UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Tobias Fernando Pinto

ÁLGEBRAS DE NAKAYAMA HEREDITÁRIAS POR PARTES

Belo Horizonte
2023

Tobias Fernando Pinto

ÁLGEBRAS DE NAKAYAMA HEREDITÁRIAS POR PARTES

Versão final

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Viktor Bekkert

Co-orientador: Prof. Dr. Hernán Giraldo

Belo Horizonte
2023

Pinto, Tobias Fernando.

P659a Álgebras de Nakayama hereditárias por partes [recurso eletrônico] / Tobias Fernando Pinto – 2023.
1 recurso online (87 f. il, color.): pdf.

Orientador: Viktor Bekkert.
Coorientador: Hernán Alonso Giraldo Salazar.
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f. 83-85

1. Matemática – Teses. 2. Categorias derivadas (Matemática) – Teses.3. Álgebras de incidência – Teses. I. Bekkert, Viktor. II. Giraldo Salazar, Hernán Alonso. III. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. IV. Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Álgebras de Nakayama hereditárias por partes

TOBIAS FERNANDO PINTO

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Prof. Viktor Bekkert
UFMG

Prof. Hernán Alonso Giraldo Salazar
U. Antioquia – Colômbia

Documento assinado digitalmente
gov.br
EDSON RIBEIRO ALVARES
Data: 07/03/2023 17:09:09-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. Edson Ribeiro Alvares
UFPR

Prof. Flávio Ulhoa Coelho
USP

Heily Wagner

Prof. Heily Wagner
UFPR

Documento assinado digitalmente
gov.br
JOHN WILLIAM MACQUARRIE
Data: 07/03/2023 11:22:37-0300
Verifique em https://verificador.iti.br

Prof. John William MacQuarrie
UFMG

Kay

Prof. Kostiantyn Iusenko
USP

Belo Horizonte, 03 de março de 2023.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

Dedico a Jesus Cristo, meu Senhor e meu Deus.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao meu orientador Viktor por todo o suporte, tudo o que me ensinou, por toda a paciência e compreensão durante todo este tempo e ao meu coorientador Hernán por toda ajuda na elaboração deste trabalho. Agradeço aos meus professores, colegas e toda a UFMG pelos ensinamentos e compartilhamento de experiências que contribuíram para minha formação acadêmica. Agradeço à CAPES pela concessão da bolsa que foi indispensável para a realização deste trabalho.

Sou grato a meus pais José e Aparecida que além de serem para mim inspiração e exemplo, também me apoiaram de forma ativa nesta etapa da minha vida. Também agradeço os conselhos e ensinamentos valiosos que vou levar para a vida toda. Agradeço a minha querida esposa Maiara que está sempre ao meu lado dividindo cada momento, com quem eu compartilho minhas alegrias, dores, angústias e conquistas. Obrigado a todos os familiares pelo apoio.

Agradeço ao meu amigo e afilhado Chistoffer pela amizade, apoio e as conversas filosóficas. Agradeço a Lucimara e a comunidade da paróquia Santa Catarina Labouré pela ajuda financeira quando eu estava sem bolsa. Agradeço aos amigos do MUR pela amizade, pelos GOUs, partilhas, formações e orações que ajudaram a me aproximar mais de Deus. Agradeço a todos que rezaram e oraram por mim e a todos que fizeram parte desta história.

Dou graças e louvo a Deus meu criador que é santo e fiel, que me conduziu e todo o necessário me providenciou, se fez presente em cada momento e foi o meu sustento durante todo este tempo.

RESUMO

PINTO, Tobias Fernando

Neste trabalho introduzimos vários complexos *tilting* para álgebras de Nakayama acíclicas e descrevemos suas álgebras de endomorfismos. Usamos tais complexos para mostrar que qualquer álgebra de Nakayama acíclica é derivadamente equivalente a uma álgebra de incidência de um poset. Generalizamos também o resultado de Happel e Seidel sobre a classificação de álgebras de Nakayama truncadas hereditárias por partes para duas classes de álgebras de Nakayama: produtos fibrados simples e somas amalgamadas simples de álgebras de Nakayama truncadas.

Palavras Chave: Categorias derivadas; equivalência derivada; álgebras de Nakayama; álgebras de incidência de posets; álgebras hereditárias por partes.

ABSTRACT

PINTO, Tobias Fernando

In this work we introduce some tilting complexes for acyclic Nakayama algebras and describe their endomorphism algebras. We use such complexes to show that any acyclic Nakayama algebra is derived equivalent to an incidence algebra of poset. We also generalize the result of Happel and Seidel on the classification of piecewise hereditary truncated Nakayama algebras for two classes of Nakayama algebras: simple pullback and simple pushout of truncated Nakayama algebras.

Keywords: Derived categories; erived equivalence; Nakayama algebras; incidence algebras of posets; piecewise hereditary algebras.

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Denotamos $\Bbbk$ um corpo algebricamente fechado, A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, $\operatorname{mod}\text{-}A$ a categoria dos A-módulos à direita finitamente gerados. Denotamos por H uma $\Bbbk$-álgebra hereditária de dimensão finita e $\mathcal{H}$ uma $\Bbbk$-categoria abeliana, conexa, *hereditária* que tem os espaços de homomorfismos e o espaço de extensões de Yoneda com dimensão finita.

Dizemos que A é hereditária por partes se existe uma categoria hereditária $\mathcal{H}$ tal que as categorias derivadas limitadas $\mathrm{D}^b(\operatorname{mod}\text{-}A)$ e $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ são equivalentes como categorias trianguladas. As álgebras hereditárias por partes desempenham um papel importante em Teoria de Representações. Tendo em vista que muito já é conhecido das álgebras hereditárias e uma descrição completa das categorias derivadas limitadas de álgebras hereditárias de dimensão finita já foi dada por Happel em [18].

Em [19], Happel mostrou que uma categoria hereditária $\mathcal{H}$ contendo um *objeto tilting* é derivadamente equivalente a $\operatorname{mod}\text{-}H$ para alguma $\Bbbk$-álgebra hereditária H de dimensão finita (neste caso dizemos que $\mathcal{H}$ é do *tipo módulos*) ou derivadamente equivalente à categoria de feixes coerentes $\operatorname{coh}\mathbb{X}$ para alguma linha projetiva de peso $\mathbb{X}$ (neste caso dizemos que $\mathcal{H}$ é do *tipo feixes*). Em [15] e [16], Geigle e Lenzing mostraram que existe uma equivalência derivada entre a categoria dos módulos sobre uma álgebra canônica $\operatorname{mod}\text{-}C(p,\lambda)$ e a categoria de feixes coerentes sobre uma linha projetiva $\operatorname{coh}\mathbb{X}(p,\lambda)$. Neste sentido as álgebras hereditárias por partes do tipo feixes são derivadamente equivalentes a álgebras canônicas.

Em [18] Happel fez uma sistemática investigação da categoria derivada de uma álgebra de dimensão finita. Neste mesmo trabalho, ele também mostrou que se T é um *A-módulo tilting*, então as categorias derivadas limitadas das álgebras A e $B = \operatorname{End}_A(T)$ são equivalentes como categorias trianguladas. Este trabalho foi generalizado por Rickard em [34] que deu uma bela resposta para o problema de decidir quando duas álgebras tem categorias derivadas limitadas equivalentes como categorias trianguladas. O Teorema de Rickard, ou Teoria de Morita para categorias derivadas, mostra que duas álgebras A e B tem suas categorias derivadas $\mathrm{D}^b(\operatorname{mod}\text{-}A)$ e $\mathrm{D}^b(\operatorname{mod}\text{-}B)$ equivalentes como categorias trianguladas se, e somente se, existe um *complexo tilting* T tal que B é isomorfa a $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\operatorname{mod}\text{-}A)}(T)$. Este resultado é uma importante ferramenta na classificação das álgebras a menos de equivalências derivadas. Muitos avanços tem sido alcançados no estudo das categorias derivadas das álgebras, como podemos citar [6], [3], [10], [9], [11], [26], [7], [22], [41], [36], [4], [8].

Chamamos de *álgebras de Nakayama acíclicas truncadas* e as denotamos por $\Lambda(n,r) = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ as álgebras de Nakayama acíclicas onde $\mathcal{Q}$ é uma aljava com n vértices e com ideal $\mathcal{I}$ gerado por todos caminhos de comprimento r, para $n, r \in \mathbb{N}$ e $n > r \geq 2$. Em [22], Happel e Seidel dão uma classificação completa das álgebras de Nakayama acíclicas truncadas $\Lambda(n,r)$ hereditárias por partes, isto é, dizem quais destas álgebras são hereditárias por partes e de que tipo elas são. Recentemente Lenzing, Meltzer e

Ruan em [28] obtiveram uma demonstração alternativa dos resultados do artigo [22].

Motivado pelo trabalho de Happel e Seidel, Melo, em [32], mostrou que qualquer álgebra serial truncada é derivadamente equivalente a uma álgebra de incidência de poset. Em [30] e [31], Marcos e Moreira deram uma descrição de algumas classes de álgebras de incidência que são hereditárias por partes e mostraram também que qualquer álgebra de incidência hereditária por partes tem dimensão global forte menor ou igual a três. Em [26], Ladkani dá uma resposta para a seguinte pergunta: Que álgebras de incidência são derviadamente equivalentes a álgebras canônicas? Em [25], Ladkani usou idéias de topologia algébrica e geometria algébrica para obter equivalências derivadas entre a álgebra de incidência de um poset X e álgebras de incidências de posets induzidos por subconjuntos fechados de X. Todos estes avanços nos serviram de motivação para investigar as álgebras de Nakayama e demonstramos que as álgebras de Nakayama acíclicas são derivadamente equivalentes a álgebras de incidência de posets.

Segue de [1] que se $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ é uma álgebra de Nakayama acíclica conexa, então a sua aljava $\mathcal{Q}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Q} : 1 \longrightarrow 2 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n.$$

Vamos dizer que um caminho w em $\mathcal{Q}$ é *$\mathcal{I}$-maximal à direita* (respectivamente, *$\mathcal{I}$-maximal à esquerda*), se $w \notin \mathcal{I}$ e $w\alpha \in \mathcal{I}$ (respectivamente, $\alpha w \in \mathcal{I}$) para qualquer flecha $\alpha \in \mathcal{Q}_1$. Vamos usar a seguinte ordem parcial em $\mathcal{Q}_0$: $x \leq y$ se, e somente se, existe um caminho de x para y em $\mathcal{Q}$.

O objetivo principal deste trabalho é desenvolver uma técnica para classificar tipos das álgebras hereditárias por partes de álgebras de Nakayama acíclicas, motivado pelo trabalho de Happel e Seidel [22]. Para isso introduzimos vários complexos *tilting* para álgebras de Nakayama acíclicas. Estes complexos generalizam complexos *tilting* construídos para álgebras seriais truncadas em [32]. A seguir vamos descrever brevemente estes complexos. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica e P_x denota o A-módulo projetivo correspondente ao vértice $x \in \mathcal{Q}_0$. Sejam $a, b \in \mathcal{Q}_0$ tais que $a \leq b$. Vamos definir um complexo $T_{a,b}$ de módulos projetivos. Para cada vértice $x < a$ podemos definir a seguinte decomposição de único caminho $p(x, a)$ de vértice x para vértice a:

$$p(x, a) := w_s^+ \cdots w_2^+ w_1^+,$$

onde w_i^+ são caminhos maximais à esquerda para $1 \leq i < s$. Essa decomposição define um complexo $T_{a,b}^x$:

$$P_a \xrightarrow{w_1^+} P_{s(w_1^+)} \xrightarrow{w_2^+} \cdots \xrightarrow{w_s^+} P_x,$$

onde P_a está no grau 0. De maneira dual, para qualquer vértice $y \in \mathcal{Q}_0$ tal que $y > b$, definimos decomposição de único caminho $p(b, y)$ de vértice b para vértice y:

$$p(b, y) := w_1^- w_2^- \cdots w_t^-,$$

onde w_i^- são caminhos maximais à direita para $1 \leq i < t$. Essa decomposição define um complexo $T_{a,b}^y$:

$$T_{a,b}^y : P_y \xrightarrow{w_t^-} \cdots \xrightarrow{w_2^-} P_{t(w_1^-)} \xrightarrow{w_1^-} P_b,$$

onde P_b está no grau 0. Finalmente, para qualquer vértice $z \in \mathcal{Q}_0$ tal que $a \leq z \leq b$, definimos

$$T^z_{a,b} : 0 \longrightarrow P_z \longrightarrow 0,$$

onde P_z está no grau 0. Definimos $T^\Lambda_{a,b} := \bigoplus_{x \in \mathcal{Q}_0} T^x_{a,b}$. Vamos dizer que um par de vértices $(a, b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ é *admissível*, se $a \leq b$ e para todos $c, d \in \mathcal{Q}_0$ tais que $c < a \leq b < d$ e $p(c, d) \in \mathcal{I}$ temos que $p(c, b) \in \mathcal{I}$ ou $p(a, d) \in \mathcal{I}$. Achamos um critério quando um complexo $T_{a,b}$ *tilting*.

Teorema 1. *O complexo $T_{a,b}$ é um complexo tilting se, e somente se, (a, b) é um par de vértices admissível.*

O próximo resultado mostra quando a álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_{a,b})$ do complexo *tilting* $T^\Lambda_{a,b}$ é uma álgebra de incidência de poset.

Teorema 2. *Seja (a, b) um par admissível de vértices para uma álgebra de Nakayama acíclica $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$. Então, a álgebra de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_{a,b})$ é uma álgebra de incidência de poset se, e somente se, $p(a, b) \notin \mathcal{I}$.*

Como consequência do Teorema 2 obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3. *Qualquer álgebra de Nakayama acíclica é derivadamente equivalente a uma álgebra de incidência de poset.*

Descobrimos que para descrever a álgebra de endomorfismos para um complexo $T^\Lambda_{a,b}$ no caso geral são úteis os conceitos de produtos fibrados e somas amalgamadas de álgebras.

O estudo das características do produto fibrado $\Lambda = A \prod_C B$ a partir de características de álgebras envolvidas em caso de álgebras de dimensão finita foi iniciado no trabalho de Lévesque [29], onde mostrou-se que no caso particular do produto fibrado de Nakayama orientado se as álgebras A e B são hereditárias, então Λ é uma *álgebra inclinada*, ou seja, é a álgebra de endomorfismos de um módulo *tilting* de uma álgebra hereditária, veja [21]. Como álgebras inclinadas formam uma subclasse de álgebras hereditárias por partes, podemos dizer que o estudo de tipos das álgebras hereditárias por partes para produtos fibrados foi iniciado em [29]. Este resultado foi generalizado em [39], [5] e [13] para outros tipos de produtos fibrados (veja caso mais geral em [13]).

O próximo resultado descreve a álgebra de endomorfismos de um complexo *tilting* $T^\Lambda_{a,b}$ em caso de produto fibrado. Frequentemente vamos considerar as álgebras $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ como $\Bbbk$-categorias com conjunto de objetos Q_0.

Teorema 4. *Seja $\Lambda = A \prod_C B = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é um produto fibrado das subcategorias plenas A e B sob a subcategoria convexa C e $(a, b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ um par de vértices admissível tal que $a \in (\mathcal{Q}_A)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$ e $b \in (\mathcal{Q}_B)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$. Então $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_{a,b}) \cong \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(A)}(T^A_{a,c_2}) \prod_C \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(B)}(T^B_{b,c_1})$, onde c_1 é uma fonte em $\mathcal{Q}_B$, c_2 é um poço em $\mathcal{Q}_A$ e identificamos C com $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(C)}(C_C)$.*

Dualmente pode-se definir a soma amalgamada. Vamos dizer que uma soma amalgamada $A \coprod_C B$ é *simples* se a álgebra C é simples e dualmente para o produto fibrado. Obtemos um resultado análogo ao Teorema 4 para somas amalgamadas.

Teorema 5. *Seja $\Lambda = A\coprod_C B = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é uma soma amalgamada das subcategorias plenas A e B sob uma subcategoria convexa C e $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ um par de vértices admissível tal que $a \in (\mathcal{Q}_A)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$ e $b \in (\mathcal{Q}_B)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$. Se a álgebra C é simples então $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a,b}) \cong \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(A)}(T^{A}_{a,c_2})\coprod_C \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(B)}(T^{B}_{b,c_1})$, onde c_1 é uma fonte em $\mathcal{Q}_B$, c_2 é um poço em $\mathcal{Q}_A$ e identificamos C com $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(C)}(C_C)$.*

Mostramos no Exemplo 2.29 que a afirmação do Teorema 5 é falsa no caso a álgebra C não é simples.

Usando o Teorema 4 obtemos uma descrição da álgebra de endomorfismos do complexo *tilting* $T^{\Lambda}_{a,b}$ no caso $p(a,b) \in \mathcal{I}$ (veja os Teoremas 2.33, 2.34 e 2.35). Usamos o Teorema 5 para simplificar a descrição da álgebra de endomorfismos de $T^{\Lambda}_{a,b}$ no caso $p(a,b) \notin \mathcal{I}$.

Como aplicações principais, obtemos a descrição de tipos das álgebras hereditárias por partes para álgebras de Nakayama acíclicas que são somas amalgamadas simples ou produtos fibrados simples de álgebras truncadas, genralizando o resultado de Happel e Seidel em [22]. Os principais teoremas são os seguintes.

Teorema 6. *Seja $\Lambda = \Lambda_1\coprod_{\{c\}}\Lambda_2$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é uma soma amalgamada simples das álgebras quadráticas ou hereditárias ou truncadas Λ_1 e Λ_2, onde $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0\bigcap(\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. Então Λ é hereditária por partes se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. *Λ_1 e Λ_2 são hereditárias por partes do tipo módulos.*

2. *Uma das álgebras Λ_i é hereditária ou quadrática e a outra é isomorfa a uma das seguintes álgebras: $\Lambda(10,3), \Lambda(11,3), \Lambda(9,4), \Lambda(10,4), \Lambda(10,6)$ ou $\Lambda(11,6)$.*

Teorema 7. *Seja $\Lambda = \Lambda_1\prod_{\{c\}}\Lambda_2$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é um produto fibrado simples das álgebras quadráticas ou hereditárias ou truncadas Λ_1 e Λ_2, onde $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0\bigcap(\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. Então Λ é hereditária por partes se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. *Λ_1 e Λ_2 são hereditárias por partes do tipo módulos.*

2. *Uma das álgebras Λ_i é hereditária ou quadrática e a outra é isomorfa a uma das seguintes álgebras: $\Lambda(10,3), \Lambda(11,3), \Lambda(9,4), \Lambda(10,4), \Lambda(10,6)$ ou $\Lambda(11,6)$.*

Observamos que uma classificação de álgebras de Nakayama hereditárias por partes do tipo módulos foi obtida por Happel e Seidel em [22] (veja Teorema 3.8).

No primeiro capítulo apresentamos de forma sucinta algumas das principais definições, conceitos e ferramentas necessários no desenvolvimento deste trabalho. Na primeira seção definimos a categoria de complexos, categoria homotópica, localização de categorias, categoria derivada, categoria triangulada e categoria hereditária. Também nesta seção temos o Teorema de Rickard que é uma ferramenta muito usada para encontrar álgebras derivadamente equivalentes. Na segunda seção definimos as aljavas, álgebras de caminhos e representações de aljavas que nos permite trabalhar com as álgebras através de grafos orientados. Também definimos as álgebras hereditárias, hereditárias por partes, álgebras de Nakayama e álgebras de incidência de poset bem como alguns dos principais resultados. Em seguida, definimos as mutações, somas amalgamadas e produtos fibrados que usamos para as aplicaçoes do resultado principal.

No Capítulo 2 introduzimos para qualquer álgebra de Nakayama acíclica um par de vértices da sua aljava e com estes definimos um complexo de módulos projetivos. Tal complexo pode ser visto como uma generalização dos complexos construídos em [32] para álgebras seriais truncadas e acíclicas. No Teorema 2.13 achamos condições necessárias e suficientes para tal complexo ser complexo *tilting* e no Teorema 2.23 obtemos condições necessárias e suficientes para sua álgebra de endomorfismos ser uma álgebra de incidência de um poset, calculando a ordem parcial explicitamente. Nos casos de somas amalgamadas e produtos fibrados estudamos a relação da álgebra de endomorfismo de tal complexo *tilting* com álgebras de endomorfismos de complexos *tilting* de subálgebras envolvidas. Aplicamos os últimos resultados para descrição das álgebras de endomorfismos de complexos *tilting* construídos no caso geral.

No Capítulo 3 aplicamos as técnicas desenvolvidas em Capítulo 2 para estudo dos tipos das álgebras hereditárias por partes para algumas classes de álgebras de Nakayama acíclicas. Na primeira seção introduzimos uma classe natural de álgebras de Nakayama hereditárias por partes, mais precisamente, álgebras de Nakayama acíclicas cujas álgebras de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a,b})$ são hereditárias. Em seguida demonstramos que qualquer álgebra de Nakayama quadrática acíclica é hereditária por partes (veja, por exemplo, [18]), este já é um resultado conhecido mas apresentamos uma demonstração alternativa. Na seção seguinte apresentamos alguns resultados de artigo [22] que vamos usar nas ultimas seções. Também incluímos uma demonstração nova de alguns destes resultados (veja Proposição 3.10). Afim de generalizar os resultados do artigo [22], encontramos condições necessárias e suficientes para as álgebras de Nakayama acíclicas que são somas amalgamadas ou produtos fibrados simples de álgebras quadráticas, hereditárias ou truncadas serem hereditárias por partes.

Para a leitura deste trabalho deve-se ter conhecimentos básicos de categoria, álgebra homológica e representações de álgebras (ver [1]).

Capítulo 1

CONCEITOS BÁSICOS

Neste capítulo apresentamos algumas definições e resultados que são importantes para o desenvolvimento do trabalho. Denotamos por $\operatorname{mod}\text{-}A$ a categoria de A-módulos à direita finitamente gerados e $\operatorname{proj}\text{-}A$ a subcategoria plena dos A-módulos projetivos finitamente gerados, sendo A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado $\Bbbk$.

1.1 Categorias

Dada uma categoria abeliana $\mathcal{A}$, a categoria derivada $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ é obtida da categoria de complexos $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ em dois passos. Primeiro construímos uma categoria quociente $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ de $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ pela equivalência homotópica. Depois fazemos a localização pelos quase-isomorfismos. Nesta seção apresentamos os principais conceitos para definir uma categoria derivada de uma categoria abeliana. Mais detalhes podem ser encontrados em [18], [40], [17], [33] e [42].

1.1.1 A categoria de complexos

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana.

Definição 1.1. Um *complexo* $X^\bullet = (X^i, d_X^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sobre $\mathcal{A}$ é uma coleção de objetos X^i (chamados de termos) e morfismos $d^i = d_X^i : X^i \to X^{i+1}$ em $\mathcal{A}$ (chamados de diferenciais)

$$X^\bullet : \cdots \longrightarrow X^{i-2} \xrightarrow{d_X^{i-2}} X^{i-1} \xrightarrow{d_X^{i-1}} X^i \xrightarrow{d_X^o} X^{i+1} \xrightarrow{d_X^{i+1}} X^{i+2} \longrightarrow \cdots .$$

tais que $d^i d^{i-1} = 0$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Dados dois complexos $X^\bullet = (X^i, d_X^i)$ e $Y^\bullet = (Y^i, d_Y^i)$ sobre $\mathcal{A}$ definimos o *morfismo de complexos* $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ como uma sequência de morfismos $f^i : X^i \to Y^i$ de $\mathcal{A}$ que faz o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"] & \cdots \arrow[r] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "f^i"] & X^{i+1} \arrow[r, "d_X^{i+1}"] \arrow[d, "f^{i+1}"] & X^{i+2} \arrow[r] \arrow[d, "f^{i+2}"] & \cdots \\
Y^\bullet & \cdots \arrow[r] & Y^i \arrow[r, "d_Y^i"] & Y^{i+1} \arrow[r, "d_Y^{i+1}"] & Y^{i+2} \arrow[r] & \cdots ,
\end{tikzcd}$$

isto é, $f^{i+1}d_X^i = d_Y^i f^i$, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Dado um complexo $X^\bullet = (X^i, d_X^i)$ definimos o morfismo $id_{X^\bullet} : X^\bullet \to X^\bullet$ *identidade* de $X^\bullet$ como a sequência de morfismos identidades $id_{X^i} : X^i \to X^i$ em $\mathcal{A}$ fazendo o seguinte diagrama comutar

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[d, "id_{X^\bullet}"] & \cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] \arrow[d, "id_{X^{i-1}}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] \arrow[d, "id_{X^i}"] & X^{i+1} \arrow[r] \arrow[d, "id_{X^{i+1}}"] & \cdots \\
X^\bullet & \cdots \arrow[r] & X^{i-1} \arrow[r, "d_X^{i-1}"] & X^i \arrow[r, "d_X^i"] & X^{i+1} \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

A *categoria de complexos* de $\mathcal{A}$ é a categoria $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ cujos objetos são os complexos e os morfismos são os morfismos de complexos.

O *complexo zero* em $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ denotado por $0^\bullet$, ou simplesmente 0, é o complexo que tem todos os termos iguais a 0:

$$0^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Um morfismo de complexos $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ é um *isomorfismo de complexos* em $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ se existe um morfismo inverso $(f^{-1})^\bullet : Y^\bullet \to X^\bullet$ tal que $f^\bullet \circ (f^{-1})^\bullet = id_{Y^\bullet}$ e $(f^{-1})^\bullet \circ f^\bullet = id_{X^\bullet}$. Dizemos que $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ são *isomorfos* em $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ e denotamos por $X^\bullet \simeq_C Y^\bullet$, ou simplesmente $X^\bullet \simeq Y^\bullet$ quando não houver risco de confusão, se existe um isomorfismo de complexos $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ em $\mathrm{C}(\mathcal{A})$.

Observação 1.2. Segue direto da definição de morfismo de complexo que $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ é um isomorfismo de complexos em $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ se, e somente se, a sequência de morfismos $f^i : X^i \to Y^i$ são isomorfismos em $\mathcal{A}$, para cada $i \in \mathbb{Z}$.

Sejam X, Y objetos em $\mathcal{A}$ e $f : X \to Y$ um morfismo em $\mathcal{A}$. Denotamos por $\Phi_i(X)$ o complexo cujo i-ésimo termo é X e os demais são 0:

$$\Phi_i(X) : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Chamamos $\Phi_i(X)$ de *complexo concentrado no grau* i. Denotamos por $\Phi_i(f)$ o complexo cujo i-ésimo termo é X, o $(i+1)$-ésimo termo é Y, os demais termos são 0 e a i-ésima diferencial é f:

$$\Phi_i(f) : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow X \xrightarrow{f} Y \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Chamamos $\Phi_i(f)$ de *complexo concentrado nos graus* $i, i+1$.

Seja $X^\bullet = (X^i, d_X^i)$

$$X^\bullet : \cdots \longrightarrow X^{-1} \xrightarrow{d_X^{-1}} X^0 \xrightarrow{d_X^0} X^1 \xrightarrow{d_X^1} X^2 \xrightarrow{d_X^2} X^3 \longrightarrow \cdots$$

um complexo em $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Denotamos por $X^\bullet[n]$, com $n \in \mathbb{Z}$, o complexo tal que $X^\bullet[n]^i = X^{i+n}$ e $d^i_{X^\bullet[n]} = (-1)^n d_X^{i+n}$, assim

$$X^\bullet[n] : \cdots \longrightarrow X^{-1+n} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{-1+n}} X^n \xrightarrow{(-1)^n d_X^n} X^{1+n} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{1+n}} X^{2+n} \xrightarrow{(-1)^n d_X^{2+n}} X^{3+n} \longrightarrow \cdots ,$$

e chamamos $X^\bullet[n]$ de complexo $X^\bullet$ *deslocado à esquerda* n vezes.

Definição 1.3. Um complexo $X^\bullet$ é *limitado à esquerda* se existe i_0 tal que $X^i = 0$ para todo $i < i_0$.

$$X^\bullet : \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow X^{i_0} \xrightarrow{d_X^{i_0}} X^{i_0+1} \xrightarrow{d_X^{i_0+1}} X^{i_0+2} \longrightarrow \cdots .$$

Para simplificar a notação, quando não houver risco de confusão, representaremos os complexos limitados à esquerda omitindo os termos nulos $X^i = 0$ para todo $i < i_0$, isto é,

$$X^\bullet : \qquad X^{i_0} \xrightarrow{d_X^{i_0}} X^{i_0+1} \xrightarrow{d_X^{i_0+1}} X^{i_0+2} \longrightarrow \cdots .$$

De modo análogo, um complexo $X^\bullet$ é *limitado à direita* se existe i_0 tal que $X^i = 0$, para todo $i > i_0$.

$$X^\bullet : \cdots \longrightarrow X^{i_0-2} \xrightarrow{d_X^{i_0-2}} X^{i_0-1} \xrightarrow{d_X^{i_0-1}} X^{i_0} \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

Para simplificar a notação, quando não houver risco de confusão, representaremos os complexos limitados à direita omitindo os termos nulos $X^i = 0$ para todo $i > i_0$, isto é,

$$X^\bullet : \qquad \cdots \longrightarrow X^{i_0-2} \xrightarrow{d_X^{i_0-2}} X^{i_0-1} \xrightarrow{d_X^{i_0-1}} X^{i_0}.$$

E dizemos que um complexo $X^\bullet$ é *limitado* se é limitado à direita e à esquerda. Denotamos por $\mathrm{C}^+(\mathcal{A})$ (respectivamente, $\mathrm{C}^-(\mathcal{A})$, $\mathrm{C}^b(\mathcal{A})$) a subcategoria plena de complexos limitados à esquerda (respectivamente, limitados à direita, limitados).

Para $i \in \mathbb{Z}$ e $X^\bullet$ um complexo em $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ definimos

$$\mathrm{H}^i(X^\bullet) = \frac{\mathrm{Ker}(d_X^i)}{\mathrm{Im}(d_X^{i-1})}$$

a i-ésima *cohomologia de* $X^\bullet$ em $\mathcal{A}$. Cada morfismo de complexo $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ em $\mathrm{C}(\mathcal{A})$, induz uma família de morfismos

$$\mathrm{H}^i(f^\bullet) : \mathrm{H}^i(X^\bullet) \to \mathrm{H}^i(Y^\bullet)$$

em $\mathcal{A}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. Assim, $\mathrm{H}^i : \mathrm{C}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$ é um funtor que chamamos de i-ésimo *funtor de cohomologia*. Um morfismo $u^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ de $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ é chamado de *quase isomorfismo* se os morfismos induzidos $\mathrm{H}^i(u^\bullet) : \mathrm{H}^i(X^\bullet) \to \mathrm{H}^i(Y^\bullet)$ são isomorfismos, para todo $i \in \mathbb{Z}$.

Um complexo $X^\bullet = (X^i, d_X^i)$ *tem cohomologia limitada* se o complexo $\mathrm{H}(X^\bullet) = (\mathrm{H}(X)^i, 0)$ é limitado. Denotamos por $\mathrm{C}^{+,b}(\mathcal{A})$ (respectivamente, $\mathrm{C}^{-,b}(\mathcal{A})$) a subcategoria de complexos limitados à esquerda com cohomologia limitada (respectivamente, limitados à direita com cohomologia limitada).

1.1.2 A categoria homotópica

Definição 1.4. Seja $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ um morfismo de complexos em $\mathrm{C}(\mathcal{A})$. Dizemos que $f^\bullet$ é *homotópico a zero* se existe uma família de morfismos $h^i : X^i \to Y^{i-1}$, para todo i, em $\mathcal{A}$ tais que

$$f^i = h^{i+1}d_X^i + d_Y^{i-1}h^i.$$

No diagrama:

$$\begin{tikzcd}
X^\bullet \arrow[d, "f^\bullet"] & \cdots \arrow[r] & X^0 \arrow[r, "d_X^0"] \arrow[d, "f^0"'] & X^1 \arrow[r, "d_X^1"] \arrow[d, "f^1"'] \arrow[dl, dashed, "h^1"'] & X^2 \arrow[r] \arrow[d, "f^2"'] \arrow[dl, dashed, "h^2"'] & \cdots \\
Y^\bullet & \cdots \arrow[r] & Y^0 \arrow[r, "d_Y^0"] & Y^1 \arrow[r, "d_Y^1"] & Y^2 \arrow[r] & \cdots .
\end{tikzcd}$$

A família de morfismos $h^i : X^i \to Y^{i-1}$ é chamada de *homotopia*. Dizemos que dois morfismos de complexos $f^\bullet, g^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ são *homotopicamente equivalentes* ($f^\bullet \sim g^\bullet$) se $f^\bullet - g^\bullet$ é homotópico a zero. Esta relação é chamada de *relação de homotopia*.

Define-se *categoria homotópica* de complexos de $\mathcal{A}$, denotada por $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ como a categoria cujos objetos são complexos e os morfismos são classes de equivalência de morfismos de complexos pela relação de homotopia.

Seja $X^\bullet$ um complexo em $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ definimos $\overline{id_{X^\bullet}}$ a *identidade de* $X^\bullet$ em $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ como a classe de equivalência do morfismo identidade $id_{X^\bullet}$ em $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ pela relação de homotopia. Uma classe de equivalência de morfismos de complexos $\overline{f^\bullet} : X^\bullet \to Y^\bullet$ é um *isomorfismo* na categoria homotópica se existe uma classe de equivalência de morfismos de complexos $\overline{g^\bullet} : Y^\bullet \to X^\bullet$ tal que a composição $f^\bullet \circ g^\bullet \sim id_{Y^\bullet}$ e $g^\bullet \circ f^\bullet \sim id_{X^\bullet}$. Dizemos que $X^\bullet$ e $Y^\bullet$ são *isomorfos* em $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ e denotamos por $X^\bullet \simeq_K Y^\bullet$ se existe um isomorfismo $\overline{f^\bullet} : X^\bullet \to Y^\bullet$ em $\mathrm{K}(\mathcal{A})$.

As seguintes categorias também podem ser definidias:

- $\mathrm{K}^-(\mathcal{A})$ categoria homotópica de complexos limitados à direita.
- $\mathrm{K}^+(\mathcal{A})$ categoria homotópica de complexos limitados à esquerda.
- $\mathrm{K}^b(\mathcal{A})$ categoria homotópica de complexos limitados.
- $\mathrm{K}^{-,b}(\mathcal{A})$ categoria homotópica de complexos limitados à direita com cohomologia limitada.
- $\mathrm{K}^{+,b}(\mathcal{A})$ categoria homotópica de complexos limitados à esquerda com cohomologia limitada.

Proposição 1.5. *[42, Proposition 3.5.19]*

1. *Um complexo $X^\bullet \in C^-(\mathrm{mod}\text{-}A)$ é isomorfo a 0 em $K^-(\mathrm{mod}\text{-}A)$ se, e somente se, $X^\bullet$ é isomorfo a uma soma direta de complexos da forma*

$$\Phi_i(id_Z) : \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{id} Z \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots .$$

2. *Um complexo $X^\bullet \in C^-(\mathrm{mod}\text{-}A)$ tem a propriedade $\mathrm{H}(X) = 0$ se, e somente se, X é isomorfo a uma soma direta de complexos da forma*

$$\Phi_i(id_Z): \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow Z \xrightarrow{id} Z \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots.$$

Proposição 1.6. *[42, Proposition 3.5.23] Sejam* $\Bbbk$ *um corpo e* A *uma* $\Bbbk$*-álgebra de dimensão finita. Sejam* $X^\bullet$ *e* $Y^\bullet$ *complexos em* $K^{-,b}(\mathrm{proj}\text{-}A)$*. Então* $X^\bullet \simeq_K Y^\bullet$ *em* $K^{-,b}(\mathrm{proj}\text{-}A)$ *se, e somente se, existem complexos* $Z^\bullet, X'^\bullet, Y'^\bullet$ *em* $C^{-,b}(\mathrm{proj}\text{-}A)$ *tais que*

$$X^\bullet \simeq_C X'^\bullet \oplus Z^\bullet, \quad Y^\bullet \simeq_C Y'^\bullet \oplus Z^\bullet$$

em $C^{-,b}(\mathrm{proj}\text{-}A)$ *e tal que* $X'^\bullet \simeq Y'^\bullet \simeq_K 0$ *em* $K^{-,b}(\mathrm{proj}\text{-}A)$*.*

1.1.3 Localização de uma categoria

Como dissemos antes, a categoria derivada de uma categoria abeliana é definida pela *localização* da categoria homotópica sobre os quase isomorfismos. Nesta subseção apresentamos a definição da localização de uma categoria arbitrária sobre uma classe de morfismos. Vamos considerar uma classe especial de morfismos para definir a localização de categorias.

Definição 1.7. Uma classe S de morfismos em uma categoria $\mathcal{C}$ é chamado de *sistema multiplicativo* em $\mathcal{C}$ se satisfaz os seguintes axiomas:

1. S é fechado sob a composição (se $s, t \in S$ tem composição, então $st \in S$) e contém todos os morfismos identidade ($1_X \in S$ para todo objeto $X \in \mathcal{C}$).
2. Se $t : Z \to Y$ está em S, então para cada $g : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ existe um diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} W & \xrightarrow{f} & Z \\ \downarrow{\scriptstyle s} & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ X & \xrightarrow{g} & Y, \end{array}$$

   em $\mathcal{C}$ com $s \in S$.

3. Se $f, g : X \to Y$ são morfismos em $\mathcal{C}$, então as seguintes condições são equivalentes:
   (a) $sf = sg$ para algum $s \in S$ com origem Y.
   (b) $ft = gt$ para algum $t \in S$ com término X.

Definição 1.8. Seja S um sistema multiplicativo em uma categoria $\mathcal{C}$. Uma *localização* de $\mathcal{C}$ com relação a S é uma categoria $S^{-1}\mathcal{C}$, junto com um funtor $Q : \mathcal{C} \to S^{-1}\mathcal{C}$ tal que

1. $Q(s)$ é um isomorfismo em $S^{-1}\mathcal{C}$ para cada $s \in S$.
2. Qualquer funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tal que $F(s)$ é um isomorfismo para todo $s \in S$ se fatora de maneira única por Q. (Segue que $S^{-1}\mathcal{C}$ é única a menos de equivalência).

Para a construção dos morfismos da categoria de localização $S^{-1}\mathcal{C}$ denotamos por

$$fs^{-1} : X \xleftarrow[s]{} X_1 \xrightarrow{f} Y$$

e a chamamos de fração à esquerda de X para Y se $s \in S$. Dizemos que fs^{-1} é *equivalente* a

$$gt^{-1} : X \xleftarrow[t]{} X_2 \xrightarrow{g} Y$$

se existe uma fração à esquerda de X para Y $X \longleftarrow X_3 \longrightarrow Y$ fazendo o seguinte diagrama comutar em $\mathcal{C}$:

$$\begin{tikzcd}
 & X_1 \arrow[dl, "s"'] \arrow[dr, "f"] & \\
X & X_3 \arrow[l] \arrow[u] \arrow[r] \arrow[d] & Y \\
 & X_2. \arrow[ul, "t"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Denotamos por $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ a classe de classes de equivalência de frações à esquerda de X para Y. Para que seja possível definir uma categoria $S^{-1}\mathcal{C}$, é necessário que $\mathrm{Hom}_S(X, Y)$ seja um conjunto. Por isso consideremos S um sistema multiplicativo *localmente pequeno*, isto é, se para cada X existe um conjunto S_X de morfismos em S, todos terminando em X, tais que para cada $X_1 \to X$ em S existe um morfismo $X_2 \to X_1 \to X$ que está em S_X, neste caso $H_S(X, Y)$ é um conjunto. Deste modo, é possível construir uma categoria $S^{-1}\mathcal{C}$ com os objetos sendo os objetos de $\mathcal{C}$ e os morfismos são as classes de equivalência de frações à esquerda. Para mais detalhes recomendamos consultar [40, Section 10.3].

1.1.4 A categoria derivada

Sejam $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana e $\mathrm{C}(\mathcal{A})$ a categoria de complexos sobre $\mathcal{A}$.

Lema 1.9. *[40, Proposition 10.4.1] A classe de quase isomorfismos de* $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ *formam um sistema multiplicativo.*

A *categoria derivada* de complexos de $\mathcal{A}$, denotada por $\mathrm{D}(\mathcal{A})$, é a categoria obtida de $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ pela localização com relação ao conjunto de quase isomorfismos. De modo análogo, como foi definido na categoria de homotopia, defini-se

- $\mathrm{D}^-(\mathcal{A})$ categoria derivada de complexos limitados à direita
- $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ categoria derivada de complexos limitados à esquerda
- $\mathrm{D}^b(\mathcal{A})$ categoria derivada de complexos limitados.

Proposição 1.10. *[40, Proposition 10.4.4] Seja A uma $\Bbbk$-álgebra. Então, a classe de quase-isomorfismos de $K(\mathrm{mod}\text{-}A)$ é um sistema multiplicativo localmente pequeno.*

Logo, existem a categoria derivada $D(\mathrm{mod}\text{-}A)$ e as subcategorias $D^-(\mathrm{mod}\text{-}A)$, $D^+(\mathrm{mod}\text{-}A)$, $\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}A)$.

1.1.5 Categorias trianguladas

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e T um automorfismo de $\mathcal{C}$. O automorfismo T é chamado *funtor translação*. Um triângulo (X, Y, Z, u, v, w) em $\mathcal{C}$ é dado pelos objetos X, Y, Z em $\mathcal{C}$ e morfismos $u : X \to Y$, $v : Y \to Z$ e $w : Z \to TX$. Notação

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} TX.$$

Um *morfismo de triângulos* de (X, Y, Z, u, v, w) a (X', Y', Z', u', v', w') é a tripla (f, g, h) de morfismos tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "u"] \arrow[d, "f"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "g"] & Z \arrow[r, "w"] \arrow[d, "h"] & TX \arrow[d, "Tf"] \\
X' \arrow[r, "u'"] & Y' \arrow[r, "v'"] & Z' \arrow[r, "w'"] & TX'.
\end{tikzcd}$$

Se f, g e h são isomorfismos em $\mathcal{C}$, o morfismo de triângulos é então chamado de *isomorfismo*.

Um conjunto $\mathcal{T}$ de triângulos em $\mathcal{C}$ é uma *triangulação* de $\mathcal{C}$ se as seguintes condições são satisfeitas. Os elementos de $\mathcal{T}$ são chamados de *triângulos distinguidos*.

(TR1) Cada triângulo isomorfo a um triângulo distinguido é um triângulo distinguido. Cada morfismo $u : X \to Y$ em $\mathcal{C}$ pode ser imerso em um triângulo distinguido (X, Y, Z, u, v, w). O triângulo $(X, X, 0, 1_X, 0, 0)$ é um triângulo distinguido, onde 1_X denota o morfismo identidade de X a X.

(TR2) (X, Y, Z, u, v, w) é um triângulo distinguido se, e somente se, $(Y, Z, TX, v, w, -Tu)$ é um triângulo distinguido.

(TR3) Dados dois triângulos distinguidos (X, Y, Z, u, v, w) e (X', Y', Z', u', v', w') e morfismos $f : X \to X'$, $g : Y \to Y'$ tais que $u'f = gu$, existe um morfismo (f, g, h) do primeiro triângulo ao segundo.

(TR4) (O axioma octaedral) Considere os triângulos distinguidos $(X, Y, Z', u, i, i'), (Y, Z, X', v, j, j')$ e (X, Z, Y', vu, k, k'). Então existem morfismos $f : Z' \to Y', g : Y' \to X'$ tais que o seguinte diagrama comuta e a terceira linha é um triângulo distinguido.

$$\begin{tikzcd}
T^{-1}Y' \arrow[r, "T^{-1}k'"] \arrow[d, "T^{-1}g"] & X \arrow[r, "1_X"] \arrow[d, "u"] & X \arrow[d, "vu"] & & \\
T^{-1}X' \arrow[r, "T^{-1}j'"] & Y \arrow[r, "v"] \arrow[d, "i"] & Z \arrow[r, "j"] \arrow[d, "k"] & X' \arrow[r, "j'"] \arrow[d, "1_{X'}"] & TY \arrow[d, "Ti"] \\
& Z' \arrow[r, "f"] \arrow[d, "i'"] & Y' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "k'"] & X' \arrow[r, "(Ti)j'"] & TZ' \\
& TX \arrow[r, "1_{TX}"] & TX. & &
\end{tikzcd}$$

A categoria aditiva $\mathcal{C}$ junto com um funtor translação T e uma triangulação $\mathcal{T}$ é chamada de *categoria triangulada*.

Seja $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ a categoria homotópica de uma categoria abeliana $\mathcal{A}$. Seja $f^\bullet : X^\bullet \to Y^\bullet$ um morfismo de complexos em $\mathrm{K}(\mathcal{A})$. Definimos o complexo $C(f^\bullet)$, chamado de *cone* do morfismo de complexo $f^\bullet$, por

$$C(f^\bullet) : \cdots \longrightarrow X^i \oplus Y^{i-1} \xrightarrow{d^{i-1}_{C(f)}} X^{i+1} \oplus Y^i \xrightarrow{d^{i}_{C(f)}} X^{i+2} \oplus Y^{i+1} \longrightarrow \cdots .$$

onde

$$d^n_{C(f)} = \begin{bmatrix} -d^{n+1}_X & 0 \\ f^{n+1} & d^n_Y \end{bmatrix}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Considere os morfismos de complexos $i_{f^\bullet} : Y\bullet \to C(f^\bullet)$ definido por

$$i^n_{f^\bullet} = \begin{bmatrix} 0 \\ id_{Y^n} \end{bmatrix}$$

e $p_{f^\bullet} : C(f^\bullet) \to X^\bullet[1]$ definido por

$$p^n_{f^\bullet} = \begin{bmatrix} id_{X^{n+1}} & 0 \end{bmatrix}$$

para todo $n \in \mathbb{Z}$.

Definimos um triângulo distinguido em $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ como um triângulo isomorfo a um triângulo da forma $X^\bullet \xrightarrow{f^\bullet} Y^\bullet \xrightarrow{i_{f^\bullet}} C(f^\bullet) \xrightarrow{p_{f^\bullet}} X^\bullet[1]$. A categoria $\mathrm{K}(\mathcal{A})$ com esta triangulação e o funtor translação $T : \mathrm{K}(\mathcal{A}) \to \mathrm{K}(\mathcal{A})$ dado por $T(X^\bullet) = X^\bullet[1]$ é uma categoria triangulada. De modo análogo podemos induzir uma triangulação para a categoria $\mathrm{D}(\mathcal{A})$ e suas respectivas subcategorias $\mathrm{K}^-(\mathcal{A})$, $\mathrm{K}^+(\mathcal{A})$, $\mathrm{K}^b(\mathcal{A})$, $\mathrm{D}^-(\mathcal{A})$, $\mathrm{D}^+(\mathcal{A})$ e $\mathrm{D}^b(\mathcal{A})$ e mostrar que são categorias trianguladas. As demonstrações podem ser consultadas em [42, Proposition 3.5.25, Proposition 3.5.40].

Sejam $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, T, \mathcal{T})$ e $\mathcal{C}' = (\mathcal{C}', T', \mathcal{T}')$ categorias trianguladas. Um funtor aditivo $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é chamado de *exato* se existe uma transformação natural inversível $\alpha : FT \to T'F$ tal que $(FX, FY, FZ, Fu, Fv, \alpha_X Fw)$ está em $\mathcal{T}'$ sempre que (X, Y, Z, u, v, w) está em $\mathcal{T}$.

Se um funtor exato $F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ é uma equivalência de categorias, chamamos ele de uma *equivalência triangulada*. Neste caso, $\mathcal{C}$ e $\mathcal{C}'$ são então chamadas *equivalentes como categorias trianguladas.*

Proposição 1.11. *[42, Proposition 3.5.43] Seja A uma $\Bbbk$-álgebra. Então existe uma equivalência de categorias trianguladas:*

- $D^-(\mathrm{mod}\text{-}A) \simeq K^-(\mathrm{proj}\text{-}A)$
- $D^b(\mathrm{mod}\text{-}A) \simeq K^{-,b}(\mathrm{proj}\text{-}A)$

Veja também [40], [33].

1.1.6 Teorema de Rickard

O Teorema de Rickard é uma importante ferramenta na classificação de categorias derivadas de álgebras. Esta caracterização reduz o problema de encontrar equivalências de categorias a encontrar *complexos tilting* na categoria $K^b(\mathrm{proj}\text{-}A)$.

Sejam $\mathcal{C}$ uma categoria aditiva e X um objeto de $\mathcal{A}$. Denotamos por $\mathrm{add}(X)$ a subcategoria plena de $\mathcal{A}$ que consiste de todos os somandos diretos de somas finitas de cópias de X.

Teorema 1.12. *[34, Theorem 6.4] Sejam A e B duas álgebras. As seguintes condições são equivalentes:*

a) $D^b(\text{mod-}A)$ *e* $D^b(\text{mod-}B)$ *são equivalentes como categorias trianguladas.*

b) $K^b(\text{proj-}A)$ *e* $K^b(\text{proj-}B)$ *são equivalentes como categorias trianguladas.*

c) A é isomorfa a $\text{End}(T)$, *sendo T um objeto de* $K^b(\text{proj-}A)$ *satisfazendo*

(i) $\text{Hom}(T, T[i]) = 0$ *para* $i \neq 0$

(ii) $\text{add}(T)$ *gera* $K^b(\text{proj-}A)$ *como uma categoria triangulada.*

Um objeto T em $K^b(\text{proj-}A)$ é chamado de *complexo tilting* se satisfaz as condições (i) e (ii) do teorema anterior.

Definição 1.13. Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ duas categorias abelianas. Dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{C}$ são *derivadamente equivalentes* se suas categorias derivadas limitadas $\mathrm{D}^b(\mathcal{A})$ e $\mathrm{D}^b(\mathcal{C})$ são equivalentes como categorias trianguladas e denotamos $\mathcal{A} \simeq_{der} \mathcal{C}$. Dizemos que duas $\Bbbk$-álgebras A e B são *derivadamente equivalentes*, denotamos $A \simeq_{der} B$, se suas categorias de módulos $\text{mod-}A$ e $\text{mod-}B$ são derivadamente equivalentes.

1.1.7 Categorias hereditárias

Apresentaremos nesta seção uma caracterização de categorias hereditárias com objetos *tilting* demonstrada por Happel em [19].

Sejam $\Bbbk$ um corpo algebricamente fechado. Uma categoria é uma $\Bbbk$-*categoria* se seus espaços de morfismos são $\Bbbk$-espaços vetoriais e a composição é $\Bbbk$-bilinear.

Uma decomposição $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2$ de uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é um par de subcategorias plenas $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2$ tais que cada objeto em $\mathcal{C}$ é soma direta de dois objetos de $\mathcal{C}_1$ e $\mathcal{C}_2$, e $Hom_{\mathcal{C}}(X_1, X_2) = 0 = Hom_{\mathcal{C}}(X_2, X_1)$ para todo $X_1 \in \mathcal{C}_1$ e $X_1 \in \mathcal{C}_1$. Uma categoria aditiva $\mathcal{C}$ é dita uma *categoria conexa* se não admite uma decomposição própria $\mathcal{C} = \mathcal{C}_1 \bigcup \mathcal{C}_2$.

Seja $\mathcal{H}$ uma $\Bbbk$-categoria abeliana conexa. Dizemos que $\mathcal{H}$ é *hereditária* se $\text{Ext}^n_{\mathcal{H}}(M, N) = 0$ para todo $n \geq 2$ e para quaisquer M, N em $\mathcal{H}$.

Vamos assumir, daqui em diante, que $\mathcal{H}$ é uma categoria hereditária e Ext-finita, isto é, $\text{Hom}(X, Y)$ e $\text{Ext}^1(X, Y)$ tem dimensão finita como $\Bbbk$-espaços vetoriais, para todo $X, Y \in \mathcal{H}$.

Exemplo 1.14. [24, Example 2.1, Ch. 6] Se H é uma álgebra hereditaria, então $\mathcal{H} = \text{mod-}H$ é uma categoria hereditária.

Exemplo 1.15. [24, Example 2.6, Ch. 6] A categoria de feixes coherentes $\text{coh}\,\mathbb{X}_{p_1,\cdots,p_t}$ de uma linha projetiva de pesos $\mathbb{X}_{p_1,\cdots,p_t}$ no sentido de [15] é uma categoria hereditária.

Seja $\mathcal{A}$ uma categoria abeliana. Dizemos que a *categoria repetitiva* de $\mathcal{A}$ $\mathrm{R}(\mathcal{A}) = \bigvee_{n\in\mathbb{Z}} \mathcal{A}[n]$ é o fecho aditivo da união disjunta de cópias $\mathcal{A}[n]$ de $\mathcal{A}$, os objetos são escritos na forma $A[n]$, com A em $\mathcal{A}$, com morfismos dados por $\text{Hom}(A[m], B[n]) = \text{Ext}^{n-m}(A, B)$ e composição dada pelo produto de Yoneda de extensões. Identificando $\mathcal{A}[n]$ com os complexos com cohomologia concentrada no grau n, a categoria repetitiva é a subcategoria plena da categoria derivada limitada $\mathrm{D}^b(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$. Além disso, com esta notação o funtor translação para a categoria derivada envia $A[m]$ a $A[m+1]$. Cada objeto X na categoria repetitiva de $\mathcal{A}$ tem a forma $X = \oplus_{n\in\mathbb{Z}} X_n[n]$ onde $X_n \in \mathcal{A}$ e somente uma quantidade finita de X_n é não-nula.

Teorema 1.16. *[24, Theorem 3.1, Ch. 6] Seja $\mathcal{H}$ uma categoria abeliana hereditária. Então a categoria repetitiva* $\mathrm{R}(\mathcal{H})$ *e a categoria derivada limitada* $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ *são naturalmente equivalentes.*

1.2 Álgebras

Seja A uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita. Um elemento $e \in A$ é chamado de *idempotente* se $e^2 = e$. Os idempotentes $e_1, e_2 \in A$ são chamados de *ortogonais* se $e_1e_2 = e_2e_1 = 0$. O idempotente $e \in A$ é chamado de *primitivo* se e não pode ser escrito como uma soma $e = e_1 + e_2$ onde e_1, e_2 são idempotentes ortogonais não nulos de A. Um conjunto $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de idempotentes de A dois a dois ortogonais é chamado de *completo* se $\sum\limits_{i=1}^{n} e_i = 1$.

Definição 1.17. Seja A uma $\Bbbk$-álgebra com um conjunto completo $\{e_1, \cdots, e_n\}$ de idempotentes dois a dois ortogonais primitivos. A álgebra A é chamada de *básica* se $e_iA \ncong e_jA$, para todo $i \neq j$.

Proposição 1.18. *[1, Proposition 6.2, Ch. I] Uma $\Bbbk$-álgebra A de dimensão finita é básica se, e somente se, a álgebra $B = \dfrac{A}{rad\,A}$ é isomorfa a um produto $\Bbbk \times \Bbbk \times \cdots \times \Bbbk$ de cópias de $\Bbbk$.*

Exemplo 1.19. Seja

$$A = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}$$

a $\Bbbk$-álgebra de matrizes triangulares inferiores de ordem 3 é uma álgebra básica. De fato, seja I o ideal bilateral que consiste de todas as matrizes triangulares inferiores com diagonal principal nula:

$$I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \Bbbk & 0 & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk & 0 \end{bmatrix}$$

Observe que $I^3 = 0$, logo I é um ideal nilpotente de A, consequentemente $I \subseteq rad\,A$. Considere $\varphi : A \to \Bbbk \times \Bbbk \times \Bbbk$ um homomorfismo de álgebras definido por $\varphi([a_{ij}]) = (a_{11}, a_{22}, a_{33})$ onde $[a_{ij}] \in A$. Como o núcleo de φ é o ideal I, então $\dfrac{A}{I}$ é isomorfa a $\Bbbk \times \Bbbk \times \Bbbk$. Logo, $I = rad\,A$. Pela Proposição (1.18), A é uma álgebra básica.

Definição 1.20. Duas $\Bbbk$-álgebras de dimensão finita A e B são ditas *Morita equivalentes* se $\operatorname{mod} A$ e $\operatorname{mod} B$ são equivalentes.

Teorema 1.21. *[1, Corollary 6.10, Ch. I] Para qualquer $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita A existe uma $\Bbbk$-álgebra básica de dimensão finita B que é Morita equivalente a A.*

1.2.1 Aljavas e álgebras de caminhos

Toda $\Bbbk$-álgebra básica, conexa de dimensão finita é isomorfa a um quociente de uma álgebra de caminhos. Nesta seção apresentamos as definições e principais conceitos a respeito das álgebras de caminhos. Para mais detalhes, veja [1], [2].

Definição 1.22. Uma *aljava* é uma quádrupla $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, s, t)$, onde $\mathcal{Q}_0$ e $\mathcal{Q}_1$ são conjuntos e $s, t : \mathcal{Q}_1 \to \mathcal{Q}_0$ são duas aplicações. Os elementos de $\mathcal{Q}_0$ são chamados de *vértices*, os elementos de $\mathcal{Q}_1$ são chamados de flechas. Os vértices $s(\alpha)$ e $t(\alpha)$ são chamados de *início* e *final*, respectivamente, da flecha α. Uma aljava $\mathcal{Q}$ é finita se $\mathcal{Q}_0$ e $\mathcal{Q}_1$ são conjuntos finitos.

Uma flecha $\alpha \in \mathcal{Q}_1$ de início $a = s(\alpha)$ e final $b = t(\alpha)$ é denotado por $\alpha : a \to b$. Sejam $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, s, t)$ uma aljava e $a, b \in \mathcal{Q}_0$. Dizemos que $a \in \mathcal{Q}_0$ é uma *fonte* se não existe flecha $\alpha \in \mathcal{Q}_1$ tal que $t(\alpha) = a$ e dizemos que $b \in \mathcal{Q}_0$ é um *poço* se não existe flecha $\alpha \in \mathcal{Q}_1$ tal que $s(\alpha) = b$. Um *caminho de comprimento* $l \geq 1$ com início a e final b é uma sequência

$$\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$$

onde $\alpha_k \in \mathcal{Q}_1$ para todo $1 \leq k \leq l$ e temos $s(\alpha_1) = a$, $t(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ para cada $1 \leq k < l$ e $t(\alpha_l) = b$.

$$a = a_0 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \longrightarrow \cdots \xrightarrow{\alpha_l} a_l = b.$$

Definição 1.23. Uma *subaljava* de uma aljava $\mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_0, \mathcal{Q}_1, s, t)$ é uma aljava $\mathcal{Q}' = (\mathcal{Q}'_0, \mathcal{Q}'_1, s', t')$ talque $\mathcal{Q}'_0 \subseteq \mathcal{Q}_0$, $\mathcal{Q}'_1 \subseteq \mathcal{Q}_1$ e s', t' são as restrições de s, t a $\mathcal{Q}'_1$. Uma subaljava é chamada de *plena* se $\mathcal{Q}'_1$ é igual ao conjunto de todas as flechas de $\mathcal{Q}_1$ cujo início e final pertencem a $\mathcal{Q}'_0$. Uma subaljava plena $\mathcal{Q}'$ de $\mathcal{Q}$ é chamada de *convexa* em $\mathcal{Q}$ se, para qualquer caminho $a_0 \longrightarrow a_1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow a_t$ em $\mathcal{Q}$ com $a_0, a_t \in \mathcal{Q}'_0$, temos $a_i \in \mathcal{Q}'_0$, para todo i tal que $0 \leq i \leq t$.

Para cada vértice $a \in \mathcal{Q}_0$ definimos um caminho de comprimento $l = 0$, chamado de *caminho estacionário* em a denotado por ε_a. Um caminho de comprimento $l \geq 1$ é chamado de *ciclo* se seu início e final coincidem. Uma aljava é chamada *acíclica* se não contém ciclos. O grafo subjacente $\bar{\mathcal{Q}}$ de uma aljava $\mathcal{Q}$ é obtido de $\mathcal{Q}$ esquecendo as orientações das flechas. A aljava $\mathcal{Q}$ é chamada de *conexa* se $\bar{\mathcal{Q}}$ é um grafo conexo, isto é, quando quaisquer dois vértices de $\bar{\mathcal{Q}}$ podem ser ligados por arestas de $\bar{\mathcal{Q}}$.

Definição 1.24. Seja $\mathcal{Q}$ uma aljava. A *álgebra de caminhos* $\Bbbk\mathcal{Q}$ de $\mathcal{Q}$ é a $\Bbbk$-álgebra cujo $\Bbbk$-espaço vetorial subjacente tem como sua base o conjunto de todos os caminhos $\alpha_1 \cdots \alpha_l$ de comprimento $l \geq 0$ em $\mathcal{Q}$ e tal que o produto de dois vetores da base $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_l$ e $\beta_1 \beta_2 \cdots \beta_k$ é igual a zero se $t(\alpha_l) \neq s(\beta_1)$ e é igual ao caminho composto $\alpha_1 \cdots \alpha_l \beta_1 \cdots \beta_k$ se $t(\alpha_l) = s(\beta_1)$.

Definição 1.25. Seja $\mathcal{Q}$ uma aljava finita e conexa. O ideal bilateral da álgebra de caminhos $\Bbbk\mathcal{Q}$ gerado pelas flechas de $\mathcal{Q}$ é chamado de *ideal de flechas* de $\Bbbk\mathcal{Q}$ e é denotado por $R_{\mathcal{Q}}$.

Proposição 1.26. *[1, Proposition 1.26, Ch. I] Seja $\mathcal{Q}$ uma aljava acíclica, conexa e finita. A álgebra de caminhos $\Bbbk\mathcal{Q}$ é uma $\Bbbk$-álgebra de dimensão finita, associativa, conexa e básica com uma identidade, tendo o ideal de flechas $R_{\mathcal{Q}}$ como radical e o conjunto $\{\varepsilon_a | a \in \mathcal{Q}_0\}$ como um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos.*

Definição 1.27. Seja $\mathcal{Q}$ uma aljava. Uma *relação* em $\mathcal{Q}$ com coeficientes em $\Bbbk$ é uma combinação linear de caminhos de comprimento pelo menos dois tendo o mesmo início e mesmo final. Assim, uma relação ρ é um elemento de $\Bbbk\mathcal{Q}$ tal que

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i,$$

onde λ_i são escalares (não todos nulos) e w_i são caminhos em $\mathcal{Q}$ de comprimento pelo menos 2 tal que, se $i \neq j$ então o início (final) de w_i coincide com o de w_j.

Se $m = 1$, a relação é chamada de *relação zero* ou *monomial* . Se é da forma $w_1 - w_2$ é chamada de *relação de comutatividade.*

Se $\{\rho_j\}_{j\in J}$ é um conjunto de relações para uma aljava tal que o ideal gerado por elas $\langle \rho_j | j \in J\rangle$ é admissível, dizemos que a aljava $\mathcal{Q}$ é limitada pelas relações $\{\rho_j\}_{j\in J}$.

Definição 1.28. Sejam $\mathcal{Q}$ uma aljava e $R_{\mathcal{Q}}$ o ideal de flechas da álgebra de caminhos $\Bbbk\mathcal{Q}$. Um ideal bilateral $\mathcal{I}$ de $\Bbbk\mathcal{Q}$ é *admissível* se existe $m \geq 2$ tal que

$$R_{\mathcal{Q}}^m \subseteq \mathcal{I} \subseteq R_{\mathcal{Q}}^2.$$

Se $\mathcal{I}$ é um ideal admissível de $\Bbbk\mathcal{Q}$, o par $(\mathcal{Q},\mathcal{I})$ é chamado de *aljava limitada.* A álgebra quociente $\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ é a *álgebra da aljava limitada* .

Proposição 1.29. *[1, Corollary 2.12, Ch. I] Sejam $\mathcal{Q}$ uma aljava conexa finita, $R_{\mathcal{Q}}$ o ideal de flechas de $\Bbbk\mathcal{Q}$ e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $\Bbbk\mathcal{Q}$. A álgebra da aljava limitada $\Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ é uma álgebra de dimensão finita, conexa e básica com uma identidade, tendo $R_{\mathcal{Q}}/\mathcal{I}$ como radical e $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \,|\, a \in \mathcal{Q}_0\}$ como conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos.*

Seja $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra da aljava limitada $(\mathcal{Q},\mathcal{I})$. Como A é básica e $\{e_a = \varepsilon_a + \mathcal{I} \,|\, a \in \mathcal{Q}_0\}$ é um conjunto completo de idempotentes ortogonais primitivos de A, a decomposição $A_A = \bigoplus_{a\in\mathcal{Q}_0} e_aA$ é uma decomposição de A_A como uma soma direta de A-módulos projetivos indecomponíveis dois a dois não isomorfos. Assim, qualquer A-módulo projetivo indecomponível é isomorfo a e_aA, para algum $a \in \mathcal{Q}_0$. Denotamos estes módulos por $P_a = e_aA$, para cada $a \in \mathcal{Q}_0$.

Para cada álgebra básica, conexa de dimensão finita também é possível definir uma aljava correspondente.

Definição 1.30. Sejam A uma álgebra básica, conexa de dimensão finita e $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ um conjunto completo de idempotentes, ortogonais, primitivos de A. A *aljava ordinária* de A, denotada por $\mathcal{Q}_A$, é definida como segue:

a) Os vértices de $\mathcal{Q}_A$ são os números $1, 2, 3, \cdots, n$, que estão em correspondência bijetiva com os idempotentes $e_1, e_2, e_3, \cdots, e_n$.

b) Dados dois vértices $a, b \in (\mathcal{Q}_A)_0$, as flechas $\alpha : a \to b$ estão em correspondência bijetiva com os vetores em uma base do $\Bbbk$-espaço vetorial $e_a\left(\frac{radA}{rad^2A}\right)e_b$, onde $radA$ denota o radical de Jacobson da álgebra A.

Teorema 1.31. *[1, Theorem 3.7, Ch. I] Seja A uma álgebra básica e conexa de dimensão finita. Existe um ideal admissível $\mathcal{I}$ de $\Bbbk\mathcal{Q}_A$ tal que $A \simeq \Bbbk\mathcal{Q}_A/\mathcal{I}$.*

1.2.2 Representações de aljavas limitadas

As aljavas fornecem uma estrutura gráfica para as álgebras o que nos permite uma conveniente visualização das álgebras. Nesta seção veremos uma forma de visualizar módulos sobre álgebras através da linguagem gráfica das aljavas.

Definição 1.32. Seja $\mathcal{Q}$ uma aljava finita. Uma *representação* M de $\mathcal{Q}$ é definida por:

(a) Para cada vértice a em $\mathcal{Q}_0$ é associado um $\Bbbk$-espaço vetorial M_a.

(b) Para cada flecha $\alpha : a \to b$ em $\mathcal{Q}_1$ é associada uma aplicação $\Bbbk$-linear $\varphi_\alpha : M_a \to M_b$.

Uma tal representação é denotada por $M = (M_a, \varphi_\alpha)_{a\in\mathcal{Q}_0, \alpha\in\mathcal{Q}_1}$. Dizemos que uma representação tem *dimensão finita* se cada espaço vetorial M_a é de dimensão finita.

Sejam $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ e $M' = (M'_a, \varphi'_\alpha)$ duas representações de $\mathcal{Q}$. Um *morfismo* $f : M \to M'$ é uma família $f = (f_a)_{a\in\mathcal{Q}_0}$ de aplicações $\Bbbk$-lineares $(f_a : M_a \to M'_a)_{a\in\mathcal{Q}_0}$ que são compatíveis com a estrutura das aplicações φ_α, isto é, para cada flecha $\alpha : a \to b$, temos $\varphi'_\alpha f_a = f_b \varphi_\alpha$ ou equivalentemente o seguinte quadrado é comutativo:

$$\begin{tikzcd} M_a \arrow[r, "\varphi_\alpha"] \arrow[d, "f_a"] & M_b \arrow[d, "f_b"] \\ M'_a \arrow[r, "\varphi'_\alpha"] & M'_b. \end{tikzcd}$$

Sejam $f : M \to M'$ e $g : M' \to M''$ dois morfismos de representações de $\mathcal{Q}$, onde $f = (f_a)_{a\in Q_0}$ e $g = (g_a)_{a\in Q_0}$. Sua composição é definida como a família $gf = (g_a f_a)_{a\in Q_0}$. Então gf é facilmente visto ser o morfismo de M para M''.

Temos assim definida uma categoria $rep(\mathcal{Q})$ de representações de $\mathcal{Q}$ $\Bbbk$-lineares de dimensão finita.

Definição 1.33. Sejam $\mathcal{Q}$ uma aljava finita e $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ uma representação de $\mathcal{Q}$. Para qualquer caminho não trivial $w = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_l$ de a para b em $\mathcal{Q}$, definimos *avaliação* de M no caminho w ser a aplicação $\Bbbk$-linear de M_a para M_b definida por

$$\varphi_w = \varphi_{\alpha_l}\varphi_{\alpha_{l-1}}\cdots\varphi_{\alpha_2}\varphi_{\alpha_1}.$$

A definição de avaliação se extende a combinações lineares de caminhos com uma origem comum e um final comum; assim seja

$$\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i w_i,$$

uma combinação $\Bbbk$-linear, onde $\lambda_i \in \Bbbk$ e w_i é um caminho em $\mathcal{Q}$, para cada i, então

$$\varphi_\rho = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_{w_i}.$$

Sejam $\mathcal{Q}$ uma aljava finita e $\mathcal{I}$ um ideal admissível de $\Bbbk\mathcal{Q}$. Uma representação $M = (M_a, \varphi_\alpha)$ de $\mathcal{Q}$ é dita ser *limitada por* $\mathcal{I}$, ou *satisfaz as relações* em $\mathcal{I}$, se temos $\varphi_\rho = 0$, para todas as relações $\rho \in \mathcal{I}$.

Se $\mathcal{I}$ é gerado pelo conjunto finito de relações $\{\rho_1, \cdots, \rho_m\}$, a representação M é limitada por $\mathcal{I}$ se, e somente se, $\varphi_{\rho_j} = 0$, para todo j tal que $1 \leq j \leq m$.

Denotamos por $rep(\mathcal{Q}, \mathcal{I})$ a subcategoria plena de $rep(\mathcal{Q})$ consistindo das representações de $\mathcal{Q}$ limitadas por $\mathcal{I}$.

Teorema 1.34. *[1, Theorem 1.6, Ch. II] Sejam $A = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, onde $\mathcal{Q}$ é uma aljava conexa finita e $\mathcal{I}$ é um ideal admissível de $\Bbbk\mathcal{Q}$. Existe uma equivalência $\Bbbk$-linear de categorias*

$$F : \mathrm{mod}\text{-}A \to rep(\mathcal{Q}, \mathcal{I}).$$

1.2.3 Álgebras hereditárias

As provas dos teoremas a seguir podem ser encontradas em [1].

Definição 1.35. Uma álgebra A é chamada de *hereditária* se qualquer ideal à direita de A é projetivo como um A-módulo.

Exemplo 1.36. Seja A a álgebra de matrizes triangulares inferiores

$$A = \begin{bmatrix} \Bbbk & 0 \\ \Bbbk & \Bbbk \end{bmatrix}.$$

Então, denotando por $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ e $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ as matrizes idempotentes. Os únicos ideais à direita próprios são e_1A, e_2A e $e_{21}\Bbbk = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Bbbk & 0 \end{pmatrix} \cong e_1A$ com $e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Como e_1A e e_2A são somandos diretos de A_A, todos eles são A-módulos projetivos e A é hereditária à direita.

Teorema 1.37. *[1, Theorem 1.4, Ch. VII] Seja A uma álgebra. Então, A é hereditária se, e somente se, $gl.dimA \leq 1$, onde $gl.dimA$ é a dimensão global de A.*

Teorema 1.38. *[1, Theorem 1.7, Ch. VII] Uma $\Bbbk$-álgebra conexa e básica H é hereditária se, e somente se, H é isomorfa a uma álgebra de caminhos $\Bbbk\vec{\Delta}$ de uma aljava acíclica, conexa e finita $\vec{\Delta}$.*

Teorema 1.39. *[1, Theorem 5.10, Ch. VII] Seja $\mathcal{Q}$ uma aljava conexa, finita e acíclica e $A = \Bbbk\mathcal{Q}$ a álgebra de caminhos de $\mathcal{Q}$. Então,*

1. *A álgebra A é de representação finita se, e somente se, o grafo subjacente $\bar{\mathcal{Q}}$ de $\mathcal{Q}$ é do tipo Dynkin $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$.*

2. *A álgebra A é de representação mansa se, e somente se, o grafo subjacente $\bar{\mathcal{Q}}$ de $\mathcal{Q}$ é do tipo Dynkin $\mathbb{A}_n$, $\mathbb{D}_n$, $\mathbb{E}_6$, $\mathbb{E}_7$, $\mathbb{E}_8$ ou do tipo Euclidiano $\widetilde{\mathbb{A}}_n$, $\widetilde{\mathbb{D}}_n$, $\widetilde{\mathbb{E}}_6$, $\widetilde{\mathbb{E}}_7$, $\widetilde{\mathbb{E}}_8$.*

1.2.4 Álgebras hereditárias por partes

A definição de álgebras hereditárias por partes apresentada nesta seção se encontra em [20]. E uma caracterização homológica foi provada em [23].

Dizemos que uma álgebra A é *hereditária por partes* se existe uma categoria abeliana, hereditária $\mathcal{H}$ e tal que as categorias derivadas limitadas $\mathrm{D}^b(\text{mod-}A)$ e $\mathrm{D}^b(\mathcal{H})$ são equivalentes como categorias trianguladas.

Dizemos que T é um *objeto tilting* em $\mathcal{H}$ se $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(T,T) = 0$ tal que $\mathrm{Hom}_{\mathcal{H}}(T,X) = 0 = \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}}(T,X)$ implica $X = 0$.

Teorema 1.40. *[19, Theorem 3.1] Seja $\mathcal{H}$ uma $\Bbbk$-categoria abeliana hereditária conexa com objeto tilting. Então $\mathcal{H}$ é derivadamente equivalente a* mod-H *para alguma $\Bbbk$-álgebra H hereditária de dimensão finita ou derivadamente equivalente à categoria derivada de feixes coerentes* $\mathrm{coh}\mathbb{X}$ *para alguma reta projetiva com peso $\mathbb{X}$.*

Observação 1.41. Se A é uma álgebra básica hereditária por partes, então $A \simeq_{der} \Bbbk\vec{\Delta}$, onde $\vec{\Delta}$ é uma aljava acíclica, ou $\text{mod-}A \simeq_{der} \operatorname{coh}\mathbb{X}_{p_1,\cdots,p_t}$, onde $\mathbb{X}_{p_1,\cdots,p_t}$ é uma reta projetiva com peso.

Dizemos que A uma $\Bbbk$-álgebra básica hereditária por partes é do *tipo módulos* se $A \simeq_{der} \Bbbk\vec{\Delta}$, neste caso, dizemos que $\vec{\Delta}$ ou Δ (o grafo subjacente de $\vec{\Delta}$) é o tipo de A. Dizemos que A uma $\Bbbk$-álgebra básica hereditária por partes é do *tipo feixes* se $\text{mod-}A \simeq_{der} \operatorname{coh}\mathbb{X}_{p_1,\cdots,p_t}$, neste caso, dizemos que $\mathbb{X}_{p_1,\cdots,p_t}$ é o tipo de A.

Álgebras canônicas

Mais detalhes sobre as álgebras canônicas podem ser encontrados em [35] e [37].

Sejam $\Bbbk$ um corpo, $p = (p_1, \cdots, p_t)$ uma sequência de $t \geq 2$ inteiros positivos (pesos) e $\lambda = (\lambda_3, \cdots, \lambda_t)$ uma sequência de elementos de $\Bbbk \setminus \{0\}$. A *álgebra canônica do tipo* (p, λ) é a álgebra $A(p, \lambda) = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ sendo $\mathcal{Q}$ a aljava

$$\begin{tikzcd}
 & a_1^{(1)} \arrow[ddl, "\alpha_1^{(1)}"'] & a_2^{(1)} \cdots \circ \arrow[l, "\alpha_2^{(1)}"'] & a_{p_1-1}^{(1)} \arrow[l, "\alpha_{p_1-1}^{(1)}"'] & \\
 & a_1^{(2)} \arrow[dl, "\alpha_1^{(2)}"] & a_2^{(2)} \cdots \circ \arrow[l, "\alpha_2^{(2)}"'] & a_{p_2-1}^{(2)} \arrow[l, "\alpha_{p_2-1}^{(2)}"'] & \\
0 & & & & \omega, \arrow[uul, "\alpha_{p_1}^{(1)}"'] \arrow[ul, "\alpha_{p_2}^{(2)}"] \arrow[dl, "\alpha_{p_t}^{(t)}"] \\
 & a_1^{(t)} \arrow[ul, "\alpha_1^{(t)}"] & a_2^{(t)} \cdots \circ \arrow[l, "\alpha_2^{(t)}"'] & a_{p_t-1}^{(t)} \arrow[l, "\alpha_{p_t-1}^{(t)}"'] &
\end{tikzcd}$$

e I é o ideal na álgebra de caminhos $\Bbbk\mathcal{Q}$ gerado pelas seguintes combinações lineares de caminhos de 0 a ω:

$$I = \langle \alpha^{(i)} - \alpha^{(2)} + \lambda_i \alpha^{(1)} \rangle,$$

com $\alpha^{(j)} = \alpha_{p_j}^{(j)} \cdots \alpha_1^{(j)}$, para $3 \leq j \leq t$.

Teorema 1.42. *[15, Theorem 3.2] Seja $\mathcal{H} = \operatorname{coh}\mathbb{X}(p, \lambda)$ a categoria de feixes coerentes em uma reta projetiva com peso sobre $\Bbbk$ com peso tipo $p = (p_1, \cdots, p_t)$. Então, $\mathcal{H}$ tem um objeto tilting cujo anel de endomorfismo é uma álgebra canônica de tipo (p, λ) para uma sequência de parâmetros $(1 = \lambda_3, \cdots, \lambda_t)$ de elementos de $\Bbbk$ não nulos distintos dois a dois.*

1.2.5 Álgebras de Nakayama

Nesta seção apresentamos alguns conceitos e alguns resultados sobre as álgebras seriais e as álgebras de Nakayama. Mais detalhes podem ser encontrados em [1].

Seja M um A-módulo à direita de dimensão finita.

Definição 1.43. Um A-módulo à direita M é chamado de *unisserial* se tem uma série de composição única. Dualmente se define para A-módulos à esquerda.

Lema 1.44. *[1, Lemma 2.2, Ch. V] As seguintes condições são equivalentes para um A-módulo à direita M:*

a) M é unisserial.

b) A série radical $M \supset \mathrm{rad}M \supset \mathrm{rad}^2M \supset \cdots \supset 0$ *é uma série de composição.*

c) A série socle $0 \subset \mathrm{soc}M \subset \mathrm{soc}^2M \subset \cdots \subset M$ *é uma série de composição*

Definição 1.45. Uma álgebra A é chamada de *serial à direita* se todo A-módulo à direita projetivo indecomponível é unisserial. Uma álgebra A é chamada *serial à esquerda* se todo A-módulo à esquerda projetivo indecomponível é unisserial.

Teorema 1.46. *[1, Theorem 2.6, Ch. V] Uma álgebra básica A é serial à direita se, e somente se, para cada ponto a de sua aljava ordinária $\mathcal{Q}_A$, existe no máximo uma flecha de origem a.*

Exemplo 1.47. Seja A a álgebra serial à direita dada pela aljava

$$\begin{tikzcd} \overset{1}{\circ} \arrow[r, "\alpha"] & \overset{2}{\circ} \arrow[loop right, "\beta"] \end{tikzcd}$$

e limitada por $\alpha\beta^3 = 0$ e $\beta^3 = 0$.

Observação 1.48. Em sua tese de doutorado [14], Cota classificou todas as álgebras seriais à esquerda derivadamente mansas.

Definição 1.49. Uma álgebra A é chamada de *álgebra de Nakayama* se é serial à esquerda e à direita.

Veja em [1] o seguinte resultado.

Teorema 1.50. *[1, Theorem 3.2, Ch. V] Uma álgebra básica e conexa A é uma álgebra de Nakayama se, e somente se, sua aljava ordinária $\mathcal{Q}_A$ é uma das seguintes aljavas:*

(a) $\mathbb{L}_n$*:*

$$1 \longrightarrow 2 \longrightarrow 3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow n-1 \longrightarrow n$$

(b) $\mathbb{C}_n$*:*

$$\begin{tikzcd}[column sep=small] & & & 0 \arrow[llld] & & & \\ 1 \arrow[r] & 2 \arrow[r] & 3 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & n-2 \arrow[r] & n-1. \arrow[lluu] & \end{tikzcd}$$

No caso $\mathcal{Q}_A = \mathbb{L}_n$, A é chamada de álgebra de Nakayama acíclica e $\mathcal{Q}_A = \mathbb{C}_n$ é o caso cíclico.

Chamamos de *álgebra de Nakayama acíclica truncada* e denotamo por $\Lambda(n, r) = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ a álgebra de Nakayama acíclica onde $\mathcal{Q}$ é uma aljava com n vértices e com ideal $\mathcal{I}$ gerado por todos caminhos de comprimento r, para $n, r \in \mathbb{N}$ e $n > r \geq 2$.

1.2.6 Álgebras de Incidência

Definição 1.51. Um conjunto parcialmente ordenado, ou *poset*, é um conjunto $\mathcal{S}$ com uma relação binária $R \subseteq \mathcal{S} \times \mathcal{S}$ satisfazendo as seguintes condições:

- Reflexividade: $(x, x) \in R$ para todo $x \in \mathcal{S}$;
- Antissimetria: Se $(x, y) \in R$ e $(y, x) \in R$ então $x = y$;
- Transitividade: Se $(x, y) \in R$ e $(y, z) \in R$ então $(x, z) \in R$.

Por simplicidade vamos escrever $x \leq y$ nos casos em que $(x, y) \in R$ e denotaremos o poset por $(\mathcal{S}, \leq)$ ou apenas por $\mathcal{S}$.

Dizemos que um poset $(\mathcal{S}, \leq)$ é *finito* se o conjunto $\mathcal{S}$ for finito. Dado um poset finito $\mathcal{S}$, digamos que $|\mathcal{S}| = n$, então podemos ordenar os elementos de $\mathcal{S}$ em uma sequência $x_1, \ldots, x_n$ de forma que se $x_i < x_j$ então $i < j$ para quaisquer $1 \leq i, j \leq n$.

Cada poset $(\mathcal{S}, \leq)$ pode ser associado a um grafo orientado, que é chamado de *diagrama de Hasse* de $\mathcal{S}$. Cada elemento de $\mathcal{S}$ está associado a um único vértice de seu diagrama de Hasse e, dados dois elementos $x < y \in \mathcal{S}$ tais que não existe um outro elemento $z \in \mathcal{S}$ tal que $x < z < y$ então temos uma flecha $x \longrightarrow y$ no diagrama.

Por simplicidade, chamaremos de *grafo de um poset* ao grafo subjacente ao diagrama de Hasse deste poset.

Definição 1.52. A *álgebra de incidência* de um poset finito $(\mathcal{S}, \leq)$ sobre um corpo $\Bbbk$, denotada por $\Bbbk\mathcal{S}$, é definida como a álgebra associativa que tem como base o conjunto $\{e_{xy} \ : \ x \leq y \text{ em } \mathcal{S}\}$. Para quaisquer $x \leq y$ e $z \leq w$ em $\mathcal{S}$, definimos a multiplicação por

$$e_{xy}e_{zw} = \begin{cases} e_{xw}, & \text{se } y = z; \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Qualquer poset $(\mathcal{S}, \leq)$ tem naturalmente uma estrutura de espaço topológico onde os *conjuntos fechados* são definidos pelos subconjuntos $X \subseteq \mathcal{S}$ tal que se $x \in X$ e $x' \leq x$, então $x' \in X$. Para cada $x \in \mathcal{S}$, denotamos por $\overline{\{x\}}$ o *fecho* de $\{x\}$ e por U_x o *subconjunto aberto minimal* de $\mathcal{S}$ contendo x. Então $\overline{\{x\}} = \{x' \in \mathcal{S} | x' \leq x\}$ e $U_x = \{x' \in \mathcal{S} | x' \geq x\}$.

1.3 Mutações

Esta seção é baseada nos resultados de [27] (veja também [38]).

1.3.1 Mutações de álgebras

Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de dimensão finita. Seja a um vértice de $\mathcal{Q}$ sem laços e considere as aplicações

$$f : P_a \to \bigoplus_{\alpha : t(\alpha) = a} P_{s(\alpha)}, \quad \text{e} \quad g : \bigoplus_{\beta : s(\beta) = a} P_{t(\beta)} \to P_a,$$

onde $f = \oplus\alpha$ é induzido pelas flechas α terminando em a e $g = \oplus\beta$ é induzido pelas flechas β começando em a. Vamos considerar os seguintes complexos de Λ-módulos projetivos:

$$L_a: \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow P_a \longrightarrow \bigoplus_{\alpha:t(\alpha)=a} P_{s(\alpha)} \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

$$R_a: \qquad \cdots \longrightarrow 0 \longrightarrow \bigoplus_{\beta:s(\beta)=a} P_{t(\beta)} \longrightarrow P_a \longrightarrow 0 \longrightarrow \cdots,$$

onde P_a está no grau -1 em L_a e no grau 1 em R_a. Definimos os complexos T_a^- e T_a^+ por

$$T_a^- = T_a^-(\Lambda) := L_a \oplus \left(\bigoplus_{b \in \mathcal{Q}_0, b \neq a} P_b \right) \text{ e } T_a^+ = T_a^+(\Lambda) := R_a \oplus \left(\bigoplus_{b \in \mathcal{Q}_0, b \neq a} P_b \right).$$

Definição 1.53. ([27]) Seja a um vértice de $\mathcal{Q}$ sem laços.

1. Dizemos que a *mutação negativa é definida* no vértice a se $T_a^-(\Lambda)$ é um complexo *tilting*. Neste caso, chamamos $\mu_a^-(\Lambda) := \mathrm{End}_{\mathrm{D}_\Lambda^b}(T_a^-)$ de *mutação negativa* de Λ no vértice a.
2. Dizemos que a *mutação positiva é definida* no vértice a se $T_a^+(\Lambda)$ é um complexo *tilting*. Neste caso, chamamos $\mu_a^+(\Lambda) := \mathrm{End}_{\mathrm{D}_\Lambda^b}(T_a^+)$ a *mutação positiva* de Λ no vértice a.

Teorema 1.54. *([27]) Seja a um vértice de $\mathcal{Q}$ sem laços.*

1. *Seja a um poço. Então a mutação negativa é definida no vértice a. Neste caso Λ e $\mu_a^-(\Lambda)$ são derivadamente equivalentes.*
2. *Seja a uma fonte. Então a mutação positiva é definida no vértice a. Neste caso Λ e $\mu_a^+(\Lambda)$ são derivadamente equivalentes.*

1.3.2 Mutações de posets

Nesta subseção seguimos as definições e resultados de [32].

Sejam $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, \leq)$ um poset e $a \in \mathcal{S}$. Chamamos de *conjunto dos predecessores imediatos de a* o conjunto

$$a^- = \{b \in \mathcal{S} \mid b < a \text{ e não existe } c \in \mathcal{S} \text{ tal que } b < c < a\}.$$

Analogamente, chamamos de *conjunto dos sucessores imediatos de a* o conjunto

$$a^+ = \{b \in \mathcal{S} \mid b > a \text{ e não existe } c \in \mathcal{S} \text{ tal que } b > c > a\}.$$

Definição 1.55. ([32], Definição 1.50) Seja $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, \leq)$ um poset.

1. Dizemos que a *mutação negativa é definida* no elemento a de $\mathcal{S}$, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

   (a) a é um elemento maximal de $\mathcal{S}$;

   (b) $|a^-| \leq 2$;

   (c) $\bigcap_{x \in a^-} U_x = \{a\}$ no caso de $|a^-| = 2$.

2. Dizemos que a *mutação positiva é definida* no elemento a de $\mathcal{S}$, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

   (a) a é um elemento minimal de $\mathcal{S}$;

   (b) $|a^+| \leq 2$;

   (c) $\bigcap_{x \in a^+} \overline{\{x\}} = \{a\}$ no caso de $|a^+| = 2$.

Definição 1.56. ([32])

1. Seja $a \in \mathcal{S}$ tal que a mutação negativa é definida em a. Definimos um novo poset $\mu_a^-(\mathcal{S}) := (\mathcal{S}, \leq')$, onde a ordem parcial $\leq'$ é definida pelas seguintes condições:

   (a) $x \leq' y$ se, e somente se, $x \leq y$ para todo $x, y \in \mathcal{S} \setminus \{a\}$;

   (b) para qualquer $x \in \mathcal{S} \setminus \{a\}$: $a \leq' x$ se e somente se $b \leq x$ para algum $b \in a^-$;

   (c) Se $|a^-| = 2$, então para qualquer $x \in \mathcal{S} \setminus \{a\}$: $x \leq' a$ se e somente se $x \leq b$ para todo $b \in a^-$;

   (d) Se $|a^-| = 1$, então a é um elemento minimal de $(\mathcal{S}, \leq')$.

2. Seja $a \in \mathcal{S}$ tal que a mutação positiva é definida em a. Definimos um novo poset $\mu_a^+(\mathcal{S}) := (\mathcal{S}, \leq')$, onde a ordem parcial $\leq'$ é definida pelas seguintes condições:

   (a) $x \leq' y$ se e somente se $x \leq y$ para todo $x, y \in \mathcal{S} \setminus \{a\}$;

   (b) para qualquer $x \in \mathcal{S} \setminus \{a\}$: $x \leq' a$ se e somente se $x \leq b$ para algum $b \in a^+$;

   (c) Se $|a^+| = 2$, então para qualquer $x \in \mathcal{S} \setminus \{a\}$: $a \leq' x$ se e somente se $b \leq x$ para todo $b \in a^+$;

   (d) Se $|a^+| = 1$, então a é um elemento maximal de $(\mathcal{S}, \leq')$.

Teorema 1.57. *([32], Teorema 1.52) Sejam $\mathcal{S}$ um poset e $a \in \mathcal{S}$.*

1. *Se a mutação negativa é definida em a então $\mu_a^-(\Bbbk\mathcal{S})$ é uma álgebra de incidência de poset e*
$$\mu_a^-(\Bbbk\mathcal{S}) \cong \Bbbk\mu_a^-(\mathcal{S}).$$

2. *Se a mutação positiva é definida em a então $\mu_a^+(\Bbbk\mathcal{S})$ é uma álgebra de incidência de poset e*
$$\mu_a^+(\Bbbk\mathcal{S}) \cong \Bbbk\mu_a^+(\mathcal{S}).$$

Teorema 1.58. *Seja $\mathcal{S}$ um poset.*

1. *Se a mutação negativa é definida em a então a mutação positiva é definida em a para $\mathcal{S}^{op}$ e neste caso*
$$\mu_a^+(\mathcal{S}^{op}) = \mu_a^-(\mathcal{S})^{op}.$$

2. *Se a mutação positiva é definida em a então a mutação negativa é definida em a para $\mathcal{S}^{op}$ e neste caso*
$$\mu_a^-(\mathcal{S}^{op}) = \mu_a^+(\mathcal{S})^{op}.$$

Demonstração. Segue direto das definições. $\square$

1.3.3 Mutações generalizadas de posets

Observamos a seguinte descrição dada em [32].

Definição 1.59. ([32], Definições 1.53 e 1.56) Seja $\mathcal{S} = (\mathcal{S}, \leq)$ um poset.

1. Dizemos que a *mutação negativa é definida* no subconjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de $\mathcal{S}$, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

   (a) a_n é um elemento maximal de $\mathcal{S}$;

   (b) $a_i^- = \{a_{i-1}\}$ para $1 < i \leq n$;

   (c) $a_i^+ = \{a_{i+1}\}$ para $1 \leq i < n$;

   (d) $|a_1^-| = 2$ e $\bigcap_{x \in a_1^-} U_x = U_{a_1}$.

2. Dizemos que a *mutação positiva é definida* no subconjunto $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de $\mathcal{S}$, se as seguintes propriedades são satisfeitas:

   (a) a_n é um elemento minimal de $\mathcal{S}$;

   (b) $a_i^- = \{a_{i+1}\}$ para $1 \leq i < n$;

   (c) $a_i^+ = \{a_{i-1}\}$ para $1 < i \leq n$;

   (d) $|a_1^+| = 2$ e $\bigcap_{x \in a_1^+} \overline{\{x\}} = \overline{\{a_1\}}$.

Definição 1.60. ([32], Definições 1.53 e 1.56)

1. Seja $\{a_1, \ldots, a_n\}$ um subconjunto de $\mathcal{S}$ tal que a mutação negativa é definida em $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Definimos um novo poset $\mu^-_{\{a_1,\ldots,a_n\}}(\mathcal{S}) := (\mathcal{S}, \leq')$, onde a ordem parcial $\leq'$ é definida pelas seguintes condiçõoes:

   (a) $x \leq' y$ se, e somente se, $x \leq y$ para todo $x, y \in \mathcal{S} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$;

   (b) para qualquer $x \in \mathcal{S} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ e qualquer $1 \leq i \leq n$: $a_i \leq' x$ se, e somente se, $b \leq x$ para algum $b \in a_1^-$;

   (c) para qualquer $x \in \mathcal{S} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ e qualquer $1 \leq i \leq n$: $x \leq' a_i$ se, e somente se, $x \leq b$ para todo $b \in a_1^-$;

   (d) $a_i \leq' a_j$ se, e somente se, $a_i \leq a_j$.

2. Seja $\{a_1, \ldots, a_n\}$ um subconjunto de $\mathcal{S}$ tal que a mutação positiva é definida em $\{a_1, \ldots, a_n\}$. Definimos um novo poset $\mu^+_{\{a_1,\ldots,a_n\}}(\mathcal{S}) := (\mathcal{S}, \leq')$, onde a ordem parcial $\leq'$ é definida pelas seguintes condições:

   (a) $x \leq' y$ se, e somente se, $x \leq y$ para todo $x, y \in \mathcal{S} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$;

   (b) para qualquer $x \in \mathcal{S} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ e qualquer $1 \leq i \leq n$: $x \leq' a_i$ se, e somente se, $x \leq b$ para algum $b \in a_1^+$;

   (c) para qualquer $x \in \mathcal{S} \setminus \{a_1, \ldots, a_n\}$ e qualquer $1 \leq i \leq n$: $a_i \leq' x$ se, e somente se, $b \leq x$ para todo $b \in a_1^+$;

   (d) $a_i \leq' a_j$ se, e somente se, $a_i \leq a_j$.

Teorema 1.61. *([32], Teoremas 1.55 e 1.58) Sejam $\mathcal{S}$ um poset e $\{a_1, \ldots, a_n\}$ um subconjunto de $\mathcal{S}$.*

1. *Se a mutação negativa é definida em* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *então* $\mu^-_{\{a_1,\ldots,a_n\}}(\mathcal{S})$ *é uma álgebra de incidência de poset e*
$$\Bbbk\mathcal{S} \simeq_{der} \Bbbk\mu^-_{\{a_1,\ldots,a_n\}}(\mathcal{S}).$$

2. *Se a mutação positiva é definida em* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *então* $\mu^+_{\{a_1,\ldots,a_n\}}(\mathcal{S})$ *é uma álgebra de incidência de poset e*
$$\Bbbk\mathcal{S} \simeq_{der} \Bbbk\mu^+_{\{a_1,\ldots,a_n\}}(\mathcal{S}).$$

Teorema 1.62. *Seja* $\mathcal{S}$ *um poset.*

1. *Se a mutação negativa é definida em um subconjunto* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *de* $\mathcal{S}$ *então a mutação positiva é definida no subconjunto* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *para* $\mathcal{S}^{op}$ *e neste caso*
$$\mu^+_{\{a_1,\ldots,a_n\}}(\mathcal{S}^{op}) = \mu^-_{\{a_1,\ldots,a_n\}}(\mathcal{S})^{op}.$$

2. *Se a mutação positiva é definida em um subconjunto* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *de* $\mathcal{S}$ *então a mutação negativa é definida no subconjunto* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *para* $\mathcal{S}^{op}$ *e neste caso*
$$\mu^-_{\{a_1,\ldots,a_n\}}(\mathcal{S}^{op}) = \mu^+_{\{a_1,\ldots,a_n\}}(\mathcal{S})^{op}.$$

Demonstração. Segue direto das definições. $\square$

1.3.4 Colagem de grafos

Vamos precisar da seguinte definição da colagem de grafos.

Definição 1.63. (compare com [32]) Sejam Γ^1 e Γ^2 os seguintes grafos conexos sem ciclos e $a_i \in \Gamma^i_0$, $1 \leq i \leq 2$ alguns vértices fixados. Denotamos por $\Gamma^1 \coprod_{(a_1,a_2)} \Gamma^2$ o grafo com subgrafos Υ^1 e Υ^2 que tem as seguintes propriedades:

1. existe um isomorfismo de grafos $\psi_i : \Gamma^i \cong \Upsilon^i$ para $i = 1, 2$.

2. $\Gamma^1 \coprod_{(a_1,a_2)} \Gamma^2 = \Upsilon^1 \bigcup \Upsilon^2$.

3. $\Upsilon^1 \bigcap \Upsilon^2 = \{\psi_1(a_1)\} = \{\psi_2(a_2)\}$.

Chamamos $\Gamma^1 \coprod_{(a_1,a_2)} \Gamma^2$ de *colagem* dos grafos Γ^1 e Γ^2 nos vértices a_1 e a_2.

1.4 Soma amalgamada e produto fibrado

1.4.1 Soma amalgamada de aljavas

Observamos a seguinte descrição dada em [29].

Definição 1.64. ([29]) Sejam E um subaljava plena das aljavas F e G e $i : E \hookrightarrow F$, $j : E \hookrightarrow G$ as inclusões de aljavas. Denotamos por $F \coprod_E G$ a aljava dada pelas seguintes condições:

1. Os vértices são os vértices de F e os de G que não estão em j(E);

2. As flechas são as flechas de F e o seguintes:

(a) Para $x, y \in G_0 \setminus j(E)_0$ existe uma flecha de x a y para cada flecha de x a y em G;

(b) Para $x \in G_0 \setminus j(E)_0$ e $y = i(z)$ para algum $z \in E_0$, existe uma flecha de x a y para cada flecha de x a $j(z)$ em G;

(c) Para $x = i(z)$ para algum $z \in E_0$ e $y \in G_0 \setminus j(E)_0$, existe uma flecha de x a y para cada flecha de $j(z)$ a y em G.

Lema 1.65. *([29], Lema 1.2.1) Sejam $i : E \hookrightarrow F$ e $j : E \hookrightarrow G$ morfismos injetivos de aljavas. Então*

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "i"] \arrow[d, "j"] & F \arrow[d, "\mu"] \\ G \arrow[r, "\nu"] & F \coprod_E G \end{tikzcd}$$

é a soma amalgamada de i e j, com μ a inclusão e ν o morfismo injetivo que envia $G_0 \setminus j(E)_0$ em $G_0 \setminus j(E)_0$ e $j(E)_0$ em $i(E)_0$.

Chamamos $F \coprod_E G$ de soma amalgamada de F e G sobre E.

1.4.2 Soma amalgamada de álgebras

Chamamos uma $\Bbbk$-categoria $\mathcal{C}$ de *espectróide*, se para a e b objetos em $\mathcal{C}$ o espaço de morfismos $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(a, b)$ é um $\Bbbk$-espaço vetorial de dimensão finita, os objetos são dois a dois não-isomorfos e tem um anel de endomorfismos local. Frequentemente veremos uma álgebra $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ como um espectróide. Sejam $A = \Bbbk\mathcal{Q}_A/\mathcal{I}_A$ e $B = \Bbbk\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$ duas álgebras onde $\mathcal{Q}_A$ e $\mathcal{Q}_B$ são aljavas conexas e $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$ são ideiais admissíveis de $\Bbbk\mathcal{Q}_A$ e $\Bbbk\mathcal{Q}_B$, respectivamente. Seja $\mathcal{Q}_C$ uma subaljava plena e convexa de $\mathcal{Q}_A$ e $\mathcal{Q}_B$ tal que as restrições de $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$ a $\Bbbk\mathcal{Q}_C$ coincidem, isto é $\mathcal{I}_A \bigcap \Bbbk\mathcal{Q}_C = \mathcal{I}_B \bigcap \Bbbk\mathcal{Q}_C$. Denote este ideal por $\mathcal{I}_C$ e defina a álgebra $C = \Bbbk\mathcal{Q}_C/\mathcal{I}_C$. Sejam $f_A : C \hookrightarrow A$ e $f_B : C \hookrightarrow B$ as inclusões naturais dadas. Seja $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_A \coprod_{\mathcal{Q}_C} \mathcal{Q}_B$ a soma amalgamada das inclusões da subaljava $\mathcal{Q}_C$ em $\mathcal{Q}_A$ e $\mathcal{Q}_B$. Neste caso, esta soma amalgamada pode ser vista como uma união de $\mathcal{Q}_A$ e $\mathcal{Q}_B$ em $\mathcal{Q}_C$. Seja $\mathcal{I}$ o ideal de $\Bbbk\mathcal{Q}$ gerado por $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$.

Lema 1.66. *([12]) Seja $A \coprod_C B$ a soma amalgamada de f_A e f_B na categoria de espectróides. Então $A \coprod_C B \cong \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$.*

Definição 1.67. Seja $A \coprod_C B$ uma soma amalgamada de álgebras. Dizemos que $A \coprod_C B$ é uma *soma amalgamada simples* se C é uma álgebra simples. No caso de $(\mathcal{Q}_A)_0 \bigcap (\mathcal{Q}_B)_0 = (\mathcal{Q}_C)_0 = \{c\}$, denotaremos esta soma amalgamada simples por $A \coprod_{\{c\}} B$.

1.4.3 Soma amalgamada de posets

Visto que qualquer poset é unicamente definido pelo seu diagrama de Hasse temos a seguinte definição da soma amalgamada de posets.

Definição 1.68. Sejam E um subposet pleno dos posets F e G e $i : E \hookrightarrow F$, $j : E \hookrightarrow G$ as inclusões de posets. Chamamos de *soma amalgamada dos posets* F e G em E e denotamos por $F \coprod_E G$ o poset cujo diagrama de Hasse é a soma amalgamada dos diagramas de Hasse dos posets F e G sob o diagrama de Hasse do poset E.

A Proposição 1.69 é um dos passos chave na demonstração do Teorema 3.14.

Proposição 1.69. *Sejam F e G subconjuntos do poset S tal que $F \bigcap G = E = \{e\}$ e $S = F \coprod_E G$.*

1. *Seja $\{f_1, \ldots, f_n\}$ um subconjunto de S em que a mutação negativa é definida e tal que $f_i \in F \setminus E$ para $1 \leq i \leq n$ e $f_1^- \subseteq F \setminus E$. Então*

$$\mu^-_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(S) = \mu^-_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(F) \coprod_E G;$$

2. *Seja $\{f_1, \ldots, f_n\}$ um subconjunto de S em que a mutação positiva é definida e tal que $f_i \in F \setminus E$ para $1 \leq i \leq n$ e $f_1^+ \subseteq F \setminus E$. Então*

$$\mu^+_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(S) = \mu^+_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(F) \coprod_E G;$$

3. *Seja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ um subconjunto de S em que a mutação negativa é definida e tal que $g_i \in G \setminus E$ para $1 \leq i \leq n$ e $g_1^- \subseteq G \setminus E$. Então*

$$\mu^-_{\{g_1,\ldots,g_n\}}(S) = F \coprod_E \mu^-_{\{g_1,\ldots,g_n\}}(G);$$

4. *Seja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ um subconjunto de S em que a mutação positiva é definida e tal que $g_i \in G \setminus E$ para $1 \leq i \leq n$ e $g_1^+ \subseteq G \setminus E$. Então*

$$\mu^+_{\{g_1,\ldots,g_n\}}(S) = F \coprod_E \mu^+_{\{g_1,\ldots,g_n\}}(G).$$

Demonstração. (i) Visto que $f_i \in F$ para $1 \leq i \leq n$, a mutação negativa é definida em $\{f_1, \ldots, f_n\}$ para F. Seja $\mu_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(S) = (S, \leq')$ como na Definição 1.60. Visto que $f_1^- \in F$, segue da Definição 1.60 que $\mu_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(F) = (F, \leq'')$, onde $\leq''$ é a restrição de $\leq'$ em F. Para provar a afirmação, é suficiente mostrar que não existem flechas entre $\mu_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(F) \setminus E$ e $G \setminus E$ para o diagrama de Hasse de $\mu_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(S)$.

Primeiro suponha que existe uma flecha de $f \in \mu_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(F) \setminus E$ a $g \in G \setminus E$ no diagrama de Hasse de $\mu_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(S)$. Então $f <' g$. Se $f \notin \{f_1, \ldots, f_n\}$ então $f < g$ pela Definição 1.60 e consequentemente $f < e < g$ pois $S = F \coprod_{\{e\}} G$. Portanto, $f <' e <' g$ pela Definição 1.60 pois $f, e, g \notin \{f_1, \ldots, f_n\}$, uma contradição. Se $f \in \{f_1, \ldots, f_n\}$, então segue da Definição 1.60 que $b \leq g$ para algum $b \in f_1^-$. Visto que $b, g \notin \{f_1, \ldots, f_n\}$, $b \leq' g$ pela Definição 1.60. Visto que $b \in f_1^-$ e $f_1^- \subseteq F \setminus E$, obtemos que $b \neq g$ e portanto $b <' g$. Segue da Definição 1.60 que $f <' b$, consequentemente $f <' b <' g$, uma contradição.

Finalmente suponha que existe uma flecha de $g \in G \setminus E$ a $f \in \mu_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(F) \setminus E$ no diagrama de Hasse de $\mu_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(S)$. Então $g <' f$. Se $f \notin \{f_1, \ldots, f_n\}$ então $g < f$ pela Definição 1.60 e consequentemente $g < e < f$ pois $S = F \coprod_{\{e\}} G$. Portanto $g <' e <' f$ pela Definição 1.60 pois $f, e, g \notin \{f_1, \ldots, f_n\}$, uma contradição. Se $f \in \{f_1, \ldots, f_n\}$ então segue da Definição 1.60 que $g \leq f_1^- < f$. Consequentemente $g < e < f_1^-$ pois $S = F \coprod_{\{e\}} G$ e $f_1^- \subseteq F \setminus E$. Portanto $g <' e <' f$ pela Definição 1.60, uma contradição. Consequentemente a afirmação segue.

As demonstrações dos itens (ii)-(iv) são similares. $\square$

1.4.4 Produto fibrado de álgebras

Lembremos a descrição dada em [29]. Sejam $A = \Bbbk\mathcal{Q}_A/\mathcal{I}_A$ e $B = \Bbbk\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B$ duas álgebras onde $\mathcal{Q}_A$ e $\mathcal{Q}_B$ são aljavas conexas e $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$ são ideais admissíveis de $\Bbbk\mathcal{Q}_A$ e $\Bbbk\mathcal{Q}_B$, respectivamente. Seja $\mathcal{Q}_C$ uma subaljava convexa e plena de $\mathcal{Q}_A$ e $\mathcal{Q}_B$ tal que as restrições de $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$ a $\Bbbk\mathcal{Q}_C$ coincidem, isto é $\mathcal{I}_A \bigcap \Bbbk\mathcal{Q}_C = \mathcal{I}_B \bigcap \Bbbk\mathcal{Q}_C$. Denote este ideal por $\mathcal{I}_C$ e defina a álgebra $C = \Bbbk\mathcal{Q}_C/\mathcal{I}_C$. Assim $C \cong e_C A e_C \cong e_C B e_C$ é um quociente comum de A e B. Sejam $f_A : A \twoheadrightarrow C$ e $f_B : B \twoheadrightarrow C$ os epimorfismos naturais dados, respectivamente, por $a \mapsto e_C a e_C$ e $b \mapsto e_C b e_C$. Seja $\mathcal{Q} := \mathcal{Q}_A \coprod_{\mathcal{Q}_C} \mathcal{Q}_B$ a soma amalgamada das inclusões da subaljava $\mathcal{Q}_C$ em $\mathcal{Q}_A$ e $\mathcal{Q}_B$. Neste caso, esta soma amalgamada pode ser visto como uma união de $\mathcal{Q}_A$ e $\mathcal{Q}_B$ passando por $\mathcal{Q}_C$. Seja $\mathcal{I}$ o ideal de $\Bbbk\mathcal{Q}$ gerado por $\mathcal{I}_A$ e $\mathcal{I}_B$ e os caminhos ligando $(\mathcal{Q}_A)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$ e $(\mathcal{Q}_B)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$.

Lema 1.70. *([29], Lema 1.2.1) Seja $A \prod_C B$ o produto fibrado de f_A e f_B. Então $A \prod_C B \cong \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$.*

Definição 1.71. Seja $A \prod_C B$ um produto fibrado de álgebras. Dizemos que $A \prod_C B$ é um *produto fibrado simples* se C é uma álgebra simples. No caso de $(\mathcal{Q}_A)_0 \bigcap (\mathcal{Q}_B)_0 = (\mathcal{Q}_C)_0 = \{c\}$, denotaremos este produto fibrado simples por $A \prod_{\{c\}} B$.

A Proposição 1.72 é um dos passos chave na demonstração do Teorema 3.25.

Proposição 1.72. *Sejam F e G subposets de um poset S tal que $F \bigcap G = E = \{e\}$ e seja $\Lambda = \Bbbk F \prod_{\Bbbk E} \Bbbk G = \Bbbk S/\mathcal{I}$ um produto fibrado de álgebras de incidência de posets, onde $S = F \coprod_E G$.*

1. *Seja $\{f_1, \ldots, f_n\}$ um subconjunto de S em que a mutação negativa é definida e tal que $f_i \in F \setminus E$ para $1 \leq i \leq n$ e $f_1^- \subseteq F \setminus E$. Então*
$$\Lambda \simeq_{der} \Bbbk\mu^-_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(F) \prod_{\Bbbk E} \Bbbk G;$$
2. *Seja $\{f_1, \ldots, f_n\}$ um subconjunto de S em que a mutação positiva é definida e tal que $f_i \in F \setminus E$ para $1 \leq i \leq n$ e $f_1^+ \subseteq F \setminus E$. Então*
$$\Lambda \simeq_{der} \Bbbk\mu^+_{\{f_1,\ldots,f_n\}}(F) \prod_{\Bbbk E} \Bbbk G;$$
3. *Seja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ um subconjunto de S em que a mutação negativa é definida e tal que $g_i \in G \setminus E$ para $1 \leq i \leq n$ e $g_1^- \subseteq G \setminus E$. Então*
$$\Lambda \simeq_{der} \Bbbk F \prod_{\Bbbk E} \Bbbk\mu^-_{\{g_1,\ldots,g_n\}}(G);$$
4. *Seja $\{g_1, \ldots, g_n\}$ um subconjunto de S em que a mutação positiva é definida e tal que $g_i \in G \setminus E$ para $1 \leq i \leq n$ e $g_1^+ \subseteq G \setminus E$. Então*
$$\Lambda \simeq_{der} \Bbbk F \prod_{\Bbbk E} \Bbbk\mu^+_{\{g_1,\ldots,g_n\}}(G).$$

Demonstração. (i) Seja $f_1^- = \{b,c\}$. Definimos um complexo $T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n}$ de Λ-módulos projetivos como em [32]. Para qualquer $1 \le i \le n$ considere a aplicação

$$\varphi_i : P_{a_i} \to P_b \bigoplus P_c,$$

onde $\varphi_i = p(b,a_i) \oplus p(c,a_i)$ é induzido pelos caminhos $p(b,a_i)$ e $p(c,a_i)$. Vamos considerar o seguinte complexo de Λ-módulos projetivos:

$$L_{f_i} : \ P_{f_i} \xrightarrow{\varphi_i} P_b \bigoplus P_c \ ,$$

onde P_{f_i} está no grau 1.

Definimos um complexo $T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n}$ de Λ-módulos projetivos como segue:

$$T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n} := \bigoplus_{x \in \mathcal{Q}_0} (T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n})^x, \tag{1.1}$$

onde

$$(T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n})^x := \begin{cases} P_x & \text{se } \ x \in \mathcal{Q}_0 \setminus \{f_1,\dots,f_n\}, \\ L_x & \text{se } \ x \in \{f_1,\dots,f_n\}. \end{cases} \tag{1.2}$$

É fácil provar que $T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n}$ é complexo *tilting*. Para provar a afirmação, é suficiente mostrar que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n}) \cong \Bbbk\mu^{\Lambda,-}_{\{f_1,\dots,f_n\}}(F) \coprod_{\Bbbk E} \Bbbk G$.

Seja

$$T_F := \bigoplus_{x \in F} (T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n})^x, \ \ T_G := \bigoplus_{x \in G} (T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n})^x \ \text{ e } \ T_E := (T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n})^e.$$

Seja $A := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_F)$, $B := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_G)$, $C := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_E)$ e $D := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n})$.

Visto que $b,c \in F$ e $\Lambda = \Bbbk F \coprod_{\Bbbk E} \Bbbk G$, temos que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_x, P_g) = 0$ e $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_g, P_x) = 0$, para todo $x \in \{b,c\}$ e $g \in G$. Portanto, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}((T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n})^x, (T^{\Lambda,-}_{f_1,\dots,f_n})^g) = 0$, para todo $x \in \{b,c\}$ e $g \in G$.

Visto que $\mathcal{Q}_C$ é uma subaljava convexa de aljavas $\mathcal{Q}_A$ e $\mathcal{Q}_B$, $\mathcal{Q}_D = \mathcal{Q}_A \coprod_{\mathcal{Q}_C} \mathcal{Q}_B$ e $\mathcal{I}_D$ é gerado por $\mathcal{I}_A$, $\mathcal{I}_B$ e os caminhos ligando $(\mathcal{Q}_A)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$ e $(\mathcal{Q}_B)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$. Consequentemente $D \cong A \coprod_C B$ pelo Lema 1.70.

Pelo mesmo tipo de argumentos usados na demonstração da Proposição 1.69 obtemos que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_F) \cong \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Bbbk F)}(T^{\Bbbk F,-}_{f_1,\dots,f_n})$ e portanto $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_F) \cong \Bbbk\mu^-_{\{f_1,\dots,f_n\}}(F)$ pelo Teorema 1.61. Consequentemente a afirmação segue pois $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_{G)}) \cong \Bbbk G$ e $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_E) \cong \Bbbk E$.

As demonstrações dos itens (ii)-(iv) são similares. $\square$

Capítulo 2

COMPLEXOS TILTING E ÁLGEBRAS DE ENDOMORFISMOS

Neste capítulo introduzimos para qualquer álgebra de Nakayama acíclica e um par de vértices da sua aljava um complexo de módulos projetivos. Tal complexo pode ser visto como uma generalização dos complexos construídos em [32] para álgebras seriais truncadas e acíclicas. No Teorema 2.13 achamos condições necessárias e suficientes para tal complexo ser complexo *tilting* e no Teorema 2.23 obtemos condições necessárias e suficientes para sua álgebra de endomorfismos ser uma álgebra de incidência de um poset, calculando a ordem parcial explicitamente. Nos casos de somas amalgamadas e produtos fibrados estudamos relação de álgebra de endomorfismos de tal complexo *tilting* com álgebras de endomorfismos de complexos *tilting* de subálgebras envolvidas. Aplicamos os últimos resultados para descrição das álgebras de endomorfismos de complexos *tilting* construídos no caso geral.

2.1 Complexos $T_{a,b}$

O objetivo desta seção é introduzir um complexo de módulos projetivos para qualquer álgebra de Nakayama acíclica e um par fixo de vértices da sua aljava e apresentar alguns exemplos.

Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica, com

$$\mathcal{Q}:\ 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n.$$

Denotamos por $w = p(c,d)$ o caminho começando em c e terminando em d, sendo $c, d \in \mathcal{Q}_0$ um par de vértices de $\mathcal{Q}$ tal que $1 \leq c \leq d \leq n$. Se $1 \leq c < d \leq n$, então definimos as seguintes decomposições para o caminho $w = p(c,d)$:

$$w = w_1^- w_2^- \cdots w_t^- = w_s^+ w_{s-1}^+ \cdots w_1^+ \tag{2.1}$$

para alguns $s, t \in \mathbb{N}$, onde $w_j^-, w_i^+ \notin \mathcal{I}$ e $w_j^-\alpha, \alpha w_i^+ \in \mathcal{I}$ para qualquer $\alpha \in \mathcal{Q}_1$ e para todo $1 \leq i < t, 1 \leq j < s$.

Observação 2.1. É fácil ver que $s = t$ em 2.1.

Exemplo 2.2. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, onde

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q}: 1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[rrr, dash, dashed, bend left] & 2 \arrow[r, "\alpha_2"] & 3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[rrr, dash, dashed, bend left] & 4 \arrow[r, "\alpha_4"] & 5 \arrow[r, "\alpha_5"] & 6 \arrow[r, "\alpha_6"] & 7 \arrow[r, "\alpha_7"] & 8 \end{tikzcd}$$

e

$$\mathcal{I} = \langle \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \rangle.$$

(i) O caminho $w = p(1,8)$ tem as seguintes decomposições:

- $w = w_1^- w_2^- w_3^-$, com $w_1^- = \alpha_1\alpha_2 = p(1,3)$, $w_2^- = \alpha_3\alpha_4 = p(3,5)$, $w_3^- = \alpha_5\alpha_6\alpha_7 = p(5,8)$ e
- $w = w_3^+ w_2^+ w_1^+$, com $w_1^+ = \alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7 = p(4,8)$, $w_2^+ = \alpha_2\alpha_3 = p(2,4)$, $w_3^+ = \alpha_1 = p(1,2)$

(ii) O caminho $w = p(2,7)$ tem as seguintes decomposições:

- $w = w_1^- w_2^-$, com $w_1^- = \alpha_2\alpha_3\alpha_4 = p(2,5)$, $w_2^- = \alpha_5\alpha_6 = p(5,7)$ e
- $w = w_2^+ w_1^+$, com $w_1^+ = \alpha_4\alpha_5\alpha_6 = p(4,7)$, $w_2^+ = \alpha_2\alpha_3 = p(2,4)$.

Usando estas decomposições definimos os complexos $C_{d,c}^-$ e $C_{d,c}^+$ da seguinte forma:

$$C_{d,c}^- : \; P_d \xrightarrow{w_t^-} P_{t(w_{t-1}^-)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{t(w_1^-)} \xrightarrow{w_1^-} P_c \quad (P_c \quad \text{no grau } 0) \;\; ,$$

$$C_{d,c}^+ : \; P_d \xrightarrow{w_1^+} P_{s(w_1^+)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow P_{s(w_{s-1}^+)} \xrightarrow{w_s^+} P_c \quad (P_d \quad \text{no grau } 0) \;\; .$$

Exemplo 2.3. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, onde

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q}: 1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[rrr, dash, dashed, bend left] & 2 \arrow[r, "\alpha_2"] & 3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[rrr, dash, dashed, bend left] & 4 \arrow[r, "\alpha_4"] & 5 \arrow[r, "\alpha_5"] & 6 \arrow[r, "\alpha_6"] & 7 \arrow[r, "\alpha_7"] & 8 \end{tikzcd}$$

e

$$\mathcal{I} = \langle \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \rangle.$$

Usando as decomposições do Exemplo 2.2, temos os seguintes complexos:

(i) $C_{8,1}^- : \; P_8 \xrightarrow{w_3^-} P_5 \xrightarrow{w_2^-} P_3 \xrightarrow{w_1^-} P_1 \quad (P_1 \quad \text{no grau } 0) \;\; ,$

(ii) $C_{8,1}^+ : \; P_8 \xrightarrow{w_1^+} P_4 \xrightarrow{w_2^+} P_2 \xrightarrow{w_3^+} P_1 \quad (P_8 \quad \text{no grau } 0) \;\; .$

(iii) $C_{7,2}^- : \; P_7 \xrightarrow{w_2^-} P_5 \xrightarrow{w_1^-} P_2 \quad (P_2 \quad \text{no grau } 0) \;\; ,$

(iv) $C_{7,2}^+ : \; P_7 \xrightarrow{w_1^+} P_4 \xrightarrow{w_2^+} P_2 \quad (P_7 \quad \text{no grau } 0) \;\; .$

Em seguida, para qualquer par de vértices $a, b \in \mathcal{Q}_0$ tal que $a \leq b$ definimos um complexo $T_{a,b}$ da seguinte forma:

$$T_{a,b} = T^{\Lambda}_{a,b} := \bigoplus_{c \in \mathcal{Q}_0} T^c_{a,b}, \tag{2.2}$$

onde

$$T^c_{a,b} = \begin{cases} C^+_{a,c} & \text{if } c < a, \\ \Phi_0(P_c) & \text{if } a \leq c \leq b, \\ C^-_{c,b} & \text{if } c > b. \end{cases} \tag{2.3}$$

Finalmente, definimos os seguintes complexos, que são casos particulares do complexo $T^{\Lambda}_{a,b}$:

(i) $T_a = T^{\Lambda}_a := T_{a,a}$.

(ii) $T_- = T^{\Lambda}_- := T_{a,a}$ se o vértice a é a fonte.

(iii) $T_+ = T^{\Lambda}_+ := T_{a,a}$ se o vértice a é o poço.

(iv) $T_{a,+} = T^{\Lambda}_{a,+} := T_{a,b}$, onde b é o poço.

(v) $T_{b,-} = T^{\Lambda}_{b,-} := T_{a,b}$, onde a é a fonte.

Exemplo 2.4. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, onde

$$\mathcal{Q}: \begin{tikzcd} 1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[rrr, bend left, dashed, no head] & 2 \arrow[r, "\alpha_2"] & 3 \arrow[r, "\alpha_3"] & 4 \arrow[r, "\alpha_4"] \arrow[rr, bend left, dashed, no head] & 5 \arrow[r, "\alpha_5"] & 6 \end{tikzcd}$$

e

$$\mathcal{I} = \langle \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_4\alpha_5 \rangle.$$

(i) Os somandos diretos do complexo $T_{3,5}$ são os complexos

$$T^1_{3,5} = C^+_{3,1} : \qquad P_3 \xrightarrow{\alpha_1\alpha_2} P_1$$

$$T^2_{3,5} = C^+_{3,2} : \qquad P_3 \xrightarrow{\alpha_2} P_2$$

$$T^3_{3,5} = \Phi_0(P_3) : \qquad P_3$$

$$T^4_{3,5} = \Phi_0(P_4) : \qquad P_4$$

$$T^5_{3,5} = \Phi_0(P_5) : \qquad P_5$$

$$T^6_{3,5} = C^-_{6,5} : \qquad P_6 \xrightarrow{\alpha_5} P_5.$$

Assim, $T_{3,5} = (P_3 \to P_1)\bigoplus(P_3 \to P_2)\bigoplus\Phi_0(P_3)\bigoplus\Phi_0(P_4)\bigoplus\Phi_0(P_5)\bigoplus(P_6 \to P_5)[1]$.

(ii) Os somandos diretos do complexo $T_{-} = T_{1,1}$ são os complexos

$$T_{1,1}^1 = \Phi_0(P_1): \qquad P_1$$

$$T_{1,1}^2 = C_{2,1}^-: \qquad P_2 \xrightarrow{\alpha_1} P_1$$

$$T_{1,1}^3 = C_{3,1}^-: \qquad P_3 \xrightarrow{\alpha_1\alpha_2} P_1$$

$$T_{1,1}^4 = C_{4,1}^-: \qquad P_4 \xrightarrow{\alpha_3} P_3 \xrightarrow{\alpha_1\alpha_2} P_1$$

$$T_{1,1}^5 = C_{5,1}^-: \qquad P_5 \xrightarrow{\alpha_3\alpha_4} P_3 \xrightarrow{\alpha_1\alpha_2} P_1$$

$$T_{1,1}^6 = C_{6,1}^-: \qquad P_6 \xrightarrow{\alpha_5} P_5 \xrightarrow{\alpha_3\alpha_4} P_3 \xrightarrow{\alpha_1\alpha_2} P_1$$

Assim, $T_{-} = T_{1,1} = \Phi_0(P_1) \bigoplus (P_2 \to P_1)[1] \bigoplus (P_3 \to P_1)[1] \bigoplus (P_4 \to P_3 \to P_1)[2] \bigoplus (P_5 \to P_3 \to P_1)[2] \bigoplus (P_6 \to P_5 \to P_3 \to P_1)[3]$.

(iii) Os somandos diretos do complexo $T_{+} = T_{6,6}$ são os complexos

$$T_{6,6}^1 = C_{6,1}^+: \qquad P_6 \xrightarrow{\alpha_5} P_5 \xrightarrow{\alpha_2\alpha_3\alpha_4} P_2 \xrightarrow{\alpha_1} P_1$$

$$T_{6,6}^2 = C_{6,2}^+: \qquad P_6 \xrightarrow{\alpha_5} P_5 \xrightarrow{\alpha_2\alpha_3\alpha_4} P_2$$

$$T_{6,6}^3 = C_{6,3}^+: \qquad P_6 \xrightarrow{\alpha_5} P_5 \xrightarrow{\alpha_3\alpha_4} P_3$$

$$T_{6,6}^4 = C_{6,4}^+: \qquad P_6 \xrightarrow{\alpha_5} P_5 \xrightarrow{\alpha_4} P_4$$

$$T_{6,6}^5 = C_{6,5}^+: \qquad P_6 \xrightarrow{\alpha_5} P_5$$

$$T_{6,6}^6 = \Phi_0(P_6): \qquad P_6$$

Assim, $T_{+} = T_{6,6} = (P_6 \to P_5 \to P_2 \to P_1) \bigoplus (P_6 \to P_5 \to P_2) \bigoplus (P_6 \to P_5 \to P_3) \bigoplus (P_6 \to P_5 \to P_4) \bigoplus (P_6 \to P_5) \bigoplus \Phi_0(P_6)$.

(iv) Os somandos diretos do complexo $T_{4,-} = T_{1,4}$ são os complexos

$$T^1_{1,4} = \Phi_0(P_1): \quad P_1$$

$$T^2_{1,4} = \Phi_0(P_2): \quad P_2$$

$$T^3_{1,4} = \Phi_0(P_3): \quad P_3$$

$$T^4_{1,4} = \Phi_0(P_4): \quad P_4$$

$$T^5_{1,4} = C^-_{5,4}: \quad P_5 \xrightarrow{\alpha_4} P_4$$

$$T^6_{1,4} = C^-_{6,4}: \quad P_6 \xrightarrow{\alpha_5} P_5 \xrightarrow{\alpha_4} P_4$$

Assim, $T_{4,-} = T_{1,4} = \Phi_0(P_1) \bigoplus \Phi_0(P_2) \bigoplus \Phi_0(P_3) \bigoplus \Phi_0(P_4) \bigoplus (P_5 \to P_4)[1] \bigoplus (P_6 \to P_5 \to P_4)[2]$.

(v) Os somandos diretos do complexo $T_{4,+} = T_{4,6}$ são os complexos

$$T^1_{4,6} = C^+_{4,1}: \quad P_4 \xrightarrow{\alpha_2\alpha_3} P_2 \xrightarrow{\alpha_1} P_1$$

$$T^2_{4,6} = C^+_{4,2}: \quad P_4 \xrightarrow{\alpha_2\alpha_3} P_2$$

$$T^3_{4,6} = C^+_{4,3}: \quad P_4 \xrightarrow{\alpha_3} P_3$$

$$T^4_{4,6} = \Phi_0(P_4): \quad P_4$$

$$T^5_{4,6} = \Phi_0(P_5): \quad P_5$$

$$T^6_{4,6} = \Phi_0(P_6): \quad P_6$$

Assim, $T_{4,+} = T_{4,6} = (P_4 \to P_2 \to P_1) \bigoplus (P_4 \to P_2) \bigoplus (P_4 \to P_3) \bigoplus \Phi_0(P_4) \bigoplus \Phi_0(P_5) \bigoplus \Phi_0(P_6)$.

(vi) Os somandos diretos do complexo $T_4 = T_{4,4}$ são os complexos

$$T^1_{4,4} = C^+_{4,1}: \quad P_4 \xrightarrow{\alpha_2\alpha_3} P_2 \xrightarrow{\alpha_1} P_1$$

$$T^2_{4,4} = C^+_{4,2}: \quad P_4 \xrightarrow{\alpha_2\alpha_3} P_2$$

$$T^3_{4,4} = C^+_{4,3}: \quad P_4 \xrightarrow{\alpha_3} P_3$$

$$T^4_{4,4} = \Phi_0(P_4): \quad P_4$$

$$T^5_{4,4} = C^-_{5,4}: \quad P_5 \xrightarrow{\alpha_4} P_4$$

$$T^6_{4,4} = C^-_{6,4}: \quad P_6 \xrightarrow{\alpha_5} P_5 \xrightarrow{\alpha_4} P_4$$

Assim,

$T_4 = T_{4,4} = (P_4 \to P_2 \to P_1) \bigoplus (P_4 \to P_2) \bigoplus (P_4 \to P_3) \bigoplus \Phi_0(P_4) \bigoplus (P_5 \to P_4)[1] \bigoplus (P_6 \to P_5 \to P_4)[2]$.

Definição 2.5. Sejam $a, b \in \mathcal{Q}_0$ tais que $a \le b$. Chamamos o par de vértices (a, b) de *admissível* se para quaisquer $c, d \in \mathcal{Q}_0$ tais que $c < a \le b < d$ e $p(c, d) \in \mathcal{I}$ temos $p(c, b) \in \mathcal{I}$ ou $p(a, d) \in \mathcal{I}$. Dizemos que $a \in \mathcal{Q}_0$ é *admissível* se o par (a, a) é admissível.

Exemplo 2.6. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, onde

$$\mathcal{Q}: 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4$$

e

$$\mathcal{I} = \langle \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \rangle.$$

Os pares $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (4,4), (3,4), (2,4)$ são admissíveis e os pares $(2,2), (2,3), (3,3)$ não são admissíveis.

Lema 2.7. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica, com*

$$\mathcal{Q}: 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} \cdots \xrightarrow{\alpha_{n-2}} n-1 \xrightarrow{\alpha_{n-1}} n.$$

Os pares $(1, b)$ e (a, n) são admissíveis para quaisquer vértices $a, b \in \mathcal{Q}_0$.

Demonstração. Note que não existe $c < 1$ tal que $c \in \mathcal{Q}_0$. Logo, $(1, b)$ é admissível por vacuidade, para qualquer $b \in \mathcal{Q}_0$. De modo análogo, como não existe $d > n$ tal que $d \in \mathcal{Q}_0$, o par (a, n) é admissível para qualquer $a \in \mathcal{Q}_0$. $\square$

2.2 Complexos tilting

O objetivo desta seção é achar condições necessárias e suficientes para o complexo $T^{\Lambda}_{a,b}$ ser complexo *tilting* (veja Teorema 2.13).

Iniciamos fixando notações. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica e (a, b) um par de vértices admissíveis de $\mathcal{Q}$. Seja x (respectivamente y) a fonte (respectivamente poço) e seja $u = p(x, a)$ e $v = p(b, y)$. Denotamos $u_0^+ := e_a$ e $v_0^- := e_b$. Então os caminhos u e v tem as seguintes decomposições (veja 2.1 para definição):

$$u = \begin{cases} u^+_{n_+} u^+_{n_+-1} \cdots u^+_1 & \text{se } x \neq a, \\ u^+_0 & \text{se } x = a, \end{cases} \qquad v = \begin{cases} v^-_1 v^-_2 \cdots v^-_{n_-} & \text{se } y \neq b, \\ v^-_0 & \text{se } y = b. \end{cases} \tag{2.4}$$

para algum $n_-, n_+ \in \mathbb{N}$.

Denotamos por $s_i^- := t(v_i^-)$ para $0 \le i \le n_-$ e $s_i^+ := s(u_i^+)$ para $0 \le i \le n_+$ e definimos os conjuntos

$$\mathbb{S}^- := \{s_i^- \mid 0 \le i \le n_-\},\ \mathbb{S}^+ := \{s_i^+ \mid 0 \le i \le n_+\} \text{ e } \mathbb{S} := \mathbb{S}^- \bigcup \mathbb{S}^+.$$

Para $1 \leq i \leq n_-$, seja

$$\mathbb{M}_i^- := \{c \in \mathcal{Q}_0 \mid s_{i-1}^- < c \leq s_i^-\},\ \mathbb{L}_i^- := \mathbb{M}_i^- \setminus \{s_i^-\}$$

e para $1 \leq i \leq n_+$,

$$\mathbb{M}_i^+ := \{c \in \mathcal{Q}_0 \mid s_i^+ \leq c < s_{i-1}^+\},\ \mathbb{L}_i^+ := \mathbb{M}_i^+ \setminus \{s_i^+\}.$$

Denotamos

$$\mathbb{M}^- := \bigcup_{1 \leq i \leq n_-} \mathbb{M}_i^-,\ \mathbb{M}^+ := \bigcup_{1 \leq i \leq n_+} \mathbb{M}_i^+ \text{ e}$$

$$\mathbb{M}_0 := \{c \in \mathcal{Q}_0 \,|\, a \leq c \leq b\}.$$

Para $n_- \leq i \leq n_+, i \neq 0$, colocamos:

$$\mathbb{M}_i := \begin{cases} \mathbb{M}_i^+ & \text{se } i > 0, \\ \mathbb{M}_{-i}^- & \text{se } i < 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Exemplo 2.8. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, onde

$$\begin{tikzcd} \mathcal{Q}: 1 \arrow[r, "\alpha_1"] \arrow[rrr, dashed, no head, bend left] & 2 \arrow[r, "\alpha_2"] & 3 \arrow[r, "\alpha_3"] \arrow[rrr, dashed, no head, bend left] & 4 \arrow[r, "\alpha_4"] & 5 \arrow[r, "\alpha_5"] & 6 \arrow[r, "\alpha_6"] & 7 \arrow[r, "\alpha_7"] & 8 \end{tikzcd}$$

e

$$\mathcal{I} = \langle \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \rangle.$$

O vértice $1 \in \mathcal{Q}_0$ é admissível e os caminhos $u = p(1,1)$ e $v = p(1,8)$ tem a seguinte decomposição $u = u_0^+$ e $v = v_1^- v_2^- v_3^-$, com $v_1^- = \alpha_1\alpha_2$, $v_2^- = \alpha_3\alpha_4$, $v_3^- = \alpha_5\alpha_6\alpha_7$. Note que $n_+ = 0$ e $n_- = 3$, então $s_0^- = t(v_0^-) = 1$, $s_1^- = t(v_1^-) = 3$, $s_2^- = t(v_2^-) = 5$, $s_3^- = t(v_3^-) = 8$, $s_0^+ = s(u_0^+) = 1$ e $\mathbb{S}^- = \{1, 3, 5, 8\}, \mathbb{S}^+ = \{1\}$. Seguem os conjuntos:

$\mathbb{M}_{-1} = \mathbb{M}_1^- = \{2, 3\}$, $\mathbb{M}_{-2} = \mathbb{M}_2^- = \{4, 5\}$, $\mathbb{M}_{-3} = \mathbb{M}_3^- = \{6, 7, 8\}$, $\mathbb{M}^- = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$, $\mathbb{M}_0 = \{1\}$, $\mathbb{M}^+ = \emptyset$, $\mathbb{L}_1^- = \{2\}$, $\mathbb{L}_2^- = \{4\}$, $\mathbb{L}_3^- = \{6, 7\}$.

Reuniremos a seguir alguns lemas básicos que serão úteis para demonstração do Teorema 2.13 e Teorema 2.16.

Lema 2.9. *Seja $c \in \mathbb{M}_i$ e $d \in \mathbb{M}_j$ para alguns $i, j \in \mathbb{Z}$.*

(i) Se $i > j$ então $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_c, P_d) = 0$.

(ii) Se $i \geq 0$ e $j - i > 1$ então $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_c, P_d) = 0$.

(iii) Se $j \leq 0$ e $j - i > 1$ então $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_c, P_d) = 0$.

(iv) Se $i < 0$, $j > 0$ e $(i, j) \neq (-1, 1)$ então $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_c, P_d) = 0$.

(v) Se $i = j \neq 0$ então $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_c, P_d) \neq 0$ *se e só se $d \leq c$.*

(vi) Se $i = j = 0$ então $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_c, P_d) \neq 0$ *se e só se $d \leq c$ e $p(d, c) \notin \mathcal{I}$.*

Demonstração. Visto que $\mathrm{Hom}_\Lambda(P_c, P_d) \simeq e_d\Lambda e_c$, o lema é consequência direta das definições dos conjuntos $\mathbb{M}_i, i \in \mathbb{Z}$. $\square$

Lema 2.10. *Seja $T_{a,b}$ um complexo definido como acima e seja P_c alguns somandos diretos indecomponíveis de $(T_{a,b})^i$ para algum $i \in \mathbb{Z}$. Então $c \in \mathbb{M}_i$.*

Demonstração. O lema é consequência direta da definição do complexo $T_{a,b}$. □

Seja $\varphi = (\varphi^i)_{i\in\mathbb{Z}}$ um morfismo em $\mathrm{C}^b(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)$. Para qualquer $j \in \mathbb{Z}$ denotamos

$$\varphi_{(j)} := (\varphi^i_{(j)})_{i\in\mathbb{Z}}, \text{ onde } \varphi^i_{(j)} := \begin{cases} \varphi^i & \text{se } i = j, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.6}$$

Lema 2.11. *Sejam $a, b, c, d \in \mathcal{Q}_0, a \leq b$ e $\varphi = (\varphi^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}^b(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[1])$. Se $c, d \in \mathbb{M}_0 \bigcup \mathbb{M}^+$ ou $c, d \in \mathbb{M}^- \bigcup \mathbb{M}_0$ então $\varphi_{(j)} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}^b(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[1])$ para qualquer $j \in \mathbb{Z}$ e $\varphi = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_{(j)}$.*

Demonstração. A afirmação segue do Lema 2.9.(ii),(iii). □

Para qualquer $c \in \mathbb{M}^-_i, 1 \leq i \leq n_-$ e qualquer $0 \leq j \leq i$, definimos

$$\gamma_j(c) := \begin{cases} c & \text{se } i = j, \\ s^-_j & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{2.7}$$

e para qualquer $c \in \mathbb{M}^+_i, 1 \leq i \leq n_+$ e qualquer $0 \leq j \leq i$, definimos

$$\gamma_j(c) := \begin{cases} c & \text{se } j = i, \\ s^+_j & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.8}$$

Para qualquer complexo $T \in \mathrm{C}^b(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)$ definimos $\mathrm{supp}\, T := \{i \in \mathbb{Z} \mid T^i \neq 0\}$.

Observação 2.12. 1. Se $c \in \mathbb{M}_i$ e $i \geq 0$ então $\mathrm{supp}(T^c_{a,b}) = \{j \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq j \leq i\}$.

2. Se $c \in \mathbb{M}_i$ e $i \leq 0$ então $\mathrm{supp}(T^c_{a,b}) = \{j \in \mathbb{Z} \mid i \leq j \leq 0\}$.

O próximo Teorema fornece condições necessárias e suficientes para o complexo $T_{a,b}$ ser complexo *tilting*.

Teorema 2.13. *(i) O complexo $T_{a,b}$ é tilting se, e somente se, o par de vértices (a, b) é admissível.*

(ii) O complexo T_a é tilting se, e somente se, a é admissível.

(iii) Os complexos $T_-, T_+, T_{a,-}, T_{a,+}$ são tilting, para todo $a \in \mathcal{Q}_0$.

Demonstração. (i) ($\Rightarrow$): Suponhamos que existam $c, d \in \mathcal{Q}_0$ tais que $c < a \leq b < d$, $p(c, d) \in \mathcal{I}$, $p(c, b) \notin \mathcal{I}$ e $p(a, d) \notin \mathcal{I}$. Sem perda de generalidade podemos assumir que $c \in \mathbb{M}^+_1$ e $d \in \mathbb{M}^-_1$. Visto que $p(c, d) \in \mathcal{I}$, $p(c, b) \notin \mathcal{I}$ e $p(a, d) \notin \mathcal{I}$, temos os seguintes morfismos $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}^b(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b}[1])$:

$$\begin{tikzcd} T^d_{a,b} : \arrow[d, "\varphi_1"'] & P_d \arrow[r] \arrow[d, "p(a,d)"'] & P_b \arrow[d, "0"'] & & T^d_{a,b} : \arrow[d, "\varphi_2"'] & P_d \arrow[r] \arrow[d, "0"'] & P_b \arrow[d, "p(c,b)"'] . \\ T^c_{a,b}[1] : & P_a \arrow[r] & P_c & & T^c_{a,b}[1] : & P_a \arrow[r] & P_c \end{tikzcd}$$

Então $\dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}^b(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b}[1]) = 2$ e portanto $\mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^b(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b}[1]) \neq 0$ pois $\dim_{\Bbbk} \mathrm{Hom}_\Lambda(P_b, P_a) = 1$. Consequentemente, $T_{a,b}$ não é um complexo *tilting*.

($\Leftarrow$):

1. Primeiro vamos provar que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)}(T_{a,b}, T_{a,b}[i]) = 0$ para $i \neq 0$. Para isso é suficiente provar que $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[i]) = 0$ para $i \neq 0$ e todo $c, d \in \mathcal{Q}_0$.

Seja $\varphi = (\varphi^j)_{j\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}^b(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[i])$ para alguns $c, d \in \mathcal{Q}_0$ e algum $i \neq 0$. Se $\mathrm{supp}(T^c_{a,b}) \bigcap \mathrm{supp}(T^d_{a,b}[i]) = \emptyset$ então $\varphi = 0$. Suponhamos que $\mathrm{supp}(T^c_{a,b}) \bigcap \mathrm{supp}(T^d_{a,b}[i]) \neq \emptyset$ e seja $k \in \mathrm{supp}(T^c_{a,b}) \bigcap \mathrm{supp}(T^d_{a,b}[i])$. Pela definição de $T^c_{a,b}$ e $T^d_{a,b}$ temos $(T^c_{a,b})^k = P_f$ e $(T^d_{a,b}[i])^k = P_g$, para algum $f, g \in \mathcal{Q}_0$. Pelo Lema 2.11 $f \in \mathbb{M}_k$ e $g \in \mathbb{M}_{k+i}$.

Se $i < 0$ então $k > k + i$ e segue do Lema 2.9.(i) que $\varphi^k = 0$ e consequentemente $\varphi^j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ e a afirmação segue.

Se $i > 1$ e $(k, k + i) \neq (-1, 1)$ então segue do Lema 2.9.(ii)-(iv) que $\varphi^k = 0$ e consequentemente $\varphi^j = 0$ para todo $j \in \mathbb{Z}$ e a afirmação segue.

Suponha que $(k, k + i) = (-1, 1)$. Então $k = -1$ e $i = 2$. Visto que $(j + 2) - j > 1$ e $(j, j + 2) \neq (-1, 1)$ para qualquer $j \neq -1$, segue do Lema 2.9.(ii)-(iv) que $\varphi^j = 0$ para todo $j \neq -1$. Suponha que $\varphi^{-1} \neq 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\varphi^{-1} = p(\gamma_1(d), \gamma_1(c))$. Então $p(\gamma_1(d), \gamma_1(c)) \notin \mathcal{I}$ e φ é homotópico a zero pela homotopia $s = (s^j)_{j\in\mathbb{Z}} : T^c_{a,b} \to (T^d_{a,b}[1])[1]$, onde $s^{-1} := p(\gamma_1(d), b)$ e $s^j = 0$ para todo $j \neq -1$. Consequentemente $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[i]) = 0$ neste caso.

Finalmente, suponha que $i = 1$. Consideraremos vários casos.

Caso 1: $c \in \mathbb{M}_t, t > 0$. Então $k \geq 0$. Visto que $\mathrm{supp}(T^c_{a,b}) = \{j \in \mathbb{Z} \mid 0 \leq j \leq t\}$ e $\mathrm{supp}(T^c_{a,b}) \bigcap \mathrm{supp}(T^d_{a,b}[1]) \neq \emptyset$, temos $d \in \mathbb{M}^+$. Segue do Lema 2.11 que $\varphi = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_{(j)}$ neste caso e consequentemente podemos assumir sem perda de generalidade que $\varphi = \varphi_{(k)}$, isto é $\varphi^j = 0$ para todo $j \neq k$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\varphi^k = p(\gamma_{k+1}(d), \gamma_k(c))$. Então φ ié homotópico a zero pela homotopia $s = (s^j)_{j\in\mathbb{Z}} : T^c_{a,b} \to (T^d_{a,b}[1])[1]$, onde $s^j := (-1)^{k-j} p(\gamma_j(d), \gamma_j(c))$ para todo $0 \leq j \leq k$ e $s^j = 0$ caso contrário. Consequentemente $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[1]) = 0$ neste caso.

Caso 2: $c \in \mathbb{M}_0$. Visto que $\mathrm{supp}(T^c_{a,b}) = \{0\}$ e $\mathrm{supp}(T^c_{a,b}) \bigcap \mathrm{supp}(T^d_{a,b}[1]) \neq \emptyset$, temos $d \in \mathbb{M}^+$ e $k = 0$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\varphi^0 = p(\gamma_1(d), c)$. Então φ é homotópico a zero pela homotopia $s = (s^j)_{j\in\mathbb{Z}} : T^c_{a,b} \to (T^d_{a,b}[1])[1]$, onde $s^0 := p(a, c)$ e $s^j = 0$ para todo $j \neq 0$. Consequentemente $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[1]) = 0$ neste caso.

Caso 3: $c \in \mathbb{M}_t, t < 0$. Então $k < 0$.

Suponha primeiro que $d \in \mathbb{M}^-$. Segue do Lema 2.11 que $\varphi = \bigoplus_{j\in\mathbb{Z}} \varphi_{(j)}$ neste caso e consequentemente podemos assumir sem perda de generalidade que $\varphi = \varphi_{(k)}$, isto é, $\varphi^j = 0$ para todo $j \neq k$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\varphi^k = p(\gamma_{|k|-1}(d), \gamma_{|k|}(c))$. Então φ é homotópico a zero pela homotopia $s = (s^j)_{j\in\mathbb{Z}} : T^c_{a,b} \to (T^d_{a,b}[1])[1]$, onde $s^j := (-1)^{k-j-1} p(\gamma_j(d), \gamma_j(c))$ para todo $k + 1 \leq j \leq 0$ e $s^j = 0$ caso contrário. Consequentemente $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[1]) = 0$ neste caso.

Em seguida suponha que $d \in \mathbb{M}_0$. Visto que $\mathrm{supp}(T^d_{a,b}[1]) = \{-1\}$ e $\mathrm{supp}(T^c_{a,b}) \bigcap \mathrm{supp}(T^d_{a,b}[1]) \neq \emptyset$, temos $k = -1$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\varphi^{-1} = p(d, \gamma_1(c))$. Então φ é homotópico a zero pela homotopia $s = (s^j)_{j\in\mathbb{Z}} : T^c_{a,b} \to (T^d_{a,b}[1])[1]$, onde $s^0 := p(d, b)$ e $s^j = 0$ para todo $j \neq 0$. Consequentemente $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[1]) = 0$ neste caso.

Suponha finalmente que $d \in \mathbb{M}^+$. Então $\varphi^j = 0$ para todo $j \neq -1, 0$. Se $p(\gamma_1(d), \gamma_1(c)) \notin \mathcal{I}$ então podemos assumir sem perda de generalidade que $\varphi^0 = p(\gamma_1(d), b)$ e portanto φ é homotótico a zero pela homotopia $s = (s^j)_{j\in\mathbb{Z}} : T^c_{a,b} \to (T^d_{a,b}[1])[1]$, onde $s^0 := p(a, b)$ e $s^j = 0$ para todo $j \neq 0$. Consequentemente $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[1]) = 0$ neste caso. Suponha que $p(\gamma_1(d), \gamma_1(c)) \in \mathcal{I}$. Então

$p(\gamma_1(d), b) \in \mathcal{I}$ ou $p(a, \gamma_1(c)) \in \mathcal{I}$. Então podemos assumir sem perda de generalidade que no primeiro caso $\varphi^0 = p(a, \gamma_1(c))$ e no segundo caso $\varphi^0 = p(\gamma_1(d), b)$. Em ambos os casos φ é homotopico a zero pela homotopia $s = (s^j)_{j\in\mathbb{Z}} : T^c_{a,b} \to (T^d_{a,b}[1])[1]$, onde $s^0 := p(a, b)$ e $s^j = 0$ para todo $j \neq 0$. Consequentemente $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\mathrm{mod}\text{-}\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b}[1]) = 0$ neste caso.

2. Finalmente, provamos que $\mathrm{add}(T_{a,b})$ gera $\mathrm{K}^{-,b}(\mathrm{proj}\text{-}A)$ como uma categoria triangulada.

Se $c < a$ então temos a seguinte sequência exata em $C^b(A)$:

$$0 \to T^z_{a,b} \to T^c_{a,b} \to P_c[-k] \to 0, \tag{2.9}$$

onde

$$z := \begin{cases} s^+_k & \text{if } c \in \mathbb{L}^+_k, \\ s^+_{k-1} & \text{if } c = s^+_k. \end{cases} \tag{2.10}$$

Portanto temos o triângulo distinguido

$$T^z_{a,b} \to T^c_{a,b} \to P_c[-k] \to T^z_{a,b}[1], \tag{2.11}$$

e consequentemente $P_c \in \mathrm{add}(T)$.

Se $c > b$ então temos a seguinte sequência exata em $C^b(A)$:

$$0 \to P_c[k] \to T^c_{a,b} \to T^z_{a,b} \to 0, \tag{2.12}$$

onde

$$z := \begin{cases} s^-_k & \text{se } c \in \mathbb{L}^-_k, \\ s^-_{k-1} & \text{se } c = s^-_k. \end{cases} \tag{2.13}$$

Portanto temos o triângulo distinguido

$$P_c[k] \to T^c_{a,b} \to T^z_{a,b} \to P_c[k+1], \tag{2.14}$$

e consequentemente $P_c \in \mathrm{add}(T_{a,b})$.

Se $a \leq c \leq b$, então $T^c_{a,b} = P_c \in \mathrm{add}(T_{a,b})$. Portanto $P_c \in \mathrm{add}(T_{a,b})$ para todo $c \in \mathcal{Q}_0$ e consequentemente $\mathrm{add}(T_{a,b})$ gera $\mathrm{K}^b(\mathrm{proj}\text{-}A)$ como uma categoria triangulada.

(ii) Visto que, por definição, $T_a = T_{a,a}$, a afirmação segue do item (i).

(iii) Por definição, $T_- = T_{a,a}$ (resp., $T_+ = T^\Lambda_+ := T_{a,a}$) se o vértice a é a fonte (resp., poço). Portanto o par (a, a) é admissível por definição.

Por definição, $T_{a,+} = T_{a,b}$, onde b é o poço e $T_{b,-} = T^\Lambda_{b,-} := T_{a,b}$, onde a é a fonte. Em ambos os casos, o par (a, b) é admissível pela definição. □

2.3 Álgebras de endomorfismos

O objetivo desta seção é achar condições necessárias e suficientes para álgebra de endomorfismos de complexo *tilting* $T^\Lambda_{a,b}$ ser uma álgebra de incidência de um poset (veja Teorema 2.23). Calculamos neste caso a ordem parcial correspondente explicitamente (veja Definição 2.14).

Definição 2.14. Relações em $\mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$.

1. $R^0_{a,b} := \{(c,c) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid c \in \mathcal{Q}_0\}$.

2. $R^1_{a,b} := \{(c,d) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid c < d,\ c,d \in \mathbb{M}^-_k$ ou $c,d \in \mathbb{M}^+_k$ para algum $k\}$.

3. $R^{2,+}_{a,b} := \{(c,d) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid c > d, c \in \mathbb{S}^+\}$,

   $R^{2,-}_{a,b} := \{(c,d) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid c > d, d \in \mathbb{S}^-\}$,

   $R^2_{a,b} := R^{2,-}_{a,b} \bigcup R^{2,+}_{a,b}$.

4. $R^{3,+}_{a,b} := \{(c,d) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid d \in \mathbb{L}^+_k, c \in \mathbb{M}^+_l, 1 \leq k < l \leq n_+,\ p(\gamma_{k+1}(c), d) \in \mathcal{I}\}$,

   $R^{3,-}_{a,b} := \{(c,d) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid d \in \mathbb{M}^-_l, c \in \mathbb{L}^-_k, 1 \leq k < l \leq n_-,\ p(c, \gamma_{k+1}(d)) \in \mathcal{I}\}$,

   $R^3_{a,b} := R^{3,-}_{a,b} \bigcup R^{3,+}_{a,b}$.

5. $R^{4,-}_{a,b} := \{(c,d) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid d \in \mathbb{M}^-_i, 1 \leq i \leq n_-, a \leq c < b, p(c,b) \notin \mathcal{I}, p(c, \gamma_1(d)) \in \mathcal{I}\}$,

   $R^{4,+}_{a,b} := \{(c,d) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid c \in \mathbb{M}^+_i, 1 \leq i \leq n_+, a < d \leq b, p(a,d) \notin \mathcal{I}, p(\gamma_1(c), d) \in \mathcal{I}\}$,

   $R^{4,-,+}_{a,b} := \{(c,d) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid d \in \mathbb{M}^-_i, 1 \leq i \leq n_-, c \in \mathbb{M}^+_j, 1 \leq j \leq n_+, p(a,b) \notin \mathcal{I}, p(a, \gamma_1(d)), p(\gamma_1(c), b) \in \mathcal{I}\}$,

   $R^{4,+,-}_{a,b} := \{(c,d) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid d \in \mathbb{M}^-_i, 1 \leq i \leq n_-, c \in \mathbb{M}^+_j, 1 \leq j \leq n_+\}$ se $b = a$ e

   $R^{4,+,-}_{a,b} := \emptyset$ se $b \neq a$,

   $R^4_{a,b} := R^{4,-}_{a,b} \bigcup R^{4,+}_{a,b} \bigcup R^{4,-,+}_{a,b} \bigcup R^{4,+,-}_{a,b}$.

6. $R^5_{a,b} := \{(c,d) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0 \mid a \leq c < d \leq b, p(c,d) \notin \mathcal{I}\}$.

7. $R_{a,b} := \bigcup_{0 \leq i \leq 5} R^i_{a,b}$.

O próximo lema básico será útil para demonstração do Teorema 2.16.

Lema 2.15. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica e seja $a, b \in \mathcal{Q}_0, a \leq b$. Então* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D^b}(\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b}) \simeq$ *$Hom_{\mathrm{C^b}(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b})$ para todo $c, d \in \mathcal{Q}_0$.*

Demonstração. A afirmação segue do Lema 2.9(i). □

O próximo Teorema fornece uma relação entre álgebra de endomorfismos do complexo *tilting* $T_{a,b}$ e ordem $R_{a,b}$. Este resultado vai ser importante para demonstração do Teorema 2.18, que é um dos resultado principais dessa seção.

Teorema 2.16. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica e seja $a, b \in \mathcal{Q}_0, a \leq b$. Então para todo $c, d \in \mathcal{Q}_0$, $(c, d) \in R_{a,b}$ se, e somente se, $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b}) \neq 0$. Neste caso $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b}) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(P_{\gamma_0(d)}, P_{\gamma_0(c)})$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$):

Para cada elemento (c, d) in $R_{a,b}$ definimos um morfismo $\varphi_{d,c} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b})$.

Para $(c, c) \in R^0_{a,b}$ denotamos $\varphi_{c,c} := 1_{T^c_{a,b}}$.

Para $(c, d) \in R^{1,+}_{a,b}$, $c, d \in \mathbb{M}^+_k$ para algum $1 \leq k \leq n_+$ denotamos por $\varphi_{d,c}$ os seguintes morfismos entre $T^d_{a,b}$ e $T^c_{a,b}$:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b} : \arrow[d, "\varphi_{d,c}"'] & P_a \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & P_{s^+_1} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s^+_{k-1}} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & P_d \arrow[d, "p(c,d)"'] \\
T^c_{a,b} : & P_a \arrow[r] & P_{s^+_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s^+_{k-1}} \arrow[r] & P_c
\end{tikzcd}$$

Para $(c, d) \in R^{1,-}_{a,b}$, $c, d \in \mathbb{M}^-_k$ para algum $1 \leq k < n_-$ denotamos por $\varphi_{d,c}$ os seguintes morfismos entre $T^d_{a,b}$ e $T^c_{a,b}$:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b} : \arrow[d, "\varphi_{d,c}"'] & P_d \arrow[r] \arrow[d, "p(c,d)"'] & P_{s^-_{k-1}} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s^-_1} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & P_b \arrow[d, "1"'] \\
T^c_{a,b} : & P_c \arrow[r] & P_{s^-_{k-1}} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s^-_1} \arrow[r] & P_b
\end{tikzcd}$$

Para $(c, d) \in R^{2,+}_{a,b}$, $1 \leq k < n_+$, denotamos por $\varphi_{d,c}$ os seguintes morfismos entre $T^d_{a,b}$ e $T^c_{a,b}$:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b} : \arrow[d, "\varphi_{d,c}"'] & P_a \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & P_{s^+_1} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s^+_k} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & P_{s^+_{k+1}} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_d \\
T^c_{a,b} : & P_a \arrow[r] & P_{s^+_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s^+_k} & & &
\end{tikzcd}$$

Para $(c, d) \in R^{2,-}_{a,b}$, $1 < k \leq n_-$, denotamos por $\varphi_{d,c}$ os seguintes morfismos entre $T^d_{a,b}$ e $T^c_{a,b}$:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b} : \arrow[d, "\varphi_{d,c}"'] & & & & P_{s^-_k} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s^-_1} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & P_b \arrow[d, "1"'] \\
T^c_{a,b} : & P_c \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s^-_{k-1}} \arrow[r] & P_{s^-_k} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s^-_1} \arrow[r] & P_b
\end{tikzcd}$$

Para $(c,d) \in R^{3,+}_{a,b}$ e $1 < k < l \leq n_+$ denotamos por $\varphi_{d,c}$ o seguinte morfismo entre $T^d_{a,b}$ e $T^c_{a,b}$:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi_{d,c}"'] & P_a \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & P_{s_1^+} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s_{k-1}^+} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & P_d \arrow[d, "p(s_k^+,d)"'] & & & \\
T^c_{a,b}: & P_a \arrow[r] & P_{s_1^+} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s_{k-1}^+} \arrow[r] & P_{s_k^+} \arrow[r] & P_{s_{k+1}^+} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_c
\end{tikzcd}$$

Para $(c,d) \in R^{3,-}_{a,b}$ e $1 \leq l < k < n_-$ denotamos por $\varphi_{d,c}$ o seguinte morfismo entre $T^d_{a,b}$ e $T^c_{a,b}$:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi_{d,c}"'] & P_d \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s_{k+1}^-} \arrow[r] & P_{s_k^-} \arrow[r] \arrow[d, "p(c,s_k^-)"'] & P_{s_{k-1}^-} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s_1^-} \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & P_b \arrow[d, "1"'] \\
T^c_{a,b}: & & & & P_c \arrow[r] & P_{s_{k-1}^-} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s_1^-} \arrow[r] & P_b
\end{tikzcd}$$

Para $(c,d) \in R^{4,+}_{\Omega}$ denotamos por $\varphi_{d,c}$ o seguinte morfismo entre $T^d_{a,b}$ e $T^c_{a,b}$:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi_{d,c}"'] & P_d \arrow[d, "p(a,d)"'] & & \\
T^c_{a,b}: & P_a \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_c
\end{tikzcd}$$

Para $(c,d) \in R^{4,-}_{a,b}$ denotamos por $\varphi_{d,c}$ o seguinte morfismo entre $T^d_{a,b}$ e $T^c_{a,b}$:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi_{d,c}"'] & P_d \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_b \arrow[d, "p(c,b)"'] \\
T^c_{a,b}: & & & P_c
\end{tikzcd}$$

Para $(c,d) \in R^{4,-,+}_{a,b}$ denotamos por $\varphi_{d,c}$ o seguinte morfismo entre $T^d_{a,b}$ e $T^c_{a,b}$:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi_{d,c}"'] & P_d \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_b \arrow[d, "p(a,b)"'] & & \\
T^c_{a,b}: & & & P_a \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_c
\end{tikzcd}$$

Para $(c,d) \in R^{4,+,-}_{a,b}$ denotamos por $\varphi_{d,c}$ os seguinte morfismo entre $T^d_{a,a}$ e $T^c_{a,a}$:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,a}: \arrow[d, "\varphi d{,}c"'] & & & P_a \arrow[r] \arrow[d, "1"'] & \cdots \arrow[r] & P_d \\
T^c_{a,a}: & P_c \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_a & &
\end{tikzcd}$$

Para $(c,d) \in R^5_{a,b}$ denotamos $\varphi_{d,c} := p(c,d) : P_d \to P_c$. Segue do Lema 2.15 que $\varphi_{d,c} \neq 0$ como um morfismo em $\mathrm{D}^b(\Lambda)$ para todo $(c,d) \in R_{a,b}$.

($\Leftarrow$):

Seja $0 \neq \varphi = (\varphi^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}^b(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b})$. Podemos assumir que $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{C}^b(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b})$ e $\varphi \neq 0$ por causa do Lema 2.16.

Vamos considerar vários casos.

Caso 1: $c, d \in \mathbb{M}^+$. Primeiro, suponha que $c, d \in \mathbb{M}^+_k$ para algum $1 \leq k \leq n_+$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & P_a \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^0"'] & P_{s^+_1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^1"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s^+_{k-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{k-1}"'] & P_d \arrow[d, "\varphi^k"'] \\
T^c_{a,b}: & P_a \arrow[r] & P_{s^+_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s^+_{k-1}} \arrow[r] & P_c
\end{tikzcd}$$

Segue da comutatividade do diagrama que $\varphi^k = 0$ então $\varphi = 0$. Portanto $\varphi^k \neq 0$ e obtemos que $c \leq d$ pelo Lema 2.9.(i). Consequentemente $(c, d) \in R^1_{a,b}$.

Em seguida, suponha que $c \in \mathbb{M}^+_k, d \in \mathbb{M}^+_l$ e $l > k$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & P_a \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^0"'] & P_{s^+_1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^1"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s^+_k} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^k"'] & \cdots \arrow[r] & P_d \\
T^c_{a,b}: & P_a \arrow[r] & P_{s^+_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_c & &
\end{tikzcd}$$

Segue da comutatividade do diagrama que $\varphi^k = 0$ então $\varphi = 0$. Portanto $\varphi^k \neq 0$ e obtemos que $c = s^+_k$ pelo Lema 2.9.(i). Consequentemente $(c, d) \in R^{2,+}_{a,b}$.

Finalmente, suponha que $d \in \mathbb{M}^+_k, c \in \mathbb{M}^+_l$ e $l > k$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi_{d,c}"'] & P_a \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^0"'] & P_{s^+_1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^1"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s^+_{k-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{k-1}"'] & P_d \arrow[d, "\varphi^k"'] & & \\
T^c_{a,b}: & P_a \arrow[r] & P_{s^+_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s^+_{k-1}} \arrow[r] & P_{s^+_k} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_c
\end{tikzcd}$$

Segue da comutatividade do diagrama que $d^k_{T^c_{a,b}} \varphi^k = 0$ e se $\varphi^k = 0$ então $\varphi = 0$. Portanto $\varphi^k \neq 0$ e obtemos que $p(\gamma_{k+1}(c), d) \in \mathcal{I}$. Consequentemente $(c, d) \in R^{3,+}_{a,b}$.

Caso 2: $c, d \in \mathbb{M}^-$. Primeiro, suponha que $c, d \in \mathbb{M}^-_k$ para algum $1 \leq k \leq n_-$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & P_d \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{-k}"'] & P_{s^-_{k-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{-k+1}"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s^-_1} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & P_b \arrow[d, "\varphi^0"'] \\
T^c_{a,b}: & P_c \arrow[r] & P_{s^-_{k-1}} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s^-_1} \arrow[r] & P_b
\end{tikzcd}$$

Segue da comutatividade do diagrama que $\varphi^k = 0$ então $\varphi = 0$. Portanto $\varphi^k \neq 0$ e obtemos que $c \leq d$ pelo Lema 2.9.(i). Consequentemente $(c, d) \in R^1_{a,b}$.

Em seguida, suponha que $c \in \mathbb{M}^-_l, d \in \mathbb{M}^-_k$ e $l > k$.

Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & & & P_d \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{-k}"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s_1^-} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & P_b \arrow[d, "\varphi^0"'] \\
T^c_{a,b}: & P_c \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s_k^-} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s_1^-} \arrow[r] & P_b
\end{tikzcd}$$

Segue da comutatividade do diagrama que $\varphi^k = 0$ então $\varphi = 0$. Portanto $\varphi^k \neq 0$ e obtemos que $d = s_k^-$ pelo Lema 2.9.(i). Consequentemente $(c, d) \in R^{2,-}_{a,b}$.

Finalmente, suponha que $d \in \mathbb{M}_l^-, c \in \mathbb{M}_k^-$ e $l > k$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & P_d \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s_k^-} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{-k}"'] & P_{s_{k-1}^-} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{-k+1}"'] & \cdots \arrow[r] & P_{s_1^-} \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^{-1}"'] & P_b \arrow[d, "\varphi^0"'] \\
T^c_{a,b}: & & & P_c \arrow[r] & P_{s_{k-1}^-} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_{s_1^-} \arrow[r] & P_b
\end{tikzcd}$$

Segue da comutatividade do diagrama que $\varphi^k d^{k-1}_{T^c_{a,b}}$ e se $\varphi^k = 0$ então $\varphi = 0$. Portanto $\varphi^k \neq 0$ e obtemos que $p(c, \gamma_{k+1}(d)) \in \mathcal{I}$. Consequentemente $(c, d) \in R^{3,-}_{a,b}$.

Caso 3: $c, d \in \mathbb{M}_0$. Neste caso $T^d_{a,b} = P_d$ and $T^c_{a,b} = P_c$ pela definição. Portanto $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b}) \simeq \mathrm{Hom}_\Lambda(P_d, P_c) \neq 0$ se, e somente se, $d \leq c$ e $p(d, c) \notin \mathcal{I}$ pelo Lema 2.9.(iii). Consequentemente a afirmação segue.

Caso 4: $c \in \mathbb{M}^+, d \in \mathbb{M}_0$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & P_d \arrow[d, "\varphi^0"'] & & \\
T^c_{a,b}: & P_a \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_c
\end{tikzcd}$$

Neste caso $\varphi^0 \neq 0$ pois $\varphi \neq 0$ e portanto $p(a, d) \notin \mathcal{I}$. Segue da comutatividade do diagrama que $d^0_{T^c_{a,b}} \varphi^0 = 0$ e portanto $p(\gamma_1(c), d) \in \mathcal{I}$. Consequentemente $(c, d) \in R^{4,+}_{a,b}$.

Caso 5: $c \in \mathbb{M}_0, d \in \mathbb{M}^+$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & P_a \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^0"'] & \cdots \arrow[r] & P_d \\
T^c_{a,b}: & P_c & &
\end{tikzcd}$$

Neste caso $\varphi^0 \neq 0$ pois $\varphi \neq 0$ e portanto $c = a$ pelo Lema 2.9.(iv). Consequentemente $(c, d) \in R^{2,+}_{a,b}$.

Caso 6: $c \in \mathbb{M}_0, d \in \mathbb{M}^-$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & P_d \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_b \arrow[d, "\varphi^0"'] \\
T^c_{a,b}: & & & P_c
\end{tikzcd}$$

Neste caso $\varphi^0 \neq 0$ pois $\varphi \neq 0$ e portanto $p(c,b) \notin \mathcal{I}$. Segue da comutatividade do diagrama que $\varphi^0 d^0_{T^d_{a,b}} = 0$ e portanto $p(c,\gamma_1(d)) \in \mathcal{I}$. Consequentemente $(c,d) \in R^{4,-}_{a,b}$.

Caso 7: $c \in \mathbb{M}^-, d \in \mathbb{M}_0$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & & & P_d \arrow[d, "\varphi^0"'] \\
T^c_{a,b}: & P_c \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_b
\end{tikzcd}$$

Neste caso $\varphi^0 \neq 0$ pois $\varphi \neq 0$ e portanto $d = b$ pelo Lema 2.9.(iv). Consequentemente $(c,d) \in R^{2,-}_{a,b}$.

Caso 8: $c \in \mathbb{M}^+, d \in \mathbb{M}^-$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & P_d \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_b \arrow[d, "\varphi^0"'] & & \\
T^c_{a,b}: & & & P_a \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_c
\end{tikzcd}$$

Neste caso $\varphi^0 \neq 0$ pois $\varphi \neq 0$ e portanto $p(a,b) \notin \mathcal{I}$. Segue da comutatividade do diagrama que $\varphi^0 d^0_{T^d_{a,b}} = 0$ e $d^0_{T^c_{a,b}}\varphi^0 = 0$, portanto $p(a,\gamma_1(d)) \in \mathcal{I}$ e $p(\gamma_1(c),b)) \in \mathcal{I}$. Consequentemente $(c,d) \in R^{4,-,+}_{a,b}$.

Caso 9: $c \in \mathbb{M}^-, d \in \mathbb{M}^+$. Então φ é dado por:

$$\begin{tikzcd}
T^d_{a,b}: \arrow[d, "\varphi"'] & & & P_a \arrow[r] \arrow[d, "\varphi^0"'] & \cdots \arrow[r] & P_d \\
T^c_{a,b}: & P_c \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & P_b & &
\end{tikzcd}$$

Neste caso $\varphi^0 \neq 0$ pois $\varphi \neq 0$ e portanto $b = a$ pelo Lema 2.9.(iv). Consequentemente $(c,d) \in R^{4,+,-}_{a,b}$.

□

Definição 2.17. Para cada elemento (c,d) em $R_{a,b}$ denotamos por $\varphi_{d,c}$ um único morfismo $\varphi = (\varphi^i)_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b})$ tal que $\varphi^0 = p(\gamma_0(d), \gamma_0(c))$.

O próximo Teorema fornece condições necessárias e suficientes para relação $R_{a,b}$ ser uma relação de um ordem parcial.

Teorema 2.18. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica e $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ um par de vértices admissíveis. Então $R_{a,b}$ é uma relação de ordem parcial em $\mathcal{Q}_0$ se, e somente se, $p(a,b) \notin \mathcal{I}$.*

Demonstração. $(\Rightarrow)$

Suponha que $p(a,b) \in \mathcal{I}$. Então $p(a,b) = \alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n$ para algum $\alpha_i \in \mathcal{Q}_1$ e algum $n > 1$. Então segue da Definição 2.14.(vi) que $(s(\alpha_i), t(\alpha_i)) \in R_{a,b}$ para $1 \leq i \leq n$ e $(a,b) \notin R_{a,b}$. Portanto $R_{a,b}$ não é uma relação de ordem parcial.

$(\Leftarrow)$

Reflexividade. Visto que $R^0_{a,b} \subseteq R_{a,b}$, temos $(c,c) \in R_{a,b}$, para todo $c \in \mathcal{Q}_0$.

Anti-simetria. Suponha que $(c,d),(d,c) \in R_{a,b}$. Então existem morfismos $\varphi_{d,c} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b})$ e $\varphi_{c,d} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^d_{a,b})$. Então existem morfismos $\varphi :=$

$\varphi_{d,c}\varphi_{c,d} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^c_{a,b}, T^c_{a,b})$ e $\psi := \varphi_{c,d}\varphi_{d,c} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^d_{a,b})$. Visto que $\varphi^0 = \varphi^0_{d,c}\varphi^0_{c,d} = p(\gamma_0(c), \gamma_0(d))p(\gamma_0(d), \gamma_0(c)) = p(\gamma_0(c), \gamma_0(c))$, temos que $\varphi = \varphi_{c,c}$. Similarmente, $\psi = \varphi_{d,d}$. Portanto, $T^d_{a,b} \cong T^c_{a,b}$ e consequentemente $d = c$.

Transitividade. Suponha que $(c, d), (d, f) \in R_{a,b}$. Então existem morfismos $\varphi_{d,c} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^d_{a,b}, T^c_{a,b})$ e $\varphi_{f,d} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^f_{a,b}, T^d_{a,b})$. Então existem morfismos $\varphi := \varphi_{d,c}\varphi_{f,d} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^f_{a,b}, T^c_{a,b})$. Visto que $\varphi^0 = \varphi^0_{d,c}\varphi^0_{f,d} = p(\gamma_0(c), \gamma_0(d))p(\gamma_0(d), \gamma_0(f)) = p(\gamma_0(c), \gamma_0(f))$, temos que $\varphi = \varphi_{c,f}$. Consequentemente $(c, f) \in R_{a,b}$ pelo Teorema 2.16. $\square$

Definição 2.19.

1. $\mathcal{S}^\Lambda_{a,b} := (Q_0, \leq_{a,b})$, onde $c \leq_{a,b} d$ se, e somente se, $(c, d) \in R_{a,b}$.
2. $\mathcal{S}^\Lambda_a := \mathcal{S}^\Lambda_{a,a}$.
3. $\mathcal{S}^\Lambda_- := \mathcal{S}^\Lambda_{a,a}$ se o vértice a é a fonte.
4. $\mathcal{S}^\Lambda_+ := \mathcal{S}^\Lambda_{a,a}$ se o vértice a é o poço.
5. $\mathcal{S}^\Lambda_{a,+} := \mathcal{S}^\Lambda_{a,b}$, onde b é o poço.
6. $\mathcal{S}^\Lambda_{b,-} := \mathcal{S}^\Lambda_{a,b}$, onde a é a fonte.

Exemplo 2.20. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, onde

$$\mathcal{Q}:\ 1 \xrightarrow{\alpha_1} 2 \xrightarrow{\alpha_2} 3 \xrightarrow{\alpha_3} 4 \xrightarrow{\alpha_4} 5 \xrightarrow{\alpha_5} 6 \xrightarrow{\alpha_6} 7 \xrightarrow{\alpha_7} 8 \ \text{ e } \mathcal{I} = \langle \alpha_1\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_4\alpha_5 \rangle.$$

Vamos calcular o poset $\mathcal{S}^\Lambda_-$. Pelo Exemplo 2.8 temos $\mathbb{S}^- = \{1, 3, 5, 8\}$, $\mathbb{M}^-_1 = \{2, 3\}$, $\mathbb{M}^-_2 = \{4, 5\}$, $\mathbb{M}^-_3 = \{6, 7, 8\}$, $\mathbb{M}_0 = \{1\}$, $\mathbb{M}^+ = \emptyset$, $\mathbb{L}^-_1 = \{2\}$, $\mathbb{L}^-_2 = \{4\}$, $\mathbb{L}^-_3 = \{6, 7\}$.

Segue direto da Definição 2.14 a relação

$$R^0_{1,1} = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7), (8, 8)\}.$$

Usando os conjuntos $\mathbb{M}^-_i$, para $1 \leq i \leq 3$, temos

$$R^1_{1,1} = \{(2, 3), (4, 5), (6, 7), (6, 8), (7, 8)\}.$$

Como $\mathbb{S}^- = \{1, 3, 5, 8\}$, temos

$$R^{2,-}_{1,1} = \{(6, 5), (7, 5), (8, 5), (4, 3), (5, 3), (6, 3), (7, 3), (8, 3), (2, 1), (3, 1), (4, 1), (5, 1), (6, 1), (7, 1), (8, 1)\}.$$

Como $\mathbb{S}^+ = \{1\}$, temos $R^{2,+}_{1,1} = \emptyset$ e assim $R^2_{1,1} = R^{2,-}_{1,1}$.

Note que $\gamma_3(6) = 6, \gamma_3(7) = 7, \gamma_3(8) = 8, \gamma_2(6) = \gamma_2(7) = \gamma_2(8) = 5, \gamma_2(4) = 4, \gamma_2(5) = 5$, consequentemente, $p(4, \gamma_3(6)) \notin \mathcal{I}$, $p(4, \gamma_3(7)) \notin \mathcal{I}$, $p(4, \gamma_3(8)) \notin \mathcal{I}$, $p(2, \gamma_2(6)) \notin \mathcal{I}$, $p(2, \gamma_2(7)) \notin \mathcal{I}$, $p(2, \gamma_2(8)) \notin \mathcal{I}$, $p(2, \gamma_2(4)) \notin \mathcal{I}$, $p(2, \gamma_2(5)) \notin \mathcal{I}$. Logo,

$$R^{3,-}_{1,1} = \emptyset.$$

Como $\mathbb{M}^+ = \emptyset$, temos $R^3_{1,1} = \emptyset$.

Como não existe $c \in \mathcal{Q}_0$ tal que $1 \leq c < 1$, temos $R^{4,-}_{1,1} = \emptyset$. Como $\mathbb{M}^+ = \emptyset$, temos $R^4_{1,1} = \emptyset$. Segue direto da definição que $R^5_{1,1} = \emptyset$. Portanto,

$$\begin{tikzcd} \mathcal{S}_-^\Lambda = 1 & 3 \arrow[l] & 5 \arrow[l] & 8 \arrow[l] & 7 \arrow[l] & 6 \arrow[l] \\ & 2 \arrow[u] & 4 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Teorema 2.21. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica e $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ um par de vértices admissível. Então (b,a) é um par de vértices admissível para Λ^{op} e $\mathcal{S}_{b,a}^{\Lambda^{op}} \simeq (\mathcal{S}_{a,b}^\Lambda)^{op}$.*

Demonstração. A afirmação segue da definição de $R_{a,b}$. □

Corolário 2.22. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica.*

1. $\mathcal{S}_-^\Lambda \cong (\mathcal{S}_+^{\Lambda^{op}})^{op}$.
2. *Se Λ é uma álgebra truncada então $\mathcal{S}_-^\Lambda \cong (\mathcal{S}_+^\Lambda)^{op}$*

Demonstração. (i) A afirmação segue do Teorema 2.21.

(ii) Visto que Λ é uma álgebra de Nakayama acíclica truncada, temos $\Lambda^{op} \cong \Lambda$, portanto a afirmação segue da afirmação (i). □

O próximo Teorema fornece condições necessárias e suficientes para que a álgebra de endomorfismos do complexo *tilting* $T_{a,b}$ ser uma álgebra de incidência de um poset.

Teorema 2.23. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/I$ uma álgebra de Nakayama acíclica e $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ um par de vértices admissível. Então $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_{a,b})$ é uma álgebra de incidência de poset se, e somente se, $p(a,b) \notin \mathcal{I}$. Neste caso $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_{a,b}) \cong \Bbbk\mathcal{S}_{a,b}^\Lambda$.*

Demonstração. Primeiro suponha que $p(a,b) \in \mathcal{I}$. Então segue do Teorema 2.18 e do Teorema 2.16 que Λ não é uma álgebra de incidência de poset.

Finalmente suponha que $p(a,b) \notin \mathcal{I}$. Visto que $\{\varphi_{c,d}\}_{(c,d)\in R_{a,b}}$ é uma $\Bbbk$-base de $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_{a,b})$ pelo Teorema 2.16 e

$$\varphi_{c,d}\varphi_{f,g} = \begin{cases} \varphi_{c,g} & \text{se } d = f, \\ 0 & \text{se } d \neq f, \end{cases} \tag{2.15}$$

pela demonstração do Teorema 2.18, a álgebra $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_{a,b})$ é uma álgebra de incidência de poset e a afirmação segue. □

Corolário 2.24. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/I$ uma álgebra de Nakayama acíclica.*

1. $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_+) \cong \Bbbk\mathcal{S}_+^\Lambda$.
2. $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_-) \cong \Bbbk\mathcal{S}_-^\Lambda$.
3. *Se $a \in \mathcal{Q}_0$ é admissível, então $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_a) \cong \Bbbk\mathcal{S}_a^\Lambda$.*
4. *Se $a \in \mathcal{Q}_0$ tal que $p(a,b) \notin \mathcal{I}$, onde $b \in \mathcal{Q}_0$ é o poço, então $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_{a,+}) \cong \Bbbk\mathcal{S}_{a,+}^\Lambda$.*
5. *Se $a \in \mathcal{Q}_0$ tal que $p(b,a) \notin \mathcal{I}$, onde $b \in \mathcal{Q}_0$ é a fonte, então $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_{a,-}) \cong \Bbbk\mathcal{S}_{a,-}^\Lambda$.*

Como uma consequência do Teorema 2.23 o resultado a seguir mostra uma relação entre álgebras de Nakayama acíclicas e álgebras de incidência de posets.

Teorema 2.25. *Seja Λ uma álgebra de Nakayama acíclica. Então Λ é derivadamente equivalente a alguma álgebra de incidência de poset.*

Demonstração. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ e $a \in \mathcal{Q}_0$ o poço de $\mathcal{Q}$. Seja $T := T_+ = T_{a,a}$. Visto que (a,a) é um par de vértices admissível e $\mathcal{I}^{\Lambda}_{a,a} = 0$, obtemos do Teorema 2.23 que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk\mathcal{S}_+$ é uma álgebra de incidência de poset. Consequentemente a afirmação segue de [34, Teorema 6.4]. $\square$

2.4 Somas amalgamadas e álgebras de endomorfismos

Nesta seção estudamos a relação da álgebra de endomorfismos do complexo *tilting* $T^{\Lambda}_{a,b}$ no caso quando Λ é uma soma amalgamada com álgebras de endomorfismos de complexos *tilting* das subálgebras envolvidas (veja Teorema 2.28). Aplicamos este resultado para simplificar a descrição da álgebra de endomorfismos do complexo *tilting*.

Definição 2.26. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica e $c, d \in \mathcal{Q}_0$.

1. Denotamos por $\mathcal{Q}^{\le c} = (\mathcal{Q}^{\le c}_0, \mathcal{Q}^{\le c}_1)$ a subaljava plena de $\mathcal{Q}$ com o conjunto de vértices $\mathcal{Q}^{\le c}_0 := \{x \in \mathcal{Q}_0 \mid x \le c\}$, $e_{\le c} := \sum_{x\in\mathcal{Q}^{\le c}_0} e_x$ e $\Lambda_{\le c} := e_{\le c}\Lambda e_{\le c} = \Bbbk\mathcal{Q}^{\le c}/\mathcal{I}_{\le c}$, onde $\mathcal{I}_{\le c} := \mathcal{I}\bigcap \Bbbk\mathcal{Q}^{\le c}$.

2. Denotamos por $\mathcal{Q}^{\ge c} = (\mathcal{Q}^{\ge c}_0, \mathcal{Q}^{\ge c}_1)$ a subaljava plena de $\mathcal{Q}$ com o conjunto de vértices $\mathcal{Q}^{\ge c}_0 := \{x \in \mathcal{Q}_0 \mid x \ge c\}$, $e_{\ge c} := \sum_{x\in\mathcal{Q}^{\ge c}_0} e_x$ e $\Lambda_{\ge c} := e_{\ge c}\Lambda e_{\ge c} = \Bbbk\mathcal{Q}^{\ge c}/\mathcal{I}_{\ge c}$, onde $\mathcal{I}_{\ge c} := \mathcal{I}\bigcap \Bbbk\mathcal{Q}^{\ge c}$.

3. Se c não é uma fonte, então denotamos por $\mathcal{Q}^{< c} = (\mathcal{Q}^{< c}_0, \mathcal{Q}^{< c}_1)$ a subaljava de $\mathcal{Q}$ com o conjunto de vértices $\mathcal{Q}^{< c}_0 := \{x \in \mathcal{Q}_0 \mid x < c\}$, $e_{< c} := \sum_{x\in\mathcal{Q}^{< c}_0} e_x$ e $\Lambda_{< c} := e_{< c}\Lambda e_{< c} = \Bbbk\mathcal{Q}^{< c}/\mathcal{I}_{< c}$, onde $\mathcal{I}_{< c} := \mathcal{I}\bigcap \Bbbk\mathcal{Q}^{< c}$.

4. Se c não é um poço, então denotamos por $\mathcal{Q}^{> c} = (\mathcal{Q}^{> c}_0, \mathcal{Q}^{> c}_1)$ a subaljava de $\mathcal{Q}$ com o conjunto de vértices $\mathcal{Q}^{> c}_0 := \{x \in \mathcal{Q}_0 \mid x > c\}$, $e_{> c} := \sum_{x\in\mathcal{Q}^{> c}_0} e_x$ e $\Lambda_{> c} := e_{> c}\Lambda e_{> c} = \Bbbk\mathcal{Q}^{> c}/\mathcal{I}_{> c}$, onde $\mathcal{I}_{> c} := \mathcal{I}\bigcap \Bbbk\mathcal{Q}^{> c}$.

5. Se $c \le d$, então denotamos por $\mathcal{Q}^{[c,d]} = (\mathcal{Q}^{[c,d]}_0, \mathcal{Q}^{[c,d]}_1)$ a subaljava plena de $\mathcal{Q}$ com o conjunto de vértices $\mathcal{Q}^{[c,d]}_0 := \{x \in \mathcal{Q}_0 \mid c \le x \le d\}$, $e_{[c,d]} := \sum_{x\in\mathcal{Q}^{[c,d]}_0} e_x$ e $\Lambda_{[c,d]} := e_{[c,d]}\Lambda e_{[c,d]} = \Bbbk\mathcal{Q}^{[c,d]}/\mathcal{I}_{[c,d]}$, onde $\mathcal{I}_{[c,d]} := \mathcal{I}\bigcap \Bbbk\mathcal{Q}^{[c,d]}$.

6. Se $\{x \in \mathcal{Q}_0 \mid c < x < d\} \neq \emptyset$, então denotamos por $\mathcal{Q}^{(c,d)} = (\mathcal{Q}^{(c,d)}_0, \mathcal{Q}^{(c,d)}_1)$ a subaljava plena de $\mathcal{Q}$ com o conjunto de vértices $\mathcal{Q}^{(c,d)}_0 := \{x \in \mathcal{Q}_0 \mid c < x < d\}$, $e_{(c,d)} := \sum_{x\in\mathcal{Q}^{(c,d)}_0} e_x$ e $\Lambda_{(c,d)} := e_{(c,d)}\Lambda e_{(c,d)} = \Bbbk\mathcal{Q}^{(c,d)}/\mathcal{I}_{(c,d)}$, onde $\mathcal{I}_{(c,d)} := \mathcal{I}\bigcap \Bbbk\mathcal{Q}^{(c,d)}$.

Seja $A = e\Lambda e$ uma subálgebra plena de Λ. Denotamos por $\mathcal{K}(T_e) : \mathrm{K}^{-,b}(\mathrm{proj}\text{-}A) \to \mathrm{K}^{-,b}(\mathrm{proj}\text{-}\Lambda)$ o levantamento do funtor $T_e : - \otimes_\Lambda e\Lambda : \mathrm{mod}\text{-}A \to \mathrm{mod}\text{-}\Lambda$ (veja [33]).

O próximo resultado será útil para demonstração do Teorema 2.28 e Teorema 2.32.

Proposição 2.27. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica e $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ um par de vértices admissível. Seja Δ uma subaljava convexa de $\mathcal{Q}$ e seja $A := e\Lambda e$, onde $e := \sum_{x\in\Delta_0} e_x$.*

1. *Se* $a, b \in \Delta_0$, *então* $\mathcal{K}(T_e)((T^A_{a,b})^x) \cong (T^\Lambda_{a,b})^x$ *para qualquer* $x \in \Delta_0$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}((T^\Lambda_{a,b})^x, (T^\Lambda_{a,b})^y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(A)}((T^A_{a,b})^x, (T^A_{a,b})^y)$, *para todos* $x, y \in \Delta_0$.

2. *Se* $a \in \Delta_0$ *e* $b \notin \Delta_0$, *então* $\mathcal{K}(T_e)((T^A_{a,+})^x) \cong (T^\Lambda_{a,b})^x$ *para qualquer* $x \in \Delta_0$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}((T^\Lambda_{a,b})^x, (T^\Lambda_{a,b})^y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(A)}((T^A_{a,+})^x, (T^A_{a,+})^y)$, *para todos* $x, y \in \Delta_0$.

3. *Se* $b \in \Delta_0$ *e* $a \notin \Delta_0$, *então* $\mathcal{K}(T_e)((T^A_{b,-})^x) \cong (T^\Lambda_{a,b})^x$ *para qualquer* $x \in \Delta_0$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}((T^\Lambda_{a,b})^x, (T^\Lambda_{a,b})^y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(A)}((T^A_{b,-})^x, (T^A_{b,-})^y)$, *para todo* $x, y \in \Delta_0$.

4. *Se* $a \notin \Delta_0$ *e* $b \notin \Delta_0$, *então* $\mathcal{K}(T_e)((P^A_x) \cong (T^\Lambda_{a,b})^x$ *para qualquer* $x \in \Delta_0$ *e* $\mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}((T^\Lambda_{a,b})^x, (T^\Lambda_{a,b})^y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{D}^b(A)}(P^A_x, P^A_y)$, *para todo* $x, y \in \Delta_0$.

Demonstração. (i) Visto que o funtor T_e leva projetivos a projetivos (veja [1, Teorema 6.8]), $a, b \in \Delta$ e Δ é uma subaljava convexa de $\mathcal{Q}$, a primeira parte da afirmação segue.

Visto que o funtor T_e é pleno e fiel (veja [1, Teorema 6.8]), o funtor $\mathcal{K}(T_e)$ é também pleno e fiel (veja [33]). Portanto a segunda parte da afirmação segue da primeira parte da afirmação.

A prova dos itens (ii)-(iv) é similar. □

No próximo resultado apresentamos uma relação entre a álgebra de endomorfismo de complexo *tilting* $T^\Lambda_{a,b}$ no caso quando Λ é uma soma amalgamada com álgebras de endomorfismos de complexo *tilting* de subálgebras envolvidas.

Teorema 2.28. *Seja* $\Lambda = A \coprod_C B = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ *uma álgebra de Nakayama acíclica que é uma soma amalgamada das subcategorias plenas* A *e* B *sob uma subcategoria convexa* C *e* $(a, b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ *um par de vértices admissível tal que* $a \in (\mathcal{Q}_A)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$ *e* $b \in (\mathcal{Q}_B)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$. *Se a álgebra* C *é simples então*

$$\mathrm{End}_{\,\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_{a,b}) \cong \mathrm{End}_{\,\mathrm{D}^b(A)}(T^A_{a,+}) \coprod_C \mathrm{End}_{\,\mathrm{D}^b(B)}(T^B_{b,-}),$$

onde identificamos C *com* $\mathrm{End}_{\,\mathrm{D}^b(C)}(C_C)$.

Demonstração. Seja

$$T^\Lambda_A := \bigoplus_{x \in\ (\mathcal{Q}_A)_0} (T^\Lambda_{a,b})^x, \ \ T^\Lambda_B := \bigoplus_{x \in (\mathcal{Q}_B)_0} (T^\Lambda_{a,b})^x \ \text{ e } \ T^\Lambda_C := (T^\Lambda_{a,b})^c = P^\Lambda_c,$$

onde $(\mathcal{Q}_C)_0 = \{c\}$.

Seja $E_A := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_A) = \Bbbk\mathcal{Q}_{E_A}/\mathcal{I}_{E_A}$, $E_B := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_B) = \Bbbk\mathcal{Q}_{E_B}/\mathcal{I}_{E_B}$, $E_C := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_C)$ e $D := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_{a,b}) = \Bbbk\mathcal{Q}_{E_D}/\mathcal{I}_{E_D}$.

Visto que $p(a, b) \notin \mathcal{I}$ pelo Lema 1.66, segue do Teorema 2.23 que $E_D \cong \Bbbk\mathcal{S}^\Lambda_{a,b}$ e portanto $\mathcal{I}_D$ é o ideal gerado pelas diferenças de caminhos com a mesma origem e final. Visto que $b \neq a$, segue da Definição 2.14 que $x \not\leq_{a,b} y$ para qualquer $x \in \mathbb{M}^-$ e qualquer $y \in \mathbb{M}^+$. Segue da Definição 2.14 que para qualquer $x \in \mathbb{M}^+$ e qualquer $y \in \mathbb{M}^-$ tal que $x \leq_{a,b} y$, temos $x \leq_{a,b} c$ e $c \leq_{a,b} y$, portanto $\mathcal{Q}_{E_D} \cong \mathcal{Q}_{E_A} \coprod_{\{c\}} \mathcal{Q}_{E_B}$ e $\mathcal{I}_{E_D}$ é gerado por $\mathcal{I}_{E_A}$ e $\mathcal{I}_{E_B}$. Consequentemente segue do Lema 1.66 que $E_D \cong E_A \coprod_{E_C} E_B$. Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_A) \cong \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(A)}(T^A_{a,+})$, $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_B) \cong \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(B)}(T^B_{b,-})$ pela Proposição 2.27 e $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_C) \cong C$, a afirmação segue. □

O seguinte exemplo mostra que a restrição sobre a álgebra C no Teorema 2.28 é necessário.

Exemplo 2.29. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ a álgebra de Nakayama acíclica com a seguinte aljava $\mathcal{Q}$

$$a_2 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\gamma_1} c_1 \xrightarrow{\gamma_2} c_2 \xrightarrow{\beta_1} b_1 \xrightarrow{\beta_2} b_2,$$

e $\mathcal{I} = \langle \alpha_1\gamma_1\gamma_2, \gamma_2\beta_1\beta_2 \rangle$. Sejam A a subcategoria plena de Λ com o conjunto de objetos $(\mathcal{Q}_A)_0 := \{a_2, a_1, c_1, c_2\}$, B a subcategoria plena de Λ com o conjunto de objetos $(\mathcal{Q}_B)_0 := \{c_1, c_2, b_1, b_2\}$ e C a subcategoria plena de Λ com o conjunto de objetos $(\mathcal{Q}_C)_0 := \{c_1, c_2\}$. Então $\Lambda \cong A \coprod_C B$. Segue do Teorema 2.23 e Definição 2.14 que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a_1,b_1}) \cong \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda}_{a_1,b_1}$, onde o poset $\mathcal{S}^{\Lambda}_{a_1,b_1}$ tem o seguinte diagrama de Hasse

$$\mathcal{S}^{\Lambda}_{a_1,b_1}: \quad \begin{tikzcd} & c_1 \arrow[r] \arrow[ddr] & b_2 \arrow[dr] & \\ a_1 \arrow[ur] \arrow[dr] & & & b_1 \\ & a_2 \arrow[r] \arrow[uur] & c_2 \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Portanto $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a_1,b_1}) \ncong \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(A)}(T^{A}_{a_1,+}) \coprod_C \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(B)}(T^{B}_{b_1,-})$ por causa da flecha de a_2 a b_2 na aljava de $\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda}_{a_1,b_1}$.

Os dois próximos resultados mostram utilidade da soma amalgamada para cálculo de álgebras de endomorfismos de complexos *tilting* $T_{a,b}$ no caso quando $p(a,b) \notin \mathcal{I}$.

Teorema 2.30. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma ágebra de Nakayama acíclica e $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ um par de vértices admissível. Se $p(a,b) \notin \mathcal{I}$ e $\mathcal{Q}_0^{(a,b)} = \{c\}$ então*

$$\mathrm{End}_{\,\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a,b}) \cong \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda}_{a,b} \cong \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_{<b}}_{a,+} \coprod_{\Bbbk\{c\}} \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_{>a}}_{b,-}.$$

Demonstração. Segue da Definição 1.64 que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{<b} \coprod_{\mathcal{Q}^{(a,b)}} \mathcal{Q}^{>a}$. Visto que (a,b) é um par de vértices admissível, $\mathcal{I}$ é gerado por $\mathcal{I}_{<b}$ e $\mathcal{I}_{>a}$ e portanto $\Lambda \cong \Lambda_{<b} \coprod_{\Lambda_{(a,b)}} \Lambda_{>a}$ pelo Lema 1.66. Então a afirmação segue do Teorema 2.23 e Teorema 2.28. $\square$

Teorema 2.31. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica e $a \in \mathcal{Q}_0$ um vértice admissível. Então*

$$\mathrm{End}_{\,\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a}) \cong \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda}_{a} \cong \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_{\leq a}}_{+} \coprod_{\Bbbk\{a\}} \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_{\geq a}}_{-}.$$

Demonstração. Segue da Definição 1.64 que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{\leq a} \coprod_{\{a\}} \mathcal{Q}^{\geq a}$. Visto que a é um vértice admissível, $\mathcal{I}$ é gerado por $\mathcal{I}_{\leq a}$ e $\mathcal{I}_{\geq a}$ e portanto $\Lambda \cong \Lambda_{\leq a} \coprod_{\Lambda_{[a,a]}} \Lambda_{\geq a}$ pelo Lema 1.66. Então a afirmação segue do Teorema 2.23 e Teorema 2.28. $\square$

2.5 Produtos fibrados e álgebras de endomorfismos

Nesta seção estudamos a relação de álgebra de endomorfismos de complexo *tilting* $T^{\Lambda}_{a,b}$ no caso quando Λ é um produto fibrado de álgebras de endomorfismos de complexos *tilting* de subálgebras envolvidas (veja Teorema 2.32). Aplicamos este resultado para descrição da álgebras de endomorfismos de complexos *tilting* construídos no caso geral.

No próximo resultado apresentamos uma relação entre a álgebra de endomorfismo de complexo *tilting* $T^{\Lambda}_{a,b}$ no caso quando Λ é um produto fibrado com álgebras de endomorfismos de complexos *tilting* das subálgebras envolvidas.

Teorema 2.32. *Seja $\Lambda = A\prod_C B = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é um produto fibrado das subcategorias plenas A e B sob a subcategoria convexa C e $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ um par de vértices admissível tal que $a \in (\mathcal{Q}_A)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$ e $b \in (\mathcal{Q}_B)_0 \setminus (\mathcal{Q}_C)_0$. Então*

$$\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a,b}) \cong \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(A)}(T^{A}_{a,+}) \prod_{C} \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(B)}(T^{B}_{b,-}),$$

onde identificamos C com $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(C)}(C_C)$.

Demonstração. Seja

$$T^{\Lambda}_{A} := \bigoplus_{x\in\ (\mathcal{Q}_A)_0} (T^{\Lambda}_{a,b})^x,\ \ T^{\Lambda}_{B} := \bigoplus_{x\in(\mathcal{Q}_B)_0} (T^{\Lambda}_{a,b})^x \ \text{ e }\ T^{\Lambda}_{C} := \bigoplus_{x\in(\mathcal{Q}_C)_0} (T^{\Lambda}_{a,b})^x.$$

Seja $E_A := \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{A}) = \Bbbk\mathcal{Q}_{E_A}/\mathcal{I}_{E_A}$, $E_B := \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{B}) = \Bbbk\mathcal{Q}_{E_B}/\mathcal{I}_{E_B}$, $E_C := \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{C}) = \Bbbk\mathcal{Q}_{E_C}/\mathcal{I}_{E_C}$ e $D := \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a,b}) = \Bbbk\mathcal{Q}_{E_D}/\mathcal{I}_{E_D}$.

Visto que $p(a,b) \in \mathcal{I}$ pelo Lema 1.70, segue da demonstração do Teorema 2.16 que $\operatorname{Hom}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}((T^{\Lambda}_{a,b})^x, (T^{\Lambda}_{a,b})^y) = 0$ nos seguintes casos:

1. $x \in \mathcal{Q}^{\leq a}$ e $y \in \mathcal{Q}^{(a,b)}$;
2. $x \in \mathcal{Q}^{(a,b)}$ e $y \in \mathcal{Q}^{\geq b}$;
3. $x \in \mathcal{Q}^{\leq a}$ e $y \in \mathcal{Q}^{\geq b}$;
4. $x \in \mathcal{Q}^{\geq b}$ e $y \in \mathcal{Q}^{\leq a}$.

Portanto $\mathcal{Q}_{E_C}$ é uma subaljava convexa das aljavas $\mathcal{Q}_{E_A}$ e $\mathcal{Q}_{E_B}$, $\mathcal{Q}_{E_D} = \mathcal{Q}_{E_A}\coprod_{\mathcal{Q}_{E_C}} \mathcal{Q}_{E_B}$ e $\mathcal{I}_{E_D}$ é gerado por $\mathcal{I}_{E_A}$, $\mathcal{I}_{E_B}$ e os caminhos ligando $(\mathcal{Q}_{E_A})_0 \setminus (\mathcal{Q}_{E_C})_0$ e $(\mathcal{Q}_{E_B})_0 \setminus (\mathcal{Q}_{E_C})_0$. Consequentemente $E_D \cong E_A \prod_{E_C} E_B$ pelo Lema 1.70. Visto que $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{A}) \cong \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(A)}(T^{A}_{a,+})$, $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{B}) \cong \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(B)}(T^{B}_{b,-})$ pela Proposição 2.27 e $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{C}) \cong C$, a afirmação segue. □

Os três próximos resultados mostram a utilidade do produto fibrado para cálculo de álgebras de endomorfismos de complexos *tilting* $T_{a,b}$ no caso quando $p(a,b) \in \mathcal{I}$.

Teorema 2.33. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica e $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ um par de vértices admissível. Se $p(a,b) \in \mathcal{I}$ então*

$$\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a,b}) \cong \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda_{<b})}(T^{\Lambda_{<b}}_{a,+}) \prod_{\Lambda_{(a,b)}} \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda_{>a})}(T^{\Lambda_{>a}}_{b,-}).$$

Demonstração. Segue da Definição 1.64 que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{<b}\coprod_{\mathcal{Q}^{(a,b)}} \mathcal{Q}^{>a}$. Visto que $p(a,b) \in \mathcal{I}$, temos $\Lambda = \Lambda_{<b}\prod_{\Lambda_{(a,b)}} \Lambda_{>a}$ pelo Lema 1.70 e portanto a afirmação segue do Teorema 2.32. □

Teorema 2.34. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica, $a \in \mathcal{Q}_0$ um vértice admissível, $b \in \mathcal{Q}_0$ o poço e $p(a,b) \in \mathcal{I}$. Se $c \in \mathcal{Q}_0$ tal que $c > a$, $p(a,c) \in \mathcal{I}$ e $p(a,x) \notin \mathcal{I}$, para qualquer $a < x < c$, então*

$$\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a,+}) \cong \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda<c}_{a,+} \coprod_{\Lambda_{(a,c)}} \Lambda_{>a}.$$

Demonstração. Segue da Definição 1.64 que $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}^{<c} \coprod_{\mathcal{Q}(a,c)} \mathcal{Q}^{>a}$. Visto que $p(a,b) \in \mathcal{I}$, temos $\Lambda = \Lambda_{<c} \coprod_{\Lambda_{(a,c)}} \Lambda_{>a}$ pelo Lema 1.70 e portanto segue do Teorema 2.32 que

$$\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a,+}) \cong \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda_{<c})}(T^{\Lambda_{<c}}_{a,+}) \coprod_{\Lambda(a,c)} \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda_{>a})}(T^{\Lambda_{>a}}_{b,-}).$$

Visto que $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda_{>a})}(T^{\Lambda_{>a}}_{b,-}) \cong \Lambda_{>a}$ pela Proposição 2.27 e $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda_{<c})}(T^{\Lambda_{<c}}_{a,+}) \cong \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda<c}_{a,+}$ pelo Corolário 2.24.(iv), a afirmação segue. $\square$

O seguinte teorema é uma versão dual do Teorema 2.34.

Teorema 2.35. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra de Nakayama acíclica, $b \in \mathcal{Q}_0$ um vértice admissível, $a \in \mathcal{Q}_0$ a fonte e $p(a,b) \in \mathcal{I}$. Se $d \in \mathcal{Q}_0$ tal que $d < b$, $p(d,b) \in \mathcal{I}$ e $p(x,b) \notin \mathcal{I}$, para qualquer $d < x < b$, então*

$$\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{b,-}) \cong \Lambda_{<b} \coprod_{\Lambda_{(d,b)}} \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda>d}_{b,-}.$$

Demonstração. A demonstração é similar à demonstração do Teorema 2.34. $\square$

No próximo Exemplo mostraremos como aplicar os Teoremas 2.33, 2.34 e 2.35 para cálculo de álgebra de endomorfismos de complexos *tilting* $T_{a,b}$ no caso quando $p(a,b) \in \mathcal{I}$.

Exemplo 2.36. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ a álgebra de Nakayama acíclica com a seguinte aljava $\mathcal{Q}$

$$a_5 \xrightarrow{\alpha_4} a_4 \xrightarrow{\alpha_3} a_3 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\gamma_1} c_1 \xrightarrow{\gamma_2} c_2 \xrightarrow{\gamma_3} c_3 \xrightarrow{\gamma_4} c_4 \xrightarrow{\beta_1} b_1 \xrightarrow{\beta_2} b_2 \xrightarrow{\beta_3} b_3 \xrightarrow{\beta_4} b_4,$$

e $\mathcal{I} = \langle \alpha_4\alpha_3\alpha_2, \alpha_3\alpha_2\alpha_1, \alpha_2\alpha_1\gamma_1, \gamma_1\gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_4, \gamma_4\beta_1\beta_2, \beta_2\beta_3\beta_4\rangle$.

Segue da Definição 2.5 que o par de vértices $(a_1, b_1) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ é admissível. Descreveremos a álgebra de endomorfismos $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a_1,b_1})$ usando os Teoremas 2.33, 2.34 e 2.35. Visto que $p(a_1,b_1) \in \mathcal{I}$, segue do Teorema 2.33 que $\operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a_1,b_1}) \cong \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda_{<b_1})}(T^{\Lambda_{<b_1}}_{a_1,+}) \coprod_{\Lambda_{(a_1,b_1)}} \operatorname{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda_{>a_1})}(T^{\Lambda_{>a_1}}_{b_1,-})$. Segue da Definição 2.26 que $\Lambda_{<b_1} = \Bbbk\mathcal{Q}^{<b_1}/\mathcal{I}_{<b_1}$, $\Lambda_{>a_1} = \Bbbk\mathcal{Q}^{>a_1}/\mathcal{I}_{>a_1}$ e $\Lambda_{(a_1,b_1)} = \Bbbk\mathcal{Q}^{(a_1,b_1)}/\mathcal{I}_{(a_1,b_1)}$, onde

$$\mathcal{Q}^{<b_1} : a_5 \xrightarrow{\alpha_4} a_4 \xrightarrow{\alpha_3} a_3 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \xrightarrow{\gamma_1} c_1 \xrightarrow{\gamma_2} c_2 \xrightarrow{\gamma_3} c_3 \xrightarrow{\gamma_4} c_4,$$

$\mathcal{I}_{<b_1} = \langle \alpha_4\alpha_3\alpha_2, \alpha_3\alpha_2\alpha_1, \alpha_2\alpha_1\gamma_1, \gamma_1\gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_4\rangle$,

$$\mathcal{Q}^{>a_1} : c_1 \xrightarrow{\gamma_2} c_2 \xrightarrow{\gamma_3} c_3 \xrightarrow{\gamma_4} c_4 \xrightarrow{\beta_1} b_1 \xrightarrow{\beta_2} b_2 \xrightarrow{\beta_3} b_3 \xrightarrow{\beta_4} b_4,$$

$\mathcal{I}_{>a_1} = \langle \gamma_1\gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_4, \gamma_4\beta_1\beta_2, \beta_2\beta_3\beta_4\rangle$,

$$\mathcal{Q}^{(a_1,b_1)}: \qquad c_1 \xrightarrow{\gamma_2} c_2 \xrightarrow{\gamma_3} c_3 \xrightarrow{\gamma_4} c_4,$$

e $\mathcal{I}_{(a_1,b_1)} = \langle \gamma_3\gamma_4 \rangle$.

Segue do Teorema 2.34 que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda_{<b_1}}_{a_1,+}) \cong \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda<c_3}_{a_1,+} \prod_{\Lambda_{(a_1,c_3)}} \Lambda_{(a_1,b_1)}$ pois $p(a_1,c_3) \in \mathcal{I}$ e $p(a_1,c_2) \notin \mathcal{I}$. Segue da Definição 2.14 que o diagrama de Hasse do poset $\mathcal{S}^{\Lambda<c_3}_{a_1,+}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{S}^{\Lambda<c_3}_{a_1,+}: \qquad \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_5 \arrow[r] \arrow[d] & a_4 \arrow[r] & c_1 \arrow[r] & c_2 \\ & & a_2 & & & \end{tikzcd}$$

Seja $A = \Bbbk\mathcal{Q}_A/\mathcal{I}_A := \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda<c_3}_{a_1,+} \prod_{\Lambda_{(a_1,c_3)}} \Lambda_{(a_1,b_1)} \cong \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda_{<b_1}}_{a_1,+})$. A aljava $\mathcal{Q}_A$ tem a seguinte forma

$$\mathcal{Q}_A: \qquad \begin{tikzcd} a_1 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_5 \arrow[r] \arrow[d] & a_4 \arrow[r, "\varepsilon"] & c_1 \arrow[r, "\gamma_2"] & c_2 \arrow[r, "\gamma_3"] & c_3 \arrow[r, "\gamma_4"] & c_4 \\ & & a_2 & & & & & \end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}_A = \langle \varepsilon\gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_4 \rangle$.

Segue do Teorema 2.35 que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda_{>a_1}}_{b_1,-}) \cong \Lambda_{(a_1,b_1)} \prod_{\Lambda_{(c_2,b_1)}} \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda>c_2}_{b_1,-}$ pois $p(c_2,b_1) \in \mathcal{I}$ e $p(c_3,b_1) \notin \mathcal{I}$. Segue da Definição 2.14 que o diagrama de Hasse do poset $\mathcal{S}^{\Lambda>c_2}_{b_1,-}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{S}^{\Lambda>c_2}_{b_1,-}: \qquad \begin{tikzcd} & b_4 \arrow[dr] & & \\ c_3 \arrow[ur] \arrow[r] \arrow[dr] & b_2 \arrow[r] & b_3 \arrow[r] & b_1 \\ & c_4 \arrow[urr] & & \end{tikzcd}$$

Seja $B = \Bbbk\mathcal{Q}_B/\mathcal{I}_B := \Lambda_{(a_1,b_1)} \prod_{\Lambda_{(c_2,b_1)}} \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda>c_2}_{b_1,-} \cong \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda_{>a_1}}_{b_1,-})$. Então a aljava $\mathcal{Q}_A$ tem a seguinte forma

$$\mathcal{Q}_B: \qquad \begin{tikzcd} & & & b_4 \arrow[dr, "\tau"] & & \\ c_1 \arrow[r, "\gamma_2"] & c_2 \arrow[r, "\gamma_3"] & c_3 \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\gamma_4"'] & b_2 \arrow[r, "\varrho"] & b_3 \arrow[r, "\zeta"] & b_1 \\ & & & c_4 \arrow[urr, "\xi"] & & \end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}_B = \langle \delta\tau - \eta\varrho, \eta\varrho\zeta - \gamma_4\xi, \gamma_3\gamma_4, \gamma_3\delta, \gamma_3\eta \rangle$.

Finalmente, seja $C = \Bbbk\mathcal{Q}_C/\mathcal{I}_C := A \prod_{\Lambda_{(a_1,b_1)}} B \cong \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^{\Lambda}_{a_1,b_1})$. Então a aljava $\mathcal{Q}_C$ tem a seguinte forma

$\mathcal{Q}_C$:

$$
\begin{tikzcd}
 & & & & & & & b_4 \arrow[dr, "\tau"] & & \\
a_1 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_5 \arrow[r] \arrow[d] & a_4 \arrow[r, "\varepsilon"] & c_1 \arrow[r, "\gamma_2"] & c_2 \arrow[r, "\gamma_3"] & c_3 \arrow[ur, "\delta"] \arrow[r, "\eta"] \arrow[dr, "\gamma_4"'] & b_2 \arrow[r, "\varrho"] & b_3 \arrow[r, "\zeta"] & b_1 \\
 & & a_2 & & & & & c_4 \arrow[urr, "\xi"] & &
\end{tikzcd}
$$

e $\mathcal{I}_C = \langle \delta\tau - \eta\varrho, \eta\varrho\zeta - \gamma_4\xi, \varepsilon\gamma_2\gamma_3, \gamma_3\gamma_4, \gamma_3\delta, \gamma_3\eta \rangle$.

Capítulo 3

APLICAÇÕES

Neste capítulo aplicamos as técnicas desenvolvidas em Capítulo 2 para estudo dos tipos de álgebras hereditárias por partes para algumas classes de álgebras de Nakayama acíclicas.

3.1 Λ_Σ álgebras

Nesta seção introduzimos uma classe natural de álgebras de Nakayama hereditárias por partes, mais precisamente, álgebras de Nakayama acíclicas cujas álgebras de endomorfismos $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T^\Lambda_{a,b})$ são hereditárias.

Definimos uma classe natural de álgebras de Nakayama acíclica $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ com a propriedade de que a álgebra $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_{a,b})$ é hereditária para algum par de vértices admissível $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$. Iniciamos fixando notação. Seja $\Sigma \subset \mathbb{Z}$ um subconjunto finito não vazio de $\mathbb{Z}$. Então $\Sigma = \Sigma^- \bigcup \Sigma^+$, onde $\Sigma^+ := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \geq 0\}$ e $\Sigma^- := \{\sigma \in \Sigma \mid \sigma \leq 0\}$. No caso de $\Sigma^+ \neq \emptyset$ (resp., $\Sigma^- \neq \emptyset$) seja $\Sigma^+ = \{\sigma^+_0 < \sigma^+_1 < \cdots < \sigma^+_{n^\Sigma_+}\}$ (resp., $\Sigma^- = \{\sigma^-_{n^\Sigma_-} < \cdots < \sigma^-_1 < \sigma^-_0\}$), onde $n^\Sigma_+ := |\Sigma^+| - 1$ (resp., $n^\Sigma_- =:= |\Sigma^-| - 1$).

Definição 3.1. Definimos a álgebra de Nakayama acíclica $\Lambda_\Sigma := \Bbbk\mathcal{Q}_\Sigma/\mathcal{I}_\Sigma$, onde

$$\mathcal{Q}_\Sigma : \sigma^+_{n^\Sigma_+} \longrightarrow \sigma^+_{n^\Sigma_+} - 1 \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \sigma^-_{n^\Sigma_-} + 1 \longrightarrow \sigma^-_{n^\Sigma_-},$$

e $\mathcal{I}_\Sigma = \langle p(\sigma^+_i + 1, \sigma^+_{i-1}), p(\sigma^-_{j-1}, \sigma^-_j - 1) \mid 0 < i < n^\Sigma_+, 0 < j < n^\Sigma_- \rangle$.

Observação 3.2. $(\mathcal{Q}_\Sigma)_0 = \{n \in \mathbb{Z} \mid \sigma^-_{n^\Sigma_-} \leq n \leq \sigma^+_{n^\Sigma_+}\}$, $(\mathcal{Q}_\Sigma)_1 = \{\alpha_n : n+1 \to n; \mid n \in (\mathcal{Q}_\Sigma)_0, n^\Sigma_- \leq n < n^\Sigma_+\}$.

Denotamos por $\mathcal{S}_\Sigma$ o poset definido pelo seguinte diagrama de Hasse:

$$
\begin{tikzcd}
\sigma^+_{n^\Sigma_+} \arrow[d] & \cdots \arrow[l] & \sigma^+_1 \arrow[l] \arrow[d] & \sigma^+_0 \arrow[l] \arrow[r] & \sigma^+_0 - 1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \sigma^-_0 & \sigma^-_1 \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \sigma^-_{n^\Sigma_-} \arrow[l] \\
\sigma^+_{n^\Sigma_+} - 1 \arrow[d] & & \sigma^+_1 - 1 \arrow[d] & & & & & \sigma^-_1 + 1 \arrow[u] & & \sigma^-_{n^\Sigma_-} + 1 \arrow[u] \\
\vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & & & & & \vdots \arrow[u] & & \vdots \arrow[u] \\
\sigma^+_{n^\Sigma_+ - 1} + 1 & & \sigma^+_0 + 1 & & & & & \sigma^-_0 - 1 \arrow[u] & & \sigma^-_{n^\Sigma_- - 1} - 1 \arrow[u]
\end{tikzcd}
$$

Deontamos por Γ_Σ o grafo adjacente do poset $\mathcal{S}_\Sigma$. Seja $T_\Sigma := T_{a,b}$ e $\leq_\Sigma := \leq_{a,b}$, onde

$$
a := \begin{cases} \sigma^+_0 & \text{se } \Sigma^+ \neq \emptyset, \\ \sigma^-_0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad \text{e} \quad b := \begin{cases} \sigma^-_0 & \text{se } \Sigma^- \neq \emptyset, \\ \sigma^+_0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{3.1}
$$

O próximo resultado mostra que as álgebras Λ_Σ são hereditárias por partes.

Teorema 3.3. *1.* $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda_\Sigma)}(T_\Sigma) \cong \Bbbk\mathcal{S}_\Sigma$.

2. Λ_Σ é uma álgebra hereditária por partes do tipo Γ_Σ.

Demonstração. (i) Segue da definição da álgebra Λ_Σ que $\mathbb{S}^- = \Sigma^-$, $\mathbb{S}^+ = \Sigma^+$, $n_- = n^\Sigma_-$, $n_+ = n^\Sigma_+$, $s^+_i = \sigma^+_i$ para $0 \leq i \leq n_+$, $s^-_i = \sigma^-_i$ para $0 \leq i \leq n_-$.

(1) $\sigma^+_k <_\Sigma \sigma^+_k - 1 <_\Sigma \cdots <_\Sigma \sigma^+_{k-1} + 1$ *para* $1 \leq k \leq n_+$: Isto segue da Definição 2.14.(ii).

(2) $\sigma^-_k >_\Sigma \sigma^-_k + 1 >_\Sigma \cdots >_\Sigma \sigma^-_{k-1} - 1$ *para* $1 \leq k \leq n_-$: Isto segue da Definição 2.14.(ii).

(3) $\sigma^+_0 <_\Sigma \sigma^+_1 <_\Sigma \cdots <_\Sigma \sigma^+_{n_+}$: Isto segue da Definição 2.14.(iii).

(4) $\sigma^-_0 >_\Sigma \sigma^-_1 >_\Sigma \cdots >_\Sigma \sigma^-_{n_-}$: Isto segue da Definição 2.14.(iii).

(5) $\sigma^+_0 <_\Sigma \sigma^+_0 - 1 <_\Sigma \cdots <_\Sigma \sigma^-_0$: Isto segue da Definição 2.14.(vi).

(6) *Se* $c \in \mathbb{M}^+ \setminus \mathbb{S}^+$ *e* $d \in \mathbb{S}^+$ *então* $c \not<_\Sigma d$ *e* $d <_\Sigma c$ *se, e somente se,* $c >_\mathbb{Z} d$: Isto segue da Definição 2.14.(ii) e o fato que $R^3_{a,b} = \emptyset$.

(7) *Se* $c \in \mathbb{M}^- \setminus \mathbb{S}^-$ *e* $d \in \mathbb{S}^-$ *então* $c \not>_\Sigma d$ *e* $d >_\Sigma c$ *se, e somente se,* $d >_\mathbb{Z} c$: Isto segue da Definição 2.14.(ii) e o fato que $R^3_{a,b} = \emptyset$.

(8) *Se* $c \in \mathbb{M}^-$ *e* $d \in \mathbb{M}^+$ *então* $d \not<_\Sigma c$ *e* $c <_\Sigma d$ *se, e somente se,* $\sigma_0 = \sigma_1$: Isto segue da Definição 2.14.(v).

(9) *Se* $s^-_0 < c < s^+_0$ *e* $d \in \mathbb{M}^+ \bigcup \mathbb{M}^-$ *então* $d \not<_\Sigma c$ *e* $d \not>_\Sigma c$: Isto segue da Definição 2.14.(v).

Agora, a afirmação segue dos itens (1)-(9).

(ii) A afirmação segue do item (i) e [34, Teorema 6.4]. □

Exemplo 3.4. Vejamos alguns exemplos:

(i) Seja $\Sigma = \{-4, -2, -1, 2, 5, 7\}$. Então $\mathbb{S}^- = \Sigma^- = \{-4, -2, -1\}$, $\mathbb{S}^+ = \Sigma^+ = \{2, 5, 7\}$, $\sigma^\Sigma_{n_+} = 2$, $\sigma^\Sigma_{n_-} = 2$, $s^+_0 = \sigma^+_0 = 2$, $s^+_1 = \sigma^+_1 = 5$, $s^+_2 = \sigma^+_2 = 7$, $s^-_0 = \sigma^-_0 = -1$, $s^-_1 = \sigma^-_1 = -2$, $s^-_2 = \sigma^-_2 = -4$, $\Lambda_\Sigma = \Bbbk\mathcal{Q}_\Sigma/\mathcal{I}_\Sigma$, onde

$$
\mathcal{Q}_\Sigma : 7 \xrightarrow{\alpha_6} 6 \xrightarrow{\alpha_5} 5 \xrightarrow{\alpha_4} 4 \xrightarrow{\alpha_3} 3 \xrightarrow{\alpha_2} 2 \xrightarrow{\alpha_1} 1 \xrightarrow{\alpha_0} 0 \xrightarrow{\alpha_{-1}} -1 \xrightarrow{\alpha_{-2}} -2 \xrightarrow{\alpha_{-3}} -3 \xrightarrow{\alpha_{-4}} -4,
$$

e $\mathcal{I}_\Sigma = \langle \alpha_5\alpha_4\alpha_3\alpha_2, \alpha_{-2}\alpha_{-3} \rangle$. Neste caso $\mathcal{S}_\Sigma$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}_\Sigma : \quad \begin{tikzcd} 7 \arrow[d] & 5 \arrow[l] \arrow[d] & 2 \arrow[l] \arrow[r] & 1 \arrow[r] & 0 & -1 \arrow[l] & -2 \arrow[l] & -4 \arrow[l] \\ 6 & 4 \arrow[d] & & & & & & -3 \arrow[u] \\ & 3 & & & & & & \end{tikzcd}$$

(ii) Seja $\Sigma = \{-4, -1, 0, 3, 6\}$. Então $\mathbb{S}^- = \Sigma^- = \{-4, -1, 0\}$, $\mathbb{S}^+ = \Sigma^+ = \{0, 3, 6\}$, $\Sigma^+ \bigcap \Sigma^- = \{0\}$, $\sigma^\Sigma_{n_+} = 2$, $\sigma^\Sigma_{n_-} = 2$, $s_0^+ = \sigma_0^+ = 0$, $s_1^+ = \sigma_1^+ = 3$, $s_2^+ = \sigma_2^+ = 6$, $s_0^- = \sigma_0^- = 0$, $s_1^- = \sigma_1^- = -1$, $s_2^- = \sigma_2^- = -4$, $\Lambda_\Sigma = \Bbbk\mathcal{Q}_\Sigma/\mathcal{I}_\Sigma$, onde

$$\mathcal{Q}_\Sigma : \quad 6 \xrightarrow{\alpha_5} 5 \xrightarrow{\alpha_4} 4 \xrightarrow{\alpha_3} 3 \xrightarrow{\alpha_2} 2 \xrightarrow{\alpha_1} 1 \xrightarrow{\alpha_0} 0 \xrightarrow{\alpha_{-1}} -1 \xrightarrow{\alpha_{-2}} -2 \xrightarrow{\alpha_{-3}} -3 \xrightarrow{\alpha_{-4}} -4,$$

e $\mathcal{I}_\Sigma = \langle \alpha_3\alpha_2\alpha_1\alpha_0, \alpha_{-1}\alpha_{-2} \rangle$. Neste caso $\mathcal{S}_\Sigma$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}_\Sigma : \quad \begin{tikzcd} 6 \arrow[d] & 3 \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] & -1 \arrow[l] & -4 \arrow[l] \\ 5 \arrow[d] & 2 \arrow[d] & & & -3 \arrow[u] \\ 4 & 1 & & & -2 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

(iii) Seja $\Sigma = \{2, 5, 8, 10\}$. Então $\mathbb{S}^- = \Sigma^- = \emptyset$, $\mathbb{S}^+ = \Sigma^+ = \{2, 5, 8, 10\}$, $\sigma^\Sigma_{n_+} = 3$, $s_0^+ = \sigma_0^+ = 2$, $s_1^+ = \sigma_1^+ = 5$, $s_2^+ = \sigma_2^+ = 8$, $s_2^+ = \sigma_2^+ = 10$, $\Lambda_\Sigma = \Bbbk\mathcal{Q}_\Sigma/\mathcal{I}_\Sigma$, onde

$$\mathcal{Q}_\Sigma : \quad 10 \xrightarrow{\alpha_9} 9 \xrightarrow{\alpha_8} 8 \xrightarrow{\alpha_7} 7 \xrightarrow{\alpha_6} 6 \xrightarrow{\alpha_5} 5 \xrightarrow{\alpha_4} 4 \xrightarrow{\alpha_3} 3 \xrightarrow{\alpha_2} 2,$$

e $\mathcal{I}_\Sigma = \langle \alpha_8\alpha_7\alpha_6\alpha_5, \alpha_5\alpha_4\alpha_3 \rangle$. Neste caso $\mathcal{S}_\Sigma$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}_\Sigma : \quad \begin{tikzcd} 10 \arrow[d] & 8 \arrow[l] \arrow[d] & 5 \arrow[l] \arrow[d] & 2 \arrow[l] \\ 9 & 7 \arrow[d] & 4 \arrow[d] & \\ & 6 & 3 & \end{tikzcd}$$

3.2 Álgebras quadráticas

Nesta seção apresentamos uma demonstração nova de um resultado conhecido sobre álgebras de Nakayama quadráticas: qualquer álgebra de Nakayama quadrática acíclica é hereditária por partes (veja, por exemplo, [18]).

Teorema 3.5. *Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/I$ uma álgebra de Nakayama acíclica quadrática. Então Λ é uma álgebra hereditária por partes do tipo $\mathbb{A}_n$, onde $n = |\mathcal{Q}_0|$.*

Demonstração. Seja a o poço de $\mathcal{Q}$. Consideramos o complexo *tilting* $T_+ = T^{\Lambda}_{a,a}$.

(a) *Se* $d \in \mathbb{L}^+_k$ *e* $c \in \mathbb{M}^+_l$ *com* $1 \leq k < l \leq n_+$, *então* $c <_+ d$: Seja f o elemento maximal de $\mathbb{M}^+_{k+1}$ e g o elemento minimal de $\mathbb{L}^+_k$. Visto que Λ é álgebra quadrática e $p(b, s^+_{k-1}) \in \mathcal{I}$, $p(s^+_k, s^+_{k-1}) \notin \mathcal{I}$, vemos que $p(f,g) \in \mathcal{I}$. Portanto $p(f,d) \in \mathcal{I}$ e consequentemente $p(\gamma_{k+1}(c), d) \in \mathcal{I}$. Então segue da Definição 2.14.(iii) que $c <_+ d$.

(b) *Se* $\mathbb{L}_k \neq \emptyset$ *e* $\mathbb{L}_l \neq \emptyset$ *com* $k < l$ *então* $\mathbb{L}_l <_+ \mathbb{L}_k$: Isto segue da afirmação (a).

(c) $(\mathbb{M}_k, \leq_+)$ *é um subconjunto linearmente ordenado de* $\mathcal{S}^{\Lambda}_+$ *para qualquer* $1 \leq k \leq n_+$: Isto segue da Definição 2.14.(ii).

(d) $(\mathbb{S}^+, \leq_+)$ *é um subconjunto linearmente ordenado de* $\mathcal{S}^{\Lambda}_+$: Segue da Definição 2.14.(iii) que $s^+_0 < s^+_1 < \cdots < s^+_{n_+}$. Portanto a afirmação segue.

(e) *Se* $\mathbb{L}_k \neq \emptyset$ *para algum* $1 \leq k \leq n_+$ *então* $s^+_{n_+} <_+ \mathbb{L}_k$: Para $k < n_+$ a afirmação segue da afirmação (a) e para $k = n_+$ a afirmação segue da Definição 2.14.(ii).

Segue da afirmação (b)-(e) que $\mathcal{S}^{\Lambda}_+$ é um conjunto linearmente ordenado e portanto $\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda}_+$ é um álgebra de Nakayama acíclica hereditária. Visto que $\Lambda \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda}_+ \cong \Bbbk\mathcal{Q}$ pelo Teorema 2.23, a afirmação segue. $\square$

Exemplo 3.6. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$, onde

$$\mathcal{Q}: \ a_{11} \xrightarrow{\alpha_{10}} a_{10} \xrightarrow{\alpha_9} a_9 \xrightarrow{\alpha_8} a_8 \xrightarrow{\alpha_7} a_7 \xrightarrow{\alpha_6} a_6 \xrightarrow{\alpha_5} a_5 \xrightarrow{\alpha_4} a_4 \xrightarrow{\alpha_3} a_3 \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \ ,$$

e $\mathcal{I} = \langle \alpha_9\alpha_8, \alpha_8\alpha_7, \alpha_7\alpha_6, \alpha_4\alpha_3 \rangle$.

Então $T_+ = T^{\Lambda}_{a_1,a_1}$ é um complexo *tilting* pelo Teorema 2.13 e temos: $s^+_0 = a_1$, $s^+_1 = a_4$, $s^+_2 = a_7$, $s^+_3 = a_8$, $s^+_4 = a_9$, $s^+_5 = a_{11}$, $\mathbb{L}^+_1 = \{a_2, a_3\}$, $\mathbb{L}^+_2 = \{a_5, a_6\}$, $\mathbb{L}^+_3 = \mathbb{L}^+_4 = \emptyset$ e $\mathbb{L}^+_5 = \{a_{10}\}$. Portanto $\mathcal{S}^{\Lambda}_+$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}: \ a_1 \longrightarrow a_4 \longrightarrow a_7 \longrightarrow a_8 \longrightarrow a_9 \longrightarrow a_{11} \longrightarrow a_{10} \longrightarrow a_6 \longrightarrow a_5 \longrightarrow a_3 \longrightarrow a_2 \ .$$

Consequentemente Λ é álgebra hereditária por partes do tipo $\mathbb{A}_{11}$.

3.3 Álgebras truncadas

Nesta seção apresentaremos alguns resultados de artigo [22] que vamos usar nas seções 3.4 e 3.5. Incluímos uma demonstração nova de alguns destes resultados (veja Proposição 3.10). Esta demonstração vai ser usada nas seções 3.4 e 3.5.

Teorema 3.7. *([22]) Seja* $n, r \in \mathbb{Z}$, $n > r \geq 2$. $\Lambda(n,r)$ *é hereditária por partes se, e somente se, uma das seguintes condições vale:*

1. $n - r \leq 4$;
2. $n - r = 5$ *e* $r \leq 6$;
3. $n - r = 6$ *e* $r \leq 4$;
4. $7 \leq n - r \leq 8$ *e* $r = 3$;
5. $r = 2$.

Teorema 3.8. *([22]) Seja* $n, r \in \mathbb{Z}$, $n > r \geq 2$. $\Lambda(n,r)$ *é hereditária por partes do tipo módulos se, e somente se, uma das seguintes condições vale:*

1. $n - r \leq 3$;

2. $n - r = 4$ *e* $r \leq 5$*;*

3. $n - r = 5$ *e* $r \in \{2, 3, 5\}$*;*

4. $n - r = 6$ *e* $r = 3$*;*

5. $r = 2$*.*

Teorema 3.9. *([22]) Seja* $n, r \in \mathbb{Z}$*,* $n > r \geq 2$*.* $\Lambda(n, r)$ *é hereditária por partes do tipo feixes e não do tipo módulos se, e somente se, uma das seguintes condições vale:*

1. $n - r = 4$ *e* $r \geq 7$*;*

2. $r \in \{3, 6\}$ *e* $n \in \{10, 11\}$*;*

3. $r = 4$ *e* $n \in \{9, 10\}$*;*

Proposição 3.10. *Seja* $r \in \mathbb{N}, r \geq 3$*.*

(i) As álgebras $\Lambda(r+1, r)$ *são hereditárias por partes do tipo* $\mathbb{T}_{2,2,r-1}$*.*

(ii) As álgebras $\Lambda(r+2, r)$ *são hereditárias por partes do tipo* $\mathbb{T}_{2,3,r-1}$*.*

(iii) As álgebras $\Lambda(r+3, r)$ *são hereditárias por partes do tipo* $\mathbb{T}_{2,3,r}$*.*

(iv) As álgebras $\Lambda(r+4, r)$ *são hereditárias por partes do tipo* $\mathbb{T}_{2,3,r+1}$ *para* $4 \leq r \leq 5$*.*

(v) As álgebras de Nakayama acíclica quadráticas (em particular, as álgebras $\Lambda(i, 2)$*) são hereditárias por partes do tipo* $\mathbb{A}_n$*, onde* n *é o número de vértices da aljava da álgebra.*

(vi) As álgebras $\Lambda(i+6, 3)$ *são hereditárias por partes do tipo* $\mathbb{T}_{2,3,i+3}$ *para* $1 \leq i \leq 3$*.*

(vii) A álgebra $\Lambda(10, 5)$ *é hereditária por partes do tipo* $\mathbb{T}_{2,3,7}$*.*

Demonstração. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$ uma álgebra como nos itens (i)-(vi) e $n = |\mathcal{Q}_0|$. Então $\mathcal{Q}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Q}: \; a_n \xrightarrow{\alpha_{n-1}} a_{n-1} \xrightarrow{\alpha_{n-2}} \cdots \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \xrightarrow{\alpha_1} a_1 \; .$$

Seja $T = T_{a_2,+} = T_{a_2,a_1}$.
(i) Seja $\mathcal{S}(\Lambda)$ o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}(\Lambda): \quad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_{r+1} \arrow[r] \arrow[d] & a_r \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_3 \\ & a_1 & & & \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$ pelo Teorema 2.9, a afirmação segue.
(ii) Seja $\mathcal{S}(\Lambda)$ o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}(\Lambda): \quad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_{r+1} \arrow[r] \arrow[d] & a_r \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_3 \\ & a_{r+2} \arrow[r] & a_1 & & \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$ pelo Teorema 2.9, a afirmação segue.

(iii) Suponha primeiro que $r = 3$. Seja $\mathcal{S}(\Lambda)$ o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}(\Lambda): \quad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] \arrow[d] & a_5 \arrow[r] & a_1 \\ & & a_3 & & \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$ pelo Teorema 2.9, a afirmação segue.

Suponha finalmente que $r > 3$. Seja S o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$S: \quad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_{r+1} \arrow[r] \arrow[d] & a_r \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_3 \\ & a_{r+3} \arrow[r] \arrow[urrr] & a_{r+2} \arrow[r] & a_1 & \end{tikzcd}$$

Então o poset $\mathcal{S}(\Lambda) := \mu^-_{a_{r-1}} \cdots \mu^-_{a_3}(S)$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}(\Lambda): \quad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_{r+1} \arrow[r] & a_{r-1} \arrow[r] \arrow[d] & a_{r-2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_{r+3} \arrow[r] & a_{r+2} \arrow[r] & a_1 \\ & & a_r & & & & & & \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk S$ pelo Teorema 2.9 e $\Bbbk S \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$, a afirmação segue.

(iv) Suponha primeiro que $\Lambda = \Lambda(8, 4)$. Seja S o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$S: \quad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_5 \arrow[r] & a_8 \arrow[r] \arrow[dr] & a_7 \arrow[r] \arrow[dr] & a_6 \arrow[r] & a_1 \\ & & & a_4 \arrow[r] & a_3 & \end{tikzcd}$$

Então o poset $\mathcal{S}(\Lambda) = \mu^-_{a_3}(S)$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}(\Lambda): \quad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_5 \arrow[r] & a_8 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] \arrow[d] & a_7 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_1 \\ & & & a_4 & & & \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk S$ pelo Teorema 2.9 e $\Bbbk S \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$, a afirmação segue.

Suponha em seguida que $\Lambda = \Lambda(9, 5)$. Seja S o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$S: \quad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] \arrow[dr] & a_9 \arrow[r] \arrow[dr] & a_8 \arrow[r] \arrow[dr] & a_7 \arrow[r] & a_1 \\ & & a_5 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_3 & \end{tikzcd}$$

Então o poset $\mathcal{S}(\Lambda) = \mu^+_{\{a_2,a_6\}}\mu^-_{a_4}\mu^-_{a_3}(S)$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}(\Lambda):\qquad \begin{tikzcd} a_9 \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_8 \arrow[r] & a_7 \arrow[r] & a_1 \\ & a_4 \arrow[u] \arrow[r] & a_5 \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk S$ pelo Teorema 2.9 e $\Bbbk S \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$, a afirmação segue.

(v) Seja $e = \sum_{2\leq i\leq n} e_{a_i}$ e $\Lambda_1 = e\Lambda e$. Segue do Teorema 3.5 que o diagrama de Hasse de $\mathcal{S}_+^{\Lambda_1}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{S}_+^{\Lambda_1}:\qquad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_3 \end{tikzcd}$$

Seja $\mathcal{S}(\Lambda) := \mathcal{S}^{\Lambda}_{a_2,+}$.

Suponha primeiro que $\alpha_2\alpha_1 \in \mathcal{I}$. Então segue da Definição 2.14 que o diagrama de Hasse de $\mathcal{S}(\Lambda)$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{S}(\Lambda):\qquad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_1 \end{tikzcd}$$

Consequentemente a afirmação segue neste caso.

Suponha finalmente que $\alpha_2\alpha_1 \notin \mathcal{I}$. Então segue da Definição 2.14 que o diagrama de Hasse de $\mathcal{S}(\Lambda)$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{S}(\Lambda):\qquad \begin{tikzcd} a_1 & a_2 \arrow[l] \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_3 \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$ pelo Teorema 2.9, a afirmação segue.

(vi) Suponha primeiro que $\Lambda = \Lambda(7,3)$. Seja S o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$S:\qquad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] \arrow[dr] & a_7 \arrow[r] \arrow[dr] & a_3 \\ & & & a_5 \arrow[r] & a_1 \end{tikzcd}$$

Então o poset $\mathcal{S}(\Lambda) := \mu^+_{\{a_2,a_4,a_6\}}(S)$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}(\Lambda):\qquad \begin{tikzcd} a_3 & a_7 \arrow[l] \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_1 \\ & & a_5 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk S$ pelo Teorema 2.9 e $\Bbbk S \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$, a afirmação segue.

Suponha em seguida que $\Lambda = \Lambda(8,3)$. Seja S o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$S:\qquad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_8 \arrow[r] \arrow[dr] & a_7 \arrow[r] \arrow[dr] & a_3 \\ & & & & a_5 \arrow[r] & a_1 \end{tikzcd}$$

Então o poset $\mathcal{S}(\Lambda) = \mu^+_{\{a_2,a_4,a_6,a_8\}}(S)$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}(\Lambda): \quad \begin{tikzcd} a_3 & a_7 \arrow[l] \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_8 \arrow[r] & a_1 \\ & & a_5 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk S$ pelo Teorema 2.9 e $\Bbbk S \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$, a afirmação segue.

Suponha em seguida que $\Lambda = \Lambda(9,3)$. Seja S o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$S: \quad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_8 \arrow[r] \arrow[dr] & a_9 \arrow[r] \arrow[dr] & a_5 \arrow[r] & a_1 \\ & & & & a_7 \arrow[r] \arrow[urr] & a_3 \end{tikzcd}$$

Então o poset $\mathcal{S}(\Lambda) = \mu^+_{\{a_3,a_8,a_6,a_4,a_2\}}\mu^+_{a_9}\mu^-_{a_3}\mu^+_{\{a_2,a_5\}}\mu^+_{a_4}\mu^+_{\{a_5,a_9,a_7,a_2\}}\mu^+_{a_6}\mu_{a_4}\mu^+_{\{a_7,a_2\}}\mu^+_{a_9}\mu^+_{\{a_2,a_4,a_6,a_8\}}(S)$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}(\Lambda): \quad \begin{tikzcd} a_7 \arrow[r] & a_9 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_8 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & a_1 \\ & & a_5 \arrow[u] \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk S$ pelo Teorema 2.9 e $\Bbbk S \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$, a afirmação segue.

(vii) Suponha primeiro que $\Lambda = \Lambda(10,5)$. Seja S o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$S: \quad \begin{tikzcd} a_2 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_{10} \arrow[r] \arrow[dr] & a_9 \arrow[r] \arrow[dr] & a_8 \arrow[r] \arrow[dr] & a_7 \arrow[r] & a_1 \\ & & & a_5 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_3 \end{tikzcd}$$

Então o poset $\mathcal{S}(\Lambda) = \mu^+_{\{a_2,a_6,a_{10}\}}\mu^-_{a_4}\mu^-_{a_3}(S)$ tem o seguinte diagrama de Hasse:

$$\mathcal{S}(\Lambda): \quad \begin{tikzcd} a_9 \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_{10} \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_8 \arrow[r] & a_7 \arrow[r] & a_1 \\ & a_4 \arrow[u] \arrow[r] & a_5 \end{tikzcd}$$

Visto que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Bbbk S$ pelo Teorema 2.9 e $\Bbbk S \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda)$, a afirmação segue. $\square$

Definição 3.11. Seja $\Lambda = \Lambda(n,r)$ uma álgebra de Nakayama acíclica truncada hereditária por partes do tipo Γ_Λ para algum grafo Γ_Λ. Seja $\mathcal{S}(\Lambda)$ o poset definido na demonstração da Proposição 3.10. Denotamos por θ_Λ algum isomorfismo fixado

$$\theta_\Lambda : \Gamma_{\mathcal{S}(\Lambda)} \cong \Gamma_\Lambda.$$

Proposição 3.12. *([22]) Seja $r \in \mathbb{N}, r \geq 3$.*

1. *As álgebras $\Lambda(r+4,r)$ são hereditárias por partes do tipo $\mathbb{X}_{2,3,r}$ para $r > 5$.*

2. *As álgebras* $\Lambda(i+6,3)$ *são hereditárias por partes do tipo* $\mathbb{X}_{2,3,i+2}$ *para* $4 \leq i \leq 5$.

3. *As álgebras* $\Lambda(i+6,4)$ *são hereditárias por partes do tipo* $\mathbb{X}_{2,4,i+1}$ *para* $3 \leq i \leq 4$.

4. *A álgebra* $\Lambda(11,6)$ *é do tipo* $\mathbb{X}_{2,3,7}$.

3.4 Soma amalgamada de álgebras truncadas

O objetivo dessa seção é generalização dos resultados do artigo [22] para uma nova classe de álgebras de Nakayama: álgebras de Nakayama acíclicas que são somas amalgamadas simples de álgebras truncadas ou álgebras quadráticas ou álgebras hereditarias.

O próximo teorema será útil na demonstração do Teorema 3.14.

Teorema 3.13. *Seja* $\Lambda = \Lambda_1 \coprod_{\{c\}} \Lambda_2$ *uma álgebra de Nakayama acíclica que é uma soma amalgamada simples das álgebras* Λ_1 *e* Λ_2*, onde* $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$*. Seja* $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ *um par de vértices admissível tal que* $a \in (\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0$*,* $a \neq c$*, e* $b \in (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0$*,* $b \neq c$*. Então* $\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda}_{a,b} \simeq \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a,+} \coprod_{\{c\}} \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_2}_{b,-}$.

Demonstração. A afirmação segue do Teorema 2.30 e Corolário 2.24. □

A seguir, achamos o tipo hereditário de uma álgebra de Nakayama acíclica que é uma soma amalgamada simples que envolve álgebras truncadas do tipo módulos ou álgebras quadráticas ou álgebras hereditárias.

Teorema 3.14. *Seja* $\Lambda = \Lambda_1 \coprod_{\{c\}} \Lambda_2$ *uma álgebra de Nakayama acíclica que é uma soma amalgamada simples das álgebras quadráticas ou hereditárias ou truncadas* Λ_1 *e* Λ_2*, onde* $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$*. Se* Λ_i *é hereditária por partes do tipo* Γ_{Λ_i}*, para* $i = 1,2$*, então* Λ *é hereditária por partes de tipo* $\Gamma_{\Lambda_1} \coprod_{(c_1,c_2)} \Gamma_{\Lambda_2}$*, onde* $c_1 = \theta_{\Lambda_1}(c)$*,* $c_2 = \theta_{\Lambda_2^{op}}(c)$ *e* θ_{Λ_1}*,* $\theta_{\Lambda_2^{op}}$ *são como na Definição 3.11.*

Demonstração. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$. Então $\mathcal{Q}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Q}: \ a_{n_1} \longrightarrow a_{n_1-1} \longrightarrow \ \cdots \ \longrightarrow a_2 \longrightarrow c \longrightarrow b_2 \longrightarrow \ \cdots \ \longrightarrow b_{n_2-1} \longrightarrow b_{n_2} \ ,$$

onde $c = a_1 = b_1$, $\Lambda_1 = e\Lambda e$, $\Lambda_2 = f\Lambda f$, onde $e = \sum_{i=1}^{n_1} e_{a_i}$ e $f = \sum_{i=1}^{n_2} e_{b_i}$. Segue do Teorema 3.13 que $\mathcal{S}^{\Lambda}_{a_2,b_2} \cong \mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a_2,+} \coprod_{\{c\}} \mathcal{S}^{\Lambda_2}_{b_2,-}$, portanto $\mathcal{S}^{\Lambda}_{a_2,b_2} \cong \mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a_2,+} \coprod_{\{c\}} (\mathcal{S}^{\Lambda_2^{op}}_{b_2,+})^{op}$ pelo Teorema 2.21. Visto que Λ_1 e $\Lambda_2^{op} \cong \Lambda_2$ são hereditárias por partes do tipo módulos, então satisfaz um dos itens (i)-(vii) da Proposição 3.10 e portanto segue da demonstração da Proposição 3.10 que $\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a_2,+} \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_1)$ (resp., $\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_2^{op}}_{b_2,+} \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_2^{op})$), onde o diagrama de Hasse de $\mathcal{S}(\Lambda_1)$ (resp., $\mathcal{S}(\Lambda_2^{op})$ é árvore. Visto que $\mathcal{S}(\Lambda_1)$ (resp., $\mathcal{S}(\Lambda_2^{op})$) pode ser obtido de $\mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a_2,+}$ (resp., $\mathcal{S}^{\Lambda_2^{op}}_{b_2,+}$) pelas mutações em subconjuntos que não contém o vértice c, podemos aplicar as mesmas mutações para Λ e obtemos que

$$\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a_2,+} \coprod_{\{c\}} \Bbbk(\mathcal{S}^{\Lambda_2^{op}}_{b_2,+})^{op} \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_1) \coprod_{\{c\}} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_2)^{op}$$

pela Proposição 1.69. Consequentemente Λ é hereditária por partes do tipo $\Gamma_{\Lambda_1} \coprod_{(c_1,c_2)} \Gamma_{\Lambda_2}$ onde $c_1 = \theta_{\Lambda_1}(c)$, $c_2 = \theta_{\Lambda_2^{op}}(c)$ (veja Definição 3.11).

□

Definição 3.15. 1. Para $n, m \in \mathbb{N}$ denotamos por $\chi(n, m)$ o poset definido pelo seguinte diagrama de Hasse:

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_m \arrow[r] & a_1 \arrow[r] \arrow[dr] & a_2 \arrow[r] \arrow[dr] & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[r] & a_{n+1} \\
& & & & b_1 \arrow[r] \arrow[urrr] & b_2 & &
\end{tikzcd}$$

2. Para $n, m \in \mathbb{Z}, n \geq 1, m \geq 0$ denotamos por $C(n, m)$ o poset definido pelo seguinte diagrama de Hasse:

$$\begin{tikzcd}
c_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_m \arrow[r] & a_1 \arrow[r] \arrow[d] & a_2 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] & a_n \arrow[r] \arrow[d] & a_{n+1} \\
& & & b_1 \arrow[r] & b_2 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_n &
\end{tikzcd}$$

Teorema 3.16. *([32], Lema 3.17, Lema 3.18)*

1. $\Bbbk\chi(n, m) \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,n,m+2}$.

2. $\Bbbk C(4, m) \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,3,m+5}$.

A seguir, achamos o tipo hereditário para algumas álgebras de Nakayama acíclicas que são somas amalgamadas simples de álgebras truncadas do tipo feixes com álgebras quadráticas ou álgebras hereditárias.

Teorema 3.17. *Seja $\Lambda = \Lambda_1 \coprod_{\{c\}} \Lambda_2$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é uma soma amalgamada simples das álgebras Λ_1 e Λ_2, onde $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. Seja Λ_2 uma álgebra quadrática ou hereditária com m vértices.*

1. *Se $\Lambda_1 = \Lambda(10, 3)$ então $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,3,m+5}$.*

2. *Se $\Lambda_1 = \Lambda(11, 3)$ então $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,3,m+6}$.*

3. *Se $\Lambda_1 = \Lambda(9, 4)$ então $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,4,m+3}$.*

4. *Se $\Lambda_1 = \Lambda(10, 4)$ então $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,4,m+4}$.*

5. *Se $\Lambda_1 = \Lambda(10, 6)$ então $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,3,m+5}$.*

6. *Se $\Lambda_1 = \Lambda(11, 6)$ então $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,3,m+6}$.*

Demonstração. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$. Então $\mathcal{Q}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Q}: \ a_{n_1} \longrightarrow a_{n_1-1} \longrightarrow \ \cdots \ \longrightarrow a_2 \longrightarrow c \longrightarrow b_2 \longrightarrow \ \cdots \ \longrightarrow b_{n_2-1} \longrightarrow b_{n_2} \ ,$$

onde $c = a_1 = b_1$.

(i) Seja S o poset definido pelo seguinte diagrama de Hasse:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & a_1 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_5 \arrow[r] & a_7 \arrow[r] & a_9 \arrow[r] \arrow[dr] & a_{10} \arrow[r] \arrow[dr] & a_6 \arrow[r] & a_2 \\
& & & & & & & & a_8 \arrow[r] \arrow[urr] & a_4 &
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_c) \cong \Bbbk S$. Visto que $S \cong \chi(3, m+3)$ a afirmação segue do Teorema 3.16.(i).

(ii) Seja S o poset definido pelo seguinte diagrama de Hasse:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & a_1 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_5 \arrow[r] & a_7 \arrow[r] & a_9 \arrow[r] & a_{11} \arrow[r] \arrow[dr] & a_{10} \arrow[r] \arrow[dr] & a_6 \arrow[r] & a_2 \\
& & & & & & & & & a_8 \arrow[r] \arrow[urr] & a_4 &
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_c) \cong \Bbbk S$. Visto que $S \cong \chi(3, m+4)$ a afirmação segue do Teorema 3.16.(i).

(iii) Seja S o poset definido pelo seguinte diagrama de Hasse:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & a_1 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_7 \arrow[r] \arrow[dr] & a_9 \arrow[r] \arrow[dr] & a_8 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_2 \\
& & & & & & a_6 \arrow[r] \arrow[urrr] & a_5 & &
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_c) \cong \Bbbk S$. Visto que $S \cong \chi(4, m+1)$ a afirmação segue do Teorema 3.16.(i).

(iv) Seja S o poset definido pelo seguinte diagrama de Hasse:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & a_1 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_7 \arrow[r] & a_{10} \arrow[r] \arrow[dr] & a_9 \arrow[r] \arrow[dr] & a_8 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_2 \\
& & & & & & & a_6 \arrow[r] \arrow[urrr] & a_5 & &
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_c) \cong \Bbbk S$. Visto que $S \cong \chi(4, m+2)$ a afirmação segue do Teorema 3.16.(i).

(v) Seja S o poset definido pelo seguinte diagrama de Hasse:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & a_1 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] \arrow[d] & a_{10} \arrow[r] \arrow[d] & a_9 \arrow[r] \arrow[d] & a_8 \arrow[r] \arrow[d] & a_7 \\
& & & & a_5 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_2 &
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_c) \cong \Bbbk S$. Visto que $S \cong C(4, m)$ a afirmação segue do Teorema 3.16.(ii).

(vi) Seja S o poset definido pelo seguinte diagrama de Hasse:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & a_1 \arrow[r] & a_6 \arrow[r] & a_{11} \arrow[r] \arrow[d] & a_{10} \arrow[r] \arrow[d] & a_9 \arrow[r] \arrow[d] & a_8 \arrow[r] \arrow[d] & a_7 \\
& & & & & a_5 \arrow[r] & a_4 \arrow[r] & a_3 \arrow[r] & a_2 &
\end{tikzcd}$$

É fácil ver que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_c) \cong \Bbbk S$. Visto que $S \cong C(4, m+1)$ a afirmação segue do Teorema 3.16.(ii). $\square$

Os próximos três lemas serão úteis para demonstração do resultado principal dessa seção, o Teorema 3.21.

Lema 3.18. *([32, Lema 1.45]) Seja A uma álgebra e $B = eAe$ uma subcategoria plena de A para algum idempotente e. Se A é hereditária por partes então B é hereditária por partes.*

Lema 3.19. *Seja $\Lambda = \Lambda_1 \coprod_{\{c\}} \Lambda_2$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é uma soma amalgamada simples das álgebras quadráticas ou hereditárias ou truncadas Λ_1 e Λ_2, onde $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. Se uma das álgebras Λ_i é isomorfa a $\Lambda(r+4, r)$ para algum $r \geq 7$ e a outra não é simples, então Λ não é hereditária por partes.*

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\Lambda_1 = \Lambda(r+4, r)$ para algum $r \geq 7$ e Λ_2 não é simples. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$. Então $\mathcal{Q}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Q}: \ a_{n_1} \longrightarrow a_{n_1 - 1} \longrightarrow \ \cdots \ \longrightarrow a_2 \longrightarrow c \longrightarrow b_2 \longrightarrow \ \cdots \ \longrightarrow b_{n_2 - 1} \longrightarrow b_{n_2} \ ,$$

onde $c = a_1 = b_1$, $\Lambda_1 = e\Lambda e$, $\Lambda_2 = f\Lambda f$, onde $e = \sum_{i=1}^{n_1} e_{a_i}$ e $f = \sum_{i=1}^{n_2} e_{b_i}$.

Visto que Λ_2 não é simples, $n_2 > 1$. Seja $D = \Lambda_1 \coprod_{\{c\}} g\Lambda_2 g$, onde $g = e_{b_1} + e_{b_2}$. Então $\mu_{b_2}(D)$ é álgebra serial à direita que não é hereditária por partes pelo Teorema 4.13 de [32]. Consequentemente Λ não é hereditária por partes pelo Lema 3.18.

□

Lema 3.20. *Seja $\Lambda = \Lambda_1 \coprod_{\{c\}} \Lambda_2$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é uma soma amalgamada simples das álgebras quadráticas ou hereditárias ou truncadas Λ_1 e Λ_2, onde $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. Se uma das álgebras Λ_i é hereditária por partes do tipo feixes e não do tipo módulos e a outra não é quadrática ou não é hereditária então Λ não é hereditária por partes.*

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que Λ_1 é hereditária por partes do tipo feixes e não do tipo módulos e Λ_2 não é quadrática e não é hereditária. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$. Então $\mathcal{Q}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Q}: \ a_{n_1} \longrightarrow a_{n_1 - 1} \longrightarrow \ \cdots \ \longrightarrow a_2 \longrightarrow c \longrightarrow b_2 \longrightarrow \ \cdots \ \longrightarrow b_{n_2 - 1} \longrightarrow b_{n_2}$$

onde $c = a_1 = b_1$, $\Lambda_1 = e\Lambda e$, $\Lambda_2 = f\Lambda f$, onde $e = \sum_{i=1}^{n_1} e_{a_i}$ e $f = \sum_{i=1}^{n_2} e_{b_i}$. Visto que Λ_2 não é quadrática e não hereditária, existe $3 < k \geq n_2$ tal que $g\Lambda_2 g \cong \Lambda(4,3)$, onde $g = e_{b_1} + e_{b_2} + e_{b_3} + e_{b_k}$. Seja $D := \Lambda_1 \coprod_{\{c\}} g\Lambda_2 g$ e seja $T := T^D_{c,-}$. Seja $F := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(D)}(T)$ e seja $F := \Bbbk\Delta/\mathcal{J}$. Então Δ tem a seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}: a_{n_1} \arrow[r] & a_{n_1-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & c & b_3 \arrow[l] & b_4 \arrow[l] \\
 & & & & & & b_2, \arrow[ul]
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{J} = \mathcal{I}_{\Lambda_1}$. Então F é álgebra serial à direita que não é hereditária por partes pelo Teorema 4.13 de [32]. Visto que $D \simeq_{der} F$, D também não é hereditária por partes. Consequentemente Λ não é hereditária por partes pelo Lema 3.18.

□

A seguir, apresentaremos o principal resultado desta seção, que fornece condições necessárias e suficientes para uma álgebra de Nakayama acíclica, que é uma soma amalgamada simples de álgebras truncadas ou álgebras quadráticas ou álgebras hereditárias, ser hereditária por partes.

Teorema 3.21. *Seja $\Lambda = \Lambda_1 \coprod_{\{c\}} \Lambda_2$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é uma soma amalgamada simples das álgebras quadráticas ou hereditárias ou truncadas Λ_1 e Λ_2, onde $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. Então Λ é hereditária por partes se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. *Λ_1 e Λ_2 são hereditárias por partes do tipo módulos.*
2. *Uma das álgebras Λ_i é hereditária ou quadrática e a outra é isomorfa a uma das seguintes álgebras: $\Lambda(10,3), \Lambda(11,3), \Lambda(9,4), \Lambda(10,4), \Lambda(10,6)$ ou $\Lambda(11,6)$.*

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se uma das álgebras Λ_i não é hereditária por partes então Λ não é hereditária por partes pelo Lema 3.18. Então a afirmação segue do Lema 3.19 e Lema 3.20.

($\Leftarrow$) A afirmação segue do Teorema 3.14 e Teorema 3.17. $\square$

3.5 Produto fibrado de álgebras truncadas

O objetivo dessa seção é generalização dos resultados do artigo [22] para uma nova classe de álgebras de Nakayama: álgebras de Nakayama acíclicas que são produtos fibrados simples de álgebras truncadas ou álgebras quadráticas ou álgebras hereditarias.

O próximo teorema será útil na demonstração do Teorema 3.25.

Teorema 3.22. *Seja $\Lambda = \Lambda_1 \prod_{\{c\}} \Lambda_2$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é um produto fibrado simples das álgebras Λ_1 e Λ_2, onde $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. Seja $(a,b) \in \mathcal{Q}_0 \times \mathcal{Q}_0$ um par de vértices admissível tal que $a \in (\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0$, $a \neq c$ e $b \in (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0$, $b \neq c$. Então $\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda}_{a,b} \simeq \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a,+} \prod_c \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_2}_{b,-}$.*

Demonstração. A afirmação segue do Teorema 2.33 e Corolário 2.24. $\square$

Definição 3.23. Para $l, m, n \in \mathbb{N}$ denotamos por $\overrightarrow{\mathbb{T}}_{l,m,n}$ a seguinte aljava com o grafo subsjacente $\mathbb{T}_{l,m,n}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & & & b_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_{m-1} \\
\overrightarrow{\mathbb{T}}_{l,m,n}: & a_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_{l-1} \arrow[r] & d \arrow[ur] \arrow[dr] & & & \\
 & & & & & c_1 \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_{n-1}
\end{tikzcd}$$

O próximo lema técnico será útil na demonstração do Teorema 3.25.

Lema 3.24. *Seja $l_i, m_i, n_i \in \mathbb{N}$ e $\Lambda_i = \Bbbk\overrightarrow{\mathbb{T}}_{l_i,m_i,n_i}$ para $i = 1, 2$. Seja $a_{1,1}$ (resp., $a_{2,1}$) o poço (resp., fonte) da aljava de Λ_1 (resp., Λ_2). Então $\Lambda_1^{op} \prod_{\{a_{1,1},a_{2,1}\}} \Lambda_2 \simeq_{der} \Lambda_1^{op} \coprod_{\{a_{1,1},a_{2,1}\}} \Lambda_2$.*

Demonstração. Seja $\Lambda := \Lambda_1^{op} \coprod_{\{a_{1,1},a_{2,1}\}} \Lambda_2 = \Bbbk\mathcal{Q}_\Lambda/\mathcal{I}_\Lambda$. Então $\mathcal{Q}_\Lambda$ tem a seguinte forma:

$$
\begin{tikzcd}
b_{1,m_1-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_{1,1} \arrow[r] & d_1 \arrow[r] & a_{1,l_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dll, "\alpha"] & & \\
c_{1,n_1-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_{1,1} \arrow[ur] & & d \arrow[dll, "\beta"'] & & b_{2,1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_{2,m_2-1} \\
 & & a_{2,2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_{2,l_2} \arrow[r] & d_2 \arrow[r] \arrow[ur] & c_{2,1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_{2,n_2-1}
\end{tikzcd}
$$

e $I_\Lambda = \langle \alpha\beta \rangle$. Definimos um complexo T_Λ como segue:

$$T_\Lambda := \bigoplus_{c \in (\mathcal{Q}_\Lambda)_0} T_\Lambda^c, \tag{3.2}$$

onde

$$T_\Lambda^c = \begin{cases} \Phi_0(P_c) & \text{se } \ c \leq a_{1,2}, \\ (P_d \to P_{a_{1,2}})[1] & \text{se } \ c = d, \\ (P_c \to P_d \to P_{a_{1,2}})[2] & \text{se } \ c > d. \end{cases} \tag{3.3}$$

Denotamos por $\mathcal{S}_1$ o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$
\begin{tikzcd}
b_{1,m_1-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_{1,1} \arrow[r] & d_1 \arrow[r] & a_{1,l_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_{1,2} & \\
c_{1,n_1-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_{1,1} \arrow[ur] & & b_{2,1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_{2,m_2-1} \arrow[r] & d \arrow[ul] \\
a_{2,2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_{2,l_2} \arrow[r] & d_2 \arrow[r] \arrow[ur] & c_{2,1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_{2,n_2-1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

É fácil ver que T_Λ é um complexo *tilting* e $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T_\Lambda) \cong \Bbbk\mathcal{S}_1$.

Seja $A := \Lambda_1^{op} \coprod_{\{a_{1,1},a_{2,1}\}} \Lambda_2 = \Bbbk\mathcal{Q}_A/\mathcal{I}_A$. Então $\mathcal{Q}_A = \mathcal{Q}_\Lambda$ e $I_A = 0$. Definimos um complexo T_A como segue:

$$T_A := \bigoplus_{c \in (\mathcal{Q}_A)_0} T_A^c, \tag{3.4}$$

onde

$$T_A^c = \begin{cases} \Phi_0(P_c) & \text{se } \ c \leq d, \\ (P_c \to P_d)[1] & \text{se } \ c > d. \end{cases} \tag{3.5}$$

Denotamos por $\mathcal{S}_2$ o poset com o seguinte diagrama de Hasse:

$$
\begin{tikzcd}
b_{1,m_1-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_{1,1} \arrow[r] & d_1 \arrow[r] & a_{1,l_1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_{1,2} \arrow[dr] & \\
c_{1,n_1-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_{1,1} \arrow[ur] & & b_{2,1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & b_{2,m_2-1} \arrow[r] & d \\
a_{2,2} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_{2,l_2} \arrow[r] & d_2 \arrow[r] \arrow[ur] & c_{2,1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & c_{2,n_2-1} \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

É fácil ver que T_A é um complexo *tilting* e $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(A)}(T_A) \cong \Bbbk\mathcal{S}_2$.

Visto que $\mathcal{S}_2 \cong \mu^-_{c_{1,n_1-1}} \cdots \mu^-_{c_{1,1}}\mu^-_{b_{1,m_1-1}} \cdots \mu^-_{b_{1,1}}\mu^-_{a_{1,l_1-1}} \cdots \mu^-_{a_{1,2}}(\mathcal{S}_1)$, a afirmação segue. □

A seguir, achamos o tipo hereditário de uma álgebra de Nakayama acíclica que é um produto fibrado simples que envolve álgebras truncadas do tipo módulos ou álgebras quadráticas ou álgebras hereditárias.

Teorema 3.25. *Seja $\Lambda = \Lambda_1 \prod_{\{c\}} \Lambda_2$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é um produto fibrado simples das álgebras quadráticas ou hereditárias ou truncadas Λ_1 e Λ_2, onde $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. Se Λ_i é hereditária por partes do tipo Γ_{Λ_i} então Λ é hereditária por partes do tipo $\Gamma_{\Lambda_1} \coprod_{(c_1,c_2)} \Gamma_{\Lambda_2}$, onde $c_1 = \theta_{\Lambda_1}(c)$, $c_2 = \theta_{\Lambda_2^{op}}(c)$ e θ_{Λ_1}, $\theta_{\Lambda_2^{op}}$ são como na Definição 3.11.*

Demonstração. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$. Então $\mathcal{Q}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Q}: a_{n_1} \longrightarrow a_{n_1-1} \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow a_2 \longrightarrow c \longrightarrow b_2 \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow b_{n_2-1} \longrightarrow b_{n_2},$$

onde $c = a_1 = b_1$, $\Lambda_1 = e\Lambda e$, $\Lambda_2 = f\Lambda f$, onde $e = \sum_{i=1}^{n_1} e_{a_i}$ e $f = \sum_{i=1}^{n_2} e_{b_i}$. Segue do Teorema 3.22 que $\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda}_{a_2,b_2} \cong \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a_2,+} \prod_{\{c\}} \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_2}_{b_2,-}$, portanto $\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda}_{a_2,b_2} \cong \Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a_2,+} \prod_{\{c\}} \Bbbk(\mathcal{S}^{\Lambda_2^{op}}_{b_2,+})^{op}$ pelo Teorema 2.21. Visto que Λ_1 e $\Lambda_2^{op} \cong \Lambda_2$ são hereditárias por partes do tipo módulos, elas satisfazem um dos itens (i)-(vii) da Proposição 3.10 e portanto segue da demonstração da Proposição 3.10 que $\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a_2,+} \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_1)$ (resp., $\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_2^{op}}_{b_2,+} \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_2^{op})$), onde o diagrama de Hasse de $\mathcal{S}(\Lambda_1)$ (resp., $\mathcal{S}(\Lambda_2^{op})$ é árvore. Visto que $\mathcal{S}(\Lambda_1)$ (resp., $\mathcal{S}(\Lambda_2^{op})$) pode ser obtido de $\mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a_2,+}$ (resp., $\mathcal{S}^{\Lambda_2^{op}}_{b_2,+}$) por mutações em subconjuntos que não contém o vértice c, podemos aplicar as mesmas mutações para Λ e obtém que

$$\Bbbk\mathcal{S}^{\Lambda_1}_{a_2,+} \prod_{\{c\}} \Bbbk(\mathcal{S}^{\Lambda_2^{op}}_{b_2,+})^{op} \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_1) \prod_{\{c\}} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_2^{op})$$

pela Proposição 1.72. Segue do Lema 3.24 que

$$\Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_1) \prod_{\{c\}} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_2^{op}) \simeq_{der} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_1) \coprod_{\{c\}} \Bbbk\mathcal{S}(\Lambda_2^{op})$$

Consequentemente Λ é hereditária por partes do tipo $\Gamma_{\Lambda_1} \coprod_{(c_1,c_2)} \Gamma_{\Lambda_2}$ onde $c_1 = \theta_{\Lambda_1}(c)$, $c_2 = \theta_{\Lambda_2^{op}}(c)$ (veja Definição 3.11) pelo Teorema 3.14. □

A seguir, achamos o tipo hereditário para algumas álgebras de Nakayama acíclicas que são produtos fibrados simples de álgebras truncadas do tipo feixes com álgebras quadráticas ou álgebras hereditárias.

Teorema 3.26. *Seja $\Lambda = \Lambda_1 \prod_{\{c\}} \Lambda_2$ uma álgebra de Nakayama acíclica que é um produto fibrado simples das álgebras Λ_1 e Λ_2, onde $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. Seja Λ_2 uma álgebra quadrática ou hereditária com m vértices.*

1. *Se $\Lambda_1 = \Lambda(10,3)$ então $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,3,m+5}$.*
2. *Se $\Lambda_1 = \Lambda(11,3)$ então $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,3,m+6}$.*
3. *Se $\Lambda_1 = \Lambda(9,4)$ então $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,4,m+3}$.*

4. *Se* $\Lambda_1 = \Lambda(10,4)$ *então* $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,4,m+4}$.

5. *Se* $\Lambda_1 = \Lambda(10,6)$ *então* $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,3,m+5}$.

6. *Se* $\Lambda_1 = \Lambda(11,6)$ *então* $\Lambda \simeq_{der} \mathbb{X}_{2,3,m+6}$.

Demonstração. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$. Então $\mathcal{Q}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Q}: a_{n_1} \longrightarrow a_{n_1-1} \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow a_2 \longrightarrow c \longrightarrow b_2 \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow b_{n_2-1} \longrightarrow b_{n_2},$$

onde $c = a_1 = b_1$, $\Lambda_1 = e\Lambda e$, $\Lambda_2 = f\Lambda f$, onde $e = \sum_{i=1}^{n_1} e_{a_i}$ e $f = \sum_{i=1}^{n_2} e_{b_i}$.

Seja $T = T_{c,-}$. Então segue do Teorema 3.2 e Teorema 2.21 que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Lambda_3 \coprod_{\{b_2\}} \Lambda_4 = \Bbbk\Delta/\mathcal{J}$, onde a aljava Δ tem a seguinte forma:

$$\Delta: a_{n_1} \xrightarrow{\alpha_{n_1-1}} a_{n_1-1} \longrightarrow \quad \cdots \quad \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \xrightarrow{\gamma} b_2 \longrightarrow \bullet \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \bullet \longrightarrow c,$$

$\Lambda_3 = g(\Bbbk\Delta/\mathcal{J})g$, $\Lambda_4 = h(\Bbbk\Delta/\mathcal{J})h$, onde $g = e_{b_2} + \sum_{i=2}^{n_1} e_{a_i}$, $h = \sum_{i=1}^{n_2} e_{b_i}$ e $\mathcal{J}$ é definido pela condição que $\Lambda_3 \cong \Lambda_1$ e Λ_4 é hereditária.

Visto que $\Lambda_3 \cong \Lambda_1$ e Λ_4 é a álgebra de Nakayama acíclica hereditária, a afirmação segue do Teorema 3.17 . □

Os próximos dois lemas serão úteis para demonstração do resultado principal dessa seção, o Teorema 3.29.

Lema 3.27. *Seja* $\Lambda = \Lambda_1 \coprod_{\{c\}} \Lambda_2$ *uma álgebra de Nakayama acíclica que é um produto fibrado simples das álgebras quadráticas ou hereditárias ou truncadas* Λ_1 *e* Λ_2*, onde* $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. *Se uma das álgebras* Λ_i *é isomorfa a* $\Lambda(r+4,r)$ *para algum* $r \geq 7$ *e a outra não é simples, então* Λ *não é hereditária por partes.*

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que $\Lambda_1 = \Lambda(r+4,r)$ para algum $r \geq 7$ e Λ_2 não é simples. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$. Então $\mathcal{Q}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Q}: a_{n_1} \longrightarrow a_{n_1-1} \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow a_2 \longrightarrow c \longrightarrow b_2 \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow b_{n_2-1} \longrightarrow b_{n_2},$$

onde $c = a_1 = b_1$, $\Lambda_1 = e\Lambda e$, $\Lambda_2 = f\Lambda f$, onde $e = \sum_{i=1}^{n_1} e_{a_i}$ e $f = \sum_{i=1}^{n_2} e_{b_i}$.

Seja $T = T_{c,-}$. Então segue do Teorema 3.2 e Teorema 2.21 que $\mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(\Lambda)}(T) \cong \Lambda_3 \coprod_{\{b_2\}} \Lambda_4 = \Bbbk\Delta/\mathcal{J}$, onde a aljava Δ tem a seguinte forma:

$$\Delta: a_{n_1} \xrightarrow{\alpha_{n_1-1}} a_{n_1-1} \longrightarrow \quad \cdots \quad \xrightarrow{\alpha_2} a_2 \xrightarrow{\gamma} b_2 \longrightarrow \bullet \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow \bullet \longrightarrow c,$$

$\Lambda_3 = g(\Bbbk\Delta/\mathcal{J})g$, $\Lambda_4 = h(\Bbbk\Delta/\mathcal{J})h$, onde $g = e_{b_2} + \sum_{i=2}^{n_1} e_{a_i}$, $h = \sum_{i=1}^{n_2} e_{b_i}$ e $\mathcal{J}$ é definido pela condição que $\Lambda_3 \cong \Lambda_1$ e Λ_4 é hereditária.

Visto que $\Lambda_3 \cong \Lambda_1$ e Λ_4 é a álgebra de Nakayama acíclica hereditária, a afirmação segue do Lema 3.19.

□

Lema 3.28. *Seja* $\Lambda = \Lambda_1 \coprod_{\{c\}} \Lambda_2$ *uma álgebra de Nakayama acíclica que é um produto fibrado simples das álgebras truncadas ou hereditárias ou truncadas* Λ_1 *e* Λ_2*, onde* $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$. *Se uma das álgebras* Λ_i *é hereditária por partes do tipo feixes* *e não do tipo módulos e a outra não é quadrática ou não é hereditária então Λ não é hereditária por partes.*

Demonstração. Podemos assumir sem perda de generalidade que Λ_1 é hereditária por partes do tipo feixes e não do tipo módulos e Λ_2 não é quadrática e não é hereditária. Seja $\Lambda = \Bbbk\mathcal{Q}/\mathcal{I}$. Então $\mathcal{Q}$ tem a seguinte forma:

$$\mathcal{Q} : a_{n_1} \longrightarrow a_{n_1-1} \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow a_2 \longrightarrow c \longrightarrow b_2 \longrightarrow \quad \cdots \quad \longrightarrow b_{n_2-1} \longrightarrow b_{n_2},$$

onde $c = a_1 = b_1$, $\Lambda_1 = e\Lambda e$, $\Lambda_2 = f\Lambda f$, onde $e = \sum_{i=1}^{n_1} e_{a_i}$ e $f = \sum_{i=1}^{n_2} e_{b_i}$. Visto que Λ_2 não é quadrática e não é hereditária, existe $3 < k \geq n_2$ tal que $g\Lambda_2 g \cong \Lambda(4,3)$, onde $g = e_{b_1} + e_{b_2} + e_{b_3} + e_{b_k}$. Seja $D := \Lambda_1 \prod_{\{c\}} g\Lambda_2 g$ e seja $T := T^D_{b_2,-}$. Seja $F := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(D)}(T)$ e seja $F := \Bbbk\mathcal{Q}_F/\mathcal{I}_F$. Então $F = \Lambda_1 \prod_{\{c\}} gFg$ e $\mathcal{Q}_F$ tem a seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}_F : a_{n_1} \arrow[r] & a_{n_1-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & c \arrow[r] & b_4 \arrow[r] & b_2 , \\
 & & & & b_3 \arrow[ur] & &
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}_F$ é definida pela condição que gFg é hereditária. Seja $G := \mu^+_{b_3}(F)$. Então $G = \Lambda_1 \prod_{\{c\}} gGg$ e $\mathcal{Q}_G$ tem a seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}_G : a_{n_1} \arrow[r] & a_{n_1-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & c \arrow[r] & b_4 \arrow[r] \arrow[dr] & b_2 , \\
 & & & & & & b_3
\end{tikzcd}$$

e $\mathcal{I}_G$ é definida pela condição que gGg é hereditária.

Definimos um complexo T_G como segue:

$$T_G := \bigoplus_{a \in (\mathcal{Q}_G)_0} T^a_G, \tag{3.6}$$

onde

$$T^a_G = \begin{cases} P_a & \text{se } \ a \leq c, \\ (P_a \to P_c)[1] & \text{se } \ a > c. \end{cases} \tag{3.7}$$

É fácil ver que T_G é um complexo *tilting*, $H := \mathrm{End}_{\mathrm{D}^b(G)}(T_G) = \Lambda_1 \coprod_{\{b_4\}} gHg$ e $\mathcal{Q}_H$ tem a seguinte forma:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{Q}_H : a_{n_1} \arrow[r] & a_{n_1-1} \arrow[r] & \cdots \arrow[r] & a_2 \arrow[r] & b_4 \arrow[r] \arrow[d] & b_2 , \arrow[d] \\
 & & & & b_3 \arrow[r] & c
\end{tikzcd}$$

onde $\mathcal{I}_H$ é definida pela condição que gFg é uma álgebra de incidência de poset. Seja $h = \sum_{a \in (\mathcal{Q}_H)_0 \setminus \{c\}} e_a$ e $A := \mu^-_{b_2}\mu^-_{b_3}(hHh)$. Então A é serial à direita que não é hereditária por partes pelo Teorema 4.13 de [32]. Visto que $hHh \simeq_{der} A$, hHh também não é hereditária por partes. Consequentemente H não é hereditária por partes pelo Lema 3.18. Visto que $D \simeq_{der} H$, D também não é hereditária por partes. Consequentemente Λ não é hereditária por partes pelo Lema 3.18.

□

A seguir, apresentaremos o principal resultado desta seção, que fornece condições necessárias e suficientes para uma álgebra de Nakayama acíclica, que é um produto fibrado simples de álgebras truncadas ou álgebras quadráticas ou álgebras hereditárias, ser hereditária por partes.

Teorema 3.29. *Seja* $\Lambda = \Lambda_1 \prod_{\{c\}} \Lambda_2$ *uma álgebra de Nakayama acíclica que é um produto fibrado simples das álgebras quadráticas ou hereditárias ou truncadas* Λ_1 *e* Λ_2*, onde* $(\mathcal{Q}_{\Lambda_1})_0 \bigcap (\mathcal{Q}_{\Lambda_2})_0 = \{c\}$*. Então* Λ *é hereditária por partes se, e somente se, uma das seguintes condições é satisfeita:*

1. Λ_1 *e* Λ_2 *são hereditárias por partes do tipo módulos.*

2. *Uma das álgebras* Λ_i *é hereditária ou quadrática e a outra é isomorfa a uma das seguintes álgebras:* $\Lambda(10,3), \Lambda(11,3), \Lambda(9,4), \Lambda(10,4), \Lambda(10,6)$ *ou* $\Lambda(11,6)$.

Demonstração. ($\Rightarrow$) Se uma das álgebras Λ_i não é hereditária por partes então Λ não é hereditária por partes pelo Lema 3.18. Então a afirmação segue do Lema 3.27 e Lema 3.28.

($\Leftarrow$) A afirmação segue do Teorema 3.25 e Teorema 3.26. □

REFERÊNCIAS

[1] I. Assem, A. Skowroński, and D. Simson. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 1. Cambridge University Press, 2006.

[2] M. Barot. *Introduction to the representation theory of algebras*. Springer, 2015.

[3] M. Barot and H. Lenzing. One-point extensions and derived equivalence. *Journal of Algebra*, 264(1):1–5, 2003.

[4] R. Bautista and S. Liu. The bounded derived categories of an algebra with radical squared zero. *Journal of Algebra*, 482:303–345, 2017.

[5] V. Bekkert, F. U. Coelho, and H. Wagner. Tree oriented pullback. *Communications in Algebra*, 43(10):4247–4257, 2015.

[6] V. Bekkert and Y. Drozd. Tame-wild dichotomy for derived categories. *arXiv:math/0310352*, 2003.

[7] V. Bekkert and Y. Drozd. Derived categories for algebras with radical square zero. *Contemporary Mathematics*, 483:55–62, 2009.

[8] V. Bekkert, H. Giraldo, and J. Vélez-Marulanda. Derived tame Nakayama algebras. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 149(11):4555–4567, 2021.

[9] V. Bekkert, E. Marcos, and H. A. Merklen. Indecomposables in derived categories of skewed-gentle algebras. *Communications in Algebra*, 31(6):2615–2654, 2003.

[10] V. Bekkert and H. A. Merklen. Indecomposables in derived categories of gentle algebras. *Algebras and Representation Theory*, 6(3):285–302, 2003.

[11] G. Bobiński, C. Geiß, and A. Skowroński. Classification of discrete derived categories. *Cent. Eur. J. Math.*, 2(1):19–49, 2004.

[12] T. Brüstle. Tame tree algebras. *J. Reine Angew. Math.*, 2004.

[13] F. U. Coelho and H. Wagner. On linearly oriented pullback and classes of algebras. *Algebras and Representation Theory*, 23:739–758, 2020.

[14] A. P. d. S. Cota. *Álgebras seriais derivadamente mansas*. PhD thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, 2018.

[15] W. Geigle and H. Lenzing. A class of weighted projective curves arising in representation theory of finite dimensional algebras. In *Singularities, Representation of Algebras, and Vector Bundles*, pages 265–297. Springer Berlin Heidelberg, 1987.

[16] W. Geigle and H. Lenzing. Perpendicular categories with applications to representations and sheaves. *Journal of Algebra*, 144(2):273–343, 1991.

[17] S. I. Gelfand and Y. I. Manin. *Methods of homological algebra*. Springer Science & Business Media, 2013.

[18] D. Happel. *Triangulated categories in the representation of finite dimensional algebras*. Cambridge University Press, 1988.

[19] D. Happel. A characterization of hereditary categories with tilting object. *Inventiones mathematicae*, 144(2):381–298, 2001.

[20] D. Happel, I. Reiten, and S. Smalø. Piecewise hereditary algebras. *Archiv der Mathematik*, 66(3):182–186, 1996.

[21] D. Happel and C. M. Ringel. Tilted algebras. *Transactions of the American Mathematical Society*, 274(2):399–443, 1982.

[22] D. Happel and U. Seidel. Piecewise hereditary Nakayama algebras. *Algebras and representation theory*, 13(6):693–704, 2010.

[23] D. Happel and D. Zacharia. A homological characterization of piecewise hereditary algebras. *Mathematische Zeitschrift*, 260(1):177–185, 2008.

[24] L. A. Hügel, D. Happel, and H. Krause. *Handbook of tilting theory*, volume 13. Cambridge University Press, 2007.

[25] S. Ladkani. On derived equivalences of categories of sheaves over finite posets. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 212(2):435–451, 2008.

[26] S. Ladkani. Which canonical algebras are derived equivalent to incidence algebras of posets? *Communications in Algebra*, 36(12):4599–4606, 2008.

[27] S. Ladkani. Perverse equivalences, bb-tilting, mutations and applications. *arXiv preprint arXiv:1001.4765*, 2010.

[28] H. Lenzing, H. Meltzer, and S. Ruan. Nakayama algebras and Fuchsian singularities. *arXiv preprint arXiv:2112.15587*, 2021.

[29] J. Lévesque. Nakayama oriented pullbacks and stably hereditary algebras. *Journal of Pure and Applied Algebra*, 212(5):1149–1161, 2008.

[30] E. d. N. Marcos and M. Moreira. Piecewise hereditary incidence algebras. *Contemporary Mathematics*, 761:213–225, 2021.

[31] E. d. N. Marcos and M. Moreira. Piecewise hereditary incidence algebras of Dynkin and extended Dynkin type. *Communications in Algebra*, 50(3):1220–1266, 2022.

[32] C. H. d. C. Melo. *Álgebras seriais truncadas, álgebras de incidência de posets e equivalências derivadas*. PhD thesis, UFMG, 2021.

[33] D. Milicic. Lectures on derived categories, 2010. URL: `https://www.math.utah.edu/~milicic/Eprints/dercat.pdf`.

[34] J. Rickard. Morita theory for derived categories. *Journal of the London Mathematical Society*, s2-39(3):436–456, 1989.

[35] C. M. Ringel. *Tame algebras and integral quadratic forms*, volume 1099. Springer, 1984.

[36] M. M. d. Silva. *Álgebras de incidência hereditária por partes.* PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2016.

[37] D. Simson and A. Skowroński. *Elements of the Representation Theory of Associative Algebras*, volume 3. Cambridge University Press, 2007.

[38] J. Vitória. Mutations vs. Seiberg duality. *Journal of Algebra*, 321(3):816–828, 2009.

[39] H. Wagner. *Produto fibrado orientado de álgebras e dimensão de representação.* PhD thesis, Universidade de São Paulo, 2012.

[40] C. A. Weibel. *An introduction to homological algebra.* Cambridge university press, 1995.

[41] C. Zhang and Y. Han. Brauer-Thrall type theorems for derived module categories. *Algebras and Representation Theory*, 19(6):1369–1386, 2016.

[42] A. Zimmermann. *Representation Theory: A Homological Algebra Point of View.* Springer, 2014.

ÍNDICE REMISSIVO