{\bar{n}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}}{\bar{H}}. \quad (3.35)$$

Substituindo (3.29) e (3.35) na Equação (3.28) e multiplicando os dois lados da equação por E_{ijkl} , tem-se

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}} \bar{m}_{ij} \bar{n}_{ij} \right) \dot{\epsilon}_{kl}. \quad (3.36)$$

Portanto, o operador tangente para a formulação baseada em deformação é definido por

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}} \bar{m}_{ij} \bar{n}_{ij}. \quad (3.37)$$

Para se definir o operador tangente, será necessário ainda determinar o gradiente do potencial dissipativo, para tanto, no próximo tópico, a regra da degradação generalizada será relacionada com a regra do fluxo para se obter esse tensor.

3.3.3 Regra da degradação generalizada

O fato do tensor de rigidez secante estar envolvido nas equações dos modelos constitutivos de degradação elástica significa que as funções de carregamento, as leis de endurecimento e/ou amolecimento e a regra do fluxo podem não ser suficientes para definir a evolução da degradação, portanto sendo necessária uma lei para a evolução do próprio tensor de rigidez secante.

A função de carregamento dos modelos de degradação elástica contemplados neste trabalho é função da deformação, portanto, o desenvolvimento das equações a seguir será específica da formulação baseada em deformação. Logo, a evolução dos processos dissipativos é definida por

$$\bar{m}_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.38)$$

onde Q é o potencial dissipativo.

Normalmente, em modelos de degradação elástica, não se tem uma função explícita que descreve os processos dissipativos. Portanto, busca-se uma relação entre a regra do fluxo e a regra da degradação para se definir o gradiente do potencial dissipativo. Para iniciar a demonstração dessa relação, a taxa de deformação pode ser definida por

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} + \dot{C}_{ijkl}\sigma_{kl}, \quad (3.39)$$

ou por

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl} - C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}^d. \quad (3.40)$$

Ao se igualar as Equações (3.39) e (3.40), tem-se

$$\dot{C}_{ijkl}\sigma_{kl} = -C_{ijkl}\dot{\sigma}_{kl}^d. \quad (3.41)$$

De acordo com a regra da degradação, define-se a taxa do tensor constitutivo de rigidez através de

$$\dot{E}_{ijkl} = \dot{\lambda} \bar{M}_{ijkl}, \quad (3.42)$$

onde \bar{M}_{ijkl} são as componentes do tensor de direções da degradação do tensor de rigidez.

A variação do tensor constitutivo de rigidez também pode ser definida por

$$\dot{E}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\mathcal{D}}_*, \quad (3.43)$$

onde “*” representa uma ordem genérica de tensores e \mathcal{D}_* representa um conjunto de variáveis de dano, sendo sua taxa definida por

$$\dot{\mathcal{D}}_* = \dot{\lambda} \bar{\mathcal{M}}_* \quad (3.44)$$

onde $\bar{\mathcal{M}}_*$ é a direção de evolução das variáveis de dano.

Ao substituir as Equações (3.43) e (3.44) na Equação (3.42), tem-se

$$\bar{M}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \mathcal{D}_*} \bar{\mathcal{M}}_*. \quad (3.45)$$

Ao substituir a Equação (3.45), a relação da Equação (3.15b) e a Equação (3.29) da regra do fluxo na Equação (3.41), tem-se

$$\bar{m}_{ij} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \mathcal{D}_*} \bar{\mathcal{M}}_* \varepsilon_{kl}. \quad (3.46)$$

Ao se ter todos os termos do operador tangente definidos para a formulação baseada em deformação, será apresentada a forma geral para os modelos de dano isotrópico.

3.3.4 Formulação geral para modelos de dano isotrópico

A relação total de tensão e deformação para modelos de dano isotrópico é definida por uma variável de dano escalar

$$\sigma_{ij} = (1 - D)E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}. \quad (3.47)$$

Sendo o operador secante definido por

$$E_{ijkl} = (1 - D)E_{ijkl}^0. \quad (3.48)$$

A função de carregamento para modelos baseados em deformação é definida por

$$F(\varepsilon, \kappa(D)) = \tilde{\varepsilon} - \kappa(D) \quad (3.49)$$

onde $\tilde{\varepsilon}$ é a deformação equivalente, cuja definição é específica de cada modelo. Inicialmente, a variável histórica $\kappa(D)$ assume um valor limite de deformação elástica (κ_0) e quando a relação constitutiva entra em um regime de carregamento com dano, essa variável sempre é atualizada, assumindo o maior valor de deformação equivalente já atingido durante a análise, portanto, tem-se

$$\kappa(D) = \kappa_0 \longrightarrow D = 0; \quad (3.50a)$$

$$\kappa(D) = \max[\tilde{\varepsilon}, \kappa_0] \longrightarrow D > 0. \quad (3.50b)$$

As condições de Kuhn-Tucker são uma forma de saber se a análise se encontra em estado de carregamento elástico, carregamento com dano, descarregamento ou recarregamento. Essas condições são definidas por

$$F \leq 0; \quad (3.51a)$$

$$\dot{\lambda} \geq 0, \quad (3.51b)$$

maiores detalhes a respeito dessas condições podem ser vistos em Penna (2011).

Os termos do operador tangente obtido da equação (3.37) são desenvolvidos a seguir.

i. Gradiente da função de carregamento

O cálculo do gradiente da função de carregamento para modelos, cujas funções de carregamento são descritas em termos da deformação equivalente, é desenvolvido por

$$\bar{n}_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial F}{\partial \tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.52a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{\varepsilon}} = 1 \quad \therefore \quad \bar{n}_{ij} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (3.52b)$$

ii. Módulo inelástico

O módulo inelástico pode ser desenvolvido abaixo por

$$\bar{H} = -\frac{\partial F}{\partial D} = -\frac{\partial F}{\partial \kappa} \frac{\partial \kappa}{\partial D} \quad (3.53a)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \kappa} = -1 \quad \therefore \quad \bar{H} = \frac{\partial \kappa}{\partial D} \quad (3.53b)$$

Em um regime de carregamento com dano, no qual $F(\tilde{\varepsilon}, \kappa) = \tilde{\varepsilon} - \kappa = 0$, logo

$$\kappa = \tilde{\varepsilon} \quad \therefore \quad \bar{H} = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial D}, \quad (3.54)$$

e na sua forma inversa, tem-se

$$\frac{1}{\bar{H}} = \frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}}. \quad (3.55)$$

iii. Gradiente do potencial dissipativo

Para os modelos de degradação isotrópica, a variável de dano é apresentada na forma escalar, logo

$$\mathcal{D} = D. \quad (3.56)$$

Retomando a Equação (3.46), tem-se o gradiente do potencial dissipativo definido por

$$\bar{m}_{ij} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial D} \bar{\mathcal{M}} \varepsilon_{kl}. \quad (3.57)$$

Sabendo que $\bar{\mathcal{M}}$ é a direção da taxa de variação do dano e para modelos de dano isotrópico, a taxa de variação do dano é igual em todas as direções, portanto $\bar{\mathcal{M}} = 1$. O cálculo do gradiente dissipativo para modelos de dano isotrópico é dado por

$$\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial D} = -E_{ijkl}^0 \quad \therefore \quad \bar{m}_{ij} = -E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}. \quad (3.58)$$

Ao substituir (3.52b), (3.55) e (4.7) na equação (3.36), a relação incremental é definida para modelos isotrópicos como

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(E_{ijkl} - \frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} E_{klpq}^0 \varepsilon_{pq} \right) \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (3.59)$$

e o operador tangente contínuo é definido por

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} - \frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} E_{klpq}^0 \varepsilon_{pq}. \quad (3.60)$$

Através da formulação apresentada, os modelos de dano isotrópico podem ser estruturados a partir de uma forma geral. Esse formato é definido pela relação tensão-deformação total, função de carregamento, gradientes da função de carregamento e do potencial dissipativo, módulo inelástico e pela relação incremental. A formulação unificada implica em uma padronização dos conceitos dos modelos de dano, o que pode promover uma implementação computacional sistematizada.

3.4 Funções de dano

O comportamento não linear dos materiais pode ser aproximado por diferentes funções de dano, também denominadas de leis de dano. Na teoria da plasticidade,

é usual associar leis de endurecimento aos modelos elastoplásticos para descrever o comportamento inelástico do material. Nos modelos de degradação, as funções de dano podem ser utilizadas para reproduzir o efeito do *softening*.

O *softening* do concreto pode ser aproximado por formatos lineares, exponenciais, polinomiais etc. A forma linear tem um nível de aproximação limitado com o comportamento inelástico dos materiais, entretanto é bastante utilizada por sua praticidade.

O comportamento do concreto ao ser submetido a uma tensão de compressão possui maior ductilidade ao ser comparado ao regime de tração, ou seja, a medida em que o material se deforma, sua capacidade de carga diminui de forma lenta e gradual, fazendo com que sua curva tensão-deformação se assemelhe com um tipo de variação polinomial (Figuras 3.6(a) e 3.6(b)).

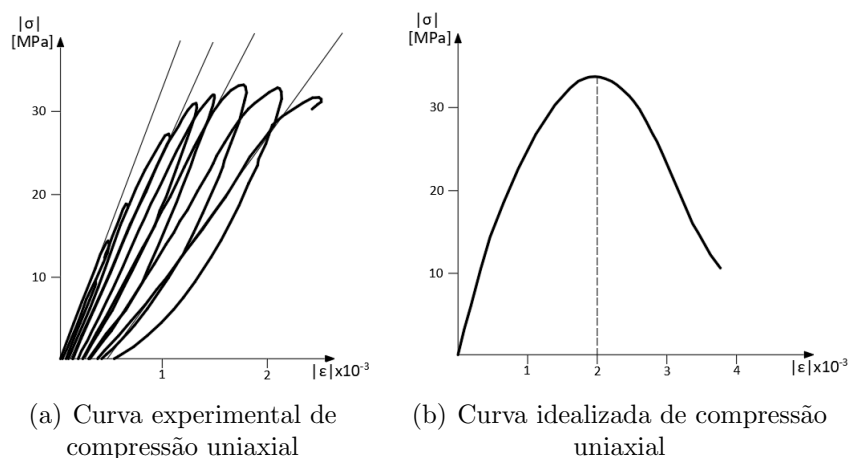


Figura 3.6: Curvas de tensão-deformação experimental e idealizada na compressão

No regime de tração, a tensão do concreto logo após o pico decresce repentinamente e no estágio final do carregamento, não há grandes variações de tensão, esse comportamento pode ser bem representado por uma lei do tipo exponencial (Figuras 3.7(a) e 3.7(b)).

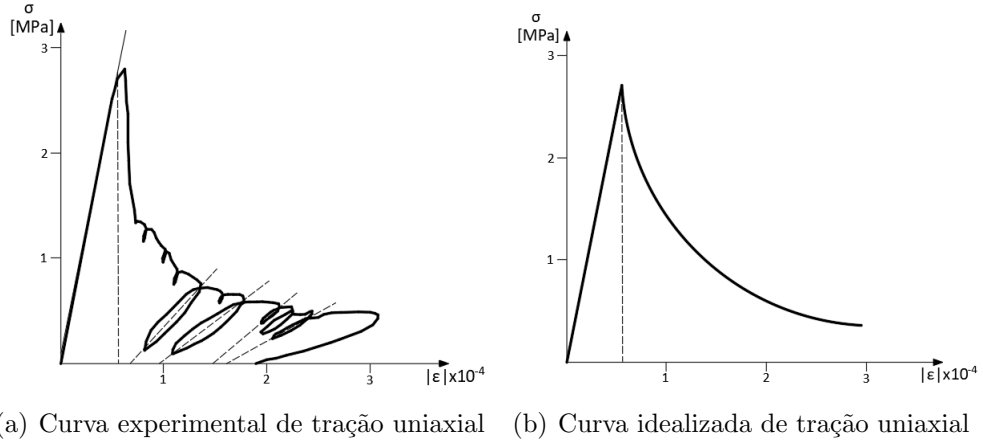


Figura 3.7: Curvas de tensão-deformação experimental e idealizada na tração

A escolha adequada de uma função de dano favorece a parametrização dos modelos e sua correspondência com o comportamento real do material. A seguir serão apresentadas algumas das leis de dano presentes na literatura.

A função utilizada por Jirásek (2004) pode ser definida através dos parâmetros κ_0 e κ_f , no qual correspondem, respectivamente, ao limite de deformação elástico e a deformação última do material

$$D = g(\tilde{\varepsilon}) = \frac{\kappa_f}{\kappa_f - \kappa_0} \left(1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} \right). \quad (3.61)$$

Na formulação de modelos de dano isotrópico escalar, é comum a utilização de deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}$. Essa variável é uma maneira de transformar um estado multiaxial de deformações em uma deformação uniaxial equivalente. Esse artifício é utilizado, a fim de se ter uma grandeza escalar que possa ser utilizada nas leis de evolução do dano, para que possa relacionar, de forma simples, o nível de deterioração do material com o estado de deformação.

Considerando um regime uniaxial, cuja relação constitutiva se dá por

$$\sigma = (1 - D)E_0\tilde{\varepsilon}, \quad (3.62)$$

ao substituir a variável D pela função da Equação 3.61 e considerando que $C = \frac{\kappa_f}{\kappa_f - \kappa_0}$, tem-se

$$\sigma = (1 - C)E_0\tilde{\varepsilon} + C\kappa_0E_0. \quad (3.63)$$

Sendo as constantes $C_1 = (1 - C)E_0$ e $C_2 = C\kappa_0E_0$, pode-se reescrever a Equação 3.63 por

$$\sigma = C_1\tilde{\varepsilon} + C_2. \quad (3.64)$$

Observa-se que a função de dano apresentada por Jirásek (2004) não é uma função linear, entretanto, ao ser utilizada para cálculo do dano, produz uma lei constitutiva linear, conforme demonstrado na Equação 3.64.

Para essa lei de dano, a Equação 3.55 que define o inverso do módulo inelástico para os modelos baseados em deformação é igual a

$$\frac{1}{\bar{H}} = \frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{\kappa_f}{\kappa_f - \kappa_0} \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}^2} \quad (3.65)$$

de Borst e Gutiérrez (1999) apresentam uma função, que reproduz uma lei constitutiva com *softening* de formato exponencial, descrita por

$$D = g(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} [1 - A + Ae^{[-B(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)}], \quad (3.66)$$

onde A e B são constantes que podem ser calibradas a partir da parametrização.

Com o dano expresso pela Equação 3.66, tem-se

$$\frac{1}{\bar{H}} = \frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}^2} [1 - A + Ae^{[-B(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)}] + \frac{\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} [ABe^{[-B(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)}] \quad (3.67)$$

Carreira e Chu (1985) propuseram uma relação constitutiva para o concreto em regime de compressão, na qual se obtém a equação da evolução do dano definida por

$$D = g(\tilde{\varepsilon}) = 1 - \frac{T\gamma}{\left[\gamma - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0} \right)^\gamma \right] \tilde{E}\kappa_0}, \quad (3.68)$$

onde \tilde{E} é o módulo de rigidez equivalente, T é a resistência do concreto e

$$\gamma = \frac{1}{1 - \left(\frac{T}{\kappa_0 \tilde{E}} \right)}. \quad (3.69)$$

Ao se calcular o dano pela Equação 3.68, tem-se

$$\frac{1}{\bar{H}} = \frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \frac{\tilde{\varepsilon}^{\gamma-1} T \gamma^2}{\left[\gamma - 1 + \left(\frac{\tilde{\varepsilon}}{\kappa_0} \right)^\gamma \right]^2 \tilde{E} \kappa_0^{\gamma+1}}. \quad (3.70)$$

Diversas outras funções de dano são propostas na literatura, podendo citar as funções de dano que produzem *softening* exponencial apresentadas por Mazars e Pijaudier-Cabot (1989), La Bardorie (2020), Jirásek (2004) e Birtel e Mark (2006); as funções de dano que produzem *softening* polinomial apresentadas por Carol et al. (2001c), La Bardorie (2020), Birtel e Mark (2006) e Pijaudier-Cabot e Huerta (1991) e a função de dano apresentada por Penna (2011) que resulta em uma lei de tensão-deformação trilinear.

3.5 Modelos de dano isotrópico

Como observado por vários pesquisadores, os mecanismos de dano provocam descontinuidades na microestrutura, promovendo a anisotropia do meio material. De acordo com Ju (1990), uma descrição apropriada para representar a anisotropia, geralmente envolve um dano tensorial de quarta ou de oitava ordem. Contudo, lidar com cálculos tensoriais, principalmente no âmbito numérico-computacional, não é uma tarefa trivial.

Existem diversas abordagens para se definir fenomenologicamente a variável de dano. No entanto, os modelos de dano isotrópico escalares atraíram a atenção de vários autores, pela sua simplicidade e por sua capacidade de prever o comportamento dos materiais.

Na literatura, encontram-se inúmeros modelos de dano isotrópico escalar formulados a partir dos conceitos de tensão efetiva e equivalência de deformação, baseados nos princípios da termodinâmica dos processos irreversíveis.

A seguir, em especial, serão tratados três modelos clássicos de dano isotrópico escalar que são objetos deste estudo. Sendo eles, o modelo de Mazars (1984), o modelo de de Vree et al. (1995) e o modelo de Lemaitre e Chaboche (1990).

3.5.1 Modelo de Mazars (1984)

O modelo constitutivo de Mazars (1984) foi idealizado para reproduzir o comportamento do concreto simples. A hipótese central do autor é a consideração de que o material se danifica em pelo menos uma de suas direções principais positivas ao se atingir um determinado limite de alongamento.

A deformação equivalente desse modelo é definida por

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2} \quad (3.71)$$

onde $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = \varepsilon_i$, se $\varepsilon_i > 0$ e $\langle \varepsilon_i \rangle_+ = 0$, se $\varepsilon_i \leq 0$.

A função de carregamento é definida por

$$F(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - \kappa(D), \quad (3.72)$$

onde a deformação equivalente é comparada com a variável histórica (κ).

A variável de dano (D) acopla degradações causadas por compressão e tração e são ponderadas através de variáveis denominadas peso (α^- e α^+), que são funções do estado de deformação, logo

$$D = \alpha^+ D^+ + \alpha^- D^-. \quad (3.73)$$

O dano por tração D^+ e o dano por compressão D^- são obtidos por leis exponenciais

$$D^+ = 1 - \frac{(1 - A_t)\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_t}{\exp[B_t(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)]}, \quad (3.74a)$$

$$D^- = 1 - \frac{(1 - A_c)\kappa_0}{\tilde{\varepsilon}} - \frac{A_c}{\exp[B_c(\tilde{\varepsilon} - \kappa_0)]}, \quad (3.74b)$$

onde A_t , A_c , B_t e B_c são parâmetros do material e podem ser obtidos através da parametrização de ensaios experimentais uniaxiais.

As funções de peso são

$$\alpha^+ = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_i^+(\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-)}{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}, \quad (3.75a)$$

$$\alpha^- = \sum_{i=1}^3 H_i \frac{\varepsilon_i^-(\varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^-)}{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}. \quad (3.75b)$$

A função Heavyside H_i é definida por

$$\begin{cases} H_i = 0, \varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^- < 0, \\ H_i = 1, \varepsilon_i^+ + \varepsilon_i^- \geq 0. \end{cases} \quad (3.76)$$

Os tensores $\boldsymbol{\varepsilon}^+$ e $\boldsymbol{\varepsilon}^-$ são obtidos através da relação elástica com o tensor de tensões principais positivas ($\boldsymbol{\sigma}^+$) e o tensor de tensões principais negativas ($\boldsymbol{\sigma}^-$) respectivamente, logo

$$\boldsymbol{\varepsilon}^+ = \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}^+, \quad (3.77a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^- = \mathbf{C} : \boldsymbol{\sigma}^-, \quad (3.77b)$$

onde \mathbf{C} é o tensor constitutivo elástico de flexibilidade.

O modelo constitutivo de Mazars (1984) é capaz de distinguir o comportamento do material no estado de compressão e de tração, entretanto apresenta dificuldades na parametrização dos materiais bimodulares. Essa dificuldade está ligada ao fato de se ter apenas um único formato de função (exponencial) atribuída à evolução do dano por tração e o dano por compressão. Além disso, o parâmetro que indica o limite de deformação elástica (κ_0) é o mesmo para ambos os regimes, portanto, ao se parametrizar κ_0 de acordo com o estado de tração uniaxial, pode ser que esse parâmetro obtido não seja adequado para a representação do regime de compressão.

3.5.2 Modelo de de Vree et al (1995)

O modelo de de Vree et al. (1995) apresenta uma deformação equivalente adaptada do critério de von Mises. A deformação equivalente proposta se baseia nos invariantes do tensor de deformações, sendo dada por

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{k-1}{2k(1-\nu)} I_1 + \frac{1}{2k} \sqrt{\frac{(k-1)^2}{(1-2\nu)^2} I_1^2 + \frac{12k}{(1+\nu)^2} J_2}, \quad (3.78)$$

onde ν é o coeficiente de Poisson, $I_1 = \varepsilon_{kk}$ é o primeiro invariante do tensor de deformações e $J_2 = \frac{1}{2} e_{ij} e_{ij}$ é o segundo invariante do tensor de deformações desviatórias, sendo

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij}. \quad (3.79)$$

O parâmetro k é a relação entre a resistência à compressão e a resistência à tração do material (Equação 3.80), logo

$$k = \frac{f_c}{f_t}, \quad (3.80)$$

onde f_c é a resistência à compressão e f_t é a resistência a tração do material.

A deformação equivalente proposta acopla os efeitos da tração, da compressão e do cisalhamento, uma vez que o primeiro invariante do tensor de deformações está relacionado com as deformações volumétricas e por sua vez, o segundo invariante do tensor de deformações desviatórias está relacionado com as deformações de distorção.

A função de carregamento é definida por

$$F(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - \kappa(D). \quad (3.81)$$

Esse modelo tem uma única variável de dano e pode ser calculada por qualquer tipo de função de dano, portantoo

$$D = g(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}), \quad (3.82)$$

onde \mathbf{P} é um conjunto de parâmetros da lei de dano.

O primeiro termo da deformação equivalente está em função do primeiro invariante do tensor de deformações, que pode ser positivo ou negativo dependendo do estado predominante de deformações. Já o segundo termo sempre resulta em um valor positivo. Portanto, a deformação equivalente em um estado predominante de tração é maior que em um estado predominante de compressão, conseqüentemente, a degradação acontecerá de forma mais rápida em regimes de tração.

Esse modelo diferencia o comportamento do material na tração e na compressão em termos de resistência, porém as curvas de tensão-deformação exibem um mesmo formato em ambos estados, não sendo adequado para representar o comportamento bimodular, uma vez que no comportamento real de materiais parcialmente frágeis, a tensão de tração não tem a mesma variação que a tensão de compressão.

Para superar essa limitação, o modelo necessita de variáveis de dano de tração e de compressão, calculadas a partir de dois tipos diferentes de lei de dano, com parâmetros específicos para cada estado.

3.5.3 Modelo de Lemaitre e Chaboche (1990)

O modelo de Lemaitre e Chaboche (1990) é apresentado conforme de Borst e Gutiérrez (1999). Baseada em energia de deformação elástica, a deformação equivalente proposta é dada por

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{E_0} \varepsilon_{ij} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}}. \quad (3.83)$$

A função de carregamento é definida a seguir por

$$F(\tilde{\varepsilon}, D) = \tilde{\varepsilon} - \kappa(D). \quad (3.84)$$

A variável de dano desse modelo é calculada através de uma função de dano conforme descrito por

$$D = g(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}), \quad (3.85)$$

onde \mathbf{P} é um conjunto de parâmetros da lei de dano.

Esse modelo não é capaz de distinguir o comportamento bimodular do material, sendo mais adequado para representação dos metais, já que esse tipo de material possui o mesmo comportamento na tração e na compressão. A deformação equivalente de Lemaitre e Chaboche (1990) possui uma mesma variação em regimes de tração e compressão. A incapacidade em representar a bimodularidade também é devida ao fato do modelo apresentar uma única variável de dano calculada a partir de um único formato de lei de dano com parâmetros comuns aos regimes de tração e compressão.

3.6 Abordagem não local

A localização de deformações é um fenômeno frequentemente observado em materiais parcialmente frágeis. Tratando-se de estruturas de concreto, os efeitos desse fenômeno podem provocar um processo de ruptura mais frágil levando a estrutura a uma resistência supostamente menor daquela esperada. Esse processo foi observado experimentalmente por Shah et al. (1995) e se caracteriza pelo excesso de deformação em uma determinada região, podendo levar a perda de estabilidade da estrutura.

Shah et al. (1995) realizaram o ensaio de tração direta em uma chapa de concreto simples, conforme ilustrado na Figura 3.8, e mediram os deslocamentos em diferentes locais da face da chapa.

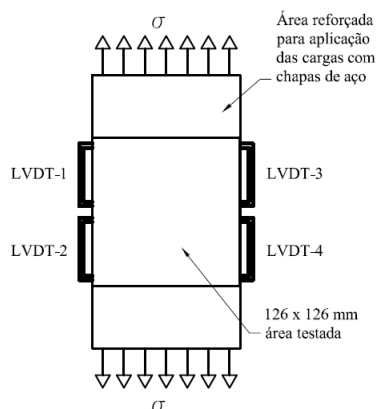


Figura 3.8: Ensaio da chapa tracionada, adaptado (Shah et al., 1995)

A evolução dos deslocamentos no tempo de ensaio para cada LVDT (*Linear Variable Displacement Transducer* ou Transdutor de Deslocamento Variável Linear) é ilustrada na Figura 3.9.

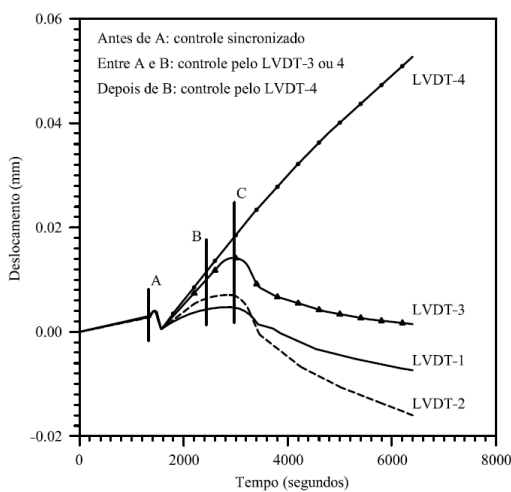


Figura 3.9: Deslocamentos medidos nos LVDTs em tempo de ensaio (Shah et al., 1995)

Nesse ensaio, são observados os estágios do carregamento. A primeira fase está compreendida até 30 % do carregamento máximo (ponto A) e é caracterizada por um regime linear, no qual a formação de fissuras pode ser desprezível. A partir do ponto A, os deslocamentos medidos pelos LVDTs começam a exibir diferenças e, até 80 % do carregamento crítico, as fissuras são mais ou menos uniformemente distribuídas. Após o ponto B, o deslocamento do LVDT-4 aumenta mais rapidamente

ao ser comparado com o LVDT-3.

Posteriormente ao ponto C (limite de carregamento), uma banda de fissuras passa a se localizar próximo ao LVDT-4 e seu deslocamento medido continua aumentando, enquanto que os deslocamentos dos demais LVDTs diminuem, indicando o descarregamento nas regiões que estão fora da zona de fissuração.

As fissuras formadas em cada fase do carregamento foram medidas através de emissões acústicas e foram representadas de acordo com a Figura 3.6.

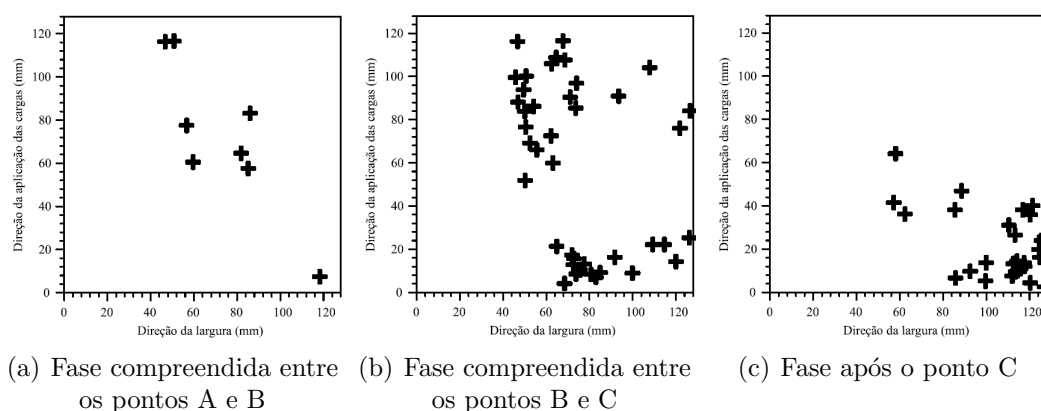


Figura 3.10: Formação de fissuras durante o carregamento (Shah et al., 1995)

Nos modelos numéricos de elemento finito, cujo modelo constitutivo apresenta um ramo de *softening*, a localização de deformação também pode ocorrer. Embora o efeito seja igual ao observado experimentalmente, a causa dessa localização é por motivos exclusivamente numéricos.

As operações algébricas, em máquinas computacionais, geram erros de precisão inerentes da conversão de números hexadecimais em números binários. Para uma malha com elementos de grandes dimensões, esse problema não é tão significativo. Porém, a medida em que se refina a malha, o estado de deformação dos elementos pode ser influenciado por esses erros de precisão.

Mesmo em estados de tensão constante, quando um dos elementos entra em regime de *softening*, somente ele será carregado e os demais serão descarregados. Esse fenômeno leva a mudanças drásticas na resposta estrutural, conforme ilustrado

na Figura 3.11.

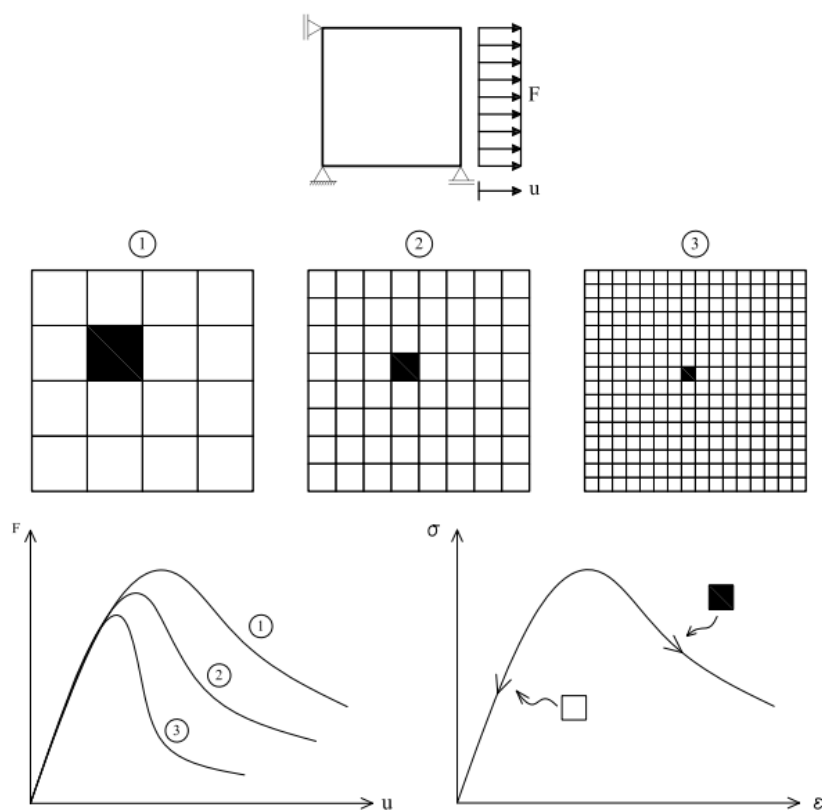


Figura 3.11: Localização de deformações numericamente induzida (Fuina, 2009)

A fim de se atenuar os problemas causados pela localização de deformação numericamente induzida, a abordagem não local é proposta. De acordo com Jirásek (2004), modelos não locais partem da premissa em que o estado de tensão de um ponto não depende apenas de si mesmo, mas sim, de uma distribuição finita de pontos vizinhos.

De um modo geral, a formulação não local consiste em substituir uma variável local por uma não local correspondente, calculada a partir de uma média ponderada sobre uma vizinhança espacial de cada ponto. Portanto, se $f(\mathbf{x})$ é um campo local em um domínio delimitado por um raio R , seu campo não local correspondente pode ser definido por

$$\bar{f}(\mathbf{x}) = \frac{1}{V_b(\mathbf{x})} \int_V \alpha(\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|) f(\mathbf{s}) dV, \quad (3.86)$$

onde $V_b(\mathbf{x})$ é dado por

$$V_b(\mathbf{x}) = \int_V \alpha(\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|) dV \quad (3.87)$$

onde $\alpha(\|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|)$ é a variável de peso não local, \mathbf{x} é o vetor de posição do ponto analisado e \mathbf{s} é o vetor de posição dos pontos vizinhos contidos no domínio.

A escolha de uma ou mais variáveis que sejam tratadas como não locais deve ser feita a partir de grandezas, que durante toda a análise, sempre cresçam ou decresçam, como por exemplo a variável histórica e o dano. Ao se fazer a média espacial com grandezas, cuja magnitude aumenta e diminui, a resposta do modelo pode ser afetada.

O tamanho do raio não local R deve ser considerado de tal forma em que o conjunto de pontos pertencentes ao domínio não local exerçam influência sobre o ponto central. É comum a adoção de valores próximos ao comprimento característico como sendo o tamanho do raio não local.

Jirásek (2004) utiliza a deformação equivalente, em termos da variável histórica, como a variável não local. Os valores de deformação equivalente não local devem ser calculados nos pontos de integração de Gauss dos elementos finitos, conforme ilustrado na Figura 3.12. Portanto,

$$\bar{\varepsilon}_k = \sum_{l=1}^{N_{GP}} w_l J_l \alpha_{kl} \tilde{\varepsilon}_l \quad (3.88)$$

onde k é o índice do ponto analisado, l é o índice dos pontos da vizinhança, N_{GP} é o número total de pontos de gauss do modelo de elementos finitos, w_l é o peso de integração do ponto de Gauss e J_l é o Jacobiano da transformação isoparamétrica do ponto de índice l .

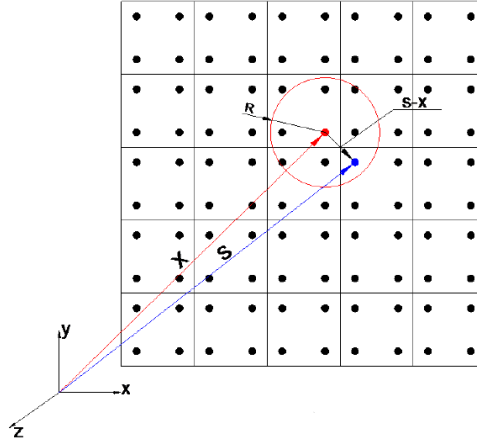


Figura 3.12: Cálculo da média ponderada de uma variável em um domínio não local (Souza, 2016)

A variável de peso não local entre os pontos k e l é definida por

$$\alpha_{kl} = \frac{\alpha_0(\|\mathbf{s}_l - \mathbf{x}_k\|)}{\sum_{m=1}^{N_{GP}} w_m J_m \alpha_0(\|\mathbf{s}_m - \mathbf{x}_k\|)}. \quad (3.89)$$

A função de peso ($\alpha_0(r)$) pode ser dada por vários tipos. Conforme Bazant e Lin (1988), uma escolha adequada é a função de distribuição Gaussiana, dada por

$$\alpha_0(r) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{Kr^2}{R^2}\right) & \text{se } 0 \leq r \leq R \\ 0 & \text{se } r > R \end{cases} \quad (3.90)$$

onde $r = \|\mathbf{s} - \mathbf{x}\|$ e K é uma constante que pode ser calibrada de tal forma que

$$K \longrightarrow \infty \quad \therefore \quad \bar{f}(x) \longrightarrow f(x). \quad (3.91)$$

A distribuição da função de peso do tipo Gaussiana, assim como a influência da constante K , pode ser visto pela Figura 3.13.

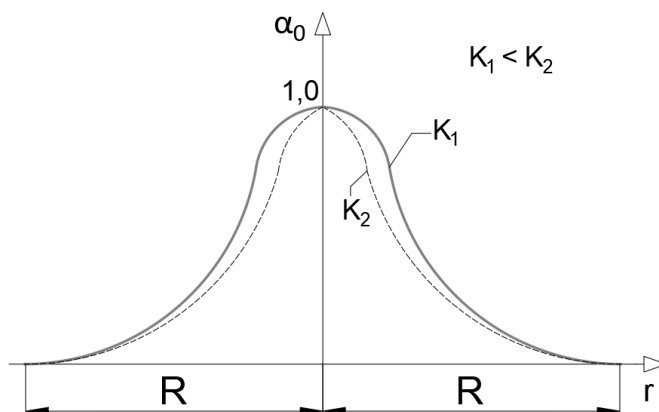


Figura 3.13: Função de peso Gaussiana e influência do parâmetro K

Não se pode dizer que pelo simples fato de adotar modelos não locais, problemas de localização de deformação não ocorrerão. Entretanto, a média ponderada feita em torno de uma variável leva a uma distribuição do erro de precisão ligado às operações matemáticas do algoritmo. Portanto, quanto mais refinada a malha é, maior quantidade de pontos de Gauss terão e por isso maior será a distribuição do erro, conseqüentemente diminuindo a sua magnitude.

Capítulo 4

Proposta de modelos de dano isotrópico bimodulares

Estimar o comportamento das estruturas de concreto e sua capacidade máxima de carregamento é essencial para o desenvolvimento de projetos sustentáveis e seguros. Estudar as principais características de materiais parcialmente frágeis é de fundamental importância para se propor modelos constitutivos capazes de prever o comportamento real do concreto de maneira satisfatória.

O comportamento bimodular é um dos mais importantes aspectos do concreto. Foi visto que, em regime de tração uniaxial, o concreto tem um comportamento mais frágil com relação ao seu comportamento na compressão, além disso, possui uma resistência à tração de cerca de 10 % de sua resistência à compressão, esse fato se dá pelos mecanismos de fissuração.

As propostas de modelos de dano isotrópico bimodulares consideram duas variáveis internas escalares para representar o dano causado por tensões de tração e compressão, podendo citar os modelos de Mazars (1984), Mazars et al. (2015) e Babu et al. (2010). Alguns autores, por exemplo como Ahmed et al. (2021), propõem uma terceira variável interna que leva em conta o dano causado por cisalhamento, contudo, tal abordagem não será tratada neste trabalho.

4.1 Formulação dos modelos de dano isotrópico bimodulares

No presente trabalho, apresentam-se modelos bimodulares formulados a partir de variáveis de dano que representam os processos de degradação por tração e por compressão, utilizando deformações equivalentes baseadas nos modelos clássicos de Mazars (1984), de Vree et al. (1995) e Lemaitre e Chaboche (1990).

Embora seja possível atribuir parâmetros específicos para o comportamento de cada regime, o modelo de Mazars (1984) prescreve lei do mesmo tipo tanto para tração como para compressão. Os modelos de de Vree et al. (1995) e Lemaitre e Chaboche (1990) atribuem leis de dano e parâmetros iguais para ambos regimes. Por essa razão, a parametrização dos modelos clássicos com relação aos materiais bimodulares se torna uma tarefa árdua. Ao se prescrever leis e parâmetros específicos para os estados de tração e compressão, a parametrização dos materiais bimodulares se torna mais fácil.

A identificação do estado de tensão ou deformação em que o ponto material se encontra é de suma importância para se atribuir leis adequadas para o tipo de regime identificado. Para tanto, Comi (2001) utiliza o primeiro invariante do tensor de deformações para detectar se tal regime é predominante de tração ou compressão, conforme descrito por

$$\begin{cases} I_1 \geq 0 \longrightarrow & \text{Estado predominante de tração;} \\ I_1 < 0 \longrightarrow & \text{Estado predominante de compressão.} \end{cases} \quad (4.1)$$

Já Pituba (2003) utiliza a definição de um hiperplano no espaço das deformações, ilustrado na Figura 4.1, capaz de delimitar deformações positivas das deformações negativas, servindo como critério para identificação de estados predominantes de tração e compressão.

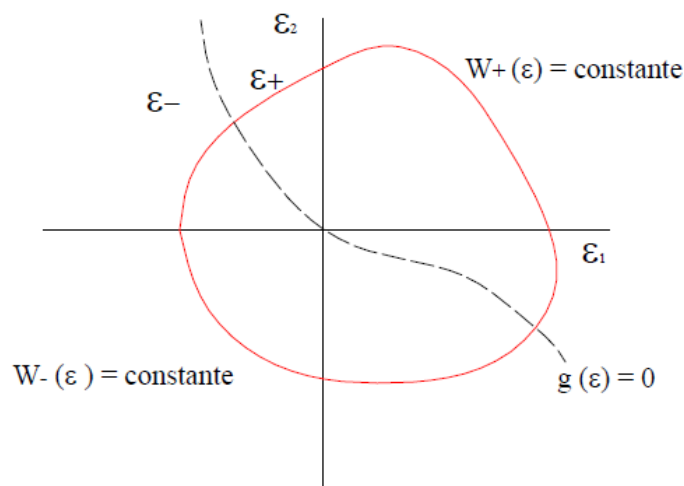


Figura 4.1: Representação do hiperplano divisor dos subdomínios de compressão e tração (Pituba, 2003)

Uma outra abordagem pode ser feita analisando-se os quadrantes no espaço das tensões principais. Nesse contexto, os regimes são caracterizados em estados predominantes de tração, predominantes de compressão e combinados de tração e compressão, conforme detalhados na Figura 4.2.

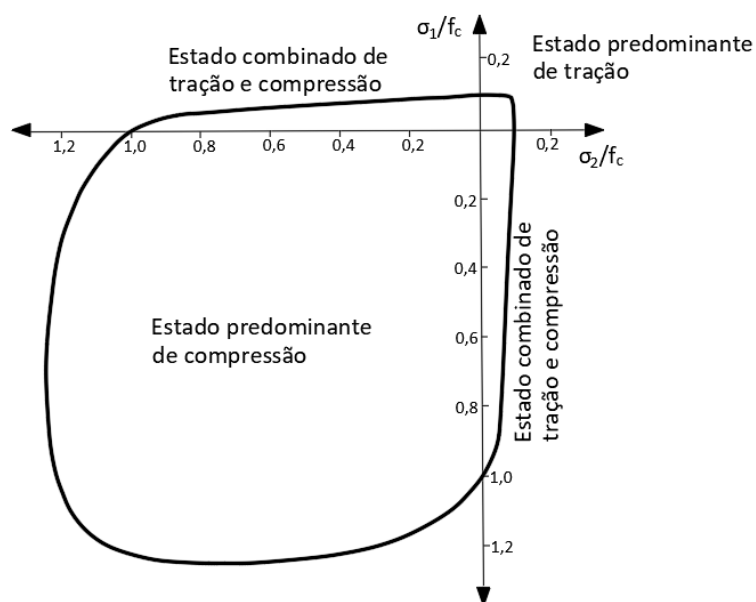


Figura 4.2: Caracterização dos estados no espaço das tensões principais

Portanto, os estados ilustrados na Figura 4.2 são identificados pelo seguinte critério

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0 \longrightarrow \text{Estado predominante de tração;} \\ \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0 \longrightarrow \text{Estado predominante de compressão;} \\ (\sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0) \text{ ou } (\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0) \longrightarrow \text{Estado combinado} \\ \text{de tração e compressão.} \end{array} \right. \quad (4.2)$$

Esse critério não foi estudado para um caso tridimensional, portanto, esse critério precisa ser analisado e adaptado para casos no qual $\sigma_3 \neq 0$.

Além dos estados predominantes de tração e compressão, é importante se ter um tratamento específico para o estado combinado de tração e compressão, uma vez que esse estado apresenta um comportamento intermediário entre a tração e a compressão. Para esse propósito, as variáveis de dano por tração e por compressão são combinadas nesse estado através de ponderações vistas na Equação 3.73.

Prosseguindo-se com a formulação, os modelos propostos têm a relação constitutiva respaldada na hipótese de degradação do operador elástico, a partir da relação constitutiva secante, dada por

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad (4.3)$$

onde

$$E_{ijkl} = (1 - D) E_{ijkl}^0. \quad (4.4)$$

Os modelos são baseados em deformação, portanto a tensão incremental se relaciona com a deformação incremental a partir do operador tangente contínuo calculado na Seção 3.3.2 e descrito a seguir por

$$\dot{\sigma}_{ij} = E_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl}, \quad (4.5)$$

onde

$$E_{ijkl}^t = E_{ijkl} + \frac{1}{\bar{H}} \bar{m}_{ij} \bar{n}_{kl}, \quad (4.6)$$

sendo

$$\bar{m}_{ij} = -E_{ijkl}^0 \varepsilon_{kl}. \quad (4.7)$$

Os demais termos do operador tangente (\bar{H}) e (\bar{n}_{kl}) são definidos, respectivamente, de acordo com a função de dano e com a deformação equivalente empregadas em cada modelo.

São formulados cinco modelos bimodulares com as variáveis de deformação equivalente baseadas nos modelos clássicos de Mazars (1984), de Vree et al. (1995) e Lemaitre e Chaboche (1990). Para simplificar a identificação dos mesmos, esses serão denominados através de siglas conforme descritas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1: Identificação dos modelos propostos

Modelo	Versão	Sigla
Modelo Bimodular com deformação equivalente baseada em Mazars (1984)	Primeira	MBM1
Modelo Bimodular com deformações equivalentes baseadas em Mazars (1984)	Segunda	MBM2
Modelo Bimodular com deformação equivalente baseada em de Vree et al. (1995)	Única	MBV
Modelo Bimodular com deformação equivalente baseada em Lemaitre e Chaboche (1990)	Primeira	MBLC1
Modelo Bimodular com deformações equivalentes baseadas em Lemaitre e Chaboche (1990)	Segunda	MBLC2

A partir das definições gerais vistas acima, serão apresentadas a seguir as formulações particulares de cada modelo proposto.

4.1.1 Modelos de dano isotrópico bimodulares baseados na deformação equivalente de Mazars (1984)

Foram formulados dois modelos, definindo-se deformações baseadas na deformação equivalente proposta por Mazars (1984). Os modelos formulados contam com variáveis de dano e funções de dano específicas para tração e compressão. Os indicadores vistos nas Equações (4.1) e (4.2) serão utilizados para se atribuir leis adequadas para os estados identificados.

4.1.1.1 Primeira Versão (MBM1)

A formulação da primeira versão do modelo bimodular baseado em Mazars (1984) se inicia pela definição da deformação equivalente. Para esta versão, uma única deformação equivalente é definida em termos das deformações principais positivas, conforme descrita abaixo por

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}. \quad (4.8)$$

A definição de funções de carregamento com variáveis históricas próprias para tração e compressão implica num acompanhamento mais específico do início da degradação do material e das condições de carregamento e descarregamento para cada tipo de regime. O primeiro invariante do tensor de deformações que é utilizado para identificar o estado predominante, também é utilizado para se definir a função de carregamento vigente. Portanto, têm-se

$$\begin{cases} F^+ = \tilde{\varepsilon} - \kappa^+, & \text{se } I_1 \geq 0; \\ F^- = \tilde{\varepsilon} - \kappa^-, & \text{se } I_1 < 0, \end{cases} \quad (4.9)$$

sendo as variáveis históricas (κ^+ e κ^-) calculadas por

$$\begin{cases} \kappa^+ = \kappa_0^+ \text{ e } \kappa^- = \kappa_0^-, & \text{se } D = 0; \\ \kappa^+ = \max[\tilde{\varepsilon}, \kappa^+] \text{ e } \kappa^- = \max[\tilde{\varepsilon}, \kappa^-], & \text{se } D > 0, \end{cases} \quad (4.10)$$

onde κ_0^+ e κ_0^- são parâmetros de entrada do modelo que limitam, respectivamente, os regimes elásticos na tração e na compressão em relação a deformação equivalente.

A degradação do material é representada pela variável escalar (D) onde são acoplados e ponderados os danos causados por tração e compressão, logo

$$D = \alpha^+ D^+ + \alpha^- D^-, \quad (4.11)$$

onde as funções de peso α^+ e α^- são calculadas de acordo com o que foi apresentado no modelo de Mazars (1984), pelas Equações 3.75a e 3.75b.

Esse modelo, assim como os demais modelos formulados que serão vistos adiante, possui a versatilidade em se atribuir quaisquer funções de dano presentes na literatura para se definir o dano por tração e por compressão. Essa característica favorece a parametrização independente de cada regime. Portanto, têm-se

$$D^+ = g^+(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}^+); \quad (4.12)$$

$$D^- = g^-(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}^-), \quad (4.13)$$

onde \mathbf{P}^+ é o conjunto de parâmetros específicos da lei de tração e \mathbf{P}^- é o conjunto de parâmetros da compressão.

Os gradientes das funções de carregamento de tração e de compressão (\bar{n}_{ij}^+ e \bar{n}_{ij}^-) desse modelo são desenvolvidos a partir de

$$\bar{n}_{ij}^+ = \bar{n}_{ij}^- = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \varepsilon_{ik}^{P^+} T_{kj}, \quad (4.14)$$

onde $\varepsilon_{ik}^{P^+}$ são as componentes positivas do tensor de deformações principais e T_{kj} são as componentes do tensor de transformações.

O inverso do módulo inelástico depende das funções de dano escolhidas para cada estado predominante. Portanto, tem-se

$$\frac{1}{\bar{H}} = \frac{\partial D}{\partial \tilde{\varepsilon}} = \alpha^+ \frac{\partial D^+}{\partial \tilde{\varepsilon}} + \alpha^- \frac{\partial D^-}{\partial \tilde{\varepsilon}}. \quad (4.15)$$

Ao se definir leis independentes para cada regime, essa formulação promove uma melhor correspondência do modelo quanto ao comportamento dos materiais bimodulares, além disso, a parametrização pode ser facilitada quando se tem uma liberdade em atribuir funções de dano que se adequem melhor aos regimes de tração e compressão.

4.1.1.2 Segunda Versão (MBM2)

Nessa versão do modelo baseado na deformação equivalente de Mazars (1984), foram criadas deformações equivalentes para tração e para compressão de acordo

com as Equações abaixo.

$$\tilde{\varepsilon}^+ = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_+^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_+^2}, \quad (4.16)$$

$$\tilde{\varepsilon}^- = \sqrt{\langle \varepsilon_1 \rangle_-^2 + \langle \varepsilon_2 \rangle_-^2 + \langle \varepsilon_3 \rangle_-^2}, \quad (4.17)$$

onde $\langle \varepsilon_i \rangle_- = \varepsilon_i$, se $\varepsilon_i < 0$ e $\langle \varepsilon_i \rangle_- = 0$, se $\varepsilon_i \geq 0$.

Uma medida específica para cada regime se fez necessária pelo fato de se ter variáveis que se relacionam diretamente com o tipo de estado, ou seja, a deformação equivalente de tração é descrita em termos das deformações principais positivas e a deformação equivalente de compressão é definida em função das deformações principais negativas. A diferença entre um modelo cuja deformação é única e um modelo que possui deformações equivalentes definidas para cada estado ficará evidente adiante nos ensaios multiaxiais da Seção 6.2.

A análise das tensões principais é o critério utilizado neste modelo para identificar os tipos de estados, conforme descrito pela Equação (4.2). Nesta versão, são prescritas leis específicas para estados predominante de tração, predominante de compressão e combinado de tração e compressão.

Ao se definir deformações equivalentes para os estados predominantes de tração e compressão, é necessário estabelecer uma deformação equivalente própria para o estado combinado de tração e compressão ($\tilde{\varepsilon}^\pm$), de tal forma que se relaciona diretamente com esse tipo de estado. Essa deformação equivalente é definida a partir da contração dupla do tensor de deformações principais, logo, tem-se

$$\tilde{\varepsilon}^\pm = \sqrt{\varepsilon_{ij}^P \varepsilon_{ij}^P}, \quad (4.18)$$

ou

$$\tilde{\varepsilon}^\pm = \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_3^2}. \quad (4.19)$$

onde ε_{ij}^P são as componentes do tensor de deformações principais.

O critério das tensões principais utilizado para identificar o tipo de estado multiaxial, também define a função de carregamento vigente, conforme descrito por

$$\begin{cases} F^+ = \tilde{\varepsilon}^+ - \kappa^+, & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ F^- = \tilde{\varepsilon}^- - \kappa^-, & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0; \\ F^\pm = \tilde{\varepsilon}^\pm - \kappa^\pm, & \text{se } (\sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0) \text{ ou } (\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0). \end{cases} \quad (4.20)$$

As variáveis históricas são calculadas por

$$\begin{cases} \kappa^+ = \kappa_0^+, \quad \kappa^- = \kappa_0^- \text{ e } \kappa^\pm = \kappa_0^\pm, & \text{se } D = 0; \\ \kappa^+ = \max[\tilde{\varepsilon}^+, \kappa^+], \quad \kappa^- = \max[\tilde{\varepsilon}^-, \kappa^-] \text{ e } \kappa^\pm = \max[\tilde{\varepsilon}^\pm, \kappa^\pm], & \text{se } D > 0. \end{cases} \quad (4.21)$$

A variável histórica do estado combinado de tração e compressão (κ^\pm) é iniciada com o valor limite de deformação de tração (κ_0^+), uma vez que ao se analisar a superfície de ruptura do concreto, os valores dos limites de resistência desse estado são mais próximos dos limites da tração predominante.

Nos estados dominantes de tração e compressão, não é feito o acoplamento do dano por tração e do dano por compressão, uma vez que entende-se que, nesses estados, o dano é predominantemente de tração ou de compressão. Portanto, têm-se

$$D = \begin{cases} D^+ = g^+(\tilde{\varepsilon}^+, \mathbf{P}^+), & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ D^- = g^-(\tilde{\varepsilon}^-, \mathbf{P}^-), & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0. \end{cases} \quad (4.22)$$

Ao se calcular o dano de forma separada nos estados predominantes de tração e compressão, uma menor quantidade de cálculos é feita, já que para realizar a ponderação do dano por tração e por compressão, é necessária uma rotina de cálculo a mais. Essa quantidade menor de cálculos implica em um modelo menos suscetível a problemas numéricos nesses estados. Isso será evidenciado nos ensaios da Seção 6.1.2.

Na situação de estado combinado de tração e compressão, a variável de dano é calculada pelo acoplamento do dano por tração e compressão, conforme descrito por

$$D = \alpha^+ D^+ + \alpha^- D^-, \quad (4.23)$$

onde os danos por tração e compressão são definidos por funções de tração e compressão e calculados através da deformação equivalente $\tilde{\varepsilon}^\pm$, logo

$$D^+ = g^+(\tilde{\varepsilon}^\pm, \mathbf{P}^+); \quad (4.24)$$

$$D^- = g^-(\tilde{\varepsilon}^\pm, \mathbf{P}^-). \quad (4.25)$$

Os gradientes das funções de carregamento são desenvolvidos por

$$\bar{n}_{ij}^+ = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^+}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^+} \varepsilon_{ik}^{P^+} T_{kj}; \quad (4.26)$$

$$\bar{n}_{ij}^- = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^-}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^-} \varepsilon_{ik}^{P^-} T_{kj}; \quad (4.27)$$

$$\bar{n}_{ij}^\pm = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^\pm}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^\pm} \varepsilon_{ik}^P T_{kj}. \quad (4.28)$$

O inverso do módulo inelástico nesta versão é calculado por

$$\frac{1}{\bar{H}} = \begin{cases} \frac{\partial D^+}{\partial \tilde{\varepsilon}^+}, & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ \frac{\partial D^-}{\partial \tilde{\varepsilon}^-}, & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0; \\ \alpha^+ \frac{\partial D^+}{\partial \tilde{\varepsilon}^\pm} + \alpha^- \frac{\partial D^-}{\partial \tilde{\varepsilon}^\pm}, & \text{se } (\sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0) \text{ ou } (\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0). \end{cases} \quad (4.29)$$

Essa versão define uma rotina de cálculos para cada estado identificado pelo critério das tensões principais. Essa estruturação implica em uma melhor adequação para cada estado em uma análise multiaxial.

4.1.2 Modelo de dano isotrópico bimodular baseado na deformação equivalente de de Vree et al. (1995) (MBV)

Embora o modelo de Vree et al. (1995) seja capaz de distinguir a resistência do material à tração e à compressão, ao se utilizar uma única lei de dano com parâmetros comuns para representar a tração e a compressão, são produzidas respostas

de tensão-deformação com um mesmo formato para ambos regimes. Foi visto que as leis de tensão-deformação de tração e compressão do concreto exibem formas divergentes.

Portanto, é formulado um modelo, cuja deformação equivalente é baseada em de Vree et al. (1995), no qual se tem leis próprias para tração e para compressão. Para uma análise multiaxial, a formulação será estruturada para os estados predominantes de tração, predominantes de compressão e combinado de tração e compressão, por isso, o critério das tensões principais descrito na Equação (4.2) será utilizado.

A deformação equivalente deste modelo é dada por

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{k_b - 1}{2k_b(1 - \nu)} I_1 + \frac{1}{2k_b} \sqrt{\frac{(k_b - 1)^2}{(1 - 2\nu)^2} I_1^2 + \frac{12k_b}{(1 + \nu)^2} J_2}. \quad (4.30)$$

O parâmetro k do modelo de de Vree et al. (1995) foi substituído pelo parâmetro k_b na deformação equivalente desta formulação. Esse novo parâmetro pode ser calibrado de acordo com a lei de tensão-deformação do material, não sendo, necessariamente, a razão entre a resistência à compressão e a resistência à tração.

O critério de tensões principais define a função de carregamento vigente, conforme descrito por

$$\begin{cases} F^+ = \tilde{\varepsilon} - \kappa^+, & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ F^- = \tilde{\varepsilon} - \kappa^-, & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0; \\ F^\pm = \tilde{\varepsilon} - \kappa^\pm, & \text{se } (\sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0) \text{ ou } (\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0), \end{cases} \quad (4.31)$$

onde as variáveis históricas são definidas por

$$\begin{cases} \kappa^+ = \kappa_0^+, \quad \kappa^- = \kappa_0^- \text{ e } \kappa^\pm = \kappa_0^\pm, & \text{se } D = 0; \\ \kappa^+ = \max[\tilde{\varepsilon}, \kappa^+], \quad \kappa^- = \max[\tilde{\varepsilon}, \kappa^-] \text{ e } \kappa^\pm = \max[\tilde{\varepsilon}, \kappa^\pm], & \text{se } D > 0. \end{cases} \quad (4.32)$$

Nos estados predominantes de tração e compressão, a variável de dano é calculada sem o acoplamento do dano por tração e o dano por compressão, conforme é visto por

$$D = \begin{cases} D^+ = g^+(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}^+), & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ D^- = g^-(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}^-), & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0. \end{cases} \quad (4.33)$$

Já para o estado combinado de tração e compressão, a variável de dano é calculada por

$$D = \alpha^+ D^+ + \alpha^- D^-, \quad (4.34)$$

onde os danos por tração e compressão são definidos por funções de tração e compressão, logo

$$D^+ = g^+(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}^+); \quad (4.35)$$

$$D^- = g^-(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}^-). \quad (4.36)$$

Os gradientes das funções de carregamento são calculados por

$$\begin{aligned} \bar{n}_{ij}^+ = \bar{n}_{ij}^- = \bar{n}_{ij}^\pm = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} &= \frac{k_b - 1}{2k_b(1 - 2\nu)} I_1 + \frac{1}{2k_b} \left[\frac{(k_b - 1)^2}{(1 - 2\nu)^2} I_1^2 + \frac{12k_b}{(1 + \nu)^2} J_2 \right]^{-\frac{1}{2}} \\ &\left[2 \frac{(k_b - 1)^2}{(1 - 2\nu)^2} I_1 \frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{kl}} + \frac{12k_b}{(1 + \nu)^2} \frac{\partial J_2}{\varepsilon_{kl}} \right], \end{aligned} \quad (4.37)$$

sendo

$$\frac{\partial I_1}{\partial \varepsilon_{kl}} = \delta_{kl}, \quad (4.38a)$$

$$\frac{\partial J_2}{\varepsilon_{kl}} = 2e_{ij} \left(\frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial \varepsilon_{kl}} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{kl} \right), \quad (4.38b)$$

onde δ_{kl} é o delta de Kronecker.

O inverso do módulo inelástico é definido por

$$\frac{1}{H} = \begin{cases} \frac{\partial D^+}{\partial \tilde{\varepsilon}^+}, & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ \frac{\partial D^-}{\partial \tilde{\varepsilon}^-}, & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0; \\ \alpha^+ \frac{\partial D^+}{\partial \tilde{\varepsilon}} + \alpha^- \frac{\partial D^-}{\partial \tilde{\varepsilon}}, & \text{se } (\sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0) \text{ ou } (\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0). \end{cases} \quad (4.39)$$

Diferentemente do modelo de de Vree et al. (1995), além de distinguir os limites de resistência, essa formulação poderá ter diferentes variações da lei de tensão-deformação nos regimes de tração e compressão, uma vez que se têm leis de dano distintas para tração e para compressão.

4.1.3 Modelos de dano isotrópico bimodulares baseados na deformação equivalente de Lemaitre e Chaboche (1990)

O modelo de Lemaitre e Chaboche (1990) não é ideal para representar materiais bimodulares, uma vez que esse modelo não distingue o comportamento do material na tração e na compressão. Contudo, é estruturado um novo modelo, baseado na deformação equivalente de Lemaitre e Chaboche (1990), no qual são atribuídas leis com parâmetros específicos da tração e compressão.

Os indicadores de estados multiaxiais da Equação (4.2) também são utilizados nas versões a seguir, para que cada estado seja tratado de forma particular. Com essa estrutura teórica, espera-se que o modelo possa representar de forma adequada os materiais bimodulares e que a parametrização possa ser feita de forma independente para tração e compressão uniaxiais.

4.1.3.1 Primeira Versão (MBLC1)

Para esta versão do modelo baseado em Lemaitre e Chaboche (1990) é utilizada uma única deformação equivalente, independente do estado multiaxial, conforme definida por

$$\tilde{\varepsilon} = \sqrt{\frac{1}{E_0} \varepsilon_{ij} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}} \quad (4.40)$$

A função de carregamento vigente depende do estado multiaxial identificado pelo indicador das tensões principais da Equação (4.2), logo

$$\begin{cases} F^+ = \tilde{\varepsilon} - \kappa^+, & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ F^- = \tilde{\varepsilon} - \kappa^-, & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0; \\ F^\pm = \tilde{\varepsilon} - \kappa^\pm, & \text{se } (\sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0) \text{ ou } (\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0), \end{cases} \quad (4.41)$$

onde as variáveis históricas são definidas por

$$\begin{cases} \kappa^+ = \kappa_0^+, \quad \kappa^- = \kappa_0^- \text{ e } \kappa^\pm = \kappa_0^\pm, & \text{se } D = 0; \\ \kappa^+ = \max[\tilde{\varepsilon}, \kappa^+], \quad \kappa^- = \max[\tilde{\varepsilon}, \kappa^-] \text{ e } \kappa^\pm = \max[\tilde{\varepsilon}, \kappa^\pm], & \text{se } D > 0. \end{cases} \quad (4.42)$$

A variável de dano é calculada de forma independente nos estados predominantes de tração e de compressão através de

$$D = \begin{cases} D^+ = g^+(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}^+), & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ D^- = g^-(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}^-), & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0, \end{cases} \quad (4.43)$$

e nos estados combinados de tração e compressão, a variável de dano é definida pelo acoplamento e ponderação do dano por tração e por compressão, logo

$$D = \alpha^+ D^+ + \alpha^- D^-, \quad (4.44)$$

e os danos por tração e compressão são definidos por funções de tração e compressão, portanto, têm-se

$$D^+ = g^+(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}^+); \quad (4.45)$$

$$D^- = g^-(\tilde{\varepsilon}, \mathbf{P}^-). \quad (4.46)$$

Os gradientes das funções de carregamento são calculados por

$$\bar{n}_{ij}^+ = \bar{n}_{ij}^- = \bar{n}_{ij}^\pm = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}} \frac{E_{ijkl} \varepsilon_{kl}}{E_0}. \quad (4.47)$$

O inverso do módulo inelástico é definido por

$$\frac{1}{H} = \begin{cases} \frac{\partial D^+}{\partial \tilde{\varepsilon}}, & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ \frac{\partial D^-}{\partial \tilde{\varepsilon}}, & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0; \\ \alpha^+ \frac{\partial D^+}{\partial \tilde{\varepsilon}} + \alpha^- \frac{\partial D^-}{\partial \tilde{\varepsilon}}, & \text{se } (\sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0) \text{ ou } (\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0). \end{cases} \quad (4.48)$$

Mesmo o modelo de Lemaitre e Chaboche (1990) não sendo capaz de representar o comportamento bimodular dos materiais, com essa nova formulação, atribuindo leis e parâmetros específicos para regimes de tração e compressão, o modelo poderá distinguir o comportamento do material nesses regimes.

4.1.3.2 Segunda Versão (MBLC2)

Nessa versão, são definidas deformações equivalentes para cada tipo de estado multiaxial. A deformação equivalente para o estado predominante de tração é baseada na parcela de energia de deformação proveniente das deformações positivas. Já a deformação equivalente para o estado predominante de compressão é baseado na parcela de energia de deformação oriunda das deformações negativas.

Para poder separar as parcelas de deformações positivas das negativas, utiliza-se o tensor de deformações principais, uma vez que energia de deformação é uma grandeza escalar e independe da direção. Portanto, as deformações equivalentes para os estados predominantes de tração e compressão são definidas respectivamente por

$$\tilde{\varepsilon}^+ = \sqrt{\frac{1}{E_0} \varepsilon_{ij}^{P+} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{P+}}; \quad (4.49)$$

$$\tilde{\varepsilon}^- = \sqrt{\frac{1}{E_0} \varepsilon_{ij}^{P-} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}^{P-}}, \quad (4.50)$$

onde ε_{ij}^{P+} e ε_{ij}^{P-} são, respectivamente, as componentes do tensor de deformações principais positivas e negativas.

Para os estados combinados de tração e compressão, a deformação equivalente definida é baseada na energia de deformação total, sendo a mesma utilizada por

Lemaitre e Chaboche (1990), logo

$$\tilde{\varepsilon}^{\pm} = \sqrt{\frac{1}{E_0} \varepsilon_{ij} E_{ijkl} \varepsilon_{kl}} \quad (4.51)$$

As funções de carregamento vigente são definidas de acordo com o tipo de estado multiaxial, conforme descrito por

$$\begin{cases} F^+ = \tilde{\varepsilon}^+ - \kappa^+, & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ F^- = \tilde{\varepsilon}^- - \kappa^-, & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0; \\ F^{\pm} = \tilde{\varepsilon}^{\pm} - \kappa^{\pm}, & \text{se } (\sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0) \text{ ou } (\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0), \end{cases} \quad (4.52)$$

onde as variáveis históricas são definidas por

$$\begin{cases} \kappa^+ = \kappa_0^+, \quad \kappa^- = \kappa_0^- \text{ e } \kappa^{\pm} = \kappa_0^{\pm}, & \text{se } D = 0; \\ \kappa^+ = \max[\tilde{\varepsilon}^+, \kappa^+], \quad \kappa^- = \max[\tilde{\varepsilon}^-, \kappa^-] \text{ e } \kappa^{\pm} = \max[\tilde{\varepsilon}^{\pm}, \kappa^{\pm}], & \text{se } D > 0. \end{cases} \quad (4.53)$$

A variável de dano é calculada de forma independente nos estados predominantes de tração e de compressão através de

$$D = \begin{cases} D^+ = g^+(\tilde{\varepsilon}^+, \mathbf{P}^+), & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ D^- = g^-(\tilde{\varepsilon}^-, \mathbf{P}^-), & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0, \end{cases} \quad (4.54)$$

Nos estados combinados de tração e compressão, a variável de dano é definida pelo acoplamento e ponderação do dano por tração e por compressão, logo

$$D = \alpha^+ D^+ + \alpha^- D^-, \quad (4.55)$$

e as variáveis de dano por tração e compressão são definidas por funções de tração e compressão, portanto, têm-se

$$D^+ = g^+(\tilde{\varepsilon}^{\pm}, \mathbf{P}^+); \quad (4.56)$$

$$D^- = g^-(\tilde{\varepsilon}^{\pm}, \mathbf{P}^-). \quad (4.57)$$

Os gradientes das funções de carregamento são desenvolvidas por

$$\bar{n}_{ij}^+ = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^+}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{E_0 \tilde{\varepsilon}^+} E_{ijkl} \varepsilon_{km}^{P+} T_{ml}; \quad (4.58)$$

$$\bar{n}_{ij}^- = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^-}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{E_0 \tilde{\varepsilon}^-} E_{ijkl} \varepsilon_{km}^{P-} T_{ml}; \quad (4.59)$$

$$\bar{n}_{ij}^\pm = \frac{\partial \tilde{\varepsilon}^\pm}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{1}{\tilde{\varepsilon}^\pm} \frac{E_{ijkl} \varepsilon_{kl}}{E_0}. \quad (4.60)$$

O inverso do módulo inelástico é calculador por

$$\frac{1}{\bar{H}} = \begin{cases} \frac{\partial D^+}{\partial \tilde{\varepsilon}^+}, & \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0; \\ \frac{\partial D^-}{\partial \tilde{\varepsilon}^-}, & \text{se } \sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 < 0; \\ \alpha^+ \frac{\partial D^+}{\partial \tilde{\varepsilon}^\pm} + \alpha^- \frac{\partial D^-}{\partial \tilde{\varepsilon}^\pm}, & \text{se } (\sigma_1 < 0 \text{ e } \sigma_2 > 0) \text{ ou } (\sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 < 0). \end{cases} \quad (4.61)$$

Em contrapartida com a versão anterior, esta versão foi definida com deformações equivalentes para os estados predominante de tração, predominante de compressão e combinado de tração e compressão. Tais medidas buscam se relacionar diretamente com os estados em questão.

4.2 Formulação não local dos modelos de dano isotrópico bimodulares

A variável utilizada como a grandeza não local é a deformação equivalente. Ao ser relacionada com a variável histórica, a deformação equivalente, durante toda a análise, assume um comportamento sempre crescente.

As médias espaciais das deformações equivalentes são calculadas nos pontos de integração de Gauss dos elementos finitos. Portanto, tem-se as deformações equivalentes não locais calculadas por

$$\bar{\varepsilon}_k = \sum_{l=1}^{N_{GP}} w_l J_l \alpha_{kl} \tilde{\varepsilon}_l \quad (4.62)$$

onde k é o índice do ponto analisado, l é o índice dos pontos da vizinhança, N_{GP} é o número total de pontos de Gauss do modelo de elementos finitos, w_l é o peso de integração do ponto de Gauss e J_l é o Jacobiano da transformação isoparamétrica do ponto de índice l .

A variável de peso não local entre os pontos k e l é definida por

$$\alpha_{kl} = \frac{\alpha_0(\|\mathbf{s}_l - \mathbf{x}_k\|)}{\sum_{m=1}^{N_{GP}} w_m J_m \alpha_0(\|\mathbf{s}_m - \mathbf{x}_k\|)}. \quad (4.63)$$

A função de peso α_0 pode ser dada por vários tipos de distribuições, podendo citar a distribuição Gaussiana, distribuição em sino ou a distribuição triangular. Essas funções podem ser vistas com maiores detalhes em Souza (2016).

Capítulo 5

Implementação computacional

Os modelos bimodulares formulados foram implementados no sistema **INSANE** (**IN**teractive **Str**uctural **AN**alysis **E**nvironment), que é um programa computacional desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. Esse sistema foi desenvolvido em Java, uma linguagem de programação orientada a objetos (POO), e organizado em módulos independentes denominados por pré-processador, pós-processador e núcleo numérico.

O pré-processador é um ambiente de interação com o usuário e é responsável pela entrada de dados que constituem o modelo estrutural. O pós-processador exibe as informações de saída e os resultados.

O núcleo numérico é responsável pelo cálculo e obtenção de resultados dos diferentes modelos discretos da análise estrutural. Sua organização é centrada nas relações entre as interfaces **Assembler**, **Model**, **Persistence** e **Solution**, que são responsáveis, respectivamente, pela montagem do sistema matricial de equações, abstrações do modelo discreto adotado, coleta de dados de arquivos de entrada e obtenção de resultados através de técnicas de solução.

A implementação dos modelos formulados está compreendida no núcleo numérico, em específico, no pacote denominado de **MaterialMedia**. Esse pacote é onde contém classes que representam modelos constitutivos e leis materiais implementados de diversos autores.

A interface **Assembler** é encarregada de montar o sistema matricial de segunda

ordem, no qual é possível tratar diversos modelos discretos que tratam de problemas como a análise estática, dinâmica, termodinâmica e demais áreas da física. Esse sistema matricial é generalizado a partir de

$$[\mathbf{A}]\{\ddot{\mathbf{X}}\} + [\mathbf{B}]\{\dot{\mathbf{X}}\} + [\mathbf{C}]\{\mathbf{X}\} = \{\mathbf{D}\}, \quad (5.1)$$

onde $\{\mathbf{X}\}$ é o vetor de variáveis de estado do problema; $\{\dot{\mathbf{X}}\}$ e $\{\ddot{\mathbf{X}}\}$ são, respectivamente, os vetores de variação de primeira e segunda ordem das grandezas de estado; $[\mathbf{A}]$, $[\mathbf{B}]$ e $[\mathbf{C}]$ são matrizes e $\{\mathbf{D}\}$ é um vetor, que podem depender ou não da variável de estado e suas derivadas.

5.1 Análise estática fisicamente não linear

O sistema de equações 5.1 para uma análise estática se reduz a

$$[\mathbf{K}]\{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{P}\}, \quad (5.2)$$

onde $\{\mathbf{U}\}$ é o vetor de deslocamentos nodais, $[\mathbf{K}]$ é a matriz de rigidez global e $\{\mathbf{P}\}$ é o vetor de forças nodais. Em análise fisicamente não linear, a matriz de rigidez global depende dos deslocamentos nodais. As incógnitas da equação 5.2 são obtidas por meio de uma equação de equilíbrio incremental iterativa correspondente a iteração j do passo i , conforme descrita abaixo

$$[\mathbf{K}]_{j-1}^i \{\delta\mathbf{U}\}_j^i = \delta\lambda_j^i \{\mathbf{P}\} + \{\mathbf{Q}\}_{j-1}^i, \quad (5.3)$$

onde $[\mathbf{K}]_{j-1}^i$ é a matriz de rigidez tangente na iteração $j - 1$ do passo i , $\{\delta\mathbf{U}\}_j^i$ é o vetor de deslocamentos incrementais da iteração j do passo i , $\delta\lambda_j^i$ é o incremento do fator de cargas na iteração j do passo i , $\{\mathbf{P}\}$ é o vetor de cargas de referência e $\{\mathbf{Q}\}_{j-1}^i$ é o vetor de forças residuais da iteração $j - 1$ do passo i .

Em função de algum método de controle de carga, estabelece-se um valor para o incremento do fator de carga inicial $\delta\lambda_j$, a partir disso, obtém-se $\{\delta\mathbf{U}\}_j$, no qual é

decomposto em parcelas associadas à carga de referência $\{\delta\mathbf{U}\}_j^P$ e à carga residual $\{\delta\mathbf{U}\}_j^Q$, portanto, tem-se

$$\{\delta\mathbf{U}\}_j = \delta\lambda_j\{\delta\mathbf{U}\}_j^P + \{\delta\mathbf{U}\}_j^Q, \quad (5.4)$$

sendo

$$[\mathbf{K}]_{j-1}\{\delta\mathbf{U}\}_j^P = \{\mathbf{P}\}, \quad (5.5a)$$

$$[\mathbf{K}]_{j-1}\{\delta\mathbf{U}\}_j^Q = \{\mathbf{Q}\}_{j-1}. \quad (5.5b)$$

Ao final de cada iteração a convergência é verificada através da norma do vetor de forças residuais $|\{\mathbf{Q}\}_j|$ ou da norma do vetor de deslocamentos incrementais $|\{\delta\mathbf{U}\}_j|$, no qual devem ser menores que um valor de tolerância estabelecido. Caso a convergência não seja atingida, uma nova iteração é feita, atualizando-se o fator de carga

$$\lambda_j = \lambda_{j-1} + \delta\lambda_j, \quad (5.6)$$

o vetor de deslocamentos nodais

$$\{\mathbf{U}\}_j = \{\mathbf{U}\}_{j-1} + \{\delta\mathbf{U}\}_j \quad (5.7)$$

e o vetor de cargas residuais

$$\{\mathbf{Q}\}_j = \lambda_j\{\mathbf{P}\} - \{\mathbf{F}\}_j^e, \quad (5.8)$$

onde $\{\mathbf{F}\}_j$ é o vetor de forças equivalente ao estado de tensão interna $\{\boldsymbol{\sigma}\}$. Utilizando-se o Método dos Elementos finitos, o vetor de forças internas é calculado por

$$\{\mathbf{F}\}_j^e = \int_v [\mathbf{B}]^T \{\boldsymbol{\sigma}\} dv, \quad (5.9)$$

onde $[\mathbf{B}]^T$ é a transposta da matriz que relaciona as deformações com os deslocamentos e v é o volume do elemento. O modelo constitutivo é acionado nesse ponto do processo incremental iterativo.

Em resumo, o processo incremental iterativo pode ser visto na Figura 5.1.

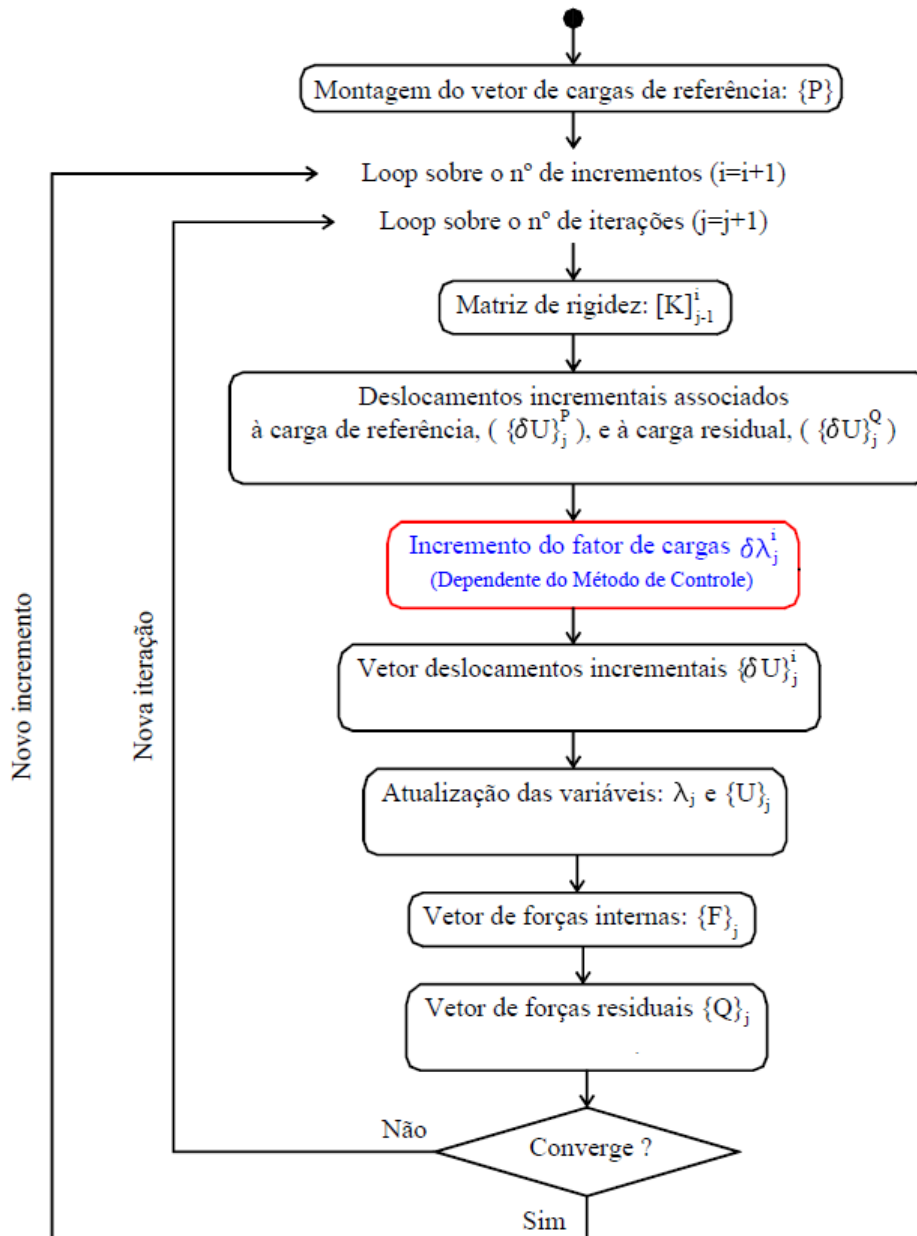


Figura 5.1: Algoritmo para o processo incremental iterativo da análise fisicamente não linear Fuina (2004)

5.2 Implementação dos modelos constitutivos bimodulares

A classe abstrata `ConstitutiveModel` contém métodos capazes de generalizar as atribuições e funcionalidades dos modelos constitutivos do sistema e é responsável por realizar todas as operações necessárias para o cálculo do operador tangente e das forças internas, suas atividades principais são o cálculo da matriz constitutiva tangente e o cálculo do vetor de tensões através dos métodos *mountCt()* e *mountDualInternalVariableVector()* respectivamente.

A estruturação teórica unificada desenvolvida e implementada por Penna (2011), baseada na proposta de Carol et al. (1994), permite que os modelos constitutivos sejam implementados a partir de métodos e campos que representam os gradientes das funções de carregamento, gradiente do potencial dissipativo, módulo inelástico, operadores secante e tangente, condições de Kunh-Tucker, deformações equivalentes e demais variáveis que constituem o modelo. Esse conjunto de métodos e campos que formam a estrutura unificada são atribuídas a classes denominadas de “*filters*”.

Os modelos bimodulares propostos foram implementados como classes do tipo “*filter*”, além dos métodos citados, pode-se destacar o método *updateConstitutiveVariables()* o qual é responsável por atualizar as variáveis do modelo e o estado de tensão de cada ponto de integração dos elementos que formam a malha. Nesse método, é onde ocorre a identificação dos estados predominante de tração, predominante de compressão e combinado de tração e compressão através de indicadores especificados na Seção 4.1, para que seja atribuída um rotina de cálculo específica para o estado em questão.

A classe abstrata `Material` possui métodos que descrevem as propriedades de materiais em geral. Os diferentes tipos de materiais são representados por subclasses herdeiras e nelas são descritas as propriedades do material do modelo, como módulo de elasticidade e coeficiente de Poisson. A classe abstrata `InelasticLaw` representa as leis inelásticas e possui métodos que calculam o dano e o módulo inelástico,

suas classes herdeiras constituem os variados tipos de leis de evolução de dano. Cada modelo constitutivo está associado a um material apropriado, portanto, para representar o comportamento bimodular, foi criada uma classe herdeira de `Material` denominada de `DamageableMaterialBimodularBehavior` e que possui dois objetos do tipo `InelasticLaw`, um para representar uma lei de evolução do dano por tração e o outro para representar a lei de evolução do dano por compressão.

5.3 Implementação dos modelos não locais bimodulares

Os modelos não locais foram implementados através da estrutura de herança de classes, ou seja, cada modelo não local implementado é formado por uma classe que herda a classe que representa o modelo local correspondente.

As classes dos modelos não locais possuem o método *updateLocalVariables()* que atualiza as variáveis locais correntes e o método *updateNonLocalVariables()* que é responsável pelo cálculo da variável não local. Neste método, a média espacial da deformação equivalente é feita com os pontos de Gauss dos elementos contidos dentro de um determinado domínio, formado pelo raio não local, conforme Equação (4.62).

Após o cálculo da variável não local, o método sobreposto *updateConstitutiveVariables()* atualiza as demais variáveis que dependem da deformação equivalente não local e por fim computa o estado de tensão corrente.

Capítulo 6

Simulações Numéricas

Neste capítulo, são apresentados diversos ensaios numéricos, realizados via método dos elementos finitos, com o propósito de avaliar as características dos modelos propostos.

É analisada a capacidade dos modelos em representar o comportamento bimodular do concreto através de ensaios de tração e compressão uniaxiais. As superfícies de ruptura dos modelos em regimes biaxiais são comparadas com o resultado experimental obtido por Kupfer et al. (1969). Além disso ensaios experimentais de flexão, painel em forma de L e modo misto de fratura presentes na literatura são utilizados para validação dos modelos propostos.

A regularização das respostas dos modelos não locais também é objeto de investigação neste capítulo. Os modelos não locais são comparados com os modelos locais através de ensaios com malhas com grande nível de refinamento.

6.1 Ensaio de tração e compressão

6.1.1 Ensaio com variação de funções de dano

Os modelos formulados permitem associar diversos tipos de leis de dano para tração e compressão. A fim de se avaliar o comportamento dos modelos diante das funções de dano, foram feitos ensaios de tração e compressão diretas em um elemento plano quadrilateral de quatro nós com dimensões unitárias, ilustrado nas Figuras 6.1(a) e 6.1(b).

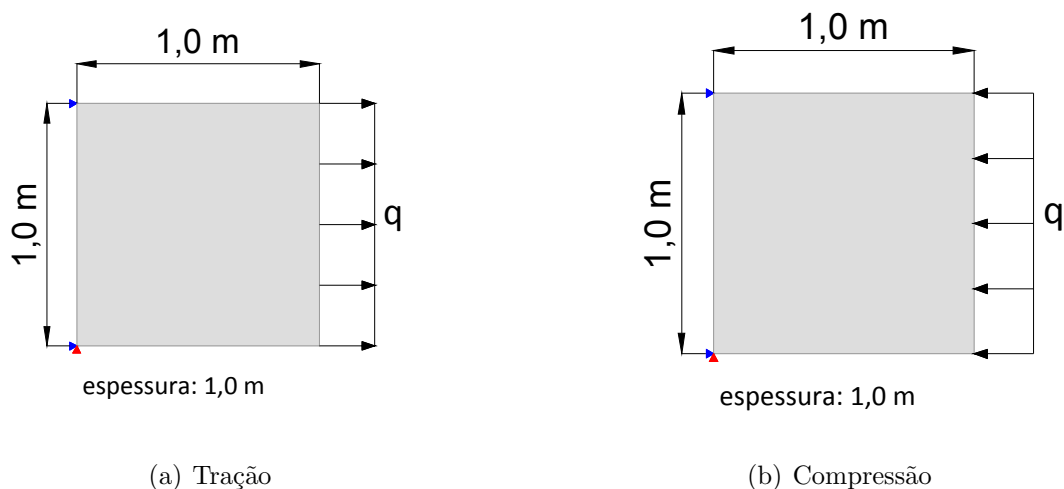


Figura 6.1: Tração e compressão direta

O material utilizado nesse ensaio é um concreto que foi extraído do trabalho de Hordijk (1991), cujas características são: Resistência à compressão $f_c = 59,0$ MPa, resistência à tração $f_t = 3,0$ MPa, módulo de elasticidade $E_0 = 38000$ MPa, energia de fratura $G_f = 125$ J/m² e coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$. A carga distribuída de referência é igual a $q = 1,0$ MN/m. O método de controle de deslocamento foi utilizado na análise, incrementando-se o deslocamento, no ponto inferior da extremidade livre, de $4,0 \times 10^{-5}$ m na tração e $-1,0 \times 10^{-4}$ m na compressão.

A metodologia de parametrização dos modelos adotada neste trabalho consiste em variar os parâmetros das leis de dano de tal modo que a curva de tensão-deformação dos modelos se aproxime ao máximo da resposta do material. A resposta do material pode ser descrita através de resultados experimentais de ensaios uniaxiais de tração e compressão ou até mesmo através de leis empíricas como a de Boone e Ingrassia (1987) para tração e Carreira e Chu (1985) para compressão do concreto.

Para a lei linear, exponencial e polinomial foram utilizadas, respectivamente, as funções de dano descritas pelas Equações (3.61), (3.66) e (3.68). Os parâmetros das leis utilizadas em cada modelo para tração estão especificados na Tabela 6.1 e para compressão, estão especificados na Tabela 6.2.

Tabela 6.1: Parâmetros das leis de dano de tração para os modelos formulados

MBM1	MBM2	MBV	MBLC1	MBLC2
Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 870$ $\kappa_0^+ = 7,94 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 870$ $\kappa_0^+ = 7,94 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 870$ $\kappa_0^+ = 7,94 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 870$ $\kappa_0^+ = 7,94 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 870$ $\kappa_0^+ = 8,06 \times 10^{-5}$
Tração (Linear) $\kappa_0^+ = 7,89 \times 10^{-5}$ $\kappa_f^+ = 2,40 \times 10^{-3}$	Tração (Linear) $\kappa_0^+ = 7,89 \times 10^{-5}$ $\kappa_f^+ = 2,40 \times 10^{-3}$	Tração (Linear) $\kappa_0^+ = 7,89 \times 10^{-5}$ $\kappa_f^+ = 2,40 \times 10^{-3}$	Tração (Linear) $\kappa_0^+ = 7,89 \times 10^{-5}$ $\kappa_f^+ = 2,40 \times 10^{-3}$	Tração (Linear) $\kappa_0^+ = 8,06 \times 10^{-5}$ $\kappa_f^+ = 2,50 \times 10^{-3}$
Tração (Polinomial) $T = 1,2$ $\tilde{E} = 15000$ $\kappa_0^+ = 1,80 \times 10^{-4}$	Tração (Polinomial) $T = 1,2$ $\tilde{E} = 15000$ $\kappa_0^+ = 1,80 \times 10^{-4}$	Tração (Polinomial) $T = 1,2$ $\tilde{E} = 15000$ $\kappa_0^+ = 1,80 \times 10^{-4}$	Tração (Polinomial) $T = 1,2$ $\tilde{E} = 15000$ $\kappa_0^+ = 1,80 \times 10^{-4}$	Tração (Polinomial) $T = 1,2$ $\tilde{E} = 15000$ $\kappa_0^+ = 1,84 \times 10^{-4}$

Tabela 6.2: Parâmetros das leis de dano de compressão para os modelos formulados

MBM1	MBM2	MBV	MBLC1	MBLC2
Compressão (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 1700$ $\kappa_0^- = 3,15 \times 10^{-4}$	Compressão (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 380$ $\kappa_0^- = 1,57 \times 10^{-3}$	Compressão (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 700$ $\kappa_0^- = 9,40 \times 10^{-4}$	Compressão (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 380$ $\kappa_0^- = 1,57 \times 10^{-3}$	Compressão (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 350$ $\kappa_0^- = 1,59 \times 10^{-3}$
Compressão (Linear) $\kappa_0^- = 1,55 \times 10^{-3}$ $\kappa_f^- = 6,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Linear) $\kappa_0^- = 1,55 \times 10^{-3}$ $\kappa_f^- = 6,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Linear) $\kappa_0^- = 9,40 \times 10^{-4}$ $\kappa_f^- = 4,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Linear) $\kappa_0^- = 1,55 \times 10^{-3}$ $\kappa_f^- = 6,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Linear) $\kappa_0^- = 1,59 \times 10^{-3}$ $\kappa_f^- = 6,15 \times 10^{-3}$
Compressão (Polinomial) $T = 5,0$ $\tilde{E} = 16000$ $\kappa_0^- = 4,00 \times 10^{-4}$	Compressão (Polinomial) $T = 59,0$ $\tilde{E} = 38000$ $\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 35,0$ $\tilde{E} = 38000$ $\kappa_0^- = 1,20 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 59,0$ $\tilde{E} = 38000$ $\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 60,5$ $\tilde{E} = 38000$ $\kappa_0^- = 2,05 \times 10^{-3}$

Os parâmetros das leis utilizadas, detalhados nas tabelas acima, resultam na aproximação de cada modelo em correspondência com as características do concreto apresentado por Hordijk (1991). As respostas de cada modelo, em regime de tração e compressão uniaxiais, com os vários tipos de leis são exibidas a seguir pelos gráficos das Figuras 6.2 e 6.3.

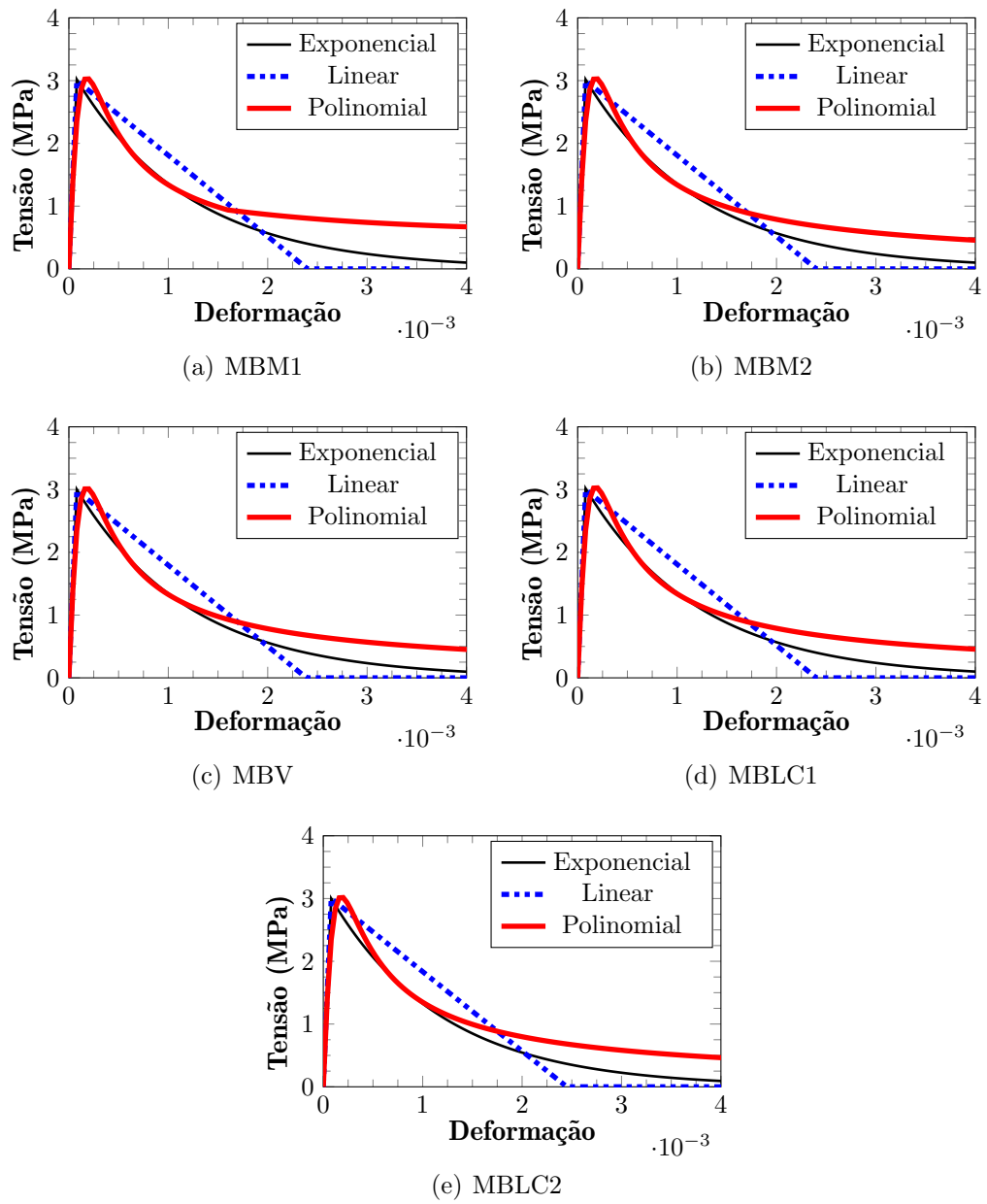


Figura 6.2: Resposta tensão-deformação dos modelos propostos em regime de tração uniaxial com variação das funções de dano

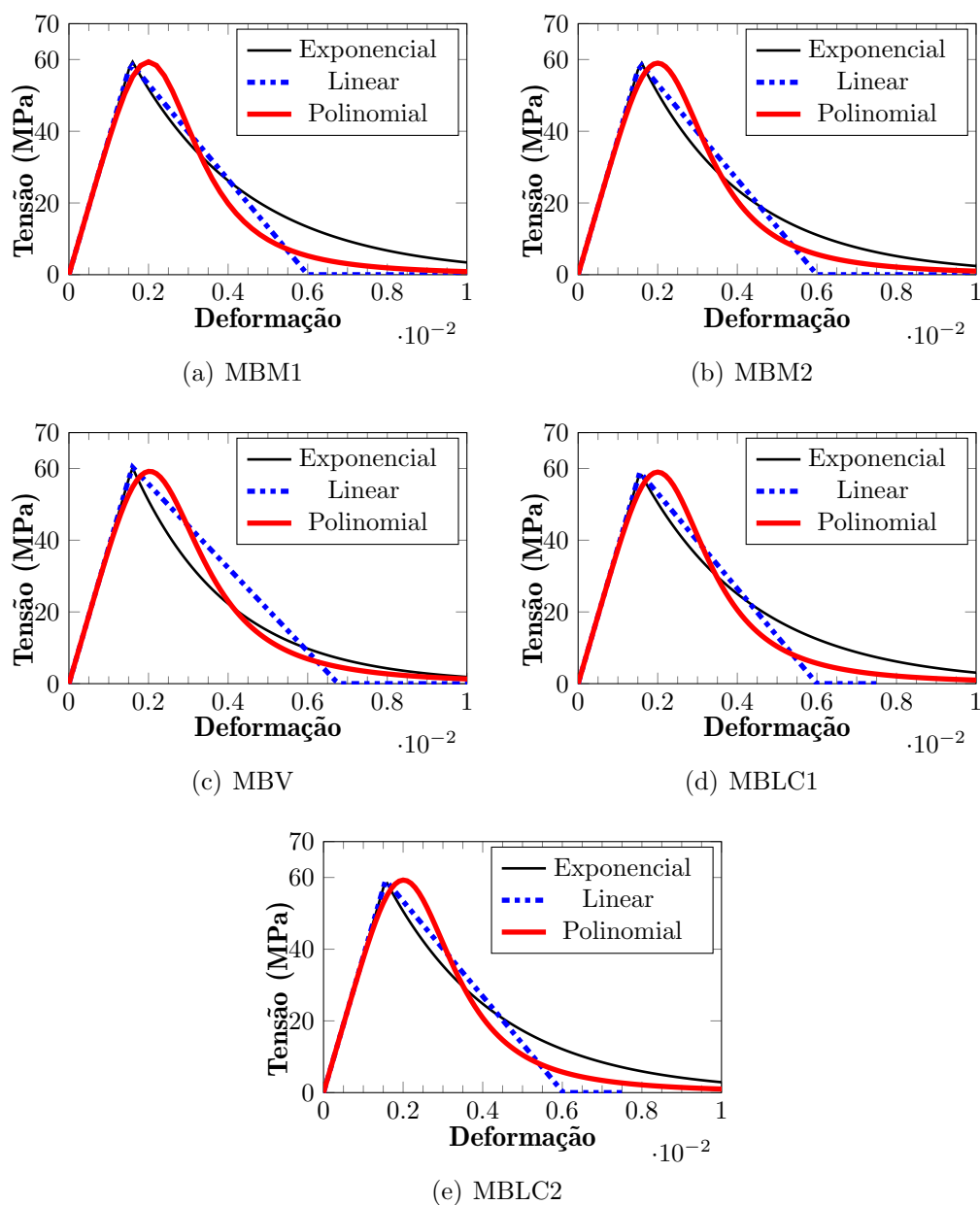


Figura 6.3: Resposta tensão-deformação dos modelos propostos em regime de compressão uniaxial com variação das funções de dano

Nesse ensaio, o comportamento bimodular de um concreto foi representado por leis do tipo linear, exponencial e polinomial. Com essa nova proposta, é possível de se ter um melhor ajuste do modelo constitutivo com as leis de tração e compressão de materiais que possuem diferenciação em ambos regimes, já que nesses modelos, tem-se a liberdade em atribuir qualquer tipo de função de dano que melhor represente o comportamento do material em estados uniaxiais de tração e compressão, algo que

não era previsto nos modelos clássicos.

Embora nesse ensaio, tenha-se utilizado apenas as funções de dano das Equações (3.61), (3.66) e (3.68), os modelos formulados permitem o uso de qualquer outra função de dano que se relacione com as deformações equivalentes. A lei de dano que se utiliza para representar o dano por tração, não necessariamente, necessita de ser a mesma para descrever o dano por compressão.

A possibilidade em se atribuir qualquer tipo de função de dano para a tração e compressão concede alguns benefícios aos modelos. Os materiais bimodulares podem ser parametrizados de forma independente na tração e compressão, uma vez que é possível escolher a função de dano com os parâmetros específicos para cada tipo de regime. A escolha adequada de uma função de dano pode promover um melhor ajuste da resposta dos modelos com as curvas experimentais de tensão-deformação do material.

6.1.2 Ensaio de refinamento da malha para modelos locais e não locais

Foi visto na Seção 3.6 que os modelos locais governados por uma lei tensão-deformação com a presença de *softening* podem ser acometidos pela localização de deformações numericamente induzida, levando a resultados incoerentes e/ou a perda de estabilidade numérica.

Para verificar a capacidade de regularização dos resultados dos modelos não locais propostos, o ensaio da seção anterior foi realizado com sucessivos refinamentos da malha, conforme ilustrado na Figura 6.4

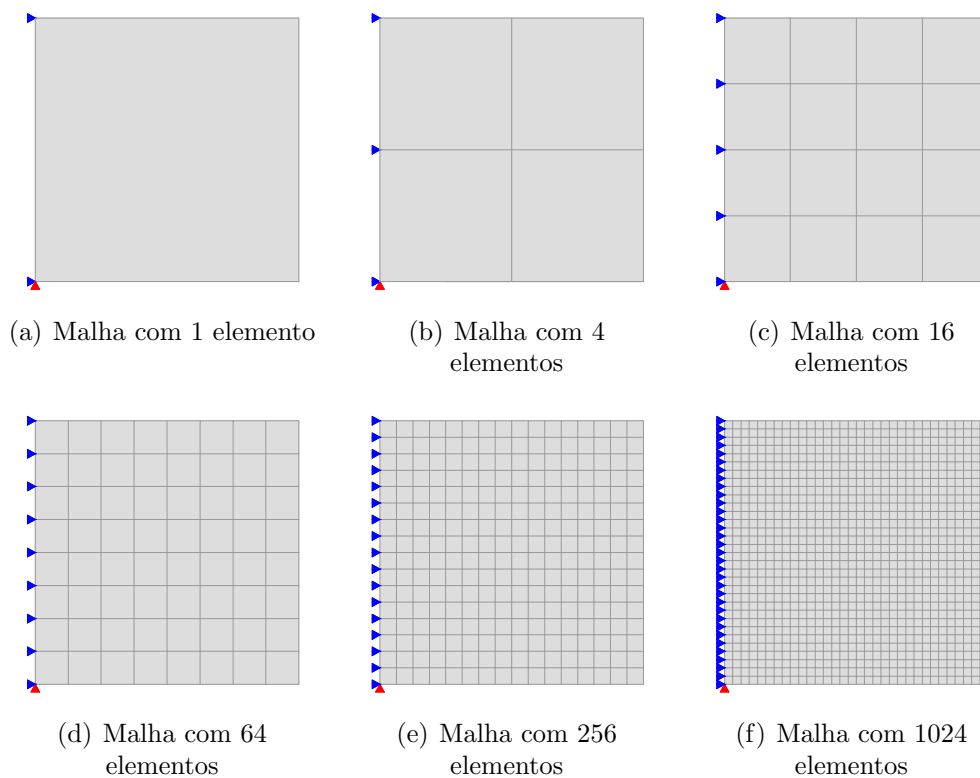
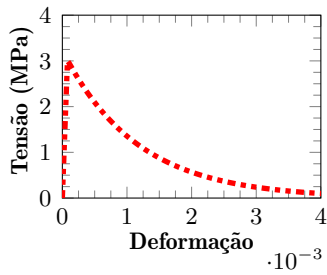


Figura 6.4: Malhas utilizadas no ensaio de regularização dos resultados

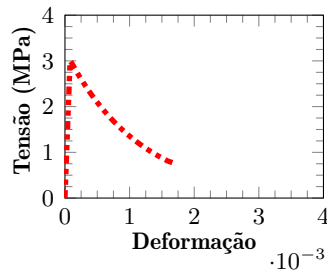
Para a função de peso não local, utilizou-se a Equação 3.90, sendo que o raio não local adotado foi de 1,0 m e a constante $K = 1$. Na tração, foi utilizado o *softening* exponencial com a função de dano definida pela Equação (3.66) e na compressão, utilizou-se o *softening* polinomial com a função de dano expressa pela Equação (3.68).

Os resultados dos modelos locais, em termos de tensão-deformação, foram confrontados com as respostas dos modelos não locais. As Figuras 6.5 a 6.14 exibem as respostas de tensão-deformação dos modelos locais e não locais em regime de tração uniaxial.

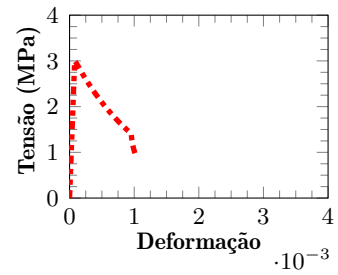
MBM1 local - Tração



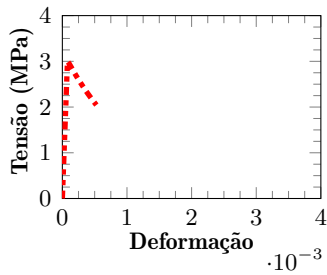
(a) Malha com 1 elemento



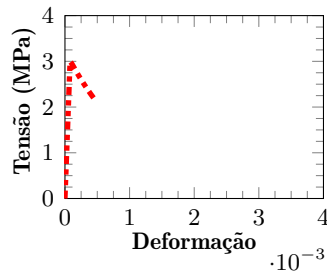
(b) Malha com 4 elementos



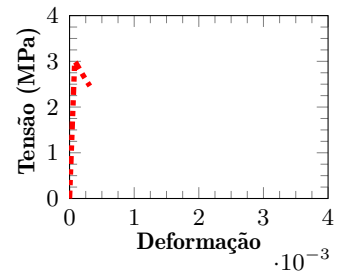
(c) Malha com 16 elementos



(d) Malha com 64 elementos



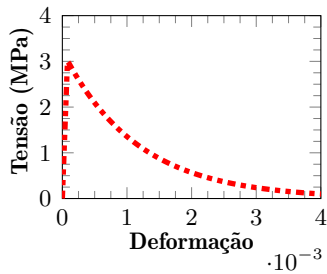
(e) Malha com 256 elementos



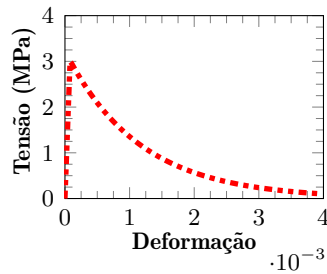
(f) Malha com 1024 elementos

Figura 6.5: Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBM1 local

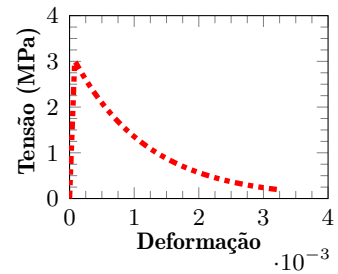
MBM1 não local - Tração



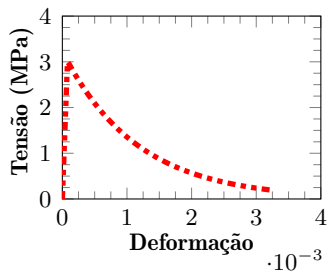
(a) Malha com 1 elemento



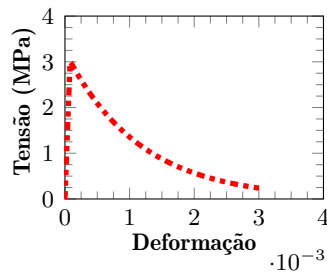
(b) Malha com 4 elementos



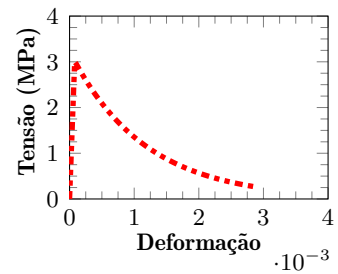
(c) Malha com 16 elementos



(d) Malha com 64 elementos



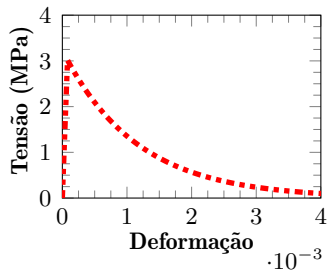
(e) Malha com 256 elementos



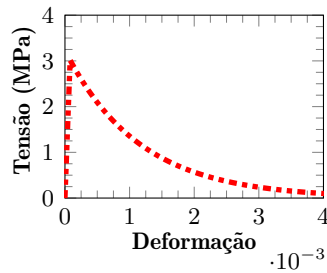
(f) Malha com 1024 elementos

Figura 6.6: Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBM1 não local

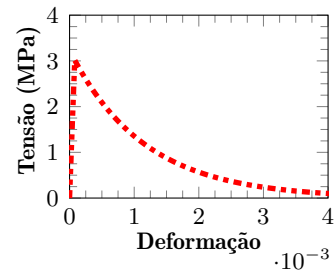
MBM2 local - Tração uniaxial



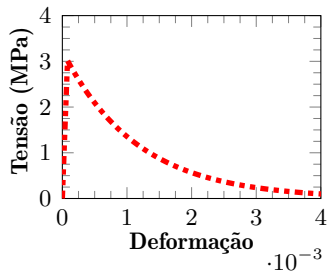
(a) Malha com 1 elemento



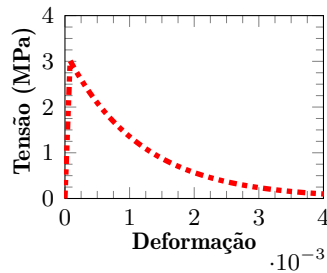
(b) Malha com 4 elementos



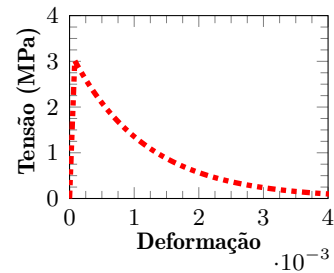
(c) Malha com 16 elementos



(d) Malha com 64 elementos



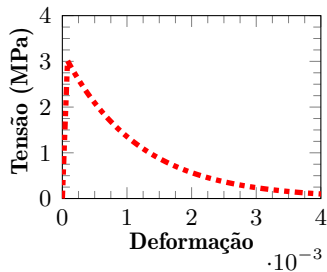
(e) Malha com 256 elementos



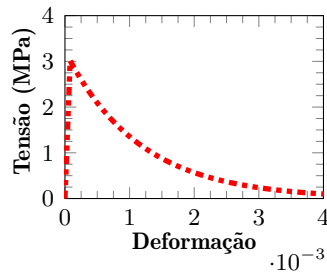
(f) Malha com 1024 elementos

Figura 6.7: Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBM2 local

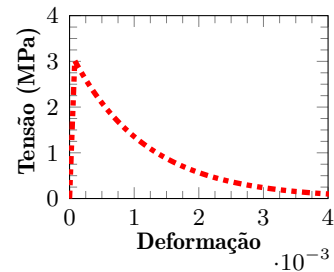
MBM2 não local - Tração uniaxial



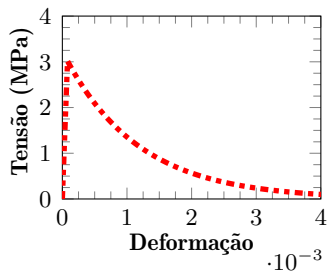
(a) Malha com 1 elemento



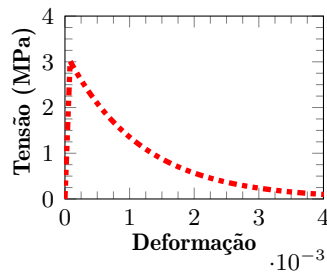
(b) Malha com 4 elementos



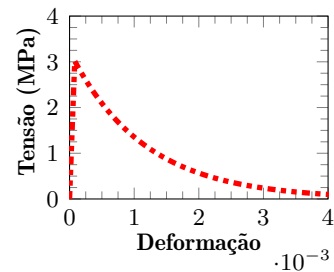
(c) Malha com 16 elementos



(d) Malha com 64 elementos



(e) Malha com 256 elementos



(f) Malha com 1024 elementos

Figura 6.8: Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBM2 não local

MBV local - Tração uniaxial

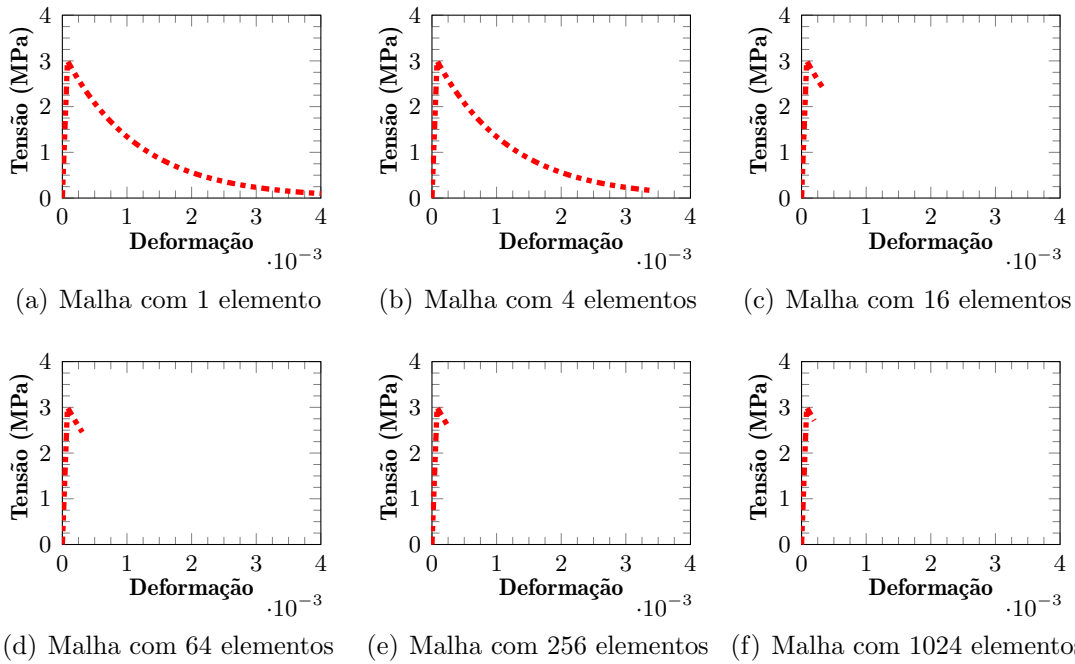


Figura 6.9: Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBV local

MBV não local - Tração uniaxial

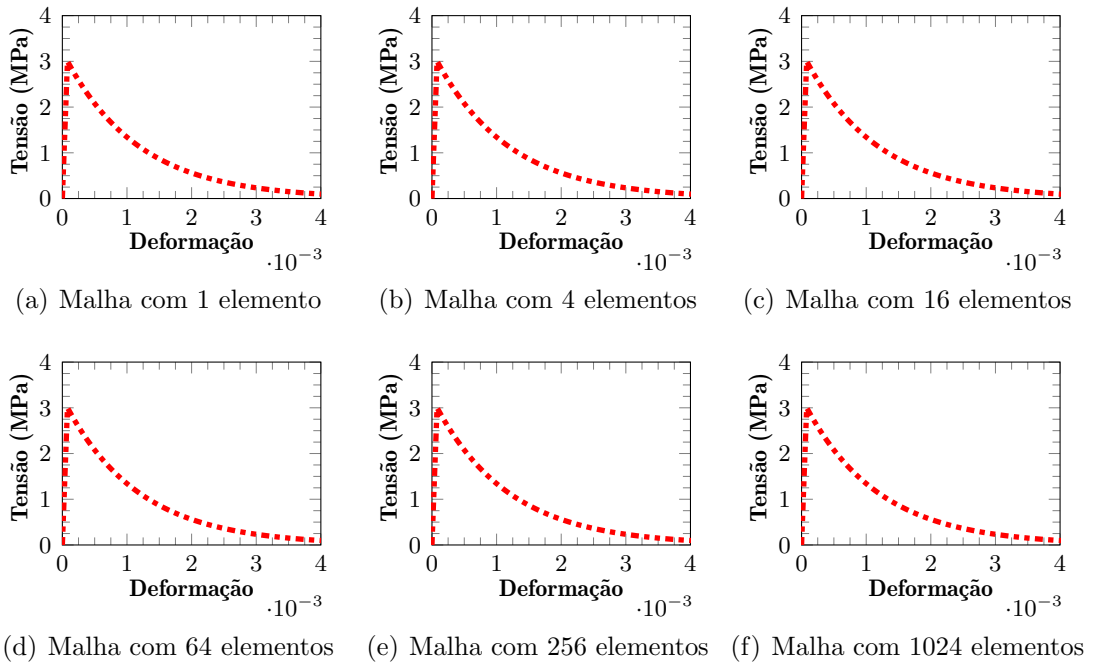
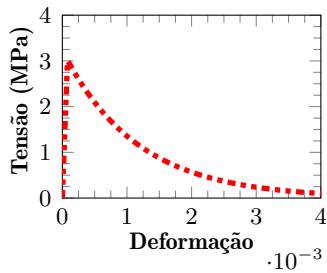
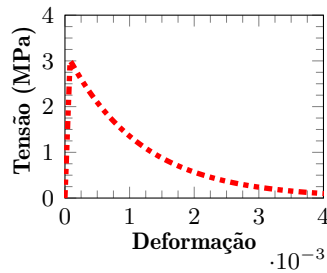


Figura 6.10: Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBV não local

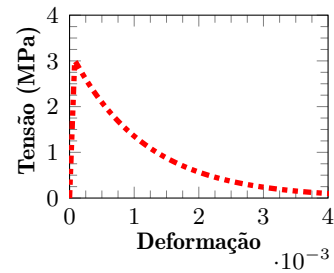
MBLC1 local - Tração uniaxial



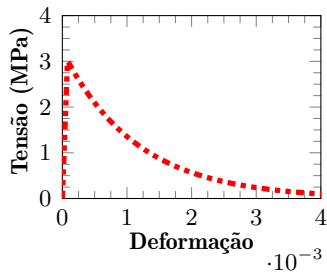
(a) Malha com 1 elemento



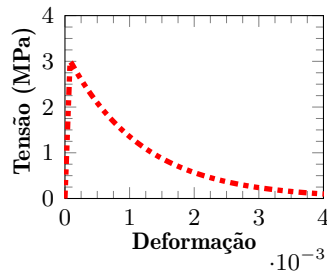
(b) Malha com 4 elementos



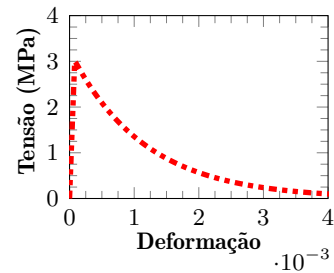
(c) Malha com 16 elementos



(d) Malha com 64 elementos



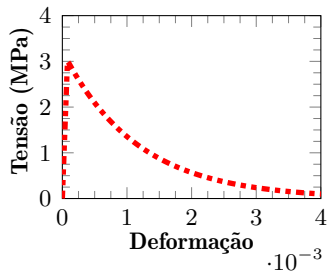
(e) Malha com 256 elementos



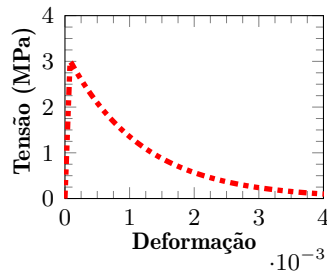
(f) Malha com 1024 elementos

Figura 6.11: Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBLC1 local

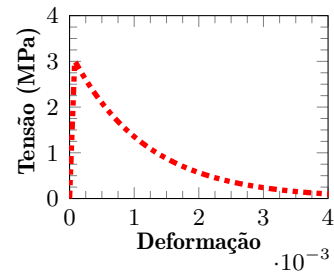
MBLC1 não local - Tração uniaxial



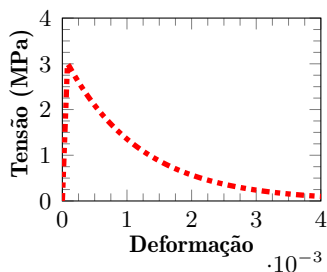
(a) Malha com 1 elemento



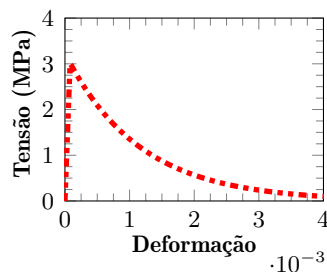
(b) Malha com 4 elementos



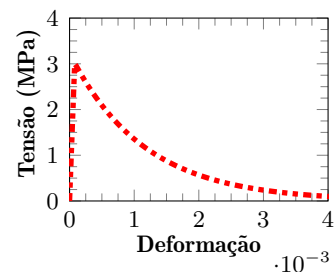
(c) Malha com 16 elementos



(d) Malha com 64 elementos



(e) Malha com 256 elementos



(f) Malha com 1024 elementos

Figura 6.12: Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBLC1 não local

MBLC2 local - Tração uniaxial

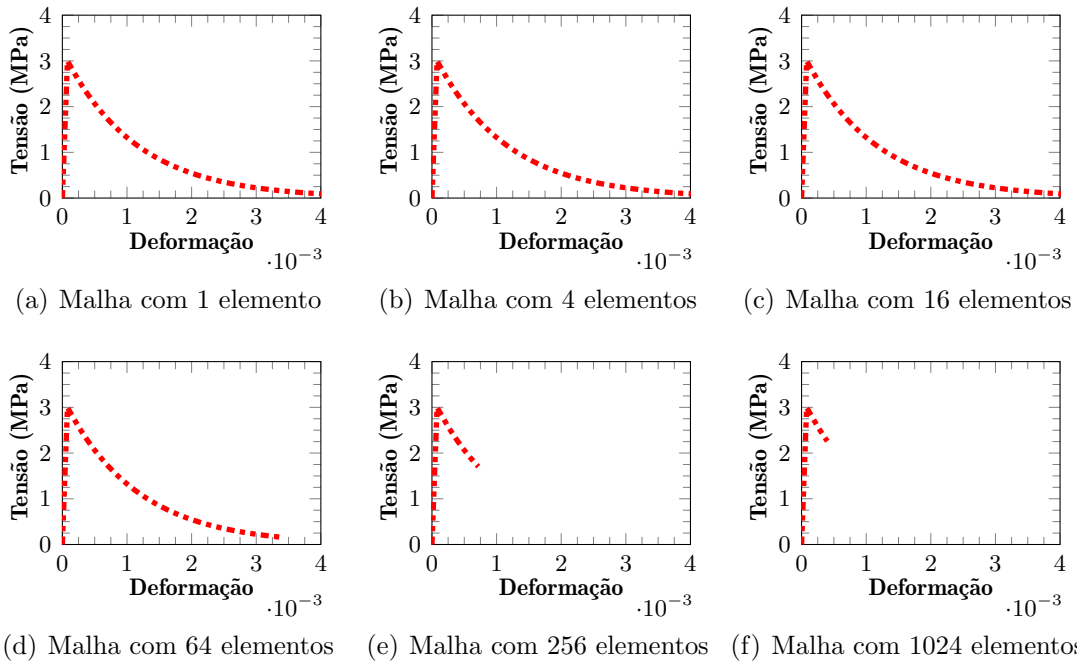


Figura 6.13: Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBLC2 local

MBLC2 não local - Tração uniaxial

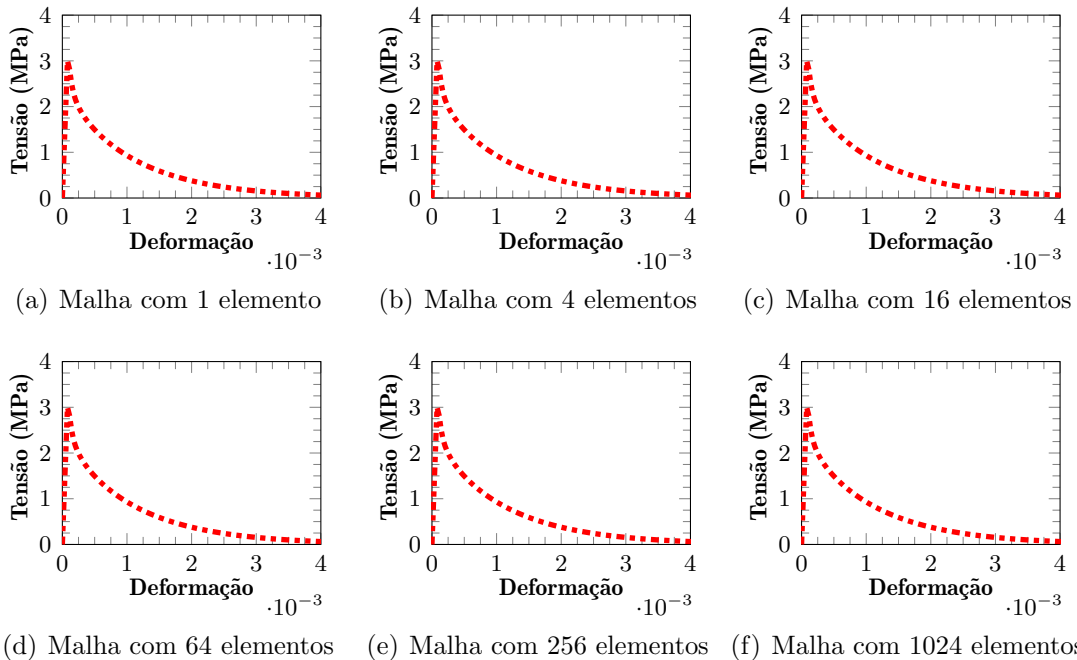


Figura 6.14: Ensaio de refinamento em regime de tração uniaxial com MBLC2 não local

Ao se refinar as malhas, os modelos locais são acometidos por problemas numéricos devido a localização de deformação numericamente induzida. O acúmulo de

erros de precisão, oriundo das operações computacionais, causa mudanças significativas no estado de deformação de elementos de malhas muito refinadas, conforme foi visto na Seção 3.6. Portanto, em ensaios simples de tração uniaxial e compressão uniaxial, onde a tensão é constante em toda a estrutura, quando ocorre a localização de deformação em um determinado elemento, ocorre o desequilíbrio da estrutura, o que impossibilita a obtenção da trajetória de equilíbrio do modelo após o início desse problema numérico.

Ao se fazer o ensaio de refinamento de malha com o MBM1 local, a resposta já é afetada com a malha de 4 elementos e ao se refinar ainda mais a malha, o problema numérico acontece cada vez mais próximo do pico (Figura 6.5). Quando se utiliza o formato não local para esse modelo, a resposta é afetada apenas a partir da malha de 16 elementos finos, entretanto, é possível obter boa parte da trajetória do *softening* em todas as malhas (Figura 6.6).

De acordo com a Figura 6.7, o MBM2 se mostrou um modelo menos suscetível a problemas numéricos, já que com o formato local, foi possível de se obter as trajetórias completas para todas as malhas ensaiadas. Também não foi observado nenhum problema quanto às respostas do formato não local desse modelo conforme pode ser observado na Figura 6.8.

As trajetórias do MBV local começaram a ser afetadas a partir da malha de 4 elementos, sendo que nessa malha, o problema ocorreu próximo do fim do carregamento. A partir da malha com 16 elementos, a resposta é afetada logo após o pico e quanto mais se refina a malha, mais rápido esse problema ocorre (Figura 6.9). As respostas são regularizadas com o MBV não local conforme pode ser visto na Figura 6.10.

O MBLC1 também se mostrou menos suscetível a problemas numéricos, uma vez que para o formato local, as trajetórias completas foram obtidas para todas as malhas analisadas (Figura 6.11). O MBLC1 não local também foi capaz de obter todas as trajetórias completas para as malhas ensaiadas (Figura 6.12).

Por fim, para o MBLC2, a trajetória só foi afetada a partir da malha de 64 elementos e quanto mais se refinou a malha, o problema na trajetória foi observado mais próximo do pico de tensão. Com o MBLC2 não local, foi possível regularizar as respostas, entretanto, o *softening* ficou mais acentuado nesse formato.

A seguir, serão exibidas as respostas locais e não locais dos modelos propostos em regime de compressão uniaxial através das Figuras 6.15 a 6.24.

MBM1 local - Compressão uniaxial

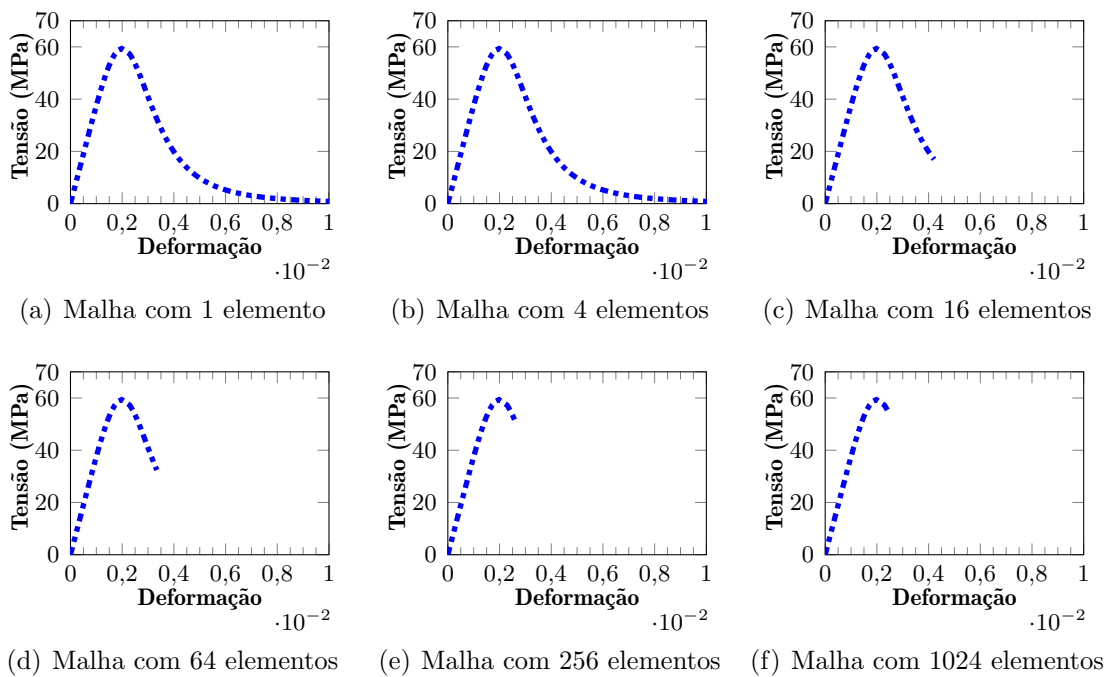


Figura 6.15: Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBM1 local

MBM1 não local - Compressão uniaxial

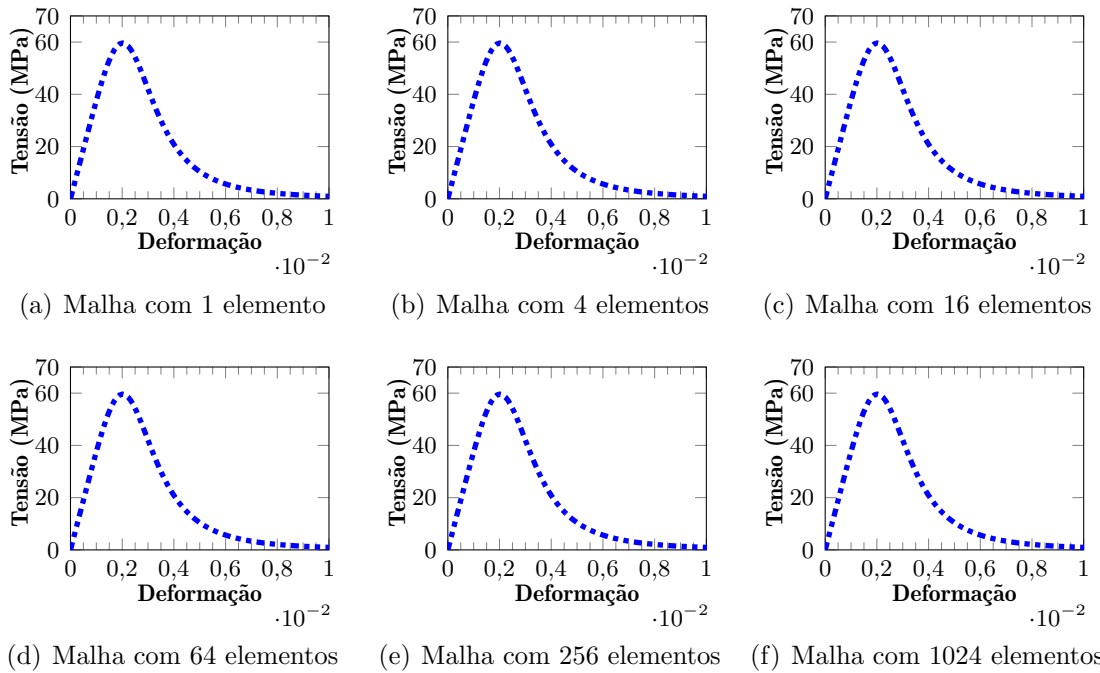


Figura 6.16: Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBM1 não local

MBM2 local - Compressão uniaxial

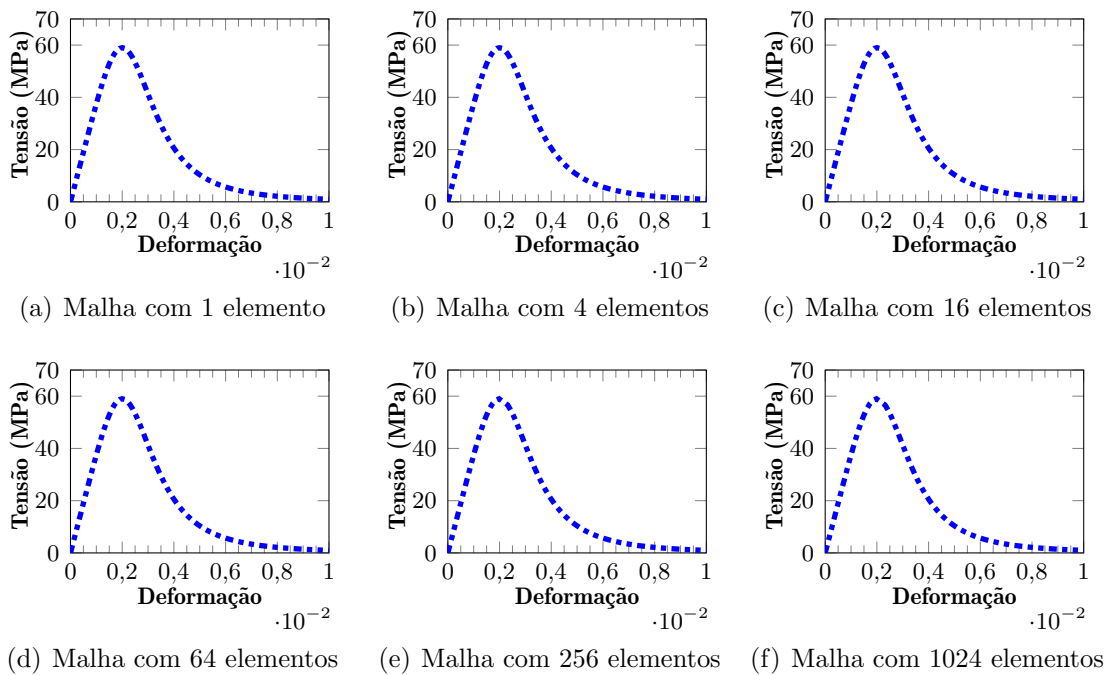


Figura 6.17: Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBM2 local

MBM2 não local - Compressão uniaxial

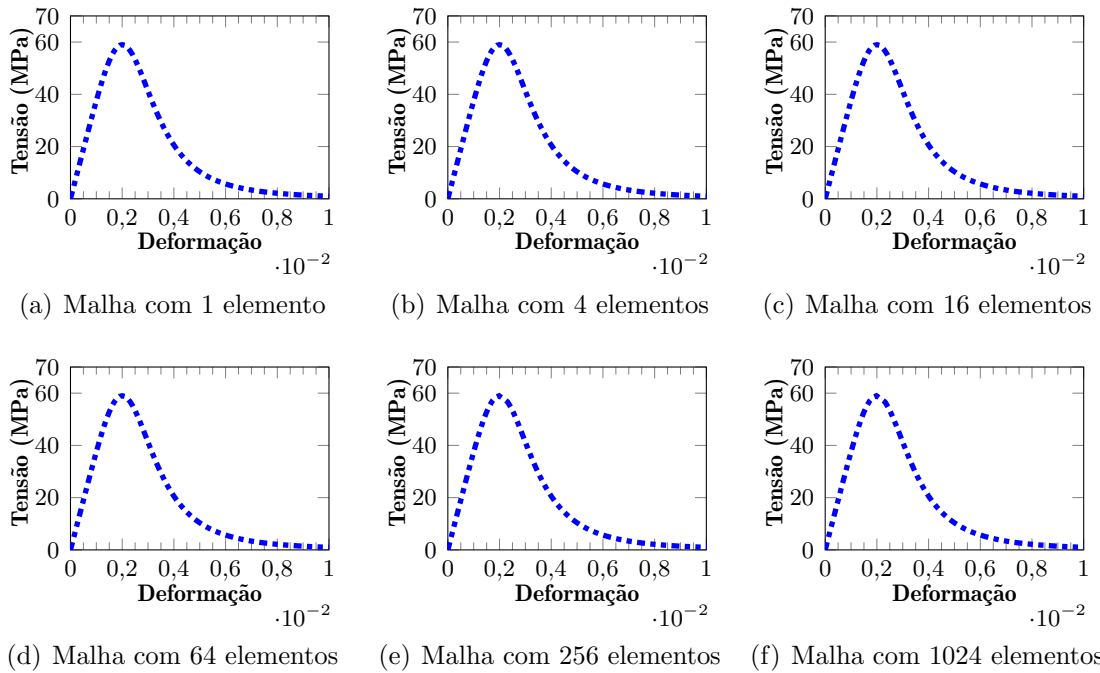


Figura 6.18: Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBM2 não local

MBV local - Compressão uniaxial

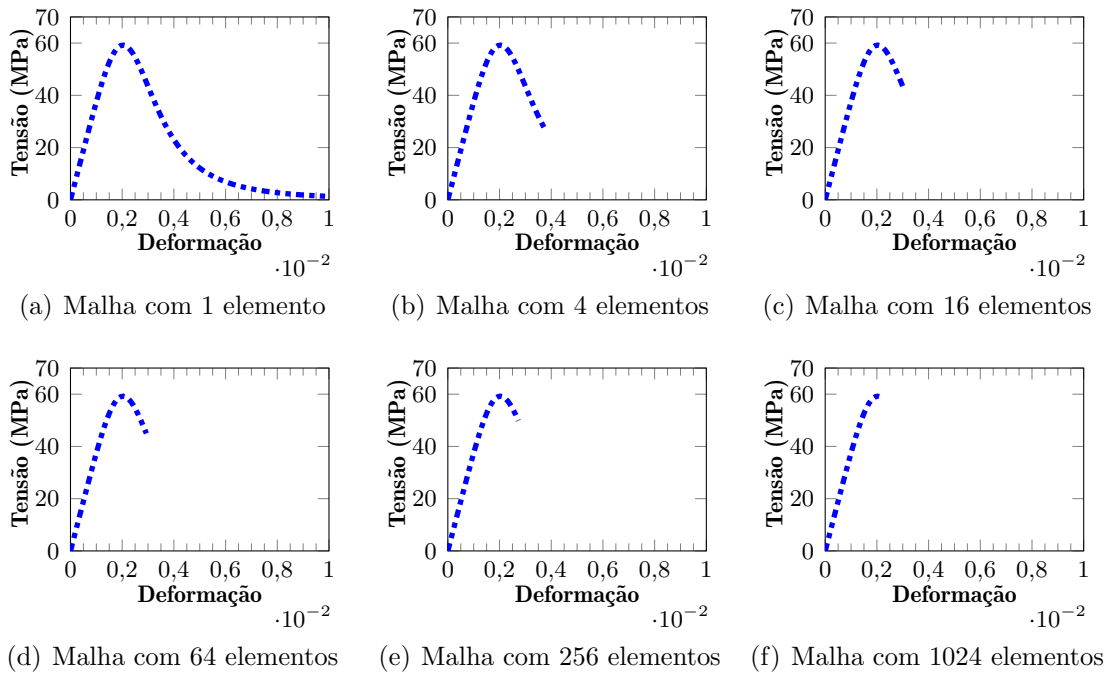


Figura 6.19: Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBV local

MBV local - Compressão uniaxial

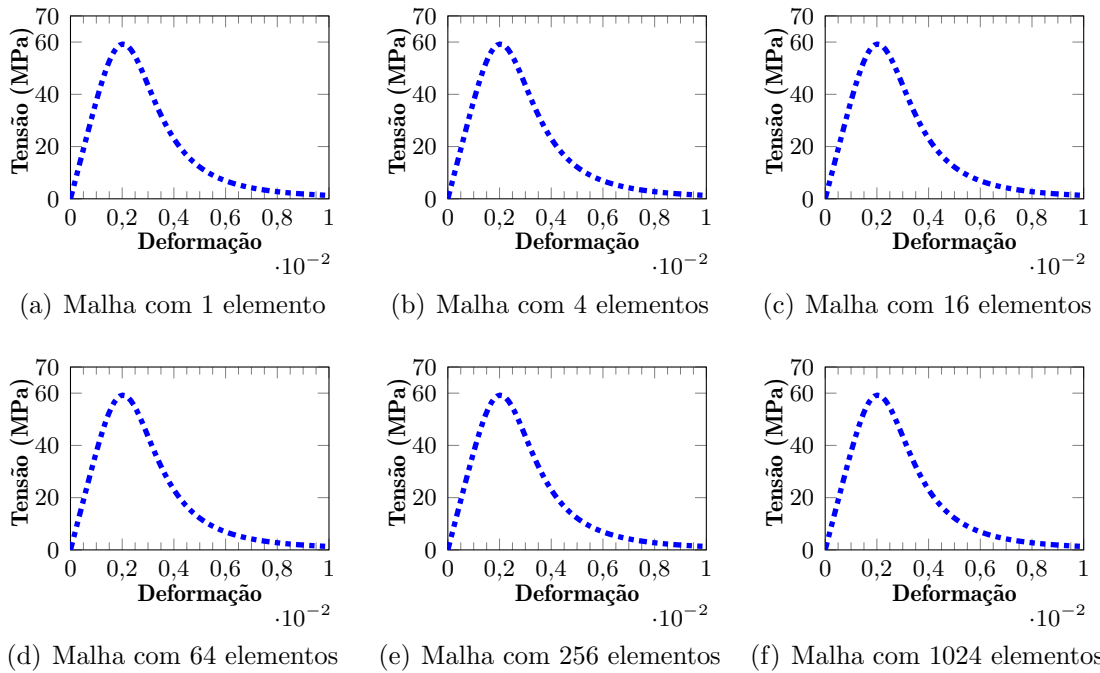


Figura 6.20: Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBV não local

MBLC1 local - Compressão uniaxial

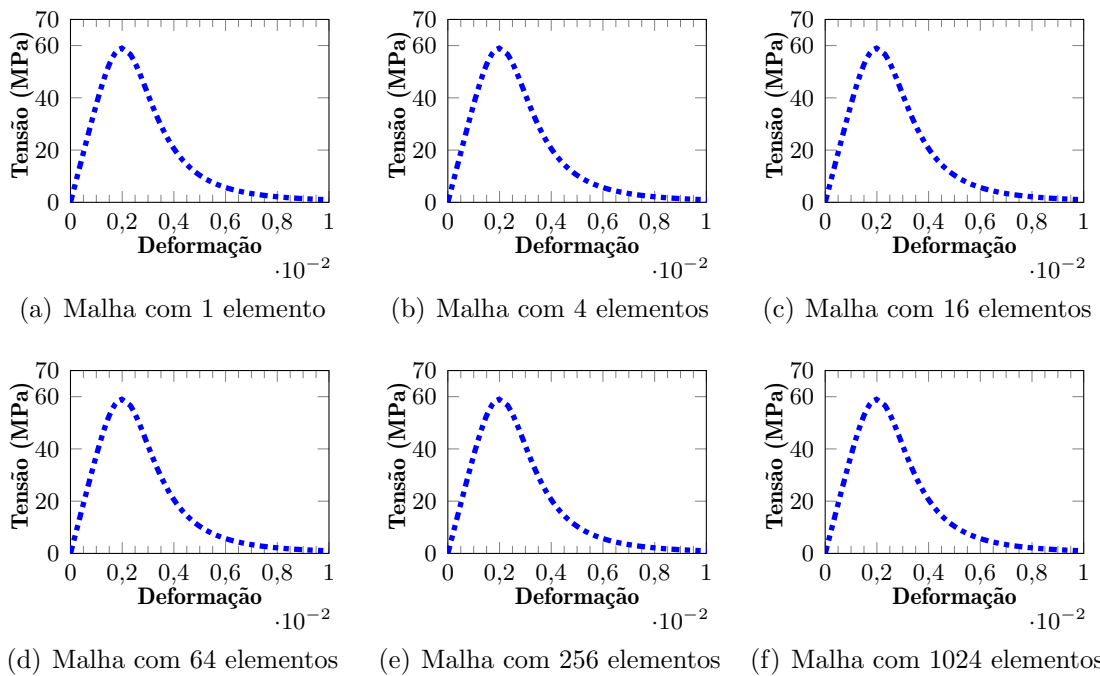


Figura 6.21: Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBLC1 local

MBLC1 não local - Compressão uniaxial

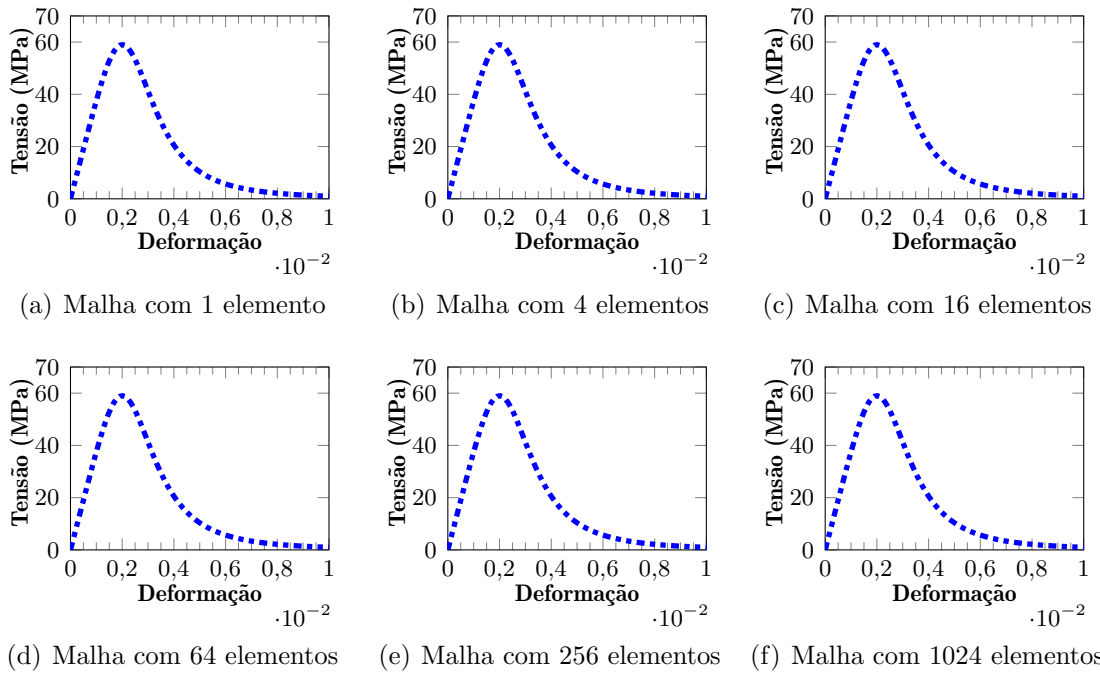


Figura 6.22: Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBLC1 não local

MBLC2 local - Compressão uniaxial

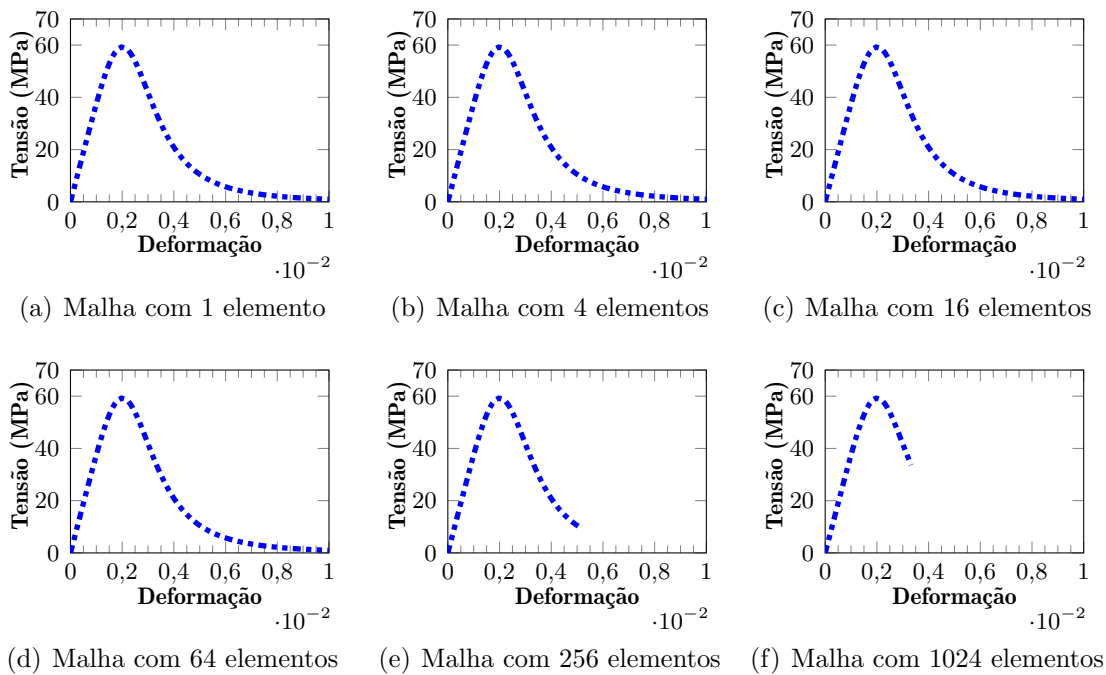


Figura 6.23: Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBLC2 local

MBLC2 não local - Compressão uniaxial

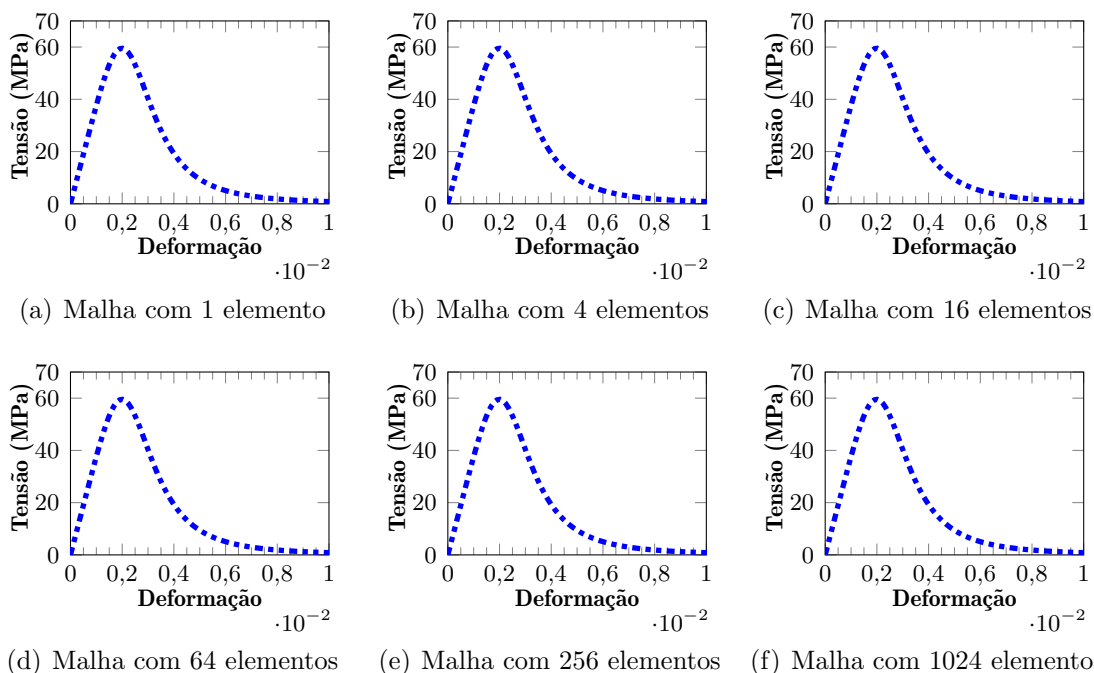


Figura 6.24: Ensaio de refinamento em regime de compressão uniaxial com MBLC2 não local

A resposta local do MBM1 foi afetada a partir da malha com 16 elementos e quanto mais se refinou, mais rápido o problema numérico ocorreu, conforme pode ser visto na Figura 6.15. Quando se utilizou o MBM1 não local, foi possível obter as trajetórias completas para todas as malhas em questão (Figura 6.16).

Na tração com a utilização da lei exponencial, mesmo utilizando o MBM1 não local, nem todas as trajetórias das malhas foram completamente obtidas, diferentemente do que ocorreu na compressão com a utilização da lei polinomial. Isso se explica pelo fato da lei polinomial ter uma variação de tensão mais branda ao ser comparada com a lei exponencial.

Assim como na tração, o MBM2 local também se mostrou menos suscetível a problemas numéricos na compressão, uma vez que todas as trajetórias foram completamente obtidas para todas as malhas (Figura 6.17). O MBM2 não local também foi capaz de reproduzir as trajetórias completas para todas as malhas analisadas (Figura 6.18).

As respostas do MBV local na compressão foram afetadas a partir da malha com 4 elementos e a medida em que se refinou as malhas, o problema ocorreu mais próximo do pico de tensão (Figura 6.19). As trajetórias foram regularizadas com o MBV não local conforme pode ser visto na Figura 6.20.

Os formatos do MBLC1 local e não local foram capazes de reproduzir as trajetórias completas da compressão uniaxial conforme exibido nas Figuras 6.21 e 6.22.

Por fim, as respostas do MBLC2 local foram afetadas a partir da malha de 256 elementos, sendo que a malha de 1024 elementos, o problema numérico ocorreu mais próximo do pico (Figura 6.23). Já o MBLC2 não local foi capaz de reproduzir as trajetórias completas de todas as malhas modeladas (Figura 6.24).

Modelos que possuem um maior número de operações matemáticas e cálculos mais complexos têm a probabilidade maior de serem acometidos por problemas numéricos. Ao se comparar o MBM1 e o MBM2, observa-se que o MBM1 possui um número maior de operações devido ao cálculo de ponderação e acoplamento dos dados de tração e compressão nos estados predominantes de tração e compressão, por esse motivo, o MBM1 se mostrou mais suscetível a problemas numéricos a medida em que se refinou a malha.

As respostas do MBV também foram acometidas por problemas numéricos em malhas refinadas, isso se explica pelo fato da deformação equivalente do MBV ser mais complexa do que dos demais modelos. As deformações equivalentes do MBLC2 são funções, respectivamente, dos tensores de deformações positivas e negativas e por isso, em comparação com MBLC1, possui cálculos adicionais de transformação de tensores. Por esse motivo, o MBLC2 se mostrou mais suscetível a problemas numéricos com relação ao MBLC1.

Apesar dos modelo não locais não solucionarem totalmente os problemas numéricos devido a localização de deformações, eles foram eficientes em atenuá-los. Isso foi constatado pela comparação das respostas do modelos locais e não locais utilizando malhas bastante refinadas.

6.1.3 Ensaio de parametrização do material com relação a leis empíricas

A eficiência dos modelos em representar o comportamento real dos materiais bimodulares foi verificada no ensaio de parametrização do material. Esse ensaio consiste em parametrizar os modelos clássicos e os modelos formulados, considerando como referência leis de tração e compressão estabelecidas, respectivamente, por relações constitutivas de Boone e Ingraffea (1987) e Carreira e Chu (1985), no qual os dados de entrada são parâmetros reais do material. A lei de Boone e Ingraffea (1987) é dada por

$$\sigma = f_t e^{-x(\varepsilon - \kappa_0^+)}, \quad (6.1)$$

onde κ_0^+ representa a deformação relativa ao limite elástico de tração e

$$x = \frac{h f_t}{G_f}, \quad (6.2)$$

onde h é o comprimento característico e G_f é a energia de fratura.

A lei de Carreira e Chu (1985) é dada por

$$\sigma = f_c \frac{\gamma \left(\frac{\varepsilon}{\kappa_0^-} \right)}{\gamma - 1 + \left(\frac{\varepsilon}{\kappa_0^-} \right)^\gamma}, \quad (6.3)$$

onde κ_0^- representa a deformação relativa ao limite elástico de compressão e

$$\gamma = \frac{1}{1 - \left(\frac{f_c}{\kappa_0^- E_0} \right)}. \quad (6.4)$$

O material adotado na simulação é um concreto utilizado por Petersson (1981), em um estudo experimental em vigas submetidas à flexão em três pontos. Esse concreto possui resistência à tração (f_t) entre os valores de 2,5 MPa e 3,9 MPa, energia de fratura (G_f) entre 0,115 N/mm a 0,137 N/mm e foi assumido, pelo autor, o módulo de elasticidade de 30000 MPa.

A resistência à compressão e o coeficiente de Poisson não foram informados pelo autor, entretanto, para a simulação, relações normativas foram utilizadas para determinação desses parâmetros de acordo com ABNT NBR 6118 (2014). Portanto, a resistência à compressão (f_c) adotada foi de 31,6 MPa e o coeficiente de Poisson (ν) igual a 0,2.

Nos experimentos de Petersson (1981), para determinação da resistência do concreto, foi adotada uma região de 40 mm para aferir as deformações. Assim, o comprimento característico do material (h) foi assumido como 40 mm, por ser um tamanho representativo do comportamento observado nos ensaios.

Em resumo, os parâmetros das leis de Boone e Ingraffea (1987) e Carreira e Chu (1985), utilizadas como referência para parametrização dos modelos formulados e dos modelos de Mazars (1984), de Vree et al. (1995) e Lemaitre e Chaboche (1990), são vistos na Tabela 6.3.

Tabela 6.3: Propriedades do material

Leis de tensão-deformação	
Tração	Compressão
Boone e Ingraffea (1987)	Carreira e Chu (1985)
$f_t = 3,0$ MPa	$f_c = 31,6$ MPa
$\kappa_0^+ = 0,0001$	$\kappa_0^- = 0,002$
$G_f = 0,124$ N/mm	
$h = 40$ mm	

Os parâmetros obtidos para os modelos clássicos que mais se aproximaram das leis de Boone e Ingraffea (1987) para a tração e Carreira e Chu (1985) para a compressão são exibidos na Tabela 6.4.

Tabela 6.4: Parâmetros das leis de dano dos modelos clássicos

Mazars (1984)	de Vree et al. (1995) ($k = 10$)	Lemaitre e Chaboche (1990)
Lei de Mazars (1984)	Lei Exponencial	Lei Exponencial
$A_t = 0,995$	$A = 0,999$	$A = 0,999$
$A_c = 0,655$	$B = 780$	$B = 1000$
$B_t = 5000$	$\kappa_0 = 1,28 \times 10^{-4}$	$\kappa_0 = 1,00 \times 10^{-4}$
$B_c = 1460$		
$\kappa_0 = 6,90 \times 10^{-5}$		

Os parâmetros obtidos para os modelos formulados, considerando a lei exponencial para tração e a lei polinomial para a compressão, são vistos na Tabela 6.5.

Tabela 6.5: Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados

MBM1	MBM2	MBV ($k_b = 1,45$)	MBLC1	MBLC2
Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 1000$ $\kappa_0^+ = 1,00 \times 10^{-4}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 1000$ $\kappa_0^+ = 1,00 \times 10^{-4}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 1000$ $\kappa_0^+ = 1,00 \times 10^{-4}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 1000$ $\kappa_0^+ = 1,00 \times 10^{-4}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 1000$ $\kappa_0^+ = 1,02 \times 10^{-4}$
Compressão (Polinomial) $T = 2,48$ $\tilde{E} = 11720$ $\kappa_0^- = 4,00 \times 10^{-4}$	Compressão (Polinomial) $T = 31,6$ $\tilde{E} = 30000$ $\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 18,7$ $\tilde{E} = 30000$ $\kappa_0^- = 1,20 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 31,6$ $\tilde{E} = 30000$ $\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 32,4$ $\tilde{E} = 30000$ $\kappa_0^- = 2,05 \times 10^{-3}$

O processo de parametrização adotado neste trabalho consiste em variar os parâmetros dos modelos de tal forma que as curvas de tração e compressão uniaxiais se aproximem ao máximo das trajetórias obtidas pelas leis de tração e compressão do concreto, representadas, respectivamente, pelas leis de Boone e Ingraffea (1987) e Carreira e Chu (1985). A Figura 6.25 exibe a parametrização do modelo de Mazars (1984).

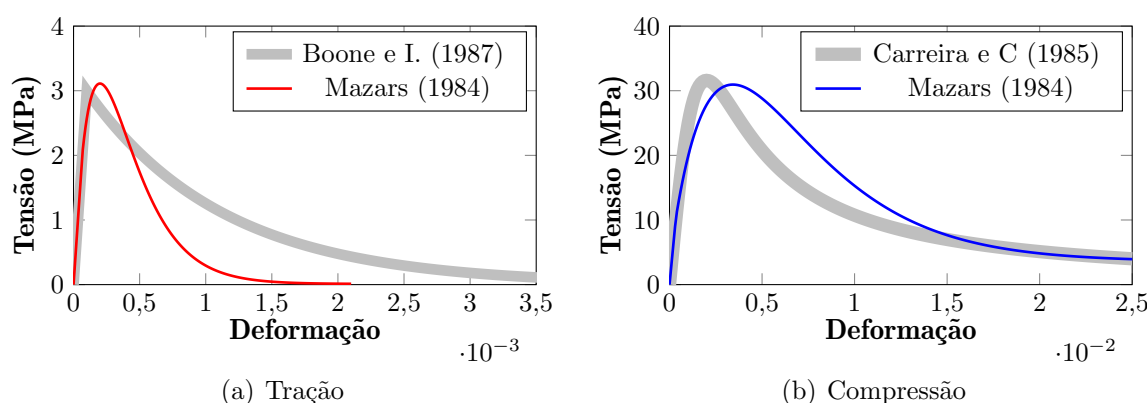


Figura 6.25: Parametrização do modelo clássico de Mazars (1984)

O modelo de Mazars (1984) possui um único formato de lei de dano e um único parâmetro κ_0 associados ao comportamento do material na tração e na compressão, devido a isso, obter parâmetros desse modelo que se ajustam simultaneamente com as respostas do material tanto na tração como na compressão, torna-se uma tarefa

árdua. Como observado na Figura 6.25, apesar do modelo de Mazars (1984) ser capaz de prever a resistência à tração e à compressão do material, as curvas ficam divergentes das leis do material. A seguir serão exibidas, através das Figuras 6.26 e 6.27, as curvas parametrizadas dos modelos cujas medidas de deformação são baseadas em Mazars (1984).

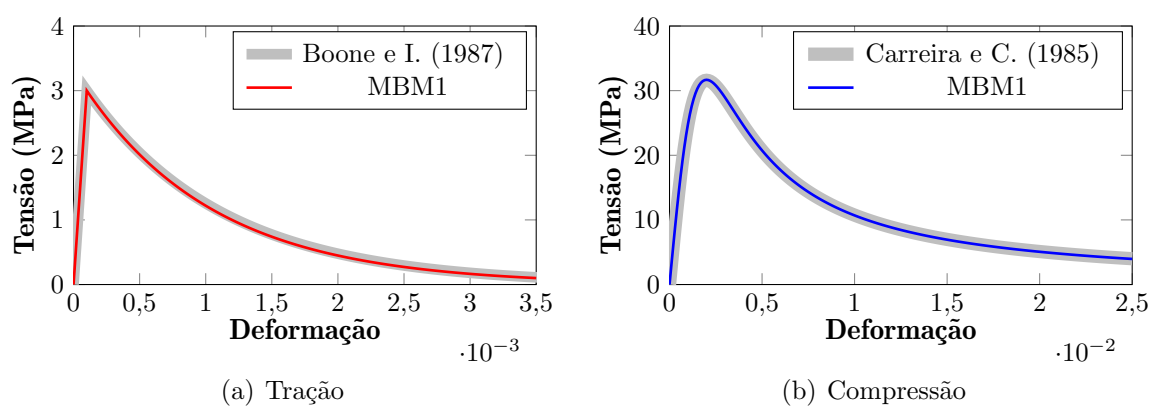


Figura 6.26: Parametrização do MBM1

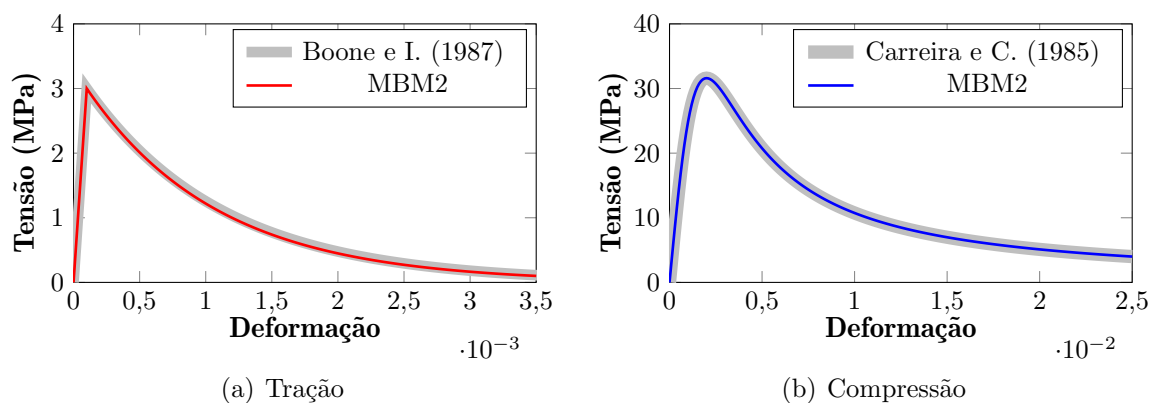


Figura 6.27: Parametrização do MBM2

Os modelos MBM1 e MBM2 possuem distinção de leis e parâmetros para os estados predominantes de tração e compressão, portanto, a parametrização desses modelos se torna mais fácil. Além disso, a possibilidade em se atribuir qualquer tipo de função de dano tanto para tração como para compressão implica em um melhor ajuste das curvas com as leis materiais (Figuras 6.26 e 6.27). A seguir são exibidas as curvas parametrizadas dos modelos de Vree et al. (1995) e MBV através

das Figuras 6.28 e 6.29.

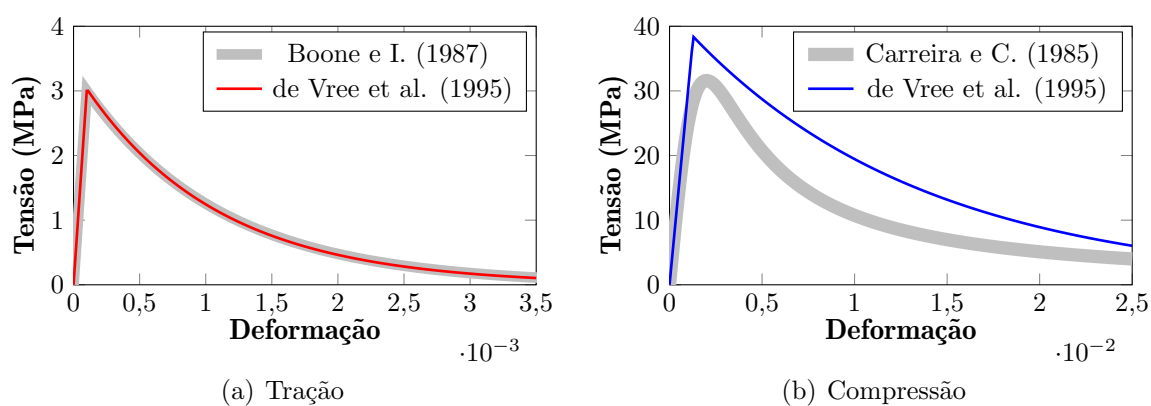


Figura 6.28: Parametrização do modelo clássico de de Vree et al. (1995)

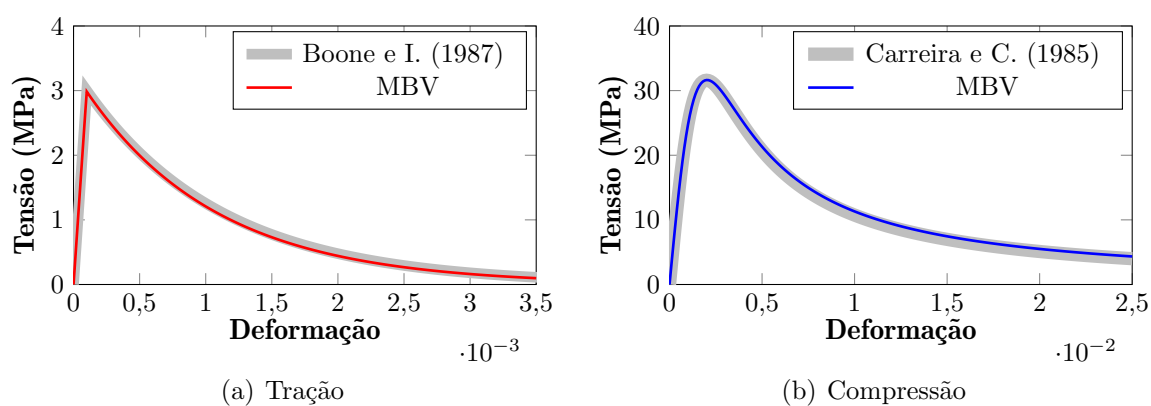


Figura 6.29: Parametrização do MBV

O modelo de de Vree et al. (1995) pode ser associado a qualquer tipo de função de dano, entretanto, a mesma função atribuída para a tração, também é atribuída para a compressão, inclusive com os mesmos parâmetros. Como pode ser observado na Figura 6.28, em termos de resistência, o modelo de de Vree et al. (1995) consegue distinguir o comportamento do material na tração e na compressão devido a sua deformação equivalente, porém, o modelo só consegue se ajustar bem em um dos regimes de tração ou compressão, já que a curva de tensão-deformação tem o mesmo formato para ambos regimes.

O MBV é capaz de distinguir tanto a resistência à tração e à compressão e as trajetórias de tensão-deformação exibem formatos diferentes em ambos regimes, o

que promove ao modelo um melhor ajuste às curvas experimentais (Figura 6.28). Esse comportamento é justificado pela liberdade em se atribuir qualquer tipo de função de dano com parâmetros específicos tanto para tração como para compressão nesse modelo. Por fim, apresentam-se as curvas parametrizadas dos modelos de Lemaitre e Chaboche (1990), MBLC1 e MBLC2 através das Figuras 6.30, 6.31 e 6.32.

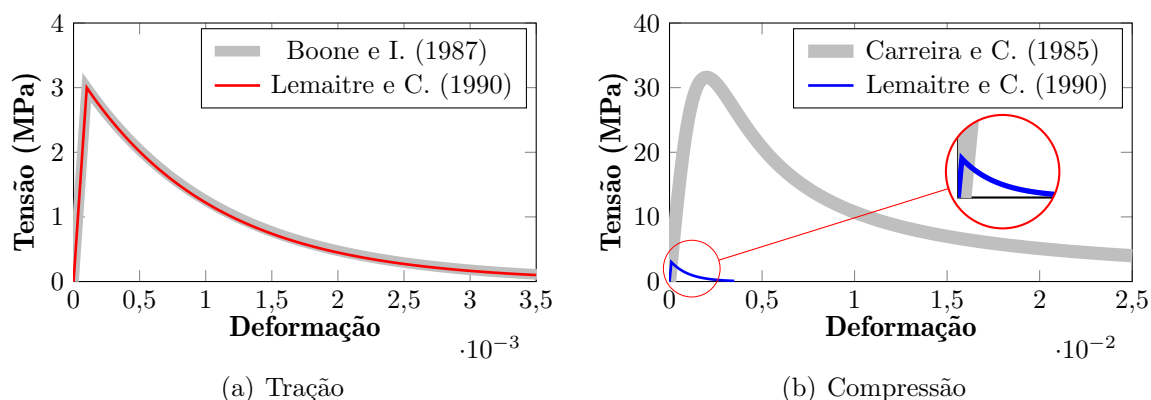


Figura 6.30: Parametrização do modelo clássico de Lemaitre e Chaboche (1990)

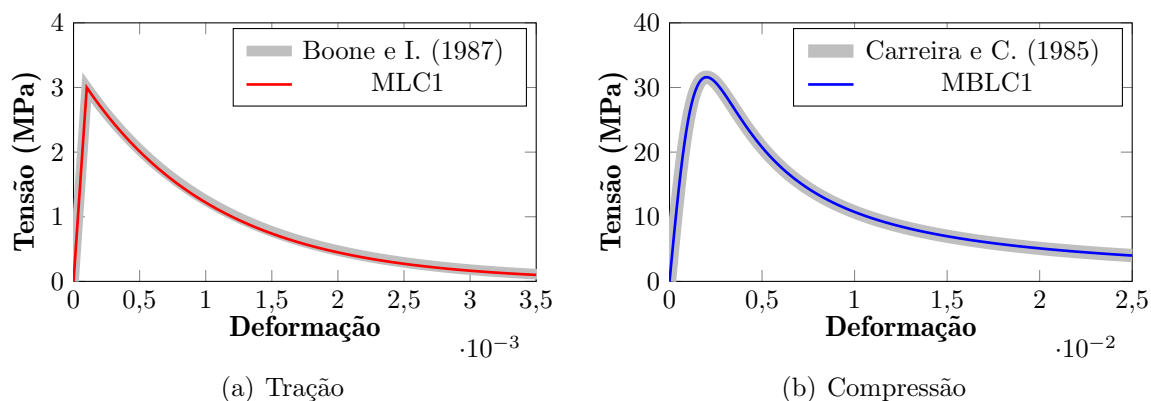


Figura 6.31: Parametrização do MBLC1

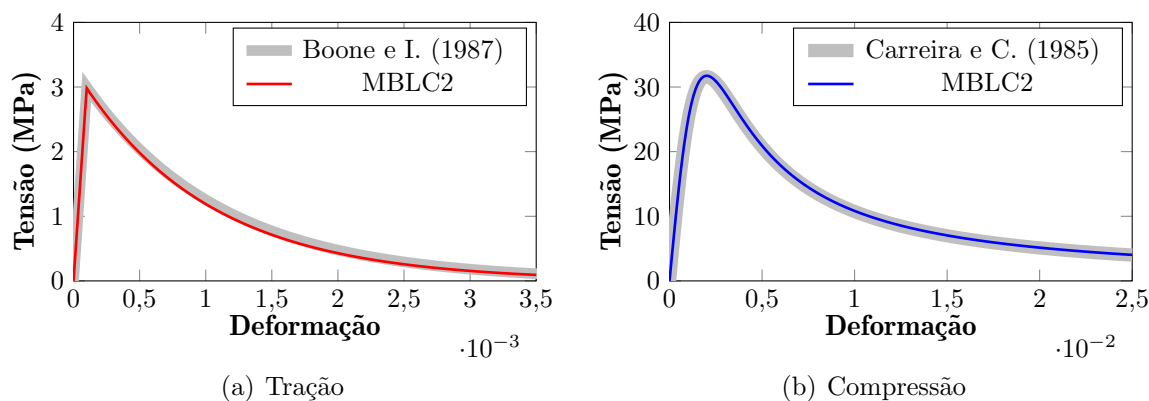


Figura 6.32: Parametrização do MBLC2

O modelo de Lemaitre e Chaboche (1990) não é um modelo bimodular, uma vez que, em termos de resistência e formato da curva de tensão-deformação, o mesmo comportamento apresentado na tração é exibido na compressão, conforme pode ser visto pela Figura 6.30. Já os modelos MBLC1 e MBLC2 tiveram bons ajustes com a curva do material (Figuras 6.31 e 6.32), já que nesses modelos, leis de dano e parâmetros específicos são atribuídos tanto para tração como para compressão.

Nesse ensaio, os modelos foram parametrizados com base em leis empíricas do material. Os modelos clássicos estudados tiveram limitações em se ajustarem às curvas de tração e compressão do material. Essas limitações foram superadas pelos modelos propostos, que conseguiram bons ajustes com as curvas de referência. Na próxima Seção, esse mesmo ensaio será realizado, porém os resultados de um ensaio experimental de tração e compressão uniaxiais serão utilizados como referência para a parametrização dos modelos.

6.1.4 Ensaio de parametrização do material com relação a resultados experimentais

Os materiais bimodulares possuem comportamentos distintos na tração e na compressão. O concreto, por exemplo, tem resistência à compressão superior a sua resistência à tração, além disso, possui uma resposta mais dútil em estados de compressão.

Mazars e Pijaudier-Cabot (1989) apresentam os resultados experimentais de um ensaio de tração e de compressão uniaxiais de um concreto. Esse concreto possui resistência à compressão (f_c) de 33,4 MPa e resistência à tração (f_t) 2,8 MPa. Para esse ensaio, o módulo de elasticidade (E_0) que teve o melhor ajuste com a curva experimental foi de 50000 MPa e foi assumido o coeficiente de Poisson (ν) de 0,2.

O objetivo desse ensaio é parametrizar os modelos clássicos e os modelos propostos de acordo com os ensaios experimentais de tração e compressão e verificar a capacidade dos modelos em representar o comportamento bimodular do concreto analisado.

Para o modelo de de Vree et al. (1995) e Lemaitre e Chaboche (1990), a lei de dano definida pela Equação (3.66) foi utilizada. Para os modelos propostos, a lei de dano da Equação (3.66) foi utilizada para tração e a lei de dano da Equação (3.68) foi utilizada para a compressão. Os parâmetros das leis dos modelos clássicos e dos modelos propostos que obtiveram uma melhor aproximação com os resultados experimentais podem ser vistos na Tabela 6.6 e 6.7.

Tabela 6.6: Parâmetros das leis de dano dos modelos clássicos

Mazars (1984)	de Vree et al. (1995) ($k = 10$)	Lemaitre e Chaboche (1990)
Lei de Mazars (1984)	Lei Exponencial	Lei Exponencial
$A_t = 0,850$	$A = 0,850$	$A = 0,850$
$A_c = 0,300$	$B = 25000$	$B = 25000$
$B_t = 36000$	$\kappa_0 = 7,30 \times 10^{-5}$	$\kappa_0 = 5,88 \times 10^{-5}$
$B_c = 1300$		
$\kappa_0 = 5,70 \times 10^{-5}$		

Tabela 6.7: Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados

MBM1	MBM2	MBV ($k_b = 1,45$)	MBLC1	MBLC2
Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)
$A = 0,850$	$A = 0,850$	$A = 0,850$	$A = 0,850$	$A = 0,850$
$B = 25000$	$B = 25000$	$B = 25000$	$B = 25000$	$B = 25000$
$\kappa_0^+ = 5,80 \times 10^{-5}$	$\kappa_0^+ = 5,80 \times 10^{-5}$	$\kappa_0^+ = 5,80 \times 10^{-5}$	$\kappa_0^+ = 5,80 \times 10^{-5}$	$\kappa_0^+ = 5,88 \times 10^{-5}$
Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)
$T = 2,24$	$T = 33,0$	$T = 19,8$	$T = 33,0$	$T = 33,8$
$\tilde{E} = 16920$	$\tilde{E} = 50000$	$\tilde{E} = 50000$	$\tilde{E} = 50000$	$\tilde{E} = 50000$
$\kappa_0^- = 4,00 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 1,20 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 2,05 \times 10^{-3}$

As curvas de tensão-deformação parametrizadas de acordo com os ensaios experimentais de tração e compressão uniaxiais são exibidas a seguir pelas Figuras 6.33 a 6.40.

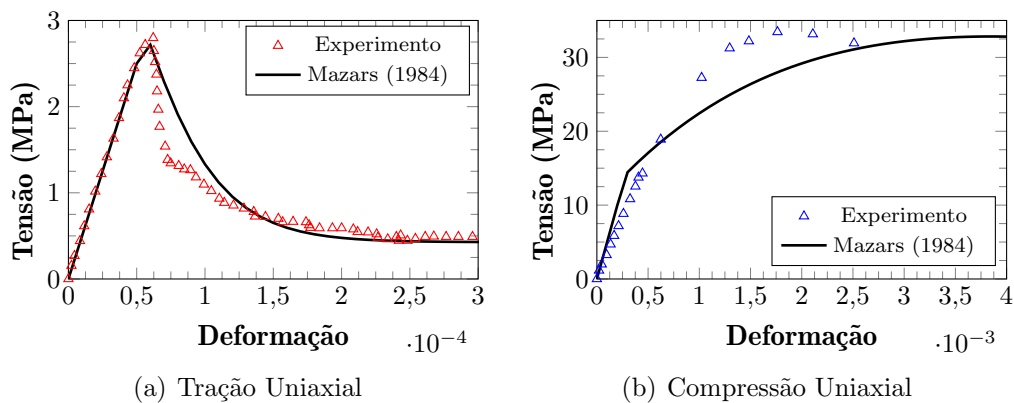


Figura 6.33: Parametrização do modelo clássico de Mazars (1984) com relação a resultados experimentais

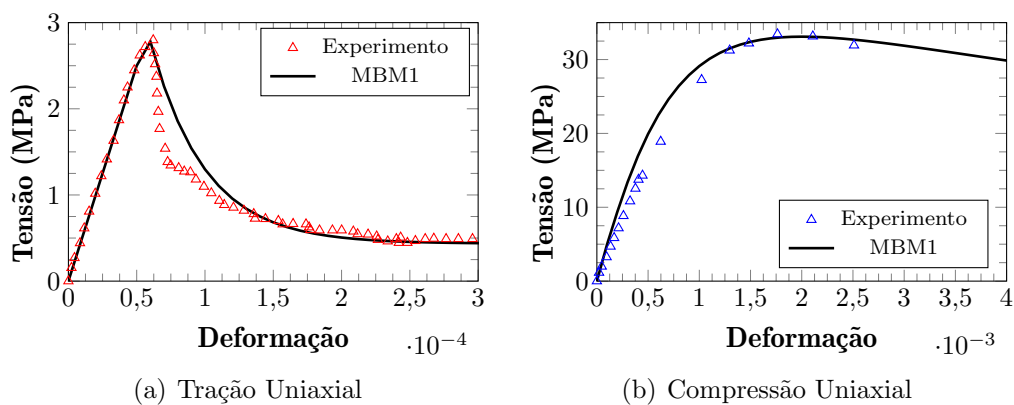


Figura 6.34: Parametrização do MBM1 com relação a resultados experimentais

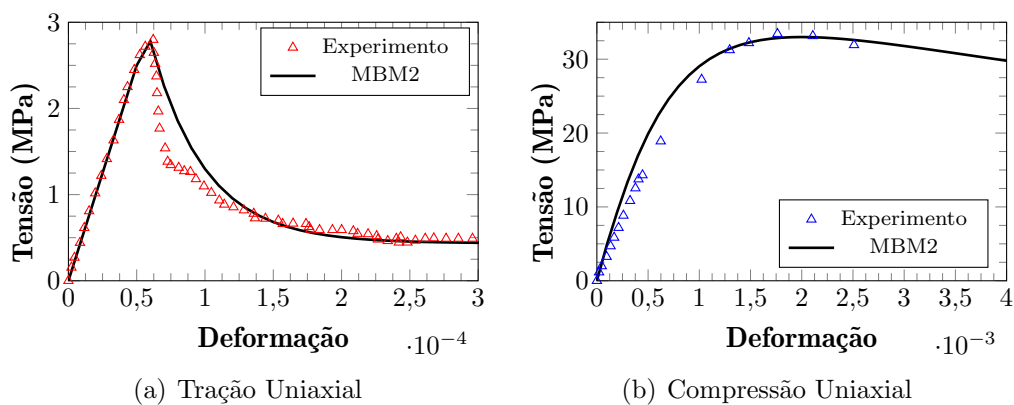


Figura 6.35: Parametrização do MBM2 com relação a resultados experimentais

De acordo com a Figura 6.33, o modelo de Mazars (1984) conseguiu ter um bom ajuste com a tração uniaxial e, na compressão, a curva do modelo se aproximou de forma razoável com o resultado experimental. Já o MBM1 e MBM2 tiveram aproximações satisfatórias em ambos os regimes (Figuras 6.34 e 6.35), já que diferentemente do modelo de Mazars (1984), esses modelos podem ser parametrizados na tração e na compressão de forma independente. As trajetórias para os modelos de de Vree et al. (1995) e MBV são exibidos a seguir pelas Figuras 6.36 e 6.37.

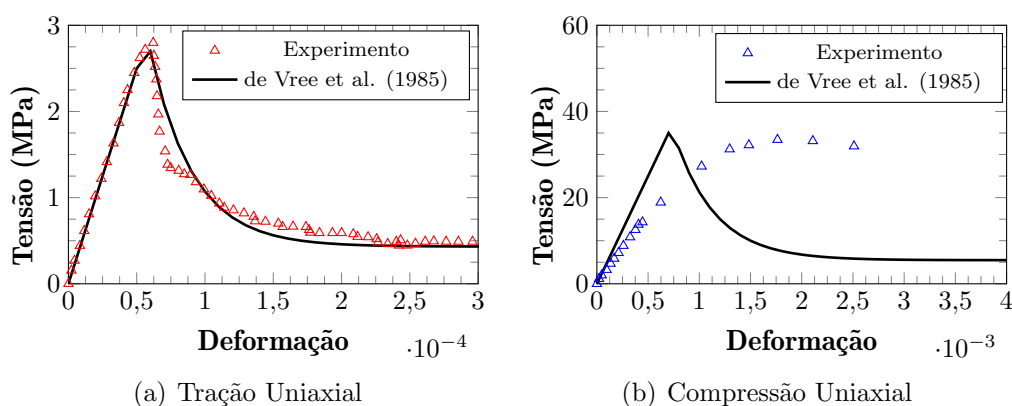


Figura 6.36: Parametrização do modelo clássico de de Vree et al. (1995) com relação a resultados experimentais

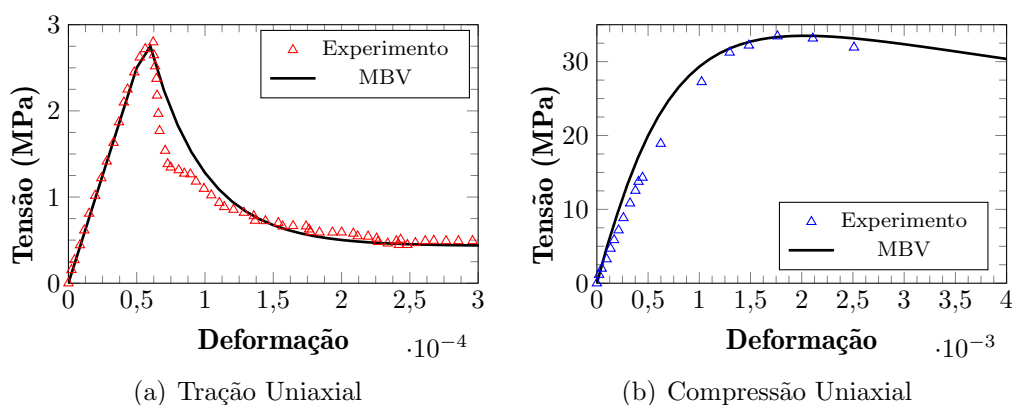


Figura 6.37: Parametrização do MBV com relação a resultados experimentais

O modelo de de Vree et al. (1995) se ajustou bem à curva experimental de tração já que a função de dano utilizada foi a forma exponencial. Entretanto apenas um único tipo de função de dano é utilizado para representar a tração e a compressão, porém o formato exponencial não se ajusta bem à curva de compressão conforme

pode ser visto na Figura 6.36. Esse modelo é capaz de diferenciar a resistência do material na tração e na compressão, entretanto não é capaz de diferenciar o formato da curva de tensão-deformação.

Assim como os demais modelos propostos, com o MBV, vários formatos para funções de dano podem ser atribuídos tanto para tração como para compressão e a parametrização pode ser feita de forma independente para cada regime, ou seja, os parâmetros da tração não influenciam no comportamento da compressão e vice-versa. Por esse motivo, o MBV se aproximou das curvas experimentais de tração e compressão (Figura 6.37). A seguir são apresentadas as curvas dos modelos de Lemaitre e Chaboche (1990), MBLC1 e MBLC2 através das Figuras 6.38, 6.39 e 6.40.

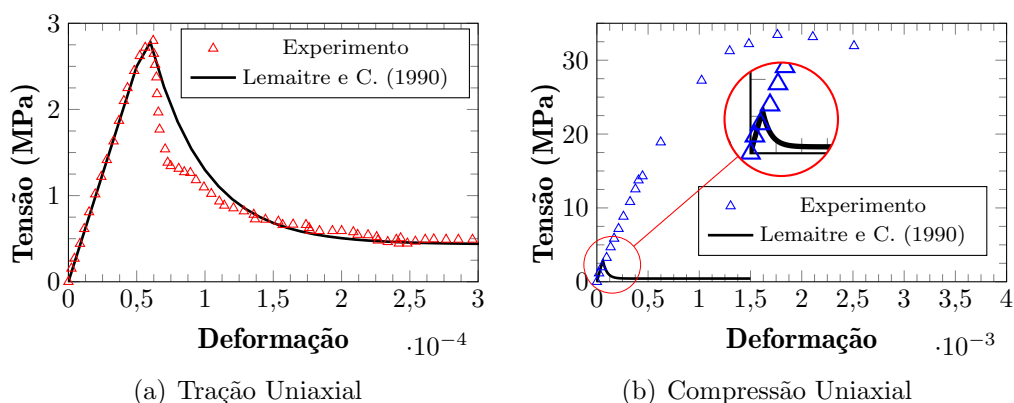


Figura 6.38: Parametrização do modelo clássico de Lemaitre e Chaboche (1990) com relação a resultados experimentais

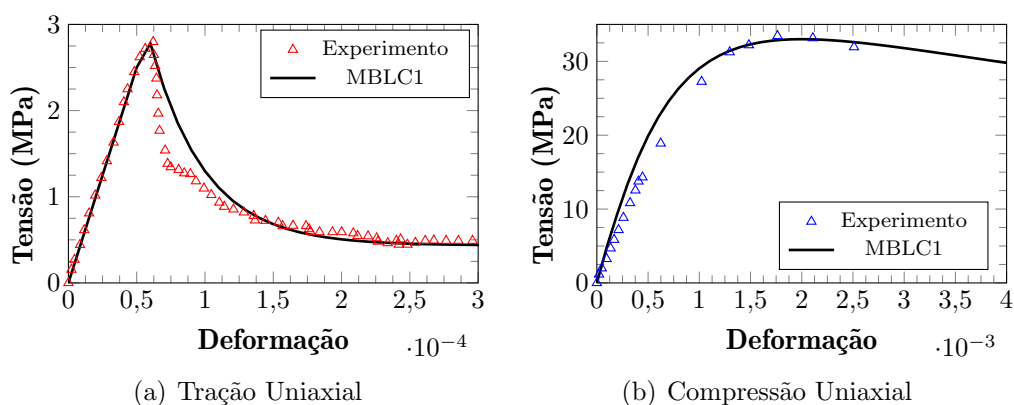


Figura 6.39: Parametrização do MBLC1 com relação a resultados experimentais

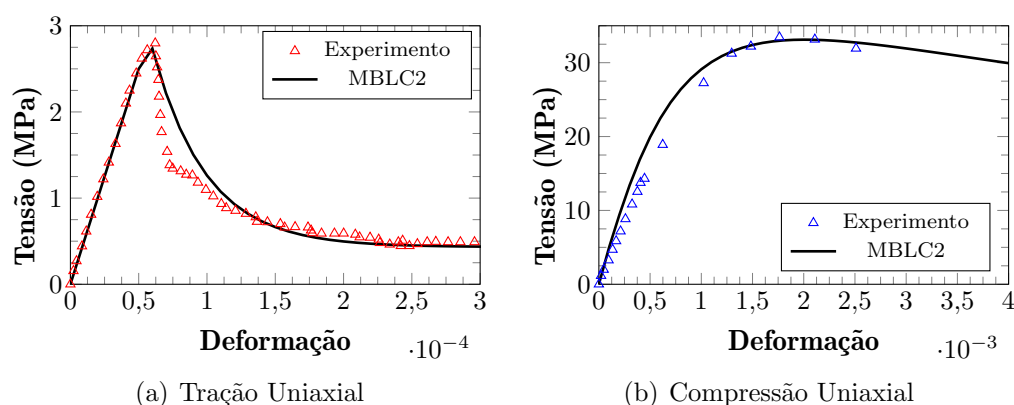


Figura 6.40: Parametrização do MBLC2 com relação a resultados experimentais

Como observado na Figura 6.38, o modelo de Lemaitre e Chaboche (1990) se ajustou bem com o resultado experimental da tração com a utilização do *softening* exponencial. O mesmo comportamento da tração é reproduzido na compressão, entretanto não é adequado para a representação do comportamento do concreto, já que além do formato da curva de compressão dos materiais bimodulares serem diferente da curva de tração, as resistências também são divergentes. Isso não ocorre com o MBLC1 e MBLC2, uma vez que a parametrização pode ser feita com a utilização de um *softening* exponencial para tração e um *softening* polinomial para compressão, além de se ter parâmetros específicos para cada regime, o que promove uma melhor adequação das curvas com os resultados experimentais (Figura 6.39 e 6.40).

Apesar das dificuldades na parametrização, o modelo de Mazars (1984) conseguiu representar razoavelmente o comportamento do concreto, observado em ensaio experimental. Em específico, a resposta do modelo na tração teve uma convergência suficiente com o resultado experimental e a curva da compressão teve uma pequena divergência.

Como observado na Seção anterior, o modelo de de Vree et al. (1995) é capaz apenas de distinguir o comportamento do material em termos de resistência, porém exibe formatos iguais de curva tensão-deformação para tração e compressão. O modelo Lemaitre e Chaboche (1990) só é capaz de representar bem um dos estados,

uma vez que esse modelo não distingue o comportamento do material na tração e na compressão. Já os modelos propostos conseguem representar o concreto tanto na tração como na compressão de maneira satisfatória.

6.2 Ensaios Multiaxiais

Em algumas estruturas de engenharia, situações em que o concreto é submetido a tensões multiaxiais podem ser encontradas, como por exemplo, vigas paredes e pilares paredes. Portanto, representar o comportamento do material em situações de carregamento multiaxial pode ser uma característica relevante para o modelo.

Nesse ensaio, as superfícies biaxiais no espaço das tensões principais dos modelos serão comparadas com a superfície obtida experimentalmente por Kupfer et al. (1969). O concreto ensaiado pelo autor tem resistência à compressão (f_c) de 32,3 MPa e a resistência à tração de 3,0 MPa. O módulo de elasticidade (E_0) do concreto é de 31000 MPa e o coeficiente de Poisson (ν) de 0,2.

A malha utilizada é formada por elementos planos quadrilaterais de quatro nós. Os dados geométricos da chapa de concreto ensaiada e a malha utilizada para o ensaio numérico estão detalhados na Figura 6.41.

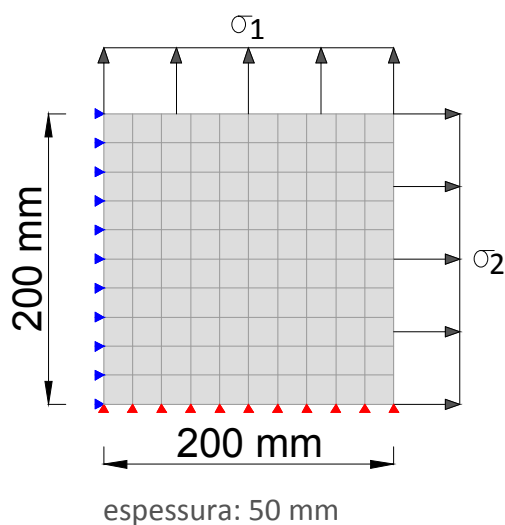


Figura 6.41: Dados geométricos e malha para ensaio biaxial de Kupfer et al. (1969)

Para o modelo numérico, foram ensaiadas três tipos de situações de carregamento com determinadas tensões aplicadas nas faces da chapa. Para o estado predominante de compressão, foram utilizadas as proporções de carregamento σ_1/σ_2 de $-1/0$, $-1/-1$, $-1/-0,52$ e $-1/-0,22$. Para o estado combinado de tração e compressão, as taxas de carregamento utilizadas foram de $-1/0$, $-1/0,052$, $-1/0,103$, $-1/0,204$ e $-1/0,500$. Para o estado predominante de tração, utilizaram-se as proporções de $1/0$, $1/1$ e $1/0,55$.

Os parâmetros dos modelos de Mazars (1984), de Vree et al. (1995) e Lemaitre e Chaboche (1990) utilizados para caracterizar o concreto em questão estão especificados na Tabela 6.8. Ressalta-se que para o modelo de Lemaitre e Chaboche (1990), apenas as características do concreto na tração que puderam ser representadas, já que esse modelo não possui distinção entre o comportamento da tração e da compressão. A lei de dano utilizada para os modelos de de Vree et al. (1995) e Lemaitre e Chaboche (1990) é definida pelo formato exponencial, expresso na Equação 3.66.

Tabela 6.8: Parâmetros das leis de dano dos modelos clássicos

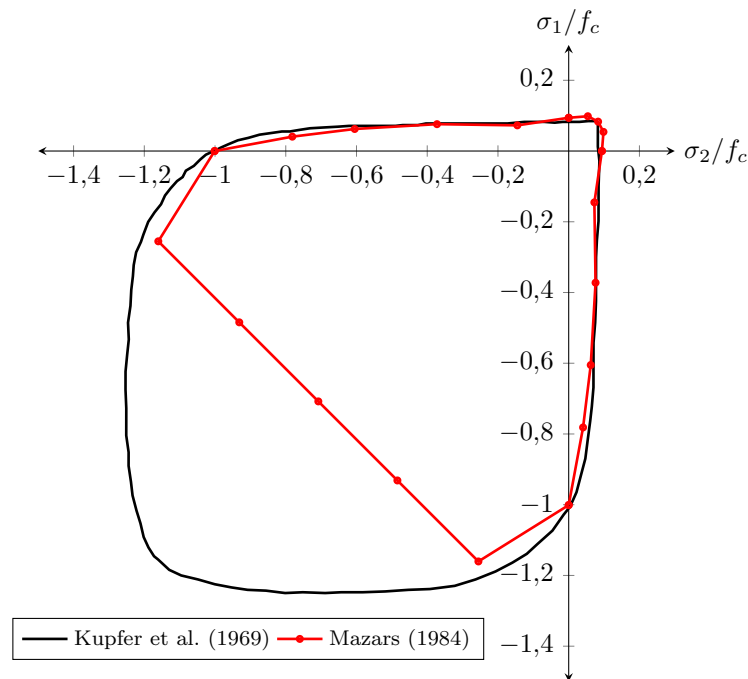
Mazars (1984)	de Vree et al. (1995) ($k = 10$)	Lemaitre e Chaboche (1990)
Lei de Mazars (1984)	Lei Exponencial	Lei Exponencial
$A_t = 1,000$	$A = 0,999$	$A = 0,999$
$A_c = 1,275$	$B = 870$	$B = 870$
$B_t = 10000$	$\kappa_0 = 9,70 \times 10^{-5}$	$\kappa_0 = 9,70 \times 10^{-5}$
$B_c = 1725$		
$\kappa_0 = 9,80 \times 10^{-5}$		

Para os modelos propostos, a lei exponencial (Equação 3.66) foi utilizada na tração e a lei polinomial (Equação 3.68) foi utilizada na compressão. Os parâmetros dos modelos propostos estão especificados na Tabela 6.9.

Tabela 6.9: Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados

MBM1	MBM2	MBV ($k_b = 1,45$)	MBLC1	MBLC2
Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 870$ $\kappa_0^+ = 9,70 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 870$ $\kappa_0^+ = 9,70 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 870$ $\kappa_0^+ = 9,70 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 870$ $\kappa_0^+ = 9,70 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,999$ $B = 870$ $\kappa_0^+ = 9,85 \times 10^{-5}$
Compressão (Polinomial) $T = 9,39$ $\tilde{E} = 31000$ $\kappa_0^- = 5,60 \times 10^{-4}$	Compressão (Polinomial) $T = 32,3$ $\tilde{E} = 31000$ $\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 22,27$ $\tilde{E} = 31000$ $\kappa_0^- = 1,38 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 32,3$ $\tilde{E} = 31000$ $\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 33,11$ $\tilde{E} = 31000$ $\kappa_0^- = 2,05 \times 10^{-3}$

A estratégia desse ensaio é obter os parâmetros de tal forma que os pontos do modelo referentes à tração uniaxial e à compressão uniaxial se aproximem ao máximo possível da superfície experimental. As superfícies biaxiais do modelo de Mazars (1984) é comparada com a superfície experimental de Kupfer et al. (1969) através da Figura 6.42.

**Figura 6.42:** Superfície de ruptura de Mazars (1984) comparada com ensaio experimental

Conforme pode ser visto na Figura 6.42, os estados predominante de tração e combinados de tração e compressão são bem retratados pelo modelo de Mazars (1984), porém, para o estado predominante de compressão, a divergência entre as

superfícies é considerável. A seguir, são exibidas as superfícies do MBM1 e MBM2 através das Figuras 6.43 e 6.44.

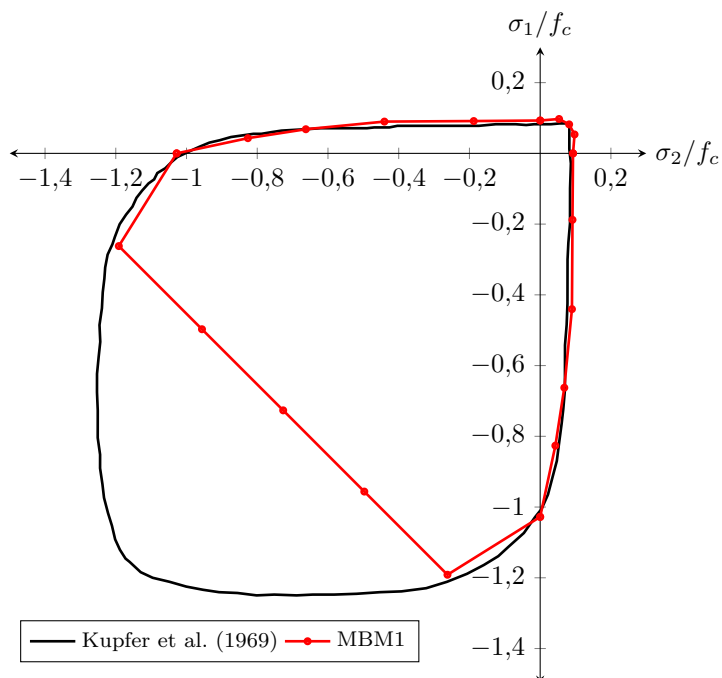


Figura 6.43: Superfície de ruptura do MBM1 comparada com ensaio experimental

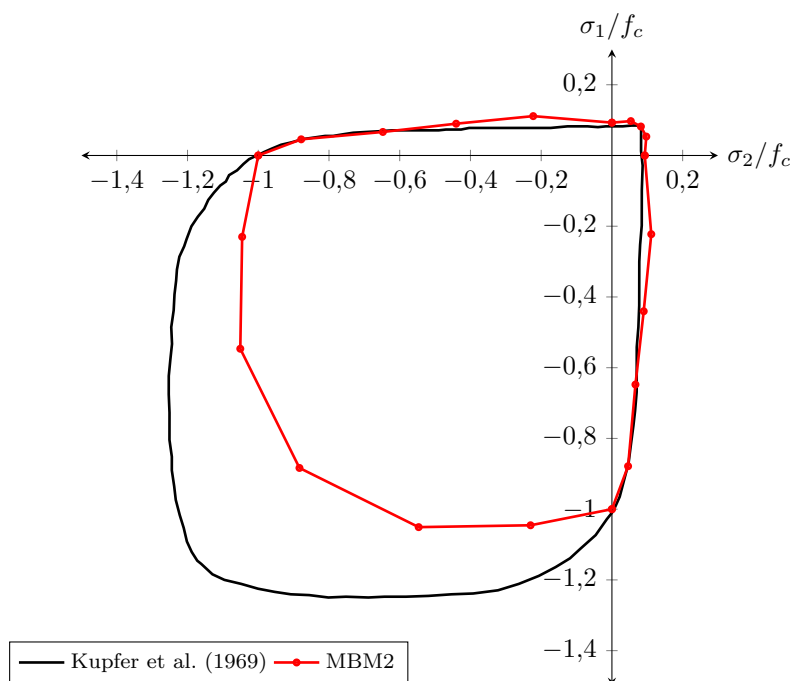


Figura 6.44: Superfície de ruptura do MBM2 comparada com ensaio experimental

O MBM1 produziu uma superfície semelhante ao resultado do modelo de Mazars

(1984) (Figura 6.43), justamente pelo fato desse modelo ter uma única variável de deformação equivalente para todos os estados multiaxiais. Já o MBM2, além de preservar o ajuste adequado nos estados de tração predominante e combinados de tração e compressão, aproximou-se mais da curva experimental no estado predominante de compressão (Figura 6.44), isso se deu pelo fato de se ter uma deformação equivalente própria para o estado predominante de compressão. São exibidas, a seguir, as superfícies biaxiais do modelo de de Vree et al. (1995) e MBV através das Figuras 6.45 e 6.46.

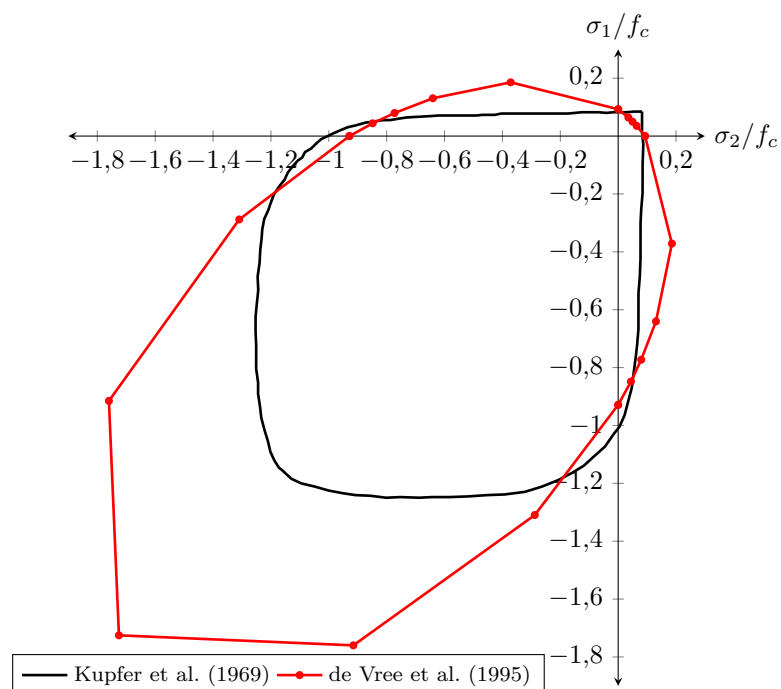


Figura 6.45: Superfície de ruptura de de Vree et al. (1995) comparada com ensaio experimental

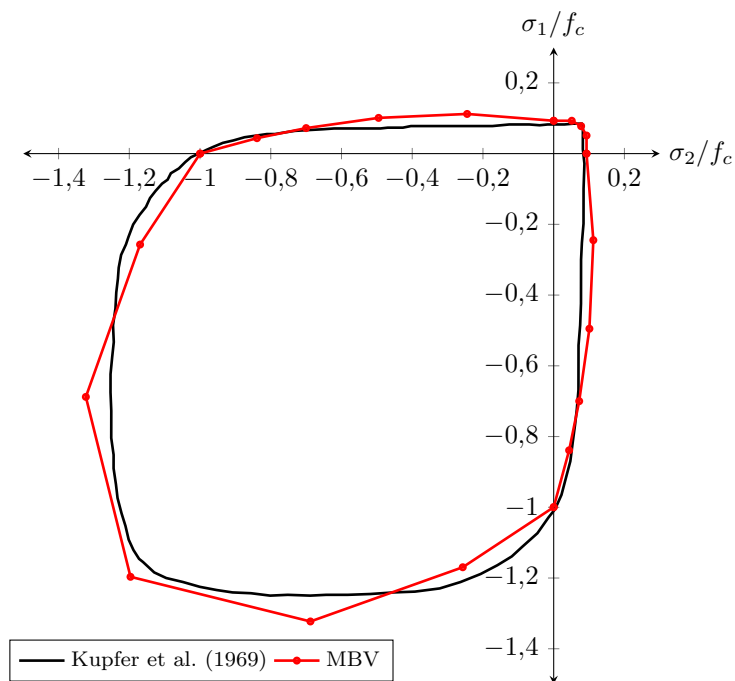


Figura 6.46: Superfície de ruptura do MBV comparada com ensaio experimental

Através da Figura 6.45, observa-se que o modelo de de Vree et al. (1995) não se aproximou da superfície de Kupfer et al. (1969) em todos os estados analisados. Quando a tração ocorre nas duas direções da chapa, o modelo em questão subestima a resistência do concreto e nos estados de compressão biaxial e combinado de tração e compressão, a resistência é superestimada.

O MBV teve o melhor ajuste com a superfície de Kupfer et al. (1969) ao se comparar com os demais modelos. Observa-se, na Figura 6.46, que o resultado do modelo se aproximou bem com a superfície experimental em todos os estados analisados. Por fim, são apresentadas as superfícies dos modelos de Lemaitre e Chaboche (1990), MBLC1 e MBLC2 através das Figuras 6.47, 6.48 e 6.49.

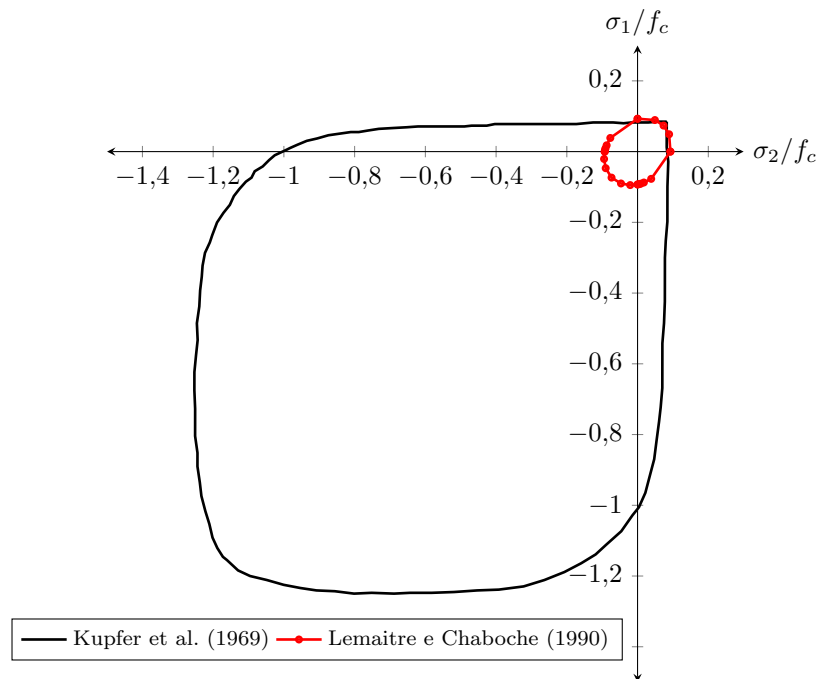


Figura 6.47: Superfície de ruptura de Lemaitre e Chaboche (1990) comparada com ensaio experimental

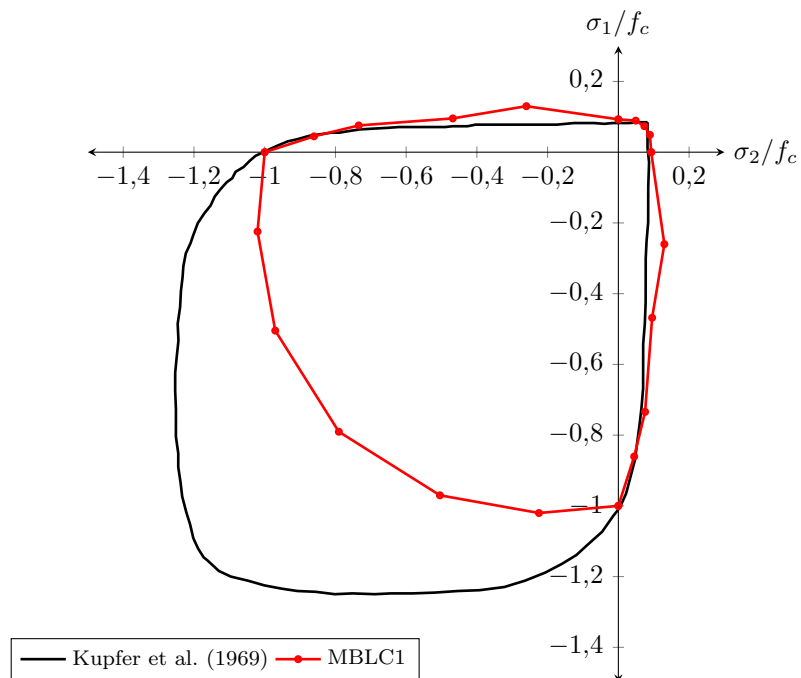


Figura 6.48: Superfície de ruptura do MBLC1 comparada com ensaio experimental

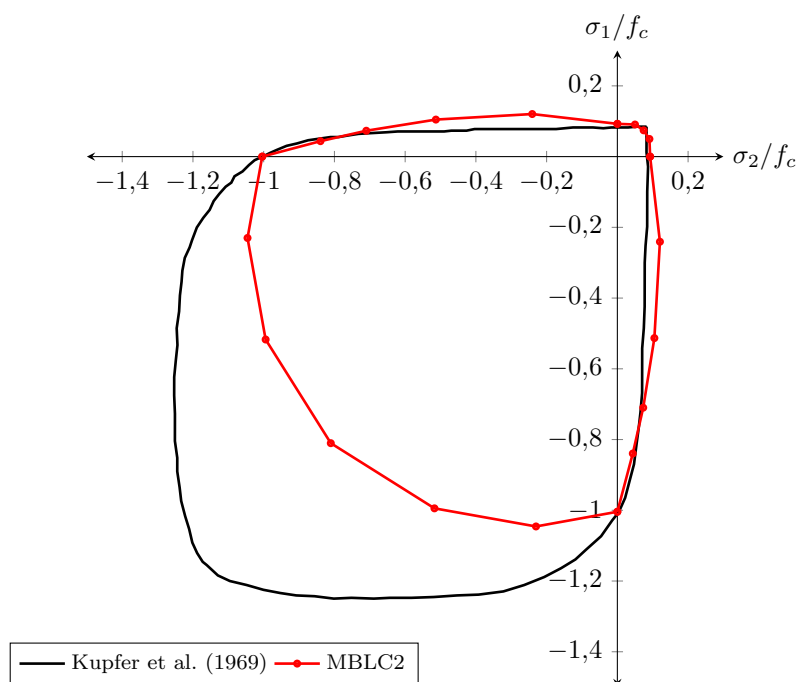


Figura 6.49: Superfície de ruptura do MBLC2 comparada com ensaio experimental

Como observado na Figura 6.47, a superfície do modelo de Lemaitre e Chaboche (1990) é representada por uma elipse simétrica, demonstrando mais uma vez não ser um modelo capaz de diferenciar a tração da compressão. O estado de tração predominante é representado adequadamente, entretanto, a resposta do modelo nos demais estados fica muito divergente com relação a superfície experimental.

O MBLC1 e o MBLC2 têm superfícies semelhantes, apenas apresentando uma pequena diferença no estado combinado de tração e compressão como pode ser observado nas Figuras 6.48 e 6.49. Diferentemente do modelo de Lemaitre e Chaboche (1990), esses modelos são capazes de diferenciar o comportamento da tração e da compressão. Nos estados de tração predominante e combinado de tração e compressão, as superfícies dos modelos se aproximaram das curvas experimentais, porém no estado predominante de compressão, a resposta dos modelos ficou com uma resistência menor do que a prevista por Kupfer et al. (1969).

Em geral, as respostas dos modelos propostos se adequaram melhor à superfície

experimental. As razões disso é a possibilidade em se ter leis e parâmetros que melhor se adequem à lei de tração e compressão, além de existir formulações específicas para cada tipo de estado multiaxial. No estado combinado de tração e compressão, o ajuste adequado dos modelos propostos se deu por causa da ponderação do dano por tração e o dano por compressão, já que nesse estado, o concreto tem um comportamento intermediário entre seu comportamento na tração e na compressão.

6.3 Ensaios de flexão

6.3.1 Viga sob flexão em três pontos de Petersson (1981)

Uma viga de concreto com um entalhe central submetida à flexão foi estudada por Petersson (1981). O concreto dessa viga foi descrito na Seção 6.1.3 e com o auxílio das leis de Boone e Ingraffea (1987) e Carreira e Chu (1985), os modelos foram parametrizados. Os dados geométricos da viga analisada estão detalhados na Figura 6.50.

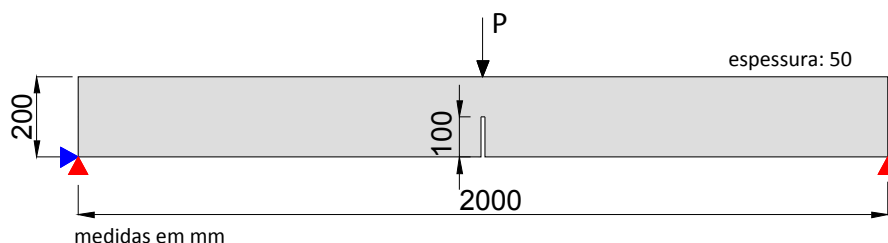


Figura 6.50: Dados geométricos da viga do ensaio de Petersson (1981)

A malha utilizada é composta por elementos planos quadrilaterais de quatro nós com dimensões de $12,5 \text{ mm} \times 12,5 \text{ mm}$ e, devido a simetria da viga, foi modelada apenas sua metade, conforme ilustrado na Figura 6.51.

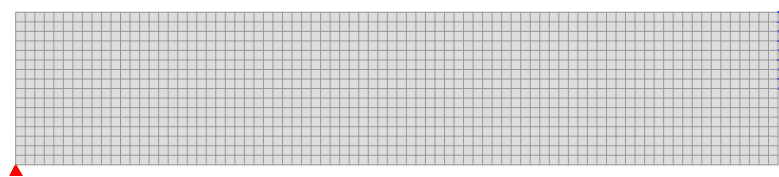


Figura 6.51: Malha utilizada no ensaio de comparação com experimento do Petersson (1981)

A carga de referência foi de $P = 1000$ N, porém, como a modelagem se deu pela metade da viga, aplicou-se a carga de referência de $P/2 = 500$ N. As trajetórias de equilíbrio foram obtidas através do método de controle de deslocamento generalizado, conforme apresentado por Fuina (2004) e com incremento do fator de carga de 0,08.

O gráfico da Figura 6.52 exhibe a resposta em termos de carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação de carga do modelo de Mazars (1984) e dos modelos propostos, cujas deformações equivalentes são baseadas em Mazars (1984). Esses resultados são comparados com o resultado experimental.

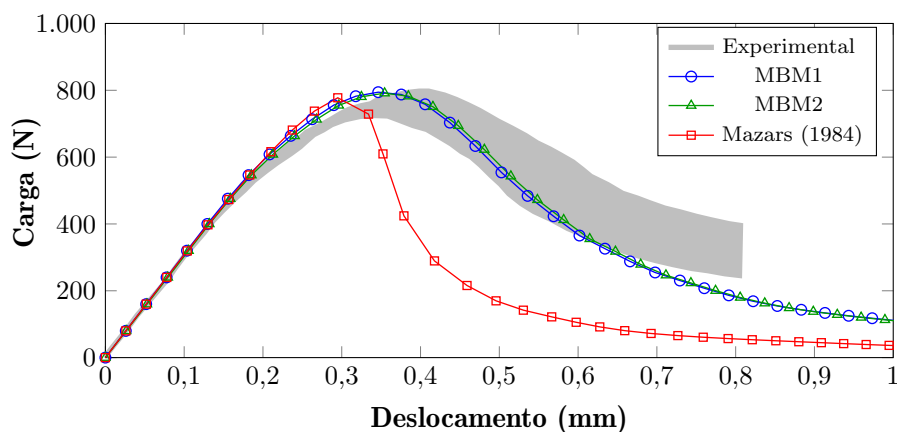


Figura 6.52: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga

De acordo com as trajetórias apresentadas na Figura 6.52, ao se comparar o modelo clássico de Mazars (1984) com as versões dos modelos propostos baseados no mesmo autor, verificam-se que estes foram condizentes com a resposta experimental de Petersson (1981), enquanto que o primeiro obteve uma trajetória mais acentuada.

O motivo disso está relacionado com a parametrização, visto que o modelo clássico teve uma resposta frágil na tração, como pode ser visto na curva, ilustrada na Figura 6.25(a), relativa ao ensaio de parametrização do modelo.

O gráfico da Figura 6.53 exhibe os resultados do modelo de de Vree et al. (1995) e MBV, comparados com o resultado experimental.

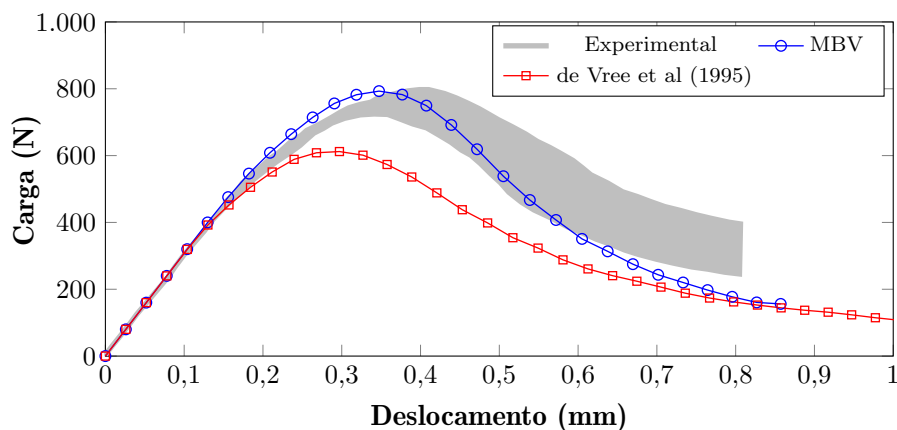


Figura 6.53: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga

A resposta do modelo de de Vree et al. (1995) ficou com um pico de carga abaixo do resultado experimental. Embora a trajetória do modelo MBV tenha pequenos desvios próximo ao pico e ao final do carregamento, a resposta do modelo permaneceu compatível com o espectro dos resultados experimentais.

O gráfico da Figura 6.54 descreve as trajetórias de equilíbrio de carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga do modelo de Lemaitre e Chaboche (1990), MBLC1 e MBLC2, confrontando-as com o resultado experimental.

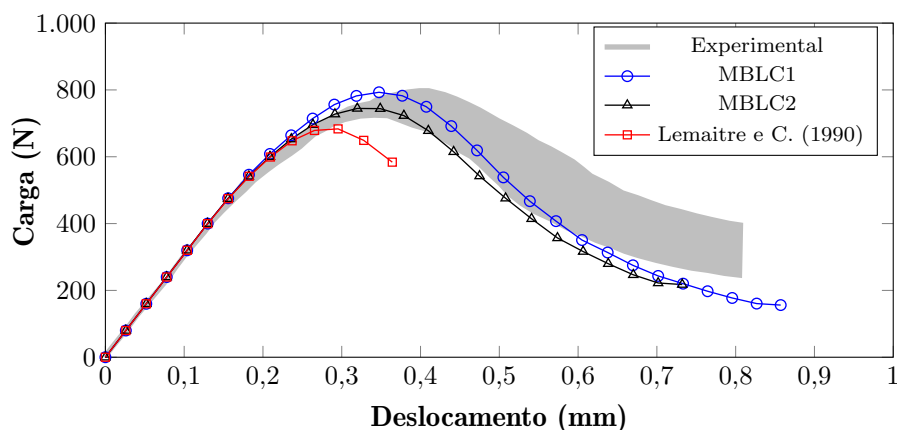


Figura 6.54: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga

Pelas trajetórias de equilíbrio apresentadas na Figura 6.54, observa-se que o modelo de Lemaitre e Chaboche (1990) não foi capaz de descrever o ramo descendente da curva, a razão está na incapacidade do modelo clássico de descrever a bimodularidade do material, ou seja, o modelo é insensível à diferenciação da tração e compressão. Assim, na flexão, a região acima de sua linha neutra fica comprimida e abaixo tracionada. Sabe-se também que o concreto tem resistência à compressão superior a sua resistência à tração, portanto, quando o modelo clássico considera que o material tem na compressão o mesmo comportamento da tração, ele está subestimando a resistência à compressão do material, levando a instabilidade precoce da estrutura quando submetida à solicitação de flexão.

O MBLC1 e o MBLC2 conseguem representar adequadamente o comportamento do material em ambos os regimes e por isso conseguem prever o comportamento do concreto na flexão, como pode ser visto na Figura 6.54. As trajetórias do MBLC1 e MBLC2 são próximas uma das outras, sendo que a trajetória do MBLC2 apresenta uma resistência menor, entretanto, as duas se aproximam de maneira satisfatória do resultado experimental.

De modo geral, os modelos propostos foram capazes de prever o comportamento da viga ensaiada por Petersson (1981). Estruturas submetidas à flexão, possui regiões tracionadas e comprimidas, portanto, ao se ter um modelo bimodular que possa

representar adequadamente a lei da tração e a lei da compressão, é possível de se prever o comportamento de estruturas submetidas a esse tipo de solicitação.

A Figura 6.55 detalha a região onde ocorre a maior degradação na estrutura utilizando, como exemplo, o MBM2.

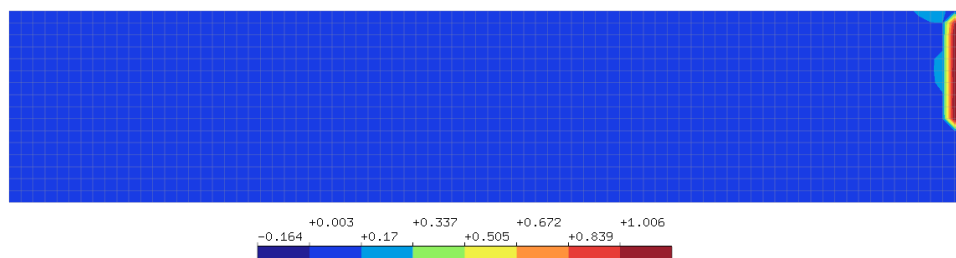


Figura 6.55: Região danificada na viga

Nessa viga, na seção do meio do vão é onde ocorrem as maiores tensões de tração e compressão, portanto, essa região é a parte mais degradada da estrutura.

6.3.2 Viga sob flexão em três pontos de García-Álvarez et al. (2012)

García-Álvarez et al. (2012) realizaram estudos experimentais e numéricos de vigas submetidas a flexão com diversos tamanhos e com entalhes localizados no meio do vão e localizados a certas distâncias do meio do vão. Os autores fizeram experimentações com um concreto convencional e com um de alta resistência. Os dados geométricos dessas vigas estão detalhados na Figura 6.56 e na Tabela 6.10.

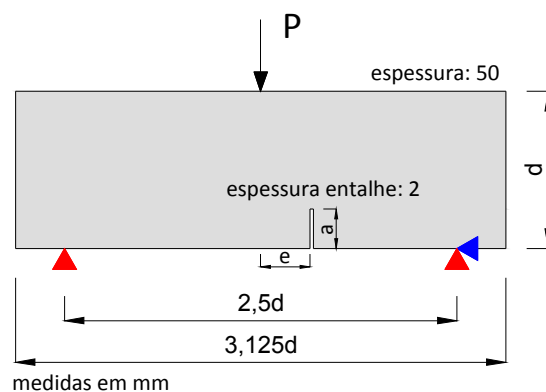


Figura 6.56: Dados geométricos da viga do ensaio de García-Álvarez et al. (2012)

Tabela 6.10: Altura (d) das vigas utilizadas no ensaio de García-Álvarez et al. (2012)

Tamanhos	Sigla	d (mm)
Viga Pequena	VP	80
Viga Média	VM	160
Viga Grande	VG	320

Nesse ensaio, a resposta dos modelos formulados locais e não locais será comparada com os resultados experimentais e portanto, será verificada a capacidade de regularização das respostas a partir dos modelos não locais.

A parametrização dos modelos foi realizada considerando como referência as leis de Boone e Ingraffea (1987) para tração e Carreira e Chu (1985) para compressão, similar ao que foi feito na Seção 6.1.3.

As vigas ensaiadas por García-Álvarez et al. (2012) possuem maior rigidez com relação a viga ensaiada por Petersson (1981). Enquanto que as vigas do García-Álvarez et al. (2012) possuem a relação vão por altura igual a 2,5, a viga do Petersson (1981) tem uma relação vão por altura igual a 10. Normalmente, estruturas mais rígidas apresentam comportamento mais frágil e, geralmente, os modelos numéricos apresentam maiores dificuldades em representar o comportamento de estruturas frágeis, uma vez que trajetórias de equilíbrio, que possuem ramo descendente acentuado, são mais difíceis de serem obtidas.

Para o ensaio numérico, foi adotada a carga de referência (P) igual a 1000 N e para obtenção das trajetórias de equilíbrio, utilizou-se o método de controle de deslocamento generalizado com incremento do fator de carga de 0,5.

6.3.2.1 Ensaios com concreto convencional

O concreto convencional utilizado no ensaio de García-Álvarez et al. (2012) tem uma resistência à tração (f_t) de 3,5 MPa. A resistência à compressão do concreto não foi informada pelo autor, entretanto, utilizando-se uma relação normativa da ABNT NBR 6118 (2014), determinou-se o valor da resistência à compressão (f_c) de 40,0 MPa.

Além desses parâmetros, a energia de fratura (G_f) determinada pelos autores para esse concreto é de 0,08 N/mm, o módulo de elasticidade (E_0) é de 33800 MPa e o tamanho máximo do agregado desse concreto é de 12 mm. De acordo com Bazant e Pijaudier-Cabot (1989), o comprimento característico de um concreto é de aproximadamente 2,7 a 3,0 vezes o diâmetro máximo do agregado, portanto, o comprimento característico (h) adotado é de 32 mm. Os parâmetros utilizados para o material estão descritos na Tabela 6.11.

Tabela 6.11: Propriedades do material

Leis tensão-deformação	
Tração	Compressão
Boone e Ingraffea (1987)	Carreira e Chu (1985)
$f_t = 3,5$ MPa	$f_c = 40,0$ MPa
$\kappa_0^+ = 1,04 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^- = 0,002$
$G_f = 0,080$ N/mm	
$h = 32$ mm	

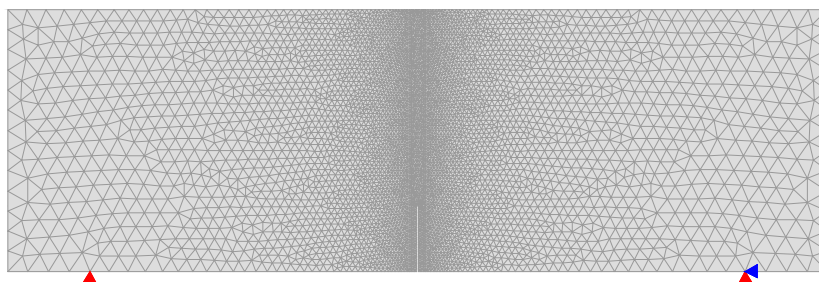
Para esse concreto, foram ensaiadas vigas com entalhes de altura $a = 0,25d$ posicionados no meio do vão ($e = 0$) e com excentricidades de $e = 0,3125d$ e $e = 0,625d$.

A partir da parametrização, considerando como referência as leis de Boone e Ingraffea (1987) para tração e Carreira e Chu (1985) para compressão, os parâmetros obtidos para as leis de dano dos modelos propostos, que correspondem ao comportamento do concreto analisado, são descritos na Tabela 6.12. Foram adotadas lei exponencial (Equação (3.66)) para tração e lei polinomial (Equação (3.68)) para a compressão.

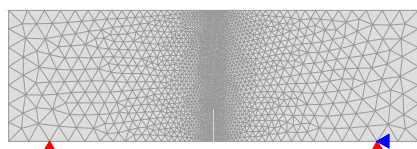
Tabela 6.12: Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados

MBM1	MBM2	MBV ($k_b = 1,45$)	MBLC1	MBLC2
Tração	Tração	Tração	Tração	Tração
(Exponencial)	(Exponencial)	(Exponencial)	(Exponencial)	(Exponencial)
$A = 0,980$	$A = 0,980$	$A = 0,980$	$A = 0,980$	$A = 0,980$
$B = 1350$	$B = 1350$	$B = 1350$	$B = 1350$	$B = 1350$
$\kappa_0^+ = 1,04 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,04 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,04 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,04 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,05 \times 10^{-4}$
Compressão	Compressão	Compressão	Compressão	Compressão
(Polinomial)	(Polinomial)	(Polinomial)	(Polinomial)	(Polinomial)
$T = 2,69$	$T = 40,0$	$T = 24,0$	$T = 40,0$	$T = 41,0$
$\tilde{E} = 11435$	$\tilde{E} = 33800$	$\tilde{E} = 33800$	$\tilde{E} = 33800$	$\tilde{E} = 33800$
$\kappa_0^- = 4,00 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 1,20 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 2,05 \times 10^{-3}$

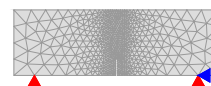
As malhas utilizadas para modelagem das vigas, ilustradas nas Figuras 6.57, 6.58 e 6.59, são formadas por elementos planos triangulares de três nós. Na região próxima ao entalhe e próximo ao ponto de aplicação da carga, foi feito o refinamento da malha, utilizando elementos com arestas de tamanho aproximado de 2,5 mm.



(a) Malha da viga grande

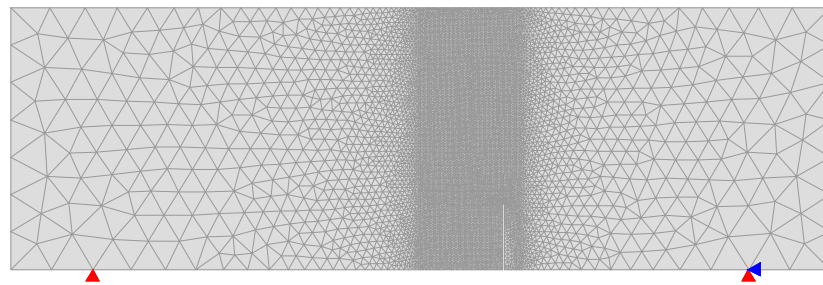


(b) Malha da viga média

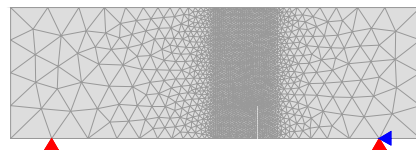


(c) Malha da viga pequena

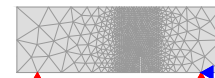
Figura 6.57: Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de García-Álvarez et al. (2012) com $e = 0$ e $a = 0,25d$



(a) Malha da viga grande

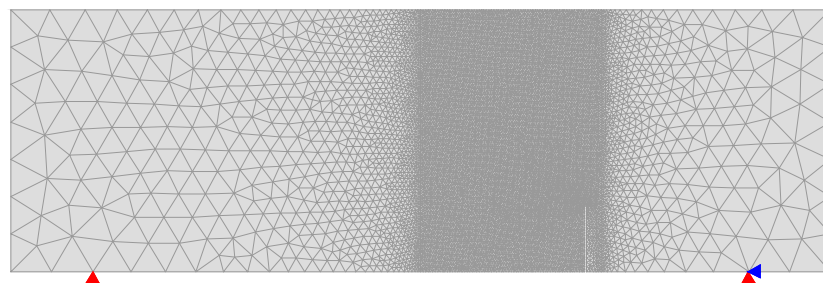


(b) Malha da viga média

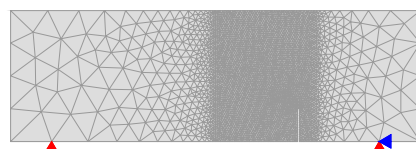


(c) Malha da viga pequena

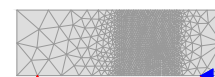
Figura 6.58: Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de García-Álvarez et al. (2012) com $e = 0,3125d$ e $a = 0,25d$



(a) Malha da viga grande



(b) Malha da viga média



(c) Malha da viga pequena

Figura 6.59: Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de García-Álvarez et al. (2012) com $e = 0,625d$ e $a = 0,25d$

Para os modelos não locais, utilizou-se a função de peso Gaussiana descrita pela Equação 3.90, no qual o raio não local adotado foi de $R = 36 \text{ mm}$ e a constante $K =$

7,2. Os resultados dos modelos propostos locais e não locais, em termos de carga por CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement* ou, em português, distanciamento de abertura da boca da trinca), são apresentados pelos gráficos das Figuras 6.60 a 6.64. Na legenda dos gráficos, as siglas Exp, NL e L se referem , respectivamente, a “experimental”, “não local” e “local”. As siglas VP, VM e VG indicam o tamanho da viga conforme apresentado na Tabela 6.10.

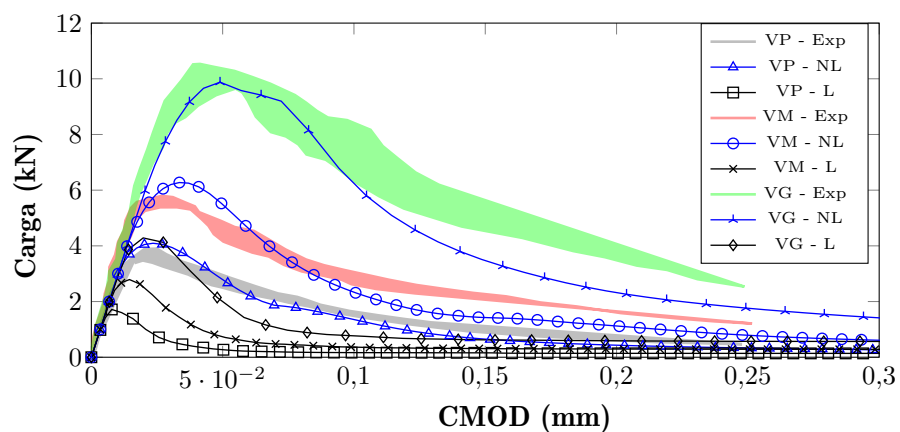
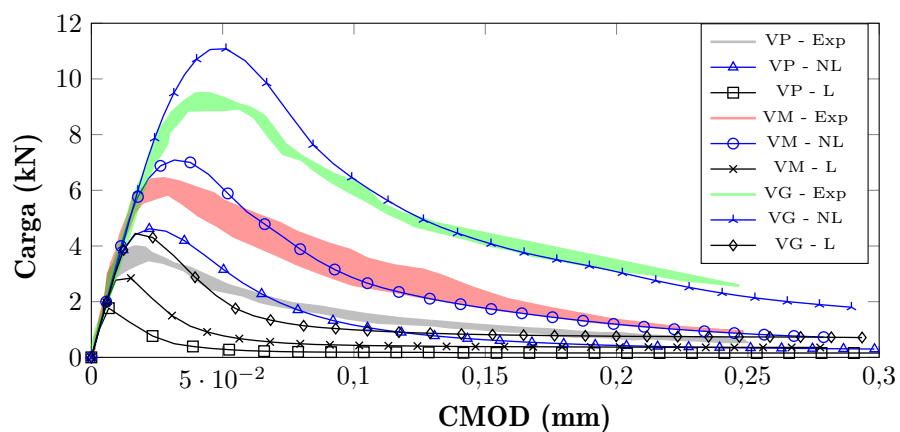
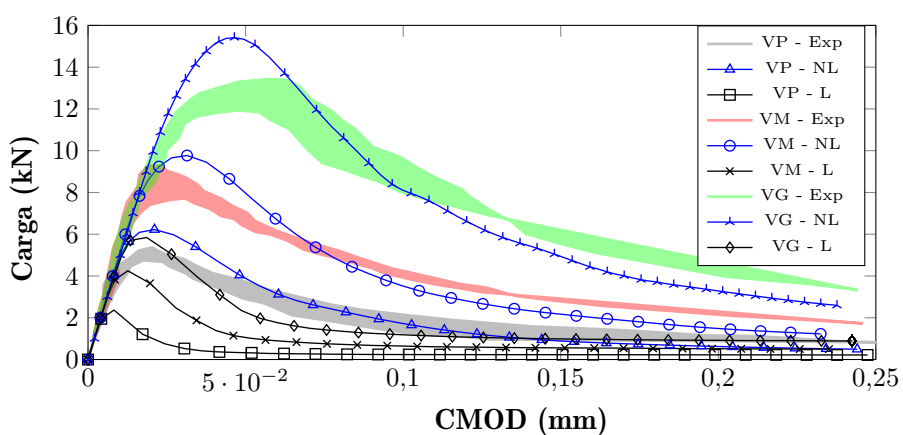
(a) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0$ (b) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0,3125d$ (c) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0,625d$

Figura 6.60: Comparação de resultados do MBM1 local e não local com relação ao ensaio de García-Álvarez et al. (2012)

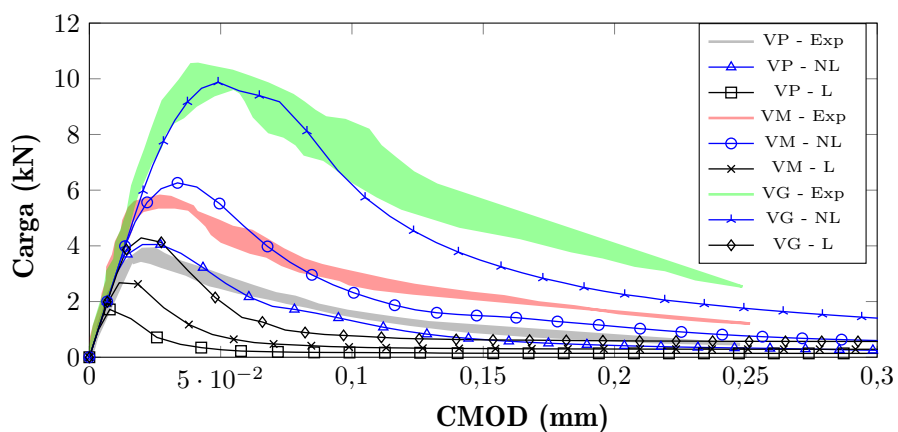
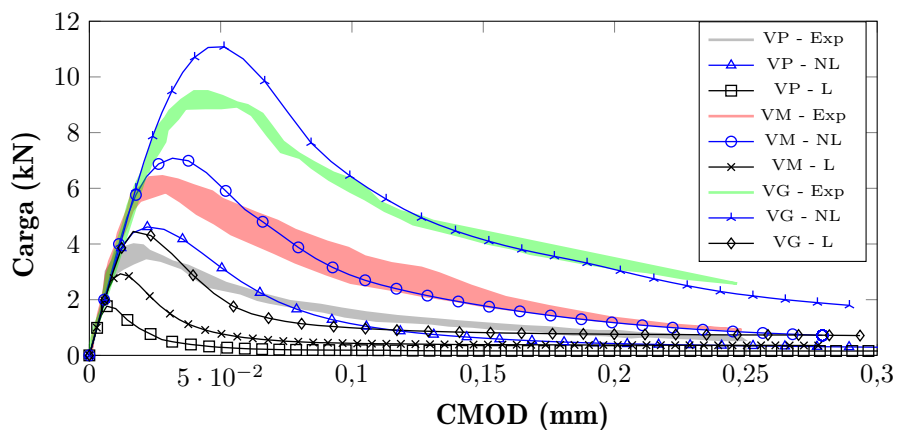
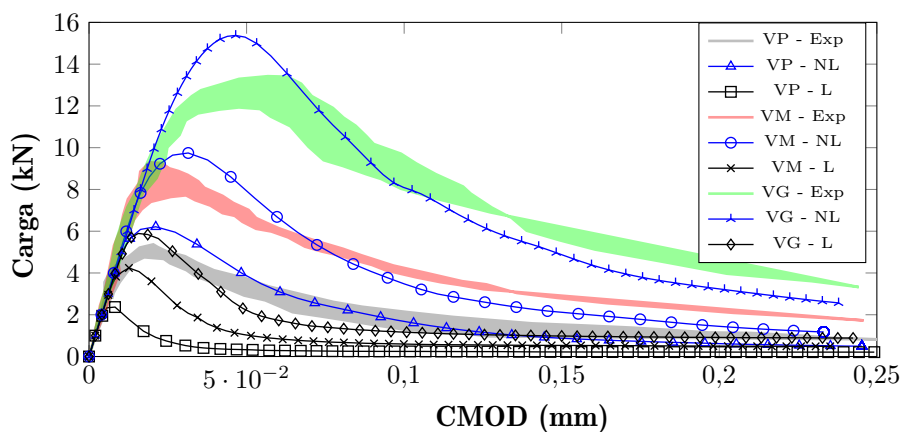
(a) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0$ (b) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0,3125d$ (c) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0,625d$

Figura 6.61: Comparação de resultados do MBM2 local e não local com relação ao ensaio de García-Álvarez et al. (2012)

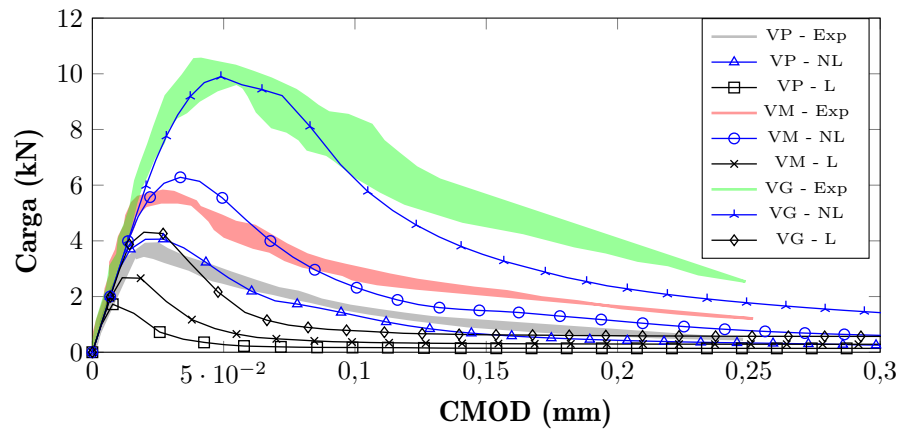
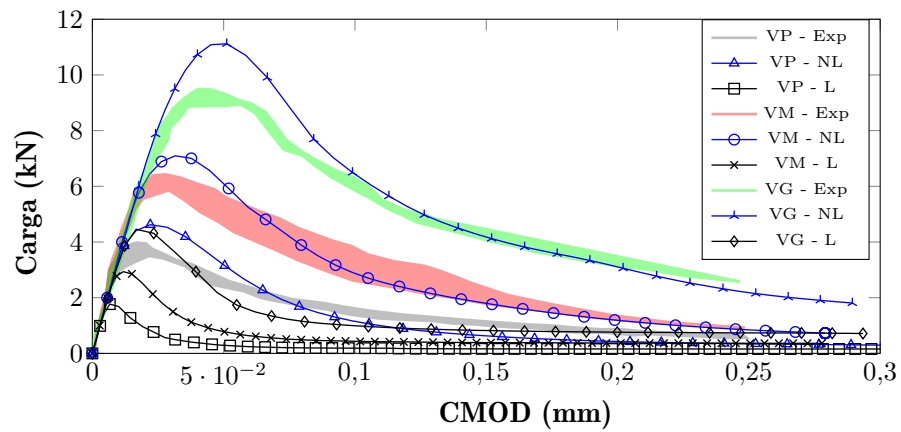
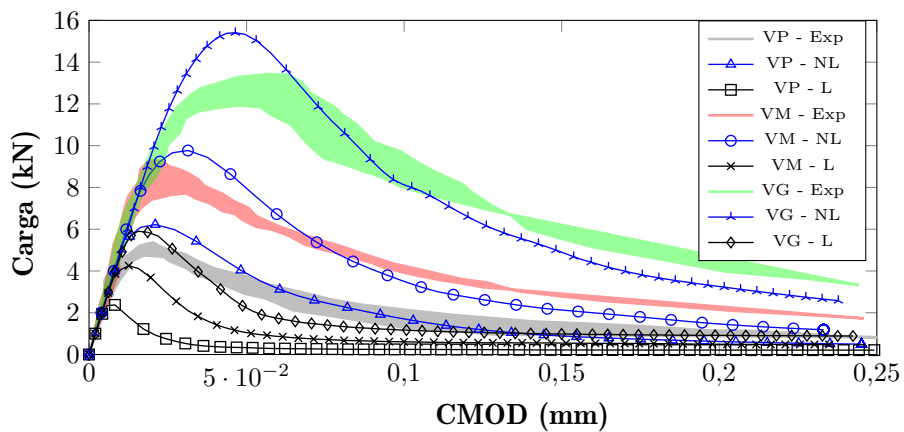
(a) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0$ (b) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0,3125d$ (c) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0,625d$

Figura 6.62: Comparação de resultados do MBV local e não local com relação ao ensaio de García-Álvarez et al. (2012)

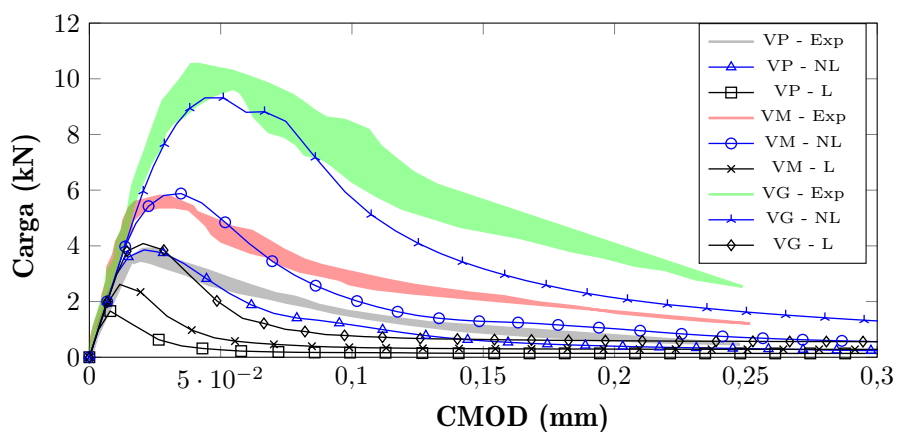
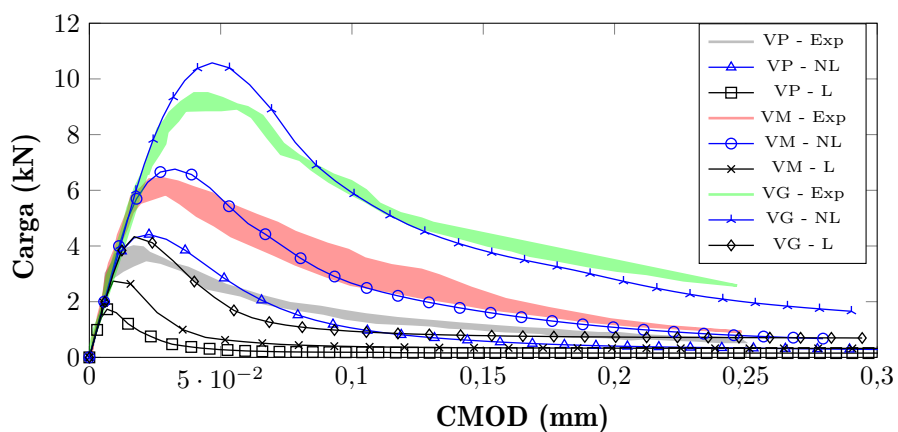
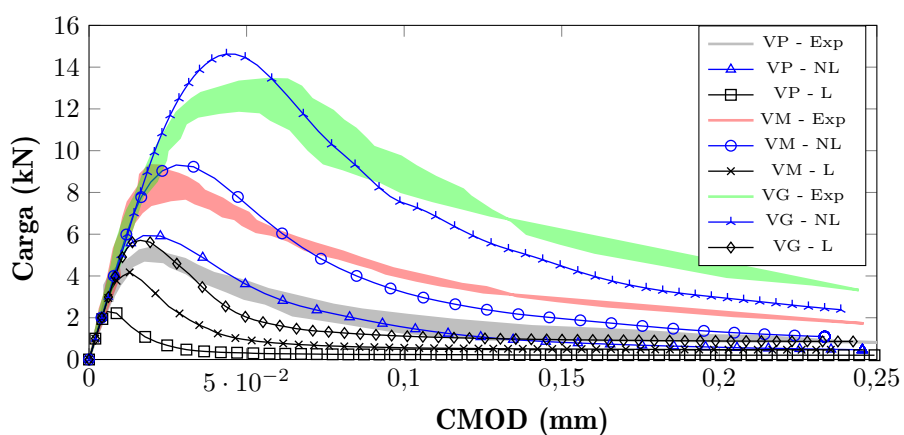
(a) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0$ (b) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0,3125d$ (c) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0,625d$

Figura 6.63: Comparação de resultados do MBLC1 local e não local com relação ao ensaio de García-Álvarez et al. (2012)

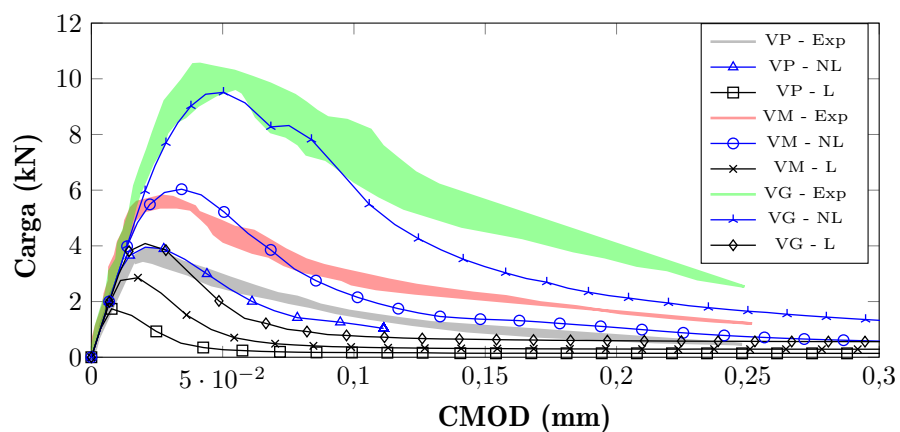
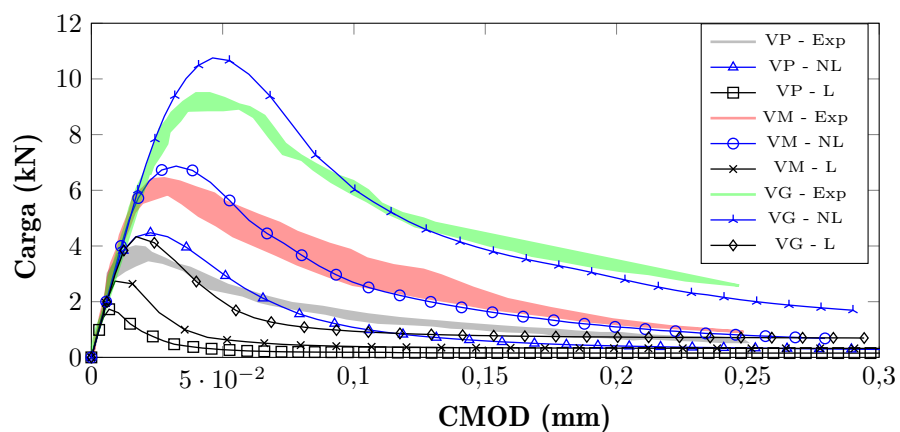
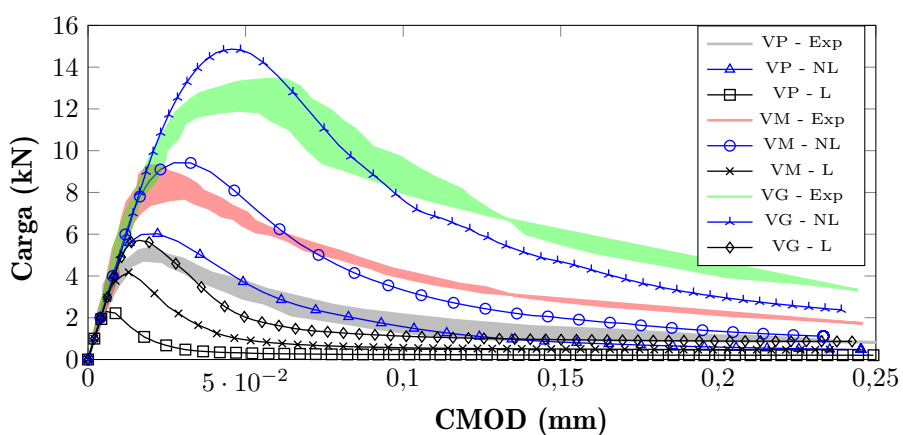
(a) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0$ (b) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0,3125d$ (c) Trajetória carga por CMOD das vigas com $e = 0,625d$

Figura 6.64: Comparação de resultados do MBLC2 local e não local com relação ao ensaio de García-Álvarez et al. (2012)

Ao se observar as trajetórias das Figuras 6.60 a 6.64, conclui-se que as respostas

dos modelos locais foram comprometidas devido a localização de deformações numericamente induzida. Os modelos locais apresentaram trajetórias com capacidade de carga muito abaixo do esperado. Já os modelos não locais foram capazes de impedir os efeitos da localização de deformações, produzindo respostas coerentes quanto aos resultados experimentais.

Sobre as respostas do modelo não local das vigas com entalhes no meio do vão, verifica-se que as trajetórias da viga grande convergiram com o resultado experimental na parte inicial do gráfico e próximo do pico de carga, porém, as trajetórias se afastaram ligeiramente na parte final do carregamento. As trajetórias da viga média tiveram picos acima do resultado experimental e uma ligeira divergência no ramo descendente, entretanto, aproximaram-se do resultado experimental de maneira razoável. As trajetórias da viga pequena se aproximaram de maneira satisfatória do resultado experimental em todas as partes da curva.

Para as vigas com entalhes com excentricidade de $e = 0,3125d$, ao se utilizar o modelo não local, as respostas foram regularizadas e as trajetórias se aproximaram do comportamento observado experimentalmente. As trajetórias do modelo não local superestimaram moderadamente a capacidade de carga, entretanto, descreveram o ramo descendente de tal forma que as curvas numéricas se aproximaram dos resultados experimentais.

As trajetórias do modelo não local superestimaram a capacidade de carga das vigas com excentricidade $e = 0,625d$, mas os picos ficaram relativamente próximos aos resultados experimentais. O ramo descendente das curvas se aproximou do comportamento observado experimentalmente.

Ao se utilizar malhas muito refinadas no ensaio numérico, ficou evidente nos gráficos acima que os modelos locais não foram capazes de prever o comportamento das vigas, subestimando consideravelmente a capacidade de carga da estrutura.

Os modelos não locais foram capazes de regularizar as respostas de tal maneira que alcançaram uma concordância razoável com os resultados experimentais em

todas as vigas ensaiadas, entretanto, as trajetórias das vigas de entalhes excêntricos tiveram um pico de carga acima do previsto em ensaio experimental.

A fim de ilustrar a região degradada na estrutura para cada posição do entalhe, são exibidos na Figura 6.65 os caminhos percorridos pelo dano nas vigas pequenas, considerando o MBLC1.

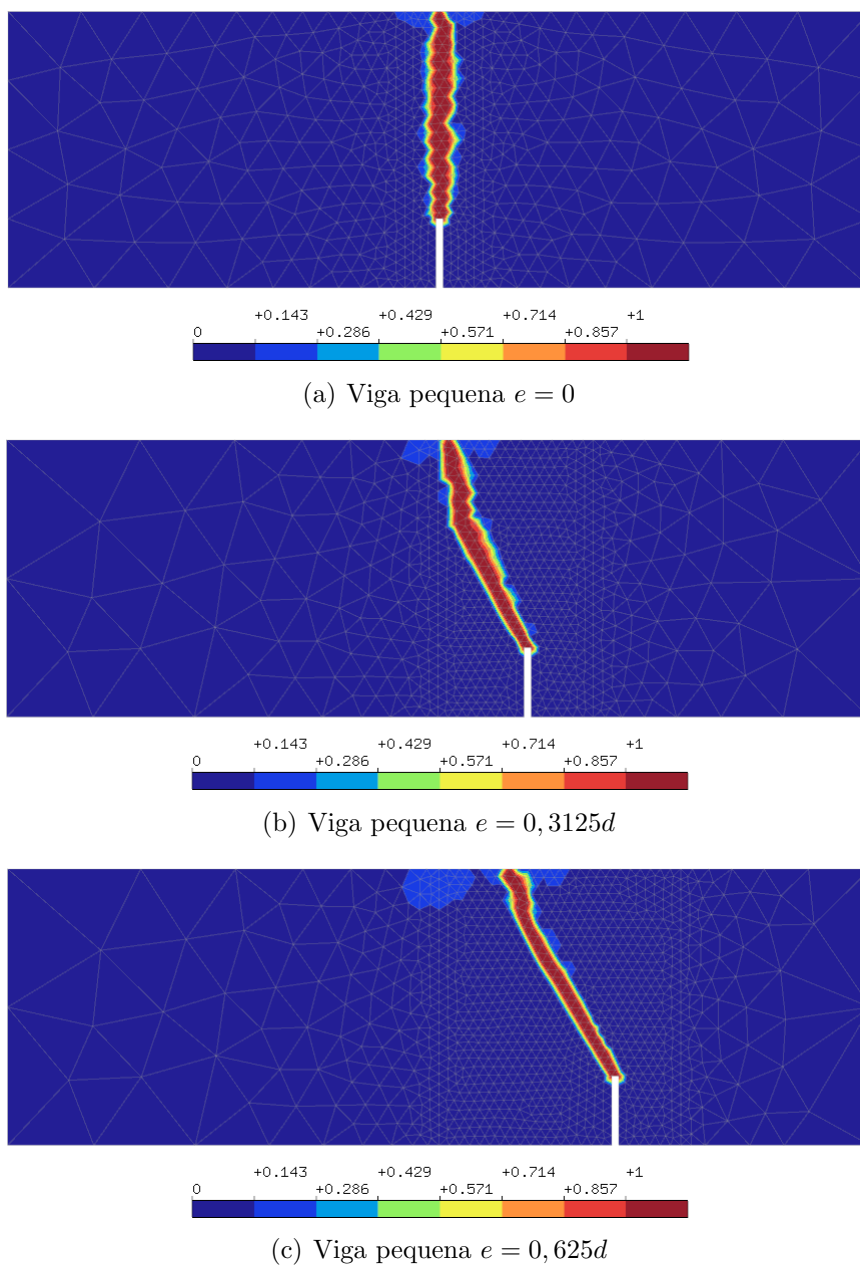


Figura 6.65: Caminhos percorridos pelo dano nas vigas pequenas

Nas vigas com entalhes no meio do vão, as fissuras se propagam verticalmente

na região acima do entalhe, conforme pode ser visto na Figura 6.65(a). Já nas vigas com entalhes excêntricos, as fissuras começam na ponta do entalhe e se propagam em direção ao carregamento (Figuras 6.65(b) e 6.65(c)).

6.3.2.2 Ensaios com concreto de alta resistência

O concreto de alta resistência ensaiado por García-Álvarez et al. (2012) possui uma resistência à tração de $f_t = 6,0$ MPa e usando a relação da ABNT NBR 6118 (2014), determina-se sua resistência à compressão de $f_c = 90,0$ MPa. A energia de fratura é de $G_f = 0,120$ N/mm e o módulo de elasticidade é de $E_0 = 36800$ MPa.

Normalmente, concretos de resistência maiores, possui um comprimento característico menor. Como não ficou evidente o diâmetro máximo do agregado para esse concreto, o comprimento característico foi considerado como inversamente proporcional à resistência à tração, logo, o comprimento característico adotado foi de $h = 20$ mm.

Os parâmetros utilizados para as leis constitutivas do concreto são detalhados na Tabela 6.13.

Tabela 6.13: Propriedades do material

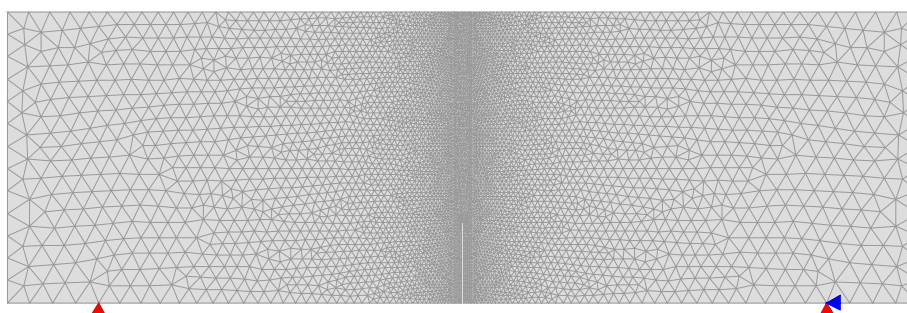
Leis tensão-deformação	
Tração	Compressão
Boone e Ingraffea (1987)	Carreira e Chu (1985)
$f_t = 6,0$ MPa	$f_c = 90,0$ MPa
$\kappa_0^+ = 1,63 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^- = 0,0026$
$G_f = 0,120$ N/mm	
$h = 20$ mm	

Os parâmetros dos modelos propostos, obtidos a partir da parametrização considerando como referência as leis de Boone e Ingraffea (1987) para tração e Carreira e Chu (1985) para compressão e que correspondem com o concreto de alta resistência analisado, são detalhados na Tabela 6.14.

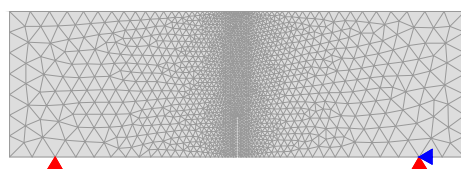
Tabela 6.14: Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados

MBM1	MBM2	MBV ($k_b = 1,45$)	MBLC1	MBLC2
Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)
$A = 0,980$	$A = 0,980$	$A = 0,980$	$A = 0,980$	$A = 0,980$
$B = 1150$	$B = 1150$	$B = 1150$	$B = 1150$	$B = 1150$
$\kappa_0^+ = 1,63 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,63 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,63 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,63 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,65 \times 10^{-4}$
Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)
$T = 5,5$	$T = 90,0$	$T = 54,0$	$T = 90,0$	$T = 92,0$
$\tilde{E} = 12500$	$\tilde{E} = 36800$	$\tilde{E} = 36800$	$\tilde{E} = 36800$	$\tilde{E} = 36800$
$\kappa_0^- = 4,70 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^- = 2,60 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 1,56 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 2,60 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 2,66 \times 10^{-3}$

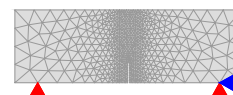
Para o concreto de alta resistência, foram ensaiadas apenas as vigas com entalhes no meio do vão ($e = 0$) de altura $a = 0,275d$. As malhas utilizadas para esse ensaio, ilustradas na Figura 6.66, são formadas por elementos planos triangulares de três nós, com refinamento na região entre a carga e o entalhe, utilizando elementos com arestas de dimensões de 2,5 mm aproximadamente.



(a) Malha da viga grande



(b) Malha da viga média



(c) Malha da viga pequena

Figura 6.66: Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de García-Álvarez et al. (2012) com $e = 0$ e $a = 0,275d$

Para os modelos não locais, foi utilizada a função de peso Gaussiana com o raio não local de $R = 24$ mm e a constante $K = 7,2$. As respostas dos modelos locais e

não locais são apresentadas e confrontadas com os resultados experimentais através das Figuras 6.67 a 6.71.

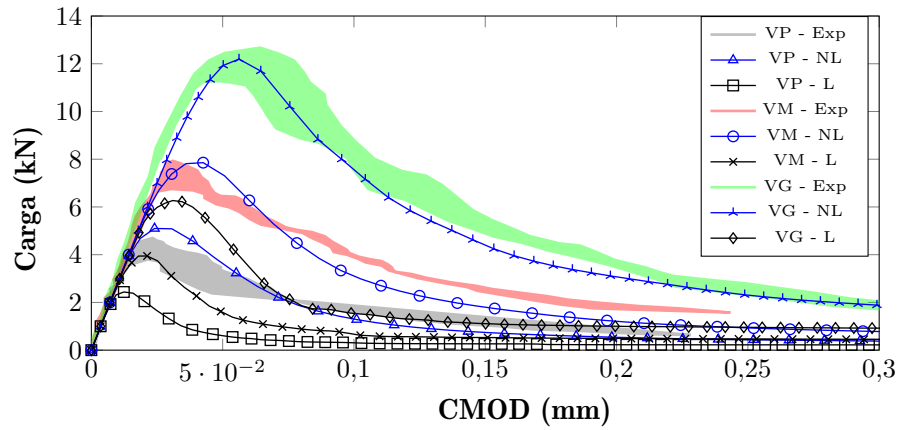


Figura 6.67: Trajetória de equilíbrio da abertura da ponta da trinca com $e = 0$ para o MBM1

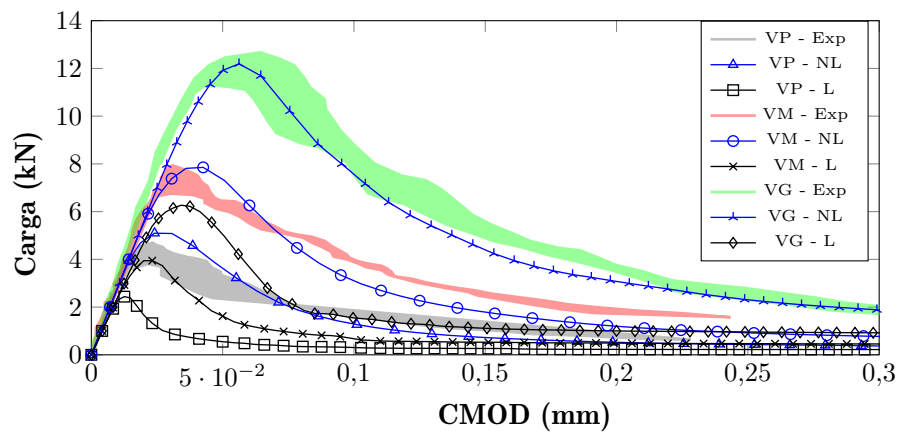


Figura 6.68: Trajetória de equilíbrio da abertura da ponta da trinca com $e = 0$ para o MBM2

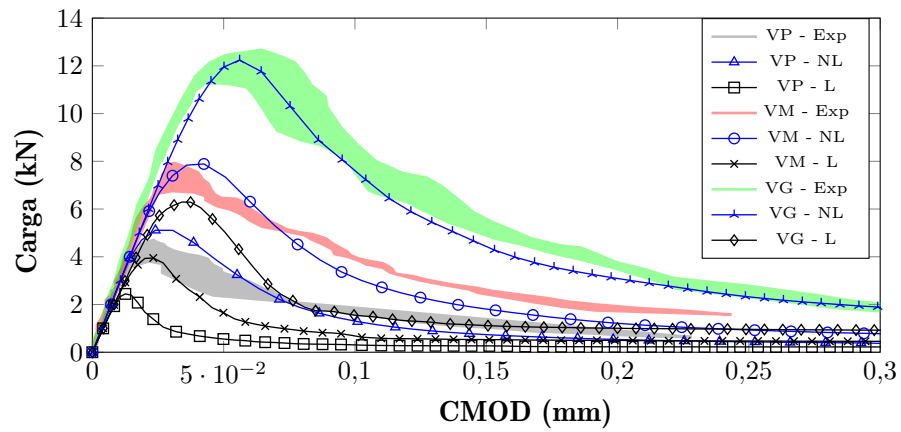


Figura 6.69: Trajetória de equilíbrio da abertura da ponta da trinca com $e = 0$ para o MBV

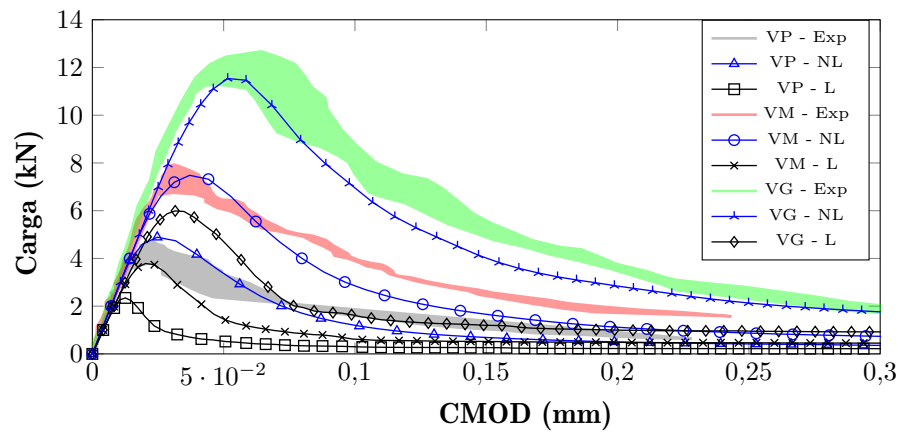


Figura 6.70: Trajetória de equilíbrio da abertura da ponta da trinca com $e = 0$ para o MBLC1

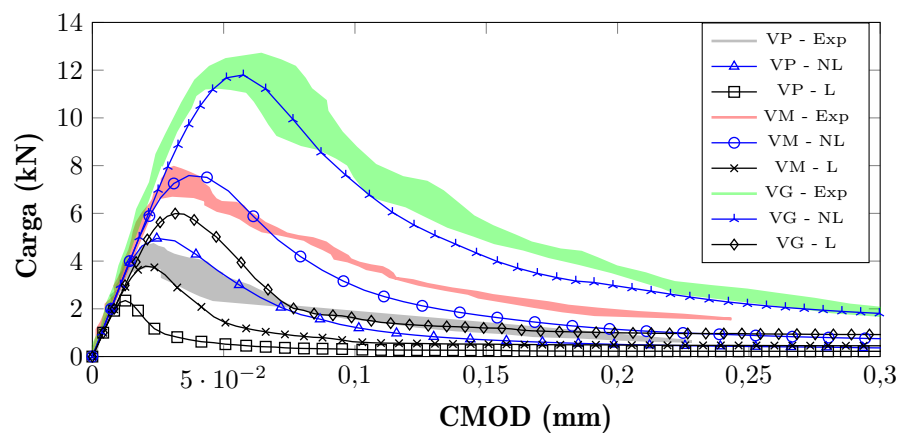


Figura 6.71: Trajetória de equilíbrio da abertura da ponta da trinca com $e = 0$ para o MBLC2

Ao se observar as trajetórias das Figuras 6.67 a 6.71, no ensaio com o concreto de alta resistência, os modelos locais também não foram capazes de produzir respostas coerentes com o comportamento estrutural devido a localização de deformações numericamente induzida. As respostas dos modelos foram regularizadas com a formulação não local e se aproximaram dos resultados experimentais.

As curvas da menor viga apresentaram picos pouco acima da capacidade de carga identificada no experimento, entretanto, as trajetórias se aproximaram relativamente bem com os resultados experimentais. As trajetórias da viga média apresentou capacidade de carga semelhante ao experimento, entretanto seus picos se deslocaram ligeiramente para a direita, mas ainda assim, os modelos não locais apresentaram um comportamento bem próximo do que foi observado experimentalmente. As trajetórias da maior viga convergiram com o resultado experimental.

Através desse ensaio, foi possível verificar a necessidade do uso do modelo não local, uma vez que os modelos locais são passíveis de serem acometidos pelo processo de localização de deformações quando se tem malhas muito refinadas.

Na Figura 6.72, é ilustrada a região degradada da viga pequena para o concreto de alta resistência, considerando o MBLC1.

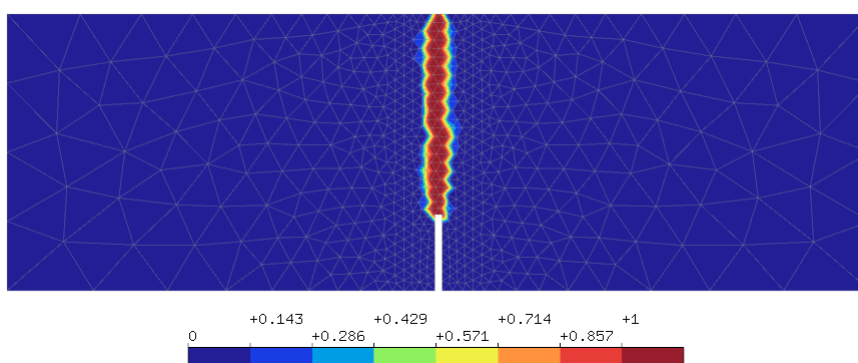


Figura 6.72: Caminho percorrido pelo dano na viga pequena do concreto de alta resistência

Como pode ser observado na Figura 6.72, a região acima do entalhe é onde ocorre a degradação do concreto. O ponto acima do entalhe é onde ocorrem os maiores níveis de tensão de tração, por isso, as fissuras se propagam nessa região.

6.4 Ensaio de painel em forma de L de Winkler et al. (2001)

Winkler et al. (2001) fizeram estudos experimentais e numéricos com um painel em forma de L de concreto. As dimensões do painel utilizado no ensaio são detalhadas na Figura 6.73.

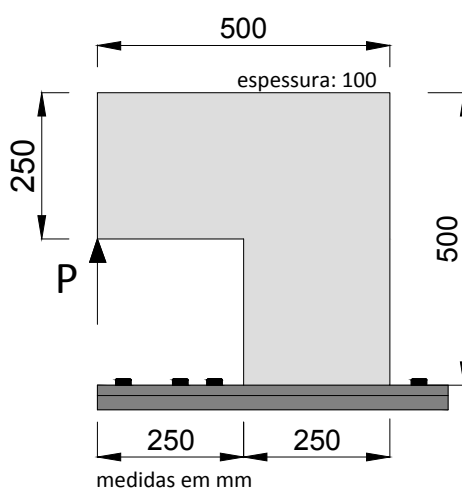


Figura 6.73: Dados geométricos do painel em L do ensaio de Winkler et al. (2001)

Para verificar a convergência das respostas dos modelos locais e não locais nesse ensaio, foram utilizadas malhas com diferentes níveis de refinamento, ilustradas na Figura 6.74. As malhas utilizadas são formadas por elementos planos triangulares de três nós com arestas de dimensões aproximadas, respectivamente, de 50 mm, 25 mm, 12,5 mm e 6,25 mm na região de refinamento.

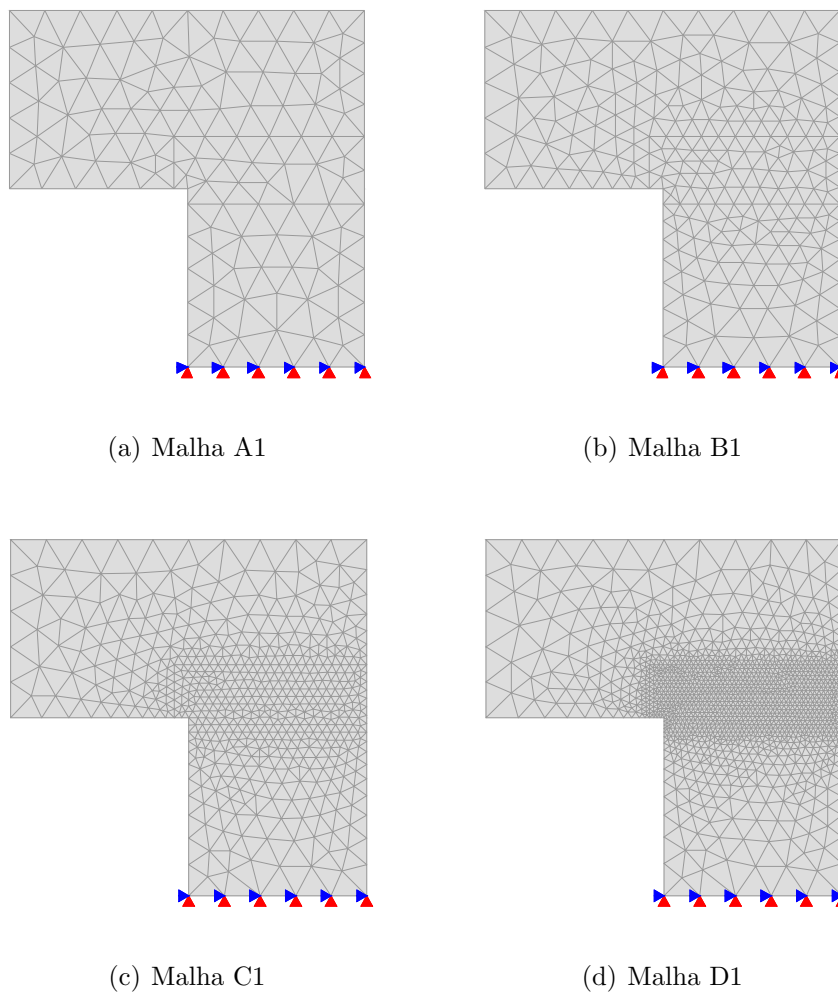


Figura 6.74: Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de Winkler et al. (2001)

O concreto utilizado no experimento possui resistência à compressão de $f_c = 31,0$ MPa, resistência à tração de $f_t = 2,7$ MPa e coeficiente de Poisson de $\nu = 0,18$. O módulo de elasticidade E_0 varia entre os valores de 24469 MPa e 27231 MPa. Para se ter um melhor ajuste da parte elástica da curva numérica com o resultado experimental, adotou-se o limite inferior do módulo de elasticidade, ou seja, $E_0 = 24469$ MPa.

O diâmetro máximo do agregado desse concreto é de 8 mm, portanto, ao se adotar o comprimento característico como aproximadamente 2,7 vezes o diâmetro máximo do agregado, logo, $h = 22$ mm. Na Tabela 6.15 são apresentadas as propriedades do

material.

Tabela 6.15: Propriedades do material

Leis tensão-deformação	
Tração	Compressão
Boone e Ingrassia (1987)	Carreira e Chu (1985)
$f_t = 2,7$ MPa	$f_c = 31,0$ MPa
$\kappa_0^+ = 1,10 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^- = 0,002$
$G_f = 0,065$ N/mm	
$h = 22$ mm	

Os parâmetros dos modelos propostos obtidos a partir da parametrização, considerando como referência as leis de Boone e Ingrassia (1987) para tração e Carreira e Chu (1985) para a compressão, são detalhados na Tabela 6.16.

Tabela 6.16: Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados

MBM1	MBM2	MBV ($k_b = 1,45$)	MBLC1	MBLC2
Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)	Tração (Exponencial)
$A = 0,980$	$A = 0,980$	$A = 0,980$	$A = 0,980$	$A = 0,980$
$B = 1025$	$B = 1025$	$B = 1025$	$B = 1025$	$B = 1025$
$\kappa_0^+ = 1,10 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,10 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,10 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,10 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^+ = 1,13 \times 10^{-4}$
Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)	Compressão (Polinomial)
$T = 1,9$	$T = 31,0$	$T = 18,4$	$T = 31,0$	$T = 31,6$
$\tilde{E} = 8280$	$\tilde{E} = 24470$	$\tilde{E} = 24470$	$\tilde{E} = 24470$	$\tilde{E} = 24470$
$\kappa_0^- = 3,60 \times 10^{-4}$	$\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 1,20 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	$\kappa_0^- = 2,05 \times 10^{-3}$

A carga de referência é de $P = 1000$ N e as trajetórias de equilíbrio foram obtidas através do método de controle de deslocamento generalizado, com um incremento do fator de carga de 0,5.

Para os modelos não locais, utilizou-se a função de peso Gaussiana com o raio não local de $R = 24$ mm e a constante $K = 3$. Os resultados dos modelos locais e não locais, em termos de carga por deslocamento do ponto de aplicação da carga, são apresentados para as quatro malhas modeladas e são exibidos pelos gráficos das Figuras 6.75 a 6.79.

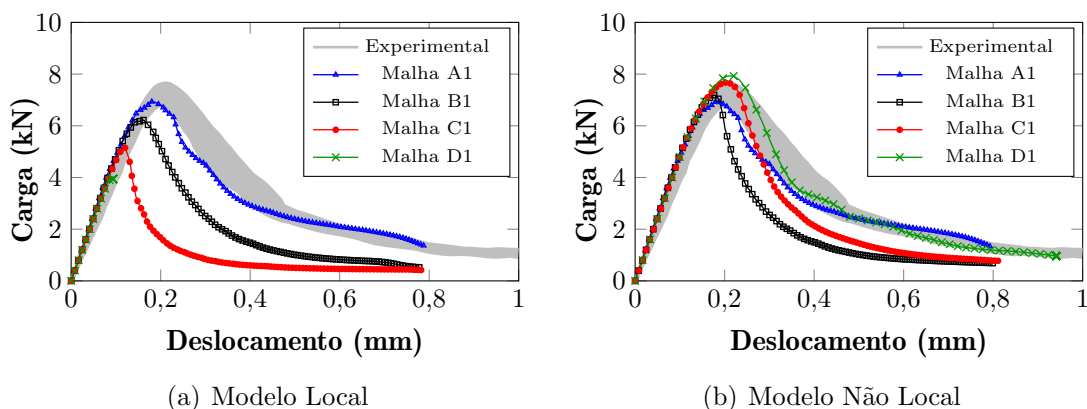


Figura 6.75: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o modelo MBM1

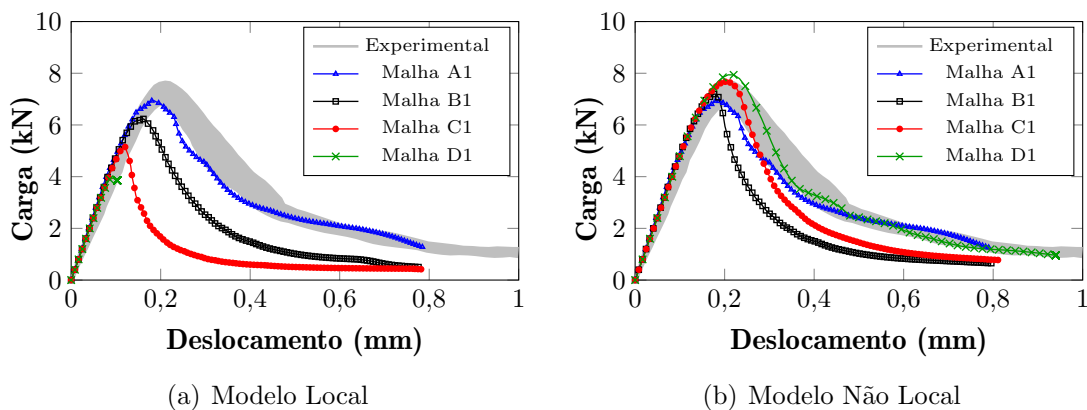


Figura 6.76: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o modelo MBM2

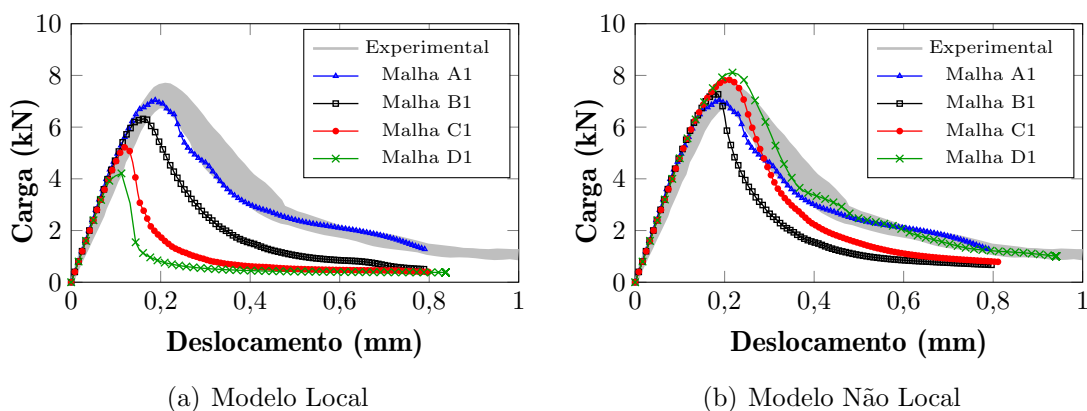


Figura 6.77: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o modelo MBV

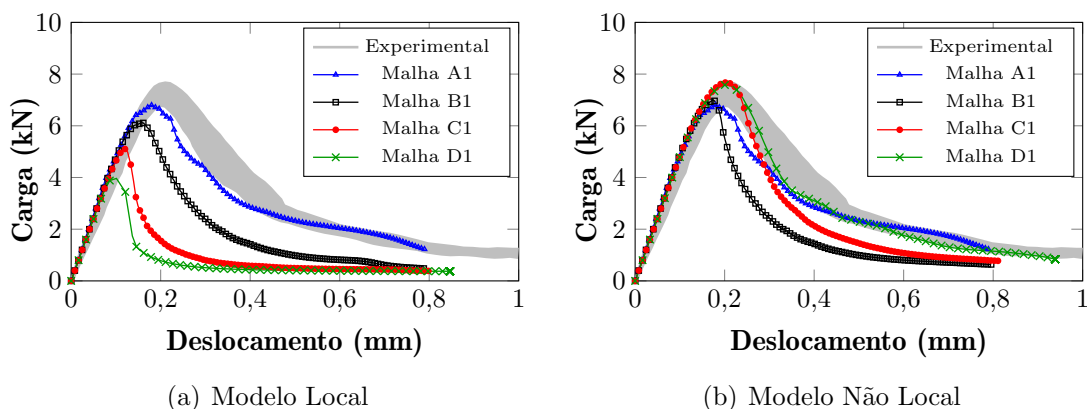


Figura 6.78: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o modelo MBLC1

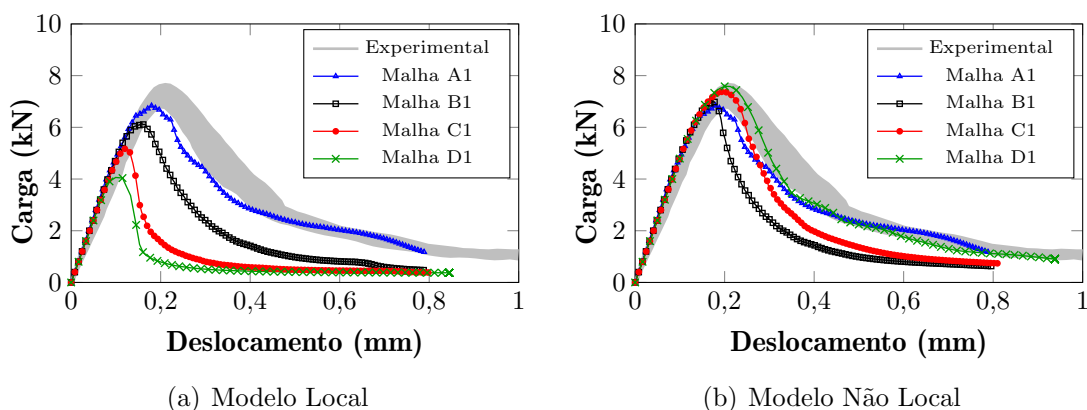


Figura 6.79: Trajetória de equilíbrio do deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga com o modelo MBLC2

Nesse ensaio com a malha A1, as respostas dos modelos se aproximaram do resultado experimental, entretanto, é necessário fazer o refinamento da malha para verificar se os resultados convergem. Nos modelos locais, a medida em que se refina a malha, os resultados ficam incoerentes e não se observa a convergência das respostas.

No ensaio com os modelos não locais, as curvas das malhas A1 e B1 não tiveram seus resultados regularizados, uma vez que o tamanho do raio não local não cobriu a quantidade de elementos suficientes para que atenuasse os efeitos da localização de deformações.

Já os resultados não locais das malhas C1 e D1 são normalizados, entretanto, as diferenças das trajetórias obtidas para essas malhas estão relacionadas ao padrão

de configuração das malhas. Eventualmente, em malhas regulares com elementos alinhados, poderia ser observada a convergência das trajetórias de equilíbrio dessas duas malhas.

As trajetórias não locais dos modelos referentes à malha D1 são concordantes com o espectro experimental, porém os modelos MBM1, MBM2 e MBV apresentam o pico de carga um pouco acima do que foi observado experimentalmente.

Como exemplo, apresenta-se na Figura 6.80, a evolução do dano na estrutura com as quatro malhas analisadas utilizando o MBLC1. Ressalta-se que o caminho percorrido pelo dano na malha D1 foi similar ao comportamento observado por Winkler et al. (2001) experimentalmente e numericamente (Figura 6.81).

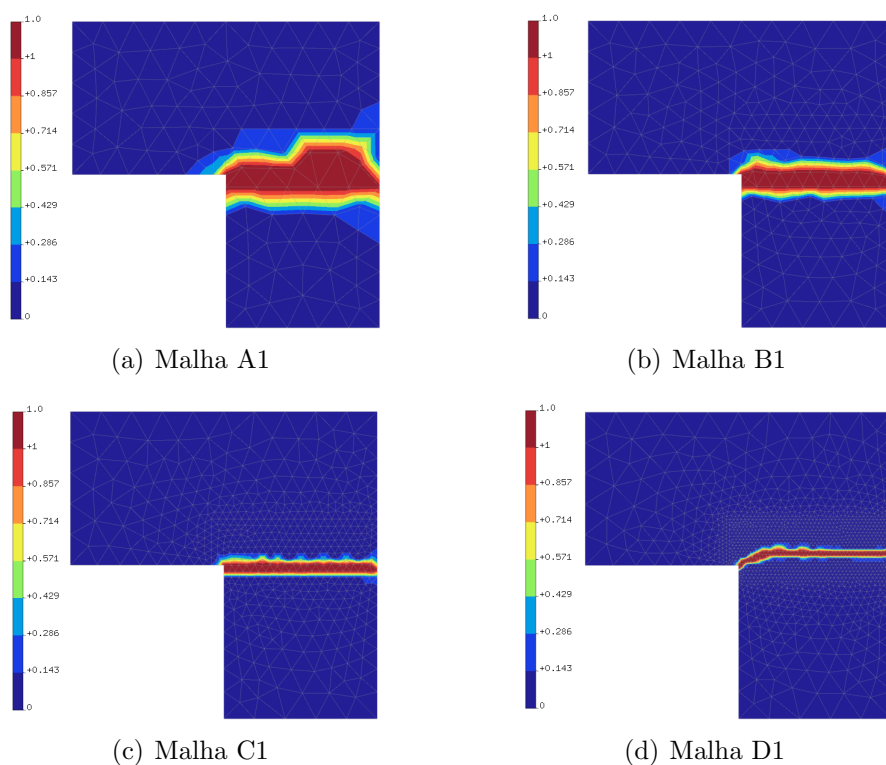


Figura 6.80: Caminho percorrido pelo dano nas malhas modeladas

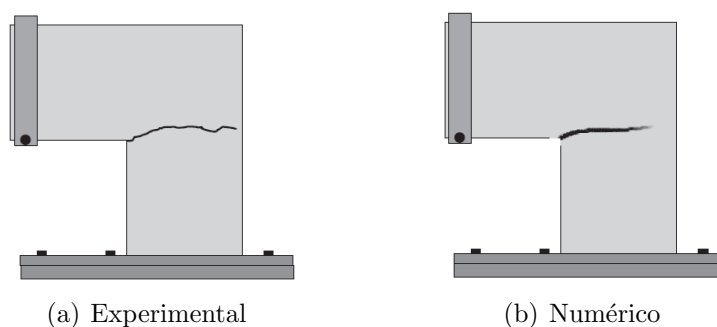


Figura 6.81: Propagação da trinca observada experimentalmente e numericamente por Winkler et al. (2001)

6.5 Ensaio de modo misto de fratura de Gálvez et al. (1998)

Uma viga de concreto foi apresentada por Gálvez et al. (1998) para um estudo numérico e experimental de propagação de fissuras em modo misto de fratura I e II. As dimensões da viga e o local de aplicação da carga estão detalhados na Figura 6.82.

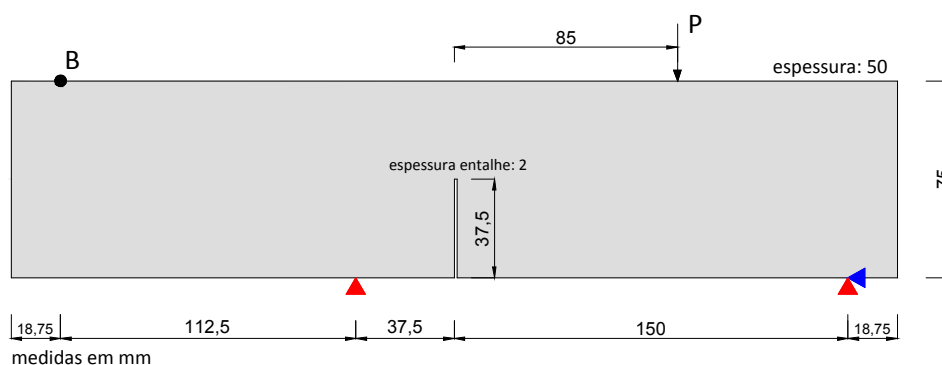


Figura 6.82: Dados geométricos da viga do ensaio de Gálvez et al. (1998)

O concreto utilizado nesse ensaio tem resistência à compressão (f_c) entre 54,0 MPa a 61,0 MPa, resistência à tração (f_t) entre 2,8 MPa a 3,2 MPa, energia de fratura (G_f) entre 0,061 N/mm a 0,075 N/mm e módulo de elasticidade (E_0) entre 38000 MPa a 39000 MPa. O diâmetro máximo do agregado desse concreto é de 5 mm, portanto, adotou-se o comprimento característico de $h = 15$ mm, que é 3

vezes da dimensão máxima do agregado. Novamente, para se determinar os parâmetros dos modelos de dano, empregaram-se as leis tensão-deformação de Boone e Ingraffea (1987) e Carreira e Chu (1985) para o concreto na tração e na compressão respectivamente, com propriedades do material descritas na Tabela 6.17.

Tabela 6.17: Propriedades do material

Leis tensão-deformação	
Tração	Compressão
Boone e Ingraffea (1987)	Carreira e Chu (1985)
$f_t = 2,8 \text{ MPa}$	$f_c = 56,8 \text{ MPa}$
$\kappa_0^+ = 7,30 \times 10^{-5}$	$\kappa_0^- = 0,002$
$G_f = 0,066 \text{ N/mm}$	
$h = 15 \text{ mm}$	

O módulo de elasticidade adotado foi de $E_0 = 38400 \text{ MPa}$ e o coeficiente de Poisson de $\nu = 0,2$. Foram modeladas quatro malhas com diferentes níveis de refinamento, conforme ilustradas na Figura 6.83. As malhas modeladas são formadas por elementos planos triangulares de três nós com arestas de dimensões aproximadas, respectivamente, de 20 mm, 10 mm, 5 mm e 2,5 mm na região mais refinada.

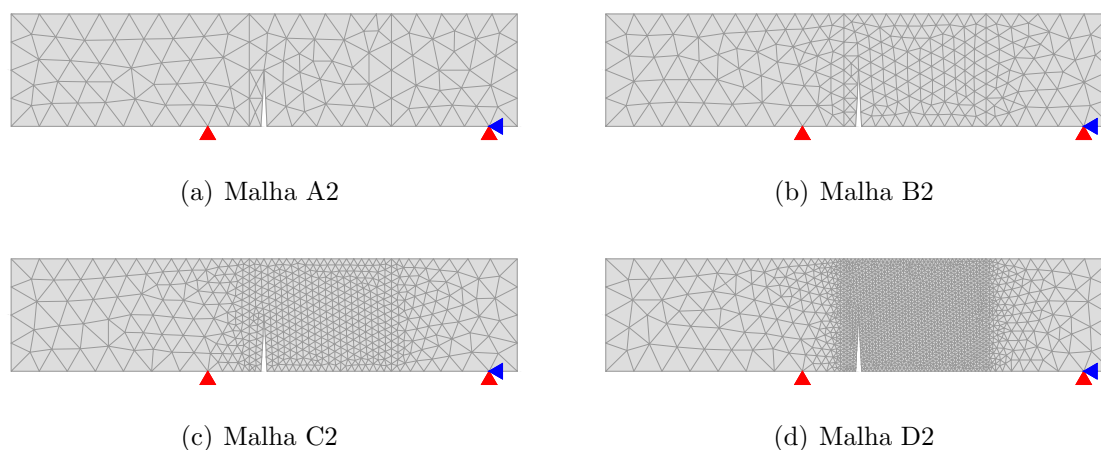


Figura 6.83: Malhas utilizadas no ensaio de comparação com experimento de Gálvez et al. (1998)

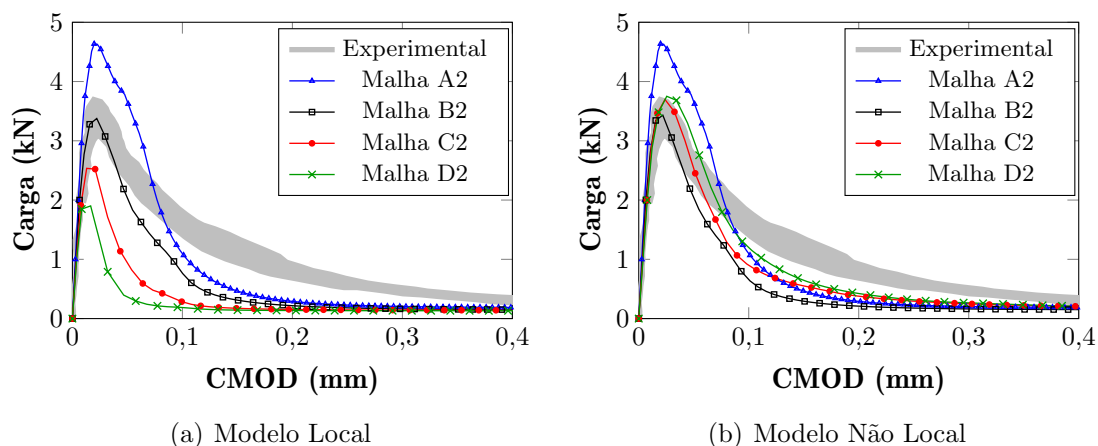
Os parâmetros dos modelos obtidos a partir da parametrização são especificados na Tabela 6.18.

Tabela 6.18: Parâmetros das leis de dano para os modelos formulados

MBM1	MBM2	MBV ($k_b = 1,45$)	MBLC1	MBLC2
Tração (Exponencial) $A = 0,980$ $B = 950$ $\kappa_0^+ = 7,30 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,980$ $B = 950$ $\kappa_0^+ = 7,30 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,980$ $B = 950$ $\kappa_0^+ = 7,30 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,980$ $B = 950$ $\kappa_0^+ = 7,30 \times 10^{-5}$	Tração (Exponencial) $A = 0,980$ $B = 950$ $\kappa_0^+ = 7,46 \times 10^{-5}$
Compressão (Polinomial) $T = 4,65$ $\tilde{E} = 15800$ $\kappa_0^- = 4,00 \times 10^{-4}$	Compressão (Polinomial) $T = 56,8$ $\tilde{E} = 38000$ $\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 33,5$ $\tilde{E} = 38000$ $\kappa_0^- = 1,20 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 56,8$ $\tilde{E} = 38000$ $\kappa_0^- = 2,00 \times 10^{-3}$	Compressão (Polinomial) $T = 57,4$ $\tilde{E} = 38000$ $\kappa_0^- = 2,05 \times 10^{-3}$

A carga de referência é de $P = 1000$ N e as trajetórias foram obtidas através do método de controle de deslocamento generalizado com incremento do fator de carga de 0,5. A medida em que se refina as malhas, será verificada a convergência dos resultados dos modelos locais e não locais. Para os modelos não locais, foi utilizada a função de peso do tipo Gaussiana com raio não local de $R = 15$ mm e a constante não local $K = 4,9$.

Os resultados dos modelos locais e não locais são apresentados pelas Figuras 6.84 a 6.98 em termos de carga por CMOD do entalhe, carga por deslocamento do ponto B e carga por deslocamento do ponto de aplicação de carga.

**Figura 6.84:** Carga por CMOD utilizando o modelo MBM1

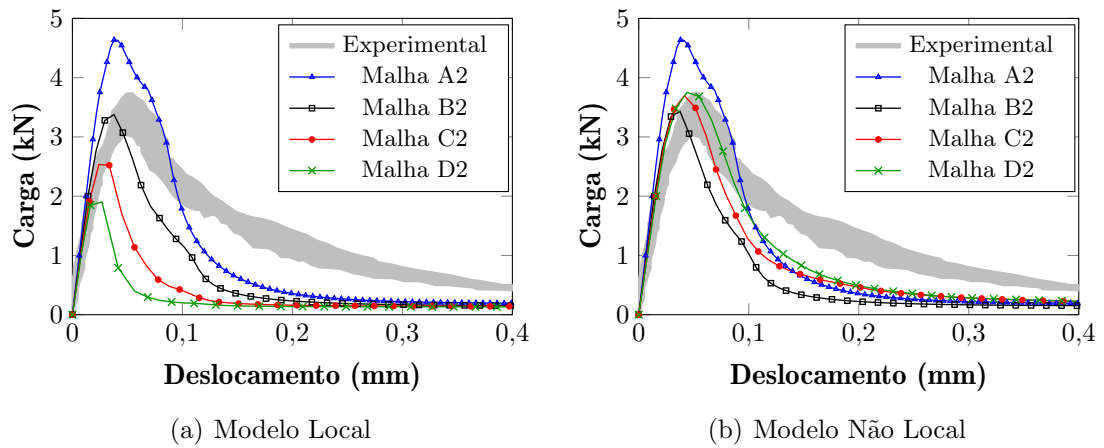


Figura 6.85: Carga por deslocamento vertical do ponto B utilizando o modelo MBM1

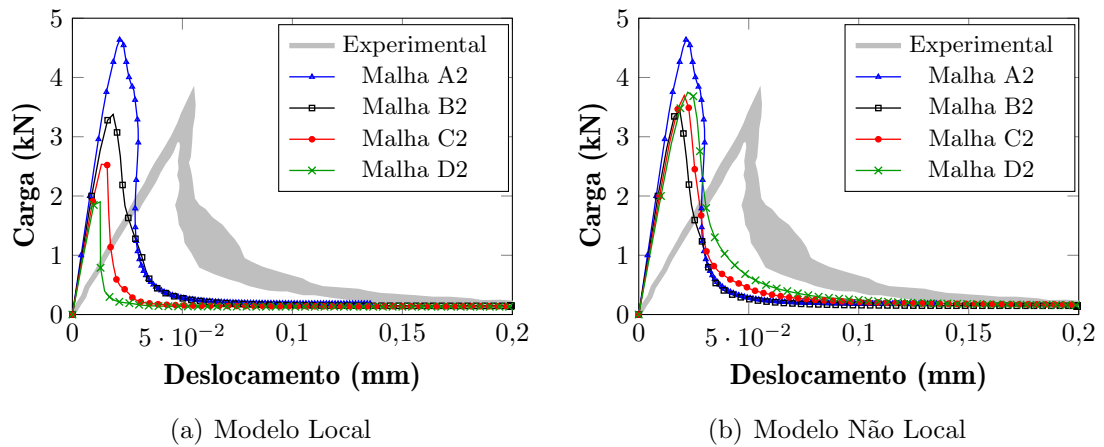


Figura 6.86: Carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga utilizando o modelo MBM1

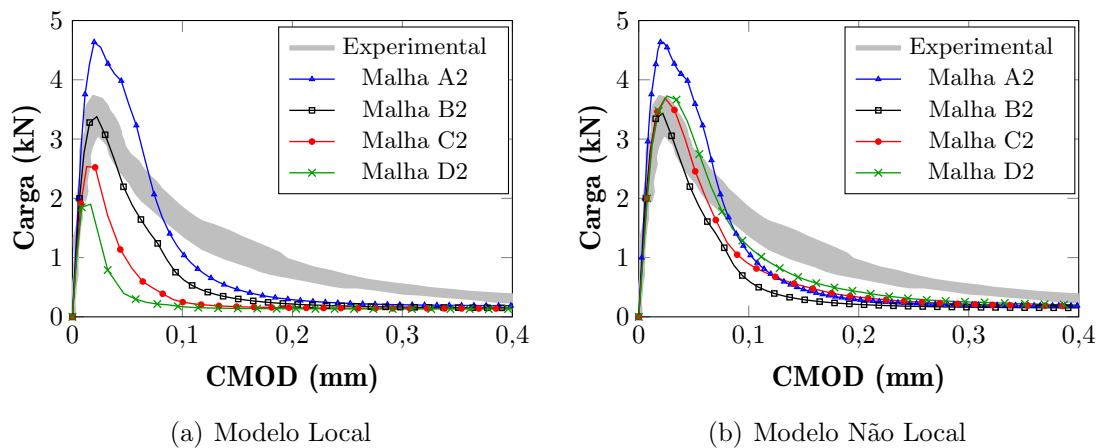


Figura 6.87: Carga por CMOD utilizando o modelo MBM2

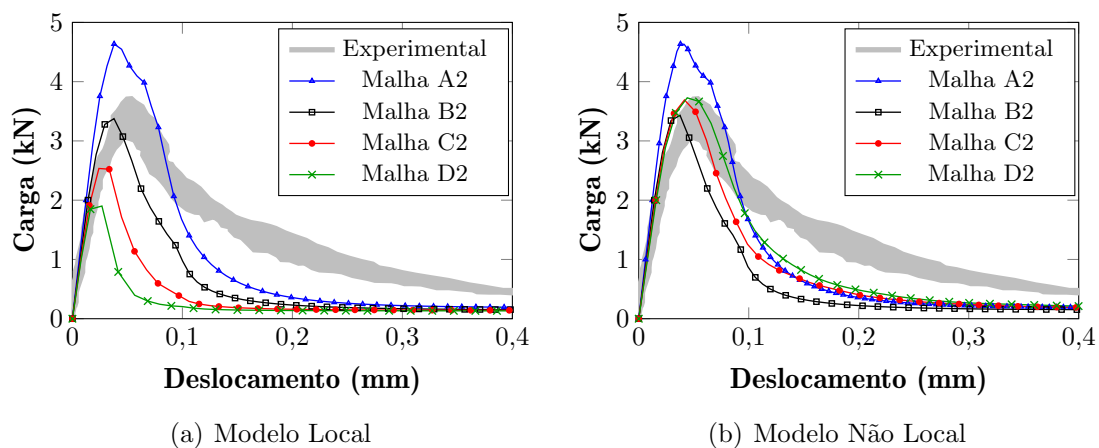


Figura 6.88: Carga por deslocamento vertical do ponto B utilizando o modelo MBM2

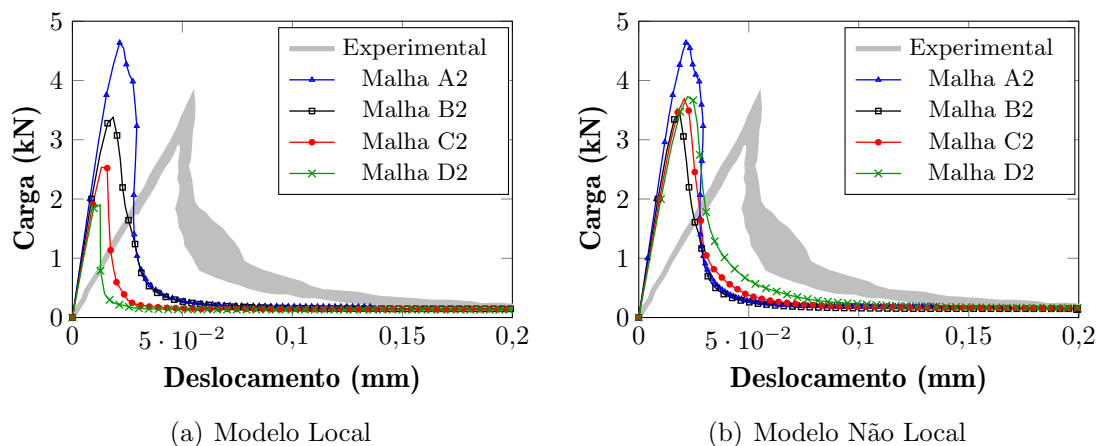


Figura 6.89: Carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga utilizando o modelo MBM2

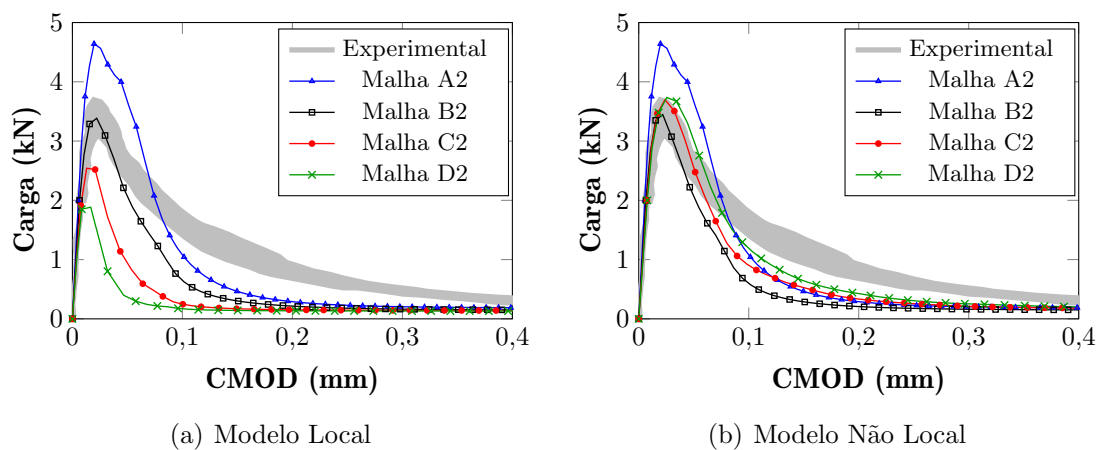


Figura 6.90: Carga por CMOD utilizando o modelo MBV

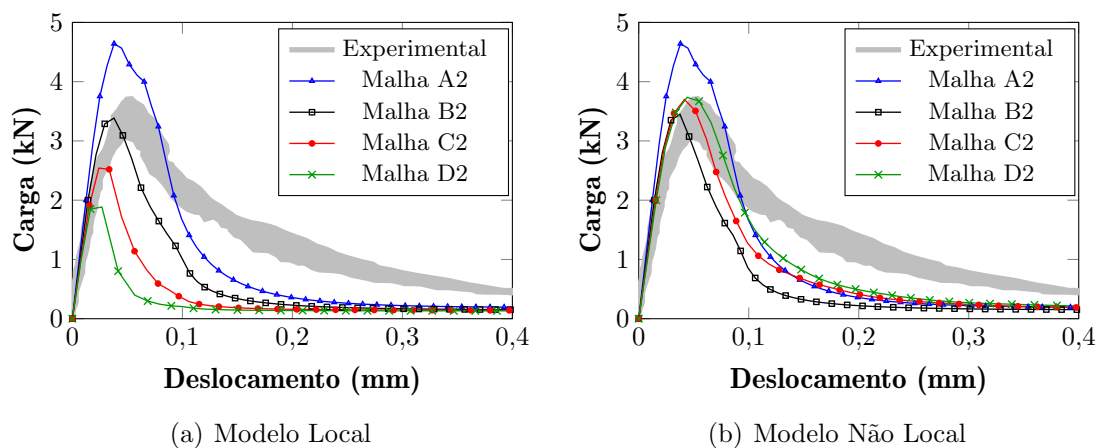


Figura 6.91: Carga por deslocamento vertical do ponto B utilizando o modelo MBV

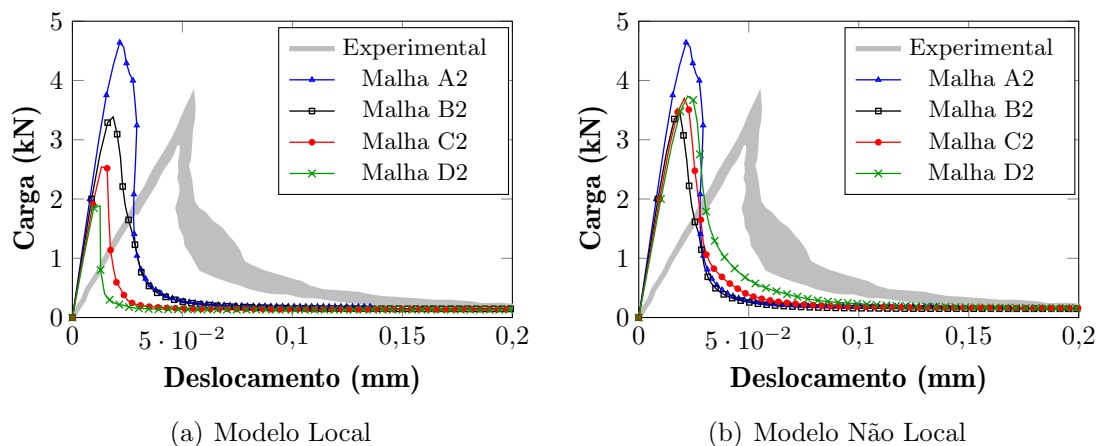


Figura 6.92: Carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga utilizando o modelo MBV

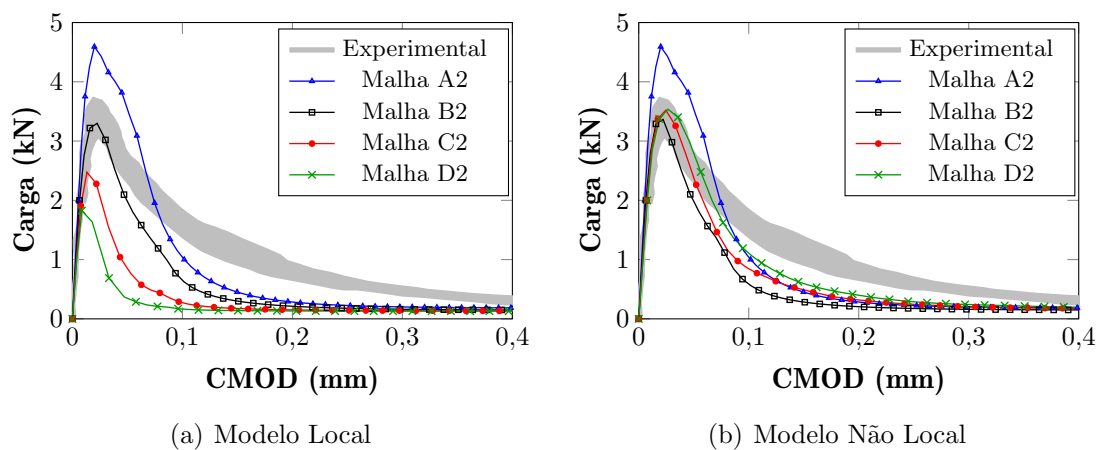


Figura 6.93: Carga por CMOD utilizando o modelo MBLC1

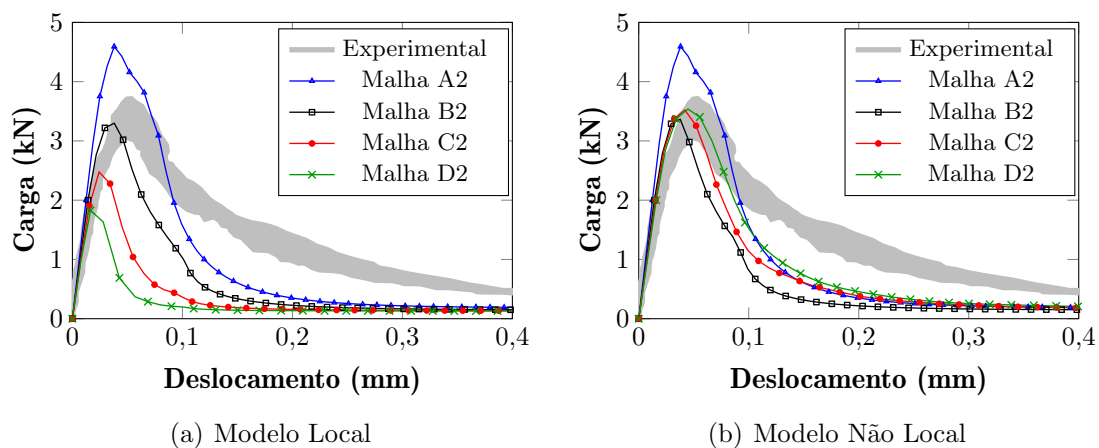


Figura 6.94: Carga por deslocamento vertical do ponto B utilizando o modelo MBLC1

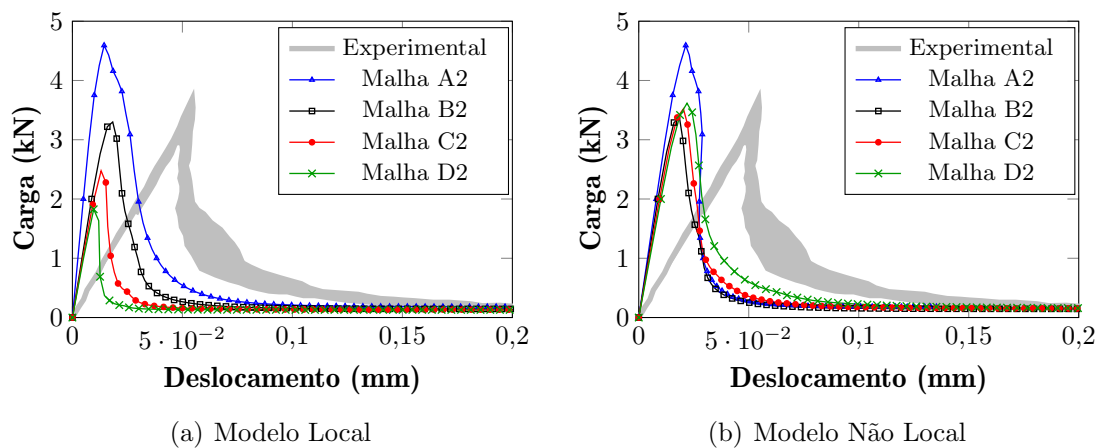


Figura 6.95: Carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga utilizando o modelo MBLC1

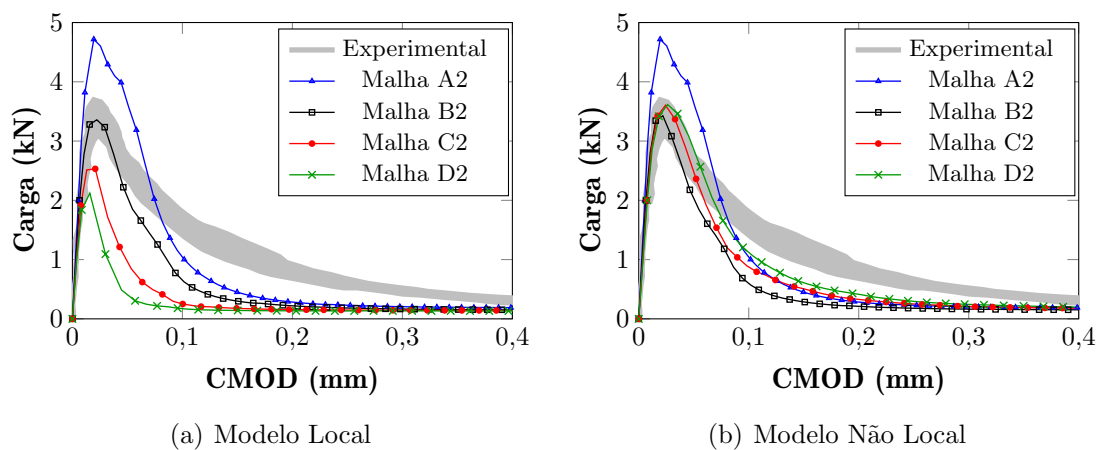


Figura 6.96: Carga por CMOD utilizando o modelo MBLC2

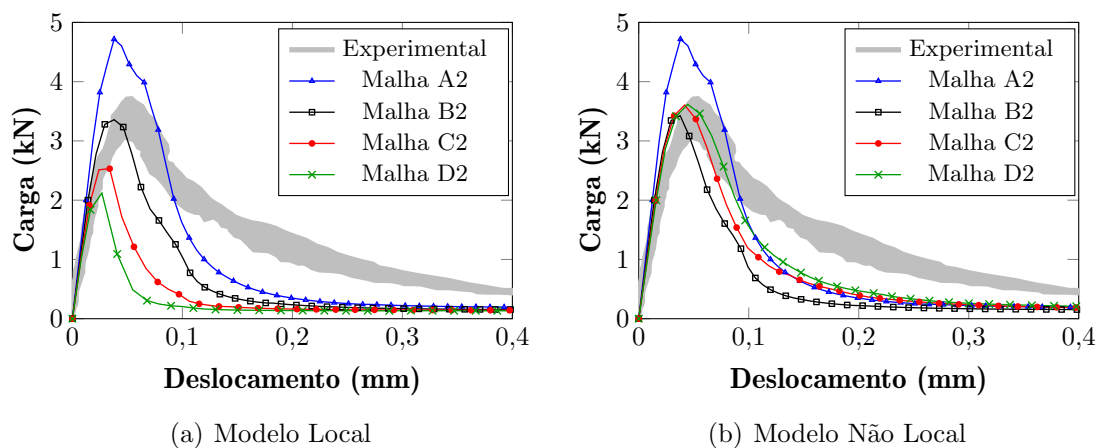


Figura 6.97: Carga por deslocamento vertical do ponto B utilizando o modelo MBLC2

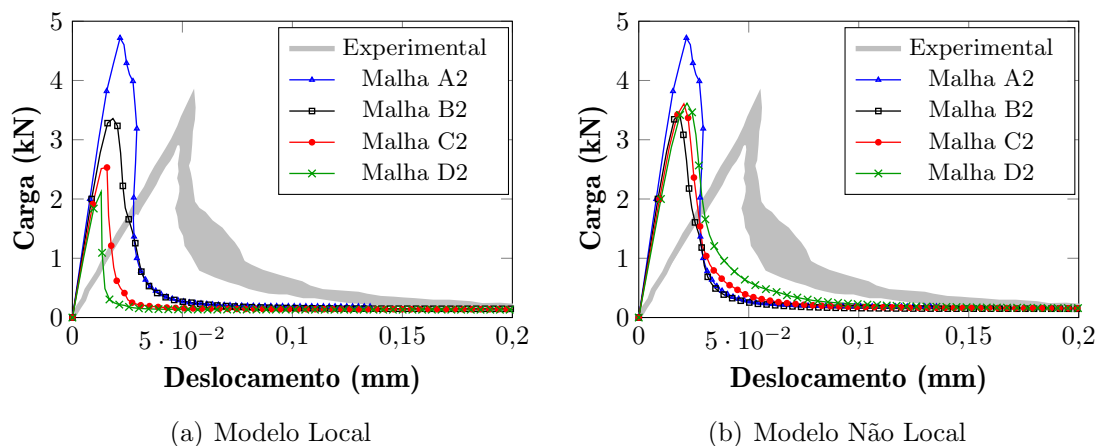


Figura 6.98: Carga por deslocamento vertical do ponto de aplicação da carga utilizando o modelo MBLC2

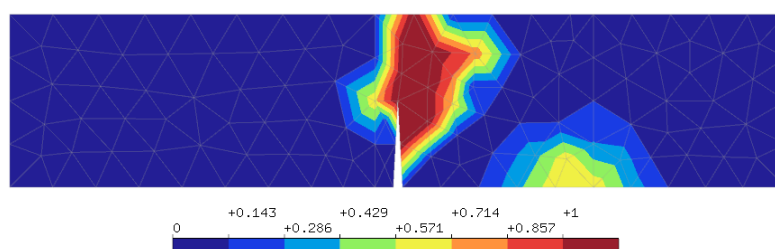
Semelhante ao que ocorreu no ensaio com Painel em forma de L, a cada passo em que se refina a malha, os resultados dos modelos locais ficam cada vez mais com picos menores de carga, demonstrando que o efeito da localização de deformações influenciou na resposta estrutural.

Já com os modelos não locais, observa-se a convergência dos resultados, ou seja, as trajetórias desses modelos ficam cada vez mais próximas uma das outras a medida em que se refina a malha.

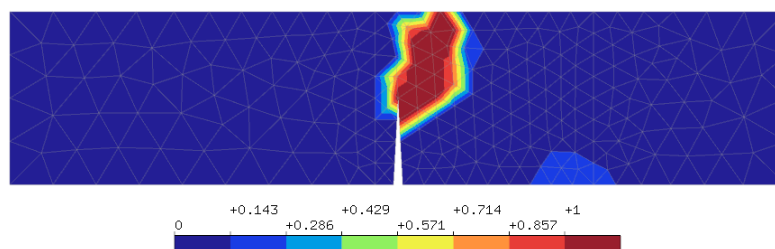
Em termos de CMOD do entalhe e o deslocamento do ponto B, os modelos propostos tiveram uma previsibilidade razoável do comportamento da estrutura.

Entretanto, os modelos não foram capazes de prever a trajetória de deslocamento do ponto de aplicação da carga, essa diferença de resultados pode ter relação com alguma condição do próprio ensaio experimental ou da natureza do processo de fissuração ser concentrado numa banda de fissuração estreita, o que seria melhor caracterizado por um modelo de trinca discreta.

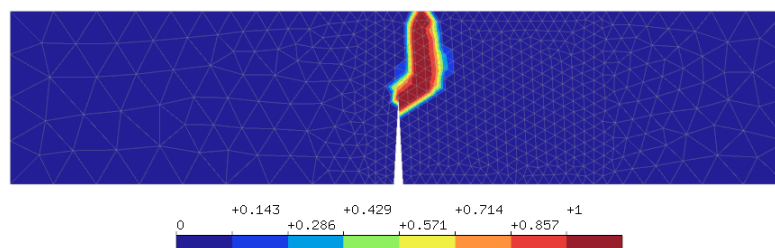
Na Figura 6.99, como exemplo, exibem-se as regiões degradadas nas malhas utilizadas no ensaio através do MBM1.



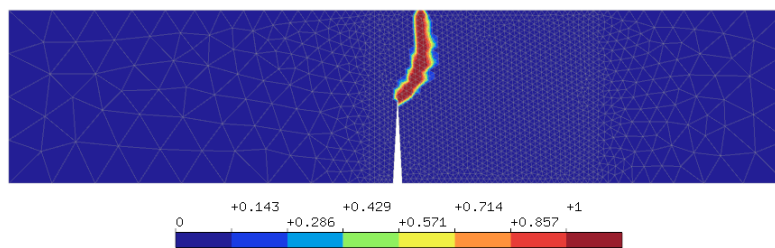
(a) Malha A2



(b) Malha B2



(c) Malha C2



(d) Malha D2

Figura 6.99: Região de degradação nas malhas modeladas

Ao se observar as regiões degradadas das malhas, ilustradas na Figura 6.99, o dano se inicia na ponta do entalhe, desviando-se ligeiramente na direção da carga e termina no topo da viga, em um ponto entre o entalhe e a carga.

Capítulo 7

Considerações Finais

Dado a complexidade na modelagem constitutiva do concreto, uma vez que o seu comportamento na tração se diferencia da compressão, novas propostas foram apresentadas neste trabalho para representar o comportamento bimodular dos materiais.

O comportamento do concreto diante de determinadas situações de carregamento foi investigado através de observações experimentais de diversos autores. O concreto possui resistência à tração em torno de 10 % de sua resistência à compressão e, ao observar o seu comportamento na tração, verifica-se que o material apresenta comportamento praticamente linear até a máxima tensão e, após o pico, o material tem uma perda drástica na capacidade de carga, o que caracteriza um comportamento mais frágil na tração. Na compressão, a não linearidade do material já se manifesta logo antes do pico de tensão, fazendo com o que a curva de tensão-deformação do concreto na compressão se assemelhe com uma lei do tipo polinomial.

Também foi estudado o comportamento do concreto em situações de carregamentos multiaxiais. Através da superfície de Kupfer et al. (1969), foi visto que em estado biaxial de tração, o material possui resistência de até 10 % de sua resistência à compressão e quando o material está submetido a compressão biaxial, sua resistência aumenta em torno de 10 % a 25 %. No estado combinado de tração e compressão, o material apresenta um comportamento intermediário entre ambos regimes, entretanto, a medida em que se aumenta os níveis de tensão de tração em

uma das faces, os limites de resistência se aproximam da resistência à tração do material nesse estado.

No capítulo 3, foram discutidos os fundamentos da mecânica do dano em meios contínuos e sua importância para análise não linear dos materiais devido ao processo de fissuração. Também foram abordados três modelos de dano isotrópico presentes na literatura, cujas leis se baseiam na degradação do material.

O modelo de Mazars (1984) tem a deformação equivalente calculada através das deformações principais positivas e possui um único formato de lei de evolução do dano do tipo exponencial para calcular o dano por tração e o dano por compressão. Além disso, tem-se apenas um único parâmetro κ_0 atribuído tanto para tração como para compressão. Portanto, apesar de ser possível diferenciar o comportamento na tração e na compressão, parametrizar materiais bimodulares com esse modelo se mostrou uma tarefa muito complexa.

A deformação equivalente do modelo de de Vree et al. (1995) é uma função dos invariantes do tensor de deformações. Embora esse modelo seja capaz de diferenciar a resistência do material na tração e na compressão, ele exibe leis de tensão-deformação com mesmo formato em ambos os regimes, dificultando a parametrização dos materiais bimodulares, cuja forma da curva de tensão-deformação de compressão é diferente da tração.

O modelo de Lemaitre e Chaboche (1990) não possui distinção alguma na resposta do material na tração e na compressão. Portanto, o modelo é capaz de representar com fidelidade apenas um dos regimes (tração ou compressão), o que inviabiliza sua aplicação na modelagem de estruturas de concreto.

Foram propostos modelos, cujas deformações equivalentes são baseadas nos modelos clássicos apresentados. Esses novos modelos possuem a versatilidade em se atribuir qualquer tipo de função de dano que melhor represente a evolução da degradação do meio material. Através de indicadores (primeiro invariante do tensor de deformações e o critério das tensões principais), foi possível separar as leis e os

parâmetros para cada tipo de estado, simplificando a parametrização dos materiais bimodulares e proporcionando uma melhor correspondência com a resposta do concreto em regimes uniaxiais e multiaxiais, conforme foi visto nos ensaios numéricos das Seções 6.1 e 6.2.

Sobre as versões propostas baseadas no modelo de Mazars (1984), o MBM1 utiliza o primeiro invariante do tensor de deformações para separar as leis e os parâmetros dos estados predominantes de tração e compressão. Esse modelo possui uma única deformação equivalente definida em termos das deformações principais positivas. O MBM2 utiliza o critério das tensões principais para que sejam atribuídas rotinas de cálculo que melhor se adequem ao tipo de estado multiaxial da análise e, para cada tipo de estado, são definidas deformações equivalentes específicas. No MBM1, a variável de dano é calculada de acordo com a ponderação dos efeitos de tração e compressão. Já no MBM2, a ponderação do dano somente é feita nos estados combinados de tração e compressão e, nos estados biaxial de tração e biaxial de compressão, o dano não é calculado pelo acoplamento do dano por tração e dano por compressão, pois nesses estados, entende-se que o dano é causado predominantemente por tração ou por compressão.

O MBV foi baseado no modelo de de Vree et al. (1995). O MBLC1 e o MBLC2 foram baseados em Lemaitre e Chaboche (1990). Nos estados combinados de tração e compressão, esses modelos calculam o dano através da ponderação de efeitos da tração e compressão, nos demais estados, essa ponderação não é feita. Dentre os modelos propostos, os que se mostraram menos suscetíveis a problemas de localização de deformações numericamente induzida foram o MBM2 e MBLC1, conforme foi visto na Seção 6.1.2.

Nos ensaios de parametrização da Seção 6.1 e na flexão de Petersson (1981), ficou evidente uma melhor correspondência das respostas dos modelos propostos com os resultados experimentais, devido a dois fatores. O primeiro é a independência das leis e parâmetros de tração e compressão, fazendo com que o comportamento do

material na tração não seja influenciado pelos parâmetros da compressão e vice-versa. O segundo fator é a liberdade em se atribuir funções de dano de tração e compressão que melhor se ajustem a lei do material em ambos regimes.

Uma abordagem não local foi utilizada nos modelos propostos para a regularização dos resultados com malhas muito refinadas. A formulação não local tratada neste trabalho é estabelecida através da média espacial da deformação equivalente, em termos da variável histórica.

Nos ensaios do capítulo 6, foram vistos ensaios de tração e compressão diretas com malhas com diferentes níveis de refinamento. Nesses testes, verificou-se que os modelos não locais foram menos suscetíveis a problemas numéricos, mostrando que os modelos não locais podem atenuar os efeitos da localização de deformações numericamente induzida.

Nos ensaio de García-Álvarez et al. (2012), Winkler et al. (2001) e Gálvez et al. (1998), ficou claro que a localização de deformações afetou os resultados numéricos dos modelos locais em malhas muito refinadas. Ao se utilizar os modelos não locais, os resultados puderam ser regularizados e a medida em que se refinava as malhas, observava-se a convergência dos resultados.

Todos os modelos propostos, locais e não locais, foram implementados no núcleo numérico do sistema **INSANE**. Cada modelo constitutivo foi constituído através da estrutura teórica unificada, estudada e desenvolvida no **INSANE** por Penna (2011), cuja pesquisa foi inspirada no trabalho de Carol et al. (1994). Para se associar a esses modelos, foi criada a classe `DamageableMaterialBimodularBehavior` que possui dois objetos do tipo `InelasticLaw` para representar leis de evolução do dano por tração e por compressão.

7.1 Sugestões para trabalhos futuros

Visando o aprimoramento e a expansão da modelagem constitutiva dos materiais parcialmente frágeis, principalmente o concreto, sugerem-se aos futuros trabalhos,

propostas pertinentes, como:

1. Estudar e implementar o modelo de Mazars et al. (2015). Nesse modelo, são definidas duas deformações equivalentes, uma específica da tração e a outra específica da compressão.
2. Para os modelos propostos neste trabalho, pode ser incluído o modo de degradação causada por deformações de distorção. Para isto, é necessária uma grandeza para medir a intensidade do cisalhamento, como por exemplo, o segundo invariante do tensor de deformações desviadoras.
3. As formulações aqui apresentadas também podem ser estendidas para outros modelos de dano isotrópico, podendo citar o modelo de Simo e Ju (1987).
4. Avaliar outras variáveis que possam ser utilizadas como a grandeza não local, na qual possuem variações sempre crescentes ou decrescentes durante toda a análise, como por exemplo, a variável de dano.

Referências Bibliográficas

- ABNT NBR 6118, 2014. ‘Projeto de estruturas de concreto - Procedimento’. *Associação Brasileira de Normas Técnicas*, p. 238.
- Ahmed, B., Voyiadjis, G. Z. e Park, T., 2021. ‘Local and non-local damage model with extended stress decomposition for concrete’. *International Journal of Damage Mechanics*, vol. 30(8), pp. 1149–1191.
- Álvares, M. S., 1993. Estudo de um modelo de dano para o concreto: Formulação, identificação paramétrica e aplicação com o emprego do método dos elementos finitos. Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Babu, R. R., Benipal, G. S. e Singh, A. K., 2010. ‘Constitutive model for bimodular elastic damage of concrete’. *Latin American Journal of Solids and Structures*, vol. 7, pp. 143–166.
- Badel, P., Godard, V. e Leblond, J., 2007. ‘Application of some anisotropic damage model to the prediction of the failure of some complex industrial structure’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 44, pp. 5848–5874.
- Bazant, Z. P. e Gopalaratnam, V. S., 1989. ‘Fracture mechanics of concrete: concepts, models and determination of material properties’. *American Concrete Institute*, .
- Bazant, Z. P. e Lin, F., 1988. ‘Nonlocal smeared cracking model for concrete fracture’. *Journal of Structural Engineering*, vol. 114(11).
- Bazant, Z. P. e Pijaudier-Cabot, G., 1989. ‘Measurement of characteristic length of non local continuum’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115(4), pp. 755–767.

- Birtel, V. e Mark, P., 2006. 'Parameterised finite element modelling of rc beam shear failure'. *ABAQUS Users' Conference*, pp. 95–108.
- Boone, T. e Ingraffea, A. R., 1987. 'Simulation of the fracture process at rock interfaces with application to hydrofracturing.'. *International Journal of Rock Mechanics and Minig Science*, vol. 23(3), pp. 255–265.
- Bristow, J. R., 1960. 'Microcracks and the static and dynamic elastic constants of annealed and heavily cold-work metals'. *British Journal of Applied Physics*, vol. 11, pp. 81–85. citado por Kachanov (1994).
- Budiansky, B. e O'Connell, R. J., 1976. 'Elastic moduli of a cracked solid'. *International Journal Solids and Structures*, vol. 12, pp. 81–97.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 1994. 'A unified theory of elastic degradation and damage based on a loading surface'. *International Journal Solids Structures*, vol. 5(1), pp. 2835–2865.
- Carol, I., Rizzi, E. e Willam, K., 2001c. 'On the formulation of anisotropic elastic degradation. ii. generalized pseudo-rankiner model for tensile damage'. *International Journal of Solids Structures*, vol. 38, pp. 519–546.
- Carreira, D. J. e Chu, K., 1985. 'Stress-strain relationship for plain concrete in compression'. *ACI Journal*, vol. 82(72).
- Chaboche, J. L., 1988. 'Continuum damage mechanics: Part i - general concepts'. *Journal of Applied Mechanics*, vol. 55.
- Chow, C. e Wang, J., 1987. 'An anisotropic theory of elasticity for continuum damage mechanics'. *International Journal of Fracture*, vol. 33(1), pp. 3–16.
- Comi, C., 2001. 'A non-local model tension and compression damage mechanims'. *European Journal of Mechanics*, .
- de Borst, R. e Gutiérrez, M. A., 1999. 'A unified framework for concrete damage and fractures models including size effects'. *International Journal of Fracture*, vol. 95, pp. 261–277.

- de Vree, J. H. P., Brekelmans, W. A. M. e van Gils, M. A. J., 1995. ‘Comparison of nonlocal approaches in continuum damage mechanics’. *Computers and Structures*, vol. 55(4), pp. 581–588.
- Elsheby, J. D., 1957. ‘The determination of the elastic field of an ellipsoidal and related problems’. *Proceedings of the Physical Society*, vol. 241A(1), pp. 376–396. citado por Kachanov (1994).
- Fuina, J. S., 2004. Métodos de controle de deformações para análise não-linear de estruturas. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fuina, J. S., 2009. Formulações de modelos de microplanos para contínuos generalizados. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.
- Gálvez, J., Elices, M., Guinea, G. V. e Planas, J., 1998. ‘Mixed mode fracture of concrete under proportional and nonproportional loading’. *International Journal of Fracture*, vol. 94, pp. 267–284.
- García-Álvarez, V., Carol, I. e Gettu, R., 2012. ‘Analysis of mixed-mode fracture in concrete using interface elements and a cohesive crack model’. *Sadhana*, vol. 37(1), pp. 187–205.
- Guetti, P. C., 2010. Métodos experimentais para determinação de propriedades do concreto baseados na mecânica da fratura. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Hordijk, D. A., 1991. Local approach to fatigue of concrete. Tese de doutorado, Technische Universiteit Delft, Delft, Holanda.
- Hordijk, D. A., 1992. ‘Tensile and tensile fatigue behavior of concrete; experiments, modelling and analyses’. *Heron*, vol. 37(1).
- Jirásek, M., 2004. ‘Non-local damage mechanics with application to concrete’. *RFGC*, vol. 8(1), pp. 683–707.

- Ju, J. W., 1989. ‘Energy based coupled elastoplastic damage theories: Constitutive modeling and computational aspects’. *International Journal Solids and Structures*, vol. 25(7), pp. 803–833.
- Ju, J. W., 1990. ‘Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 12, pp. 2764–2770.
- Kachanov, L. M., 1958. ‘On the time to rupture under creep conditions’. *Izv. Acad. Nauk SSSR, OTN*, (8), pp. 26–31. citado por Murakami (2012).
- Kachanov, L. M., 1986. *Introduction to continuum damage mechanics*. Vol. 1, Springer Science and Business Media Dordrecht.
- Kachanov, L. M., 1993. ‘Effective elastic properties of cracked solids’. *Department of Mechanical Engineering, Tufts University*, .
- Kachanov, L. M., 1994. ‘On the concept of damage in creep and in the brittle-elastic range’. *International Journal of Damage Mechanics*, (3).
- Krajcinovic, D., 1996. *Damage Mechanics*. Vol. 1, Elsevier Science B. V.
- Kupfer, H., Hilsdorf, H. K. e Rusch, H., 1969. ‘Behavior of concrete under biaxial stresses’. *ACI Journal*, vol. 66(52).
- La Bardorie, C., 2020. Sur une théorie de l’endommagement anisotrope. Tese de doutorado, Laboratoire de Mécanique et Technologi - Ecole Normale Superieure, Cachan, França. citado por Penna (2011).
- Lee, H., Peng, K. e Wang, J., 1985. ‘An anisotropic damage criterion for deformation instability and its application to forming limit analysis of metal plates’. *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 21(5), pp. 1031–1054.
- Lemaitre, J., 1984. ‘How to use damage mechanics’. *Nuclear Engineering and Design*, vol. 80(2), pp. 233–245.
- Lemaitre, J. e Chaboche, J. L., 1990. *Mechanics of Solids Materials*. Cambridge University Press, Cambridge.

- Lemaitre, J. e Desmorat, R., 2005. *Engineering Damage Mechanics - Ductile, Creep, Fatigue and Brittle Failures*. Springer, Cachan, França.
- Mackenzie, J. K., 1950. ‘Elastic constants of a solid containing spherical hole’. *Proceedings of the Physical Society*, vol. 63B(1), pp. 2–11. citado por Kachanov (1994).
- Mazars, J., 1984. Application de la mecanique de l’endommagement au comportement non lineaire et a la rupture du beton de structure. Tese de doutorado, Ecole Normale Supérieure de l’Enseignement Technique, Université Pierre et Marie Curie, Cachan, França.
- Mazars, J., Hamon, F. e Grange, S., 2015. ‘A new 3d damage model for concrete under monotonic, cyclic and dynamic loadings’. *Materials and Structures*, vol. 48, pp. 3779–3793.
- Mazars, J. e Pijaudier-Cabot, G., 1989. ‘Continuum damage theory - application to concrete’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 115(2).
- Mehta, P. K. e Monteiro, P. J. M., 2006. *Concrete Microstructure, Properties and Materials*. Vol. 1, 3 edn, The McGraw-Hill Companies, Inc., Department of Civil and Environmental Engineering University of California at Berkeley.
- Mindess, S., Young, J. F. e Darwin, D., 2003. *Concrete*. Vol. 1, 2 edn, Pearson Education, Inc.
- Murakami, S., 2012. *Continuum Damage Mechanics*. Vol. 1, Springer Science.
- Murakami, S. e Ohno, N., 1981. ‘A continuum theory of creep and creep damage’. *Iutam Symposium Leicester*, pp. 422–444.
- Penna, S. S., 2011. Formulação multipotencial para modelos de degradação elástica: Unificação teórica, proposta de novo modelo, implementação computacional e modelagem de estruturas de concreto. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG.

- Petersson, P. E., 1981. Crack growth and development of fracture zones in plain concrete and similar materials. Tese de doutorado, Division of Building Materials, Lund Institute of Technology, Lund, Suécia.
- Pianezzer, G. A., Gramani, L. M., Balbo, F. A. N. e Kaviski, E., 2017. ‘Aplicação dos métodos de homogeneização para obtenção das propriedades efetivas do concreto’. *Proceeding Series of the Brazilian Society of Applied and Computational Mathematics*, vol. 5(1).
- Pijaudier-Cabot, G. e Huerta, A., 1991. ‘Finite element analysis of bifurcation in non local strain softening solids’. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 90, pp. 905–919.
- Pituba, J. J. C., 2003. Sobre a formulação de um modelo de dano para o concreto. Tese de doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Proença, S. P. B., 1988. Sobre modelos matemáticos do comportamento não-linear do concreto: Análise crítica e contribuições. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil.
- Rabotnov, Y. N., 1969. *Continuum Damage Mechanics*. Amsterdam, Holanda. citado por Murakami (2012).
- Rodrigues, E. A., 2015. Um modelo multiescala concorrente para representar o processo de fissuração do concreto. Tese de doutorado, Universidade de São Paulo.
- Roels, S., Sermijn, J. e Carmeliet, J., 2002. ‘Modelling unsaturated moisture transport in autoclaved aerated concrete: A microstructural approach’. *Building Physics in the Nordic Countries*, vol. 6, pp. 167–174.
- Rots, J. G., Nauta, P., Kusters, G. M. A. e Blaauwendraad, J., 1985. ‘Smeared crack approach and fracture localization in concrete’. *Heron*, vol. 31(20).
- Sfer, D., Carol, I., Gettu, R. e Etse, G., 2002. ‘Study of the behavior of concrete under triaxial compression’. *Journal of Engineering Mechanics*, vol. 128(2), pp. 156–163.

- Shah, S. P., Swartz, S. e Ouyang, C., 1995. *Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other Quasi-Brittle Materials*. John Wiley and Sons, Inc., Nova York, Estados Unidos da América.
- Simo, J. C. e Ju, J. W., 1987. ‘Strain- and stress-based continuum damage models i. formulation’. *International Journal of Solids and Structures*, vol. 23(7), pp. 821–840.
- Souza, P. L., 2016. Modelo de dano ortotrópico não local aplicado à regularização de resultados na análise fisicamente não linear. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Stutzman, P., 2001. ‘Scanning electron microscopy in concrete petrography’. *Science of Concrete Special*, vol. Calcium Hydroxide in Concrete, pp. 59–72.
- Teixeira, E. C., 2020. Estudos da zona de transição de concretos preparados com metacaulim através de análise nanomecânica. Tese de doutorado, Universidade Federal da Paraíba, João Pessoa, PB, Brasil.
- Terrien, M., 1980. ‘Emission acoustique et comportement mécanique post-critique d’un béton sollicité en traction’. *Bulletin de Liaison Ponts et Chaussées*, (105), pp. 65–72. citado por Pituba (2003).
- Torrenti, J., Cabot, G. e Reynouard, J., 2010. *Mechanical Behavior of Concrete*. Vol. 1, ISTE Ltd and John Wiley and Sons, Inc.
- Tran, T., 2009. Contribution à l’étude du comportement mécanique et hidromécanique du béton. Tese de doutorado, Faculte des Sciences Appliquées.
- van Mier, J. G. M., 1984. Strain-softening of concrete under multiaxial loading conditions. Tese de doutorado, Eindhoven University of Technology.
- Voyiadjis, G. Z. e Kattan, P. I., 1996. ‘On the symmetrization of the effective stress tensor in continuum damage mechanics’. *Journal of the Mechanical Behavior of Materials*, vol. 7(2), pp. 139–165.

Winkler, B., Hofstetter, G. e Niederwanger, G., 2001. 'Experimental verification of a constitutive model for concrete cracking'. *Journal of Materials Design and Applications*, vol. 215(75).

Wolff, K. P., 2010. Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendido (xfem). Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.