

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA

ROBERTO DOBAL BALDIJÃO

TRANSFORMAÇÃO DE ESTADOS E MEDIÇÕES SEQUENCIAIS:
UMA PROPOSTA EXPERIMENTAL

BELO HORIZONTE
2016

Roberto Dobal Baldijão

Transformação de estados e medições sequenciais: uma proposta experimental

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Física do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua

Belo Horizonte

2016

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B177t Baldijão, Roberto Dobal.
Transformação de estados e medições sequenciais: uma proposta experimental / Roberto Dobal Baldijão. – 2016.
156f. : il.

Orientador: Sebastião José Nascimento de Pádua.
Dissertação (mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais,
Departamento de Física.
Bibliografia: f. 130-133.

1. Óptica quântica. 2. Teoria quântica. I. Título. II. Pádua, Sebastião José Nascimento de. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Física.

CDU – 535 (043)



Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Física
Caixa Postal 702
30.123-970 Belo Horizonte - MG - Brasil

Telefone (xx) (31) 3499 5637
(xx) (31) 3499 5633
Fax (xx) (31) 3499 5688
(xx) (31) 3499 5600
e-mail pgfisica@fisica.ufmg.br

ATA DA SESSÃO DE ARGUIÇÃO DA 568ª DISSERTAÇÃO DO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM FÍSICA DEFENDIDA POR Roberto Dobal Baldijão, orientado pelo professor Sebastião José Nascimento de Pádua, para obtenção do grau de **MESTRE EM FÍSICA**. Às 09:00 horas de cinco de agosto de 2016, na sala 4129 do Departamento de Física da UFMG, reuniu-se a Comissão Examinadora, composta pelos professores **Sebastião José Nascimento de Pádua** (Orientador - Departamento de Física/UFMG), **Marcelo de Oliveira Terra Cunha** (IMECC/UNICAMP), **Rafael Luiz da Silva Rabelo** (Departamento de Matemática/UFMG) e **Breno Marques Gonçalves Teixeira** (Instituto de Física/USP), para dar cumprimento ao Artigo 37 do Regimento Geral da UFMG, submetendo o bacharel **Roberto Dobal Baldijão** à arguição de seu trabalho de dissertação de Mestrado, que recebeu o título de **“Transformação de estados e medições sequenciais: uma proposta experimental”**. Às 14:00 horas do mesmo dia o candidato fez uma exposição oral de seu trabalho durante aproximadamente 50 minutos. Após esta, os membros da comissão prosseguiram com a sua arguição e apresentaram seus pareceres individuais sobre o trabalho e o parecer final da comissão, concluindo pela aprovação do trabalho.

Belo Horizonte, 05 de agosto de 2016.

Prof. Sebastião José Nascimento de Pádua
Orientador do estudante
Departamento de Física/UFMG

Prof. Marcelo de Oliveira Terra Cunha
IMECC/UNICAMP

Dr. Rafael Luiz da Silva Rabelo
Departamento de Matemática/UFMG

Dr. Breno Marques Gonçalves Teixeira
Instituto de Física/USP

Candidato

A minha avó querida, Délia Nelly Campiglia. Que sorte eu tenho de ser seu neto!

*A meus queridos pais, Carlos Eduardo Baldijão e Maria Cristina Dobal;
à minha incrível namorada Maria Luísa Buzzo;
aos amigos, todos.*

Agradecimentos

[...]
Choro saber que os açudes
Não são o mar,
Que não se pode guardar
Em alguidares de areia,
Choro o destino das sereias
E o desatino do astrolábio,
Choro saber que o homem sábio
Pode morrer
Se não souber nadar

Barco–Chico César

Agradeço a meus pais. Tudo o que tenho e sou é graças a essas duas pessoas, com quem sempre, e a todo momento, aprendo. Aprendo sobre física, saúde, cultura, história... Vida. Obrigado por serem meus eternos professores e companheiros. Pessoas que vou admirar pra sempre.

Agradeço à Luísa, incrível e incançável; impossível encontrar um ser humano melhor. Agradeço por toda ajuda que me deu, inclusive pra escrever essa dissertação. Agradeço a você, amor, por toda paciência e dedicação que sempre me deu em todos os momentos que precisei, sem pestanejar, duvidar. Essa sua certeza, nossa certeza, me move a todo momento.

Agradeço ao Sebastião, que sempre foi um orientador muito presente, bem-humorado e tem tido paciência e calma descomunais para me apresentar à pesquisa, compartilhando comigo um pouco do tanto que sabe. Sua humildade é impressionante. Além de um professor, é uma pessoa que eu admiro.

Aos queridos Xavier e Raissa: uma amizade assim, a gente já sabe que é pra vida toda e que não tem explicação. Sem vocês, não teria tido o prazer que tive em estar na física. Obrigado por tudo que temos e que teremos. E vai ser muita coisa.

Ao Gil e ao Mário: amizades e broderagem que não tem preço. Sério, vocês sabem. Broders de lab ou imigração, e os dois broders de casa – junto com a Lud! Que casa incrível, depois de tanta treta... Juntando esses três, Marcello, Sheilla, Davi, Tassius, Jéssica e Tomás: graças a vocês – e algumas catuabas – esses dois anos tiveram uns rolês muito doidos. E quero continuar tendo! Claro, ao João, que embarcou com a gente nessa, espero não ter se arrependido.

À todo pessoal do lab: Tutu, Wawá, Paula, Denise, Blusão, Rafael, Paresqui e Patrick. Esse lab é muito divertido e tem um ambiente pra aprender física e dar risada mesmo quando a natureza insiste em não dar gráficos bonitos. Adoro vocês.

Ao Jader, que nos aguentou vários dias e que colabora conosco.

Aos queridos do Cefisma – CA do IFUSP– Atlética, movimento estudantil e agregados. Todos vocês: Mari, Rê, Maya, Maíra, Thandryus, Theo, Adolfo, Zeca, Bruna, Dimy, Cata, Pêssego, Gubolin, Júlio, Xusp e André. O que eu vivi na graduação, que vou levar a vida inteira e faz diferença em quem me formei e no meu mestrado, não tem preço e não quero perder nunca! Vocês são uns lindos, e lindos assim a gente quer a vida inteira.

Agradeço a Vivian: uma amizade dessas não tem preço, motivo e nem explicação. É linda e cheia de visitas!

À família da Luísa, todos, sem exceção: pessoas maravilhosas, com quem aprendo muito, admiro, e me divirto muito. Obrigado pela acolhida incrível que vocês me deram.

Ao Enlight, professores e alunos; aprendi muita física e maneiras de encarar a pesquisa. Particularmente, ao Cris, que discutiu comigo alguns assuntos matemáticos incontáveis vezes, por incontáveis horas, só pra me ajudar. Obviamente, agradeço a amizade sincera que temos também. Agradeço ao Breno, que colaborou com muita paciência pro surgimento dessa proposta, e ao Rabelo, que aguentou diversas vezes a minha pentelhação na sala dele. Vocês, me motivam muito, com certeza. Ao Leo Neves, que inúmeras vezes discutiu conosco acerca dos mistérios dos SLM's...

À Juliana e todo o pessoal da secretaria, ao Paulo Sérgio, à Shirley e todo o pessoal da biblioteca. Graças a competência de vocês, sei que ganhei muito. Espero não ter criado problemas demais...

Aos amigos do colegial: David, Alê, Pietra e Farah, Romeu, Alice, Ana, Ju, Marcelo, Cláudia. Vocês que me acompanham sempre, e amo isso. Ao David, também agradeço por todas as ajudas matemáticas ao longo da graduação!

Ao café... Porque, né?

Ao Chico César.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES), e portanto agradeço a tal agência. Também extendo os agradecimentos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

Minha graduação foi paga com o ICMS do estado de São Paulo, e pós graduação, pagos com os tributos da união; ou seja, agradeço a todos os brasileiros. Mas, não igualmente. Com carga tributária tão regressiva, que pesa principalmente aos de renda mais baixa é a esses que direciono esse agradecimento financeiro. Espero sempre fazer meu melhor para

me formar adequadamente e, quem sabe, devolver um pouco de tudo o que vocês me dão. Não descansarei, estando na academia, enquanto a universidade não for um lugar para todos. Espero ajudá-los no que puder.

A todos os que agradei e aqueles que devia tê-lo feito, mas esqueci: sei que não sou sábio (quem sabe um dia). Mas com certeza, se consegui nadar até aqui, foi graças a vocês. Por isso o meu mais sincero obrigado.

Resumo

Realizar transformações em estados quânticos é importante e necessário para implementar protocolos de computação quântica, simulações e estudos experimentais de fundamentos de teoria quântica. De porte de um arranjo capaz de fazê-lo, pode ser possível realizar medições sequenciais, que por sua vez abrem outras possibilidades para aplicações e estudos fundamentais, como contextualidade.

A implementação experimental de transformações é extremamente dependente de qual grau de liberdade é utilizado para codificar os estados do espaço de Hilbert de interesse. Para qudits fotônicos, têm sido utilizados, entre outros, graus de liberdade espaciais como caminho ou estados de fenda. Para o primeiro caso, as operações podem ser realizadas por interferômetros, sendo possível realizar qualquer operação unitária, em princípio. Apesar disso, esse método não é automatizado; para modificar a operação realizada, pode ser necessário alterar substancialmente o interferômetro. Para o caso de estados de fenda, o uso de moduladores espaciais de luz controlados por computador atribui automatização ao processo de transformação de estados. Entretanto, têm sido um desafio atuar operadores descritos por matrizes com elementos não nulos fora da diagonal.

A questão a que esse trabalho se dedica, então, é a de implementar mapas deste tipo em estados fotônicos espaciais de forma automatizada. Apresentamos uma proposta experimental que mostra-se capaz de realizar essas transformações de estado utilizando um modulador espacial de luz e interferômetros em estados codificados em feixes gaussianos atenuados. Apesar do uso de interferômetros, a transformação implementada é completamente definida pela máscara de fase utilizada no modulador, o que garante que todo o controle das operações seja automatizado.

Estudamos os limites em que essa proposta permite implementar projeções, permutações e descrevemos os elementos de POVM.

Além disso, são estudados teoricamente alguns limites e possibilidades da proposta, além de discutidas condições importantes de serem garantidas em laboratório para a correta implementação. Apresentamos e discutimos alguns resultados experimentais preliminares com laser intenso, que mostram um bom acordo qualitativo com o esperado.

Palavras-chave: Medições sequenciais, Ótica Quântica, Modulador Espacial de Luz, Teoria Quântica

Abstract

State transformations in quantum states are important and necessary for experimental implementations of quantum computation protocols and for realizations of experiments on foundations of quantum theory. Being capable of doing quantum operations in the laboratory gives one the possibility to make sequential measurements, which brings out new possibilities for applications and conceptual studies of this theory.

Depending on which degree of freedom the quantum state is encoded, the experimental implementation of the transformation can change substantially. In the case of photonic qudits, spatial degrees of freedom have been used, as photon paths or slit states. For states encoded in photon paths any unitary can be implemented by interferometers, in principle. However, this method it is not automated, and that makes it difficult to change the implemented operation in a practical way. In the case of slit states as spatial degree of freedom to encode qudits, the use of spatial light modulators to prepare or operate on the states makes it possible to automate transformations. On the other hand, it has been a challenge to implement transformations that are not described by diagonal matrices.

In this context, the question that this work tries to answer is how to make automated state transformations on spatial photonic qudits. We present an experimental proposal that is capable to do so, using a phase-only spatial light modulator (SLM) and interferometers, acting on states encoded in attenuated parallel Gaussian beams. The key point of our proposal is that implemented operation is entirely dependent on the phase modulation of the SLM, which guarantees that the transformation is automated.

We have studied the limits in which this proposal can implement projections and permutations and describe the elements of POVM that can be accounted to with the proposed setup.

We discuss theoretical limitations and possibilities, as so as approximations that may be important to guarantee in the laboratory such that the proposal can be correctly implemented. We also give preliminary experimental results with non-attenuated Gaussian beams. These results show good qualitative agreement with the theoretical predictions, suggesting that the proposal is feasible.

Keywords: Sequential Measurements, Quantum Optics, Spatial Light Modulator, Quantum Theory.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	13
1.1	Medições sequenciais	14
1.1.1	Um exemplo em contextualidade: interferômetros	18
1.2	Moduladores espaciais: inspiração	22
1.3	Objetivos e visão geral	24
I	CONSIDERAÇÕES TEÓRICAS E PROPOSTA	26
2	CODIFICAÇÃO EM ESTADOS DE FEIXES GAUSSIANOS	27
2.1	Aproximação Paraxial e feixes gaussianos	27
2.2	Estados quânticos de feixes gaussianos	34
2.2.1	Do clássico ao quântico	34
3	A PROPOSTA EXPERIMENTAL	39
3.1	Notação e sistema de referência	39
3.2	Cálculo do operador campo e arranjos possíveis	41
3.3	Um caminho de entrada	42
3.3.1	Arranjo sem lente cilíndrica	43
3.3.2	Arranjo com lente cilíndrica	45
3.4	Dois caminhos de entrada	46
3.4.1	Arranjo sem lente cilíndrica	49
3.4.2	Arranjo com lente cilíndrica	52
3.5	3 caminhos de entrada e generalização para n caminhos	53
3.5.1	Arranjo sem lente cilíndrica	53
3.5.2	Arranjo com lente cilíndrica	55
3.5.3	Generalização para n caminhos	55
3.6	Pequeno resumo das condições experimentais e estado quântico final	57
4	OPERAÇÕES COM REDES DE DIFRAÇÃO	60
4.1	A matriz \mathcal{M} e as funções Φ_i	60
4.2	Algumas redes de difração e seus efeitos	61
4.2.1	Rede Binária	61
4.2.2	Redes Lineares Ideal e Pixelada	63
4.2.3	Rede Triangular ideal	65
4.2.4	Rede Triangular pixelada	66
4.2.5	Rede Senoidal	69

4.3	Outras técnicas para manipulação dos coeficientes	70
4.3.1	Redes deslocadas	70
4.3.2	Cancelamento e alteração do módulo de C_{im}	72
4.3.2.1	Composição de redes	73
4.3.3	Resumo	77
5	OPERAÇÕES POSSÍVEIS	79
5.1	Rotação em \mathcal{H}_∞	80
5.2	Projeções	86
5.2.1	resumo das projeções e permutações	90
5.3	POVMs	92
II	RESULTADOS EXPERIMENTAIS PRELIMINARES	98
6	RESULTADOS EXPERIMENTAIS PRELIMINARES	99
6.1	Equipamentos utilizados e calibrações	99
6.2	$C_m ^2$ para arranjo de 1 caminho; caracterização das redes	106
6.2.1	Rede binária	106
6.2.2	Linear e Linear Inversa	110
6.2.3	Triangular	113
6.2.4	Rede senoidal	115
6.2.5	Conclusões parciais	118
6.3	Mais caminhos, interferômetro presente	119
6.3.1	Algumas projeções	123
6.3.2	Conclusões parciais	127
III	CONCLUSÃO	128
7	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS	129
7.1	Conclusão	129
7.2	Perspectivas	129
	REFERÊNCIAS	131
	APÊNDICES	135
	APÊNDICE A – ÓTICA DE FOURIER	136
A.1	Aproximação escalar	136
A.2	Propagação: campo e espectro angular	137

A.2.1	Aproximação de Fresnel ou paraxial	140
A.2.1.1	Validade da aproximação de Fresnel e regiões de interesse	141
A.2.2	Aproximação de Fraunhofer	143
A.2.2.1	Validade da aproximação de Fraunhofer	143
	APÊNDICE B – ATUAÇÃO DE ELEMENTOS ÓTICOS	146
B.1	Lentes	146
B.1.1	algumas configurações especiais	148
B.2	SLM: alguns princípios de funcionamento e atuação	152
B.3	Calcitas como deslocadores de feixes	154

1 Introdução

A mecânica quântica nasceu no século XX, explicando fenômenos cuja existência era um mistério profundo aos olhos das teorias clássicas. Para nomear alguns, pode-se ressaltar o espectro de corpo negro, efeito fotoelétrico, espectro do hidrogênio e, mais adiante no tempo, o experimento de Stern-Gerlach [1]. Inicialmente a partir de hipóteses *ad hoc*, Planck, Einstein, Bohr, entre outros, conseguiram que experimentos relacionados a esses fenômenos passassem a ter resultados corretamente ajustados por curvas teóricas. Essas hipóteses sofreram um longo processo nas mãos e mentes de muitos (como Heisenberg, Schrödinger e Von Neumann, por exemplo), sendo substituídas e embasadas matematicamente, formando-se então um corpo a que podemos nomear de teoria. Essa teoria segue sendo confirmada experimentalmente, com resultados extremamente precisos; alguns dos fenômenos já explicados só puderam julgar em favor da mecânica quântica muitos anos depois de seu surgimento¹.

A teoria quântica, assim, esclareceu muitos mistérios, mas com isso suscitou (e ainda suscita) novos debates acerca da realidade física – e seu impacto em nossa visão de mundo é inconcluso, com interpretações e embasamentos filosóficos muito diferentes vigorando ainda hoje [2–4]. Famosos debates relacionados a isso foram travados por Einstein e Bohr, e consequências fortes para o desenvolvimento da própria teoria vieram desses debates [5–7]. Todas as diferentes interpretações, entretanto, dão à teoria quântica qualidades bastante diversas da teoria clássica e que desafiam o senso comum [4].

Uma dessas características está relacionada ao fato que, nessa teoria, medir não significa apenas extrair informações de um sistema, mas alterá-lo [8]. No caso de uma medição projetiva de posto 1, $|\phi\rangle\langle\phi|$ por exemplo, um estado (puro) inicial $|\Psi_0\rangle$, após a medição, é modificado para $|\Psi_f\rangle$ dado por:

$$|\Psi_f\rangle = \frac{\langle\phi|\Psi_0\rangle}{|\langle\phi|\Psi_0\rangle|} |\phi\rangle, \quad (1.1)$$

desde que $|\langle\phi|\Psi_0\rangle| \neq 0$. Assim, o estado de saída para esse tipo de medição será invariavelmente $|\phi\rangle$ (a menos de uma fase global e desde que a projeção não seja nula). Além disso, o que se pode obter em teoria quântica são as probabilidades de resultados a serem obtidos, e não quais resultados serão exatamente – e esse é um ponto de grande fomentação dos debates mencionados acima.

Outra dessas características bastante divergentes do caso clássico – certamente relacionada com a já mencionada – é a existência de medições não compatíveis: não podem ser realizadas conjuntamente. Para medições projetivas, isso está relacionado com

¹ Como a discretização do campo eletromagnético em fótons, por exemplo.

não possuírem uma base comum que diagonaliza os operadores relacionados a elas. Essa característica é muitas vezes expressa em livros-texto [9,10] através das relações de incerteza envolvendo duas medições não compatíveis.

Dentro desse contexto em que existem medições não compatíveis e medir significa alterar o estado inicial, é interessante o estudo de *medições sequenciais*: N medições realizadas uma após a outra. Afinal, apesar da alteração do estado na primeira medição, será possível obter informações sobre o estado inicial nas medições subsequentes? E se forem realizadas medições compatíveis, apenas? Dado que o que obtemos da teoria quântica são probabilidades: esse tipo de alteração entre medições, que não encontra análogo clássico, pode ser explicado através de conexões com a teoria clássica de probabilidades, ou é necessário modificá-la? Essas perguntas, e muitas outras, recebem atenção até hoje (vide [11], [12] e [13], respectivamente).

De fato, com esse tipo de esquema sequencial é possível estudar questões fundamentais da teoria quântica [14,15] e algumas características “não-clássicas” podem ser reveladas e entendidas; é um esquema que contribui, portanto, para iluminar os debates mencionados. Além disso, realizar medições sequenciais também pode ter resultados práticos, como:

- Uso para computação quântica [16];
- Geração de emaranhamento [17];
- Tomografia de processo [18].

Desenvolver um método em que seja possível realizar medições sequenciais com fótons é uma das grandes motivações desse trabalho; portanto vamos nos ater a alguns detalhes desse tipo de arranjo.

1.1 Medições sequenciais

A realização de medições sequenciais tem duas características importantes. A primeira é relativa ao estado pré- e pós medição: uma medição altera o estado inicial, a medição seguinte recebe esse estado modificado e sobre ele atua, e assim por diante. Ou seja, *o estado após cada medição deve ser aquele resultante da atuação do operador de medição no estado pré-medição* [15]. A segunda característica é que, em cada medição, deve ser possível guardar o resultado obtido, para que se atribua a cada medição o resultado dela advindo. Um esquema que representa medições sequenciais e garante essas duas características é dado na figura 1.

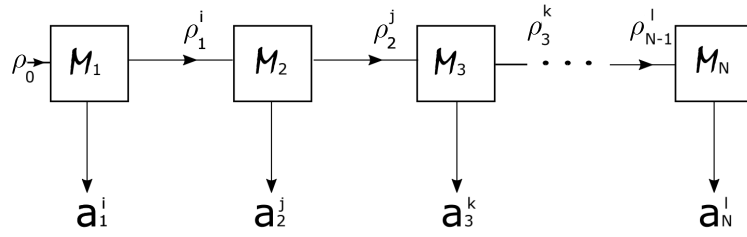


Figura 1 – Esquema representando medições sequenciais.

O esquema da figura 1, apesar de garantir as duas características para medições sequenciais, traz complicações para a implementação com fótons: registrar a resposta para cada medição significaria detectá-lo e, portanto, destruí-lo. Isso impõe um problema, resolvido na referência [19] : uma operação unitária é realizada num estado inicial e os resultados são separados em n saídas distinguíveis, onde n é o número de resultados possíveis não-degenerados (os degenerados não precisam ter saídas diferentes). Em cada saída, segue a realização da operação unitária seguinte, com as respectivas n' saídas, cada uma relacionada a um resultado da segunda medição. Após a última operação unitária, as detecções são feitas. Isso está representado na figura (2).

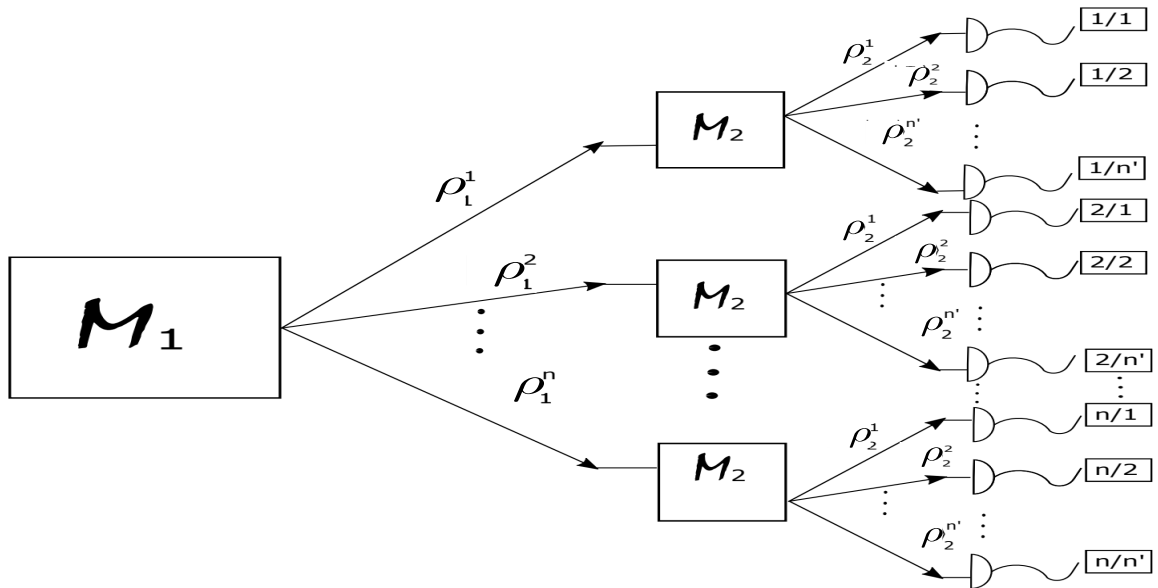


Figura 2 – medições sequenciais para fótons. As caixas após os detectores representam os valores de i e j em a_1^i e a_2^j .

Pode-se ver que o estado após a saída de \mathcal{M}_1 pode ser $|\Psi\rangle_1^i$ para qualquer $i \in \{1, \dots, n\}$, que enumera os resultados não degenerados possíveis para essa medição. O mesmo acontece com \mathcal{M}_2 , que tem n' resultados possíveis. Pode-se, claramente, estender isso a $N > 2$ de maneira simples. Assim, se um fóton é detectado na saída de cima no esquema, isso corresponde ao resultado a_1^1 na primeira medição e a_2^1 na segunda. Importante reparar que, nesse esquema, as operações $\{\mathcal{M}_i\}$ são unitárias que devem separar os diferentes

resultados para uma determinada medição, resultados esses a serem conhecidos apenas no final do processo, na detecção.

Como realizar esse tipo de operação em fótons? Esse é o cerne do problema a que passamos a nos dedicar (que será posteriormente detalhado e se tornará mais específico); ele está relacionado com a primeira característica sobre medições apresentada na figura 2, que é como implementar experimentalmente um operador de medição em um estado fotônico de modo que seja possível realizar uma medição em sequência no estado de saída? Isso pode ser escrito matematicamente da seguinte maneira: se $\{|X_i\rangle\}$ é uma base do espaço de Hilbert, na qual $|\Psi_0\rangle = \sum_{i=1}^d B_i |X_i\rangle$, o problema é como realizar

$$|\Psi_0\rangle \rightarrow \mathcal{M} |\Psi_0\rangle = \sum_{i,j} B_i M_{ij} |X_j\rangle, \quad (1.2)$$

onde M_{ij} são os coeficientes de \mathcal{M} na base dada. É a essa questão que vamos nos dedicar, e \mathcal{M} não precisa ser, necessariamente, unitária. Se trata de uma questão de transformação de estados, em que queremos ter controle sobre \mathcal{M} e sermos capazes de realizar operações sequenciais, obtendo o resultado de cada operação como no esquema apresentado acima. É sabido que, para dimensão $d = 2$, é possível, no caso de fótons, utilizar o grau de liberdade de polarização. Com placas de onda $\frac{\lambda}{4}$ e $\frac{\lambda}{2}$ é possível realizar qualquer operação unitária em duas dimensões [20]. Utilizando cubos polarizadores, pode-se projetar em estados ortogonais. A questão fica mais interessante, entretanto, para dimensões maiores, a começar com $d = 3$: nesse caso, somente a polarização não é capaz de codificar os estados.

Para entender algumas dificuldades da questão colocada, interessa ressaltar que um método que permite codificar estados em espaços de dimensões maiores, com fótons, é aquele em que se utiliza estados de fenda. Esses estados são gerados discretizando-se um espaço contínuo de posição de um feixe de luz, acrescentando-se um plano de fendas no plano transversal à propagação de um feixe laser atenuado ou à propagação de pares de fótons gêmeos gerados por conversão paramétrica descendente [21–23]. De maneira simplificada – a maneira formal e detalhada pode ser encontrada nas referências apontadas –, detectar um fóton em uma fenda l ou em uma l' caracteriza a base ortogonal enquanto o número de fendas, por sua vez, determina a dimensão do espaço. De fato, trabalhos com dimensão 7, 8 e 16 são relatados nas referências [21, 24]. Vê-se assim que esse método de codificar é favorável a trabalhos com dimensões intermediárias.

É possível implementar no laboratório um operador em estados assim codificados, como descrito na equação (1.2)? Para descrever os avanços já feitos nesse sentido, vamos escrever o estado após o plano das fendas como $|\Psi_0\rangle = \sum_{l=1}^d \beta_l |l\rangle$. Nas referências [24–26], pode-se ver que é possível, além de adicionar fases independentemente em cada fenda, bloqueá-las ou atenuá-las independentemente usando moduladores espaciais de luz (um destes será descrito adiante), placas de onda e polarizadores. Essas operações são todas

descritas por matrizes diagonais. Ou seja:

$$\mathcal{M}_{SLM} = \sum_l t_l \alpha_l |l\rangle \langle l|, \quad (1.3)$$

em que t_l é real (responsável pela atenuação) e α_l é a fase dada pelo SLM em conjunto com as placas de onda e polarizadores. Na referência [27], um modulador espacial de luz é utilizado para simular (entre outros) a interação de um oscilador harmônico com um reservatório térmico usando operações desse tipo. Essa interessante simulação, devido à limitação às operações diagonais, é restrita à atuação de mapas sem saltos quânticos (vide [27]). Surge, então, a questão de obter operações que sejam descritas por matrizes que possuem elementos não nulos fora da diagonal em qudits espaciais.

Nas referências [24–26], isso é feito com um modulador espacial da seguinte maneira: efetua-se a transformada de Fourier ótica (vide (B.1.1)) do campo no plano após o modulador, obtendo-se um padrão de interferência. Cada ponto do padrão de interferência possui uma intensidade; na referência [26], é mostrado que a detecção em cada um desses pontos corresponde à diferentes projeções, $\langle \phi | \Psi_0 \rangle$. Isso está representado na figura 3.

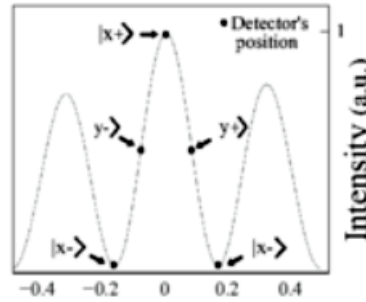


Figura 3 – Imagem retirada da referência [26]. A detecção em cada ponto do plano de interferência possui a estatística da projeção do estado $|\Psi_0\rangle$ em um diferente estado.

Adicionando fases (α_l) e atenuando cada fenda independentemente (t_l) antes de efetuar a transformada de Fourier ótica, pode-se mostrar [24] que no centro do padrão a estatística dos fótons lá detectados seguirá:

$$\left| \sum_{l=1}^d \beta_l t_l e^{i\alpha_l} \right|^2 \propto |\langle \phi | \Psi_0 \rangle|^2, \quad (1.4)$$

e vemos que essa é a estatística da projeção do estado de entrada no estado $|\phi\rangle = \sum_{l=1}^d t_l e^{-i\alpha_l} |l\rangle$. Modificando t_l e α_l pode-se mudar os estados nos quais a projeção é feita. Nesse momento aparece um ponto importante para o presente trabalho: não se está, de fato, efetuando a projeção do estado $|\Psi_0\rangle$ no estado $|\phi\rangle$, mas obtendo a estatística dessa

projeção: para realizá-la, como visto em (1.1), o estado de saída deve ser aquele que define a projeção. Para de fato obter esse estado com essa estratégia, seria necessário re-prepará-lo no estado projetado após a seleção do centro do padrão – o que acarreta perda de eficiência, uma vez que muitos fótons são perdidos nesta seleção², mesmo que o estado de entrada seja o próprio $|\phi\rangle$. Nesse método, portanto, a primeira característica necessária a um esquema para medições sequenciais (a obtenção do estado pós-medição correto) não é naturalmente obedecida. Assim, a questão de implementar o que é expresso na equação (1.2) em qudits fotônicos espaciais, atendendo às exigências para medições sequenciais, não é trivial.

Para vermos uma solução possível, vamos analisar com alguns detalhes o exemplo da referência [28], relacionada a um dos aspectos fundamentais que medições sequenciais ajudam a revelar/estudar: contextualidade.

1.1.1 Um exemplo em contextualidade: interferômetros

A ordem das árvores não altera
o passarinho

A Ordem das Árvores - Tulipa
Ruiz
Será?

A questão de transformação de estados fotônicos capaz de ser utilizada para medições sequenciais foi abordada e, em certo sentido resolvida na referência [28] (entre outras), no âmbito do estudo de contextualidade. Embora contextualidade não seja o foco deste trabalho – detalhes e formalismos podem ser encontrados em nas referências [12, 14, 15, 29] –, vale dizer algumas palavras acerca do tipo de estudo experimental usualmente utilizado.

Em primeiro lugar, como apontado acima, se nos restringirmos a efetuar apenas medições compatíveis em um único sistema, será possível obter uma teoria de variáveis ocultas³ que complete a mecânica quântica? Que características essa teoria deve ter para conseguí-lo e, ainda assim, recuperar os já bem-sucedidos resultados da teoria quântica?

Uma característica que é interessante de garantir em uma teoria deste tipo é que as medições não dependam do contexto⁴ em que são realizadas. Essa característica, chamada de *não - contextualidade*, pode ser formulada (de maneira simplificada) nos seguintes termos: os resultados (determinísticos) de uma medição em termos das variáveis ocultas não podem depender de qual medição compatível for feita conjuntamente. Em

² Além disso, ocorrem efeitos de difração na seleção do centro do padrão que devem ser analisados atentamente no caso de uma tentativa dessas.

³ Uma teoria de variáveis ocultas determina o estado do sistema de modo que os valores para um observável estão definidos completamente [15]. Vide [14] para uma ligeira generalização.

⁴ Uma definição formal de contexto pode ser encontrada em [14] ou [30].

termos de nosso processo sequencial, essas probabilidades não devem depender de medições compatíveis feitas no sistema logo antes, ou que serão feitas posteriormente. A pergunta, então, passa a ser: É possível explicar as correlações que existem entre os resultados de medições (sequenciais) de um sistema quântico com uma teoria de variáveis ocultas não-contextual?

Sob a hipótese de não-contextualidade – e algumas hipóteses adicionais, em alguns casos – são formuladas desigualdades que teorias desse tipo devem satisfazer. Se uma desigualdade for violada pela teoria quântica, uma teoria de variáveis ocultas não é capaz de reproduzir os resultados obtidos pela mecânica quântica. Se experimentalmente violadas, indicam de fato que aquele candidato não-contextual a teoria de variáveis ocultas não pode ser aceito como descrição dos fenômenos naturais, já que não prevê resultados que são obtidos no laboratório.

No trabalho de Cabello et al. [28], para testar as desigualdades ali propostas é necessário realizar rodadas com duas operações compatíveis implementadas sequencialmente, i.e. $A_i A_j$ tal que $[A_i, A_j] = 0$. Essas medições são descritas a seguir (em que \mathcal{I} é a identidade do espaço em questão):

$$A_i = \mathcal{I} - 2|v_i\rangle\langle v_i|, \text{ em que os estados dos projetores são dados por} \quad (1.5)$$

$$|v_1\rangle^T = \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1); \quad |v_{5,6}\rangle^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm 1); \quad |v_{11}\rangle^T = (1, 0, 0);$$

$$|v_2\rangle^T = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1); \quad |v_{7,8}\rangle^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, \pm 1); \quad |v_{12}\rangle^T = (0, 1, 0);$$

$$|v_{3,4}\rangle^T = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, \mp 1); \quad |v_{9,10}\rangle^T = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm 1, 0); \quad |v_{13}\rangle^T = (0, 0, 1);$$

Vamos entender agora o que significa realizar a medição relativa a um observável como A_i . Este atribui resultado -1 à projeção no estado $|v_i\rangle$ e resultado $+1$ à projeção no subespaço ortogonal a esse estado. Isso pode ser visualizado se escrevermos a identidade como $\mathcal{I} = |v_i\rangle\langle v_i| + \sum_{j_i} |v_{j_i}\rangle\langle v_{j_i}|$ onde $\{|v_{j_i}\rangle\}$ são dois vetores ortogonais entre si e ortogonais a $|v_i\rangle$. Com essas considerações, os operadores A_i podem ser entendidos da seguinte maneira:

$$A_i = |v_i\rangle\langle v_i| + \sum_{j_i} |v_{j_i}\rangle\langle v_{j_i}| - 2|v_i\rangle\langle v_i| \quad (1.6)$$

$$= + \sum_{j_i} |v_{j_i}\rangle\langle v_{j_i}| - |v_i\rangle\langle v_i| \quad (1.7)$$

E vemos claramente que esses operadores tem um auto-valor não-degenerado (-1), correspondente a projetar no estado $|v_i\rangle$, e um auto-valor degenerado ($+1$), correspondente a projetar no subespaço expandido pela soma dos projetores nos estados ortogonais a $|v_i\rangle$. Portanto, realizar medições do observável A_i significa ser capaz de *separar* ou *distinguir*

a projeção em $|v_i\rangle$ e em seu subespaço ortogonal. É interessante analisar o que significa projetar experimentalmente. Por exemplo, o projetor no estado $|v_3\rangle$:

$$|v_3\rangle\langle v_3| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

Uma maneira de interpretar como atua esse projetor é entender suas transformações na base computacional: as componentes relativas a $(1, 0, 0)^t$ e $(0, 1, 0)^t$ são transformadas em $(1/\sqrt{3})(1, 1, -1)^t$ sem fase relativa, enquanto a componente do estado inicial em $(0, 0, 1)^t$ é transformada no mesmo estado, mas com uma fase π relativa às duas componentes anteriores. Essas transformações devem ser feitas de modo que as componentes finais mantenham coerência. Como implementar este tipo de operação em fótons, distinguindo classicamente as projeções adequadas e permitindo a realização de transformações sequenciais? Nessa mesma referência, essa questão foi resolvida da seguinte maneira: o espaço é codificado em estados de caminho (dados pela fonte descrita na figura 4) e as operações são realizadas por interferômetros, que permitem mudanças de um caminho para outro de maneira coerente.

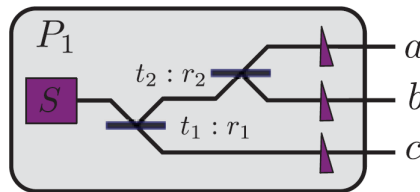


Figura 4 – Fonte de caminhos para realizar medições sequenciais com interferômetros. A fonte (S) prepara estados de fóton único. Estados de caminho são criados controlando as transmitâncias e reflectâncias dos divisores de feixe (linhas horizontais azuis) e cunhas são usadas para adicionar as fases desejadas. Retirada da referência [28].

A preparação do estado é feita através da geração de feixes de laser atenuado, representado por P na imagem, com a subsequente separação em caminhos através de cubos com transmitância e reflectância controlável; por fim, fases relativas são adicionadas através das cunhas. A base computacional é definida, assim, pelos caminhos a, b e c .

Vejamos a operação dada por A_3 . Como visto, esta pode ser entendida como a separação entre a projeção $|v_3\rangle\langle v_3|$ e a projeção no subespaço ortogonal a $|v_3\rangle$, com a subsequente atribuição dos valores ± 1 . Esta é realizada pelo interferômetro na figura 5.

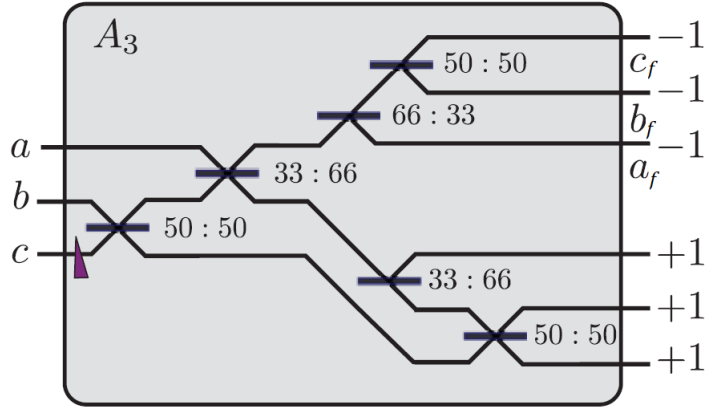


Figura 5 – Interferômetro para o operador A_3 . A parte superior corresponde à projeção no estado $|v_3\rangle$. A inferior à projeção no subespaço ortogonal. Adaptada de [28].

Esse interferômetro é constituído, no fundo, por duas etapas (cada uma composta por um interferômetro menor): primeiro, uma mudança da base computacional para uma base contendo $|v_3\rangle$. Isso é realizado pela fase de π introduzida no caminho ‘c’ em conjunto com os dois primeiros separadores de feixe (BS). Vale lembrar a convenção de que, na superposição das duas entradas de um BS, a componente refletida do caminho inferior recebe fase π . No primeiro BS, que recebe de input os caminhos b e $-c$, o output de cima é resultado de interferência sem fase relativa adicional entre os inputs, enquanto o caminho de baixo é resultado de interferência destrutiva entre os dois caminhos. Resumindo, a atuação até a saída do primeiro BS é dada por:

$$(a, b, c)^t \xrightarrow{\text{fase}} (a, b, -c)^t \xrightarrow{\text{BS}} \left(a, \frac{b-c}{\sqrt{2}}, \frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)^t. \quad (1.9)$$

No segundo BS (que não divide o feixe igualmente) as interferências levam à seguinte transformação:

$$(a', b', c') \xrightarrow{\text{BS2}} \left(\frac{a' + \sqrt{2}b'}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{2}a' - b'}{\sqrt{3}}, c'\right), \quad (1.10)$$

$$\therefore \left(a, \frac{b-c}{\sqrt{2}}, \frac{b+c}{\sqrt{2}}\right)^t \xrightarrow{\text{BS2}} \left(\frac{a+b-c}{\sqrt{3}}, \frac{2a-b+c}{\sqrt{6}}, \frac{b+c}{\sqrt{2}}\right). \quad (1.11)$$

Assim, após o segundo BS, o caminho de cima (que é o relativo à primeira entrada na equação (1.11)) é o único populado se o estado de entrada for $|v_3\rangle$ e a saída relativa a ele seguirá a estatística de $|\langle v_3 | \Psi_0 \rangle|^2$ para qualquer estado inicial $|\Psi_0\rangle$. Já os outros dois caminhos são mapeados a dois estados ortogonais a $|v_3\rangle$ ⁵, seguindo as estatísticas apropriadas. Agora, a saída ‘de cima’ de ambos os BSs é separada das outras duas (para que possamos atribuir corretamente os resultados ± 1). Após a separação, outro sub-interferômetro – essencialmente o ‘reverso’ do anterior – realiza a volta à base computacional,

⁵ No caso, $|v_5\rangle$ e $(1/\sqrt{6})(2, -1, 1)^t$.

reconstruindo o estado na base original e deixando o estado pronto para entrar no próximo interferômetro; no exemplo aqui discutido, isso significa mapear o caminho superior após o segundo BS para o estado a ser projetado, ou seja, $(1, 0, 0)^t \mapsto |v_3\rangle$ (codificado nos caminhos a_f, b_f, c_f).

Esses interferômetros, portanto, realizam operações como descritas na equação (1.2). Eles tem, entretanto, as seguintes desvantagens: Não são automatizados e são pouco práticos para realizar transformações de estados em dimensões maiores.

É colocado então o seguinte desafio: como fazer as transformações de maneira automatizada e de fácil utilização para dimensões maiores? **É a esse desafio que nos dedicaremos nesse trabalho.** Estudar esta questão de maneira teórica e experimentalmente é de grande valor: de posse de uma maneira automatizada para realizar operações, o emprego experimental de operações mais gerais pode ser grandemente facilitado. Assim, diversas aplicações se tornam possíveis: realizar protocolos de computação quântica, preparar estados e realizar medições sequenciais.

Um candidato natural para garantir praticidade e automatização é o modulador espacial de luz (SLM), composto por tela de cristal líquido, em que se pode alterar a transmitância ou o caminho ótico, pixel a pixel, controlando por computador (uma breve apresentação do que o SLM de fase é capaz e como é controlado é dada no apêndice B.2).

1.2 Moduladores espaciais: inspiração

Moduladores espaciais de luz, como o nome sugere, permitem atuar na frente de onda nele incidente, modulando-a para cada ponto do espaço (discretizado em pixels). Como podem ser controlados por computador, garantem automatização. O que nos interessa nesse caso é o modulador de fase, que a cada pixel da tela, imprime uma fase à frente de onda que a ele chega. Essa característica, de maneira diferente do SLM de amplitude, garante que o SLM não absorve (idealmente) nenhum fóton ao realizar as operações.

Um exemplo da utilização automatizada de moduladores espaciais de luz em ótica quântica é dada na referência [31]. Neste trabalho, um modulador espacial de fase é utilizado para preparar estados puros. O arranjo experimental utilizado está mostrado na figura (6):

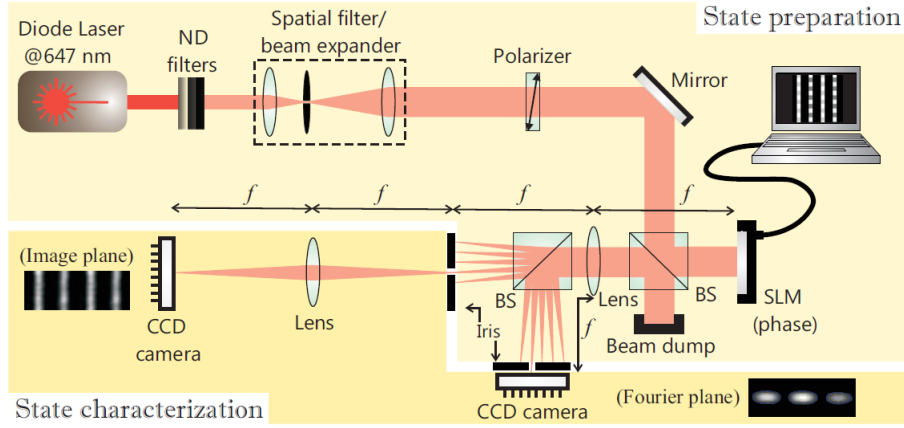


Figura 6 – arranjo experimental da referência [31], que utiliza redes de difração de fase em moduladores espaciais para preparar estados de fenda puros arbitrários. Imagem retirada da referência citada.

Nesse arranjo, um expansor é utilizado para que chegue ao modulador um feixe que ocupe o máximo da tela de cristal líquido; é utilizada então a aproximação de que em toda a extensão da tela do modulador, a amplitude é constante. Então, regiões retangulares paralelas (chamadas fendas) são preenchidas com redes de difração de fase, na tela do modulador espacial. No plano focal da primeira lente após o separador de feixes (BS, de *beam splitter*), colocada a uma distância focal f do SLM (vide seção B.1), obtém-se infinitas ordens de difração devido às redes colocadas no modulador. Escolhendo-se uma ordem nesse plano, pode-se descobrir a função a ser colocada em cada fenda para construir o padrão de interferência que o estado desejado possuiria. Essa função, para a ordem 1 e uma rede binária, por exemplo (caracterizada pela função $G(x)$), é dada por

$$e^{\Phi(x)G(x)\pi + \zeta(x)} \text{ com } \begin{cases} \Phi(x) = 1 - 2 \arccos(|T(x)|), \\ \zeta(x) = \phi(x) + \arccos(|T(x)|), \end{cases} \quad (1.12)$$

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } 0 < x \leq \frac{T}{2}, \\ \pi & \text{para } \frac{T}{2} < x \leq T, \end{cases} \quad (1.13)$$

onde $T(x)$ e $\phi(x)$ são as funções de amplitude e fase que definem o padrão de interferência das fendas (definidos pelo estado que se quer preparar); $\Phi(x)$, como se vê, define uma correção da altura da rede e ζ é uma função de correção, não atrelada à rede usada.

A preparação, entretanto, não finda nesse ponto. É necessário selecionar essa ordem espacialmente (isso é feito pelas íris na imagem) e novamente recorrer à transformação de Fourier ótica; o estado a ser preparado se encontrará no plano focal de uma segunda lente, que fará a transformada de Fourier apenas da ordem selecionada (novamente numa configuração $f - f$).

Assim, escolhendo a ordem a codificar o estado, estados puros arbitrários podem ser preparados, de maneira automatizada utilizando SLM's de fase e redes de difração. É importante ressaltar, entretanto, que essa maneira de preparar estados não leva um estado $|\Psi_0\rangle$ em um espaço de Hilbert \mathcal{H} a outro estado nesse espaço, mas discretiza um espaço contínuo, atuando sempre sobre o mesmo estado inicial (o feixe expandido). Não é, portanto, o método definitivo para o que precisamos.

A ideia de usar redes de difração e SLM's de fase, entretanto, é utilizada no trabalho que aqui apresentaremos e muito nos baseamos nessa referência. Utilizaremos, entretanto, estados codificados em feixes gaussianos paralelos no lugar das fendas.

1.3 Objetivos e visão geral

Abordaremos a questão mencionada na seção (1.1.1): como realizar transformações de estados de maneira automatizada, em um arranjo que possa ser usado para medições sequenciais, em dimensões pelo menos com $d = 3$. Descreveremos a proposta experimental com sua estrutura teórica e alguns resultados preliminares.

Pretendemos fazer isso de modo a garantir ao leitor o entendimento completo da proposta: aproximações teóricas consideradas, considerações experimentais importantes, funcionamento e fundamento da proposta, assim como uma visão geral e formal desta. Quisemos fazê-lo, também, do modo mais didático possível. Com isso, queremos que o leitor que deseje implantar essa proposta, ou adaptá-la, encontre nesse trabalho um bom auxílio, quicá o suficiente para entender seus pontos positivos, limites e, também, conseguir resultados e/ou elaborar propostas de aplicação.

Para tanto, a dissertação foi organizada da seguinte maneira, com três partes principais: uma dedicada à construção teórica da proposta, outra com resultados preliminares e conclusão e a seguinte com os apêndices. É uma maneira usual e bem sucedida apresentar os principais conceitos a serem utilizados no início, e depois iniciar a exposição dos resultados do trabalho. Aqui, entretanto, optamos por apresentar os principais aspectos teóricos ao longo da discussão, dando ênfase em sua conexão com o aspecto do trabalho em foco naquela seção e com questões experimentais quando pertinentes. As principais ferramentas teóricas cuja exposição causaria certo 'desvio de foco' foram colocadas, sem todos os detalhes de cálculos mas com a estrutura geral detalhada, nos apêndices.

O próximo capítulo apresenta um resumo sobre feixes gaussianos, apenas com os detalhes necessários para entender as aproximações que precisam ser garantidas no laboratório. É, basicamente, dividido em dois: uma exposição básica das aproximações e parâmetros importantes para esses feixes, e depois a análise da codificação de estados em espaços de Hilbert discretos neste tipo de estrutura. A seguir, a proposta experimental é apresentada; nela, nota-se a importância de analisar coeficientes de Fourier de algumas

redes de difração de fase, o que é feito no capítulo seguinte. De posse do que nossa proposta realiza de fato, no capítulo seguinte é feita uma conexão com um pouco do formalismo de transformação de estados e medições: Mapas completamente positivos e medições generalizadas, representadas por medidas com valores em operadores positivos (POVM's). Apesar de não pretender explicar ou construir essas ferramentas, elas são brevemente expostas e a conexão com a proposta é feita. Consideramos importante fazê-lo por não ser comum o contato com esses temas até o início da pós-graduação, mas são ferramentas de análise gerais e extremamente úteis no laboratório. Em seguida, apresentamos os resultados preliminares obtidos, conectando com as considerações feitas na proposta e aproximações consideradas.

Ao término, temos a conclusão e perspectivas futuras, em que analisamos o que foi conseguido até aqui e melhorias e aplicações que podem seguir.

Nos apêndices, apresentamos resultados principais e estrutura de ótica de Fourier, além de atuação de alguns elementos óticos em feixes, já que são muito utilizados ao longo do trabalho.

Parte I

Considerações Teóricas e Proposta

2 Codificação em estados de feixes Gaussianos

2.1 Aproximação Paraxial e feixes gaussianos

A seguir vamos expor algumas características físicas e aspectos teóricos das soluções de feixes paraxiais gaussianos, que serão necessários para codificarmos os qudits espaciais fotônicos. **Não será uma descrição detalhada e completa**, mas apenas uma exposição dos elementos necessários para utilização posterior na proposta apresentada, principalmente como esse feixe se altera com a propagação dentro do contexto das aproximações necessárias. A idéia é também dar ao leitor alguns elementos importantes para avaliar no laboratório se as condições para boa codificação dos caminhos estão sendo respeitadas. Para entendimento mais detalhado dessas aproximações, o apêndice A.2.1 contém maiores explicações, inclusive considerando situações mais gerais.

A partir da aproximação de teoria escalar e da aproximação de campo monocromático para os campos eletromagnéticos (vide o apêndice A), a equação de ondas dá origem à equação de Helmholtz

$$[\nabla^2 + k^2] E(x, y, z) = 0. \quad (2.1)$$

A princípio, o feixe deve ser solução dessa equação. Entretanto, como estaremos preocupados com ondas que se propagam numa direção e, como será visto mais adiante, com a distribuição espacial em um plano perpendicular a esta direção, suporemos

$$E(x, y, z) = u(x, y, z) e^{-ikz}. \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1), obtemos

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0, \quad (2.3)$$

onde delimitamos o eixo \mathbf{z} como a direção de propagação do feixe. Finalmente, suporemos que a dependência de $E(x, y, z)$ com \mathbf{z} é dada principalmente pela forma acima e que, ao longo da propagação, novas modificações em $u(x, y, z)$ serão pequenas comparadas ao comprimento de onda, ou menos expressivas que as demais. Isso significa, em termos

matemáticos

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \ll \left| 2k \frac{\partial u}{\partial z} \right| \quad (2.4)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad (2.5)$$

De fato vemos que isso significa que a segunda derivada de $u(x, y, z)$ com x ou y é considerada bem mais relevante que aquela em relação à z . E também que essa última é muito menor que o módulo do último termo do lado esquerdo de (2.5). É importante notar que esse termo depende de k , e portanto do comprimento de onda do campo em questão. Para algumas considerações a respeito da validade dessa aproximação, veja o apêndice A.2.1.1.

Devemos, agora, encontrar as soluções da equação (2.5). Uma solução possível é da forma

$$\begin{aligned} u(x, y, z) &= \frac{1}{z - z_0 + q_0} \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2(z - z_0 + q_0)} \right] \\ &= \frac{1}{q(z)} \exp \left[-ik \frac{x^2 + y^2}{2q(z)} \right], \end{aligned} \quad (2.6)$$

o que pode ser visto pela substituição de (2.6) em (2.5) e onde q pode assumir valores complexos¹. Nesse momento, chegamos aonde queríamos: a solução apresentada é gaussiana, não só em amplitude, como em fase². Aqui cabem alguns comentários a respeito da função $q(z)$. Sua parte real tem uma dependência linear com a distância z percorrida, ou seja, $q = \Delta z + q_0$, onde q_0 é uma constante complexa. Isso pode parecer arbitrário, mas está de acordo com a aproximação paraxial, descrita em mais detalhes no apêndice já mencionado (i.e. A.2.1). Para entender a necessidade de $q(z)$ não ser puramente real, consideramos suas partes real e imaginária (em uma notação um pouco diferente do usual).

$$\frac{1}{q(z)} = \frac{1}{q_r(z)} - i \frac{1}{q_i(z)}. \quad (2.7)$$

Podemos ver, substituindo em (2.6), que a parte imaginária de q leva a uma atenuação do campo com a distância ao eixo \mathbf{z} enquanto que a parte real está relacionada com fases quadráticas no plano (x, y) , típicas de ondas esféricas na aproximação paraxial (ou seja, parabólicas). De fato, essa solução está relacionada com a oscilação desde o tempo $t = -\infty$ de uma carga puntiforme em $z = 0$. Assim, sem a parte imaginária, não haveria atenuação do campo no plano perpendicular à propagação, o que não corresponde ao que é esperado fisicamente. (É interessante notar que a solução com q complexo pode ser entendida como

¹ O que ficará mais claro adiante.

² Vale dizer que essa solução não é solução das equações de Maxwell; mas isso é esperado, afinal, acabamos de modificar essas equações para garantir uma descrição aproximada de feixes

aquela resultante de uma “carga complexa” oscilando em $z = 0$ [32], que garante a queda da intensidade com a distância ao eixo de propagação.)

Para escrever a solução acima na forma mais usual fazemos

$$\frac{i}{q} = \frac{\lambda}{\pi w^2} \left[1 + i \frac{\pi w^2}{R\lambda} \right] \equiv \frac{\exp[i\psi(z)]}{|q|}, \quad (2.8)$$

o que expressa o fato de que, além da fase já esperada $-ikz$ existe mais uma fase, dada por $\psi(z)$, denominada fase de Gouy. A solução do modo gaussiano (2.6) é então reescrita como

$$u(x, y, z) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/2} \frac{\exp i[\psi(z) - \psi_0]}{w(z)} \exp \left[\frac{x^2 + y^2}{w(z)^2} - i \frac{k(x^2 + y^2)}{2R(z)} \right] \quad (2.9)$$

Assim, vemos que, escrita dessa maneira (sugerida por (2.8)), separamos a parte responsável pelo perfil espacial gaussiano – codificado por $w(z)$ – e aquela responsável pelas fases quadráticas – que tem suas informações guardadas em $R(z)$. Um aspecto interessante que deixamos implícito até agora é que, de maneira geral, nada sugere que $w(z)$ deva ser o mesmo para as variáveis x e y , assim como $R(z)$. Podemos, de fato, representar a solução com apenas uma das partes, dada por

$$u_\gamma(\gamma, z) = \left(\frac{2}{\pi} \right)^{1/4} \sqrt{\frac{\exp i[\psi(z) - \psi_0]}{w(z)}} \exp \left[\frac{\gamma^2}{w_\gamma(z)^2} - i \frac{k(\gamma^2)}{2R_\gamma(z)} \right], \quad \gamma = x, y \quad (2.10)$$

onde w_x e R_x não são necessariamente iguais a w_y e R_y , respectivamente. A solução com ambas as variáveis é dada por

$$u(x, y, z) = u_x(x, z)u_y(y, z). \quad (2.11)$$

É importante ressaltar duas características desse estudo: a primeira é que, por ser auto-função do operador diferencial associado à equação paraxial³, a solução gaussiana, ao se propagar, **permanece com a mesma forma**. Isso significa que o feixe gaussiano, ao se propagar, permanece sendo gaussiano, embora alguns de seus parâmetros mudem (e explicitaremos isso adiante). A segunda, é que essa não é a única auto-função desse operador. Na realidade, existem infinitas – por exemplo, os chamados modos de Hermite-Gauss, cada um rotulado por um número inteiro, formam uma base do espaço de funções em questão e são ortogonais. Isto é:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u_n^*(x, z) u_m(x, z) dx = \delta_{nm}. \quad (2.12)$$

Esses modos superiores, entretanto, não serão considerados em maiores detalhes neste trabalho.

A partir das equações (2.8) e (2.9), vemos que o feixe gaussiano tem alguns parâmetros importantes. Foquemos em $w(z)$ e $R(z)$ que são chamados, respectivamente, de largura e raio de curvatura.

³ Igualmente, é solução da equação integral de Fresnel.

A largura do feixe é definida de tal modo que a amplitude cai a $\frac{1}{e}$ da amplitude máxima do plano a uma distância $2w(z)$ do eixo. Já o raio de curvatura está relacionado com as fases do feixe para cada plano: $R(z) \rightarrow \infty$ significa fases idênticas num mesmo plano (ou seja, fases de uma onda plana...) enquanto que $R(z)$ pequeno indica fases, neste plano z , mais próximas daquelas de uma onda esférica. Essas considerações estão expostas na figura (7).

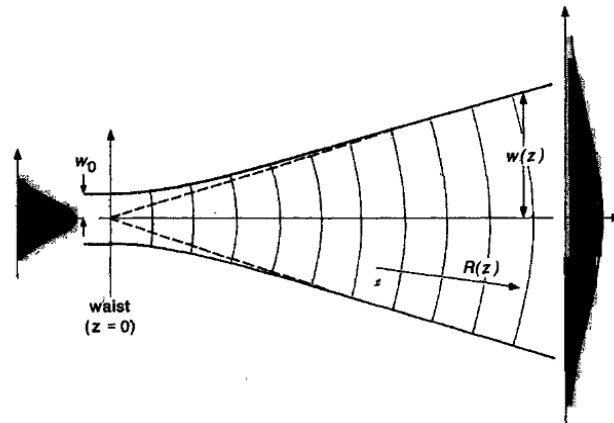


Figura 7 – Representação de w e R , ao longo da propagação do feixe. Imagem retirada da referência [32]

Verificaremos agora como esses parâmetros se comportam em relação a \mathbf{z} e, portanto, de que maneira o feixe se modifica com a propagação. Para isso é necessário definir dois parâmetros intrínsecos do feixe⁴.

- w_0 : o menor valor de $w(z)$, que por enquanto suporemos ocorrer em $z = 0$, sem perda de generalidade. É a chamada cintura do feixe; e
- $z_R \equiv \frac{\pi w_0^2}{\lambda}$, chamado de comprimento de Rayleigh.

Esses parâmetros, característicos de cada feixe, estão associados com as constantes arbitrárias z_0 e q_0 acima, e podem ser medidos no laboratório. z_R recebe esse nome do estudo da difração em antenas, e está relacionado com as zonas de campo próximo e campo distante (vide (A.2.2.1)). Esses dois parâmetros constantes determinam a dependência dos outros três parâmetros⁵ com z . Isso está explicitado nas equações (2.13).

⁴ São intrínsecos desde que este se propague livremente.

⁵ Na realidade, apenas um destes já determina o comportamento ao longo de z , uma vez que z_R e w_0 são vinculados, como visto acima (se se souber o comprimento de onda no meio em que o feixe se propaga, evidentemente).

$$\begin{aligned}
w(z) &= w_0 \sqrt{1 + \left(\frac{z}{z_R}\right)^2}, \\
R(z) &= z + \frac{z_R^2}{z}, \\
\psi(z) &= \tan^{-1} \left(\frac{z}{z_R}\right).
\end{aligned} \tag{2.13}$$

Das equações (2.13) pode-se obter o comportamento próximo e distante de w e R com z . O mais importante para este trabalho será o comportamento de $w(z)$; apesar disso, algumas sutilezas a respeito de $R(z)$ devem ser analisadas para entendermos as aproximações na proposta adiante. Antes, porém, cabe um comentário a respeito de $\psi(z)$: se z_R for grande o suficiente, vemos que $kz \gg \psi(z), \forall z$; isso está completamente de acordo com as suposições para (2.5) e todo o desenvolvimento posterior.

Analisando os comportamentos de w e R com z , através de (2.13), notamos que o feixe pode ir diminuindo de tamanho ao propagar (de $z < 0 \rightarrow z = 0$), até alcançar a forma em que $w = w_0$, e depois começa a divergir, aumentando o valor de w . A distância de Rayleigh é definida de modo que, após uma distância propagada de z_R a partir do plano em que $w = w_0$, o novo valor desse parâmetro é $\sqrt{2}w_0$. As figuras 8 e 9 mostram essas definições e seus reflexos nos feixes propagantes.

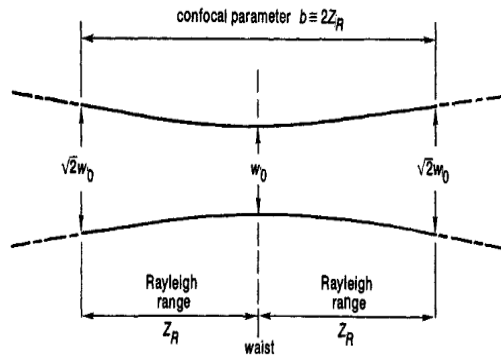


Figura 8 – Definição de Z_R . Figura retirada de [32].

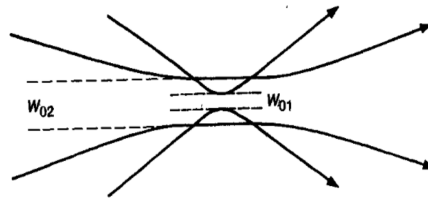


Figura 9 – Figura mostrando variação de Z_R com w_0 . Figura retirada da referência [32].

Matematicamente, o comportamento de $w(z)$ pode ser visto na equação (2.14) e na figura (7).

$$w(z) \approx \begin{cases} w_0 & |z| \ll z_R \\ \sqrt{2}w_0 & |z| = z_R \\ w_0 \frac{z}{z_R} = \frac{\lambda}{\pi w_0} z, & z \gg z_R \end{cases} \quad (2.14)$$

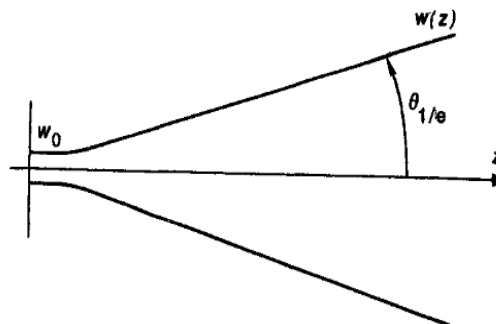


Figura 10 – Variação de w com z . $\theta_{\frac{1}{e}}$ será definido adiante. Figura retirada da referência [32]

Das expressões (2.14) e da figura 10, vemos que próximo ao plano em que $w = w_0$, a largura do feixe é quase constante e vai mudando, gradualmente. No campo distante, passa a ser aproximadamente linear novamente, com coeficiente angular dado por $\frac{w_0}{z_R}$. A partir de considerações a respeito dessa mudança de $w(z)$, do campo próximo ao distante, é possível definir a divergência θ do feixe. Ela pode ser definida por um ângulo entre o eixo de propagação e a reta assintótica dada por $w(z)$ no campo distante. Assim, esse ângulo (no fundo, o coeficiente angular dessa reta) é dado por

$$\lim_{z \rightarrow +\infty} \frac{w(z)}{z} = \frac{\lambda}{\pi w_0}, \quad (2.15)$$

onde usamos (2.14). A divergência está representada na figura 7, e carrega o subíndice $\frac{1}{e}$ porque podem haver pequenas diferenças de definição (ver [32]). Pode-se notar que a

divergência é inversamente proporcional a w_0 . Ela pode ser interessante para avaliar, no laboratório, se o experimento está no domínio de validade de aproximações utilizadas em nossa proposta.

Antes de analisarmos o comportamento do raio de curvatura com z , vamos fazer um cálculo que é de interesse para esse trabalho. Se existirem dois feixes gaussianos paralelos, de mesma largura e posição da cintura, w_0 , quando esses feixes divergem o suficiente para interferirem entre si⁶? Um critério para isso é supôr que o plano limite (\bar{z}) para interferência é aquele no qual os pontos mais distantes de cada pico que tem amplitude não desprezível se sobrepõem. Podemos considerar esses pontos como aqueles à distância $\sqrt{2}w$ do pico, por exemplo, que delimitam uma área contendo mais de 95% da intensidade.

Nesse caso, se $w(0) = w_0$, a condição para não interferência, em função da distância Δx entre os picos dos feixes, é dada por

$$\sqrt{2}w(\bar{z}) < \frac{\Delta x}{2} \Rightarrow \tag{2.16}$$

$$\bar{z} < z_R \sqrt{\left(\frac{(\Delta x)^2}{8w_0^2} - 1\right)}, \tag{2.17}$$

ou seja, dependendo da relação $\frac{\Delta x^2}{w_0^2}$, essa distância pode ser maior ou menor que z_R ; se essa razão for maior que 4, $\bar{z} > z_R$, e se for menor, $\bar{z} < z_R$. Com isso, vemos que w_0 e z_R dão as condições para não interferência dos feixes.

A variação do raio de curvatura com z pode ser resumida de maneira semelhante à de $w(z)$, o que leva à equação (2.18) e gráfico representado na figura (11).

$$R(z) = z + \frac{z_R^2}{z} \approx \begin{cases} \infty, & z \ll z_R \\ 2z_R, & z = z_R \\ z, & z \gg z_R \end{cases} \tag{2.18}$$

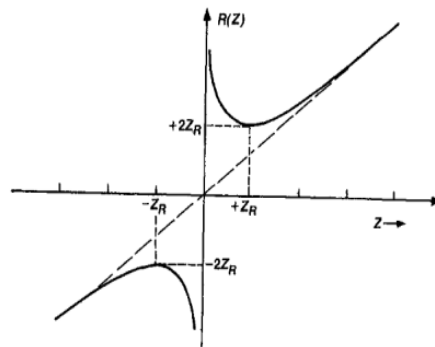


Figura 11 – Variação de R com z . Figura retirada de [32].

⁶ É fato que feixes gaussianos sempre estão interferindo, mas se estiverem suficientemente afastados, podem ser considerados, em um plano, como feixes completamente independentes, com boa aproximação (isso será mostrado na seção 2.2).

Vemos que $R(z) \rightarrow \pm\infty$ próximo à cintura do feixe, rapidamente cai a seu valor mínimo ($2z_R$), e volta a subir, mas agora lenta e linearmente. Vamos agora discutir a codificação dos feixes, de fato.

2.2 Estados quânticos de feixes gaussianos

2.2.1 Do clássico ao quântico

Passaremos agora à descrição quântica desses estados. Temos, então, um campo clássico na forma dada por (2.9) e queremos passar agora a um estado do campo de apenas um fóton (*single-photon*) que é descrito pela física quântica. Não falaremos em detalhes da matemática ou da técnica envolvidas nessa passagem, para isso, as referências ao longo do texto são indicadas.

No laboratório, essa passagem é feita gerando-se caminhos a partir de um feixe laser e atenuando-o fortemente, até que este chegue ao estado de um único fóton, com testes posteriores para garantir que chegou-se a esse regime. Não incluiremos detalhes destes testes neste trabalho. Outra possibilidade é bombear um cristal não-linear com feixes paralelos e utilizar os estados de fótons gêmeos gerados em conversão paramétrica descendente. Não trataremos desse caso aqui. O primeiro caso está representado na figura (12).

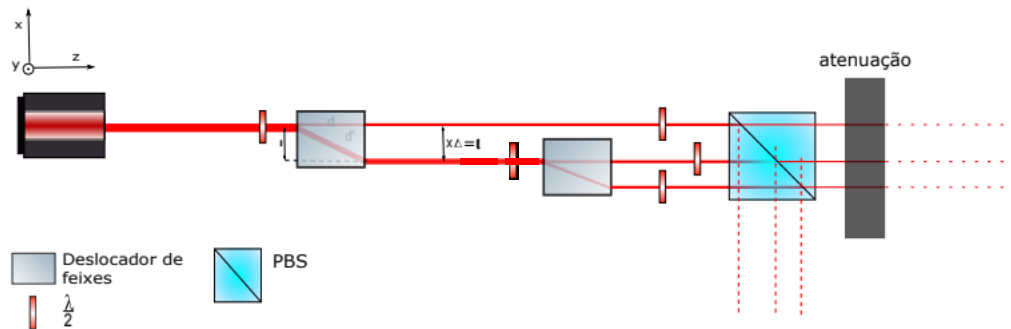


Figura 12 – fonte possível de estados quânticos codificados em feixes gaussianos paralelos.

Matematicamente, o tratamento dos feixes intensos para o regime de um fóton em modos espaciais é discutido nas referências [33] e [34]. Aqui faremos uma abordagem prática, como na referência [31]. A intensidade no caso do campo clássico é proporcional a probabilidade de detecção de um fóton, e a amplitude de probabilidade é dada pelo perfil espacial do campo. Ou seja,

$$\vec{E}(x, y) \rightarrow |\Psi\rangle = \int E(x, y) |\mathbf{1}x, y\rangle dx dy \quad (2.19)$$

Sabendo agora que os estados de um fóton com amplitude gaussiana serão descritos como acima, codificaremos os estados da base de um espaço de Hilbert discreto em caminhos longitudinais, dados por feixes gaussianos paralelos. Inicialmente eles estão espaçados em uma direção do plano perpendicular à propagação e centrados em uma mesma posição na ortogonal, ou seja,

$$|X_i\rangle = \int A \frac{\exp i[\psi(z) - \psi_0]}{w(z)} \exp \left[\frac{(x - x_i)^2 + y^2}{w(z)^2} - i \frac{k((x - x_i)^2 + y^2)}{2R(z)} \right] |1x, y\rangle dx dy \quad (2.20)$$

Escolhemos o sistema de referência de modo a codificar o estado na direção x e de tal maneira que em y todos os feixes estão centrados em zero⁷. Analogamente, poderíamos ter escolhido codificar em y , definindo $|Y_i\rangle$. ‘ A ’ é apenas uma constante de normalização. Na figura (13) exemplificamos essa codificação, onde cada $|X_i\rangle$ corresponde a uma gaussiana.

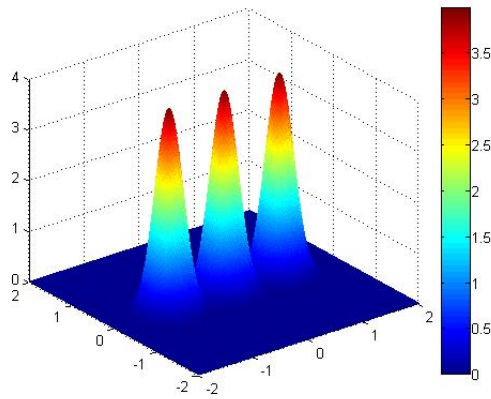


Figura 13 – Representação de um estado quântico de feixes gaussianos paralelos em \mathbf{x} . A superfície exprime a densidade de probabilidade de detecção de um fóton, e nesse caso está relacionada a um estado com igual intensidade em cada caminho, e.g. $\frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)^T$.

Para que esses estados possam ser considerados como base ortonormal de nosso espaço de Hilbert discreto, estes deveriam satisfazer (usando a definição usual de produto escalar num espaço vetorial de funções ⁸):

⁷ Escolhemos w 's iguais em x e y por simplicidade.

⁸ $\langle V|U\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} V^*(x)U(x)dx$

$$\begin{aligned}
 \langle X_i | X_j \rangle &= AA^* \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(f_i(x',y) - f_j(x,y))} e^{-\left(\frac{x-x_j}{w_j}\right)^2} e^{-\left(\frac{x'-x_i}{w_i}\right)^2} e^{-\left(\frac{y}{w_i}\right)^2} e^{-\left(\frac{y'}{w_i}\right)^2} \langle \mathbf{1}_{x'}, y' | \mathbf{1}_x, y \rangle dx dx' dy dy' \\
 &= AA^* \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(f_i(x,y) - f_j(x,y))} e^{-\left(\frac{x-x_j}{w_j}\right)^2} e^{-\left(\frac{x'-x_i}{w_i}\right)^2} \delta(x - x') dx dx' \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{y}{w_i}\right)^2} e^{-\left(\frac{y'}{w_i}\right)^2} \delta(y - y') dy dy' \\
 &= |A|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(f_i(x,y) - f_j(x,y))} e^{-\left(\frac{x-x_i}{w_i}\right)^2} e^{-\left(\frac{x-x_j}{w_j}\right)^2} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{y}{w_i}\right)^2} e^{-\left(\frac{y}{w_j}\right)^2} dy \\
 &= C \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(f_i(x,y) - f_j(x,y))} e^{-\left(\frac{x-x_i}{w_i}\right)^2} e^{-\left(\frac{x-x_j}{w_j}\right)^2} dx \stackrel{?}{=} \delta_{i,j}; \forall i, j
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

onde $f_{i,j}(x, y)$ são as funções relacionadas com as fases do campo, dadas pelos raios de curvatura $R(z)$, por $k\Delta z$ e $\psi(z)$. Importante notar que aqui estamos considerando um plano (x, y) , e portanto z é constante. A relação (2.21) **pode** ser satisfeita de forma **aproximada** se $\Delta x \gg w$. Na realidade, (2.21) é satisfeita se $\frac{\Delta x}{w} \rightarrow +\infty$ (estamos considerando todos os w iguais, aproximação que faremos a partir do próximo parágrafo em diante). Para mostrar que a condição acima é suficiente para que (2.21) seja obedecida, vamos antes limpar um pouco a notação. É importante notar que,

$$0 \leq \left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx dy \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |h(x, y)| dx dy \tag{2.22}$$

$\forall h(x, y)$ cujo módulo seja integrável. Sendo assim, se provarmos que o lado direito da desigualdade é 0, o módulo quadrado da integral de h tem que ser nulo.

Fazendo $h = \exp \{i(f_i(x, y) - f_j(x, y))\} \exp \left\{ -\left(\frac{x-x_i}{w}\right)^2 \right\} \exp \left\{ -\left(\frac{x-x_j}{w}\right)^2 \right\}$, sabemos que $|h| = \left| \exp \left\{ -\left(\frac{x-x_i}{w}\right)^2 \right\} \exp \left\{ -\left(\frac{x-x_j}{w}\right)^2 \right\} \right|$. Para mostrar que (2.21) é satisfeito, basta mostrar que a integral de $|h|$ é 0. Chamando $\Delta x = x_j - x_i$,

$$x \rightarrow x' = x - \frac{x_i + x_j}{2} \tag{2.23}$$

$$\begin{aligned}
 &\Rightarrow C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x-x_i}{w}\right)^2} e^{-\left(\frac{x-x_j}{w}\right)^2} dx \\
 &= C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x' + \frac{x_i+x_j}{2} - x_i}{w}\right)^2} e^{-\left(\frac{x' + \frac{x_i+x_j}{2} - x_j}{w}\right)^2} dx' \\
 &= C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{x' + \frac{x_j - x_i}{2}}{w}\right)^2} e^{-\left(\frac{x' + \frac{x_i - x_j}{2}}{w}\right)^2} dx' \\
 &= C \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{x'^2 - 2x' \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x^2}{4}}{w^2}} e^{-\frac{x'^2 + 2x' \frac{\Delta x}{2} + \frac{\Delta x^2}{4}}{w^2}} dx' \\
 &= C e^{-\frac{\Delta x^2}{2w^2}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{2x'^2}{w^2}} dx' \\
 &= C e^{-\frac{\Delta x^2}{2w^2}} \sqrt{\frac{\pi w^2}{2}}. \\
 \therefore \lim_{\left(\frac{\Delta x}{2w}\right)^2 \rightarrow +\infty} C e^{-\frac{\Delta x^2}{2w^2}} \sqrt{\frac{\pi w^2}{2}} &= 0.
 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Isso mostra, então, que $|\langle X_i | X_j \rangle|^2 \rightarrow 0$ quando $(\frac{\Delta x}{2w})^2 \rightarrow \infty$, o que garante, nesse limite, a validade de (2.21). Podemos entender esse cálculo da seguinte maneira: se $\Delta x \gg w$, então para os valores de x em que uma gaussiana tiver valor expressivo (não é $\approx 0, < \infty$) a outra será praticamente nula (≈ 0) e com ambas normalizadas, o produto será próximo de zero e, no limite, é zero. É importante ressaltar que a conta acima considerou o mesmo w para as duas gaussianas. No caso de podermos alterar o w de uma das gaussianas, a análise é um pouco diferente (ela ainda deve ser normalizada), pois o produto **poderá** ir a zero ou não (o produto de um número grande por um número próximo a zero não necessariamente é desprezível). Se pudermos alterar uma das gaussianas, tornando-a muito alta (e portanto muito fina), o produto pode ser alto em uma região (em que o valor de uma das Gaussianas é ≈ 0 e da outra $\gg 0$). Entretanto, por se tratar de uma integral, vê-se que quanto maior o produto, menor o intervalo em x em que essa região contribui à integral⁹. O cálculo que corresponde a essa idéia é de generalização simples do aqui mostrado, e não será feito.

Concluimos, então, que a integral deve ir a zero, a não ser quando $i = j$ (quando $\Delta x = 0$ e a condição acima não é satisfeita), caso em que a normalização garante o valor 1. Como o limite necessário para a integral ir a zero não é alcançado fisicamente, apenas $\Delta x \gg w$, seguem alguns cálculos numéricos da última integral em (2.21), para dar uma noção da ordem de grandeza da aproximação feita. Alguns exemplos com σ 's diferentes, exemplificando o argumento para esse caso, também seguem, onde utilizaremos valores de $\sigma = \frac{w}{\sqrt{2}}$.

Nos gráficos apresentados nas figuras 14 e 15, a curva vermelha representa a soma das duas gaussianas em verde e azul, para diferentes valores de σ 's e Δx . Se pode ver que, quanto mais a condição $\Delta x \gg \sigma$ é satisfeita (ou seja, $\frac{\sigma}{\Delta x}$ mais próximo de 0), mais a curva vermelha se sobrepõe às curvas azul e verde. O lugar de maior discrepância é entre as duas, onde o *overlap* é mais considerável.

⁹ lembrando que essa região tende a um ponto – intervalo de medida nula – mas nesse caso, a gaussiana tende a uma delta de Dirac. Esse caso não é tratado aqui

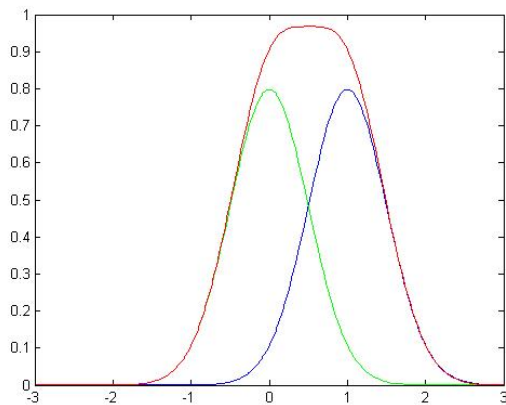


Figura 14 – Duas gaussianas, centradas em $x = 0$ e $x = 1$, de $\sigma = 0.5$. O produto escalar é 0.26

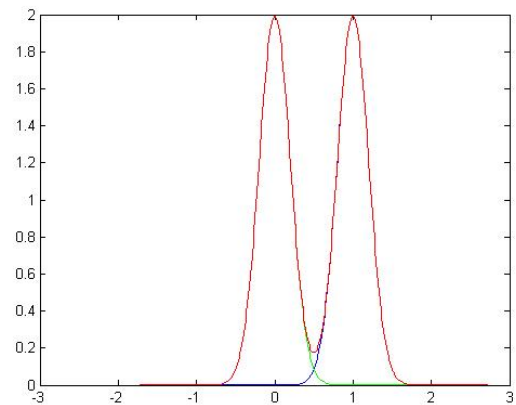


Figura 15 – Duas gaussianas, centradas em $x = 0$ e $x = 1$, de $\sigma = 0.2$. O produto escalar é ≈ 0.014

Vê-se que o produto escalar de fato é menor se a condição acima for satisfeita. Na figuras 16 e 17, podem-se ver dois gráficos com mesma relação $\frac{\sigma}{\Delta x}$, mas com valores de cada parâmetro diferentes. Como esperado, o resultado do produto escalar é o mesmo:

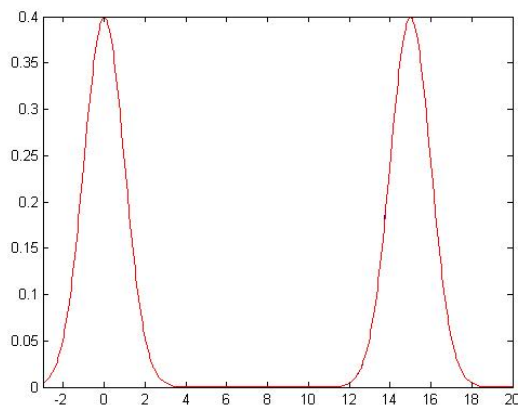


Figura 16 – Duas gaussianas, centradas em $x = 0$ e $x = 15$, de $\sigma = 1$. O produto escalar é: $\approx 2.6 \cdot 10^{-25}$

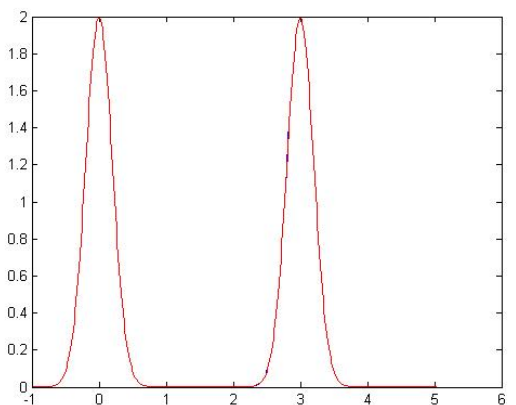


Figura 17 – Duas gaussianas, centradas em $x = 0$ e $x = 3$, de $\sigma = 0.2$. O produto escalar é: $2.6 \cdot 10^{-25}$

Podemos ver que nossa codificação pode ser considerada boa, desde que $\Delta x \gg \sigma$. Isso conclui nossa apresentação de feixes gaussianos paralelos utilizados como codificação de estados quânticos que pertencem a um espaço de Hilbert discreto. A dimensão d desse espaço é o número de feixes paralelos que estão sendo considerados. Agora vamos apresentar como faremos as transformações e operações em estados desse tipo, que como dito na seção 1, é o resultado central deste trabalho.

3 A proposta experimental

O capítulo (1) explicita e explica que o objetivo deste trabalho é realizar transformações em estados quânticos fotônicos, de modo que se possa operar sobre eles: preparar estados e realizar medições sequenciais. Como visto no capítulo anterior, feixes gaussianos separados espacialmente podem definir uma base de um espaço de Hilbert discreto; pode-se, assim, definir o estado inicial como combinação linear desses elementos: $\sum_i B_i |X_i\rangle$. Esse será o *input* do sistema, que o modificará (ou não). O objetivo é realizar uma operação \mathcal{M} no estado $|\Psi\rangle$, ou seja:

$$|\Psi\rangle \rightarrow \mathcal{M}|\Psi\rangle. \quad (3.1)$$

Para a realização física da operação, faremos com que o estado inicialmente codificado em uma direção (\mathbf{x} , por exemplo), seja transformado no estado de saída (dado por $\mathcal{M}|\Psi\rangle$), mas – como será visto adiante – nesta proposta experimental, este **estará codificado na direção ortogonal (\mathbf{y})**. Assim, teremos, denotando os coeficientes de \mathcal{M} por k_{ij} ,

$$|\Psi\rangle_0 = \sum_i B_i |X_i\rangle \rightarrow |\Psi\rangle_f = \sum_{i,j} B_i k_{ij} |Y_j\rangle. \quad (3.2)$$

Neste capítulo, mostraremos a proposta a ser implementada para tanto (no seguinte, ficará claro como essa proposta realiza essa transformação e exemplos serão dados). Antes, uma breve seção para convencionar a notação aqui utilizada.

3.1 Notação e sistema de referência

Como utilizaremos feixes gaussianos paralelos para codificação dos estados de qudits, se supusermos que os feixes tem propriedades parecidas (comprimento de Rayleigh e cintura e posição da cintura), eles se modificam de maneira muito semelhante ao propagar de um certo $z = z'$ para um outro plano $z = z''$. Desse modo, os raios de curvatura $R_i(z')$ são aproximadamente iguais para todo i (vide seção (2.1)) e quando os feixes propagam de z' para z'' , a mudança $R_i(z') \rightarrow R_i(z'')$ ocorre de forma parecida para todo i , o que permite que $R_i(z'')$ para cada um dos feixes seja considerado igual. Se trata de uma aproximação, afinal, muitas das operações imprimem um caminho ótico ligeiramente maior entre um feixe e outro, o que resulta numa pequena mudança em um raio de curvatura em relação ao outro, o que desprezaremos e é importante se ater a essa aproximação no laboratório¹. Ela

¹ Vide (3.6) para um compêndio dessas condições que devem ser garantidas experimentalmente.

será válida se $R(z)$ variar pouco com pequenas diferenças do comprimento de propagação. Pode ser necessário compensar essas diferenças de caminho. Dada essa convenção e esses cuidados no laboratório, em nossa notação podemos omitir as informações relativas ao raio de curvatura.

Por outro lado, também há ganho de fase $-ik(z'' - z')$ e de fase de Guoy, dado por $\psi(z'') - \psi(z')$. Como se tratam de fases constantes sobre todo o feixe, mas imprimem diferenças de fase relativas entre um feixe e os outros paralelos, é necessário manter essa informação. Faremos isso, mas a informação de ambas as fases pode ser “unificada” em um $\theta_i(z)$ para cada feixe. Assim, cada feixe gaussiano normalizado, com $w(z)$ e centrado em x_i será escrito como $Gauss_w(x - x_i)$.

Ou seja, o estado $|X_i\rangle$ apresentado no capítulo anterior, com uma fase $\theta(z)$ adicional, será descrito da seguinte maneira:

$$e^{i\theta(z)}|X_i\rangle = e^{\theta_i(z)} \int_{-\infty}^{\infty} Gauss_w(x - x_i) Gauss_w(y) |\mathbf{1}x\rangle |\mathbf{1}y\rangle dx dy, \quad (3.3)$$

onde foram suprimidas as informações do raio de curvatura e, como dito acima, $\theta_i(z)$ deve dar conta da fase de Guoy e da fase de propagação.

As transformações serão “protagonizadas” por um modulador espacial de luz que modula apenas fase (SLM), e é o primeiro elemento a agir no estado inicial. Assim, no plano do SLM, as coordenadas espaciais transversais serão denotadas com linha, $z'=0$, e no plano de saída do arranjo, as coordenadas serão descritas sem linha.

Mais adiante vamos considerar aplicações de transformadas de Fourier, que serão escritas como $\mathcal{F}\{\cdot\}(q)$, onde entre os colchetes estará a função cuja transformada está sendo tomada e o “ q ” é a variável da função transformada de Fourier². Se existir uma transformada de Fourier para uma função $f(x)$ que estaria entre os colchetes acima, podemos chama-la brevemente de \tilde{f} ou $\tilde{f}(q)$.

Consideraremos, também, que o estado de entrada está codificado na direção x , centrado em zero na direção y e se propagando na direção z . Utilizaremos uma notação operacional para outras transformações no campo: quando houver um feixe, que se propaga na direção z , diremos que a função $U(x, y, z)$ que o caracterizará após a propagação de d metros, é $U(x, y, z) = \mathcal{P}\{U(x, y, z - d)\}_d$, onde nem sempre explicitaremos o subíndice d . Além disso, transformações no campo efetuadas pelo deslocador de feixes também serão denotadas por um “ c ” neste estilo: $\mathcal{C}\{\cdot\}$ e entre os colchetes estará o campo na entrada do elemento. Um estado de polarização puro arbitrário será denotado por $|W\rangle$.

² Em outras palavras, ‘ q ’ é a variável que está no espaço recíproco à variável da função a ser transformada

3.2 Cálculo do operador campo e arranjos possíveis

Faremos agora o cálculo do operador campo e a exemplificação do que pode ser feito experimentalmente, considerando que o objetivo principal desse trabalho é realizar a transformação descrita pela Eq. (1.2). Para tanto, prosseguiremos da seguinte maneira: inicialmente calcularemos o campo classicamente, usando ótica de Fourier e as aproximações necessárias (vide apêndice) e chegando a uma distribuição $\vec{E}(x, y)$. Depois, a passagem para o estado quântico é feita, como já discutido, considerando $\vec{E}(q_x, q_y) \rightarrow \int E(x, y) |\mathbf{1}x\rangle |\mathbf{1}y\rangle |1W\rangle dx dy$, em que $|1W\rangle dx dy$ é a notação de Fock para um fóton no estado puro de polarização $|W\rangle$. A justificativa é dada detalhadamente em [33, 35].

Como será visto adiante, esse capítulo será dividido em relação ao número de caminhos do estado de entrada (em duas configurações do arranjo), calculando, para cada caso, o campo clássico e posteriormente haverá generalização para n caminhos. Isso será feito para alcançar mais clareza na exposição dos fatos importantes. No final do capítulo, calcularemos o operador para cada caso e discutiremos algumas vantagens e limitações do sistema proposto.

Algumas aproximações teóricas são necessárias para o trabalho aqui apresentado, e por isso vamos enfatizá-las, listando-as abaixo. Elas são explicadas, contextualizadas e os seus domínios de validade discutidos nos apêndices ou seções colocadas entre colchetes.

- **Aproximação A0** Usaremos aproximação escalar em toda propagação que não contiver elementos birrefringentes; usaremos ótica de Fourier, com a seguinte consideração: um campo que haja propagado uma distância $z < \frac{2D^2}{\lambda}$ após a modificação pelo SLM, será dado pela aproximação de Fresnel [seção (A.2.1)]. Isso significa que os feixes gaussianos se propagam como explicado no capítulo (2). Para $z > \frac{2D^2}{\lambda}$, pode ser utilizada a aproximação de campo distante (aproximação de Fraunhofer [seção(A.2.2)]). Nessa fórmula, chamada de fórmula do designer de antena, D é um parâmetro a ser escolhido, chamado de tamanho relevante do feixe: ele define uma região que concentra grande parte da intensidade do feixe propagante.

Uma consequência dessa aproximação é que, se os feixes gaussianos propagam como descrito anteriormente, para algum z' começa a haver uma grande divergência. Como visto anteriormente, esse “alargamento” dos feixes gaussianos pode tornar a aproximação de ortogonalidade $\langle X_i | X_j \rangle \approx \delta_{i,j}$, necessária para a codificação (vide Eq. (2.21)), não mais válida. Assim, sem que se corrija essa divergência ao longo do experimento, existe um limite experimental para a propagação dos feixes. Um critério possível e simples para estabelecer esse limite que chamaremos de \bar{z} (que envolve $w(\bar{z})$ e a separação entre os feixes, Δx) é dado na Seção 2.1, Eq. (2.17). O ponto importante a considerar aqui é que é possível ter $\bar{z} > z^*$, **utilizar a aproximação de Fraunhofer para cada feixe independentemente,**

enquanto que em x os feixes não se sobrepuseram. Usar elementos difrativos de fase e aproximação escalar pode gerar discrepâncias relevantes em alguns casos. Isso é discutido na referência [36], mas não será abordado aqui. Continuemos com as aproximações:

- **Aproximação A1** Para lentes, utilizaremos a aproximação paraxial e consideraremos que se tratam de elementos delgados [Seção B.1].
- **Aproximação A2** Suporemos que $R_i(z) \approx R_j(z)$, $\forall z$, onde R_i e R_j são os raios de curvatura de um feixe arbitrário i ou j . Se trata de uma aproximação porque, devido a diferenças de caminho ótico, haveria diferenças nestes raios de curvatura. Além disso, suporemos que o comprimento de Rayleigh (z_R) e a divergência dos feixes, assim como posição da cintura destes, são iguais.
- **Aproximação A3** Vamos denotar a componente de polarização horizontal por \hat{h} e vertical por \hat{v} . Consideraremos o deslocador de feixes modifica o percurso ótico de cada componente de polarização, mas não a forma da curva. Para mais detalhes do funcionamento do deslocador, vide Apêndice (B.3).
- **Aproximação A4** Consideraremos que o experimento ocorrerá dentro do comprimento de coerência dos feixes., Isto é, se considerarmos que o experimento ocorre de um plano $z = 0$ até um plano \bar{z} , o comprimento de coerência deve ser maior que \bar{z} . Isso deve ser testado experimentalmente. No caso de um estado com muitas componentes de caminho, isso pode ser extremamente difícil, a não ser que seja usada uma fonte de laser atenuado.

Com a aproximação **A2**, as informações a respeito do raio de curvatura dos feixes gaussianos podem ser omitidas sem problemas, e assim utilizaremos a notação da seção (3.1). Embora aproximação semelhante valha para w , continuaremos explicitando-o porque ele é extremamente importante para que valha a Eq. (2.21). É importante notar o subscrito w em cada passo: como visto na Seção 2.1, w muda com z e a cada propagação e transformação por elementos, w é escrito de maneira diferente. A fase $\theta(z)$ (que engloba $-ikz$ e $\psi(z)$) será omitida desde que os feixes caminhem paralelamente (já que o que importa são as fases *relativas* entre os feixes, para cada z); quando houver diferença de caminho entre eles, $\theta_i(z)$ explicitará essa fase relativa. Para as polarizações horizontal e vertical, usaremos os símbolos \hat{h} e \hat{v} , respectivamente.

3.3 Um caminho de entrada

Para um caminho de entrada, o arranjo necessário está mostrado na figura 18. A presença da lente cilíndrica é opcional e constitui um arranjo diferente, igualmente possível.

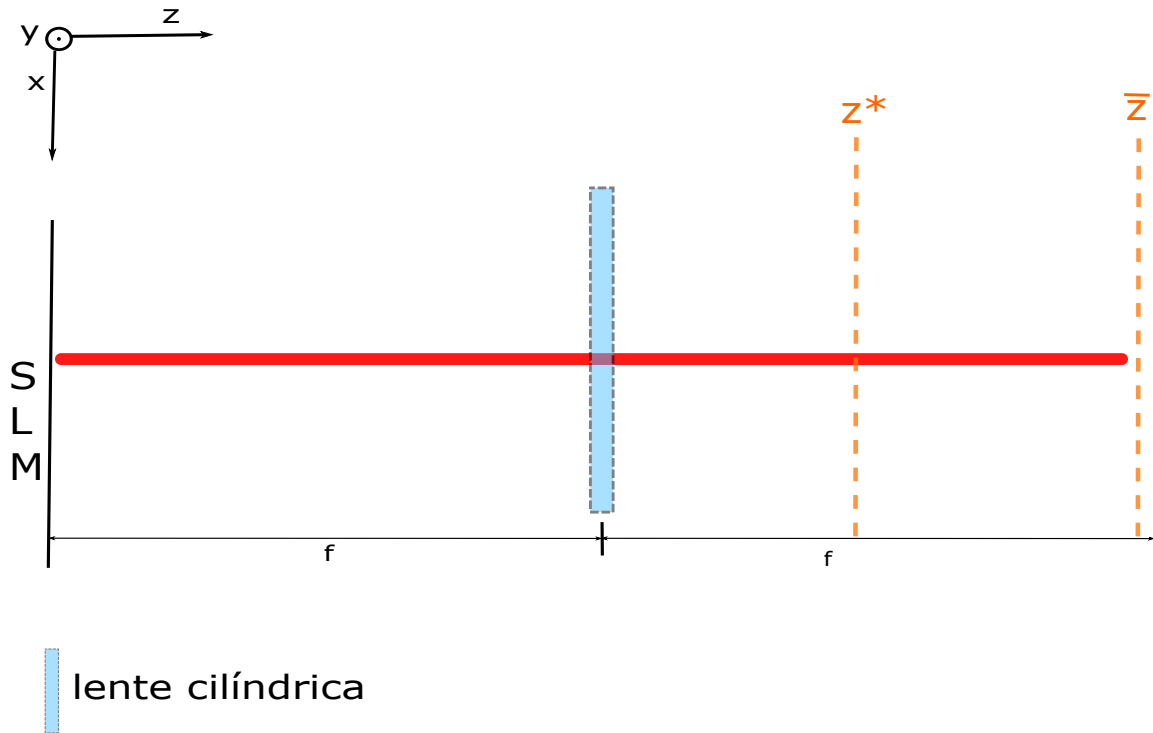


Figura 18 – Arranjo da proposta para um caminho, em que a presença da lente cilíndrica constitui um outro arranjo possível. No SLM deve ser colocada uma máscara de fase que seja dada por uma função periódica em y .

Consideremos o campo inicial dado por $U(x, y, 0) = Gauss_w(x')Gauss_w(y')\hat{h}$, que então incide no SLM, sendo modificado para

$$U(x', y', 0)e^{-i\Phi(y')}, \quad (3.4)$$

onde $\Phi(y')$ é a fase adicionada ao campo incidente por uma rede de difração programada no SLM. Após esse momento, existem duas possibilidades, como indicado na imagem acima.

3.3.1 Arranjo sem lente cilíndrica

No arranjo sem a lente cilíndrica, o feixe propaga livremente. Após uma distância $z > z^*$, dada por

$$z^* = \frac{2w_y^2}{\lambda}, \quad (3.5)$$

onde w_y é o raio do feixe em \mathbf{y}^3 , podemos considerar que $\mathcal{P}_{z^*} \rightarrow \mathcal{F}_y$ (aproximação **A0**). Nesse caso, o campo é descrito por uma propagação de feixe gaussiano em x e uma propagação do feixe modificado em y

$$\mathcal{P}\{Gauss_w(x')\}\mathcal{F}\{e^{-i\Phi(y')}Gauss_w(y')\}. \quad (3.6)$$

Precisamos então descobrir a transformada de Fourier da função acima. Considerando que as funções Φ sejam funções periódicas (de período T), com domínio estendido a toda a reta real, representável por uma série de Fourier com coeficientes dados por C_m , queremos calcular a transformada de Fourier do produto dessa função periódica por uma função gaussiana.

Resumindo, temos: 1. Função quadraticamente integrável $Gauss(y')$ com transformada de Fourier $\tilde{Gauss}(k_y) = \mathcal{F}\{Gauss(y')\}(k_y)$; onde k_y é a variável recíproca a y – que, em transformada de Fourier ótica é proporcional a y (αy), (vide Seções (93) e (A.2.2)); e 2. uma função periódica de período T_y , $\Phi(y')$. Assim, podemos escrever $\Phi(y') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{i\frac{2\pi m}{T}y'}$. Então,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\{Gauss_w(y')\Phi(y')\}(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} Gauss_w(y')\Phi(y')e^{-ik_y y'} dy' \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} Gauss_w(y') \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m e^{i\frac{2\pi m}{T_y}y'} e^{-ik_y y'} dy' \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} Gauss_w(y') C_m e^{i(\frac{2\pi m}{T_y} - k_y)y'} dy' \\ &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \mathcal{F}\{Gauss_w(y')\}(\alpha y - \frac{2\pi m}{T_y}). \end{aligned}$$

Assim, o resultado é a soma de gaussianas em y , centradas em $\frac{2\pi m}{T_y}$, ponderadas por C_m :

$$\mathcal{F}\{Gauss_w(y')\Phi(y')\}(y) = \sum_m C_m \tilde{Gauss}_{\tilde{w}}(\alpha y - \frac{m2\pi}{T_y}) \quad (3.7)$$

ou seja,

$$\mathcal{P}\{Gauss_w(x')\}\mathcal{F}\{e^{-i\Phi(y')}Gauss_w(y')\} = Gauss_{w'}(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m Gauss_{\tilde{w}}(y - y_m), \quad (3.8)$$

com $y_m = \frac{2\pi m}{T_y}$.

Vemos assim que, se as gaussianas forem suficientemente estreitas em relação a separação em y (ou seja, a Eq. (2.21) valer para $\tilde{Gauss}(y)$), temos um novo estado do mesmo espaço de Hilbert, agora codificado na direção perpendicular à anterior.

Pode-se notar que o campo é dado, na saída do arranjo, pela soma de gaussianas em \mathbf{y} , ponderadas pelos coeficientes da rede de difração colocada no SLM. No caso desse

³ Afinal, com essa aproximação, estamos considerando quase 90% da intensidade

arranjo, $\alpha = \frac{k}{2z}$ (vide (A.2.2)), o que significa que cada ordem tem distância $\frac{k\Delta y}{2z} = \frac{2\pi}{T_y}$ com as vizinhas. É necessário, novamente, que essa distância e \tilde{w} satisfaçam a Eq. (2.21). É importante notar, entretanto, que há uma pequena divergência entre as ordens (sua distância depende de z), e isso difere ligeiramente do tipo de codificação do estado de entrada. Se o período das grades não for muito pequeno, entretanto, isso pode ser desprezado para a maioria das ordens em que o campo não tem amplitude desprezível. É importante notar que isso está também relacionado com a aproximação paraxial: ordens muito altas estão relacionadas com ângulos de difração muito grandes, o que deve ser desprezível para que estejamos dentro dos domínios de validade desejado.

3.3.2 Arranjo com lente cilíndrica

A segunda possibilidade de arranjo tem a seguinte diferença: uma lente cilíndrica, que modifica o campo apenas no eixo⁴ \mathbf{y} . Chamando de f o comprimento focal dessa lente, se ela for colocada no plano $z = f$ e considerando o campo no plano $z = 2f$, temos

$$\mathcal{P}\{Gauss_w(x')\}\mathcal{F}\{e^{-i\Phi(y')}Gauss_w(y')\} = Gauss_{w'}(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m Gauss_{\tilde{w}}(y - y_m) \quad (3.9)$$

E temos que, novamente, o campo é dado pela soma de gaussianas em \mathbf{y} , ponderadas pelos coeficientes da rede de difração colocada no SLM, embora, agora, $\alpha = \frac{k}{f} \Rightarrow \frac{k}{f}\Delta y = \frac{2\pi}{T_y}$. Algumas vantagens dessa montagem: aproximações menos fortes são necessárias (estamos apenas nas aproximações paraxiais) e, também, a pequena divergência das ordens de difração é anulada: os feixes gaussianos passam a ser paralelos após a lente em planos suficientemente próximos ao foco [37]. Entretanto, também há desvantagens: pelo fato de os feixes estarem paralelos, se a lente aumentar a divergência em \mathbf{y} , em uma distância pequena após $z = 2f$ é possível que a condição dada pela Eq. (2.21) não seja mais satisfeita. Para que isso seja corrigido, pode ser necessário a colocação de mais lentes ao longo do arranjo, caso seja necessário realizar mais operações sobre o estado.

- Uma visão intuitiva

Vamos fazer uma descrição intuitiva, para ajudar a visualizar o que está ocorrendo – e em particular para entendermos como redes de difração diferentes levam a valores diferentes para os coeficientes C_m , resultando em diferentes operações sobre o estado de entrada. Vamos representar o estado de entrada da maneira pictórica da Figura 19. Nesta representação, separamos intensidade e fase; a primeira é representada por um perfil gaussiano no plano transversal e a segunda por uma seta em um plano.

⁴ No fundo, por ser constituída de material de índice de refração $n > 1$, ela aumenta o caminho ótico do feixe, o que é uma alteração em \mathbf{x} , apesar de que, nessas condições, tal alteração é desprezível.

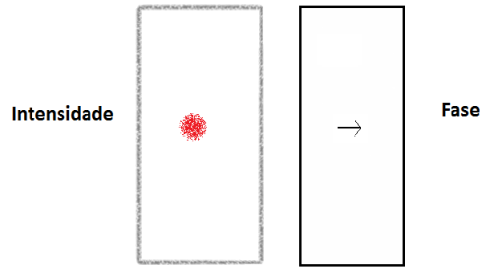


Figura 19 – Representação de estado de entrada $|X_i\rangle$. A seta, na parte direita, representa a fase do estado de entrada enquanto o ‘spot’ representa a intensidade do estado no plano transversal (x', y') .

A atuação de nosso arranjo realiza então:

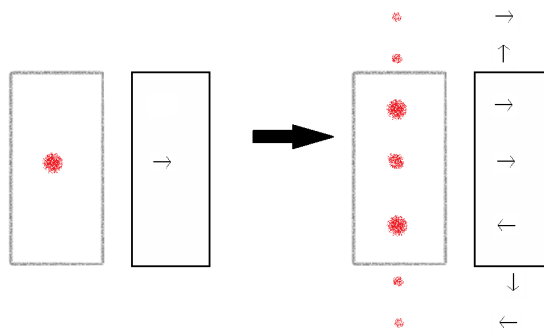


Figura 20 – Representação da atuação do arranjo descrito. Através da difração em y , realizada pela aplicação da rede de difração no SLM, temos um novo estado de caminhos, codificado em y .

Onde cada novo spot em \mathbf{y} tem sua fase e intensidade definidas por C_m . Assim, diferentes redes levam a diferentes operações (e portanto a diferentes estados finais). Passemos agora a análise para um arranjo com mais de um feixe de entrada.

3.4 Dois caminhos de entrada

Novamente, consideraremos duas opções, com e sem lente cilíndrica. O arranjo é parecido, entretanto, com mais de um caminho de entrada. Se fosse utilizado o arranjo da seção anterior, constituído por livre propagação com ou sem lente, teríamos um campo do tipo:

$$U(x, y, z_F) = \sum_{i=0}^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{im} Gauss_{w^*}(y - y_m) B_i Gauss_{w'}(x - x_i), \quad (3.10)$$

como resultado da propagação dos feixes paralelos em x e difração em y . Essa forma para o estado final não serve aos nossos propósitos. De fato, este estado não é dado por $\mathcal{M}|\Psi\rangle$,

mas é um estado descrito em um espaço de Hilbert maior⁵, codificado em \mathbf{x} e \mathbf{y}). Com a visão intuitiva dada na seção anterior, podemos representar (3.10) como na Figura 21.

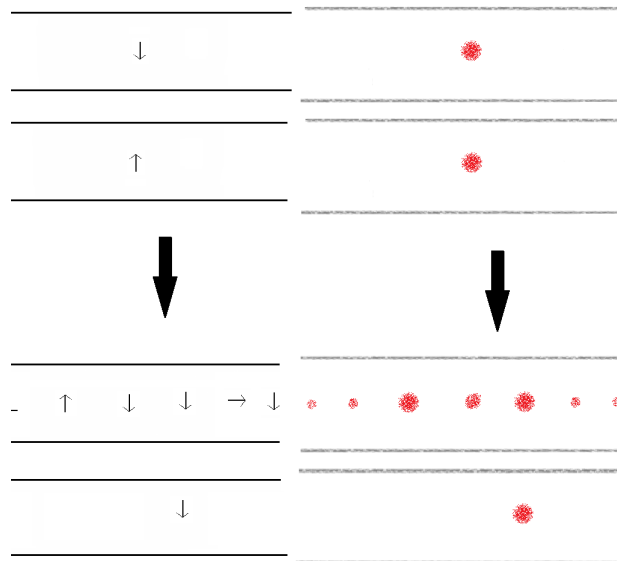


Figura 21 – Representação da atuação do arranjo descrito na seção anterior para estados de entrada com dois feixes, $\sum_i B_i |X_i\rangle$. Neste caso, temos uma rede de difração atuando no primeiro feixe nenhuma rede de difração atuando no segunda. O estado final é consequencia da difração em y e propagação dos feixes paralelos em x , separadamente.

Entretanto, o que separa o estado acima, descrito pela Eq. (3.10), do estado final que pretendemos obter é que o coeficiente do estado em y deve ser a soma dos coeficientes das grades (C_{im}) multiplicados pelos coeficientes do estado puro inicial (B_i), o que pode ser visto na equação abaixo:

$$\mathcal{M}|\Psi\rangle \leftrightarrow U(x, y, z_F) = \sum_{i=0}^1 \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{im} B_i \text{Gaus}_{w^*}(y - y_m) \text{Gauss}_{w'}(x) \quad (3.11)$$

(lembrando que w^* e w' devem satisfazer as relações necessárias com Δy e Δx , respectivamente, devido a Eq. (2.21)). Com a representação em figuras, o que devemos fazer é descrito pela Figura 22.

⁵ Este espaço maior é dado por $\mathcal{H}_x^2 \otimes \mathcal{H}_y^\infty$

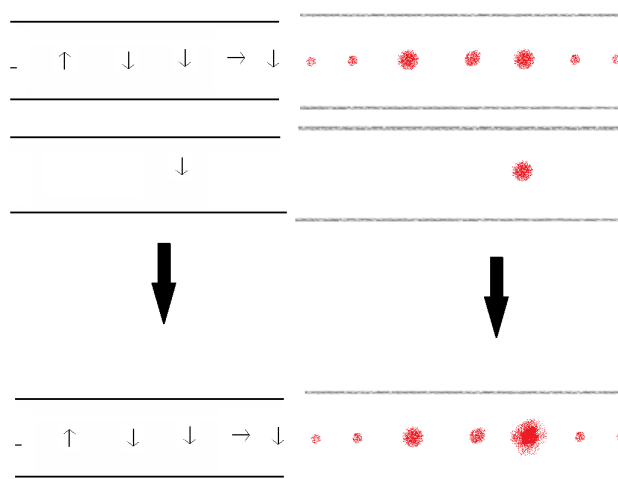


Figura 22 – Representação do que queremos obter após a operação do arranjo que será descrito para o caso de estados iniciais com dois feixes populados.

Assim, é necessário realizar interferência dos caminhos em \mathbf{x} , realizando o que foi expresso na Seção 1. A seguir, será explicitado como um interferômetro longitudinal pode fazer esse trabalho. O arranjo proposto é o da Figura 23.

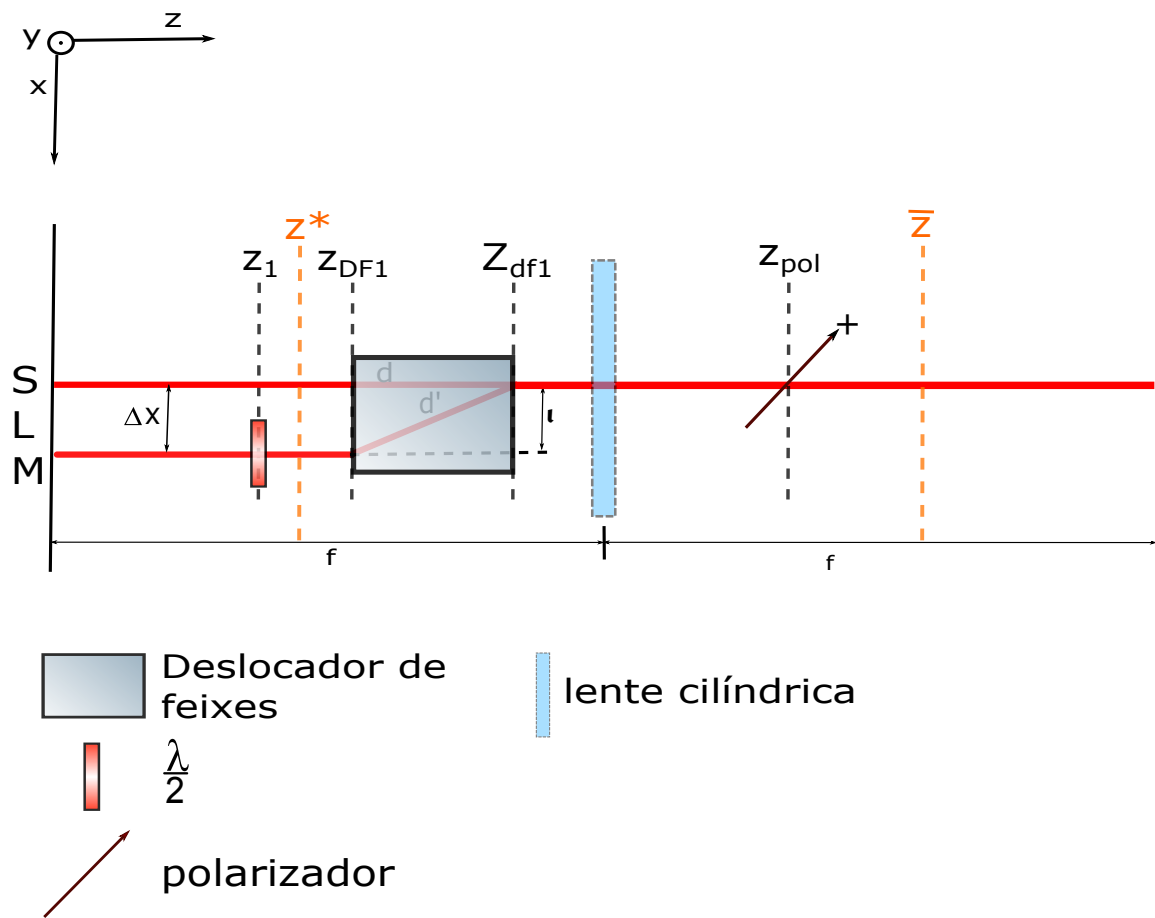


Figura 23 – Arranjo para até dois caminhos de entrada, onde novamente a lente cilíndrica constitui um segundo arranjo possível. Nesse arranjo, existe a necessidade de um interferômetro em x para a realização da transformação desejada. Novamente, no SLM as escalas de cinza em y devem ser dadas por funções periódicas.

Começaremos, então, o cálculo do operador campo para os dois caminhos de entrada.

3.4.1 Arranjo sem lente cilíndrica

No arranjo, vemos que o feixe passa por 3 etapas principais:

1. Incidência no SLM e passagem pela placa de onda;
2. Propagação livre (até o deslocador, após o deslocador e até o polarizador);
3. Propagação pelo deslocador e polarizador.

na etapa 1 o feixe após o SLM e a placa de onda, é dado por

$$U(x, y, z_1) = \mathcal{P}_{z_1} \left\{ \sum_{i=0}^{i=1} B_i \text{Gauss}_{w_0}(x' - x_i) e^{-i\Phi'_i(y')} \text{Gauss}_{w_0}(y') \hat{W}_i \right\}, \quad (3.12)$$

em que \hat{W}_i é \hat{h} para $i = 0$ e \hat{v} para $i = 1$. Haveria uma diferença de caminho ótico entre os feixes devido à passagem pela placa de onda, que pode ser compensada pelo SLM, por isso foi omitida. É importante lembrar, entretanto, que Φ' deve ser a soma da função que descreve a rede de difração com a fase constante apropriada para esse fim. Além disso, consideramos que Φ_i não interage com o feixe centrado em x_j . Isso é, claramente, uma aproximação, mas que está condizente com a condição de ortogonalidade, Eq. (2.21).

A propagação até o deslocador de feixes (ítem 2 acima), consideradas as aproximações listadas, faz com que $w_0 \rightarrow w$, o que leva a um campo de entrada no deslocador ($z = z_{DF1}$) dado por:

$$U(x, y, z_{DF1}) = B_1 \text{Gauss}_w(x' - x_1) \mathcal{P}_{z_{DF1}} \{ e^{-i\Phi'_1(y')} \text{Gauss}_w(y') \} \hat{v} \\ + B_0 \text{Gauss}_w(x') \mathcal{P}_{z_{DF1}} \{ e^{-i\Phi'_0(y')} \text{Gauss}_w(y') \} \hat{h} \quad (3.13)$$

Nesse momento, o feixe passará pelo deslocador, cuja a ação está desenvolvida no Apêndice B.3. Aqui, vamos explicitar diretamente o resultado lá obtido: O deslocador de feixes translada na direção \mathbf{x} , de uma distância l , a parte do feixe com polarização \hat{h} , enquanto que a parte com polarização \hat{v} propaga como se não houvesse o cristal⁶. Tudo isso ocorre enquanto o feixe propaga ao longo do cristal, na direção \mathbf{z} . Matematicamente, $\mathcal{C}_l \{ f(x, y) \hat{h} + g(x, y) \hat{v} \} = \mathcal{P}_{d'} \{ f(x - l, y) \hat{h} \} + \mathcal{P}_d \{ g(x, y) \hat{v} \}$, onde l é o valor que o deslocador de feixes desloca o feixe com polarização \hat{h} ; d e d' são os caminhos óticos percorridos pelas diferentes componentes do feixe (vide figura (3.6)). Se os feixes tiverem a forma descrita acima: $f(x, y) = \text{Gauss}_w(x + \Delta x) \mathcal{P}_z \{ e^{-i\Phi_1(y)} \text{Gauss}_w(y) \}$ e $g(x, y) = \text{Gauss}_w(x) \mathcal{P}_z \{ e^{-i\Phi_2(y)} \text{Gauss}_w(y) \}$, então

$$\mathcal{C}_l \{ f(x, y) \hat{h} + g(x, y) \hat{v} \} = \\ \mathcal{P}_{d'} \{ \text{Gauss}_w(x) \} \mathcal{P}_{z+d'} \{ e^{-i\Phi_1(y)} \text{Gauss}_w(y) \hat{h} \} + \mathcal{P}_d \{ \text{Gauss}_w(x) \} \mathcal{P}_{z+d} \{ e^{-i\Phi_2(y)} \text{Gauss}_w(y) \hat{v} \} \\ = \text{Gauss}_{w'}(x + \Delta x - l) \mathcal{P}_{z+d'} \{ e^{-i\Phi_1(y)} \text{Gauss}_{w'}(y) \hat{h} \} + \text{Gauss}_{w''}(x) \mathcal{P}_{z+d} \{ e^{-i\Phi_2(y)} \text{Gauss}_{w''}(y) \hat{v} \}.$$

Aplicando isso a Eq. (3.13), com $l = \Delta x$, temos:

$$U'(x, y, z_{df1}) = B_0 \text{Gauss}_{w'}(x) \mathcal{P}_{z_{DF1}+d'} \{ e^{-i\Phi'_0(y)} \text{Gauss}_{w'}(y) \hat{h} \} \\ + B_1 \text{Gauss}_{w''}(x) \mathcal{P}_{z_{DF1}+d} \{ e^{-i\Phi'_1(y)} \text{Gauss}_{w''}(y) \hat{v} \}. \quad (3.14)$$

⁶ Embora com caminho ótico maior.

Como d e d' são diferentes, existirão fases relativas entre um feixe e outro. A priori, w também será diferente para cada feixe, assim como o raio de curvatura; como dito, consideraremos essas diferenças desprezíveis. Portanto, $w' = w''$ e podemos considerar que $d = d'$ para o raio de curvatura, mas com a adição de uma fase θ no feixe que percorreu o caminho dado por d' . Assim, o campo pode ser escrito como:

$$U(x, y, z_{df1}) = B_0 \text{Gauss}_{w'}(x) \mathcal{P}_{z+d} \{ e^{-i\theta} e^{-i\Phi'_0(y)} \text{Gauss}_{w'}(y) \hat{h} \} \\ + B_1 \text{Gauss}_{w'}(x) \mathcal{P}_{z+d} \{ e^{-i\Phi_1(y)} \text{Gauss}_{w''}(y) \hat{v} \}. \quad (3.15)$$

Essa fase pode, novamente, ser compensada pelo SLM, o que, considerando essa compensação, leva a

$$U(x, y, z_{df1}) = \text{Gauss}_{w'}(x) [B_0 \mathcal{P}_{z+d} \{ e^{-i\theta} e^{-i\Phi_0(y)} \text{Gauss}_{w'}(y) \} \hat{h} \\ + B_1 \mathcal{P}_{z+d} \{ e^{-i\Phi_1(y)} \text{Gauss}_{w'}(y) \} \hat{v}]. \quad (3.16)$$

Assim, vemos que, em \mathbf{x} , teremos gaussianas idênticas somadas, mas com polarizações ortogonais. Para isso, é importante ressaltar que foi necessário que, durante toda propagação até o final do deslocador, a aproximação de campo próximo seja válida para a distribuição nessa direção (Aproximação **A0**). Isso está ressaltado na Figura 23: \bar{z} ocorre depois do deslocador de feixes. De certo modo, a polarização cruzada dos feixes garante isso, e portanto essa aproximação tem que ser válida até a placa de onda após o SLM. Após a “junção” no deslocador de feixes, dos feixes de índice 0 e 1, essa aproximação não é mais necessária em \mathbf{x} , afinal só há um feixe. Em \mathbf{y} , temos, até agora, a soma de dois campos propagados desde o SLM, com a forma $B_i \mathcal{P}_{z+d} \{ e^{-i\Phi_i(y')} \text{Gauss}(y) \} \hat{w}_i$. Importante ressaltar que cada ordem chega ao deslocador de feixes com um ângulo diferente, o que *pode colocar fases relativas nas diferentes ordens de cada feixe*, o que é algo que não pode ser compensado pelo modulador. Para resolver isso, deve-se corrigir a divergência das ordens. Entretanto, se o período for grande o suficiente para que se possa desprezar essa diferença de fase para as ordens mais relevantes, isso não será necessário. Isso só pode ser feito para redes que tenham coeficientes com maior módulo para valores de m próximos de 0.

Continuando a análise, o campo deve ser propagado de uma distância maior do que a que denominamos z^* , que deve satisfazer a condição em **A0** (fórmula do designer de antena) em \mathbf{y} . Podemos utilizar então a aproximação de campo distante, e considerar que $\mathcal{P}_{z^*} \rightarrow \mathcal{F}$, e o campo em y , agora, é a transformada de Fourier do campo em $z = 0$. Se isso ocorrer até o plano em que se encontra o polarizador, temos, imediatamente antes deste polarizador⁷:

⁷ Note que, agora, os coeficientes C_{im} também carregam o índice i das funções Φ_0 e Φ_1 que atuaram nas diferentes componentes do estado de entrada.

$$U(x, y, z_{pol}) = Gauss_{w^*}(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)(B_0 C_{0m} \hat{h} + B_1 C_{1m} \hat{v}), \quad (3.17)$$

o que significa que, para cada gaussiana centrada em um valor de y_m , o estado de polarização é dado por $B_0 C_{0m} \hat{h} + B_1 C_{1m} \hat{v}$. Definindo $\eta_m = \frac{1}{\sqrt{2}} \langle \hat{h} + \hat{v}, C_{0m} B_0 \hat{h} + B_1 C_{1m} \hat{v} \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(C_{0m} B_0 + C_{1m} B_1)$, teremos, após a passagem do feixe pelo elemento:

$$\begin{aligned} U(x, y, z_{pol}) &= Gauss_{w^*}(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta_m Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)(\hat{h} + \hat{v}) \\ &= Gauss_{w^*}(x) \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{i=0}^{i=1} B_i \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{im} Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)(\hat{h} + \hat{v}) \\ &= \eta^{(1)} Gauss_{w^*}(x) \sum_{i=0}^{i=1} B_i \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{im} Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)(\hat{h} + \hat{v}), \end{aligned} \quad (3.18)$$

onde⁸ $\eta^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Pode-se notar que o campo elétrico é dado pela soma de gaussianas em \mathbf{y} , ponderadas pelos coeficientes das séries de fourier das grades colocadas em cada região, assim como pelos coeficientes iniciais de cada feixe gaussiano de entrada. A polarização do campo final neste arranjo é diferente da polarização de entrada. Isso pode ser, caso haja interesse, modificado com uma placa de onda $\frac{\lambda}{2}$. Outra possibilidade é usar uma $\frac{\lambda}{2}$ a 22.5 graus e um PBS no lugar do polariador, o que resulta na mesma operação, com o estado de polarização de saída em \hat{h} .

3.4.2 Arranjo com lente cilíndrica

Um outro arranjo consiste em uma pequena modificação do descrito acima: uma lente cilíndrica, que modifica o campo apenas no eixo⁹ \mathbf{y} . Chamando de f o comprimento focal dessa lente, se ela for colocada no plano $z = f$ e o polarizador no plano $z = 2f$, sabemos, da ótica de Fourier, que a condição para campo distante está satisfeita mesmo dentro das aproximações de Fresnel e da aproximação paraxial para a lente (vide Apêndice B.1). Assim, o campo em $z = 2f$ é dado portanto

$$U(x, y, z_{df1}) = \eta Gauss_{w^*}(x) \sum_{i=0}^{i=1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_i C_{im} Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)(\hat{h} + \hat{v}) \quad (3.19)$$

As vantagens e desvantagens discutidas acima, para o caso da lente cilíndrica no arranjo de um caminho de entrada, se mantém idênticas. É importante notar que se apenas

⁸ Escrevemos $\eta^{(1)}$ ao invés de $\frac{1}{\sqrt{2}}$ porque isto será útil em breve, quando fizermos a generalização para mais caminhos.

⁹ Novamente, por ser constituída de material de índice de refração $n > 1$, ela aumenta o caminho ótico do feixe, o que é uma alteração em \mathbf{x} , apesar de que, nessas condições, é desprezível.

um caminho (suponha centrado em $x' = 0$) entrar nesses arranjos, a mesma situação ocorre em relação ao caso sem o interferômetro em \mathbf{x} , com a diferença que, nesse caso, há um fator $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$ no momento da passagem pelo polarizador (ou seja, possível diminuição da intensidade).

3.5 3 caminhos de entrada e generalização para n caminhos

A idéia para o caso de três caminhos de entrada é semelhante à de dois, afinal, o mesmo problema apontado para estados com 2 caminhos de entrada acontece: é necessário 'juntar' os caminhos gerados em \mathbf{y} pelas grades de difração. Para que isso seja feito com três caminhos de entrada, um interferômetro, entretanto, não será suficiente. Isso poderia ser resolvido com um chip fotônico, por exemplo, mas não lidaremos com isso nesse texto. A opção utilizada aqui será, então, a de utilizar dois interferômetros, como exemplificado na Figura (24):

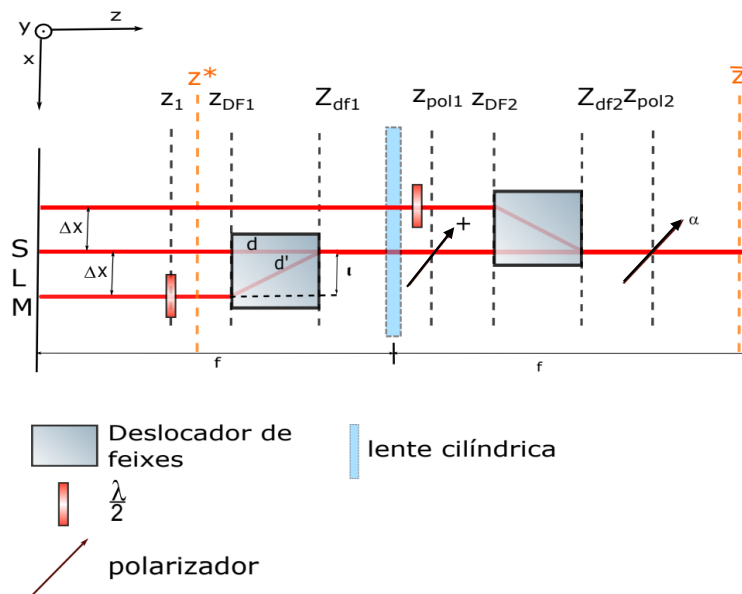


Figura 24 – Arranjo para até três caminhos de entrada. Nesse arranjo, são necessários dois interferômetros para que a operação seja implementada, garantindo a junção de todos os feixes em \mathbf{x} . Apenas uma lente cilíndrica é necessária se for possível garantir que o plano do segundo polarizador, z_{pol2} , esteja próximo ao plano de Fourier da lente.

3.5.1 Arranjo sem lente cilíndrica

Até o plano representado na imagem por z_{df1} , plano após o primeiro deslocador de feixes (onde se encontraria o polarizador no arranjo da Seção 3.4) os cálculos são extremamente análogos, com a diferença de que, nesse caso, há um terceiro caminho propagando paralelamente e, depois, deve ter sua polarização girada de \hat{h} para $\hat{h} + \hat{v}$,

resultando em:

$$U(x, y, z_{pol}) = [\eta^{(1)}Gauss_{w^*}(x) \sum_{i=0}^{i=1} B_i \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{im}Gauss_{\bar{w}}(y - y_m) + B_{-1}C_{-1m}Gauss_{w^*}(x - x_{-1})Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)]\hat{h} + \hat{v}. \quad (3.20)$$

Após este plano, ocorre propagação dos feixes e a passagem por novas placas de onda, que devem ser colocadas de modo a que o feixe centrado em $x = 0$ e o centrado em $x = l$ estejam com polarizações \hat{h} e \hat{v} , respectivamente. Assim, o campo após as placas será

$$U(x, y, z_2) = \eta^{(1)}Gauss_{w^*}(x) \sum_{i=0}^{i=1} B_i \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{im}Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)\hat{h} + B_{-1}C_{-1m}Gauss_{w^*}(x - x_{-1})Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)\hat{v}. \quad (3.21)$$

Após mais propagação, os feixes atravessam mais um deslocador de feixes, e o campo se torna:

$$\begin{aligned} U(x, y, z_2) &= \eta^{(1)}Gauss_{w^*}(x) \sum_{i=0}^{i=1} B_i \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{im}Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)\hat{h} \\ &+ B_{-1}C_{-1m}Gauss_{w^*}(x)Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)\hat{v} \\ &= Gauss_{w^*}(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} Gauss_{\bar{w}}(y - y_m) \left(\sum_{i=0}^{i=1} \eta^{(1)}C_{im}B_i\hat{h} + C_{-1m}B_{-1}\hat{v} \right). \end{aligned} \quad (3.22)$$

Pode-se ver que, nesse momento, o estado de polarização é dado por $\frac{1}{\sqrt{2}}(C_{0m}B_0 + C_{1m}B_1)\hat{h} + C_{-1m}B_{-1}\hat{v}$. Após esse deslocador, o feixe passa por um polarizador que projeta no estado $\hat{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{2}\hat{h} + \hat{v})$. O valor de $\eta'_m = \langle \hat{\alpha}, \eta^{(1)}B_0 + C_{1m}B_1\hat{h} + C_{-1m}B_{-1}\hat{v} \rangle$ é:

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\eta^{(1)}\sqrt{2}(C_{0m}B_0 + C_{1m}B_1) + C_{-1m}B_{-1}) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sum_{i=-1}^1 B_i C_{im} = \eta^{(2)} \sum_{i=-1}^1 B_i C_{im}. \quad (3.23)$$

com $\eta^{(2)} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o que gera, após a passagem pelo polarizador, o estado:

$$\begin{aligned} U(x, y, z_{pol2}) &= Gauss_{w^*}(x) \sum_{m=-\infty}^{\infty} \eta'_m Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)\hat{\alpha} \\ &= \eta^{(2)}Gauss_{w^*}(x) \sum_{i=-1}^{i=1} \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_i C_{im} Gauss_{\bar{w}}(y - y_m)\hat{\alpha}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Assim, teremos a operação desejada sendo implementada no sistema. Novamente, as diferentes estratégias para que o estado de polarização final seja, caso interesse, \hat{h} (como inicialmente) podem ser utilizadas. Entretanto, se se for utilizar o conjunto $\frac{\lambda}{2} + \text{PBS}$, o novo ângulo deve ser $\frac{\arccos \sqrt{\frac{2}{3}}}{2}$.

3.5.2 Arranjo com lente cilíndrica

Um detalhe importante aqui é que a atuação dos polarizadores deve ser feita em um plano em que haja uma boa aproximação de campo distante, garantindo que o estado de polarização seja determinado pelos coeficientes das séries de Fourier das redes. Portanto, os polarizadores não devem estar muito distantes do plano focal da lente. Na figura (24), esse plano coincide com o do primeiro polarizador, e o restante dos elementos está organizado de forma compactada de modo a deixar o segundo polarizador em um plano próximo. Isso deve ser testado em laboratório; uma lente de comprimento focal longo sendo mais apropriada. Existe, também, a possibilidade de serem usadas duas lentes cilíndricas, uma fazendo a transformada de Fourier no plano do primeiro deslocador e a segunda fazendo a imagem em \mathbf{y} no plano do segundo. De qualquer maneira, considerando que as ordens possam ser definidas de acordo com os coeficientes das séries de Fourier nos planos dos polarizadores, os cálculos do operador campo são extremamente análogos e, devido a isso, não serão feitos aqui.

3.5.3 Generalização para n caminhos

Neste momento fica claro como será feita a generalização para n caminhos de entrada: serão necessários $(n - 1)$ deslocadores de feixes e placas de onda capazes de atuar em apenas um caminho após o SLM. Lentes para corrigir divergência das ordens e garantir que a projeção nos estados de polarização corretos seja feita podem ser necessários. O arranjo generalizado, sem as correções mencionadas, está representado na Figura 25.

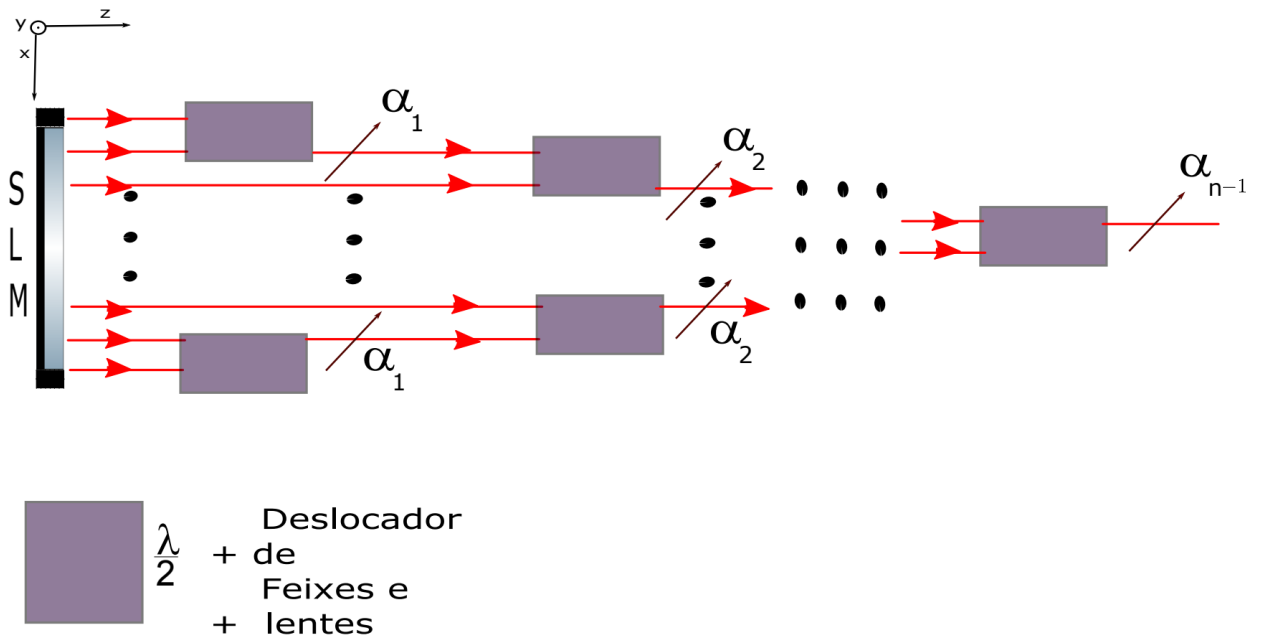


Figura 25 – Arranjo para 'n' caminhos. Cada conjunto em roxo contém o conjunto de deslocadores de feixes e polarizador no ângulo correto para realizar as operações de sobreposição dos feixes em \mathbf{x} . α_i é o estado de polarização em que o polarizador deve projetar. Na representação gráfica, para melhor visualização dos n caminhos, estamos utilizando as bordas do SLM. Entretanto, é importante ressaltar que o ideal, no laboratório, é não utilizar a região próxima a essas bordas, onde o modulador não atua corretamente.

A cada interferômetro, o n -ésimo polarizador deverá ser colocado de forma a projetar no estado $\frac{1}{\sqrt{n}}(\sqrt{n-1}\hat{h} + \hat{v})$, o que faz com que se cancele, como acima, o $\eta^{(n-1)}$ que multiplica o campo de todos os feixes até então e sobra apenas o fator $\eta^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}}$. É importante notar que esse esquema adiciona dificuldades experimentais importantes: quanto maior o número de elementos ópticos necessários, maior a distância de propagação necessária e, assim, mais difícil garantir a validade da Eq. (2.21), devido à divergência dos feixes gaussianos. Isso pode ser reparado se, a partir da segunda lente cilíndrica, forem utilizadas lentes esféricas para propagar a imagem ao longo do arranjo, o que, por outro lado, passa a necessitar um número extravagante de lentes conforme n cresce. Novamente, se for um número grande, mas constante de caminhos de entrada, chips fotônicos ou fibras ópticas resultar numa grande simplificação, embora essa hipótese não seja aprofundada nesse trabalho.

3.6 Pequeno resumo das condições experimentais e estado quântico final

Foi visto nesse Capítulo que algumas condições experimentais são muito importantes para garantir que o experimento esteja dentro do domínio de validade das aproximações consideradas. Como isso é de extrema importância, vamos listar abaixo algumas dessas condições importantes, que devem ser verificadas no laboratório, além de propor algumas maneiras de garanti-las.

- **Condição c1.** $\langle X_i | X_j \rangle \approx \delta_{ij}$ para todo z em que houver mais de um feixe no experimento [Seção (2)]. Como visto, isto é importante para que a base de caminhos gaussianos faça algum sentido (Eq. (2.21)), ao longo de todo o arranjo e também garante que $\Phi_i(y)$ não interaja com o feixe centrado em x_j . Isso porque se o campo do feixe centrado em x_j tiver amplitude desprezível na região i , podemos desprezar o fator $e^{-i\Phi_i(y)} Gauss_w(x - x_j)$. Pode-se testar essa condição ao incidir feixes e deixá-los propagar livremente, notando se há interferências consideráveis. Se houver, deve haver alguma correção: diminuir o tamanho do feixe e corrigir a divergência com o uso de lentes (vide, eg, [32], cap. 17), e/ou aumentar a separação entre os feixes. A princípio, uma maneira de obter essa condição, citada acima, é dada na Eq. (2.17). É extremamente importante, nos arranjos sem lente, que a aproximação e campo distante seja válida dentro do intervalo de pouca interferência entre os feixes em x , isto é, $z^* < \bar{z}$. Alternativamente, é importante que se consiga unir os feixes com os deslocadores de modo que $z_{poln} < \bar{z}$ já que, após z_{poln} haverá apenas um feixe em x .
- **Condição c2.** Coerência: claramente, para que haja a superposição coerente dos feixes, e também para que o efeito das redes seja o esperado, o feixe tem que manter coerência durante todo o experimento (Aproximação **A4**). No caso do experimento ser feito com laser atenuado, isso deve ser facilmente atingível.
- **Condição c3.** $l = \Delta x$ é extremamente importante para que os feixes se sobreponham no interferômetro longitudinal. Uma maneira de isso ser satisfeito “automaticamente” é que o feixe seja gerado com o mesmo tipo de deslocador de feixes que é utilizado para somá-los em \mathbf{x} depois.
- **Condição c4.** Novamente, para que a superposição seja bem sucedida no interferômetro – o resultado seja praticamente a mesma gaussiana em \mathbf{x} para ambos os feixes somados – é importante que o raio de curvatura dos feixes sejam realmente próximos, assim como o w . Se o comprimento de Rayleigh for grande o suficiente (e então a divergência pequena), e estiver longe o suficiente da cintura (vide Seção 2.1) para que a variação no raio não seja grande com z , isso deve estar aproximadamente garantido. Além disso, é facilmente testável: variando uma fase constante no SLM em apenas

uma das regiões, deve-se obter, após o polarizador, um padrão de interferência, com boa visibilidade. Detalhes são dados no Capítulo 6.

- **Condição c5.** Período T_y é pequeno o suficiente, comparado a $w_y(z = 0)$, de modo que vários períodos “caibam” na parte intensa do feixe; isso garante que o feixe de fato interaja com uma função que possa ser aproximada por uma função periódica.
- **Condição c6** Outra condição importante para garantir no laboratório é que a divergência das ordens não seja grande o suficiente para colocar fases relativas relevantes entre estas, quando da passagem no deslocador (esse efeito pode ser maior para o feixe deslocado (vide Apêndice (B.3)). Se forem relevantes, a divergência deve ser corrigida ou essas fases caracterizadas e levadas em conta.

Garantindo essas condições no laboratório de modo a conseguir implementar a proposta, teremos, ao final de qualquer dos arranjos:

$$\begin{aligned} \sum B_i |X_i\rangle &= |\Psi\rangle_0 = \sum_i B_i \int \text{Gauss}_{w0}(x - x_i) \text{Gauss}_{w0}(y) |\mathbf{1}x\rangle |\mathbf{1}y\rangle dx dy \mapsto \\ |\Psi\rangle_f &= \eta^{(n-1)} \sum_i B_i \int C_m \text{Gauss}_{w0}(x) \text{Gauss}_{w0}(y - y_m) |\mathbf{1}x\rangle |\mathbf{1}y\rangle dx dy = \sum_{im} B_i C_m |Y_m\rangle. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Assim, teremos ao final um estado resultante de uma operação definida pelos coeficientes da série de Fourier das redes e do estado inicial; completamente disponível para uma operação sequencial. A única sutileza é que a próxima atuação de um operador receberá um estado codificado em \mathbf{y} , e as redes devem ser periódicas em \mathbf{x} , e os interferômetros em \mathbf{y} . O estado de saída após essa transformação sequencial estará novamente codificado em \mathbf{x} .

Importante notar que, embora estejamos utilizando o grau de liberdade espacial em \mathbf{y} para realizar operações, o estado de entrada deve estar codificado na direção ortogonal a essa no plano transversal, unicamente. A possibilidade de ampliar a dimensão para $d \times n$, com estados de entrada do tipo

$$\sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^d B_{ij} |X_i\rangle |Y_j\rangle, \quad (3.26)$$

não está sendo tratada aqui e, para funcionar, adicionaria diversas complicações. A primeira é que a propagação ou a transformação de Fourier ótica levaria à interferência transversal, e o estado de saída não seria composto por gaussianas, mas por franjas de interferência dentro de cada feixe gaussiano, alterando completamente o resultado aqui obtido. De fato, a extensão para estados de entrada da forma da Eq. (3.26), como descrito acima,

não é trivial. Assim, os cálculos aqui valem para estados $|\Psi\rangle_0 = |Y_{j^*}\rangle \otimes \sum_i |X_i\rangle$, onde convencionamos ao longo do trabalho que $j^* = 0$.

A partir de agora, discutiremos algumas operações possíveis, considerando alguns exemplos de redes periódicas e seus efeitos, relacionando com o que pretendíamos e chegando em uma visão geral do que essa proposta pode fazer.

4 Operações com redes de difração

4.1 A matriz \mathcal{M} e as funções Φ_i

O intuito dessa seção é fazer o *link* entre o objeto de desejo deste trabalho – transformações de estados automatizadas em feixes gaussianos (vide Eq. (1)) – e a proposta apresentada no capítulo anterior. A partir desta conexão, veremos a importância de olhar para alguns exemplos de funções Φ do SLM.

Vimos que o intuito deste trabalho é realizar transformações em estados de feixes gaussianos, dados por $|\Psi\rangle_0 = \sum_i B_i |X_i\rangle$ – codificado em \mathbf{x} – no plano $z = 0$. Vimos que ao ser alterado pelo sistema ótico, $|\Psi\rangle_{final}$ é dado por $\mathcal{M}|\Psi\rangle_0$ – e está codificado em \mathbf{y} . Como visto no Capítulo 3, o que nosso arranjo realiza é, em \mathbf{y} , uma transformada de Fourier do estado modificado pelo SLM (que aplica fases diferentes, denotadas por Φ_i , para cada região i); enquanto em \mathbf{x} todos serão somados, através de um interferômetro longitudinal. Ou seja, $|\Psi\rangle_f$ é dado por

$$|\Psi\rangle_{final} = Gauss_w(x) \sum_{i,m} B_i C_{im} \tilde{Gauss}_w(\alpha y - y_m), \quad (4.1)$$

com $y_m = \frac{2\pi m}{T_y}$, $Gauss_w(x)$ são as funções gaussianas descritas acima, as coordenadas com linha estão no plano $z = 0$ e as sem linha no plano de saída do sistema.

Vamos ver, agora, exemplos de como cada Φ_i modifica o estado, ou seja, como afeta a matriz \mathcal{M} . O novo estado depende do estado de entrada (como se pode ver pela presença dos coeficientes B_i acima) e também das redes de difração colocadas em cada x_i , como visto no Capítulo anterior. Comparando a Eq. (4.1) com a Eq. (3.2), vemos que pode-se fazer uma identificação dos coeficientes de \mathcal{M} com os coeficientes da expansão de Φ_i . A relação entre os índices desses coeficientes é que, se \mathcal{M} for um operador definido em um espaço \mathcal{H}_∞ , com abuso de notação¹ podemos fazer uma numeração dos índices de m , com $j, i \in \mathbb{Z}$, e, assim, para cada coluna da matriz, ($i = i^*$ fixo) pode-se concluir que $k_{i^*,m} \propto C_{i^*m}$. Isso significa que os coeficientes da expansão de cada grade determinam as colunas da matriz \mathcal{M} , enquanto cada coluna está identificada com a região i do SLM. Ou seja,

¹ Trata-se de um abuso de notação, afinal, em dimensão infinita, a ‘matriz’ será infinita para cima e para baixo.

$$\frac{1}{\eta^{(n-1)}} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & k_{-1-1} & k_{-10} & k_{-11} & \dots \\ \dots & k_{0-1} & k_{00} & k_{01} & \dots \\ \dots & k_{1-1} & k_{10} & k_{11} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots & C_{-1}^{-1} & C_{-1}^0 & C_{-1}^1 & \dots \\ \dots & C_0^{-1} & C_0^0 & C_0^1 & \dots \\ \dots & C_1^{-1} & C_1^0 & C_1^1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \quad (4.2)$$

No capítulo 5 essa relação será analisada sob a ótica de POVM's e mapas, uma visão geral. Nesse momento, vamos nos concentrar em exemplos para a relação dada na Eq. (4.2).

Como se vê, os coeficientes da grade de difração definem a operação a ser implementada. Portanto, é de grande importância estudar algumas redes, analisando seus coeficientes e considerando, assim, o efeito destas sobre o estado de entrada, que é o que faremos a seguir.

4.2 Algumas redes de difração e seus efeitos

Nesta seção vamos ver algumas redes e que operações elas implementam no estado de um caminho. Em maior detalhe, olharemos para o módulo e a fase dos coeficientes $m = 0, 1, -1$, por motivos que ficarão mais claros no Capítulo 6. De maneira geral, será possível definir φ , uma fase característica na rede, que pode variar, e estudaremos $C_m(\varphi)$. Os SLM's, de maneira geral, são capazes de modular (para comprimentos de onda dentro do especificado pelo fabricante), um intervalo de fase de pouco mais que 2π . Considerando que podem haver evoluções instrumentais ou de arranjos que se consiga uma modulação maior, os eixos dos gráficos de $|C_m|^2$ terão intervalos de tamanho de 2π ou 3π para φ . Se for necessário um conhecimento para φ 's maiores, consideramos que essa informação pode ser obtida do comportamento já apresentado ou das expressões para os coeficientes. Já para as fases, faremos um estudo com um intervalo maior para φ , já que muitas vezes a fase não é de fácil análise, e é importante fator, tanto para definir os estados quânticos no caso da preparação de estados (arranjo de no máximo um caminho), como para a interferência nos demais casos. A partir de agora, descreveremos o período das funções periódicas Φ sem o subíndice y que vinhamos utilizando, apenas para manter uma notação mais leve.

4.2.1 Rede Binária

A grade de fase binária é definida por

$$\Phi(y) = \begin{cases} 0; & 0 \leq y < \frac{T}{2} \\ \varphi; & \frac{T}{2} \leq y < T, \end{cases} \quad (4.3)$$

Onde φ é uma constante. Seus coeficientes são dados por

$$C_0 = e^{i\frac{\varphi}{2}} \cos(\frac{\varphi}{2}); \tag{4.4}$$

$$C_m = \begin{cases} \frac{2}{m\pi} e^{i\frac{\varphi}{2}} \sin(\frac{\varphi}{2}); & m \text{ ímpar} \\ 0; & m \text{ par.} \end{cases} \tag{4.5}$$

Ou seja, todos os coeficientes tem uma fase global $e^{i\frac{\varphi}{2}}$. O coeficiente C_0 é dado por um coseno da constante φ , enquanto que os coeficientes com $m = \pm 1$ são governados por $\pm \frac{2}{\pi} \sin(\frac{\varphi}{2})$, e todos os coeficientes positivos carregam a mesma fase, enquanto que os coeficientes negativos carregam uma fase adicional de π , advinda do m no denominador. O módulo dos coeficientes com $m = 0, 1, -1$, assim como as fases **relativas à do estado inicial** estão representados nas Figuras 26 e 27.

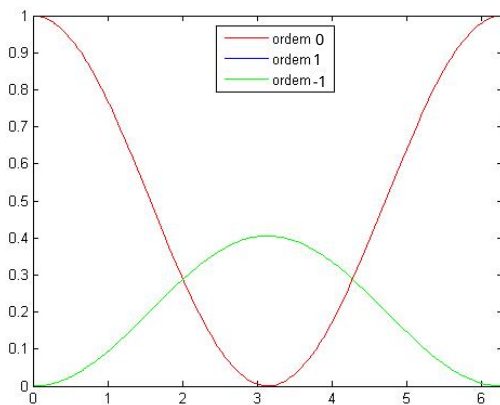


Figura 26 – módulo quadrado dos coeficientes C_0, C_1, C_{-1} da rede binária, em função da fase φ . A curva da ordem $m = +1$ está debaixo à da ordem $m = -1$, por isso não é possível vê-la.

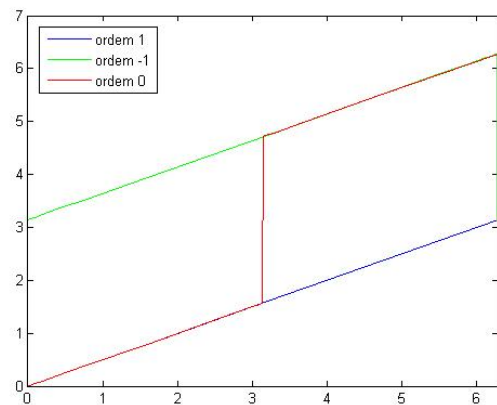


Figura 27 – fase relativa dos coeficientes C_0, C_1, C_{-1} da rede binária, em função da fase φ .

Nos gráficos seguintes, os valores para C_0 serão os dados pela linha vermelha, os valores para C_1 são os dados pela linha verde, e os valores para C_{-1} são dados pela linha azul. No gráfico essa linha não aparece porque coincide com a verde, e estão sobrepostas.

Podemos ver que, para $\varphi = \pi$, é possível anular a ordem 0, e as fases dos coeficientes ± 1 é oposta sempre; para $\varphi = 2 \arctan(\frac{\pi}{2}) = \phi_1$ e $\varphi = 2\pi - 2 \arctan(\frac{\pi}{2}) = \phi_2$ obtém-se $|C_0|^2 = |C_1|^2 = |C_{-1}|^2$. Nesses casos, a fase de C_0 é igual a de C_1 (ϕ_1) ou de C_{-1} (ϕ_2) e oposta a do outro. Pode-se ver que a fase da ordem 0 tem um salto discreto em $\phi = \pi$. Isso, entretanto, não é de estranhar, pois justamente nesse valor para ϕ a ordem 0 não existe ($|C_0| = 0$). Com essa mudança abrupta de fase, inclusive, garantimos $C_0(0) = C_0(2\pi)$, que é esperado para uma rede binária de altura 2π .

4.2.2 Redes Lineares Ideal e Pixelada

A grade linear ideal (contínua) é dada por

$$\Phi(y) = \frac{\varphi y}{T}; \quad (4.6)$$

$$\varphi = cte, \quad (4.7)$$

onde φ é a fase máxima. Os coeficientes da rede dada por essa fase periódica são

$$C_0 = e^{i\frac{\varphi}{2}} \operatorname{sinc}\left(\frac{\varphi}{2}\right); \quad (4.8)$$

$$C_m = e^{i(\frac{\varphi}{2} - m\pi)} \operatorname{sinc}\left(\frac{\varphi}{2} - m\pi\right). \quad (4.9)$$

Os módulos e fases relativas estão representadas na Figura 28, onde o eixo x contém a fase máxima φ , e valores negativos estão sendo considerados porque, nesse caso, se trata de uma fase linear que cresce no outro sentido, e representa uma rede de difração linear que denominaremos *inversa*.

Pode-se ver das Eqs. 4.9 que os valores $\varphi = \pm 2\pi$ conseguem fazer com que $C_m = \delta_{m,\pm 1}$, ou seja, é possível zerar todas as ordens, exceto a ordem ± 1 . De maneira geral, temos que $\varphi = 2n\pi, n \in \mathbb{Z} \Rightarrow C_m = \delta_{m,n}$. As fases da rede linear ideal sofrem descontinuidades com saltos de π conforme o valor de ϕ varia (devido ao expoente na fase e também à função ‘sinc’). Vide Fig. 28.

Acima consideramos uma idealização da rede linear, em que o SLM é capaz de aplicar fases continuamente ao longo do eixo. Entretanto, como se trata de uma estrutura pixelada, o mais correto é considerar que a fase colocada é discretizada ao longo do eixo y . A grade linear escada é definida por

$$\Phi(y) = \sum_{n=0}^{N-1} K_n \operatorname{Rect}(y - nl); \quad (4.10)$$

$$K_n = e^{i\frac{\varphi_{max}}{N-1}n}, \quad (4.11)$$

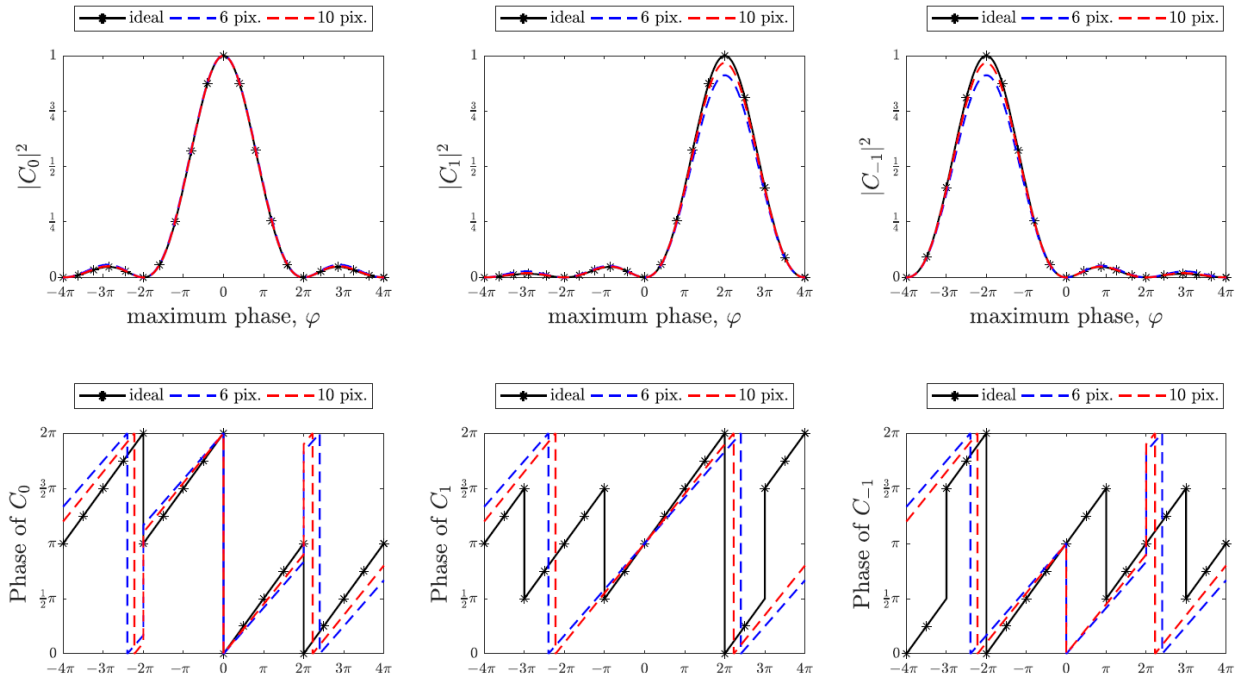


Figura 28 – Módulo e fase dos coeficientes C_0, C_1, C_{-1} para as redes lineares ideal e pixelada, em dependência com a fase máxima φ_{max} . Para o caso da pixelada, consideramos dois valores de N , 10 ou 12.

Onde l é o tamanho do pixel do SLM. Os coeficientes desta rede são dados por

$$C_0 = \frac{1}{N} e^{i\frac{\varphi}{2} \frac{N-1}{N}} \frac{\sin(\frac{\varphi}{2})}{\sin(\frac{\varphi}{2N})}; \quad (4.12)$$

$$C_m = \frac{1}{N} \text{sinc}\left(\frac{m\pi}{N}\right) e^{i\frac{\varphi}{2} - m\pi \frac{N-1}{N}} \frac{\sin(\frac{\varphi}{2} - m\pi)}{\sin(\frac{\varphi - 2m\pi}{2N})}; \quad (4.13)$$

As funções $C_m(\phi)$, para a rede linear escada, são funções mais complicadas do que para a rede linear ideal, mas é importante notar que no limite destas funções para $N \rightarrow \infty$ os coeficientes se reduzem aos da linear contínua. É bom lembrar que esse limite só significa que estaremos próximos da reta ideal, se o período $T = Nl$ continuar constante, o que implica que o tamanho dos pixels tende a zero. Se for feito $N \rightarrow \infty$ com o tamanho dos pixels constante, teremos $T \rightarrow \infty$ e, como a separação entre as ordens é dada por $\frac{2\pi}{T}$, vê-se que nesse limite todas as ordens estão no mesmo ponto (afinal, a reta ideal que estamos aproximando tem coeficiente angular nulo). Vide Fig. 28 para a representação dos módulos e fases desses coeficientes, comparados ao caso ideal.

Pode-se ver que a discretização afeta um pouco o módulo, mas tem um efeito que deve ser considerado com cuidado nas fases relativas dos coeficientes.

Para N com valores como 12 ou 10, a distância ao caso ideal não é muito grande, sendo ≈ 0.98 , para $\varphi_{max} = \pm 2\pi$, que é próximo de 1, valor do módulo para o caso

pixelado e para o caso ideal, respectivamente. Outro ponto importante para ressaltar é que, enquanto as fases para os coeficientes ± 1 são iguais no caso ideal, existe uma diferença no caso pixelado, dada por $e^{i2\pi \frac{N-1}{N}}$. Vê-se assim que, o fato de a rede linear ser pixelada, altera pouco o módulo quadrado dos coeficientes para $N \geq 10$, enquanto que as fases são modificadas de maneira mais significativa.

4.2.3 Rede Triangular ideal

A fase triangular é definida da seguinte maneira

$$\Phi(y) = \begin{cases} \frac{-\varphi_{max}2\pi y}{T}; & -\frac{T}{2} \leq y \leq 0 \\ \frac{\varphi_{max}2\pi y}{T}; & 0 < y \leq \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (4.14)$$

Os coeficientes são dados por

$$\begin{cases} C_0 = -ie^{i\frac{\varphi_{max}}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\varphi_{max}}{2}\right); \\ C_m = \frac{-i}{2}e^{i\frac{\varphi_{max}+\pi m}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\varphi_{max}+\pi m}{2}\right) + e^{i\frac{\varphi_{max}-\pi m}{2}} \text{sinc}\left(\frac{\varphi_{max}-\pi m}{2}\right) \end{cases} \quad (4.15)$$

Pode-se ver que $C_m = C_{-m}$. Mais uma vez, com $\varphi_{max} = 2\pi$, é possível zerar a ordem 0, enquanto as ordens com m positivo são iguais, em módulo e fase. Nas figuras (29) e (30) encontram-se os gráficos de módulo e fase relativa de C_m , com $m = 1, -1, 0$.

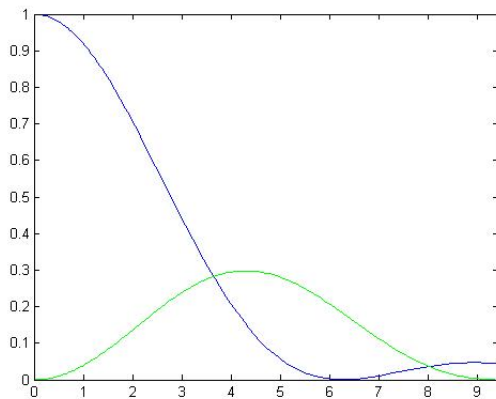


Figura 29 – $|C_m|^2$, com $m \in \{-1, 0, 1\}$, para a rede triangular, como dependência de φ_{max} .

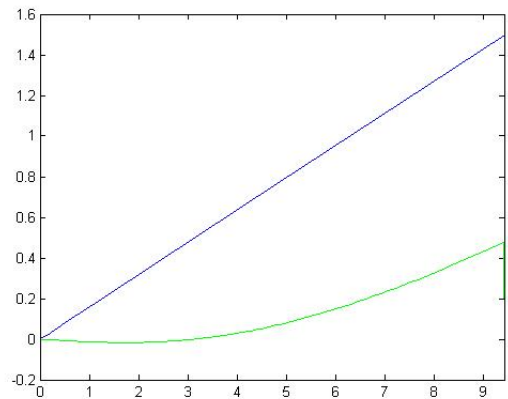


Figura 30 – Fase dos coeficientes C_0, C_1, C_{-1} , para a rede triangular, em função de φ_{max} .

A rede triangular ideal faz com que $C_m = C_{-m}$, em módulo e fase ²; essa rede também pode anular a ordem central ($\varphi = 2\pi$) e igualar $|C_0|$ e $C_{\pm 1}$ ($\varphi \approx 3.7$).

² a mudança $m \rightarrow (-m)$ na expressão em (4.15) não altera o C_m .

4.2.4 Rede Triangular pixelada

Novamente, como no caso da rede linear, vamos considerar o efeito da pixelização da tela do SLM nos resultados esperados para a rede triangular. A rede triangular pixelada pode ser escrita como

$$e^{i\Phi(y)} = \begin{cases} e^{-i2\frac{\varphi}{N}n}, & -\frac{N}{2} \leq n \leq -1, n \in \mathbb{Z}; \\ e^{i2\frac{\varphi}{N}n}, & 0 \leq n \leq \frac{N}{2} - 1. \end{cases} \quad (4.16)$$

Temos, então, os seguintes coeficientes da série de Fourier dessa rede

$$\begin{cases} C_0 = \frac{1}{N} \frac{\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi}{N}\right)} e^{\frac{i\varphi}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{N}\right); \\ C_m = \frac{1}{N} e^{\frac{i}{2}(\varphi-\pi m)} \operatorname{sinc}\left(\frac{\pi m}{N}\right) \left[e^{-i\frac{\varphi}{N}} \frac{\sin\left(\frac{\varphi-\pi m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi-\pi m}{N}\right)} + e^{i\pi m} e^{\frac{i\varphi}{N}} \frac{\sin\left(\frac{\varphi+\pi m}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varphi+\pi m}{N}\right)} \right]. \end{cases} \quad (4.17)$$

Esse resultado, novamente, vai ao caso ideal, dado nas Equações (4.15), conforme $N \rightarrow \infty$. Novamente, vale lembrar que nesse caso, $T \rightarrow \infty$ também, o que significa que a separação Δy entre as ordens vai a zero, o que significa que esse não é um limite a se buscar, mas deve haver um equilíbrio entre o quanto é necessário aproximar os módulos e fases da função realmente colocada no SLM e aquela que queremos e a distância entre as ordens. Os módulos e fases são mostrados nas Figs. 31, 32, 33 e 34, em comparação aos módulos e fases ideais. Primeiro analisaremos a mudança nos módulos (quadrados) dos coeficientes com a altura da rede, depois analisaremos as fases.

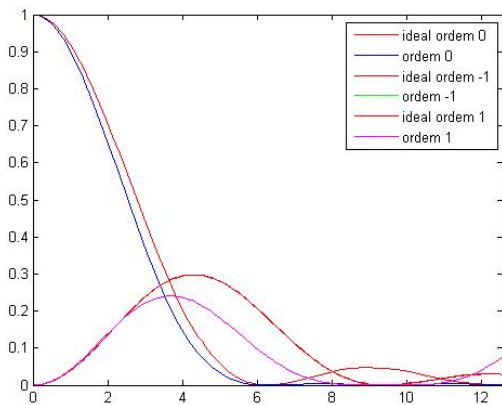


Figura 31 – Comparação dos módulos quadrados dos coeficientes para o caso pixelado ($N = 6$, rosa e azul) e ideal (vermelha).

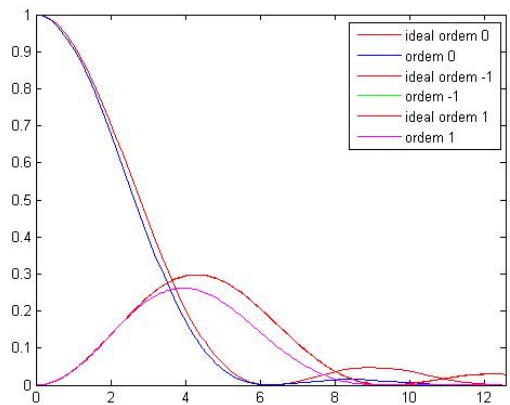


Figura 32 – Comparação, agora com $N = 8$ (rosa e azul) e ideal (vermelha).

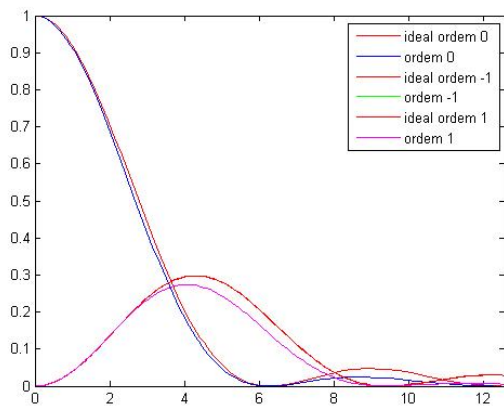


Figura 33 – Comparação dos módulos quadrados dos coeficientes para o caso pixelado ($N = 10$, rosa e azul) e ideal (vermelha).

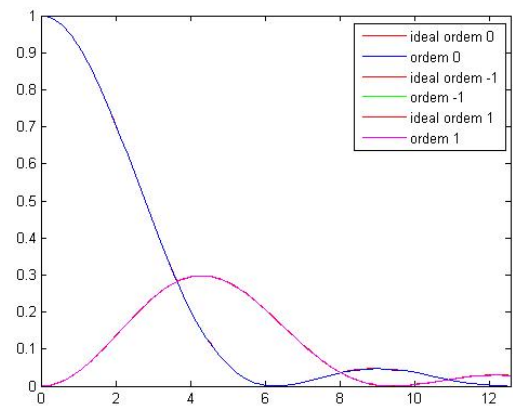


Figura 34 – Comparação, agora com $N = 100$ (rosa e azul) e ideal (vermelha)

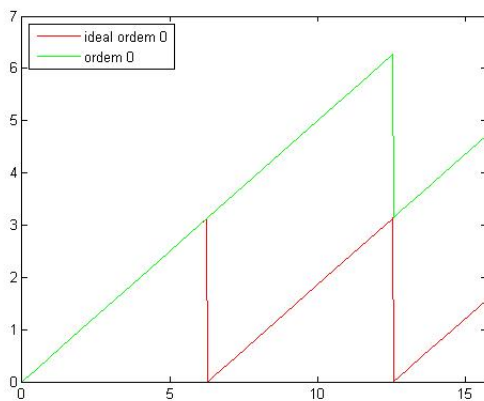


Figura 35 – Fases para os casos pixelado ($N = 6$, verde) e ideal (vermelha), ordem 0.

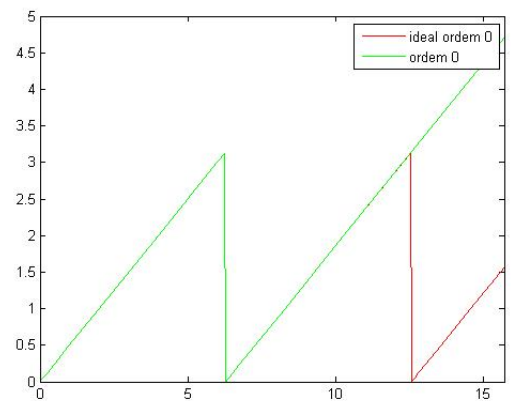


Figura 36 – Fases para os casos pixelado, $N = 8$ (verde) e ideal (vermelha).

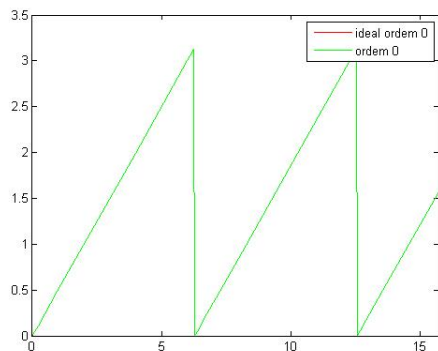


Figura 37 – Fases para os casos ideal e pixelado $N = 100$ (sobreposta).

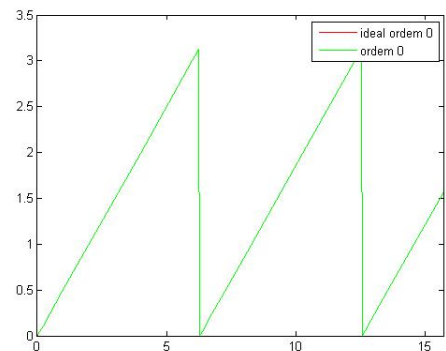


Figura 38 – Módulos para casos ideal e pixelado com $N = 100$ (sobreposta).

De fato, quanto maior N , a curva da triangular pixelada rapidamente se aproxima da triangular ideal. Para um período com 10 pixels já temos algo bem próximo. Entretanto, novamente, as fases precisam ser olhadas com mais cuidado (vide Figs. 35, 36, 37 e 38). Na ordem 0, o efeito da discretização pode ser drástico. O $\cos(\frac{\varphi}{N})$ cancela a mudança de sinal da sinc para $N = 6$, impedindo a drástica mudança de fase, que ocorreria no caso ideal, em $\varphi = 2\pi$. Importante notar que isso só ocorre após uma modulação de $\varphi \geq 2\pi$ para esse valor de N ; antes desse período, há um bom acordo entre os resultados de ambas as redes. De fato, ao aumentar o valor ³ de N , essa discrepância é “adiada” para um valor de φ maior. Nas figuras 39, 40, 41 e 42, estão os gráficos das ordens ± 1 .

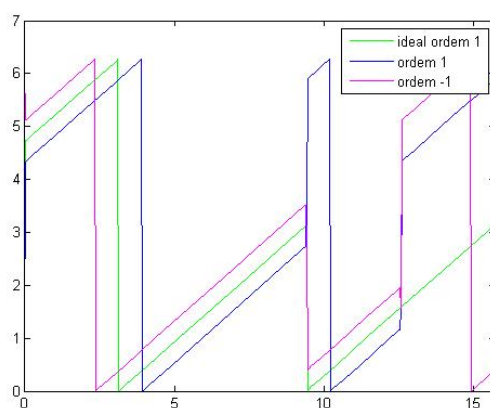
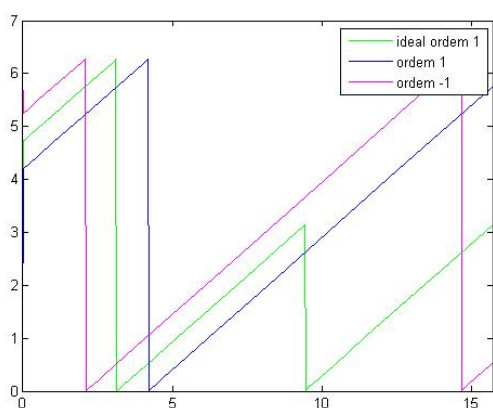


Figura 39 – Comparação das fases na ordem 0, entre os casos pixelado ($N = 6$, verde) e ideal (vermelha).

Figura 40 – Comparação, agora com $N = 8$ (verde) e ideal (vermelha)

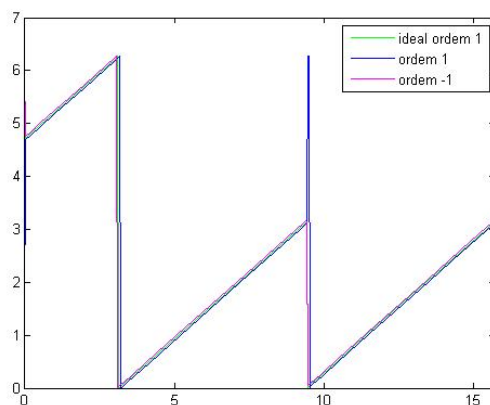
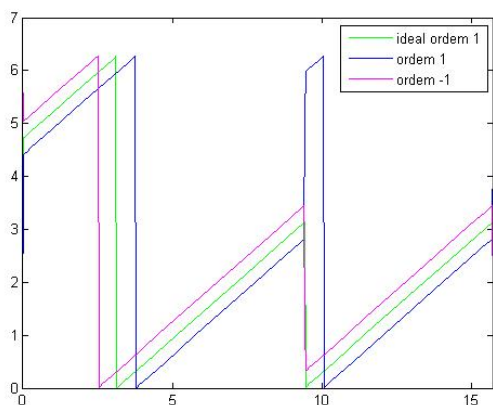


Figura 41 – Comparação das fases da ordem 0, entre o caso pixelado ($N = 10$,verde) e ideal (vermelha).

Figura 42 – Comparação, agora com $N = 100$ (verde) e ideal (vermelha)

³ Este valor deve ser par, como considerado no cálculo para obter a Eq. (4.17). Isto está relacionado com o fato da rede necessitar subida e descida com o mesmo número de “degraus”.

Vemos que a discretização muda bastante as fases das ordens ± 1 , em comparação à rede triangular ideal. É interessante notar que uma das ordens tem sua fase adiantada enquanto que a outra tem a fase atrasada com relação à ideal. (Vale notar que o “pulo” que chama a atenção na ordem $+1$ na verdade é o mesmo comportamento “atrasado” que desceria para um valor de fase negativo, mas como $\varphi \in \{0, 2\pi\}$, parece saltar no gráfico.) Note-se que, de fato, ambas as fases vão se aproximando uma da outra e da ideal, conforme $N \rightarrow \infty$. Desse modo, ao usar essa rede, assim como a linear pixelada, é importante se atentar às fases que podem ser bastante diferentes e isso deve ser levado em conta.

4.2.5 Rede Senoidal

A rede senoidal é dada por

$$e^{i\Phi(y)} = e^{i\varphi \sin(y)}. \quad (4.18)$$

Seus coeficientes são dados por

$$C_m = J_m(\varphi), \quad (4.19)$$

onde $J_m(\varphi)$ são as funções de Bessel (cilíndricas) de ordem m , de primeiro tipo. Na Figura 43, estão os módulos ao quadrado dessas funções, para as ordens 0 e ± 1 .

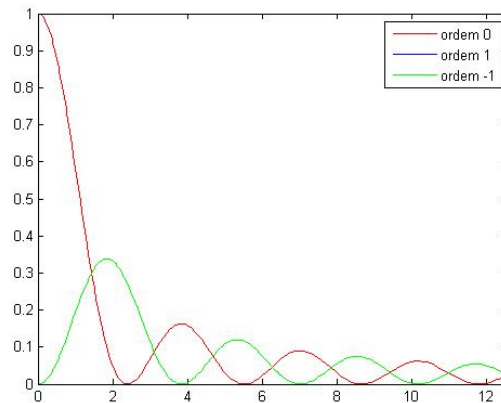


Figura 43 – Módulos quadrados dos coeficientes para fase senoidal

Um ponto interessante é que essas funções, para ordens inteiras e φ reais, satisfazem

$$J_m(\varphi) = (-1)^m J_{-m}(\varphi) \quad (4.20)$$

o que significa que, para m ímpar, existe uma fase de π entre J_m e J_{-m} . Para m par, elas são sempre iguais. Como essas são funções reais, para $0 \leq \varphi < \rho$, onde ρ é a primeira raiz de J_0 , todas as funções de $m < 0$ par ou $m > 0$ tem a mesma fase (0), enquanto que

as demais tem fase de π com relação a essas: constante com φ nesse intervalo. Após esse valor ($\varphi = \rho$), as fases começam a alternar entre 0 e π , dependendo de $J_m(\varphi)$ ser positivo ou negativo. Isso está expresso no gráfico da figura (44).

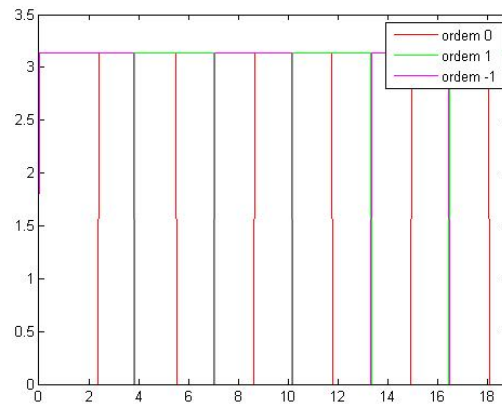


Figura 44 – fases das redes senoidais: as ordens ímpares negativas tem fase π com relação às outras; todas não tem variação de fase com ϕ .

Infinitas outras redes podem ser testadas, imaginadas e utilizadas, cada função periódica correspondendo a uma série de Fourier, cujos coeficientes podem ser de interesse para utilização. Entretanto, vamos agora analisar outras técnicas que serão úteis para obter diferentes \mathcal{M} 's, sem aprofundar essa questão ilimitada.

4.3 Outras técnicas para manipulação dos coeficientes

Na seção anterior analisamos diversas redes diferentes, cada uma levando a coeficientes diferentes que podem ser de utilidade para realizar as transformações de estado expostas, relacionadas à proposta no capítulo (3). Uma visão mais geral e formal (relacionando com mapas e POVM's) sobre as matrizes dos coeficientes será dada no capítulo a seguir. Agora, vamos analisar uma técnica interessante que dá mais liberdade às transformações a serem realizadas, sem que, para isso, seja necessário recorrer a mais redes.

4.3.1 Redes deslocadas

Ao aplicar as funções das redes no cálculo feito até agora, assumimos um sistema de referência para $\Phi(y)$ centrado no pico das gaussianas em y . Nesse sistema é que estão escritas as fases das redes, segundo as funções dadas na seção anterior. Entretanto, no SLM, é sempre possível fazer a rede de maneira *deslocada*: por exemplo, a binária pode ter a fase maior acima ou abaixo do centro da gaussiana, ou uma fase constante nesse ponto. Isso está representado na figura (45).

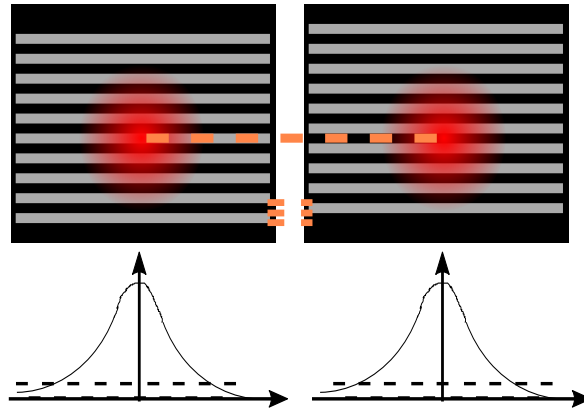


Figura 45 – rede deslocada com relação ao feixe incidente. Repare nas indicações tracejadas.

As linhas tracejadas na imagem são horizontais, a maior delas conecta os dois valores máximos das gaussianas. Podemos ver que os dois estão à mesma altura, mas a linha atravessa uma escala de cinza mais clara em uma delas e preta na outra. Nas linhas embaixo vemos que, de fato, por toda a tela as redes estão defasadas de meio período. Isso é representado nos esboços na parte inferior da figura 45, que contem a intensidade do feixe ao longo do eixo de coordenadas em y e as fases colocadas.

Para vizualizarmos como isso pode ser interessante, vamos ver o que um coeficiente deslocado implica:

$$C_m^{(d)} = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^d(y') e^{\frac{-2\pi im}{T} y'} dy' = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(y' - a) e^{\frac{-2\pi im}{T} y'} dy' = \quad (4.21)$$

$$= \int_{-\frac{T}{2}-a}^{\frac{T}{2}-a} f(y) e^{\frac{-2\pi im}{T} (y+a)} dy = e^{\frac{-2\pi im}{T} a} \int_{-\frac{T}{2}-a}^{\frac{T}{2}-a} f(y) e^{\frac{-2\pi im}{T} y} dy = \quad (4.22)$$

$$= e^{\frac{-2\pi im}{T} a} C_m \quad (4.23)$$

$$(4.24)$$

Como $a = nl$ e $T = Nl$,

$$C_m^{(d)} = e^{\frac{-2\pi im}{N} n} C_m \quad (4.25)$$

De fato, deslocar as redes permite adicionar fases relativas dependentes da ordem, do número de pixels no período e de quantos pixels a rede foi deslocada: adiciona-se uma fase $\Delta\varphi = -\frac{2\pi m}{N} n$. Vemos que, com essa técnica, os coeficientes ± 1 da rede binária, por exemplo, que tem fases opostas com a função dada na seção anterior, podem ter a mesma fase desde que $a = \frac{N}{2}$, resultando em uma fase adicional de $\mp \frac{\pi}{2}$ às ordens ± 1 , e a diferença de fase π entre elas vai a zero. Já a ordem zero não tem sua fase alterada.

Desse modo, temos a possibilidade de alterar a fase relativa dos coeficientes – portanto, dos estados gerados com o arranjo de no máximo 1 caminho e, inclusive, os módulos do estado final nos outros casos. Assim, isso pode ajudar a realizar diferentes transformações, quando precisamos alterar as fases das entradas da matriz \mathcal{M} , dada em (4.2). Importante notarmos que essa mudança só pode ser realizada nos coeficientes com $m \neq 0$ (e varia com m), ou seja:

$$\therefore \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}_c^{(d)} : \quad (4.26)$$

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{-1-1} & C_{-10} & C_{-11} \\ C_{0-1} & C_{00} & C_{01} \\ C_{1-1} & C_{10} & C_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \longrightarrow \begin{vmatrix} e^{\frac{2\pi i}{N}n_1} C_{-1-1} & e^{\frac{2\pi i}{N}n_2} C_{-10} & e^{\frac{2\pi i}{N}n_3} C_{-11} \\ C_{0-1} & C_{00} & C_{01} \\ e^{-\frac{2\pi i}{N}n_1} C_{1-1} & e^{-\frac{2\pi i}{N}n_2} C_{10} & e^{-\frac{2\pi i}{N}n_3} C_{11} \end{vmatrix} \quad (4.27)$$

onde n_i é o número de pixels que a rede foi deslocada na região i , com relação àquela considerada na seção 4.1.

4.3.2 Cancelamento e alteração do módulo de C_{im}

Outra técnica que pode ser bastante útil é, além de alterar as fases relativas em cada coluna dos coeficientes da matriz através de redes já obtidas, podemos alterar a fase entre uma coluna e outra, assim como os módulos relativos através da técnica que descreveremos a seguir.

Uma outra consideração feita até aqui é que não são colocadas redes de difração na direção \mathbf{x} . Entretanto, se colocarmos uma rede com período suficientemente pequeno, o cálculo acima é válido para a ordem⁴ 0, embora as demais ordens devam ser analisadas calmamente. Entretanto, se o período for pequeno o suficiente inclusive para que as ordens ± 1 em \mathbf{x} não entrem nos deslocadores de feixes e espalhem para fora do arranjo experimental, poderemos, a custo de perdas de intensidade (e, como veremos adiante, de a transformação não ser mais unitária), modificar os módulos e as fases de cada coluna da matriz em (4.2), já que agora teremos apenas a ordem zero da rede em \mathbf{x} . Essa ideia está representada na figura 46.

⁴ Isto porque esta ordem está dentro da aproximação paraxial.

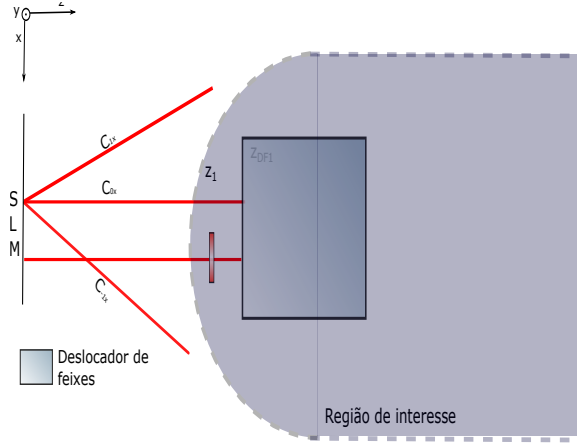


Figura 46 – Uso de redes na direção \mathbf{x} para alterar o módulo das colunas da matriz \mathcal{M} . Esse método pode zerar essas colunas: colocar luz fora das regiões consideradas no experimento.

Assim, o que teremos é

$$\therefore \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}_{c^x} : \quad (4.28)$$

$$\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{-1-1} & C_{-10} & C_{-11} \\ C_{0-1} & C_{00} & C_{01} \\ C_{1-1} & C_{10} & C_{11} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ C_{-10x} \begin{pmatrix} C_{-1-1} \\ C_{0-1} \\ C_{1-1} \\ \vdots \end{pmatrix} & C_{00x} \begin{pmatrix} C_{-10} \\ C_{00} \\ C_{10} \\ \vdots \end{pmatrix} & C_{10x} \begin{pmatrix} C_{-11} \\ C_{01} \\ C_{11} \\ \vdots \end{pmatrix} \end{vmatrix} \quad (4.29)$$

em que C_{i0x} é o coeficiente, na ordem 0, da rede colocada no i -ésimo feixe, em \mathbf{x} .

Com isso, é possível colocar fases e modificar o módulo de todos os coeficientes de uma coluna em \mathcal{M} ; entretanto, um artifício interessante é que é possível, inclusive, *zerar uma coluna inteira da matriz \mathcal{M}* . Por exemplo, uma rede binária com $\varphi = \pi$ ou uma linear de altura $\varphi = 2\pi$ são capazes de fazê-lo, levando ao completo cancelamento dos coeficientes e da ação dessa coluna da matriz.

A ideia para o cancelamento é simples: usar redes para desviar a luz de um feixe (ou parte dela) para uma região que será desconsiderada pelo arranjo experimental. Isso é possível de ser feito, inclusive, no caso de não se considerar todo plano em \mathbf{y} e usar uma rede de período curto nessa mesma direção.

4.3.2.1 Composição de redes

A rede a ser colocada no SLM também pode ter a forma

$$e^{i\Phi_1(y')} e^{i\Phi_2(y')} = e^{i(\Phi_1(y')+\Phi_2(y'))} = e^{i\Phi_c(y')} \quad (4.30)$$

E, nesse caso, se ambas tiverem o mesmo período, o resultado é uma nova função periódica, *que pode ter* o mesmo período. De maneira geral, o cálculo dos coeficientes dessa composição não se relaciona de maneira trivial com os coeficientes de cada rede individualmente. Afinal, seus coeficientes são definidos por

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\Phi_c(y')} e^{-\frac{2\pi im}{T} y'} dy' = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i[\Phi_1(y')+\Phi_2(y')]} e^{-\frac{2\pi im}{T} y'} dy' \quad (4.31)$$

Em que T é o período de $\Phi_c(y')$.

Vemos que, de maneira geral, não é possível escrever essa integral em função dos coeficientes individuais. Um exemplo que esclarece esse ponto é dado por uma rede binária de altura ϕ_1 composta com uma rede linear de altura Φ_2 (fig 47), com diferentes deslocamentos entre elas.

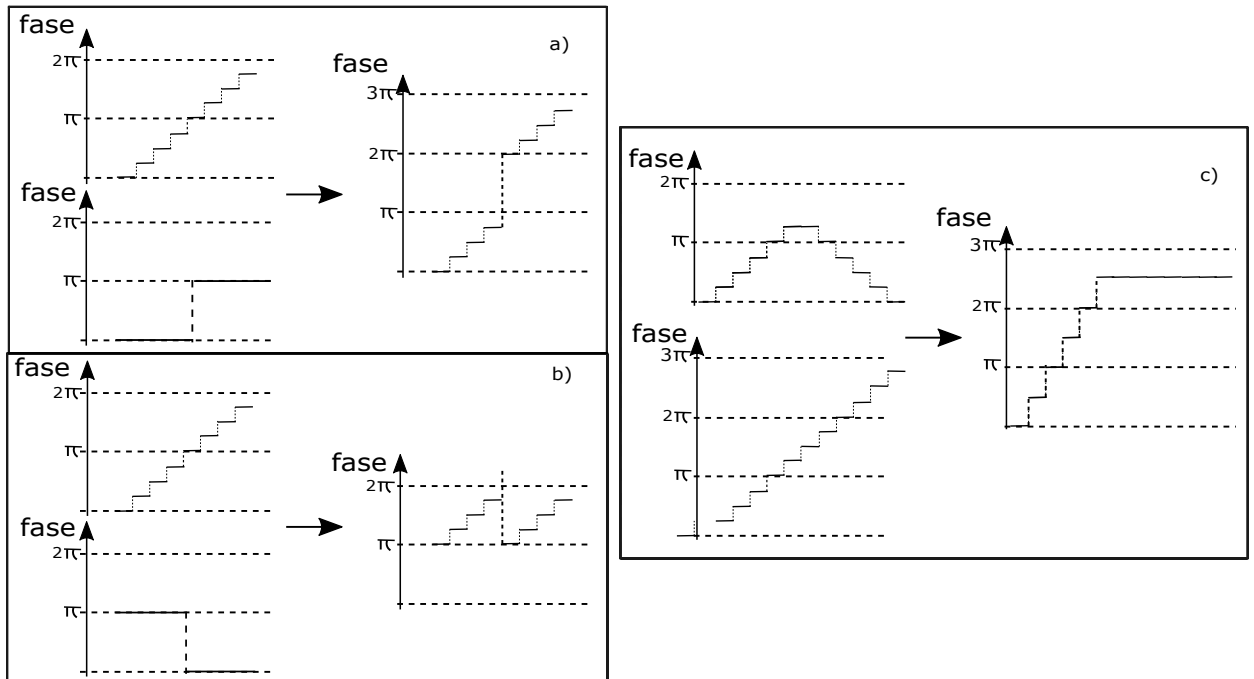


Figura 47 – composição de redes: a) linear pixelada $0 - 2\pi$ e binária $0 - \pi$. b) *idem*, com a binária agora deslocada de $\frac{N}{2}$ pixels. c) triangular pixelada de altura máxima $\frac{3\pi}{2}$ e linear pixelada $0 - 3\pi$. A composição de redes não é trivial.

No caso em que a rede binária tem metade da altura que a linear e essa está na disposição mostrada na figura (47), vemos, inclusive, que o período da rede composta é metade do período individual.

Vemos que, de fato, não é claro que essa função, dada por (4.31), tenha qualquer relação simples com os coeficientes já estudados. Entretanto, vamos ressaltar duas composições que serão interessantes; uma bastante simples, mas que suscita certos detalhes que merecem atenção e outra mais delicada.

- **Composição com uma fase constante**

Esse caso já foi, inclusive, considerado no capítulo 3, sendo utilizado para compensar as diferenças de caminho entre os feixes.

Nesse caso, temos:

$$e^{i\Phi_c} = e^{i\theta} e^{i\Phi_2(y')} \Rightarrow C_m^c = e^{i\theta} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\Phi_2(y')} e^{-\frac{2\pi im}{T}(y')} dy' = e^{i\theta} C_m \quad (4.32)$$

De modo que os coeficientes ao final são os mesmos, com a adição dessa fase. Isso pode, entretanto, ser mais delicado do que parece: a fase θ não pode ser qualquer, afinal, o SLM não dá qualquer valor de fase, mas até um valor máximo. Assim, cabem alguns comentários técnicos: Inicialmente, vamos olhar para o caso da rede binária, cujos coeficientes são periódicos. Se compusermos esta rede com uma fase constante, teremos que a função colocada no SLM é

$$\Phi(y) = \begin{cases} \theta, & \text{para } 0 \leq y < \frac{T}{2} \\ \varphi + \theta, & \text{para } \frac{T}{2} \leq y < T \end{cases} \quad (4.33)$$

Como os coeficientes são periódicos, poderia-se pensar que fazer $\text{mod}_{2\pi}(\Phi(y))$ é aceito, indiscriminadamente. Entretanto, vemos que C_m são funções periódicas, mas dependem de $\frac{\varphi}{2}$, e, portanto, o que deve ser feito é $\text{mod}_{2\pi}(\frac{\Phi(y)}{2})$. Fazer módulo 2π para $\frac{\varphi}{2}$ implica que para φ pode ser feito módulo 4π .

Para exemplificar, suponhamos que a altura máxima colocada sem a fase constante seja $\frac{3\pi}{2}$ e a mínima seja 0. A fase constante $\theta = \pi$ a ser colocada tem que levar esses valores, respectivamente, para $\frac{3\pi}{2} + \pi$ e π ; não deve levar a $\frac{\pi}{2}$ e π , pois se trata de uma rede completamente diferente. Isso é exemplificado na figura 48.

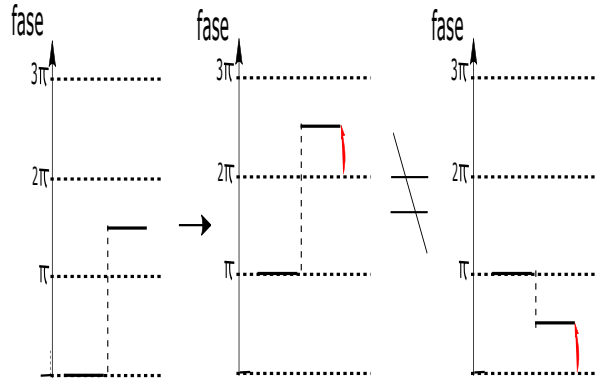


Figura 48 – Composição com fase constante: não se deve realizar, no programa que gera as máscaras, a operação $\text{mod } 2\pi$: como se vê, são redes diferentes.

E vemos que, de fato, a rede binária $0 - \frac{3}{2}\pi$ composta com a fase $\theta = \pi$ não deve ter seu resultado final feito módulo 2π para utilização no modulador espacial; nesse caso obteríamos a rede $0 - \frac{\pi}{2}$ deslocada de $\frac{T}{2}$, que claramente não atua da mesma maneira (vide seção 4.2.1). Portanto, se o SLM não conseguir modular até 4π , o máximo de fase constante que pode ser adicionada numa rede é aquele dado pelo máximo modulado pelo SLM subtraído de φ . Se o SLM conseguir modular até 4π , é possível utilizar a composição de fases constantes com a rede binária sem esse problema. Para as outras redes descritas, vemos que não é verdade que $C_m(\varphi) = C_m(\varphi + \beta)$, para qualquer β real, o que significa que nesses casos a fase constante máxima a ser adicionada é dada pelo máximo modulado pelo SLM subtraído de φ_{max} da rede. Essas condições devem ser analisadas com calma, já que impõe limites à composição com fases constantes.

- **Composição com rede linear $0 - 2\pi$; “levantamento e abaixamento”**

Um outro caso especial, ao qual a mesma consideração acerca da possibilidade de fazer módulo deve ser tratada com cuidado, é o de composição com uma rede linear ⁵ $0 - 2\pi$.

Substituindo a função apropriada em (4.31), temos

$$C_m^c = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\Phi_c(y')} e^{-\frac{2\pi im}{T} y'} dy' = \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{\frac{2\pi}{T} y'} e^{i\Phi_2(y')} e^{-\frac{2\pi im}{T} y'} dy' = \quad (4.34)$$

$$\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{i\Phi_2(y')} e^{-i\frac{2\pi}{T}(m-1)y'} dy' = C_{(m-1)}^{(2)} \quad (4.35)$$

⁵ Aqui trataremos da ideal, que como vimos é bem aproximada desde que N não seja pequeno demais, dependendo da precisão requerida.

em que $C_m^{(2)}$ é o coeficiente da rede $\Phi_2(y)$.

Isso significa que, agora, os mesmos coeficientes da rede a ser composta são obtidos, mas agora com um $m' = m - 1$. Ela pode, portanto, ser usada para “abaixar” ou “levantar” (caso da linear inversa) os coeficientes de uma determinada rede. Se não for composta com nenhuma rede, como se pode ver na subseção (4.2.2), ela desloca o feixe de Δy .

4.3.3 Resumo

Como a seção anterior conteve muitos detalhes e especificidades de cada rede colocada, abaixo segue um pequeno resumo das principais características das redes estudadas, e algumas alturas de rede que levam a resultados interessantes.

Nesse capítulo, consideramos como a pixelização afeta o comportamento das redes linear e triangular. É importante ressaltar que, além de não termos analisado esse efeito sobre a rede senoidal, também há outros efeitos que podem ser importantes e não foram considerados, relacionados ao funcionamento do modulador espacial. Uma delas é que, de maneira geral, o modulador não consegue dar em todo o pixel a fase correta, mas apenas na região central deste. O quanto da área do pixel que é realmente efetiva é medido pelo fator de preenchimento do modulador. Em modelos mais recentes, é possível encontrar fatores de preenchimento $> 90\%$, o que é bastante satisfatório. De maneira geral, para fatores de preenchimento altos, isso não deve afetar nossos resultados significativamente.

Um segundo aspecto é que a variação das fases aplicadas pelo SLM é controlada por voltagens que são modificadas com saltos discretos. Isso significa que se o valor de fase máximo modulado pelo SLM é ϕ_{max} , a menor diferença de fase que o SLM pode aplicar é $\delta\varphi = \frac{\phi_{max}}{K}$, onde K é o número de passos que ele pode dar. No caso do SLM utilizado nesse trabalho, o número de escalas de cinza é 256. Essa divisão pode, de fato, levar a algumas diferenças importantes, se a função $\Phi(y)$ for muito suave: a variação lenta de Φ pode ser trocada por grandes “platôs” de fase. Ainda assim, não consideraremos os efeitos dessas questões, que devem ser levadas em conta caso haja discrepância entre o que foi aqui descrito e a implementação experimental.

Tabela 1 – Resumo das Redes

Rede	Fases	Módulos	Aproxima a ideal	Alturas peculiares
Binária	$0 < \varphi < \pi$ Fase $C_0 = C_1 = C_{-1} - \pi$; $\pi < \varphi < 2\pi$ Fase $C_0 = C_{-1} = C_1 + \pi$; Crescem linearmente com φ -	São Periódicos ($T = 2\pi$), Todas as ordens $m \neq 0$ tem seu pico em $\varphi = \pi$ onde $C_0 = 0$. cai com $\frac{1}{m}$ -	- - - - -	$\varphi = \pi$ anula C_0 (que troca fase) e outros são máximos $\varphi = \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $C_0 = C_1 = -C_{-1}$ $\varphi = 2\pi - \arctan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ $C_1 = -C_0 = -C_{-1}$
Linear	m e $-m$: fases iguais $m = 0$: fase π com relação às fases de $m =$ fase de ± 1 Crescem linearmente com φ	$C_m(\varphi) = C_{m+1}(\varphi - 2\pi)$ para $\varphi = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ $C_m = \delta_{m,n}$ Não existe φ t.q. $ C_0 = C_1 = C_{-1} $	- - - - -	para $\varphi = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ $C_m = \delta_{m,n}$ Pode-se com redes dessa altura, deslocar o feixe no plano.
Senoidal	$m > 0$ e todo $m < 0$ com $ m $ par, fase $C_m = 0$ se $ C_m > 0$ e fase $C_m = \pi$ se $ C_m < 0$ O contrário para $m < 0$ e $ m $ ímpar	pode igualar 3 ou 4 C_m 's, desde que $ J_m(\hat{\varphi}) = J_{m'}(\hat{\varphi})$ Não é periódica. A partir de algum φ_m nunca mais atinge o máximo.	- - - -	$\varphi^* \approx 1.4350\text{rad}$, definido por $ J_0(\varphi^*) = J_1(\varphi^*)$ e $\bar{\varphi} = 1,8411\text{rad}$, definido por $ J_0(\bar{\varphi}) = J_2(\bar{\varphi})$
Triangular	fase de $C_m =$ fase de C_{-m} Crescem linearmente com φ fase de C_0 - fase de $C_{\pm 1} = \frac{\pi}{2}$ após certo $\varphi^{(1)(m)}$ fica entre $[0, \pi]$	$C_m(\varphi) = C_{-m}(\varphi) \forall \varphi$. Pode fazer $ C_0 = C_1 = C_{-1} $. Pode anular ordem 0. Não é periódica. A partir de algum φ_m $ C_m $ nunca mais atinge o máximo.	- - - -	$\varphi = 2n\pi$ anula C_0 $\varphi = 3.7 \text{ rad}$: $ C_0 = C_1 = C_{-1} $.
Linear pixelada	fases de m e $-m$ são diferentes, coeficiente angular é diferente do coeficiente angular da ideal	$C_m(\varphi) \neq C_{m+1}(\varphi \sim 2\pi)$. para $\varphi = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ $C_m \neq \delta_{m,n}$ (\neq pode \Rightarrow) Não existe φ t.q. $ C_0 = C_1 = C_{-1} $	Aproxima, em módulo e fase, se $N \rightarrow \infty$	Para N suficientemente grande: para $\varphi = 2n\pi, n \in \mathbb{Z}$ $C_m = \delta_{m,n}$ Pode-se com redes dessa altura, deslocar o feixe no plano, com perda de intensidade
Triangular pixelada	fases de m e $-m$ são diferentes, coeficiente angular é diferente do coeficiente angular da ideal	$C_m(\varphi) = C_{-m}(\varphi) \forall \varphi$. Pode fazer $ C_0 = C_1 = C_{-1} $. Pode anular ordem 0. Não é periódica. A partir de algum φ_m $ C_m $ nunca mais atinge o máximo.	Aproxima, em módulo e fase, se $N \rightarrow \infty$	Para N suficientemente grande: $\varphi = 2n\pi$ anula C_0 $\varphi = 3.7 \text{ rad}$: $ C_0 = C_1 = C_{-1} $.

5 Operações possíveis

Sabe-se que as operações em estados quânticos têm de obedecer algumas restrições, de modo que o estado final seja de fato um estado quântico. Pela forma que nossa proposta pode operar em estados, dada em (4.2) - e como comentado anteriormente - vemos que são possibilidades ilimitadas de funções periódicas definindo diferentes C_m 's e, portanto, diferentes \mathcal{M} 's a operarem sobre o estado de entrada. Isso parece levar a uma grande liberdade de operações. Como perceber, então, que de fato nossa proposta atende à restrição de que o estado quântico de saída é um estado válido? Para mostrar que as operações apresentadas acima obedecem à essas restrições e também interpretá-las, anunciaremos algumas definições, convencionando a notação a ser usada nessas seções. As provas e detalhes a respeito dessas definições e necessidades matemáticas, podem ser encontradas nas referências indicadas.

Como anunciado antes, estamos aqui considerando apenas estados puros. Entretanto, vale lembrar que os estados quânticos são descritos, de maneira mais geral, por operadores semi-definidos positivos, ρ , chamados (no caso de espaços discretos) de *matriz densidade* [8]. Ou seja, sendo $\{|\omega\rangle_i\}_{i=1}^d$ uma base para o espaço de Hilbert em questão

$$\text{estado quântico} \leftrightarrow \rho \iff \rho \geq 0 \text{ t.q. } \text{Tr}[\rho] = 1; \quad (5.1)$$

$$\text{e pode ser escrito como } \rho = \sum_{i,j} \rho_{ij} |\omega\rangle_i \langle\omega|_j. \quad (5.2)$$

onde ρ_{ij} são os coeficientes na base.

Essa descrição permite que ρ seja um estado misto (matematicamente isso implica $\text{Tr}[\rho^2] < 1$), não necessariamente puro. Se ele for puro, entretanto, pode ser escrito como um projetor em seu estado $|\Psi\rangle$,

$$\rho = |\Psi\rangle \langle\Psi|. \quad (5.3)$$

O conjunto de todos os operadores semi-definidos positivos, num espaço de Hilbert \mathcal{H} de dimensão d , chamaremos de $\mathcal{D}(\mathcal{H}_d)$ e tem dimensão $d \times d$. Matematicamente, a transformação de estados é dada por mapas completamente positivos [15, 38], que chamaremos¹ de $\Lambda^{\mathcal{H};\mathcal{H}'}$. Eles são objetos que ao atuar em $D(\mathcal{H})$ levam a $\mathcal{D}(\mathcal{H}'_n)$ - afinal, o estado após a transformação tem que ser um estado quântico possível! -. Importante notar que \mathcal{H}' , não é necessariamente o mesmo que \mathcal{H} e tem dimensão n , que por sua vez não é necessariamente igual a d .

¹ Dispensaremos os sobrescritos quando o contexto deixar claro os espaços envolvidos.

A necessidade dos mapas serem completamente positivos não será aprofundada ou motivada aqui. Vale dizer, entretanto, que está relacionada com a propriedade de levarem ρ 's “válidos” em outros ρ 's “válidos”, mesmo em caso de sistemas compostos (veja [15], cap. 9). Assim, temos que uma transformação é dada por

$$\Lambda_{CP} : \mathcal{D}(\mathcal{H}_d) \rightarrow \mathcal{D}(\mathcal{H}'_n), \quad (5.4)$$

onde CP é subscripto para completamente positivos. Vale lembrar também que as operações físicas também são relacionadas a preservação do traço, de modo que o estado final continue tendo traço unitário. Esses mapas são chamados de CPTP.

É um fato, provado na mesma referência logo acima citada, que todo mapa completamente positivo que preserva o traço, admite uma representação da seguinte maneira:

$$\Lambda_{CPTP}(\rho) = \sum_l K_l \rho K_l^\dagger, \quad (5.5)$$

$$\text{onde } \sum_l K_l^\dagger K_l = \mathcal{I}_{\mathcal{D}}. \quad (5.6)$$

Essa decomposição é chamada de decomposição de Krauss, onde l pode ser qualquer inteiro positivo, a princípio². Se for possível representá-lo dessa maneira com apenas um operador K (ou seja, l possui apenas um valor), então K é unitário, uma vez que $K^\dagger K = \mathcal{I}$. A segunda equação acima, (5.6), é a restrição a que queríamos chegar para transformações, e foi anunciada no início.

Nas próximas seções vamos conectar essas definições com a proposta apresentada, além de verificar essas restrições e com isso interpretar a atuação dos arranjos propostos.

5.1 Rotação em \mathcal{H}_∞

Da seção (3.3), sabemos que para o arranjo com no máximo 1 caminho, a operação feita equivale à seguinte operação no estado de entrada:

1. Aplicação das fases Φ_1
2. Transformada de Fourier ótica, através da propagação e/ou da lente. Matematicamente

$$\text{Operação em } y : \mathcal{F}\{e^{i\phi(y)}(\cdot)\} \quad (5.7)$$

² Na referência [39] pode-se ver que é sempre possível escrever um mapa com essa decomposição e l restrito a, no máximo, d^2 .

Vamos que nesse caso, a operação feita é unitária, afinal, nem a adição de fases ou a transformação de Fourier (propagação) atenuam o feixe. Essa afirmação, para o caso de \mathcal{F} , é garantida pelo Teorema de Parseval:

Teorema 1 (Parseval). *Se $\tilde{f}(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iyx} dx$; então $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{f}(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx$*

Como \mathcal{M} é unitária e a única operação nesse arranjo, da Eq. (5.6) temos que a matriz \mathcal{M} e uma representação do mapa a ela associado são dados por

$$\begin{cases} \mathcal{M} = U = \mathcal{F}\{e^{i\phi(y')}(\)\} \\ \Lambda_{\mathcal{M}} = U \rho U^\dagger \end{cases} \quad (5.8)$$

A U^\dagger é dada pela transformação inversa de Fourier – que pode ser feita com duas lentes³, vide (B.1.1)–, seguida pela aplicação de fases opostas (ou seja, $2\pi - \Phi(y')$) em um outro SLM.

$$U^\dagger = e^{-i\phi(y')} (\mathcal{F}^{-1}\{ \}). \quad (5.9)$$

Podemos visualizar a operação desse arranjo como uma “rotação”, em que o estado $|\Psi\rangle = |X_i\rangle$ é levado, sem alteração de seu módulo, para o estado dado por $\sum C_m |Y\rangle_m$. Assim, qualquer unitária definida por uma transformação discreta de Fourier pode ser realizada: cada função periódica está relacionada a uma operação que leva o estado de um feixe de entrada a um estado diferente, definido pelos coeficientes C_m de sua série de Fourier. Portanto, esse arranjo pode ser interpretado como a implementação de rotações em um vetor da base de um espaço \mathcal{H}_d para outro vetor do mesmo espaço. Vale lembrar que esse raciocínio é exato apenas no caso $d \rightarrow \infty$; entretanto, o truncamento dessa dimensão se faz necessário experimentalmente. Desde que as redes utilizadas não resultem em $|C_m|$ muito relevantes para ordens com m grande, é uma aproximação muito boa, como será visto abaixo.

Olhemos isso em mais detalhe, à luz do que foi descrito no início deste capítulo. Suponhamos que estejamos interessados, ou limitados, a uma região que necessita desprezar as ordens de módulo maior que certo $m^* > 0$. Se $m^* = 1$, por exemplo, estamos considerando apenas as 3 primeiras ordens. Essa operação é dada pela U explicada acima com posterior projeção no subespaço expandido por $\{|Y_m\rangle\}_{m=-1}^1$. De maneira geral

³ Por exemplo, uma na configuração $f_1 - f_1$ e outra na configuração $2f_2 - 2f_2$. Nesse arranjo, estaríamos considerando lentes infinitas...

$$U_{total} = U_1 + U_2 = \left(\sum_{m=-m^*}^{m^*} P_{|Y_m\rangle} \right) U + \left(\sum_{m \in \mathcal{R}} P_{|Y_m\rangle} \right) U, \quad (5.10)$$

onde $P_{|Y_m\rangle}$ é o projetor no estado $|Y_m\rangle$ e \mathcal{R} é o intervalo de inteiros $(-\infty, -m^*) \cup (m^*, \infty)$. Que U_{total} é unitária, além de claro fisicamente, pode ser visto por:

$$U_{total} = \left(\sum_{m=-m^*}^{m^*} P_{|Y_m\rangle} \right) U + \left(\sum_{m \in \mathcal{R}} P_{|Y_m\rangle} \right) U = \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} P_{|Y_m\rangle} \right) U = \mathcal{I}U = U \quad (5.11)$$

O mapa associado é dado por:

$$\Lambda'(\rho) = U_1 \rho U_1^\dagger + U_2 \rho U_2^\dagger \quad (5.12)$$

E $U_1 U_1^\dagger + U_2 U_2^\dagger = \mathcal{I}$, como pode ser deduzido de (5.10).

Assim, a questão é considerar, para rotações, quando $U_1 \approx U_{total}$, no sentido de que a redução do módulo não é muito grande. Vejamos quando e como essa condição pode ser satisfeita. Como um exemplo, consideremos a rede binária: na seção (4.2.1), no gráfico (26) pode-se ver que para $\phi = \pi$, a ordem $m = 0$ se anula, e as outras ordens atingem seu mais alto valor ($|C_m|^2 = \frac{4}{\pi m^2}$). Essa é a altura que mais espalha luz (importante lembrar que os coeficientes dessa rede são periódicos). Nesse caso, temos

$$\sum_{-m^*}^{m^*} |C_m|^2 = |C_{-1}|^2 + |C_0|^2 + |C_1|^2 \approx 0.8106 \quad (5.13)$$

Devido a normalização, a soma de todos os coeficientes é 1. Assim, estaremos desprezando um pouco menos de $p_{desprezado} = 19\%$ do total da luz incidente, no caso mais drástico. Se a ideia for preparar estados (de qutrit, nesse exemplo), uma fração $p_{desprezado}$ dos fótons incidentes não estará disponível ao fim do arranjo. Por outro lado, se a ideia era realizar rotações, essa aproximação não parece ser boa ($U_1 \not\approx U_{total}$). Entretanto, se for possível considerar as 5 primeiras ordens, ou seja, $m^* = 3$ (já que $m = 0$ para m par), a soma resulta:

$$\sum_{-m^*}^{m^*} |C_m|^2 = 0.9006 \Rightarrow p_{desprezado} = 0.0994 \quad (5.14)$$

O que significa uma perda de $\approx 10\%$. Considerando as primeiras 7 ordens, esse resultado vai para $p_{desprezada} \approx 0.066$. Vemos então que, ao considerar essas ordens, para o pior caso para a rede binária, $p_{desprezada}$ pode ser menor que 7%. Dependendo do erro experimental,

da altura da rede específica e quantas ordens puderem ser colocadas na região a ser considerada, esse erro pode ser diminuído, de modo que possa-se dizer que⁴ $U_1 \approx U$.

Esse tipo de análise, para cada rede, em diferentes alturas máximas para cada rede está resumido na Tabela 2.

Tabela 2 – Valores de $p_{\text{desprezada}}$ das redes lineares ideal e pixelada.

Linear							
Ordens	$m^*=1$	$m^*=2$	$m^*=3$	$m^*=4$	$m^*=5$	$m^*=6$	$m^*=7$
Altura	π						
p	0.1444	0.0832	0.0587	0.0545	0.0370	0.0313	0.0271
Altura	2π						
p	0	0	0	0	0	0	0
Altura	3π						
p	0.5335	0.1199	0.0699	0.0503	0.0397	0.0328	0.0281
Altura	4π						
p	1	0	0	0	0	0	0
Altura	5π						
p	0.9305	0.5202	0.1116	0.0641	0.0461	0.0364	0.0303
Altura	6π						
p	1	1	0	0	0	0	0
Linear pixelada							
Ordens	$m^*=1$	$m^*=2$	$m^*=3$	$m^*=4$	$m^*=5$	$m^*=6$	$m^*=7$
Altura	π						
p	0.1491	0.0891	0.0651	0.0520	0.0437	0.0379	0.0335
Altura	2π						
p	0.0325	0.0325	0.0325	0.0325	0.0325	0.0325	0.0325
Altura	3π						
p	0.5368	0.1681	0.1248	0.1075	0.0973	0.0896	0.0816
Altura	4π						
p	1	0.1249	0.1249	0.1249	0.1249	0.1249	0.1249
Altura	5π						
p	0.9209	0.5543	0.2456	0.2106	0.1944	0.1789	0.1222
Altura	6π						
p	1	1	0.2632	0.2632	0.2632	0.2632	0.1278

⁴ Importante dizer que não fizemos aqui uma análise de “quão perto” a U_1 está de U diretamente, mas apenas o quanto a operação envolvida em desconsiderar certas ordens afeta o módulo do estado obtido ao final do arranjo. De fato, sabemos que se nada for desprezado, $U_1 = U$, e aqueles termos não desprezados são idênticos aos termos de U , de modo que a análise aqui feita não é desprovida de sentido.

Tabela 3 – Valores de $p_{\text{desprezada}}$ das redes binária e senoidal.

Binária							
Ordens	$m^*=1$	$m^*=2$	$m^*=3$	$m^*=4$	$m^*=5$	$m^*=6$	$m^*=7$
Altura	π						
p	0.1894	0.1894	0.0994	0.0994	0.0669	0.0669	0.0504
Altura	2π						
p	0	0	0	0	0	0	0
Altura	3π						
p	0.1894	0.1894	0.0994	0.0994	0.0669	0.0669	0.0504
Altura	4π						
p	0	0	0	0	0	0	0
Altura	5π						
p	0.1894	0.1894	0.0994	0.0994	0.0669	0.0669	0.0504
Altura	6π						
p	0	0	0	0	0	0	0
Senoidal							
Ordens	$m^*=1$	$m^*=2$	$m^*=3$	$m^*=4$	$m^*=5$	$m^*=6$	$m^*=7$
Altura	π						
p	0.7454	0.2741	0.0517	0.0059	4.5×10^{-4}	2.4×10^{-5}	1.0×10^{-6}
Altura	2π						
p	0.8613	0.6955	0.6938	0.4945	0.2165	0.0623	0.0127
Altura	3π						
p	0.9047	0.8090	0.7949	0.6468	0.6036	0.5766	0.4027
Altura	4π						
p	0.9274	0.8611	0.8245	0.7383	0.7336	0.6618	0.5563
Altura	5π						
p	0.9414	0.8909	0.8715	0.7942	0.7942	0.7178	0.6722
Altura	6π						
p	0.9509	0.9102	0.8913	0.8311	0.8300	0.7608	0.7428

Tabela 4 – Valores de $p_{\text{desprezada}}$ para as redes triangulares ideal e pixelada.

Triangular							
Ordens	$m^*=1$	$m^*=2$	$m^*=3$	$m^*=4$	$m^*=5$	$m^*=6$	$m^*=7$
Altura π							
p	0.0947	0.0047	0.0047	0.0010	0.0010	3.8×10^{-4}	3.8×10^{-4}
Altura 2π							
p	0.6397	0.1397	0.0101	0.0101	0.0027	0.0027	0.0011
Altura 3π							
p	0.9550	0.6632	0.1632	0.0143	0.0143	0.0043	0.0043
Altura 4π							
p	0.9424	0.9424	0.6777	0.1777	0.0176	0.0176	0.0057
Altura 5π							
p	0.9838	0.9378	0.9378	0.6877	0.1877	0.0202	0.0202
Altura 6π							
p	0.9898	0.9898	0.9083	0.6219	0.3148	0.1875	0.1726
Triangular Pixelada							
Ordens	$m^*=1$	$m^*=2$	$m^*=3$	$m^*=4$	$m^*=5$	$m^*=6$	$m^*=7$
Altura π							
p	0.1373	0.0406	0.0406	0.0345	0.0345	0.0319	0.0319
Altura 2π							
p	0.7200	0.2824	0.1428	0.1428	0.1257	0.1257	0.1000
Altura 3π							
p	0.9789	0.8131	0.4447	0.2789	0.2789	0.2052	0.1375
Altura 4π							
p	0.9898	0.9898	0.9083	0.6219	0.3148	0.1875	0.1726
Altura 5π							
p	1	1	1	1	0.1894	0.1894	0.1894
Altura 6π							
p	0.9762	0.9762	0.9362	0.9362	0.6950	0.1950	0.0223

Essas alturas foram escolhidas por zerar ou diminuir drasticamente a ordem zero e/ou centrais em muitas das redes. Vemos que a linear, de fato, poderia ser bastante drástica: retirar toda a luz para colocar em uma ordem arbitrária. Dizemos aqui *poderia* porque se a rede desviar a luz para uma ordem com m muito alto, é muito provável que a aproximação paraxial não seja mais válida. Para as redes pixeladas, utilizamos $N = 10$. Podemos ver que a rede linear pixelada se aproxima melhor da sua rede idealizada que a rede triangular pixelada. Entretanto, nenhuma delas está muito fora do esperado pela rede ideal. Vemos que, de fato, a rede binária se repete após a altura ultrapassar 2π . O recado principal dessa tabela é, claramente, que alturas mais baixas ($\varphi < 2\pi$) e $m^* = 3$ garante que a aproximação é válida com $p_{\text{desprezada}} \leq 9\%$. Alternativamente, para valores pequenos de φ 's a aproximação é boa.

Vale lembrar que a forma dada na Eq. (4.2) não vale para o arranjo na seção 3.3. Ela é válida para os arranjos em que existe interferômetro em \mathbf{x} que é o que leva à soma dos coeficientes de cada caminho (vide início da seção 3.4). Está correto, entretanto, que se um estado de entrada $|\Psi\rangle_0 = |X_i\rangle$ for alterado por esse arranjo, e for calculado $\mathcal{M}|\Psi\rangle_0$, esse será o estado final (considerando todas as ordens, claro). Entretanto, o processo físico

envolvido não é dado por \mathcal{M} .

A partir de agora, vamos ver o que os arranjos em que o(s) interferômetro(s) está(ão) presente(s)⁵ fazem e relacionar com a discussão apresentada no início.

5.2 Projeções

Nessa seção, vamos analisar o caso em que \mathcal{M} é dada por (4.2) olhando para exemplos específicos em que essa matriz é dada por um projetor. Esse é um caso que atrai interesse de maneira geral, é comum necessitar de projeções em protocolos de informação quântica e é também o que é ensinado em muitos livros-texto de mecânica quântica (como a Ref; [9]); do capítulo 1, vimos que os operadores A_i , motivadores deste trabalho, podem ser vistos como uma divisão em projetores.

Um projetor tem a seguinte característica⁶: $P^2 = P$ e, no caso de um projetor de rank-1, pode ser escrito como $|\Psi\rangle\langle\Psi|$. Pode ser interpretado, portanto, como um teste que acusa se o estado testado tem ou não *overlap* com o estado a ser projetado. Note-se que projetores, devido à sua construção (P^2 deve fazer sentido), são matrizes quadradas.

Por uma questão de ilustração que condiga com a motivação dada pelos operadores A_i , atenhamo-nos à dimensão $d = 3$: consideremos apenas as 3 primeiras ordens, com $m = 0$ e ± 1 . Suponha a seguinte matriz \mathcal{M} : seja utilizada a rede binária de altura $\varphi = \phi_1 = \arctan \frac{\pi}{2}$ (que tem a característica $C_1 = C_0 = -C_{-1}$, vide seção (4.2.1)) nas três regiões. Nesse caso, \mathcal{M} , considerando apenas as ordens citadas, é proporcional a

$$\eta^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}; \quad (5.15)$$

Com uma fase π adicional na terceira região, teremos

$$\mathcal{M} \propto \eta^{(3)} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Essa matriz tem a propriedade que

$$\mathcal{M} \propto P_{|v_3\rangle}, \quad (5.17)$$

onde $P_{|v\rangle}$ é o projetor $|v\rangle\langle v|$.

⁵ Caso em que \mathcal{M} é de fato dada por (4.2).

⁶ E, portanto, $P^n = P$, para todo n inteiro.

Vemos que, para casos desse tipo, dependendo da constante de proporcionalidade,

$$\mathcal{M}^2 \approx \mathcal{M} \quad (5.18)$$

A qualidade da aproximação na linha acima, como visto na seção anterior, está relacionada com o quantos fótons estaremos predendo ao truncarmos \mathcal{M} , desprezando as ordens mais altas. Em breve, retornaremos a questões concernentes à essa constante.

Vemos que é possível, com essas redes no SLM e arranjo dado em (3.5), obter uma operação proporcional ao projetor no estado

$$|v_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

Para ilustrar essa possibilidade e conectar com a discussão feita na introdução, consideremos os 13 estados dados no capítulo (1):

$$\begin{aligned} |v_1\rangle^T &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-1, 1, 1); & |v_{5,6}\rangle^T &= \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, \pm 1); & |v_{11}\rangle^T &= (1, 0, 0); \\ |v_2\rangle^T &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, -1, 1); & |v_{7,8}\rangle^T &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, \pm 1); & |v_{12}\rangle^T &= (0, 1, 0); \\ |v_{3,4}\rangle^T &= \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, \mp 1); & |v_{9,10}\rangle^T &= \frac{1}{\sqrt{2}}(1, \pm 1, 0); & |v_{13}\rangle^T &= (0, 0, 1); \end{aligned}$$

Como usar as redes estudadas para realizar operações proporcionais a projetores nesses estados? Vamos encarar essa questão de maneira aproximada, sem considerar limitação de modulação do SLM ou considerar que as perdas pela pixelização são, de fato, pequenas. Por isso mesmo, daremos preferência à utilização da rede binária.

Já temos o projetor em $|v_3\rangle$. Outro deles tem seu projetor obtido de maneira análoga, mas usando $\varphi = \phi_2 = 2\pi - \phi_1$ na primeira região

$$|v_1\rangle\langle v_1| = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Três deles são projeções na própria base ($|v_{11}\rangle, |v_{12}\rangle, |v_{13}\rangle$). Para realizar as projeções nesses estados, devemos ser capazes de bloquear os dois feixes ortogonais, ao mesmo tempo que a correspondência $i \rightarrow m$ deve ser obedecida. Ou seja,

$$|v_{11}\rangle\langle v_{11}| = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

Vemos que esse projetor leva o estado de entrada nele mesmo, que em nossa proposta corresponde a levar $|X_{-1}\rangle$ em $|Y_{-1}\rangle$. Enquanto isso, $|X_0\rangle$ e $|X_1\rangle$ devem ser bloqueados. A rede de difração linear com altura 2π , faz o que é necessário para que $|X_{-1}\rangle \rightarrow |Y_{-1}\rangle$ ao final do arranjo, já que $C_{-1} = 1$ e $C_m = 0$ para os outros m 's (vide seção (4.2.2)). Isso garante a primeira coluna da matriz acima. Para bloquear os outros caminhos, (vide seção (4.3.2)) devemos colocar redes de fase que desloquem as ordens relevantes para fora da região que será considerada (no caso, as 3 primeiras ordens, com determinado espaçamento definido pelo período da rede colocada em $|X_{-1}\rangle$).

Deste modo, com as redes mencionadas, temos os projetores nos estados $|\Psi\rangle = (1, 0, 0)^T$; e analogamente, $(0, 1, 0)^T$ e $(0, 0, 1)^T$. Para quatro dos que sobram (com exceção de $|v_2\rangle$), fica claro que a estratégia para bloquear um dos feixes continua sendo necessária. Os vetores da forma $|\Psi\rangle = (1, 0, \pm 1)^T$ podem ter seu projetor com o bloqueio do caminho do meio, enquanto que a rede binária de altura π garante o projetor no estado com o sinal negativo e a rede triangular de altura 2π ou a mesma binária deslocada de $\frac{T}{2}$ (vide Seção 4.3.1) garante a outra projeção: ambas dão a mesma intensidade e fase para as ordens ± 1 e anulam a ordem $m = 0$.

No caso dos projetores com $|\Psi\rangle = (1, \pm 1, 0)^T; (0, 1, \pm 1)^T$, que devem bloquear algum dos caminhos da extremidade existe uma dificuldade adicional: apenas C_1 ou apenas C_{-1} deve se anular, dependendo do caso. Para realizar isso, faremos uso da composição de máscaras (vide seção 4.3.2.1). Uma rede linear de altura -2π ou 2π , composta com a rede binária de altura ϕ_1 ($C_1 = C_0$) e fases constantes nas regiões certas realizam o que é desejado para $|v_5\rangle$ e $|v_{10}\rangle$. Explicitando o primeiro caso

$$\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \tau \begin{pmatrix} - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

Colocamos os primeiros coeficientes fora da região de interesse (em azul) para deixar clara a ação da composição das redes (a linear $0 - 2\pi$ realiza abaixamentos nas colunas).

Se a altura da binária for ϕ_2 ($C_{-1} = C_0$) (ou ϕ_1 deslocada), obtém-se os outros projetores desse tipo (ainda com composição da linear e de fase constante). Segue o exemplo para $|v_6\rangle$

$$\tau \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \longrightarrow \tau \begin{pmatrix} - & - & - \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

Para os dois estados que faltam ($|v_1\rangle$ e $|v_4\rangle$) é necessário que os três coeficientes tenham o mesmo módulo e fase ($|v_4\rangle$) ou C_0 deve ter uma fase oposta. A única que pode fazer ambos é a rede senoidal, desde que consideremos as ordens $m = 0$ e $m = \pm 2$ (não mais $m = \pm 1$), o que implica uma seleção um pouco diferente da que vinhamos usando, mas não há porque rejeitá-la: o período pode ser aumentado, de modo a levar $T \rightarrow \frac{T}{2}$, o que faz com que as ordens ± 2 estejam centradas onde estariam as ordens ± 1 . Entretanto, nesse caso, estamos desprezando uma quantidade maior de luz.

Na próxima seção, um resumo será encontrado a respeito desses 13 estados, assim como da identidade e permutações.

Antes, porém, é importante notar que, para cada projeção sugerida, uma aproximação um pouco diferente está sendo considerada. No caso das projeções em vetores da base, a aproximação não precisa ser feita: a projeção, desconsiderando perdas experimentais, é exata. No caso sem composição, mas em que as ordens desprezadas passam a ter intensidades menos desprezíveis, como no caso de $|v_2\rangle$, por exemplo, a aproximação por uma projeção pode passar, inclusive, a não ser boa (veja os exemplos da seção anterior). No caso da composição de máscaras, estamos claramente dispensando uma ordem com $|m| = 1$ em casos em que esta não é desprezível. Podemos entender tudo isso da seguinte maneira

$$\mathcal{M} = \tau_{|v\rangle} P_v; 0 < |\tau| \leq 1 \quad (5.24)$$

Em que o fator de proporção *varia com a projeção a ser realizada*. Isso não necessariamente tira valor do método proposto. A estatística e o vetor final condizem com o esperado para cada projeção: Se um vetor $|\phi\rangle$ de entrada for projetado em $|\Psi\rangle$ usando esse método, a resposta “sim” à projeção será obtida com probabilidade $\tau_{\Psi} |\langle \Psi | \phi \rangle|^2$; enquanto se um estado $|\phi'\rangle$ de entrada for projetado, a estatística será $\tau_{\Psi} |\langle \Psi | \phi' \rangle|^2$. E, de fato, se uma tiver que ser metade da outra, iguais, uma delas nulas, nossa proposta deve obter esse resultado: a relação entre as estatísticas dessas projeções são atingidas. O problema é se o interesse for a comparação, para o mesmo estado de entrada, dessas estatísticas com diferentes projeções. Nesse caso, os valores τ_{Ψ} devem ser levados em conta. Como dito acima, além disso, o estado de saída, em todos os casos (em que o estado de entrada não for ortogonal) é $|\Psi\rangle$, como exigido pela projeção.

Além das projeções, essa proposta tem uma característica peculiar: a identidade não é realizada por “não colocar redes”. Pela maneira de projetar em $|v_{11}\rangle, |v_{12}\rangle$ e $|v_{13}\rangle$, vemos que, na realidade, essa operação é dada por uma rede linear inversa $(0 - 2\pi)$ na região 1, não colocar rede na região 2 e uma linear $(0 - 2\pi)$ na região $i = -1$.

5.2.1 resumo das projeções e permutações

A seguir, a Tabela 5 mostra as projeções nos 13 estados mencionados na Introdução e explicados acima. É interessante notar que as possibilidades para realizar esses projetores não são necessariamente as únicas. Para o estado $|v_7\rangle$, deixamos a triangular como possibilidade, para ilustrar um de seus usos, mas poderíamos ter utilizado uma binária de altura π deslocada de $\frac{N}{4}$. Outra questão é que, se as composições com binárias não forem possíveis, à custa de perda de fidelidade podemos utilizar a linear, com o valor de φ que iguala dois de seus coeficientes, para os estados que deveriam anular algum $C_{\pm 1}$. Segue abaixo a tabela, com os respectivos fatores de proporcionalidade $\tau_{|\Psi\rangle}$.

$ v_1\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	$\tau_{ \Psi\rangle}$
	Binária	Binária	Binária	
	$\varphi = \phi_2$	$\varphi = \phi_1$	$\varphi = \phi_1$	0.86
		desl. $a = \frac{N}{2}$	desl. $a = \frac{N}{2}$	
$ v_2\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	$\tau_{ \Psi\rangle}$
	senoidal	senoidal	senoidal	
	$\varphi =$	$\varphi =$	$\varphi =$	0.29
	$m = -2, 0, 2$	$m = -2, 0, 2$	$m = -2, 0, 2$	
$ v_3\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	$\tau_{ \Psi\rangle}$
	Binária	Binária	Binária	
	$\varphi = \phi_1$	$\varphi = \phi_1$	$\varphi = \phi_2$	0.86
$ v_4\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	$\tau_{ \Psi\rangle}$
	senoidal	senoidal	senoidal	
	$\varphi \approx 3.83$	$\varphi \approx 3.83 + \pi$	$\varphi = 3.83$	0.49
	$m = -2, 0, 2$	$m = -2, 0, 2$	$m = -2, 0, 2$	
$ v_5\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	$\tau_{ \Psi\rangle}$
	Bloqueio	Binária	Binária	
		$\varphi = \phi_1$	$\varphi = \phi_1$	0.86
		+linear $0 - 2\pi$	+linear $0 - 2\pi$	
$ v_6\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	$\tau_{ \Psi\rangle}$
	Bloqueio	Binária	Binária	
		$\varphi = \phi_2$	$\varphi = \phi_2 + \pi$	0.86

		linear $0 - 2\pi$	linear $0 - 2\pi$	
$ v_7\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	Triangular	Bloqueio	Triangular	
	$\varphi = 2\pi$		$\varphi = 2\pi$	0.36
$ v_8\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	Binária	Bloqueio	Binária	
	$\varphi = \pi$		$\varphi = \pi$	0.81
$ v_9\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	Binária	Binária	Bloqueio	
	$\varphi = \phi_2$	$\varphi = \phi_2$		0.86
	+linear Inv. $0 - 2\pi$	+linear Inv. $0 - 2\pi$		
$ v_{10}\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	Binária	Binária	Bloqueio	
	$\varphi = \phi_1$	$\varphi = \phi_1$		0.86
	+ linear Inv. $0 - 2\pi$	+ linear Inv. $0 - 2\pi + \pi$		
$ v_{11}\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	Linear Inversa	Bloqueio	Bloqueio	
	$\varphi = 2\pi$			1
$ v_{12}\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	Bloqueio	Sem rede	Bloqueio	
				1
$ v_{13}\rangle$	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	Bloqueio	Bloqueio	Linear	
			$\varphi = 2\pi$	1
\mathcal{I}	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	Linear Inversa	Sem rede	Linear	
	$\varphi = 2\pi$		$\varphi = 2\pi$	1
P_{12}	Região 1	Region 2	Região 3	τ_{Ψ}
	sem rede	Linear Inversa	Linear	
		$\varphi = 2\pi$	$\varphi = 2\pi$	1
P_{13}	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	Linear	sem rede	Linear Inversa	

	$\varphi = 2\pi$		$\varphi = 2\pi$	1
P_{23}	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	Linear Inversa	Linear	sem rede	
	$\varphi = 2\pi$	$\varphi = 2\pi$		1
P_{123}	Região 1	Região 2	Região 3	τ_{Ψ}
	sem rede	Linear	Linear Inversa	
		$\varphi = 2\pi$	$\varphi = 2\pi$	1

5.3 POVMs

Nesta seção vamos retomar a discussão iniciada anteriormente a respeito de mapas, e incluir a visão em termos de POVM's para as propostas apresentadas, que é a visão generalizada de medições em teoria quântica [15], mostrando os diferentes elementos que podem ser implementados.

Foi visto na Seção 5.1 que o arranjo para no máximo um caminho realiza uma operação unitária e, portanto, a segunda Equação em (5.6) é obedecida. Na seção anterior, entretanto, vimos que pode ocorrer que \mathcal{M} seja bem aproximada por uma projeção. E $P^\dagger = P \Rightarrow P^\dagger P = P^2 = P \neq \mathcal{I}$. Isso parece apontar que, para esses casos, $\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} \neq \mathcal{I}$. De fato, temos na realidade (de (4.2)) que $\mathcal{M}^\dagger \mathcal{M}$ é dada por

$$\begin{aligned}
 & \begin{array}{cccccc}
 \cdots & C_{-1-1}^* & C_{-10}^* & C_{-11}^* & \cdots & \\
 \eta \cdots & C_{0-1}^* & C_{00}^* & C_{01}^* & \cdots & \\
 \cdots & C_{1-1}^* & C_{10}^* & C_{11}^* & \cdots &
 \end{array} \times \eta \begin{array}{c}
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\
 C_{-1-1} \quad C_{-10} \quad C_{-11} \\
 C_{0-1} \quad C_{00} \quad C_{01} \\
 C_{1-1} \quad C_{10} \quad C_{11} \\
 \vdots \quad \vdots \quad \vdots
 \end{array} = \\
 & = \eta^2 \begin{array}{ccc}
 \left| \begin{array}{ccc}
 \sum_m |C_{-1m}|^2 & \sum_m C_{-1m}^* C_{0m} & \sum_m C_{-1m}^* C_{1m} \\
 \sum_m C_{0m}^* C_{-1m} & \sum_m |C_{0m}|^2 & \sum_m C_{0m}^* C_{1m} \\
 \sum_m C_{1m}^* C_{-1m} & \sum_m C_{1m}^* C_{0m} & \sum_m |C_{1m}|^2
 \end{array} \right| & & (5.25)
 \end{array}
 \end{aligned}$$

Como visto na seção anterior os termos da diagonal somam⁷ para 1, o que já contrasta com \mathcal{I} . Além disso, vemos que não há porquê concluir que os termos fora da diagonal se anulem. Assim, a segunda condição em (5.6) não vale para \mathcal{M} em geral, o que significa que existem transformações ou perdas não consideradas. Portanto, existem

⁷ Com a devida normalização.

mais fatores K na operação que não somente $K_{l^*} = \mathcal{M}$. É exatamente isso que ocorre⁸ ao realizarmos a projeção no estado de polarização $|+\rangle$, já que toda componente de $C_{1m}B_1\hat{h} + C_{0m}B_0\hat{v}$ no estado $|-\rangle$, para cada ordem m , é descartada. Olhando para essas componentes projetadas em $|-\rangle$, temos:

$$C_{1m}B_1\hat{h} + C_{0m}B_0\hat{v} \longrightarrow (C_{1m}B_1 - C_{0m}B_0) \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{h} - \hat{v}) \quad (5.26)$$

Caso colocássemos uma placa de onda e um PBS para realizar a projeção no estado de polarização (ao invés de um polarizador, por exemplo), na segunda porta do cubo teríamos, assim, um estado dado por

$$|\Psi\rangle = \eta^{(1)} \begin{pmatrix} C_{-1-1} & C_{0-1} & 0 \\ C_{-10} & C_{00} & 0 \\ C_{-11} & C_{01} & 0 \end{pmatrix} |\Psi\rangle_0 = \mathcal{M}_1 |\Psi\rangle_0 \quad (5.27)$$

Vamos então analisar essa situação para os casos dos arranjos dados Nas Seções (3.4) e (3.5). A operação feita, como explícito em (4.2), contém diferentes η 's. Como uma abreviação, escreveremos essas diferenças da seguinte maneira: $\mathcal{M}^{(2)}$ é a relativa ao arranjo com no máximo dois caminhos ($\eta = \eta^{(1)} = \frac{1}{\sqrt{2}}$) enquanto que para o caso de 3 caminhos, a matriz será escrita $\mathcal{M}^{(3)}$.

A soma $\mathcal{M}^{(2)\dagger}\mathcal{M}^{(2)} + \mathcal{M}_1^\dagger\mathcal{M}_1$ resulta em

$$\begin{aligned} & \mathcal{M}^{(2)\dagger}\mathcal{M}^{(2)} + \mathcal{M}_1^\dagger\mathcal{M}_1 = \quad (5.28) \\ & = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & \sum_m C_{-1m}^* C_{0m} \\ \sum_m C_{0m}^* C_{-1m} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -\sum_m C_{-1m}^* C_{0m} \\ -\sum_m C_{0m}^* C_{-1m} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5.29) \end{aligned}$$

E vemos que a parte diagonal relativa à essas duas regiões se anula na soma acima, e temos, no final, \mathcal{I} .

Para o caso de 3 caminhos, $\mathcal{M}^{(3)\dagger}\mathcal{M}^{(3)} + \mathcal{M}_1^\dagger\mathcal{M}_1$ dá

⁸ Vide capítulo 3.

$$\mathcal{M}^{(3)\dagger} \mathcal{M}^{(3)} + \mathcal{M}_1^\dagger \mathcal{M}_1 = \quad (5.30)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} 1 & \sum_m C_{-1m}^* C_{0m} & \sum_m C_{-1m}^* C_{1m} \\ \sum_m C_{0m}^* C_{-1m} & 1 & \sum_m C_{0m}^* C_{1m} \\ \sum_m C_{1m}^* C_{-1m} & \sum_m C_{1m}^* C_{0m} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & -\sum_m C_{-1m}^* C_{0m} & 0 \\ -\sum_m C_{0m}^* C_{-1m} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \quad (5.31)$$

$$(5.32)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \sum_m C_{-1m}^* C_{0m} & \sum_m C_{-1m}^* C_{1m} \\ -\frac{1}{2} \sum_m C_{0m}^* C_{-1m} & \frac{5}{2} & \sum_m C_{0m}^* C_{1m} \\ \sum_m C_{1m}^* C_{-1m} & \sum_m C_{1m}^* C_{0m} & 1 \end{vmatrix} \quad (5.33)$$

Já no segundo polarizador (quando é o caso), o mesmo processo ocorre: a parte dada pela projeção no estado ortogonal a αa ($\alpha_\perp = \frac{1}{\sqrt{3}}(\hat{h} - \sqrt{2}\hat{v})$) é desprezada. Repare que \mathcal{M}_1 não tem região relativa ao terceiro caminho, já que este não passa pelo polarizador (placa + PBS). Ao substituir o segundo polarizador pelo conjunto com o PBS e considerar a parte refletida por esse, teremos

$$|\Psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} C_{-11} & \frac{1}{\sqrt{2}} C_{0-1} & -\sqrt{2} C_{1-1} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} C_{-10} & \frac{1}{\sqrt{2}} C_{00} & -\sqrt{2} C_{10} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} C_{-11} & \frac{1}{\sqrt{2}} C_{01} & -\sqrt{2} C_{11} \end{pmatrix} |\Psi\rangle_0 = \mathcal{M}_2 |\Psi\rangle_0 \quad (5.34)$$

E vemos, então que, progressivamente, as componentes fora da diagonal vão sendo canceladas

$$\mathcal{M}^{(3)\dagger} \mathcal{M}^{(3)} + \mathcal{M}_1 \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \mathcal{M}_2 = \quad (5.35)$$

$$= \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \frac{5}{2} & -\frac{1}{2} \sum_m C_{-1m}^* C_{0m} & \sum_m C_{-1m}^* C_{1m} \\ -\frac{1}{2} \sum_m C_{0m}^* C_{-1m} & \frac{5}{2} & \sum_m C_{0m}^* C_{1m} \\ \sum_m C_{1m}^* C_{-1m} & \sum_m C_{1m}^* C_{0m} & 1 \end{vmatrix} + \frac{1}{3} \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \sum_m C_{-1m}^* C_{0m} & \sum_m C_{-1m}^* C_{1m} \\ \frac{1}{2} \sum_m C_{0m}^* C_{-1m} & \frac{1}{2} & \sum_m C_{0m}^* C_{1m} \\ -\sum_m C_{1m}^* C_{-1m} & -\sum_m C_{1m}^* C_{0m} & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (5.36)$$

Para n caminhos o cálculo é extremamente análogo e vemos que

$$\mathcal{M}^{(n)\dagger}\mathcal{M}^{(n)} + \sum_{p=1}^{n-1} \mathcal{M}_p^\dagger\mathcal{M}_p = \mathcal{I}_{n \times n}. \quad (5.37)$$

Outra consideração feita para que a transformação em questão seja uma projeção está relacionada, como visto na seção acima, a desprezar regiões além da projeção no estado de polarização.

Isso pode ser considerado aqui e, nesse caso, um feixe inteiro ou ordens são desprezados no final. Isso significa que \mathcal{M} é um bloco pertencente a uma matriz maior (M), em que as partes relativas ao subespaço “desprezado” são compostas de 0’s. A parte desprezada é dada justamente pela identidade nesse subespaço e 0’s no subespaço relativo a \mathcal{M} (L). Suponha que a dimensão de $\mathcal{M}^\dagger\mathcal{M}$ seja $d \times d$. A soma dessas, então, resulta na identidade também

$$M^\dagger M + L^\dagger L = \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots 0 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & \mathcal{M}^\dagger \mathcal{M} & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 0 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots 1 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & 0_{d \times d} & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 1 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \dots 1 & 0 & 0 \dots \\ \dots 0 & \mathcal{I}_{d \times d} & 0 \dots \\ \dots 0 & 0 & 1 \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \quad (5.38)$$

Assim, se consideramos todas as perdas do sistema, o mapa final preserva o traço (ie, Eq. (5.6) é satisfeita), como era de se esperar. Agora devemos conectar isso com POVM’s. A descrição aprofundada e formal de POVM’s não será dada e está contida nas referências apontadas ao longo do capítulo, principalmente em [15].

Em muitos casos, uma medição está relacionada com transformações no estado e posterior detecção. Isso não é mais geralmente representado por medições projetivas, mas sim por medições relacionadas a operadores semi-definidos positivos simplesmente; cada operador está *associado* a um valor que é considerado o resultado da medição. As únicas restrições que precisam ser obedecidas por esses elementos são

$$M_i \geq 0 \quad (5.39)$$

$$\sum_i M_i^\dagger M_i = \mathcal{I} \quad (5.40)$$

E a conexão com as probabilidades de se obter o resultado i é dada por

$$p_i = Tr(\rho M_i) \quad (5.41)$$

O conjunto $\{M_i\}_i$ define o POVM, já que p_i está definida acima de maneira coerente [15].

A ideia é que cada medição (operações + detecção) está associada a probabilidades de detecções e os elementos de POVM's são aqueles que, através de (5.41), conectam essas operações às probabilidades. A segunda restrição, dada por (5.40), é a ideia de que a probabilidade de *alguma* resposta ocorrer, é 1. Como já vimos, se considerarmos todas as projeções no espaço de polarização, esta condição é satisfeita.

Assim, suponha o arranjo de no máximo 3 caminhos, dado em (3.5), mas com os polarizadores trocados por conjuntos placa de onda + PBS; considere também que será feita uma detecção que não discrimina a ordem m no plano de saída: tudo o que resultar da saída de \mathcal{M} é considerado um resultado só. Obviamente, os outros dois resultados que existem são aqueles advindos da reflexão dos dois PBS. Isso significa, então, que os elementos de POVM são relacionados a $\mathcal{M}_i^\dagger \mathcal{M}_i$, e sua soma, como já provado, resulta na identidade. Isto está representado na Figura 49.

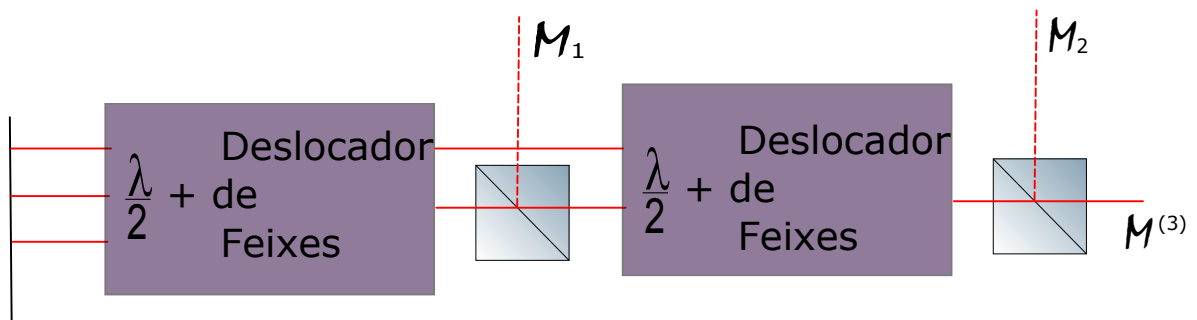


Figura 49 – Relação de \mathcal{M} e elementos de POVM possíveis, para 3 caminhos.

Outra possibilidade, entretanto, é marcar cada ordem de saída como um diferente resultado; assim, cada ordem, de cada saída, corresponderá a um novo resultado. Por exemplo, $\mathcal{M}^{(n)\dagger} \mathcal{M}^{(n)} \mapsto \{\mathcal{M}^{(n)\dagger} |Y_m\rangle \langle Y_m| \mathcal{M}^{(n)}\}_m$. Uma das coisas importantes dessa discussão é que com a proposta aqui apresentada é possível realizar experimentos cujos elementos de POVM não são projetores⁹. De fato, a maior parte das operações realizadas não são bem representadas por projetores, mas por matrizes que unicamente representam operadores semi-definidos positivos [15]. Assim, tipicamente, ao utilizarmos essa proposta e detectarmos fótons nas saídas dos interferômetros, estamos implementando medições mais gerais do que projeções.

⁹ Na verdade, vimos que considerar que são feitas projeções em geral envolvem aproximações: “jogar fora” parte do estado que entrou mesmo que não somente aquela parte ortogonal ao estado em que se está projetando.

Até aqui, caracterizamos nossas medições e vimos que são bem descritas por POVMs. E se quisermos implementar algum POVM, como podemos utilizar nossa proposta? Há pelo menos duas maneiras: a primeira, claramente, é construir matrizes \mathcal{M} com as redes de tal modo que são dadas pelas matrizes que queremos. A segunda está relacionada com uma característica interessante do SLM (B.2): podemos alterar as máscaras nele colocadas, ao longo do tempo. É possível, inclusive, colocar vídeos de máscaras, em que cada elemento do vídeo pode ficar por um tempo $t_i = n_i \bar{t}$, em que \bar{t} é o menor tempo que uma máscara ficará na tela durante uma passagem do vídeo colocado. Suponhamos, então, que sejam colocadas duas máscaras, relativas a dois projetores ($|v_k\rangle$ e $|v_l\rangle$; por exemplo, os descritos na seção anterior), cada uma com tempo $n_i \bar{t}$, com $i = k, l$.

Se nossa fonte não for tal que seja possível distinguir o instante de tempo em que o fóton preparado no estado $|\Psi\rangle_0$ atingirá a tela do SLM, não é possível saber qual máscara atuará em seu estado. Esse tipo de ignorância clássica [15] é representada, formalmente, pela soma convexa dos projetores envolvidos

$$p_k |v_k\rangle\langle v_k| + p_l |v_l\rangle\langle v_l| = \frac{1}{n_k + n_l} (n_k |v_k\rangle\langle v_k| + n_l |v_l\rangle\langle v_l|) \quad (5.42)$$

É importante notar que se forem escolhidos projetores com τ_i diferentes, eles devem ser levados em conta nessa soma também, alterando p_i . Portanto, podemos usar nossa capacidade de implementar projetores para realizar somas convexas destes, implementando elementos de POVM.

Assim, nossa proposta realmente é adequada para implementação bastante ampla de elementos de POVM e transformações de estados. Está limitada, basicamente, por dificuldades técnicas comentadas na Seção 3.6 e a serem comentadas na próxima parte do trabalho. Do ponto de vista de princípios teóricos, a única limitação¹⁰ é encontrar a rede de difração adequada que realiza o trabalho almejado, se é que ela(s) existe(m).

Um último comentário se faz necessário: se apenas estamos interessados na saída do arranjo, seja ele qual for, é importante considerar que o estado de saída, quando obtida uma resposta i , é dado por

$$\rho_{saida} = \frac{\mathcal{M}^{(n)} \rho \mathcal{M}^{(n)\dagger}}{Tr(\mathcal{M}^{(n)} \rho \mathcal{M}^{(n)\dagger})} \quad (5.43)$$

O fator $Tr(\mathcal{M}^{(n)} \rho \mathcal{M}^{(n)\dagger})$ é um fator importante para que, no final, o estado tenha traço 1, o que significa não levar em conta o que está sendo refletido nas portas dos PBS, por exemplo, ou de fato ignorando aquilo que, durante as projeções, é jogado fora por não estar na região considerada. Isso pode ser extremamente importante para medições sequenciais ou preparação de estados, por exemplo.

¹⁰ Não significa que a limitação seja desprezível...

Parte II

Resultados Experimentais Preliminares

6 Resultados Experimentais Preliminares

Vamos agora à apresentação de alguns resultados experimentais; como a execução ainda está em andamento, exporemos apenas alguns resultados preliminares, sobre os quais faremos análises qualitativas, verificando o comportamento geral das funções, discutindo os métodos de aquisição e redução de dados.

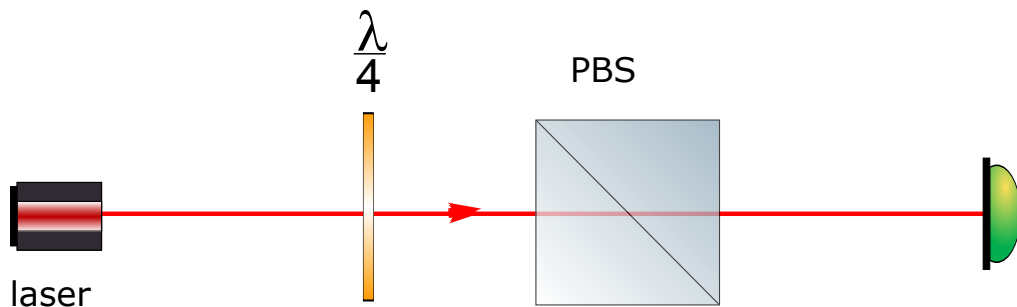
Utilizamos uma fonte com laser intenso, não atenuado: os testes aqui feitos devem servir como prova de princípio para o caso atenuado, em que a intensidade aqui mensurada é proporcional à contagem de fótons que seria obtida para os casos de único fóton (vide Seção (12)). Os resultados já obtidos são principalmente referentes ao arranjo de no máximo um caminho; embora também sejam mostrados alguns resultados iniciais para projeções.

Começaremos descrevendo as características principais dos equipamentos e limitações que essas impõem à execução da proposta, discutida nos três capítulos anteriores.

6.1 Equipamentos utilizados e calibrações

Os principais elementos que descreveremos serão o laser utilizado, o modulador espacial de luz e as calcitas utilizadas como deslocadores de feixes. Começemos com o laser utilizado.

Dois aspectos do laser serão importantes para o nosso trabalho: uma delas é o perfil espacial do laser e outra a sua polarização. Utilizamos um laser de He-Ne, $\lambda = 632.8\text{nm}$. Começemos com a segunda: os parâmetros de Stokes de um feixe definem seu estado de polarização [40] e, assim, fizemos o seguinte arranjo para medi-los:



Com esse arranjo, obtivemos uma curva que, de acordo com [41] é dada por

$$I(\theta) = \frac{1}{2}[A - B \cos(2\theta) + C \cos(4\theta) + D \sin(4\theta)], \quad (6.1)$$

onde θ é o ângulo da placa que se relaciona com os 4 parâmetros de Stokes através das relações

$$S_0 = A - C; \quad (6.2)$$

$$S_1 = 2C; \quad (6.3)$$

$$S_2 = 2D; \quad (6.4)$$

$$S_3 = B. \quad (6.5)$$

Dessa maneira, obtivemos o seguinte resultado para os parâmetros normalizados $(\frac{S_i}{S_0})$ do laser:

$$s_1 = 0,941 \pm 0,003,$$

$$s_2 = -0.077, \pm 0,002$$

$$s_3 = -0.112. \pm 0,002 \quad (6.6)$$

$$P = 0,94 \pm 0,003 \quad (6.7)$$

Podemos ver que, com boa aproximação, o estado de polarização do laser é puro (já que $P \approx 1$) e corresponde ao estado \hat{h} .

Seu perfil espacial foi medido através de uma configuração 2f-2f (lente posicionada a distância 2f do SLM e a distância 2f da câmera), com uma lente de foco $f = 15\text{cm}$, de modo a obter a imagem do perfil que chega à tela do SLM. Para a detecção, usamos uma câmera CCD, da marca Thorlabs[®], de pixels quadrados de $5.2\mu\text{m}$ de lado. Segue o resultado, na figura (50):

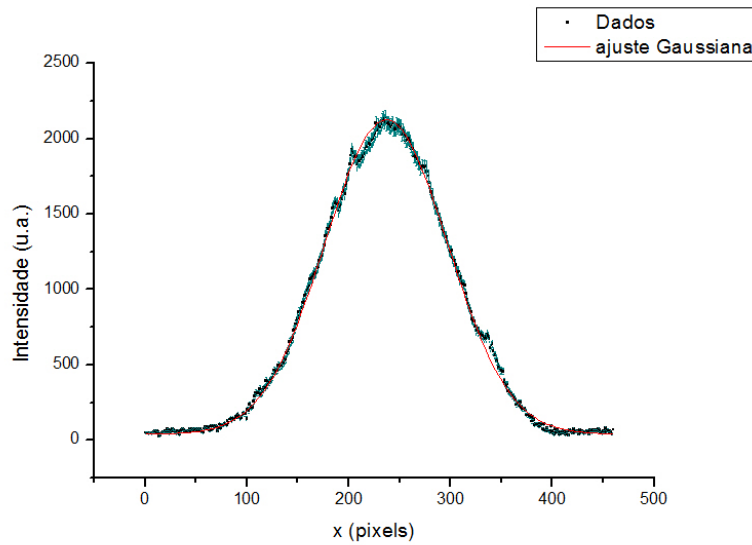


Figura 50 – Intensidade experimental do perfil do laser que chega ao SLM em unidades relativas (em preto e barras de erro em verde) medida por câmera CCD. Em vermelho, temos o ajuste por uma função gaussiana.

Do gráfico, podemos ver que o perfil pode ser aproximado por uma gaussiana nesse plano, embora não esteja perfeito. O valor encontrado para a largura do feixe gaussiano, na tela do SLM, foi $w(z) = 85,21 \pm 0,29$ pixels ou $443,1 \pm 1,5 \mu m$. A princípio, para obter a cintura e posição desta gaussiana (obtendo assim o comportamento dos outros parâmetros parâmetros, vide (2.1)), deveríamos repetir essa medição em outros planos; o que não foi feito. Entretanto, vimos que a obtenção desses parâmetros para arranjos em que há interferência dos feixes em \mathbf{x} , é importante por dois motivos. O primeiro é os feixes não interferirem em \mathbf{x} antes de atingirem o último deslocador (**condição c1** da seção (3.6)). O segundo motivo era garantir que a sobreposição dos feixes nos interferômetro fosse boa, de modo que os feixes se somassem corretamente, após o polarizador (seção (3.6), **condição c4**: $R_i(z) \approx R_j(z)$ e $w_i(z) \approx w_j(z), \forall z$). Garantir essas duas condições é o suficiente para obtermos um arranjo de acordo com a proposta. No momento de nossa discussão para os arranjos com interferômetro, apresentaremos os resultados que mostram que isso foi garantido.

Utilizamos em nosso trabalho dois tipos de deslocadores de feixes: um da marca Thorlabs[®], que separa os feixes de 1 mm e outro da marca Altechne[®], que separa de 3 mm. Ambos transmitem a polarização \hat{v} e deslocam a polarização \hat{h} ; o primeiro, de dimensões 7 mm \times 4,5 mm \times 1 cm, foi utilizado para caracterização do modulador espacial, como será descrito em breve. O segundo tipo foi utilizado para a implementação do experimento, de dimensões 18 mm \times 7 mm \times 6 mm e coating refletor que seleciona os comprimentos de onda 435 – 870 nm ¹. Vemos que, com a largura do feixe $w \approx 0.5$ mm, a separação de

¹ que não é o comprimento de onda do laser utilizado; isso afeta somente a intensidade total na saída do

3 mm garante que $\langle X_j || X_i \rangle \approx 9.8 \times 10^{-12}$, o que é uma garantia razoável de (2.21). Passemos agora à caracterização do modulador.

O modulador espacial utilizado é um LCOS-SLM do fabricante Hamamatsu[®], série 10468-02, de reflexão e atua somente aplicando fases no perfil do feixe de luz incidente. Seus pixels quadrados tem $20\mu\text{m}$ de lado e um fator de preenchimento de 92%, o que significa que é razoável aproximá-lo para um; ele é otimizado para os comprimentos de onda de 700 – 850 nm e modula unicamente a componente horizontal da polarização do campo incidente [42].

Outra informação relevante, presente em [42], encontra-se abaixo. O fabricante utilizou redes de difração lineares de altura variável, com número diferente de degraus, k . Uma representação das redes e o resultado obtido são dados nas figuras (6.2) e (6.3):

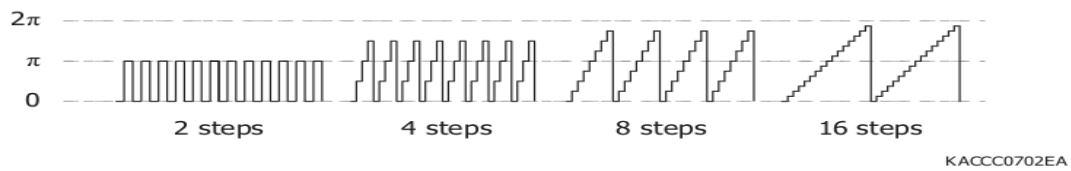


Figura 51 – redes utilizadas pelo fabricante para estudar a eficiência de difração dos moduladores. Retirada de [42]

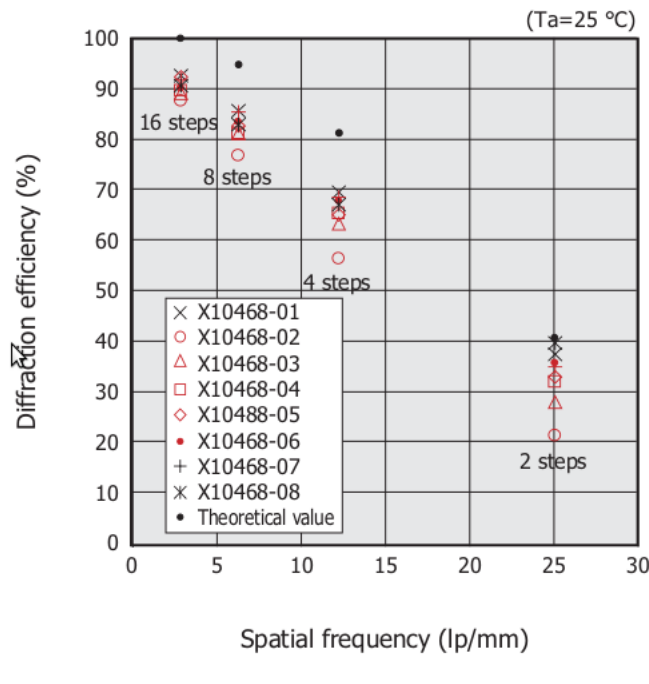


Figura 52 – resultado obtido pelo fabricante, para cada série de modulador e diferentes redes. É obtida a intensidade na ordem $m = 1$ de difração, para um modulador de cada série, para as diferentes redes. Retirada de [42]

deslocador, o que não é um problema para o presente trabalho

Vemos que a série a qual pertence nosso SLM melhora seu desempenho e aproxima-se do esperado teoricamente conforme se aumenta o número de degraus da função colocada. Para a rede binária ($k = 2$), entretanto, o desempenho é consideravelmente menor; essa característica, relacionada à fabricação do instrumento, pode afetar o resultado da proposta para essa rede. Os comprimentos de onda para o qual foi otimizado não compreendem o utilizado. Apesar disso, o comprimento de onda do nosso laser (632.8nm) não está muito distante do mínimo para o qual o fabricante garante funcionamento, e portanto não é preocupante utilizá-lo, embora o desempenho de modulação possa ser afetado por isso. Assim, foi necessário calibrá-lo. Para tanto, utilizamos o seguinte arranjo

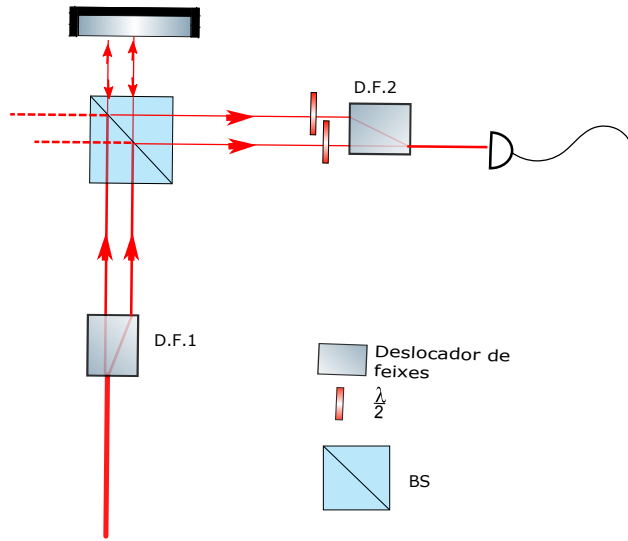


Figura 53 – arranjo utilizado para calibração do SLM. Dois feixes, com polarizações \hat{h} e \hat{v} chegam a tela, sendo modulado apenas aquele com polarização horizontal (que é deslocado). A modulação é dada por fases constantes. Placas de onda são utilizadas para que o feixe não desviado no primeiro deslocador, o seja no segundo.

Nesse arranjo, o campo que chega ao modulador é dado por

$$B_1 \text{Gauss}_w(x) \hat{v} + e^{i\theta_1} B_2 \text{Gauss}_w(x - \Delta_1 x) \hat{h}, \quad (6.8)$$

em que $\Delta_1 x = 1 \text{ mm}$ e θ_1 é a fase devida a diferença de caminho no deslocador de entrada e B_1 e B_2 contém a informação de amplitude e fase relativa entre os feixes. Como o SLM não modula a componente \hat{v} , ao utilizar máscaras com fase constante no modulador, o campo de saída será:

$$B_1 \text{Gauss}_w(x) \hat{v} + e^{i(\varphi + \theta_1)} B_2 \text{Gauss}_w(x - \Delta_1 x) \hat{h}, \quad (6.9)$$

onde φ é a fase adicionada pelo SLM. Após a placa de ondas, colocada em um ângulo $\pm 45^\circ$, de modo que $\hat{h} \rightarrow \hat{v}$ e $\hat{v} \rightarrow \hat{h}$. Depois de passar pela segunda calcita, temos:

$$e^{i\theta_2} B_1 \text{Gauss}_w(x) \hat{v} + e^{i(\varphi+\theta_1)} B_2 \text{Gauss}_w(x) \hat{h}, \quad (6.10)$$

em que θ_2 é a fase adicionada pelo segundo deslocador; o feixe não desviado no primeiro deslocador, é desviado no segundo. Temos, ao projetar no estado de polarização $\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{h} + \hat{v})$

$$\begin{aligned} e^{i\theta_2} B_1 \text{Gauss}_w(x) \hat{v} + e^{i(\varphi+\theta_1)} B_2 \text{Gauss}_w(x - \Delta_1 x) \hat{h} \Rightarrow \\ I = |B_1|^2 + |B_2|^2 + 2|B_1||B_2|\cos(\varphi + \Delta\theta) \end{aligned} \quad (6.11)$$

Assim, variando a escala de cinza no modulador, variamos a fase relativa entre os feixes, obtendo um gráfico de intensidade por escala de cinza. Deste gráfico obtemos a constante da relação $\varphi(e.c.) = cte(e.c.)^2$. Supusemos uma relação linear entre estes, já que esse comportamento é o prometido pelo fabricante para os comprimentos de onda que estão no intervalo de funcionamento. O resultado obtido, juntamente com o ajuste pela função dada em (6.11), encontra-se na figura (54):

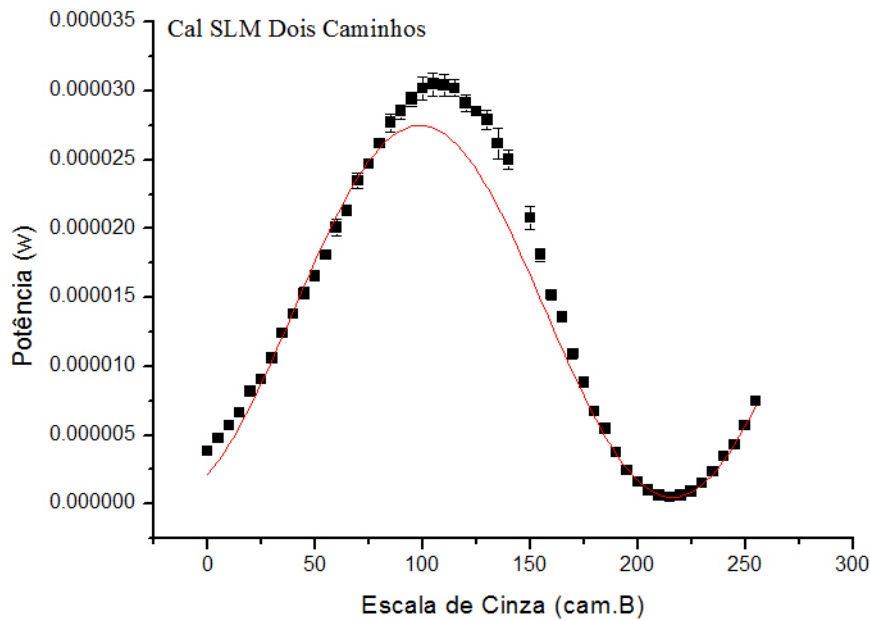


Figura 54 – Potência ótica medida na saída do interfeferômetro mostrado na figura (53). A curva vermelha é o ajuste teórico usando a equação (6.11), supondo que a escala de cinza varia linearmente com a fase.

² onde *e.c.* é abreviação de escala de cinza.

A visibilidade da curva, definida como

$$\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}},$$

que obtivemos foi $v = 96,4 \pm 0,3\%$, bem próxima de 100%. Vemos que há um bom acordo da curva fitada com os dados medidos para boa parte do gráfico, mesmo para um comprimento de onda fora do alcance. A diferença de fase colocada pelas calcitas, encontrada no ajuste, $(\Delta\theta)$ é 3.6 ± 3 rad. O parâmetro principal nesse ajuste é o valor da constante c , tal que $\varphi = c(e.c.)$, obtivemos $c = 0,02674 \pm 0,00016$.

Com esse valor e o fato de que o SLM utilizado possui 256 escalas de cinza diferentes³, a modulação máxima é $6,82 \pm 0,04$.

As especificações e a modulação máxima do SLM para esse comprimento de onda, conjuntamente com o perfil do laser e as dimensões dos deslocadores de feixes, implicam algumas restrições à proposta apresentada. A principal limitação para projeções ou implementação das operações consideradas possíveis na apresentação da proposta é a modulação máxima dada pelo SLM ($\approx 6,9$ rad). Podemos ver que, com esse valor de modulação máxima, a possibilidade de composição de redes pode ficar bastante comprometida. Para compor redes, a fase máxima dada não pode ultrapassar essa modulação, ou seja, $\varphi_{max} < 6,9$. Isso implica que algumas sugestões para projeção nos 13 estados, dada na tabela com as 13 projeções não podem ser executados com nosso SLM. Isso não significa que não seja possível realizá-las, mas que deve ser necessário procurar outras redes, ou combinações das aqui estudadas, que façam esse trabalho. Um ponto importante dessa restrição é que, sempre que possível, deve-se procurar redes que façam o trabalho com um menor φ , eventualmente deslocada, do que aquelas que necessitem de um φ maior, caso seja interessante compô-la com alguma outra. Isso dá maior liberdade na altura máxima da rede a ser utilizada na composição.

Outra limitação está relacionada com a condição **c5**: devemos ter um número de períodos razoável repetindo ao longo do feixe. Considerando que o feixe tenha um tamanho efetivo dado por $2\sqrt{2}w = 1,253 \pm 0,004$ mm, para que tenhamos pelo menos 5 repetições ao longo dessa extensão, o tamanho do período das redes deve ser até $T_{max} \approx 250\mu m$. Portanto, utilizaremos um período com número de pixels N entre 8 – 12. Uma rede com $N = 20$ pixels contém, dentro da porção considerada não desprezível do feixe, aproximadamente 3 períodos; isso significa que não podemos usar um N maior que esse, para garantir a satisfação de **c5**. Com esse período máximo, verificamos que $m_{maximo}^* = 2$ para que no plano de saída as ordens não estejam muito próximas.

Por outro lado, devido às dimensões dos deslocadores de feixes no plano transversal⁴, a separação angular entre as ordens não pode ser arbitrariamente grande⁵. Pôde-se

³ Com o grau 0 da escala, correspondente ao preto, até 255, que corresponde ao branco

⁴ Sem explicitar, assumimos que o deslocador de feixes tinha altura infinita, anteriormente

⁵ e nesse caso, mesmo com deslocadores infinitos, teríamos saído dos limites da aproximação de Fresnel

ver que para $N = 4$ as ordens ± 1 já não estavam presentes em nosso experimento, nas condições em que foi feito e serão descritas nesse capítulo. Por outro lado, um período menor que 6 também não pode ser utilizado, se queremos obter pelo menos as ordens ± 1 . Períodos menores que esse em \mathbf{y} , então, podem ser utilizados para bloqueio de caminhos (vide seção (4.3.2)). É importante levar em conta e verificar essas limitações, já que podem dificultar a realização de operações que aproximem unitárias como descrito em (5.1), preparação de estados em dimensões maiores, e outras operações descritas em (5).

Expostas as características e limitações do aparato utilizado, vamos agora aos resultados obtidos. Dividiremos em duas seções: uma para o arranjo em que o interferômetro não é necessário, descrito em (3.3) e outra seção para aqueles em que o interferômetro está presente (descritos em (3.4) e (3.5)). Para o primeiro caso, além de resultados da proposta apresentada, é importante notar que se trata, também, da caracterização do funcionamento do modulador para cada rede; este comportamento pode ser diferente da aplicação de fases constantes em uma região grande da tela do SLM, funcionamento para o qual o modulador é primordialmente fabricado e testado, como descrito em [42].

Temos dois sistemas de detecção que serão comparados. Um deles é dado pela câmera CCD, com filtros neutros para garantir que o comportamento linear desta seja preservado. São tiradas 5 imagens, que, no programa matlab[®], são somadas e o fundo é subtraído. Outro é feito por um medidor de potência da Thorlabs[®], série *PM100D*. Todas as medições apresentadas abaixo foram realizadas com redes de $N = 10$, com exceção da rede senoidal, em que foi usado um período com 20 pixels.

6.2 $|\mathbf{C}_m|^2$ para arranjo de 1 caminho; caracterização das redes

O arranjo para um caminho de entrada é o descrito na seção (3.3), com a detecção ocorrendo no plano focal da lente – no caso era uma lente esférica –, de foco $f = 30\text{cm}$. No caso da detecção com câmera CCD, utilizamos filtros neutros e tempo de integração que garantisse que o regime linear de resposta era preservado. No caso da detecção com o medidor de potência, uma íris era utilizada para selecionar apenas a ordem de interesse. Abaixo, apresentamos os resultados obtidos, que devem ser comparados com aqueles previstos em (4).

6.2.1 Rede binária

Antes de mostrar os resultados gerais, a título de ilustração, mostraremos algumas fotos da câmera. Com isso, pode-se visualizar o que se obtém no final do arranjo e também os objetos com que lidamos para extrair os dados detectados com a câmera CCD. Além disso, permite ver algumas particularidades para essa rede. As fotos são tratadas como

explicado acima⁶. São três fotos com alturas φ diferentes nas figuras (55), (56) e (57):

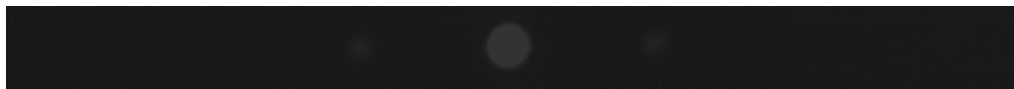


Figura 55 – Imagem final obtida após as médias com 5 fotos da câmera e subtração de ruído de fundo. Esse resultado é referente à rede binária, de altura em escala de cinza dada por $e.c. = 20$. Essa imagem foi obtida fora do regime linear da câmera, para que fosse possível ver os feixes na saída. Os dados utilizados, entretanto, são aqueles obtidos de detecção de intensidades dentro do regime linear.



Figura 56 – Imagem referente à rede binária, de altura em escala de cinza dada por $e.c. = 140$, para detecção de intensidade fora do regime linear

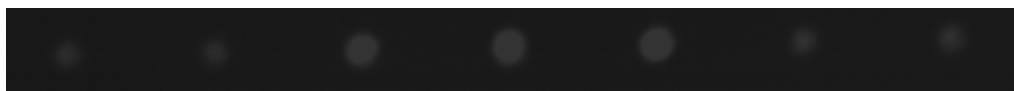


Figura 57 – Imagem referente à rede binária, de altura em escala de cinza dada por $e.c. = 190$, para detecção de intensidade fora do regime linear

Na primeira imagem, a altura da rede é baixa e praticamente só a ordem 0 é visível. Conforme a altura vai aumentando, mais ordens aparecem e, para a altura $e.c. = 140$, vemos que a ordem zero está muito menos intensa que as outras. Uma diferença em relação ao previsto teoricamente que já pode ser notada é que há luz (pouca, mas há) nas ordens ± 2 , enquanto $C_m = 0$ para m par era o esperado.

Obtidas essas imagens, somamos os valores em cada linha, obtendo um gráfico de intensidade por posição (em pixels). As ordens se reduzem, assim, a picos. O valor máximo do pico de cada ordem, separadamente, é graficado em função da escala de cinza do SLM que determina a altura da rede. Para o resultado com o medidor de potência ótica, utilizamos 5 registros de cada ponto, cada um formado por 2 médias. Com as flutuações, obtivemos o desvio padrão.

Os resultados obtidos para os dois modos de detecção encontram-se abaixo, juntamente com a função dos C_m 's, dada em (4.5), fitada:

⁶ Essas fotos foram tiradas em um regime de intensidade que tornava possível ver as ordens, mas o comportamento da câmera nesse regime não é linear; para a aquisição dos dados, não é uma imagem tão intensa que é obtida.

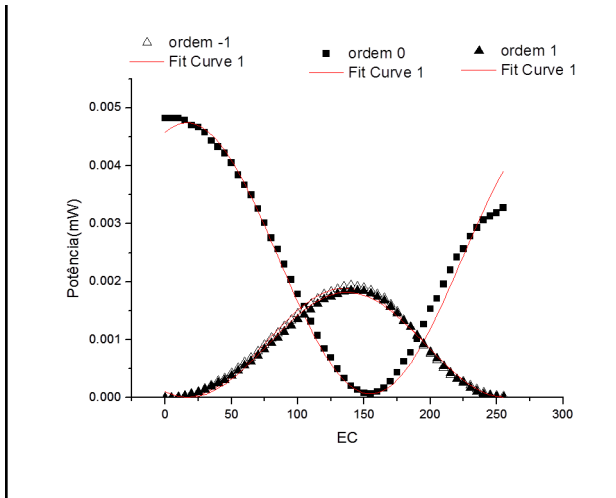


Figura 58 – Dados obtidos para a rede binária com o medidor de potência ótica colocado na saída do arranjo mostrado na figura (3.1). A altura da rede era variada, e a potência obtida para as ordens $m = 0, 1$ ou -1 . A escala de cinza, como visto acima, é proporcional à fase dada pelo modulador ao feixe em cada pixel. A curva em vermelho consiste nos ajustes teóricos dados pelas funções discutidas no capítulo (4).

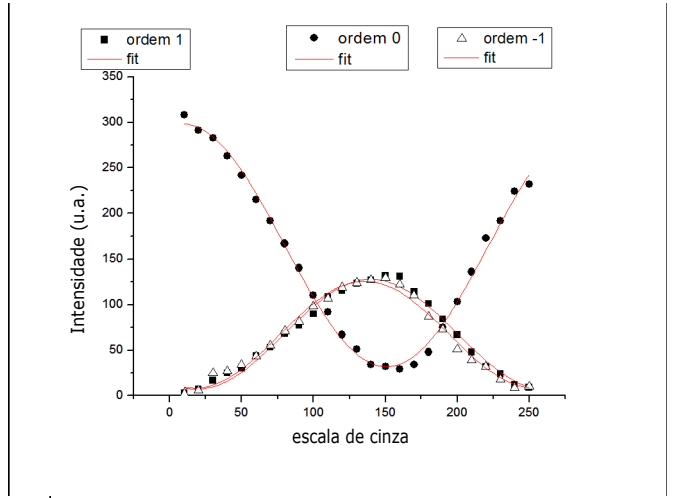


Figura 59 – Dados obtidos para a rede binária com a câmera CCD colocada na saída do arranjo mostrado na figura (3.1). A altura da rede era variada, e a potência obtida para as ordens $m = 0, 1$ ou -1 . A escala de cinza, como visto acima, é proporcional à fase dada pelo modulador ao feixe em cada pixel. A curva em vermelho consiste nos ajustes teóricos dados pelas funções discutidas no capítulo (4).

O resultado esperado, conforme descrito em (4.5), para comparação, está na Figura (60):

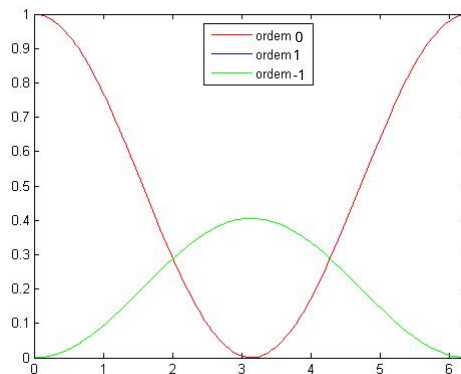


Figura 60 – Resultado esperado para intensidade das ordens 0, 1 e -1 em função da altura da rede binária, conforme obtido em (4.5)

A escala dos gráficos depende do tipo de detecção, deve-se analisar o comportamento qualitativo das funções e os valores relativos; alguns valores relativos característicos apresentados nas tabelas. Como a calibração acima obtida era adequada para máscaras de fase constante, é interessante analisar se obteríamos um resultado parecido para as redes, permitindo a variação da constante de proporcionalidade c , por isso fitamos diretamente pela escala de cinza e deixamos esse parâmetro livre no ajuste. De fato, os valores de c obtidos nesse caso são próximos do obtido anteriormente, para essa rede. Os valores relativos dos picos das ordens ± 1 , do mínimo para a ordem 0 e da constante de calibração c estão resumidos na tabela (6):

Tabela 6 – Comparação dos valores teóricos e experimentais, para a rede binária, obtidos de duas maneiras: com medidor de potência ótica e câmera CCD. O valor de c é a constante de proporcionalidade que relaciona φ e $e.c.$. Este valor foi obtido através dos ajustes teóricos e deve ser comparado com aquele na calibração do modulador.

Binária (medidor)	máximo teórico	máximo obtido	erro	Binária (câmera)	máximo teórico	máximo obtido	erro
ordem 1	0.405	0.386	0.026	ordem 1	0.405	0.412	0.007
ordem -1	0.4053	0.4040	0.0018	ordem -1	0.405	0.408	0.007
	mínimo teórico	mínimo obtido	erro		mínimo teórico	mínimo obtido	erro
ordem 0	0	0.0144	0.0009	ordem 0	0	0.101	0.010
	valor calibração	valor obtido	erro		valor calibração	valor obtido	erro
c	0.0267	0.0263	0.0037	c	0.0267	0.0262	0.037

Pode-se ver que, de maneira geral, o comportamento é o esperado para ambos detectores e as curvas ajustam bem os dados obtidos. Há, entretanto, um desajuste para a ordem 0 em relação às outras: o mínimo dessa ordem é atingido em uma escala de cinza de valor maior que o máximo para as ordens ± 1 , enquanto o esperado era que ocorresse no mesmo valor (correspondente a $\varphi = 2\pi$). Além disso, essa ordem não recupera completamente o valor inicial, o que deveria ocorrer quando $\varphi = 2\pi$; isso está relacionado com o fato que o valor de c encontrado para essa ordem é substancialmente menor que o das outras. Esse desacordo parece ser devido a alguma característica da fabricação do SLM utilizado: na imagem (6.2), vemos que o nosso SLM possui uma eficiência de difração consideravelmente menor para a rede binária. Isso parece significar que uma parte do feixe não é modulada quando se utiliza essa rede, o que gera um resíduo que prejudica o resultado obtido. Uma pequena intensidade, com fase relativa, permanece nessa ordem, alterando o valor de escala de cinza em que esta se anula. Esse efeito também pode alterar a recuperação da intensidade dessa ordem, que deveria ocorrer na aplicação da binária $0 - 2\pi$. Se isto estiver de fato ocorrendo, nas ordens com $m \neq 0$ haveria um reflexo na quantidade total de luz, mas não no comportamento qualitativo geral, como estamos obtendo.

Na comparação dos dois detectores, podemos notar que o medidor de potência tem menor flutuação. Acreditamos que o problema dessa flutuação advenha da extração de dados que foi feita com o medido pela câmera, em que usamos apenas o valor de pico da intensidade registrada. Esse valor é mais suscetível à flutuações, principalmente se o perfil

do feixe tiver imperfeições. Os resultados com a câmara parecem apresentar um ruído de fundo, apesar de ter sido descontado das imagens um fundo medido sem a presença do laser.

6.2.2 Linear e Linear Inversa

Seguem, nas figuras (61), (62) e (63), algumas das fotos obtidas para a rede linear.



Figura 61 – Imagem referente à rede linear, de altura em escala de cinza dada por $e.c. = 20$, para detecção de intensidade fora do regime linear



Figura 62 – Imagem referente à rede binária, de altura em escala de cinza dada por $e.c. = 170$, para detecção de intensidade fora do regime linear

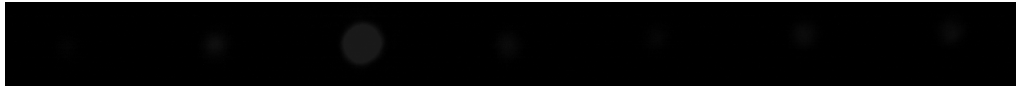


Figura 63 – Imagem referente à rede binária, de altura em escala de cinza dada por $e.c. = 230$, para detecção de intensidade fora do regime linear

Vemos que enquanto a escala de cinza máxima aumenta, a rede tende a deslocar o feixe para a ordem -1 (no caso da linear). Pode-se notar que um dos lados (definidos por $m > 0$ ou $m < 0$) é extremamente mais intenso que o outro. Os resultados obtidos para a rede linear, após a redução de dados, estão a seguir e o comportamento deve ser comparado com o gráfico abaixo, figura (64) (as fases negativas são para comparação com a linear inversa):

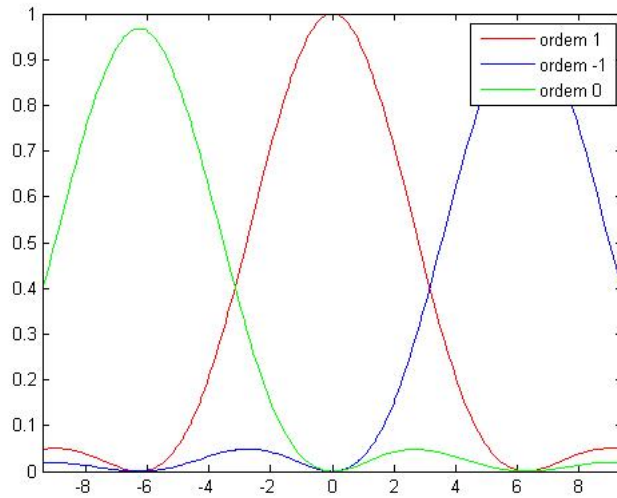


Figura 64 – Módulo quadrado dos coeficientes C_0, C_1, C_{-1} da rede linear pixelada, em função da fase máxima φ_{max} , com $N = 10$, calculados com a expressão (4.13).

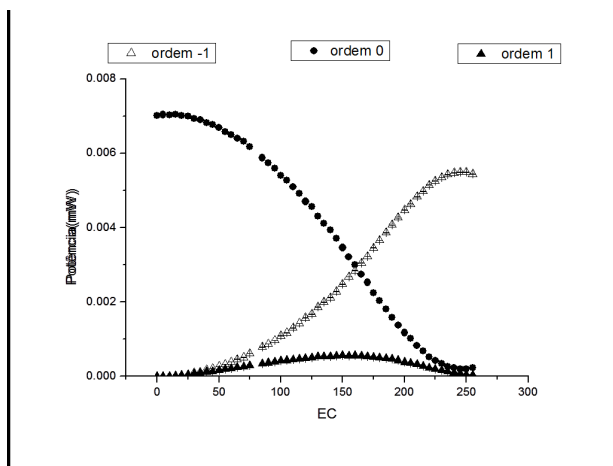


Figura 65 – Dados obtidos para a rede linear com o medidor de potência ótica colocado na saída do arranjo mostrado na figura (3.1). A altura da rede era variada, e a potência obtida para as ordens $m = 0, 1$ ou -1 . A escala de cinza, como visto acima, é proporcional à fase dada pelo modulador ao feixe em cada pixel.

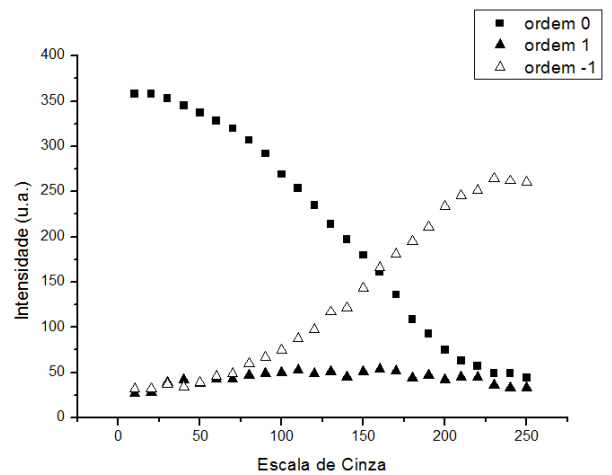


Figura 66 – Dados obtidos para a rede linear com a câmera CCD colocada na saída do arranjo mostrado na figura (3.1). A altura da rede era variada, e a potência obtida para as ordens $m = 0, 1$ ou -1 . A escala de cinza, como visto acima, é proporcional à fase dada pelo modulador ao feixe em cada pixel.

Não conseguimos, entretanto, ajustar os dados aqui obtidos, por dificuldade em

utilizar programas adequados para tanto. Faremos, a partir de agora, uma análise qualitativa dos resultados obtidos, focando na forma das curvas obtidas, na comparação das duas formas de detecção e redução de dados. Compararemos, ainda assim, alguns valores específicos com o esperado: máximos relativos alcançados pelas ordens ± 1 e o mínimo alcançado pela ordem 0. O valor estimado para c foi obtido a partir da escala de cinza em que a ordem central se anula, e o erro foi obtido considerando-se um erro de 1 na escala de cinza nessa estimativa.

Tabela 7 – Comparação dos valores teóricos e experimentais, para a rede linear, obtidos de duas maneiras: com medidor de potência ótica e câmera CCD. O valor de c é a constante de proporcionalidade que relaciona φ e $e.c.$. Este valor foi obtido considerando-se que a ordem 0 tem seu menor valor para a escala de cinza que equivale a 2π .

Linear (medidor)	máximo teórico	máximo obtido	erro	Linear (câmera)	máximo teórico	máximo obtido	erro
ordem 1	0.0489	0.0809	0.0018	ordem 1	0.0489	0.1508	0.0035
ordem -1	0.9675	0.7793	0.0022	ordem -1	0.9675	0.7402	0.0060
	mínimo teórico	mínimo obtido	erro		mínimo teórico	mínimo obtido	erro
ordem 0	0	0.0328	0.0012	ordem 0	0	0.132	0.003
	valor calibração	valor obtido	erro		valor calibração	valor obtido	erro
c	0.026	0.02513	0.00014	c	0.0267	0.0273	0.0017

Para a rede linear inversa, apenas detectamos com o medidor de potência ótica. O resultado encontra-se na figura (67).

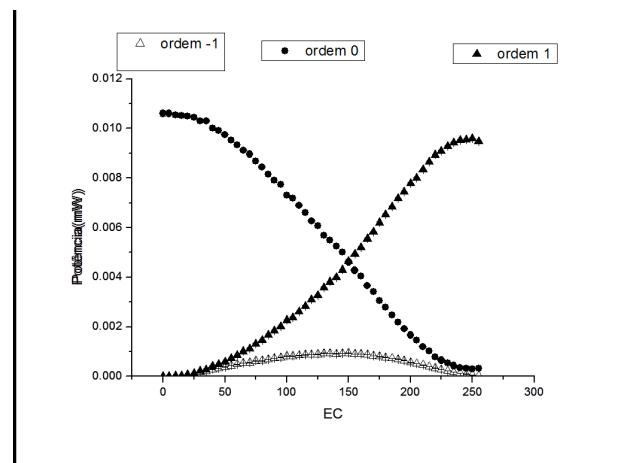


Figura 67 – Dados obtidos para a rede linear inversa com o medidor de potência ótica colocado na saída do arranjo mostrado na figura (3.1). A altura da rede era variada, e a potência obtida para as ordens $m = 0, 1$ ou -1 . A escala de cinza, como visto acima, é proporcional à fase dada pelo modulador ao feixe em cada pixel.

Tabela 8 – Comparação dos valores teóricos e experimentais, para a rede linear inversa, obtidos com medidor de potência ótica. O valor de c é a constante de proporcionalidade que relaciona φ e $e.c.$. Este valor foi obtido considerando-se que a ordem 0 tem seu menor valor para a escala de cinza que equivale a 2π .

linear Inversa	max teórico	maximo obtido	erro
ordem 1	0,968	0,905	0,009
ordem -1	0,0472	0,08868	0,00019
	mínimo teórico	mínimo obtido	erro
ordem 0	0	0,0334	0,0010
	valor calibração	valor obtido	erro
c	0,026	0,02543	0,00014

Pode-se notar que, qualitativamente, obtivemos o esperado: a ordem 0 diminui fortemente, uma delas aumenta substancialmente e a outra atinge um máximo bem menor e volta a praticamente zero. Entretanto, vemos que os resultados quantitativos estão discrepantes do esperado teoricamente. A rede linear inversa tem resultados mais acurados que o da linear; efeito que não sabemos explicar. Isso parece mostrar que o desempenho da rede linear pode alcançar a linear inversa. Descobrir como fazê-lo (melhorando possivelmente o da linear inversa, inclusive) pode ser extremamente útil, considerando-se a possibilidade de usar essas redes para permutações ou a identidade, como apresentado em (5.2). Se não for possível, uma maneira de compensar essa perda ao tentar deslocar para cima (“levantar”) ou deslocar para baixo (“abaixar”) um feixe deve ser encontrada. Importante lembrar que para essas redes e para as próximas, o valor teórico pode conter a discretização devida à pixelização do SLM, mas não contém a discretização da escala de cinzas, que pode ser importante nesses casos. Os valores de c apresentam um bom acordo com a calibração anterior.

Novamente, parece haver maior flutuação nas medições com a câmera.

6.2.3 Triangular

As fotos da rede triangular também tem algo a acrescentar em relação às já apresentadas, uma vez que esta rede, apesar de simétrica como a binária, tem ordens m par não desprezíveis. Vide figuras (68), (69) e (70).



Figura 68 – Imagem referente à rede triangular, de altura em escala de cinza dada por $e.c. = 20$, para detecção de intensidade fora do regime linear. As fotos foram obtidas com a câmera no final do arranjo em (3.1).

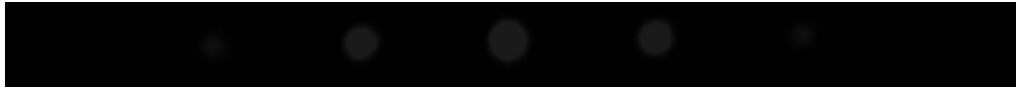


Figura 69 – Imagem referente à rede triangular, de altura em escala de cinza dada por $e.c. = 130$, para detecção de intensidade fora do regime linear. As fotos foram obtidas com a câmera no final do arranjo em (3.1).



Figura 70 – Imagem referente à rede triangular, de altura em escala de cinza dada por $e.c. = 240$, para detecção de intensidade fora do regime linear. As fotos foram obtidas com a câmera no final do arranjo em (3.1).

Podemos ver que a ordem 0 dessa rede demora a desaparecer com o aumento da escala de cinza, enquanto que as ordens ± 2 tem intensidades de fato altas.

Os resultados encontram-se, juntamente com o que é previsto, abaixo, nas figuras (71), (72) e (73).

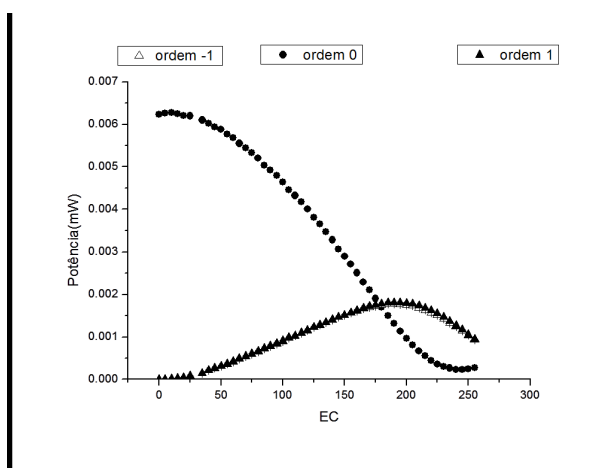


Figura 71 – Dados obtidos para a rede binária com o medidor de potência ótica colocado na saída do arranjo mostrado na figura (3.1). A altura da rede era variada, e a potência obtida para as ordens $m = 0, 1$ ou -1 . A escala de cinza, como visto acima, é proporcional à fase dada pelo modulador ao feixe em cada pixel.

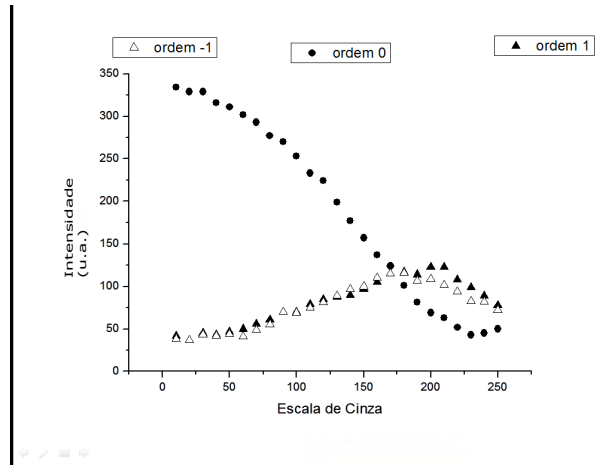


Figura 72 – Dados obtidos para a rede binária com a câmera CCD colocada na saída do arranjo mostrado na figura (3.1). A altura da rede era variada, e a potência obtida para as ordens $m = 0, 1$ ou -1 . A escala de cinza, como visto acima, é proporcional à fase dada pelo modulador ao feixe em cada pixel.

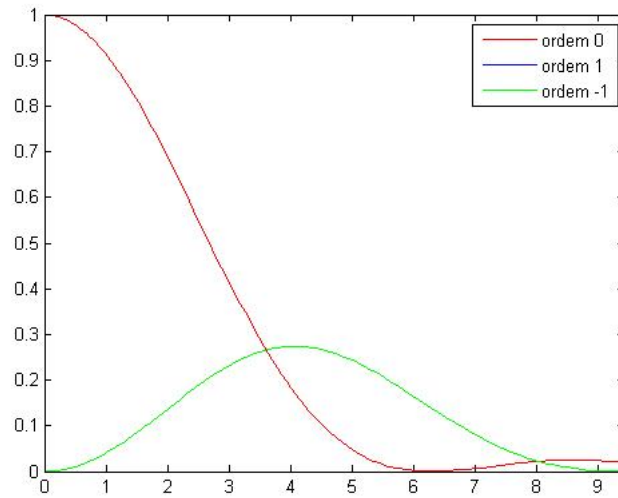


Figura 73 – Intensidade relativa das ordens 1, 0 e -1 para a triangular pixelada, com $N = 10$ pixels por período, em função de φ .

Novamente, encontramos acordo qualitativo entre o esperado teoricamente e o obtido: as ordens ± 1 estão simétricas e os valores máximos para essas ordens são próximos do esperado; os valores para c estão em acordo com a calibração obtida antes. Abaixo, a tabela (9) que contém esses dados.

Tabela 9 – Comparação dos valores teóricos e experimentais, para a rede triangular pixelada ($N = 10$), obtidos de duas maneiras: com medidor de potência ótica e câmera CCD. O valor de c é a constante de proporcionalidade que relaciona φ e $e.c.$. Este valor foi obtido considerando-se que a ordem 0 tem seu menor valor para a escala de cinza que equivale a 2π .

Triangular (medidor)	máximo teórico	máximo obtido	erro	Triangular (câmera)	máximo teórico	máximo obtido	erro
ordem 1	0.27	0.29	0.03	ordem 1	0.274	0.347	0.003
ordem -1	0.27	0.28	0.03	ordem -1	0.274	0.368	0.003
	mínimo teórico	mínimo obtido	erro		mínimo teórico	mínimo obtido	erro
ordem 0	0	0.0378	0.0020	ordem 0	0	0.129	0.003
	valor calibração	valor obtido	erro		valor calibração	valor obtido	erro
c	0.02674	0.02596	0.00015	c	0.02674	0.02732	0.00017

As conclusões são extremamente parecidas com as anteriores: os resultados obtidos com a câmera apresentam flutuações maiores. Nesse caso, entretanto, temos um bom acordo com os valores esperados.

6.2.4 Rede senoidal

Antes de mostrar os resultados obtidos para a rede senoidal, é necessário dizer que essa rede contém uma peculiaridade. A fase adicionada deveria ser dada por $\varphi \sin(y)$. Entretanto, como o seno assume valores negativos e as fases colocadas no SLM devem ser

positivas (entre 0 e 2π), ocorreria um salto para os valores no meio período em que o seno é negativo. Devido a isso, a rede a ser colocada no SLM para evitar esses saltos é $e^{i(\varphi \sin(y)+\varphi)}$. Deste modo, a composição com uma fase constante é necessária: isso impõe mais limites na utilização dessa rede: a altura φ máxima que pode ser colocada em escala de cinza é 127 (utilizamos até a 125). Não colocaremos fotos dessa rede, já que delas não teremos muitas novidades: as ordens ± 2 são maiores que as da binária e a ordem 0 se anula em $\varphi = \pi$.

Os dados obtidos estão apresentados nas figuras (75) e (76), abaixo do gráfico com o comportamento esperado, obtido conforme seção (4.2.5), na figura (74).

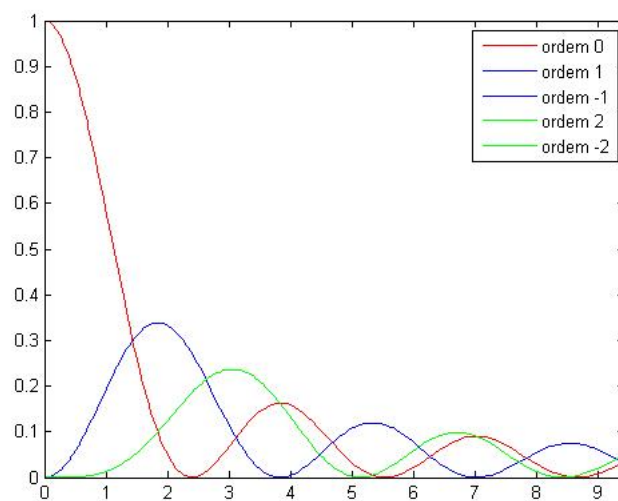


Figura 74 – Intensidade relativa das ordens 1, 0 e -1 para a rede senoidal em função da altura de fase.

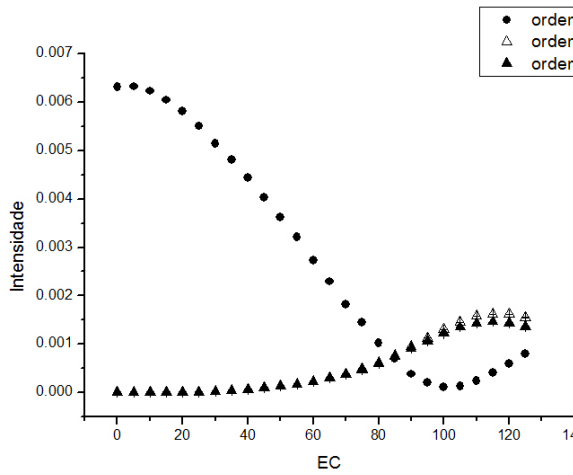


Figura 75 – Dados obtidos para a rede senoidal com o medidor de potência ótica colocado na saída do arranjo mostrado na figura (3.1). A altura da rede era variada, e a potência obtida para as ordens $m = 0, 2$ ou -2 . A escala de cinza, como visto acima, é proporcional à fase dada pelo modulador ao feixe em cada pixel.

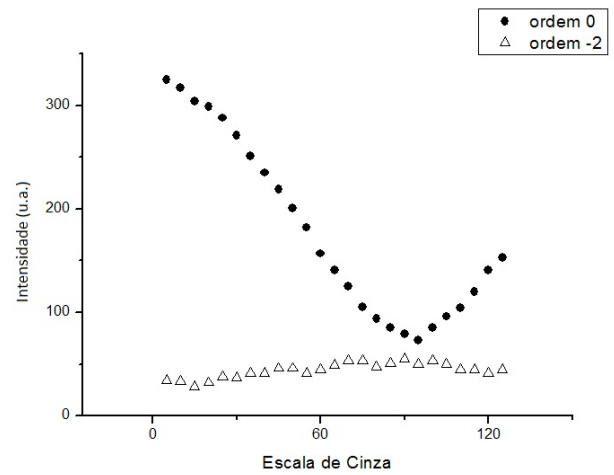


Figura 76 – Dados obtidos para a rede senoidal com a câmera CCD colocada na saída do arranjo mostrado na figura (3.1). A altura da rede era variada, e a potência obtida para as ordens $m = 0, 2$ ou -2 . A escala de cinza, como visto acima, é proporcional à fase dada pelo modulador ao feixe em cada pixel.

Tabela 10 – Comparação dos valores teóricos e experimentais, para a rede linear, obtidos de duas maneiras: com medidor de potência ótica e câmera CCD. O valor de c é a constante de proporcionalidade que relaciona φ e $e.c.$. Este valor foi obtido considerando-se que a ordem 0 ($J_0(\varphi)$) tem seu menor valor para a escala de cinza que equivale a π .

Senoidal (medidor)	máximo teórico	máximo obtido	erro	Senoidal (câmera)	máximo teórico	máximo obtido	erro
ordem 2	0.2367	0.2326	0.0007	ordem 2	0.236	0.169	0.003
ordem -2	0.2367	0.2563	0.0007	ordem -2	0.236	-	-
	mínimo teórico	mínimo obtido	erro		mínimo teórico	mínimo obtido	erro
ordem 0	0	0.01073	0.00022	ordem 0	0	0.225	0.003
	valor calibração	valor medido	erro		valor calibração	valor obtido	erro
c	0.02674	0.0314	0.0004	c	0.026743	0.01298	0.00008

Novamente, o comportamento qualitativo é condizente com o esperado para o medidor de potência, com exceção do valor de c . Entretanto, dessa vez há um grande desacordo, na ordem 2 na medição realizada com a câmera. Ela está praticamente constante, próxima ao ruído ainda persistente. Assim, medimos também as ordens ± 1 com a câmera, para obter mais informações, e o resultado segue abaixo, na figura (77)

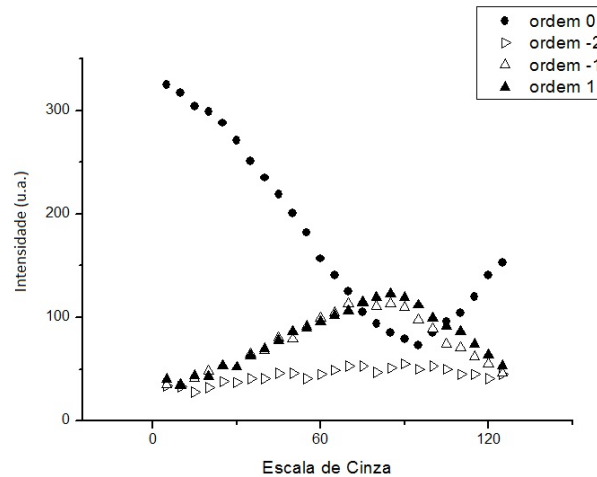


Figura 77 – Intensidade das ordens 0, ± 1 e ± 2 para a rede senoidal, em função da altura em escala de cinza. Dados obtidos com a câmera CCD, colocada na saída do arranjo (vide (3.1))

Tabela 11 – Comparação dos valores teóricos e experimentais, para o valor máximo de intensidade relativa das ordens ± 1 da rede senoidal. Esses dados foram obtidos com a câmera CCD.

Senoidal (câmera)	máximo teórico	máximo obtido	erro
ordem 1	0.3386	0.378	0.003
ordem -1	0.3386	0.348	0.003

Vemos que para as ordens ± 1 , os resultados de máximo são condizentes com o esperado. O valor de c , entretanto, é discordante do obtido com a calibração e nos métodos qualitativos anteriores; embora seja parecido para o medidor de potência ótica e para a câmera. Acreditamos que isso pode ser efeito da discretização da função na tela do SLM e das escalas de cinza que, para uma função não linear, como um seno, pode ter efeitos drásticos, que não estudamos, mesmo o período utilizado tendo sido maior. Entretanto, o que foi obtido não é completamente fora do esperado (com exceção da ordem 2 no caso da câmera): as ordens $\pm m$ têm intensidades muito próximas para toda altura utilizada, e crescem e cruzam com a ordem 0.

6.2.5 Conclusões parciais

Vimos que existe uma pequena alteração para a ordem 0 da binária, assim como para a eficiência quantitativa da rede linear. Um ruído insistente e uma flutuação maior dos dados aparecem nos resultados conseguidos com a câmera, o que pode ser melhorado modificando a maneira de reduzir os dados ou o procedimento para obtê-los.

Dos resultados apresentados até agora, podemos ver que os módulos quadrados dos coeficientes das redes estudadas, de modo geral, tem comportamento qualitativo conforme o esperado (apesar de algumas discrepâncias, como a ordem -2 da senoidal, para a câmera).

Isso significa que nossa proposta, dentro das condições experimentais do laboratório em questão, está funcionando e pode, a princípio, ser utilizada para preparar qutrits ou realizar rotação no espaço codificado em feixes gaussianos, do estado $(1, 0, 0)^T$ para qualquer em três dimensões, dentro da aproximação dada por $p_{desprezado}$ (vide seção (5.2)), que é melhor para redes com pequena altura φ .

Apesar de ainda existirem melhorias a serem feitas na caracterização dos módulos dos coeficientes, é importante ressaltar que as fases relativas das ordens na saída do arranjo devem ser medidas, para que se caracterize completamente as redes utilizadas.

6.3 Mais caminhos, interferômetro presente

Antes de mostrarmos os resultados para mais caminhos, vale dizer que a fonte de estados de qutrits codificados em feixes gaussianos paralelos utilizada foi semelhante àquela descrita na seção (2), com a diferença que não há atenuação. O arranjo está apresentado abaixo.

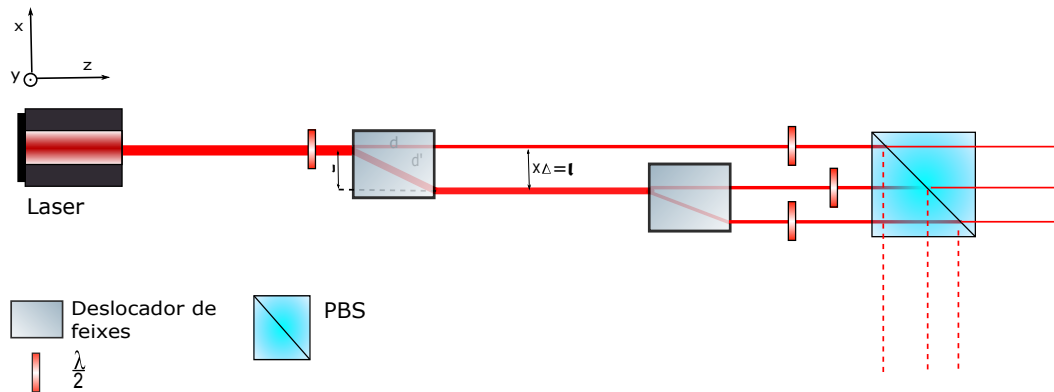


Figura 78 – arranjo utilizado para geração de feixes gaussianos paralelos, sem atenuação

Podemos preparar estados do tipo (e, g, h) , com $e, g, h \in \mathbb{C}$, com $|e|^2 + |g|^2 + |h|^2 = 1$. Variando a posição angular das placas de onda, podemos alterar o valor dos módulos de e, g e h . Nomearemos o caminho de cima na imagem de a , o do meio de b e o de baixo de c . Esses caminhos óticos são reconhecidos, respectivamente, com os seguintes vetores de estado: $(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T$.

Com esse arranjo e as placas nas posições que deixam os três caminhos balanceados, podemos medir as fases relativas do estado de entrada da seguinte maneira: selecionamos apenas dois caminhos paralelos, obtendo, por exemplo b e c . Fazemos a transformada de

fourier ótica (através de uma lente na configuração $f - f$) obtendo:

$$\mathcal{F}\{g\text{Gauss}_w(x) + h\text{Gauss}_w(x - \Delta_3 x)\} = \text{Gauss}_{\tilde{w}}\left(\frac{x}{f}\right) \left(g + l e^{i\Delta_3 x \frac{kx}{f}}\right) \Rightarrow$$

$$I = |\text{Gauss}_{\tilde{w}}\left(\frac{x}{f}\right)|^2 \left(|g|^2 + |l|^2 + 2|g||l|\cos\left(\frac{kx}{2f} - \Delta\phi\right)\right) \quad (6.12)$$

onde $\Delta\phi$ é a fase relativa entre b e c e não igualamos $|g|$ e $|l|$ em (6.12) para deixar a equação mais geral; no caso em que são iguais, a intensidade chega a zero nos pontos em que o coseno chega a -1 . De maneira análoga, pode-se fazer o mesmo processo para os caminhos a e b e, assim, considerando a fase de b como fase global, podemos obter as fases do estado puro de entrada. As fases do estado de entrada assim encontrado são $\theta_a = 3.46 \pm 0.11$ rad e $\theta_c = 3.73 \pm 0.13$ rad.

O arranjo que será utilizado é o de 3 caminhos, descrito em (3.5). Há, entretanto, uma pequena diferença: em vez de o terceiro caminho não ser projetado no estado $|+\rangle$ no primeiro polarizador e todos serem projetados em \hat{a} no último, projetamos todos os caminhos em $|+\rangle$ no primeiro polarizador. Dessa maneira, o fator $\eta^{(1)}$ se torna um fator global e não precisa ser compensado como em (3.23). Dessa maneira, o segundo polarizador pode ser colocado na posição que projeta em $\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h} + \hat{v}$, o que facilita o trabalho experimental, à custa de perda de intensidade. Interessante notar que isso muda os elementos de P.O.V.M. implementados, discutidos em (5.3): \mathcal{M}_1 passa a ter uma componente $C_{33} = \frac{1}{2}$ e \mathcal{M}_2 é bastante modificada, já que não há mais os fatores $\sqrt{2}$ na terceira coluna e o fator comum de \mathcal{M} agora será $\frac{1}{2}$. Esse arranjo modificado está representado na figura (79).

de um, poderemos concluir que a condição necessária para a soma está sendo satisfeita (desde que $|e| \approx |f|$).

O resultado, obtido com o medidor de potência sem íris (obtendo assim a intensidade de toda a região em que os feixes são não desprezíveis) está abaixo, nas figuras (80) e (81).

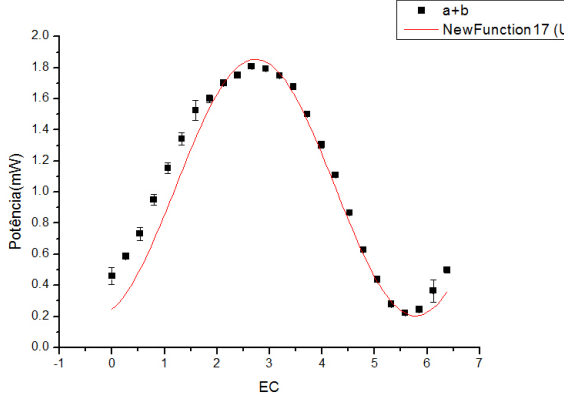


Figura 80 – Caracterização do interferômetro feita com o medidor de potência ótica sem íris na saída do interferômetro como em (53), variando a fase constante adicionada em um dos caminhos, a ou b . O caminho c está bloqueado.

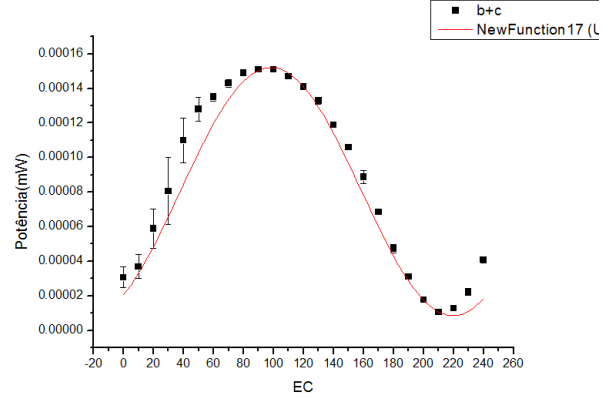


Figura 81 – Caracterização do interferômetro feita com o medidor de potência ótica sem íris na saída do interferômetro como em (53), variando a fase constante adicionada em um dos caminhos, b ou c . O caminho a está bloqueado.

Temos uma visibilidade de 0.894 ± 0.014 e de 0.801 ± 0.011 , o que significa que uma boa sobreposição. Os resultados obtidos indicam que o interferômetro adiciona as seguintes fases entre os caminhos (convencionando que o caminho b tenha fase 0): $\phi_a = -0.50 \pm 0.08$ e $\phi_c = 0.46 \pm 0.10$. Essas fases devem ser consideradas ou compensadas na implementação, como discutido no capítulo (3). Outra possibilidade, é considerar que, efetivamente, o caminho de entrada é diferente daquele dado pela preparação na fonte, e colocar essas fases nele. E as transformações serão feitas nesse estado de entrada modificado. De qualquer maneira, ao variar o estado de entrada e analisar o de saída para verificar a efetividade da implementação, essas fases devem ser levadas em conta.

A seguir, aplicamos as redes como descrito em (5.2) para aplicarmos projeções nos estados da base computacional: $|v_{11}\rangle$, $|v_{12}\rangle$, $|v_{13}\rangle$ e $|v_5\rangle = (1, 0, 1)^T$. Os resultados seguem abaixo. Como já dito, são ainda preliminares. Entretanto, servem como indicação do funcionamento e do andamento da implementação experimental da proposta apresentada neste trabalho.

6.3.1 Algumas projeções

- **projeção em $|v_{11}\rangle$ ou caminho a**

Nessa projeção, a rede linear inversa é utilizada no caminho a , enquanto os outros são bloqueados. Para esse bloqueio, utilizamos redes lineares em \mathbf{y} com $N = 4$, que desviam os feixes pra fora da região de interesse. Esperamos assim que, ao selecionar espacialmente apenas o caminho a , toda luz esteja disponível no estado $|Y_1\rangle$. Se o caminho b e/ou c forem selecionados e essa projeção estiver sendo feita, esperamos que não haja luz ao final do arranjo. Apresentamos a altura do pico do feixe (após o tratamento explicado acima), para cada estado de entrada. Para variar o estado de entrada não mudamos as posições das placas de onda que o preparam, apenas bloqueamos ou não a passagem dos feixes, tornando possível gerar os estados com caminhas a, b, c, ab, ac, bc e abc . Os resultados obtidos encontram-se na figura (82), onde denotaremos com linha os caminhos de saída (que estão na dimensão ortogonal aos de entrada).

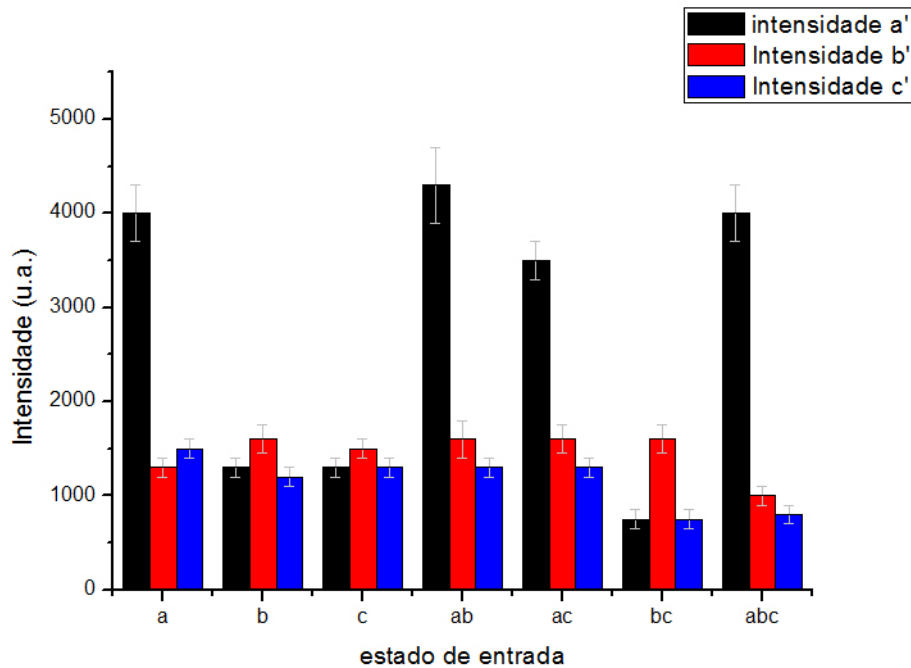


Figura 82 – Projeções no estado $(1, 0, 0)^T$, obtidas com o arranjo da figura (79). Os estados de entrada são selecionados espacialmente, e são denotados sem linha. As intensidades nos caminhos de saída são denotadas com linha.

Vemos que há um ruído, de aproximadamente 700 – 1300 (u.a.), em todas os caminhos de saída, sendo em geral mais altos no caminho b' , a não ser para o estado de entrada a . Apesar desse ruído, podemos ver, de fato, que a intensidade de luz na saída a' é bastante maior sempre que a está presente na entrada. Esse ruído pode ser proveniente

de um pequeno desvio nas placas de onda, ou no PBS que é usado para projeção, por exemplo. Desse modo, se for possível eliminar esse ruído (que é bem menor que o sinal obtido para a' quando esse devia existir) obteríamos o estado projetado, $(1, 0, 0)$.

- **projeção em $|v_{12}\rangle$ ou caminho b**

As redes colocadas são as já propostas em (5.2). O esperado nesse caso é análogo ao caso anterior, mas agora esperamos que se o estado de entrada for ortogonal a $(0, 1, 0)^T$, não haja luz. Seguem os resultados, na figura (83).

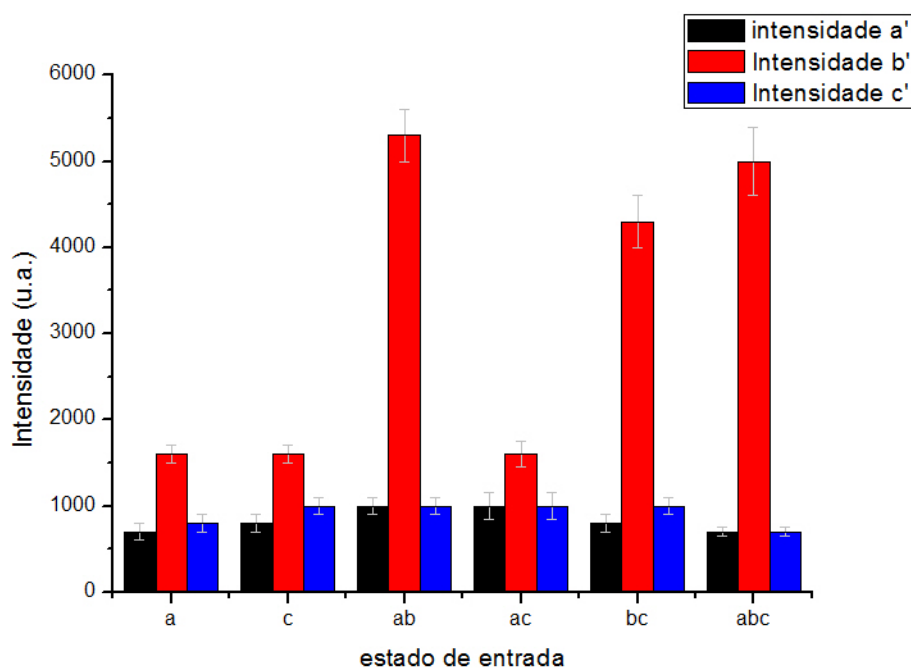


Figura 83 – Projeções no estado $(0, 1, 0)^T$, obtidas com o arranjo da figura (79). Os estados de entrada são selecionados espacialmente, e são denotados sem linha. As intensidades nos caminhos de saída são denotadas com linha

Podemos ver que em todos os casos parece haver o mesmo ruído com todos os caminhos, embora na saída b' haja quantidade significativa a mais de luz, quando b não está bloqueado na entrada. Esse ruído pode advir, além do já comentado acima, da dificuldade da rede utilizada de bloquear os caminhos completamente: um pouco de luz permanece na ordem 0 que chega ao interferômetro. É importante, nos trabalhos futuros, tentar melhorar esse desempenho. Vimos na seção anterior que o resultado para a ordem 0 no caso de utilizar redes lineares pode chegar a menos de 3% do valor total. Se chegarmos a esse valor de ruído, teremos um resultado mais satisfatório para as projeções. Apesar disso, podemos ver que em todos os caminhos ortogonais o que medimos em b' , apesar de insistentemente maior, é sempre comparável ao ruído. Nos outros casos, o que obtemos é

um valor muito maior, o que nos permite concluir que, desconsiderando esse ruído, o estado de saída deve estar próximo de $(0, 1, 0)$. Uma observação importante é que, de maneira geral, as intensidades obtidas no caminho b' (4500 – –5000 u.a.) foi um pouco maior do que o obtido em a' (3800 – –4200 u.a.). Isso pode significar que há um desbalanço não desprezível entre usar a rede linear inversa para elevar o feixe e não colocar rede alguma, como indicado na seção anterior. Isso deve ser melhor estudado experimentalmente para se implementar os projetores, identidade e permutação.

- **projeção em $|v_{13}\rangle$ ou caminho c**

Na figura (84) estão os resultados obtidos para projeção em $(0, 0, 1)$

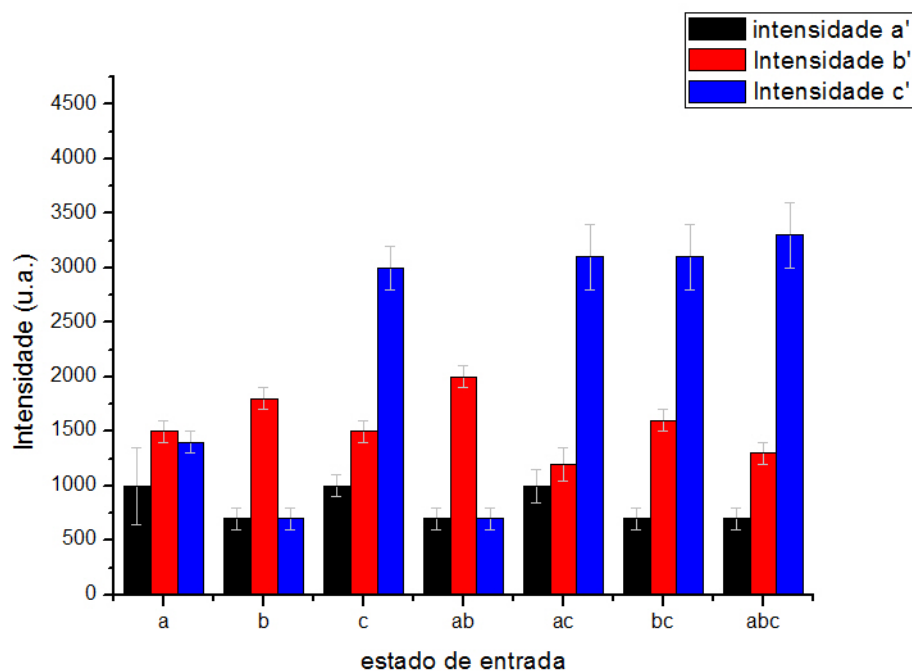


Figura 84 – Projeções no estado $(0, 0, 1)^T$, obtidas com o arranjo da figura (79). Os estados de entrada são selecionados espacialmente, e são denotados sem linha. As intensidades nos caminhos de saída são denotadas com linha

Novamente, quando o estado de entrada é dado por a, b ou ab , vemos que o resultado é o ruído já conhecido. Já quando o caminho c está presente, o resultado é um valor maior para a detecção em c' . Isso indica um comportamento adequado em relação ao esperado. Nesse caso, os valores mais intensos obtidos são menores que aqueles para a' ou b' .

- **projeção em $|v_5\rangle = (1, 0, 1)^T$**

Esse é um caso em que a eficiência e interferência das redes serão testadas. Nesse caso, se o estado de entrada não for ortogonal, esperamos que haja luz nas ordens $m = \pm 1$.

Se for ortogonal, entretanto, esperamos que não haja ordens visíveis ao final do arranjo. Seguem, na figura (85) os resultados obtidos.

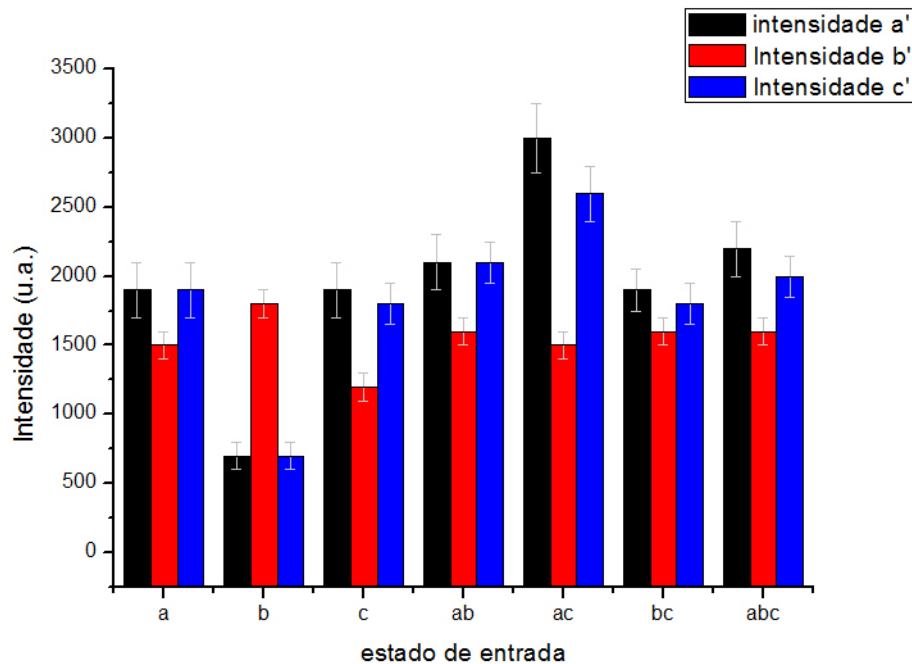


Figura 85 – Projeções no estado $(1, 0, 1)^T$, obtidas com o arranjo da figura (79). Os estados de entrada são selecionados espacialmente, e são denotados sem linha. As intensidades nos caminhos de saída são denotadas com linha

Esses resultados mostram que, apesar de a intensidade ser mais próxima do ruído (já que a é dividida em dois caminhos), para os estados de entrada a e c , as detecções em a' e c' são maiores que em b' e diferentes dos respectivos ruídos. No caso do caminho de entrada b , obtemos o ruído novamente. Para estados de entrada com dois caminhos em que b está presente, vemos que o ruído em b' aumenta consideravelmente, como era de esperar. Esse aumento, entretanto, não é a soma dos ruídos isolados, mostrando que há interferência nessa ordem. Ainda que haja esse ruído, as medições em a' e c' ainda são maiores (mesmo que com o desvio padrão haja possibilidade de serem compatíveis). Já para o caso em que a e c estão presentes, vemos que a interferência entre as ordens ± 1 de cada um deles faz com que haja mais intensidade em a' que em c' , para os dois casos (com ou sem b na entrada). Isso significa que a interferência dessas ordens pode não estar exatamente conforme o esperado.

Após a redução do ruído, é importante analisar se esse efeito continua ocorrendo. Se continuar, deve ser devido à uma diferença adicional de fase entre as ordens de cada caminho, devido ao ângulo com que essas ordens entram nos deslocadores de feixes (vide (B.3)) e a polarização de cada um, que pode ser diferente se eles não estiverem muito bem

alinhados. Esse efeito, inclusive, será maior para o feixe que estiver sendo deslocado em cada calcita.

6.3.2 Conclusões parciais

Pode-se perceber que as projeções testadas até agora estão indicando um acordo razoável comparado com o esperado, mesmo que de maneira qualitativa. Como não variamos controladamente o estado na entrada – inclusive com variação de fase relativa – não pudemos, ainda, testar melhor a interferência entre as ordens, que pode ser afetada pelos ângulos de incidência na calcita. Como prova de princípio, por enquanto, percebemos que a proposta é factível e promissora; principalmente, mostra que a técnica de bloqueio está funcionando, embora com um ruído que provavelmente pode ser reduzido. A maior conclusão é, então, que apesar de algumas discrepâncias, se o alinhamento for refinado, mesmo com um modulador não fabricado para o comprimento de onda utilizado, a nossa proposta deve apresentar bons resultados futuramente.

Parte III

Conclusão

7 Conclusões e perspectivas

7.1 Conclusão

Nesse trabalho nos endereçamos a tarefa de realizar transformações de estados automatizadas, com possibilidades de realizar operações bastante gerais e controladas em qudits fotônicos espaciais. Nossa intenção era fazê-lo de modo a sermos capazes de utilizar esse esquema para realizar medições sequenciais. Como visto ao longo do trabalho, nossa proposta permite realizar essa tarefa, de maneira ainda a ser bastante explorada: cada função periódica de fase corresponde a coeficientes de Fourier que determinam a transformação aplicada. Analisamos algumas dessas possibilidades, em módulo e fase, e vimos que resultados preliminares são animadores: apesar de algumas correções e testes ainda serem necessários, corroboram a hipótese de que nossa implementação está próxima das condições da proposta e, principalmente, de que essa funciona até os limites testados.

Também discutimos maneiras de visualizar as transformações e em que condições elas são aproximações de rotações, projeções (ou soma convexa dessas), e quais os elementos de POVM não projetivos são obtidos dependendo da rede utilizada. Mostramos que é possível implementar mapas que não são apenas compostos por elementos nulos fora da diagonal. Com essa discussão abrem-se muitas portas para aplicações futuras.

Com esse estudo, ainda em fase inicial, esperamos estar constuindo uma nova maneira – prática e automatizada – de realizar transformação bastante gerais em estados quânticos fotônicos, assim como ter delineado alguns de seus limites e possibilidades, ainda por explorar.

7.2 Perspectivas

As perspectivas mais imediatas são: realizar a medição das fases relativas das ordens para as redes já estudadas, caracterizando completamente as redes apresentadas. Além disso, descobrir a origem do ruído detectado pela câmera e eliminá-lo e após essa etapa, realizar mais projeções e permutações. Para tanto, será de grande interesse utilizar mais um modulador de fase, possivelmente de transmissão, para preparar diferentes estados de entrada, testando as operações implementadas.

Redes ainda não consideradas podem ser estudadas para ampliar as possibilidades de transformações; uma maneira de encontrar as redes que devem ser aplicadas, dada a operação desejada, é uma mudança de ótica e rumo interessantes, que devem fortalecer esse método e facilitar aplicações.

Após realizar o que foi citado no início dessa seção – já que se trata do término dos testes da proposta –, utilizar o método em aplicações diversas, como algumas portas lógicas ou simulações; a possibilidade de implementar mapas com elementos na diagonal abre uma gama grande de possibilidades. Um exemplo vem de [27], em que foram realizadas simulações de dinâmicas sem saltos em sistemas de 3 níveis em contato com um reservatório térmico; nossa proposta pode ser útil para realizar a simulação da dinâmica com saltos. A utilização desse aparato para estados de fótons gêmeos, oriundos de conversão paramétrica descendente espontânea, também é instigante, já que permite utilizar esse arranjo em partes de estados emaranhados, por exemplo. Uma aplicação claramente importante – e a motivação inicial de nosso trabalho – é realizar medições sequenciais com esse arranjo, que foram a motivação do trabalho e trazem consigo mais possibilidades de aplicação e estudos de fundamento de teoria quântica.

Referências

- [1] Eisberg, Robert Martin e Robert Resnick: *Quantum physics of atoms, molecules, solids, nuclei and particles; 2nd ed.* Wiley, New York, NY, 1985. <https://cds.cern.ch/record/105889>. Citado na página 13.
- [2] Dürr, Detlef e Stefan Teufel: *Bohmian Mechanics: The Physics and Mathematics of Quantum Theory.* Springer, 2009. Citado na página 13.
- [3] Griffiths, Robert B.: *Consistent Quantum Theory.* Cambridge University Press, 2003. Citado na página 13.
- [4] Jr., Osvaldo F Pessoa, Olival Freire Jr e Joan Bromberg: *Teoria Quântica: estudos históricos e implicações culturais.* eduepb, 2011. Citado na página 13.
- [5] Einstein, A., B. Podolsky e N. Rosen: *Can Quantum-Mechanical Description of Physical Reality Be Considered Complete?* Phys. Rev., 47:777–780, May 1935. Citado na página 13.
- [6] Bohm, D, B.J Hiley e P.N Kaloyerou: *An ontological basis for the quantum theory.* Physics Reports, 144(6):321 – 375, 1987, ISSN 0370-1573. Citado na página 13.
- [7] Bell, John S: *On the einstein podolsky rosen paradox,* 1964. Citado na página 13.
- [8] Ballentine, Leslie E: *Quantum mechanics: a modern development; 2nd ed.* World Scientific, Hackensack, NJ, 2015. <https://cds.cern.ch/record/1647211>. Citado 2 vezes nas páginas 13 e 79.
- [9] Griffiths, David J.: *Introduction to Quantum Mechanics.* Prentice-Hall, 2005. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 86.
- [10] Cohen-Tannoudji, Claude: *Quantum Mechanics - Vol 1.* John Wiley, 1977. Citado na página 14.
- [11] Bergou, Janos, Edgar Feldman e Mark Hillery: *Extracting Information from a Qubit by Multiple Observers: Toward a Theory of Sequential State Discrimination.* Phys. Rev. Lett., 111:100501, Sep 2013. Citado na página 14.
- [12] Liang, Yeong Cherng, Robert W. Spekkens e Howard M. Wiseman: *Specker’s parable of the overprotective seer: A road to contextuality, nonlocality and complementarity.* Physics Reports, 506(1–2):1 – 39, 2011, ISSN 0370-1573. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 18.

- [13] Anastopoulos, Charis: *Classical Versus Quantum Probability in Sequential Measurements*. Foundations of Physics, 36(11):1601–1661, 2006, ISSN 1572-9516. Citado na página 14.
- [14] Spekkens, R. W.: *Contextuality for preparations, transformations, and unsharp measurements*. Phys. Rev. A, 71:052108, May 2005. Citado 2 vezes nas páginas 14 e 18.
- [15] Amaral, Bárbara, Alexandre Bavares Baraviera e Marcelo O. Terra Cunha: *Mecânica Quântica para Matemáticos em Formação*. IMPA, 2011. Citado 8 vezes nas páginas 14, 18, 79, 80, 92, 95, 96 e 97.
- [16] Reina, John H., Cristian E. Susa e Felipe F. Fanchini: *Extracting Information from Qubit-Environment Correlations*. Scientific Reports, 2014. Citado na página 14.
- [17] Coles, Patrick J. e Marco Piani: *Complementary sequential measurements generate entanglement*. Phys. Rev. A, 89:010302, Jan 2014. Citado na página 14.
- [18] Bassa, Humairah, Sandeep K. Goyal, Sujit K. Choudhary, Hermann Uys, Lajos Diósi e Thomas Konrad: *Process tomography via sequential measurements on a single quantum system*. Phys. Rev. A, 92:032102, Sep 2015. Citado na página 14.
- [19] Amselem, Elias: *Dynamics of Quantum Correlations with photons*. Tese de Doutorado, University of Stockholm, 2011. Citado na página 15.
- [20] Englert, Berthold Georg, Christian Kurtsiefer e Harald Weinfurter: *Universal unitary gate for single-photon two-qubit states*. Phys. Rev. A, 63:032303, Feb 2001. Citado na página 16.
- [21] Neves, Leonardo, G. Lima, J. G. Aguirre Gómez, C. H. Monken, C. Saavedra e S. Pádua: *Generation of Entangled States of Qudits using Twin Photons*. Phys. Rev. Lett., 94:100501, Mar 2005. Citado na página 16.
- [22] Neves, Leonardo: *Estados emaranhados de Qubits e Qudits criados com pares de fótons produzidos na conversão paramétrica descendente*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2006. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 146.
- [23] Lima, G., A. Vargas, L. Neves, R. Guzmán e C. Saavedra: *Manipulating spatial qudit states with programmable optical devices*. Opt. Express, 17(13):10688–10696, Jun 2009. <http://www.opticsexpress.org/abstract.cfm?URI=oe-17-13-10688>. Citado na página 16.
- [24] Lima, G., L. Neves, R. Guzmán, E. S. Gómez, W. A. T. Nogueira, A. Delgado, A. Vargas e C. Saavedra: *Experimental quantum tomography of photonic qudits via*

- mutually unbiased basis*. Opt. Express, 19(4):3542–3552, Feb 2011. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- [25] Pimenta, W. M., B. Marques, T. O. Maciel, R. O. Vianna, A. Delgado, C. Saavedra e S. Pádua: *Minimum tomography of two entangled qutrits using local measurements of one-qutrit symmetric informationally complete positive operator-valued measure*. Phys. Rev. A, 88:012112, Jul 2013. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- [26] Gutiérrez-Esparza, AJ, WM Pimenta, B Marques, AA Matoso, J Sperling, W Vogel e S Pádua: *Detection of nonlocal superpositions*. Physical Review A, 90(3):032328, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 16 e 17.
- [27] Teixeira, Breno Marques Gonçalves: *Modulador espacial de luz para processos quânticos: algoritmo de Deutsch, concentração de emaranhamento e simulação de sistemas quânticos abertos*. Tese de Doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, Brasil, 2013. Citado 2 vezes nas páginas 17 e 130.
- [28] Cabello, Adán, Elias Amsellem, Kate Blanchfield, Mohamed Bourennane e Ingemar Bengtsson: *Proposed experiments of qutrit state-independent contextuality and two-qutrit contextuality-based nonlocality*. Phys. Rev. A, 85:032108, Mar 2012. Citado 4 vezes nas páginas 18, 19, 20 e 21.
- [29] Peres, Asher: *Quantum theory : concepts and methods*. Kluwer Dordrecht, Dordrecht, 1995, ISBN 0792336321; 9780792336327. Citado na página 18.
- [30] Santos, Mateus Araújo: *Quantum Realism and Quantum Surrealism*. Tese de Mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2012. Citado na página 18.
- [31] Solís-Prosser, M. A., A. Arias, J. J. M. Varga, L. Rebón, S. Ledesma, C. Iemmi e L. Neves: *Preparing arbitrary pure states of spatial qudits with a single phase-only spatial light modulator*. Opt. Lett., 38(22):4762–4765, Nov 2013. Citado 4 vezes nas páginas 22, 23, 34 e 153.
- [32] Siegman, A. E.: *Lasers*. University Science Books, 1986. Citado 8 vezes nas páginas 29, 30, 31, 32, 33, 57, 141 e 142.
- [33] Emil Wolf, Leonard Mandel e: *Optical Coherence and Quantum Optics*. Cambridge University Press, 1995. Citado 4 vezes nas páginas 34, 41, 146 e 155.
- [34] Fabre, Claude, Alain Aspect e Gilbert Grynberg: *Introduction to Quantum Optics*. Cambridge University Press, 2010. Citado na página 34.
- [35] Walborn, S.P., C.H. Monken, S. Pádua e P.H. Souto Ribeiro: *Spatial correlations in parametric down-conversion*. Physics Reports, 495(4-5):87 – 139, 2010, ISSN 0370-1573. Citado na página 41.

-
- [36] Pommet, Drew A., M. G. Moharam e Eric B. Grann: *Limits of scalar diffraction theory for diffractive phase elements*. J. Opt. Soc. Am. A, 11(6):1827–1834, Jun 1994. Citado na página 42.
- [37] Goodman, Joseph W.: *Introduction to Fourier Optics*. The McGraw-Hill Companies, 1996. Citado 10 vezes nas páginas 45, 136, 137, 138, 141, 142, 144, 146, 147 e 152.
- [38] Nielsen: *Quantum Information and Quantum Computation*. Cambridge, 2011. Citado na página 79.
- [39] Chefles, Anthony: *Deterministic quantum state transformations*. Physics Letters A, 270(1–2):14 – 19, 2000, ISSN 0375-9601. Citado na página 80.
- [40] Fowles, Grant R.: *Introduction to Modern Optics*. Rinehart and Winston, 1975. Citado 3 vezes nas páginas 99, 154 e 156.
- [41] Goldstein, Dennis: *Polarized light*. CRC PRESS, 2010. Citado na página 99.
- [42] Hamamatsu: *Phase Only SPatial LIght MOdulator- handbook*. Citado 2 vezes nas páginas 102 e 106.
- [43] Zhang, Zichen e Zheng an Daping Chu You: *Fundamentals of phase-only liquid crystal on silicon (LCOS) devices*. Light: Science and Applications, 3, 2014. Citado 2 vezes nas páginas 152 e 153.
- [44] Zangwill, Andrew: *Modern ELetrodynamics*. Cambridge UNiversity Press, 2012. Citado na página 154.

Apêndices

APÊNDICE A – Ótica de Fourier

Alguns elementos de ótica de Fourier serão explicados e/ou explicitados nesse apêndice. Os detalhes podem ser encontrados principalmente em [37]. O objetivo é mostrar quais suposições e aproximações estão sendo feitas para os principais resultados utilizados neste trabalho, assim como derivar alguns deles, com o mínimo de detalhe.

Falaremos, nesse momento, de ondas eletromagnéticas propagantes, ou seja, que são solução das equações de ondas advindas das equações de Maxwell,

$$\left. \begin{array}{l} \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0; \\ \vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} = 0; \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}; \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \vec{\nabla}^2 \vec{E} - \frac{\epsilon}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \\ \vec{\nabla}^2 \vec{H} - \frac{\epsilon}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \quad (\text{A.1})$$

Supusemos que o campo se propaga em um meio dielétrico linear, de constante dielétrica ϵ e permeabilidade magnética μ ; esse meio é isotrópico (ou seja, não atua de maneira diferente para E_x, E_y ou E_z), homogêneo ($\epsilon = cte$), não-dispersivo (ϵ não depende de ω) e sem cargas ou correntes livres.

A.1 Aproximação escalar

Nas equações de onda acima, para \vec{E} e \vec{H} , pode-se perceber que todas as componentes de cada campo seguem a mesma equação, sem acoplamentos. Podemos, assim, reduzi-las a apenas uma equação para cada componente do campo

$$\vec{\nabla}^2 E(x, y, z, t) - \frac{\epsilon}{\epsilon_0 c^2} \frac{\partial^2 E(x, y, z, t)}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{A.2})$$

Essa é a chamada aproximação escalar, ela é válida nas condições acima; no caso de difrações é válida desde que o acoplamento adicionado pelo contorno da abertura possa ser desprezado. Assim, em um meio com essas características, ou no caso de um campo com polarização linear que não seja capaz de “sentir” as anisotropias do sistema ótico, consideraremos essa aproximação válida.

A.2 Propagação: campo e espectro angular

Essa exposição está dividida em duas maneiras de examinar a propagação: a primeira, diz respeito ao campo em si, dado por $U(x, y, z)$ acima. A segunda é uma outra maneira de olhar, relacionada com decomposição em ondas planas, que propagam com ângulos diferentes com relação ao eixo de propagação, chamada de Espectro Angular. Ambas as maneiras serão úteis e necessárias.

- Campo

Dentro do escopo da teoria escalar, queremos agora determinar o campo em um plano (x, y, d) , considerado após propagação por uma distância d , a partir de um campo conhecido em um determinado plano $z = 0$, de coordenadas $(x', y', 0)$. Supondo que o campo seja aproximadamente monocromático, podemos escrevê-lo como $E(x', y', 0, t) = U_0(x', y')e^{-i\omega t}$ (e analogamente $\forall z$). Substituindo esse campo na equação (A.2), obtemos a chamada equação de Helmholtz

$$[\vec{\nabla}^2 + k^2]U = 0, \tag{A.3}$$

em que o número de onda no meio é dado por $k = \frac{c\omega}{c^2}$. Para chegarmos ao objeto de nosso desejo ($U_f(x, y)$ em função de $U_0(x', y')$), é interessante visualizar a questão da maneira explicitada na figura (86).

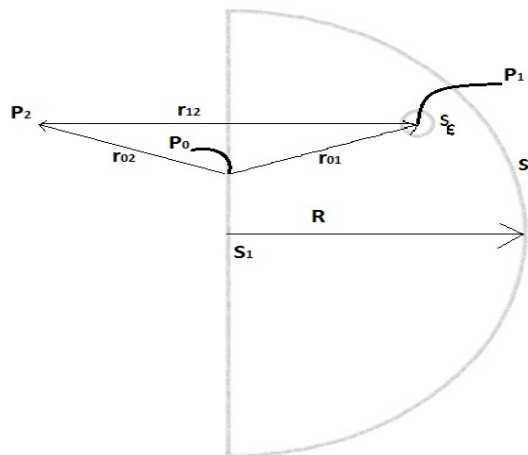


Figura 86 – Superfícies envolvidas no uso do teorema de Green para obter a variação de U com a propagação.

Estamos considerando uma superfície com uma parte plana S_1 , que consideraremos se tratar de uma parte do plano $(x', y', 0)$. S_2 é uma capa esférica de raio R e S_ϵ é uma esfera de raio ϵ . Agora, queremos encontrar o campo no ponto $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ (centro de S_ϵ) a partir do campo na superfície S_1 . Para isso [37], será utilizado o

Teorema 1 (Green). *Sejam G e U duas funções de \mathcal{R}^3 a valores complexos, com primeiras e segundas derivadas contínuas numa superfície \mathcal{S} que engloba um volume \mathcal{V} , então a seguinte relação é válida:*

$$\int_{\mathcal{V}} (U \vec{\nabla}^2 G - G \vec{\nabla}^2 U) dV = \int_{\mathcal{S}} (U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n}) dS, \quad (\text{A.4})$$

onde n é o vetor normal à superfície em cada ponto.

U continua sendo aquilo que desejamos, e G será nossa função auxiliar – que encontrada adequadamente, torna esse teorema bastante útil.

Não vamos fazer o cálculo de maneira detalhada, mas é importante explicitar as aproximações consideradas e alguns passos essenciais (detalhes em [37]). Primeiro, se G satisfizer a equação de Helmholtz, a integral sobre o volume vai a zero. Assim,

$$\int_{\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 + \mathcal{S}_\epsilon} (U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n}) dS = 0 \quad (\text{A.5})$$

Escolhe-se G como a soma de ondas esféricas advindas dos pontos P_1 e $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ (simétrico ao ponto P_1 em relação ao plano $(x', y', 0)$, vide (fig 86)). Considerando agora que a distância do ponto P_1 ao plano \mathcal{S}_1 é muito maior que um comprimento de onda, tem-se

$$\left\{ \begin{array}{l} G = \frac{\exp[ikr_{01}]}{r_{01}} - \frac{\exp[ikr_{02}]}{r_{02}} ; r_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 + (z_i - z_j)^2} \\ \text{para } P_0 \in \mathcal{S}_\epsilon \Rightarrow G = \frac{\exp[ik\epsilon]}{\epsilon} - \frac{\exp[ikr_{\epsilon 2}]}{r_{\epsilon 2}} \\ \\ \text{para } P_0 \in \mathcal{S}_1, \frac{\partial G}{\partial n}(P_0) = 2 \cos(n, \vec{r}_{01}) \left(ik - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp[ikr_{01}]}{r_{01}} \overset{r_{01} \gg \lambda}{\approx} \\ \Rightarrow \frac{\partial G}{\partial n}(P_0) = 2ik \cos(n, \vec{r}_{01}) \frac{\exp[ikr_{01}]}{r_{01}} \end{array} \right.$$

em que $\cos(n, \vec{r}_{01})$ é o cosseno do ângulo entre os vetores indicados e usamos os fatos que, para $P_0 \in \mathcal{S}_1, r_{01} = r_{02}$ e $\cos(n, \vec{r}_{01}) = -\cos(n, \vec{r}_{02})$. Considerando o limite $\epsilon \rightarrow 0$ e a continuidade de U e de suas derivadas em P_0 , é possível obter:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathcal{S}_\epsilon} (U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n}) dS = 2\pi U(P_1) \quad (\text{A.6})$$

Com a escolha para G e supondo que seja válida a aproximação de radiação de Rayleigh-Sommerfeld para U (essa função decai com a distância pelo menos tão rápido quanto uma onda esférica), podemos descartar a integral na superfície \mathcal{S}_2 , tomando o limite em que $R \rightarrow \infty$ (veja [37], cap 3). Substituindo esses valores em (A.5) e notando que para a função auxiliar escolhida $G(P_0) = 0$ para P_0 em \mathcal{S}_1 , obtém-se

$$U(x_1, y_1, z_1) = \frac{-1}{2\pi} \int_{S_1} U(x, y) \frac{\partial G}{\partial n} dS \stackrel{r_{01} \gg \lambda}{\approx} \frac{-ik}{\pi} \int_{S_1} U(x', y', 0) \cos(n, \vec{r}_{01}) \frac{\exp[ikr_{01}]}{r_{01}} dS \quad (\text{A.7})$$

Essa fórmula pode ser interpretada de maneira bem interessante, como um exemplo do princípio de Huygens, em que cada ponto do plano leva a uma onda esférica, com amplitude dada por $U(x', y', 0)$, mas defasadas de π (fator $-i$).

Pode-se considerar o que o problema, a princípio, foi resolvido. A questão é que a integral acima pode ser bastante difícil de ser resolvida. Assim, na seção seguinte, consideraremos algumas aproximações. Antes disso, vamos considerar outra maneira de resolver a questão, através do chamado espectro angular.

- Espectro angular

Se o campo $U(x', y')$ for uma função da qual se pode extrair a transformada de Fourier ¹ pode-se definir

$$\begin{aligned} A(q_x, q_y; z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x, y, z) e^{-i(q_x x + q_y y)} dx dy \leftrightarrow \\ U(x, y, z) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(q_x, q_y; z) e^{+i(q_x x + q_y y)} dq_x dq_y \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Vê-se que o espectro angular é a amplitude do campo $U_0(x', y')$ na decomposição em ondas planas, cada uma com um momento $\mathbf{q} = (q_x, q_y)$ associado.

Substituindo a equação acima na equação de Helmholtz para U (A.3), obtém-se

$$\frac{d^2}{dz^2} A + (k^2 - q_x^2 - q_y^2) A = 0. \quad (\text{A.9})$$

A solução para essa equação é consideravelmente simples

$$A(q_x, q_y; z) = A(q_x, q_y; 0) e^{iz\sqrt{k^2 - q_x^2 - q_y^2}} \quad (\text{A.10})$$

Assim, sabemos $A(q_x, q_y; d)$ em função de $A(q_x, q_y; 0)$, e para obter o campo final em função do inicial, basta fazer a transformada de Fourier inversa. Alguns comentários sobre a equação para $A(q_x, q_y; d)$: é interessante notar que, se $(k^2 - q_x^2 - q_y^2) > 0$, a raiz é real e o espectro angular (com \mathbf{q} que tornam a raiz real) ganha uma fase relativa ², que depende do ângulo com que se distancia do plano $z = 0$. Entretanto, se $(k^2 - q_x^2 - q_y^2) < 0$,

¹ a princípio, não tem porque imaginar que um campo físico não possa, uma vez que a condição de ser de quadrado integrável e não possuir descontinuidades severas é garantida, respectivamente, pela finitude da energia do campo e por este ser solução das equações de Maxwell

² relativa aos A 's com diferentes \mathbf{q} 's

a raiz é imaginária, e o espectro angular decai exponencialmente, não contribuindo para o campo após uma distância de propagação considerável. As ondas planas com os momentos satisfazendo $(k^2 - q_x^2 - q_y^2) < 0$ são chamadas de ondas evanescentes, e serão desconsideradas nos cálculos, o que leva a seguinte solução para o campo:

$$U(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} A(q_x, q_y; z) e^{+i(q_x x + q_y y)} \mathcal{B}_{(k)} dq_x dq_y, \quad (\text{A.11})$$

em que $\mathcal{B}_{(r)}$ é a função que assume valor 1 para todos os valores das variáveis que estejam dentro do círculo (fronteira inclusive) de raio r e 0 para os outros – o que exclui as ondas evanescentes. Novamente, a integral que impede a utilização de ondas evanescentes e com a raiz na equação acima pode ser de difícil execução, o que nos levará a avaliar aproximações.

As duas estratégias para obter o campo após propagação de uma distância d podem ser exemplificadas na figura (87).

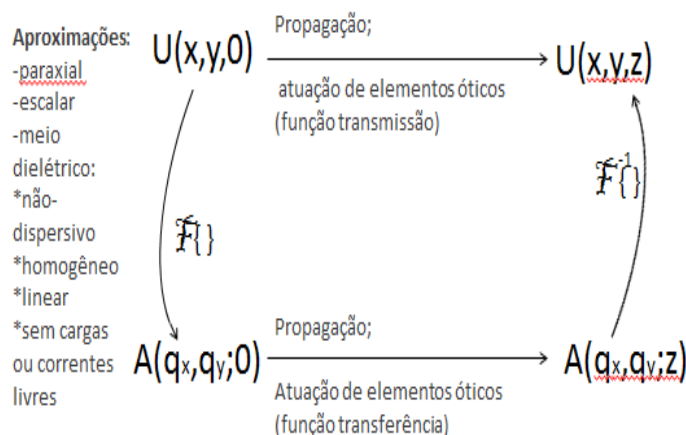


Figura 87 – Diagrama para representar os métodos apresentados acima, e as aproximações principais consideradas.

A.2.1 Aproximação de Fresnel ou paraxial

A ideia inicial é realizar aproximações para a integral (A.11) ou para (A.10).

- Campo

A aproximação é a seguinte: o cosseno, na integral é substituído por 1, enquanto que o denominador da onda esférica advinda da função auxiliar é aproximado por z . Estamos num regime em que a região de observação está próxima ao eixo \ddagger . Essa aproximação, entretanto, não pode ser feita para as fases, onde se utiliza uma expansão de Taylor e utiliza-se apenas o primeiro termo;

$$r_{01} = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} \approx z \left[1 + \left(\frac{1}{2} \frac{(x - x')^2}{z} \right) + \left(\frac{1}{2} \frac{(y - y')^2}{z} \right) \right] \quad (\text{A.12})$$

Isso significa, de fato, substituir frentes de ondas esféricas (fases dadas pela raiz) para frentes de ondas parabólicas (fases quadráticas). Com essas substituições, chegamos a

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i2z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(x', y', 0) e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)} e^{\frac{ik}{2z}(xx'+yy')} dx' dy', \quad (\text{A.13})$$

Pode-se ver que o campo no plano $z = d$ é, a parte de uma fase global e uma constante, a transformada de Fourier do campo de entrada $U_0(x', y')$ multiplicado por uma fase quadrática: $e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}$. Explicitando essa interpretação, podemos escrever

$$U(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i2z} e^{\frac{ik}{2z}(x^2+y^2)} \mathcal{F}\{U(x', y', 0) e^{\frac{ik}{2z}(x'^2+y'^2)}\} \left(\frac{kx}{2z}, \frac{ky}{2z} \right), \quad (\text{A.14})$$

- Espectro Angular

A aproximação de Fresnel para o espectro angular é semelhante, onde podemos substituir a raiz, na equação (A.10), pela mesma aproximação quadrática,

$$\begin{aligned} z \sqrt{k^2 - q_x^2 + q_y^2} &\approx z \left(k - \frac{q_x^2}{2} - \frac{q_y^2}{2} \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow A(q_x, q_y; z) &= e^{ikz} A(q_x, q_y; 0) e^{-i\frac{z}{2}(q_x^2+q_y^2)} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

que é válida para valores pequenos de $|\mathbf{q}|^2$. Pela interpretação de ondas planas dada acima, pode-se ver que essa aproximação é acurada para pequenos valores de momento transversal, ou seja, para *pequenos ângulos*. Por esse motivo, é também chamada de aproximação paraxial. Em contrapartida à aproximação de Fraunhofer, que será vista na seção seguinte, a aproximação de Fresnel também é chamada de aproximação de campo próximo. É importante notar que colocamos diretamente, aqui, a aproximação da raiz em (A.15), o que está correto. Em [37], entretanto, utiliza-se a aproximação (A.14) e pode-se ver, através da relação entre A e U , o impacto disto em A (que é aproximar a raiz como em (A.15)).

A.2.1.1 Validade da aproximação de Fresnel e regiões de interesse

Nessa parte, faremos uma exposição das suposições e dos resultados a respeito da validade da aproximação de Fresnel obtida na sub-seção anterior. A discussão aprofundada e a obtenção dos resultados pode ser encontrada na referência [32].

Antes de iniciarmos, entretanto, vale lembrar que falamos em aproximação paraxial de duas formas neste trabalho: através da equação diferencial, na seção (2.1) e através da integral (A.14) nessa seção. É importante saber que ambas são equivalentes (detalhes em [32]).

A respeito de sua validade, supondo uma decomposição do feixe em ondas planas, a conclusão de [32] é: o feixe não deve ter componentes muito significativas com momento que faça um ângulo muito grande com o eixo de propagação (\mathbf{z} , no nosso caso). Um limite razoável é que o ângulo máximo de componentes com coeficientes não muito altos seja de $\theta \approx 30^\circ$. Siegman diz [32]:

[...] the paraxial or Fresnel approximation is a physical property of the optical beam, not a mathematical property of the Huygens-Fresnel [equação (A.14)] formulation. The paraxial wave equation [...] and the Huygens-Fresnel formulation can be applied [...] if the optical beam itself is truly paraxial.

Para feixes gaussianos, isso significa que a divergência não pode ser muito alta, o que implica que a cintura não pode ser pequena demais. Se assim for, é importante corrigi-la. Métodos para isso, usando lentes, são encontradas na mesma referência.

A conclusão, então, é que se trata de uma ótima aproximação para pequenos ângulos, valendo melhor para distâncias grandes de observação e sendo acurada para regiões de z muito menores que aquela bem aproximada pela aproximação de Fraunhofer, desde que o ângulo de observação seja restrito.

Sendo (A.14) válida e com algum U_0 que varie lentamente ³, [37] conclui que a integral em cada ponto (x, y) no plano de observação $z = L$ recebe contribuições muito mais importantes de apenas uma parte do plano – e portanto do campo de entrada U_0 . Suponha então, que o ponto de observação seja (x_1, y_1, d) . Essa região é dada por um quadrado de lado $4\sqrt{\lambda L}$ no plano $z = 0$, centrado no ponto $(x' = x_1, y' = y_1)$. Ou seja

$$(x', y') \in \text{quadrado, se } (x', y') \in \{x_1 \pm 2\sqrt{\lambda z}; y_1 \pm 2\sqrt{\lambda z}\} \quad (\text{A.16})$$

Isso significa que, pro caso de feixes gaussianos com picos separados por uma distância d e de tamanho ω , um feixe não interferirá substancialmente no outro desde que o quadrado acima, centrado em um ponto do feixe (digamos a $\sqrt{2}\omega$ do pico) não contenha contribuição relevante do mesmo ponto do outro feixe. Nesse caso, o tamanho do quadrado pode ser, no máximo, $d - \sqrt{2}\omega$. Ou seja

³ como é o caso da parte em \mathbf{x} dos feixes gaussianos usados em nossa proposta

$$z < \bar{z} = \frac{(d - \sqrt{2}\omega)^2}{16\lambda}. \quad (\text{A.17})$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{se } (d - \sqrt{2}\omega) = 2\text{mm}, \\ \lambda = 633\text{nm} \end{array} \right\} \Rightarrow \text{então } \bar{z} \approx 79\text{cm} \quad (\text{A.18})$$

Assim, sabe-se que, nessa estimativa “conservadora”, durante essa distância \bar{z} não há interferência relevante entre os feixes (vide seção (3.6)).

Vale notar que, de fato, essa contribuição deste quadrado à integral (A.14) – restrita aos U_0 com variações lentas – é compatível com a validade para *pequenos ângulos*. O quadrado aumenta com \sqrt{z} , o que significa que o ângulo da região que contribui, proporcional à $\frac{\sqrt{z}}{z}$, é cada vez menor, quanto maior o z .

A.2.2 Aproximação de Fraunhofer

É possível realizar ainda mais aproximações na integral (A.14). A aproximação considerada a seguir, é definida como aproximação de Fraunhofer, e considera que o plano de observação (definido por z), é tão longe que se pode desprezar as fases quadráticas na integral. Ou seja,

$$e^{-i\frac{k}{2z}(x'^2 + y'^2)} \approx 1; \Rightarrow$$

$$U_F(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \int U(x', y', 0) e^{-i\frac{k}{2z}(xx' + yy')} dx' dy' \quad (\text{A.19})$$

Em notação operacional,

$$U_F(x, y, z) = \frac{e^{ikz}}{i\lambda z} e^{i\frac{k}{2z}(x^2 + y^2)} \mathcal{F}\{U(x', y', 0)\}(x, y) \quad (\text{A.20})$$

Pode-se ver que, a despeito da multiplicação pelas fases quadrática e global – que na intensidade se anulam –, **o campo de saída é a transformada de Fourier do campo de entrada** e, a princípio, é válido para $z \rightarrow \infty$. Abaixo discutiremos em mais detalhes o domínio de validade dessa aproximação. Por ser válida para distâncias de propagação muito grandes, essa aproximação também é chamada de aproximação de campo distante.

A.2.2.1 Validade da aproximação de Fraunhofer

A princípio, essa aproximação será válida se a fase quadrática no integrando de (A.14) for válida (o que significa impor mais condições além da de observação de pequenos ângulos), ou seja, se

$$z \gg \frac{k(x'^2 + y'^2)_{max}}{2}, \quad (A.21)$$

onde o subscrito *max* indica o maior valor de (x', y') que se considerará que o campo tem valor não-desprezível. No caso de aberturas, no plano $z = 0$, esse valor está relacionado com o tamanho da abertura.

A condição (A.21) pode ser considerada uma condição bastante restrita. Isso pode ser visto pelos seguintes exemplos:

$$\left. \begin{aligned} y' = x' = 1\text{cm} \\ k = \frac{2\pi}{633}\text{nm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z \gg 10^3\text{m} \quad (A.22)$$

$$\left. \begin{aligned} y' = x' = 1\text{mm} \\ k = \frac{2\pi}{633}\text{nm} \end{aligned} \right\} \Rightarrow z \gg 10\text{m} \quad (A.23)$$

Entretanto, é possível atingir essa aproximação sem exigir tamanha restrição. A aproximação de Fraunhofer é baseada na validade da condição

$$e^{i\frac{k}{2z}(x^2+y^2)} = \cos\left(\frac{k}{2z}D^2\right) + i \sin\left(\frac{k}{2z}D^2\right) \approx 1 \quad (A.24)$$

onde $D = x^2 + y^2$ é um comprimento característico do campo no plano $(x', y', 0)$, como o tamanho da abertura dito anteriormente, ou alguma distância em que o campo já possa ser considerado desprezível. Na figura (88), um gráfico para a função cosseno acima:

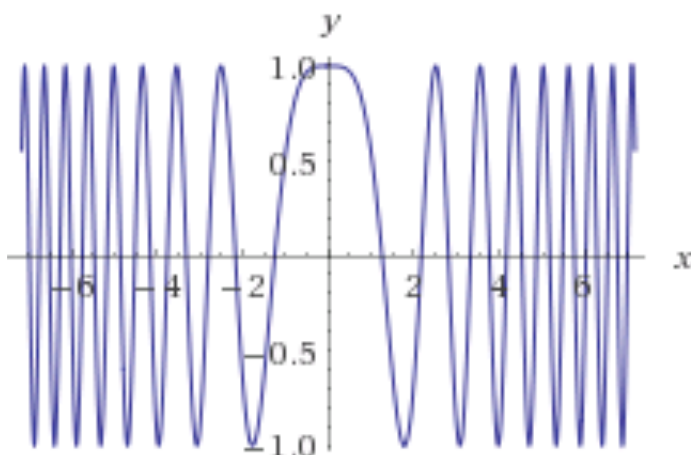


Figura 88 – Gráfico de $y = \cos(x^2)$.

vemos que, de fato, para $x = \frac{k}{2\pi z}D^2 = \frac{1}{2}$, essa aproximação é adequada. Mas isso implica numa outra condição para a aproximação de Fraunhofer ser considerada válida [37],

$$z > z^* = \frac{2D^2}{\lambda}, \quad (\text{A.25})$$

que é chamada fórmula do designer de antena. Essa condição, para feixes gaussianos, está extremamente relacionada com o comprimento de Rayleigh, z_R . Se considerarmos $D = \sqrt{2\pi}\omega_0$, o que corresponde a uma abertura que permite a passagem de mais de 90% da intensidade total, $z^* = z_R$. Essa relação pode ser entendida supondo uma “abertura” no plano em que $\omega = \omega_0$ e que permite a passagem do feixe quase inteiro, como visto em (vide (2.1)), permanecerá colimado por pelo menos um comprimento de Rayleigh. Nesse sentido, é importante ter em mente que a desigualdade precisa ser obedecida de maneira certa, para que se esteja no campo distante: o suficientemente longe do comportamento de feixe colimado para não se estar também na região de transição entre os dois (vide figura (7) e (2.14)).

Exemplos para essa condição (fórmula do designer de antena) são os seguintes:

$$\left. \begin{array}{l} D = 1\text{mm}, \\ \lambda = 633\text{nm} \end{array} \right\} \Rightarrow z > \approx 3.3\text{m}$$

$$\left. \begin{array}{l} D = 0.1\text{mm}, \\ \lambda = 633\text{nm} \end{array} \right\} \Rightarrow z > \approx 0.03\text{m}$$

Podemos ver, portanto, que a condição dada pela fórmula do designer de antena é extremamente mais fácil de ser obedecida.

APÊNDICE B – Atuação de elementos óticos

Nesse capítulo serão estudados elementos óticos, sem maior nível de detalhe, e como eles atuam sobre feixes. Sempre que possível, utilizaremos a aproximação escalar. Neste caso, consideraremos que a atuação da lente se dá através de uma função transmissão. No caso dos demais elementos, o caráter vetorial do campo deverá ser levado em conta. Ainda assim, analisaremos como esses elementos óticos atuam em cada parte do campo em sua decomposição nas componentes \hat{h} e \hat{v} . A propagação, entretanto, será considerada de maneira independente, o que implica numa aproximação. Para detalhes sobre essa aproximação, ver referência [33]. No caso do SLM, a mesma ideia é aplicada, embora a função transmissão seja a identidade para o caso de polarizações verticais; para a polarização horizontal se trata de uma função que apenas aplique uma fase para o campo, em cada pixel do SLM.

B.1 Lentes

As referências aqui sugeridas são [37] e, para uma revisão mais pragmática, [22]. Consideraremos que as lentes utilizadas são um elemento de material linear, isotrópico e não-dispersivo. Assim, se trata de um caso em que a teoria escalar se aplica. Além disso, suporemos que se trata de uma lente delgada, o que nos permite escrever que esta se encontra em um plano, $z = z_L$ ¹. O campo incide na lente, como $U_{entrada}(x, y, z_L)$, e é modificado, resultando em $U_{saida}(x, y, z_L)$. A modificação é da forma

$$U(x, y)_{saida}(x, y, z_L) = U_{entrada}(x, y, z_L)t(x, y); \quad t(x, y) = e^{if(x, y)} \quad (\text{B.1})$$

Isto porque consideramos que a lente não difrata o campo e é delgada, de modo que o fenômeno $U_{saida} \neq 0$ não pode ocorrer onde $U_{entrada} = 0$ ². Além disso, o formato para $t(x, y)$ garante algo mais forte (a lente não absorve energia): $U_{saida} = 0$ só ocorre se $U_{entrada} = 0$ ³.

¹ isso significa que não consideraremos propagação dentro da lente, ou seja, o campo de saída está no mesmo plano que o de entrada

² lentes divergentes, a princípio fariam isso. Mas existe a sutileza de que, em lentes delgadas, apenas fases corretas são dadas para que o feixe passe a divergir após propagar

³ a contradição aparente para a lente divergente, no caso acima aqui surge para a lente convergente. A solução, entretanto, é a mesma

Basta, então, descobrirmos a função transmissão da lente esférica, que teremos seu efeito sobre o campo. Na figura (89), há informações importantes para entender a função transmissão que será dada adiante.

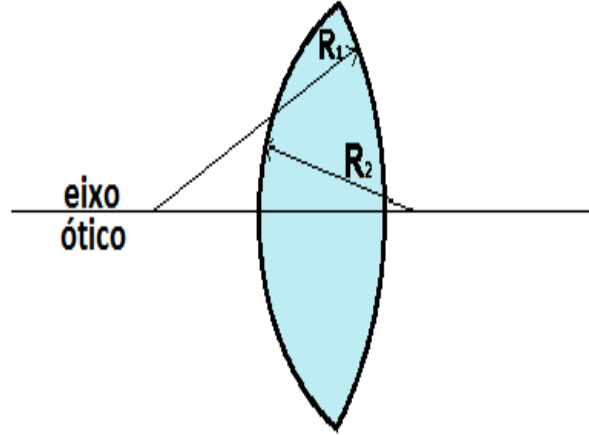


Figura 89 – Lente com alguns parâmetros importantes: R_1 e R_2 . Valores negativos são curvaturas inversas: lentes divergentes.

Consideraremos que a lente possui faces esféricas de raios R_1 e R_2 , e é constituída de um material de índice de refração n e que seu eixo ótico está sobre o eixo z , pode-se concluir [37] que

$$t_L(x, y) = \exp \left[ik(n-1) \left[\Delta + R_2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_2^2}} \right) - R_1 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{x^2 + y^2}{R_1^2}} \right) \right] \right] \quad (\text{B.2})$$

Isso, entretanto, pode ser simplificado, através de uma expansão binomial da raiz, semelhante à feita na seção anterior, donde se obtém

$$t_L(x, y) = \exp \left[i \left(\Delta + \frac{k}{2f} (x^2 + y^2) \right) \right]; \quad \frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{B.3})$$

Para que essa aproximação seja válida, deve-se considerar que as faces da lente podem ser aproximadas por parábolas, ou seja, o campo não seja muito extenso longe do centro da lente. Essa aproximação, por isso, é chamada de *aproximação paraxial para a lente*.

Novamente, pode-se considerar a atuação no campo ou no espectro angular. Assim, considerando o espectro angular, temos $A_{entrada}(x, y, z_L)$ que, após ser modificado pela lente, torna-se $A_{saida}(x, y, z_L)$.

$$\begin{aligned}
 A_{entrada}(q_x, q_y; z_L) &= \mathcal{F}\{U_{entrada}(x, y, z_L)\} \text{ e } A_{saida}(q_x, q_y; z_L) = \mathcal{F}\{U_{saida}(x, y, z_L)\} \\
 \Rightarrow A_{saida}(q_x, q_y; z_L) &= \mathcal{F}\{U_{entrada}(x, y, z_L)t(x, y)\}
 \end{aligned} \tag{B.4}$$

Evocando o teorema da convolução, pode-se explicitar $A_{saida}(q_x, q_y, z_L)$ da seguinte maneira

$$A_{saida}(q'_x, q'_y; z_L) = A_{entrada}(q_x, q_y, z_L) * T(q_x, q_y) \tag{B.5}$$

Basta então encontrar a transformada de Fourier da função transmissão da lente, que por ser uma gaussiana em (x, y) é também gaussiana em (q_x, q_y) :

$$T(q_x, q_y) = -\frac{if}{2k} e^{i\frac{f}{2k}(q_x^2 + q_y^2)} \tag{B.6}$$

É interessante notar que, se for utilizada uma lente cilíndrica, na direção de curvatura da lente (\mathbf{x} , por exemplo), a parte relativa a essa dimensão é análoga (sofrendo transformação de t), enquanto que para a outra, ocorre apenas propagação (com um caminho ótico ligeiramente maior, devido ao índice de refração). Assim, para a lente cilíndrica,

$$t_{LC}(x, y) = \exp \left[i \left(\Delta + \frac{k}{2f}(x^2) \right) \right] \tag{B.7}$$

e a transformada da função transmissão é

$$T(q_x) = -\frac{if}{2k} e^{i\frac{f}{2k}q_x^2} \tag{B.8}$$

B.1.1 algumas configurações especiais

Configuração f-f

Considerando que uma lente encontra-se a uma distância focal de um plano onde se conhece $U_0(x', y', 0)$, e observar-se-á o campo a uma distância focal após a lente, podemos calcular o campo final através da aproximação de Fresnel descrita acima. A figura (93) estabelece a notação, plano a plano, a ser utilizada, assim como expõe a configuração $f - f$.

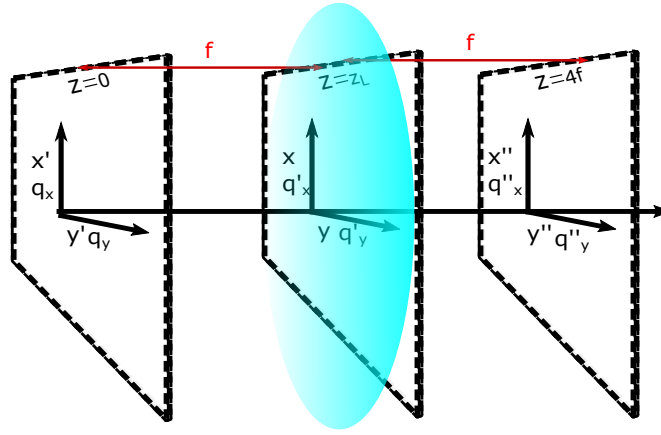


Figura 90 – Esquema para representar a configuração $f - f$ e a notação utilizada.

Primeiro, o espectro angular propagado por uma distância $d = f$ é dado por (A.15)

$$A(q_x, q_y, z = f) = e^{ikf} A(q_x, q_y; 0) e^{-i\frac{f}{2k}(q_x^2 + q_y^2)} \quad (\text{B.9})$$

Então, ao sofrer a atuação da lente,

$$\begin{aligned} A_{saiada}(q'_x, q'_y, z = f) &= e^{ikf} \int A(q_x, q_y; 0) e^{-i\frac{f}{2k}(q_x^2 + q_y^2)} e^{i\frac{f}{2k}((q_x - q'_x)^2 + (q_y - q'_y)^2)} dq_x dq_y \\ &= e^{ikf} \int A(q_x, q_y; 0) e^{i\frac{f}{2k}(q_x^2 + q_y^2 - \frac{f}{k}q_x q'_x - \frac{f}{k}q_y q'_y)} dq_x dq_y \\ &= e^{ikf} \mathcal{F}\{A(q_x, q_y; 0) e^{i\frac{f}{2k}(q_x^2 + q_y^2)}\}(q_x, q_y) \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

O campo, então, é dado por

$$\begin{aligned} U(x, y, f) &= \mathcal{F}^{-1}\{A_{saiada}(q'_x, q'_y, z = f)\}(x, y) = e^{ikf} \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}\{A(q_x, q_y; 0) e^{-i\frac{f}{2k}(q_x^2 + q_y^2)}\}\} \\ &= e^{ikf} \int A(q_x, q_y; 0) e^{i\frac{f}{2k}(q_x^2 + q_y^2)} e^{i[q'_x(\frac{f}{k}q_x - x) + q'_y(\frac{f}{k}q_y - y)]} dq_x dq_y dq'_x dq'_y \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

O espectro angular (B.10) agora é propagado por mais uma distância focal

$$\begin{aligned} A(q'_x, q'_y, z = 2f) &= e^{ikf} A_{saiada}(q'_x, q'_y, z = f) e^{-i\frac{f}{2k}(q_x'^2 + q_y'^2)} \\ &= e^{ikf} \int A(q_x, q_y; 0) e^{i(q_x'^2 + q_y'^2 - \frac{f}{k}q_x q'_x - \frac{f}{k}q_y q'_y)} dq_x dq_y e^{-i\frac{f}{2k}(q_x'^2 + q_y'^2)} \\ &= e^{ikf} \int A(q_x, q_y; 0) e^{i(\frac{f}{k}q_x q'_x - \frac{f}{k}q_y q'_y)} dq_x dq_y \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

E o campo então é dado por

$$\begin{aligned}
 U(x'', y'', z = 2f) &= \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} \int A(q_x, q_y; 0) e^{i[q'_x(x - \frac{f}{k}q_x) + q'_y(y - \frac{f}{k}q_y)]} dq_x dq_y dq'_x dq'_y \\
 &= \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} \int A(q_x, q_y; 0) \delta\left(\frac{f}{k}q_x - x\right) \delta\left(\frac{f}{k}q_y - y\right) dq_x dq_y \\
 &= \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} \int U_0(x', y', 0) e^{-i(q_x x' + q_y y')} \delta\left(\frac{f}{k}q_x - x\right) \delta\left(\frac{f}{k}q_y - y\right) dq_x dq_y dx' dy' \\
 &= \frac{e^{ikf}}{i\lambda f} \int U_0(x', y', 0) e^{-i(\frac{k}{f}xx' + \frac{k}{f}yy')} dx' dy' \tag{B.13}
 \end{aligned}$$

Pode-se ver, então, que no plano focal posterior à lente, **o campo é a transformada de Fourier do campo no plano focal anterior à lente**, desde que as aproximações considerada valham. Isso leva a uma situação interessante: se uma lente de comprimento focal f for colocada nessa configuração e uma outra lente, de comprimento focal f' for colocada nessa mesma configuração com relação ao campo de saída da primeira lente (ou seja, a uma distância $f + f'$ dessa primeira), teremos

$$\begin{aligned}
 U(x'', y'', 2f + 2f') &= \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{U(x', y', 0)\}(x, y)\}(x'', y'') = \\
 &= \mathcal{F}^2\{U(x', y', 0)\}(x'', y'') = U(-x', -y', 0), \tag{B.14}
 \end{aligned}$$

onde usamos a propriedade da transformada de Fourier $\mathcal{F}^2\{f(x)\} = f(-x)$. Pode-se ver, então, que no plano de saída dessa configuração, $z = 2f + 2f'$, obtemos a imagem (invertida) do campo $U(x', y', 0)$, no plano $z = 0$.

Configuração 2f-2f

Outra configuração interessante é aquela em que o plano de entrada e o plano de saída do campo estão a duas distâncias focais da lente. A figura (91) detalha e convencionou a notação.

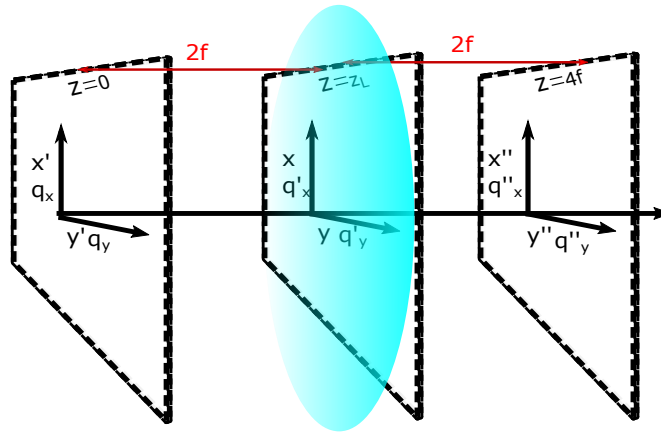


Figura 91 – Esquema para representar a configuração $2f - 2f$ e a notação utilizada.

Calculando de maneira extremamente similar à anterior, obtêm-se o campo na entrada da lente e modificado por esta,

$$U_L(x, y, 2f) = \mathcal{P}_{2f}\{U(x', y', 0)\} = \frac{e^{ik2f}}{2i\lambda f} e^{i\frac{k}{4f}(x^2+y^2)} \int U(x', y', 0) e^{i\frac{k}{4f}(x'^2+y'^2)} e^{-i\frac{k}{2f}(xx'+yy')} dx' dy'$$

$$\rightarrow U_i(x, y, 2f) = \frac{e^{ik2f}}{2i\lambda f} e^{-i\frac{k}{4f}(x^2+y^2)} \int U(x', y', 0) e^{i\frac{k}{4f}(x'^2+y'^2)} e^{-i\frac{k}{2f}(xx'+yy')} dx' dy' \quad (\text{B.15})$$

Propagado por mais duas distâncias focais, o campo resulta em

$$U(x'', y'', 4f) = \mathcal{P}_{2f}\{U(x, y, 2f)\} = \frac{e^{ik2f}}{2i\lambda f} e^{i\frac{k}{4f}(x''^2+y''^2)} \mathcal{F}\{U(x, y, 2f) e^{-i\frac{k}{4f}(x^2+y^2)}\}(x'', y'')$$

$$= -\mathcal{Q}_{(x'', y'')} \int e^{-i\frac{k}{4f}(x^2+y^2)} U(x', y', 0) e^{i\frac{k}{4f}(x'^2+y'^2)} e^{-i\frac{k}{2f}[(xx'+yy')+(xx''+yy'')]} e^{i\frac{k}{4f}(x^2+y^2)} dx' dy' dx dy$$

$$= -\mathcal{Q}_{(x'', y'')} \int U(x', y', 0) e^{i\frac{k}{4f}(x'^2+y'^2)} e^{-i\frac{k}{2f}[x(x'+x'')+y(y'+y'')]} dx' dy' dx' dy'$$

$$= -\mathcal{Q}_{(x'', y'')} \int U(x', y', 0) e^{i\frac{k}{4f}(x'^2+y'^2)} \delta(x' + x'') \delta(y' + y'') dx' dy'$$

$$= -\mathcal{Q}_{(x'', y'')} U(-x'', -y'', 0), \quad (\text{B.16})$$

$$\text{onde } \mathcal{Q}_{(x'', y'')} = \frac{e^{ik4f}}{4\lambda^2 f^2} e^{i\frac{k}{4f}(x''^2+y''^2)}.$$

Pode-se notar, então, que o campo nesta configuração é a imagem do campo de entrada, multiplicado por $\mathcal{Q}_{(x'', y'')}$ – o que significa que a intensidade nesse plano é proporcional à intensidade no plano inicial.⁴

Interessante ressaltar que, na realidade, essa não é a única configuração em que se pode obter a imagem do campo de entrada com uma única lente (ou seja, obter novamente o campo em $z = 0$). Isso pode ser feito desde que seja satisfeita a seguinte relação

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}, \quad (\text{B.17})$$

⁴ esse cálculo pode ser feito através da propagação do espectro angular, como feito na configuração f-f

da qual a configuração **2f-2f** é um caso específico.

Os detalhes para essa prova e mais algumas sutilezas a respeito disso podem ser encontradas na referência [37]. Não utilizaremos, entretanto, outras configurações nesse trabalho. Essa mesma referência também calcula uma generalização para a configuração **f-f**, que é uma configuração **d-f**, ou seja, calcula-se o campo no plano focal de uma lente, em função do campo em um plano à distância d desta. O resultado segue;

$$U(x, y, f) = \frac{Ae^{i\frac{k}{2f}(1-\frac{d}{f})(x^2+y^2)}}{i\lambda f} \int U(x', y', 0)e^{-i\frac{k}{f}(xx'+yy')} dx' dy' \quad (\text{B.18})$$

Ou seja o campo no plano focal é a transformada de Fourier do campo no plano $z_L - d$ multiplicado por uma fase quadrática; essa forma é independente do valor de d . Isso significa que a intensidade $I(x, y)$ será sempre a intensidade da transformada de Fourier do campo naquele plano (já que as fases quadráticas se cancelam para a intensidade).

É importante, entretanto, reforçar que isso não pode ser verdade, de fato, para *qualquer* d . Estamos implicitamente assumindo, em todo o cálculo de (B.18), assim como em (B.17)⁵, que as distâncias em que o campo propaga, a aproximação paraxial ainda é válida. Se isso não for verdade, essas fórmulas não se aplicarão, afinal, se d for grande o suficiente para que o campo próximo a z_L seja dado pela aproximação de campo distante, por exemplo, então o campo no plano focal da lente seria – se ainda pudéssemos aplicar a fórmula – a imagem do campo à distância d desta.

B.2 SLM: alguns princípios de funcionamento e atuação

Como o LCOS-SLM é boa parte da essência do método proposto, colocaremos uma introdução sem deduções detalhes ou passos, [43], a respeito das bases do funcionamento deste instrumento. Como explicitado acima, o caráter vetorial do campo deve ser levado em conta. Apesar de não podermos representar o campo modificado apenas por uma função transmissão que multiplica o campo de entrada, como para a lente, bastará identificar o campo de saída em função do de entrada e da máscara colocada no SLM.

O LCOS-SLM somente de fases, de reflexão, tem a seguinte constituição: pixels compostos de camadas “células” de cristal líquido. Essas moléculas, entretanto, quando submetidas a um potencial aproximadamente constante, se realinham. A composição do modulador está representado na figura (B.4)

⁵ E, portanto, nos casos específicos (B.13)) e (B.16).

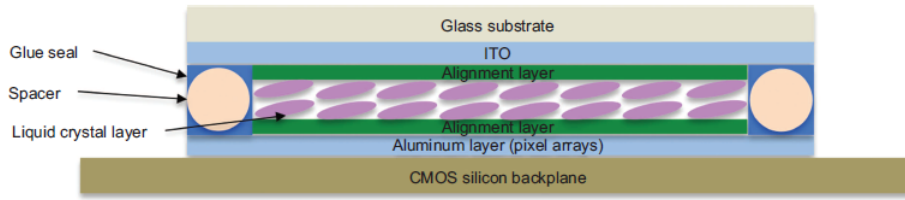


Figura 92 – Representação do LCOS -SLM. Imagem retirada de [43].

Esse alinhamento das moléculas, que afeta apenas a componente horizontal de um feixe incidente, pode aumentar ou diminuir o caminho ótico do campo. Se o potencial puder ser aplicado independentemente em cada pixel, podemos controlar esse atraso longitudinal em cada pixel. Isso significa, então, que uma fase relativa à de todo o restante do feixe, está sendo aplicada à porção deste que chega ao pixel onde o potencial é aplicado. No caso do nosso SLM, existem 256 gradações dadas a esse potencial, controladas por uma interface de computador, através de imagens, em escalas de cinza.

Consideremos, assim, um estado puro de polarização: $\vec{E}(x, y, z) = (\alpha E_x(x, y, z)\hat{h} + \beta e^{i\phi} E_y(x, y, z)\hat{v})$ em que \hat{h} denota polarização horizontal e \hat{v} denota polarização vertical (definimos que $\hat{h} = \hat{x}$ e $\hat{v} = \hat{y}$, simplesmente por conveniência). As funções E_x e E_y são reais, assim como $\alpha, \beta \in [-1, 1]$ t.q. $|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$ e $\phi = \phi(x, y, z)$. Pode-se ver que, para cada ponto, essa forma permite que o campo tenha qualquer estado de polarização puro. Para um campo de entrada dessa forma, que chegue ao modulador, o campo de saída do SLM é dado por

$$E_{saida}(x, y, z) = e^{i\Phi(x, y)} \alpha E_x(x, y, z)\hat{h} + \beta e^{i\phi} E_y(x, y, z)\hat{v} \quad (\text{B.19})$$

onde $\Phi(x, y)$ é uma função da fase dada, em cada pixel, pelo SLM. Ela deve estar entre 0 e a_{max} , com variações mínimas de $\frac{a_{max}}{256}$ devido à discretização imposta pelas escalas de cinza. $\Phi(x, y)$ também deve ser constante para cada pixel, ou seja,

$$\Phi(x, y) = \text{cte}; \forall (x, y) \in \left\{x_c \pm \frac{l}{2}, y_c \pm \frac{l}{2}\right\}, \quad (\text{B.20})$$

sendo que (x_c, y_c) é um ponto que define o centro de um pixel e l o tamanho do pixel. Isso impõe, então, que a função de fase a ser colocada não pode ter variações muito rápidas, a não ser que sejam justamente aquelas de “degraus” dados pelos pixels, já que neste caso a função não será bem aproximada pelos pixels do SLM.

Além disso, a pixelização do SLM faz com que haja difração do feixe incidente mesmo que este esteja desligado. Assim, existem infinitas ordens saindo da tela do modulador, mas a ordem 0 é extramamente mais intensa; isso é discutido em [31].

B.3 Calcitas como deslocadores de feixes

No caso dos deslocadores de feixe, a birrefringência é parte essencial de seu funcionamento: portanto o caráter anisotrópico do meio deve ser levado em conta. A discussão aqui será principalmente baseada nas referências [44] e [40]. Usaremos, primordialmente, uma notação modificada de [40] Ter que levar a anisotropia em consideração, significa que a relação entre o vetor deslocamento \vec{D} e o campo elétrico \vec{E} não é mais dada por uma proporcionalidade simplesmente. Não vamos abandonar a ideia de que o efeito principal é linear, por isso, ainda escreveremos

$$D = \epsilon E \quad (\text{B.21})$$

mas, agora, ϵ não é uma constante, mas um tensor 3×3 . Esse tensor pode ser diagonalizado, e o eixo de coordenadas que o diagonaliza é chamado de sistema de eixos principais (e escreveremos “com linha”: (x', y', z')). Assim, ϵ é dado por

$$\epsilon = \epsilon_0 \begin{bmatrix} n_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2 & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2 \end{bmatrix} \quad (\text{B.22})$$

O caso da calcita é chamado de uniaxial: em seu caso, dois dos valores não-nulos acima são iguais. Sem perda de generalidade, podemos escolher $n_{x'} = n_{y'} = n_o$ e $n_{z'} = n_e$. Vamos agora nos preocupar com a forma que uma onda propaga nesse meio. Suponhamos, inicialmente, que o campo elétrico seja dado por uma onda plana propagante e monocromática, ou seja $E = \vec{E}_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$. Por exemplo, se for uma onda propagando na direção \mathbf{z} ⁶, $k = (0, 0, |k|)$ no sistema (x, y, z) . A forma acima para o campo elétrico implica que

$$D = \epsilon E_0 e^{i\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t} \quad (\text{B.23})$$

Das equações de Maxwell, considerando que não há cargas livres, temos:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= 0; \\ \vec{\nabla} \cdot \mu \vec{H} &= 0; \\ \vec{\nabla} \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}; \\ \vec{\nabla} \times \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}; \end{aligned} \quad (\text{B.24})$$

⁶ não confundir com \mathbf{z} !

Dessas equações, tomando o rotacional da terceira e substituindo na quarta, obtemos

$$-\nabla \times \nabla \times \vec{E} = \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2} \quad (\text{B.25})$$

Da forma para \vec{D} e \vec{E} , temos que a derivada segunda em relação a t resulta multiplicar todo o fator por $-\mu_0\omega^2$. Já para decifrar o lado esquerdo, utilizamos a identidade vetorial:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} \quad (\text{B.26})$$

o que resulta em

$$(-\vec{k} \cdot \vec{k}) \vec{E} + (\vec{k} \cdot \vec{E}) \vec{k} = -\mu_0\omega^2 (\epsilon \vec{E}) \quad (\text{B.27})$$

O fator $\vec{k} \cdot \vec{E}$, em uma propagação em meio isotrópico, poderia ser anulado. Entretanto, da primeira equação de Maxwell e da forma para \vec{D} , sabemos que

$$\vec{k} \cdot \vec{D} = 0 \quad (\text{B.28})$$

o que significa que o vetor deslocamento é perpendicular à propagação. Se \vec{D} e \vec{E} não são necessariamente paralelos, vemos que não é verdade necessariamente que o campo elétrico seja perpendicular ao vetor de onda. Assim, devemos manter o termo paralelo a k para o campo, além da surpresa com o fato mencionado. A equação (B.27) é uma equação vetorial, cada componente gera uma equação:

$$(-\vec{k}_i^2 - \vec{k}_j^2 - \vec{k}_l^2) \vec{E}_i + \vec{k}_i^2 \vec{E}_i + \vec{k}_i \vec{k}_j \vec{E}_j + \vec{k}_i \vec{k}_l \vec{E}_l = -\frac{\omega^2 n_i^2}{c^2} \vec{E}_i \quad (\text{B.29})$$

Para o caso uniaxial, pode-se simplificá-la e, impondo que o determinante desse sistema seja nulo para garantir que possua solução não-trivial, obtém-se:

$$\left(\frac{\vec{k}_x^2}{n_o^2} + \frac{\vec{k}_y^2}{n_o^2} + \frac{\vec{k}_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) \left(\frac{\vec{k}_x^2}{n_e^2} + \frac{\vec{k}_y^2}{n_e^2} + \frac{\vec{k}_z^2}{n_o^2} - \frac{\omega^2}{c^2} \right) = 0 \quad (\text{B.30})$$

Essa equação define duas superfícies no espaço dos vetores de onda: uma esfera e um elipsóide. Vemos que, dados ω e a direção de propagação, essa equação permite *dois valores para $|k'|$* , que chamaremos de k_o (ordinário) e k_e (extraordinário). Isso significa que há dois vetores de onda possíveis dentro do cristal. De acordo com a referência [33] as duas componentes de polarização do campo elétrico, uma para k_o e outra para k_e , são *perpendiculares*. Chamemos de E_o e E_e .

Passemos agora a analisar a incidência de feixes em um cristal de calcita, sob a suposição de que a forma do feixe não é substancialmente alterada pela propagação no dielétrico. O vetor de onda do feixe incidente, \vec{k}_i , faz um ângulo α com a normal à superfície, que está no plano (x, y) . Suponha que o feixe incidente possui polarização linear, com componentes E_e e E_o . Nesse caso, a condição

$$\vec{k}_i \cdot \vec{\rho} = \vec{k}_j \cdot \vec{\rho}, \quad \vec{\rho} \in (x, y) \text{ e } j = e, o \quad (\text{B.31})$$

deve ser satisfeita [40]. O que ela nos diz é que a projeção dos vetores de onda incidente e refratado, no plano de incidência, deve ser a mesma. Como o módulo desses vetores é diferente, vemos que, de maneira geral, o ângulo com relação à normal à superfície deve ser diferente. Isso é explicado pelas seguintes equações:

$$|\vec{k}_i| \sin(\alpha) = |\vec{k}_o| \sin(\phi_o) \text{ e } |\vec{k}_i| \sin(\alpha) = |\vec{k}_e| \sin(\phi_e). \quad (\text{B.32})$$

A forma dessas relações nos leva à tentação de chamá-las relações de Snell. Para k_0 isso pode ser feito: independente da direção (ou seja, de ϕ_o), $|k_0| = \frac{n_o^2 \omega}{c}$, e de fato esse raio segue a equação de Snell-Descartes. Entretanto, isso não é verdade para a componente extraordinária: o módulo de seu vetor de onda varia com ϕ_e . Entretanto, para incidência normal, temos que $\phi_o = \phi_e = 0$. Assim, ambos os vetores de onda são normais à superfície, ou seja, ao plano (x, y) . Até esse ponto, não há nada novo. Mas o fato surpreendente é que, embora $k_e \parallel k_o$, $D_o \parallel E_o$, mas D_e não é paralelo a E_e . Para entender isso, vamos supor que o eixo ótico (\mathbf{z}'), encontra-se em um ângulo θ com a normal (\mathbf{z}), está no plano (x, z) e o sistema de eixos principais é tal que $y = y'$; além disso, $E_o = E_y$ e $E_e = E_x$.

Vamos decompor as componentes \mathbf{x} e \mathbf{y} nas coordenadas do sistema de eixos principais.

$$x = \cos(\theta)x' - \sin(\theta)z' \quad (\text{B.33})$$

$$y = y' \quad (\text{B.34})$$

$$z = \cos(\theta)z' + \sin(\theta)x'. \quad (\text{B.35})$$

Isso significa que E_o só tem componentes em y e, então, D_o , que sabemos que é paralelo a \mathbf{x} , é dado por $D_o = n_o^2 E_o$. Isso significa, então, que $E_o \parallel \mathbf{x}$ e, também, $E_o \perp \vec{k}_o$. Para E_e , entretanto, não é isso que ocorre: como E_e oscila na direção \mathbf{x} , que tem componentes em x' e z' , essa componente é afetada pela anisotropia do cristal, e, assim, ao fazer $D_e = \epsilon E_o$, não teremos mais D_e paralelo a E_e . Como sabemos, de (B.31), que D_e é paralelo a \mathbf{x} , podemos concluir que E_e não é paralelo a essa direção. Como o campo magnético não é afetado pela anisotropia do cristal, continuaremos a ter que a componente B_e é paralela a y . Dessa maneira, o vetor de Pointyng *não é paralelo a z , para a componente extraordinária*.

O feixe se desloca, então, em uma direção oblíqua à \mathbf{z} — embora sua velocidade de fase, definida por k_e esteja nessa direção!

Isso está ilustrado na imagem abaixo

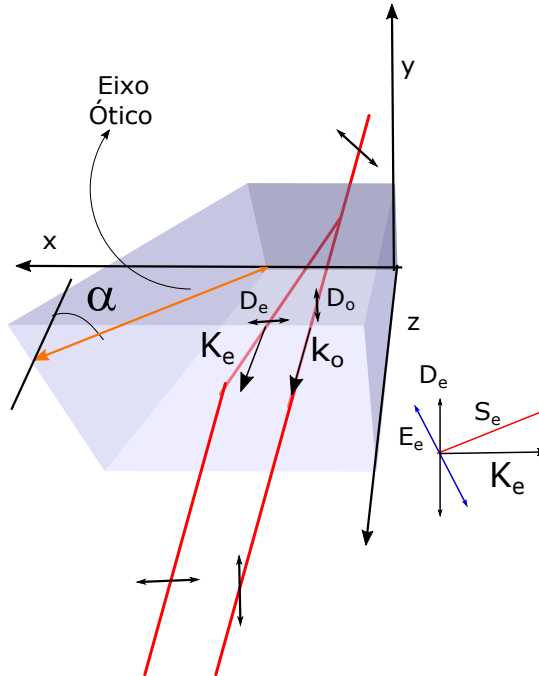


Figura 93 – Esquema para representar a configuração $2f - 2f$ e a notação utilizada.

Temos que um feixe propaga por um caminho ótico definido por d e n_0 , e outro um caminho definido por d e pelo ângulo β que faz com a direção \mathbf{z} (ou seja, pelo comprimento d' na imagem). Por estar em ângulo durante a propagação dentro do cristal, ele é efetivamente deslocado de um valor l . Após a saída do cristal, os vetores de onda voltam a ser paralelos. Supondo que a propagação dentro do cristal não mude nada no perfil espacial que cada componente teria se tivesse propagado pelo caminho ótico efetivo dado pelo cristal, além do deslocamento lateral em uma componente, podemos concluir que esse cristal funciona como um deslocador de feixes.

Podemos resumir isso da seguinte maneira: o deslocador de feixes move na direção \mathbf{x} , de uma distância l , a parte do feixe com polarização \hat{h} , enquanto que a parte com polarização \hat{v} propaga como se não houvesse o cristal ⁷. Tudo isso é feito enquanto o feixe propaga ao longo do tamanho do cristal, na direção \mathbf{z} . Matematicamente, podemos representar isso tudo da seguinte maneira: $\mathcal{C}_l\{f(x, y)\hat{h} + g(x, y)\hat{v}\} = \mathcal{P}_{d'}\{f(x - l, y)\hat{h}\} + \mathcal{P}_d\{g(x, y)\hat{v}\}$, onde l é o valor que o deslocador de feixes desloca o feixe com polarização \hat{h} , d e d' são os caminhos óticos percorridos pelas diferentes componentes do feixe.

⁷ Embora com caminho ótico maior.