UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Myrla Kedynna Barbosa

Teorema de Contratilidade de Castelnuovo

Belo Horizonte - MG
01 de Agosto de 2019

Myrla Kedynna Barbosa

Teorema de Contratilidade de Castelnuovo

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. André Luis Contiero

Belo Horizonte - MG
01 de Agosto de 2019

Barbosa, Myrla Kedynna

B238t Teorema de contratilidade de Castelnuovo [recurso eletrônico] / Myrla Kedynna Barbosa — 2019.
1 recurso online (37 f. il, color.) : pdf.

Orientador: André Luis Contiero.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.
Referências: f.37

1. Matemática – Teses. 2. Curvas – Teses. 3. Superficies (Matemática) – Teses.I. Contiero, André Luis.II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III.Título.

CDU 51(043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais - ICEx

Universidade Federal de Minas Gerais
Departamento de Matemática
Programa de Pós-Graduação em Matemática

FOLHA DE APROVAÇÃO

Teorema da Contratilidade de Castelnuovo

MYRLA KEDYNNA BARBOSA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof. André Luis Contiero
UFMG

Prof. Maurício Barros Corrêa Júnior
UFMG

Prof. Renato Vidal da Silva Martins
UFMG

Belo Horizonte, 01 de agosto de 2019.

Av. Antônio Carlos, 6627 – Campus Pampulha - Caixa Postal: 702
CEP-31270-901 - Belo Horizonte – Minas Gerais - Fone (31) 3409-5963
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br - home page: http://www.mat.ufmg.br/pgmat

À minha avó, Alexandrina.

AGRADECIMENTOS

À minha família por todo incentivo, amor e apoio. Minha mãe Edivalma e meu irmão Daírly foram meu porto seguro durante minha jornada acadêmica. Minha avó Alexandrina, com muita luta, tornou possível tudo o que veio e o que virá.

Ao meu orientador, André Contiero, que me acompanha desde a graduação, antes como professor e hoje como orientador. Com sua visão de entusiasta foi um dos primeiros a me incentivar a perscrutar os mistérios da Geometria Algébrica.

Aos meus amigos alagoanos da UFMG, que mataram um pouco da minha saudade de casa ao propiciar conversas calorosas temperadas com nosso sotaque. Em especial agradeço à minha amiga de início de jornada, Ayane Adelina.

Aos meus colegas de mestrado da UFMG. Sou muito grata por nossas reuniões e discussões científicas, assim como pelos momentos de lazer. Em especial à Hellen de Paula e à Deisiane Lopes, pelo amparo e amizade.

Aos amigos que fiz durante a graduação por terem me ajudado a dar este importante passo na minha vida. Meu carinhoso agradecimento aos que participaram do C. A. ou cursaram disciplinas comigo. Aqui destaco Ranilze, Francisca, Leon, Emanoel Matheus e Roney. Aos meus amigos que me incentivaram a seguir vida acadêmica, em especial ao Davi Lima e ao Iury Domingos por terem caminhado comigo por tanto tempo.

Aos professores da UFAL que me orientaram e me ensinaram, agradeço pelos conselhos e incentivos.

A todos que conviveram comigo no dia-a-dia e me ajudaram de forma solícita.

A todos que leram esta dissertação e ajudaram a melhorar sua escrita.

Ao corpo docente do Programa de Pós-Graduação; ao grupo de Geometria Algébrica e seus colaboradores; e aos servidores públicos do departamento de Matemática da UFMG.

À banca de examinação pelas preciosas observações.

À CAPES pelo apoio suporte financeiro, que contribuiu para a realização desse trabalho.

RESUMO

Nesta dissertação apresentamos e provamos o Teorema de Contratilidade de Castelnuovo. Este resultado estabelece um critério para contrair uma curva em uma superfície:

> Sejam S uma superfície lisa projetiva e $C \subset S$ uma curva racional com $C^2 = -1$. Então existem uma superfície lisa S' e um ponto $P \in S'$ tais que $S \cong Bl_P S'$ e, via φ, C é a curva excepcional do blow-up.

Palavras-chave: contratilidade, superfície, curva -1.

ABSTRACT

In this master thesis we present and prove the Castelnuovo's Contractibility Criterion. This result sets a criterion for contracting a curve on a surface:

> Given a non-singular projective surface S and a rational curve $C \subset S$ with $C^2 = -1$. The it exist a non-singular surface S' and a point $P \in S'$ such that $S \cong Bl_P S'$ and C is the excepcional curve of the blow-up.

Keywords: contractibility, surface, -1 curves

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

O objetivo deste texto é apresentar e provar o Teorema de Contratilidade de Castelnuovo. Este resultado estabelece um critério para contrair uma curva em uma superfície:

> Sejam S uma superfície lisa projetiva e $C \subset S$ uma curva racional com $C^2 = -1$. Então existem uma superfície lisa S' e um ponto $P \in S'$ tais que $S \cong Bl_P S'$ e, via φ, C é a curva excepcional do blow up.

No primeiro capítulo definimos fatos básicos e estabelecemos parte da notação que será utilizada durante o restante do texto.

No segundo capítulo definimos o Grupo de Picard, discorremos sobre divisores muito amplos e sistemas lineares, além disso enunciamos o Teorema de Anulamento de Serre e o teorema de Bertini.

O terceiro capítulo é dedicado a Teoria de Interseção em superfícies regulares em codimensão 1. Damos uma demonstração simples para o Teorema de Bézout.

Logo depois no quarto capítulo falamos sobre a geometria birracional de superfícies. Em sua primeira seção definimos o conceito de blow-up, definimos o blow-up de $\mathbb{A}^2$ na origem e logo depois definimos o blow-up de uma superfíce S em um ponto $p \in S$. Em sua subseção estabelecemos a notação utilizada para as cartas locais de um blow-up. A próxima seção é dedicada à relação entre aplicações racionais e sistemas lineares: dada uma superfície S, existe uma bijeção entre os sistemas lineares em S de dimensão (projetiva) n e as aplicações racionais $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, tais que $\varphi(S)$ é não degenerada, quocientadas por $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$. Apresentamos e provamos o Teorema de Resolução de Indeterminações. Na terceira seção apresentamos e provamos o resultado que estabelece a propriedade universal de processo de blowing-up.

O resultado principal desde texto é enunciado e provado no último capítulo.

Notação: Fixaremos aqui algumas notações e convenções a serem utilizadas durante todo o restante do texto, a menos que seja mencionado o contrário.

As curvas aqui tratadas serão projetivas, as superfícies serão lisas, irredutíveis, projetivas, sobre um corpo k algebricamente fechado, e as variedades serão reduzidas e irredutíveis.

$()^\vee$	módulo (espaço, feixe etc) dual
$\mathbb{P}^n$	espaço projetivo n-dimensional
$\mathfrak{m}_p$	ideal maximal do ponto p
$\mathcal{O}_X$	feixe estrutural de X
$\mathcal{O}_X(D)$	feixe correspondente ao divisor $D \in \mathrm{Div}(X)$
$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n)$	$:= \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(n \cdot H)$, onde $H \subset \mathbb{P}^n$ é um hiperplano
$H^i(X, \mathcal{O}_X(D))$	(ou $H^i(\mathcal{O}_X(D))$) o i-ésimo grupo de cohomologia do feixe $\mathcal{O}_X(D)$
$h^i(\mathcal{O}_X(D))$	$:= \dim H^i(\mathcal{O}_X(D))$
$\chi(\mathcal{O}_X(D))$	$:= h^0(D) - h^1(D) + h^2(D)$, a característica de Euler-Poincaré do feixe $\mathcal{O}_X(D)$
Ω_X	feixe cotangente de X
T_X	feixe tangente de X, $T_X := \Omega_X^\vee$
ω_X	feixe canônico de uma variedade não-singular
K_X	divisor canônico de X, $\mathcal{O}_X(K_X) = \omega_X$

2 DEFINIÇÕES E FATOS BÁSICOS

Nesta seção recordaremos alguns conceitos necessários para o desenvolvimento e compreensão do presente texto. Deste modo, assumiremos alguns fatos básicos de curvas algébricas e Geometria Algébrica clássica. Salvo menção contrária, os conceitos e resultados aqui apresentados podem ser encontrados com riqueza de detalhes em [H].

A seguir faremos algumas considerações sobre fibrados lineares.

Uma **hipersuperfície** de grau d em $\mathbb{P}^n$ é um conjunto Y dos zeros de um polinômio $f \in k[x_0, \dots, x_n]$ de grau d. Quando $d = 1$, dizemos que Y é um **hiperplano**. Seja X uma variedade de dimensão n e tome o mergulho $i : X \hookrightarrow \mathbb{P}^N$ tal que X é não-degenerada em $\mathbb{P}^N$, isto é, X não está contida em um hiperplano de $\mathbb{P}^N$. Denotamos $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1)$ o **fibrado linear de hiperplanos**. Dessa forma, $i^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1) = \mathcal{O}_X(1)$ tal que

$$\mathbb{P}(H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) = \mathbb{P}^N.$$

E além disso,

$$\mathcal{O}_X(m) = \underbrace{\mathcal{O}_X(1) \otimes \cdots \otimes \mathcal{O}_X(1)}_{m \text{ vezes}}.$$

A classificação de todos os fibrados lineares de $\mathbb{P}^N$ é obtida segundo o teorema:

Teorema 2.1. *Todo fibrado linear sobre $\mathbb{P}^n$ é isomorfo a $\mathcal{O}(m)$ para algum $m \in \mathbb{Z}$.*

Dada uma base $\{s_0, \dots, s_N\}$ de seções globais de $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ tem-se que

$$i(x) = (s_0(x), \dots, s_N(x)).$$

As informações sobre a tangente em um ponto x da variedade X estão codificadas em

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_X/m_x) = k^{n+1}.$$

O **espaço tangente projetivo** associado ao ponto x é

$$\mathbb{P}(\mathcal{O}_X(1) \otimes \mathcal{O}_X/m_x) \cong \mathbb{P}^n.$$

Exemplo 2.1 (Mergulho de Veronese). *O mapa $\nu_m : \mathbb{P}^n \to \mathbb{P}^N$ definido por*

$$(x_0 : \cdots : x_n) \mapsto (\dots, \prod_{i \in I, |I| = m} x_i, \dots),$$

*onde $N = \binom{n+m}{m} - 1$, é dito **mergulho de Veronese.***

*Em particular, quando $n = 1$, $\mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^m$ é chamado **curva racional normal** de grau m. E quando $n = 2$ e $m = 2$, $\nu_2(\mathbb{P}^2)$ é chamada de **superfície de Veronese**.*

O mergulho de Veronese permite realizar hipersuperfícies de grau m como hiperplanos.

O fibrado linear $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)$ não possui seções globais não-triviais. Em outras palavras, $H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1)) = (0)$.

Sejam X uma variedade quasi-projetiva e $p \in X$. O **espaço tangente** de X em p é

$$T_p(X) := (\mathfrak{m}_p/\mathfrak{m}_p^2)^\vee.$$

Definição 2.1. *Um mapa regular $\varphi : X \to X'$ entre variedades lisas é dito **étale em um ponto** $p \in X$ se o mapa*

$$(d\varphi)_p : T_p(X) \to T_p(X')$$

*é isomorfismo. O mapa φ é dito **étale** se é étale em todo ponto de X.*

Exemplo 2.2. *O mapa regular $\varphi : \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^n$ definido por*

$$p \mapsto (Q_1(p), \ldots, Q_n(p))$$

é étale em p se, e somente se, o posto do Jacobiano $Jac(Q_1, \ldots, Q_n)(p)$ é igual a n. Pois o mapa no espaço tangente tem matriz Jacobiana $Jac(Q_1, \ldots, Q_n)(p)$. Uma condição equivalente é que

$$det(\frac{\partial Q_i}{\partial x_j}(p)) \neq 0.$$

3 GRUPO DE PICARD

Neste capítulo, caso não seja explicitado o contrário, X denotará um esquema projetivo, inteiro (reduzido e irredutível) e regular de codimensão 1.

Definição 3.1. *X é **regular** em codimensão 1 se para todo $Z \subset X$ irredutível tal que* $\operatorname{codim} Z = 1$*, tem-se que $\mathcal{O}_{X,\zeta}$, onde ζ é o ponto genérico de Z, é um anel de valorização discreta (D.V.R).*

Observe que $\mathcal{O}_{X,\zeta}$ é regular de dimensão 1 se, e somente se, seu ideal maximal $\mathfrak{m}_\zeta = (t)$ é principal. Neste caso,

$$\mathcal{O}_{X,\zeta} = \{u.t^n | u \in \mathcal{O}^*_{X,\zeta}, n \in \mathbb{N}\}.$$

pois se $u \in \mathcal{O}_{X,\zeta}/\mathfrak{m}_\zeta$ então u é invertível em $\mathcal{O}_{X,\zeta}$.

Como $\mathcal{O}_{X,\zeta}$ é domínio, vale que

$$cf(\mathcal{O}_{X,\zeta}) = \{u.t^n | n \in \mathbb{Z}, u \in \mathcal{O}^*_{X,\zeta}\}.$$

Definição 3.2. *Seja $Z \subset X$ um subesquema fechado. Definimos*

$$\begin{array}{rcl} v_Z : cf(\mathcal{O}_{X,\zeta}) & \to & \mathbb{Z} \\ u.t^n & \mapsto & n \end{array},$$

dita a valorização associada a Z.

Exemplo 3.1. $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *é regular em condimensão 1. De fato, considere*

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \hookrightarrow & \mathbb{P}^3 \\ (s:t) \times (u:v) & \mapsto & (su:sv:tu:tv). \end{array}$$

Vale que $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \cong Q \subset \mathbb{P}^3$, onde $Q = V(x_0x_3 - x_1x_2)$. Q é suave pois $J = (x_3 \quad -x_2 \quad -x_1 \quad x_0)$ tem posto máximo. Logo $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ é regular em condimensão 1 por ser a quádrica suave de $\mathbb{P}^3$.

Sejam X uma variedade e sejam $\mathcal{L}$ e $\mathcal{M}$ dois feixes invertíveis sobre X. Então

1. $\mathcal{L} \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{M}$ é feixe invertível;
2. $\mathcal{L}^\vee := Hom_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{L}, \mathcal{O}_X)$ é feixe invertível.

Desta forma,

$$\mathcal{L}^\vee \otimes_{\mathcal{O}_X} \mathcal{L} = \mathcal{O}_X.$$

Definição 3.3. *Denotamos por* $\operatorname{Pic} X$*, dito* ***grupo de Picard****, o grupo das classes de isomorfismos dos feixes invertíveis em* X *com o produto dado por*

$$\begin{array}{rcl} \otimes : \ PicX \times PicX & \rightarrow & PicX \\ (\mathcal{L}, \mathcal{M}) & \mapsto & \mathcal{L} \otimes \mathcal{M}, \end{array}$$

onde o elemento neutro é dado por $\mathcal{O}_X$ *e o inverso é dado por* $\mathcal{L}^{\vee}$*.*

Definição 3.4. *Seja* X *uma variedade lisa (ou regular em codimensão* 1*). Um* ***divisor primo*** (P) *de* X *é uma subvariedade fechada de codimensão 1 (irredutível e reduzida). O grupo abeliano livre gerado pelos divisores primos é denotado por* $\operatorname{Div} X$*. Isto é, dado* $D \in \operatorname{Div} X$ *tem-se que*

$$D = \sum n_i P_i,$$

onde P_i *é divisor primo e apenas uma quantidade finita de* $n_i \in \mathbb{Z}$ *é diferente de zero. Dizemos ainda que* $D \in \operatorname{Div} X$ *é* ***efetivo*** *se* $n_i \geq 0$*, para todo* $n_i \in \mathbb{Z}$*.*

Sejam $K(X)$ o corpo de funções racionais de X e $f \in K(X) \setminus \{0\}$. Definimos o divisor de f como $\operatorname{div}(f) = \sum_{P_i \text{ primo}} v_{P_i}(f).P_i$, onde v_{P_i} é valorização discreta em $K(X)$ associada ao anel local $\mathcal{O}_{X,P_i}$ (isto é, $\mathcal{O}_{X,P_i} = \{f \in K(X) | v_{P_i} \geq 0\}$).

Os divisores da forma $\operatorname{div}(f)$ são ditos **divisores principais** e formam um subgrupo do grupo $\operatorname{Div} X$, denotado por $\operatorname{PDiv} X$.

Definição 3.5. *Sejam* D *e* D' *dois divisores em* X*. Dizemos que* D *e* D' *são* ***linearmente equivalentes*** *se* $D - D' = \operatorname{div}(f)$ *para algum* $f \in K(X) - \{0\}$*.*

Para todo $D \in \operatorname{Div} X$ efetivo existe uma correspondência com um feixe invertível $\mathcal{O}_X(D)$ e uma seção $s \in H^0(\mathcal{O}_X(D))$, $s \neq 0$, que é única a menos de multiplicação por escalar, tal que $\operatorname{div}(s) = D$. Dessa forma podemos definir $\mathcal{O}_X(D)$, para $D \in \operatorname{Div}(X)$ arbitrário, por linearidade.

Proposição 3.1. *Se* X *é uma variedade lisa, então*

$$\operatorname{Pic} X \cong \operatorname{Div} X / \operatorname{PDiv} X.$$

Demonstração. Defina

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \operatorname{Div} X & \rightarrow & \operatorname{Pic} X \\ D & \mapsto & \mathcal{O}_X(D). \end{array}$$

Existe uma cobertura aberta $\{V_i\}$ e funções racionais $f_i \in K(V_i)$ tais que

- $D|_{V_i} = \operatorname{div}(f_i)$ em V_i;
- $\dfrac{f_i}{f_j} \in \mathcal{O}(V_i \cap V_j)^*$, em $V_i \cap V_j$.

Temos ainda que $\mathcal{O}_X(D)|_{V_i} = \mathcal{O}_{V_i} \cdot f_i^{-1}$.

Além disso, temos que $\ker \varphi$ é o conjunto dos divisores principais. Desta forma, concluimos a prova. □

$\mathcal{O}_X(-D)$ é o feixe de ideais de D.

Calculemos agora o grupo de Picard de algumas variedades pertinentes.

Exemplo 3.2. $\operatorname{Pic}(\mathbb{A}^n) = 0$, *pois neste caso todo divisor primo é principal.*

Exemplo 3.3 ($\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$)**.** *Considere o mergulho de Segre* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^3$ *que leva* $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *em uma quádrica* Q *em* $\mathbb{P}$

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 & \to & \mathbb{P}^3 \\ (s:t) \times (u:v) & \mapsto & (su:sv:tu:tv). \end{array}$$

Dados $h_1 := \mathbb{P}^1 \times \{(0:1)\}$ *e* $h_2 := \{(0:1)\} \times \mathbb{P}^1$*, eles são principais. Seja* $U = Q - (h_1 \cup h_2) \cong \mathbb{A}^2$*. Como visto anteriormente,* $\operatorname{Pic} \mathbb{A}^n = 0$*. Dessa forma,* $\operatorname{Pic} U = 0$*. Seja* $D \in \operatorname{Pic} \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ *com* D *efetivo. Logo,* $D|_U = \operatorname{div}(f)$*. Assim,* $D = \operatorname{div}(f) + m_1 h_1 + m_2 h_2$*, donde*

$$D \sim m_1 h_1 + m_2 h_2.$$

Logo $\operatorname{Pic} Q = \langle h_1, h_2 \rangle$*. Seja*

$$\begin{array}{rccl} \psi: & \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \to & \mathbb{Z}.h_1 \oplus \mathbb{Z}.h_2 \\ & (m_1, m_2) & \mapsto & m_1 h_1 + m_2 h_2 \end{array}.$$

Observe que $\ker \psi = 0$*. Portanto* $\operatorname{Pic} Q = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$*.*

Teorema 3.1 (Dualidade de Serre)**.** *Seja* X *uma variedade suave de dimensão* n*. Dado um feixe* $\mathcal{F}$ *localmente livre em* X*, para todo* i*, vale que*

$$H^i(X, \mathcal{F}) \cong (H^{n-i}(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X))^\vee.$$

Em particular, se $X = S$ é uma superfície e $\mathcal{F}$ é um feixe localmente livre em S, tem-se

$$H^0(X, \mathcal{F}) \cong (H^2(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X))^\vee.$$

e

$$H^1(X, \mathcal{F}) \cong (H^1(X, \mathcal{F}^\vee \otimes \omega_X))^\vee.$$

Apresentamos agora a versão do Teorema de Riemann-Roch para superfícies. Uma prova deste resultado pode ser encontrada em [H, Teorema 1.6, pág. 362].

Teorema 3.2 (Teorema de Riemann-Roch, para superfícies)**.** *Se* D *é um divisor em uma superfíce projetiva não singular, então*

$$\chi(\mathcal{O}_S(D)) = \frac{1}{2}(D - K_S) \cdot D + \chi(\mathcal{O}_S).$$

3.0.1 Divisores Muito Amplos

Dado um anel A, definimos o n-ésimo espaço projetivo sobre A como sendo o esquema $\mathbb{P}^n_A := \mathbb{P}(A[x_0, \ldots, x_n])$.

Sejam X e Z esquemas. Um morfismo $i : X \to Z$ é uma **imersão** se é dado por um isomorfismo de X com um subesquema aberto de um subesquema fechado de Z.

Definição 3.6. *Se X é um subesquema sobre Y, um feixe invertível $\mathcal{L}$ em X é dito* ***muito amplo*** *relativo a $\mathcal{L}$ se existe uma imersão $i : X \to \mathbb{P}^r_{\mathbb{Z}} \times_{\mathbb{Z}} Y$, para algum r, de forma que $i^*(\mathcal{O}(1)) \cong \mathcal{L}$.*

Dizemos que um divisor $D \in \operatorname{Div} X$ é ***muito amplo*** *se o seu feixe invertível associado $\mathcal{O}_X(D)$ é muito amplo.*

Apresentamos agora o critério de amplitude de Serre, ele estabelece condições necessárias e suficientes para que um divisor em uma superfície S seja amplo (geralmente definido pelo item 3 do teorema abaixo). Divisores muito amplos são amplos.

Teorema 3.3 (Teorema de Anulamento de Serre)**.** *Um divisor $D \in \operatorname{Div} S$ é amplo se, e somente se, valem as condições abaixo*

1. *Para todo feixe coerente $\mathcal{F}$ em S, tem-se*
$$H^i(S, \mathcal{F} \times \mathcal{O}_S(nD)) = 0$$
para $i > 0$ e $n >> 0$.

2. *$\mathcal{F} \times \mathcal{O}_S(nD)$ é gerado por suas seções globais.*

3. *Dado um fibrado linear $\mathcal{L}$ em S, então $\mathcal{L} \times \mathcal{O}_S(nD)$ é (muito) amplo, para $n >> 0$.*

Este resultado foi provado por Serre em [S], uma prova mais atual pode ser encontrada em [H, Teorema 5.2, pág. 228].

3.0.2 Sistemas Lineares

Considere uma superfície S e seja D um divisor de S. Definimos o **sistema linear completo** $|D|$ de D por
$$|D| := \{D' \geq 0 \,|\, D' \sim D\}.$$

Fato. $|D| \overset{\leftrightarrows}{=} \mathbb{P}(H^0(S, \mathcal{O}_S(D)))$.

Seja $V \subseteq H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ um subespaço vetorial, então
$$\Sigma := \mathbb{P}(V) \subseteq |D|$$
é dito **sistema linear**.

Seja $p \in S$. Dizemos que p é um **ponto de base** de Σ se $p \in D$, para todo $D \in \Sigma$. Denotamos por $B(\Sigma)$ o conjunto dos pontos de base de Σ.

Exemplo 3.4. *O ponto* $(0:0:1) \in \mathbb{P}^2$ *é um ponto de base para o sistema linear formado por todas as retas em* $\mathbb{P}^2$ *que passam por* $(0:0:1)$.

Seja B um divisor primo de S. Dizemos que B é uma **componente de base** de Σ se $B \subseteq D$, para todo $D \in \Sigma$.

A **parte fixa** de Σ é o maior divisor F tal que $F \subseteq D$, para todo $D \in \Sigma$. Dessa forma, para todo $D \in \Sigma$, $|D - F|$ é efetivo, não possui parte fixa.

O sistema linear Σ é dito **livre** se não contém pontos de base, e Σ é dito **móvel** se não contém componentes de base.

Teorema 3.4 (Bertini)**.** *Se* $X \subseteq \mathbb{P}^n$ *é uma variedade projetiva sobre* k*. Então existe um hiperplano* $H \subseteq \mathbb{P}^n$*, que não contém* X*, tal que o esquema* $H \cap X$ *é regular em todo ponto. O conjunto de hiperplanos com essa propriedade forma um aberto denso do sistema linear completo* $|H|$*, considerado como espaço projetivo.*

Uma consequência do Teorema de Bertini é que se X é suave e $D \in \operatorname{Div} X$ é muito amplo então existe $C \in |D|$ suave e irredutível.

4 TEORIA DE INTERSEÇÃO EM SUPERFÍCIES REGULARES EM CODIMENSÃO 1

Neste capítulo consideramos que todas as superfícies são lisas, irredutíveis e projetivas, sobre um corpo algebricamente fechado. As principais referências para os objetos tratados neste capítulo são [B] e [H].

Definição 4.1 (Interseção local)**.** *Dada S uma superfície e dadas C e D curvas distintas em S. Seja p um ponto isolado de $C \cap D$. Definimos a **multiplicidade de interseção** de C e D em p como*

$$(C \cdot D)_p := \dim_k \mathcal{O}_{S,p}/(f, g),$$

onde f e g são equações locais de C e D em p e a dimensão é tomada como k-espaço vetorial.

O fato do anel $\mathcal{O}_{S,p}/(f, g)$ ser um espaço vetorial de dimensão finita sobre k segue do Teorema Nullstellensatz de Hilbert.

Observação 4.1. $(C \cdot D)_p = 1$ *se, e somente se, C e D se intersectam transversalmente em p.*

Motivados pela definição acima, gostaríamos de definir uma forma bilinear simétrica

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{Pic} S \times \operatorname{Pic} S & \to & \mathbb{Z} \\ (C, D) & \mapsto & (C \cdot D) = \displaystyle\sum_{p \in C \cap D} (C \cdot D)_p \quad , \end{array} \tag{4.1}$$

onde C e D são curvas sem componentes em comum.

Diversas vezes durante o texto a notação $(C \cdot D)$ será simplificada para $C \cdot D$, notação não usada anteriormente apenas por uma questão de elegância.

Reinterpretemos o significado de $(C \cdot D)_p$. Seja $C \subset S$ uma curva irredutível lisa e seja $D \subset S$ uma curva qualquer que não contenha C como componente irredutível. Considere a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathcal{O}_S(-D) \to \mathcal{O}_S \to \mathcal{O}_D \to 0.$$

Agora, tensorizando essa sequência por $\mathcal{O}_C$, obtêm-se

$$0 \to \mathcal{O}_S(-D) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_S \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_D \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C \to 0,$$

donde segue que

$$0 \to \mathcal{O}_S(-D) \otimes_{\mathcal{O}_S} \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C\cap D} \to 0$$

também é exata. Aqui, $C \cap D$ denota a interseção esquemática. Isto nos diz, que $\mathcal{O}_S(-D) \otimes \mathcal{O}_C$ é o feixe de ideais associado a $C \cap D$ em C, isto é, $\mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{O}_C$ é o feixe invertível em C associado a $C \cap D$. Aplicando o teorema de Riemann-Roch ao divisor $C \cap D$, obtemos

$$\deg(\mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{O}_C) = \chi(\mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{O}_C) - \chi(\mathcal{O}_C).$$

Temos a seguinte sequência exata

$$0 \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C\cap D} \to 0.$$

Pela aditividade de χ temos

$$\deg(\mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{O}_C) = h^0(\mathcal{O}_{C\cap D}) = \sum_{p\in C\cap D} (C \cdot D)_p.$$

Visto que

$$h^0(C \cap D, \mathcal{O}_X(C \cap D)) = \sum \dim \mathcal{O}_{C\cap D,p} \quad \text{e} \quad \mathcal{O}_{C\cap D,p} = \frac{\mathcal{O}_{S,p}}{\mathcal{O}_S(-D)_p + \mathcal{O}_S(-C)} = \frac{\mathcal{O}_{S,p}}{(f,g)}.$$

Uma vez que se $D \sim D'$ tem-se $\mathcal{O}_S(D) = \mathcal{O}_S(D')$, concluimos que $\sum_{p\in C\cap D} (C \cdot D)_p$ não depende de D em si, mas sim de sua classe. Analogamente, trocando D por C e assumindo C e D suaves, $\sum_{p\in C\cap D} (C \cdot D)_p$ só depende das classes de C e D em $\operatorname{Pic} S$. Fica então provada a proposição a seguir.

Proposição 4.1. *Seja S uma superfície. Dadas uma curva irredutível e lisa $C \subset S$ e uma curva $D \subset S$ que não contém C, então*

$$\deg(\mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{O}_C) = h^0(\mathcal{O}_{C\cap D}) = \sum_{p\in C\cap D} (C \cdot D)_p.$$

Agora, começamos uma construção em direção à definição da foma bilinear simétrica 4.2. Inicialmente definimos para o cone $\mathfrak{A}$ de Pic correspondente às classes dos divisores muito amplos.

Sejam C e D divisores muito amplos. Pelo Teorema de Bertini, existem curvas lisas irredutíveis distintas, $C' \in |C|$ e $D' \in |D|$. Definimos

$$C \cdot D := \sum_{p\in C'\cap D'} (C' \cdot D')_p = \deg(\mathcal{O}_S(D') \otimes \mathcal{O}_{C'}) = \deg(\mathcal{O}_S(C') \otimes \mathcal{O}_{D'}).$$

Vimos que $C \cdot D$ está bem definida, isto é, não depende do representante da classe de C ou de D.

$\mathfrak{A} \times \mathfrak{A} \to \mathbb{Z}$ é uma forma simétrica satisfazendo

$$h^0(C \cap D) = \deg(\mathcal{O}_S(D') \otimes \mathcal{O}_{C'}) = \deg(\mathcal{O}_S(C') \otimes \mathcal{O}_{D'}).$$

Basta observar as seguintes sequências exatas

$$0 \to \mathcal{O}_S(-D) \otimes \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_C \to \mathcal{O}_{C\cap D} \to 0$$

$$0 \to \mathcal{O}_S(-C) \otimes \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_D \to \mathcal{O}_{D\cap C} \to 0.$$

Além disso é bilinear pois

$$\mathcal{O}_S(D + D') \cong \mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{O}_S(D')$$

e o grau de um divisor é aditivo.

Agora passamos para o caso mais geral. Considere C e D divisores quaisquer de S.

Lema 4.1. *Seja D um divisor de S. Então existem divisores muito amplos D' e D'' tais que $D = D' - D''$.*

Pelo Lema, existem divisores C', D', D' e D'' muito amplos tais que $C = C' - C''$ e $D = D' - D''$. Assim, definimos

$$C \cdot D := C' \cdot D' - C' \cdot D'' - C'' \cdot D' + C'' \cdot D''.$$

Vejamos que isso está bem definido. Sejam A' e A'' divisores muito amplos tais que $C \equiv A' - A''$. Por hipótese, $A' + C'' \sim A'' + C'$. Assim, como já definimos a interseção para divisores muito amplos, tem-se que

$$\begin{cases} (A' + C'') \cdot D' = & (A'' + C') \cdot D'; \\ (A' + C'') \cdot D'' = & (A'' + C') \cdot D''. \end{cases}$$

Logo,

$$\begin{aligned} C \cdot D &:= C' \cdot D' - C'' \cdot D' - C' \cdot D'' + C'' \cdot D'' \\ &= \deg(\mathcal{O}_S(C' \otimes \mathcal{O}_{D'}) - \deg(\mathcal{O}_S(C'') \otimes \mathcal{O}_{D'}) \\ &\quad - \deg(\mathcal{O}_S(C') \otimes \mathcal{O}_{D''}) + \deg(\mathcal{O}_S(C'') \otimes \mathcal{O}_{D''}) \\ &= \textstyle\sum_{p\in C\cap D} (C \cdot D)_p \end{aligned}$$

e, portanto, a forma bilinear em 4.2 está bem definida, assim como a definição a seguir.

Definição 4.2. *Se C e D são curvas sem componentes em comum então*

$$(C \cdot D) = \sum_{p\in C\cap D} (C \cdot D)_p$$

Se C é uma curva lisa irredutível e D é um divisor de S, então

$$(C \cdot D) = \deg(\mathcal{O}_S(D) \otimes \mathcal{O}_C).$$

Seja D um divisor de S, denotamos $D^2 := D \cdot D$. Seja $C \subset S$ curva irredutível lisa, calcularemos C^2. Como anteriormente, podemos escrever $C^2 = \deg(\mathcal{O}_S(C) \otimes \mathcal{O}_C)$, temos

$$(\mathcal{O}_S(C) \otimes \mathcal{O}_C)^\vee = \mathcal{O}_S(-C) \otimes \mathcal{O}_C = \mathcal{J}_C/\mathcal{J}_C^2 = (N_{C/S})^\vee.$$

Logo, $C^2 = \deg N_{C/S}$.

Exemplo 4.1. *Considere $S = \mathbb{P}^2$. Neste caso,* $\operatorname{Pic}\mathbb{P}^2 = \mathbb{Z}.h$*, onde h é a classe de uma reta em $\mathbb{P}^2$. Portanto, h^2 determina a teoria de interseção em $\mathbb{P}^2$.*

Observe que $h^2 = 1$, a interseção transversal de duas retas.

Definição 4.3. *O **grau** de uma variedade X mergulhada em $\mathbb{P}^n$ é o número de pontos na interseção da variedade X com o hiperplano genérico de dimensão complementar.*

Teorema 4.1 (Bézout)**.** *Sejam C e D curvas em $\mathbb{P}^2$ de grau n e m respectivamente. Então $(C \cdot D) = nm$.*

Demonstração. Considere $C \sim n.h$ e $D \sim m.h$. Uma vez que $\operatorname{Pic}\mathbb{P}^2 = \mathbb{Z}$, toda curva de grau d é linearmente equivalente a d vezes uma reta. Assim,

$$(C \cdot D) = nm.h^2 = nm.$$

□

Aplicação 4.1 (Classe de uma curva lisa em $\mathbb{P}^2$)**.** *Seja C uma curva irredutível e lisa em $\mathbb{P}^2$. Definimos a curva dual de C por*

$$C^\vee = \{\textit{retas em } \mathbb{P}^n \textit{ tangentes a } C\} \subset (\mathbb{P}^2)^\vee.$$

Suponha que $\deg C = n$*. Qual é o grau de $C^\vee$? Tal número é dito a **classe de** C.*

Tomando uma reta l em $(\mathbb{P}^2)^\vee$, temos

$$(l.C^\vee) = \deg C^\vee.$$

Se l forma uma reta geral em $(\mathbb{P}^2)^\vee$, então l e $C^\vee$ se intersectam transversalmente e, além disso,

$$(l.C^\vee) = \#\{l \cap C^\vee\}.$$

Dada uma reta geral l em $(\mathbb{P}^2)^\vee$, existe $Q \in \mathbb{P}^2$ tal que l é igual ao conjunto l_Q das retas em $\mathbb{P}^2$ passando por Q.

Suponha que $\operatorname{char} k = 0$*. Seja Q um ponto geral em $\mathbb{P}^2$, $Q = (a : b : c)$. Seja $f(x, y, z)$ o polinômio homogêneo que define C,* $\deg(f) = n$*. Dessa forma,*

$$f_Q := a\frac{\partial f}{\partial x} + b\frac{\partial f}{\partial y} + c\frac{\partial f}{\partial z},$$

f_Q tem grau $n-1$. Considere C_Q a curva polar dada por f_Q. Tome $p \in C$, a reta tangente a C em p passa por Q se, e somente se, $p \in C_Q$. Se p não for ponto de inflexão de C, então C e C_Q se intersectam transversalmente em p. Observe que o conjunto dos pontos de inflexão de C é finito. Tome $Q \notin C$. Se Q é geral, então o número de retas tangentes a C passando por Q é $C \cdot C_Q = n(n-1)$. Concluímos que

$$\deg C^\vee = n(n-1).$$

Definição 4.4. *Uma curva C em uma superfície S é dita **curva excepcional do tipo** -1 ou apenas **do tipo** -1 se $C \cong \mathbb{P}^1$ e $C^2 = -1$.*

5 UM POUCO SOBRE A GEOMETRIA BIRRACIONAL DE SUPERFÍCIES

Neste capítulo definimos o blow-up de uma superfície em um ponto e apresentamos alguns resultados sobre a geometria birracional de superfícies, como a propriedade universal de blowing-up.

Definição 5.1. *Sejam X e Y variedades com X irredutível. Um mapa* ***racional*** *$\phi : X \dashrightarrow Y$ é uma classe de equivalência de um par (U, f) onde $U \subseteq X$ é um aberto não-vazio, $f_U : U \to Y$ é um morfismo e a relação de equivalência é dada por*

$$(U, f_U) \sim (V, g_V) \Leftrightarrow f_U|_{U\cap V} = g_V|_{U\cap V}.$$

Definição 5.2. *Um mapa racional $f : X \dashrightarrow Y$ é dito* ***birracional*** *se existe um mapa racional $g : Y \dashrightarrow X$ tal que $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ e $g \circ f = \mathrm{id}_X$. Neste caso X e Y são ditas* ***birracionais****.*

Definição 5.3. *Uma variedade é dita* ***racional*** *se é birracional ao espaço projetivo.*

5.1 Blow-up

Nesta seção definimos o blow-up de $\mathbb{A}^2$ centrado na origem. A grosso modo, o que obtém-se deste processo é $\mathbb{A}^2$ inalterado fora da origem enquanto $p = (0, 0)$ é substituído por uma cópia de $\mathbb{P}^1$ (um conjunto de retas passando por p).

Considere o espaço afim $\mathbb{A}^2$, com coordenadas afins x, y, e o espaço projetivo $\mathbb{P}^1$, com coordenadas homogêneas s, t. Defina

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{A}^2 - p & \to & \mathbb{P}^1 \\ (x, y) & \mapsto & (x : y) \end{array} ,$$

onde $p = (0, 0)$, e Γ o fecho do gráfico de f em $\mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$. Considere a subvariedade fechada $\mathrm{B}_p\mathbb{A}^2 \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ definida pelas equações

$$xt = sy.$$

Agora, defina o mapa

$$\begin{array}{rcl} \pi : \quad \mathrm{B}_p\mathbb{A}^2 & \to & \mathbb{A}^2 \\ (x, y) \times (s : t) & \mapsto & (x, y) \end{array}$$

tal que $E := \pi^{-1}(p) \cong \mathbb{P}^1$ e $\mathrm{B}_p\mathbb{A}^2 = \Gamma$.

Definição 5.4. *O mapa*

$$\begin{array}{rccl} \pi : & B_p\mathbb{A}^2 & \to & \mathbb{A}^2 \\ & (x,y)\times(s:t) & \mapsto & (x,y) \end{array}$$

*é dito o **blow-up** de $\mathbb{A}^2$ centrado em p e $E := \pi^{-1}(p)$ é dita a **curva excepcional** do blow-up.*

Note que π é um isomorfismo quando restrito a $\mathrm{B}_p\mathbb{A}^2 - \pi^{-1}(p)$.

Agora passamos ao caso do blow-up em superfícies lisas. Aqui, temos como propósito resolver sigularidades em curvas dessas superfícies.

Sejam S uma superfície lisa e $p \in S$. Sejam U um aberto afim contendo p e $x, y \in \mathcal{O}_S(U)$ coordenadas locais em p. Diminua U, caso necessário, de forma que

$$\{x = 0\} \cap \{y = 0\} = p,$$

onde x e y são as classes de X e de Y, respectivamente, em $\mathcal{O}_S(U) = \dfrac{k[X,Y]}{I}$.

Definimos $\mathrm{B}_pU := V(xt - sy) \subseteq U \times \mathbb{P}^1$. Valem as seguintes afirmações:

1. $\begin{array}{rccl} \pi : & \mathrm{B}_pU & \to & U \\ & (x,y)\times(s:t) & \mapsto & (x,y) \end{array}$ é morfismo.

2. $\pi|_{B_pU-\pi^{-1}(p)}$ é isomorfismo.

3. $\pi^{-1}(p) \cong \{p\} \times \mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1$ é um fechado de codimensão 1 em U.

Defina

$$V_0 = \{(s:t) \in \mathbb{P}^1 | s \neq 0\} \cong V \times \mathbb{A}^1 \subseteq U \times \mathbb{P}^1 \quad \text{e} \quad y' = t/s.$$

Assim $\mathrm{B}_pU \cap U_0 = V(y - y'x)$, lisa.

B_pS, o blow-up de S em p, é definido colando-se B_pU e $S - p$ ao longo de $\mathrm{B}_pU - E \cong U - \{p\}$, como enunciado na definição a seguir.

Definição 5.5. *Sejam S uma superfície e $p \in S$, o **blow-up** de S em p é o morfismo próprio*

$$\pi : B_pU \to S$$

tal que

$$\pi|_{B_pS-E} : B_pS - E \longrightarrow S - \{p\}$$

*é isomorfismo e $E := \pi^{-1}(p)$ é isomorfa a $\mathbb{P}^1$, dita **curva excepcional** do blow-up.*

O blow-up não depende da escolha de coordenadas locais.

Definição 5.6. *Seja C um divisor efetivo em S com $p \in C$; localmente $C = (f)$, com $f(x, y)$ uma função regular, onde x, y são coordenadas locais tais que $p = (0, 0)$. Consideramos a série de Taylor de f em uma vizinhança de p:*

$$f = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \cdots ,$$

*onde $f_j \in k[x, y]_j, \forall j$, e $f_m \not\equiv 0$. Neste caso definimos a **multiplicidade** de C em p como sendo igual a m.*

Seja $C \subseteq S$ uma curva irredutível e reduzida e considere $p \in C$. Denote

$$\widetilde{C} := \overline{\pi^{-1}(C\backslash\{p\})} \subseteq \mathrm{B}_p S.$$

$\widetilde{C}$ é uma curva irredutível em S, dita **transformada estrita** de C. Note que $\pi^{-1}(C) = \widetilde{C} \cup E$.

Afirmação 1. *Se $C \subseteq S$ é uma curva irredutivel e reduzida que passa por um ponto p da superfície S com multiplicidade m e $\pi : B_p S \to S$, então $\pi^* C = \widetilde{C} + mE$.*

Queremos comparar $\widetilde{C}$ e $\pi^* C$ como divisores em $\mathrm{Pic}(\mathrm{B}_p S)$. Temos que

$$\pi|_{B_p S - E} : \mathrm{B}_p S - E \longrightarrow S - \{p\}$$

é isomorfismo e, portanto,

$$\widetilde{C}|_{B_p S-E} = \pi^* C|_{B_p S-E}.$$

Então $\pi^* C = \widetilde{C} + \alpha E$, para algum $\alpha \in \mathbb{Z}$. Queremos mostrar que $\alpha = m$. Assuma que $C = (f)$, para alguma função regular $f(x, y)$, onde x, y são coordenadas locais tais que $p = (0, 0)$. Então, em uma vizinhança de p:

$$f = f_m(x, y) + f_{m+1}(x, y) + \cdots ,$$

onde $f_j \in k[x, y]_j, \forall j$, e $f_m \not\equiv 0$. Em uma vizinhança de $q \in E$ com $t_1(q) = 0$, temos coordenadas locais y, t e $x = yt$ então

$$\begin{aligned} \pi^* &= f_m(yt, y) + f_{m+1}(yt, y) + \cdots \\ &= y^m f_m(t, 1) + y^{m+1} f_{m+1}(t, 1) + \cdots \\ &= y^m \left[f_m(t, 1) + y f_{m+1}(t, 1) + \cdots\right]. \end{aligned}$$

Uma vez que $\pi^* f$ se anula com multiplicidade m em $E = (y)$, temos que $\alpha = m$.

Observação 5.1. *Se $\varphi : X \to Y$ é um isomorfismo, então $\mathrm{Pic}(X) \cong \mathrm{Pic}(Y)$. O isomorfismo entre os grupos de Picard é definido por $\varphi* : P \to \varphi^{-1}(P)$, onde P é primo de Y.*

Definição 5.7. *Sejam S e S' superfícies e $\pi : S \to S'$ um morfismo sobrejetivo. Seja $D \subseteq S$ um divisor e suponha que $D = C \subseteq S$ é uma curva irredutível, isto é, D é um divisor primo.*

$$\pi_* C = \begin{cases} 0, & \text{se } \pi(C) \text{ é um ponto;} \\ d\pi(C), & \text{se } \pi(C) \text{ é uma curva e } \pi|_C : C \to \pi(C) \text{ é um morfismo} \\ & \text{finito de grau } d \text{ (recobrimento finito).} \end{cases}$$

No caso do blow-up, para $C \neq E$, temos

$$\pi_* E = 0 \quad \text{e} \quad \pi_* C = \pi(C).$$

A seguir apresentamos algumas pripriedades do Grupo de Picard de um blow-up.

Teorema 5.1. *Usando a notação já estabelecida anteriormente nesta seção, vale que*

1. *o mapa*
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \operatorname{Pic} S \oplus \mathbb{Z} & \to & \operatorname{Pic} B_p S \\ & (D, m) & \mapsto & \pi^* D + mE \end{array}$$
é isomorfismo de grupos;

2. $\pi^* D \cdot \pi^* D' = D \cdot D'$;

3. $\pi^* D \cdot E = 0$;

4. $E^2 = -1$.

Demonstração. 1. Uma vez que $\operatorname{Pic} B_p S$ é gerado por curvas irredutíveis, para mostrar que φ é sobrejetivo é suficiente provar que a imagem contém toda curva irredutível $C \neq E$. Se $\pi_* C$ tem multiplicidade m em p, tem-se que

$$\pi^*(\pi_* C) = C + mE.$$

Então $(\pi_* C, -m) \mapsto C + mE - mE = C$.

Para a injetividade, suponha $\pi^* C + nE = 0$. Logo,

$$0 = E(\pi^* C + nE) = 0 - n \Rightarrow n = 0.$$

Assim, $\pi^* C \equiv 0$, logo $C = \pi_* \pi^* C = \pi_* 0 = 0$.

2. π é isomorfismo quando restrito a $B_p S - E$, logo para divisores diversos de E a igualdade é válida.

3. Segue do Teorema de Serre e do Teorema de Bertini que todo divisor é linearmente equivalente a um divisor que corresponde apenas a curvas lisas irredutíveis que não passam por p. Logo $\pi^* D \cdot E = 0$.

4. Seja $C \subseteq S$ uma curva que passa por p com multiplicidade 1. Então E e $\widetilde{C}$ se intersectam transversalmente em um único ponto. Assim,

$$\pi^*C = \widetilde{C} + E \;\Rightarrow\; E = \pi^*C - \widetilde{C}.$$

Portanto,

$$E \cdot E = E \cdot (\pi^*C - \widetilde{C}) = E \cdot \pi^*C = E \cdot \widetilde{C} = 0 - 1 = -1.$$

□

O item 4 do teorema acima traduz a propriedade de rigidez de E: a não-existência de um outro divisor efetivo linearmente equivalente a E. De fato, suponha que $\sum a_i D_i \sim E$, com $a_1 > 0$, para todo i, então

$$0 > -1 = E^2 = E \cdot (\sum a_i D_i) = \sum a_i E \cdot D_i.$$

Logo, uma vez que se $D_i \neq E$ então $D_i \geq 0$, existe i tal que $D_i = E$. Assim, $\sum a_i D_i - E$ é um divisor efetivo e principal. Como as variedades aqui tratadas são compactas, $\deg(\sum a_i D_i - E) = 0$ pois é principal, e $\sum a_i D_i - E = 0$ pois é efetivo. Portanto, $E = \sum a_i D_i$.

5.1.1 Cartas Locais do Blow-up

Aqui estabelecemos a notação que será utilizada mais a frente no texto para as coordenadas locais do blow-up de uma superfície em um de seus pontos. Sejam S uma superfície e $p \in S$. Considere x, y as coordenadas locais em p, isto é, $x, y \in \mathcal{O}_{S,p}$ e $(x, y) = \mathfrak{m}_p$. Em particular $x \in \mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_p^2$.

Notação. Se $t \in \mathfrak{m}_p - \mathfrak{m}_p^2$, então dizemos que t é uma coordenada local de S em p.

Considere $\mathbb{P}^1$ com coordenadas $(s : t)$ e um aberto U contendo p tal que

- $x, y \in \mathcal{O}_S(U)$,
- $(x = 0) \cap (y = 0) = \{p\}$.

E agora considere o blow-up de U em p, $\pi : B_pU \to U$, com $B_pU = (xt = ys) \subset U \times \mathbb{P}^1$. Denotamos $\pi_* x$ e $\pi_* y$ em B_pU pelas letras x e y respectivamente.

Seja $V = (s \neq 0) \subseteq U \times \mathbb{P}^1$. Considere $y' = t/s$ em V. Temos $B_pS \cap V = (y = y'x)$ e $E \cap V = (x = 0)$. Seja $\xi \in E \cap V$. Então π^*x é uma coordenada local de B_pU em ξ.

Agora, devemos verificar para o ponto $\xi = (0 : 1) \in E \cong \mathbb{P}^1_{(s:t)}$. Seja $W = (t \neq 0) \subset U \times \mathbb{P}^1$. Seja $x' = s/t$ em W. Assim,

$$B_pU \cap W = (x = x'y) \quad \text{e} \quad E \cap W = (y = 0).$$

No ponto ξ temos coordenadas locais x' e y. De fato, $x'(\xi) = 0 = \pi^* y(\xi)$ e assim $\pi^* x = x'\pi^* y \in \mathfrak{m}_\xi^2$.

Seja $z \in \mathfrak{m}_p$ coordenada local de S em p. Então $z = ux + vy$, onde $u, v \in \mathcal{O}_{S,p}$ e $(u(p), v(p)) \neq (0,0)$. Então, para todo $\xi \in E - (u(p)s + v(p)t \neq 0)$, $\pi^* z$ é coordenada local de $B_p S$ em ξ. Se $\xi = (-v(p) : u(p))$, então $\pi^* z \in \mathfrak{m}_\xi^2$.

5.2 Aplicações Racionais e Sistemas Lineares

Neste seção discutimos algumas relações entre aplicações racionais e sistemas lineares.

Todo morfismo de uma superfície S para um espaço projetivo é da forma

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S & \to & \mathbb{P}^N \\ & q & \mapsto & (s_0(q) : \cdots : s_N(q)), \end{array}$$

onde $\{s_0, \ldots, s_N\}$ são seções de $H^0(S, \mathcal{O}_S(\varphi^* H))$, para um certo hiperplano H do espaço projetivo $\mathbb{P}^N$, de forma que tais seções não se anulem em um ponto em comum. Isto implica que o sistema linear $|\varphi^* H|$ não possui pontos de base.

Dada uma superfície S, existe uma bijeção entre os sistemas lineares em S de dimensão (projetiva) n e as aplicações racionais $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$, tais que $\varphi(S)$ é não-degenerada, quocientadas por $\mathrm{Aut}(\mathbb{P}^n)$.

De fato, seja $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ e considere o sistema linear completo de $\mathbb{P}^n$, $|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|$. Definimos o sistema linear

$$\Sigma = \varphi^* |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)| := \overline{(\varphi|_{S-\Delta})^* |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(1)|}.$$

O pullback preserva a dimensão, dessa forma $\dim \Sigma = \dim |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(1)}| = n$. Devemos agora mostrar que Σ não possui componentes de base.

Seja $x \in S - \Delta$, $\varphi(x) \in \mathbb{P}^n$, existe um hiperplano $H \subseteq \mathbb{P}^n$, $H \in |\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n(1)}|$, tal que $\varphi(x) \neq H$ e x não pertence ao suporte de $\varphi^* H$. Portanto Σ é móvel.

Agora, seja $\Sigma = \mathbb{P}(V)$, onde $V \subseteq H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ é um subespaço linear de dimensão $n+1$. Sejam $\{s_0, \ldots, s_n\}$ uma base de V. Definimos

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & S & \dashrightarrow & \mathbb{P}^n \\ & x & \mapsto & (s_0(x) : \cdots : s_n(x)). \end{array}$$

Dado $i \in \{o, \ldots, n\}$, definimos $W_i = (x_i \neq 0), U_i = (s_i \neq 0)$. Assim,

$$\begin{array}{rccl} \varphi|_{U_i} : & S & \to & W_i \cong \mathbb{A}^n \\ & x & \mapsto & (\frac{s_0}{s_i}(x), \ldots, \frac{s_n}{s_i}(x)). \end{array}$$

Podemos colar $\varphi|_{U_i}$ e $\varphi|_{U_j}$ em $U_i \cap U_j$, obtendo uma aplicação racional $\varphi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$.

Observe que se escolhendo outra base para V obtem-se um automorfismo de $\mathbb{P}^n$. Como $\{s_0, \ldots, s_n\}$ é uma base de V temos que $\varphi(S)$ é não-degenerado.

Exemplo 5.1. *O sistema linear em $B_p\mathbb{P}^2$, $p = (0:0:1)$, associado a $\pi : B_p\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$ é $\Sigma = |\pi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(1)|$. Σ não possui pontos de base, pois sempre existe um hiperplano em $\mathbb{P}^2$ evitando um ponto de $\mathbb{P}^2$. Além disso, $|\Sigma - E|$ é um sistema linear muito amplo em $B_p\mathbb{P}^2$. Geometricamente o que se faz é retirar uma cópia de E do pullback por f de cônicas em $\mathbb{P}^2$ que passam por p.*

Seja

$$\begin{array}{cccc} g: & \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow & \mathbb{P}^1 \\ & (x:y:z) & \mapsto & (x:y). \end{array}$$

Considere o sistema linear

$$\Sigma_1 = \varphi^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)| \subseteq |\varphi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1)|,$$

que corresponde as retas em $\mathbb{P}^2$ que passam por p. Dessa forma, a componente de base de Σ_1 é $B(\Sigma_1) = \{p\}$. Temos que,

$$\begin{aligned} \pi^*\Sigma_1 &= \{\pi^* l \ \mid \ l \subset \mathbb{P}^2 \text{ é uma reta que passa por } p\} \\ &= \{\widetilde{l} + E \ \mid \ l \subset \mathbb{P}^2 \text{ é uma reta que passa por } p\}. \end{aligned}$$

e

$$\widetilde{\Sigma_1} = \pi^*\Sigma - E = \{\widetilde{l} \ \mid \ l \subset \mathbb{P}^2 \text{ é uma reta que passa por } p\}.$$

Logo, $\widetilde{\Sigma_1}$ é livre. Além disso o mapa $\phi : B_p\mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^1$ é induzido por $\widetilde{\Sigma_1}$. Observa-se que $\phi = \varphi \circ \pi$.

Agora, sejam $S \subseteq \mathbb{P}^5$ uma superfície, $f : B_p\mathbb{P}^2 \to S$ e $p \in S$. Sejam $(x_0 : x_1 : x_2)$ as coordenadas de $\mathbb{P}^2$. O diagrama abaixo é comutativo

$$\begin{tikzcd} B_0\mathbb{P}^2 \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & S \subseteq \mathbb{P}^5 \\ & \mathbb{P}^2 \arrow[ur, "\nu_2"'] & \end{tikzcd}$$

onde $\nu_2 : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ é o segundo mergulho de Veronese, assim $f = \nu_2 \circ \pi$. Dessa forma, temos

$$f^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^5}(1)|_S| = \pi^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)|.$$

Uma base $H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2))$ é

$$\{x_0^2, x_1^2, x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2, x_1x_2, x_2^2\}.$$

Por sua vez uma base para $\pi^*|\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(2)|$ é

$$\{\pi^*x_0^2, \pi^*x_1^2, \pi^*x_0x_1, \pi^*x_0x_2, \pi^*x_1x_2, \pi^*x_1x_2, \pi^*x_2^2\}.$$

Observe que a coordenada $\pi^*x_2^2$ não se anula em nenhum ponto da curva excepcional E, pois $x_2(0:0:1) \neq 0$. Observe também que podemos tomar as coordenadas locais de $p \in S$ como:

$$\frac{\pi^*x_0x_2}{\pi^*x_2^2} \ e \ \frac{\pi^*x_1x_2}{\pi^*x_2^2}.$$

Teorema 5.2 (Teorema da Resolução de Indeterminação). *Seja S uma superfície e $\phi : S \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ um mapa racional. Então existem uma superfície S', um morfismo $f : S' \to S$, que é uma composição de um número finito de blow-ups e um morfismo $f' : S' \to \mathbb{P}^n$ tal que $f' = \phi \circ f$.*

Demonstração. Seja Σ o sistema móvel associado a ϕ, $\Sigma \subseteq |D|$. Se $B(\Sigma)$ é vazio não há o que fazer, pois neste caso ϕ será um morfismo.

Seja então x um ponto de base de Σ, isto é, $x \in D$, para todo $D \in \Sigma$. Seja $f_1 : S_1 \to S$ o blow-up de S em x, sendo E_1 a curva excepcional deste blow up. Considere o sistema linear em S_1, $f^*\Sigma$. A componente de base de $f^*\Sigma$ é k_1E_1, E_1 com multiplicidade $k_1 \geq 1$. Considere o sistema linear móvel

$$\Sigma_1 := f_1^*\Sigma - k_1E_1 \subseteq |f_1^*D - k_1E_1|,$$

onde $D_1 := f_1^*D - k_1E_1$. Assim, Σ_1 induz $\phi_1 : S_1 \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ tal que $\phi_1 = \phi \circ f_1$. Se ϕ_1 é morfismo então o teorema está provado.

Caso contrário, repetimos o processo. Com isso, construímos então uma sequência $f_m : S_m \to S_{m-1}$ de blow-ups e sistemas lineares móveis $\Sigma_m \subset |D_m|$, onde $D_m := f_m^*D_{m-1} - k_mE_m$.

Este processo acaba. De fato, observe o invariante numérico

$$D_m^2 = D_{m-1}^2 - k_m^2 < D_{m-1}^2.$$

D_m está em um sistema móvel e $D_m^2 \geq 0$, para todo m. Portanto o processo acaba, provamos que D^2 é um limite superior para o número de blow-ups. Conseguimos assim, para um certo m, um sistema Σ_m sem pontos de base que define o morfismo $f' : S_m \to \mathbb{P}^n$ desejado.

□

5.3 Propriedade Universal de Blowing-up

Nesta seção discutiremos a propriedade universal de blowing-up. Estamos interessados no caso em que temos $\varphi : S \dashrightarrow \varphi(S)$ birracional e $\varphi(S)$ superfície lisa. Mostramos que φ é a composição de uma sequência de blow-ups de S com a inversa de uma sequência de blow-ups de $\varphi(S)$.

O lema a seguir nos dá uma caracterização dos pontos de indeterminação de uma transformação birracional de superfícies.

Lema 5.1. *Seja $\varphi : S \dashrightarrow S'$ uma transformação birracional de superfícies. Suponha que φ não está definida no ponto $p \in S$. Então existe uma curva $C \subset S'$ tal que $\varphi^{-1}(C) = p$.*

Demonstração. Considere o fecho $\Gamma \subset S \times S'$ do grafo de φ e as projeções $p_1 : \Gamma \to S$ e $p_1 : \Gamma \to S'$.

$$\begin{tikzcd} & \Gamma \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] & \\ S \arrow[rr, "\varphi"'] & & S' \end{tikzcd}$$

Mostrar que $p_1^{-1}(p)$ contém uma curva $C' \subset \Gamma$ implica que $p_2(C') \subseteq S'$ é uma curva cuja imagem por φ^{-1} é o ponto p.

Observe que p_1^{-1} não está definida em p. Além disso, existe um aberto $U \subset S$ contendo o ponto p tal que

- p é único ponto de indeterminação de p_1^{-1} em U.
- $p_1^{-1}(U)$ é um aberto afim.
- Podemos escrever
$$\begin{array}{rccc} p_1^{-1}: & U & \dashrightarrow & \Gamma^0 \subset \mathbb{A}^n \\ & q & \mapsto & (q_1(q), \ldots, q_n(q)) \end{array}$$
onde $q_1, \ldots, q_n$ são funções racionais.

Como p_1^{-1} não está definida em p, alguma das g_i's não é regular em p. Em $\mathcal{O}_{S,p}$ podemos escrever, sem perda de generalidade, $g_1 = u/v$, com u e v coprimos e $v(p) = 0$. Em Γ^0, $p_1^* g_1 = x_1$ implica $p_1^* u = x_1 p_1^* v$. Definimos $C := (p_1^* v = 0)$, mas em Γ^0, $p_1^* v = 0$ implica $p_1^* u = 0$. Logo, $C = (p_1^* v = 0) \cap (p_1^* u = 0))$, e mais ainda $C = p_1^{-1}((v = 0) \cup (u = 0))$. Como p é o único ponto de indeterminação de p_1 em U, podemos diminuir U de forma que $C = p_1^{-1}(p)$. $\square$

Observação 5.2. *Seja $f : S' \to S$ morfismo birracional e suponha que f^{-1} não está definida em $p \in S$. Segue do Lema 5.1 que $f^{-1}(p) = C$ é uma curva. Seja $q \in C$. Vamos mostrar que existe uma coordenada local t de S em p tal que $\pi^* t \in \mathfrak{m}_q^2$.*

Sejam x e y um sistema de coordenadas locais de S em p. Suponha que $f^* x \neq \mathfrak{m}_q^2$. Temos que $f^* x$ é uma equação local de C em q, pois $f^* x$ se anula em todo ponto de C. Portanto, $f^* y$ se anula em C, vale que $f^* y = u f^* x$, onde $x \in \mathcal{O}_{S',q}$.

Seja $t = y - u(q)x \in \mathfrak{m}_q - \mathfrak{m}_p^2$. Tem-se

$$f^* t = f^* y - u(q) f^* x = f^* x(u - u(q)) \in \mathfrak{m}_q^2,$$

uma vez que $f^* x, u - u(q) \in \mathfrak{m}_q$.

Teorema 5.3 (Propriedade Universal de Blowing-up)**.** *Sejam S e S' superfícies e $f : S' \dashrightarrow S$ um morfismo birracional. Suponha que o mapa rational $f^{-1} : S' \to S$*

não está definida para um certo $p \in S$. Seja $\pi : B_pS \to S$ o blow-up em p. Então $g = \pi^{-1} \circ f : S' \to B_pS$ é um morfismo birracional. O seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & B_pS \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd} .$$

Demonstração. Suponha, por absurdo, que $g = \pi^{-1} \circ f$ não está definida em um certo $q \in S'$. Sabemos pelo Lema 5.1 que existe uma curva $C \subset B_pS$ tal que $(g^{-1})(C) = q$. Segue que $(f \circ g^{-1}) = g(q)$, então $C = E$ e $f(q) = p$. Em consequência da Observação 4.2 sabemos que existe uma coordenada local t de S em p tal que $f^*t \in \mathfrak{m}_q^2$. Seja ξ um ponto de E onde g^{-1} está definida, então segue da análise feita na Subseção 4.1.1 que $\pi^*t \in \mathfrak{m}_\xi - \mathfrak{m}_\xi^2$. Por outro lado, $(g^{-1})f^*t \in \mathfrak{m}_\xi^2$. O que é um absurdo!

□

Corolário 5.1 (Teorema de Fibrações de Transformações Birracionais)**.** *Sejam S e S' superfícies, e seja $f : S \dashrightarrow S'$ uma transformação birracional. Então existe uma superfície $\widetilde{S}$ e um diagrama comutativo*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{S} \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\pi"'] & & S' \\ & S \arrow[ur, "f"'] & \end{tikzcd}$$

tal que π e φ são composições de blow-ups e isomorfismos.

Demonstração. Segue do Teorema da Resolução de Indeterminação que existe uma sequência de blow-ups $\pi : \widetilde{S} \to S$ tal que $\varphi = f \circ \pi : \widetilde{S} \to S'$ é um morfismo. Se a imagem inversa φ^{-1} é morfismo então φ é um isomorfismo e, neste caso, o corolário está provado.

Caso contrário, pela Propriedade Universal de Blowing-up, existe um blow-up $\pi_1 : S_1' \to S'$ tal que $\varphi_1 = \pi_1^{-1} \circ \varphi : \widetilde{S} \to S_1'$ é um morfismo. Se φ_1^{-1} é morfismo, então o corolário está provado. Caso contrário repetimos o processo novamente.

Vejamos que este processo termina. Seja n_i o número de curvas irredutíveis contraídas por φ_i. Afirmamos que $n_{i+1} < n_i$.

Se C é uma curva contraída por φ_{i+1} então C é contraída por φ_i o que implica que $n_{i+1} \leq n_i$, uma vez que o seguinte diagrama é comutativo

$$\begin{tikzcd} \widetilde{S} \arrow[rr, "\varphi_{i+1}"] \arrow[dr, "\varphi_i"'] & & S'_{i+1} = B_{p_i}S'_i \arrow[dl, "\pi_{i+1}"] \\ & S'_i & \end{tikzcd}$$

Seja $C = \varphi_{i+1}^{-1}(E)$, curva (redutível). Considere C' uma componente irredutível de C tal que $\varphi_{i+1}(C_1) = E_i$. Esta componente é contraída por φ_i mas não é contraída por φ_{i+1}. Logo $n_{i+1} < n_i$. Portanto o processo termina.

□

Seja $f : S' \dashrightarrow S$ um morfismo birracional de superfícies, e suponha que existe uma curva $C \subseteq S'$ tal que

- $f(C) = p \in S$;
- $f|_{S'-C}$ é um isomorfismo.

Então S' é isomorfa ao blow-up de S em p B_pS e C se contrai em p. De fato, temos o seguinte diagrama comutativo

$$\begin{tikzcd} S' \arrow[rr, "g"] \arrow[dr, "f"'] & & B_pS \arrow[dl, "\pi"] \\ & S & \end{tikzcd}$$

onde $\pi : B_pS \to S$ é o blow-up de S em p e $g : S' \to B_pS$ é o morfismo obtido pelo processo de blow-up apresentado na demonstração do resultado acima. O processo termina depois do primeiro blow-up pois C é a única curva contraída por f. Em particular, $C \cong \mathbb{P}^1$ e $C^2 = -1$.

Apresentamos agora a versão analítica da propriedade universal do blow-up, um resultado local.

Lema 5.2 (Propriedade Universal de Blowing-up, versão analítica)**.** *Sejam S uma superficie e $p \in S$. Suponha que o morfismo $f : B_pS \to \mathbb{P}^n$ contrai a curva excepcional do blow-up $\pi : B_pS \to S$. Então f se fatora por um morfismo $g : S \to \mathbb{P}^n$.*

Demonstração. Seja $g = f \circ \pi^{-1}$. Temos que g é racional e $g|_{S-\{p\}}$ é um morfismo, pois a aplicação π é um isomorfismo quando restrita a $S - \{p\}$. Agora devemos mostrar que g está definida no ponto p. Sabemos que f contrai a componente excepcional E a um ponto $q \in \mathbb{P}^n$. Podemos considerar um aberto U de S contendo p e $g : U \to \mathbb{A}^n$. Tomando projeções por pontos diferentes de q de forma que $g : U \to \mathbb{A}^n \to \mathbb{A}^1$ e diminuindo o aberto U de forma a obter um aberto $V \subseteq U$ que faça a aplicação racional $\widetilde{g} : V \to \mathbb{A}^1$ estar definida em todos os pontos de V com exceção, possivelmente, de p. Como uma função racional é regular em uma vizinhança de p exceto possivelmente em p ela tem que ser regular em p. □

6 TEOREMA DE CONTRATILIDADE DE CASTELNOUVO

Uma primeira prova para o teorema a seguir foi dada por Castelnouvo e Enriques, [C-E], em 1901.

Teorema 6.1 (Teorema de Contratilidade de Castelnouvo)**.** *Seja S uma superfície lisa projetiva e seja $C \subset S$ uma curva -1. Então existem uma superfície lisa S' e um ponto $P \in S'$ tais que $S \cong Bl_P S'$ e, via φ, C é a curva excepcional do blow up.*

Demonstração. A demonstração se dará mediante a construção de um sistema linear, Σ, sem pontos de base, cujo morfismo associado $\varphi : S \to \mathbb{P}^N$ satisfaz as seguintes condições

1. $\varphi|_{S-C} : S - C \to \varphi(S - C)$ é um isomorfismo e $\varphi(C) = P$,

2. $\varphi(S)$ é uma superfície lisa.

Passamos agora para a construção do morfismo φ. Seja H um divisor muito amplo em S tal que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H)) = 0$, isso pode ser assumido tomando-se um múltiplo de H adequado, de acordo com o Teorema 3.3 . Agora, tome $k := (H \cdot C) \geq 0$ e $H' := H + kC$. Assim, $(H' \cdot C) = 0$. Queremos mostrar que o mapa induzido pelo sistema $|H + kC|$ é um blow-up cujo divisor excepcional é C.

Fixe uma seção s de $\mathcal{O}_S(C)$ que se anula ao longo de C. Considere a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_S(-C) \xrightarrow{\cdot s} \mathcal{O}_S \longrightarrow \mathcal{O}_C \longrightarrow 0,$$

onde "$\cdot s$" significa a multiplicação pela seção s. Agora, tomando a torção dessa sequência por $H + iC$, com $1 \leq i \leq k$, e observando que $C \cong \mathbb{P}^1$, $(H + iC) \cdot C = k - i$ implica $\mathcal{O}_C(H + iC) \cong \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k - i)$, tem-se

$$0 \to \mathcal{O}_S(H + (i-1)C) \to \mathcal{O}_S(H + iC) \to \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k - i) \to 0.$$

Pela Dualidade de Serre, $H^1(C, \mathcal{O}_C(H + iC)) = 0$, uma vez que $k - i \geq 0$. Tomando a sequência exata longa de cohomologia obtem-se, para $1 \leq i \leq k$,

$$0 \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(H + (i-1)C)) \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(H + iC)) \xrightarrow{\cdot r_i} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k - i)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(H + (i-1)C)) \xrightarrow{\cdot s} H^1(S, \mathcal{O}_S(H + iC)) \longrightarrow 0.$$

Quando $i = 1$,

$$0 \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(H)) \xrightarrow{\cdot s} H^0(S, \mathcal{O}_S(H + C)) \xrightarrow{\cdot r_1} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k - 1)) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H^1(S, \mathcal{O}_S(H)) \xrightarrow{\cdot s} H^1(S, \mathcal{O}_S(H + C)) \longrightarrow 0.$$

Observa-se que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H) = 0$. Implicando, neste caso, que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H+C)) = 0$ e que r_1 é sobrejetivo. Por indução em i, tem-se que $H^1(S, \mathcal{O}_S(H+iC)) = 0$ e r_i é sobrejetivo para todo $1 \leq i \leq k$. Logo, obtemos uma sequência exata curta

$$0 \longrightarrow H^0(S, \mathcal{O}_S(H+(i-1)C)) \xrightarrow{\cdot s} H^0(S, \mathcal{O}_S(H+iC)) \xrightarrow{\cdot r_i} H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-i)) \longrightarrow 0.$$

Portanto, é possível construir indutivamente todas as seções globais de $H^0(S, \mathcal{O}_S(\mathcal{O}(H'))$.

Sejam $s^0, s^1, \ldots, s^n$ uma base de $H^0(S, \mathcal{O}(H))$. Para cada $1 \leq i \leq k$, $s_{i,0}, \ldots, s_{i,k-i} \in H^0(S, \mathcal{O}(H+iC))$ são escolhidos de forma que $\{r_i(s_{i,j})\}_{0 \leq j \leq k-i}$ seja uma base de $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(k-i))$, o que é possível pois r_i é sobrejetivo para todo $0 \leq i \leq k$. Então

$$\{s^k s_0, s^k s_1, \ldots, s^k s_n, s^{k-1} s_{1,0}, \ldots, s^{k-1} s_{1,k-1}, \ldots, s s_{k-1,0}, s s_{k-1,1}, \ldots, s_{k,0}\}$$

é uma base para $H^0(S, \mathcal{O}(H'))$.

Seja $\varphi := \varphi_\Sigma : S \dashrightarrow \mathbb{P}^N$ o mapa racional definido pelo sistema linear $\Sigma = \mathbb{P}(H^0(S, \mathcal{O}_S(H')))$.

Afirmação 2. *Σ não possui ponto de base.*

De fato, $H^0(S, \mathcal{O}_S(H)) = \langle s^1, \ldots, s^n \rangle$ produz um mergulho de S em $\mathbb{P}^n$. Então φ define um mergulho quando restrito a $S - C = S - \{s = 0\}$ e se anula em C. Além disso, $(s_{k,0})|_C$ não se anula em nenhum ponto. Logo, nenhum ponto de C é ponto de base de Σ e, portanto, φ é morfismo.

Dado $\xi \in C$ tem-se que $\varphi(\xi) = (0 : 0 : \ldots : 1) = P_0$. Portanto, φ contrai C para o ponto P_0 e $\varphi|_{S-C}$ é um isomorfismo sobre sua imagem, provando assim a Condição 1. Definindo $S' := \varphi(S)$ tem-se que $S' - \{P\}$ é suave.

Provemos que P_0 é ponto regular de S'. Vamos supor que o corpo de base é $\mathbb{C}$ a partir de agora [1].

Seja U um aberto (analítico) de S definido por $s_{k,0} \neq 0$. U é vizinhança de C uma vez que $s_{k,0}$ não se anula em C. Sejam

$$x_1 = \frac{s_{k-1,0}}{s_{k,0}}, \quad x_2 = \frac{s_{k-1,1}}{s_{k,0}} \in H^0(U, \mathcal{O}_S(-C)),$$

vemos que $x_{1|_C}, x_{2|_C} \in H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$. Defina $f_1 = x_1 s$ e $f_2 = x_2 s$ funções em U; observa-se que f_1 e f_2 se anulam em C. Podemos diminuir, se necessário, o aberto U de forma que x_1 e x_2 não se anulem simultaneamente em U.

Definimos então

$$\begin{array}{rccc} f: & U & \to & \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1 \\ & q & \mapsto & (f_1(q), f_2(q); x_1 : x_2). \end{array}$$

[1] Uma prova para este teorema em um corpo algebricamente fechado qualquer pode ser encontrada em [H, Teorema 5.7, pag. 414].

Uma vez que $B_0(\mathbb{A}^2) = V(xv - yu) \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$ e, por definição, $f_1 x_2 = f_2 x_1$, tem-se que f se fatora pelo blow-up em 0. Seja $(y_1, \ldots, y_N)$ coordenadas de $\mathbb{A}^N$. Temos então $f_1 = \varphi^* y_{N-1}$ e $f_2 = \varphi^* y_N$. Portanto podemos definir $g : \varphi(U) \to \mathbb{A}^2$ por $(y_1, \ldots, y_N) \mapsto (y_{N-1}, y_N)$. Desta forma, o diagrama

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & B_0\mathbb{A}^2 \arrow[d, "\pi"] \\ \varphi(U) \arrow[r, "g"'] & \mathbb{A}^2 \end{tikzcd}$$

é comutativo.

Agora devemos mostrar que f é um isomorfismo em uma vizinhança analítica de E em U.

Afirmação 3. *$f|_C$ é isomorfismo sobre a sua imagem.*

Se $q \in C$ então $f_1(q) = f_2(q) = 0$. Além disso sabemos que x_1 e x_2 restritos a C formam uma base de $H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$. Portanto, uma vez que $\mathbb{P}^1 \cong \mathbb{P}^1 \times (0,0)$ é simplesmente conexo, temos que f induz o isomorfismo analítico sobre a sua imagem

$$E \xrightarrow{f} (0,0) \times \mathbb{P}^1.$$

Afirmação 4. *f é étale numa vizinhança de um ponto $q \in E$ qualquer.*

Seja $q \in C$. Temos que verificar que o pullback de um sistema de coordenadas locais de $B_0\mathbb{A}^2$ em $f(q)$ é um sistema de coordenadas locais de U em q. Podemos supor que $(x_1(q) : x_2(q)) = (0 : 1)$, assim $f(q) = (0, 0; 0 : 1) \in B_0\mathbb{A}^2$. Sabemos que $B_0(\mathbb{A}^2) = V(xv - yu) \subset \mathbb{A}^2_{(x,y)} \times \mathbb{P}^1_{(u:v)}$. No aberto onde $v \neq 0$, tomamos $x' = u/v$ e, neste caso, $B_0\mathbb{A}^2$ é dado por $(x = x'y) \subseteq \mathbb{A}^2_{(x,y)} \times \mathbb{A}^1_{(x')}$. Temos $\{x', y\}$ como um sistema de coordenadas locais de $B_0\mathbb{A}^2$ em $(0, 0; 0 : 1)$. Dessa forma, $f^*x' = x_1/x_2$ é coordenada local de E com ordem 1, e $f^*y = f_2 = s\frac{s_{k-1,1}}{s_{k,0}}$ onde f_2 se anula ao longo de E com ordem 1. Portanto, f^*x' e f^*y são coordenadas locais de U em q.

Afirmação 5. *g é um isomorfismo.*

A composição

$$B_0\mathbb{A}^2 \xrightarrow{f^{-1}} V \xrightarrow{\varphi} \varphi(V)$$

contrai C, logo, pela versão analítica da Propriedade Universal de Blowing, se fatora pelo morfismo $\psi : \mathbb{A}^2 \to \varphi(V)$. O diagrama

$$\begin{tikzcd} V \arrow[d, "\varphi"'] & B_0\mathbb{A}^2 \arrow[l, "f^{-1}"'] \arrow[d, "\pi"] \arrow[dl] \\ \varphi(V) & \mathbb{A}^2 \arrow[l, "\psi"] \end{tikzcd}$$

é comutativo. Logo $g^{-} = \psi$ e, portanto, g é isomorfismo.

Portanto $S' = \varphi(S)$ é suave em p. Provando assim o teorema. $\square$

A prova para o resultado acima apresentada em [H] usa a noção de funções formais e tem a vantagem de ser válida mesmo para corpos de característica positiva.

Problema 6.1. *Dados uma variedade X e um subconjunto fechado $F \subseteq X$, é possível determinar condições suficientes para garantir a existência de um morfismo birracional $f : X \to X'$ tal que $f(F)$ é igual a um ponto p, e $f : X - F \to X' - \{p\}$ é isomorfismo?*

O problema acima foi resolvido para diversos casos, porém ainda não se tem uma solução geral para ele. Ver [A1], [A2], [G] e [M].

No caso em que F é uma curva irredutível em uma superfície $X = S$, sabe-se que se X' é não singular, então é necessário e suficiente que $F \cong \mathbb{P}^1$ e $F^2 = -1$. Se permitimos que X' seja singular então uma condição necessária é que $F^2 < 0$. Uma condição suficiente é que $F \cong \mathbb{P}^1$. Se F é arbitrário, com $F^2 < 0$, e se o corpo de base é $\mathbb{C}$, então um teorema de Grauert, [G], mostra que X' existe como um espaço analítico. Contudo, F pode não ser contraído para uma variedade algébrica, ver [H, Exemplo 5.7.3, pág. 417].

REFERÊNCIAS

[A1] M. Artin, *Some numerical criteria for contractibility of curves on algebraic surfaces*, Amer. J. Math. 84, 485-496, 1962.

[A2] M. Artin, *Algebraization of formal moduli II: Existence of modifications*, Annals of Mathematics 91, 88-135, 1970.

[B] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, Cambridge University Press. 2 ed., London Mathematical Society Student Texts, 2008.

[C-E] G. Castelnouvo; F. Enriques *Sopra alcune questioni fondamentali nella teoria delle superficie algebriche*, Ann. di Mat. pura ed app., s. 3ª, 6, 1901.

[F] W. Fulton, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, New York, W. A. Benjamin,1969.

[G] H. Grauert, *Über Modifikationen und exzeptionelle analytische Mengen*, Math. Annalen 146, 331-368, 1962.

[H] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, New York-Heidelberg, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, 1977.

[L] Q. Liu, *Algebraic Geometry and Arithmetic Curves*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, vol.6, Oxford University Press, New York, 2015.

[M] D. Mumford, *The Topology of normal singularities of an algebraic surface and a criterion for simplicity*, Publ. Math. IHES 9, 5-22, 1961.

[R] M. Reid, *Chapters on Algebraic Surfaces*, University of Warwick. Mathematics Institute, 1996.

[S] J. P. Serre , *Faisceaux algébriques cohérents*, Ann. of Math. 61, 197-278, 1955.