

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Estatística

Douglas Ferreira Senra

**INTERVALO DE CONFIANÇA BOOTSTRAP PARAMÉTRICO PARA
INTENSIDADE DE TRÁFICO EM FILAS M/M/S**

Belo Horizonte

2023

Douglas Ferreira Senra

**INTERVALO DE CONFIANÇA BOOTSTRAP PARAMÉTRICO PARA
INTENSIDADE DE TRÁFICO EM FILAS M/M/S**

Monografia apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Roberto da Costa Quinino

Belo Horizonte

2023

2023, Douglas Ferreira Senra.

Todos os direitos reservados.

Senra. Douglas Ferreira

S478i Intervalo de confiança bootstrap paramétrico para intensidade de tráfico em filas M/M/S [manuscrito]/ Douglas Ferreira Senra — 2023.

1 recurso online (27 f. il, color).

Orientador: Roberto da Costa Quinino

Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística

Referências: 23 – 24.

1. Estatística. 2. Teoria de Filas Markovianas. 3 Teoria da estimativa. 4. Verossimilhança (Estatística). 5. Bootstrap (Estatística). I. Quinino, Roberto da Costa. II. Universidade Federal de Minas Gerais. I. Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. III. Título.

CDU 519.2 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB 6/1510

Universidade Federal de Minas Gerais – ICEx



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação / Especialização
Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
31270-901 – Belo Horizonte – MG

E-mail: pgest@ufmg.br
Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-5924

ATA DO 296º. TRABALHO DE FIM DE CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA DE DOUGLAS FERREIRA SENRA.

Aos cinco dias do mês de junho de 2023, às 13:30 horas, com utilização de recursos de videoconferência a distância, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Estatística, para julgar a apresentação do trabalho de fim de curso do aluno **Douglas Ferreira Senra**, intitulado: “Intervalo de Confiança Bootstrap Paramétrico para Intensidade de Tráfego em filas M/M/S”, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Estatística. Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, Professor Roberto da Costa Quinino – Orientador, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do candidato. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o candidato foi considerado Aprovado condicional às modificações sugeridas pela banca examinadora no prazo de 30 dias a partir da data de hoje por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente o candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 05 de junho de 2023.

Roberto da Costa
Quinino:8087129172
0

Assinado de forma digital por
Roberto da Costa
Quinino:80871291720
Dados: 2023.06.05 15:11:01 -03'00'

Prof. Roberto da Costa Quinino (Orientador)
Departamento de Estatística / ICEX / UFMG

ANDERSON LAECIO
GALINDO
TRINDADE:00954199693

Assinado de forma digital por
ANDERSON LAECIO GALINDO
TRINDADE:00954199693
Dados: 2023.06.05 15:39:11
-03'00'

Prof. Anderson Laécio Galindo Trindade
DEP/UFMG



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação / Especialização
Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
31270-901 – Belo Horizonte – MG

E-mail: pgest@ufmg.br
Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-5924

DECLARAÇÃO DE CUMPRIMENTO DE REQUISITOS PARA CONCLUSÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA.

Declaro para os devidos fins que Douglas Ferreira Senra, número de registro 2020680011, cumpriu todos os requisitos necessários para conclusão do curso de Especialização em Estatística. E que como seu orientador, recebi e aprovo a versão final. O trabalho foi apresentado no dia 05 de junho de 2023 com o título “Intervalo de Confiança Bootstrap Paramétrico para Intensidade de Tráfego em filas M/M/S”.

Belo Horizonte, 06 de maio de 2023

Roberto da Costa
Quinino:80871291720

Assinado de forma digital por
Roberto da Costa
Quinino:80871291720
Dados: 2023.06.06 15:44:28 -03'00'

Prof. Roberto da Costa Quinino
Coordenador do curso de
Especialização em Estatística
Departamento de Estatística / UFMG

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha esposa, Natalia Resende, por todo o suporte emocional que foi fundamental para que eu concluísse essa jornada no momento mais difícil da minha vida. Obrigado por não me deixar desistir.

Agradeço também o Prof. Roberto da Costa Quinino por sua orientação e enorme compreensão.

Resumo

Em teoria de filas, um dos principais interesses dos pesquisadores é estudar o seu comportamento, seu processo de formação e analisar algumas características de desempenho, tais como, por exemplo, a intensidade do tráfico. Esta monografia visa detalhar a metodologia para obtenção do intervalo de confiança bootstrap para a intensidade de tráfico em filas markovianas finitas com “s” servidores, denominadas M/M/S, na notação de Kendall. Para tanto utilizaremos o método de estimação da máxima verossimilhança em conjunto com a abordagem paramétrica do bootstrap.

Palavras-chave: Filas markovianas, intensidade de tráfico, estimação por máxima verossimilhança, bootstrap paramétrico.

Abstract

In queuing theory, one of the main interests of researchers is to study their behavior, their formation process and analyze some performance characteristics, such as, for example, the intensity of traffic. This monograph aims to detail the methodology for obtaining the bootstrap confidence interval for the traffic intensity in finite Markovian queues with “s” servers, named M/M/S, in Kendall's notation. For this purpose, we will use the maximum likelihood estimation method in conjunction with the bootstrap parametric approach.

Key Words: Markov queues, traffic intensity, maximum likelihood estimation, parametric bootstrap.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Distribuição Bootstrap Paramétrico para os dados da Tabela 01.....	21
------------------------------------------------------------------------------	----

LISTA DE TABELAS

Tabela 1: Valores observados e suas frequências	20
-------------------------------------------------------	----

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	12
2	MODELO PROBABILÍSTICO E O MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA.....	14
3	MÉTODO BOOTSTRAP PARAMÉTRICO E INTERVALO DE CONFIANÇA.....	16
4	EXEMPLO NUMÉRICO.....	19
5	CONCLUSÕES E SUGESTÃO DE ESTUDOS FUTUROS.....	22
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	23
	ANEXO A: Programa R para obtenção do Estimador de Máxima Verossimilhança.....	25
	ANEXO B: Programa R para obtenção do Intervalo de Conviaça Bootatrap Percentílico com e sem correção do vício	26

1 INTRODUÇÃO

As filas M/M/s tratam modelos de filas que tem como objetivo entender o comportamento de um sistema de filas contendo “s” servidores (ou atendentes), uma fila de espera aonde os clientes chegam segundo um processo de Poisson e são atendidos de acordo com uma distribuição exponencial. A notação de Kendall "M/M/s" refere-se à natureza Markoviana dos processos de chegada e atendimento além do número de servidores no sistema. Adicionalmente, as filas M/M/s destacam-se por sua simplicidade e, conseqüentemente, aplicabilidade a vários sistemas de ordem prática. De fato, muitos sistemas da vida real são aproximadamente descritos por modelos de filas, incluindo redes de computadores e telecomunicações [1-2], sistemas de manufatura e serviços [3-4] e sistemas de saúde [5-6].

O sistema de filas M/M/s viabiliza a previsão e otimização de parâmetros como tempos de espera, comprimentos de filas e utilização do servidor. Dessa forma, um grande foco das pesquisas em teoria das filas é entender o comportamento do desempenho das filas em função de seus parâmetros, ou seja, a taxa de chegada (λ), a taxa de atendimento (μ), ou ainda a intensidade de tráfego (ρ).

A intensidade de tráfego (ρ) em filas é definida como a razão $\rho = \lambda / s\mu$, de onde pode-se obter outras medidas de desempenho, como a probabilidade do sistema estar vazio (P_0), o número esperado de clientes no sistema (L), o número esperado de clientes na fila (L_q), o tempo esperado no sistema (W) e o tempo esperado na fila (W_q).

Resultados de inferência clássica para filas (baseados na máxima verossimilhança) foram discutidos em Clark [7] para filas M/M/1. Benes [8] considerou filas infinitas Markovianas, ou seja, filas M/M/ ∞ , em notação de Kendall. Mais recentemente, Schruben e Kulkarni [9] provaram que medidas de desempenho populares

infelizmente não possuem valores esperados e erros padrão finitos, Basawa e Prabhu [10] descobriram algumas propriedades assintóticas dos estimadores para avaliação de desempenho de filas M/M/1, Zheng e Seila [11] mostraram que abaixo de um certo limite superior para a intensidade de tráfego ($\rho < 1$), os estimadores existem e possuem as propriedades necessárias, e Almeida et al. [12] propuseram métodos de correção de viés para estimadores clássicos para filas M/M/1.

Esta monografia utiliza-se do método de Bootstrap Paramétrico para a obtenção do intervalo de confiança da intensidade de tráfego (ρ) em filas M/M/s.

O trabalho está organizado como se segue. Na seção 2, detalhamos o modelo probabilístico para filas M/M/s e o método de estimação por máxima verossimilhança. Na seção 3 explicamos o procedimento do Bootstrap paramétrico aplicado ao sistema de filas M/M/s. Na seção 4 apresentamos um exemplo numérico e conclusões e sugestão de trabalhos futuros estão na seção 5.

2 MODELO PROBABILÍSTICO E O MÉTODO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Em filas M/M/s, o processo de chegadas é Poisson com taxa λ , o que significa que os tempos entre sucessivas chegadas são variáveis aleatórias independentes exponencialmente distribuídas com média $1/\lambda$. Após a chegada, o cliente dirige-se imediatamente para o atendente, se qualquer um deles estiver livre, ou entra na fila caso todos estejam ocupados. Após o atendimento, o cliente retira-se do sistema e caso haja outro cliente esperando na fila, ele começa a ser atendido imediatamente. Os tempos de atendimento sucessivos são assumidos como variáveis aleatórias exponenciais independentes com média $1/\mu$.

Considere $\rho = \lambda/s\mu$ como a intensidade do tráfego (também conhecida como utilização do atendimento), é necessário que $\rho < 1$, para que a fila seja estável, o que é uma suposição comum na teoria das filas [13]. A intensidade de tráfego (ρ) também pode ser vista como a proporção média de tempo que cada um dos atendentes está ocupado (supondo que os clientes que encontram mais de um atendente vago escolham seus atendentes aleatoriamente). Se a intensidade do tráfego for tal que $\rho < 1$, então o sistema está em equilíbrio e tem uma distribuição estacionária. A partir da teoria desenvolvida para processos de nascimento e morte, a distribuição estacionária do número de clientes N no sistema no momento da partida de clientes é dada pela equação 2.1.

$$P_m = P(N = m) = \begin{cases} \frac{(s\rho)^{nm}}{n!} P_0, & 0 < m \leq s \\ \frac{s^s \rho^{nm}}{s!} P_0, & m > s \end{cases} \quad (2.1)$$

Essa é uma equação que prevê a probabilidade de o número de clientes no sistema (N) ser igual a um dado valor (m) para um determinado momento.

Sendo $P_0 = P(N = 0)$ derivado pela condição de contorno, isto é, que a soma das probabilidades deve ser 1. Assim, P_0 é expresso por (2.2).

$$P_0 = \left(\sum_{j=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^j}{j!} + \frac{(s\rho)^s}{s!} \frac{1}{(1-\rho)} \right)^{-1} \quad (2.2)$$

Considerando a quantidade de clientes observadas em instantes aleatórios denotada por $\mathbf{x} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, em que n é a quantidade dos instantes aleatórios observados, temos a amostra de tamanho n, então a função de verossimilhança correspondente é dada pela equação 2.3.

$$L(x|\rho) = \prod_{i=1}^n \left[\frac{(s\rho)^{x_i}}{x_i!} P_0 I_{\{0 \leq x_i \leq s\}} + \frac{s^s \rho^{x_i}}{s!} P_0 I_{\{x_i > s\}} \right] \quad (2.3)$$

Onde “I” é a função indicadora. Em termos práticos, esta função de verossimilhança corresponde a uma equação que multiplica “n” vezes a função de probabilidade, onde “n” é igual ao tamanho da amostra coletada. Logo, para um exemplo onde efetua-se 100 coletas de dados, tem-se uma função de 100 termos em função da expressão (2.1).

O processo de geração de dados em momentos arbitrários garante que os dados obtidos irão ao encontro a distribuição da equação (2.1). Adicionalmente, a independência das observações das amostras é garantida desde que estas coletas estejam suficientemente espaçadas.

O estimador de verossimilhança máxima para a intensidade de tráfego (ρ) é o valor que maximiza a função de verossimilhança dada pela equação 2.3 para todo $0 < \rho < 1$.

Porém, neste caso, trabalhar com uma função de produtos não é vantajoso, pois torna o cálculo mais complexo e impreciso devido ao alto número de termos na equação final e cada termos componentes entre 0 e 1. Como estratégia para simplificar os cálculos e, conseqüentemente, otimizar o poder de cálculo computacional, tem-se com alternativa utilizar-se da função logarítmica. Isso é possível porque o valor que maximiza essa equação de “n” termos é o mesmo que maximiza o logaritmo neperiano dessa mesma função. Como vantagem temos que ao final obtemos uma equação que é uma soma de parcelas, pois o logaritmo de produtos de termos é a soma dos logaritmos de cada termo.

3 MÉTODO BOOTSTRAP PARAMÉTRICO E INTERVALO DE CONFIANÇA

De acordo com Martinez-Espinosa, Sandanielo e Louzada-Neto (2006), o procedimento bootstrap é uma técnica de reamostragem, muito utilizada em diferentes situações estatísticas. A base da técnica é a obtenção de um novo conjunto de dados, por reamostragem do conjunto de dados original. Um ponto importante da técnica bootstrap não é somente avaliar as estimativas dos parâmetros, mas também obter boas estimativas dos erros padrão da distribuição gerada pelas estimativas dos

parâmetros nas iterações de reamostragem, o que nos permite determinar o intervalo de confiança.

O procedimento Bootstrap pode ser realizado em uma abordagem paramétrica e não paramétrica. Na abordagem não paramétrica reamostramos diretamente a amostra obtida. Na abordagem paramétrica usamos o modelo paramétrico que se ajusta aos dados observados. Se o modelo paramétrico for aderente aos dados então ele é mais preciso e será o que usaremos neste trabalho. Para a abordagem paramétrica do bootstrap adotamos os seguintes passos:

- 1) Com a amostra de tamanho “n” independente e identicamente distribuída “x”, obtemos o estimador de máxima verossimilhança do parâmetro ρ , isto é, o valor de ρ que maximiza (2.3);
- 2) Utilizando a função de probabilidade expressa em (2.1) e adotando ρ como o estimador de máxima verossimilhança calculado no item 1) geramos B amostras aleatórias de (2.1) de tamanho “n”. Para cada uma das B amostras calculamos o estimador de máxima verossimilhança de ρ e arquivamos em um vetor denominado VB. Este vetor VB constituirá as estimativas bootstrap de ρ e será utilizado para construção do intervalo de confiança.

Neste trabalho iremos focar em dois intervalos de confiança a saber:

- i) intervalo de confiança percentílico e
- ii) intervalo de confiança percentílico com correção de vício.

De acordo com Efron (1994), o intervalo bootstrap percentil constitui-se o intervalo definido pelos percentis $100(\alpha/2)\%$ e $100(1 - \alpha/2)\%$ da distribuição das estimativas contidas em VB, obtidas por reamostragem, α é o nível de significância (por exemplo, $\alpha = 0,05$ para intervalo de confiança de 95%). Em termos práticos para um intervalo

de confiança percentílico de 95% basta calcularmos o percentil 2,5% e 97,5% do vetor VB.

O intervalo percentil é um intervalo simples de "primeira ordem" formado a partir de quantis da distribuição bootstrap. No entanto, ele não usa a estimativa para os dados originais. Como consequência tem-se um intervalo que pode não está totalmente centrado no verdadeiro valor do ρ . O chamado intervalo corrigido de vício (o intervalo BC) é um intervalo de segunda ordem que aborda esses problemas. Além disso pode-se corrigir também a assimetria da distribuição bootstrap e neste caso o denominados intervalo percentílico com correção do vício e assimetria (BCa). No entanto, não raramente os dois intervalos, percentílico e BC/BCa são muitos próximos e não afetam o processo de decisão. Com as facilidades computacionais, recomendamos a utilização das duas abordagens.

O intervalo bootstrap BCa bootstrap, corrige o vício e a assimetria como citado anteriormente. Estes intervalos são uma versão modificada dos intervalos percentis. Um intervalo de confiança (I.C) bootstrap BCa de $100(1 - \alpha)\%$ para ρ é dado por (Efron e Tibshirani, 1994) I.C[ρ]: $[\hat{\rho}_{\alpha_1}; \hat{\rho}_{\alpha_2}]$ em que:

$$\alpha_1 = \Phi^{-1} \left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{\alpha/2})} \right) \quad (3.1)$$

$$\alpha_1 = \Phi^{-1} \left(\hat{z}_0 + \frac{\hat{z}_0 + z_{\alpha/2}}{1 - \hat{a}(\hat{z}_0 + z_{1-\alpha/2})} \right) \quad (3.2)$$

$$\alpha_1 = z_{\alpha} = \Phi^{-1}(\alpha) \quad (3.3)$$

$$\hat{z}_0 = \Phi^{-1} \left(\frac{1}{B} \sum_{b=1}^B I\{\hat{\rho}^{(b)} < \rho\} \right) \quad (3.4)$$

$$\hat{a} = \frac{\sum_{i=1}^n (\bar{\rho}_{(\cdot)} - \hat{\rho}_{(i)})^3}{6 \left(\sum_{i=1}^n (\bar{\rho}_{(\cdot)} - \hat{\rho}_{(i)})^2 \right)^{3/2}} \quad (3.5)$$

Em que $\bar{\rho}_{(\cdot)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\rho}_{(i)}$ e $\hat{\rho}_{(i)}$ é a estimativa de ρ se a observação x_i .

Os Anexos A e B apresentam o programa desenvolvido em R mostrando respectivamente todos os cálculos necessários para obtenção do estimador de máxima verossimilhança de ρ e o intervalo de confiança percentílico com e sem correção.

4 EXEMPLO NUMÉRICO

Nosso exemplo numérico trata de dados obtidos de um sistema de filas de um supermercado obtidos em [15]. Como experiências padrão tem-se que a intensidade do tráfico inferior a 90% é ideal, pois dessa forma garante-se que o sistema está otimizado e, portanto, não existem muitos clientes em espera. Logo, o objetivo deste trabalho é avaliar a intensidade de tráfico (ρ) de um sistema de fila M/M/s com 6 atendentes (M/M/6).

Para o exemplo numérico foram coletados em 100 instantes aleatórios, a quantidade de clientes no sistema, isto é, número de pessoas sendo atendidas nos caixas mais aquelas que estavam na fila. De acordo com o problema proposto, o interesse do estudo seria avaliar o comportamento das filas entre os horários de 15:00 e 22:00 nos sábados, uma vez que nessa situação específica tem-se o maior volume de clientes. Adicionalmente, o problema foca nos caixas (atendentes) específicos para clientes com até 15 itens, também conhecidos como caixas “rápidos”. Dessa forma, as 100

amostras coletadas foram obtidas durante 5 sábados diferentes (ou seja, 20 por dia), com intervalos de tempo devidamente espaçados pelo observador. Os valores observados (O) e respectivas frequências (F) estão apresentados na Tabela 1. Por exemplo, em 8 vezes apenas 3 clientes foram encontrados no sistema e em 9 vezes, 6 clientes estavam no sistema.

Tabela 1: Valores observados e suas frequências

Coleta de dados no supermercado									
O	F	O	F	O	F	O	F	O	F
1	3	6	9	11	3	16	3	21	1
2	1	7	6	12	3	17	1	22	4
3	8	8	6	13	1	18	2	23	1
4	13	9	6	14	5	19	3		
5	10	10	3	15	4	20	4		

Os valores da Tabela 1, foram substituídos na Equação (2.3). O valor de ρ que maximiza a Equação (2.3) com os dados substituídos da Tabela 1 constituem-se no estimador de máxima verossimilhança ($\hat{\rho}$). Para realização dessa etapa foi desenvolvido o programa contido no Anexo A.

Em seguida, foi aplicado o algoritmo descrito na seção 3 para obtenção do intervalo de confiança bootstrap. O programa descrito no Anexo B para calcula o intervalo de confiança percentílico e percentílico corrigido de 95%.

Para o bootstrap paramétrico sem correção temos o intervalo de confiança [0,8375123; 0,8864035], com amplitude 0,0489. Já para o intervalo de confiança com correção do vício e assimetria, o novo intervalo obtido foi [0,836247; 0,8857695], que apresentou uma amplitude um pouco maior, resultando em 0,0495.

Voltando a análise inicial onde busca-se determinar se o sistema de filas do supermercado está devidamente otimizado, foi verificado que o valor de intensidade de tráfego (ρ) = 0,9 não está contido no intervalo de confiança com 95% (já com correção de vício e assimetria), portanto, podemos rejeitar a hipótese $H_0: \rho = 0,9$ ao nível de confiança 95%. Adicionalmente, como $\hat{\rho} = 0.8650847$ é menor do que 0,9 então não existe evidência para uma preocupação imediata do supermercado quanto a sua capacidade de atendimento. A Figura 01 ilustra a distribuição Bootstrap obtida para os dados da Tabela 01 mostrando que a rejeição de $H_0: \rho = 0,9$ é razoável e os dados sugerem que $\rho \leq 0,9$.

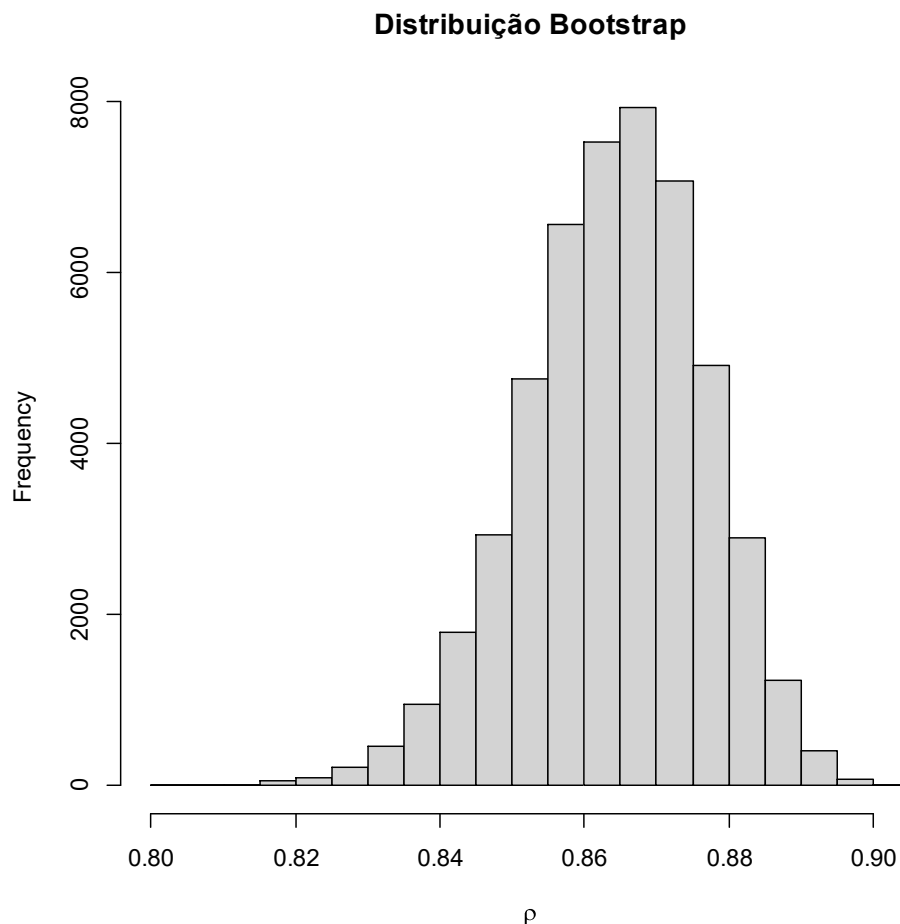


Figura 1: Distribuição Bootstrap Paramétrica para os dados da Tabela 01

5 CONCLUSÕES E SUGESTÃO DE ESTUDOS FUTUROS

Métodos inferencial para intensidade de tráfico utilizando o procedimento de máximo verossimilhança e respectivo intervalo de confiança foi utilizado em filas M/M/s. O procedimento apresentado mostrou-se eficiente gerando resultados que ajudam no processo de decisão em sistemas de filas. Em particular aplicamos a metodologia em um exemplo de filas em supermercados.

Como trabalho futuro recomendamos um novo estudo usando filas M/M/s/k para avaliar o impacto do tamanho máximo que o sistema comporta (K) na estimação de ρ .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] D. Gross, J. F. Shortle, J. M. Thompson, and C. M. Harris, *Fundamentals of Queuing Theory*, Wiley-Interscience, New York, NY, 4th edition, 2008.
- [2] F. R. Cruz, M. A. Santos, F. L. Oliveira, and R. C. Quinino, “Estimation in general bulk-arrival Markovian multi-server finite queue”, *Operational Research*, pp. 1-17, 2018.
- [3] H. T. Papadopolus, C. Heavy, and J. Browne, *Queuing Theory in Manufacturing Systems Analysis and Design*, Springer Science & Business Media, 1993.
- [4] G. Koole and A. Mandelbaum, “Queuing models of call center: an introduction”, *Annals of Operations Research*, vol. 113, pp. 41-59, 2002.
- [5] E. Almehdawe, B. Jewkes, and Q. M. He, “A Markovian queueing model for ambulance offload delays”, *European Journal of Operational Research*, vol. 226, no. 3, pp. 602-614, 2013.
- [6] E. Almehdawe, B. Jewkes, and Q. M. He, “Analysis and optimization of an ambulance offload delay and allocation problem”, *OMEGA – The International Journal of Management Science*, vol. 65, pp. 148-158, 2016.
- [7] A. B. Clarke, “Maximum likelihood estimates in a sample queue”, *Annals of Mathematical Statistics*, vol.28, pp.1036-1040, 1957.
- [8] V.E. Benes, “A Sufficient Set of Statistics for a Simple Telephone Exchange Model”, *Bell System Technical Journal*, vol. 36, no.4, pp.939-964, 1957.
- [9] L. Schruben and R. Kulkarni, “Some consequences of estimating parameters for the M/M/1 queue”, *Operations Research Letters*, vol. 1, no.2, pp.75-78, 1982.

- [10] I. V. Basawa and N. U. Prabhu, "Large sample inference from single server queues", *Queuing Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 289-304, 1988.
- [11] S. Zheng and A. F. Seila, "Some well-behaved estimators for the M/M/1 queue", *Operations Research Letters*, vol. 26, no. 5, pp. 231-235, 2000.
- [12] M. A. C, Almeida, F. R. B. Cruz, F. L. P. Oliveira, and G. de Souza, "Bias correction for estimation of performance measures of a Markovian queue", *Operational Research*, Article ID 10.1007/s12351-017-0351-4, pp. 1-20, 2017.
- [13] D. Gross, J. F. Shortle, J. M. Thompson, and C. M. Harris, *Fundamentals of Queuing Theory*, Wiley-Interscience, New York, NY, 4th edition, 2008.
- [14] Efron, B. e Tibshirani, R. J. An Introduction to the Bootstrap. Chapman e Hall/CRC Monographs on Statistics and Applied Probability, 1994.
- [15] F. R. Cruz, R. C. Quinino, and L. L. Ho, "Bayesian estimation of traffic intensity based on queue length in a multi-server M/M/s queue," *Communications in Statistics - Simulation and Computation*, vol. 46, no. 9, pp. 7319–7331, 2017.

ANEXO A: Programa R para obtenção do Estimador de Máxima Verossimilhança

```

rm(list=ls())

R<-rep(c(1:23),c(3,1,8,13,10,9,6,6,6,3,3,3,1,5,4,3,1,2,3,4,1,4,1))
Ta=size(R)
Ta=Ta[2]
s=6

#Estimando via EMV

rf <- function(rhoe){
  P0=0
  for(j in 0:(s-1)){
    P1=((s*rhoe)^j)/factorial(j)
    P0=P1+P0
  }

  P0=P0+((s^s)*(rhoe^s))/(factorial(s)*(1-rhoe))
  P0=1/P0
  E1=1

  for (i in 1:Ta) {
    i1=R[i]
    if (i1<=s) {
      E11=(((s^i1)*((rhoe^i1))/factorial(i1))*P0
      E1=E1*E11
    }else{
      E11=(((rhoe^i1)*(s^s))/factorial(s))*P0
      E1=E1*E11
    }
  }

  VeroA=E1
  return(-log(VeroA))
}

#par é o valor inicial. Alteramos para outros valores o não houve mudança em EMV
EMV<- optim(par = 0.5, fn = rf, method = "Brent", lower = 0, upper = 1)
cat('rho estimado via MV oti=',EMV$par,"\n")

```

ANEXO B: Programa R para obtenção do Intervalo de Conviança Bootatrap Percentílico com e sem correção do vício

```

#Bootstrap Paramétrico
library(coxed)
rm(list=ls())
corridas=50000
#RR são os dados coletados
RR<-rep(c(1:23),c(3,1,8,13,10,9,6,6,6,3,3,3,1,5,4,3,1,2,3,4,1,4,1))
rhoe=0.8650847 #Estimador de Máxima Verossimilhança Calculado (rho estimado)
s=6
Ta=100
#Função de Probabilidade

rf <- function(x){
  P0=0
  for(j in 0:(s-1)){
    P1=((s*rhoe)^j)/factorial(j)
    P0=P1+P0
  }
  P0=P0+((s^s)*(rhoe^s))/(factorial(s)*(1-rhoe))
  P0=1/P0
  if (x<=s) {
    Px=(((s^x)*((rhoe^x))/factorial(x))*P0
  }else{
    Px=(((rhoe^x)*(s^s))/factorial(s))*P0
  }
  Prob=Px
  return(Prob)
}
T=1
erro1=0.00000001
erro2=1
while (erro2>erro1){
  FP=matrix(0,(T+1),2)
  cont=1
  for (i in 0:T){
    FP[cont,1]=i
    FP[cont,2]=rf(i)
    cont=cont+1
  }
  erro2=abs(1-sum(FP[,2]))
  T=T+1
}
B=matrix(0,corridas,1)
for (z in 1:corridas){
  R=sample(FP[, 1],Ta,replace = TRUE,prob = FP[,2])
  rf <- function(rhoe){
    P0=0
    for(j in 0:(s-1)){
      P1=((s*rhoe)^j)/factorial(j)
      P0=P1+P0
    }
    P0=P0+((s^s)*(rhoe^s))/(factorial(s)*(1-rhoe))
  }

```

```

P0=1/P0
E1=1
for (i in 1:Ta) {
  i1=R[i]
  if (i1<=s) {
    E11=(((s^i1)*((rhoe^i1)))/factorial(i1))*P0
    E1=E1*E11
  }else{
    E11=(((rhoe^i1)*(s^s))/factorial(s))*P0
    E1=E1*E11
  }
}

VeroA=E1
return(-log(VeroA)) #negativo, pois o programa por padrão minimiza o valor estimado, mas
nesse caso queremos maximizar, logo, invertemos o sinal
}

teste2<- optim(par = 0.5, fn = rf, method = "Brent", lower = 0, upper = 1)
B[z,1]=teste2$par
}
Limite=quantile(B,c(0.025,0.975)) #IC de 95%
cat('Intervalo de Confiança Percentílico','\n')
cat('Limite Inferior de Confiança - 95% =',Limite[1],"\n")
cat('Limite Superior de Confiança - 95% =',Limite[2],"\n")
windows(record=T)
hist(B,main="Distribuição Bootstrap",xlab=expression(rho_Boot))
#bias-corrected and accelerated
R=bca(B,0.95)
cat('bias-corrected and accelerated','\n')
cat('Limite Inferior de Confiança - 95% =',R[1],"\n")
cat('Limite Superior de Confiança - 95% =',R[2],"\n")

```