



ESTIMADORES DE ERRO BASEADOS NO SUBDOMÍNIO E NO ELEMENTO PARA O MEFG APLICADO À ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS DE CONCRETO

Ivone Passos Ferreira

Felício Bruzzi Barros

Marcelo Greco

ivonepassosferreira@yahoo.com.br

feliciobarros@gmail.com

mgreco@dees.ufmg.br

Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da UFMG.

Av. Antônio Carlos, 6627 - Escola de Engenharia - Bloco 1 - 4o andar, sala 4215, Pampulha, Belo Horizonte - MG - CEP 31270-901 – Brasil.

Resumo. Com o objetivo de aprimorar a simulação do comportamento não linear de estruturas de concreto, as investigações têm dedicado especial atenção à modelagem de problemas que envolvem as Mecânicas do Dano e da Fratura. O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) surge como uma eficiente e atrativa ferramenta para este propósito. A característica nodal da estratégia de enriquecimento do MEFM permite a necessária flexibilidade para representar fenômenos como a deformação localizada, descontinuidade do material e propagação de trinca. O desenvolvimento de um robusto e confiável procedimento adaptativo para conduzir o enriquecimento é essencial para melhorar a qualidade da solução aproximada. Este trabalho apresenta o estimador de erro baseado no resíduo no subdomínio adaptado para problemas pertencentes ao campo da Mecânica do Dano. A resposta do material parcialmente frágil é descrita com base no Modelo de Mazars. Adicionalmente, é mostrada uma comparação entre os métodos de estimativa de erro baseados no elemento e no subdomínio, para avaliar o desempenho destas duas estratégias.

Palavras chave: Estimadores de Erro, Partição da Unidade, Método dos Elementos Finitos Generalizados

1 INTRODUÇÃO

Entre as várias questões investigadas dentro do âmbito do Método dos Elementos Finitos Generalizados – MEFG (Strouboulis *et al.*, 2000 a e b), encontra-se ainda em aberto a avaliação do erro de discretização, especialmente em contexto não linear. A obtenção de limites inferiores e superiores confiáveis para os estimadores *a posteriori* (que sejam comprovadamente próximos à solução exata e/ou de referência e, claro, obtidos a um custo computacional razoável) é, sem dúvida, de grande interesse prático. Esses limites são o ingrediente principal dos procedimentos adaptativos e a base para a obtenção de estimadores Orientados ao Objetivo. Este trabalho dá continuidade às investigações de Barros *et al.* (2004), Strouboulis *et al.* (2006) e Barros *et al.* (2013). O interesse é direcionado para o desempenho dos estimadores de erro *a posteriori* do tipo residuais: Método do Resíduo no Elemento Equilibrado – EERM (limite superior) e Método do Subdomínio – SRM (limites superior e inferior), com vistas a uma possível aplicação na condução de um refinamento adaptativo-*e* (definido, por analogia ao refinamento-*p*, no qual a função de forma do elemento é modificada. Aqui, porém, diferentemente do MEF, esta modificação se dá com base no enriquecimento extrínseco das funções de partição da unidade, que são multiplicadas por novas funções adequadas à análise) durante a resolução de problemas envolvendo o comportamento não linear do concreto, especificamente o dano. A diferença básica entre as duas abordagens de medida de erro está no fato de que as estimativas de erro locais construídas em subdomínios da malha de elementos finitos adequam-se diretamente à estratégia de enriquecimento do MEFG, que é associada às nuvens, ou conjuntos de elementos coincidentes com aqueles subdomínios. Por outro lado, no Método do Resíduo no Elemento Equilibrado, sendo os erros locais vinculados a cada elemento, torna-se necessário que um “pós-processamento” seja realizado para se adaptar à abordagem baseada em nuvens do MEFG. Independentemente da técnica para cálculo do erro, os índices de efetividade (tanto locais quanto globais), obtidos pela razão entre as medidas de erro aproximado e exato (ou equivalente), fornecem informação importante sobre o desempenho da estimativa do erro, a partir de limites pré-estabelecidos para a faixa de variação dos mesmos. O problema da distribuição e evolução do dano no concreto é simulado a partir do modelo de Mazars (1984). Em Barros *et al.* (2004), o EERM é modificado para a abordagem do MEFG e, em seguida, adaptado para que o erro seja estimado ao longo do procedimento de solução de um problema com não linearidade física. No presente trabalho, a mesma adaptação é realizada para o SRM, partindo-se dos trabalhos de Strouboulis *et al.* (2006) e Barros *et al.* (2013).

Neste texto, o MEFG é sucintamente apresentado na Seção 2, delegando para a seção 3 a discussão sobre os estimadores de erro e a extensão para o caso da análise não linear. Na seção 4, são discutidos os resultados de um problema numérico proposto e, na seção 5 são apresentadas as considerações finais.

2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

O Método dos Elementos Finitos Generalizados – MEFG (Strouboulis *et al.*, 2000 a e b, Duarte *et al.*, 2000) ou Método dos Elementos Finitos Estendidos (Belytschko *et al.*, 1999) são o resultado de investigações desenvolvidas a partir dos Métodos Sem Malha como, por exemplo, o método *hp-clouds* de Duarte *et al.* 1996 e o Método da Partição da Unidade de Melenk e Babuska (1996). Muitas das técnicas utilizadas nos primeiros estão diretamente relacionadas com as que foram desenvolvidas para os segundos, e do entendimento de que existia uma grande quantidade de códigos e um amplo legado de robustos algoritmos,

baseados no MEF, que não seria conveniente descartar. Tanto o MEFG quanto o Método dos Elementos Finitos Estendidos são baseados em malha (podem ser usados com malhas estruturadas e não estruturadas) e realizam o enriquecimento da aproximação extrinsecamente. Ainda que propostos de forma independente, segundo Belytschko *et al.* (2009) a distinção entre as duas abordagens é bastante vaga podendo ser consideradas equivalentes. Nesse trabalho será utilizada apenas a denominação MEFG.

No MEFG, partindo-se de uma malha convencional de elementos finitos formada a partir de N pontos nodais $\{x\}_{j=1}^N$, em um domínio aberto e limitado Ω , define-se uma região ou nuvem ω_j , obtida pela união dos elementos que compartilham o ponto nodal x_j . Um conjunto das funções Lagrangianas N_j , associadas ao nó x_j , estabelece uma função partição da unidade, PU, de suporte compacto ω_j , de tal modo que:

$$\sum_{j=1}^N N_j(x) \quad \forall x \in \Omega \quad (1)$$

Considere, também, os conjuntos formados por (q_j+1) funções linearmente independentes definidas em cada nó x_j com suportes nas nuvens ω_j :

$$\mathfrak{F}_j \stackrel{def}{=} \{1, L_{j1}, L_{j2}, \dots, L_{jq_j}\} \quad (2)$$

Para a construção das funções de forma φ_j , que estarão vinculadas ao nó x_j , as funções PU são multiplicadas (enriquecidas extrinsecamente) pelos componentes do conjunto da Eq. (2) o que resulta em:

$$\{\varphi_{ji}\}_{i=1}^{q_j+1} = N_j(x) \times \{1, L_{j1}, L_{j2}, \dots, L_{jq_j}\} \quad (3)$$

A aproximação global resultante, para os deslocamentos sobre o domínio Ω , denotada como $\tilde{\mathbf{u}}(x)$, pode então ser escrita como uma combinação linear das funções de forma associadas a cada nó, como a seguir:

$$\tilde{\mathbf{u}}(x) = \sum_{j=1}^N N_j(x) \mathbf{u}_j + \sum_{j=1}^N N_j(x) \sum_{i=1}^{q_j} L_{ji}(x) \mathbf{a}_{ji} \quad (4)$$

em que \mathbf{u}_j e \mathbf{a}_{ji} são vetores de parâmetros nodais associados às funções N_j e L_{ji} respectivamente. A continuidade dessa função sobre o domínio é assegurada pelo suporte compacto da partição da unidade, ou seja, $N_j(x) = 0$ no contorno de ω_j . As funções especiais determinam as características locais da aproximação resultante (Barros *et al.*, 2004).

3 ESTIMADOR DE ERRO BASEADO NO RESÍDUO NO SUBDOMÍNIO

Uma vez que o processo de danificação tem início, o comportamento do material torna-se

não linear e isso tem impacto direto no primeiro argumento da forma bilinear $B(\cdot, \cdot)$ representativa do problema de valor de contorno, PVC, ou seja:

$$B(\mathbf{e} + \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \neq B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) + B(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H^1 \quad (5)$$

em que \mathbf{e} é a função erro definida como:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \quad (6)$$

sendo \mathbf{u} a solução analítica do PVC, $\tilde{\mathbf{u}}$ a solução aproximada obtida via MEEG, \mathbf{v} as funções teste e H^1 o espaço de Hilbert de ordem 1. Observa-se que, diferentemente dos problemas de comportamento linear, existe na Eq. (5) uma desigualdade o que obriga a se buscar a linearização do problema do erro a exemplo do que se faz para o cálculo de \mathbf{u} , conforme se segue.

Considera-se, a princípio, que, para o problema com não-linearidade física em questão, o equilíbrio já esteja verificado no passo ou pseudo tempo t . Cada passo t deve ser entendido como uma configuração de equilíbrio do procedimento de solução do problema não linear e que resultará em uma nova configuração de equilíbrio no passo $t+\Delta t$, quando esta configuração é alterada de Δt . Estabelece-se assim, o seguinte PVC:

Busca-se, ${}^{t+\Delta t} \mathbf{u} = {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}$ tal que:

$$\begin{aligned} \nabla^T \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) + {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} &= \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} &= {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}} \text{ em } \Gamma_D \\ \mathbf{t}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) &= {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}} \text{ em } \Gamma_N \end{aligned} \quad (4)$$

em que:

${}^{t+\Delta t} \mathbf{b}$ e ${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}}$ são forças de volume e superficiais ao final ao passo $t+\Delta t$.

${}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{u}}$ é o deslocamento prescrito ao final do passo $t+\Delta t$.

${}^{t+\Delta t} \mathbf{u}$ é a solução obtida ao final do passo $t+\Delta t$.

∇ é o operador gradiente.

$\boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u})$ é o tensor tensão de segunda ordem.

Aqui a variável t é utilizada como forma de denotar diferentes passos (*i.e.* intensidades de força ou deslocamento). Naturalmente, esses passos podem ser variáveis ao longo da análise e tão pequenos quanto seja necessário.

Assumindo que ${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{H}^1$ seja uma aproximação da solução no passo $t+\Delta t$, o problema do erro passa a ser o seguinte:

Busca-se ${}^{t+\Delta t} \mathbf{e} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{u} - {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}$ tal que:

$$\begin{aligned} \nabla^T [\boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}})] + \mathbf{r}_\Omega({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}) &= \mathbf{0} \text{ no } \Omega \\ {}^{t+\Delta t} \mathbf{e} &= \mathbf{0} \text{ no } \Gamma_D \\ \mathbf{t}({}^{t+\Delta t} \mathbf{u}) - \mathbf{t}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}) &= \mathbf{R}_\Gamma({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}) \text{ no } \Gamma_N \end{aligned} \quad (8)$$

em que o resíduo no interior do domínio é dado por:

$$\mathbf{r}_\Omega({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) = \nabla^T \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) + {}^{t+\Delta t}\mathbf{b} \text{ no } \Omega \quad (9)$$

e o resíduo no contorno de Neumann é definido como:

$$\mathbf{R}_\Gamma({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) = \hat{\mathbf{t}} - \mathbf{t}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) \text{ no } \Gamma_N \quad (10)$$

Em decorrência da não linearidade do problema, as propriedades do meio podem ser diferentes para a solução e sua aproximação. Conseqüentemente, o erro não é exclusivo da aproximação \mathbf{e} , por isso:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) - \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) &\neq \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}) \\ \hat{\mathbf{t}}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) - \mathbf{t}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) &\neq \mathbf{t}({}^{t+\Delta t}\mathbf{e}) \end{aligned} \quad (11)$$

Para que o problema seja descrito apenas segundo ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$, é preciso eliminar os termos em ${}^{t+\Delta t}\mathbf{u}$. Utiliza-se, então, a expansão de Taylor para as tensões em torno da solução ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) &= \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) + \\ &+ \frac{1}{2} \left. \frac{\partial^2 \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^2} \right|_{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}^2({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

em que $\boldsymbol{\varepsilon}$ é o tensor de deformações.

Desprezando-se, agora, os termos de alta ordem, a expressão anterior pode ser representada pelos dois primeiros termos apenas. Dessa forma, ao final do passo $t+\Delta t$, o tensor de tensões pode ser aproximado em torno da solução ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$ como:

$$\boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u}) = \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) + \left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{t+\Delta t} \boldsymbol{\varepsilon}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u} - {}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) \quad (13)$$

em que $\left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{t+\Delta t}$ representa a forma tangente exata da relação constitutiva para um campo de deslocamentos definido por ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$.

Ao substituir essa expressão na Eq. (8), tem-se um novo PVC estabelecido para a aproximação ${}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}$ do erro exato ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$:

$$\begin{aligned} \nabla^T \left[\left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\delta+\Delta\delta} \boldsymbol{\varepsilon}({}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}) \right] + \mathbf{r}_\Omega({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) &= 0 \text{ em } \Omega \\ {}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}} &= 0 \text{ em } \Gamma_D \end{aligned} \quad (14)$$

$$\left[\left. \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}({}^{t+\Delta t}\mathbf{u})}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} \right|_{\delta+\Delta\delta} \boldsymbol{\varepsilon}({}^{t+\Delta t}\bar{\mathbf{e}}) \right] \mathbf{n} = \mathbf{R}_\Gamma({}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}) \text{ em } \Gamma_N$$

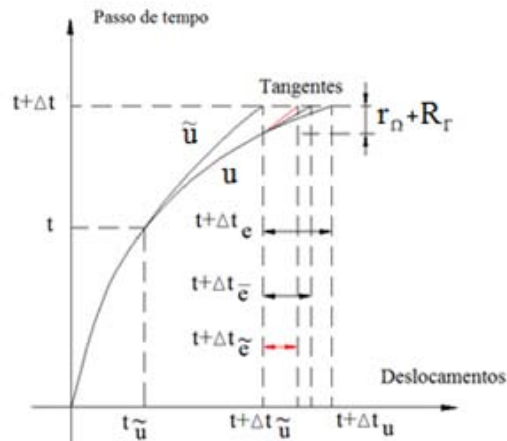


Figura 1. Interpretação geométrica para a estimativa de erro no caso não linear. Adaptado de: Barros (2002).

Uma interpretação geométrica para o PVC do erro, Eq. (14), pode ser dada observando-se a Fig. 1, que apresenta o comportamento do passo de tempo *versus* deslocamento pontual. Resumindo, a tangente da curva exata \mathbf{u} no ponto ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$ juntamente com o resíduo correspondente à incapacidade da solução aproximada ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$ em verificar o equilíbrio do problema na Eq. (7) são utilizados para se calcular ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}$. Caso fossem empregados todos os termos da série na Eq. (12) a solução deste problema corresponderia ao valor exato de aproximação, ou seja, ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$. Como é utilizada a forma linearizada, a solução ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}$ corresponde a uma aproximação desse erro, tão mais próxima quanto melhor for a aproximação ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$. Tais condições, apesar de não terem sido explicitadas nesse trabalho, dizem respeito ao comportamento da curva \mathbf{u} que deve ser sempre ascendente (para que o erro linearizado tenha o comportamento assintótico equivalente ao erro exato).

O problema assim formulado parte do pressuposto que se conheça o comportamento real do meio para que se possa utilizar a forma exata $\partial\sigma(\mathbf{u})/\partial\varepsilon|_{t+\Delta t}$, Eq. (12). Na realidade, a distribuição do dano em $t+\Delta t$ é função da flexibilidade da estrutura definida pelos graus de liberdade da aproximação ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{u}}$. Como apenas a forma aproximada $\partial\sigma(\tilde{\mathbf{u}})/\partial\varepsilon|_{t+\Delta t}$ está disponível, Eq. (13), é possível obter apenas uma aproximação para o erro, isto é, ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}$, Fig. 1, que, por sua vez, aproxima assintoticamente o erro ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$. Esta é uma questão relacionada com a não linearidade do problema analisado sendo, portanto, importante que dois aspectos da análise adaptativa sejam avaliados:

1) O tamanho dos passos de tempo para o procedimento de solução incremental – Considerando que a solução $\tilde{\mathbf{u}}$ reproduza exatamente \mathbf{u} até o passo t , o erro ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}$ a ser encontrado é proveniente somente do passo Δt . Se esse passo for suficientemente pequeno, a não linearidade nas relações tensão-deformação é menos significativa. Dessa forma espera-se que $\partial\sigma(\tilde{\mathbf{u}})/\partial\varepsilon|_{t+\Delta t}$ aproxime bem $\partial\sigma(\mathbf{u})/\partial\varepsilon|_{t+\Delta t}$ e, conseqüentemente, ${}^{t+\Delta t}\tilde{\mathbf{e}}$ aproxima bem ${}^{t+\Delta t}\mathbf{e}$;

2) Controle do erro a cada passo – a hipótese assumida no parágrafo anterior de inexistência de erro entre as soluções exata e aproximada até o passo t é muito severa e, claro, sempre haverá um erro de aproximação. Pode-se, entretanto, chegar a algo próximo desta situação desde que o controle do erro seja realizado a cada passo, de modo que a solução seja refinada caso seja necessário.

As seguintes formas variacionais podem ser, então, empregadas para obter as funções indicadoras de erro nos estimadores EERM (baseado na abordagem linear de Demkowicz *et al.*, 1984) e SRM (baseado na abordagem linear de Prudhomme *et al.*, 2004), em um passo $t+\Delta t$:

Busca-se:

(Resíduo no Elemento Equilibrado - EERM),

${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q} \in \tilde{\mathcal{S}}_{p+q}^0(K)$ tal que:

$$B_{\tan g}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K, \mathbf{v}_{p+q}^0) = l(\mathbf{v}_{p+q}^0) \quad \forall \mathbf{v}_{p+q}^0 \in \tilde{\mathcal{S}}_{p+q}^0(K) \quad (15)$$

onde $\tilde{\mathcal{S}}_{p+q}^0(K)$ representa um espaço de funções polinomiais definidas no elemento K e com dimensão q superior a $\tilde{\mathcal{S}}_p(K)$. Este, por sua vez, é o espaço em que a solução ${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}$ é determinada. O super índice 0 em $\tilde{\mathcal{S}}_{p+q}^0(K)$ indica que, neste espaço, as funções de aproximação polinomiais de ordem p ou menor não são nele representadas.

Desmembrando-se os termos na Eq. (15):

$$\begin{aligned} B_{\tan g}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K, \mathbf{v}_{p+q}^0) &= \iint_{\omega_j} \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}_{p+q}^0) \boldsymbol{\sigma}^{\tan g}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K) d\Omega \\ l_K(\mathbf{v}_{p+q}^0) &= \iint_K \boldsymbol{\varepsilon}^T(\mathbf{v}_{p+q}^0)^{t+\Delta t} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega \cap \partial\Gamma_N} (\mathbf{v}_{p+q}^0)^T ({}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}}) d\Gamma \\ &+ \int_{\partial K \setminus \partial\Omega} (\mathbf{v}_{p+q}^0)^T \langle {}^{t+\Delta t} \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}) \rangle dS - B_K({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}_{p+q}^0) \end{aligned} \quad (16)$$

onde $\langle {}^{t+\Delta t} \mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}) \rangle$ representa a média do vetor tensão considerando os valores encontrados na mesma aresta de elementos vizinhos.

A medida global de erro utilizada como estimador é obtida através dos valores locais da norma de energia:

$$\|\varepsilon_1\|_U = \|{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K\|_U = \sqrt{\sum_{K \in \Omega} (\tilde{\xi}_K)^2} \quad (17)$$

Lembrando que para o MEEG, o erro associado à nuvem ω_j :

$$\varepsilon_1^{\omega_j} = \sum_{K \in \omega_j} \frac{V_K \|{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K\|_{U(K)}}{V_{\omega_j}} \quad (18)$$

em que para cada elemento K tem-se:

$$\tilde{\xi}_K = \|{}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K\|_{U(K)} = [B_K({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K, {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^K)]^{\frac{1}{2}} \quad (19)$$

(Resíduo no Subdomínio - SRM)

${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q} \in \tilde{S}_{p+q}^0(\omega_i)$, tal que:

$$B_{\tan g}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_i}, \mathbf{v}_{p+q}^0) = l(\mathbf{v}_{p+q}^0) \quad \forall \mathbf{v}_{p+q}^0 \in \tilde{S}_{p+q}^0(\omega_i) \quad (20)$$

Desmembrando-se os termos na Eq. (20) tem-se:

$$B_{\tan g}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}, \mathbf{v}_{p+q}) = \iint_{\omega_j} \zeta_j \boldsymbol{\epsilon}^T(\mathbf{v}_{p+q}) \boldsymbol{\sigma}^{\tan g}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}) d\Omega \quad (21)$$

$$l_{\omega_j}(N_j \mathbf{v}_{p+q}) = \iint_{\omega_j} (N_j \mathbf{v}_{p+q})^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial \omega_j \cap \Gamma_N} (N_j \mathbf{v}_{p+q})^T {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}} d\Gamma$$

$$B_{\omega_j}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}}, N_j \mathbf{v}_{p+q})$$

em que ζ_j representa uma função de ponderação (Barros *et al.*, 2013). A estimativa global pode ser definida pela soma das medidas locais associadas com cada subdomínio:

$$\varepsilon_k^U = \sqrt{M} \sqrt{\sum_j \left\| {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j} \right\|_{U(\omega_j)}^2} = \sqrt{M} \sqrt{\sum_{j=1}^N B_{\omega_j}^{\zeta_j}({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j}, {}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q}^{\omega_j})} \quad (22)$$

Lembrando que, k indica tipos de estratégias para a definição de medidas do erro associados à escolha ζ_j .

Para $k=2 \rightarrow \zeta_j = N_j$ e $M=1$ (Prudhome *et al.*, 2004) para o MEF

Para $k=3 \rightarrow \zeta_j = 1$ e $M \neq 1$ (Strouboulis *et al.*, 2006) para o MEEG

Note que no caso $k=3$, M representa o índice de sobreposição da partição da unidade (número de nós do elemento finito).

As funções $\tilde{\mathbf{e}}_{p+q}$ determinadas localmente (para cada elemento ou nuvem) são, portanto, representações da função $\bar{\mathbf{e}}$ que, dependendo das condições de análise, podem ou não ser boas aproximações dos erros locais.

Finalmente, o sistema de equações para as funções indicadoras de erro (de ambos os estimadores) no passo $t+\Delta t$, pode ser definido de maneira análoga ao caso linear.

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{erro} {}^{t+\Delta t} \mathbf{I} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} \quad (23)$$

Funções indicadoras do erro:

$${}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{e}}_{p+q} = (\boldsymbol{\Phi}_{p+q}^0)^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{I} \quad (24)$$

Onde $\boldsymbol{\Phi}_{p+q}^0$ é o vetor das funções de aproximação obtidas pelo MEEG e pertencentes ao espaço $\tilde{S}_{p+q}^0(\omega_i)$ e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{I}$ é o vetor de parâmetros nodais associado às funções de aproximação.

Matriz de rigidez

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}_{erro} = \left(\mathbf{B}_{p+q}^0 \right)^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{C}_{\tan g} \left(\mathbf{B}_{p+q}^0 \right) d\Omega \quad (25)$$

Vetor de Forças Residuais para o MREE:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{R}_K = \iint_K \left(\Phi_{p+q}^0 \right)^T {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \left(\Phi_{p+q}^0 \right)^T \hat{\mathbf{t}} d\Gamma + \int_{\partial K \cap \Gamma_N} \left(\Phi_{p+q}^0 \right)^T \left\langle \mathbf{t} \left({}^{t+\Delta t} \tilde{\mathbf{u}} \right) \right\rangle dS - {}^{t+\Delta t} \mathbf{K} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} \quad (26)$$

Vetor de Forças Residuais para o SRM:

$$\delta+\Delta\delta \mathbf{R}_{\omega_j} = \iint_{\omega_j} \left(\Phi_{p+q}^0 \right)^T \left(N_j \mathbf{v}_{p+q} \right) {}^{t+\Delta t} \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial \omega_j \cap \Gamma_N} \left(\Phi_{p+q}^0 \right)^T \left(N_j \mathbf{v}_{p+q} \right) {}^{t+\Delta t} \hat{\mathbf{t}} d\Gamma - {}^{t+\Delta t} \mathbf{K} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U} \quad (27)$$

Uma questão chave na resolução de sistemas não lineares é a escolha da matriz de rigidez. Segundo Rodriguez-Ferran e Huerta (2000), o cálculo da matriz de rigidez consistente não é uma tarefa fácil. Nesse trabalho optou-se por adotar a matriz secante em a substituição à matriz tangente. A matriz calculada com o módulo secante $[(1-D)\mathbf{C}]$, Eq. (29), é simétrica e positiva-definida:

$$\mathbf{K}_{sec} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T [(1-D)\mathbf{C}] \mathbf{B} d\Omega \quad (29)$$

Devido ao uso da técnica de solução incremental iterativa, para a resolução do problema não linear, é possível distinguir dois tipos diferentes de medidas de erro:

- total que é calculada a partir do histórico de carregamento total;
- incremental que emprega quantidades relacionadas, apenas, ao incremento considerado.

Optou-se pelo uso da medida de erro incremental, que se aplicada adequadamente, apresenta a vantagem de acelerar o processo de solução do problema não linear, porque apenas o passo de carga, para o qual a solução é refinada, é repetido, no caso de um procedimento adaptativo da solução. Caso a medida de erro total seja adotada, toda a análise deveria ser reiniciada sempre que o enriquecimento p for conduzido. Por questões óbvias, essa opção pode se tornar proibitivamente cara para análises de grande escala. O erro deve ser controlado, em cada passo, e mantido, tanto quanto possível, pequeno. Se tal regra for violada, corre-se o risco de não se convergir para uma solução equilibrada ao final do passo em que a aproximação é enriquecida (Barros, 2002).

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

O problema considerado, Fig. 2, corresponde a uma viga parede de concreto com 1,0 cm de espessura, sendo as solicitações impostas a ela descritas pelas seguintes equações:

$$q_1 = q_3 = 24y - 120 \quad \text{e} \quad q_2 = 3y - 30y^2 \quad (30)$$

A análise numérica foi realizada sob a hipótese de estado plano de tensão, fazendo uso de controle de força, mediante aplicação de passos variados (o primeiro correspondente à proporção de 50%, com relação às solicitações impostas, e os demais a 2,5%), resultando um total de 25 passos. Os parâmetros do modelo de Mazars (Mazars, 1984), relacionados ao tipo de concreto considerado, são: $A_c=0.655$, $B_c=1250$, $A_t=0,7$, $B_t=2000$, $\epsilon_{d0}=7,0E-05$, $E=29200$ MPa, $\nu = 0,3$. A tolerância para convergência em energia das iterações de cada passo foi adotada igual a $5,0E-3$.

Os estimadores EERM e SRM foram avaliados segundo as medidas globais e locais, considerando três níveis de discretização distintos para a estrutura da Fig. 2(a). As outras duas malhas utilizadas, 4x8 e 8x16, foram obtidas a partir de dois refinamentos sucessivos na malha 2x4, Fig. 2(b). As três malhas têm em comum o fato de serem compostas por elementos quadrilaterais com aproximações lineares ($p=1$). A estratégia de enriquecimento foi utilizada somente para a construção dos indicadores de erro. A malha de referência, Fig. 3, possui 8385 nós e 8192 elementos de aproximação linear. A Figura 4 mostra a distribuição do dano obtida para esse nível de refinamento, ao final da análise não linear. Nesse caso, o valor máximo do parâmetro de dano chegou a aproximadamente 0,63, concentrado no vértice inferior esquerdo do domínio.

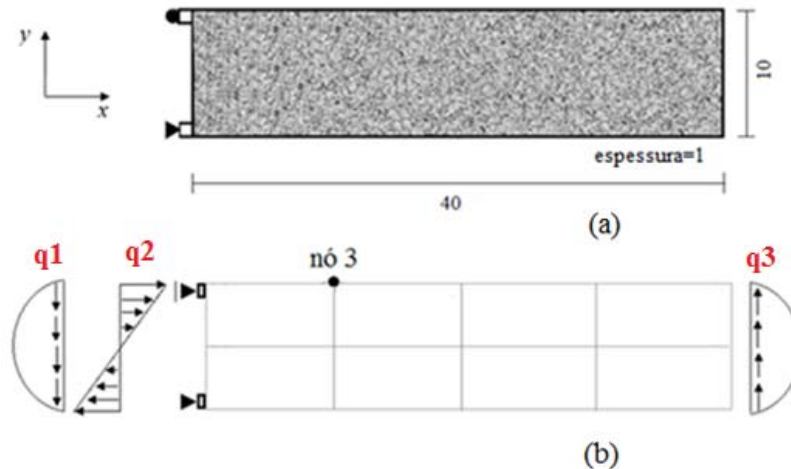


Figura 2. Geometria, condições de contorno (de força e deslocamento) e malha inicial.

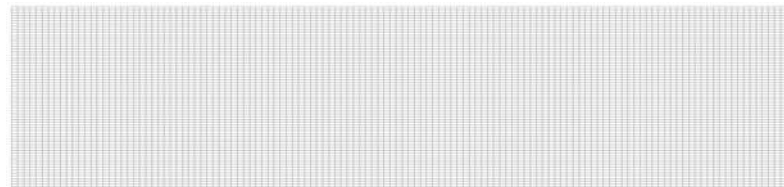


Figura 3. Malha refinada utilizada na obtenção da solução de referência.



Figura 4. Distribuição do dano na malha refinada.

Para a integração numérica, os pontos de Gauss foram assim distribuídos: (a) na malha 2x4 foram utilizados elementos com 8x8 pontos; (b) na malha 4x8 foram utilizados elementos com 4x4 pontos; e (c) na malha 8x16 foram utilizados elementos com 2x2 pontos. O número de pontos de Gauss por elementos foi estabelecido de tal maneira que a mesma quantidade fosse utilizada em cada malha, no caso, 512 pontos. Como a variável escalar dano é associada aos pontos de integração, não haveria desequilíbrio em sua descrição entre as três malhas.

Foram avaliados os índices de efetividade globais dos dois estimadores (EERM e SRM), para projeções em espaços polinomiais de ordem $p+1$ e $p+2$, índices de efetividade locais, limites superiores e inferiores (esses últimos no caso do Subdomínio), índices de robustez e, finalmente, erros relativos globais para as malhas 2x4, 4x8 e 8x16.

Tabela 1. Índices globais.

Grau polinomial da solução do erro			p+1			p	p+2			p	η (%)
Estimador de erro			EERM $\tilde{\xi}^1$	SRM $\tilde{\xi}^2$			EERM $\tilde{\xi}^2$	SRM $\tilde{\xi}^2$			
Malha	NGL	Passo	$\tilde{\theta}$	$\tilde{\theta}^s$	$\tilde{\theta}^l$		$\tilde{\theta}$	$\tilde{\theta}^s$	$\tilde{\theta}^l$		
(2x4)	27	P-4	0,869	0,937	0,811	1,16	0,925	1,010	0,792	1,28	54,42
		P-12	0,838	0,903	0,771	1,17	0,890	0,976	0,752	1,30	54,99
		P-20	0,793	0,859	0,717	1,20	0,847	0,930	0,697	1,33	56,22
(4x8)	87	P-4	0,935	0,994	0,876	1,13	1,015	1,064	0,860	1,24	31,35
		P-12	0,917	0,977	0,844	1,16	1,000	1,046	0,826	1,27	32,01
		P-20	0,877	0,938	0,782	1,20	0,967	1,007	0,764	1,32	33,47
(8x16)	303	P-4	0,952	1,013	0,898	1,13	1,044	1,076	0,886	1,21	16,58
		P-12	0,943	1,001	0,866	1,16	1,038	1,068	0,852	1,25	17,06
		P-20	0,910	0,962	0,786	1,22	0,986	1,041	0,788	1,32	18,16

Em termos globais, Tab. 1 e Figs. 5 a 8, para o erro projetado em $p+1$, apenas o estimador SRM tende ao limite superior quando o erro relativo diminui. Já para o erro em $p+2$, ambos estimadores tendem ao limite superior. Os dois estimadores apresentaram um bom desempenho, com índices de efetividade variando no intervalo entre 0,8 e 1,0 (que é o recomendado) e, especificamente para o SRM, os índices de robustez apresentam valores próximos à unidade.

Para avaliação dos indicadores de erro, foram selecionadas nuvens em posições estratégicas (situados, respectivamente, na região de localização do dano e também mais afastados dessa região crítica). Para a escolha destas regiões, foi empregado o mapa de distribuição de dano da Fig. 4. As nuvens escolhidas são mostradas nas Figs 9, 14 e 19. Em cada malha foram selecionadas as nuvens coincidentes com os vértices do elemento mais danificado e mantidas, adicionalmente às posições inicialmente definidas para a malha 2x4

Em termos locais, Tabs. 2 e 3 e Figs 10 a 13 para a malha 2x4, Tabs. 4 a 6 e Figs 15 a 18 para a malha 4x8, Tabs. 7 a 9 e Figs 20 a 23 para malha 8x16, é possível observar que os desempenhos dos índices de efetividade vinculados às nuvens, situados na região de localização do dano, são mais afetados no decorrer da análise. O mesmo não ocorre quando esses índices são avaliados em regiões mais afastadas de onde se evidencia a deterioração do material. Esse fenômeno se repete sistematicamente nos dois estimadores, com o erro projetado tanto em $p+1$ quanto em $p+2$. A penalização do EERM é, contudo, maior. Outro aspecto a ser observado é o fato de que, à medida que se realiza o refinamento h , ambos os

estimadores têm seus índices de efetividade deteriorados na região de dano. Isso ocorre pois, com o refinamento h da malha, as regiões locais passam a ter, proporcionalmente a seu tamanho, uma maior zona danificada, o que impacta o desempenho das medidas de erro.

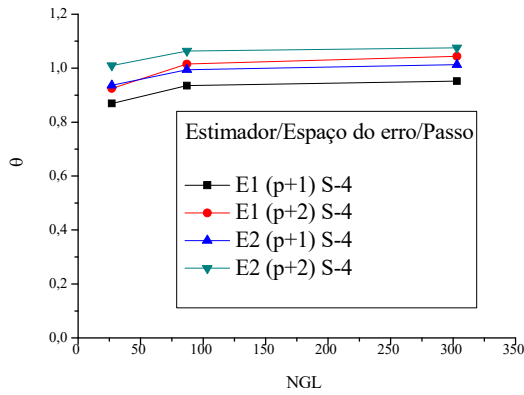


Figura 5. Índices de efetividade – Limite Superior (Passo 4).

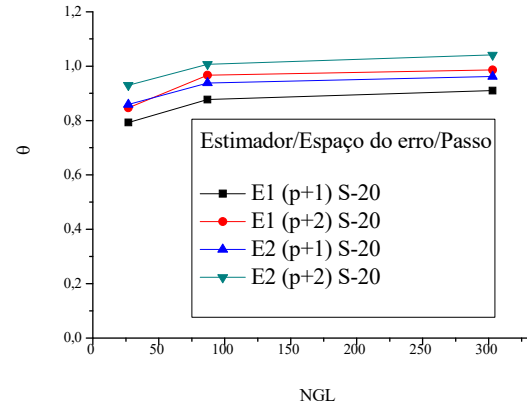


Figura 6. Índices de efetividade – Limite Superior (Passo 20) .

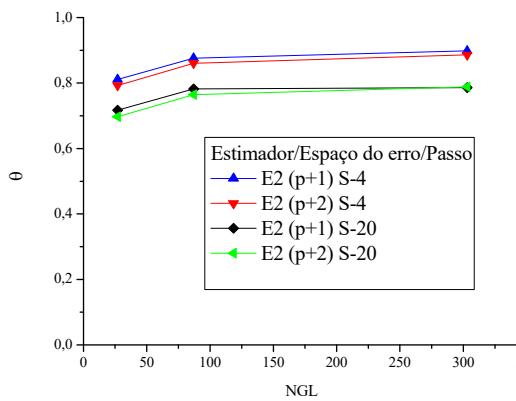


Figura 7. Índices de efetividade – Limite Inferior

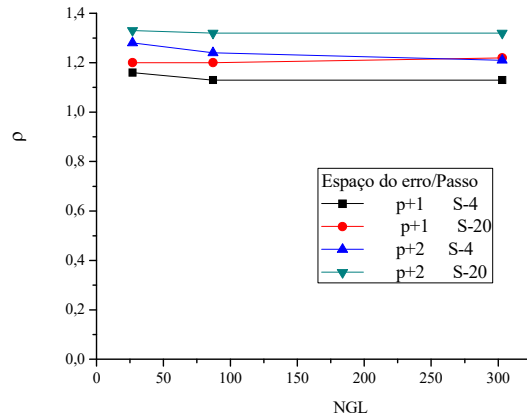


Figura 8. Índices de robustez

Resultados Malha (2x4)



Figura 9. Regiões de interesse na análise da malha (2x4).

Tabela 2. Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (2x4)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 1		Nuvem 2		Nuvem 7		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,676	0,997	0,478	0,926	0,487	0,917	54,42
	P-12	0,647	0,968	0,470	0,927	0,487	0,917	54,99
	P-20	0,610	0,918	0,459	0,945	0,487	0,916	56,22
p+2	P-4	0,723	1,052	0,509	0,982	0,513	0,975	54,42
	P-12	0,690	1,046	0,500	0,997	0,513	0,975	54,99
	P-20	0,657	1,003	0,491	1,023	0,513	0,974	56,22

Tabela 3. Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (2x4)						
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 11		Nuvem 12		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,721	0,963	0,582	0,860	54,42
	P-12	0,628	0,839	0,553	0,817	54,99
	P-20	0,521	0,706	0,524	0,794	56,22
p+2	P-4	0,773	1,064	0,621	0,935	54,42
	P-12	0,669	0,924	0,588	0,881	54,99
	P-20	0,565	0,782	0,564	0,843	56,22

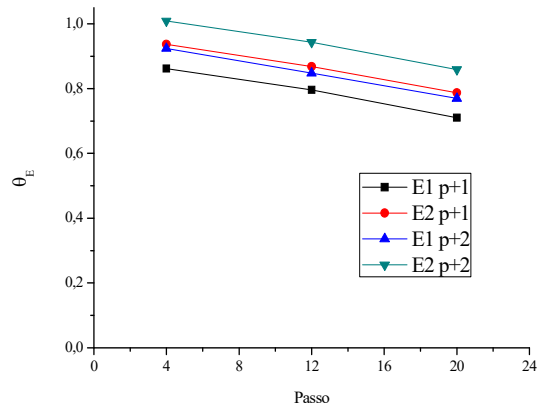


Figura 10. Índices de efetividade vinculados ao Elemento 5 (Passo 20).

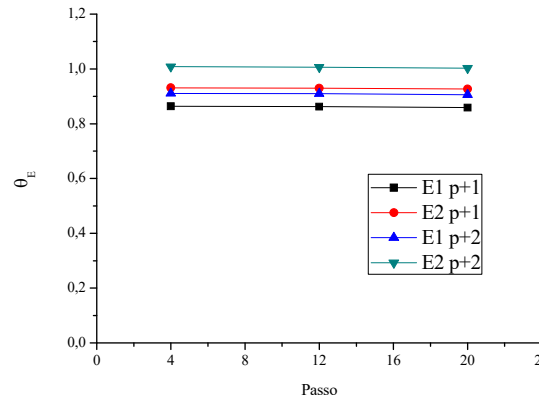


Figura 11. Índices de efetividade vinculados ao Elemento 3 (Passo 20).

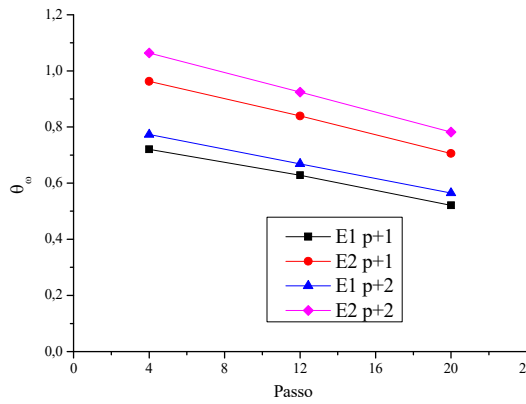


Figura 12. Índices de efetividade vinculados à Nuvem 11 (Passo 20).

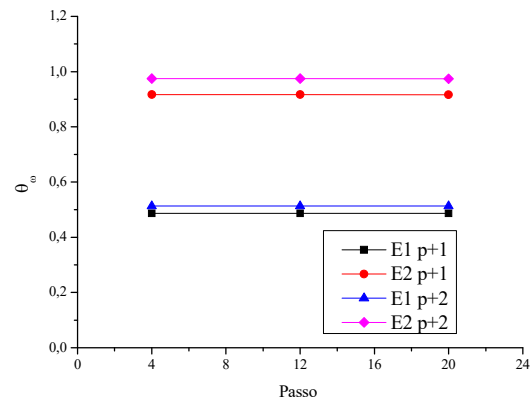


Figura 13. Índices de efetividade vinculados à Nuvem 7 (Passo 20).

Resultados Malha (4x8)

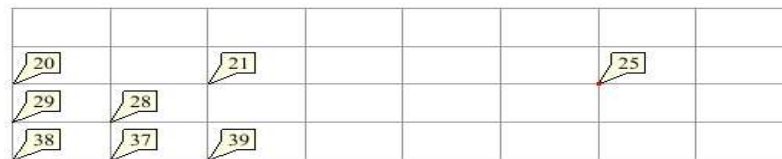


Figura 14. Mapa da posição das nuvens de interesse na malha (4x8).

Tabela 4. Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (4x8)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 20		Nuvem 21		Nuvem 25		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,672	0,983	0,481	0,983	0,481	0,979	31,35
	P-12	0,661	0,959	0,481	0,983	0,481	0,979	32,01
	P-20	0,634	0,964	0,483	1,000	0,480	0,978	33,47
p+2	P-4	0,752	1,044	0,534	1,043	0,532	1,038	31,35
	P-12	0,754	1,028	0,534	1,043	0,532	1,038	32,01
	P-20	0,751	1,061	0,539	1,069	0,532	1,038	33,47

Tabela 5. Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (4x8)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 28		Nuvem 29		Nuvem 37		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,471	0,974	0,643	0,982	0,595	0,925	31,35
	P-12	0,465	0,975	0,625	0,951	0,584	0,886	32,01
	P-20	0,461	0,977	0,575	0,900	0,544	0,810	33,47
p+2	P-4	0,515	1,042	0,706	1,059	0,634	1,016	31,35
	P-12	0,514	1,061	0,700	1,037	0,624	0,959	32,01
	P-20	0,526	1,061	0,665	0,995	0,587	0,870	33,47

Tabela 6. Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (4x8)						
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 38		Nuvem 39		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,692	0,887	0,652	0,997	31,35
	P-12	0,603	0,847	0,628	0,997	32,01
	P-20	0,451	0,668	0,605	0,947	33,47
p+2	P-4	0,741	0,982	0,691	1,083	31,35
	P-12	0,648	0,935	0,665	1,061	32,01
	P-20	0,487	0,737	0,648	1,023	33,47

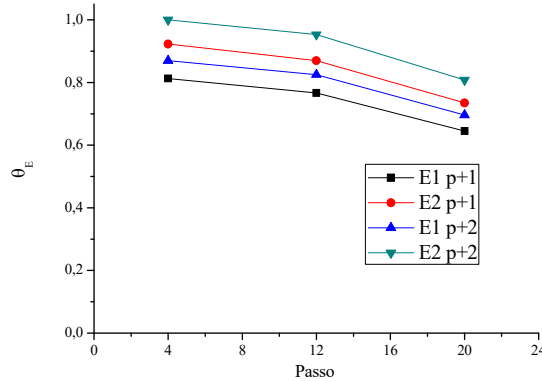


Figura 15. Índices de efetividade vinculados ao Elemento 25 (Passo 20).

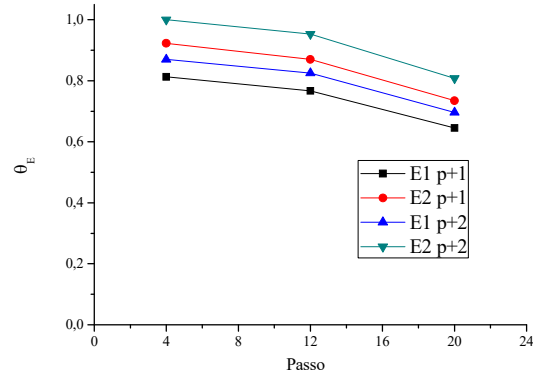


Figura 16. Índices de efetividade vinculados ao Elemento 14 (Passo 20).

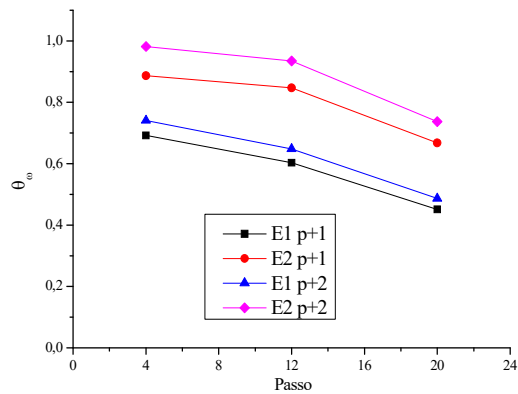


Figura 17. Índices de efetividade vinculados à Nuvem 38 (Passo 20).

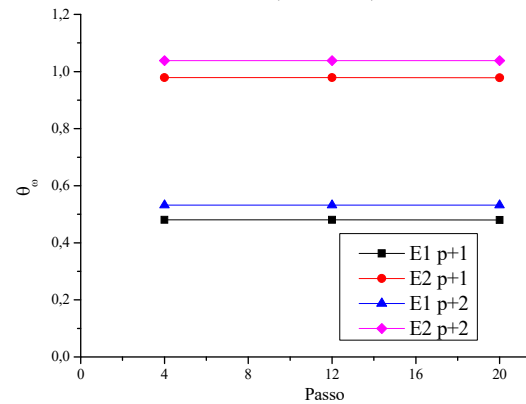


Figura 18. Índices de efetividade vinculados à Nuvem 25 (Passo 20).

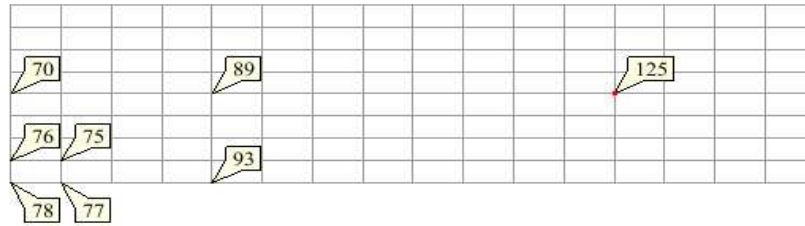
Resultados Malha (8x16)

Figura 19. Mapa da posição dos elementos e nuvens de interesse na malha (8x16).

Tabela 7. Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (8x16)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 70		Nuvem 75		Nuvem 76		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,679	0,977	0,464	0,974	0,633	0,990	16,58
	P-12	0,675	0,951	0,467	0,980	0,605	1,004	17,06
	P-20	0,663	0,918	0,464	0,961	0,526	0,858	18,16
p+2	P-4	0,759	1,035	0,511	1,055	0,706	1,069	16,58
	P-12	0,755	1,003	0,520	1,062	0,676	1,094	17,06
	P-20	0,741	0,966	0,509	1,061	0,576	0,957	18,16

Tabela 8. Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (8x16)								
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 77		Nuvem 78		Nuvem 89		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,615	0,943	0,677	0,952	0,481	0,985	16,58
	P-12	0,587	0,919	0,594	0,883	0,481	0,985	17,06
	P-20	0,501	0,789	0,390	0,630	0,481	0,985	18,16
p+2	P-4	0,660	1,049	0,733	1,058	0,535	1,043	16,58
	P-12	0,632	1,013	0,642	0,979	0,535	1,043	17,06
	P-20	0,549	0,866	0,428	0,698	0,534	1,044	18,16

Tabela 9. Índices de efetividade vinculados às nuvens.

Malha (8x16)						
Grau polinomial da solução do erro	Passo	Nuvem 93		Nuvem 125		η (%)
		EERM	SRM	EERM	SRM	
		$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	$\tilde{\xi}^1$	$\tilde{\xi}^2$	
		$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	$\tilde{\theta}_\omega$	
p+1	P-4	0,679	1,042	0,480	0,982	16,58
	P-12	0,670	1,047	0,480	0,982	17,06
	P-20	0,659	1,040	0,480	0,981	18,16
p+2	P-4	0,718	1,135	0,533	1,040	16,58
	P-12	0,717	1,161	0,533	1,040	17,06
	P-20	0,707	1,155	0,533	1,040	18,16

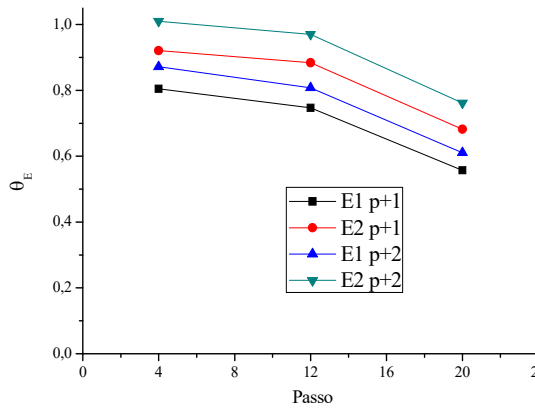


Figura 20. Índices de efetividade vinculados ao Elemento 53 (Passo 20).

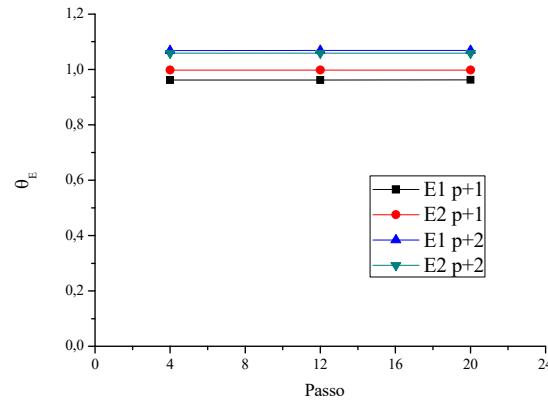


Figura 21. Índices de efetividade vinculados ao Elemento 100 (Passo 20).

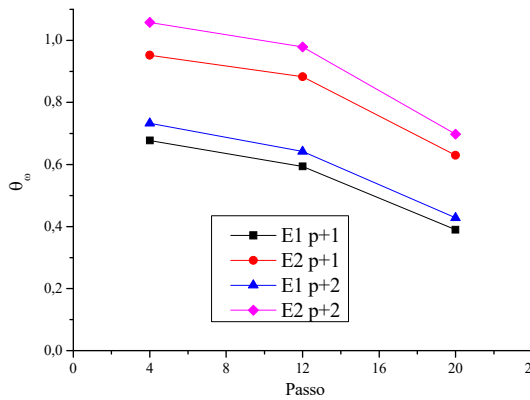


Figura 22. Índices de efetividade vinculados à Nuvem 78 (Passo 20).

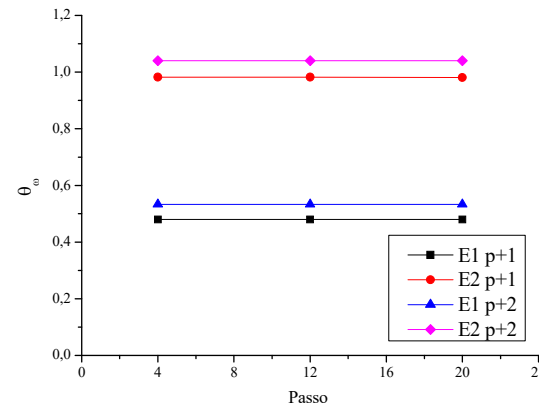


Figura 23. Índices de efetividade vinculados à Nuvem 125 (Passo 20).

5. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com base nos resultados apresentados, pode-se observar que os estimadores apresentaram valores muito satisfatórios perdendo um pouco do desempenho apenas nas regiões onde houve uma manifestação substancial do dano. As mudanças nos espaços (para o cálculo das soluções e projeção do erro) foram suficientes para a recuperação da qualidade dos índices de efetividade, em ambas as estimativas. O SRM exibiu índices sempre mais conservadores, quando comparado ao EERM. Sem dúvida, esse comportamento é altamente desejável por ser mais útil em aplicações práticas. Porém, não se pode perder de vista o fato de que no caso do EERM, a qualidade dos índices de efetividade é totalmente dependente da estratégia de equilíbrio demandada por este tipo de estimador. Outro aspecto a ser elencado como vantajoso no uso do SRM está na possibilidade de obter diretamente os indicadores locais associados às nuvens, o que se adequa à estratégia de enriquecimento utilizada no MEF. Cabe ainda, contudo, avaliar estes estimadores em problemas em que o dano, não apenas atinge valores superiores ao do exemplo deste trabalho, como também se distribui em uma maior região do domínio do problema.

AGRADECIMENTOS

Os autores reconhecem e agradecem o importante apoio da FAPEMIG – Fundação de Amparo à Pesquisa de Minas Gerais, CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pela bolsa de doutorado e CNPq – Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (projetos 486959/2013-9, e 309005/2013-2, 304275/2013-1).

REFERÊNCIAS

- Barros, F. B. Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas. *Tese de Doutorado*. Escola de Engenharia de São Carlos-USP, 2002.
- Barros, F. B.; Proença, S. P. B.; Barcellos, C. S. Generalized finite element method in structural nonlinear analysis – a p -adaptive strategy. *Computational Mechanics*, 33: 95-107, 2004.
- Barros, F. B.; Barcellos, C. S.; Duarte; Torres, D. A. F.; Subdomain-based error techniques for generalized finite element approximations of problems with singular stress fields. *Comp. Mechanics*, DOI 10.1007/s00466-013-0883-2, 2013.
- Belytschko, T.; Gracie, R.; Ventura, G.; A review of extended/generalized finite element methods for material modeling. *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, 17: 1-24, doi:10.1088/0965-0393/17/4/043001, 2009.
- Duarte, C. A and Oden, J. T.; *H-p clouds – An h-p meshless method*, Numerical Methods for Partial Differential Equations, 12: 673-705, 1996.
- Duarte, C.A.; Babuska, I.; Oden, J.; *Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems*. Computers & Structures, 77(2):215–232, 2000.
- Mazars, J.; Application de la mécanique de l'endommagement au comportement non linéaire et à la rupture du béton de structure. *Tese de Doutorado*, Université Paris, Paris, 1984.
- Melenk, J.M, Babuska, I. *The partition of unity finite element method: Basic theory and applications*. Computer Methods Applied Mechanics Engineering, 139: 289-314, 1996.
- Prudhomme, S.; Nobile, F.; Chamoin, L.; Oden, J.T.; *Analysis of a subdomain-based error estimator for finite element approximations of elliptic problems*. Numerical Methods for Partial Differential Equations 20(2):165–192, 2004.
- Rodríguez-Ferran, A.; Morata, I.; Huerta, A.; *Efficient and reliable nonlocal damage models*. *Advanced Mathematical and Computational Geomechanics*, 13: 239-268, 2003.
- Strouboulis, T., Babuska, I., Copps, K. The design and analysis of the Generalized Finite Element Method. *Comp. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 181:43-69, 2000a.
- Strouboulis, T.; Coops, K. and Babuska, I. The generalized finite element method: na example of its implementation and illustration of its performance. *Int. Journal for Numerical Methods in Engrg.*, 47:1401-1417, 2000b.