

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

Sheilla de Oliveira Marques

Mecânica Quântica em Cavidades de Microondas

BELO HORIZONTE
2016

Sheilla de Oliveira Marques

Mecânica Quântica em Cavidades de Microondas

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Raphael Campos Drumond

Belo Horizonte

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M357m Marques, Sheilla de Oliveira.
Mecânica quântica em cavidades de microondas / Sheilla de Oliveira
Marques. – 2016.
94f. : il.

Orientador: Raphael Campos Drumond.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 83-84.

1. Eletrodinâmica quântica de cavidades. 2. Mecânica quântica. 3. Sistemas quânticos. I. Título. II. Drumond, Raphael Campos. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 537.8 (043)



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física
Caixa Postal 702
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3499 5637
(xx) (31) 3499 5633
Fax (xx) (31) 3499 5688
(xx) (31) 3499 5600
e-mail pgfisica@fisica.ufmg.br

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 561ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DEFENDIDA POR Sheilla de Oliveira, orientada pelo professor Raphael Campos Drumond, para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 09:00 horas de dezessete de março de 2016, na sala 4128 do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Raphael Campos Drumond** (Orientador - Departamento de Matemática/UFMG), **Franklin Massami Matinaga** (Departamento de Física/UFMG) e **Marcelo Paleólogo Elefteriadis de França Santos** (Departamento de Física/UFMG), para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo a bacharel **Sheilla de Oliveira** à arguição de seu trabalho de dissertação de Mestrado, que recebeu o título de **“Mecânica Quântica em Cavidades de Micro-ondas”**. Às 14:00 horas do mesmo dia a candidata fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho e o parecer final da comissão, concluindo pela aprovação do trabalho.

Belo Horizonte, 17 de março de 2016.

Prof. Raphael Campos Drumond
Orientador da estudante
Departamento de Matemática/UFMG

Prof. Franklin Massami Matinaga
Departamento de Física/UFMG

Prof. Marcelo Paleólogo Elefteriadis de França Santos
Departamento de Física/UFMG

Candidata

Agradecimentos

Gostaria de começar agradecendo a pessoa que tornou possível essa minha conquista, minha mãe, Maria Pereira do Nascimento. Minha mãe é um gênio perdido que veio analfabeta do interior de Minas Gerais para Belo Horizonte aos 12 anos a procura de uma vida melhor. Aos 12 anos ela aprendeu a ler sozinha depois de sua patroa lhe mostrar as letras do alfabeto. Como naquela época era muito difícil para uma pessoa naquelas condições ser matriculada em uma escola e ter uma formação, minha mãe não pôde completar seus estudos. Mas por ser um gênio de QI altíssimo ela aprendeu tudo que precisava e trabalhando como empregada doméstica e faxineira ela pode dar pra mim e minha irmã um teto, conquistou alguns bens e cuidou muito bem da nossa formação. Minha mãe sempre procurava as melhores escolas públicas da cidade para nós estudarmos, pois ela valorizava muito o ensino e fez de tudo para nos dar a oportunidade que ela não teve. Ela fez o impossível pela nossa formação. Se não fosse por ela e por toda sua luta, eu não estaria aqui.

Agradeço ao meu marido, que vem me acompanhando nessa jornada desde o final da minha graduação. Mesmo formado em ciência da computação, ele chegou a pegar para ler um artigo científico de física para me ajudar naqueles momentos de desespero que a gente acha que vai fracassar e que vai dar tudo errado. Ele me apoia e está comigo em toda e qualquer jornada.

Também agradeço a minha irmã, Linda, que me deu apoio quando eu mais precisei. Quando adoeci e pensei em largar tudo, ela ficou lá, do meu lado, cuidando de mim e me dando força. Junto com ela, agradeço ao meu sobrinho Ítalo, que parece mais um irmão do que sobrinho, não só pela relativamente pouca diferença de idade, mas também pela cumplicidade.

Também quero agradecer a Dra. Ana Lucia. Ela começou a me tratar em um momento muito complicado da minha vida, em que minha saúde estava muito fraca. Ela não só cuidou da minha parte fisiológica, mas também da parte emocional sem receber nada a mais por isso.

Agradeço aos meus amigos queridos que sempre estiveram do meu lado, com quem tive meus melhores momentos na universidade, Arthur Matoso, Roberto Baldijão, Renan Cunha, Ana Paula Gomes, Liliane, Rafael Nunes, Ana Clara Sampaio, Danielle Cristina, e Mateus Leal.

Agradeço com muito carinho ao Cristiano Duarte. Além de ser uma amigão, o Cris foi muito importante para a minha formação. Ele sempre acreditou em mim mesmo quando eu não acreditava. Ele me mostrou que eu poderia ser uma ótima pesquisadora,

mesmo com todas as minhas dificuldades.

Quero agradecer aos meus amigos mais próximos, Marcia Cristina, Natalia Moler, Paula D'Avila, e Luiza Daiane. A Márcia sempre esteve comigo, ela sempre me deu força e sempre esteve ao meu lado. Eu e a Nati ficamos próximas por passarmos por um problema parecido, nada melhor que uma luta em comum para unir duas pessoas. Ela virou minha irmãzinha e me viciou em chocolate. A Paulinha é meu exemplo, sempre quis ser como ela, como pessoa, como estudante e como cientista. A Dada é minha sobrinha/amiga/irmãzinha. Ela esteve comigo nos momentos mais difíceis da minha vida e me ajudou a ficar de pé de novo quando estava no chão, então obviamente, ela faz parte dessa conquista.

Quero agradecer ao melhor orientador do mundo, Raphael Campos Drumond, Dute. O Dute me aceitou num momento difícil da minha formação. Enquanto muitos teriam me negado orientação, o Dute não pensou duas vezes antes de me aceitar, ele simplesmente me acolheu e cuidou da minha formação com todo carinho. Não foi só de mim que o Dute cuidou, ele cuidou de vários estudantes de pós que estavam passando por dificuldades acadêmicas e pessoais e até o momento, teve sucesso em todas as suas orientações. Ele é um exemplo de professor, orientador e amigo.

Agradeço a cada cidadão brasileiro e mineiro que financiou os meus estudos através das instituições de fomento Fapemig e CAPES.

Não posso provar a existência de Deus, mas se ele existe, sou extremamente grata pela força para superar todas as dificuldades e por essa conquista.

Resumo

Em nosso trabalho, estudamos os fundamentos de mecânica quântica em cavidades de microondas usando como base alguns dos experimentos do Serge Haroche e sua equipe. Começamos por uma revisão de conceitos básicos da mecânica e, em seguida, falamos sobre o estudo principal por traz de cada um dos experimentos citados, que é a eletrodinâmica quântica de cavidade. Nessa parte, falamos sobre a quantização do campo eletromagnético, sobre estados coerentes e, a partir do modelo de Jaynes-Cummings, chegamos a teoria de interação entre o átomo de dois níveis e um modo de campo. Estudamos a quantização da luz através do experimento descrito na Ref. [M Brune et al., *Physical Review Letters*, 76(11):1800, 1996]. Um outro conceito fundamental da mecânica quântica, o emaranhamento, foi estudado usando como base o artigo [E Hagley et al. *Physical Review Letters*, 79(1):1, 1997]. E, por fim, estudamos decoerência e limite clássico pelos experimentos descritos em [Michel Brune et al *Physical Review Letters*, 77(24):4887, 1996] e [P Bertet et al., *Nature*, 411(6834):166–170, 2001].

Palavras-chave: Eletrodinâmica Quântica de Cavidades, Fundamentos de Mecânica Quântica, Átomos de Rydberg, Decoerência, Emaranhamento.

Abstract

In our work, we studied the foundations of quantum mechanics in microwave quantum cavities using some of the experiments Serge Haroche and his team performed. We started by reviewing the basic concepts of quantum mechanics, and then we described the central concept behind the experiments, the quantum cavity electrodynamics. We studied the quantization of the electromagnetic field and coherent states, and from the Jaynes-Cumming model, where we described the atom-field interaction dynamics. We studied the light quantizations through the experiment described in Ref. [M Brune et al., Physical Review Letters, 76(11):1800, 1996]. Another fundamental concept of quantum mechanics, entanglement, was studied using Ref. [E Hagley et al. Physical Review Letters, 79(1):1, 1997]. Finally, we studied decoherence and classical limit through the experiments in Ref. [Michel Brune et al Physical Review Letters, 77(24):4887, 1996] e [P Bertet et al., Nature, 411(6834):166–170, 2001.].

Keywords: Quantum Cavities Electrodynamics, Foundation of Quantum Mechanics, Rydberg Atoms, Decoherence, Entanglement.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	12
2	CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA QUÂNTICA	13
2.1	Base teórica inicial	13
2.2	Operador de estado (ou matriz densidade)	14
2.2.1	Estados Puros	15
2.2.2	Mistura estatística de estados	15
2.3	Sistemas quânticos compostos	16
2.3.1	Produto Tensorial	16
2.3.2	Traço Parcial	17
2.4	Sistemas de dois níveis	18
2.4.1	Átomos de Rydberg	19
2.5	A influência do ambiente	20
2.5.1	Sistemas quânticos fechados e sistemas quânticos abertos	20
2.5.2	Equação mestra de Lindblad	23
3	ELETRODINÂMICA QUÂNTICA DE CAVIDADES	25
3.1	Mecânica quântica e radiação eletromagnética	25
3.1.1	Quantização do campo eletromagnético	26
3.2	Estado coerente	27
3.2.1	Relações matemáticas	27
3.2.2	Propriedades importantes dos estados coerentes	29
3.3	A representação de Wigner no espaço de fase	31
3.4	Teoria quântica da interação átomo-campo	33
3.4.1	O modelo de Jaynes-Cummings	33
3.4.2	Solução exata para o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings	36
3.4.3	Exemplo de aplicação do modelo de Jaynes Cummings	39
3.4.4	Oscilações de rabi	40
3.5	Dissipação átomo e campo	42
3.5.1	Átomo de dois níveis	42
3.5.2	Relaxação da cavidade	43
3.5.3	Átomo relaxando em um campo térmico	45
4	QUANTIZAÇÃO DA LUZ	46
4.1	Oscilação quântica de Rabi: um teste direto da quantização da cavidade	46

4.1.1	Montagem do experimento e visão geral	47
4.1.2	Resultados	48
5	EMARANHAMENTO	51
5.1	Estados emaranhados	52
5.1.1	Decomposição de Schmidt	52
5.1.2	Estados Bipartite Mistos	53
5.2	Paradoxo EPR	54
5.2.1	O argumento EPR	54
5.2.2	EPR-modelo de spins	56
5.3	Experimento: Geração de pares EPR de átomos	56
5.3.1	Montagem do experimento e visão geral	57
5.3.2	Sequência experimental e a física do experimento	58
5.3.3	Resultados, inconsistências e correção	60
6	DECOERÊNCIA E LIMITE CLÁSSICO	63
6.1	Decoerência	64
6.2	Deslocamentos na energia causados por átomos de Rydberg	65
6.3	Observando a decoerência progressiva do medidor em uma medição quântica	66
6.3.1	Montagem do experimento e visão geral	67
6.3.2	Detalhando a física dDetalhando a física do experimento	69
6.3.3	Resultados	70
7	INTERFEROMETRIA	75
7.1	Experimento: Um experimento complementar com um interferôme- tro no limite clássico-quântico	77
7.1.1	Montagem do experimento e visão geral	77
8	CONSIDERAÇÕES FINAIS	83
	REFERÊNCIAS	84
	APÊNDICES	86
	APÊNDICE A – COMO CHEGAR A QUANTIZAÇÃO DO CAMPO ELETROMAGNÉTICO	87
A.1	As equações de Maxwell e os modos normais do campo eletromagnético	87
A.2	Um paralelo entre osciladores harmônicos e o campo eletromagnético	90

APÊNDICE B – TEMPO DE INTERAÇÃO ÁTOMO-CAVIDADE .	92
APÊNDICE C – FUNÇÃO DECOERÊNCIA	93

1 Introdução

A mecânica quântica nos apresenta um mundo fascinante e estranho ao mesmo tempo. Para muitos, entendê-la se torna um desafio. Por exemplo, você consegue imaginar uma partícula que está em duas posições no mesmo instante de tempo? Ou é capaz de imaginar o resultado de uma medição em uma partícula “interferir” no resultado de outra, que podem estar separadas por uma distância muito grande, sem violar a teoria da relatividade? Por mais estranhas que pareçam essas perguntas, na mecânica quântica existem conceitos que podem nos levar a elas. Em nosso trabalho, estamos interessados em estudar algumas questões fundamentais da mecânica quântica e com isso, vamos nos deparar com conceitos difíceis de explicar intuitivamente.

Uma abordagem que pode facilitar o entendimento dessas questões fundamentais é ver como elas se aplicam na prática. Por isso, em nossos estudos, usaremos uma série de experimentos que foram feitos pela equipe do laboratório Kastler Brossel da Ecole Normale Supérieure em Paris. Nesses experimentos foram observados fenômenos fundamentais da mecânica por meio cavidades com alto fator de qualidade Q . Neles, átomos de Rydberg atravessavam essas cavidades que podiam estar ou não em ressonância com a frequência de transição dos dois estados principais do átomo.

Começaremos relembando conceitos básicos de mecânica quântica que iremos precisar para entender as questões que iremos abordar. Em seguida falaremos do tema central dos nossos estudos, que é a eletrodinâmica quântica de cavidades. Veremos que o modelo de Jaynes-Cummings nos leva a um Hamiltoniano adequado para descrevermos um átomo de dois níveis interagindo com um modo de campo na cavidade. O impacto das imperfeições experimentais podem ser descritos por equações mestras, como a equação de Lindblad. E como nos experimentos a cavidade Q é preenchida por campos coerentes, estudaremos esse conceito.

Com uma base teórica introduzida, iremos partir para os experimentos. Fortes evidências da quantização do campo na cavidade ficarão claras ao compararmos os resultados do experimento [1] com as previsões da teoria. Em seguida, após introduzir o conceito de emaranhamento, veremos por meio do experimento [2] como ele acontece na prática. Estudaremos também a decoerência e como ela acontece no mundo real, pelo experimento [3]. Chegamos a conclusão de que observando o processo de decoerência, é possível observar a transição do quântico para o clássico. Por fim, por meio de um modelo de interferômetro no experimento [4], veremos que a transição do quântico para o clássico e que esse processo pode ser reversível por meio de um apagador quântico.

2 Conceitos básicos da mecânica quântica

Neste capítulo, daremos uma breve introdução ao conceito de estados quânticos para sistemas simples e compostos. Para entendermos essa parte inicial, usamos como base as referências [5] e [6]. Com esse alicerce construído exploramos os conceitos de sistemas quânticos abertos e fechados, Com auxílio das referências [7] e [8], que são de grande importância para o tema central de nossos estudos.

2.1 Base teórica inicial

Existem algumas variáveis dinâmicas que, de acordo com a mecânica clássica, esperava-se que assumissem um contínuo de valores, mas evidências experimentais mostrava que isso não acontecia. Essas variáveis assumiam valores discretos, ou seja, *quantizados*. Um exemplo disso é o espectro atômico. De acordo com a mecânica clássica e com o eletromagnetismo, um elétron deveria emitir radiação a uma frequência que variava continuamente enquanto o elétron ia em direção ao núcleo em um movimento espiralado. Mas por meio de experimentos foi observado apenas um conjunto de frequências discretas, de forma que os elétrons só podem ocupar um conjunto discreto de níveis energia. Além disso, a frequência de radiação emitida durante uma transição entre esses níveis deve ser proporcional a diferença de energia entre eles.

Mas existem também casos em que a energia não é quantizada, como por exemplo um elétron livre, que pode estar em um intervalo contínuo de energias quando acelerado, emitindo radiação em um espectro contínuo de frequências.

Uma forma de lidar com variáveis contínuas e discretas seria por meio de ferramentas matemáticas de análise funcional. Com esse tipo de ferramenta, se torna possível calcular valores tanto para operadores que possuem um conjunto de autovalores que podem assumir um conjunto discreto de valores quanto para operadores que assumem um conjunto contínuo.

Postulado 1: *Cada sistema físico está associado a um espaço de Hilbert.*

Com essa estrutura matemática, pode-se formular postulado:

Postulado 2: *Cada variável dinâmica corresponde a um operador linear Hermitiano e para encontrar os possíveis valores de tal variável, basta encontrar os autovalores do operador.*

É muito comum na mecânica quântica nos referirmos a *um estado*, que significa uma configuração específica do nosso sistema. Para prevermos o resultado de uma medição,

precisamos saber em qual configuração o estado está. A descrição matemática de dos estados de um sistema é estabelecida pelo postulado:

Postulado 3: *Cada estado corresponde a um único operador de estado que deve ser Hermitiano, não-negativo e com traço unitário, denominado operador densidade.*

Podemos encontrar o valor médio de uma variável dinâmica A , a partir do *operador de estado* ou *operador densidade* ρ pelo postulado

Postulado 4:

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A), \quad (2.1)$$

Vamos agora considerar um observável que é representado por um operador projeção $P_\mu = |u\rangle\langle u|$. Se o vetor $|u\rangle$ tem norma unitária, então esse operador descreve variáveis dinâmicas que assumem apenas valores entre 0 e 1. Assim sendo, se os valores que essa variável pode assumir são todos reais, então o mesmo deve acontecer com a média, de forma que

$$\text{Tr}(\rho P_\mu) = \langle u | \rho | u \rangle \geq 0 \quad (2.2)$$

para todo $|u\rangle$. Ou seja, ρ deve ser, de fato, operador não negativo.

2.2 Operador de estado (ou matriz densidade)

Na seção anterior definimos que um operador de estado deve satisfazer determinadas relações matemáticas e como é auto-adjunto, admite a representação espectral:

$$\rho = \sum_n \rho_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|. \quad (2.3)$$

Por conveniência, assumimos que essa representação é feita em termos dos autovalores e autovetores ortonormais discretos. Com isso, a partir das três propriedades citadas acima, podemos obter as relações

$$\sum_n \rho_n = 1, \quad (2.4)$$

$$\rho_n = \rho_n^*, \quad (2.5)$$

$$\rho_n \geq 0. \quad (2.6)$$

A partir das equações 2.4 e 2.6, podemos concluir que

$$0 \leq \rho_n \leq 1. \quad (2.7)$$

2.2.1 Estados Puros

Um estado puro deve ter a seguinte forma

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi|, \quad (2.8)$$

em que $|\psi\rangle$ é um vetor de norma unitária chamado de *vetor de estado*. A partir desse vetor de estado é possível encontrar o valor médio de um observável R da seguinte forma

$$\langle A \rangle = \text{Tr}(\rho A) = \text{Tr}(|\psi\rangle \langle\psi| A) = \langle\psi| A |\psi\rangle. \quad (2.9)$$

O vetor de $|\psi\rangle$ representa o estado ρ , mas não é o único pois $e^{i\alpha} |\psi\rangle$ define o mesmo projetor, em que α é um número real qualquer.

Uma outra condição que nos permite identificar um estado como sendo puro é que

$$\rho^2 = \rho. \quad (2.10)$$

A equação 2.10 nos leva a $\rho_n^2 = \rho_n$ o que nos diz que só temos dois autovalores possíveis, $\rho_n = 0$ e $\rho_n = 1$. E levando em conta a condição 2.4, podemos concluir que a representação espectral 2.3 só pode ter um termo.

Um outra condição que precisa ser atendida para termos um estado puro é

$$\text{Tr}(\rho^2) = 1, \quad (2.11)$$

Como os valores assumidos por ρ_n devem estar entre 0 e 1, $\rho_n^2 \leq \rho_n$ temos

$$\text{Tr}(\rho^2) = \sum_n \rho_n^2 \leq \sum_n \rho_n = 1. \quad (2.12)$$

Existe também uma outra forma de identificar um estado puro que por sua vez, nos ajuda a definir *estados não-puros*.

Teorema 2.2.1 (estados puros). *Um estado não puro sempre pode ser descrito como uma combinação convexa não trivial de outros estados. Caso isso não seja possível, esse estado é denominado estado puro.*

A prova desse teorema é encontrada facilmente na referência [5].

2.2.2 Mistura estatística de estados

Quando temos um sistema que pode estar no estado $|\psi_1\rangle$ com uma probabilidade p_1 , no estado $|\psi_2\rangle$ com uma probabilidade p_2 , e assim por diante, podemos afirmar que a

soma dessas probabilidades deve ser igual a 1. Quando nosso sistema está em um estado composto por mais de uma dessas probabilidades, podemos dizer que este é o caso de uma *mistura estatística de estados*.

Podemos então, calcular a probabilidade $\mathcal{P}(a_n)$ de encontrarmos o resultado da medição de um certo observável A ser igual a a_n . Para isso, primeiro é necessário saber qual é a probabilidade de encontrarmos o resultado a_n para um determinado vetor de estado $|\psi_k\rangle$ que pode ser dado por

$$\mathcal{P}_k(a_n) = \langle \psi_k | P_n | \psi_k \rangle, \quad (2.13)$$

em que P_n é um projetor no espaço associado ao autovalor a_n . Para saber a probabilidade total, basta olharmos para a equação 2.13 em que juntamos todos os estados possíveis $|\psi_j\rangle$, com $j = 1, 2, \dots, k$, com seus respectivos pesos, p_j . Assim temos

$$\mathcal{P}(a_n) = \sum_k p_k \mathcal{P}_k(a_n). \quad (2.14)$$

Pelas equações 2.9 e 2.14, podemos facilmente chegar no resultado

$$\mathcal{P}(a_n) = \text{Tr}(\rho P_n), \quad (2.15)$$

em que $\rho = \sum_k p_k \rho_k$.

2.3 Sistemas quânticos compostos

Um sistema composto é aquele que pode ser decomposto em dois ou mais sistemas associados a espaços de Hilbert diferentes. Suponha que existam dois sistemas, S_1 e S_2 , associados aos espaços de Hilbert \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , respectivamente. É possível descrever o sistema composto $S = S_1 + S_2$ por meio de um espaço de Hilbert \mathcal{H} .

2.3.1 Produto Tensorial

O *produto tensorial*, também conhecido como *produto de Kronecker*, é uma ferramenta matemática que irá nos auxiliar na descrição de sistemas compostos.

Seja \mathcal{H}_1 e \mathcal{H}_2 , espaços de Hilbert diferentes, cujas bases $|u_1\rangle, |u_2\rangle, \dots, |u_n\rangle$ e $|v_1\rangle, |v_2\rangle, \dots, |v_m\rangle$, são ortonormais. Então, os símbolos $|u_i\rangle \otimes |v_j\rangle$, com $i = 1, 2, \dots, n$ e $j = 1, 2, \dots, m$, irão formar uma base ortonormal do espaço $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$. Qualquer vetor $|\psi\rangle$ de $\mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2$, pode ser escrito como

$$|\psi\rangle = \sum_{i,j} \alpha_i \beta_j |u_i\rangle |v_j\rangle. \quad (2.16)$$

Define-se então

$$|\phi\rangle \otimes |\chi\rangle = \left(\sum_i^m \alpha_i |u_i\rangle \right) \otimes \left(\sum_j^n \beta_j |v_j\rangle \right) \quad (2.17)$$

$$= \sum_{i,j}^{n,m} \alpha_i \beta_j |u_i\rangle \otimes |v_j\rangle \quad (2.18)$$

Tais vetores são denominados *vetores produto*.

O produto interno entre dois elementos do espaço de Hilbert \mathcal{H} , $|\psi'\rangle = |\phi'\rangle \otimes |\chi'\rangle$ e $|\psi\rangle = |\phi\rangle \otimes |\chi\rangle$, é dado por

$$\langle \psi' | \psi \rangle = \langle \phi' \otimes \chi' | \phi \otimes \chi \rangle = \langle \phi' | \phi \rangle \langle \chi' | \chi \rangle. \quad (2.19)$$

Se escrevermos esse produto interno em termos das bases definidas acima, por serem ortonormais, temos que

$$\langle u_{i'} v_{j'} | u_i v_j \rangle = \langle u_{i'} | u_i \rangle \langle v_{j'} | v_j \rangle = \delta_{ii'} \delta_{jj'}. \quad (2.20)$$

Dados operadores A_1 que atuam em \mathcal{H}_1 e A_2 que atua em \mathcal{H}_2 , podemos definir

$$A = A_1 \otimes A_2, \quad (2.21)$$

O operador A , tem suporte em \mathcal{H}_1 se $A = A_1 \otimes I$ e analogamente, ele tem suporte em \mathcal{H}_2 se $A = I \otimes A_2$.

2.3.2 Traço Parcial

Quando temos sistemas compostos, uma das primeiras dúvidas que nos vem a cabeça é como determinar seus estados e se os estados do sistema inteiro são determinados diretamente pelo estado de cada um de seus subsistemas.

Considere o sistema composto descrito por $|\psi\rangle$ definido na equação 2.16. De acordo com a equação 2.20 e com a relação

$$\sum_{m',n'} |u_{m'} v_{n'}\rangle \langle u_{m'} v_{n'}| = I, \quad (2.22)$$

o valor médio de uma observável qualquer A , é dado por

$$\langle A \rangle = Tr(\rho A) = \sum_{m,n,m',n'} \langle u_m v_n | \rho | u_{m'} v_{n'} \rangle \langle u_{m'} v_{n'} | A | u_m v_n \rangle. \quad (2.23)$$

Agora suponha que A tenha suporte em \mathcal{H}_1 , de forma que $A = A_1 \otimes I$. Assim, teremos

$$\langle A \rangle = \sum_{m,n,m',n'} \langle u_m v_n | \rho | u_{m'} v_{n'} \rangle \langle u_{m'} | A_1 | u_m \rangle \langle v_{n'} | v_n \rangle. \quad (2.24)$$

Como já dito antes, as bases $\{u_i\}$ e $\{v_j\}$ são ortogonais de forma que $\langle v_{m'} | v_m \rangle = \delta_{mm'}$ e com isso, podemos reescrever a equação acima como

$$\langle A \rangle = \sum_{m,n,m'} \langle u_m v_n | \rho | u_{m'} v_n \rangle \langle u_{m'} | A_1 | u_m \rangle \quad (2.25)$$

$$= Tr^{(1)}(\rho^{(1)} A_1), \quad (2.26)$$

em que $\rho^{(1)}$ é um operador que atua no subespaço \mathcal{H}_1 , definido por

$$\langle u_m | \rho^{(1)} | u_{m'} \rangle = \sum_n \langle u_m v_n | \rho | u_{m'} v_n \rangle. \quad (2.27)$$

$Tr^{(1)}\rho$ e $Tr^{(2)}\rho$ são chamados de *traço parcial*, pois eles atuam apenas no espaço \mathcal{H}_2 e \mathcal{H}_1 , respectivamente. Além disso, $\rho^{(1)}$ e $\rho^{(2)}$ são denominados *operador de estado parcial* ou *operador de estado reduzido*. Esses operadores de estado reduzido também satisfazem as propriedades vistas na seção 2.2.

2.4 Sistemas de dois níveis

Sistemas de dois níveis são de grande interesse, pois são bastante viáveis de se preparar experimentalmente. Por exemplo, nesse trabalho iremos estudar átomos de dois níveis interagindo com um modo de campo eletromagnético. O estudo desses sistemas pode ser feito através de uma matemática mais acessível, pois podem ser descritos em um espaço Hilbert com dimensão igual a dois. Apesar dessas “facilidades”, esses sistemas apresentam uma grande riqueza de fenômenos físicos, o que o torna um campo de estudo extremamente interessante.

Um exemplo clássico de sistemas de dois níveis são partículas de spin 1/2, que podem ser descritos pelos operadores de Pauli. Apesar de spin não ser nosso foco nesse trabalho, iremos usar uma analogia similar para estudar sistemas de dois níveis.

Como descrito na referência [6], suponha um sistema em que exista dois estados de energia com valores bem próximos um do outro, mas valores extremamente diferentes dos estados de energia restantes do sistema. Se adicionarmos a esse sistema uma perturbação de energia fraca o suficiente que perturbe apenas os dois níveis de energia que estão próximos, mas não afete o restante, podemos considerar que esse sistema está em um

espaço bidimensional. Dessa forma, os cálculos de seus parâmetros poderão ser feitos como se fossem um sistema de spin com $s = 1/2$.

Considere que os autoestados do Hamiltoniano do sistema sem perturbação são $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ com autovalores E_1 e E_2 , respectivamente

$$H_0 |\phi_1\rangle = E_1 |\phi_1\rangle, \quad (2.28)$$

$$H_0 |\phi_2\rangle = E_2 |\phi_2\rangle, \quad (2.29)$$

em que $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ formam uma base ortonormal. Isso já pode ser associado a um sistema de spin $1/2$.

Ao incluirmos uma perturbação o Hamiltoniano total do sistema é dado por

$$H = H_0 + H_1, \quad (2.30)$$

em que H_1 é a perturbação do sistema. Esse sistema também atende as condições descritas logo acima e pode então ser associado a um sistema de spin $1/2$. Dessa forma o Hamiltoniano total H terá também dois autoestados de energia que podemos chamar de $|+\rangle$ e $|-\rangle$ associados aos autovalores de energia E_+ e E_- .

$$H |+\rangle = E_+ |+\rangle \quad (2.31)$$

$$H |-\rangle = E_- |-\rangle. \quad (2.32)$$

2.4.1 Átomos de Rydberg

Sabemos que o núcleo de um átomo, composto por prótons e nêutrons, é orbitado por elétrons. Um dos átomos mais simples é um átomo de Hidrogênio, que tem um número atômico $Z = 1$ e apenas um elétron orbitando em torno do núcleo. Os átomos de Rydberg são quaisquer átomos que tem um dos elétrons da última camada excitado para um nível de energia muito alto de forma que sua órbita fica muito distante dos outros elétrons. Dessa forma, o elétron enxerga o átomo com um caroço iônico de carga $+1$. Esses átomos de Rydberg, portanto, possuem propriedades similares às dos átomos de Hidrogênio.

Tais átomos tem propriedades bastantes peculiares. Por terem um valor esperado da posição muito grande, podemos dizer que eles são “enormes” comparado ao átomo de Hidrogênio. Em geral, um átomo excitado volta para o estado fundamental em menos de um décimo de milionésimo de segundo. Ao contrário disso, o átomo de Rydberg tem tempos de vida que varia de milésimos de segundo até um segundo quando estão no vácuo.

Por causa dessas características, os estados de Rydberg são um excelente campo para testes de alguns fenômenos da eletrodinâmica quântica. A interação entre esses átomos e um modo de campo eletromagnético produz alguns efeitos que merecem ser destacados:

a taxa de emissão espontânea de um único átomo colocado dentro de uma cavidade pode variar e é possível observar a troca oscilatória de energia entre o átomo e o modo de cavidade.

Em geral, átomos de Rydberg são feitos com átomos alcalinos por possuírem apenas um elétron na última camada. Nos experimentos que estudamos foram usados átomos de Rubídio.

Mas o que tem a ver esse átomo com um sistema de dois níveis? Simples, é bastante factível experimentalmente transformar esse átomo em um sistema de dois níveis. Para isso, o elétron que foi levado um nível bastante alto de energia é mais uma vez excitado, mas agora para um nível de energia não muito diferente do anterior. Com isso, chegamos no sistema descrito no início da subseção anterior, teremos dois níveis de energia próximos, porém esses dois serão muito diferentes do restante.

2.5 A influência do ambiente

Nesta seção iremos estudar como o ambiente pode interferir num sistema quântico e em que tipo de sistema isso acontece. Veremos que a evolução de um sistema quântico fechado pode ser descrita por um unitário mas que isso não pode ser aplicado a um sistema quântico aberto. Para sistemas quânticos abertos a dinâmica do sistema pode, sob certas condições, ser descrita por um processo quântico Markoviano através de uma equação mestra denominada equação de Lindblad. Iremos usar a equação mestra de Lindblad para descrever o processo de emissão espontânea de um átomo de dois níveis e a relaxação de um modo de campo em uma cavidade que está imersa em um ambiente semelhante a um reservatório térmico. Para esses estudos usamos os livros [8] e [7] como referências principais, além das referências [6] e [5].

2.5.1 Sistemas quânticos fechados e sistemas quânticos abertos

Um vetor de estado $|\psi(t)\rangle$ evolui no tempo pela equação de Schroedinger

$$i\hbar \frac{d|\psi(t)\rangle}{dt} = H |\psi(t)\rangle \quad (2.33)$$

e sua solução pode ser representada em termos do operador de evolução temporal unitário $U(t)$. Considerando que $|\psi(t)\rangle = U(t, t_0) |\psi(0)\rangle$, é possível facilmente chegar na expressão

$$i \frac{\partial}{\partial t} U(t) = H(t)U(t). \quad (2.34)$$

Em um sistema *fechado* e *isolado* o Hamiltoniano não depende do tempo e com isso, podemos integrar diretamente a equação 2.34 chegando na seguinte expressão para $U(t)$

$$U(t) = \exp[-iH(t)]. \quad (2.35)$$

Mas nem todo sistema fechado é isolado. Existem casos em que um sistema dito fechado é submetido a forças externas como um campo eletromagnético por exemplo. Nesses casos é possível que o sistema seja descrito por um Hamiltoniana dependente do tempo $H(t)$. Dessa forma o termo *isolado* é usado exclusivamente para um sistema em que o Hamiltoniana não depende do tempo.

Caso o estado inicial seja misto devemos descrevê-lo por sua matriz densidade

$$\rho = \sum_n \rho_n |\phi_n\rangle \langle \phi_n|, \quad (2.36)$$

em que $\rho_n \geq 0$, $\sum_n \rho_n = 1$ e $|\phi_n\rangle$ são vetores de estado normalizados que evoluem de acordo com a equação de Schroedinger 2.33. A evolução temporal desse sistema pode ser descrita por

$$\rho(t) = \sum_n \rho_n U(t) |\phi_n\rangle \langle \phi_n| U(t) \quad (2.37a)$$

$$= U(t) \rho U(t). \quad (2.37b)$$

Diferenciando os dois lados dessa equação em relação ao tempo chegamos em

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = -i [H, \rho(t)], \quad (2.38)$$

que é conhecida como equação de *von Neumann* ou *equação de Liouville-von Neumann*.

Essa equação também pode ser escrita como

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \mathcal{L} \rho(t), \quad (2.39)$$

em que $\mathcal{L} = -i [H, \rho(t)]$. \mathcal{L} é conhecido como *operador de Liouville*, que é capaz de agir em um operador levando-o em outro operador. Novamente, se integrarmos essa equação chegamos em

$$\rho(t) = \exp[\mathcal{L}(t - t_0)] \rho(t_0). \quad (2.40)$$

Toda essa discussão foi feita usando a denominada *representação de Schroedinger*, mas existe uma representação mais geral conhecida como *representação de interação*. Ela muito útil para casos em que o Hamiltoniano tem uma parte de relativa a uma perturbação ou interação.

$$H = H_0 + H_{int}. \quad (2.41)$$

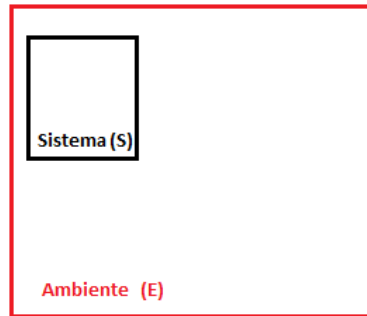
em que H_I é definido como a parte do Hamiltoniano relativa a interação.

A equação de von Neumann correspondente na representação de interação é dada por

$$\frac{d}{dt}\rho_I(t) = -i[H_I(t), \rho_I(t)]. \quad (2.42)$$

Até agora mostramos formas convencionais de descrever sistemas quânticos fechados, mas como tratar de sistemas quânticos abertos? O que realmente são sistemas quânticos abertos?

Um sistema quântico aberto é um sistema S que está acoplado a um sistema maior. Em geral um sistema aberto pode ser considerado “dentro” de outro, que pode ser chamado de ambiente E . O caso interessante de estudar é quando os dois sistemas, $S + E$ são considerados um sistema fechado, como pode ser representado na figura 2.5.1. Assim, podemos dizer que S é um subsistema do sistema total $S + E$ que irá evoluir no tempo ao interagir com o ambiente. Dessa forma, os subsistemas S e E irão estar correlacionados de forma que não é possível descrever a evolução do Hamiltoniano de S com um operador unitário. Além disso, podemos também denominar S como um *sistema reduzido* ou *sistema de interesse*.



Neste caso o sistema total estará associado ao espaço de Hilbert composto $\mathcal{H} = \mathcal{H}_S \otimes \mathcal{H}_E$, em que \mathcal{H}_E representa o espaço de Hilbert do ambiente e \mathcal{H}_S representa o espaço de Hilbert do sistema. Com isso, podemos escrever o Hamiltoniano total da seguinte forma

$$H(t) = H_S \otimes I_E + I_S \otimes H_E + H_{int}, \quad (2.43)$$

em que H_S é o Hamiltoniano do sistema aberto S , H_E é o Hamiltoniano do ambiente e H_{int} é o Hamiltoniano de interação entre os dois sistemas acoplados.

Quando o ambiente possui infinitos graus de liberdade, por exemplo, com um contínuo de modos de campo, podemos chamá-lo de *reservatório*. Por causa dessa infinidade

de graus de liberdade o sistema quântico aberto pode apresentar um comportamento irreversível. Quando o reservatório E está em um estado de equilíbrio térmico, ele pode ser referido como *banho* ou *banho térmico*.

Como a evolução de sistemas quânticos abertos não pode ser descrita por operações unitárias, o estudo de tais sistemas pode ter muitos obstáculos. Um sistema acoplado a um banho térmico leva a equações de difícil solução e muitas vezes os modos do ambiente não são conhecidas exatamente e nem controláveis. Para contornar tais dificuldades podemos usar uma descrição mais simples para o estado reduzido do sistema de interesse, empregando alguns métodos analíticos e técnicas de aproximações.

Como o sistema total é considerado fechado, podemos descrever sua evolução temporal por meio de um operador unitário de evolução temporal $U(t)$, de forma que

$$\rho(t) = U(t)\rho(0)U(t) \quad (2.44)$$

e portanto, para encontrarmos ρ_S basta tirarmos o traço parcial

$$\rho_S(t) = \text{Tr}^{(E)} [U(t)\rho(0)U(t)]. \quad (2.45)$$

Se derivarmos ambos os lados em relação ao tempo, chegamos então na equação do movimento para a matriz densidade reduzida

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i\text{Tr}^{(E)} [H(t), \rho(t)_S]. \quad (2.46)$$

Apesar de usarmos o estado reduzido, a equação diferencial acima ainda é de difícil análise pois nela está envolvido o operador $\rho(t)$ para todo o sistema. No entanto, é possível, sob certas condições, obter uma equação envolvendo apenas ρ_S que é denominada *equação de Lindblad*.

2.5.2 Equação mestra de Lindblad

Para entendermos a equação de Lindblad, vamos primeiramente descrever de modo geral a dinâmica de um sistema aberto. Temos um operador de estado $\rho_S(0)$ inicial e queremos saber como ele vai evoluir a medida que o tempo passar, ou seja, queremos encontrar $\rho_S(t)$. Sabemos que ρ_S é uma matriz e que a medida que passa o tempo ele deve continuar sendo uma matriz densidade. Então, para cada $t \geq 0$ precisamos de uma função V_t , que leve uma matriz em outra matriz. Na matemática esse tipo de função é chamado de mapa quântico. Então, como a matriz densidade do sistema S encontra-se em um espaço vetorial $S(\mathcal{H}_S)$, queremos um mapa que leve uma matriz densidade do espaço em outra matriz densidade

$$V_t : S(\mathcal{H}_S) \longrightarrow S(\mathcal{H}_S). \quad (2.47)$$

Para que ρ seja uma operador de estado, ele deve ser positivo, ou seja, $\langle \psi | \rho | \psi \rangle \geq 0$ para qualquer $|\psi\rangle$. Então o mapa V_t , deve levar $\rho(0)$ em um $\rho(t)$ positivo. Portanto V_t deve ser o que é denominado um mapa completamente positivo. Para que essa condição seja satisfeita, V_t deve ser uma soma convexa da forma

$$V_t \rho_S = \sum_{\mu} W_{\mu}(t) \rho_S(t) W_{\mu}^{\dagger}(t), \quad (2.48)$$

em que $W_{\mu}(t)$ são operadores atuando em \mathcal{H}_S . É importante também que o traço seja preservado, isso acontece se

$$\sum_{\mu} W_{\mu}(t) W_{\mu}^{\dagger}(t) = I. \quad (2.49)$$

Assim, para que possamos garantir que $\rho(t)$ continue sendo um operador de estado, aplicamos nele uma operação linear representada pelo mapa V_t que é definida por uma soma convexa, que preserva o traço e é completamente positiva.

Caso

$$V_t = e^{\mathcal{L}t}, \quad (2.50)$$

para algum mapa \mathcal{L} , podemos descrever a dinâmica de ρ pela equação

$$\frac{d}{dt} \rho_S(t) = \mathcal{L} \rho_S(t). \quad (2.51)$$

Para que V_t seja de fato um mapa quântico é necessário que

$$\mathcal{L}(\rho_S) = -\frac{i}{\hbar} [H_S, \rho_S] + \sum_{\mu \neq 0} \left(L_{\mu} \rho_S L_{\mu}^{\dagger} - \frac{1}{2} L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \rho_S - \frac{1}{2} \rho_S L_{\mu}^{\dagger} L_{\mu} \right) \quad (2.52)$$

em que L_{μ} são os *operadores de Lindblad* [9].

O mapa \mathcal{L} pode ser considerado como uma generalização do operador de Liouville da equação 2.39. As equações acima são válidas sob certas condições sobre o sistema físico. Por exemplo, a interação entre o reservatório e o sistema devem ser fracas e a escala de tempo deve ser granulada [7].

3 Eletrodinâmica quântica de cavidades

Nesse capítulo iremos entender como se dá a quantização do campo eletromagnético, entendermos o que são os estados coerentes e uma de suas representações e veremos um modelo que nos permite entender a interação átomo-campo. Por fim, a partir da equação mestra de Lindblad, apresentada na seção 2.5.2, iremos descrever a evolução de um sistema de um átomo de dois níveis, da relaxação de um modo de frequência na cavidade e do átomo relaxando em um campo térmico. Para tais estudos, usamos os livros [10], [5], [11] e [8] como principais referências.

A eletrodinâmica quântica foi uma teoria desenvolvida com o objetivo de estudar propriedades radiativas de átomos no vácuo que são modificadas por espelhos, já que inicialmente acreditava-se que o acoplamento átomo-campo seria inalterável [8]. Considerando que um sistema de dois níveis tem propriedades muito semelhantes as de um sistema de spins enquanto um modo de campo é semelhante a um oscilador harmônico, a eletrodinâmica quântica de cavidades pode ser definida como um estudo da física da interação entre spins e osciladores harmônicos. Com isso, foi possível estudar as propriedades radiativas de um átomo que são determinadas por seu acoplamento com o contínuo de modos de radiação do vácuo. Hoje, esse tipo de estudo é feito também para estudar outros fenômenos básicos da mecânica quântica. Estudamos experimentos em que um dos objetivos é isolar o átomo de qualquer influência externa aprisionando-o dentro de uma cavidade feita por espelhos altamente refletivos. Assim, o átomo estará preso como em uma caixa. Dentro dessa caixa está aprisionado um modo de campo eletromagnético que, dependendo da aplicação pode ou não estar em ressonância com a frequência de transição entre os dois níveis do átomo.

3.1 Mecânica quântica e radiação eletromagnética

A quantização da radiação é muito importante pois ela explica efeitos como emissão espontânea, efeito Casimir, dentre outros. Além disso, para entender interferometria de dois fótons e a produção de estados emaranhados, é usada a teoria quântica da radiação. Nessa seção iremos descrever como um campo magnético pode ser quantizado fazendo uma analogia com osciladores harmônicos.

Sabemos que a dinâmica de partículas pode ser descrita pela mecânica quântica, mas e quanto aos campos eletromagnéticos? Para descrever as ondas eletromagnéticas podemos começar pelas equações de Maxwell que descreve a luz como um campo eletromagnético não estático que se propaga pelo espaço. Ao associar cada modo do campo eletromagnético com um oscilador harmônico simples quantizado, é possível chegar à teoria quântica de

radiação.

3.1.1 Quantização do campo eletromagnético

Nessa subseção faremos, de uma forma mais direta, a descrição da quantização do campo eletromagnético por meio dos seus modos normais. Para uma análise mais completa, veja o apêndice A.

Seja $\mathbf{E}(x, t)$ o campo elétrico e $\mathbf{B}(x, t)$ o campo magnético supondo que as partes espacial e temporal são separáveis, podemos escrever

$$\mathbf{E}(x, t) = \mathbf{u}(x)f(t). \quad (3.1)$$

Das equações de Maxwell, em uma região livre de cargas e circundada por um condutor, chegamos nas seguintes expressões para os campos

$$\mathbf{E} = \sum_m \mathbf{u}_m(x)f_m(t). \quad (3.2)$$

e

$$\mathbf{B} = \sum_m \nabla \times \mathbf{u}_m(x)h_m(t), \quad (3.3)$$

em que f_m e h_m satisfazem

$$\frac{d}{dt}f_m(t) = ck_m^2 h_m(t). \quad (3.4)$$

Temos que

$$\frac{d^2}{dt^2}h_m(t) + c^2k_m^2 h_m(t) = 0 \quad (3.5)$$

enquanto as funções $\mathbf{u}_m(x)$ são definidas pela configuração geométrica do condutor.

A energia do campo eletromagnético em unidades gaussianas, é dado por

$$H_{EM} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d^3x. \quad (3.6)$$

Ao substituírmos as equações 3.2, 3.3 e 3.4 na equação 3.6, temos

$$H_{EM} = \frac{1}{8\pi} \sum_m \left(\frac{1}{c^2k_m^2} \dot{f}_m^2 + f_m^2 \right). \quad (3.7)$$

Agora, o hamiltoniano de um conjunto de osciladores harmônicos de massa unitária é dado por

$$H_{OH} = \sum_m \frac{1}{2} (\dot{Q}_m^2 + \omega^2 Q_m^2), \quad (3.8)$$

Comparando as equações 3.8 e 3.7 podemos notar uma semelhança entre elas. Podemos dizer que Q é análogo a f_m e que \dot{Q} é análogo a \dot{f}_m . E como sabemos, para um oscilador harmônico quântico, os operadores posição e momento são dados por

$$Q_m = \left(\frac{\hbar}{2\omega_m} \right)^{1/2} (a_m^\dagger + a_m), \quad (3.9)$$

e

$$\dot{Q}_m = i \left(\frac{\hbar\omega_m}{2} \right)^{1/2} (a_m^\dagger - a_m), \quad (3.10)$$

sendo que a^\dagger e a são os operadores criação e aniquilação.

Podemos então descrever operadores para o campo elétrico e magnético da seguinte forma

$$E(x, t) = \sum_m (2\pi\hbar\omega_m)^{1/2} [a_m^\dagger(t) + a_m(t)] \mathbf{u}_m(x) \quad (3.11)$$

e

$$B(x, t) = \sum_m ic \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_m} \right)^{1/2} [a_m^\dagger(t) - a_m(t)] \nabla \times \mathbf{u}_m(x). \quad (3.12)$$

Com isso, podemos mostrar nessa seção que o campo eletromagnético pode ser quantizado, de forma a ser descrito por operadores.

3.2 Estado coerente

Com o surgimento da teoria da quântica de radiação e do laser, também veio a necessidade do estudo de campos que são capazes de descrever aproximadamente um campo eletromagnético clássico, por exemplo produzido por correntes clássicas. Esses estados possuem propriedades particulares muito interessantes e são chamados de *estados coerentes*.

3.2.1 Relações matemáticas

Para entendermos tal conceito, vamos começar olhando para um modo do campo eletromagnético. Como vimos na subseção 3.1.1 isso pode ser comparado a um único oscilador harmônico de massa unitária, frequência angular ω , operadores criação e aniquilação a e a^\dagger e o estado fundamental sendo $|0\rangle$. Sabemos que os estados $|0\rangle$ tem a propriedade

$$a|0\rangle = 0, \quad (3.13)$$

e que o valor médio da posição e do momento no estado fundamental são zero. Além disso as variâncias dessas quantidades satisfazem o princípio de incerteza de Heisenberg de forma que

$$\langle 0|Q^2|0\rangle\langle 0|P^2|0\rangle = \frac{\hbar^2}{4} \quad (3.14)$$

Vamos definir um operador unitário

$$D(z) = e^{za^\dagger - z^*a}, \quad (3.15)$$

em que z é um parâmetro complexo, que logo daremos sentido. Podemos expressar essa equação em termos dos momento e posição já determinados usando as equações 3.9 e 3.10. Separando a parte real e a parte imaginária de z chegamos em

$$\begin{aligned} D(z) &= e^{\frac{i}{\hbar}(p_0Q - q_0P)} \\ &= D(q_0, p_0), \end{aligned} \quad (3.16)$$

em que

$$q_0 = \left(\frac{2\hbar}{\omega}\right)^{1/2} \operatorname{Re}z \quad (3.17)$$

$$p_0 = (2\hbar\omega)^{1/2} \operatorname{Im}z. \quad (3.18)$$

O operador $D(z)$ ou $D(q_0, p_0)$ é chamado de *operador deslocamento no espaço de fase*. A partir da identidade

$$e^A B e^{-A} = B + [A, B] + \frac{1}{2}[A[A, B]] + \dots, \quad (3.19)$$

em que $[A, B] = 0$ e definindo $A = Q$ e $Y = i/\hbar(p_0Q - q_0P)$ podemos chegar nas seguintes propriedades para o operador descolamento

$$D(q_0, p_0)QD^{-1}(q_0, p_0) = Q - q_0I \quad (3.20)$$

$$D(q_0, p_0)PD^{-1}(q_0, p_0) = P - p_0I \quad (3.21)$$

A partir das equações 3.17 e 3.18, podemos ver que se juntarmos a parte real e imaginária de z , chegamos em $z = (\omega/2\hbar)^{1/2}2q_0 + i(1/2\hbar\omega)$. Assim, podemos definir os *vetores de estado coerente* como

$$|z\rangle = D(z)|0\rangle. \quad (3.22)$$

Pelo fato do operador $D(z)$ ser unitário, podemos afirmar que $\langle z|z\rangle = \langle 0|0\rangle = 1$. Além disso usando as propriedades 3.20 e 3.21, podemos facilmente notar que os valores médios da posição e do momento num estado coerente são

$$\langle z | Q | z \rangle = q_0 \quad (3.23)$$

$$\langle z | P | z \rangle = p_0. \quad (3.24)$$

Com isso fica mais claro ver como funciona esse vetor deslocamento. Nele, as distribuições de probabilidade são as mesmas do estado fundamental mas deslocados da origem para o ponto (q_0, p_0) no espaço de fase.

Outro fato importante é que os vetores do estado coerentes são autovetores do operador aniquilação. Como sabemos, $a | 0 \rangle = 0$ e $D(z)$ é unitário; então usando a identidade 3.19 junto com a equação 3.22 temos

$$D(z)a | 0 \rangle = (a - zI) | z \rangle = 0 \quad (3.25)$$

$$a | z \rangle = z | z \rangle, \quad (3.26)$$

com a equação dual

$$\langle z | a^\dagger = z^* \langle z |. \quad (3.27)$$

Usando a identidade de Baker-Hausdorff

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \quad (3.28)$$

em que

$$[A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0, \quad (3.29)$$

podemos mostrar que

$$D(z) \equiv e^{za^\dagger - z^*a} = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{za^\dagger} e^{-z^*a} \quad (3.30)$$

e conseqüentemente, podemos escrever o vetor de estado coerente como

$$|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(n!)^2}. \quad (3.31)$$

3.2.2 Propriedades importantes dos estados coerentes

Número médio de fótons de um estado coerente

Para encontrarmos o número médio de fótons de um estado coerente usamos a seguinte relação

$$\langle z | a^\dagger a | z \rangle = |z|^2. \quad (3.32)$$

A partir dessa propriedade e da equação 3.31, podemos então chegar a probabilidade de encontrar n fótons no estado $|z\rangle$

$$p(n) = \langle n|z\rangle \langle z|n\rangle = \frac{|z|^{2n} e^{-\langle n\rangle}}{n!} = \frac{\langle n\rangle^n e^{-\langle n\rangle}}{n!}. \quad (3.33)$$

Princípio da incerteza

Como já discutido antes, uma outra propriedade importante é o fato de estados coerentes respeitarem o princípio de incerteza de Heisenberg

$$\Delta P \Delta Q = \frac{\hbar}{2}. \quad (3.34)$$

Relação de completude de estados coerentes

Os vetores de estado coerentes obedecem a relação de completude

$$\frac{1}{\pi} \int |z\rangle \langle z| d^2z = I, \quad (3.35)$$

sendo I a matriz identidade. E usando essa relação podemos expressar um vetor de estado qualquer $|\psi\rangle$ como uma combinação linear do conjunto $\{|z\rangle\}$

$$|\psi\rangle = I |\psi\rangle = \frac{1}{\pi} \int |z\rangle \langle z|\psi\rangle d^2z. \quad (3.36)$$

Essa representação, no entanto, não é a única para esse vetor $|\psi\rangle$, porque como o conjunto $\{|z\rangle\}$ não é linearmente dependente, também temos mais de uma forma de representar um vetor de estado coerente $|z\rangle$

$$|z\rangle = \frac{1}{\pi} \int |z'\rangle \langle z'|z\rangle d^2z'. \quad (3.37)$$

Uma consequência disso é que não podemos usar a fórmula usual de traço de um operador se estamos trabalhando com estados coerentes

$$\text{Tr}(A) \neq \int \langle z| A |z\rangle d^2z. \quad (3.38)$$

Não-ortogonalidade dos estados coerentes

O conjunto de vetores de estado coerentes $\{|z\rangle\}$ podem ser usados como base, porém esse conjunto não é ortonormal. Apesar da condição de normalização ser válida $\langle z|z\rangle = 1$, $\langle z|z'\rangle$ não é necessariamente nulo. A partir da equação 3.31, podemos encontrar o valor absoluto para o produto interno de z e z'

$$|\langle z|z'\rangle| = e^{(-\frac{1}{2}|z-z'|^2)}. \quad (3.39)$$

Olhando para essa equação, podemos ver que apesar de dois estados coerentes diferentes não serem ortogonais, o valor absoluto de seu produto interno pode ser bem próximo de zero caso o valor absoluto da diferença $z - z'$ seja muito grande.

3.3 A representação de Wigner no espaço de fase

No capítulo 2.2 vimos que o operador densidade é uma forma de representar um estado quântico. Mas essa forma não é a única, uma outra forma de representação é pelo espaço de fase, que é considerada por alguns como sendo um pouco mais intuitiva. Essa representação é chamada de *representação de Wigner*, que tenta se aproximar de uma descrição de probabilidade.

Na mecânica clássica, o estado de um sistema é descrito por uma densidade ρ no espaço de fase. Para uma partícula em uma dimensão, devem valer as relações

$$\int \rho(q, p) dp = \langle q | \rho | q \rangle \quad (3.40)$$

$$\int \rho(q, p) dq = \langle p | \rho | p \rangle, \quad (3.41)$$

em que

$$\rho(q, p) \geq 0 \quad (3.42)$$

A representação de Wigner é um análogo da densidade acima, definida para uma partícula em uma dimensão como

$$\rho_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle q - \frac{1}{2}y | \rho | q + \frac{1}{2}y \rangle e^{ipy/\hbar} dy, \quad (3.43)$$

em que $y = -\hbar\tau$. Essa representação é obtida a partir da representação do momento, mas para chegarmos nela a partir da representação das posições basta fazermos

$$\rho_w(q, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{\infty} \langle p - \frac{1}{2}k | \rho | p + \frac{1}{2}k \rangle e^{-iqk/\hbar} dk. \quad (3.44)$$

A representação de Wigner não é restrita apenas ao operador densidade ρ , ela também pode ser aplicada a um operador qualquer A na forma

$$A_w(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} \langle q - \frac{1}{2}y | A | q + \frac{1}{2}y \rangle e^{ipy/\hbar} dy, \quad (3.45)$$

de forma que para encontrarmos o valor médio do operador A no estado ρ , basta fazermos

$$\langle A \rangle = Tr(\rho A) = \int \int \rho_w(q, p) A_w(q, p) dq dp. \quad (3.46)$$

A função de Wigner satisfaz as relações 3.40 e 3.40 apresentadas acima se fizermos $\rho(q, p) = \rho_w(q, p)$. Nela, podemos replicar as três propriedades básicas da matriz densidade ρ que foram descritas na seção 2.2. O traço de ρ é dado por

$$\text{Tr}(\rho) = \int \langle q | \rho | q \rangle dq = \int \int \rho_w(q, p) dq dp \quad (3.47)$$

e a primeira propriedade, $\text{Tr}(\rho) = 1$, ficaria

$$\int \int \rho_w(q, p) dq dp = 1. \quad (3.48)$$

A segunda propriedade $\rho = \rho^\dagger$ implica que a função $\rho_w(q, p)$ é real. Já a terceira, $\langle u | \rho | u \rangle \geq 0$ não implica que $\rho_w(q, p) \geq 0$. A partir das propriedades do operador densidade já estudadas na seção 2.2, pode-se demonstrar que

$$0 \leq \text{Tr}(\rho \rho') \leq 1. \quad (3.49)$$

e com isso Primeiramente devemos encontrar o $\text{Tr}(\rho \rho')$. Para isso, definimos o operador $R_w(q, p)$ da equação 3.46 como sendo $R_w(q, p) = 2\pi\hbar\rho'_w(q, p)$ de forma a termos

$$\text{Tr}(\rho \rho') = 2\pi\hbar \int \int \rho_w(q, p) \rho'_w(q, p) dq dp. \quad (3.50)$$

Assim, olhando para a equação 3.49, podemos concluir que

$$0 \leq \int \int \rho_w(q, p) \rho'_w(q, p) dq dp \leq \frac{1}{2\pi\hbar}. \quad (3.51)$$

Considerando o caso em que $\rho = \rho'$, chegamos em

$$\int \int [\rho_w(q, p)]^2 dq dp \leq \frac{1}{2\pi\hbar}, \quad (3.52)$$

o que implica que a função de Wigner não pode ser um pico muito acentuado, como um delta de Dirac. Para entendermos isso melhor vamos olhar para um exemplo. Suponha que $\rho_w(q, p) \sim 0$ fora de uma região de área A no espaço de fases e que dentro dessa região seja $\rho_w(q, p) = A^{-1}$. Sendo A^{-1} uma constante e $\int dq dp = A$, podemos concluir que, pela equação 3.51, $A \geq 2\pi\hbar$. Com esse resultado podemos concluir que a área no espaço de fazes tem um valor mínimo, impossibilitando que $\rho_w(q, p)$ seja um pico muito forte.

Se os dois estados descritos na equação 3.50 forem puros, $\rho = |\psi\rangle \langle \psi|$ e $\rho' = |\phi\rangle \langle \phi|$, ela se tornaria

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 = 2\pi\hbar \int \int \rho_w(q, p) \rho'_w(q, p) dq dp. \quad (3.53)$$

Se $|\psi\rangle$ e $|\phi\rangle$ forem ortogonais, essa equação é nula. Mas se $\rho_w(q, p)$ e $\rho'_w(q, p)$ tiverem o mesmo sinal, o integrando será necessariamente maior que zero, o que tornaria a equação

acima inconsistente para estados ortogonais. Com isso podemos concluir que a função de Wigner assume valores positivos e negativos, o que torna impossível ela representar probabilidades.

Um outro caso interessante é quando $\rho_w(q, p) = \rho'_w(q, p)$ é um estado puro. Nessa situação, 3.49 tomará o limite superior e é correto afirmar que

$$\int \int [\rho_w(q, p)]^2 dqdp = \frac{1}{2\pi\hbar}, \quad (3.54)$$

nos levando a propriedade $Tr(\rho^2) = 1$ para estados puros.

Em determinadas aplicações, é interessante descrever os estados coerentes pela representação de Wigner. Uma forma fazer isso é usando as relações 3.36, 3.16 e 3.18 para escrever o estado coerente $|z\rangle$ na representação das posições (ou dos momentos). Com isso, basta substituir o resultado encontrado na equação 3.45 (ou 3.44). O estado coerente na representação de Wigner pode então ser dado por

$$\rho_w(q, p) = \frac{2}{\hbar} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x - x_0}{\Delta x} \right)^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{p - p_0}{\Delta p} \right)^2 \right], \quad (3.55)$$

em que $\Delta x \Delta p = \hbar/2$, e x_0 e p_0 são os valores esperados em posição o momento representados pela função de Wigner.

É interessante ressaltar que especificamente no caso de estados coerentes, a representação de Wigner é de fato uma densidade de probabilidade pois a função é sempre positiva, além de ser uma distribuição gaussiana nas variáveis x e p sem correlação entre momento e posição.

3.4 Teoria quântica da interação átomo-campo

Em algumas situações é possível assumir um campo clássico ao estudar a interação de um campo eletromagnético com a matéria. Muitas vezes, para conseguirmos explicar certos resultados experimentais, precisamos usar uma descrição quantizada do campo. Nessa seção iremos descrever e estudar um Hamiltoniano para um campo eletromagnético interagindo com um sistema atômico de dois níveis. Esse estudo nos dará suporte para compreendermos a implementação de experimentos em cavidades de micro-ondas com alto fator de qualidade Q .

3.4.1 O modelo de Jaynes-Cummings

Em 1963, Jaynes e Cummings desenvolveram um modelo em que um único átomo de dois níveis interagia com um modo de campo eletromagnético. Uma das primeiras aplicações do modelo foi para tentar analisar emissão espontânea de fótons em átomos. Com

isso, foi possível observar a característica discreta dos fótons. Em nosso trabalho, estudamos como o modelo de Jaynes-Cummings (MJC) descreve a interação de um átomo de dois níveis com uma cavidade. Veremos que tal modelo apresenta propriedades estatísticas que não encontramos em campos clássicos.

Como temos apenas um átomo interagindo com o campo, podemos usar uma aproximação de dipolo para descrever o modelo. Assim, o Hamiltoniano seria da seguinte forma

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_C - e\mathbf{r} \cdot \mathbf{E}, \quad (3.56)$$

em que \mathcal{H}_A é a energia do átomo, \mathcal{H}_C é a energia do campo de radiação, \mathbf{r} é o vetor posição do elétron e \mathbf{E} é o campo de radiação, que na aproximação de dipolo é considerado uniforme por todo o átomo.

Como vimos antes, o campo eletromagnético pode ser quantizado de forma análoga a um oscilador harmônico, por isso, a energia do campo pode ser descrita em termos dos operadores criação e aniquilação

$$\mathcal{H}_C = \sum_{\mathbf{k}} \hbar\omega_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \right), \quad (3.57)$$

em que cada \mathbf{k} representa um modo de campo.

Para descrevermos \mathcal{H}_A e $e\mathbf{r}$ podemos usar os operadores de transição atômica

$$\sigma_{ij} = |i\rangle \langle j|, \quad (3.58)$$

com $\{|i\rangle\}$ formando um conjunto completo de autoestados de energia do átomo, de forma que $\sum_i |i\rangle \langle i| = I$. Como equação de autovalor da energia diz que $\mathcal{H}_A |i\rangle = E_i |i\rangle$, podemos dizer que a energia do átomo poder ser dada por

$$\mathcal{H}_A = \sum_i E_i |i\rangle \langle i| = \sum_i E_i \sigma_{i,i} \quad (3.59)$$

e

$$e\mathbf{r} = \sum_{i,j} e |i\rangle \langle i| \mathbf{r} |j\rangle \langle j| = \sum_{i,j} \varrho_{i,j} \sigma_{i,j}, \quad (3.60)$$

em que $\varrho_{i,j} = e \langle i| \mathbf{r} |j\rangle$ é o elemento da matriz de de transição do dipolo elétrico. Se considerarmos que o átomo está na origem, a partir da equação 3.11, podemos descrever o operador campo elétrico como

$$\mathbf{E} = \sum_{\mathbf{k}} \hat{e}_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}} \left(\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^\dagger \right), \quad (3.61)$$

sendo $\varepsilon_{\mathbf{k}} = (2\pi\hbar\omega_{\mathbf{k}})^{1/2}$ e $\hat{e}_{\mathbf{k}} = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}(\mathbf{0})$.

Substituindo 3.63, 3.59, 3.60 e 3.61 em 3.56 chegamos na seguinte forma para o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings, omitindo a energia de ponto zero e definindo

$$f_{\mathbf{k}}^{ij} = -\frac{\varrho_{i,j} \cdot \hat{\epsilon}_{\mathbf{k}} \varepsilon_{\mathbf{k}}}{\hbar}, \quad (3.62)$$

teremos

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \sum_i E_i \sigma_{i,i} + \hbar \sum_{i,j} \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}^{ij} \sigma_{i,j} (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}). \quad (3.63)$$

Em nosso trabalho, nos estudaremos sistemas de dois níveis, sendo g o estado fundamental e e o estado excitado. Neste caso $\varrho_{g,e} = \varrho_{e,g}$ e com isso

$$f_{\mathbf{k}}^{ge} = f_{\mathbf{k}}^{eg} = f_{\mathbf{k}}. \quad (3.64)$$

Dessa forma o Hamiltoniano para esse sistema seria

$$\mathcal{H} = \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + E_g \sigma_{gg} + E_e \sigma_{ee} + \hbar \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} (\sigma_{ge} + \sigma_{eg}) (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}). \quad (3.65)$$

Podemos dizer que a diferença de energia $E_g - E_e = \hbar \omega_0$, em que ω_0 é a frequência de ressonância entre os níveis g e e e que $\sigma_{gg} + \sigma_{ee} = 1$. Dessa forma podemos dizer que

$$E_g \sigma_{gg} + E_e \sigma_{ee} = \frac{1}{2} \hbar \omega_0 (\sigma_{gg} - \sigma_{ee}) + \frac{1}{2} (E_g + E_e). \quad (3.66)$$

Por conveniência, é interessante usar a seguinte notação

$$\sigma_z = \sigma_{ee} - \sigma_{gg} = |e\rangle \langle e| - |g\rangle \langle g|, \quad (3.67a)$$

$$\sigma_+ = \sigma_{eg} = |e\rangle \langle g|, \quad (3.67b)$$

$$\sigma_- = \sigma_{ge} = |g\rangle \langle e|. \quad (3.67c)$$

É fácil ver que os operadores 3.67 satisfazem as relações de comutação das matrizes de Pauli.

Ignorando o termo constante da energia na equação 3.66, podemos reescrever o Hamiltoniano 3.65 como

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} (\sigma_+ + \sigma_-) (\mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}) \\ \mathcal{H} &= \sum_{\mathbf{k}} \hbar \omega_{\mathbf{k}} \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \hbar \omega_0 \sigma_z + \hbar \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} (\sigma_+ \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \sigma_+ \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger} + \sigma_- \mathbf{a}_{\mathbf{k}} + \sigma_- \mathbf{a}_{\mathbf{k}}^{\dagger}) \end{aligned} \quad (3.68)$$

No terceiro termo da equação 3.68, $\sigma_{+\mathbf{a}_k}$ descreve o processo em que o átomo vai para o nível excitado e o campo emite um fóton, $\sigma_{-\mathbf{a}_k^\dagger}$ descreve o processo inverso. O termo $\sigma_{-\mathbf{a}_k}$ descreve o processo em que o átomo decai do nível excitado para o fundamental e ainda aniquila um fóton, com isso, o sistema tem uma perda de energia aproximada de $2\hbar\omega_0$. Similarmente o termo $\sigma_{+\mathbf{a}_k^\dagger}$, resulta num ganho de energia de $2\hbar\omega_0$.

O Hamiltoniano 3.68 descreve a interação de um único átomo de dois níveis com vários modos de campo. Com ele podemos obter soluções exatas para modelos que serão interessantes para o nosso trabalho.

3.4.2 Solução exata para o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings

Em nosso trabalho, estamos interessados em apenas um modo de campo, por isso, na equação 3.68 usaremos $k = 1$. Nessa situação, para descrever a solução mais geral possível, iremos dividir o Hamiltoniano em duas partes, em que a primeira consiste na energia do campo e a energia do átomo e a segunda na parte na interação entre o campo e a matéria

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_1, \quad (3.69)$$

em que

$$\mathcal{H}_0 = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z, \quad (3.70)$$

$$\mathcal{H}_1 = \hbar f (\sigma_{+\mathbf{a}_k} + \sigma_{+\mathbf{a}_k^\dagger} + \sigma_{-\mathbf{a}_k} + \sigma_{-\mathbf{a}_k^\dagger}). \quad (3.71)$$

Por conveniência, vamos usar a representação de interação em que o Hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{V} = e^{i\mathcal{H}_0 t/\hbar} \mathcal{H}_1 e^{-i\mathcal{H}_0 t/\hbar} \quad (3.72)$$

Para simplificar a forma desse Hamiltoniano, vamos usar a seguinte identidade

$$e^{\alpha\mathbf{A}}\mathbf{B}e^{-\alpha\mathbf{A}} = \mathbf{B} + \alpha[\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{\alpha^2}{2!}[\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \dots, \quad (3.73)$$

em que \mathbf{A} e \mathbf{B} são dois operadores quaisquer. A partir dela podemos ver que

$$e^{(\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z)t}(\sigma_+)e^{(-\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z)t} = e^{i\omega_0 t}\sigma_+, \quad (3.74)$$

$$e^{(\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z)t}(\sigma_-)e^{(-\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z)t} = e^{-i\omega_0 t}\sigma_-, \quad (3.75)$$

$$e^{(i\omega a^\dagger a)t}(a^\dagger)e^{(-i\omega a^\dagger a)t} = e^{i\omega t}a^\dagger \quad (3.76)$$

e

$$e^{(i\omega a^\dagger a)t}(a^\dagger)e^{(-i\omega a^\dagger a)t} = e^{-i\omega t}a. \quad (3.77)$$

Utilizando os resultados acima, mais o fato de que as matrizes σ comutam com os operadores a e a^\dagger , podemos reescrever a equação 3.81 da seguinte forma

$$\mathcal{V} = \hbar f \left[e^{i\Delta t}\sigma_+ a + e^{-i\Delta t}\sigma_- a^\dagger + e^{i(\omega_0+\omega)t}\sigma_+ a^\dagger + e^{-i(\omega_0+\omega)t}\sigma_- a \right], \quad (3.78)$$

em que

$$\mathcal{H}_0 = \hbar\omega a^\dagger a + \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z, \quad (3.79)$$

$$\mathcal{H}_1 = \hbar f \left(\sigma_+ \mathbf{a}_\mathbf{k} + \sigma_+ \mathbf{a}_\mathbf{k}^\dagger + \sigma_- \mathbf{a}_\mathbf{k} + \sigma_- \mathbf{a}_\mathbf{k}^\dagger \right). \quad (3.80)$$

Por conveniência, vamos usar a representação de interação em que o Hamiltoniano é dado por

$$\mathcal{V} = e^{i\mathcal{H}_0 t/\hbar} \mathcal{H}_1 e^{-i\mathcal{H}_0 t/\hbar} \quad (3.81)$$

Para simplificar a forma desse Hamiltoniano, vamos usar a seguinte identidade

$$e^{\alpha \mathbf{A}} \mathbf{B} e^{-\alpha \mathbf{A}} = \mathbf{B} + \alpha [\mathbf{A}, \mathbf{B}] + \frac{\alpha^2}{2!} [\mathbf{A}, [\mathbf{A}, \mathbf{B}]] + \dots, \quad (3.82)$$

em que \mathbf{A} e \mathbf{B} são dois operadores quaisquer. A partir dela podemos ver que

$$e^{(\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z)t}(\sigma_+)e^{(-\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z)t} = e^{i\omega_0 t}\sigma_+, \quad (3.83)$$

$$e^{(\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z)t}(\sigma_-)e^{(-\frac{1}{2}\omega_0\sigma_z)t} = e^{-i\omega_0 t}\sigma_-, \quad (3.84)$$

$$e^{(i\omega a^\dagger a)t}(a^\dagger)e^{(-i\omega a^\dagger a)t} = e^{i\omega t}a^\dagger \quad (3.85)$$

e

$$e^{(i\omega a^\dagger a)t}(a^\dagger)e^{(-i\omega a^\dagger a)t} = e^{-i\omega t}a. \quad (3.86)$$

Utilizando os resultados acima, mais o fato de que as matrizes σ comutam com os operadores a e a^\dagger , podemos reescrever a equação 3.81 da seguinte forma

$$\mathcal{V} = \hbar f \left[e^{i\Delta t}\sigma_+ a + e^{-i\Delta t}\sigma_- a^\dagger + e^{i(\omega_0+\omega)t}\sigma_+ a^\dagger + e^{-i(\omega_0+\omega)t}\sigma_- a \right], \quad (3.87)$$

em que $\Delta = \omega_0 - \omega$. Como os dois últimos termos são usualmente descritos pela denominada *aproximação de onda girante* de forma que podemos escrever a equação 3.87 como

$$\mathcal{V} = \hbar f \left[e^{i\Delta t} \sigma_+ a + e^{-i\Delta t} \sigma_- a^\dagger \right]. \quad (3.88)$$

Com o Hamiltoniano escrito de forma mais adequada, agora podemos proceder com a solução. Existem vários métodos para encontrar a solução do HJC e aqui iremos resolver a equação do movimento para $|\psi\rangle$

$$i\hbar \frac{\partial |\psi\rangle}{\partial t} = \mathcal{V} |\psi\rangle \quad (3.89)$$

A solução para essa equação diferencial será uma combinação linear dos estados $|e, n\rangle$ e $|g, n\rangle$, em que $|e\rangle$ representa o estado excitado do átomo, $|g\rangle$ o estado fundamental do átomo e n representa o número de fótons em cada estado. Nessa solução, cada estado dependerá de uma amplitude de probabilidade que varia no tempo, $C_{e,n}(t)$ e $C_{g,n}(t)$. Dessa forma, podemos representar o nosso vetor de estado como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n [C_{e,n}(t) |e, n\rangle + C_{g,n}(t) |g, n\rangle]. \quad (3.90)$$

O Hamiltoniano \mathcal{V} só permite transição entre os estados $|e, n\rangle$ e $|g, n+1\rangle$ com amplitudes de probabilidades $C_{e,n}$ e $C_{g,n+1}$, respectivamente. Tais transições acontecem quando um átomo decai do estado excitado para o fundamental emitindo um fóton ou quando ele absorve um fóton e vai para o estado excitado. Mas para encontrarmos essas amplitudes de probabilidades precisamos encontrar primeiro suas respectivas equações de movimento. Para isso, primeiramente iremos substituir as equações 3.90 e 3.88 em 3.89.

$$i\hbar \frac{d|\psi\rangle}{dt} = \hbar f \left[e^{i\Delta t} \sigma_+ a + e^{-i\Delta t} \sigma_- a^\dagger \right] |\psi\rangle \quad (3.91a)$$

$$\sum_n \left[\dot{C}_{e,n}(t) |e, n\rangle + \dot{C}_{g,n}(t) |g, n\rangle \right] = if \left[e^{i\Delta t} \sigma_+ a + e^{-i\Delta t} \sigma_- a^\dagger \right] \times \sum_n \left[C_{e,n}(t) |e, n\rangle + C_{g,n}(t) |g, n\rangle \right]. \quad (3.91b)$$

considerando apenas as transições permitidas e aplicando os operadores de \mathcal{V} , (n e $n+1$) podemos escrever a equação 3.91 da seguinte forma

$$\dot{C}_{e,n}(t) |e, n\rangle + \dot{C}_{g,n+1}(t) |g, n+1\rangle = -if\sqrt{n+1} \left[C_{e,n}(t) e^{-i\Delta t} |g, n+1\rangle + C_{g,n+1}(t) e^{i\Delta t} |e, n\rangle \right]. \quad (3.92)$$

Ao projetarmos a equação 3.92 em $|e, n\rangle$, teremos

$$\dot{C}_{e,n}(t) = -if\sqrt{n+1} C_{g,n+1}(t) e^{i\Delta t} \quad (3.93)$$

e ao projetarmos ela em $|g, n + 1\rangle$, teremos

$$\dot{C}_{g,n+1}(t) = -if\sqrt{n+1}C_{e,n}(t)e^{-i\Delta t}. \quad (3.94)$$

Chegamos então em duas equações diferenciais acopladas. Para encontrarmos uma solução para cada uma dessas equações podemos seguir o seguinte procedimento: primeiro, derivamos os dois lados da equação 3.93 em relação ao tempo e em seguida substituímos a equação 3.94 nela e teremos

$$\ddot{C}_{e,n}(t) = -f^2(n+1)C_{e,n}(t) + \Delta\dot{C}_{e,n}(t), \quad (3.95)$$

e similarmente para $C_{g,n+1}$ teremos

$$\ddot{C}_{g,n+1}(t) = -f^2(n+1)C_{g,n+1}(t) + \Delta\dot{C}_{g,n+1}(t). \quad (3.96)$$

Por fim, podemos chegar a solução exata para essas duas equações diferenciais de segunda ordem partindo das condições iniciais $C_{e,n}(0)$ e $C_{g,n+1}(0)$, obtendo

$$C_{e,n}(t) = \left\{ C_{e,n}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - \frac{2if\sqrt{n+1}}{\Omega_n} C_{g,n+1}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{i\Delta t/2} \quad (3.97)$$

e

$$C_{g,n+1}(t) = \left\{ C_{g,n+1}(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) + \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] - \frac{2if\sqrt{n+1}}{\Omega_n} C_{e,n}(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right\} e^{-i\Delta t/2}, \quad (3.98)$$

em que

$$\Omega_n^2 = \Delta^2 + 4f^2(n+1). \quad (3.99)$$

3.4.3 Exemplo de aplicação do modelo de Jaynes Cummings

Suponha que um átomo de dois níveis com os possíveis estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$, em que e representa o nível excitado do átomo e g o nível de energia fundamental. Considere que esse átomo entra em uma cavidade no estado de vácuo e que está em ressonância com a frequência de transição do átomo no estado $|e\rangle$. Após um tempo tal que $\Omega_n t = \pi/2$, qual é a probabilidade de esse átomo permanecer no nível e e o número de fótons na cavidade não se alterar ou do átomo decair para o nível g deixando um fóton na cavidade?

Para $n = 0$, se esse átomo está entra na cavidade no estado $|e\rangle$, temos $C_{e,0}(0) = 1$ e $C_{g,0+1}(0) = 0$. Além disso, se o átomo e a cavidade estão em ressonância, $\Delta = 0$. Com isso, as equações 3.97 e 3.98, assumem os valores

$$C_{e,0}(t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (3.100)$$

e

$$C_{g,1}(t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (3.101)$$

Com isso vemos que a probabilidade do átomo sair no estado $|e\rangle$ e no estado $|g\rangle$ é a mesma

$$|C_{e,0}|^2 = |C_{g,1}|^2 = \frac{1}{2} \quad (3.102)$$

e podemos descrever o estado $|\psi\rangle$ do átomo como

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle \otimes |0\rangle + |g\rangle \otimes |1\rangle). \quad (3.103)$$

3.4.4 Oscilações de rabi

O que é oscilação de Rabi

Se no instante inicial o átomo está no estado $|e\rangle$, após evoluir, o poderá permanecer no estado $|e\rangle$ sem emitir nenhum fóton com probabilidade $|C_{e,n}(t)|^2$ ou decair para o estado $|g\rangle$ e emitir um fóton com probabilidade $|C_{g,n+1}(t)|^2$. Essas probabilidades oscilam com uma frequência Ω_R , que é chamada de *frequência de Rabi*.

Probabilidades

Se consideramos um átomo que está num estado inicial excitado $|e\rangle$, nas equações 3.97 e 3.98 a constante $C_{g,n+1}(0) = 0$. Com isso podemos definir $C_{e,n}(0) = C_n(0)$ e então obtemos

$$C_{e,n}(t) = C_n(0) \left[\cos\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) - \frac{i\Delta}{\Omega_n} \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) \right] e^{i\Delta t/2} \quad (3.104)$$

$$C_{g,n+1}(t) = -\frac{2if\sqrt{n+1}}{\Omega_n} C_n(0) \sin\left(\frac{\Omega_n t}{2}\right) e^{-i\Delta t/2} \quad (3.105)$$

As quantidades $|C_{e,n}(t)|^2$ e $|C_{g,n+1}(t)|^2$ nos dão a probabilidade que o campo tenha n fótons e que o átomo esteja nos estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$. E se quisermos saber apenas a probabilidade $p(n)$ que o campo tenha n fótons, basta somarmos as duas probabilidades acima

$$p(n) = |C_{e,n}(t)|^2 + |C_{g,n+1}(t)|^2 \quad (3.106)$$

Função Inversão

A função inversão é definida por

$$W(t) = p_e(t) - p_g(t) \quad (3.107a)$$

$$= \sum_n \left[|C_{e,n}(t)|^2 - |C_{g,n+1}(t)|^2 \right] \quad (3.107b)$$

$$= p(n) \left[\frac{\Delta^2}{\Omega_n^2} + \frac{4f^2(n+1)}{\Omega_n^2} \cos(\Omega_n t) \right]. \quad (3.107c)$$

Suponha agora que o estado inicial da cavidade é coerente, ou seja

$$p(n) = \frac{\langle n \rangle^n e^{-\langle n \rangle}}{n!}. \quad (3.108)$$

Na figura 1 foi plotada $W(t)$ função de uma variável adimensional $\tau = ft$ para um estado inicial coerente. A curva de inversão mostra que as oscilações de Rabi sofrem um “colapso”, mas um tempo depois elas ressurgem. Também podemos notar que a amplitude das oscilações vão diminuindo até chegar a zero, quando colapsam, e ao ressurgirem, vão aumentando até chegar a uma amplitude máxima.

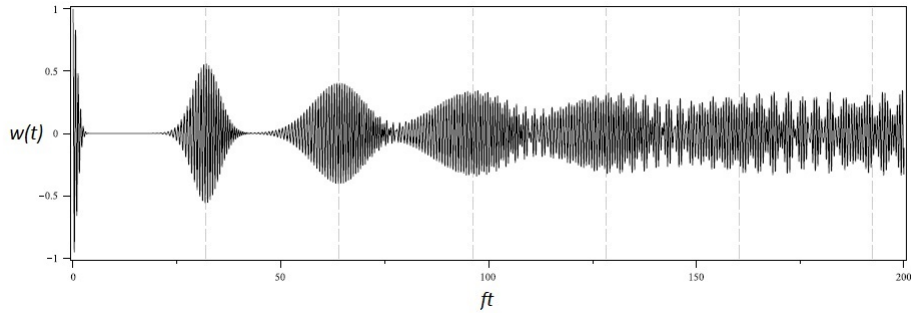


Figura 1 – Evolução temporal da inversão de probabilidades $|C_{e,n}(t)|^2$ e $|C_{g,n+1}(t)|^2$

Para entendermos fisicamente o que acontece nessa curva, vamos analisar a equação 3.108. No somatório, cada termo representa as oscilações de Rabi para um determinado número de fótons n . No início, em $t = 0$, como o átomo foi preparado num estado bem definido, todos os n 's no somatório estão correlacionados. A medida que o tempo passa, essa correlação diminui porque as oscilações de Rabi associadas com diferentes n 's passam a ter frequências diferentes, que somadas levam à uma interferência destrutiva resultando num colapso. Conforme o tempo passa, a correlação reaparece levando ao renascimento das oscilações de Rabi. Esse comportamento que vai se repetindo, ocorre por causa da estrutura granular dos fótons. No caso de uma “distribuição contínua de fótons”, ou seja, num campo clássico, é previsto apenas o colapso e com isso, podemos concluir que o renascimento das oscilações de Rabi é um fenômeno puramente quântico.

Na equação 3.107, o argumento do cosseno nos dá informações sobre a oscilação de Rabi. No limite de $\langle n \rangle \gg 1$, podemos definir o período das oscilações de Rabi como

$$t_R \sim \frac{1}{\Omega_{\langle n \rangle}} = \frac{1}{(\Delta^2 + 4f^2 \langle n \rangle)^{1/2}}. \quad (3.109)$$

Como vimos as oscilações de Rabi colapsam depois de um certo tempo. Para encontrarmos esse tempo de colapso t_c , olhamos para a distribuição de Piosson descrita na equação 3.108 para um estado coerente inicial com $\langle n \rangle \gg 1$. Primeiro, precisamos do desvio padrão do número médio de fótons $\Delta n = \sqrt{\langle n \rangle}$ e depois levamos na expressão [11]

$$\left(\Omega_{\langle n \rangle + \sqrt{\langle n \rangle}} - \Omega_{\langle n \rangle - \sqrt{\langle n \rangle}} \right) t_c \sim 1 \quad (3.110a)$$

$$t_c \sim \frac{1}{\left(\Omega_{\langle n \rangle + \sqrt{\langle n \rangle}} - \Omega_{\langle n \rangle - \sqrt{\langle n \rangle}} \right)} \quad (3.110b)$$

$$\simeq 1/ \left\{ \left[\Delta^2 + 4f^2 \left(\langle n \rangle + \sqrt{\langle n \rangle} \right) \right]^{1/2} - \left[\Delta^2 + 4f^2 \left(\langle n \rangle - \sqrt{\langle n \rangle} \right) \right]^{1/2} \right\}. \quad (3.110c)$$

Se usarmos a aproximação da série binomial

$$(1 + x)^\alpha \simeq 1 + \alpha x, \quad (3.111)$$

em que $|x| \gg 1$ nos leva a

$$t_c \simeq \frac{1}{2f} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4f^2 \langle n \rangle} \right)^{1/2}. \quad (3.112)$$

E para terminar, podemos encontrar o intervalo de tempo entre os renascimentos das oscilações de Rabi. Podemos encontrá-lo a partir da seguinte condição

$$\left(\Omega_{\langle n \rangle} - \Omega_{\langle n \rangle - 1} \right) t_r = 2\pi m \quad (m = 1, 2, 3, \dots), \quad (3.113)$$

em que m representa os renascimentos. E partindo da condição $|x| \gg 1$, chegamos em

$$t_{r_m} \simeq \frac{2\pi m \sqrt{\langle n \rangle}}{f} \left(1 + \frac{\Delta^2}{4f^2 \langle n \rangle} \right). \quad (3.114)$$

Assim, podemos ver que o reaparecimento das oscilações de rabi acontecem em intervalos regulares.

3.5 Dissipação átomo e campo

3.5.1 Átomo de dois níveis

Uma boa aplicação para a equação mestra de Lindblad é em um sistema de um átomo de dois níveis. Nesse sistema vamos chamar de $|g\rangle$ o vetor de estado de um átomo

que está no estado fundamental e de $|e\rangle$ o vetor de estado de um átomo que está no estado excitado. Sempre que esse átomo emitir um fóton, ele sofrerá uma transição do estado $|e\rangle$ para o estado $|g\rangle$. Vamos considerar o caso em que o ambiente E é constituído dos modos do campo eletromagnético no vácuo.

Supondo exista um sistema de foto-deteção perfeito em volta desse átomo de forma que sempre um fóton for emitido, com 100% de precisão, ele será detectado. Durante o intervalo já definido τ , apenas duas situações são possíveis, ou nenhum fóton é detectado ou um fóton é detectado. O ambiente então, tem também apenas dois estados possíveis, $|0^E\rangle$ quando nenhum fóton é detectado ou $|1^E\rangle$ quando um fóton é detectado. Com isso, por conservação de energia, se o ambiente se encontra no estado $|1^E\rangle$, podemos afirmar que o átomo estará no estado $|g\rangle$. Esse sistema é equivalente a um sistema de spin, e portanto, pode ser descrito pelas matrizes de Pauli

Por conveniência, podemos escrever o Hamiltoniano do átomo nas bases $|e\rangle$ e $|g\rangle$. E se escolhermos uma energia de estado estacionário adequada podemos descrevê-lo como

$$H_S = \frac{1}{2}\hbar\omega_0\sigma_z, \quad (3.115)$$

em que ω_0 é a frequência de transição entre os níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ do átomo. Já os modos do campo serão descritos por

$$H_{EM} = \sum_n \hbar\omega_n a_n^\dagger a_n \quad (3.116)$$

e o Hamiltoniano de interação entre o átomo e o campo terá a forma 3.68.

A partir desse modelo, é possível deduzir uma equação mestra para o átomo da forma 2.52. Com essas informações e descartando as contribuições dos deslocamentos Stark e Lamb, para um átomo de dois níveis, podemos reescrever a equação mestra de Lindblad da seguinte forma

$$\frac{d}{dt}\rho_S(t) = -i\frac{\omega_0}{2}[\sigma_z, \rho_S] - \frac{\gamma}{2}(\sigma_+\sigma_-\rho_S + \rho_S\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho_S\sigma_+). \quad (3.117)$$

Sendo que

$$\gamma = \frac{|\vec{d}|^2\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c^3}, \quad (3.118)$$

em que \vec{d} é o momento de dipolo do átomo.

3.5.2 Relaxação da cavidade

Uma cavidade ideal seria aquela em que o tempo de amortecimento do modo de campo de interesse fosse infinito. Mas isso não ocorre em sistemas reais, os campos na

cavidade sofrem relaxação. A notícia boa é que podemos descrever esse fenômeno também usando a equação de Lindblad.

O sistema S é então um modo de campo na cavidade. O ambiente seria os outros modos de campo fora da cavidade.

Assumindo que a interação entre o modo da cavidade e os demais é dada pelo Hamiltoniano

$$H = \hbar\omega_c + \sum_n \hbar\omega_n b_n^\dagger b_n + \sum_n g_n (a_n^\dagger b_n + a_n^\dagger b_n), \quad (3.119)$$

é possível derivar a seguinte equação mestra para ρ_S [7]:

$$\frac{d\rho_S}{dt} = -i\omega_c [a^\dagger a, \rho_S] - \frac{\kappa(1+n_m)}{2} (a^\dagger a \rho_S + \rho_S a^\dagger a - 2a \rho_S a^\dagger) - \frac{\kappa n_m}{2} (a a^\dagger \rho_S + \rho_S a a^\dagger - 2a^\dagger \rho_S a), \quad (3.120)$$

em que n_m é dado por

$$\frac{1}{e^{-\hbar\omega_c/K_B T} - 1}, \quad (3.121)$$

assumimos que os modos de campo fora da cavidade está a uma temperatura T , e n é uma função do acoplamento g_n .

Uma outra forma interessante de escrever essa equação é usando a representação de interação. Essa forma nos dá informações importantes como a dinâmica da distribuição do número de fótons e a taxa de variação do número médio de fótons.

Nessa representação, podemos então remover o comutador e os termos a e a^\dagger podem ser substituídos por $a e^{-i\omega_c t}$ e $a e^{i\omega_c t}$, respectivamente. Com isso, podemos reescrever a equação 3.120 como uma taxa da distribuição do número de fótons, em que essa distribuição pode ser descrita como

$$p(n) = (\rho_S)_{nn} = \langle n | \rho_S | n \rangle. \quad (3.122)$$

Escrevendo a equação 3.120 na forma matricial e aplicando os operadores criação e aniquilação, a e a^\dagger , nos estados de Fock, podemos ver facilmente que a dinâmica de cada elemento $p(n)$ pode ser descrita por

$$\frac{dp(n)}{dt} = \kappa(1+n_m)(n+1)p(n+1) + \kappa n_m n p(n-1) - [\kappa(1+n_m)n + \kappa n_m(n+1)]p(n). \quad (3.123)$$

Através dessa equação podemos entender como varia a probabilidade do sistema S estar no estado $|n\rangle$. Os dois primeiros termos descrevem o aumento da probabilidade

do estado $|n\rangle$ se tornar ocupado. Com isso, podemos dizer que o estado vai do estado $|n+1\rangle$ para o estado $|n\rangle$ a uma taxa de $\kappa(1+n_m)(n+1)$ e que o estado vai do estado $|n\rangle$ para o estado $|n-1\rangle$ a uma taxa de $\kappa n_m n$. Podemos fazer uma analogia similar para a probabilidade do sistema sair do estado $|n\rangle$. Olhando para os dois últimos termos podemos entender esse fenômeno. O sistema sai do estado $|n\rangle$ para o estado $|n+1\rangle$ a uma taxa de $\kappa(n+1)n_m$ e para o estado $|n-1\rangle$ a uma taxa $\kappa n(n_m+1)$.

Agora, considerando que o sistema entrou num estado estacionário, iremos aplicar o conceito de “balanço detalhado”, em que as taxas de transferência do estado $|n\rangle$ para o estado $|n-1\rangle$ e do estado $|n-1\rangle$ para o estado $|n\rangle$ são iguais para o mesmo sistema. Assim sendo, a partir das equações 3.123 e 3.121, chegamos na relação

$$\frac{p(n)}{p(n-1)} = \frac{n_m}{1+n_m} = e^{-\hbar\omega_c/K_B T}. \quad (3.124)$$

Por meio dessa equação podemos ver que o número de fótons médio obedece a lei de Planck.

3.5.3 Átomo relaxando em um campo térmico

Na subseção 3.5.1 fizemos uma análise de um átomo de dois níveis sofrendo emissões espontâneas a temperatura $T = 0K$. Mas os sistemas que estamos estudando são um pouco mais complexos e por isso, precisamos adequar a equação mestra 3.117 para descrever um átomo de dois níveis e um campo em equilíbrio térmico a uma temperatura $T > 0$. Para isso trocamos os operadores a e a^\dagger por σ_- e σ_+ e trocamos κ por γ . Como esse sistema está em um ambiente, podemos também trocar o operador de Lindblad de $\sqrt{\gamma}\sigma_-$ por $\sqrt{\gamma(1+n_m)}\sigma_-$ e inserimos um novo operador de Lindblad $\sqrt{\gamma n_m}\sigma_+$ para descrever a excitação térmica do átomo. Com isso, a equação mestra para esse sistema se torna

$$\begin{aligned} \frac{d\rho_S}{dt} &= -i\frac{\omega_0}{2} [\sigma_z, \rho_S] - \frac{\gamma(1+n_m)}{2} (\sigma_+\sigma_-\rho_S + \rho_S\sigma_+\sigma_- - 2\sigma_-\rho_S\sigma_+) \\ &\quad - \frac{\gamma n_m}{2} (\sigma_-\sigma_+\rho_S + \rho_S\sigma_-\sigma_+ - 2\sigma_+\rho_S\sigma_-). \end{aligned} \quad (3.125)$$

No lado direito da primeira linha dessa equação podemos ver a descrição do processo em que o átomo perde fótons para o campo. Ainda nessa linha temos o fator $(1+n_m)$ em que “1” descreve a emissão espontânea e “ n_m ” é devido a emissão estimulada em que o átomo emite em modos contendo n_m fótons térmicos. Na segunda linha, podemos notar a descrição do processo simétrico em que o átomo absorve fótons térmicos do campo.

4 Quantização da Luz

Nesse capítulo iremos apresentar um experimento feito por *Serge Haroche et. al* 3.4, em que foi observada uma evidência forte da quantização do campo em uma cavidade. Isso se deu através da observação da transformada de Fourier da probabilidade de encontrar o átomo no estado fundamental após este interagir com uma cavidade. Foi visto que os picos das transformadas são proporcionais a raiz quadrada de números inteiros, como é de se esperar a partir de uma descrição quantizada do campo.

No capítulo 3, pudemos estudar a quantização do campo eletromagnético e através do Hamiltoniano de Jaynes-Cummings e entender os efeitos dessa quantização em um sistema de dois níveis. E através desse experimento, será possível observar fenômenos quânticos que, apesar de serem esperados, são um dos primeiros impossíveis de serem descritos sem a quantização da luz.

4.1 Oscilação quântica de Rabi: um teste direto da quantização da cavidade

O Hamiltoniano de Jaynes-Cummings estudado na seção 3.4, ao descrever o acoplamento ideal entre um sistema de dois níveis e um modo de campo nos ajuda a enxergar a natureza discreta de um modo de campo acoplado a um átomo de Rydberg. Quando o átomo é acoplado ao campo são observadas oscilações de Rabi, que consistem na troca entre as populações dos níveis atômicos e e g . Como essas oscilações podem ser decompostas em frequências discretas, é possível observar nelas características quânticas.

Assuma que a distribuição inicial do número de fótons é a de um estado coerente, como na equação 3.108. Com isso podemos descrever a oscilação de população para um sistema de dois níveis pela função de inversão dada pela equação 3.107. Através dela podemos ver como a população entre os níveis e e g variam. Quando a cavidade demora um tempo relativamente alto para relaxar, ao observar a função inversão, as oscilações de Rabi deveriam teoricamente se comportar como uma superposição de termos senoidais, em que cada termo do somatório equivale a um valor de n .

Se considerarmos que o átomo está inicialmente no estado excitado e , depois de um tempo t , a probabilidade de ele ter decaído para o estado fundamental g é de

$$P_{eg} = \sum_n P(n) \Omega \sin^2 \sqrt{n+1}, \quad (4.1)$$

em que Ω é frequência da oscilação de Rabi e $\sqrt{n+1}$ representa a amplitude do campo

para cada n .

Nesse trabalho, a oscilação de Rabi de átomos de Rydberg foram observadas no vácuo e em campos fracos e coerentes. O decaimento do átomo era pequeno o suficiente para ter seus efeitos desprezados, o tempo de interação entre o átomo e a cavidade e o tempo de vida do campo na cavidade eram longos o suficiente para que conseguissem observar algumas frequências consecutivamente. O resultado interessante, como já dito, é que essas frequências eram proporcionais a raiz quadrada de inteiros sucessivos, caracterizando a quantização da energia do campo.

4.1.1 Montagem do experimento e visão geral

A montagem desse experimento é ilustrada pela figura 2. O sistema montado foi resfriado a uma temperatura de $0.8K$. A essa temperatura, foi possível alcançar resultados experimentais mais próximo dos resultados previstos pela teoria por diminuir a taxa de dispersão na cavidade e o número de fótons térmicos. Átomos de rubídio são emitidos pela fonte O e atingem a caixa B , onde são preparados no estado $|e\rangle$. Os átomos são emitidos de B a uma taxa de $660Hz$ em pulsos com duração de $2\mu s$ e são disparados com um espalhamento de velocidade Maxwelliana centrado em $v_0 = 350m/s$. Com isso os átomos são emitidos em um pacote com velocidades próximas.

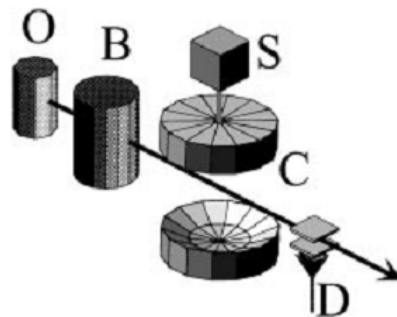


Figura 2 – Esquema da montagem do experimento; fonte: [1]

Ao saírem de B , os átomos entram na cavidade C , que é feita de dois espelhos supercondutores de nióbio. Os espelhos são levemente elípticos, de forma a levantar a degenerescência de forma que há um modo na cavidade que é sintonizado em ressonância com a frequência de transição entre os níveis e e g do átomo de Rydberg. Para refinar essa sintonia de forma a estabilizar a órbita dos estados de Rydberg no plano horizontal ou para dessintonizar completamente (desligando o acoplamento entre o átomo e o modo), é aplicado um campo através dos espelhos que induzirá o efeito Stark. A fonte S é usada para injetar continuamente um pequeno campo coerente na cavidade que pode inserir nela de zero até alguns fótons. Em D , são detectados átomos que se encontram no estado $|g\rangle$.

Essa cavidade tem um alto fator de qualidade $Q = 7 \times 10^7$ o que leva um fóton a ter um tempo de vida longo, $T_{cav} = 220\mu s$. Os átomos de Rydberg tem um longo tempo de vida radiativa, $32ms$ para o estado e e $30ms$ para o estado g , comparado ao tempo que o átomo leva para atravessar todo aparato. Para que os átomos não se acumulem no detector D , o intervalo entre a passagem dos átomos é ajustada para $2.5\mu s$, que ainda é valor bem maior que o tempo de vida T_{cav} . Além disso o pulso que pode dessintonizar o acoplamento átomo-cavidade é mantido ligado até instantes antes do átomo entrar na cavidade, evitando que átomos mais rápidos interajam com ela.

A interação entre o átomo e o campo é dada por

$$H_{JC} = \hbar\omega\sigma_z + \hbar\omega_0 a^\dagger a + f(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-). \quad (4.2)$$

A descrição da interação entre o átomo e o campo não se comporta exatamente segundo o modelo de Jaynes-Cummings pelo fato de o modo de campo ter um perfil espacial. Assim, a constante de acoplamento f depende da posição do átomo e, portanto, de t . É possível, no entanto, descrever o sistema usando o Hamiltoniano H_{JC} passando a um tempo efetivo (ver apêndice B)

A velocidade v com que cada átomo atravessa a cavidade é muito importante para que seja possível saber sua localização a cada instante de tempo. Com isso, é possível controlar o tempo que o átomo vai interagir com a cavidade. Ele puderam encontrar essa velocidade com uma precisão de 1% através do tempo que ele leva para sair de B e alcançar D . Pela distribuição de velocidades Maxwelliana eles encontraram as velocidades num intervalo de $110ms \leq v \leq 250ms$ o que equivale a um tempo de interação de $40\mu s \leq t \leq 90\mu s$.

Para átomos que interagem com a cavidade por tempos longos, eles selecionaram os átomos mais lentos. Para isso eles ligavam o pulso que dessintonizava o campo da cavidade até os átomos mais rápidos passarem e desligava enquanto os átomos lentos passavam. Usando esse mesmo processo, também registraram os átomos mais rápidos.

4.1.2 Resultados

Para tempos de interação diferentes, foi possível encontrar as taxas de transição de e para g , P_g , que está registrado nas figuras 3 que estão na coluna da direita. A linha sólida nas figuras da primeira coluna são referentes a uma plotagem teórica de somas de senoides amortecidas com frequências $\omega\sqrt{n+1}$, com n indo de 0 a 5. Podemos ver que os pontos experimentais estão de acordo com a curva teórica que foi traçada através de um programa de ajuste de curvas usando a equação 4.1. A figura 3(A) mostra a oscilação do átomo com a cavidade inicialmente no estado de vácuo, ou seja, sem nenhum campo aplicado. Podemos ver claramente quatro oscilações nessa figura em que um fóton é emitido espontaneamente

e reabsorvido. Segundo os autores, esse comportamento, apesar de previsto pelo modelo Jaynes-Cummings, até então nunca tinha sido observado. Já nas figuras 3(B), 3(C) e 3(D), mostram o caso em que um campo coerente foi injetado e, como previsto, esses sinais não são senoidais. Nas figuras 3(C) e 3(D), podemos ver com nitidez o colapso e ressurgimento das oscilações de Rabi, como predito pela teoria que estudamos na seção 3.4.1.

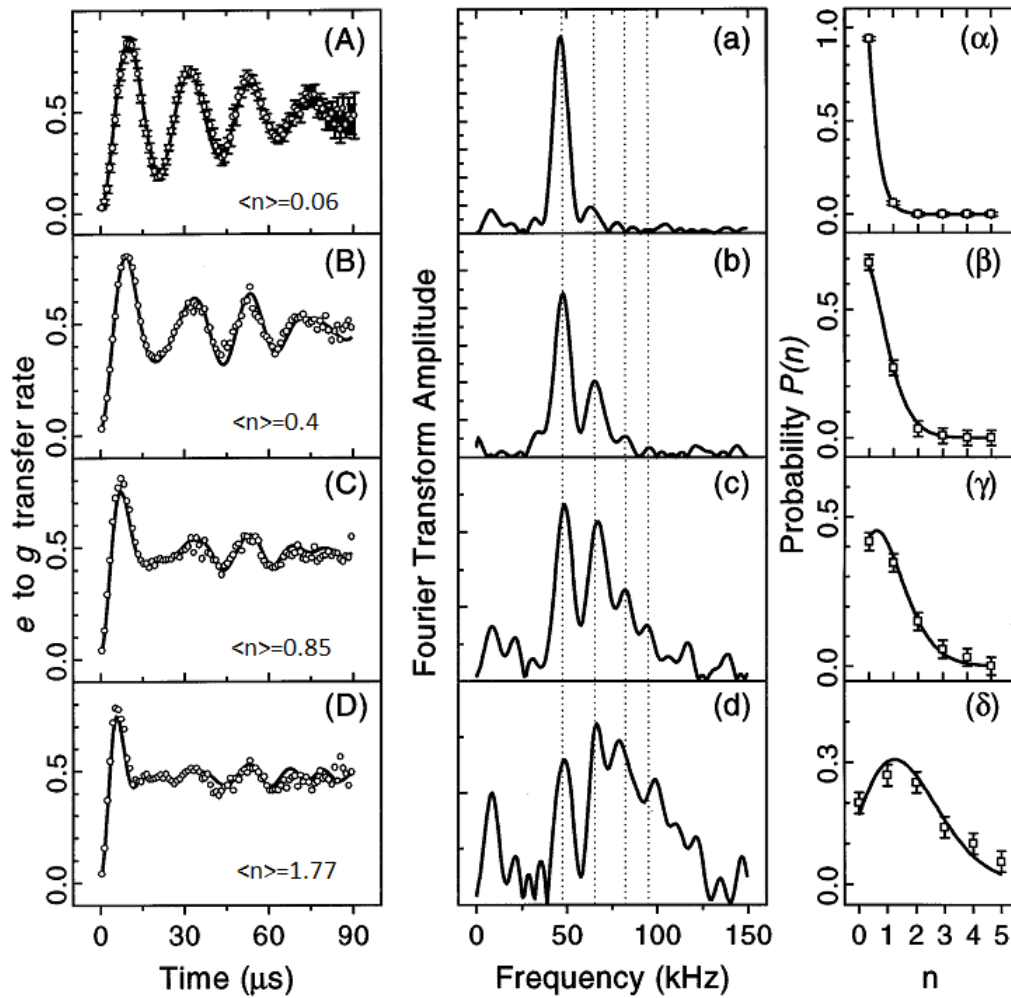


Figura 3 – Resultados obtidos: (A)-(D), probabilidade de encontrar o átomo no estado g . Os pontos são resultados experimentais e a linha sólida são curvas teóricas. (a)-(d) são as transformadas de Fourier dos resultados obtidos de (A)-(D). A linha pontilhada na vertical aponta para as frequências $\nu = 47\text{KHz}$, $\nu\sqrt{2}$, $\nu\sqrt{3}$ e 2ν . (α) – (δ) correspondem a distribuição do número de fótons, em que os pontos representam os resultados experimentais e as linhas são curvas teóricas; fonte: [1]

Podemos ver nessas quatro figuras que a amplitude diminui com o passar do tempo. Isso acontece por causa da relaxação da cavidade que é acelerada por causa de pontos cegos em seu orifício de onde saem as ondas eletromagnéticas e também por decoerências devido a colisões com eventuais moléculas de gás.

Já nas figuras que estão na coluna do meio podemos ver a transformada de Fourier das probabilidades P_g que estão nas figuras da esquerda. Por meio dessas novas curvas, é possível notar que o pico das frequências acontecem a quantidades múltiplas da raiz quadrado de um número inteiro. Como vimos na teoria, as frequências devem assumir valores $\omega\sqrt{n+1}$ e através das figuras podemos ver com facilidade picos das frequências discretas $\omega\sqrt{0+1}$, $\omega\sqrt{1+1}$, $\omega\sqrt{2+1}$ e $\omega\sqrt{2+2}$, com $\omega = 47\text{KHz}$, valor bem próximo do teórico, que para esse modelo seria de $\Omega_0/\pi = 50\text{KHz}$. Esses dados nos mostram a natureza discreta do campo numa análise puramente quântica, que era o que esperávamos.

Os autores notam também que a condição de normalização da probabilidade de encontrar n fótons no sistema $P(n)$ é respeitada, pois a área das curvas das transformadas de Fourier permanecem constantes, o que significa que não apareceu nem sumiu nenhum fóton no experimento. A probabilidade de encontrar determinado número de fótons foi determinada a partir dos valores relativos de $P(n)$. Nas figuras da coluna da direita estão os pontos experimentais. A partir deles foi traçada a linha sólida por meio de um programa de ajustes de curvas que estavam de acordo com as previsões teóricas. As figuras 3(α) a 3(δ) nos mostram esses resultados. No caso da figura 3(α), em que nenhum campo foi aplicado, a linha sólida representa a lei de radiação térmica que está bastante de acordo com os valores experimentais encontrados, os pontos. De acordo com essa lei, o número médio de fótons para esse sistema deveria ser de $\bar{n} = 0.006(\pm 0.01)$, valor que está dentro do esperado para uma cavidade a $T = 0.8\text{K}$, em que o número médio de fótons previsto é de 0.05. Nas figuras 3(β), 3(γ) e 3(δ), em que um campo coerente foi inserido, podemos ver que os resultados obtidos estão de acordo com a lei de Poisson, que é representada pela linha sólida.

Como vimos na seção 3.4.2 o Hamiltoniano de Jaynes-Cummings exibe frequências de oscilação de rabi discretas. As equações 3.97 e 3.98 deixam isso bastante claro. Nelas podemos ver que, após o átomo interagir com a cavidade, a probabilidade de ele permanecer no estado excitado ou de decair depende de múltiplos da raiz de números inteiros. E foi exatamente isso o observado no experimento.

5 Emaranhamento

Nesse capítulo iremos apresentar as principais ideias por trás dos conceitos de emaranhamento. Começaremos pela decomposição de Shimidt e uma introdução sobre estados bipartites mistos, e para entendermos melhor o emaranhamento, discutiremos um pouco sobre o paradoxo EPR. Em seguida iremos falar sobre a relação entre um par EPR e sistemas de spin. Como principal fonte de referência para esse capítulos usamos [5, 10], dentre outros que serão citados ao longo das sessões. Além disso, também iremos descrever um experimento feito pelo grupo de pesquisas do Laboratório Kastler Brossel de l'Ecole Normale Supérieure & Collège de France, Paris, liderado por Serge Haroche [12], que exemplifica os conceitos vistos aqui.

O conceito de emaranhamento foi inicialmente introduzido pelo físico austríaco Erwin Schrödinger, em 1935. Nesse ano, Albert Einstein, Podolsky e Rosen, que abreviamos por EPR, escreveram um artigo em que contestaram a interpretação de Copenhague da mecânica quântica. Nessa interpretação, um determinado sistema quântico, antes da medição, está numa superposição de todos os estados possíveis do sistema; apenas no instante em que o sistema está sendo medido, um determinado estado será definido. EPR acreditava que a mecânica quântica poderia estar incompleta e dizia que ela não era capaz de descrever a realidade. Em uma artigo publicado em Outubro de 1935, Schrödinger propôs um experimento mental [13], conhecido como gato de Schrödinger em que ele mostrou como a interpretação de Copenhague soaria estranha quando aplicada a um sistema macroscópico. Em seu exemplo, ele descreveu dois sistemas que após interagirem temporariamente, estariam correlacionados mesmo depois de separados. Foi a primeira vez que surgiu o termo *emaranhado*.

Schrödinger, 1935 [13]

"When two systems, of which we know the states by their respective representatives, enter into temporary physical interaction due to known forces between them, and when after a time of mutual influence the systems separate again, then they can no longer be described in the same way as before, viz. by endowing each of them with a representative of its own. I would not call that one but rather the characteristic trait of quantum mechanics, the one that enforces its entire departure from classical lines of thought. By the interaction the two representatives have become entangled."

5.1 Estados emaranhados

Antes de definir formalmente o que é um estado emaranhado, é importante entender o que são estados produto. Fisicamente, estados produto são estados onde cada sistema é preparado independentemente. Formalmente falando, um projetor $|\psi_{AB}\rangle\langle\psi_{AB}|$ em um vetor $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, é um estado produto se os estados dos subsistemas locais são puros, o que implica que $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$.

Definição: Estados puros emaranhados são aqueles que não podem ser escritos como estados produto.

Por exemplo, o estado

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(|01\rangle - |10\rangle), \quad (5.1)$$

com $|0\rangle$ e $|1\rangle$ ortonormais, é emaranhado. Se fôssemos tentar separá-lo, faríamos

$$[\alpha|0\rangle + \beta|1\rangle] \otimes [\gamma|0\rangle + \delta|1\rangle] = \alpha\gamma|00\rangle + \alpha\delta|01\rangle + \beta\gamma|10\rangle + \beta\delta|11\rangle. \quad (5.2)$$

Então é fácil ver, que não existem α , β , γ e δ que permitem o lado direito de 5.2 ser igual a 5.1.

5.1.1 Decomposição de Schmidt

Uma ferramenta matemática muito útil no estudo de estados emaranhados é a decomposição de Schmidt. Ela é válida apenas para estados puros compostos por dois subsistemas de qualquer dimensão, conhecidos como estados bipartite.

Definição 1 (Decomposição de Schmidt). *Todo vetor, $|\psi_{AB}\rangle \in \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$, correspondente a um estado puro pode ser representado como:*

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^M a_i |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle, \quad (5.3)$$

se escolhidas bases apropriadas. O conjunto $\{|e_i\rangle\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}_A e $\{|f_i\rangle\}$ é uma base ortonormal de \mathcal{H}_B , $\sum_{i=1}^M a_i^2 = 1$ com $a_i > 0$ e $M \leq \dim\mathcal{H}_A, \dim\mathcal{H}_B$.

Os coeficientes a_i são chamados de coeficientes de Schmidt do vetor de estado $|\psi_{AB}\rangle$. Mas o que acontece quando $M = 1$? Neste caso existirá apenas um coeficiente de Schmidt de forma que teremos um estado produto puro. Assim sendo, podemos dizer que quando o estado decomposto tem mais de um coeficiente de Schmidt ele está emaranhado. Uma observação interessante é que o quadrado dos coeficientes de Schmidt de um estado

bipartite puro $|\psi_{AB}\rangle$ são autovalores de ambas matrizes densidade reduzidas, ρ_A e ρ_B .

Seja

$$|\psi_{AB}\rangle = \sum_{i=1}^M a_i |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle.$$

então

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}|,$$

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M (a_i |e_i\rangle \otimes |f_i\rangle)(a_j^* \langle e_j| \otimes \langle f_j|),$$

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M a_i a_j^* |e_i\rangle \langle e_j| \otimes |f_i\rangle \langle f_j|.$$

Tirando o traço parcial encontramos

$$\rho_A = \sum_{k=1}^M |a_k|^2 |e_k\rangle \langle e_k|,$$

$$\rho_B = \sum_{k=1}^M |a_k|^2 |f_k\rangle \langle f_k|.$$

Assim, para saber se um estado é emaranhado ou separável podemos verificar se as matrizes densidade reduzidas são puras. Quando tais matrizes são puras, é fácil notar que haverá apenas um coeficiente de Schimidt, representando um estado separável. Caso contrário, o estado será emaranhado.

5.1.2 Estados Bipartite Mistos

Na seção anterior, vimos que a decomposição de Schimidt é uma forma de saber se um estado é separável ou emaranhado. Mas tínhamos uma restrição, para usar tal decomposição o estado precisa ser puro. Então, como fazer no caso de estados mistos? Para entendermos melhor, vamos considerar o seguinte exemplo exemplo: Imagine que o sistema A é preparado no estado $|u_i\rangle$ e que o sistema B seja preparado no estado $|v_i\rangle$. Ao combinarmos os dois sistemas, a matriz densidade resultante será:

$$\rho_{AB}^{(i)} = |u_i\rangle \langle u_i| \otimes |v_i\rangle \langle v_i|. \quad (5.4)$$

Agora, imagine que em cada sistema seja preparada uma série de estados $|u_i\rangle$ e $|v_i\rangle$ com $i = 1, 2, \dots, k$ e que cada $|u_i\rangle$ e $|v_i\rangle$ seja preparado com uma probabilidade p_i , com $\sum_{i=1}^k p_i = 1$. O estado preparado pode ser representado agora por:

$$\rho_{AB} = \sum_{i=1}^k p_i |u_i\rangle \langle u_i| \otimes |v_i\rangle \langle v_i|. \quad (5.5)$$

Para que esse tipo de estado possa ser preparado, os sistemas A e B devem poder se comunicar por meio de um canal clássico. Esse processo é conhecido como operações quânticas e comunicação clássica, (LOCC), do inglês, *local quantum operation and classical communication*. [10]

Definição 2 (Estados mistos emaranhados e separáveis). *Um estado bipartite ρ_{AB} é dito separável se, e somente se, pode ser representado como uma combinação convexa do produto de projetores. Em outras palavras, o estado será separável apenas quando for possível escrevê-lo como uma soma de todos estados $\rho_{AB}^{(i)}$, equação (5.4), multiplicado pelas suas correspondentes probabilidades como mostra a equação (5.5). Caso contrário, o estado é emaranhado.*

Estados emaranhados são por definição estados que não podem ser descritos na forma do exemplo dado. Fisicamente, para que um estado bipartite seja emaranhado, os dois sistemas não podem ser preparados separadamente (localmente) sem interagir. Uma das formas de gerar um estado emaranhado é por meio de um operador unitário atuando conjuntamente no sistema.

5.2 Paradoxo EPR

Uma das coisas mais difíceis na mecânica quântica é pensar nela de forma realista. Quando consideramos um objeto do nosso dia a dia, como uma mesa, não temos dúvida de que as propriedades físicas desse objeto existem independente de olharmos para ele ou não. Mas existem interpretações da mecânica quântica que tem um ponto de vista diferente. Por exemplo, de acordo com a interpretação de Copenhague, antes de observarmos uma partícula, esta não possui nenhuma propriedade física, apenas depois de observada é que tais propriedades serão estabelecidas como consequência direta da observação.

5.2.1 O argumento EPR

Esse fato deixou muitos físicos incomodados. O caso mais famoso registrado é o artigo de autoria de Einstein, Podolsky e Rosen publicado em 1935 [14], conhecido como EPR. Nesse artigo os autores deram um exemplo de experimento em que, segundo

eles, demonstrava que a mecânica quântica não é uma teoria completa para descrever a natureza.

Os autores acreditavam que em qualquer teoria física completa, era possível representar um *elemento de realidade*. Para eles o fato de a mecânica quântica não ser capaz de descrever um elemento de realidade a tornava uma teoria incompleta. Para demonstrar isso, eles definiram uma *condição suficiente* para que uma propriedade física pudesse ser considerada um elemento de realidade. Tal condição é que, em um determinado experimento, seja possível prever com certeza o valor de tal propriedade antes de medi-la. Aí começa o conflito com a mecânica quântica, pois acabamos de ver, antes de medirmos uma partícula, não é claro que se pode atribuir a ela alguma propriedade física, como momento, posição etc..

O exemplo citado por EPR era um sistema em que existiam duas partículas em que a posição relativa entre elas, $x_1 - x_2$ e o momento total, $p_1 + p_2$ eram bem definidos. Depois disso as partículas eram separadas. Medindo posição da partícula 1 era possível saber com certeza qual era a posição da partícula 2, e como as partículas não interagiam entre si, nenhuma medida na partícula 1 poderia perturbar a partícula 2. É possível notar que em tal exemplo a posição da partícula 2 se encaixa na condição suficiente de EPR para ser considerada um elemento de realidade. Se fizermos um argumento análogo para o momento, também veremos que o momento da partícula 2 é um elemento de realidade. Assim, eles puderam concluir que nesse exemplo tanto a posição quanto o momento da partícula 2, são elementos de realidade. Na mecânica quântica, os operadores correspondentes a tais elementos não comutam, o que implica que não é possível obter um valor bem definido para ambos, momento e posição da partícula. Essa divergência levou EPR a concluir que o vetor de estado descrito pela mecânica quântica não descreve a realidade de forma completa e que precisaria de variáveis adicionais (variáveis ocultas).

Esse argumento introduzido por EPR pôde levar a comunidade física a pensar sobre a *localidade* quando Einstein chama atenção para o fato de que os dois sistemas citados estão separados *espacialmente*. De forma indireta ele estava se referindo ao princípio da relatividade especial, segundo o qual é impossível uma “informação” viajar com uma velocidade maior que a da luz. Assim sendo, eles concluíram que para que a mecânica quântica se tornasse completa seria necessário considerar variáveis adicionais, de forma a não violar o princípio (segundo Einstein) de localidade. Com isso eles explicaram o caráter probabilístico da mecânica como uma consequência do não conhecimento de tais variáveis, chamadas de *variáveis ocultas*.

Por muito tempo muitos físicos não acreditavam que seria possível implementar um experimento para verificar essa questão colocada por EPR. Apenas depois de muitas décadas do artigo de EPR ser publicado foi possível fazer um teste experimental.

5.2.2 EPR-modelo de spins

Em se tratando de teste experimental, preparar um sistema em um auto-estado da posição relativa e do momento total, como proposto por EPR, não seria nem um pouco prático. Por isso, em 1951, um experimento mais simples e mais realista foi proposto por David Bohm [15]. Bohm considerou um estado de dois átomos em que cada um tem spin $s = 1/2$ e spin total zero. Esse sistema estria em um estado singleto que pode ser representado por:

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{2}}(|\uparrow\rangle \otimes |\downarrow\rangle - |\downarrow\rangle \otimes |\uparrow\rangle) \quad (5.6)$$

em que os vetores das partículas individuais são representados por $|\uparrow\rangle$, spin para cima e $|\downarrow\rangle$, spin para baixo, com respeito a uma das coordenadas do sistema. A vantagem desse sistema é que nele as partículas não precisam estar em um estado orbital estacionário, pois isso não irá influenciar no estado de spin.

Nessa nova proposta de experimento após as partículas serem separadas garantindo que elas não irão interagir, mede-se a componente z de spin da partícula 1. O resultado dessa medição nos permite inferir o estado da partícula 2, já que o sistema se encontra no estado de singleto. Assim, de acordo com o argumento de realidade de EPR, podemos afirmar que o momento de spin associado a $\sigma_z^{(2)}$ da partícula 2 é um elemento de realidade. Mas sabemos que o estado de singleto é invariante sob rotação, o que significa que a equação 5.6 terá a mesma forma em qualquer direção, $\sigma_x^{(2)}$, no eixo x , $\sigma_y^{(2)}$, no eixo y ou qualquer outra direção arbitrária $\sigma_a^{(2)} = \sigma^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{a}}$, no eixo a . Assim sendo, independentemente da direção que a medição seja feita, $\sigma_a^{(2)}$ sempre será um elemento de realidade e como a mecânica quântica não é capaz de descrever tal realidade, pelo argumento EPR, ela se torna incompleta.

5.3 Experimento: Geração de pares EPR de átomos

Nessa seção iremos descrever um dos experimentos do Haroche e de sua equipe [2] em que eles puderam emaranhar um par de átomos por meio de uma cavidade de micro-ondas com um alto fator de qualidade Q . Sem interagirem diretamente, dois átomos de Rubídio no estado de Rydberg saíram emaranhados, com o grande diferencial de que esses átomos possuem uma massa grande quando comparados a partículas elementares. Até então, a maioria dos experimentos desse tipo emaranhavam partículas como prótons e fótons oriundos de processos de radiação. Assim sendo, podemos afirmar que esse experimento pôde abrir caminhos para estudo de sistemas mais complexos, como testes com mais átomos e testes de não localidade em sistemas mesoscópicos.

5.3.1 Montagem do experimento e visão geral

Em cada sequência experimental, um par de átomos de Rydberg atravessam o aparato esquematizado na figura 4. São usados átomos de Rubídio emitidos pela fonte O que logo em seguida, passam por um seletor de velocidades V . Logo adiante, os átomos são preparados no estado de Rydberg $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ na caixa B e entram na cavidade de micro-ondas C de alto fator de qualidade Q , onde acontecerão as interações átomo 1- cavidade e cavidade - átomo 2. A cavidade C é uma cavidade de micro-ondas supercondutora composta por dois espelhos de Nióbio, usando o modelo de Fabry Perot. Como a cavidade é resfriada a 0.6K o número médio de fótons térmicos é desprezível. A cavidade está levemente fora de ressonância com a frequência de transição entre os níveis e e g do átomo de Rydberg que é de $51.1GHz$. O intervalo entre as sequências experimentais é escolhido de forma a ser muito maior do que o tempo de vida do fóton na cavidade, que é de $T_{Cav} = 112\mu s$, e com isso é possível garantir que na próxima sequência não haverá nenhum fóton remanescente da sequência anterior. Ao deixar C , o átomo entra em uma cavidade R com baixo fator de qualidade, chamada de zona de Ramsey, que junto com os detectores D_e e D_g irá detectar o estado de spin de cada átomo.

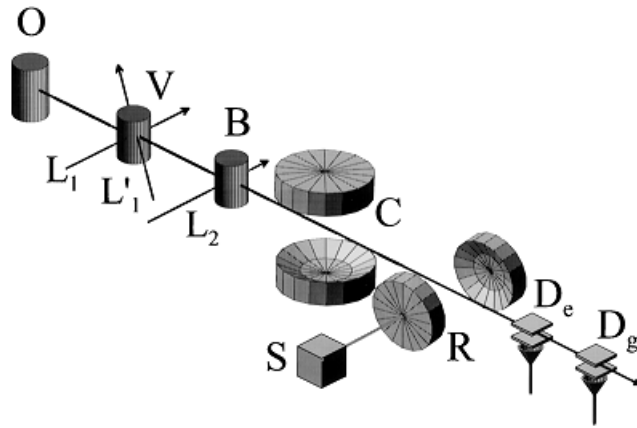


Figura 4 – Esquema da montagem do experimento; fonte: [2]

Ao sair da fonte O , os átomos de Rubídio passam pelo seletor de velocidade V . Esse seletor de velocidades é composto de dois lasers de diodo, L_1 e L'_1 , no qual o feixe do laser L_1 é posicionado ortogonalmente ao feixe atômico. Com a energia adequada, esse bombeamento irá garantir que nenhum átomo esteja no estado fundamental hiperfino $F = 3$. Um segundo laser L'_1 pulsado, com seu feixe direcionado a 55° do feixe atômico, irá repopular esse nível de forma que apenas os átomos com uma velocidade de aproximadamente $30m/s$ serão selecionados por efeito Doppler.

Ao serem selecionados, os átomos com a velocidade desejada serão preparados no estado circular de Rydberg na caixa B , onde o laser de diodo L_2 , também pulsado,

excita os átomos do estado fundamental $F = 3$ para um dos estados de Rydberg e ou g . Conhecendo o tempo de pulso e a velocidade do átomo, é possível determinar sua posição ao longo da trajetória com uma precisão de $\pm 1\text{mm}$. Assim sendo, é possível saber onde os átomos selecionados se encontram a cada etapa do experimento.

Para cada sequência experimental, a caixa B prepara o primeiro átomo no estado e de Rydberg e o segundo no estado g . O tempo de duração de cada experimento é T_o , que pode ir de 0 a $100\mu\text{s}$ e as velocidades de cada átomo, v_1 e v_2 são fixas e independentes.

Garantindo que não existe nenhum átomo de Rydberg fora das especificações acima, o primeiro átomo entra na cavidade C no estado $|e\rangle$, interagindo com ela por um tempo t_1 . Em seguida, o segundo átomo entra num estado $|g\rangle$, interagindo com a cavidade por um tempo t_2 .

Ao sair da cavidade C cada átomo entra na cavidade R com baixo fator de qualidade na qual será emitido um pulso $\pi/2$ de Rabi usando um campo de microondas clássico, gerado por uma fonte S . Ao sair da zona de Ramsey, o átomo terá seu estado detectado em D_e ou D_g .

5.3.2 Sequência experimental e a física do experimento

Esse experimento é dividido em duas partes, na primeira os pares de átomos atravessam a cavidade R desligada e na segunda parte ela é ligada. A primeira parte equivale a medição de spin dos pares EPR ao longo da direção z , enquanto a segunda equivale a medição de spin na direção do plano xy ortogonal ao eixo z .

Primeira parte

Quando os átomos entram na cavidade, o primeiro no estado e e o segundo no estado g , e considerando que a cavidade está inicialmente no estado de vácuo, o estado do sistema composto será o produto tensorial

$$|\psi\rangle = |e_1, g_2, 0\rangle.$$

Assim que o primeiro átomo passa pela cavidade C , um pequeno campo externo F_0 é ligado por um tempo t_1 , de forma que, por efeito Stark, fará com que o átomo entre em ressonância com a cavidade. A frequência de Rabi de vácuo Ω define a taxa com que cada átomo e a cavidade trocam um único fóton. Se o tempo de duração da interação do primeiro átomo com a cavidade C é tal que $\Omega t_1 = \pi/2$, podemos ver pela seção 3.4.3 que esse átomo terá probabilidade $1/2$ de permanecer no estado $|e_1\rangle$ e $1/2$ de emitir um fóton e ir para o estado $|g_1\rangle$. Como no exemplo citado na seção 3.4.3, nesse instante podemos afirmar que o sistema combinado é da forma

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1, g_2, 0\rangle - |g_1, g_2, 1\rangle). \quad (5.7)$$

Neste caso, o primeiro átomo está maximamente emaranhado com o campo na cavidade.

Em seguida, o segundo átomo entra na cavidade depois de um tempo T no estado $|e_2\rangle$. O tempo de interação desse segundo átomo com a cavidade é de $t_2 = 2t_1$, de forma que $\Omega t_2 = \pi$. Com isso, se o primeiro átomo deixou a cavidade vazia, o segundo átomo permanece no estado $|g_2\rangle$, sem alterar o campo. Mas se o primeiro átomo deixou um fóton, o segundo irá absorvê-lo com probabilidade 1, evoluindo para o estado e . Assim, o sistema combinado será

$$|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|e_1, g_2\rangle - |g_1, e_2\rangle) |0\rangle. \quad (5.8)$$

Como podemos ver, a cavidade não está mais emaranhada com nenhum átomo e , o primeiro e o segundo átomo agora estão emaranhados. Assim sendo, como os próprios autores disseram, a cavidade funciona como um “catalizador” para o processo de emaranhamento desses dois átomos, pois ela termina no mesmo estado que começou.

Segunda parte

Como vimos, um sistema de dois níveis é análogo a um sistema de spins. Com isso, os níveis e e g , podem ser representados por “spin para cima” e “spin para baixo”, respectivamente, de um estado de spin $1/2$. Sabemos que esse estado é invariante sob rotação e por isso, terá a mesma forma qualquer que seja a base. Assim, se ϕ é o ângulo para o novo eixo de quantização no plano xy , podemos escrever o estado EPR como

$$|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{2\sqrt{2}} [(|e_1\rangle + e^{i\phi} |g_1\rangle) (|e_2\rangle - e^{i\phi} |g_2\rangle) - (|e_1\rangle - e^{i\phi} |g_1\rangle) (|e_2\rangle + e^{i\phi} |g_2\rangle)] \quad (5.9)$$

Se definirmos a nova base como

$$|+\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle + e^{i\phi} |g_1\rangle \quad (5.10a)$$

$$|-\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_2\rangle - e^{i\phi} |g_2\rangle \quad (5.10b)$$

$$|-\rangle_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_1\rangle - e^{i\phi} |g_1\rangle \quad (5.10c)$$

$$|+\rangle_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} |e_2\rangle + e^{i\phi} |g_2\rangle, \quad (5.10d)$$

podemos reescrever o estado na nova base

$$|\psi_{EPR}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|+\rangle_1 |-\rangle_2 - |-\rangle_1 |+\rangle_2). \quad (5.11)$$

Mas por que isso é importante? Os pares emaranhados podem ser gerados apenas pela primeira parte, mas o paradoxo EPR vai além disso. Em um par emaranhado, quando o spin de uma partícula é medido ao longo da direção z e é encontrado o estado $|\uparrow\rangle_z$, espera-se que o estado de spin do par dessa partícula esteja no estado $|\downarrow\rangle_z$. Mas a medição da primeira partícula citada não diz nada sobre o estado de spin em outras direções. Por isso, nessa segunda parte será introduzida uma fase ϕ por meio da cavidade R_2 para que seja possível medir o estado do átomo em uma base diferente tornando possível a observação do paradoxo descrito por EPR.

Ao sair da cavidade C , o átomo entra na zona de Ramsey R , na qual lhe será aplicado um pulso de Rabi de campo de micro-ondas clássico $\pi/2$. Esse pulso será gerado por uma fonte S que pode ser ligada e desligada, de forma que cada átomo do par pode receber o pulso separadamente. O intervalo de tempo entre a passagem dos átomos do par pela cavidade R é dada por $T' = 42\mu s$. Essa fonte emite um sinal cuja frequência ν é próxima da frequência de transição atômica ν_0 . O pulso $\pi/2$ irá transformar um estado $|\pm\rangle$, definido acima, em $|e\rangle$ ou $|g\rangle$. Com isso os detectores D_e e D_g , serão capazes de determinar o estado em que cada átomo está ao alcançá-los.

Quando os detectores medem o estado do primeiro átomo em $|e\rangle_1$ ou $|g\rangle_1$, como os dois átomos estão emaranhados, sabemos que o estado do segundo átomo deve ser dado por $|+\rangle_2$ ou $|-\rangle_2$, respectivamente. Portanto, ao medir o primeiro átomo não temos uma informação exata de qual estado estará o segundo átomo, pois estão sendo medidos em bases diferentes.

Se as detecções dos estados dos dois átomos fossem feitas no mesmo instante de tempo, era de se esperar, de acordo com a equação 5.9, um sinal de anti-correlação em que $P_{eg} = P_{ge}$, como na parte anterior do experimento. Porém, os átomos chegam em R com uma diferença de tempo T' e por isso, a modulação da probabilidade do segundo átomo ser detectado nos estados $|e\rangle$ ou $|g\rangle$ é dada por $\cos[2\pi(\nu - \nu_0)T']$.

5.3.3 Resultados, inconsistências e correção

Primeira parte

Nessa parte foram escolhidos os parâmetros $T_0 = 100\mu s$, $v_1 = 337m/s$, $v_2 = 432m/s$ e o tempo de separação entre os dois átomos de $T = 37\mu s$. Se os átomos estivessem no estado 5.8, as probabilidades conjuntas esperadas seriam de $P_{eg} = P_{ge} = 1/2$ e $P_{gg} = P_{ee} = 0$. Mas não foi esse o resultado obtido. Em uma média de 1000 coincidências, os autores encontraram as probabilidades conjuntas $P_{eg} = 0.44$, $P_{ge} = 0.27$, $P_{gg} = 0.23$ e $P_{ee} = 0.06$ com uma incerteza da ordem de 0.03.

Essas diferenças aconteceram devido a várias imperfeições experimentais. Esses valores assumem que, se o primeiro átomo deixa um fóton na cavidade, este permanece até que o segundo átomo alcance a cavidade ser absorvido. No entanto, isso só acontece com a probabilidade $P_{Cav} = \exp(-T/T_{Cav})$. Assim sendo, se o primeiro átomo deixou um fóton na cavidade e este decai antes do segundo átomo chegar, o estado $|g_1, e_2\rangle$ terá um peso menor no estado final do sistema, pois ele acontecerá com uma frequência menor. Considerando isso, podemos dizer que as probabilidades conjuntas esperadas serão de $P_{eg} = 1/2$, $P_{ge} = P_{Cav}/2$, $P_{gg} = (1 - P_{Cav})/2$ e $P_{ee} = 0$.

Apesar dos resultados experimentais estarem mais próximos dessa nova previsão, ainda há outros fatores a considerar. Através de uma medição em um experimento auxiliar, foi constatado que ao atravessar a cavidade C , apenas 80% dos átomos são transferidos. Um outro fator importante é que D_e detecta erroneamente 13% de átomos que estão no estado g e D_g detecta erroneamente 10% de átomos que estão no estado e .

Considerando todos os casos citados acima, as probabilidades conjuntas previstas seriam $P_{eg} = 0.42$, $P_{ge} = 0.27$, $P_{gg} = 0.21$ e $P_{ee} = 0.10$. Assim, podemos ver que os valores experimentais estão com uma boa concordância com os valores previstos.

Segunda parte

Nessa segunda parte, foram medidas as probabilidades condicionais $P_c(e_2/e_1)$ de o segundo átomo ser detectado em $|e\rangle$ após o primeiro ser detectado em $|e\rangle$ e $P_c(e_2/g_1)$ de o segundo átomo ser detectado em $|e\rangle$ após o primeiro ser detectado em $|g\rangle$, e foram plotadas em termos da frequência ν de R . A figura 5 mostra esses resultados. Esse resultados foram tirados de 25000 eventos em que $T_0 = 30\mu s$, $v_1 = 413m/s$, $v_2 = 400m/s$ e $T = 37\mu s$.

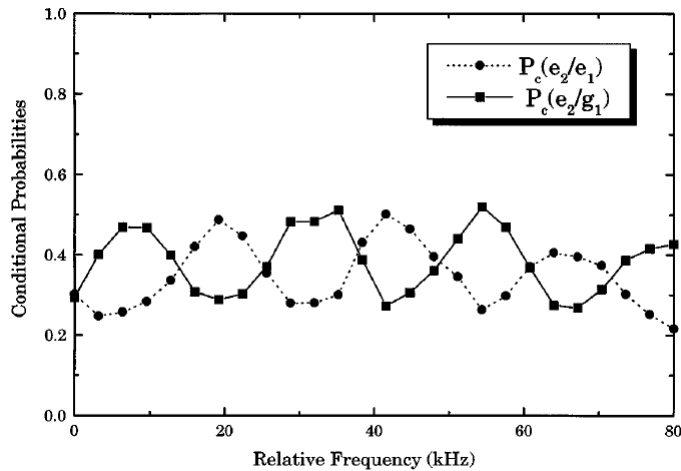


Figura 5 – Probabilidades condicionais $P_c(e_2/e_1)$ e $P_c(e_2/g_1)$ em função da frequência do sinal de microondas emitido em R . Os pontos são dados experimentais e as linhas são adicionadas ligando os pontos por conveniência.; fonte: [2]

Eles encontram um período no sinal da figura 5 de $\Delta\nu = 24\text{KHz}$, que é um valor bem próximo de $1/T'$, o que está de acordo com o esperado. Além disso, é possível notar que as fases dos sinais $P_c(e_2/e_1)$ e $P_c(e_2/g_1)$ são opostas, como esperado para átomos emaranhados.

Em um caso ideal, as probabilidades descritas na figura 5 deveriam ir de 0 a 1, mas isso não acontece devido às limitações que já foram citadas na primeira parte e por causa dos defeitos dos pulsos em R , que levam os átomos aos estados desejados com uma probabilidade máxima 0.6 em vez de 1.

Como vimos, apesar de algumas limitações os autores puderam emaranhar duas partículas massivas (átomos) por meio de uma cavidade de micro-ondas com alto fator de qualidade Q e por meio de uma cavidade com baixo fator de qualidade, foi possível descrever o estado em outra base. Esse experimento, portanto, apresenta um exemplo de preparação de estados emaranhados, utilizando uma cavidade de micro-ondas com alto fator de qualidade e reproduz por meio delas o paradoxo EPR.

6 Decoerência e limite clássico

Temos uma ideia sólida do que é a mecânica quântica e uma ideia sólida do que é a mecânica clássica. Mas onde essas duas teorias se encontram? Sistemas microscópicos e isolados, por exemplo, podem exibir características que a mecânica clássica não é capaz de descrever. Um exemplo disso é o átomo de hidrogênio, cuja a menor energia de um elétron que orbita em torno do núcleo é $-13.6V$. Ao fornecer certas quantidades de energia para esse átomo, ele só absorverá quantidades discretas.

Mas dependendo da alteração que fizermos em um sistema quântico, como por exemplo deixá-lo evoluir no tempo e deixá-lo interagir com outros sistemas, ele pode ser descrito classicamente. Uma das formas em que isso acontece, é quando os estados de um sistema perdem coerência. Para tais estudos, usamos principalmente as referências [7] e [11].

6.1 Decoerência

Em sistemas quânticos abertos o ambiente cria correlações com o sistema, e uma consequência disso pode ser o ambiente se tornar um medidor do sistema. Quando o sistema e o ambiente interagem, informações podem ser trocadas e um pode ser afetado pelo outro. Se o sistema é relativamente muito menor que o ambiente, apenas ele sofrerá mudanças consideráveis. Nesse caso, ao tirarmos o traço parcial, podemos ver que as superposições de estado podem ser atenuadas e até mesmo destruídas. Esse efeito de perda da coerência acontece se não instantaneamente, rapidamente, e pode ser chamado de *decoerência*.

Mas em que sentido o sistema perde coerência? Dizemos que sistema perde coerência quando o seu operador de estado “perde” os elementos na diagonal. Considere que $|\phi_1\rangle$ e $|\phi_2\rangle$ são estados de um sistema $|\psi\rangle$. Dizemos que $|\psi\rangle$ é uma superposição coerentes se podemos escrevê-lo na forma

$$|\psi\rangle = \alpha |\phi_1\rangle + \beta |\phi_2\rangle \quad \text{em que } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1. \quad (6.1)$$

Para esse $|\psi\rangle$, a matriz densidade é

$$\rho = |\psi\rangle \langle\psi| = \begin{pmatrix} |\alpha|^2 & \alpha^* \beta \\ \alpha \beta^* & |\beta|^2 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

Note que os dois termos de fora da diagonal dependem tanto de α que é uma quantidade associada a $|\phi_1\rangle$ quanto de β associada a $|\phi_2\rangle$. E é justamente essa “correlação” que torna o estado $|\psi\rangle$ uma superposição coerente. Dizemos que esse estado perde completamente a coerência quando, por algum motivo, esses termos se tornam tão pequenos a ponto de não afetarem o valor esperado de um observável R relacionado a esse sistema, de forma que $\langle R \rangle = \langle \phi_1 | R | \phi_1 \rangle \approx 0$.

Num caso de forte decoerência, a matriz densidade do sistema terá termos apenas na diagonal, o que torna impossível descrever o estado na forma de um *ket*. Com isso, ao sofrer decoerência, é possível que um estado puro se torne um estado misto.

Uma forma de avaliar decoerência é por meio da função decoerência, descrita no apêndice C. Além disso, na referência [7] é possível encontrar uma solução exata dessa função para um modelo de um sistema de dois níveis imerso em um ambiente formado por um conjunto de osciladores harmônicos.

Decoerência é de grande importância para o estudo de questões fundamentais da mecânica quântica, como o limite clássico. Ela é capaz de explicar porque a superposição de estados macroscópicos são tão sensíveis aos efeitos do ambiente em que estão inseridos.

6.2 Deslocamentos na energia causados por átomos de Rydberg

Vamos começar considerando um átomo de dois níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ cuja transição entre eles é permitida, como ilustrado na figura 6. Agora suponha que este átomo interaja com uma cavidade que tenha um modo de frequência ω_0 levemente diferente da frequência de transição atômica ω_{eg} por uma diferença $\delta = \omega - \omega_0$, que é muito menor do que ω_{ab} e qualquer outra frequência de transição, de forma que apenas os estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ serão afetados por essa diferença.

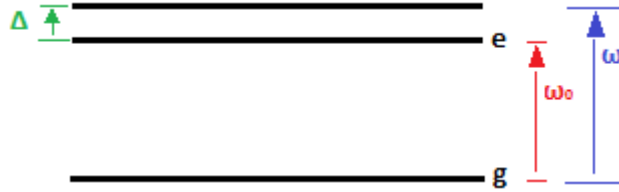


Figura 6 – Representação ilustrativa dos níveis do átomo e da frequência da cavidade.

Pelo fato de a cavidade e o átomo estarem fora de ressonância, não haverá transição entre os níveis atômicos, mas o nível de energia dos estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ sofrerão um deslocamento que é proporcional ao número de fótons n existentes no modo de campo da cavidade.

Para encontrarmos esses deslocamentos, vamos relembrar o Hamiltoniano do modelo de Jaynes-Cummings para um átomo de dois níveis dado pela equação 3.68 reescrevendo-o como

$$\mathcal{H} = \frac{\hbar\omega}{2} [|e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g| + \hbar\omega_0 a^\dagger a + \hbar f (|e\rangle\langle g| a + a^\dagger |g\rangle\langle e|)]. \quad (6.3)$$

Passando para a representação de interação, usando as equações 3.67–3.69, e usando que $\Delta = \omega - \omega_0 \gg f$ é possível mostrar que a dinâmica do sistema será:

$$|e, n\rangle \rightarrow e^{i\varphi_e} |e, n\rangle \quad e \quad |g, n\rangle \rightarrow e^{i\varphi_g} |g, n\rangle, \quad (6.4)$$

em que

$$e^{i\varphi_e} = e^{i\phi(n+1)} \quad e \quad e^{i\varphi_g} = e^{-i\phi n} \quad (6.5)$$

e

$$\phi \equiv - \int_{-\infty}^{\infty} dt \frac{f^2(t)}{\Delta}. \quad (6.6)$$

Novamente deve ser levado em conta o perfil do modo de campo na cavidade e a consequente dependência temporal de f devido a trajetória do átomo dentro da cavidade. Por fim, considerando que $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$ e um estado coerente $|z\rangle$ dentro das cavidades, os estados se transformam da seguinte forma

$$\begin{aligned}
|ez\rangle &\rightarrow e^{i\phi(a^\dagger a+1)} |ez\rangle = e^{i\phi} |eze^{i\phi}\rangle \\
|gz\rangle &\rightarrow e^{i\phi a^\dagger a} |gz\rangle = |gze^{-i\phi}\rangle
\end{aligned}
\tag{6.7}$$

$$\tag{6.8}$$

Se compararmos com o caso de ressonância, podemos ver que apesar de não mudar o número de fótons nos estados $|e, n\rangle$ e $|g, n\rangle$, somente suas energias sofre um deslocamento de

$$\pm \hbar\phi = \pm \frac{\hbar f^2 n}{\Delta}, \tag{6.9}$$

respectivamente.

Em átomos de Rydberg esse deslocamento pode ser grande comparado com outros átomos. Como pudemos ver, esse deslocamento é proporcional ao número de fótons, mas não o altera e é por isso que o deslocamento é chamado de dispersivo. Na próxima seção, veremos um experimento em que através da análise do deslocamento da fase foi possível observar como a superposição de estados é afetada.

6.3 Observando a decoerência progressiva do medidor em uma medição quântica

Uma excelente forma de entendermos melhor o fenômeno de decoerência é através de um experimento. Aqui, iremos apresentar mais um experimento de Serge Haroche e sua equipe [3] em que puderam observar a decoerência progressiva de superposições mesoscópicas de estados quânticos. Nesse experimento, do tipo “gato de Schroedinger”, um átomo de Rydberg interagia com um número de zero a alguns fótons que estavam presos em uma cavidade de microondas. Ao passar pela cavidade o átomo interagia com o campo, entrando em uma superposição de estados mesoscópicos. Eles puderam observar e registrar essa superposição ser destruída pela decoerência.

Em estados macroscópicos, (sistemas em que o número médio de fótons $\langle n \rangle$ é muito maior que 1), a decoerência de estados acontece muito mais rapidamente do que em estados mesoscópicos, sendo quase instantânea. Com isso, olhando apenas para um processo macroscópico, não é possível implementar essa observação em experimentos. Mas podemos ver os efeitos da decoerência em diferentes sistemas mesoscópicos em que cada um terá um “tamanho” diferente, de forma a observarmos o efeito da decoerência em cada um.

6.3.1 Montagem do experimento e visão geral

Nesse experimento os autores usaram átomos de Rubídio nos estados de Rídberg nos estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$ relativos aos números quânticos 51 e 50, respectivamente. A frequência de transição entre esses estados é $\nu_0 = 51.099GHz$. Esses átomos atravessam uma cavidade de microondas com alto fator de qualidade Q , na qual está preso um pequeno campo coerente $|z\rangle$. O modo na cavidade está levemente fora de ressonância com a frequência de transição do átomo e essa diferença é dada por $\delta = \nu - \nu_0$, em que ν é a frequência do modo na cavidade e ν_0 é a frequência de transição do átomo. Essa cavidade, feita de espelhos de Nióbio, tem a separação entre os espelhos ajustável, de forma que $\delta/2\pi$ pode ser ajustado de $70kHz$ a $800kHz$. O Hamiltoniano desse sistema é então o da equação 6.3.

Ao passar pela cavidade, o átomo e ela ficam acoplados por uma frequência de Rabi, f , como estudamos na seção 3.4.2. Como frequência de transição atômica entre os níveis e e g e as frequência da cavidade estão fora de ressonância, diferente do que aconteceu no experimento de emaranhamento, o átomo e o campo não trocam energia. Porém, por causa dessa diferença, durante um tempo t , o campo sofre uma defasagem de forma que ele se torna emaranhado com os estados do átomo e o estado resultante pode ser dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(|e, ze^{i\phi}\rangle + |g, ze^{-i\phi}\rangle \right), \quad (6.10)$$

em que $\phi = f^2 t / \delta$. O tempo $t = 19\mu s$ é um resultado de uma seleção de velocidades feita pelos lasers de diodo $L1$ e $L1'$ em que os átomos saem com uma velocidade $v = 400m/s$. Esse estado é conhecido como estado de gato. Assim, quando o átomo entra na cavidade no estado $|g\rangle$ o campo na cavidade sofre uma defasagem de $+\phi$ e quando ele entra no estado $|e\rangle$ o campo na cavidade sofre uma defasagem de $-\phi$.

Na figura 7, temos uma representação de um oscilador quântico no espaço de fase, que pode ser obtida pela função de Wigner (ver seção 3.3). A figura 7(a) mostra como ficaria uma componente de estado. Já na figura 7(b), vemos a representação de duas componentes. Essas componentes podem se sobrepor completamente, o que significa que não podemos distingui-las separadamente, podem se sobrepor parcialmente, e podem estar completamente separadas, o que significa que as duas componentes são facilmente distinguíveis. Essa superposição ou não superposição pode ser medida através da distância D entre as duas componentes no espaço de fases. Essa distância é dada por $D = 2\sqrt{n} \sin \phi$, que quando tem um valor maior que um podemos dizer que o estado de gato foi alcançado. O acoplamento entre o oscilador e o reservatório tem um tempo de vida T_r que amortece a medida que o sistema sofre decoerência. Quando $D \gg 1$, a decoerência acontece em uma escala de tempo da ordem de $2T_r/D^2$. Esse cálculo pode ser feito usando a equação de Lindblad vista na seção 3.5. Juntando essas ideias, podemos então ver a transição

do quântico para o clássico e ver porque ela ocorre muito mais rapidamente em estados macroscópicos.

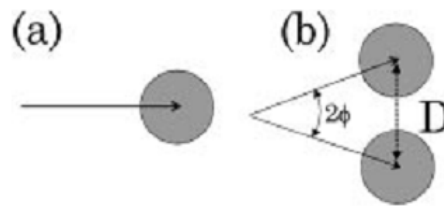


Figura 7 – Representação no espaço de fases de (a) uma componente do estado e (b) duas componentes no espaço de fases, em que D descreve a distância e 2ϕ o ângulo de separação entre elas; fonte: [3]

A montagem do experimento está esboçada na figura 8. A montagem é resfriada a uma temperatura de $0.6K$ com o objetivo de evitar radiação térmica, obtendo um número médio de fótons seja 0.05 dentro da cavidade. Os átomos de Rubídio são emitidos pela fonte O tem sua velocidade selecionada pelos lasers de diodo L_1 e em seguida, passa pela caixa B , onde são preparados no estado de Rydberg $|e\rangle$. Ao passar pela cavidade com baixo fator de qualidade R_1 , o átomo é preparado num estado de superposição entre os níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$. Isso é feito por meio de um pulso $\pi/2$ de microondas ressonante.

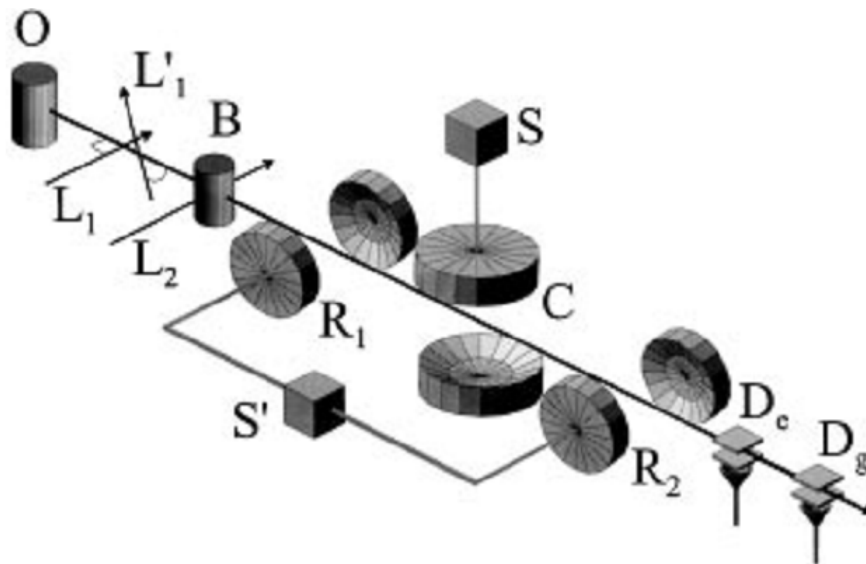


Figura 8 – esquema da montagem do experimento; fonte: [3]

Ao entrar na cavidade C , o átomo passa por um pequeno campo coerente com um número médio de fótons variando entre 0 e 10 e interage com esse campo. Ao sair da cavidade, ele entra em outra cavidade R_2 , idêntica a R_1 em que ele sofre um outro pulso $\pi/2$. As cavidade R_1 e R_2 , são alimentadas por uma fonte S' que injetam os pulsos a uma frequência ν que varia em quantidades por volta de ν_0 . Por fim, o átomo chega aos

detectores D_1 e D_2 , que através do método de ionização de campo, detectam se o átomo está no estado e ou g . Isso foi feito com diversos átomos e com campos coerentes variando entre 0 e 10 fótons.

6.3.2 Detalhando a física do experimento

O primeiro átomo A_1 , entra na cavidade R_1 no estado $|e\rangle$ e nela recebe um pulso $\pi/2$, levando-o para o estado de superposição

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|ez\rangle + |gz\rangle). \quad (6.11)$$

Ao entrar na cavidade C , A_1 irá interagir com a cavidade, e como vimos anteriormente, o estado $|\psi\rangle$ irá evoluir para o estado de gato

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (e^{i\phi} |ez e^{i\phi}\rangle + |gz e^{-i\phi}\rangle). \quad (6.12)$$

Em seguida o átomo irá passar pela segunda zona de Ramsey R_2 em que o estado novamente irá sofrer as transformações análogas a 6.8 e terá, portanto, a seguinte forma

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{2} [|gz e^{-i\phi}\rangle + e^{i(\phi+\varphi_0)} |gz e^{i\phi}\rangle - e^{-i\varphi_0} (|ez e^{-i\phi}\rangle - e^{i(\phi+\varphi_0)} |ez e^{i\phi}\rangle)], \quad (6.13)$$

com $\varphi_0 = \nu_R - \nu$, sendo ν_R a frequência da fonte que alimenta as duas zonas de Ramsey.

Após tudo isso o estado do átomo A_1 é detectado em D_1 e D_2 e através desses resultados foi possível encontrar a probabilidade de encontrar o átomo no estado $|g\rangle$. Como pudemos ver na figura 9, quanto maior ϕ , mais separados eram os estados do átomo, de forma que medindo a fase que o campo ganhou seria possível descobrir se o átomo atravessou C ou no estado $|e\rangle$ ou no estado $|g\rangle$.

Na segunda parte do experimento os átomos eram enviados aos pares pelo aparato. Quando A_1 passava pela cavidade, o processo descrito anteriormente se repetia. Mas até o segundo átomo A_2 entrar na cavidade, o campo na cavidade perdia coerência. Não vamos entrar em detalhes sobre os cálculos da dissipação que podem ser encontradas nas referências [7] e [16] logo acima e destacar os fenômenos de interesse.

A_2 entra na cavidade R_1 , também no estado $|e\rangle$ onde recebe um pulso $\pi/2$. Em seguida ele interage com a cavidade, que dependendo do tempo de atraso de A_1 em relação a A_2 , terá sofrido uma determinada quantidade de decoerência. Novamente o campo sofrerá uma defasagem e em seguida o átomo passa por R_2 , onde lhe será aplicado outro pulso $\pi/2$. Ao sofrer decoerência, o elemento fora da diagonal da matriz densidade reduzida do átomo+campo vão para zero e com isso o átomo não estará mais emaranhado com o campo.

Sem amortecimento do campo as probabilidades (P_{gg} e P_{ee}) de encontrar os dois átomos do par no mesmo estado são muito maiores do que as probabilidades (P_{eg} e P_{ge}) de encontrá-los em estados diferentes. A medida que o campo relaxa na cavidade e sua coerência é perdida a diferença entre essas duas probabilidades vai diminuindo. Por isso, a forma que os autores usaram para observar a decoerência é dada pela diferença das probabilidades condicionais η que é dada por

$$\eta = \left[\frac{P_{ee}}{(P_{ee} + P_{eg})} \right] - \left[\frac{P_{ge}}{(P_{ge} + P_{gg})} \right], \quad (6.14)$$

Foi possível observar como um modo de campo levemente fora de ressonância com a frequência de transição dos estados do átomo de Rydberg podem influenciar na fase da frequência do campo e nas franjas de Ramsey do átomo. Além disso, na segunda parte foi observada uma notória perda de coerência nos estados da cavidade ao deixá-la evoluir no tempo interagindo com o ambiente.

6.3.3 Resultados

Primeira parte

Nessa primeira parte do experimento, era enviado um átomo por vez. Com isso, foi possível encontrar a probabilidade $P_g(\nu)$ do átomo, que inicialmente entrou no estado $|e\rangle$, ser detectado no estado $|g\rangle$, de acordo com cada frequência ν .

Nas figuras 9, podemos ver a probabilidade $P_g(\nu)$. Na figura 9(a) os átomos entram na cavidade C no estado de vácuo com $\delta/2\pi = 712\text{KHz}$ e nela podemos ver franjas de Ramsey resultantes de uma interferência quântica. Não é possível saber se a transição para o estado fundamental ocorreu em R_1 ou R_2 e por causa dessa indistinguibilidade, surge o padrão de interferência.

Na figura 9(b) $\delta/2\pi = 712\text{KHz}$, em 9(c) $\delta/2\pi = 347\text{KHz}$ e em 9(d) $\delta/2\pi = 104\text{KHz}$, podemos ver que a medida que δ diminui, ou seja, ϕ aumenta, o contraste entre as franjas diminuem. Podemos entender isso, olhando para equação 6.10. Nela podemos ver que a fase do campo aponta para e e para g ao mesmo tempo. Quanto menor for a defasagem do campo ϕ , menor será a superposição entre os estados possíveis. Nos insets da figura 9, pela representação de Wigner que já estudamos na seção 3.3 podemos observar que quanto maior ϕ , mais nos aproximamos de um estado de gato.

Quando ϕ é pequeno, não temos nenhuma informação sobre o sistema, mas a medida que ele aumenta, é possível saber em qual estado o átomo passou em C olhando para a fase do campo. E nas figuras 9(b) a 9(d) podemos ver claramente isso acontecer. Apenas pelo fato de ter a possibilidade de ter tais informações, o padrão de interferência diminui, a ponto de ser até destruído, como na figura 9(d). Nessa situação, os componentes do campo deixa de se sobrepor, como mostram os insets.

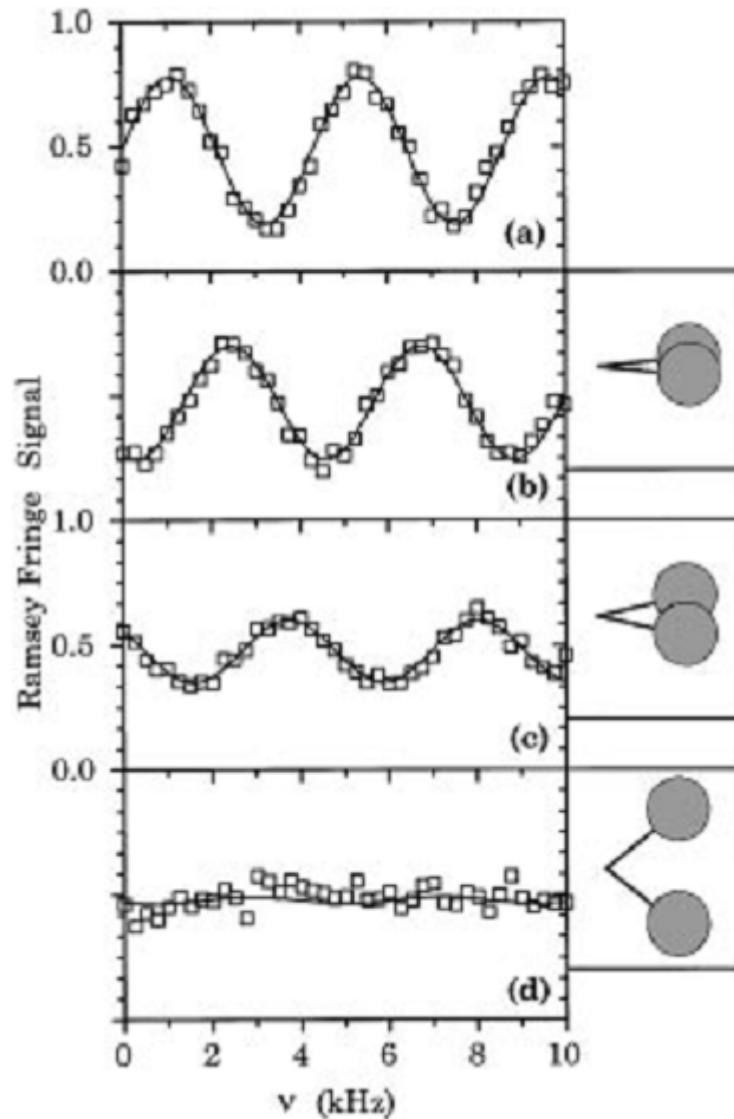


Figura 9 – Sinal das franjas de Ramsey exibidos por meio da probabilidade $P_g(\nu)$. Em (a) a cavidade está vazia e $\delta/2\pi = 712\text{KHz}$. De (b) a (d) existe um campo coerente na cavidade no qual $|\alpha| = \sqrt{9.5} = 3.1$ e $\delta/2\pi$ assume os valores de 712, 347 e 104KHz, respectivamente. Os insets mostram os componentes do campo na cavidade representados no espaço de fases (representação de Wigner); fonte: [3]

Na figura 10(a), podemos ver como o contraste varia em relação a ϕ . A variação do contraste das franjas com ϕ pode ser descrito pela equação

$$\langle ze^{-i\phi} | ze^{i\phi} \rangle = e^{\frac{D^2}{2}} e^{i n \text{sen}2\phi}, \quad (6.15)$$

correspondente a linha sólida da figura 9(a). Com isso é possível ver que os resultados obtidos estão dentro do esperado pela teoria.

Também é possível ver que a fase das franjas são deslocadas. Na figura 10(b),

podemos ver como esse deslocamento varia com ϕ . Seguindo uma análise parecida a da figura 10(a), a fase das franjas é deslocada por um ângulo igual da fase de $\langle ze^{-i\phi} | ze^{i\phi} \rangle$, que é de $n \text{ sen}2\phi$. Mais uma vez, os valores experimentais obtidos estão de acordo com a teoria.

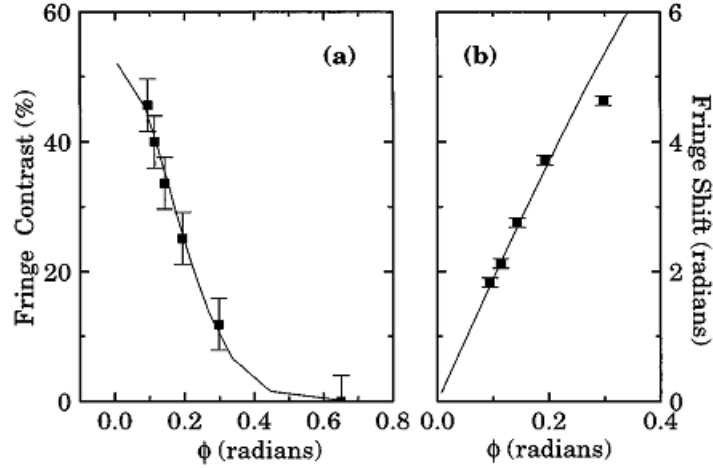


Figura 10 – Os resultados experimentais estão representados por pontos e as curvas teóricas pela linha sólida. Em (a) mostra a variação do contraste das franjas com ϕ e em (b) mostra como muda o deslocamento da fase com ϕ ; fonte: [3]

Foi possível observar experimentalmente que quando o átomo de Rydberg atravessa a cavidade, o campo sofre uma defasagem, que também afeta as oscilações de Rabi.

Segunda parte

Nessa segunda parte eles puderam medir a coerência e decoerência entre duas componentes do estado do sistema, emitindo os átomos aos pares. Quando o primeiro átomo atravessa a cavidade, ele causa uma defasagem $\pm\phi$ nos estados do campo e se é encontrado no estado $|g\rangle$ o estado do campo na cavidade é

$$|z e^{-i\phi}\rangle + e^{i\phi} |z e^{i\phi}\rangle. \quad (6.16)$$

Mas caso seja encontrado no estado $|e\rangle$ obtém-se

$$|z e^{-i\phi}\rangle + e^{-i\phi} |z e^{i\phi}\rangle. \quad (6.17)$$

, Depois de um tempo τ , um segundo átomo atravessa a cavidade causando mais uma defasagem de $\pm\phi$. Assim os estados possíveis são

$$|z e^{-2i\phi}\rangle + e^{-i(\alpha+\beta+2\phi)} |z e^{2i\phi}\rangle + (e^{i\alpha} + e^{i\beta}) e^{i\phi} |z\rangle \quad (6.18)$$

em que temos $\alpha = 0$, caso o primeiro átomo esteja no estado $|g\rangle$ e $\alpha = \pi$ se ele está em $|e\rangle$. De forma similar podemos definir β . Com isso podemos dizer que teremos três

componentes de campo associadas às fases possíveis, 2ϕ , 0 e -2ϕ . As componentes $\pm 2\phi$ nos dizem em qual estado cada átomo passou pela cavidade, mas a componente 0 não, por isso, foram analisados apenas o componente de fase-zero levando-nos ao estado

$$|z e^{-2i\phi}\rangle + e^{2i\phi} |z e^{2i\phi}\rangle \pm 2e^{i\phi} |z\rangle. \quad (6.19)$$

Para obter tal estado, os pares de átomos que atravessavam a cavidade deveriam estar em estados diferentes (o primeiro em e e o segundo em g ou vice versa). Nessa condição, o segundo átomo iria desfazer a defasagem causada pelo primeiro átomo e não teríamos como saber em qual configuração atômica cada átomo do par entrou na cavidade, (e, g) ou (g, e) . Considerando todos os átomos coletados em um determinado tempo de atraso τ , existem quatro probabilidades conjuntas, P_{ee} , P_{eg} , P_{ge} e P_{gg} . A diferença entre as probabilidades condicionais η dada pela equação 6.14, nos diz quando o sistema formado pelo primeiro átomo e pelo campo evolui para um estado completamente incoerente, que é quando vai η para zero. O cálculo detalhado de η pode ser encontrado em [7]. Exceto quando $\phi = 0$ e $\phi = \pi/2$, η é independente de ν e isso pode ser visto na figura 11(a).

Na figura 11(b) eles puderam mostrar a variação de $\bar{\eta}$, que é a média de η em ν , em relação ao tempo τ , para $n = 3.3$ e para duas dessintonizações diferentes, $\delta/2\pi = 170\text{KHz}$ e para $\delta/2\pi = 70\text{KHz}$. A linha sólida representa os valores esperados pela teoria enquanto os pontos são os dados experimentais. Podemos ver que de forma razoável os pontos obtidos estão em concordância com a teoria, ou seja, a decoerência do sistema aumenta a medida que o sistema evolui no tempo. Quanto mais tempo o segundo átomo demora para passar, mais coerência o estado vai ter perdido. Podemos ver também que quanto maior é a defasagem ϕ , mais rápido o sistema irá sofrer decoerência.

Segundo os autores, essa foi a primeira demonstração da perda de coerência em estados de gato em que é possível observar e ultrapassar a interface quântico-clássico.

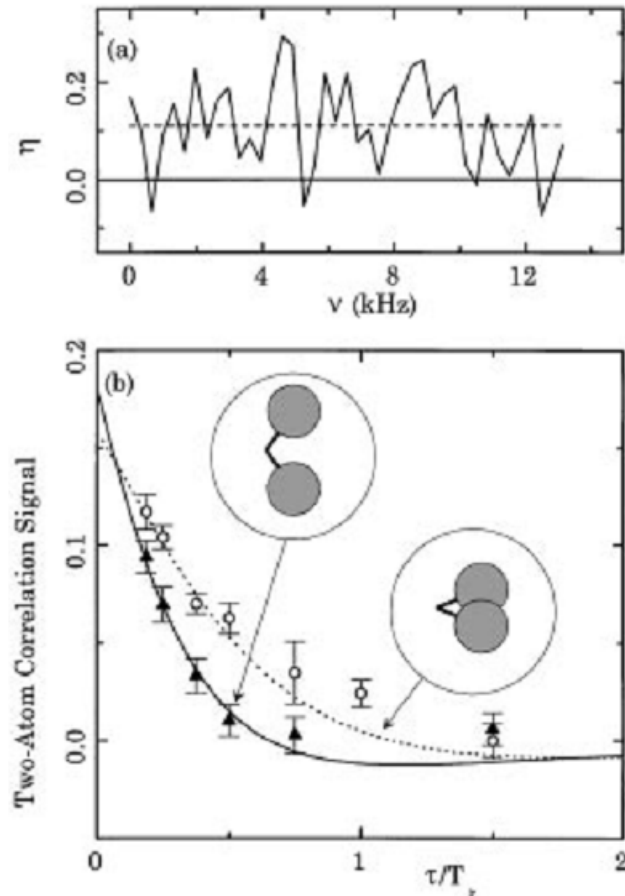


Figura 11 – Em (a) está plotado η versus ν para $n = 3.3$, $\delta/2\pi = 70\text{kHz}$ e $\tau = 40\mu\text{s}$. Em (b), os resultados teóricos são representados pelos círculos e triângulos e as curvas teóricas pela linha sólida e pela linha pontilhada. É mostrado como o valor médio de η em ν varia com τ/T_r , para $\delta/2\pi = 170\text{Hz}$ representado por círculos e para $\delta/2\pi = 70\text{Hz}$ representado pelos triângulos. Nos insets estão representadas as componentes do campo no espaço de fases com uma separação de 2ϕ ; fonte: [3]

7 Interferometria

A interferometria é um conceito bastante antigo e muito importante. Um dos exemplos mais importantes é o interferômetro de Michaelson, que foi usado para mostrar a existência do éter. Hoje, um dos modelos de interferometria muito estudado é o interferômetro de Mach-Zehnder. Ele é um bom modelo para começarmos, pois por ele é possível fazer uma analogia como o interferômetro de Ramsey que veremos no próximo experimento. Na introdução desse capítulo, iremos descrever um experimento imaginário de um interferômetro de Mach-Zehnder com possível marcação de caminho.

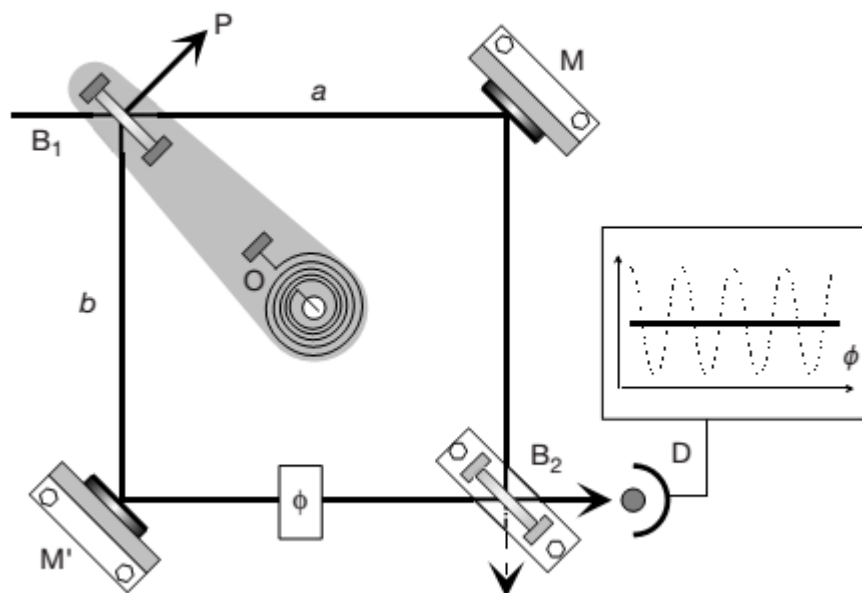


Figura 12 – Interferômetro de Mach-Zehnder com possível marcação de caminho; fonte: [4]

Na figura 12 é ilustrado esse interferômetro. Nele, um feixe de fótons é dividido entre dois caminhos a e b pelo divisor de feixes B_1 e é recombinao pelo divisor de feixes B_2 . No caminho b existe um elemento que irá inserir uma fase ϕ no feixe que estará passando por ele. Caso B_1 e B_2 sejam macroscópicos o detector D irá detectar um fóton com uma probabilidade senoidal com a fase ϕ . Mas se B_1 é um objeto microscópico, como uma lâmina de luz girando em torno do eixo perpendicular ao interferômetro e B_2 é um objeto macroscópico o sistema fóton- B_1 se torna um estado combinado. Isso acontece porque, ao passar por B_1 , ou o fóton é transmitido através do caminho a e a lâmina não se move ou refletida pelo caminho b e a lâmina é atingida com um momento P girando em torno do eixo O juntamente com a peça sombreada e com isso, marcando o caminho. Nessa caso, o sistema combinado é dado por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|\psi_a\rangle |\psi_{B_1}(a)\rangle + |\psi_b\rangle |\psi_{B_1}(b)\rangle), \quad (7.1)$$

em que $|\psi_a\rangle$ e $|\psi_b\rangle$, correspondem aos caminhos da partícula e $|\psi_{B_1}(a)\rangle$ e $|\psi_{B_1}(b)\rangle$, correspondem aos estados de divisores de feixes em que ele transmitiu ou refletiu a partícula. Quando B_1 é muito microscópico, o produto interno $\langle \psi_{B_1}(a) | \psi_{B_1}(b) \rangle$ é igual a zero, de forma que o estado $|\psi\rangle$ se torna um estado maximamente emaranhado. Assim, olhando para o estado do primeiro divisor de feixe conseguimos determinar o caminho que a partícula fez. Nesse caso o nosso sistema está o mais quântico possível. No caso oposto, quando B_1 é um objeto pesado, o momento transmitido pelo fóton não perturba o divisor de feixes. Nesse caso, $|\psi_a\rangle = |\psi_b\rangle$ e $|\psi\rangle$ é um estado produto. Com isso, a probabilidade da partícula ser detectada em D é dada por

$$P(\phi) = \frac{1}{2} [1 + \text{Re} \langle \psi_{B_1}(a) | \psi_{B_1}(b) \rangle e^{i\phi}]. \quad (7.2)$$

Para sabermos o grau de emaranhamento entre B_1 e a partícula basta olharmos para o contraste da franja, pois é dado pelo módulo do produto escalar do dois divisores de feixe. Por meio dessa análise, podemos então chegar ao limite clássico desse exemplo. Na próxima seção veremos um experimento análogo a esse, em que tal limite foi alcançado.

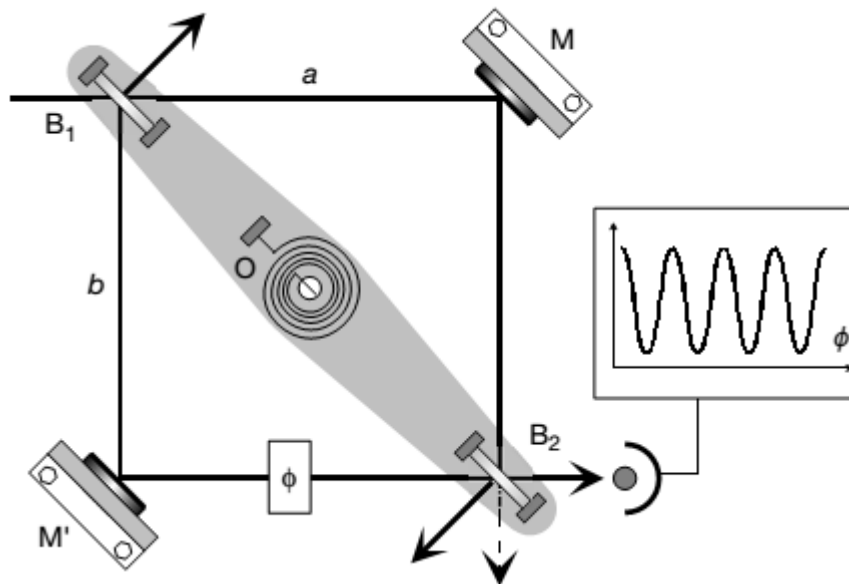


Figura 13 – Interferômetro de Mach-Zehnder que desfaz possíveis marcações de caminho; fonte: [4]

Mas o que acontece se os dois divisores de feixes forem lâminas girantes? A figura 13 mostra um esboço para essa configuração. Se o divisor de feixe B_1 sentir o empurrão da partícula ao refleti-la pelo caminho b , a peça sombreada começa a girar em torno do eixo O no sentido horário e em seguida a partícula passa direto por B_2 . Mas se acontecer o

contrário, a partícula passar direto por B_1 , ela será refletida em B_2 que sentirá o empurrão da partícula quando ela for refletida. Podemos ver que colocando o segundo divisor de feixes como uma lâmina girante, a informação de caminho é apagada por ela, e com isso espera-se que o padrão de interferência apareça.

Nas duas partes do experimento é usado um interferômetro de Ramsey que tem características análogas aos modelos de interferômetros de Mach-Zehnder que acabamos de ver.

7.1 Experimento: Um experimento complementar com um interferômetro no limite clássico-quântico

Nesse experimento um interferômetro de Ramsey de duplo pulso atômico, foi usado como um divisor de feixes para os estados quânticos do átomo, análogo ao interferômetro descrito na seção anterior. A cavidade de alto fator de qualidade, por sua vez, faz o papel de divisor de feixe com possível marcador de caminho. A transição do quântico para o clássico pode ser vista pela visibilidade das franjas de interferência no estado final que aumentava com o número de fótons.

7.1.1 Montagem do experimento e visão geral

Parte 1

A configuração do experimento pode ser vista na figura 14. Nele, átomos de Rubídio foram preparados nos estados de Rydberg em que o nível excitado $|e\rangle$, tinha número quântico 51 o nível fundamental tinha número quântico 50. Esses átomos atravessavam uma cavidade com alto fator de qualidade no estado $|e\rangle$, onde recebiam um pulso $\pi/2$. A cavidade R_1 era supercondutora e estava em ressonância com a frequência de transição entre estados $|e\rangle$ e $|g\rangle$. Mais a frente, após $T = 24\mu s$, em outra cavidade com baixo fator de qualidade, R_2 , os átomos recebiam mais um pulso $\pi/2$. O seu estado final era detectado pelo detector D . A probabilidade de encontrar o átomo no estado $|g\rangle$ foi encontrada repetindo várias vezes o procedimento.

Ao entrar na cavidade R_1 o átomo recebia um pulso que era produzido por um pequeno campo coerente com um número médio de fótons N , que era preparado por uma fonte de microondas S . A condição $\pi/2$ era alcançada controlando o tempo de interação entre o átomo e o campo para cada valor de N . Essa interação era controlada da seguinte forma: uma fonte externa aplicava um campo elétrico nos espelhos da cavidade, de forma que por efeito Stark a frequência da cavidade e a frequência de transição entre os estados do átomo saíam da ressonância. Com isso, era possível controlar o tempo que o átomo iria interagir com a cavidade de forma a ter o pulso $\pi/2$. A duração desse pulso diminuía com

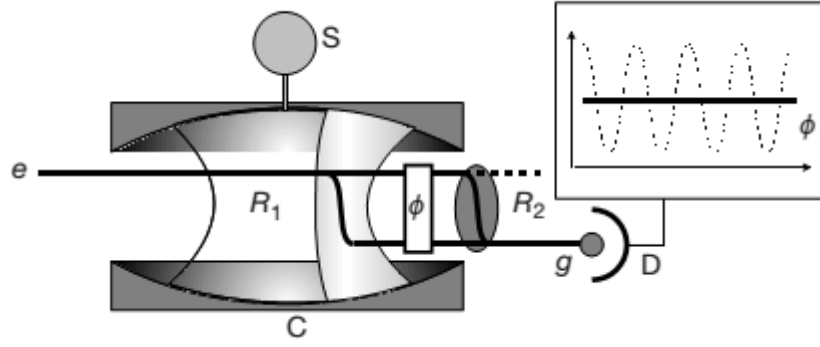


Figura 14 – Esquema da primeira parte do experimento; fonte: [4]

N . Mesmo para frequências de Rabi altas, que era o caso de quando a cavidade estava no estado de vácuo, com $\nu/2\pi = 49\text{KHz}$, o tempo de interação com a cavidade era bem menor que T_{cav} .

Vemos que de fato o experimento é análogo ao interferômetro de Mach-Zehnder descrito na seção anterior. Aqui, R_1 é análogo ao primeiro divisor de feixe, pois o estado do campo após passar pela cavidade pode ser descrito por

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle |z_e\rangle + |g\rangle |z_g\rangle), \quad (7.3)$$

em que $|z_e\rangle$ e $|z_g\rangle$ são os estados coerentes

$$|z_e\rangle = \sqrt{2} \left[\sum_n C_n \cos(\Omega\sqrt{n+1}t_z) |n\rangle \right] \quad (7.4)$$

$$|z_g\rangle = \sqrt{2} \left[\sum_n C_n \sin(\Omega\sqrt{n+1}t_z) |n+1\rangle \right] \quad (7.5)$$

em que C_n é a amplitude de probabilidade de encontrar n fótons na cavidade, que para um estado coerente é dada por

$$C_n = e^{-|z|^2/2} \frac{z^n}{\sqrt{n!}}, \quad (7.6)$$

e t_z é o tempo efetivo da interação átomo-cavidade dado por

$$\sum_n |C_n|^2 \cos^2(\Omega\sqrt{n+1}t_z) = \frac{1}{2}. \quad (7.7)$$

A evolução global do sistema é resultante das superposição das oscilações de Rabi entre os níveis $|e\rangle$ e $|g\rangle$ do átomo a uma frequência igual a $\Omega\sqrt{n+1}$, induzido pelo estado coerente na cavidade. Temos um limite de um sistema totalmente quântico, quando $N = 0$, pois nesse caso os estados $|z_e\rangle = |0\rangle$ e $|z_g\rangle = |1\rangle$ são ortogonais. Se o átomo deixa um fóton

na cavidade, ele será sentido, pois $\Delta N \ll 1$. Já o limite clássico acontece quando $N \gg 1$. Nesse caso, ΔN é muito pequeno comparado a N e pela equação 7.7, $\cos(\Omega\sqrt{n+1}t_z)$ e $\sin(\Omega\sqrt{n+1}t_z)$ são aproximadamente $\frac{1}{\sqrt{2}}$, de forma que $|z_e\rangle \approx |z_g\rangle = |z\rangle$, o que faz de $|\psi\rangle$ um estado produto. Como ΔN é um número maior que 1, se o átomo deixa um fóton na cavidade, ela praticamente não sentirá, pois fica difícil distinguir esse um fóton da incerteza.

Em R_2 , o átomo recebe um segundo pulso, que é gerado pela fonte S e alimentado por um guia de onda auxiliar. Essa onda estacionária depende da forma da cavidade R_2 , que é uma estrutura metálica e por causa dessa forma, a $18mm$ do eixo da cavidade, é formado um antinó. Assim que o átomo atravessa o antinó, a fonte S é ligada por $1\mu s$ de forma a possibilitar outro pulso $\pi/2$. Essa onda estacionária tem fótons que amortecem muito rapidamente, em menos de $10ns$ e por isso, são necessários vários pulsos, até que o tempo total de $1\mu s$ seja alcançado. Como cada pulso interage com o átomo por um intervalo muito curto de tempo, o campo nessa cavidade não se torna emaranhado com o átomo. para maiores detalhes veja, [17] e [16]. Isso é equivalente ao divisor de feixes clássico, no interferômetro de Mach-Zehnder. Após passar por R_2 , o átomo sofre as alterações

$$\begin{aligned} |e\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|e\rangle + |g\rangle) & e \\ |g\rangle &\rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(|g\rangle - |e\rangle). \end{aligned} \quad (7.8)$$

A fase ϕ entre R_1 e R_2 , é aplicada da mesma forma do experimento anterior. Quando o campo elétrico é aplicado na cavidade R_1 para dessintonizar a frequência do átomo e da cavidade, a diferença de frequência entre eles gera um defasagem ϕ no campo da cavidade e na frequência de transição atômica, que pode variar de 0 a 3π . Assim, podemos escrever a probabilidade do átomo decair para o nível g como

$$P(\phi) = \frac{1}{2} \left[1 + \text{Re}(\langle z_e | z_g \rangle e^{i\phi}) \right]. \quad (7.9)$$

Resultados

Os resultados obtidos podem ser vistos na figura 15(a). Nela foi plotada a probabilidade de encontrar o átomo no estado $|g\rangle$ em função da defasagem ϕ . Esses resultados foram coletados para quatro estados de campo diferentes, estando o primeiro no estado de vácuo, ou seja, $N = 0$, o segundo com $N = 0.31$, o terceiro com $N = 2$ e o quarto com $N = 12.8$. Podemos ver pelos gráficos que a medida que N diminui, as franjas de interferência vão diminuindo. Isso acontece porque quanto mais fótons existem no campo, mais difícil fica de saber onde que a transição do estado $|e\rangle$ para o estado $|g\rangle$ aconteceu. O contraste das franjas deveria chegar a 100% para $N = 12.8$, mas isso não acontece devido

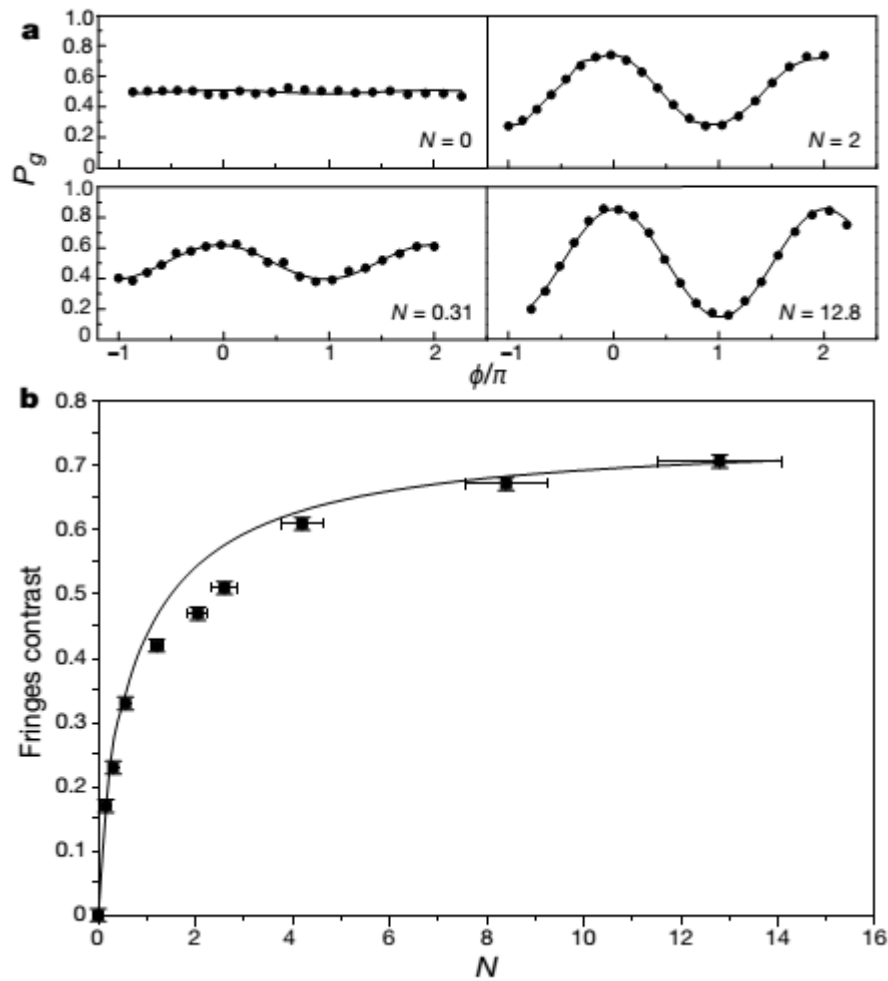


Figura 15 – Em (a) é possível ver como se comporta a probabilidade de encontrar os átomos no estado g em relação a ϕ/π para $N = 0$, $N = 0.31$, $N = 2$ e para $N = 12.8$. Em (b) foi plotada a variação do contraste das franjas em relação a N . Os pontos representam os resultados experimentais enquanto as linhas sólidas são curvas teóricas; fonte: [4]

a imperfeições experimentais. Na figura 15(b), podemos ver o contraste variando com N . A linha sólida representa a curva teórica enquanto os pontos são dados experimentais. Podemos ver que os resultados são bastantes similares. Ajustando a curva teórica à curva experimental no ponto $N = 12.8$, eles viram que o contraste experimental é menor que o contraste esperado por um fator de $\eta \langle z_e | z_g \rangle$, com $\eta = 0.75$.

Parte 2

Na primeira parte do experimento, vimos que dependendo do número de fótons na cavidade temos como saber onde a transição atômica ocorreu, nos dando uma informação de “caminho”. Mas como vimos no experimento [3], a informação de caminho pode ser obtida olhando para a defasagem que o campo sofreu quando o átomo passa por uma

cavidade levemente fora de ressonância com a frequência de transição do átomo.

É também interessante analisar a relação de incerteza entre fase ϕ e o número de fótons. Apesar de R_2 ter uma fase bem definida, R_1 não tem. Como o campo introduzido em R_1 é de estados coerentes, as flutuações na fase $\Delta\phi$ são da ordem de $1/\Delta N$. Com isso, para $N < 1$, como vimos, se o átomo trocar um fóton com a cavidade, poderá ser detectado. Quando isso ocorre, $\Delta\phi > 1$ tornando difícil detectar a correlação entre as fases de R_1 e R_2 . Esse argumento qualitativo é análogo a análise de Δp e Δx no interferômetro de Mach-Zehnder. Esse argumento nos leva a descrever a interação entre o átomo e R_1 como um processo irreversível, mas nessa parte do experimento veremos que isso não é verdade.

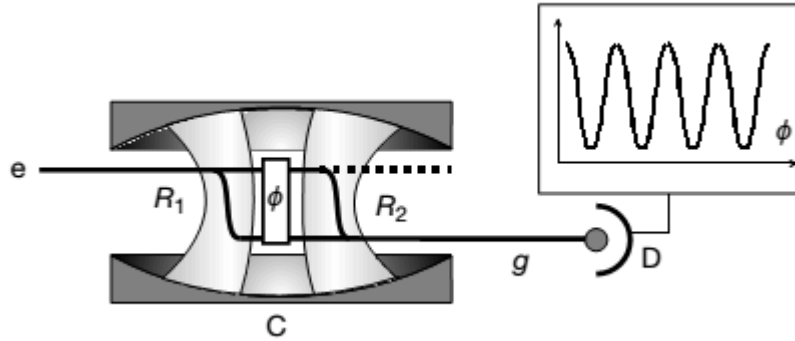


Figura 16 – Esquema da segunda parte do experimento; fonte: [4]

Eles puderam desenvolver uma configuração em que a informação do caminho pode ser apagada, ou seja, fizeram um *apagador quântico*. Para isso, eles fizeram uma montagem que pode ser vista na figura 16, que é análogo ao interferômetro de Mach-Zehnder em que os dois divisores de feixe são uma lâmina de luz que pode girar. Nesse caso, as franjas de interferência devem aparecer novamente. Nessa configuração, quando o átomo chega a cavidade com alto fator de qualidade C , ele sofre dois pulsos sucessivos induzidos pelo campo na cavidade.

Ao entrar em C , inicialmente no estado de vácuo, o átomo recebe um pulso assim que entra na cintura do modo da cavidade. A diferença de fase ϕ é inserida por um pulso adicional de campo elétrico de $2\mu s$. Assim, o estado combinado do sistema átomo-campo é

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(e^{i\phi} |e\rangle |0\rangle + |g\rangle |1\rangle \right), \quad (7.10)$$

em que $|0\rangle = |z_e\rangle$ e $|1\rangle = |z_g\rangle$. O interferômetro, nesse ponto, guarda informação de caminho, pois ou o átomo deixou um fóton na cavidade e saiu dela no estado fundamental, ou o átomo não deixa nenhum fóton na cavidade e sai dela no estado excitado.

Em $T = 16\mu s$ depois do átomo ter recebido o primeiro pulso, ele recebe o segundo “misturando” novamente os estados. Dessa forma, o estado se torna

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2} \left[|g\rangle |1\rangle (1 + e^{i\phi}) - |e\rangle |0\rangle (1 - e^{i\phi}) \right]. \quad (7.11)$$

Podemos ver que o estado final do sistema contém dois termos que representam o átomo atingindo o detector no estado $|g\rangle$, defasado por ϕ . Para esses dois termos o campo termina no estado de um fóton. Com isso, não é possível saber se o átomo decaiu no primeiro ou no segundo pulso, o que faz aparecer as franjas de interferência. Na figura 17, podemos ver as franjas de P_g em função de ϕ .

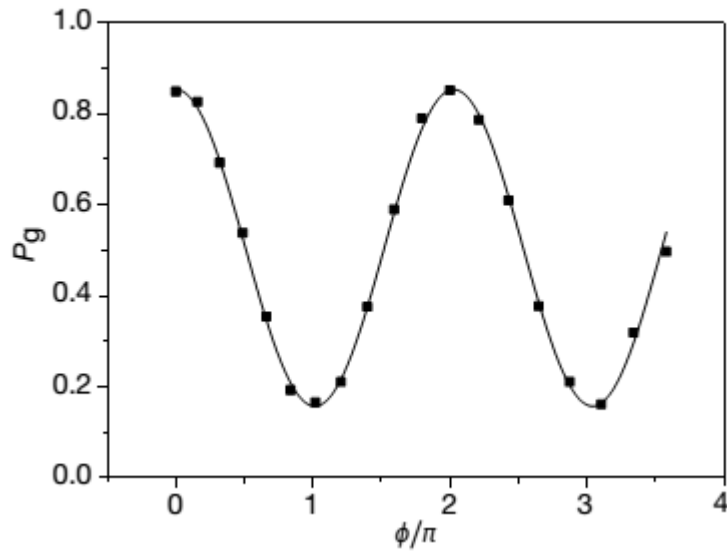


Figura 17 – Probabilidade de encontrar o átomo no estado g em relação a ϕ/π ; fonte: [4]

Com isso, pudemos ver que por meio de uma cavidade com alto fator de qualidade Q , foi possível fazer dois tipos de experimentos, um em que tinha informação de caminho e outro em que essa informação era apagada. E com isso foi possível ver que o processo de decoerência pode ser revertido.

8 Considerações finais

Em nosso trabalho estudamos quatro questões fundamentais da mecânica quântica por meio de experimentos: quantização da luz, emaranhamento, decoerência e limite clássico. Nesses experimentos, que foram feitos com cavidades com alto fator de qualidade, átomos de Rydberg e campos coerentes, esses conceitos foram observados.

Estudamos como a luz pode ser quantizada através de uma analogia entre os campos eletromagnéticos e osciladores harmônicos. Além disso, por meio do estudo da eletrodinâmica quântica de cavidades, chegamos ao modelo de Jaynes-Cummings em que vimos o Hamiltoniano que descrevia o sistema que nos interessava. Por meio do experimento [1] foi possível observar que ao entrar no estado excitado em uma cavidade com alto fator de qualidade e interagir com ela, um átomo de Rydberg deixava nela um fóton com uma probabilidade P_g e que a transformada de Fourier dessa probabilidade tinha picos a valores de frequências que eram múltiplas da raiz de inteiros, o que era previsto pelo modelo de Jaynes-Cumming.

No experimento [18] foi observado que uma cavidade com alto fator de qualidade era capaz de emaranhar de forma indireta dois átomos de Rydberg, como um catalizador.

Por meio do experimento [3], pudemos entender o conceito de decoerência. Nele, foi descrito o processo irreversível em que um estado de gato de Schroedinger perdia coerência ao interagir com o ambiente. Com isso, foi possível observar o limite o clássico. Ainda falando desse limite, por meio do experimento [4], foi possível observá-lo usando interferometria em que o caminho de um átomo em um interferômetro podia ou não ser marcado. Foi observado que a medida que o número de fótons ia aumentando na cavidade, a informação de caminho era apagada, aumentando a visibilidade dos padrões de interferência. Além disso, vimos que em tal processo é possível apagar a informação de caminho e nesse caso, o processo de decoerência é reversível. A diferença no processo de decoerência entre esses dois últimos experimentos é a reversibilidade. A decoerência no penúltimo experimento pode ser considerada irreversível pelo fato de a informação de caminho ficar espalhada pelo ambiente, tornando inviável apagá-la.

Assim, alcançamos o nosso objetivo ao procurar entender alguns conceitos fundamentais da mecânica quântica por meio de experimentos em cavidades óticas.

Referências

- [1] Brune, M, F Schmidt-Kaler, A Maali, J Dreyer, E Hagley, JM Raimond e S Haroche: *Quantum Rabi oscillation: A direct test of field quantization in a cavity*. Physical Review Letters, 76(11):1800, 1996. Citado 5 vezes nas páginas 12, 47, 49, 83 e 92.
- [2] Hagley, E, X Maitre, G Nogues, C Wunderlich, M Brune, Jean Michel Raimond e Serge Haroche: *Generation of Einstein-Podolsky-Rosen pairs of atoms*. Physical Review Letters, 79(1):1, 1997. Citado 4 vezes nas páginas 12, 56, 57 e 61.
- [3] Brune, Michel, E Hagley, J Dreyer, X Maitre, A Maali, C Wunderlich, JM Raimond e S Haroche: *Observing the progressive decoherence of the “meter” in a quantum measurement*. Physical Review Letters, 77(24):4887, 1996. Citado 8 vezes nas páginas 12, 66, 68, 71, 72, 74, 80 e 83.
- [4] Bertet, P, S Osnaghi, A Rauschenbeutel, G Nogues, A Auffeves, M Brune, JM Raimond e S Haroche: *A complementarity experiment with an interferometer at the quantum–classical boundary*. Nature, 411(6834):166–170, 2001. Citado 8 vezes nas páginas 12, 75, 76, 78, 80, 81, 82 e 83.
- [5] Ballentine, Leslie E: *Quantum mechanics: a modern development*. World scientific, 1998. Citado 5 vezes nas páginas 13, 15, 20, 25 e 51.
- [6] Mechanics, Quantum: *Claude Cohen-Tannoudji, Bernard Diu, Franck Laloe*. John Wiley & Sons Inc., Paperback, 1977. Citado 3 vezes nas páginas 13, 18 e 20.
- [7] Breuer, Heinz Peter e Francesco Petruccione: *The theory of open quantum systems*. Oxford University Press on Demand, 2002. Citado 8 vezes nas páginas 13, 20, 24, 44, 63, 64, 69 e 73.
- [8] Haroche, Serge e Jean Michel Raimond: *Exploring the quantum*. Oxford Univ. Press, 2006. Citado 3 vezes nas páginas 13, 20 e 25.
- [9] Lindblad, Goran: *On the generators of quantum dynamical semigroups*. Communications in Mathematical Physics, 48(2):119–130, 1976. Citado na página 24.
- [10] Nielsen, Michael A e Isaac L Chuang: *Quantum computation and quantum information*. Cambridge university press, 2010. Citado 3 vezes nas páginas 25, 51 e 54.
- [11] Scully, Marlan O e M Suhail Zubairy: *Quantum optics*. Cambridge university press, 1997. Citado 3 vezes nas páginas 25, 42 e 63.

-
- [12] Haroche, Serge: *Nobel Lecture: Controlling photons in a box and exploring the quantum to classical boundary*. *Reviews of Modern Physics*, 85(3):1083, 2013. Citado na página 51.
- [13] Trimmer, John D: *The present situation in quantum mechanics: A translation of Schrödinger's "Cat Paradox" paper*. *Proceedings of the American Philosophical Society*, páginas 323–338, 1980. Citado na página 51.
- [14] Einstein, Albert, Boris Podolsky e Nathan Rosen: *Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?* *Physical review*, 47(10):777, 1935. Citado na página 54.
- [15] Bohm, David: *Quantum theory*. Courier Corporation, 2012. Citado na página 56.
- [16] Kim, Ji Il, KM Fonseca Romero, AM Horiguti, L Davidovich, Maria Carolina Nemes e Antonio Fernando Ribeiro de Toledo Piza: *Classical behavior with small quantum numbers: The physics of Ramsey interferometry of Rydberg atoms*. *Physical review letters*, 82(24):4737, 1999. Citado 2 vezes nas páginas 69 e 79.
- [17] Mascarenhas, Eduardo e Marcelo França Santos: *Emergence of classicality in small-number entangled systems*. *Physical Review A*, 79(2):023836, 2009. Citado na página 79.
- [18] Howell, John C, Ryan S Bennink, Sean J Bentley e RW Boyd: *Realization of the Einstein-Podolsky-Rosen paradox using momentum-and position-entangled photons from spontaneous parametric down conversion*. *Physical review letters*, 92(21):210403, 2004. Citado na página 83.

Apêndices

APÊNDICE A – Como chegar a quantização do campo eletromagnético

Esse capítulo está destinado a descrever detalhadamente a quantização do campo eletromagnético descrita na seção 3.1.1

A.1 As equações de Maxwell e os modos normais do campo eletromagnético

No vácuo, as equações de Maxwell são o seguinte conjunto de equações diferenciais parciais

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (\text{A.1})$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (\text{A.2})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \quad (\text{A.4})$$

em que B é o campo magnético, E é o campo elétrico e c é a velocidade da luz no vácuo.

Para chegarmos a descrição quântica do campo eletromagnético, é interessante encontrar os modos normais para o campo elétrico \mathbf{E} e para o campo magnético \mathbf{B} . Na mecânica clássica, um conjunto de osciladores harmônicos acoplados pode ser representado matematicamente por equações diferenciais acopladas. Para resolver tais equações, usa-se a estratégia de fazer uma mudança de variáveis que desacopla as equações diferenciais. Essas equações desacopladas podem representar osciladores harmônicos independentes, em que cada oscilador descreve um modo que terá uma frequência angular distinta e independente. Em ondas eletromagnéticas, também temos um acoplamento que é descrito pelas equações de Maxwell apresentadas acima.

Podemos encontrar uma função que represente cada modo a partir da solução da equação de onda para \mathbf{E} e para \mathbf{B} . Se tiramos o rotacional da equação A.1 e usando a identidade

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \quad (\text{A.5})$$

chegamos em

$$\nabla^2 \mathbf{E} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.6})$$

De forma semelhante, podemos obter a equação da onda para \mathbf{B} , que será

$$\nabla^2 \mathbf{B} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{B}}{\partial t^2} = 0. \quad (\text{A.7})$$

Começando pela equação do campo \mathbf{E} , a solução do campo \mathbf{B} virá automaticamente. Consideraremos que a parte espacial e temporal de \mathbf{E} são separáveis de forma que podemos dizer que $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{x})f(t)$ de forma que chegamos na seguinte equação diferencial

$$\frac{\nabla^2 \mathbf{u}(\mathbf{x})}{\mathbf{u}(\mathbf{x})} - \frac{1}{c^2} \frac{1}{f(t)} \frac{d^2 f(t)}{dt^2} = 0 \quad (\text{A.8})$$

A solução da equação de onda A.8 pode ser representada por uma soma de funções de modo, $\mathbf{u}_{\mathbf{m}}(x)f_m(t)$. A única forma de A.8 ser satisfeita é se os dois termos da equação são constantes. Com isso, equação de autovalores para a parte espacial, pode então ser definida por

$$\nabla^2 \mathbf{u}_{\mathbf{m}}(x) = -k_m^2 \mathbf{u}_{\mathbf{m}}(x) \quad (\text{A.9})$$

Da equação A.3, é fácil ver que

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{m}}(x) = 0 \quad . \quad (\text{A.10})$$

E para que não apareça nenhuma corrente induzida na superfície, considerando que esta pode ter qualquer forma e é condutora, a seguinte condição de contorno deve ser levada em conta

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{u}_{\mathbf{m}}(x) = 0. \quad (\text{A.11})$$

Com tudo isso mais condição de ortonormalidade

$$\int \mathbf{u}_{\mathbf{m}'}(x) \cdot \mathbf{u}_{\mathbf{m}}(x) d^3x = \delta_{m',m} \quad , \quad (\text{A.12})$$

podemos dizer que o campo \mathbf{E} pode ser representado como uma soma de todas as funções de modo

$$\mathbf{E} = \sum_m \mathbf{u}_m(x) f_m(t). \quad (\text{A.13})$$

Agora, podemos encontrar uma equação diferencial para a parte temporal do campo \mathbf{E} substituindo A.9 em A.8

$$c^2 k_m^2 f_m(t) + \frac{d^2 f_m(t)}{dt^2} = 0. \quad (\text{A.14})$$

Para um movimento harmônico simples, podemos dizer que $c^2 k_m^2 = \omega_m^2$, que representa a frequência angular do modo.

A partir daí podemos encontrar uma expressão para o campo magnético \mathbf{B} substituindo 3.2 em A.1 e integrando os dois lados da equação resultante

$$\mathbf{B} = \sum_m \nabla \times \mathbf{u}_m(x) \left(-c \int f_m(t) dt \right). \quad (\text{A.15})$$

E definindo

$$h_m(t) = -c \int f_m(t) dt \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} h_m = -c f_m(t). \quad (\text{A.16})$$

podemos dizer que o campo \mathbf{B} pode ser dado por:

$$\mathbf{B} = \sum_m \nabla \times \mathbf{u}_m(x) h_m(t). \quad (\text{A.17})$$

É possível, a partir daí, chegarmos a uma equação diferencial para $h_m(t)$, como foi feito para $f_m(t)$. Para isso, substituímos 3.2 e 3.3 em A.2 e usando identidade A.5. A partir das equações A.9 e A.10 chegamos na conclusão que para cada m

$$\frac{d}{dt} f_m(t) = c k_m^2 h_m(t) \quad (\text{A.18})$$

e substituindo a equação A.16 nesse resultado, encontramos a equação diferencial

$$\frac{d^2}{dt^2} h_m(t) + c^2 k_m^2 h_m(t) = 0. \quad (\text{A.19})$$

Todas essas contas nos mostram que os modos do campo eletromagnéticos são análogos a infinitos osciladores harmônicos. Usando essa analogia, iremos descrever a descrição da mecânica quântica para o campo.

A.2 Um paralelo entre osciladores harmônicos e o campo eletromagnético

Sabemos que para um conjunto de osciladores harmônicos de massa unitária, o Hamiltoniano é dado por

$$H_{OH} = \sum_m \frac{1}{2} (P_m^2 + \omega^2 Q_m^2), \quad (\text{A.20})$$

em que Q_m representa a coordenada e P_m representa o momento. Como o momento linear é dado por $p = mv$ e a massa nesse sistema é unitária, podemos dizer que $P_m = dQ_m/dt$ e representa também a velocidade. Assim, podemos reescrever a equação 3.8 como

$$H_{OH} = \sum_m \frac{1}{2} \left[\left(\frac{dQ_m}{dt} \right)^2 + \omega^2 Q_m^2 \right], \quad (\text{A.21})$$

Para quantizar o campo eletromagnético é necessário encontrar os operadores para o campo elétrico e magnético. Fazemos isso encontrando o Hamiltoniano por meio da energia total do campo. Em unidades gaussianas, essa energia é dada por

$$H_{EM} = \frac{1}{8\pi} \int (E^2 + B^2) d^3x. \quad (\text{A.22})$$

Se substituirmos os resultados obtidos nas equações 3.2 e 3.3 na equação 3.6, teremos

$$H_{EM} = \frac{1}{8\pi} \sum_m (f_m^2 + k_m^2 h_m^2). \quad (\text{A.23})$$

Para chegar no resultado acima, basta lembrarmos que as funções de modo, $\mathbf{u}_m(x) \cdot \mathbf{u}_m(x)$ e que o rotacional das funções de modo $(\nabla \times \mathbf{u}_m) \cdot (\nabla \times \mathbf{u}'_m)$, satisfazem uma relação de ortogonalidade. Assim, para que as integrais dessas funções sejam diferentes de zero é necessário que $m = m'$.

Usando as relações 3.4, A.16 e a equação 3.7, podemos fazer os seguintes paralelos

$$\omega^2 Q_m^2 \leftrightarrow \left(\frac{f_m}{2\sqrt{\pi}} \right)^2 \quad \rightarrow \quad Q_m \leftrightarrow \frac{f_m(t)}{2\omega\sqrt{\pi}}. \quad (\text{A.24})$$

e

$$\left(\frac{dQ_m}{dt} \right)^2 \leftrightarrow \left(\frac{1}{2c\sqrt{\pi}} \frac{d}{dt} h_m(t) \right)^2 \quad \rightarrow \quad Q_m \leftrightarrow \frac{h_m(t)}{2c\sqrt{\pi}}. \quad (\text{A.25})$$

O Hamiltoniano para um sistema composto por osciladores harmônicos independentes, pode ser dado por

$$\sum_m \hbar\omega_m \left(a_m^\dagger a_m + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{A.26})$$

em que a relação de comutação $[a_{m'}, a_m^\dagger] = \delta_{m',m}$ deve ser satisfeita.

Com isso, os operadores posição e momento para uma massa unitária, podem ser dados por

$$Q_m = \left(\frac{\hbar}{2\omega_m} \right)^{1/2} (a_m^\dagger + a_m), \quad (\text{A.27})$$

$$P_m = i \left(\frac{\hbar\omega_m}{2} \right)^{1/2} (a_m^\dagger - a_m). \quad (\text{A.28})$$

A partir daí, podemos então definir os operadores para o campo elétrico e para o campo magnético. comparando 3.9 com A.24 teremos

$$\begin{aligned} f_m &= 2\omega_m \sqrt{\pi} Q_m \\ &= (2\pi\hbar\omega_m)^{1/2} (a_m^\dagger + a_m). \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

E comparando com a equação 3.2, chegamos ao operador para o campo elétrico

$$E(x, t) = \sum_m (2\pi\hbar\omega_m)^{1/2} [a_m^\dagger(t) + a_m(t)] \mathbf{u}_m(x). \quad (\text{A.30})$$

Usando a equação 3.3, A.16 e A.29 podemos então escrever o operador campo magnético como

$$B(x, t) = \sum_m ic \left(\frac{2\pi\hbar}{\omega_m} \right)^{1/2} [a_m^\dagger(t) - a_m(t)] \nabla \times \mathbf{u}_m(x). \quad (\text{A.31})$$

Comparando superficialmente, podemos dizer que o campo elétrico e o campo magnético, são análogos à posição e ao momento, respectivamente. Podemos ver essa semelhança quando comparamos a forma dos operadores escada nas equações 3.9 e 3.11, e nas equação 3.10 e 3.12.

Quisque facilisis auctor sapien. Pellentesque gravida hendrerit lectus. Mauris rutrum sodales sapien. Fusce hendrerit sem vel lorem. Integer pellentesque massa vel augue. Integer elit tortor, feugiat quis, sagittis et, ornare non, lacus. Vestibulum posuere pellentesque eros. Quisque venenatis ipsum dictum nulla. Aliquam quis quam non metus eleifend interdum. Nam eget sapien ac mauris malesuada adipiscing. Etiam eleifend neque sed quam. Nulla facilisi. Proin a ligula. Sed id dui eu nibh egestas tincidunt. Suspendisse arcu.

APÊNDICE B – Tempo de interação átomo-cavidade

Aqui iremos descrever a dedução do tempo efetivo do experimento [1] estudado no capítulo 4 de uma forma simples. O tempo com que o átomo interage com a cavidade é um fator muito importante, pois através dele e da taxa de transição do estado $|e\rangle$ para o estado $|g\rangle$ será possível extrair parâmetros essenciais na caracterização da quantização do campo. Eles puderam obter esse tempo através do perfil do acoplamento átomo-campo através da cavidade. Esse perfil, não é constante e tem a forma de uma gaussiana ao longo do eixo z , que se centrada em z_0 pode ser dada por

$$\Omega(z) = \Omega_0 e^{-\frac{z^2}{w^2}}, \quad (\text{B.1})$$

em que w é a cintura da gaussianana, que nesse experimento tem o valor de $5.96nm$. Uma forma de chegar numa equação para determinar o tempo é considerar Ω em função do tempo, já que a velocidade de cada átomo é constante e $z = vt$. Assim, para um feixe gaussiano, temos

$$\Omega(t) = \Omega_0 e^{-\frac{t^2}{w'^2}}. \quad (\text{B.2})$$

Para encontrarmos o tempo τ que cada átomo a velocidade v interage com a cavidade, podemos supor que a área dessa gaussiana é igual a área da função quadrada de altura Ω_0 e largura τ

$$\Omega(t) = \begin{cases} \Omega_0, & 0 \leq t \leq \tau \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}. \quad (\text{B.3})$$

Então, igualando as áreas das equações B.2 e B.3, e considerando que $z = vt$, temos

$$\begin{aligned} \Omega_0 \tau &= \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(z) \frac{dz}{v} \\ \tau &= \frac{1}{\Omega_0} \int_{-\infty}^{\infty} \Omega(z) \frac{dz}{v} \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

APÊNDICE C – Função decoerência

No capítulo 6 é exposto que um sistema quântico pode sofrer decoerência ao interagir com um ambiente. A decoerência pode acontecer em intensidades diferentes, desde uma decoerência fraca, até uma destruição total da coerência do sistema, que é quando os estados de superposição do sistema passam a ser distinguíveis e, contudo, pode ser quantificada. Mas para chegarmos nessa função, vamos começar do básico.

Em sistema aberto imerso em um ambiente, pode haver troca de interação entre ambos. Com isso o Hamiltoniano microscópico do sistema composto, pode ser escrito como

$$H = H_S + H_E + H_I, \quad (\text{C.1})$$

em que H_S é o Hamiltoniano do sistema S , H_E é o Hamiltoniano do ambiente e H_I é o Hamiltoniano da interação entre o ambiente e o sistema S . O Hamiltoniano de interação pode ser dado por

$$H_I = A_n \otimes E_n, \quad (\text{C.2})$$

em que A_n são projeções que podem ser definidas como $\sum_n |n\rangle \langle n|$ e B_n são operadores quaisquer do reservatório. Assumimos que o Hamiltoniano $H_0 = H_S + H_E$ comuta com as projeções,

$$[H_0, A_n] = 0, \quad (\text{C.3})$$

de forma que os operadores A_n , não mudam no tempo. Assim, o Hamiltoniano de interação C.2, como vimos na subseção 2.5.1, pode ser reescrito na representação de interação da seguinte forma

$$H_I(t) = \sum_n |n\rangle \langle n| \otimes E_n(t), \quad (\text{C.4})$$

no qual

$$E_n(t) = e^{iH_0 t} E_n e^{-iH_0 t}. \quad (\text{C.5})$$

Podemos descrever o operador unitário para o sistema total com a representação de interação seguindo a ideia da equação 2.44. O estado inicial do sistema é dado por

$$|\psi(0)\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \otimes |\phi\rangle, \quad (\text{C.6})$$

que ao evoluir no tempo assumirá a forma

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n C_n |n\rangle \otimes |\phi(t)\rangle, \quad (\text{C.7})$$

em que $|\phi(t)\rangle$, um dos estados do ambiente evoluído no tempo, é dado por

$$|\phi(t)\rangle = e^{-i \int_0^t ds B_n(s)} |\phi\rangle \quad (\text{C.8})$$

$|\psi\rangle$ decreve um estado emaranhado do reservatório e do sistema. Como vimos na sessão 5.1.1 a equação C.7 é uma decomposição de Schimidt e considerando que exista mais de um C_n diferente de zero, justifica o estado ser emaranhado. Esse sistema também é uma superposição de estados coerentes. A matriz densidade do sistema reduzido, pode ser então dada por

$$\rho_S(t) = Tr_B [|\psi(t)\rangle \langle\psi(t)|] = \sum_{n,m} C_n C_m^* |n\rangle \langle m| \langle\phi_m(t)|\phi_n(t)\rangle \quad (\text{C.9})$$

Como $\langle\phi_n(t)|\phi_n(t)\rangle = 1$, todos elementos da diagonal de ρ_S serão igual a 1, e portanto, não dependerão do tempo. Mas fora da diagonal esse produto interno pode tomar valores que além de ser diferentes de 1, irão depender do tempo. No instante inicial, os estados do reservatório anida estarão sobrepostos, e é isso que significa os elementos de fora da diagonal da matriz densidade reduzida ser dependente do tempo e diferente de 1. Essa superposição, pode ser escrita como

$$|\langle\phi_m(t)|\phi_n(t)\rangle| = e^{\Gamma_{mn}(t)}, \quad (\text{C.10})$$

em que $\Gamma_{mn}(t)$ é menor ou igual a zero e é chamado de *função decoerência*. Essa função serve para medir a “quantidade” de coerência que o estado perdeu, descrevendo como os elementos de fora da diagonal de ρ_S se comportam.

Em sistemas reais, em geral, o estado sofre decoerência muito rapidamente e nesse caso, seu operador densidade é nula fora da diagonal. Para facilitar, vamos tentar entender de traz para frente, olhando para um caso extremo. Vimos que o conceito de decoerência é atribuído ao fato de estados do sistema que inicialmente são correlacionados perderem essa correlação. Ao perder completamente a coerência, a matriz densidade reduzida do sistema teria apenas elementos na diagonal e não deveria ter elementos associados ao ambiente. Com isso ela poderia ser escrita na forma

$$\rho_S(t) = \sum_n |C_n|^2 |n\rangle \langle n|. \quad (\text{C.11})$$

Olhando para a equação C.9, a única forma de isso ocorrer é se $\langle\phi_n(t)|\phi_m(t)\rangle = \delta_{mn}$, ou seja, os elementos de fora da diagonal devem ser zero. Com isso, a partir da equação C.10, concluímos que a função $\Gamma_{mn}(t)$, deve assumir valores muito grandes.

Em casos extremos, quando a equação C.10 vai a zero muito rapidamente, comparado ao tempo de decoerência, τ_D , temos que

$$\langle \phi_n(t) | \phi_m(t) \rangle \rightarrow \delta_{mn} \quad \text{quando } t \gg \tau_D. \quad (\text{C.12})$$

Depois de passar um tempo $t \gg \tau_D$, a superposição coerente de estados da matriz densidade deixa de existir, e ρ_S é descrito numa base $|n\rangle$, que é chamada de *base preferencial*.

Resumindo, quando um sistema aberto que está em uma superposição coerente sofre interação com um reservatório, ao evoluir, eles se tornam emaranhados. O reservatório por sua vez, continua interagindo com o sistema de forma que essa interação pode ter os efeitos de uma medição. Com isso, ao tirar o traço parcial de forma a excluir o ambiente, vimos que a densidade reduzida do sistema assume a forma de uma matriz diagonal, em que o estado assume uma base preferencial e o emaranhamento é também destruído.