UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIA EXATAS

Programa de Pós-Graduação em Estatística

Antônio Carlos Ribeiro Coutinho

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA INTENSIDADE DE TRÁFEGO EM FILAS M/M/s UTILIZANDO INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Belo Horizonte

2023

Antônio Carlos Ribeiro Coutinho

INTERVALO DE CREDIBILIDADE PARA INTENSIDADE DE TRÁFEGO EM FILAS M/M/s UTILIZANDO INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Monografia apresentada ao curso de Especialização em Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Estatística.

Orientador: Prof. Roberto da Costa Quinino

Belo Horizonte
2023

Coutinho, Antônio Carlos Ribeiro.

C871i Intervalo de credibilidade para intensidade de tráfego em filas M/M/s utilizando integração numérica [recurso eletrônico] / Antônio Carlos Ribeiro Coutinho —2023.
1 recurso online (18 f. il, color.): pdf.

Orientador: Roberto da Costa Quinino.
Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística
Referências: 12.

1. Estatística. 2 Teoria de Filas Markovianas X. 3. Integração numérica. I. Quinino, Roberto da Costa. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística. III. Título.

CDU 519.2 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa CRB 6/1510
Universidade Federal de Minas Gerais – ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Estatística
Programa de Pós-Graduação / Especialização
Av. Pres. Antônio Carlos, 6627 - Pampulha
31270-901 – Belo Horizonte – MG

E-mail: pgest@ufmg.br
Tel: 3409-5923 – FAX: 3409-5924

ATA DO 279ª. TRABALHO DE FIM DE CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA DE ANTÔNIO CARLOS RIBEIRO COUTINHO.

Aos quatorze dias do mês de março de 2023, às 15:00 horas, com utilização de recursos de videoconferência a distância, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Estatística, para julgar a apresentação do trabalho de fim de curso do aluno **Antônio Carlos Ribeiro Coutinho**, intitulado: "*Intervalo de Credibilidade para Intensidade de Tráfego em filas M/M/s Utilizando Integração Numérica"*, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Estatística. Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, Professor Roberto da Costa Quinino – Orientador, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respetiva defesa do candidato. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o candidato foi considerado aprovado condicional às modificações sugeridas pela banca examinadora no prazo de 30 dias a partir da data de hoje por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 14 de março de 2023.

Roberto da Costa Quinino:80871291720
Assinado de forma digital por Roberto da Costa Quinino:80871291720
Dados: 2023.03.14 19:03:15 -03'00'

Prof. Roberto da Costa Quinino (Orientador)
Departamento de Estatística / UFMG

DANILO GILBERTO DE OLIVEIRA VALADARES:06707566601
Assinado digitalmente por DANILO GILBERTO DE OLIVEIRA VALADARES:06707566601
ND: C=BR, O=ICP-Brasil, OU=videoconferencia, OU=33683111000107, OU=Secretaria da Receita Federal do Brasil - RFB, OU=ARSERPRO, OU=RFB e-CPF A3, CN=DANILO GILBERTO DE OLIVEIRA VALADARES:06707566601
Razão: Eu sou o autor deste documento
Localização:
Data: 2023.03.15 09:35:01-03'00'
Foxit PDF Reader Versão: 12.1.1

Danilo Gilberto de Oliveira Valadares
Departamento de Estatística / UFMG

RESUMO

Em teoria de filas, um dos principais interesses dos pesquisadores é estudar o seu comportamento, seu processo de formação e analisar algumas características de desempenho, tais como, por exemplo, a intensidade de tráfego. Esta monografia visa detalhar a metodologia para obtenção do intervalo de credibilidade para a intensidade de tráfego em filas markovianas finitas com s servidores, denominadas M/M/s, na notação de Kendall. Para tanto utilizaremos a abordagem da inferência Bayesiana. A distribuição a posteriori será obtida utilizando integração numérica e permitirá construirmos o intervalo de credibilidade de mínima amplitude.

Palavras-chave: Filas markovianas. Intensidade de tráfico. Integração Numérica. Intervalo de credibilidade de mínima amplitude.

ABSTRACT

The theory of queues is one of the major research interests is to study your behavior, creation process and other performance parameters, such as, for example, traffic intensity. The objective of this monography is to detail the method of obtaining the credibility interval for traffic intensity in Markovian finite queues with s servers, called M/M/s, in Kendall notation. Therefore, will be used the Bayesian inference approach. The posterior distribution will be obtained by numerical integration and then permit the construction of a minimum range credibility interval.

Keywords: Markovian rows. Traffic intensity. Numerical Integration. Minimum range credibility interval.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

LISTA DE ABREVIATURAS

MV	Máxima Verossimilhança.
IC	Intervalo de Credibilidade.

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO

Um dos principais interesses de pesquisa sobre a teoria das filas é para se estudar o desempenho em função de seus parâmetros, tais como, por exemplo, a taxa média de chegada de novos clientes (λ), a taxa média de atendimento (μ) e, também, a intensidade de tráfego (ρ). O problema matemático tratado será a estimação do parâmetro ρ e a obtenção do Intervalo de Credibilidade (IC), segundo o método de inferência estatística por integração numérica.

No sistema de filas $M/M/s$, na notação de Kendal. O primeiro M se refere aos tempos entre atendimentos distribuídos exponencialmente. E o segundo M, aos tempos de atendimento, que, também, seguem uma exponencial (Markoviana). Por fim, o último termo representa a quantidade de atendentes (s), com padrão de atendimento idênticos.

Além da definição de intensidade de tráfego, $\rho = \lambda/s\mu$, outros indicadores podem ser obtidos, tais como a probabilidade de o sistema estar vazio (P_0) e o número esperado de clientes presentes no sistema em determinado momento (m).

Filas do tipo $M/M/s$ tem muitas implicações práticas e, consequentemente, necessita maior inferência. De fato, muitos sistemas da vida real são descritos de modo aproximado por modelos de filas, incluindo redes de computador e telecomunicação (KLEINROCK, 1975; LAKATOS, SZEIDL e MIKLÓS, 2014; CRUZ, SANTOS, *et al.*, 2018), sistemas de manufatura e serviços (PAPADOPOULOS e HEAVY, 1996; GOVIL, 1999; KOOLE e MANDELBAUM, 2002), e sistemas de assistência médica (ALMEHDAWE, JEWKES e HE, 2016; VAN BRUMMELEN, DE KORT e VAN DIJK, 2015; ALMEHDAWE, JEWKES e HE, 2013). Com isso, vários métodos de inferência estatística foram desenvolvidos ao longo dos anos. Entre eles, tem-se o Método da Máxima Verossimilhança (MV) e o de Estimação Bayesiana de Parâmetros.

A MV foi apresentada por (CLARKE, 1957), ao estimar a máxima verossimilhança para λ e μ de uma fila markoviana com um único servidor, *M/M/1*. E (BENES, 1965), estendeu o método para filas de Markov infinitas, isto é, $M/M/\infty$. No caso da estimação bayesiana, (ALMEIDA e CRUZ, 2018) utilizaram em sistemas $M/M/\infty$, e, mais recente, (CRUZ, ALMEIDA, et al., 2018; CRUZ, QUININO e HO, 2017; QUININO e CRUZ, 2017; CHOUDHURY e BASAK, 2018) aplicaram na estimação de ρ em filas $M/M/s$ e $M/M/1$.

O presente estudo determina o intervalo de credibilidade para a intensidade de tráfego em filas markovianas finitas com s servidores, $M/M/s$. Para tanto, utilizou-se a inferência Bayesiana. A distribuição a posteriori é obtida por meio da integração numérica, permitindo a construção do IC de mínima amplitude.

Assim, o presente trabalho está organizado como se segue. Na seção 2, detalhamos o modelo probabilístico para filas $M/M/s$ e a função de verossimilhança. Na seção 3 explicamos o procedimento da inferência bayesiana. Na seção 4 apresentamos um exemplo numérico e os resultados. E na seção 5, é mostrada a conclusão da aplicação dos métodos citados e a sugestão para trabalho futuro.

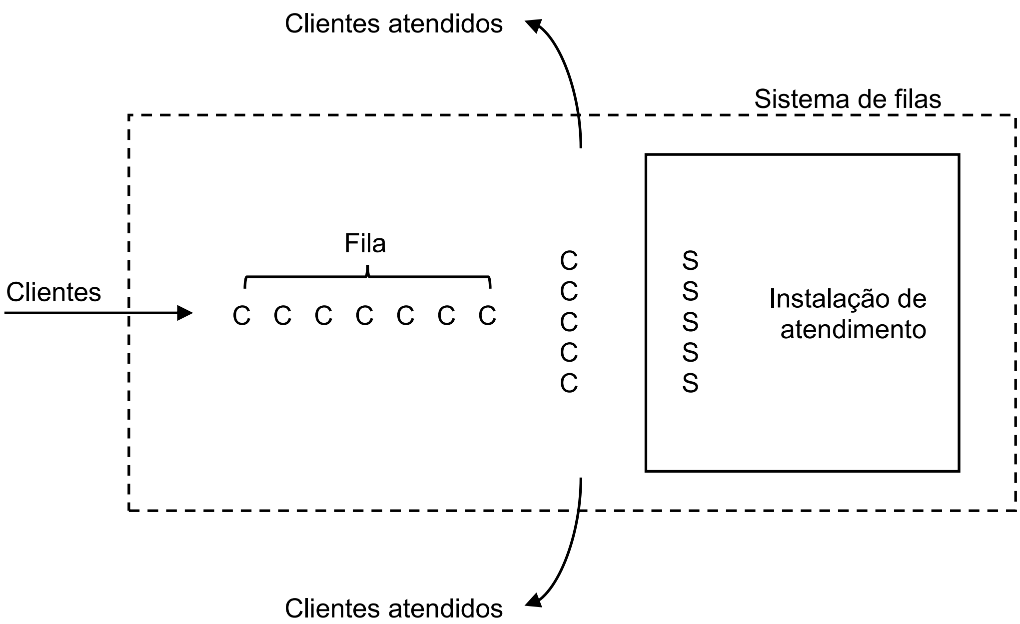
2. MODELO PROBABILÍSTICO E FUNÇÃO DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

2.1 Modelo Probabilístico

A literatura nos apresenta diferentes tipos de modelos de filas baseados no processo de nascimento-e-morte (HILLIER e LIEBERMAN, 2006). Dentre eles, temos o tipo $M/M/s$, em que o processo de chegada é de Poisson, os tempos entre atendimentos são distribuídos exponencialmente de forma independente e idêntica. E os tempos de atendimento, também, são distribuídos de forma independente e idêntica conforme outra distribuição exponencial, com média $1/\mu$.

Na chegada, os clientes seguem imediatamente para o atendimento ou entram na fila, caso não haja servidores disponíveis. Após o atendimento, os clientes saem do sistema e se houver outros para serem atendidos na fila, o próximo segue para o atendimento, conforme a Figura 1.

Figura 1 - Sistema de filas elementar, onde C representa os clientes e S os atendentes



FONTE: HILLIER e LIBERMAN (2006).

De acordo com (QUININO e CRUZ, 2017), em um processo de nascimento-e-morte, no qual m é o número de clientes presentes no sistema em determinado momento e s é o número de servidores (ou atendentes), $\mu_m = m\mu$, se $1 \leq m \leq s$; $\mu_m = s\mu$, se $m >$

s; e $\lambda_m = \lambda$, se $m \geq 0$. A intensidade de tráfego (ρ), $\rho = \lambda / s\mu$, pode ser interpretado como a proporção média do tempo de ocupação dos servidores (ou taxa de utilização dos servidores), assumindo que os clientes escolhem o atendente de forma aleatória. Se $\rho < 1$, o sistema se encontra em equilíbrio e apresenta uma distribuição de probabilidade estacionária P,

$$P_m \equiv P(M = m) = \begin{cases} \frac{(s\rho)^m}{m!} P_0, & 0 \leq m \leq s, \\ \frac{s^s \rho^m}{s!} P_0, & m > s, \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $P_0 \equiv P(M = 0)$ é definido pela condição de que a soma de todas as probabilidades de P_m seja igual a 1 e representa a probabilidade de que o sistema esteja vazio no momento da observação. Isto é,

$$P_0 = \left(\sum_{j=0}^{s-1} \frac{(s\rho)^j}{j!} + \frac{(s\rho)^s}{s!} \frac{1}{(1-\rho)} \right)^{-1}. \tag{2.2}$$

2.2 Estimador de máxima verossimilhança para a intensidade de tráfego

Seja x_i o número de clientes no sistema no momento da observação i. E o espaço amostral é representado por $\mathbf{x} = \{x_1 * x_2 * x_3 * \cdots * x_n\}$, com n amostras coletadas. A função de verossimilhança amostra, onde o parâmetro p é desconhecido, tem-se

$$L(p) = f(x_1; p) * f(x_2; p) * \ldots * f(x_n; p), \tag{2.3}$$

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n} f(\mathbf{x}; p), \tag{2.4}$$

onde $f(\mathbf{x}; p)$ é uma função de densidade de probabilidade (MONTGOMERY e RUNGER, 2012). Observe que o valor estimado que buscamos é aquele que maximiza a função de verossimilhança da amostra $L(p)$ também maximizará o seu logaritmo ($\ln L(p)$), facilitando os cálculos os cálculos.

$$\ln L(p) = f(x_1; p) + f(x_2; p) + \cdots + f(x_n; p), \tag{2.5}$$

$$\ln L(p) = \sum_{i=1}^{n} f(\mathbf{x}; p), \tag{2.6}$$

Ao aplicarmos o Método da Máxima Verossimilhança para estimar o parâmetro intensidade de tráfego (ρ) em filas $M/M/s$, resulta é a seguinte função

$$L(\mathbf{x} \mid \rho) = \prod_{i=1}^{n} \left[\frac{(s\rho)^{x_i}}{x_i!} P_0 I_{\{0 \le x_i \le s\}} + \frac{s^s \rho^{x_i}}{s!} P_0 I_{\{x_i > s\}} \right], \tag{2.7}$$

na qual $I_{\{*\}}$ é o indicador da função e x_i o valor da observação aleatória i, se $0 \le x_i \le s$, $I_{\{0 \le x_i \le s\}} = 1$ e $I_{\{x_i > s\}} = 0$; se $x_i \le s$, $I_{\{0 \le x_i \le s\}} = 0$ e $I_{\{x_i > s\}} = 1$ (CRUZ, QUININO e HO, 2017). A estimação para intensidade de tráfego ($\hat{\rho}_{EMV}$) será o valor que maximiza o resultado da função (2.5). É pertinente lembrar que a obtenção dos dados deve assegurar que as observações amostrais sejam independentes, obtidas de forma padronizada e em tempos suficientemente espaçados.

3. INFERÊNCIA BAYESIANA

A abordagem bayesiana para estimação de um parâmetro desconhecido p, faz uso da distribuição de densidade de probabilidade priori para p, $f(p)$, e da distribuição de densidade de probabilidade condicional $f(\mathbf{x} \mid p)$, sendo $0 \leq p \leq 1$. O resultado dessa combinação é a função de densidade de probabilidade posteriori para p, $f(p \mid \mathbf{x})$, cuja média é o valor estimado ($\hat{p}_{Bayes}$).

No presente trabalho, admitiremos a função priori não informativa uniforme $f(p)$, sendo a função Beta correspondente a $B(a,b)$, de parâmetros $a = 1$ e $b = 1$. Logo, $f(p)$ é uma função de densidade de probabilidade uniforme igual a 1,

$$f(p) = \frac{p^{(a-1)}(1-p)^{(b-1)}}{B(a,b)} = 1. \tag{3.1}$$

E para $f(\mathbf{x} \mid p)$, faremos uso da função de verossimilhança (2.5), onde **x** representa uma amostra aleatória independente.

Para obtermos a função posteriori, $f(p \mid \mathbf{x})$, como uma função de densidade de probabilidade, é necessário multiplicar o produto de $f(p)$ com $f(\mathbf{x} \mid p)$ por uma constante de normalização, K, o que nos leva a seguinte relação para filas $M/M/\,s$,

$$f(\rho \mid \mathbf{x}) = K * f(\rho) * L(\mathbf{x} \mid \rho), \tag{3.2}$$

e substituindo (3.1) em (3.2), tem-se

$$f(\rho \mid \mathbf{x}) = K * (1) * L(\mathbf{x} \mid \rho), \tag{3.3}$$
$$f(\rho \mid \mathbf{x}) = K * L(\mathbf{x} \mid \rho). \tag{3.4}$$

O papel da constante K é garantir que integral de toda a região do parâmetro ρ seja igual a 1, ou seja,

$$\int_0^1 f(\rho \mid \mathbf{x})\, d\rho = 1, \tag{3.5}$$

$$\int_0^1 K * L(\mathbf{x} \mid \rho)\, dp = K * \int_0^1 L(\mathbf{x} \mid \rho)\, d\rho = 1, \tag{3.6}$$

$$K = \frac{1}{\int_0^1 L(\mathbf{x} \mid \rho) d\rho}. \tag{3.7}$$

Assim, a função de densidade de probabilidade a posteriori para p, $f(p \mid \mathbf{x})$, pode ser obtida por meio da substituição dos resultados de (3.7) e (2.3) na função (3.4). E o estimador bayesiano ($\hat{p}_{Bayes}$) é igual à média da distribuição de densidade de probabilidade posteriori para p, estimado por integração numérica,

$$E(p) = \int_0^1 p * f(p \mid \mathbf{x})\, dp, \tag{3.8}$$

para filas $M/M/s$ e substituindo p por ρ,

$$E(\rho) = \int_0^1 \rho * f(\rho \mid \mathbf{x})\, d\rho, \tag{3.9}$$

e resultado será o estimador $\hat{\rho}_{Bayes}$.

Com base na função posteriori, é possível obter Intervalo de Credibilidade de Mínima Amplitude, por exemplo, de 95% para ρ. O que significa que devem ser feitos vários testes para o limite inferior (LI) e o limite superior (LS) para se obter uma área de 0.95 de probabilidade com a menor amplitude possível, $|LI - LF|$.

4. EXEMPLO NUMÉRICO

Uma aplicação baseada nos dados coletados de uma rede de supermercados é discutida para melhor entendermos a presente metodologia. Os caixas de atendimento são separados em caixa normal e caixa rápido. O foco do nosso exemplo é o último, o qual serve exclusivamente para consumidores com até 15 itens. O interesse primário de quem é responsável pelo supermercado é avaliar o tempo entre 15:00 e 22:00 aos sábados, principalmente porque há um alto volume de compradores nesse período, e ele tem aumentado devido a rede de supermercados ter uma agência de propagandas conduzindo as campanhas regularmente. O medo é de os usuários desistirem de ir ao shopping ou não retornarem ao supermercado por causa da insatisfação com o tempo de espera. As experiências passadas por esses donos de supermercados indicam que a intensidade de tráfego (ρ) não pode ser igual a 90% para minimizar o risco de comprometimento das vendas atuais e futuras. Com base em diversos estudos anteriores, é razoável que durante um dado período a chegada dos clientes segue, aproximadamente, de acordo com o Processo de Poisson e o tempo de serviço é uma distribuição exponencial. O objetivo é de avaliar a intensidade de tráfego para um sistema de filas $M/M/6$, ou seja, 6 servidores, é insuficiente.

Nesse cenário, 100 observações aleatórias de consumidores no sistema são coletadas, 20 em 5 sábados consecutivos, em tempos suficientemente espaçados e determinados previamente pela pessoa responsável pela coleta dos dados.

Os valores observados (O) e frequências (F) são apresentados na Tabela 1. Por exemplo, das 100 observações, em 3 vezes, apenas 1 consumidor estava presente no sistema e em 10 vezes, 5 consumidores foram encontrados.

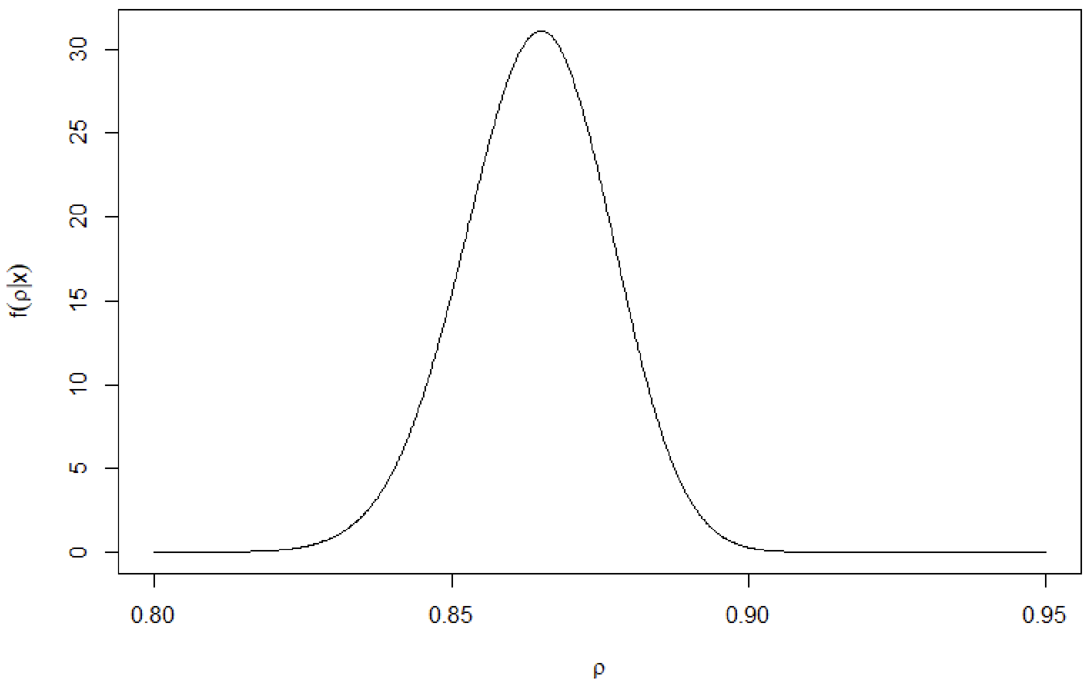
Tabela 1 – Valores observados e suas frequências.

O	F	O	F	O	F	O	F	O	F
1	3	6	9	11	3	16	3	21	1
2	1	7	6	12	3	17	1	22	4
3	8	8	6	13	1	18	2	23	1
4	13	9	6	14	5	19	3		
5	10	10	3	15	4	20	4		

FONTE: Desenvolvida pelo autor (COUTINHO, 2023).

Considerando os dados observados na Tabela 1 e utilizando o programa contido no Anexo B, obtemos a distribuição posteriori para ρ conforme a Figura 1. No caso, utilizamos a distribuição priori com ausência de informação, de parâmetros $a = 1$ e $b = 1$, equivale a uma distribuição priori uniforme para ρ.

Figura 2 - Distribuição a posteriori para ρ



FONTE: Desenvolvida pelo autor (COUTINHO, 2023).

A média a posteriori ($\hat{\rho}_{Bayes}$) para ρ foi de 0.8608 com um intervalo de credibilidade 95% com amplitude mínima foi $[0.8316;\ 0.8939]$. Como a hipótese inicial (H_0) era de $\rho = 0.9$ e o estimador $\hat{\rho}$ não está contido no intervalo de credibilidade de 95%, então podemos rejeitar a hipótese H_0: $\rho = 0.9$. E como $\hat{\rho} = 0.8608$ é menor do que 0.9, então não há evidência para uma preocupação imediata do supermercado.

Observe que quando priori de ρ for uma distribuição uniforme, a moda a posteriori (outro possível estimador Bayesiano para ρ) coincide com o clássico Estimador de Máximo Verossimilhança ($\hat{\rho}_{EMV}$). No Anexo A, o valor encontrado para $\hat{\rho}_{EMV}$ foi 0.8650, o que é próximo da média a posteriori.

5. CONCLUSÕES E SUGESTÃO DE ESTUDOS FUTUROS

O Método de Inferência Bayesiana e respectivo Intervalo de Credibilidade foi utilizado no modelo de filas do tipo $M/M/s$. O procedimento proposto mostrou-se eficiente, gerando resultados satisfatórios que auxiliam na tomada de decisão. Em particular, aplicamos a metodologia em um exemplo de filas em supermercados.

Como trabalho futuro, recomendamos um novo estudo baseado em filas $M/M/s/K$ para avaliar o impacto do número máximo de clientes que o sistema comporta (K) na estimação de ρ.

REFERÊNCIAS

ALMEHDAWE, E.; JEWKES, B.; HE, Q.-M. Analysis and optimization of an ambulance offload delay and allocation problem. **Omega**, v. 65, p. 148-158, 2016.
ALMEIDA, M. A. C.; CRUZ, F. R. B. A note on Bayesian estimation of traffic intensity in single server Markovian queues. **Communications in statistics. Simulation and computation**, v. 47, n. 9, p. 2577-2586, 2018.
BENES, V. E. A Sufficient Set of Statistics for a Simples Telephone Exchange Model. **Mathematics in Science and Engineering**, v. 17, p. 159-187, 1965.
CHOUDHURY, A.; BASAK, A. Statistical inference on traffic intensity in an M/M/1 queueing system. **International Journal of Management Science and Engineering Management**, v. 13, n. 4, p. 274-279, 2018.
CLARKE, A. B. Maximum likelihood estimates in a simple queue. **The Annals of Mathematical Statistics ,** v. 28, n. 4, p. 1036-1040, Dezembro 1957.
CRUZ, F. R. B. et al. Estimation in a general bulk-arrival Markovian multi-server finite queue. **Operational Research**, 29 Setembro 2018. 73-89.
CRUZ, F. R. B. et al. Traffic Intensity Estimation in Finite Markovian Queueing Systems. **Mathematical Problems in Engineering**, v. 2018, p. 1-15, 2018.
CRUZ, F. R. B.; QUININO, R. C.; HO, L. L. Bayesian estimation of traffic intensity based on queue lenght in a multi-server M/M/s queue. **Communications in statistics. Simulation and computation**, v. 46, n. 9, p. 7319-7331, 2017.
EMAN, A.; JEWKES, B.; HE, Q.-M. A markovian queueing model for ambulance offload delays. **European journal of operational research**, v. 226, n. 3, p. 602-614, 2013.
GOVIL, M. Queueing theory in manufacturing: A survey. **Journal of manufacturing systems**, v. 18, n. 3, p. 214-240, 1999.
HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. D. Teoria das filas. In: ______ **Introdução à pesquisa operacional**. 8ª. ed. São Paulo: McGraw-Hill, 2006. Cap. 17, p. 746-801.
KLEINROCK, L. **Queueing System**. New York: John Wiley & Sons, Inc., v. 1, 1975.
KOOLE, G.; MANDELBAUM, A. Queueing models of call centers: An introduction. **Annals of Operations Research**, n. 113, p. 41-49, 2002.
LAKATOS, L.; SZEIDL, L.; MIKLÓS, T. Introduction To Queueing Systems With Telecommunication Applications. **Society for Industrial and Applied Mathematics**, v. 56, p. 203-207, Março 2014. ISSN 1.
MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. Método de estimação pontual. In: ______ **Estatística aplicada e probabilidade para engenheiros**. 5ª. ed. Rio de Janeiro: GEN; LTC, 2012. Cap. 7, p. 160-165.
PAPADOPOULOS, H. T.; HEAVY, C. Queueing theory in manufacturing systems analysis and design: A classification of models for production and transfer lines. **European Journal of Operational Research**, v. 92, n. 1, p. 1-27, July 1996.
QUININO, R. C.; CRUZ, F. R. B. Bayesian sample sizes in an M/M/1 queueing systems. **The International Journal of Advanced Manufacturing Technology**, v. 88, n. 1-4, p. 995, 2017.
VAN BRUMMELEN, S. P. J.; DE KORT, W. L.; VAN DIJK, N. M. Waiting time computation for blood collection sites. **Operations Research for Health Care**, v. 7, p. 70-80, 2015.

ANEXO A – Programa R para obtenção do estimador de máxima verossimilhança

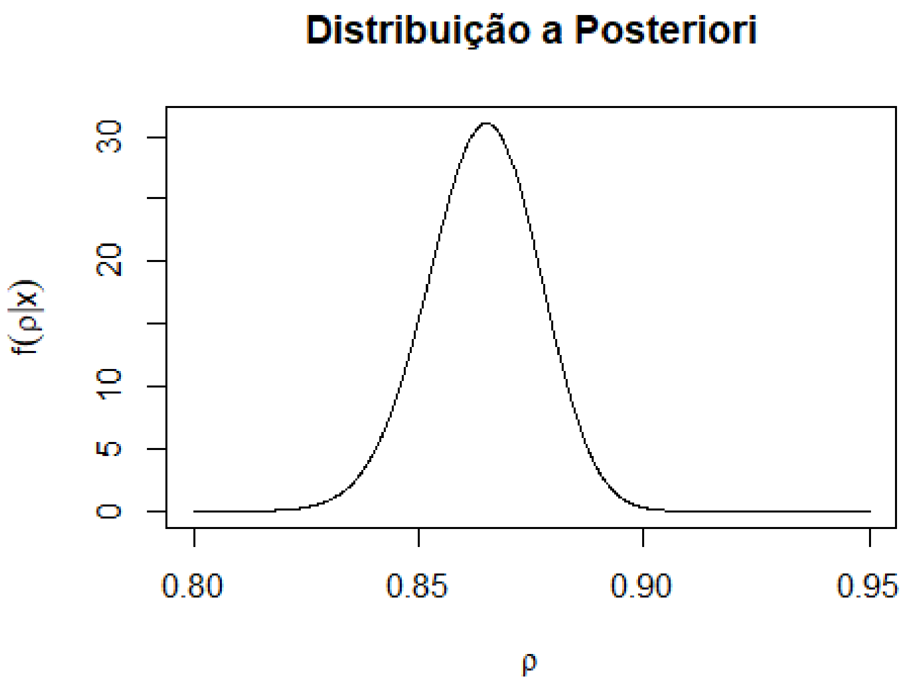
```
  # Carregamento dos pacotes
  library("pacman")
  p_load("latex2exp", "tictoc")

  # Apagando objetos, variaveis, etc.
  rm(list=ls(all=TRUE))

  # Iniciando o cronometro
  tic()

# 1. Modelo probabilístico e funcao de verossimilhanca

  # Amostra (x)
  x <- rep(c(1:23),
           c(3,1,8,13,10,9,6,6,6,3,3,3,1,5,4,3,1,2,3,4,1,4,1))

  # Tamanho da amostra (n)
  n = length(x)

  # Numero de servidores (s)
  s = 6

# 1.1. Definindo a funcao de verossimilhanca (f_Lp) - equacao (2.7) do tex
to
  f_Lp <- function(ro){
    P0 = 0
    E = 1

# 1.2. Calculando P0 - equacao (2.2) do texto
    for (j in 0:(s-1)) {
      P1 = ((s*ro)^j)/factorial(j)
      P0 = P1 + P0
    }

    P0 = P0 + ((s^s)*(ro^s))/(factorial(s)*(1-ro))
    P0 = 1/P0 # Elevando a "-1"

# 1.3. Calculando o produtorio de f_Lp - equacao (2.7) do texto
    for (i in 1:n) {
      xi = x[i]

      # Se "0 <= xi <= s"
      if (xi <= s) {
        E0 = (((s^xi)*((ro)^xi))/factorial(xi))*P0
        E = E*E0

        # Se "xi >= s"
```

```
      }else{
        E0 = (((ro^xi)*(s^s))/factorial(s))*P0
        E = E*E0
      }
    }

    return(E)
  }

# 1.4. Calculando o logaritmo de f_Lp
  f_LogLp = function(ro){
    LogLp = -log(f_Lp(ro))
  }
  # O sinal negativo é referente ao fato da funcao "optim()" sempre trazer
o menor
  # valor como resultado, sendo que queremos o maior

# 2. Estimando o valor de ro que maximiza a funcao de verossimilhanca;
  # ro estimado (ro_emv) por meio da funcao de otmizacao do R, em que "par
" e o
  # valor inicial para as interacoes
  ro_emv <- optim(par = 0.5, fn = f_LogLp,
             method = "Brent", lower = 0, upper = 1)

  # Termino do cronometro
  tempo <- toc()

## 0.12 sec elapsed

# 2. Apresentando os resultados
  cat("\n",
      " • ESTIMADOR DE MAXIMA VEROSSIMILHANCA VIA OTIMIZACAO","\n",
      "     ", "Estimador de rô =", ro_emv$par, "\n", "\n",
      "     ", "Tempo de processamento =", tempo$callback_msg)

##
##   • ESTIMADOR DE MAXIMA VEROSSIMILHANCA VIA OTIMIZACAO
##       Estimador de rô = 0.8650847
##
##       Tempo de processamento = 0.12 sec elapsed
```

ANEXO B – Programa R para obtenção da distribuição a posteriori e intervalo de credibilidade para ρ.

```
  # Carregamento dos pacotes
  library("pacman")
  p_load(gtsummary, ggplot2, latex2exp, dplyr, flextable, tictoc)

  # Apagar objetos, variaveis, etc.
  rm(list=ls(all=TRUE))

  # Inicio do cronometro
  tic()

# 1. Funcao de verossimilhanca (f_Lp) - equacao (2.5) do texto

  # Amostra (x)
  x <- rep(c(1:23),
           c(3,1,8,13,10,9,6,6,6,3,3,3,1,5,4,3,1,2,3,4,1,4,1))

  # Tamanho da amostra (n)
  n = length(x)

  # Número de servidores (s)
  s = 6

  # ro calculado - ANEXO A
  ro_emv = 0.8651

# 1.1. Definindo a funcao de verossimilhanca (f_Lp) - equacao (2.7) do tex
to
  f_Lp <- function(ro){
    P0 = 0
    E = 1

# 1.2. Calculando P0 - equacao (2.2) do texto
    for (j in 0:(s-1)) {
      P1 = ((s*ro)^j)/factorial(j)
      P0 = P1 + P0
    }

    P0 = P0 + ((s^s)*(ro^s))/(factorial(s)*(1-ro))
    P0 = 1/P0 # Elevando a "-1"

# 1.3. Calculando o produtorio de f_Lp - equacao (2.7) do texto
    for (i in 1:n) {
      xi = x[i]

      # Se "0 <= xi <= s"
      if (xi <= s) {
        E0 = (((s^xi)*((ro)^xi))/factorial(xi))*P0
        E = E*E0

        # Se "xi >= s"
```

```
      }else{
        E0 = (((ro^xi)*(s^s))/factorial(s))*P0
        E = E*E0
      }
    }

    return(E)
  }


# 2. Inferencia Bayesiana

# 2.1. Definindo o valor da constante K (K_posteriori) - equacao (3.7) do
texto
  # Calculando a integral da funcao de verossimilhanca (Int_fLp)
  Int_fLp <- integrate(f_Lp, 0, 1)
  Int_fLp = Int_fLp$value
  K_posteriori = 1/Int_fLp

# 2.2. Obtendo a funcao densidade de probabilidade
  # para p a posteriori - equacao (3.4) do texto,
  # lembrando a funcao a priori e uma uniforme nao informativa de valor ig
ual a 1
  f_Posteriori <- function(ro){
    posteriori = K_posteriori*(1)*f_Lp(ro)
    return(posteriori)
  }

# 2.3. Plotando a curva da funcao a posteriori (f_Posteriori)
  curve(f_Posteriori,0.8,0.95,1000,main="Distribuição a Posteriori",
        xlab=expression(rho), ylab=TeX(r'($f(\rho | x)$)'))
```




```
# 2.4. Estimando ro, ou seja, a media de f_Posteriori
# 2.4.1. Funcao para calcular a media a posteriori
  f_Mposteriori <- function(ro){
    Mposteriori = f_Lp(ro)*ro
    return(Mposteriori)
  }

# 2.4.2. Obtendo o valor da constante K
  Int_fMposteriori <- integrate(f_Mposteriori, 0, 1)
  Int_fMposteriori = Int_fMposteriori$value
  K_Mposteriori = 1/Int_fMposteriori

# 2.4.1. Estimando ro (ro_bayes), que e o valor da media posteriori
  # ro_bayes = Int_fMposteriori/Int_fLp
  ro_bayes = K_posteriori/K_Mposteriori

# 3. Obtendo o Intervalo de Credibilidade de 95% (IC)

# 3.1. Definindo o erro
  erro = 0.0001

  # Vetor vazio para o armazenamento dos resultados obtidos
  W <- c()

# 3.2. Definindo o limite inferior (LI)
  # Com base na distribuicao a posteriori,
  # percebe-se que uma boa estimacao inicial para LI pode ser entre 0.8 e
0.85
  for (i in seq(0.8,0.84,0.001)){
```

```
# 3.3. Definindo o limite superior (LS)
  # Com base na distribuicao a posteriori,
  # percebe-se que uma boa estimacao inicial para LF pode ser entre 0.88 e
0.92
    for (j in seq(0.88,0.92,0.001)){

# 3.4. Calculando a area entre LI e LS (AreaCobertura)
    Int_LiLf <- integrate(f_Lp,i,j) # i = limite inferior; j = limite supe
rior
    Int_LiLf = Int_LiLf$value
    AreaCobertura = Int_LiLf*K_posteriori

# 3.5. Definindo o Intervalo de Credibilidade de 95% (IC)
    IC <- abs(AreaCobertura-0.95)

# 3.6. Armazenando os resultados obtidos.
  # Caso o IC encontrado seja menor do que o erro,
  # armazenar os resultados no vetor W, definido anteriormente
      if (IC < erro){
        W <- rbind(W,c(i,j,AreaCobertura,IC,(j-i)))
      }
    }
  }

# 3.6.1. Ordenando a tabela de resultados por mínima amplitude
  # e depois pelo menor erro calculado.
  W <- W[order(W[,5],W[,4]),]

# Termino do cronometro
  tempo <- toc()

## 0.64 sec elapsed

# 4. Apresentando os resultados para o Intervalo de credibilidade de
  # Mínima Amplitude, em que entre o limite inferior e superior
  # deve conter 95% dos valores.
  cat("\n",
      " • INTERVALO DE CREDIBILIDADE DE MÍNIMA AMPLITUDE","\n",
      "    ", "Limite Inferior - 95% =",W[1,1],"\n",
      "    ", "Limite Superior - 95% =",W[1,2],"\n",
      "    ", "Cobertura Calculada =",W[1,3],"\n",
      "    ", "Média a Posteriori =",ro_bayes,"\n",
      "    ", "Moda a Posteriori =",ro_emv,"\n","\n",
      "    ", "Tempo de processamento dos dados =", tempo$callback_msg)

##
##   • INTERVALO DE CREDIBILIDADE DE MÍNIMA AMPLITUDE
##      Limite Inferior - 95% = 0.834
##      Limite Superior - 95% = 0.898
##      Cobertura Calculada = 0.9500644
##      Média a Posteriori = 0.8608465
##      Moda a Posteriori = 0.8651
##
##      Tempo de processamento dos dados = 0.64 sec elapsed
```