

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas

Programa de Pós-graduação em Matemática

Pedro Callado Versiani de Souza Ferreira

O Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer e sua aplicação

Belo Horizonte

2021

Pedro Callado Versiani de Souza Ferreira

O Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer e sua aplicação

Versão final

Monografia de especialização apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientadora: Denise Bulgarelli Duczmal

Belo Horizonte

2021

2021, Pedro Callado Versiani de Souza Ferreira.
Todos os direitos reservados

Ferreira, Pedro Callado Versiani de Souza.

F383t O teorema de equivalência de Lax-Richtmyer e sua aplicação [manuscrito] / Pedro Callado Versiani de Souza Ferreira. — 2021.
36.f. il.

Orientadora: Denise Bulgarelli Duczmal.
Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências 36.


1. Matemática. 2. Análise numérica. 3. Métodos numéricos. 4. Diferenças finitas. 5. Fourier, Análise de. I. Duczmal, Denise Bulgarelli .II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática .III.Título.

CDU 51 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEX

ATA DA DEFESA DE MONOGRAFIA DO ALUNO PEDRO CALLADO VERSIANI DE SOUZA FERREIRA, REGULARMENTE MATRICULADO NO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA, DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 08 DE OUTUBRO DE 2021.

Aos oito dias do mês de outubro de 2021, às 17h00, em reunião pública virtual na Plataforma Teams pelo link <https://teams.microsoft.com/l/meetup-join/19%3a8671101cbceb4771b2effa4f15ffb5c8%40thread.tacv2/1633571597321?context=%7b%22Tid%22%3a%2264126139-4352-4cd7-b1fb-2a971c6f69a6%22%2c%22Oid%22%3a%228a7c6d26-4766-4c45-b208-dbbcae57bbc4%22%7d> (conforme mensagem eletrônica da Pró-Reitoria de Pós-Graduação de 26/03/2020, com orientações para a atividade de defesas durante a vigência da Portaria nº 1819), reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Coordenação do Curso de Especialização em Matemática, para julgar a defesa de monografia do aluno **Pedro Callado Versiani de Souza Ferreira**, intitulada: “*O Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer e sua aplicação*”, requisito final para obtenção do Grau de especialista em Matemática. Abrindo a sessão, a Senhora Presidente da Comissão, Profa. Denise Bulgarelli Duczmal, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se reservadamente sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado sem ressalvas e por unanimidade, com nota 100 e conceito A. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pela Senhora Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, a Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 08 de outubro de 2021.


PROFA. DRA. DENISE BULGARELLI DUCZMAL
Orientadora (UFMG)


PROF. DR. GUSTAVO BARBAGALLO DE OLIVEIRA
Examinador (UFMG)


DR. LUCCAS CASSIMIRO CAMPOS
Examinador (UNICAMP)


DR. URIEL MOREIRA SILVA
Examinador (UFMG)

Resumo

O teorema de equivalência de Lax-Richtmyer estabelece uma ferramenta fundamental no contexto de análise numérica, facilitando a validação teórica de esquemas de diferenças finitas (EDFs) — uma família de algoritmos para a aproximação numérica de soluções de equações diferenciais parciais (EDPs). Verifica-se que um EDF consistente é válido quando mostramos sua convergência e sua estabilidade. O teorema de equivalência garante, para EDFs consistentes, que convergência ocorre se — e somente se — tivermos estabilidade. Esse resultado é essencial na análise de tais esquemas devido à existência de diversas técnicas para avaliar estabilidade, aliado à complexidade de se provar a convergência. Neste trabalho, vamos analisar a base matemática dos esquemas de diferenças finitas, definindo as propriedades de consistência, estabilidade e convergência. Estudaremos a análise de Fourier no contexto de EDPs, apresentaremos o enunciado e a demonstração do teorema de equivalência e finalizaremos com a construção de um breve exemplo de sua aplicação.

Palavras-chave: Análise numérica. Teorema de equivalência de Lax-Richtmyer. Métodos numéricos. Diferenças finitas. Análise de Fourier.

Abstract

The Lax-Richtmyer equivalence theorem establishes a crucial tool in the context of numerical analysis, simplifying the theoretical validation of finite difference schemes (FDS) — a family of algorithms for the numerical approximation of solutions of partial differential equations (PDE). A consistent FDS is deemed valid when we can prove both its stability and its convergence. The equivalence theorem states that, for a consistent FDS, convergence occurs if — and only if — we also have stability. This result is essential in the analysis of such schemes due to the existence of numerous techniques for proving stability and the complexity of proving convergence. This work will analyze the mathematical basis of finite difference schemes, determining the consistency, stability, and convergence properties. We will also study Fourier analysis in the context of PDEs, present the equivalence theorem and its proof, and lastly, construct a brief example of its application.

Keywords: Numerical analysis. Lax-Richtmyer equivalence theorem. Numerical methods. Finite differences. Fourier analysis.

Sumário

1. Introdução	9
1.1. Motivação	9
1.2. Organização do trabalho	9
2. Equações diferenciais parciais	11
2.1. Definição	11
2.2. Problemas de valor inicial	11
2.3. Equação do transporte	12
3. Esquemas de diferenças finitas	13
3.1. Aproximação numérica de soluções	13
3.1.1. Discretização do domínio	13
3.1.2. Derivadas discretas	14
3.2. Esquemas de diferenças finitas	14
3.3. Propriedades de esquemas de diferenças finitas	15
3.3.1. Consistência	15
3.3.2. Estabilidade	16
3.3.3. Convergência	16
4. Análise de Fourier	17
4.1. Transformada de Fourier	17
4.2. Relação de Parseval	18
4.3. Fourier e EDPs	19
4.4. Análise de von Neumann	19
4.4.1. Fator de amplificação	19
4.4.2. Critério de von Neumann	20
4.5. Problemas bem-postos	21
4.6. Operadores de interpolação e truncamento	21
5. O Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer	23
5.1. Enunciado	23
5.2. Demonstração	23
5.2.1. Estabilidade implica convergência	23

5.2.2.	Instabilidade implica divergência	27
5.3.	Exemplo: aplicação ao esquema FTBS	31
5.3.1.	Consistência do FTBS	31
5.3.2.	Estabilidade do FTBS	32
5.3.3.	Conclusão — convergência do FTBS	34
6.	Considerações finais	35
A.	Apêndice	36
A.1.	Notação multi-índice	36
A.2.	Convergência ponto-a-ponto e convergência uniforme	36
A.3.	Espaços L^p	37
A.4.	Troca de somatório com integral	37
A.5.	Teorema da convergência dominada de Lebesgue	37
	Bibliografia	38

1. Introdução

1.1. Motivação

O teorema de equivalência de Lax-Richtmyer estabelece uma ferramenta fundamental no contexto de análise numérica, facilitando a validação teórica de esquemas de diferenças finitas (EDFs) — uma família de algoritmos para a aproximação numérica de soluções de equações diferenciais parciais. Ao analisar um esquema de diferenças finitas, usa-se três propriedades básicas: consistência, convergência e estabilidade. O teorema de equivalência estabelece uma relação entre essas propriedades: ele garante, para EDFs consistentes, que convergência ocorre se — e somente se — tivermos estabilidade. Esse resultado é essencial na análise de tais esquemas devido à existência de diversas técnicas para avaliar estabilidade, aliado à complexidade de se provar a convergência.

Neste trabalho, vamos analisar a base matemática dos esquemas de diferenças finitas, definindo as propriedades de consistência, estabilidade e convergência. Estudaremos a análise de Fourier no contexto de EDPs, apresentaremos o enunciado e a demonstração do teorema de equivalência e finalizaremos com a construção de um breve exemplo de sua aplicação.

A primeira demonstração do teorema de equivalência, publicada em 1956 por Peter Lax e Robert Richtmyer, depende de conceitos trabalhados em análise funcional. A maioria dos livros-texto que tratam de métodos numéricos para resolução de problemas envolvendo equações diferenciais parciais cita o artigo original, (LAX; RICHTMYER, 1956), ou o livro de Richtmyer e Morton, (RICHTMYER; MORTON, 1967), como referência à demonstração do teorema. O livro de Strikwerda, (STRIKWERDA, 2004), fornece uma alternativa mais elementar da demonstração, que utiliza conceitos básicos de análise real e teoria da medida. Este trabalho baseia-se no estudo da versão encontrada em (STRIKWERDA, 2004), com foco em explicitar o passo-a-passo no desenvolvimento da demonstração. Para o estudo dos conceitos de análise real e teoria da medida, consultamos (RUDIN, 1976) e (TAO, 2016), e para a fundamentação teórica de equações diferenciais parciais usamos (EVANS, 2010).

Ilustramos, ao final do trabalho, a utilização do teorema de equivalência na análise de um esquema de diferenças finitas para discretizar o problema de valor inicial envolvendo uma equação de transporte, que modela fenômenos nos quais há deslocamento de informação sem dissipação.

1.2. Organização do trabalho

Os primeiros capítulos proveem a fundamentação necessária ao estudo do teorema, que é demonstrado no último capítulo. Em linhas gerais, o texto foi organizado da seguinte forma:

- No capítulo 2, definimos o contexto de equações diferenciais parciais sobre o qual trabalharemos;
- No capítulo 3, discutimos os esquemas de diferenças finitas e sua construção;
- No capítulo 4, tratamos das importantes aplicações da transformada de Fourier ao contexto de equações diferenciais parciais;
- Por último, no capítulo 5, explicitamos o teorema de equivalência de Lax-Richtmyer e sua demonstração, seguido de um exemplo de uso.

2. Equações diferenciais parciais

2.1. Definição

Uma equação diferencial parcial (EDP) é uma equação que envolve as derivadas parciais de uma função desconhecida de duas ou mais variáveis. Solucionar uma equação diferencial consiste em encontrar (e, idealmente, descrever) um conjunto de funções que a satisfaz — tarefa que, de forma geral, é notoriamente difícil. Trabalharemos sobre a classe de EDPs lineares, que definimos a seguir.

Definição 2.1. Uma equação diferencial parcial *linear* é uma equação da forma

$$Pu = f, \tag{2.2}$$

onde:

- P é uma combinação linear de derivadas parciais (veja A.5);
- u é a função incógnita; e
- f é uma função conhecida.

Notação. Dizemos que:

- a EDP é *de ordem* k quando a maior derivada em P tem ordem k ; e
- a EDP é *homogênea* caso $f \equiv 0$.

Neste texto, adotaremos a noção de que o domínio da função u é constituído de uma dimensão temporal e várias dimensões espaciais. Além disso, nos restringimos apenas a funções reais cujo domínio tem a dimensão temporal limitada e o espaço é unidimensional — em outras palavras, consideraremos $u : [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Porém, todos os resultados mostrados aqui, inclusive o teorema de equivalência, podem ser estendidos a funções com várias dimensões espaciais.

2.2. Problemas de valor inicial

Existe uma gama de problemas envolvendo equações diferenciais. Nosso foco será nos problemas de valor inicial (PVI), em que queremos explorar a evolução de uma função no tempo atendendo às restrições da equação diferencial. Nesse tipo de problema, a condição inicial — isto é, os valores da

função em cada ponto do espaço em um tempo inicial t_0 — é conhecida a princípio, e nosso objetivo é descrever o comportamento da função à medida que o tempo passa.

Definição 2.3. Um *problema de valor inicial* é composto por uma EDP (2.2) e uma condição inicial $u_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} Pu(t, x) = f(x) \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.4)$$

A *solução* de um PVI é, idealmente, a descrição da função $u(t, x)$ para cada tempo $t \in [0, T]$ e cada $x \in \mathbb{R}$.

Ao tentar solucionar um problema de valor inicial esperamos que algumas condições básicas sejam satisfeitas; como, por exemplo, que a solução exista. O conceito de *problemas bem-postos* caracteriza — informalmente, a princípio — os PVIs que cumprem alguns requisitos necessários (mas não suficientes) para que sua resolução em um contexto numérico seja factível.

Definição 2.5. Um problema de valor inicial é dito *bem-posto* se sua solução satisfaz as seguintes condições:

1. A solução existe;
2. A solução é única; e
3. A solução depende continuamente da condição inicial.

A definição acima será posta em termos mais precisos na seção 4.5.

2.3. Equação do transporte

Para ilustrar os métodos e teoremas vistos no trabalho, tomaremos como exemplo a equação do transporte (ou advecção), uma EDP linear de primeira ordem no tempo. De forma geral, o problema de valor inicial para essa equação é dado por

$$\begin{cases} u_t(t, x) + au_x(t, x) = 0, \\ u(0, x) = u_0(x). \end{cases} \quad (2.6)$$

As soluções exatas da equação do transporte são caracterizadas pelo deslocamento de informação, isto é, os valores da função inicial u_0 são mantidos nas soluções posteriores u ao longo de curvas particulares do domínio, chamadas de curvas características. A solução do PVI (2.6) é dada por

$$u(t, x) = u_0(x - at). \quad (2.7)$$

Análises mais completas da equação do transporte podem ser encontradas em (STRIKWERDA, 2004), (KNOBEL, 2000) e (EVANS, 2010).

3. Esquemas de diferenças finitas

3.1. Aproximação numérica de soluções

Devido à grande dificuldade que geralmente encontramos ao buscar soluções de EDPs e descrevê-las analiticamente — até mesmo em situações nas quais lidamos com equações bem-comportadas e problemas bem-postos —, frequentemente é vantajoso recorrer a aproximações numéricas, utilizando métodos computacionais para estimar os valores das soluções sobre cada ponto do domínio. Tal abordagem, porém, vem com seus próprios desafios teóricos e práticos, os quais exploraremos a seguir.

3.1.1. Discretização do domínio

Ao definirmos um algoritmo que calcula soluções aproximadas, somos impossibilitados de lidar efetivamente com um domínio contínuo. Primeiramente, então, é necessário realizarmos uma *discretização* do domínio — particioná-lo em células isoladas, cada uma representando um valor único para uma região. Desse procedimento obtemos uma *malha discreta*, sobre a qual executaremos nossos cálculos.

Neste trabalho, consideraremos apenas malhas uniformes, isto é, cujas células são iguais em formato e tamanho, com espaçamento constante em cada dimensão do domínio. É possível, entretanto, criar malhas não-uniformes usando outras regras de particionamento, e elas podem trazer vantagens quanto à complexidade computacional do método.

Construímos, a seguir, a malha discreta sobre o plano (t, x) .

Definição 3.1. Definimos o *passo temporal* e o *passo espacial*, respectivamente, como as quantidades

$$\Delta t = k \quad \text{e} \quad \Delta x = h, \quad (3.2)$$

para algum valor de $k, h \in \mathbb{R}^+$.

Definição 3.3. Denotamos um ponto da nossa malha discreta como (t_n, x_m) , em que

$$(t_n, x_m) = (nk, mh) \in k\mathbb{Z} \times h\mathbb{Z}. \quad (3.4)$$

Notação. Ao longo do texto, adotaremos $u(t, x)$ para denotar funções cujo domínio é contínuo e $v_m^n = v(t_n, x_m) = v(nk, mh)$ para funções definidas sobre a malha discreta.

3.1.2. Derivadas discretas

O nosso objetivo é aproximar numericamente uma equação diferencial parcial, que determina uma relação entre as derivadas de uma função. Portanto, é fundamental termos uma representação da derivada de uma função sobre a malha discreta.

Lembramos da definição analítica da derivada (nesse caso, temporal) de uma função $u(t, x)$:

$$u_t(t, x) = \frac{\partial u}{\partial t}(t, x) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{u(t + \Delta t, x) - u(t, x)}{\Delta t}. \quad (3.5)$$

Como estamos trabalhando sobre um espaço discreto, não é possível calcular o limite na equação acima. Iremos aproximá-lo através de uma *diferença finita*, usando o espaçamento da malha definido em (3.1).

Definimos uma *diferença finita* da função $u(t_n, x_m)$ sobre os pontos $(t_n, x_m) = (nk, mh)$ de uma malha como uma versão discretizada de sua derivada. Alguns exemplos de diferenças finitas são:

$$\text{Avançada no tempo (forward-time)} \quad u_t(t_n, x_m) \simeq \frac{u(t_{n+1}, x_m) - u(t_n, x_m)}{k} \quad (3.6)$$

$$\text{Avançada no espaço (forward-space)} \quad u_x(t_n, x_m) \simeq \frac{u(t_n, x_{m+1}) - u(t_n, x_m)}{h} \quad (3.7)$$

$$\text{Atrasada no espaço (backward-space)} \quad u_x(t_n, x_m) \simeq \frac{u(t_n, x_m) - u(t_n, x_{m-1})}{h} \quad (3.8)$$

$$\text{Centrada no tempo (central-space)} \quad u_t(t_n, x_m) \simeq \frac{u(t_{n+1}, x_m) - u(t_{n-1}, x_m)}{2k} \quad (3.9)$$

As diferenças finitas podem ser obtidas de diversas maneiras, desde que se aproximem da derivada analítica à medida que os espaçamentos da malha diminuam. Além disso, é possível criar diferenças finitas de ordens maiores aplicando-se a diferença sucessivamente — por exemplo, podemos aplicar a diferença atrasada no tempo seguida da avançada no tempo para obtermos

$$\begin{aligned} u_{tt}(t_n, x_m) &\simeq \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{u(t_n, x_m) - u(t_{n-1}, x_m)}{k} \right) \\ &\simeq \frac{u(t_{n+1}, x_m) - u(t_n, x_m) - [u(t_n, x_m) - u(t_{n-1}, x_m)]}{k^2} \\ &= \frac{u(t_{n+1}, x_m) - 2u(t_n, x_m) + u(t_{n-1}, x_m)}{k^2}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

3.2. Esquemas de diferenças finitas

Com a definição de diferenças finitas em mãos, obtemos um método simples para aproximar uma EDP: podemos substituir as derivadas na equação por sua versão discretizada, construindo dessa forma

um esquema de diferenças finitas (EDF).

Definição 3.11. De forma geral, dado um problema de valor inicial na forma (2.3), definimos um *esquema de diferenças finitas* como

$$P_{k,h} v = f, \quad (3.12)$$

em que $P_{k,h}$ é um operador de diferenças, que descreve as diferenças finitas aplicadas sobre a função aproximada v .

Mostramos, a seguir, alguns exemplos de esquemas de diferenças finitas para a equação do transporte (equação 2.6). Cada um dos esquemas abaixo é criado a partir de uma combinação de diferenças finitas temporais e espaciais.

$$FTFS: \textit{forward-time, forward-space} \quad \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_m^n}{h} = 0 \quad (3.13)$$

$$FTBS: \textit{forward-time, backward-space} \quad \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0 \quad (3.14)$$

$$FTCS: \textit{forward-time, central-space} \quad \frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (3.15)$$

$$\textit{Leapfrog: central-time, central-space} \quad \frac{v_m^{n+1} - v_m^{n-1}}{2k} + a \frac{v_{m+1}^n - v_{m-1}^n}{2h} = 0 \quad (3.16)$$

Os esquemas acima utilizam a notação definida na seção 3.1.1 para representar a solução aproximada v .

Definição 3.17. Um esquema de diferenças finitas que envolve a solução apenas em dois tempos consecutivos — por exemplo, em n e $n + 1$ — é chamado de esquema de *passo único*. Caso contrário, é um esquema de *passos múltiplos*.

Dentre os esquemas (3.13-3.16) mostrados acima, apenas o *Leapfrog* é de passos múltiplos.

3.3. Propriedades de esquemas de diferenças finitas

Nesta seção, vamos explorar algumas propriedades dos esquemas de diferenças finitas que nos permitem avaliar, de maneira mais precisa, o quão adequado é um EDF para aproximar as soluções de um problema de valor inicial.

3.3.1. Consistência

Definição 3.18. Dados uma equação diferencial parcial $Pu = f$ e um esquema de diferenças finitas $P_{k,h} v = f$, dizemos que o esquema é *consistente* com a equação se, para qualquer função suave $\Phi(t, x)$, temos

$$P\Phi - P_{k,h}\Phi \rightarrow 0 \quad (3.19)$$

à medida que k e h tendem a zero, considerando a convergência ponto-a-ponto (veja a definição A.6) em cada valor de (t, x) .

3.3.2. Estabilidade

Definição 3.20. Uma *região de estabilidade* é um subconjunto do primeiro quadrante do plano \mathbb{R}^2 na qual a origem é um ponto de acumulação.

Notação. Denotamos a norma L^2 de uma função discreta w definida sobre a malha (Definição 3.3) como

$$\|w\|_h = \left(h \sum_{m=-\infty}^{\infty} |w_m|^2 \right)^{1/2}.$$

Definição 3.21. Um esquema de diferenças finitas $P_{k,h} v = 0$ para uma EDP de primeira ordem é *estável* em uma região de estabilidade Λ se existe $J \in \mathbb{N}$ tal que, para cada tempo $T > 0$, existe uma constante C_T tal que

$$\|v^n\|_h \leq C_T \sum_{j=0}^J \|v^j\|_h \quad (3.22)$$

para $nk \in [0, T]$ e $(k, h) \in \Lambda$. Para que um esquema seja estável, frequentemente devemos restringir os valores de k e h .

3.3.3. Convergência

Definição 3.23. Um esquema de diferenças finitas de passo único que aproxima uma equação diferencial parcial é *convergente* se satisfaz ambas as condições abaixo:

1. A aproximação da solução inicial converge para a solução inicial exata, ou seja,

$$\lim_{mh \rightarrow x} v_m^0 = u_0(x); \quad e \quad (3.24)$$

2. Para qualquer solução $u(t, x)$ da EDP e solução v_m^n do esquema de diferenças finitas, temos que

$$v_m^n \rightarrow u(t, x) \quad \text{ponto-a-ponto} \quad (3.25)$$

à medida que $(nk, mh) \rightarrow (t, x)$ e $h, k \rightarrow 0$.

De maneira geral, a convergência é a característica mais desejada nos esquemas de diferenças finitas, pois garante que as soluções aproximadas que obtemos no esquema se aproximam das soluções reais da EDP. Entretanto, frequentemente precisamos de ferramentas analíticas mais poderosas para demonstrar convergência do que para demonstrar consistência e estabilidade. Daí vem a importância do teorema de equivalência de Lax-Richtmyer: ele nos fornece uma caracterização da convergência de um esquema a partir da sua estabilidade.

4. Análise de Fourier

Neste capítulo exploraremos as aplicações da transformada de Fourier ao estudo de equações diferenciais parciais, que dão origem a uma série de resultados cruciais para a análise de esquemas de diferenças finitas.

4.1. Transformada de Fourier

Trabalharemos com a transformada de Fourier em L^2 .

Definição 4.1. Seja u uma função real. Definimos sua *transformada de Fourier* \hat{u} como

$$\hat{u}(\xi) = \mathcal{F}(u(x)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x) dx. \quad (4.2)$$

A função $\hat{u}(\xi)$ é definida unicamente para cada $u(x)$ e vice-versa. Sendo assim, para cada $\hat{u}(\xi)$ podemos obter a função original $u(x)$ através da *transformada inversa de Fourier*:

$$u(x) = \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}(\xi)) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi. \quad (4.3)$$

Teorema 4.4. A transformada de Fourier e sua inversa são lineares.

Demonstração. Sejam f e g funções integráveis e $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. Usando a linearidade da integral, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\alpha f + \beta g)(\xi) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} [\alpha f(x) + \beta g(x)] dx \\ &= \alpha \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} f(x) dx \right] + \beta \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} g(x) dx \right] \\ &= \alpha \mathcal{F}(f)(\xi) + \beta \mathcal{F}(g)(\xi). \end{aligned} \quad (4.5)$$

□

4.2. Relação de Parseval

Definição 4.6. A *relação de Parseval* nos garante que a transformada de Fourier preserva a norma L^2 de uma função, ou seja:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx \quad (4.7)$$

Demonstração. Lembrando que, para $z \in \mathbb{C}$, temos

$$|z|^2 = \bar{z}z, \quad (4.8)$$

calculamos:

$$\begin{aligned} \|\widehat{u}\|_2^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{u}(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{u}(\xi)} \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\widehat{u}(\xi)} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} u(x) dx \right] d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ix\xi} \overline{\widehat{u}(\xi)} d\xi \right] u(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi \right]} u(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(x)} u(x) dx \\ &= \|u\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

□

Usaremos extensivamente a relação de Parseval neste trabalho para avaliar o crescimento das soluções de um EDF em um domínio temporal. As demonstrações a seguir, portanto, valem apenas na norma L^2 — incluindo a do teorema de equivalência de Lax-Richtmyer (5.1).

Notação. A partir de agora, todas as normas denotadas como $\|\cdot\|$ serão a norma L^2 . Veja a definição (A.8).

4.3. Fourier e EDPs

A transformada de Fourier também nos fornece uma alternativa mais simples de trabalhar com equações diferenciais. Derivando a transformada inversa de Fourier, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial x} [e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi)] d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} i\xi e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Ou seja, a operação de diferenciação vira multiplicação sob a transformada de Fourier:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) (\xi) = i\xi \widehat{u}(\xi). \quad (4.11)$$

Isso significa que, ao aplicarmos a transformada de Fourier a equações diferenciais parciais, muitas vezes obtemos equações cuja solução é mais simples — como equações diferenciais ordinárias ou equações algébricas. Esse fato é fundamental para o nosso trabalho, pois sob a transformada de Fourier, uma equação diferencial parcial de primeira ordem no tempo torna-se uma equação diferencial ordinária na forma

$$\widehat{u}_t = q(\xi) \widehat{u}, \quad (4.12)$$

com $q(\xi) \widehat{u}(\xi) = \mathcal{F}(Pu)(\xi)$.

4.4. Análise de von Neumann

A análise de von Neumann nos fornece uma maneira mais simples de aferir a estabilidade de um esquema de diferenças finitas. Ela parte da aplicação da transformada de Fourier ao esquema, revelando uma relação de recorrência entre as soluções aproximadas de cada tempo.

4.4.1. Fator de amplificação

Como definimos na seção 4.1, podemos aplicar a transformada inversa de Fourier à nossa solução discreta v_m^n para obter

$$v_m^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{imh\xi} \widehat{v}^n(\xi) d\xi. \quad (4.13)$$

De maneira similar, calculamos

$$v_m^{n+j} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{imh\xi} \widehat{v}^{n+j}(\xi) d\xi \quad e \quad (4.14)$$

$$v_{m+j}^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{imh\xi} e^{ih\xi j} \widehat{v}^n(\xi) d\xi .$$

A análise de von Neumann consiste em aplicar as relações mostradas acima no esquema de diferenças finitas que queremos analisar. Caso o esquema seja de passo único (definição 3.17), ficamos com uma relação entre passos consecutivos que tem a forma

$$\widehat{v}^{n+1}(\xi) = g(h\xi, k, h) \widehat{v}^n . \quad (4.15)$$

Como essa relação de recorrência é válida para cada iteração do EDF, chegamos à fórmula

$$\widehat{v}^n(\xi) = g(h\xi, k, h)^n \widehat{v}^0 , \quad (4.16)$$

em que o sobrescrito em $g(h\xi, k, h)$ denota exponenciação e o sobrescrito em \widehat{v} é o índice temporal da aproximação.

Definição 4.17. Chamamos a função $g(h\xi, k, h)$ na equação (4.16) de *fator de amplificação*. Ele determina o crescimento da solução discreta a cada iteração do esquema de diferenças finitas, é uma função algébrica de $e^{ih\xi}$ e é contínua.

4.4.2. Critério de von Neumann

Usando o fator de amplificação, obtemos uma maneira de avaliar a estabilidade de um EDF de passo único.

Teorema 4.18. Um esquema de diferenças finitas de passo único com coeficientes constantes é estável em uma região de estabilidade Λ se, e somente se, existe uma constante C (independente de h, k e ξ) tal que

$$|g(h\xi, k, h)| \leq 1 + Ck , \quad (4.19)$$

para $(k, h) \in \Lambda$.

A demonstração do teorema pode ser encontrada em (STRIKWERDA, 2004, p.52).

Para esquemas de passos múltiplos, a relação de recorrência (4.15) envolve mais termos e o fator de amplificação (4.17) é um polinômio. A análise de estabilidade nesse caso segue um princípio similar, mas está além do escopo deste trabalho.

4.5. Problemas bem-postos

Na seção 2.2 falamos, em linhas gerais, das suposições para que um problema de valor inicial seja bem-posto. Agora, definiremos esse conceito de maneira mais precisa para equações diferenciais parciais lineares de primeira ordem.

Definição 4.20. Um problema de valor inicial para uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem no tempo é bem-posto se para cada $t \in [0, T]$ existe uma constante C_t , independente da solução $u(t, \cdot)$, para a qual a equação

$$\|u(t, \cdot)\| \leq C_t \|u(0, \cdot)\| \quad (4.21)$$

vale para qualquer condição inicial $u(0, \cdot)$.

Uma equação de primeira ordem em relação ao tempo pode ser escrita na seguinte forma, sob a transformada de Fourier:

$$\widehat{u}_t(t, \xi) = q(\xi)\widehat{u}(t, \xi). \quad (4.22)$$

Isso parte das propriedades descritas na seção 4.3. Portanto, um problema de valor inicial nessa forma tem solução

$$\widehat{u}(t, \xi) = e^{q(\xi)t}\widehat{u}_0(\xi), \quad (4.23)$$

pois (4.22) é uma equação diferencial ordinária de primeira ordem.

Temos a seguir uma caracterização importante de problemas bem-postos sob a norma L^2 .

Teorema 4.24. Um problema de valor inicial na forma $\widehat{u}_t(t, \xi) = q(\xi)\widehat{u}(t, \xi)$ é bem-posto se, e somente se, existe uma constante K tal que

$$\operatorname{Re} q(\xi) \leq K \quad (4.25)$$

para todo $\xi \in \mathbb{R}$.

A demonstração do teorema pode ser encontrada em (STRIKWERDA, 2004, p.207).

4.6. Operadores de interpolação e truncamento

Definimos, agora, uma dupla de operadores funcionais que serão úteis no estudo da convergência dos esquemas de diferenças finitas — o operador de interpolação \mathcal{S}_h e o de truncamento \mathcal{T}_h . A ideia por trás de ambos os operadores é semelhante: fazemos a transformada de Fourier da função seguida da transformada inversa; excluindo, no segundo passo, as frequências maiores que π/h . Tais operadores são, portanto, dependentes do tamanho do particionamento espacial h .

Definição 4.26. O *operador de interpolação* \mathcal{S}_h mapeia funções integráveis definidas em uma malha discreta (isto é, funções $L^2(h\mathbb{Z})$) para funções em $L^2(\mathbb{R})$. Para uma função $v \in L^2(h\mathbb{Z})$, temos

$$\mathcal{S}_h v(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{ix\xi} \widehat{v}(\xi) d\xi. \quad (4.27)$$

Definição 4.28. O operador de truncamento \mathcal{T}_h mapeia funções em $L^2(\mathbb{R})$ para funções em $L^2(h\mathbb{Z})$. Sendo u uma função em $L^2(\mathbb{R})$, temos

$$\mathcal{T}_h u_m = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{imh\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi. \quad (4.29)$$

Observe que, para $|\xi| \leq \pi/h$, temos

$$\widehat{\mathcal{T}_h u}(\xi) = \widehat{u}(\xi) \quad \text{e} \quad \widehat{\mathcal{S}_h v}(\xi) = \widehat{v}(\xi). \quad (4.30)$$

Além disso, podemos ver que

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_h \mathcal{T}_h u &= \mathcal{S}_h (\mathcal{T}_h u) (x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ix\xi} \left(\widehat{\mathcal{T}_h u} \right) (\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ix\xi} \widehat{u}(\xi) d\xi \\ &= \mathcal{F}^{-1}(\widehat{u}(\xi) \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq \pi/h\}}). \end{aligned} \quad (4.31)$$

Com a definição do operador de interpolação \mathcal{S}_h (4.26), podemos definir de maneira mais precisa a condição de convergência (3.23) de um esquema de diferenças finitas.

Definição 4.32. Um esquema de diferenças finitas que aproxima um problema de valor inicial homogêneo para uma equação diferencial parcial é *convergente* se, para toda solução u da EDP e todo conjunto de soluções v do EDF (dependendo de h e k), temos

$$\mathcal{S}_h v^n \rightarrow u(t_n, \cdot) \quad (4.33)$$

sob a norma L^2 , onde $t_n = nk$, e supondo que $\mathcal{S}_h v^0 \rightarrow u_0$ em L^2 à medida que $(k, h) \rightarrow (0, 0)$ na região de estabilidade Λ .

5. O Teorema de Equivalência de Lax-Richtmyer

Chegamos, enfim, ao resultado principal do nosso trabalho: o teorema de equivalência proposto por Peter Lax e Robert Richtmyer (LAX; RICHTMYER, 1956), que determina uma relação-chave entre as propriedades de um esquema de diferenças finitas.

5.1. Enunciado

Teorema 5.1. Um esquema de diferenças finitas consistente para uma equação diferencial parcial linear de primeira ordem — cujo problema de valor inicial é bem posto — é convergente se, e somente se, é estável.

5.2. Demonstração

A prova do teorema é dividida, naturalmente, em duas partes: primeiramente, mostramos que a estabilidade de um esquema consistente é suficiente para termos convergência; e, em seguida, que um esquema consistente e instável é divergente — isto é, que convergência implica estabilidade.

5.2.1. Estabilidade implica convergência

Demonstração. Para começar, suponha que temos um esquema consistente e estável e que o problema de valor inicial para a equação é bem-posto. Sabemos então que o valor de $|e^{g(\omega)t}|$ é limitado (pelo teorema 4.24), assim como o fator de amplificação (pelo critério de von Neumann, 4.18). Logo, existe uma constante $C_T > 0$, dependente do tempo máximo T , para a qual

$$|e^{g(\omega)t}| \leq C_T \quad \text{e} \quad |g(h\xi)^n| \leq C_T, \quad (5.2)$$

para $t \in [0, T]$, $nk \in [0, T]$ e $(h, k) \in \Lambda$.

Suponha que a condição inicial do esquema é $v^0 = \mathcal{T}_h u_0$, e lembre-se que um esquema é convergente quando a definição (4.32) é satisfeita.

Em primeiro lugar, demonstraremos que a aproximação inicial do esquema converge para a condição

inicial do PVI:

$$\|u_0 - \mathcal{S}_h v^0\|^2 = \|u_0 - \mathcal{S}_h \mathcal{T}_h u_0\|^2 dx \quad (5.3)$$

$$= \left\| \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_0) - \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_0(\xi) \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}\}}) \right\|^2 dx \quad (5.4)$$

$$= \left\| \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_0 - \hat{u}_0(\xi) \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}\}}) \right\|^2 dx \quad (5.5)$$

$$= \left\| \mathcal{F}^{-1}(\hat{u}_0(\xi) \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi| > \frac{\pi}{h}\}}) \right\|^2 dx \quad (5.6)$$

$$= \int_{|\xi| > \frac{\pi}{h}} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi. \quad (5.7)$$

Notas:

- Da equação (5.3) para (5.4), utilizamos a equação (4.31);
- Na equação (5.5) usamos a linearidade da transformada inversa de Fourier (teorema 4.4);
- Para chegarmos ao resultado (5.7) usamos a relação de Parseval.

Considere uma família de funções

$$\psi_h = \left| \hat{u}_0(\xi) \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi| > \frac{\pi}{h}\}} \right|^2. \quad (5.8)$$

Observe que essa função é limitada, em cada ξ , pela função quadrado-integrável $\hat{u}_0(\xi)$. À medida que $h \rightarrow 0$, a função ψ_h converge ponto-a-ponto para zero, isto é

$$\lim_{h \rightarrow 0} \psi_h(\xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.9)$$

Logo, pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue (A.13),

$$\lim_{h \rightarrow 0} \int_{|\xi| > \frac{\pi}{h}} |\hat{u}_0(\xi)|^2 d\xi = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}} \psi_h(\xi) d\xi = 0. \quad (5.10)$$

Concluimos, portanto, que a estimativa inicial do esquema converge para o valor inicial do problema quando $h \rightarrow 0$, satisfazendo a primeira condição para que o esquema seja convergente.

Vamos considerar, agora, a norma L^2 da diferença entre as soluções exata e aproximada,

$$\|u(t_n, \cdot) - \mathcal{S}_h v^n\|.$$

Primeiramente, lembramos:

- Usando o fator de amplificação do esquema (definição 4.17), temos $\hat{v}^n(\xi) = g(h\xi)^n \hat{v}^0(\xi)$;
- $(\widehat{\mathcal{T}u})(\xi) = \hat{u}(\xi)$ caso $|\xi| \leq \pi/h$;
- Estamos usando $v^0 = \mathcal{T}u_0$;
- Como a equação diferencial é linear e de primeira ordem no tempo, temos a solução em Fourier

$$\hat{u}_t = q(\omega)\hat{u}.$$

Usando os itens acima, chegamos às seguintes equações:

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_h v^n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ix\xi} \hat{v}^n(\xi) d\xi & u(t_n, x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ix\xi} g(h\xi)^n \hat{v}^0(\xi) d\xi & &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix\xi} e^{q(\xi)t_n} \hat{u}_0(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ix\xi} g(h\xi)^n \widehat{\mathcal{T}_h u_0}(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{ix\xi} g(h\xi)^n \hat{u}_0(\xi) d\xi \end{aligned}$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} u(t_n, x) - \mathcal{S}_h v^n(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}} e^{ix\xi} [e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n] \hat{u}_0(\xi) d\xi \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \int_{|\xi| > \frac{\pi}{h}} e^{ix\xi} e^{q(\xi)t_n} \hat{u}_0(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Observe que o lado direito da equação (5.11) é a transformada inversa de Fourier de uma função: se definirmos

$$\phi_h(\xi) = e^{q(\xi)t_n} \left[1 - g(h\xi)^n \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}\}} \right] \hat{u}_0(\xi), \quad (5.12)$$

então $u(t_n, x) - \mathcal{S}v^n(x) = \mathcal{F}^{-1}(\phi_h)$. Nesse caso, podemos usar a relação de Parseval para obtermos

$$\begin{aligned}
\|u(t_n, \cdot) - \mathcal{S}_h v^n(\cdot)\|^2 &= \int_{\mathbb{R}} |u(t_n, x) - \mathcal{S}_h v^n(x)|^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} |\phi_h(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left| e^{q(\xi)t_n} \left[1 - g(h\xi)^n \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}\}} \right] \widehat{u}_0(\xi) \right|^2 d\xi \\
&= \int_{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}} |e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n \widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi + \int_{|\xi| > \frac{\pi}{h}} |e^{q(\xi)t_n} \widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}} |e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\
&\quad + \int_{|\xi| > \frac{\pi}{h}} |e^{q(\xi)t_n}|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi.
\end{aligned} \tag{5.13}$$

Repare que, para cada valor de ξ ,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \phi_h(\xi) = e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n \widehat{u}_0(\xi). \tag{5.14}$$

Logo, ficamos com

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u(t_n, \cdot) - \mathcal{S}_h v^n(\cdot)\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi. \tag{5.15}$$

Quando o esquema é consistente, temos a seguinte estimativa (veja (STRIKWERDA, 2004, Definição 10.1.3, p.238)):

$$\frac{e^{kq(\xi)} - g(h\xi)}{k} = o_{h,k}(1), \tag{5.16}$$

para algum r . Usaremos a notação $o_{h,k}(1)$ para indicar uma função que tende a zero à medida que h e k tendem a zero.

Definição 5.17. Usaremos, a seguir, o produto notável

$$x^n - y^n = (x - y) \sum_{j=0}^{n-1} x^{n-j-1} y^j. \tag{5.18}$$

Note que, se $|x| \leq 1$ e $|y| \leq 1$, então

$$|x^n - y^n| \leq n |x - y|. \tag{5.19}$$

Lembrando que $t_n = nk$, observamos que

$$\left| (e^{q(\xi)k})^n - g(h\xi)^n \right| \leq n |e^{q(\xi)k} - g(h\xi)| C_T \quad (5.20)$$

Usamos então as equações (5.16) e (5.20) para concluir que

$$\left| (e^{q(\xi)k})^n - g(h\xi)^n \right| \leq nk o_{h,k}(1) C_T \leq o_{h,k}(1); \quad (5.21)$$

isto é, a seqüência de funções $\phi_h(\xi)$ tende a zero para cada valor de ξ , à medida que h e k tendem a zero na região de estabilidade Λ . Em outras palavras,

$$\lim_{\substack{h,k \rightarrow (0,0) \\ h,k \in \Lambda}} \phi_h(\xi) = 0, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}. \quad (5.22)$$

Falta provar agora apenas uma condição para garantirmos a convergência da equação (5.13): a integrabilidade de $\lim_{h \rightarrow 0} \phi_h$. Para tanto, note que o primeiro integrando é dominado por uma função integrável:

$$\left| e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n \right|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 \leq (2C_T)^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2, \quad (5.23)$$

pois \widehat{u}_0 é uma função L^2 . Por fim, usamos novamente o teorema da convergência dominada de Lebesgue (A.13) para afirmar que

$$\begin{aligned} \lim_{h,k \rightarrow (0,0)} \int_{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}} \left| e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n \right|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi &= \int_{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}} \lim_{h,k \rightarrow (0,0)} \left| e^{q(\xi)t_n} - g(h\xi)^n \right|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &= \int_{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}} o_{h,k}(1) |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &= o_{h,k}(1). \end{aligned} \quad (5.24)$$

□

5.2.2. Instabilidade implica divergência

Nesta parte da prova, construiremos uma condição inicial u_0 para a qual o esquema com estimativa $\mathcal{T}_h u_0$ não converge para a solução da equação diferencial parcial.

Demonstração. Suponha que tenhamos um esquema de diferenças finitas instável. Nesse caso, o critério de von Neumann (4.18)

$$|g(h\xi, k, h)| \leq 1 + Ck \quad (5.25)$$

não é satisfeito para nenhuma constante C à medida que h e k tendem a zero. Logo, para qualquer $M \in \mathbb{N}$, existem valores ξ_M , k_M e h_M para os quais

$$|g(h_M \xi_M, k_M, h_M)| \geq 1 + Mk_M, \quad (5.26)$$

sendo $|h_M \xi_M| \leq \pi$.

Sabemos que g é uma função contínua. Portanto, existe algum $\eta_M > 0$ tal que, se $|\xi - \xi_M| \leq \eta_M$, então

$$|g(h_M \xi_M, k_M, h_M)| \geq 1 + 1/2 Mk_M. \quad (5.27)$$

Além disso, podemos escolher um valor de η_M que satisfaz

$$\eta_M \leq \frac{1}{M^2} \quad (5.28)$$

e escolher valores cada vez menores para k_M e h_M : tomamos $k_M < k_{M-1}$ e $h_M < h_{M-1}$.

Enunciamos agora um lema que será fundamental para o resto da demonstração.

Lema 5.29. Se o esquema de diferenças finitas é consistente, então os intervalos

$$I_M = [\xi_M - \eta_M, \xi_M + \eta_M] \quad (5.30)$$

podem ser escolhidos como disjuntos.

A prova deste lema encontra-se na seção 5.2.2.

Definimos α_M de forma que

$$\alpha_M^2 \eta_M = \frac{1}{M^2} \quad (5.31)$$

e construímos a família de funções w_M como

$$\widehat{w}_M(\xi) = \begin{cases} \alpha_M & \text{se } |\xi - \xi_M| \leq \eta_M, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.32)$$

Vejamos, agora, o que acontece ao tomarmos como solução inicial da nossa EDP como

$$u_0(x) = \sum_{M=1}^{\infty} w_M(x). \quad (5.33)$$

Primeiro, vamos provar que $u_0 \in L^2$: escolhendo os intervalos I_M como disjuntos, temos

$$\|u_0\|^2 = \left\| \sum_{M=1}^{\infty} w_M \right\|^2 = \left\| \sum_{M=1}^{\infty} \widehat{w}_M \right\|^2, \quad (5.34)$$

usando a relação de Parseval e a linearidade da transformada de Fourier. Logo,

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{M=1}^{\infty} \widehat{w}_M \right\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{M=1}^{\infty} \widehat{w}_M(\xi) \right|^2 d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{M=1}^{\infty} \alpha_M \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi - \xi_M| \leq \eta_M\}} \right|^2 d\xi. \end{aligned} \quad (5.35)$$

Observe que, como os intervalos I_M são disjuntos, existe um único $J \in \mathbb{N}$ tal que $\xi \in I_J$, para cada valor de ξ . Logo,

$$\sum_{M=1}^{\infty} \widehat{w}_M(\xi) = \sum_{M=1}^{\infty} \alpha_M^2 \cdot \mathbf{1}_{|\xi - \xi_M| \leq \eta_M} = \begin{cases} \alpha_J^2 & \text{se } \xi \in \bigcup_{M=1}^{\infty} I_M, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (5.36)$$

Portanto, a sequência de funções \widehat{w}_M é integrável. Podemos então aplicar o teorema A.11 para concluir que $u_0 \in L^2$, pois

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \sum_{M=1}^{\infty} \alpha_M \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi - \xi_M| \leq \eta_M\}} \right|^2 d\xi &= \sum_{M=1}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\alpha_M \cdot \mathbf{1}_{\{|\xi - \xi_M| \leq \eta_M\}}|^2 d\xi \\ &= \sum_{M=1}^{\infty} |\alpha_M|^2 \int_{I_M} d\xi \\ &= \sum_{M=1}^{\infty} |\alpha_M|^2 2\eta_M \\ &= 2 \sum_{M=1}^{\infty} \frac{1}{M^2} < \infty. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Agora mostraremos que o esquema com a condição inicial $\mathcal{T}_h u_0$ não é convergente. Seja v_m^n a solução no tempo n de um esquema com $v^0 = \mathcal{T}_h u_0$. Dado um tempo máximo T , podemos escolher um nível temporal n que esteja na segunda metade do intervalo total de tempo da nossa EDP; ou seja,

$$nk_M \in \left[\frac{T}{2}, T \right]. \quad (5.38)$$

Além disso, é possível escolher um valor de M tal que

$$\frac{C_T - 1}{M} \leq \frac{T}{8}, \quad (5.39)$$

onde C_T é a constante que limita $e^{q(\xi)t}$ em (5.2). Temos então

$$\|\mathcal{S}_h v^n - u(t_n, \cdot)\|^2 \geq \|v^n - \mathcal{T}_h u(t_n, \cdot)\|^2 = \int_{|\xi| \leq \frac{\pi}{h}} |g(h\xi)^n - e^{q(\xi)nk}|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi. \quad (5.40)$$

Para $h = h_M$ e $\xi \in I_M$, temos a estimativa

$$|g(h\xi)^n - e^{q(\xi)nk}| \geq |g(h\xi)|^n - C_T \geq \left(1 + \frac{1}{2}Mk_M\right)^n - C_T. \quad (5.41)$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{S}_h v^n - u(t_n, \cdot)\|^2 &\geq \int_{\{|\xi - \xi_M| \leq \eta_M\}} |g(h\xi)^n - e^{q(\xi)nk}|^2 |\widehat{u}_0(\xi)|^2 d\xi \\ &\geq \left[\left(1 + \frac{1}{2}Mk_M\right)^n - C_T \right]^2 \alpha_M^2 2\eta_M \\ &= 2 \left[\frac{(1 + 1/2Mk_M)^n - C_T}{M} \right]^2. \end{aligned} \quad (5.42)$$

Usando as equações (5.39) e (5.42) e lembrando da desigualdade de Bernoulli $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ para $x > -1$, ficamos com

$$\|\mathcal{S}_h v^n - u(t_n, \cdot)\|^2 \geq 2 \left(\frac{1}{2}nk_M - \frac{C_T - 1}{M} \right)^2 \geq \frac{T^2}{32} \neq 0. \quad (5.43)$$

Concluimos, então, que $\mathcal{S}_h v^n$ não converge para $u(t_n, \cdot)$; portanto, nosso esquema é divergente. Esse resultado finaliza a demonstração do teorema de equivalência de Lax-Richtmyer. \square

Prova do lema 5.29

Demonstração. Vamos provar o lema por indução em M . Para $M = 1$, existe apenas o intervalo $I_1 = [\xi_1 - \eta_1, \xi_1 + \eta_1]$, que é disjunto por suposição.

Suponha, por absurdo, que para algum M não podemos escolher I_M que seja disjunto dos intervalos I_N para $N < M$, e defina

$$J = \bigcup_{N < M} I_N. \quad (5.44)$$

Por suposição temos, para cada $h < h_{M-1}$ e $k < k_{M-1}$, que a estimativa

$$|g(h\xi, k, h)| \leq 1 + Mk \quad (5.45)$$

é válida para $\xi \notin J$. Ademais, como o esquema é consistente, sabemos por (5.16) que

$$\left| \frac{g(h\xi, k, h) - e^{q(\xi)k}}{k} \right| \leq C(\xi), \quad (5.46)$$

para cada ξ à medida que k e h tendem a zero.

Observando que J é um conjunto compacto (pois é a união finita de intervalos fechados), definimos

$$C^* = \sup_{\xi \in J} C(\xi). \quad (5.47)$$

Além disso, usamos a primeira desigualdade em (5.2) para concluir que, para algum valor de $K \in \mathbb{N}$,

$$|e^{q(\xi)k}| = |e^{q(\xi)k}|^{1/n} \leq C_T^{1/n} \leq 1 + Kk. \quad (5.48)$$

Usamos, por fim, os resultados (5.45) caso $\xi \notin J$ e (5.47) caso $\xi \in J$ para concluir que

$$|g(h\xi, k, h)| \leq 1 + \max(M, C^* + K)k \quad (5.49)$$

para $h < h_{M-1}$ e $k < k_{M-1}$. Isso, portanto, define um limite para o fator de amplificação e contradiz a hipótese de que o esquema é instável. Sendo assim, existe um valor de $\xi_M \notin J$ para o qual (5.26) é válida com h_M e k_M pequenos o suficiente; e como J é um intervalo fechado e g é contínua, existe um intervalo $[\xi_M - \eta_M, \xi_M + \eta_M]$ que é disjunto de J para o qual a desigualdade (5.26) é válida. \square

5.3. Exemplo: aplicação ao esquema FTBS

Concluimos o nosso trabalho com uma breve aplicação do teorema de equivalência 5.1 ao esquema *forward-time backward-space* (equação 3.14):

$$\frac{v_m^{n+1} - v_m^n}{k} + a \frac{v_m^n - v_{m-1}^n}{h} = 0. \quad (5.50)$$

Provaremos a seguir que ele é um esquema consistente e estável para o problema de valor inicial da equação do transporte (2.6); e, por consequência do teorema, deduzimos sua convergência.

5.3.1. Consistência do FTBS

Usaremos nessa seção a mesma notação que aparece na definição de consistência (3.18). Para a equação do transporte (2.6), temos $P = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x}$.

Se $\phi_m^n = \phi(nk, mh)$ é uma função definida sobre uma malha discreta, então

$$P\phi = \phi_t + a\phi_x. \quad (5.51)$$

Similarmente, o operador $P_{k,h}$ do esquema FTBS é dado por

$$P_{k,h}\phi = \frac{\phi_m^{n+1} - \phi_m^n}{k} + a \frac{\phi_m^n - \phi_{m-1}^n}{h}. \quad (5.52)$$

Utilizamos, agora, a expansão em série de Taylor de ϕ em torno de (t_n, x_m) para cada dimensão:

$$\phi_m^{n+1} = \phi_m^n + k\phi_t + \frac{1}{2}k^2\phi_{tt} + O(k^3) \quad (5.53)$$

$$\phi_{m-1}^n = \phi_m^n - h\phi_x + \frac{1}{2}h^2\phi_{xx} + O(h^3) \quad (5.54)$$

Substituindo as expansões em Taylor acima no esquema (5.52), ficamos com

$$\begin{aligned} P_{k,h}\phi &= \frac{[\phi_m^n + k\phi_t + \frac{1}{2}k^2\phi_{tt} + O(k^3)] - \phi_m^n}{k} + a \frac{\phi_m^n - [\phi_m^n - h\phi_x + \frac{1}{2}h^2\phi_{xx} + O(h^3)]}{h} \\ &= \phi_t + \frac{1}{2}k\phi_{tt} + a \left(\phi_x - \frac{1}{2}h\phi_{xx} \right) + O(k^2) + O(h^2). \end{aligned} \quad (5.55)$$

Calculamos então

$$\begin{aligned} P\phi - P_{k,h}\phi &= \phi_t + a\phi_x - \left[\phi_t + \frac{1}{2}k\phi_{tt} + a \left(\phi_x - \frac{1}{2}h\phi_{xx} \right) + O(k^2) + O(h^2) \right] \\ &= -\frac{1}{2}k\phi_{tt} + \frac{1}{2}h\phi_{xx} + O(k^2) + O(h^2) \\ &\rightarrow 0 \quad \text{à medida que } h, k \rightarrow 0, \end{aligned} \quad (5.56)$$

o que mostra que o esquema FTBS é consistente.

5.3.2. Estabilidade do FTBS

Nesta seção usaremos a análise de von Neumann, detalhada na seção 4.4, para aferir a estabilidade do esquema.

Primeiramente, reescrevemos o EDF na forma

$$v_m^{n+1} = (1 - a\lambda)v_m^n + a\lambda v_{m-1}^n, \quad (5.57)$$

em que $\lambda = k/h$. Substituímos então os fatores v_m^{n+1} , v_m^n e v_{m-1}^n no esquema acima pelas equações (4.13)

e (4.14) e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{imh\xi} \widehat{v}^{n+1}(\xi) d\xi &= \frac{(1-a\lambda)}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{imh\xi} \widehat{v}^n(\xi) d\xi + \frac{a\lambda}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{imh\xi} e^{-ih\xi} \widehat{v}^n(\xi) d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\frac{\pi}{h}}^{\frac{\pi}{h}} e^{imh\xi} [(1-a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}] \widehat{v}^n(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Revelamos, assim, a relação de recorrência $\widehat{v}^{n+1}(\xi) = [(1-a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}] \widehat{v}^n(\xi)$, que podemos escrever na forma (4.16):

$$\widehat{v}^n(\xi) = [(1-a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}]^n \widehat{v}^0(\xi). \quad (5.58)$$

Avaliamos agora o fator de amplificação do esquema, $g(h\xi, k, h) = (1-a\lambda) + a\lambda e^{-ih\xi}$. Tomando $\theta = h\xi$, ficamos com

$$g(\theta) = (1-a\lambda) + a\lambda e^{-i\theta} = 1 - a\lambda + a\lambda[\cos\theta - i\sin\theta]. \quad (5.59)$$

Calculamos então

$$\begin{aligned} |g(\theta, k, h)|^2 &= (1 - a\lambda + a\lambda \cos\theta)^2 + a^2\lambda^2 \sin^2\theta \\ &= [1 - a\lambda(1 - \cos\theta)]^2 + a^2\lambda^2 \sin^2\theta \end{aligned} \quad (5.60)$$

$$= \left(1 - 2a\lambda \sin^2\frac{\theta}{2}\right)^2 + 4a^2\lambda^2 \sin^2\frac{\theta}{2} \cos^2\frac{\theta}{2} \quad (5.61)$$

$$\begin{aligned} &= 1 - 4a\lambda \sin^2\frac{\theta}{2} + 4a^2\lambda^2 \sin^4\frac{\theta}{2} + 4a^2\lambda^2 \sin^2\frac{\theta}{2} \cos^2\frac{\theta}{2} \\ &= 1 - 4a\lambda \sin^2\frac{\theta}{2} \left[1 - a\lambda \left(\sin^2\frac{\theta}{2} + \cos^2\frac{\theta}{2}\right)\right] \\ &= 1 - 4a\lambda(1-a\lambda) \sin^2\frac{\theta}{2}. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Nota. Do passo (5.60) para o passo (5.61), usamos as identidades de meio-ângulo

- $1 - \cos\varphi = 2 \sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ e
- $\sin\varphi = 2 \sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

Dessa forma, podemos ver que o fator de amplificação $|g(h\xi, k, h)|^2 = 1 - 4a\lambda(1-a\lambda) \sin^2\frac{\theta}{2}$ — e, portanto, $|g(h\xi, k, h)|$ — possui valor máximo 1, desde que $a\lambda \in [0, 1]$. Concluimos então, pelo teorema 4.18, que o esquema

forward-time backward-space é estável quando tomamos

$$\frac{ak}{h} \in [0, 1]. \quad (5.63)$$

Note que a equação (5.63) determina a região de estabilidade Λ do esquema FTBS.

5.3.3. Conclusão — convergência do FTBS

Com os resultados obtidos nas seções anteriores, podemos aplicar diretamente o teorema de equivalência de Lax-Richtmyer para demonstrar que o esquema FTBS é convergente. Verificamos que as condições do teorema 5.1 são satisfeitas:

- O problema de valor inicial (2.6) para a equação diferencial parcial estudada é bem-posto, por hipótese; e
- O esquema FTBS é consistente, por (5.56).

A partir deste ponto sabemos que a estabilidade do esquema é equivalente à sua convergência. Portanto, usando os resultados da seção 5.3.2, concluímos que o esquema é convergente — desde que k e h obedeçam à restrição (5.63) à medida que tendem a zero.

6. Considerações finais

Neste trabalho, reunimos e estudamos os fundamentos teóricos dos esquemas de diferenças finitas, apresentamos o enunciado e a demonstração do teorema de equivalência de Lax-Richtmyer e mostramos um breve exemplo de sua aplicação. Esperamos que este seja um material elucidativo e didático para o estudo de análise numérica e esquemas de diferenças finitas. Trabalhos futuros poderiam incluir o estudo da demonstração do teorema de equivalência em condições mais gerais — como em esquemas de diferenças finitas de passos múltiplos ou equações diferenciais parciais de segunda ordem no tempo.

A. Apêndice

A.1. Notação multi-índice

Para descrevermos equações diferenciais em sua forma mais geral, usaremos a notação multi-índice mostrada em (EVANS, 2010).

Definição A.1. Um *multi-índice* é um vetor $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ cujos componentes α_i são inteiros não-negativos. A *ordem* de α é dada por

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n. \quad (\text{A.2})$$

Usamos multi-índice para denotarmos a derivada de uma função de maneira compacta.

Definição A.3. Dada uma função u , definimos a *derivada multi-índice* como

$$D^\alpha u(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_n^{\alpha_n}}. \quad (\text{A.4})$$

O operador P definido em (2.2) é dado por

$$Pu = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha D^\alpha u. \quad (\text{A.5})$$

A.2. Convergência ponto-a-ponto e convergência uniforme

As definições desta seção foram baseadas em (RUDIN, 1976, p.143–147).

Definição A.6. Seja $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções reais definidas em um conjunto E . Dizemos que $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge *ponto-a-ponto* para uma função f se, para cada $x \in E$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x).$$

De maneira mais elementar, $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}} \rightarrow f$ ponto-a-ponto se, dado $\epsilon > 0$, para cada $x \in E$ existe $N(x) \in \mathbb{N}$ tal que, se $n \geq N(x)$, então

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

Definição A.7. Seja f_n uma sequência de funções definida em um conjunto X . Dizemos que $f_n(x)$ converge uniformemente para uma função $f(x)$ se, dado $\epsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ (independente de x) tal que, se $n \geq N$, então

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon.$$

para todo $x \in E$.

A.3. Espaços L^p

Definição A.8. Dizemos que uma função $f \in L^p$ para algum $p \in [0, \infty)$ se

$$\int |f|^p < \infty, \quad (\text{A.9})$$

e definimos sua norma L^p como

$$\|f\|_p = \left(\int |f|^p \right)^{1/p}. \quad (\text{A.10})$$

A.4. Troca de somatório com integral

Teorema A.11. Seja E um conjunto mensurável e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções não-negativas de E para \mathbb{R}^+ . Então

$$\int_E \sum_{n=1}^{\infty} f_n = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E f_n. \quad (\text{A.12})$$

Este teorema é proposto em (TAO, 2016, Corolário 8.2.11, p.197).

A.5. Teorema da convergência dominada de Lebesgue

Teorema A.13. Sejam E um conjunto mensurável e $\{f_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de funções mensuráveis definidas em E que converge ponto-a-ponto para uma função f . Suponha que existe uma função integrável g definida em E tal que

$$|f_n(x)| \leq g(x)$$

para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in E$. Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu. \quad (\text{A.14})$$

A prova deste teorema pode ser encontrada em (RUDIN, 1976, Teorema 11.32, p.321).

Bibliografia

LAX, P. D.; RICHTMYER, R. D. Survey of the stability of linear finite difference equations.

Communications on Pure and Applied Mathematics, v. 9, n. 2, p. 267–293, 1956. DOI: <https://doi.org/10.1002/cpa.3160090206>.

RICHTMYER, R.D.; MORTON, K.W. **Difference Methods for Initial Value Problems**. [S.l.]: Wiley, 1967. (Difference Methods for Initial-value Problems). ISBN 9780470720400.

STRIKWERDA, J.C. **Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations**. [S.l.]: Society for Industrial and Applied Mathematics, 2004. (Other Titles in Applied Mathematics). ISBN 9780898717938.

RUDIN, W. **Principles of Mathematical Analysis**. [S.l.]: McGraw-Hill, 1976. (International series in pure and applied mathematics). ISBN 9780070856134.

TAO, T. **Analysis II: Third Edition**. [S.l.]: Springer Singapore, 2016. (Texts and Readings in Mathematics). ISBN 9789811018046.

EVANS, L.C. **Partial Differential Equations**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2010. (Graduate studies in mathematics). ISBN 9780821849743.

KNOBEL, R. **An Introduction to the Mathematical Theory of Waves**. [S.l.]: American Mathematical Society, 2000. (IAS/Park City mathematics series). ISBN 9780821820391.