

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-graduação em Matemática

Bryant Rosado Silva

PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DE HIPERESPAÇOS

Belo Horizonte
2023

Bryant Rosado Silva

PROPRIEDADES TOPOLÓGICAS DE HIPERESPAÇOS

Dissertação de Mestrado realizada no Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos à obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Rodney Josué Biezuner

Belo Horizonte
2023

Silva, Bryant Rosado.

S586p Propriedades topológicas de hiperespaços [recurso eletrônico] / Bryant Rosado Silva — 2023.
1 recurso online (207 f. il, color.): pdf.

Orientador: Rodney Josué Biezuner.

Dissertação (mestrado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática.

Referências: f. 203

1. Matemática – Teses. 2. Hiperespaço - Teses. 3. Topologia – Teses. 3. Espaços uniformes Teses. I. Biezuner, Rodney Josué. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática. III. Título.

CDU 51(043)



FOLHA DE APROVAÇÃO

Propriedades Topológicas de Hiperespaços

BRYANT ROSADO SILVA

Dissertação defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:

Rodney Josué Biezuner

Prof. Rodney Josué Biezuner
UFMG

Artur Hideyuki Tomita

Prof. Artur Hideyuki Tomita
USP

Hamilton Prado Bueno

Prof. Hamilton Prado Bueno
UFMG

Silas Luiz de Carvalho

Prof. Silas Luiz de Carvalho
UFMG

Belo Horizonte, 03 de julho de 2023.

Dedicatória

À minha avó Lourdes (in memoriam).
Pelo esforço, pelo amor e pelas boas memórias.

Agradecimentos

Ao fim dessa longa jornada eu só posso dizer que sou profundamente afortunado e tenho muito pelo que agradecer. Primeiramente, agradeço aos meus pais, pelos quais possuo profunda admiração. Débora e Wimerson, eu sei que cheguei até aqui porque vocês sempre me incentivaram a me dedicar e me esforçar, e abdicaram de muito para me propiciar as melhores oportunidades possíveis. A dedicação, garra, amor e força de vontade de vocês é inspiração para mim, e a presença, a fé em mim, a paciência comigo e o apoio foram incomensuráveis para que eu pudesse fazer tudo o que fiz até hoje.

Luz dos meus dias, eu agradeço à minha irmã Kimberly por sempre estar ao meu lado, com ternura e companheirismo. Agradeço por ter me suportado quando eu estava rabugento e estressado, por vir mexer em meus cabelos e me ajudar a acalmar. Você é um presente na minha vida.

Se existe uma palavra que associo ao meu orientador Rodney, é bênção. Ainda posso me recordar da primeira vez que estava um pouco cabisbaixo por não estar progredindo como queria, e o senhor me escreveu sobre Poincaré. Sempre me motivando e com paciência para responder os meus inúmeros e-mails, o tema da dissertação apareceu em nosso caminho e eu recebi um voto de confiança e tamanho apoio para segui-lo que nem posso acreditar. Agradeço por estar sempre presente e acreditar tanto em mim; por me ensinar matemática e muito mais; e por me dar tanta liberdade e ser tão compreensivo. Agradeço pela aventura no espaço e no tempo (e também na álgebra linear e geométrica, nos conjuntos e nas coleções de conjuntos).

Agradeço ao professor Victor Guerassimov, que me mostrou alguns resultados quando eu não sabia mais o que fazer. Ao professor Csaba Schneider, que contribuiu enormemente para meu amadurecimento como matemático e muito me incentivou. Ao professor Gustavo Barbagallo de Oliveira, que se dispôs a me orientar quando eu era apenas um aluno engatinhando no mundo da matemática. Ao professor Fabio Enrique Brochero Martinez, pela amizade, pelas conversas, pelo apoio e por me ensinar tanto sobre LaTeX. À professora Carmen Rosa Giraldo Vergara por confiar em mim; me apresentar tantas coisas legais sobre matemática; abrir portas e oportunidades que eu jamais poderia imaginar; e pela amizade, apoio, conversas e carinho.

Não posso deixar de agradecer aos vários amigos da matemática que conheci ao longo dos anos e tornaram tudo mais fácil, prazeroso e divertido. Alguns deles, como Leticia de Meira Figueiredo e Matheus Johnny Caetano, estão comigo desde o início da graduação, o que é motivo de enorme felicidade minha. Agradeço pela presença, por se importarem comigo e terem paciência de ouvir minhas reclamações e lamentos quando eu não estava bem, mas também por compartilhar inúmeros momentos felizes. Outros, me acolheram quando eu mudei da licenciatura para o bacharelado, como André Abreu Mendanha, Estêvão Ferraz Borel e Frederico Cançado Pereira. A cada um deles um agradecimento especial. Ao Frederico, que foi fundamental após a minha mudança e me ajudou tanto nesses anos. Ao André, que enfrentou comigo as dificuldades de formar na pandemia e lidar com a burocracia para formar, o que nos aproximou, e depois estudar para o exame de qualificação juntos. Que possamos ter muitas conversas profundas sobre matemática e a vida. Ao Estêvão, que sempre me ajudou e me incentivou, especialmente nesse fim de mestrado. Ao Vinícius Pinheiro Bento, agradeço pelas discussões e ajuda. Ao Frederico Antonio Coutinho Lacerda Marinho, agradeço por compartilhar o entusiasmo e pelas boas discussões. Ao Cyro Barros Murgulo, um enorme obrigado pelo apoio e por compartilhar muitos desesperos do mestrado, das disciplinas e do exame de qualificação, além das inúmeras discussões que ocorriam ainda quando estávamos na graduação e estudávamos temas relacionados sob orientação do Rodney.

Existem aqueles que eu já conhecia, mas que o mestrado tornou mais próximo, como Matheus Resende Guedes e Wendell Henrique Cunha Claudino. Agradeço pela companhia e em especial ao Wendell pelo livro de topologia, o qual cheguei a usar para esta dissertação. Por fim, existem os amigos que o mestrado trouxe, como Jayden Julian Bejarano Gonzalez, Leonardo Silva de Oliveira e Mesek Felipe de Souza. Ao Julian, muito obrigado por sempre querer conversar comigo, compartilhar as nossas histórias, a troca de cultura, de matemática, e nossas conversas profundas sobre a vida. Ao Leonardo, que me ajudou com disciplinas, e sempre esteve presente para discutir e compartilhar matemática. Ao Mesek devo o agradecimento por uma amizade incrível, pelo apoio, pelos puxões de orelha, pelas ótimas conversas, desabafos e pela paciência e esforço em me ouvir falar repetidas vezes sobre a mesmo tema porque me empolgava.

Por fim, a todos os amigos mestrandos e doutorandos, pelos momentos incríveis (e alguns impagáveis) que vivenciamos. Mesmo quem eu não citei, vocês fizeram parte da minha história e deixaram suas marcas (positivas) nela.

Agradeço aos membros da banca pela disposição, compreensão e contribuição.

Agradeço às secretárias Andréa e Kelli, aos professores que fizeram parte da minha graduação e mestrado e aos funcionários da universidade que mantêm ela funcionando.

Agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro, sem o qual não chegaria a fazer nem uma parte ínfima do que fiz ou que pretendo fazer.

Por fim, gostaria de manifestar minha gratidão por ter sobrevivido à pandemia do COVID-19, mentalmente e fisicamente. Foi um período difícil, e que felizmente ficou para trás.

Resumo

A partir de um espaço topológico, podemos tomar a coleção de subconjuntos que satisfazem uma ou mais propriedades e dotá-la de uma topologia. Esta coleção com a topologia é chamada de hiperespaço. Nesta dissertação, buscamos discutir uma vasta gama de propriedades topológicas que hiperespaços podem satisfazer a depender das propriedades que o espaço satisfaz e vice-versa. Isto é feito para a topologia de Vietoris e a topologia uniforme no hiperespaço, que mostramos coincidir com a métrica de Hausdorff se o espaço base for métrico. Para isso, revisamos conceitos de Topologia Geral e discutimos acerca de espaços uniformes.

Palavras-chave: Hiperespaços, hipertopologias, topologia de Vietoris, topologia uniforme, métrica de Hausdorff, espaços uniformes.

Abstract

Given a topological space, one can take the collection of subsets satisfying one or more properties and equip this collection with a topology. As such, this collection is called a hyperspace. In this dissertation, we aim to discuss a wide range of topological properties that hyperspaces can satisfy depending on the properties the base space satisfies and vice versa. This is done for the Vietoris topology as well as for the uniform topology, which we show coincide with the Hausdorff metric when the space is metric. In order to be able to do it, we review concepts of General Topology and discuss the theory of uniform spaces.

Keywords: Hyperspaces, hypertopologies, Vietoris topology, uniform topology, Hausdorff metric, uniform spaces.

Sumário

Introdução	12
1 Revisão de Espaços Topológicos	14
1.1 Conceitos Iniciais	14
1.2 Redes, Filtros e Convergência	22
1.3 Continuidade	29
1.4 Axiomas de Separação	32
1.5 Compacidade	34
1.5.1 Compacidade e Outras Propriedades	40
1.6 Compacidade Local	46
1.7 Propriedades de Espaços Metrizáveis	47
1.8 Conexidade	51
1.9 Resultados Adicionais	53
2 Espaços Uniformes	55
2.1 Estruturas Uniformes	55
2.2 Espaços Métricos – Um Exemplo Simples	59
2.3 Topologia Uniforme	60
2.4 Grupos Topológicos – Mais um Exemplo	70
2.5 Coberturas Uniformes	74
2.6 Topologia Uniforme – Abordagem por Coberturas	82
3 Topologias em Coleções de Subconjuntos	89
3.1 As Duas Topologias em $[F(X), \mathfrak{U}]$	92
3.1.1 Cobertura Uniforme em $F(X)$	94
3.2 Admissibilidade	97
3.3 Propriedades da Topologia de Vietoris	99
3.4 Propriedades da Topologia Uniforme em $F(X)$	107
3.5 A Métrica de Hausdorff	109
3.6 Relações entre as Topologias Uniforme e de Vietoris em $F(X)$	114
3.7 Exemplos	118
3.8 Aplicação em Grupos Topológicos	124
4 Relacionando Propriedades de X e seus Hiperespaços	128
4.1 Relações Entre Propriedades de X , $F(X)$ e $\text{Comp}(X)$ com a Topologia de Vietoris	128
4.2 Relações Entre Propriedades de X , $F(X)$ e $\text{Comp}(X)$ com a Topologia Uniforme	140
4.3 Separação de $F(X)$ e $\text{Comp}(X)$ na Topologia de Vietoris	145
4.4 Conexidade de Hiperespaços na Topologia de Vietoris	152

5 Caminhos em Hiperespaços	159
5.1 Mais Propriedades da Topologia de Vietoris	159
5.2 Propriedades da Métrica de Hausdorff	164
5.3 Semirreticulados	165
5.4 Retratos	168
5.5 Hiperespaços e Semirreticulados	169
5.6 Conexidade por Caminhos na Topologia de Vietoris	173
5.7 Conexidade por Caminhos na Métrica de Hausdorff	176
5.7.1 Espaços Métricos Quase Convexos	182
5.7.2 C-conexidade	187
6 Prova Elementar da Conexidade por Caminhos de $(\text{Comp}(\mathbb{R}^n), h)$	193
6.1 Caminhos em $(\text{Comp}(\mathbb{R}^n, h))$	193
6.2 A Ideia da Demonstração	195
6.3 Demonstração	196
Índice Remissivo	204
Símbolos	207

Introdução

A teoria de hiperespaços surge com Felix Hausdorff e Leopold Vietoris no primeiro quarto do século XX. Em seu livro de 1914 intitulado *Grundzüge der Mengenlehre*, Hausdorff define uma métrica sobre a coleção de conjuntos fechados e limitados de um espaço métrico. Esta métrica seria chamada de métrica de Hausdorff posteriormente. Vietoris por sua vez, na busca por uma definição razoável de variedade, apresenta em seu artigo de 1922 *Bereiche zweiter Ordnung*, uma topologia na coleção de conjuntos fechados não vazios de um espaço topológico, hoje conhecida como topologia de Vietoris. Nos anos seguintes, os hiperespaços, essas coleções de conjuntos de um espaço topológico base que compartilham uma mesma propriedade, começaram a ser estudados, assim como novas topologias que possam ser definidas neles.

Um dos matemáticos que contribuíram para o desenvolvimento da teoria de hiperespaços foi Ernest Michael. Em 1951, é publicado seu artigo *Topologies on Spaces of Subsets* (referência [18]) que, dentre seus vários feitos, compila em um único texto propriedades de hiperespaços dotados não somente da topologia de Vietoris, mas também de uma generalização da topologia induzida pela métrica de Hausdorff. Esta generalização se deve à própria generalização do conceito de espaço métrico, chamado espaço uniforme.

De fato, conceitos como metrização, completude e continuidade uniforme levaram à realização do conceito de espaço uniforme. Ainda que os primeiros passos mais concretos nessa direção tenham sido dados por Maurice Fréchet e Felix Hausdorff no início do século XX, apenas em 1937 surge a definição de espaço uniforme que usamos hoje, definida por André Weil em seu texto *Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale*.

Ao longo dos anos, várias técnicas foram empregadas para estudar propriedades de hiperespaços e grande atenção foi dada a espaços compactos e contínuos (compactos, conexos e metrizáveis). Em particular, a conexidade por caminhos foi extensivamente estudada quando o espaço base é um contínuo. Assim, em 2003, Camillo Costantini e Wiesław Kubiś publicam o artigo *Paths in hyperspaces* (referência [4]) que trata a conexidade por caminhos quando o espaço base não é compacto.

Surpreendentemente, ainda que muita pesquisa tenha sido desenvolvida sobre o tema, parece existir pouca literatura disponível em forma de livros acerca de hiperespaços. Sam B. Nadler Jr. publicou em 1978 o livro *Hyperspaces of Sets* e em 1998, junto de Alejandro Illanes, ele publicou o livro *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*. Como o próprio nome indica, e os autores informam no prefácio, o texto foi concebido tendo em vista uma referência que fosse didática para o primeiro contato, ainda que servisse como referência para pesquisa. Contudo, o foco é em hiperespaços de um contínuo e não tanto em hiperespaços gerais. A teoria encontrou aplicações no estudo de fractais, o que contribuiu para a criação de material a respeito, como os livros “Fractals Everywhere” de Michael F. Barnsley e “Fractals and Hyperpaces” de Keith R. Wicks. Além disso, existe um conceito na área da computação, chamado “power domain” que em um contexto topológico é exatamente um hiperespaço. Isso é discutido por Michael B. Smyth em *Power domains and predicate transformers: A topological view*.

Sendo assim, este texto foi pensado como uma introdução à teoria de hiperespaços, baseando-se principalmente nas referências [18] e [4]. Para isso, começamos com uma revisão de Topologia Geral no primeiro capítulo. Lá, provamos uma série de pequenos argumentos que sustentarão passagens feitas nas demonstrações dos resultados nos demais capítulos. Esse capítulo foi pensado para servir de apoio mas também para apresentar os conceitos utilizados de modo que eles se adéquem melhor ao texto ao

invés de simplesmente citar referências de livros.

Posteriormente, tratamos de espaços uniformes no Capítulo 2, com atenção especial para duas diferentes formalizações desse conceito e na equivalência delas. Discutimos extensamente sobre a topologia uniforme, que terá presença em boa parte do texto, e tratamos o clássico exemplo de grupos topológicos, os quais serão usados para mostrar uma aplicação da teoria de hiperespaços.

Desse modo, podemos seguir ao terceiro capítulo, onde as topologias de Vietoris e uniforme em hiperespaços são definidas, além da métrica de Hausdorff. Começamos também a discutir algumas propriedades que os hiperespaços possuem com essas topologias. Uma parte principal deste capítulo é a respeito da comparação das topologias de Vietoris e uniforme, onde apresentamos condições em que se pode comparar as topologias ou até mesmo quando elas são compatíveis, isto é, a mesma topologia. Por fim, apresentamos exemplos que explicitam a diferença das topologias e uma aplicação da teoria em grupos topológicos.

O Capítulo 4 é baseado principalmente no artigo de Michael [18], mas apresentamos algumas observações e correções que apareceram ao longo do tempo em outros artigos. Nele, trabalhamos com relações entre propriedades do espaço base e propriedades do hiperespaço tais como metrizabilidade, completude, conexidade, e principalmente axiomas de separação. Este último recebeu atenção especial na topologia de Vietoris, uma vez que no caso da topologia uniforme, ela é sempre completamente regular.

Deixamos a conexidade por caminhos especificamente para o Capítulo 5, que é baseado no artigo de Costantini e Kubiś [4]. Para tal, precisamos recorrer ao uso de semirreticulados, alguns conceitos mais próximos da Topologia Algébrica e propriedades métricas mais específicas. Uma consequência dos resultados deste capítulo é que \mathbb{R}^n dotado da métrica Euclidiana possui hiperespaço de compactos conexo por caminhos. Este resultado é tema central do Capítulo 6, que finaliza a dissertação com uma demonstração original desse fato baseando-se na teoria de espaços métricos e inspirada na demonstração para o hiperespaço de \mathbb{R} presente no livro de Barnsley (referência [1]).

Deve-se mencionar que todos os resultados e definições retirados de livros e artigos possuem indicação de onde podem ser encontrados no estilo [referência, página]. Os resultados que não possuem essa marcação foram desenvolvidos para manter a coerência ou auxiliar a compreensão do texto. Buscamos escrever as demonstrações com riqueza de detalhes e em alguns casos optamos por apresentar o raciocínio por trás da demonstração, incluindo ilustrações, ao invés de seguir diretamente para a demonstração.

A introdução histórica aqui apresentada foi baseada em discussões presentes nos três volumes do livro *Handbook of the History of General Topology*.

Capítulo 1

Revisão de Espaços Topológicos

Esta é uma revisão de assuntos de Topologia Geral, a maioria deles (mas nem todos, particularmente filtros e redes) vistos em cursos padrão. Apesar de longa, ela não pretende ser completa. Os leitores familiarizados com o assunto podem pular este capítulo ou consultá-lo conforme a necessidade.

1.1 Conceitos Iniciais

Definição 1.1.1. [24, p. 23] Uma **topologia** em um conjunto X é uma coleção T de subconjuntos de X , chamados de **abertos**, que satisfaz as seguintes propriedades:

- a) Qualquer união de elementos de T é um elemento de T .
- b) Qualquer interseção finita de elementos de T é um elemento de T .
- c) X e \emptyset pertencem à T .

□

Definição 1.1.2. Um **espaço topológico** X equipado de uma topologia T será denotado por (X, T) .

□

Definição 1.1.3. [24, p. 24] Um conjunto $F \in (X, T)$ é chamado de **fechado** se e somente se seu complementar F^c é aberto.

□

Definição 1.1.4. [24, p. 25] Se (X, T) é um espaço topológico, então o fecho de um conjunto A , denotado por \overline{A} é o conjunto resultante da interseção de todos os fechados que contêm A .

□

Definição 1.1.5. [7, p. 72] Um subconjunto A de um espaço topológico (X, T) é **denso** se $\overline{A} = X$.

□

Definição 1.1.6. [19, p. 192] Um espaço topológico (X, T) é **separável** se possui um subconjunto enumerável denso.

□

Definição 1.1.7. [24, p. 38] Uma **base de uma topologia** é qualquer coleção \mathcal{B} de abertos de X tais que qualquer aberto da topologia pode ser escrito como uma união desses abertos.

□

Dada uma coleção de conjuntos, podemos nos perguntar se ela pode ser base de alguma topologia. O Teorema a seguir trata dessa questão.

Teorema 1.1.8. [24, p. 38] Dado um conjunto X , uma coleção \mathcal{B} de subconjuntos de X é base de alguma topologia T se e somente se

- a) $X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$.
- b) Se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então para cada $p \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ contendo p tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Demonstração: Se \mathcal{B} é base, como X é aberto, vale

$$X = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B$$

pois deve existir uma coleção de elementos de \mathcal{B} cuja união é X . Além disso, sabemos que se $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$, então B_1 e B_2 são abertos, portanto $B_1 \cap B_2$ são abertos e este conjunto pode ser escrito como a união de elementos de \mathcal{B} , logo, para cada $p \in B_1 \cap B_2$ existe $B_3 \in \mathcal{B}$ contendo p tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Agora, se temos uma coleção \mathcal{B} que satisfaz as propriedades a) e b), seja T a coleção de todas as uniões de conjuntos de \mathcal{B} . Provaremos que T é uma topologia.

- a) Qualquer união de elementos de T é um elemento de T .
Sai por definição de T .
- b) Qualquer interseção finita de elementos de T é um elemento de T .

Dados dois abertos de T , sabemos que eles são da forma

$$\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \quad \text{e} \quad D = \bigcup_{D \in \mathcal{D}} D,$$

em que $\mathcal{C}, \mathcal{D} \subset \mathcal{B}$. Portanto, como

$$\left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \right) \cap \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D \right) = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \bigcup_{D \in \mathcal{D}} C \cap D,$$

pela propriedade a) sabemos que para cada $p \in C \cap D$ existe $B \in \mathcal{B}$ contendo p e contido em $C \cap D$. Tomando a coleção \mathcal{F} de todos esses conjuntos para todos os pontos de todos os conjuntos $C \cap D$, temos que

$$\left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \right) \cap \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D \right) = \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F$$

é um conjunto aberto. Por indução estendemos a qualquer interseção finita.

- c) X e \emptyset pertencem à T .

Sai da propriedade a) e do fato que se tomamos a união de uma coleção vazia de elementos de \mathcal{B} temos que ela é o conjunto vazio. ■

Notemos que a demonstração anterior define como passar de uma base para a topologia, basta todas as uniões de elementos da base.

Definição 1.1.9. [2, p. 18] Seja X um espaço topológico e A um subconjunto de X . Uma **vizinhança** de A é qualquer subconjunto de X que contém um aberto que contém A . □

Observemos que da definição de vizinhança temos que abertos são vizinhanças de todos os seus pontos.

Teorema 1.1.10. [2, p. 18] Dado um conjunto X , se para cada $x \in X$ é dada uma coleção $\mathcal{B}(x)$ de subconjuntos de X tal que

- a) Todo elemento de $\mathcal{B}(x)$ contém x ;
- b) Todo subconjunto de X que contém um conjunto de $\mathcal{B}(x)$ pertence a $\mathcal{B}(x)$;
- c) Toda interseção finita de conjuntos em $\mathcal{B}(x)$ é um elemento de $\mathcal{B}(x)$;
- d) Se V pertence a $\mathcal{B}(x)$, então existe um conjunto W que pertence a $\mathcal{B}(x)$ tal que para todo $y \in W$ vale $V \in \mathcal{B}(y)$,

então existe uma única topologia em X tal que, para cada $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ é a coleção de todas as vizinhanças de elementos de X nessa topologia. Cada $\mathcal{B}(x)$ é chamado um **sistema de vizinhanças de x** enquanto

$$\{\mathcal{B}(x)\}_{x \in X}$$

é chamado de **sistema de vizinhanças de elementos de X** .

Demonstração:

• **Unicidade:**

Suponhamos por absurdo que existam duas topologias distintas T e T' para as quais $\mathcal{B}(x)$ é o mesmo para todo x e tais que existe um aberto A de T' que não pertence a T . Como $A \notin T$, existe $y \in A$ para o qual todo aberto de T que contém y não está contido em A . Agora, por ser aberto em T' , $A \in \mathcal{B}(y)$, então deve existir um aberto de T que contém y e está contido em A , o que nos leva a um absurdo.

• **Existência:**

Dado um sistema de vizinhanças de elementos de X , denotado por \mathfrak{B} , afirmamos que a topologia T , cujos abertos são os subconjuntos V de X tais que $V \in \mathcal{B}(x)$ para todo $x \in V$ (V é vizinhança de todos os seus pontos), é aquela em que \mathfrak{B} é a coleção de todas as vizinhanças de (X, T) . A prova será realizada em três passos:

I) A interseção finita de elementos de T pertence a T .

Sabemos pela propriedade *c*) que a interseção finita de elementos de $\mathcal{B}(x)$ pertence a $\mathcal{B}(x)$. Logo, dados V_1, \dots, V_n , se $x \in V_1 \cap \dots \cap V_n$, cada $V_i \in \mathcal{B}(x)$ e assim

$$V_1 \cap \dots \cap V_n \in \mathcal{B}(x).$$

II) A união arbitrária de elementos de T pertence a T .

Sabemos pela propriedade *b*) que se $V \subset W$ e $V \in \mathcal{B}(x)$, então $W \in \mathcal{B}(x)$. Isso quer dizer que, dada uma união arbitrária de elementos de T ,

$$W = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha,$$

para cada $x \in W$, temos $x \in V_\alpha$ para algum $\alpha \in A$, ou seja, $V_\alpha \in \mathcal{B}(x)$ e como $V_\alpha \subset W$, $W \in \mathcal{B}(x)$. Portanto, W é vizinhança de todos os seus pontos e está em T .

III) Nesta topologia T , para cada $x \in X$, $\mathcal{B}(x)$ é a coleção de todas as vizinhanças topológicas de x , isto é, vizinhanças de x na topologia T .

Como os abertos de T pertencem a $\mathcal{B}(x)$ e qualquer vizinhança topológica V de x nessa topologia contém um aberto, temos que V contém um conjunto de $\mathcal{B}(x)$ e está em $\mathcal{B}(x)$ pela

propriedade *b*). Isso significa que a coleção de vizinhanças de x nessa topologia está contida em $\mathcal{B}(x)$.

Agora, se temos um conjunto $V \in \mathcal{B}(x)$, precisamos mostrar que ele é uma vizinhança topológica de x , ou seja, que deve conter um aberto que contém x , e para tal, usaremos a propriedade *d*) que afirma que se V pertence a $\mathcal{B}(x)$, então existe um conjunto W que pertence a $\mathcal{B}(x)$ tal que para todo $y \in W$ vale $V \in \mathcal{B}(y)$. Dado V , pode ocorrer que tal W não seja um aberto, ou seja, existe um $y \in W$ tal que $W \notin \mathcal{B}(y)$. Contudo, como $V \in \mathcal{B}(y)$, existe um $W' \in \mathcal{B}(y)$, tal que $V \in \mathcal{B}(z)$ para todo $z \in W'$. Tomamos $U = W \cup W'$. Se ainda assim, U não for um aberto, repetimos o processo até que tenhamos um aberto, o que ocorre porque na pior das hipóteses esgotamos todos os pontos de V nesse processo e teremos que V é vizinhança de todos os seus pontos. ■

Vale a pena mencionar que, nas condições do Teorema acima, podemos descrever os abertos com outras palavras: um aberto da topologia T será um conjunto V tal que para todo $x \in V$ existe um conjunto $W \in \mathcal{B}(x)$ tal que $W \subset V$, o que implica $V \in \mathcal{B}(x)$ pela propriedade *b*) da coleção dos $\mathcal{B}(x)$. Agora, se $V \in \mathcal{B}(x)$ para todo $x \in X$, pela propriedade *d*) da coleção dos $\mathcal{B}(x)$, teremos que essa descrição alternativa dos abertos é satisfeita e as descrições são equivalentes de fato.

Definição 1.1.11. [2, p. 21] Em um espaço topológico X , um **sistema fundamental de vizinhanças de um ponto x** é qualquer coleção \mathcal{V} de vizinhanças de x tal que para cada vizinhança U de x existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset U$. □

Proposição 1.1.12. [2, p. 21] Dado um espaço topológico (X, T) , uma coleção \mathcal{B} de abertos de X é uma base da topologia se e somente se, para cada $x \in X$, a coleção

$$\mathcal{V}(x) = \{V \in \mathcal{B} \mid x \in V\}$$

for um sistema fundamental de vizinhanças de x .

Demonstração: Suponhamos que \mathcal{B} é base. Dada uma vizinhança qualquer V , sabemos que ela possui um aberto que contém x , e em particular esse aberto é uma união de abertos básicos sendo que um deles contém x e é, conseqüentemente, uma vizinhança de x que está contida em V , ou seja, existe um aberto de $\mathcal{V}(x)$ que está contido em V .

Agora, se $\mathcal{V}(x)$ é um sistema fundamental de vizinhanças para cada $x \in X$ e W é um aberto qualquer, precisamos mostrar que W é união de elementos de \mathcal{B} . Como W é um aberto, ele é uma vizinhança de cada um de seus pontos, e então para cada $y \in W$ existe $V_y \in \mathcal{V}(y)$ tal que $V_y \subset W$. Sendo assim,

$$W = \bigcup_{y \in W} V_y,$$

e \mathcal{B} é uma base pois $V_y \in \mathcal{B}$. ■

Com isso, podemos caracterizar os fechados usando o fecho de conjuntos, e isso abre novos caminhos para verificar que um conjunto dado será fechado.

Proposição 1.1.13. [19, p. 96] Dado x em um espaço topológico X e $A \subset X$, $x \in \bar{A}$ se e somente se toda vizinhança de x intersecta A .

Demonstração: Provaremos a contrapositiva, isto é, que $x \notin \bar{A}$ se e somente se alguma vizinhança de x não intersecta A .

Se $x \notin \bar{A}$, existe fechado F que contém A mas não contém x , portanto F^c é aberto que contém x e consequentemente vizinhança de x que não intersecta A . Agora seja V uma vizinhança de x que não intersecta A . Pela definição de vizinhança, existe um aberto U tal que $x \in U \subseteq V$, e assim U^c é um fechado que contém A mas não contém x e $x \notin \bar{A}$. ■

Proposição 1.1.14. [24, p. 25] Um conjunto A de um espaço topológico X é fechado se e somente se $A = \bar{A}$.

Demonstração: Se A é fechado, A é um fechado que contém A , portanto $\bar{A} \subseteq A$. Por outro lado, A está contido em \bar{A} pois está contido em todo conjunto da interseção que compõe \bar{A} .

Se $\bar{A} = A$, observemos que para todo $x \notin \bar{A}$ existe uma vizinhança V_x de x que não intersecta A . Logo, existe um aberto U_x tal que $x \in U_x \subseteq V_x$ e

$$U = \bigcup_{x \notin \bar{A}} U_x = \bar{A}^c = A^c$$

é aberto, portanto A é fechado. ■

Poder provar que conjuntos são fechados usando apenas sistemas fundamentais de vizinhanças simplifica muitos argumentos, especialmente porque frequentemente conhecemos uma base da topologia dada. Associado a esse conceito, temos a seguinte definição.

Definição 1.1.15. [19, p. 190] Um espaço topológico (X, T) é **primeiro-contável** se cada ponto x possui um sistema fundamental de vizinhanças contável. □

Temos outra propriedade relacionada, que possui importância ainda maior.

Definição 1.1.16. [19, p. 190] Um espaço topológico (X, T) é **segundo-contável** se X possui uma base contável. □

Uma vez que dada uma base, um sistema fundamental de vizinhanças de um ponto x é a coleção de elementos da base que contêm x , todo espaço segundo-contável é primeiro-contável.

Em geral, podemos dotar um conjunto de mais de uma topologia, portanto convém ter uma forma de comparar topologias.

Definição 1.1.17. [19, p. 77] Dadas duas topologias T_1 e T_2 em um conjunto X , dizemos que T_1 é **mais fina** que T_2 se todo aberto de T_2 é um aberto de T_1 . Nesse caso, escrevemos $T_2 \subseteq T_1$. Podemos falar também que T_2 é **mais grossa** que T_1 . □

Observemos que se $T_1 \subseteq T_2$ e $T_2 \subseteq T_1$, então $T_1 = T_2$. Quando isso acontece, dizemos que as topologias são **equivalentes**, que elas coincidem, ou simplesmente que são a mesma topologia. Agora, dado um subconjunto de um espaço topológico, podemos fazê-lo herdar a topologia desse espaço.

Definição 1.1.18. [19, p. 88] Dado um espaço topológico (X, T) e um conjunto $Y \subset X$, podemos definir uma topologia sobre Y a partir de T simplesmente restringindo os abertos de T a Y . Com isso, teremos o **subespaço topológico** (Y, T') , em que

$$T' = \{A \cap Y : A \in T\}.$$

□

Um exemplo elementar de topologia, que será base de uma parte deste texto, é o da Topologia Euclidiana em \mathbb{R}^n . Começamos recordando uma definição.

Definição 1.1.19. [24, p. 16] Um **espaço métrico** é um par ordenado (X, d) composto por um conjunto X e uma aplicação $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ chamada de **métrica**, satisfazendo para $x, y, z \in X$

- i) Positividade: $d(x, y) \geq 0$ e $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- ii) Simetria: $d(x, y) = d(y, x)$;
- iii) Desigualdade triangular: $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

□

Proposição 1.1.20. [19, p. 119] Dado um espaço métrico (X, d) a **topologia induzida pela métrica**, denotada por T_d , é aquela cuja base é o conjunto de todos os $B_d(x, r)$ em que $r > 0$ e

$$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}.$$

O conjunto $B(x, r)$ é chamado de **bola aberta de raio r centrada em x** .

Demonstração: Como $x \in B_d(x, r)$ para todo $r > 0$, vale que

$$\bigcup_{x \in X} \bigcup_{r > 0} B_d(x, r) = X.$$

Agora, dados x_1, x_2 e r_1, r_2 , se $z \in B_d(x_1, r_1) \cap B_d(x_2, r_2)$, existem $s_1, s_2 > 0$ tais que

$$B_d(y, s_1) \subset B_d(x_1, r_1) \quad \text{e} \quad B_d(y, s_2) \subset B_d(x_2, r_2).$$

De fato, basta tomar $s_1 < r_1 - d(x_1, y)$ e $s_2 < r_2 - d(x_2, y)$ que então teremos para todo $z \in B_d(y, s_i)$

$$d(x_1, z) \leq d(x_1, y) + d(y, z) < r_1,$$

ou seja, $B_d(y, s_1) \subset B_d(x_1, r_1)$ e analogamente $B_d(y, s_2) \subset B_d(x_2, r_2)$. Logo, tomando $s = \min\{s_1, s_2\}$ concluímos que

$$B_d(y, s) \subset B_d(x_1, r_1) \cap B_d(x_2, r_2).$$

Como y é qualquer elemento da interseção, temos que a coleção de todas as bolas abertas constitui uma base de uma topologia. ■

Em situações onde só existe uma métrica costumamos escrever apenas $B(x, r)$. Observemos que se a base é composta pelas bolas $B(x, r)$ onde $x \in X$ e $r > 0$, então para cada $x \in X$ a coleção dos conjuntos da forma $B(x, r)$ constitui um sistema fundamental de vizinhanças de x . De fato, se limitarmos r à coleção $\{1/n\}_{n \in \mathbb{N}}$, teremos um sistema fundamental de vizinhanças mais simples ainda.

Exemplo 1.1.21. A topologia Euclidiana em \mathbb{R}^n é a topologia induzida pela métrica Euclidiana dada por $d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ com

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x^i - y^i)^2},$$

onde $x = (x^1, \dots, x^n)$ e $y = (y^1, \dots, y^n)$. Quando $n = 1$ temos a reta e a métrica toma a forma mais simples

$$d(x, y) = |x - y|.$$

Desse modo, na reta as bolas são intervalos, isto é,

$$B(x, r) = (x - r, x + r).$$

A partir de uma coleção de subconjuntos de um conjunto podemos definir uma topologia de maneira simples: basta construir uma base, ou seja, adicionar as interseções finitas de elementos da coleção.

Definição 1.1.22. [7, p. 65] Seja X um conjunto e Λ uma coleção de índices. Uma coleção de subconjuntos de X

$$\mathcal{S} = \{A_\lambda \subseteq X \mid \lambda \in \Lambda\},$$

é **sub-base** de uma topologia para X .

□

A topologia de X induzida pela sub-base \mathcal{S} tem como base exatamente o conjunto composto por \emptyset , X e todas as interseções finitas de elementos de \mathcal{S} . Comumente já temos uma topologia T em X e encontramos uma coleção de subconjuntos de X que será uma sub-base \mathcal{S} de T , ou seja, cuja base construída com as interseções constitui uma base para T .

Um espaço importante cuja topologia pode ser facilmente descrita com sub-bases é a reta real estendida.

Exemplo 1.1.23. Denotamos $\overline{\mathbb{R}}$ o conjunto

$$\mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$$

e definimos para $a, b \in \mathbb{R}$ os conjuntos

$$(a, +\infty] = (a, +\infty) \cup \{+\infty\}$$

e

$$[-\infty, b) = (-\infty, b) \cup \{-\infty\}.$$

Definimos uma sub-base \mathcal{S} como a coleção desses conjuntos. Esta é chamada a **reta real estendida**.

Podemos estabelecer também uma sub-base para a topologia Euclidiana sobre \mathbb{R} .

Exemplo 1.1.24. A topologia Euclidiana T_d em \mathbb{R} tem como abertos básicos intervalos da forma

$$(x - r, x + r),$$

onde $r > 0$ e $x \in \mathbb{R}$. Portanto, tomamos os subconjuntos de \mathbb{R}

$$(a, +\infty) \quad \text{e} \quad (-\infty, b)$$

para $a, b \in \mathbb{R}$. A coleção desses conjuntos, denotada por \mathcal{S} , constitui uma sub-base da topologia Euclidiana. De fato, a interseção finita de elementos de \mathcal{S} é da forma

$$\left(\bigcap_{k=1}^{n_1} (a_k, +\infty) \right) \cap \left(\bigcap_{k=1}^{n_2} (-\infty, b_k) \right)$$

e isso é vazio ou um dos três tipos de conjuntos a seguir:

$$(a_{k_1}, +\infty), \quad (-\infty, b_{k_2}) \quad \text{ou} \quad (a_{k_1}, b_{k_2}).$$

Todos esses conjuntos são abertos na topologia Euclidiana, pois

$$(a_{k_1}, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a_{k_1} + n - 1, a_{k_1} + n + 1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(a_{k_1} + n, 1),$$

e analogamente

$$(-\infty, b_{k_2}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B(b_{k_2} - n, 1).$$

Por fim,

$$(a_{k_1}, b_{k_2}) = B\left(\frac{b_{k_2} + a_{k_1}}{2}, \frac{b_{k_2} - a_{k_1}}{2}\right).$$

Desse modo, todo aberto da base induzida por \mathcal{S} é aberto na topologia Euclidiana. Assim, todo aberto na topologia $T_{\mathcal{S}}$ induzida pela sub-base \mathcal{S} é aberto na topologia Euclidiana, ou seja, $T_{\mathcal{S}} \subseteq T_d$. Por outro lado,

$$(x - r, x + r) = (x - r, +\infty) \cap (-\infty, x + r)$$

e temos que qualquer aberto básico da topologia Euclidiana está na base induzida por \mathcal{S} e consequentemente $T_d \subseteq T_{\mathcal{S}}$. Provamos então que as topologias são iguais.

A partir dessa discussão, notamos que \mathbb{R} é subespaço topológico de $\overline{\mathbb{R}}$. Para finalizar esta seção, apresentamos a definição de duas topologias especiais.

Definição 1.1.25. [24, p. 86] Dada uma coleção $\{(X_{\lambda}, T_{\lambda})\}_{\lambda \in \Lambda}$ de espaços topológicos, a **topologia produto** definida em $\prod X_{\lambda}$ é aquela gerada pela base cujos elementos são da forma

$$\prod_{\lambda \in \Lambda} U_{\lambda}$$

onde cada U_{λ} é aberto e $U_{\lambda} \neq X_{\lambda}$ apenas para uma coleção finita de índices. □

Definição 1.1.26. [24, p. 59] Sejam X um espaço topológico e Y um conjunto. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função sobrejetora, então a coleção

$$T = \{U \subset Y \mid f^{-1}(U) \text{ é aberto em } X\}$$

constitui uma topologia em Y , chamada de **topologia quociente**. Neste caso, f é chamada **aplicação quociente** e Y **espaço quociente**. □

A topologia quociente é frequentemente associada a classes de equivalência. Uma **relação de equivalência** \sim sobre um conjunto X é uma relação binária entre os elementos que é

- (i) reflexiva: $x \sim x$ para todo $x \in X$;
- (ii) simétrica: $x \sim y$ se e somente se $y \sim x$;
- (iii) transitiva: se $x \sim y$ e $y \sim z$, então $x \sim z$.

Para cada $x \in X$, podemos definir o conjunto chamado **classe de equivalência de x**

$$\bar{x} = \{y \in X \mid x \sim y\}.$$

Notemos que se $x \sim y$, então para todo $z \in X$ tal que $x \sim z$, temos $y \sim z$ por simetria e transitividade. Analogamente, se $y \sim z$, temos $x \sim z$. Portanto

$$\bar{x} = \bar{y}.$$

Desse modo, os conjuntos \bar{x} dividem o espaço (dizemos que eles particionam) em conjuntos de pontos que estão relacionados, daí o nome classe de equivalência. Seja Y a coleção desses conjuntos, frequentemente denotada por X/\sim . A aplicação projeção

$$\begin{aligned} \pi : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto \bar{x} \end{aligned}$$

é sobrejetiva pela definição de Y . Logo, se X é um espaço topológico, podemos induzir a topologia quociente em Y a partir de uma relação de equivalência em X .

O interessante disso tudo é que se temos um espaço topológico X , um conjunto Y e uma função sobrejetora $f : X \rightarrow Y$, a função permite definir uma relação entre elementos de x estabelecendo $x \sim y$ se e somente se $f(x) = f(y)$. Assim,

$$\bar{x} = \{y \in X \mid f(x) = f(y)\} = \{y \in X \mid y \in f^{-1}(f(x))\} = f^{-1}(f(x)).$$

Uma vez que f é sobrejetora, para todo $x \in X$, existe $y \in Y$ tal que $f(x) = y$. Portanto, cada ponto de y pode ser visto como a representação da classe de equivalência de tal x . Desse modo, f é exatamente a projeção nas classes de equivalência e Y pode ser visto como a coleção das classes de equivalência.

1.2 Redes, Filtros e Convergência

As sequências são um dos objetos essenciais na topologia. Inclusive, podemos caracterizar uma topologia a partir delas. Contudo, este conceito só funciona bem quando o espaço é primeiro-contável. Uma generalização desse conceito que visa contornar essa limitação aparece na forma de uma estrutura análoga chamada rede. Contudo, temos outro conceito, dessa vez um pouco diferente. Introduzido por Henri Cartan em seu artigo de 1937 intitulado *Théorie des filtres*, Cartan propõe o conceito de filtro. Discutiremos os dois conceitos mais gerais simultaneamente e ao longo do texto precisaremos recorrer a eles em diferentes situações.

Definição 1.2.1. [19, p. 38] Uma **sequência** (x_n) em um conjunto X é uma função $\mathbf{x} : \mathbb{Z}_+ \rightarrow X$, cujos elementos, ao invés de denotar por $\mathbf{x}(i)$, denotamos por x_i . Frequentemente nos referimos à sequência como a imagem da função, mas sem esquecer que um mesmo ponto pode ser imagem de vários números em \mathbb{Z}_+ . □

Podemos considerar também **sequências finitas**. Nesse caso, o domínio da função é um subconjunto finito de \mathbb{Z}_+ . Observemos que não faz diferença considerar as sequências sobre \mathbb{N} ao invés de \mathbb{Z}_+ .

Passaremos para o conceito mais geral de rede.

Definição 1.2.2. [24, p. 73] Um **conjunto direcionado** é um conjunto Λ com uma relação \leq satisfazendo:

- (i) $\lambda \leq \lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda$.
- (ii) Se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$, então $\lambda_1 \leq \lambda_3$.
- (iii) Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ existe $\lambda_3 \in \Lambda$ tal que $\lambda_1 \leq \lambda_3$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$.

□

Observemos que \mathbb{Z}_+ e \mathbb{N} com a ordenação usual são conjuntos direcionados. Logo, sequências são redes.

Definição 1.2.3. [24, p. 73] Seja (Λ, \leq) um conjunto direcionado. Uma **rede** $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ em um conjunto X é uma função $\mathbf{x} : \Lambda \rightarrow X$, cujos elementos, ao invés de denotar por $\mathbf{x}(\lambda)$, denotamos por x_λ . Frequentemente nos referimos à rede apenas como a imagem da função. □

Definição 1.2.4. [24, p. 73] Seja $(x_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ uma rede em um conjunto X dada por uma função $\mathbf{x} : \Lambda \rightarrow X$. Se M é um conjunto direcionado e $\varphi : M \rightarrow \Lambda$ é uma função satisfazendo

- (i) $\varphi(m_1) \leq \varphi(m_2)$ sempre que $\mu_1 \leq \mu_2$.
- (ii) Para cada $\lambda \in \Lambda$ existe $\mu \in M$ tal que $\lambda \leq \varphi(\mu)$.

Uma **sub-rede** (x_{λ_μ}) de (x_λ) é a composição $\mathbf{x} \circ \varphi$. □

A propriedade (i) garante que a imagem de φ é um conjunto direcionado quando dotado da relação em Λ . Assim, faz sentido considerar (x_{λ_μ}) como uma rede. A propriedade (ii) garante, por outro lado, que a sub-rede não toma apenas uma parte “inicial” da rede. Dada uma sequência (x_n) , tomamos qualquer subconjunto infinito M de \mathbb{Z}_+ com a relação induzida por \mathbb{Z}_+ (para satisfazer as propriedades) e teremos $(x_m)_{m \in M}$ uma **subsequência** de (x_n) .

Agora, apresentamos o conceito de filtro. A princípio, pode não ser muito claro como este conceito pode estar relacionado ao conceito de redes, mas provaremos que é possível passar de um para outro.

Definição 1.2.5. [24, p. 78] Um **filtro** \mathfrak{F} em um conjunto X é uma coleção de subconjuntos não vazios de X satisfazendo:

- a) se $F \in \mathfrak{F}$ e $F \subset G$, então $G \in \mathfrak{F}$.
- b) se $E, F \in \mathfrak{F}$, então $E \cap F \in \mathfrak{F}$.

Observemos que desta última propriedade vale que dada uma família finita de elementos de \mathfrak{F} , a interseção de todos os elementos dessa família é um elemento de \mathfrak{F} . □

Nós já vimos um exemplo de filtro antes: o sistema de vizinhanças de um ponto em uma topologia, apresentado no Teorema 1.1.10. Inclusive, esse filtro será fundamental na discussão sobre convergência. Por simplicidade é chamado apenas de **filtro das vizinhanças** de x e sua base é qualquer sistema fundamental de vizinhanças de x . Construir filtros é bem simples, basta definir o que chamamos de base de um filtro, que funciona como base de uma topologia.

Definição 1.2.6. [24, p. 78] Uma coleção \mathfrak{B} de subconjuntos não vazios de um conjunto X é uma **base de um filtro** em X se dados dois elementos em \mathfrak{B} , a interseção contém um elemento de \mathfrak{B} . O **filtro** \mathfrak{F} **induzido por uma base** \mathfrak{B} é a coleção de todos os conjuntos que contém algum elemento de \mathfrak{B} . □

Observemos que dadas duas bases, elas induzem o mesmo filtro se todo elemento de uma contém um elemento da outra base e vice-versa. Agora, dado um filtro, para obter uma base dele precisamos obter o seguinte:

Definição 1.2.7. [24, p. 78] Uma **base** \mathfrak{B} **de um filtro** \mathfrak{F} é uma subcoleção de \mathfrak{F} tal que se $F \in \mathfrak{F}$, existe $B \in \mathfrak{B}$ tal que $B \subseteq F$. □

A seguir, relacionamos redes e filtros.

Definição 1.2.8. [24, p. 81] Se (x_λ) é uma rede em X , o **filtro induzido pela rede** é o filtro induzido pela base \mathfrak{B} cujos elementos são

$$B_{\lambda_0} = \{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}.$$

□

Se \mathfrak{F} é um filtro em X , definimos o conjunto direcionado

$$\Lambda_{\mathfrak{F}} = \{(x, F) \mid x \in F \in \mathfrak{F}\},$$

onde a relação é dada por

$$(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$$

se e somente se $F_2 \subseteq F_1$. De fato, $\Lambda_{\mathfrak{F}}$ é direcionado, pois se $F_3 \subseteq F_2$ e $F_2 \subseteq F_1$, temos $F_3 \subseteq F_1$ e se $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$, então $F_3 = F_1 \cap F_2 \in \mathfrak{F}$ e assim valem as três propriedades de conjunto direcionado:

- (i) $(x, F) \leq (x, F)$ para todo $(x, F) \in \Lambda_{\mathfrak{F}}$.
- (ii) Se $(x_1, F_1) \leq (x_2, F_2)$ e $(x_2, F_2) \leq (x_3, F_3)$, então $(x_1, F_1) \leq (x_3, F_3)$.
- (iii) Para $(x_1, F_1), (x_2, F_2) \in \Lambda_{\mathfrak{F}}$ existe (x_3, F_3) tal que $(x_1, F_1) \leq (x_3, F_3)$ e $(x_2, F_2) \leq (x_3, F_3)$.

Definição 1.2.9. [24, p. 81] Dado um filtro \mathfrak{F} em X , a **rede (x_λ) induzida pelo filtro** é a imagem da função $P : \Lambda_{\mathfrak{F}} \rightarrow X$ dada por

$$P((x, F)) = x.$$

□

Definição 1.2.10. [24, p. 81] Dada uma rede (x_λ) em X , o **filtro \mathfrak{F} induzido pela rede** é o filtro induzido pela base \mathfrak{B} composta pelos conjuntos

$$B_{\lambda_0} = \{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}$$

onde $\lambda_0 \in \Lambda$.

□

Deve-se notar que essa definição não é exatamente circular, no sentido que induzir um filtro a partir de uma rede e uma rede a partir do filtro obtido não induz necessariamente a mesma rede inicial, mas ela será uma sub-rede da rede obtida. Agora podemos tratar da convergência de redes (sequências) e filtros, onde as definições serão, sim, equivalentes ao fazer esse caminho por estruturas induzidas.

Definição 1.2.11. [24, p. 78] Dizemos que um filtro \mathfrak{F}_1 é **mais fino** que um filtro \mathfrak{F}_2 se $\mathfrak{F}_2 \subseteq \mathfrak{F}_1$, ou seja, se todo elemento de \mathfrak{F}_2 é um elemento de \mathfrak{F}_1 .

□

Observemos que se temos duas bases \mathfrak{B}_1 e \mathfrak{B}_2 induzindo os filtros \mathfrak{F}_1 e \mathfrak{F}_2 , o filtro \mathfrak{F}_2 é mais fino que \mathfrak{F}_1 se e somente se todo elemento de \mathfrak{B}_2 contém um elemento de \mathfrak{B}_1 .

Definição 1.2.12. [24, p. 78] Um filtro \mathfrak{F} em um espaço topológico X **converge** a um ponto $x \in X$ se \mathfrak{F} é mais fino que o sistema fundamental de vizinhanças de x . Nesse caso, \mathfrak{F} é um **filtro convergente** e x é **ponto limite** do filtro.

□

Definição 1.2.13. [24, p. 74] Uma rede (x_λ) em um espaço topológico X **converge** a $x \in X$ se para cada vizinhança V de x existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ se $\lambda \geq \lambda_0$. Nesse caso, a rede é uma **rede convergente** e x é **ponto limite** da rede.

□

Existe uma terminologia comum para dizer que a rede converge a x , é dizer que dada uma vizinhança V de x , a rede eventualmente está em V . Escrevemos $(x_\lambda) \rightarrow x$ quando a rede converge a x . Observemos que se uma rede converge, toda sub-rede também convergirá ao mesmo ponto. Ao invés de verificar para toda vizinhança V de x , podemos verificar apenas para àquelas de um sistema fundamental de vizinhanças de x . Sendo assim, lembrando que os abertos básicos que contêm x constituem um sistema fundamental de vizinhanças de x , podemos verificar apenas para os abertos básicos que contêm x sempre que tivermos uma base.

Proposição 1.2.14. Uma rede (x_λ) converge a x se e somente se para cada vizinhança V de um sistema fundamental de vizinhanças de x existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ se $\lambda \geq \lambda_0$.

Demonstração: Uma vez que todo elemento do sistema fundamental é vizinhança de x , basta provar que se para cada vizinhança V de um sistema fundamental de vizinhanças de x existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $x_\lambda \in V$ se $\lambda \geq \lambda_0$, então isso vale para toda vizinhança de x . Ora, dada vizinhança W de x , existe vizinhança V do sistema fundamental contida em W , e para o λ_0 associado a V , temos que se $\lambda \geq \lambda_0$

$$x_\lambda \in V \subseteq W.$$

Assim, (x_λ) converge a x . ■

Passamos então à relação entre convergência de filtros e redes.

Teorema 1.2.15. [24, p. 81] Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Um filtro \mathfrak{F} converge a x se e somente se a rede (x_λ) induzida pelo filtro converge a x .

Demonstração: Se o filtro \mathfrak{F} converge a x , então para toda vizinhança V de x existe $F \in \mathfrak{F}$ contido em V . Desse modo, basta tomar $y \in F$, e por definição de (x_λ) , sempre que $\lambda \geq (y, F)$, teremos

$$x_\lambda \in G \subseteq F \subseteq V,$$

ou seja, a rede converge a x .

Se a rede (x_λ) induzida por \mathfrak{F} converge a x , dada vizinhança V de x , existe $F \in \mathfrak{F}$ e $y \in F$ tais que se

$$(z, G) \geq (y, F),$$

então

$$z \in V.$$

Ora, sabemos que para todo $f \in F$ a definição do conjunto direcionado $\Lambda_{\mathfrak{F}}$ implica

$$(f, F) \geq (y, F).$$

Portanto, $F \subseteq V$, e encontramos um conjunto de \mathfrak{F} contido em V , ou seja, o filtro \mathfrak{F} é mais fino que o filtro das vizinhanças de x . ■

Teorema 1.2.16. [24, p. 81] Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Uma rede (x_λ) converge a x se e somente se o filtro induzido pela rede converge a x .

Demonstração: Se a rede converge a x , observemos que dada uma vizinhança V de X , existe λ_0 tal que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Assim, o conjunto

$$B_{\lambda_0} = \{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}$$

está contido em V . Ora, este é um elemento básico do filtro induzido pela rede, logo este filtro é mais fino que o sistema de vizinhanças de x e deve convergir a x .

Se o filtro \mathfrak{F} induzido pela rede converge a x , dada vizinhança V de x existe $F \in \mathfrak{F}$ contido em V . Pela definição da base do filtro induzido pela rede, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que

$$B_{\lambda_0} = \{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\} \subseteq F \subseteq V,$$

e assim, $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto, a rede deve convergir a x . ■

Observemos que os dois teoremas garantem que a rede induzida pelo filtro induzido por uma rede também converge a um ponto se a rede inicialmente converge, e o mesmo vale para o filtro induzido pela rede induzida por um filtro. Assim, podemos trabalhar com ambas as noções de convergência livremente.

Passamos então a uma propriedade importante de redes e filtros que é caracterizar conjuntos fechados.

Definição 1.2.17. [24, p. 74] Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que x é **ponto de acumulação de uma rede** (x_λ) se para toda vizinhança V de x e $\lambda_0 \in \Lambda$ existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que

$$x_\lambda \in V.$$

□

Assim como temos o termo eventualmente para a convergência, dizemos que x é ponto de acumulação de uma rede se para cada vizinhança V de x a rede está frequentemente em V .

Proposição 1.2.18. Uma rede (x_λ) possui um ponto de acumulação x se e somente se ela possui uma sub-rede (x_{λ_μ}) que converge a x .

Demonstração: Se (x_λ) possui uma sub-rede (x_{λ_μ}) convergente a x , então dada vizinhança V de x e λ_0 , existe $\lambda_{\mu_0} \geq \lambda_0$ e assim $\lambda_\mu \geq \lambda_{\mu_0}$ tal que

$$x_{\lambda_\mu} \in V.$$

Assim, (x_λ) possui x como ponto de acumulação.

Agora, se (x_λ) possui um ponto de acumulação x , vamos construir um conjunto direcionado e usá-lo para tomar uma sub-rede de (x_λ) . Seja $\mathcal{B}(x)$ um sistema fundamental de vizinhanças de x . Seja

$$M = \{(\lambda, V) \mid x_\lambda \in V \in \mathcal{B}(x)\}.$$

Definimos

$$(\lambda_1, V_1) \leq (\lambda_2, V_2)$$

se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $V_2 \subseteq V_1$. Afiramos que M é um conjunto direcionado quando dotado dessa relação. Ora, por definição

$$(\lambda, V) \leq (\lambda, V).$$

Agora, se

$$(\lambda_1, V_1) \leq (\lambda_2, V_2) \quad \text{e} \quad (\lambda_2, V_2) \leq (\lambda_3, V_3),$$

então

$$V_3 \subseteq V_2 \subseteq V_1$$

e

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3.$$

Portanto,

$$\lambda_1 \leq \lambda_3 \quad \text{e} \quad V_3 \subseteq V_1,$$

e assim

$$(\lambda_1, V_1) \leq (\lambda_3, V_3).$$

Agora, dados (λ_1, V_1) e (λ_2, V_2) , seja λ_0 tal que

$$\lambda_1 \leq \lambda_0 \quad \text{e} \quad \lambda_2 \leq \lambda_0.$$

Uma vez que a rede possui ponto de acumulação em x , existe $\lambda_3 \geq \lambda_0$ tal que

$$x_{\lambda_3} \in V_3 = V_1 \cap V_2.$$

Portanto,

$$(\lambda_1, V_1) \leq (\lambda_3, V_3) \quad \text{e} \quad (\lambda_2, V_2) \leq (\lambda_3, V_3)$$

e M é um conjunto direcionado. Agora, definimos a aplicação

$$\begin{aligned} i : M &\longrightarrow \Lambda \\ (\lambda, V) &\longmapsto \lambda. \end{aligned}$$

Essa aplicação satisfaz as condições de sub-rede, pois

$$(\lambda_1, V_1) \leq (\lambda_2, V_2)$$

somente se

$$i((\lambda_1, V_1)) = \lambda_1 \leq \lambda_2 = i((\lambda_2, V_2)).$$

Além disso, dado λ_0 , para qualquer vizinhança V de x existe $\lambda \geq \lambda_0$ de modo que

$$x_\lambda \in V.$$

Portanto, $(\lambda, V) \in M$ e

$$i((\lambda, V)) = \lambda \geq \lambda_0.$$

Agora, afirmamos que a sub-rede (x_{λ_μ}) induzida converge a x . Dado λ_0 e vizinhança V de x , uma vez que x é ponto de acumulação, existe $\lambda_1 \geq \lambda_0$ tal que $x_{\lambda_1} \in V$. Desse modo, para todo $(\lambda, W) \geq (\lambda_1, V)$ temos

$$x_\lambda \in V$$

e a sub-rede converge a x . ■

Definição 1.2.19. [24, p. 78] Seja X um espaço topológico e $x \in X$. Dizemos que x é **ponto de acumulação de um filtro** \mathfrak{F} se para toda vizinhança V de x

$$F \cap V \neq \emptyset$$

para todo $F \in \mathfrak{F}$. Em outras palavras, x é ponto de acumulação se $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathfrak{F}$. □

Proposição 1.2.20. [24, p. 78] Um filtro \mathfrak{F} possui um ponto de acumulação x se e somente se existe um filtro \mathfrak{G} mais fino que \mathfrak{F} que converge a x .

Demonstração: Se x é ponto de acumulação de \mathfrak{F} , então para toda vizinhança V de x

$$F \cap V \neq \emptyset$$

para todo $F \in \mathfrak{F}$. Assim, podemos definir o filtro $\mathfrak{G}_{\mathfrak{F}}$ induzido pela base composta dos conjuntos

$$G_{F,V} = \{V \cap F \mid F \in \mathfrak{F} \text{ e } V \text{ é vizinhança de } x\}.$$

Por definição, $\mathfrak{G}_{\mathfrak{F}}$ é mais fino que \mathfrak{F} e o filtro das vizinhanças de x , logo converge a x .

Se \mathfrak{G} é um filtro mais fino que \mathfrak{F} e \mathfrak{G} converge a x , então dada vizinhança V de x e $F \in \mathfrak{F}$, existe $G \in \mathfrak{G}$ contido em F e V . Portanto

$$F \cap V \supseteq G \cap V = G \neq \emptyset$$

e x é ponto de acumulação de \mathfrak{F} . ■

Teorema 1.2.21. [24, p. 79] Seja X um espaço topológico, $E \subseteq X$ e $x \in X$. O ponto $x \in \overline{E}$ se e somente se existe um filtro \mathfrak{F} tal que $E \in \mathfrak{F}$ e \mathfrak{F} converge a x .

Demonstração: Se $x \in \overline{E}$, temos que toda vizinhança de x intersecta E . Portanto, o filtro das vizinhanças de x induz uma base de um filtro cujos elementos são da forma

$$F_V = \{V \cap E \mid V \text{ é vizinhança de } x\}.$$

Este filtro induzido \mathfrak{F} contém E como elemento, por definição, e converge a x pois todo elemento da base está contido numa vizinhança de x , portanto mais fino que o filtro das vizinhanças de x .

Se existe um filtro \mathfrak{F} que converge a x e possui E como elemento, então para todo $F \in \mathfrak{F}$ vale

$$E \cap F \neq \emptyset.$$

Por convergir a x , toda vizinhança de x contém um elemento de \mathfrak{F} . Logo, se $F \subset V$ e $F \in \mathfrak{F}$,

$$V \cap E \supset E \cap F \neq \emptyset.$$

Assim, provamos que toda vizinhança de x intersecta E e $x \in \overline{E}$. ■

Corolário 1.2.22. Seja X um espaço topológico e $E \subseteq X$. O conjunto E é fechado se e somente se para todo $x \in X$ tal que existe um filtro \mathfrak{F} convergente a x com $E \in \mathfrak{F}$ o ponto x pertencer a E .

Demonstração: Pela Proposição 1.1.14 E é fechado se e somente se $E = \overline{E}$. Agora, pelo Teorema 1.2.21 $x \in \overline{E}$ se e somente se existe um filtro \mathfrak{F} tal que $E \in \mathfrak{F}$ e \mathfrak{F} converge a x , logo $x \in E$ por hipótese e $E = \overline{E}$. ■

Teorema 1.2.23. [24, p. 75] Sejam X um espaço topológico e $E \subset X$. Um ponto $x \in X$ pertence a \overline{E} se e somente se existe uma rede $(x_\lambda) \subseteq E$ que converge a x .

Demonstração: Se $x \in \overline{E}$, toda vizinhança de x intersecta E . Logo, podemos tomar para cada vizinhança V de x um elemento

$$e_V \in E \cap V.$$

Ora, o sistema de vizinhanças com a relação $V_1 \leq V_2$ se e somente se $V_2 \subseteq V_1$ é direcionado. Portanto, podemos definir a rede $(e_V) \subseteq E$ que converge a x por definição.

Se existe uma rede $(x_\lambda) \subset E$ que converge a x , para toda vizinhança V de x existe λ_0 tal que $x_\lambda \in V$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Uma vez que $(x_\lambda) \subseteq E$, temos

$$V \cap E \neq \emptyset,$$

e portanto $x \in \overline{E}$. ■

Observemos que quando o espaço é primeiro-contável, existe um sistema fundamental de vizinhanças de x que é contável, portanto podemos usá-lo para construir a rede acima, o que resultará em uma sequência. Por isso, nesses espaços podemos usar sequências para mostrar que um ponto está em um fecho de um conjunto.

Corolário 1.2.24. Seja X um espaço topológico e $E \subseteq X$. O conjunto E é fechado se e somente se para todo $x \in X$ tal que existe uma rede $(x_\lambda) \subseteq E$ convergente a x , o ponto x pertencer a E .

Demonstração: Pela Proposição 1.1.14 E é fechado se e somente se $E = \overline{E}$. Agora, pelo Teorema 1.2.23 $x \in \overline{E}$ se e somente se para todo $x \in X$ tal que existe uma rede $(x_\lambda) \subseteq E$ convergente a x , o ponto x pertencer a E , ou seja, $E = \overline{E}$. ■

Terminamos a seção com uma definição útil sobre filtros.

Definição 1.2.25. Dado um filtro \mathfrak{F} em X e um conjunto $A \subset X$, o **filtro relativo** a \mathfrak{F} em A é

$$\mathfrak{F}_A = \{F \cap A \mid F \in \mathfrak{F}\}.$$

□

1.3 Continuidade

A continuidade possui um papel fundamental na Análise. Nesta seção veremos a generalização desse conceito para espaços topológicos. Uma atenção especial será dada para os diferentes pontos de vista possíveis dadas as várias estruturas já abordadas.

Definição 1.3.1. [24, p. 44] Sejam X e Y espaços topológicos e considere uma função $f : X \rightarrow Y$. Dizemos que f é **contínua em** $x_0 \in X$ se para toda vizinhança V de $f(x_0)$ existir uma vizinhança U de x_0 tal que

$$f(U) \subset V.$$

Se f é contínua em todo ponto $x \in X$, dizemos que f é uma função **contínua**. □

Proposição 1.3.2. Sejam X e Y espaços topológicos e considere uma função $f : X \rightarrow Y$. São equivalentes:

- (a) f é contínua.
- (b) a pré-imagem de aberto em Y é aberto em X .
- (c) a pré-imagem de aberto básico em Y é aberto em X .
- (d) a pré-imagem de aberto sub-básico em Y é aberto em X .

Demonstração: As implicações (b) \Rightarrow (c) e (c) \Rightarrow (d) seguem diretamente da definição de base e sub-base. Todo aberto sub-básico é aberto básico e todo aberto básico é aberto. Provaremos (a) \Leftrightarrow (b), (c) \Rightarrow (b) e (d) \Rightarrow (c).

Suponhamos que f é contínua e $V \subset Y$ é aberto. Para cada $x \in X$ tal que $f(x) \in V$ existe vizinhança U_x satisfazendo

$$f(U_x) \subseteq V.$$

Sendo assim, definimos

$$U = \bigcup_{x \in f^{-1}(V)} U_x = f^{-1}(V)$$

e temos que U é aberto por ser vizinhança de todos os seus pontos. Assim provamos (a) \Rightarrow (b). Agora, se pré-imagem de aberto é aberto, dado $x \in X$ e vizinhança V de $f(x)$, existe aberto $V' \subset V$ contendo $f(x)$. Assim, $f^{-1}(V')$ é aberto contendo x e

$$f(f^{-1}(V')) \subseteq V'.$$

Portanto, f é contínua em x . Ora, x é arbitrário, logo f é contínua em todo ponto e provamos (b) \Rightarrow (a).

Se a pré-imagem de aberto básico é aberto, dado aberto $V \subseteq Y$, podemos descrever V como uma união de abertos básicos de Y , ou seja,

$$V = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda.$$

Assim,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda),$$

que é aberto em X , provando (c) \Rightarrow (b).

Por fim, se pré-imagem de aberto sub-básico em Y é aberto em X , dado aberto básico $V \subseteq Y$, podemos descrever V como uma interseção finita de abertos sub-básicos de Y , ou seja,

$$V = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda$$

onde $|\Lambda| < \infty$. Assim,

$$f^{-1}(V) = f^{-1}\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda\right) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(V_\lambda),$$

que é aberto em X , provando (d) \Rightarrow (c). ■

Agora discutiremos a relação entre convergência de redes/sequências e filtros com continuidade de funções entre espaços topológicos.

Proposição 1.3.3. [24, p. 75] Sejam X e Y espaços topológicos e $x \in X$. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em x se e somente se para toda rede (x_λ) convergente a x , a rede $f(x_\lambda)$ converge a $f(x)$.

Demonstração: Se f é contínua, dada vizinhança V de $f(x)$, sabemos que existe vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$. Se (x_λ) converge a x , então existe λ_0 tal que $x_\lambda \in U$ para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Portanto,

$$f(x_\lambda) \in V$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$ e $(f(x_\lambda))$ converge a $f(x)$.

Para a outra direção, provaremos a contrapositiva. Se f não é contínua em x , então existe uma vizinhança V de $f(x)$ tal que para toda vizinhança U de x

$$f(U) \not\subset V.$$

Portanto, para cada vizinhança U de x podemos tomar x_U tal que $f(x_U) \notin V$. Direcionamos o sistema de vizinhanças de x definindo que $U_1 \leq U_2$ se $U_2 \subseteq U_1$. Assim, (x_U) converge a x mas $(f(x_U))$ não pode convergir a $f(x)$ pois

$$f(x_U) \notin V$$

para todo U . ■

Definição 1.3.4. [24, p. 79] Se \mathfrak{F} é um filtro em X e $f : X \rightarrow Y$, o **filtro $f(\mathfrak{F})$ induzido por f** é o filtro gerado pela base composta pelos conjuntos $f(F)$ com $F \in \mathfrak{F}$. □

Proposição 1.3.5. [24, p. 79] Sejam X e Y espaços topológicos e $x \in X$. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é contínua em x se e somente se o filtro $f(\mathfrak{F})$ converge a $f(x)$ sempre que o filtro \mathfrak{F} converge a x .

Demonstração: Seja f contínua em x . Dada vizinhança V de $f(x)$, existe vizinhança U de x tal que $f(U) \subset V$. Portanto, se \mathfrak{F} é um filtro convergente a x , existe $F \in \mathfrak{F}$ tal que $F \subset U$, e assim $f(F) \subset V$ e $f(\mathfrak{F})$ é mais fino que o filtro das vizinhanças de $f(x)$, ou seja, $f(\mathfrak{F})$ converge a x .

Se o filtro $f(\mathfrak{F})$ converge a $f(x)$ sempre que \mathfrak{F} converge a x , temos em particular que isso acontece quando \mathfrak{F} é o filtro das vizinhanças de x . Nesse caso, $f(\mathfrak{F})$ é mais fino que o filtro das vizinhanças de x . Assim, dada vizinhança V de x , existe vizinhança $F \in \mathfrak{F}$ tal que $f(F) \subseteq V$, portanto f é contínua em x . ■

Existem funções contínuas com especiais. Vejamos algumas delas.

Definição 1.3.6. Sejam X e Y espaços topológicos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é chamada de **homeomorfismo** se ela for bijetiva, contínua e sua inversa for contínua. Dizemos que f é **mergulho** de X em Y se f é homeomorfismo sobre sua imagem, isto é, se ao trocarmos Y por $\text{Im}(f)$, ela é homeomorfismo. □

Observemos que um homeomorfismo leva conjuntos abertos em conjuntos abertos, pois sua inversa existe e é contínua. Uma função com essa propriedade é chamada de **função aberta** e podemos afirmar que uma função é homeomorfismo se e somente se ela for bijetiva, contínua e aberta.

Definição 1.3.7. [19, p. 176] Sejam (X, d) e (Y, d') dois espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é **uniformemente contínua** se para todo $\varepsilon > 0$, existir $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta$$

implica

$$d'(f(x), f(y)) \leq \varepsilon.$$

□

Proposição 1.3.8. Toda função uniformemente contínua é contínua.

Demonstração: Se (X, d) e (Y, d') são espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ é uma função uniformemente contínua, dado $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$d(x, y) < \delta$$

implica

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Logo, fixado $x_0 \in X$ se

$$d(x_0, y) < \delta$$

então

$$d'(f(x_0), f(y)) < \varepsilon.$$

Desse modo, dada vizinhança V de $f(x_0)$, existe r tal que

$$B_{d'}(f(x_0), r) \subset V,$$

e assim, para algum $\delta > 0$

$$f(B_d(x_0, \delta)) \subseteq B_{d'}(f(x_0), r) \subseteq V$$

e f é contínua em x_0 . Pela arbitrariedade de x_0 , f é contínua em todo ponto. ■

Definição 1.3.9. [3, p. 21] Sejam (X, d) e (Y, d') dois espaços métricos. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é **Lipschitz** se existe $K \geq 0$ tal que

$$d'(f(x), f(y)) \leq Kd(x, y).$$

□

Proposição 1.3.10. Toda função Lipschitz é contínua.

Demonstração: Se (X, d) e (Y, d') são espaços métricos e $f : X \rightarrow Y$ é uma função Lipschitz, então fixado $x_0 \in X$, vale que

$$d'(f(x_0), f(y)) \leq Kd(x_0, y).$$

Portanto, dada vizinhança V de $f(x_0)$, existe r tal que

$$B_{d'}(f(x_0), r) \subset V,$$

e assim, se $s \leq r/K$,

$$f(B_d(x_0, s)) \subseteq B_{d'}(f(x_0), r) \subset V,$$

pois

$$d'(f(x_0), f(y)) \leq Kd(x_0, y) < K \cdot s < r.$$

Desse modo, f é contínua em x_0 e como o processo independe do ponto, é contínua em todo ponto de X . ■

1.4 Axiomas de Separação

Partimos agora para a discussão acerca de axiomas de separação. Como o nome sugere, trataremos de algumas características acerca da possibilidade de separar dois conjuntos do espaço, que se traduz no conceito de obter um aberto que contém um dos conjuntos e não intersecta o outro. Isso se dá em vários níveis e tem suas implicações. Contudo, apresentaremos apenas alguns deles.

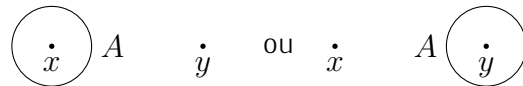
Definição 1.4.1. [24, p. 85] Um espaço topológico (X, T) é um espaço T_0 , ou seja, T é uma topologia T_0 se e somente se, dados pontos distintos x, y de X , existe um aberto A que contém um ponto, mas não contém o outro pelo menos para um dos pontos.

□

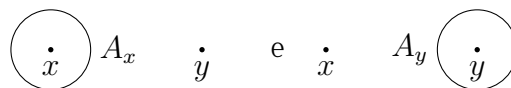
Definição 1.4.2. [24, p. 86] Um espaço topológico (X, T) é um espaço T_1 , ou seja, T é uma topologia T_1 se e somente se, dados pontos distintos x, y de X , existe um aberto A_x que contém x mas não y e A_y que contém y mas não x .

□

Observemos a diferença sutil que existe entre esses dois níveis. Enquanto no caso T_0 devemos ter (esquemáticamente)



e no caso T_1 devemos ter



Agora, não temos nenhuma restrição sobre o aberto que contém esses pontos, eles podem muito bem ter interseção não vazia no caso T_1 . Portanto, temos mais um nível, que adiciona a restrição de serem disjuntos.

Definição 1.4.3. [24, p. 86] Um espaço topológico (X, T) é um espaço T_2 , ou seja, T é uma topologia T_2 se e somente se, dados pontos distintos x, y de X , existe um aberto A_x que contém x mas não y e A_y que contém y mas não x , com A_x e A_y disjuntos. Esse tipo de espaço é comumente chamado de **espaço de Hausdorff**.

□

A propriedade de ser de Hausdorff tem uma consequência importantíssima.

Proposição 1.4.4. [24, p. 86] Se (X, T) é um espaço de Hausdorff, então todo filtro/rede convergente possui um único ponto limite.

Demonstração: Se X é de Hausdorff, suponhamos por absurdo que um filtro \mathfrak{F} converge a dois pontos distintos x e y . Nesse caso, \mathfrak{F} refina um sistema de vizinhanças de x e y . Ora, existem abertos disjuntos A_x e A_y contendo x e y , respectivamente. Logo, devem existir $F_1, F_2 \in \mathfrak{F}$ contidos em A_x e A_y , respectivamente. Desse modo, $F_1 \cap F_2 = \emptyset$, mas isso é um absurdo, pois um filtro não contém elementos disjuntos. Concluímos então que \mathfrak{F} deve possuir um único ponto limite.

Para provar para redes, lembramos que, pelo Teorema 1.2.16, uma rede converge a um ponto se e somente se o filtro induzido por ela converge ao ponto. Desse modo, se uma rede converge a mais de um ponto, o filtro induzido por ela também converge, mas isso é um absurdo pelo que acabamos de provar.

■

Definição 1.4.5. [24, p. 99] Um espaço topológico (X, T) é um espaço **completamente de Hausdorff** se para todo par de pontos $x, y \in X$ existe uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 0$ e $f(y) = 1$.¹ □

Até agora temos uma linearidade na hierarquia dessa classificação, todo espaço T_2 é T_1 e todo espaço T_1 é T_0 .

Proposição 1.4.6. [24, p. 86] Se (X, T) é um espaço T_1 , então pontos são conjuntos fechados.

Demonstração: Mostraremos que o complementar de um conjunto unitário é aberto. Dados $x \in X$ e $y \in \{x\}^c$, uma vez que a topologia é T_1 existe um aberto A_y contendo y que não contém x . Portanto $A_y \subset \{x\}^c$ e

$$\{x\}^c = \bigcup_{y \in \{x\}^c} A_y$$

é um conjunto aberto. Sendo assim, $\{x\}$ é um conjunto fechado em (X, T) . ■

Definição 1.4.7. [24, p. 92] Um espaço topológico (X, T) é um **espaço regular** se e somente se dados um ponto x de X e um fechado $F \subset X$ existem abertos disjuntos A_x e A_F com $x \in A_x$ e $F \subset A_F$. □

Nem todo espaço regular é de Hausdorff, basta observar que pontos não são necessariamente fechados em um espaço regular, mas não T_1 . Contudo, quando temos um espaço T_1 vale que pontos são fechados e ao adicionar a regularidade obtemos um espaço de Hausdorff. Essa propriedade é particularmente importante para nossos propósitos, pois a grande maioria dos espaços topológicos trabalhados serão T_1 , portanto ao assumir a regularidade estaremos ganhando a propriedade de Hausdorff como bônus.

Proposição 1.4.8. Todo espaço topológico (X, T) que é T_1 e regular é de Hausdorff.

Demonstração: Uma vez que (X, T) é T_1 , pontos são fechados. Portanto, se $x, y \in X$, a regularidade garante a existência de abertos A_x e A_y disjuntos que contenham x e y respectivamente. ■

Definição 1.4.9. Um espaço topológico (X, T) é um espaço T_3 se o espaço for T_1 e regular. □

Lema 1.4.10. [19, p. 196] Seja (X, T) um espaço topológico. Vale que X é regular se e somente se para cada aberto U contendo um ponto x existe um aberto V , com $x \in V$, tal que $\overline{V} \subset U$

Demonstração: Se X é regular, dado $x \in X$ e aberto U contendo x , U^c é fechado. Assim, existem abertos disjuntos A_x e A_{U^c} contendo x e U^c respectivamente. Portanto,

$$x \in A_x \subseteq \overline{A_x} \subset U.$$

Se para todo x e aberto U contendo x existe V tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq U,$$

então dado fechado F e $x \notin F$, F^c é aberto contendo x , e assim existe V tal que

$$x \in V \subseteq \overline{V} \subseteq F^c.$$

Uma vez que \overline{V} é fechado, $A_{F^c} = \overline{V}^c$ é aberto disjunto a V e contém F . Definindo $A_x = U$, temos que X é regular. ■

¹Antigamente este espaço era chamado de espaço de Stone [18, p. 163].

Definição 1.4.11. [19, p. 236] Um espaço topológico (X, T) é **completamente regular** se pontos em X são fechados e, para todo $x \in X$ e $A \subset X$ fechado que não contém x existe uma função contínua $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(x) = 1 \quad \text{e} \quad f(B) = \{0\}.$$

□

Definição 1.4.12. Um espaço topológico (X, T) é um espaço $T_{3\frac{1}{2}}$ se o espaço for T_1 e completamente regular.

□

Definição 1.4.13. [24, p. 99] Um espaço topológico (X, T) é um espaço **normal** se para todo par de fechados $E, F \subseteq X$ existem abertos disjuntos A_E e A_F com $E \subseteq A_E$ e $F \subseteq A_F$.

□

Definição 1.4.14. [24, p. 99] Um espaço topológico (X, T) é um espaço T_4 se o espaço for T_1 e normal.

□

O principal exemplo de espaços normais são os espaços métricos (veja [19, p. 202]).

1.5 Compacidade

Este é um conceito de enorme importância. Sobre conjuntos compactos, funções contínuas possuem um comportamento mais restrito. Além disso, muitas vezes a compacidade permite determinar propriedades extras dos espaços.

Definição 1.5.1. [19, p. 164] Uma **cobertura** de um conjunto $Y \subseteq X$ é uma coleção \mathfrak{C} de subconjuntos de X tais que

$$Y \subseteq \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C.$$

Se X está dotado de uma topologia e os elementos de \mathfrak{C} são abertos, dizemos que \mathfrak{C} é uma **cobertura aberta**. Uma **subcobertura** \mathfrak{C}' de uma cobertura \mathfrak{C} é uma coleção de conjuntos de \mathfrak{C} que também é cobertura.

□

Definição 1.5.2. [19, p. 164] Um espaço topológico (X, T) é chamado de **compacto** se toda cobertura aberta de X possui uma subcobertura finita.

□

Apesar da definição tratar de espaços topológicos, temos o costume de falar de **conjuntos compactos**. Nesse sentido, um conjunto $Y \subset X$ é compacto se ele como espaço topológico é um espaço compacto. Além disso, dada a natureza da topologia em Y ser simplesmente a restrição de T a Y , temos que Y é compacto se toda cobertura aberta de Y possuir uma subcobertura finita.

Podemos nos perguntar se existe alguma relação entre conjuntos compactos e conjuntos fechados. As duas proposições a seguir tratam disso.

Proposição 1.5.3. Todo subconjunto fechado F de um espaço topológico compacto X é compacto.

Demonstração: Seja \mathfrak{C} uma cobertura aberta de um conjunto fechado $F \subset X$. O conjunto F^c é aberto, portanto

$$\mathfrak{C} \cup \{F^c\}$$

é uma cobertura de X , pois

$$F \subseteq \bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C.$$

Uma vez que o espaço é compacto, existe uma subcobertura finita, ou seja, existem $C_1, \dots, C_n \in \mathfrak{C}$ tais que

$$X = C_1 \cup \dots \cup C_n \cup F^c.$$

Ora, $F \cap F^c = \emptyset$, logo

$$F \subseteq C_1 \cup \dots \cup C_n$$

e obtemos uma subcobertura finita de \mathfrak{C} e F é compacto. ■

Proposição 1.5.4. [2, p. 86] Todo subconjunto compacto de um espaço topológico de Hausdorff X é um conjunto fechado.

Demonstração: Se F é subconjunto compacto de X , mostraremos que F^c é aberto. Se F^c é vazio, não precisamos fazer nada. Se existe $x \in F^c$, pelo fato de X ser de Hausdorff, para cada $f \in F$ podemos tomar abertos disjuntos U_f e V_f tais que

$$f \in V_f \quad \text{e} \quad x \in U_f.$$

Se fazemos isso para todo $f \in F$, a coleção

$$\mathfrak{C} = \{V_f \mid f \in F\}$$

é uma cobertura aberta de F . Ora, F é compacto, portanto existe uma subcobertura finita de \mathfrak{C} , ou seja, existe $\{f_1, \dots, f_n\} \subseteq F$ tal que

$$F \subseteq V_{f_1} \cup \dots \cup V_{f_n} = V.$$

Assim,

$$x \in U_{f_1} \cap \dots \cap U_{f_n} = U_x.$$

Os abertos U e V são disjuntos, pois $V_f \cap U_f = \emptyset$ para todo $f \in F$. Assim obtemos um aberto que contém x mas não intersecta F . Realizando o processo para cada $x \in F^c$ temos que F^c é aberto, pois

$$F^c = \bigcup_{x \in F^c} U_x.$$

Para provar que um espaço é compacto, ao invés de provar para toda cobertura, existe um resultado que reduz nosso trabalho a uma coleção menor de coberturas, o chamado Lema de Alexander. ■

Teorema 1.5.5 (Lema da Sub-base de Alexander). [15, p. 139]

Se \mathcal{S} é uma sub-base para um espaço topológico X tal que toda cobertura de X por elementos de \mathcal{S} possui uma subcobertura finita, então X é compacto.

Demonstração: Veja [15, p. 139]. ■

Assim como caracterizamos conjuntos fechados por filtros e redes, conjuntos compactos também possuem caracterização por essas estruturas e elas são equivalentes. Antes, introduzimos um novo conceito.

Definição 1.5.6. Uma coleção \mathfrak{C} de subconjuntos de X satisfaz a **propriedade da interseção finita** se toda subcoleção finita

$$\{C_1, \dots, C_n\}$$

de \mathfrak{C} possui interseção $C_1 \cap \dots \cap C_n$ não vazia. □

Teorema 1.5.7. [24, p. 118] Seja X um espaço topológico. As seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) X é compacto.
- (b) Toda coleção de subconjuntos fechados de X que satisfaz a propriedade da interseção finita possui interseção não vazia.
- (c) Todo filtro em X possui um ponto de acumulação
- (d) Toda rede em X possui um ponto de acumulação.

Demonstração: (a)⇒(b): Seja \mathfrak{C} uma coleção de subconjuntos fechados de X que satisfaz a propriedade da interseção finita. Suponhamos por absurdo que

$$\bigcap_{C \in \mathfrak{C}} C = \emptyset.$$

Isso significa que para todo ponto $x \in X$ existe $C \in \mathfrak{C}$ tal que $x \notin C$. Uma vez que os conjuntos de \mathfrak{C} são fechados,

$$\mathfrak{C}' = \{C^c \mid C \in \mathfrak{C}\}$$

é uma coleção de abertos de X . Além disso,

$$\bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C^c = \left(\bigcap_{C \in \mathfrak{C}} C \right)^c = X.$$

Sendo assim, \mathfrak{C}' é uma cobertura aberta de X e existe uma subcobertura finita, ou seja, existem $C_1, \dots, C_n \in \mathfrak{C}$ tais que

$$X = C_1^c \cup \dots \cup C_n^c.$$

Desse modo,

$$\emptyset = X^c = (C_1^c \cup \dots \cup C_n^c)^c = C_1 \cap \dots \cap C_n,$$

o que é um absurdo, pois \mathfrak{C} satisfaz a propriedade da interseção finita.

(b)⇒(c): Todo filtro satisfaz a propriedade da interseção finita. Sendo assim, dado um filtro \mathfrak{F} , definimos

$$\mathfrak{F}' = \{\overline{F} \mid F \in \mathfrak{F}\}$$

e esta família de conjuntos fechados satisfaz a propriedade da interseção finita. Portanto,

$$\bigcap_{F \in \mathfrak{F}} \overline{F} \neq \emptyset.$$

Sendo assim, existe x na interseção e para toda vizinhança V de x

$$V \cap \overline{F} \supseteq \{x\} \neq \emptyset.$$

Assim, $x \in \overline{F}$ para todo $F \in \mathfrak{F}$ e para toda vizinhança V de x e todo $F \in \mathfrak{F}$

$$F \cap V \neq \emptyset,$$

ou seja, x é ponto de acumulação de \mathfrak{F} .

(c)⇒(d): Dada uma rede (x_λ) em X , podemos induzir um filtro \mathfrak{F} que tem como base os conjuntos

$$F_{\lambda_0} = \{x_\lambda \mid \lambda \geq \lambda_0\}.$$

Ora, o filtro \mathfrak{F} possui um ponto de acumulação x , o que significa que para toda vizinhança V de x e todo $F \in \mathfrak{F}$

$$F \cap V \neq \emptyset.$$

Em particular, para todo λ_0

$$F_{\lambda_0} \cap V \neq \emptyset$$

e para todo λ_0 existe $\lambda \geq \lambda_0$ tal que

$$x_\lambda \in V.$$

Assim, x é ponto de acumulação da rede (x_λ) .

(d) \Rightarrow (a): Provaremos a contrapositiva, ou seja, que se X não é compacto, então existe uma rede em X que não possui ponto de acumulação. Ora, se X não é compacto, existe uma cobertura aberta \mathfrak{C} de X que não admite subcobertura finita. Definimos

$$\Lambda(\mathfrak{C}) = \{\lambda \mid \lambda \text{ é coleção finita de elementos de } \mathfrak{C}\}.$$

Vamos direcionar $\Lambda(\mathfrak{C})$ definindo $\lambda_1 \leq \lambda_2$ se $\lambda_1 \subseteq \lambda_2$. De fato, $\Lambda(\mathfrak{C})$ dotado da relação \leq é direcionado, pois

(i) $\lambda \subseteq \lambda$ para todo $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{C})$, portanto $\lambda \leq \lambda$.

(ii) Dados $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \Lambda(\mathfrak{C})$ tais que $\lambda_1 \leq \lambda_2$ e $\lambda_2 \leq \lambda_3$, temos

$$\lambda_1 \subseteq \lambda_2 \subseteq \lambda_3,$$

e portanto $\lambda_1 \leq \lambda_3$.

(iii) Dados $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda(\mathfrak{C})$,

$$\lambda_3 = \lambda_1 \cup \lambda_2 \in \Lambda(\mathfrak{C}),$$

e por definição $\lambda_1 \subseteq \lambda_3$ e $\lambda_2 \subseteq \lambda_3$, portanto

$$\lambda_1 \leq \lambda_3 \quad \text{e} \quad \lambda_2 \leq \lambda_3.$$

Cada $\lambda \in \Lambda(\mathfrak{C})$ é da forma

$$\{C_1, \dots, C_n\}$$

onde $C_1, \dots, C_n \in \mathfrak{C}$. Uma vez que a cobertura \mathfrak{C} não admite subcobertura finita,

$$Y_\lambda = X \setminus (\cup_{C \in \lambda} C) = X \setminus (C_1 \cup \dots \cup C_n) \neq \emptyset,$$

e podemos tomar $x_\lambda \in Y_\lambda$. Agora definimos

$$P: \Lambda(\mathfrak{C}) \longrightarrow X \\ \lambda \longmapsto x_\lambda.$$

Isso é uma rede (x_λ) em X . Afirmamos que essa rede não possui ponto de acumulação. Ora, dado qualquer ponto $x \in X$, existe $C \in \mathfrak{C}$ que contém x , mas C é uma vizinhança de x e por definição, se $\lambda_0 = C$

$$x_\lambda \notin C$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Sendo assim, x não é ponto de acumulação da rede (x_λ) . Pela arbitrariedade de x , nenhum ponto pode ser ponto de acumulação da rede e provamos o desejado. ■

Corolário 1.5.8. Em um espaço compacto, toda sequência possui uma subrede convergente.

Demonstração: Diretamente do Teorema 1.5.7. ■

Infelizmente, não podemos afirmar que a sub-rede convergente da sequência é uma subsequência. Isso vale quando o espaço é métrico.

Teorema 1.5.9. [19, p. 179] Um espaço métrico (X, d) é compacto se e somente se toda sequência admite uma subsequência convergente.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que X seja compacto mas exista uma sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq X$ que não admite subsequência convergente. Em particular, a própria sequência não pode convergir a nenhum ponto, portanto para todo $x \in X$ existe $\varepsilon_x > 0$ para o qual

$$x_n \in B(x, \varepsilon_x)$$

apenas para uma coleção finita de índices n . Desse modo, escrevemos

$$X = \bigcup_{a \in X} B(a, \varepsilon_a),$$

e pela compacidade de X existe uma subcobertura finita, ou seja, $a_1, \dots, a_n \in X$ tais que

$$X = B(a_1, \varepsilon_{a_1}) \cup \dots \cup B(a_n, \varepsilon_{a_n}).$$

Daí, temos que (x_n) deveria ser um conjunto finito, mas isso é um absurdo, pois nesse caso teríamos uma subsequência constante, e conseqüentemente convergente. Logo, toda sequência deve admitir subsequência convergente.

Agora, se toda sequência admite subsequência convergente, provaremos que X é compacto. Para isso, precisamos mostrar que se X é sequencialmente compacto, então para cada cobertura aberta \mathfrak{U} de X existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe $U \in \mathfrak{U}$ de modo que

$$B(x, \delta) \subseteq U.$$

Ora, suponhamos por absurdo que não. Nesse caso, para alguma cobertura aberta \mathfrak{U} ocorre que, para todo $\delta > 0$, existe $x \in X$ para o qual $B(x, \delta)$ não está contida em qualquer elemento de \mathfrak{U} . Em particular, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos tomar $x_n \in X$ para o qual $B(x_n, 1/n)$ não está contida em qualquer elemento de \mathfrak{U} . Isso nos dá uma sequência (x_n) em X , que deve possuir uma subsequência (x_{n_k}) convergente a um ponto $y \in X$. Agora, y pertence a algum elemento U de \mathfrak{U} , que é aberto. Logo, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(y, \varepsilon) \subseteq U.$$

Pela convergência de (x_{n_k}) a y , existe N para o qual $1/n_k < \varepsilon/2$ e

$$x_{n_k} \in B(y, \varepsilon/2)$$

se $n_k \geq N$. Assim, para qualquer $n_k \geq N$

$$B(x_{n_k}, 1/n_k) \subseteq B(y, \varepsilon) \subseteq U,$$

o que é uma contradição, pela escolha de x_{n_k} . Desse modo, tal δ existe para toda cobertura aberta.

Com isso, podemos provar que X é compacto. Dada uma cobertura \mathfrak{U} de X , tomamos $\delta > 0$ para o qual para todo $x \in X$ existe $U \in \mathfrak{U}$ de modo que

$$B(x, \delta) \subseteq U.$$

Vamos provar que existe uma subcobertura finita da cobertura aberta

$$\mathfrak{B} = \{B(x, \delta) \mid x \in X\}$$

e conseqüentemente teremos uma subcobertura finita da cobertura \mathfrak{U} . Suponhamos por absurdo que não exista subcobertura finita de \mathfrak{B} . Fixamos $x_1 \in X$, e por não existir subcobertura finita, existe $x_2 \notin B(x_1, \delta)$. Prosseguimos construindo uma seqüência (x_n) de modo que

$$x_n \notin \bigcup_{i=1}^{n-1} B(x_i, \delta).$$

Observemos que pela escolha dos pontos,

$$d(x_n, x_m) \geq \delta$$

para todo $n \neq m$. Assim, temos que esta seqüência não admite subsequência convergente, pois caso contrário teríamos que para algum ponto $y \in X$ existem $x_n, x_m \in B(y, \delta/2)$, em que $n \neq m$, mas isso significa que

$$d(x_n, x_m) < \delta,$$

o que é um absurdo, e desse modo completamos a demonstração. ■

A não compacidade em espaços métricos garante a existência de um conjunto que será fundamental para alguns resultados.

Definição 1.5.10. Dado um espaço topológico (X, T) , dizemos que X é um **espaço discreto** se todo ponto de X é aberto. Um subconjunto $A \subseteq X$ é um **conjunto discreto** se for discreto como subespaço. □

Corolário 1.5.11. Se (X, d) é um espaço métrico não compacto, então existe um subconjunto de X que é infinito enumerável e discreto.

Demonstração: Se X é não compacto, existe uma seqüência (x_n) em X que não admite uma subsequência convergente. Justamente por não possuir subsequência convergente, a seqüência deve passar por uma coleção infinita e enumerável de pontos. Afirmamos que esta seqüência é um subconjunto discreto e provaremos isso mostrando a existência de um aberto de X que contém apenas x_n para cada $n \in \mathbb{N}$.

Dado que a seqüência (x_n) não admite subsequência convergente, para cada n existe δ_n para o qual

$$|B(x_n, \delta_n) \cap (x_n)| < \infty.$$

Assim, como o espaço é de Hausdorff, pontos são conjuntos fechados. Se $x_{m_1}, \dots, x_{m_{k_n}}$, são os pontos da seqüência em $B(x_n, \delta_n)$, temos o aberto

$$A_n = B(x_n, \delta_n) \cap \{x_{m_1}\}^c \cap \dots \cap \{x_{m_{k_n}}\}^c$$

que contém apenas o ponto x_n da seqüência, e a seqüência é um subconjunto discreto. ■

1.5.1 Compacidade e Outras Propriedades

A compacidade ou a não compacidade de um espaço pode induzir várias outras propriedades no espaço. Discutiremos algumas delas.

Proposição 1.5.12. Se X é um espaço T_1 e segundo contável, mas não compacto, então existe subconjunto infinito contável de X sem pontos de acumulação.

Demonstração: Sendo X segundo contável e não compacto, existe uma cobertura de X enumerável, que não possui subcobertura finita. De fato, sabemos que existe uma cobertura \mathfrak{C} que não possui uma subcobertura finita. Para cada $C \in \mathfrak{C}$ e $x \in C$ existe aberto básico $B_{C,x} \subset C$ contendo x . Uma vez que a base é contável, temos

$$\mathfrak{B} = \{B_{C,x} \mid C \in \mathfrak{C}, x \in C\}$$

contável. Afiramos que esta coleção é uma cobertura que não possui subcobertura finita. Suponhamos por absurdo que ela possui uma subcobertura finita

$$\{B_{x_1,C_1}, \dots, B_{x_n,C_n}\}.$$

Sendo assim, $B_{x_i,C_i} \subseteq C_i$ e

$$X = B_{x_1,C_1} \cup \dots \cup B_{x_n,C_n} \subseteq C_1 \cup \dots \cup C_n,$$

mas isso é um absurdo, pois \mathfrak{C} não admite subcobertura finita. Logo, \mathfrak{B} não admite subcobertura finita. Seja

$$\mathfrak{U} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

uma cobertura enumerável que não possui subcobertura finita. Podemos supor, sem perda de generalidade, que para todo m

$$U_m \setminus \left(\bigcup_{n < m} U_n \right).$$

Usando o fato de X ser T_1 , para cada $n \in \mathbb{N}$, escolhemos $x_n \in U_n$ tal que

$$x_n \notin U_k,$$

se $k < n$, construindo uma sequência (x_n) . Afiramos que $\{x_n\}$ é um conjunto sem pontos de acumulação. De fato, para $x \in X$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $x \in U_N$, logo

$$x_n \notin U_N$$

se $n > N$. Se $x \neq x_n$, tome

$$V_x = U_N \cap \{x_1\}^c \cap \dots \cap \{x_N\}^c,$$

se $x = x_n$, tome

$$V_x = U_N \cap \{x_1\}^c \cap \dots \cap \{x_{N-1}\}^c.$$

Pela construção de $\{x_n\}$, temos que V_x não contém outros pontos de $\{x_n\}$ além de possivelmente o próprio x_n quando $x = x_n$, portanto $\{x_n\}$ não possui pontos de acumulação. ■

Corolário 1.5.13. Se X é um espaço T_1 e segundo contável, mas não compacto, então existe subconjunto de X que é infinito contável e discreto.

Demonstração: O próprio conjunto $Y = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ obtido anteriormente é discreto como subespaço de X pois existem abertos V_{x_n} tais que

$$V_{x_n} \cap Y = \{x_n\}.$$

■

Proposição 1.5.14. Se X é um espaço completamente de Hausdorff, para um compacto F e um ponto $x \in F^c$ existe uma função contínua $g : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $g(F) = 0$ e $g(x) = 1$.

Demonstração: Para cada $f \in F$, existe uma função contínua $h_f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$h_f(f) = 0 \quad \text{e} \quad h_f(x) = 1.$$

Sendo assim, podemos cobrir F pelos conjuntos abertos

$$h_a^{-1}([0, 1/2)) = \{y \in X \mid h_a(y) < 1/2\}.$$

Pela compacidade de F , existe uma coleção finita $\{a_1, \dots, a_n\} \subseteq A$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n h_{a_i}^{-1}([0, 1/2)) = B.$$

Definimos então $h : X \rightarrow [1/2, 1)$ como se segue:

$$h(\overline{B}) = 1/2,$$

e se $x \notin \overline{B}$, então

$$g(x) = \min\{h_{a_1}(x), \dots, h_{a_n}(x)\}.$$

Afirmamos que h é uma função contínua. De fato

$$\begin{aligned} h^{-1}([1/2, a)) &= \{x \in X \mid h(x) < a\} \\ &= \{x \in X \mid \exists i : h_{a_i}(x) < a\} \\ &= h_{a_1}^{-1}([0, a)) \cup \dots \cup h_{a_n}^{-1}([0, a)) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} h^{-1}((b, 1]) &= \{x \in X \mid h(x) > b\} \\ &= \{x \in X \mid \forall i : h_{a_i}(x) > b\} \\ &= h_{a_1}^{-1}((b, 1]) \cap \dots \cap h_{a_n}^{-1}((b, 1]) \end{aligned}$$

são conjuntos abertos, portanto h é contínua. Definindo $g : X \rightarrow [0, 1]$ como

$$g(x) = 2h(x) - 1,$$

temos $g(F) = 0$ e $g(x) = 1$. ■

Proposição 1.5.15. [19, p. 202] Todo espaço de Hausdorff e compacto é normal

Demonstração: Se X é de Hausdorff, sejam E e F fechados. Fixado $f \in F$, para cada $e \in E$ podemos tomar abertos disjuntos $U_{e,f}$ e $V_{e,f}$ com

$$e \in U_{e,f} \quad \text{e} \quad f \in V_{e,f}.$$

A coleção

$$\mathfrak{C}_f = \{U_{e,f} \mid e \in E\}$$

é uma cobertura aberta de E . Uma vez que X é compacto, E é compacto, e existe uma subcobertura finita

$$\mathfrak{D}_f = \{U_{e_1,f}, \dots, U_{e_{n(f)},f}\}.$$

Portanto,

$$U_f = \bigcup_{i=1}^{n(f)} U_{e_i,f}$$

é um aberto que contém E e disjunto a

$$V_f = \bigcap_{i=1}^{n(f)} V_{e_i, f}.$$

Fazemos o mesmo processo para cada $f \in F$, obtendo uma cobertura

$$\mathfrak{V} = \{V_f \mid f \in F\}$$

de F . Agora, F é um conjunto fechado, portanto compacto, e existe uma subcobertura finita

$$\mathfrak{U} = \{V_{f_1}, \dots, V_{f_m}\}.$$

Desse modo,

$$V = \bigcup_{i=1}^m V_{f_i}$$

e

$$U = \bigcap_{i=1}^m U_{f_i}$$

são abertos disjuntos contendo F e E respectivamente, e X é normal. ■

Proposição 1.5.16. Todo espaço topológico métrico compacto é separável.

Demonstração: Se X é métrico e compacto, para cada $m \in \mathbb{N}$ podemos tomar a cobertura

$$\mathfrak{C}_n = \{B(x, 1/n) \mid x \in X\}.$$

Assim, pela compacidade de X , existem

$$x_{1,n}, \dots, x_{m_n,n}$$

de modo que

$$\mathfrak{B}_n = \{B(x_{1,n}, 1/n), \dots, B(x_{m_n,n}, 1/n)\}$$

constitui uma subcobertura finita de \mathfrak{C}_n . Definimos o conjunto

$$B_n = \{x_{k,n} \mid k \in \{1, \dots, m_n\}\}$$

e

$$B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n.$$

Uma vez que cada B_n é finito, B é enumerável, e afirmamos que B é denso em X . Ora, dado $x \in X$ e $r > 0$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$B(x, 1/n) \subseteq B(x, r).$$

Portanto, pelo fato de \mathfrak{B}_n ser cobertura, existe $x_k \in B_n$ tal que

$$x_k \in B(x, 1/n).$$

Assim, B é denso em X e este é um espaço separável. ■

Corolário 1.5.17. Todo espaço topológico métrico compacto é segundo-contável.

Demonstração: Pela Proposição 1.5.16, todo espaço topológico métrico compacto é separável. Agora, pela Proposição 1.7.2, todo espaço métrico separável é segundo-contável. Assim, todo espaço métrico compacto é segundo-contável. ■

Proposição 1.5.18. Se X e Y são espaço topológicos, sendo X compacto, e $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então a imagem de f é compacta em Y .

Demonstração: Seja \mathfrak{C} uma cobertura aberta de $f(X)$. Uma vez que f é contínua, temos $f^{-1}(C)$ é aberto em X para cada $C \in \mathfrak{C}$. Portanto,

$$\mathfrak{B} = \{f^{-1}(C) \mid C \in \mathfrak{C}\}$$

é uma cobertura aberta de X . Logo, existem $C_1, \dots, C_n \in \mathfrak{C}$ tais que

$$X = f^{-1}(C_1) \cup \dots \cup f^{-1}(C_n),$$

e assim

$$f(X) \subseteq C_1 \cup \dots \cup C_n.$$

Logo, toda cobertura de $f(X)$ admite subcobertura finita e a imagem de f é compacta em Y . ■

Funções contínuas sobre espaços compactos são, na verdade, funções uniformemente contínuas. Para provar esse fato, precisaremos discutir os conceitos de ínfimo, supremo e o útil Lema do número de Lebesgue.

Definição 1.5.19. [19, p. 27] Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que A é **limitado inferiormente** se existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$

$$r \leq a.$$

O número r é chamado de cota inferior. A maior cota inferior é chamada de **ínfimo** de A e denotada $\inf(A)$. □

Definição 1.5.20. [19, p. 27] Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, dizemos que A é **limitado superiormente** se existe $r \in \mathbb{R}$ tal que para todo $a \in A$

$$r \geq a.$$

O número r é chamado de cota superior. A menor cota superior é chamada de **supremo** de A e denotada $\sup(A)$. □

Observação 1.5.21. Frequentemente, quando temos uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, usamos a notação

$$\inf_{x \in X} f(x) \quad \text{e} \quad \sup_{x \in X} f(x)$$

para indicar

$$\inf(f(X)) \quad \text{e} \quad \sup(f(X)).$$

Notemos que tanto o ínfimo quanto o supremo podem existir e não pertencer ao conjunto. Por exemplo, o intervalo $(0, 1) \subseteq \mathbb{R}$ possui 0 como ínfimo e 1 como supremo, mas 0 e 1 não pertencem a $(0, 1)$.

Proposição 1.5.22. Dado subconjunto $A \subseteq \mathbb{R}$, se o ínfimo(supremo) existe, então existe uma sequência $(x_n) \subset A$ que converge ao ínfimo(supremo).

Demonstração: Seja r o ínfimo de A . A coleção de bolas da forma $B(r, 1/n)$ é um sistema fundamental de vizinhanças de r . Para cada n existe

$$x_n \in A \cap B(r, 1/n),$$

pois caso contrário $r + 1/2n$ é cota inferior de A maior que r , mas r é a maior cota inferior, então temos um absurdo. Portanto, temos $(x_n) \subset A$ uma sequência que converge a x pois

$$x_m \in B(r, 1/m) \subseteq B(r, 1/n)$$

sempre que $m \geq n$. Por um argumento, provamos a existência da sequência que converge ao supremo. ■

Proposição 1.5.23. Seja X um espaço topológico e $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Se X é compacto, então existem $x_1 \in X$ e $x_2 \in X$ tais que

$$f(x_1) = \inf(f(X)) \quad \text{e} \quad f(x_2) = \sup(f(X)).$$

Demonstração: Se X é compacto, pela Proposição 1.5.18, sua imagem é compacta em \mathbb{R} . Assim, existe uma sequência $(y_n) \subseteq f(X)$ que converge a $\inf(f(X))$. Ora, se $x_n \in X$ é tal que $f(x_n) = y_n$, (x_n) é uma sequência em X . Pela compacidade de X , temos que (x_n) admite uma subsequência (x_{n_k}) convergente, digamos a $x \in X$. Pela continuidade de f , se (x_{n_k}) converge a x , então $f(x_{n_k})$ converge a $f(x)$, mas como $f(x_{n_k})$ é subsequência de (y_n) que converge a $\inf(f(X))$, temos

$$f(x) = \inf(f(X)).$$

Logo, definimos $x = x_1$. Por um argumento análogo, provamos a existência de x_2 . ■

Definição 1.5.24. [19, p. 175] Se (X, d) é espaço métrico $x \in X$ e $A \subseteq X$, a **distância de x a A** é

$$d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$$

□

Proposição 1.5.25. [19, p. 175] Se (X, d) é espaço métrico e $A \subseteq X$, a função

$$\begin{aligned} d(\cdot, A) : X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto d(x, A) \end{aligned}$$

é contínua.

Demonstração: Dados $x, y \in X$, para cada $a \in A$ vale

$$d(x, a) \leq d(x, y) + d(y, a).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(x, A) &= \inf_{a \in A} d(x, a) \\ &\leq \inf_{a \in A} (d(x, y) + d(y, a)) \\ &= d(x, y) + \inf_{a \in A} d(y, a) \\ &= d(x, y) + d(y, A). \end{aligned}$$

Portanto,

$$d(x, A) - d(x, Y) \leq d(x, y).$$

Analogamente,

$$d(x, A) - d(y, Y) \leq d(x, y),$$

e assim

$$|d(x, A) - d(y, (A))| \leq d(x, y)$$

e a função é Lipschitz, consequentemente contínua. ■

Teorema 1.5.26 (Lema do Número de Lebesgue). [19, p. 175]

Seja \mathfrak{C} uma cobertura aberta de um espaço métrico (X, d) . Se X é compacto, existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe $C \in \mathfrak{C}$ tal que

$$B(x, \delta) \subseteq C.$$

Tal δ é chamado de **número de Lebesgue** da cobertura \mathfrak{C} .

Demonstração: Seja \mathfrak{C} uma cobertura aberta de X . Se $X \in \mathfrak{C}$, qualquer $\delta > 0$ serve, portanto, assumimos que $X \notin \mathfrak{C}$. Pela compacidade de X , existe uma subcobertura finita $\{C_1, \dots, C_n\}$ de \mathfrak{C} . Para tal cobertura, definimos

$$D_i = C_i^c$$

e uma função $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n d(x, D_i).$$

Observemos que f é contínua, pois cada $d(x, D_i)$ é contínua e $f(x) > 0$ para todo $x \in X$, pois

$$f(x) \geq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \min\{d(x, D_i) \mid i = 1, \dots, n\} = \min\{d(x, D_i) \mid i = 1, \dots, n\} > 0.$$

Pela compacidade de X e continuidade de f ,

$$\inf(f(X)) > 0,$$

uma vez que se fosse 0, existiria x satisfazendo $f(x) = 0$, um absurdo. Portanto, definindo $\delta = \inf(f(X))$ vale que para todo x existe D_j tal que

$$B(x, \delta) \subseteq D_j^c = C_j,$$

uma vez que para algum j

$$\delta \leq f(x) \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \max\{d(x, D_i) \mid i = 1, \dots, n\} = d(x, D_j).$$

Teorema 1.5.27. [19, p. 176] Seja (X, d) um espaço métrico compacto e (Y, d') um espaço métrico. Se $f : X \rightarrow Y$ é contínua, então f é uniformemente contínua. ■

Demonstração: Dado $\varepsilon > 0$, para cada $y \in Y$ tomamos o conjunto $B_{d'}(y, \varepsilon/2)$. A coleção

$$\mathfrak{C} = \{B_{d'}(y, \varepsilon/2) \mid y \in Y\}$$

é uma cobertura aberta de Y e pela continuidade de f ,

$$\mathfrak{B} = \{f^{-1}(B_{d'}(y, \varepsilon/2)) \mid y \in Y\}$$

é uma cobertura aberta de X . Pelo Lema do número de Lebesgue (Teorema 1.5.26), existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in X$ existe $y \in Y$ tal que

$$B(x, \delta) \subseteq f^{-1}(B_{d'}(y, \varepsilon/2)).$$

Logo, para tal δ , se

$$d(x_1, x_2) < \delta$$

temos $x_2 \in B_d(x_1, \delta)$ e assim

$$f(x_2) \in f(B_d(x_1, \delta)) \subset f(f^{-1}(B_{d'}(y, \varepsilon/2))) = B_{d'}(y, \varepsilon/2).$$

Portanto,

$$d(f(x_1), f(x_2)) \leq d(f(x_1), y) + d(y, f(x_2)) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

■

1.6 Compacidade Local

Definição 1.6.1. [15, p. 146] Um espaço topológico X é **localmente compacto** se todo ponto possui uma vizinhança compacta.

□

Teorema 1.6.2. [15, p. 146] Se X é localmente compacto e Hausdorff, então X é regular.

Demonstração: Seja $A \subset X$ fechado e $x \in X \setminus A$. Dado que X é localmente compacto, existe uma vizinhança compacta V de x . Observamos que V é fechada, pois X é Hausdorff. Daí, se $V \cap A = \emptyset$, vale que

$$A \subset V^c,$$

onde V^c é aberto e pela definição de vizinhança existe $W \subset V$ aberto que contém x . Se $V \cap A \neq \emptyset$, seja

$$F = V \cap A.$$

Temos F um conjunto fechado contido em V , portanto F é compacto. Pelo fato do espaço ser Hausdorff, Para cada $a \in F$ podemos tomar abertos $V_a \subset V$ e W_a , com

$$a \in W_a, \quad x \in V_a, \quad \text{e} \quad V_a \cap W_a = \emptyset.$$

A coleção dos W_a constitui uma cobertura aberta de F , e por compacidade vale que existem $a_1, \dots, a_n \in F$ tais que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^n W_{a_i}.$$

Assim, tomando

$$V' = V_{a_1} \cap \dots \cap V_{a_n}$$

obtemos uma vizinhança de x em V cujo fecho não contém elementos em F , e assim

$$\overline{V'} \cap A = \emptyset.$$

Desse modo, $\overline{V'}^c$ e V' são abertos disjuntos contendo A e x respectivamente.

■

1.7 Propriedades de Espaços Metrizáveis

Definição 1.7.1. [19, p. 120] Um espaço topológico (X, T) é **metrizável** se existe uma métrica d sobre X que induz a topologia T . □

Naturalmente, todo espaço métrico é metrizável.

Proposição 1.7.2. Um espaço topológico (X, T) metrizável e separável é segundo-contável.

Demonstração: Seja

$$B = \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

um subconjunto enumerável denso de X . Uma vez que X é métrico, afirmamos que

$$\mathcal{B} = \{B(b_n, 1/m) \mid n, m \in \mathbb{N}\}$$

é base de T . Dado um aberto $U \subset X$ e $x \in U$, pelo fato de X ser metrizável, existe $r > 0$ tal que

$$B(x, r) \subseteq U.$$

Sendo assim, seja $m_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$\frac{1}{m_x} < \frac{r}{2}.$$

Uma vez que B é denso, existe $N_x \in \mathbb{N}$ tal que

$$b_{N_x} \in B(x, 1/m_x),$$

e, portanto,

$$x \in B(b_{N_x}, 1/m_x) \subseteq B(x, r) \subseteq U.$$

De fato, se $y \in B(b_{N_x}, 1/m_x)$, então

$$d(x, y) \leq d(x, b_{N_x}) + d(b_{N_x}, y) < \frac{1}{m_x} + \frac{1}{m_x} < r.$$

Desse modo, podemos escrever

$$U = \bigcup_{x \in U} B(b_{N_x}, 1/m_x)$$

e \mathcal{B} é base contável de (X, T) . ■

Existe uma propriedade de importância considerável envolvendo espaços métricos, que dentre várias de suas implicações, fornece outra caracterização de conjuntos compactos.

Definição 1.7.3. [19, p. 264] Uma sequência (x_n) em um espaço métrico (X, d) é uma **sequência de Cauchy** se para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ de modo que

$$d(x_n, x_m) < \varepsilon$$

para todos $n, m \geq N$. □

Definição 1.7.4. [19, p. 264] Se (X, d) é um espaço métrico em que toda sequência de Cauchy converge, dizemos que X é um espaço métrico **completo**. □

Existem espaços métricos que não são completos, por exemplo, o intervalo $(0, 1)$ dotado da métrica Euclidiana. Se $x_n = 1/n$, a sequência (x_n) é de Cauchy e converge a 0, mas 0 não pertence ao intervalo, logo esta é uma sequência de Cauchy que não converge (no espaço $(0, 1)$). Um espaço completo de grande relevância é \mathbb{R}^n para todo $n \in \mathbb{N}$ (veja [19, p. 265].)

Definição 1.7.5. [19, p. 275] Um subconjunto A de um espaço métrico (X, d) é **totalmente limitado** se para todo $\varepsilon > 0$ existir uma cobertura finita de A por bolas de raio ε centradas em elementos de A . □

Definição 1.7.6. [7, p. 184] Dado um espaço métrico (X, d) e $A \subseteq X$ não vazio, o **diâmetro** de A é

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) \mid x \in A, y \in A\}.$$

Se $\delta(A) < \infty$, dizemos que o conjunto é **limitado**. □

Definição 1.7.7. [7, p. 185] Se (X, d) é um espaço métrico e $\delta(X) < \infty$, dizemos que d é uma **métrica limitada**. Um subconjunto A de X é completo se for completo como espaço topológico. □

Proposição 1.7.8. Se A é um subconjunto totalmente limitado de um espaço métrico, então A é limitado.

Demonstração: Se A é totalmente limitado, então para $\varepsilon = 1$ existem $a_1, \dots, a_n \in A$ de modo que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n B(a_i, 1).$$

Logo, se

$$L = \max\{d(a_i, a_j) \mid i, j = 1, \dots, n\},$$

temos para todo $x, y \in A$, então existem i e j tais que $x \in B(a_i, 1)$ e $y \in B(a_j, 1)$. Desse modo,

$$d(x, y) \leq d(x, a_i) + d(a_i, a_j) + d(a_j, y) < L + 2.$$

Portanto, $\delta(A) \leq L + 2$ e A é limitado. ■

Proposição 1.7.9. Se A é um subconjunto limitado de \mathbb{R}^n com a métrica Euclidiana, então A é totalmente limitado.

Demonstração: Se A é limitado, então $\delta(A) = L < \infty$. Sendo assim, dado $x \in A$, digamos $x = (x_1, \dots, x_n)$, o n -cubo

$$C = \prod_{i=1}^n [x_i - L, x_i + L]$$

contém A .

Dado $\alpha > 0$, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $2L/k < \alpha$. Portanto, dividimos C em cubos com lado de comprimento $2L/k$ da forma

$$C_{(j_1, \dots, j_n)} = \prod_{i=1}^n \left[x_i - L + \frac{2L \cdot j_i}{k}, x_i - L + \frac{2L \cdot (j_i + 1)}{k} \right]$$

onde $j_i \in \{0, \dots, k - 1\}$ para cada i . Observemos que se

$$y \in C_{(j_1, \dots, j_n)},$$

então

$$C_{(j_1, \dots, j_n)} \subseteq B(y, 2\sqrt{n}L/k),$$

pois o diâmetro de $C_{(j_1, \dots, j_n)}$ é a diagonal que possui comprimento $\sqrt{n}L/k$. Desse modo, se

$$C_{(j_1, \dots, j_n)} \cap A \neq \emptyset,$$

tomamos

$$a_{(j_1, \dots, j_n)} \in C_{(j_1, \dots, j_n)} \cap A.$$

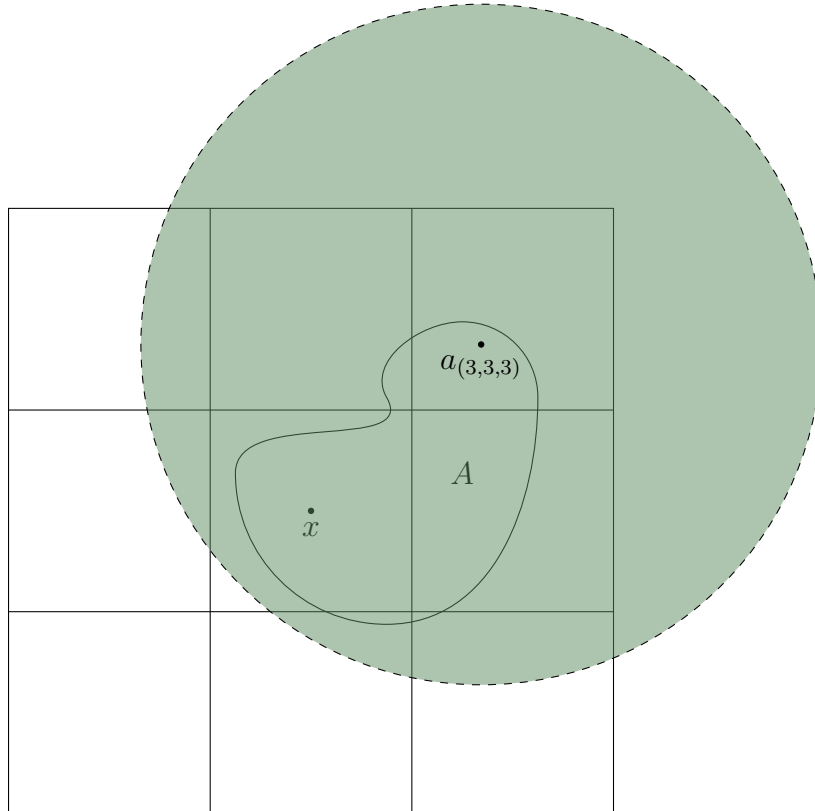


Figura 1.1: Ilustração do processo feito com a indicação de um ponto escolhido $a_{(3,3,3)}$ e a bola centrada nele.

A coleção desses elementos de A para cada sequência (j_1, \dots, j_n) é finita e

$$C_{(j_1, \dots, j_n)} \subseteq B(a_{(j_1, \dots, j_n)}, 2\sqrt{n}L/k).$$

Logo,

$$A \subseteq B(a_{(j_1, \dots, j_n)}, 2\sqrt{n}L/k) \subseteq B(a_{(j_1, \dots, j_n)}, \sqrt{n}\alpha).$$

Dado $\varepsilon > 0$, escolhemos $\alpha < \varepsilon/\sqrt{n}$ e o processo acima para tal α fornece $a_1, \dots, a_m \in A$ de modo que

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(a_i, \sqrt{n}\alpha) \subseteq \bigcup_{i=1}^m B(a_i, \varepsilon).$$

■

Teorema 1.7.10. [1, p. 20] Seja (X, d) um espaço métrico completo. Um subconjunto F de X é compacto se e somente se for fechado e totalmente limitado.

Demonstração: Se F é compacto, o fato do espaço métrico ser de Hausdorff implica que F é fechado. Além disso, F é totalmente limitado, pois dado $\varepsilon > 0$, a coleção das bolas abertas de raio ε centradas em cada $f \in F$ é uma cobertura de F . Portanto, existe uma subcobertura finita e F é totalmente limitado.

Se F é fechado e totalmente limitado, mostraremos que toda sequência (x_n) em F admite uma subsequência convergente. Uma vez que F é totalmente limitado, existem $f_{(1,1)}, \dots, f_{(n_1,1)} \in F$ tais que

$$F \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_1} B(f_{(i,1)}, 1/2).$$

Uma vez que a sequência é infinita, alguma bola $B(f_{(i,1)}, 1/2)$ deve conter uma subsequência $(x_{(n_k,1)})$ de (x_n) . Definimos y_1 como $x_{(n_1,1)}$. O conjunto

$$F_2 = F \cap B(f_{(i,1)}, 1/2)$$

é totalmente limitado, então existem $f_{(1,2)}, \dots, f_{(n_2,2)} \in F_2$ tais que

$$F_2 \subseteq \bigcup_{i=1}^{n_2} B(f_{(i,2)}, 1/2^2)$$

e novamente, existe alguma dessas bolas $B(f_{(i,2)}, 1/2^2)$ que contém uma subsequência $(x_{(n_k,2)})$ de $(x_{(n_k,1)})$. Definimos $y_2 = x_{(n_1,2)}$. Seguimos dessa forma, construindo uma sequência (y_n) por meio de bolas de raio $1/2^n$. Ora, dado que para cada n temos $y_n \in B(f_{(i,n)}, 1/2^n) \cap F$, em que

$$f_{(i,n)} \in F_n = F \cap B(f_{(i,n-1)}, 1/2^{n-1}),$$

obtemos

$$\begin{aligned} d(y_n, y_{n+1}) &\leq d(y_n, f_{(i,n)}) + d(f_{(i,n)}, f_{(i,n+1)}) + d(f_{(i,n+1)}, y_{n+1}) \\ &< \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} \\ &< \frac{1}{2^{n-2}}. \end{aligned}$$

Assim, a sequência (y_n) é uma sequência de Cauchy, pois dados $n < m \in \mathbb{N}$

$$d(y_n, y_m) \leq \sum_{i=n}^{m-1} d(y_i, y_{i+1}) < \sum_{i=n}^{m-1} \frac{1}{2^{i-2}} < \frac{1}{2^{n-3}}.$$

Desse modo, pela completude de X , (y_n) converge a $y \in X$. Uma vez que F é fechado, $y \in F$ e conseguimos uma subsequência de (x_n) que é convergente, provando que F é compacto pelo Teorema 1.5.9. ■

Corolário 1.7.11. Considere \mathbb{R}^n dotado da métrica Euclidiana. Um conjunto $F \subseteq \mathbb{R}^n$ é compacto se e somente se F é fechado e limitado.

Demonstração: O espaço \mathbb{R}^n é completo, portanto, podemos usar o Teorema 1.7.10 para obter que F é compacto se e somente se for fechado e totalmente limitado. As Proposições 1.7.8 e 1.7.9 mostram que um conjunto em \mathbb{R}^n é totalmente limitado se e somente se for limitado, portanto F é compacto se e somente se for fechado e totalmente limitado. ■

1.8 Conexidade

Definição 1.8.1. [2, p. 107] Um espaço topológico X é **conexo** se não pode ser escrito como a união de dois conjuntos abertos não vazios disjuntos. Se existe uma decomposição em dois abertos não vazios disjuntos, dizemos que existe uma **cisão** de X . □

Os intervalos na reta real constituem uma classe de espaços conexos de suma importância (veja [19, p. 153] para a demonstração da conexidade).

Observação 1.8.2. A união de conjuntos C_1 e C_2 disjuntos será denotada por

$$C_1 \sqcup C_2.$$

Observemos que se $X = C_1 \cup C_2$ é uma cisão de X , então ambos C_1 e C_2 são abertos e fechados, ou seja, realmente existe uma divisão do espaço que permite trabalhar com cada parte separadamente.

Definição 1.8.3. [2, p. 108] Um subconjunto Y de X é conexo se for conexo como subespaço topológico de X . □

Proposição 1.8.4. Seja U um subconjunto conexo de X . Se $X = C_1 \cup C_2$ é uma cisão de X , então U está contido em C_1 ou C_2 .

Demonstração: Suponhamos que U não está contido em C_1 nem C_2 . Nesse caso, $D_1 = C_1 \cap U$ e $D_2 = C_2 \cap U$ constitui uma cisão de U , o que é absurdo, pois U é conexo. ■

Proposição 1.8.5. Se $U \subset X$ é conexo e $U \subseteq V \subseteq \bar{U}$, então V é conexo.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que V possui uma cisão $V = C_1 \cup C_2$. Podemos assumir sem perda de generalidade que $U \subseteq C_1$. Nesse caso, existe $x \in (V \setminus U) \cap C_2$ e x não está no fecho de U , o que é um absurdo. Logo, V é conexo. ■

Definição 1.8.6. [2, p. 112] Um espaço topológico X é dito **localmente conexo** se todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças conexas. □

Definição 1.8.7. [19, p. 176] Se X é um espaço topológico, dizemos que $x \in X$ é um **ponto isolado** se $\{x\}$ é um conjunto aberto. □

Observemos que se X é um espaço T_1 que possui um ponto isolado x , ele será um espaço desconexo. De fato, $\{x\}$ é um conjunto aberto e fechado, portanto $\{x\}$ e $\{x\}^c$ constitui uma cisão de X . Assim, o maior conjunto conexo que contém x é o próprio $\{x\}$, e podemos pensar no que chamamos de componentes conexas.

Definição 1.8.8. [24, p. 160] Se X é um espaço topológico e $x \in X$, a **componente conexa** de x é o maior conjunto conexo que contém x . □

Vamos introduzir dois conceitos relacionados que possuem alguma divergência na literatura. Sendo assim, chamamos a atenção para o fato que a terminologia usada pode conflitar com o que é encontrado em outros textos.

Definição 1.8.9. [17, p. 151] Um espaço X é dito **hereditariamente desconexo** se as únicas componentes conexas de X são conjuntos unitários. □

Definição 1.8.10. [17, p. 151] Um espaço X é dito **totalmente desconexo** se todo par de pontos pode ser separado por conjuntos simultaneamente abertos e fechados.² □

Originalmente Sierpiński [21, p. 1] utiliza o termo espaço disperso ou espalhado (em francês *dispersé*) para o que chamamos de espaço hereditariamente desconexo. Observemos que a seguinte relação citada em [21, p. 1] é válida.

Proposição 1.8.11. Todo espaço topológico X totalmente desconexo é hereditariamente desconexo.

Demonstração: Mostraremos que dados dois pontos x, y quaisquer, existe uma cisão de X em que x pertence a um aberto e y a outro. Ora, como X é totalmente separado, existe um aberto e fechado V que contém x mas não y . Desse modo, $y \in V^c$ que é aberto e fechado, e $V \sqcup V^c$ constitui naturalmente uma cisão de X . Portanto, x e y não podem pertencer à mesma componente conexa, e por y ser arbitrário, a componente conexa de x é $\{x\}$. ■

Infelizmente, a direção contrária não é válida, confira o exemplo 129 em [23, p. 145].

Definição 1.8.12. [24, p. 210] Um espaço X tem **dimensão zero** se cada ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças que são simultaneamente abertas e fechadas. Equivalentemente, se para cada fechado $F \subset X$ e $x \in F^c$ existir um conjunto aberto e fechado que contém x mas não intersecta F . □

Saindo de considerações locais, temos a seguinte propriedade.

Proposição 1.8.13. Se (X, T) é um espaço conexo, então X^n com a topologia produto é um espaço conexo para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Veja [19, p. 150]. ■

Funções contínuas sobre espaços conexos possuem uma propriedade análoga a de funções contínuas sobre compactos.

Proposição 1.8.14. Sejam X e Y espaços topológicos, com X conexo. Se $f : X \rightarrow Y$ é uma função contínua, então a imagem de f é conexa.

Demonstração: Suponhamos que $f(X)$ não é um subconjunto conexo de Y . Assim, existem abertos C_1 e C_2 de Y , de modo que

$$f(X) = (C_1 \cap f(X)) \sqcup (C_2 \cap f(X)).$$

Ora, f é contínua, portanto $f^{-1}(C_1)$ e $f^{-1}(C_2)$ são abertos e disjuntos, pois $C_1 \cap f(X)$ e $C_2 \cap f(X)$ são disjuntos. Portanto,

$$X = f^{-1}(C_1) \sqcup f^{-1}(C_2),$$

ou seja, temos uma cisão de X , o que é absurdo, pois X é conexo. Logo, a imagem de f deve ser conexa. ■

²Existe uma divergência com relação à terminologia utilizada para o que chamamos de totalmente desconexo hereditariamente desconexo. Por exemplo, Munkres em [19, p. 152] e Willard em [24, p. 210] chamam de totalmente desconexo o que chamamos de hereditariamente desconexo, mas não apresentam o outro conceito.

Definição 1.8.15. [24, p. 197] Seja X um espaço topológico e $I = [0, r] \subset \mathbb{R}$. Dados, $x, y \in X$, um **caminho** de x a y é uma função contínua $f : I \rightarrow X$ tal que

$$f(0) = x \quad \text{e} \quad f(r) = y.$$

□

Usualmente dizemos que x e y podem ser ligados por um caminho se existir um caminho de x a y .

Definição 1.8.16. [24, p. 197] Se X é um espaço topológico tal que qualquer par de pontos x e y em X pode ser ligado por um caminho, dizemos que X é **conexo por caminhos**.

□

Definição 1.8.17. [8, p. 376] Um espaço topológico X é **localmente conexo por caminhos** se para todo x e toda vizinhança U de x existe uma vizinhança V de x contida em U tal que para todo ponto $y \in V$ existe um caminho $f : [0, 1] \rightarrow X$ de x a y .

□

Corolário 1.8.18. Seja X um espaço topológico. Se $f : [0, 1] \rightarrow X$ é um caminho, então a imagem de f é conexa.

Demonstração: Sabendo que $[0, 1]$ é conexo, temos o resultado como consequência da Proposição 1.8.14. ■

Se a imagem de um caminho é um conjunto conexo, podemos questionar se existe alguma relação entre a existência de caminhos e a conexidade do espaço, o que de fato acontece.

Proposição 1.8.19. [19, p. 156] Todo espaço conexo por caminhos é conexo.

Demonstração: Suponhamos que existe uma cisão $X = C_1 \sqcup C_2$. Então existem $x \in C_1$, $y \in C_2$ e um caminho de x a y . Ora, a imagem do caminho é conexa, mas então $f([0, 1])$ está contido em C_1 ou C_2 , o que é um absurdo, pois o caminho contém pontos em C_1 e C_2 que são conjuntos disjuntos. Logo, X é conexo. ■

Por fim, definimos uma notação para uma classe especial de conjuntos conexos, que será relevante posteriormente.

Definição 1.8.20. [11, p. 31] Um espaço topológico X não-vazio é um **contínuo** se for compacto, conexo e metrizável. Um subconjunto de X que é um contínuo é chamado de **subcontínuo**.

□

1.9 Resultados Adicionais

Nesta seção apresentamos alguns resultados adicionais e importantes que não vamos demonstrar.

Lema 1.9.1 (Urysohn). [19, p. 208] Seja X um espaço normal e A, B fechados disjuntos em X . Dado intervalo $[a, b] \subset \mathbb{R}$, existe uma função contínua

$$f : X \longrightarrow [a, b]$$

tal que $f(x) = a$ para todo $x \in A$ e $f(x) = b$ para todo $x \in B$.

Demonstração: Veja [19, p. 207–210]. ■

Teorema 1.9.2 (Teorema de Metrização de Urysohn). [19, p. 215] Todo espaço topológico T_1 , regular e segundo-contável é metrizável.

Demonstração: Veja [19, p. 215–217]. ■

Teorema 1.9.3 (Tychonoff). [19, p. 234] Um produto arbitrário de espaços compactos é compacto na topologia produto.

Demonstração: Veja [19, p. 230–235]. ■

Teorema 1.9.4. [7, p. 155] Seja X completamente regular e I^X a coleção de todas as funções reais limitadas e contínuas em X . Para cada $f \in I^X$ definimos $I_f = [\inf(f(x)), \sup(f(x))]$ e se

$$P^X = \prod_{f \in I^X} I_f,$$

então a aplicação $h : X \rightarrow P^X$ dada por

$$h(x) = (f(x))_f$$

é um mergulho de X em P^X .

Demonstração: Veja [7, p. 155]. ■

Definição 1.9.5. [7, p. 242] Uma **compactificação** de um espaço topológico X é um par (\tilde{X}, h) , onde \tilde{X} é um espaço Hausdorff compacto e $h : X \rightarrow \tilde{X}$ é um mergulho tal que $h(X)$ é denso em \tilde{X} . □

Um exemplo clássico e palpável de compactificação é a compactificação de $(0, 1)$ usando dois pontos, levando $(0, 1)$ em $[0, 1]$. Nesse caso, o homeomorfismo é simplesmente a inclusão. Dentre as mais diversas compactificações possíveis, voltamos nossa atenção especialmente para a **compactificação de Stone-Čech**, que é construída do seguinte modo: dado um espaço topológico X que seja $T_{3\frac{1}{2}}$, tomamos I^X a coleção de funções reais contínuas em X e limitadas. Para cada $f \in I^X$, definimos $I_f = [\inf(f(x)), \sup(f(x))]$

$$Y = \prod_{f \in I^X} I_f$$

e $h : X \rightarrow Y$ dada por

$$h(x) = (f(x))_f.$$

De fato, observemos que Y é compacto pelo Teorema de Tychonoff. Definindo $\tilde{X} = \overline{h(X)}$, temos \tilde{X} Hausdorff compacto, enquanto h é um mergulho pelo Teorema 1.9.4, pois \tilde{X} é Hausdorff compacto, portanto normal e assim completamente regular.

Teorema 1.9.6. [7, p. 243] A compactificação de Stone-Čech (\tilde{X}, h) de X satisfaz:

1. Toda função contínua $g : X \rightarrow Y$, onde Y é compacto e Hausdorff, pode ser estendida continuamente a $G : \tilde{X} \rightarrow Y$ de modo que $g = G \circ h$.
2. Qualquer compactificação de X que satisfaz a propriedade anterior é homeomorfa a \tilde{X} .
3. \tilde{X} é a maior compactificação de X , isto é, qualquer outra compactificação é quociente desta.

Demonstração: Veja [7, p. 243]. ■

Capítulo 2

Espaços Uniformes

Espaços uniformes generalizam a noção de métrica e a uniformidade, ou a estrutura uniforme, pode ser interpretada como uma noção de distância, ainda que sem números. Contudo, este é um conceito ainda mais geral, que abrange grupos topológicos e, na verdade, toda a classe de espaços topológicos completamente regulares. Neste capítulo tratamos de duas abordagens distintas para a teoria. Na Seção 2.1 desenvolvemos pelo prisma de vizinhanças da diagonal, que recebem o nome de estrutura uniforme ou uniformidade. Na Seção 2.5 desenvolvemos usando famílias de coberturas, que recebem o nome de cobertura uniforme, e mostramos como as duas abordagens se equivalem. Devido a isso, temos duas seções sobre a topologia compatível com espaços uniformes. A Seção 2.3 trata da topologia quando o espaço uniforme é considerado dotado de uma uniformidade, e nele encontraremos resultados fundamentais para o desenvolvimento dos Capítulos 3 e 4, tais como:

- Resultados que detalham as propriedades de separação da topologia uniforme, começando na Proposição 2.3.8 até o Corolário 2.3.12.
- O Teorema da Unicidade da Uniformidade em Espaços de Hausdorff e Compactos 2.3.21.
- O Teorema 2.3.13 que garante a separação de um conjunto fechado de um compacto.

Já a Seção 2.6 trata a topologia por meio de coberturas uniformes e com isso complementa a Seção 2.3 apresentando discussão relativa ao fato que um espaço é uniforme se e somente se ele é completamente regular, partindo do Teorema 2.6.6 e concluindo no Corolário 2.6.9.

As Seções 2.2 e 2.4 buscam enriquecer e familiarizar o leitor com a ideia de uniformidade apresentando os exemplos de espaços métricos e grupos topológicos.

As principais referências para este capítulo são [12], [13], [20] e [24].

2.1 Estruturas Uniformes

Definição 2.1.1. [20, p. 2] Dado um conjunto X ,

- a) a sua **diagonal** é o conjunto

$$\Delta(X) = \{(x, x) \mid x \in X\}.$$

Escreveremos apenas Δ quando considerarmos que o conjunto base está claro.

- b) se $U \subset X \times X$, então o seu **inverso** é o conjunto

$$U^{-1} = \{(y, x) \mid (x, y) \in U\}.$$

c) se $U, V \subset X \times X$, então a **composição** de U com V é o conjunto

$$U \circ V = \{(x, z) \mid (x, y) \in U, (y, z) \in V\}.$$

Para simplificar, denotamos

$$\underbrace{V \circ \dots \circ V}_{n\text{-vezes}} = V^n$$

se $n \geq 3$.

□

Definição 2.1.2. Dado um conjunto X , se $V \subset X \times X$ é tal que $\Delta \subset V$, então V é chamado de **vizinhança da diagonal**.

□

Em alguns textos, como [15], as vizinhanças da diagonal são consideradas relações binárias reflexivas sobre X . Nesse caso, vizinhanças da diagonal que forem simétricas representam relações reflexivas e simétricas. Por fim, se V é uma vizinhança da diagonal tal que $V \circ V = V$, vale que V representa uma relação reflexiva, simétrica e transitiva, ou seja, uma relação de equivalência! A seguir, temos algumas ilustrações que podem ajudar nas discussões que serão feitas ao longo do texto.

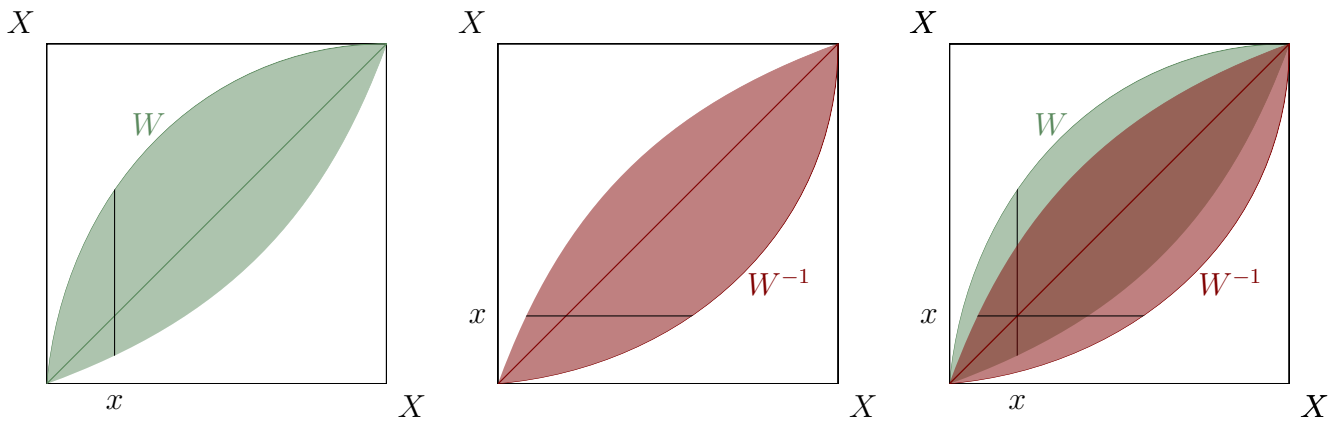


Figura 2.1: À esquerda uma vizinhança da diagonal W de $X \times X$, ao centro sua inversa e à direita, em marrom, a vizinhança simétrica dada por $W \cap W^{-1}$. A vizinhança da diagonal $W \cup W^{-1}$ também é simétrica. Em destaque na figura à esquerda, temos o conjunto ao qual x está relacionado. Na central, temos o conjunto de pontos que se relacionam a x .

É importante ressaltar que as vizinhanças da diagonal podem ser conjuntos das mais variadas formas, desde que contenham a diagonal.

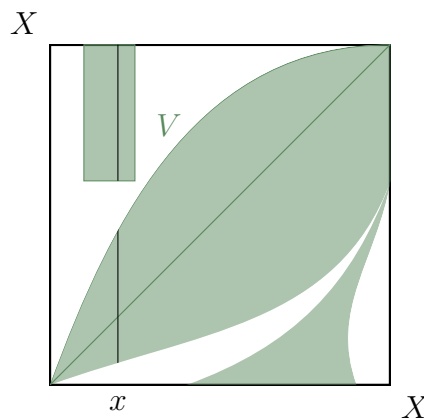


Figura 2.2: Uma vizinhança da diagonal V arbitrária.

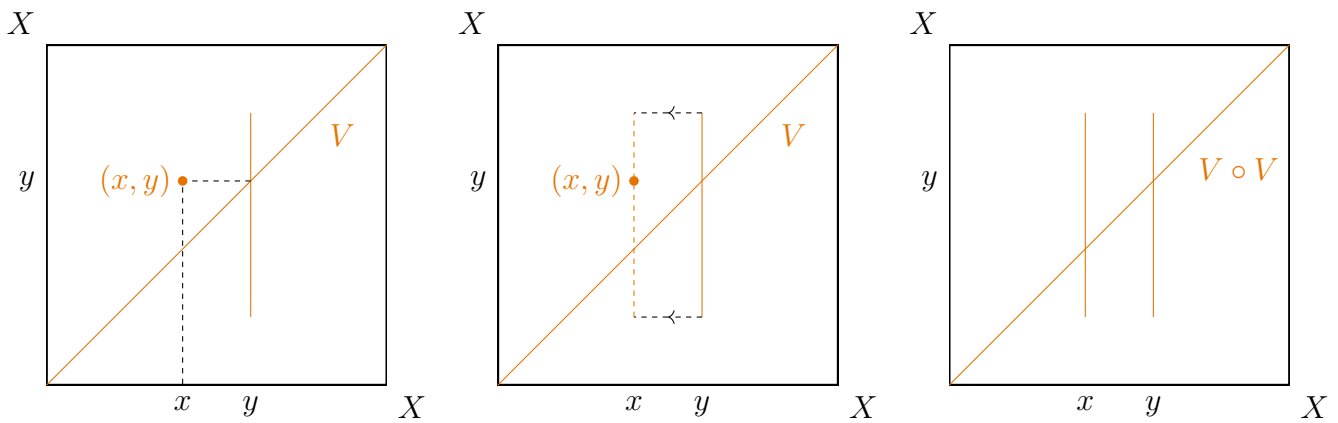


Figura 2.3: Como pode ser observado, em uma composição, se x está relacionado a y , ou seja, $(x, y) \in V$, ele passará a estar relacionado também com os elementos aos quais y está relacionado.

Naturalmente, decorre a seguinte proposição:

Proposição 2.1.3. Se V é uma vizinhança da diagonal em $X \times X$, então $V \subset V \circ V$.

Demonstração: Observemos que $(x, x) \in V$ para todo $x \in X$. Logo, se $(x, y) \in V$ teremos $(x, y) \in V \circ V$. ■

Proposição 2.1.4. Se V e W são vizinhanças da diagonal em $X \times X$, então $W \circ W \subset V$ se e somente se $(W \circ W)(x) \subset V(x)$ para todo $x \in X$.

Demonstração: Primeiro suponhamos que $W \circ W \subset V$. Dado $x \in X$, se $(x, y) \in W \circ W$, então $(x, y) \in V$, e portanto $(W \circ W)(x) \subset V(x)$. Agora, dado que $(W \circ W)(x) \subset V(x)$ para todo $x \in X$, se $y \in (W \circ W)(x)$, então por definição $(x, y) \in W \circ W$. Sendo assim $(x, y) \in V$ e portanto $W \circ W \subset V$. ■

Definição 2.1.5. [24, p. 238] Dado um conjunto X , se \mathcal{U} é uma coleção de vizinhanças da diagonal de $X \times X$ tal que

- se $U \in \mathcal{U}$, então $U^{-1} \in \mathcal{U}$;
- se $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V \circ V \subset U$;
- se $U, V \in \mathcal{U}$, então $U \cap V \in \mathcal{U}$;
- se $U \in \mathcal{U}$ e $U \subset V \subset X \times X$, então $V \in \mathcal{U}$,

então \mathcal{U} é chamada uma **uniformidade** ou **estrutura uniforme** para X . □

Definição 2.1.6. Um conjunto X dotado de uma uniformidade \mathcal{U} é chamado de **espaço uniforme** e denotado $[X, \mathcal{U}]$. Observe que \mathcal{U} é constituído por vizinhanças da diagonal. Quando estiver clara a uniformidade em questão, diremos apenas que $V \in \mathcal{U}$ é uma vizinhança da diagonal. □

Observemos que não temos um elemento de uma uniformidade que está contido em toda vizinhança da diagonal da uniformidade tal como temos que o conjunto vazio sempre está contido em qualquer subconjunto de um conjunto X . Contudo, a propriedade *b)* de 2.1.5 garante algo similar a isso. Vale ressaltar que, mesmo com todas as propriedades, pode acontecer para algum V em uma uniformidade \mathcal{U} , não ser possível encontrar subconjunto de V em \mathcal{U} que seja diferente de V .

Definição 2.1.7. [2, p. 170] Uma **base para uma uniformidade** é uma coleção \mathcal{V} de vizinhanças da diagonal de $X \times X$ tal que

- a) dados $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, existe $V_3 \in \mathcal{V}$ com $V_3 \subset V_1 \cap V_2$;
- b) dado $V_1 \in \mathcal{V}$ existe $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que $V_2^{-1} \subset V_1$;
- c) dado $V_1 \in \mathcal{V}$ existe $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que $V_2 \circ V_2 \subset V_1$.

A uniformidade \mathcal{U} gerada ou **induzida por uma base** \mathcal{V} é a coleção de todos os subconjuntos U de $X \times X$ tal que existe $V \in \mathcal{V}$ satisfazendo $V \subset U$. □

Dada uma subcoleção \mathcal{V} de uma uniformidade \mathcal{U} , dizemos que \mathcal{V} é uma base para \mathcal{U} , se para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset U$. Para gerar \mathcal{U} a partir de \mathcal{V} basta usar o item d) de (2.1.5), ou seja, adicionar a \mathcal{V} todos os subconjuntos de $X \times X$ que contêm algum $V \in \mathcal{V}$. A uniformidade é um filtro com algumas propriedades extras. De fato, temos a seguinte proposição.

Proposição 2.1.8. Seja \mathcal{U} uma uniformidade. Uma subcoleção $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$ de vizinhanças da diagonal é base para \mathcal{U} se e somente se para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ com $V \subset U$.

Demonstração: Por definição, \mathcal{U} é recuperada a partir de \mathcal{V} tomando todas as vizinhanças da diagonal que contêm uma vizinhança de \mathcal{V} , portanto se \mathcal{V} é base, então para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ com $V \subset U$.

Por outro lado, se para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ com $V \subset U$, as propriedades de uma base saem imediatamente do fato que $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$. Precisamente,

- a) dados $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$, existe $V_3 \in \mathcal{V}$ com $V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

Dados $V_1, V_2 \in \mathcal{V}$ sabemos que existe $U \in \mathcal{U}$ satisfazendo $U \subset V_1 \cap V_2$. Portanto, existe

$$V_3 \subset U \subset V_1 \cap V_2.$$

- b) dado $V_1 \in \mathcal{V}$ existe $V_2 \in \mathcal{V}$ com $V_2^{-1} \subset V_1$.

Dado $V_1 \in \mathcal{V}$, tomamos $V_1^{-1} \in \mathcal{U}$. Sabemos que existe $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que $V_2 \subset V_1^{-1}$, e portanto $V_2^{-1} \subset V_1$.

- c) dado $V_1 \in \mathcal{V}$ existe $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que $V_2 \circ V_2 \subset V_1$.

Dado $V_1 \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U \circ U \subset V_1$, portanto basta tomar $V_2 \in \mathcal{V}$ tal que $V_2 \subset U$ que teremos $V_2 \circ V_2 \subset V_1$. ■

Proposição 2.1.9. Se \mathcal{V} é uma base para uma uniformidade \mathcal{U} , então

$$\mathcal{V}_S = \{V \cap V^{-1} \mid V \in \mathcal{V}\}$$

constitui uma **base simétrica** de \mathcal{U} , ou seja, uma base cujas vizinhanças da diagonal são simétricas.

Demonstração: Começamos observando que $\mathcal{V}_S \subset \mathcal{U}$, portanto basta mostrar que para todo $U \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}_S$ tal que $V \subset U$. Uma vez que \mathcal{V} é base para \mathcal{U} , dado $U \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{V}$ com $W \subset U$. Logo, tomando $V = W \cap W^{-1}$ temos $V \in \mathcal{V}_S$ e $V \subset U$, portanto \mathcal{V}_S é base para \mathcal{U} . ■

Definição 2.1.10. [13, p. 118] Dado um espaço uniforme $[X, \mathcal{U}]$ e $A \subseteq X$, a **uniformidade relativa** \mathcal{V} sobre A é a uniformidade cujas vizinhanças da diagonal são os conjuntos

$$V = U \cap (A \times A),$$

onde $U \in \mathcal{U}$. Dizemos que V é o **traço** de U em $A \times A$, ou mais geralmente que \mathcal{V} é o traço de \mathcal{U} com relação a A . □

2.2 Espaços Métricos - Um Exemplo Simples

Assim como existem as topologias trivial e discreta, também existem, dado um conjunto X , a **uniformidade discreta**, composta pelo conjunto de todas as vizinhanças da diagonal possíveis, e a **uniformidade trivial**, composta apenas pela vizinhança da diagonal $X \times X$. Como mencionado, uma das estruturas que uniformidades generalizam é a estrutura métrica. Isso ocorre porque toda métrica induz uma base para uma uniformidade. Lembremos que uma métrica d em um espaço X é uma aplicação $d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ tal que dados $x, y, z \in X$

- (i) $d(x, y) = 0$ se e somente se $x = y$;
- (ii) $d(x, y) = d(y, x)$;
- (iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

As duas primeiras propriedades levam o nome justamente de reflexividade e simetria, enquanto que a terceira é a desigualdade triangular, que remete um pouco à ideia de transitividade, e é ela que vai nos permitir garantir a propriedade de composição para a uniformidade induzida pela métrica na proposição a seguir.

Proposição 2.2.1. Dado um espaço métrico (X, d) , vale que se para cada $\varepsilon > 0$ temos o subconjunto de $X \times X$, chamado de **vizinhança tubular da diagonal** de raio ε ,

$$V_\varepsilon = \{(x, y) \in X \times X \mid d(x, y) < \varepsilon\},$$

então a coleção $\{V_\varepsilon\}_{\varepsilon > 0}$ é uma base para uma uniformidade em X , chamada **uniformidade induzida pela métrica d** .

Demonstração: Precisamos mostrar antes de tudo que cada V_ε contém a diagonal. Agora, dado $x \in X$, $d(x, x) = 0 < \varepsilon$ para todo ε possível, então $\Delta \subset V_\varepsilon$. Partimos então para a demonstração das três propriedades que uma coleção de vizinhanças da diagonal deve satisfazer para ser uma base, apresentadas já usando a notação da métrica:

- a) Dados $\varepsilon, \delta > 0$, existe η tal que $V_\eta \subset V_\varepsilon \cap V_\delta$.

Basta tomar $\eta = \min(\varepsilon, \delta)$ e obtemos a inclusão.

- b) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $V_\delta^{-1} \subset V_\varepsilon$.

Observemos que para todo $\delta > 0$ temos que $V_\delta = V_\delta^{-1}$ pela simetria da métrica, isto é, se $(x, y) \in V_\delta$, então $d(y, x) = d(x, y) < \delta$, o que implica que $(y, x) \in V_\delta$. Assim, vale que $V_\varepsilon^{-1} = V_\varepsilon$ e em particular $V_\varepsilon^{-1} \subset V_\varepsilon$.

- c) Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $V_\delta \circ V_\delta \subset V_\varepsilon$.

Seja $\delta = \varepsilon/3$. Se $(x, y), (y, z)$ estão em V_δ , então (x, y) e (y, z) estão em V_ε , pois $d(x, y) < \delta < \varepsilon$ e o mesmo vale para $d(y, z)$. Agora, pela desigualdade triangular vale que

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < 2\delta < \varepsilon,$$

então (x, z) está em V_ε , como desejado.

Portanto, a coleção dos V_ε constitui uma base para uma uniformidade em (X, d) . ■

A terminologia vizinhança tubular da diagonal vem da interpretação geométrica do V_ε , como mostrado na figura abaixo se X é um intervalo da reta real.

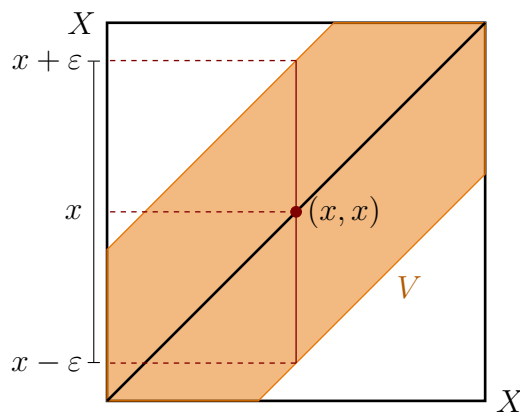


Figura 2.4: Ilustração de uma vizinhança da diagonal tubular.

2.3 Topologia Uniforme

Definição 2.3.1. [24, p. 240] Seja $[X, \mathcal{U}]$ um espaço uniforme. Dada uma vizinhança da diagonal V , definimos a **vizinhança de x induzida** por V como o conjunto

$$V(x) = \{y \in X \mid (x, y) \in V\}.$$

Observe que $V(x) \subset X$ e $x \in V(x)$, pois $(x, x) \in V$ para todo $V \in \mathcal{U}$. Por extensão, dado $E \subset X$, a **vizinhança de E induzida** por V é

$$V(E) = \bigcup_{x \in E} V(x).$$

□

Teorema 2.3.2. [2, p. 171] Dado um espaço uniforme $[X, \mathcal{U}]$, a coleção $\mathcal{U}(x)$ dos $V(x)$, em que $V \in \mathcal{U}$, constitui um sistema de vizinhanças de x para cada $x \in X$.

Demonstração: Precisamos mostrar que as condições apresentadas no Teorema 1.1.10 são satisfeitas. Pelo fato de estarmos trabalhando com uma uniformidade, vale que:

- a) $x \in V(x)$ para todo $V \in \mathcal{U}$, pois $(x, x) \in V$ para todo $V \in \mathcal{U}$.
- b) Se $V(x) \in \mathcal{U}(x)$ e $V(x) \subset W$, então $W \in \mathcal{U}(x)$, pois a vizinhança da diagonal

$$V \cup \{(x, y) \mid y \in W \cap V(x)^c\}$$

pertence à uniformidade por conter V e induz W como vizinhança de x .

- c) A interseção finita de elementos de $\mathcal{U}(x)$ está em $\mathcal{U}(x)$, pois se $V, W \in \mathcal{U}$, então $V \cap W \in \mathcal{U}$ e já mostramos que $V(x) \cap W(x) = (V \cap W)(x)$;
- d) Dado $V(x) \in \mathcal{U}(x)$, existe $W(x) \in \mathcal{U}(x)$ tal que $V(y) \in \mathcal{U}(y)$ para todo $y \in W(x)$, pois se tomamos W tal que $W \circ W \subset V$, isso significa que $W \subset V$, então $W(x) \subset V(x)$ e se $y \in W(x)$, então

$$W(y) \subset (W \circ W)(x) \subset V(x),$$

e assim, $V(x) \in \mathcal{U}(y)$ pela propriedade b).

■

Do Teorema anterior e 1.1.10, temos que existe uma única topologia induzida pela uniformidade, o que nos leva à seguinte definição.

Definição 2.3.3. [2, p. 172] A topologia induzida por uma uniformidade \mathcal{U} , denotada por $T_{\mathcal{U}}$ e chamada de **topologia uniforme**, é aquela tal que a coleção $\mathcal{U}(x)$ dos conjuntos $U(x)$ em que $U \in \mathcal{U}$ é um sistema de vizinhanças de x para cada $x \in X$. □

Corolário 2.3.4. [2, p. 171] Dado um espaço uniforme $[X, \mathcal{U}]$, os abertos da topologia uniforme são aqueles da forma $V(x)$ para algum $V \in \mathcal{U}$ e $x \in X$ tais que $V(x)$ é vizinhança de todos os seus pontos, isto é, $V(x) \in \mathcal{B}(y)$ para todo $y \in V(x)$.

Demonstração: É consequência direta dos Teorema 1.1.10 e 2.3.2 ■

Observemos que a definição de aberto não exige $V(x) = V(y)$ para todo $y \in V(x)$. De fato, $V(x)$ representa um conjunto, conjunto esse tal que para todo $y \in V(x)$ deve haver uma vizinhança da diagonal W tal que $W(y) = V(x)$. Por mais tentador que possa parecer, não podemos afirmar que existe $V(x)$ tal que $V(x) = V(y)$ para todo $y \in V(x)$, e isso é explicado melhor após a proposição 2.3.6.

Proposição 2.3.5. Se $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme e \mathcal{V} uma base da uniformidade, então a coleção $\mathcal{V}(x)$ dos $V(x)$, em que $V \in \mathcal{V}$, constitui um sistema fundamental de vizinhanças de x para cada $x \in X$.

Demonstração: Dado $x \in X$, sabemos que a coleção dos $W(x)$ tal que $W \in \mathcal{U}$ constitui um sistema de vizinhanças de x . Logo, pela definição de base de uma uniformidade, dado $W \in \mathcal{U}$ existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset W$, logo $V(x) \subset W(x)$ e temos que $\mathcal{V}(x)$ constitui um sistema fundamental de vizinhanças de x . ■

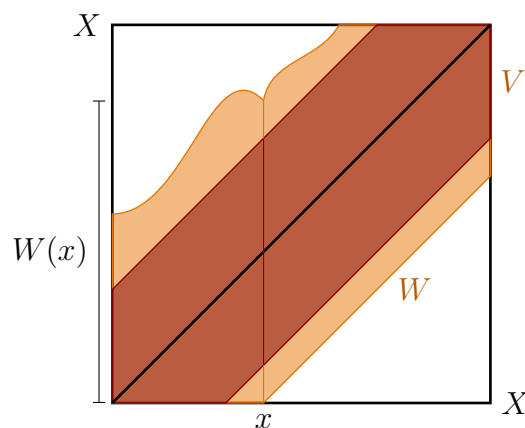


Figura 2.5: Dado $W \in \mathcal{U}$, tomamos V na base da uniformidade e assim, $V(x)$ é a linha vertical vermelha, que satisfaz $V(x) \subset W(x)$, pois $V \subset W$.

Proposição 2.3.6. [24, p. 241] A topologia induzida por uma métrica d sobre um conjunto X é igual à topologia uniforme induzida pela métrica sobre X .

Demonstração: Denotaremos por T_d a topologia induzida pela métrica e \mathcal{U}_d a uniformidade induzida pela métrica d sobre X . Vamos mostrar que os abertos de uma topologia podem ser escritos como união de abertos da outra topologia.

Primeiro começamos com um aberto básico A de T_d . Sabemos que

$$A = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

para algum $x \in X$ e $\varepsilon > 0$ pela definição da topologia induzida pela métrica. Dessa forma, já temos que $A = V_\varepsilon(x)$ e tudo que nos falta é encontrar um $\delta(y) > 0$ para cada $y \in V_\varepsilon(x)$ tal que

$$V_{\delta(y)}(y) \subset V_\varepsilon(x),$$

pois isso implicará a existência de um aberto $A_y \subset V_\varepsilon(x)$ com $y \in A_y$ para cada $y \in V_\varepsilon(x)$ e assim este será uma união de abertos em $T_{\mathbb{U}_d}$. Isso é possível pela desigualdade triangular. Se $y \in V_\varepsilon(x)$, tomando $\delta(y) < \varepsilon - d(x, y)$ vale que para $z \in X$ tal que $d(y, z) < \delta(y)$

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) < d(x, y) + \delta(y) < \varepsilon,$$

ou seja, se $z \in V_{\delta(y)}(y)$, então $z \in V_\varepsilon(x)$. Portanto, $V_{\delta(y)}(y) \subset V_\varepsilon(x)$. Sendo assim,

$$A = \bigcup_{y \in A} A_y$$

e então todo aberto de T_d é aberto em $T_{\mathbb{U}_d}$.

Por outro lado, se A é um aberto de $T_{\mathbb{U}_d}$, então para cada $x \in A$ existe $\varepsilon(x) > 0$ tal que $V_{\varepsilon(x)}(x) \subset A$, pois os V_ε constituem uma base de \mathbb{U}_d . Ora,

$$V_{\varepsilon(x)} = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon(x)\}$$

é um aberto básico da topologia induzida pela métrica em X , portanto concluímos que

$$A = \bigcup_{x \in A} V_{\varepsilon(x)}(x)$$

é uma união de abertos básicos em T_d e assim as topologias são iguais. ■

Definição 2.3.7. [15, p. 184] Um espaço uniforme $[X, \mathbb{U}]$ é metrizável se existe uma métrica d tal que a uniformidade induzida pela métrica é \mathbb{U} . □

Voltando à discussão anterior, observemos que usando a uniformidade induzida pela métrica euclidiana em \mathbb{R} e o Teorema 2.3.6, na topologia induzida pela métrica, os conjuntos

$$V_\varepsilon(x) = \{y \in \mathbb{R} : |x - y| < \varepsilon\}$$

são abertos para cada $x \in \mathbb{R}$ e $\varepsilon > 0$, porém, se $z \in V_\varepsilon(x) \setminus \{x\}$, não temos $V_\varepsilon(z) \subset V_\varepsilon(x)$.

Um dos questionamentos que podemos fazer logo de início a respeito da topologia uniforme é acerca dos axiomas de separação que ela satisfaz. Nem sempre a uniformidade induz uma topologia que permite separar dois pontos quaisquer do espaço, basta pensar na uniformidade trivial. Se a única vizinhança da diagonal é $X \times X$, então para todo ponto, X é o único aberto que o contém. Mais do que isso, é a única vizinhança desse e de qualquer outro ponto. Contudo, se conseguirmos provar que dada uma uniformidade \mathbb{U} , ela é T_0 , ou seja, dados dois pontos quaisquer existe um aberto que contém um dos pontos, mas não contém o outro, então ocorre um fenômeno particularmente interessante: a topologia é $T_{3\frac{1}{2}}$. De fato, um espaço topológico é espaço uniforme se e somente se for um espaço completamente regular.

Proposição 2.3.8. Se $[X, \mathbb{U}]$ é um espaço uniforme cuja topologia uniforme é T_0 , então a topologia uniforme é T_1

Demonstração: Se a topologia uniforme é T_0 , dados dois pontos x e y de X , suponhamos que existe um aberto A que contém x mas não contém y . Sabemos que $A = V(x)$ para algum $V \in \mathbb{U}$, portanto, $(x, y) \notin V$ e se tomamos $W = V \cap V^{-1}$ vale que $(y, x) \notin W$, e

$$x \notin W(y),$$

o que implica a existência de um aberto $A_y \subset W(y)$ que contém y mas não contém x pois toda vizinhança contém um aberto. ■

Ser T_2 , ou espaço de Hausdorff, é ter vizinhanças disjuntas contendo um dos pontos cada, o que na noção de espaços uniformes aparece mais intuitivamente na ideia de que existem duas vizinhanças da diagonal, que podem ser a mesma, tais que se x se relaciona com z em uma, na outra y não se relaciona com z e vice-versa. De fato, é essa visão que nos guia na demonstração a seguir e observe que como estamos lidando com um terceiro ponto, a composição de uniformidades aparece como o meio de delimitar essas relações.

Proposição 2.3.9. Se $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme cuja topologia uniforme é T_1 , então a topologia uniforme é T_2 .

Demonstração: Se a topologia uniforme é T_1 , dados dois pontos x e y de X , existem abertos A_x e A_y tais que $x \notin A_y$ e $y \notin A_x$. Isso significa que existem duas vizinhanças da diagonal $V, W \in \mathcal{U}$ tais que $y \notin V(x)$ e $x \notin W(y)$.

Tomemos, então, uma vizinhança da diagonal simétrica $V' \in \mathcal{U}$ tal que

$$V' \subset V' \circ V' \subset V \cap W.$$

Observe que, se $(x, z) \in V'$ para determinado $z \in X$, já sabemos que $(x, y) \notin V'$, então do fato de $V' \circ V'$ estar contido em $V \cap W$ vale que $(z, y) \notin V'$. Da simetria, concluímos que $(y, z) \notin V'$ e então vale

$$V'(x) \cap V'(y) = \emptyset.$$

Sendo assim, temos que existem abertos disjuntos que contém x e y , pois toda vizinhança de um ponto contém um aberto que contém o ponto. ■

Notemos que se o espaço $[X, \mathcal{U}]$ é de Hausdorff com a topologia uniforme, para todo par de pontos $x, y \in X$ distintos existem vizinhanças da diagonal $V, W \in \mathcal{U}$ tais que $y \notin V(x)$ e $x \notin W(y)$. Portanto, existe uma vizinhança da diagonal que não contém os pares ordenados (x, y) e (y, x) . De fato, basta tomar $U = V \cap W$. Essa observação nos leva à seguinte proposição.

Proposição 2.3.10. [13, p. 130] A topologia uniforme em um espaço $[X, \mathcal{U}]$ é de Hausdorff se e somente se

$$\Delta = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Demonstração: Se a topologia é de Hausdorff, para todo par de pontos $x, y \in X$ distintos existem abertos disjuntos que contém esses pontos e estes abertos podem ser escritos como $V(x)$ e $W(y)$ com $V, W \in \mathcal{U}$. Logo, $(x, y) \notin V$ e $(y, x) \notin W$, e assim $U = V \cap W \in \mathcal{U}$ e $(x, y), (y, x) \notin U$. Como x e y são arbitrários, concluímos que existe sempre uma vizinhança da diagonal U que não possui um par $(x, y) \notin \Delta$ e desse modo,

$$\Delta = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U.$$

Se a interseção de todas as vizinhanças da diagonal é a diagonal, dado qualquer par de pontos distintos x, y deve existir uma vizinhança da diagonal $U \in \mathcal{U}$ tal que $(y, x) \notin U$. Sendo assim, $V = U \cup \{(x, y)\}$ pertence a \mathcal{U} e $x \notin V(y)$. Como $V(x)$ é vizinhança de x , concluímos que existe um aberto que contém x mas não y , ou seja, a topologia é T_0 . Usando as Proposições 2.3.8 e 2.3.9 concluímos que a topologia é de Hausdorff. ■

Uma uniformidade que tem a própria diagonal como a interseção das vizinhanças da diagonal é usualmente chamada de uniformidade "separada" (separated), porém não vamos usar essa notação.

Lema 2.3.11. Se $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme cuja topologia uniforme é T_1 , então a topologia uniforme é T_3

Demonstração: Seja F um fechado em $(X, T_{\mathcal{U}})$ e x um elemento de X . Sabemos que F^c é um aberto que contém x , ou seja, existe uma vizinhança da diagonal $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(x) = F^c$. Utilizaremos a propriedade de existir $W \subset V$ tal que $W \circ W \subset V$ e mostrar que $\overline{W(x)} \subset V(x)$.

Tomemos $W \in \mathcal{U}$ simétrica tal que $W \subset \overline{W} \circ W \subset V$. Pela definição da topologia, existe aberto $A_x \subset W(x)$ que contém x . Agora, se $z \in \overline{W(x)}$, para todo aberto que contém z a interseção com $W(x)$ é não vazia, então dado $y \in W(z) \cap W(x)$, vale que $(x, y) \in W$ e $(y, z) \in W$ pela simetria de W , portanto

$$z \in (W \circ W)(x) \subset V(x)$$

o que significa que $\overline{W(x)} \subset V(x)$. Sendo assim, $\overline{W(x)}^c$ é um aberto que contém F e A_x um aberto que contém x , sendo um disjunto do outro pois $A_x \subset W(x)$. ■

Corolário 2.3.12. Todo espaço dotado da topologia uniforme que for T_0 é T_3 .

Demonstração: É consequência direta da Proposição 2.3.8 e do Lema 2.3.11. ■

A topologia uniforme possui outra propriedade de separação que será essencial para a demonstração da Proposição 3.4.2. Sabendo que a topologia uniforme é regular, podemos nos perguntar se é possível separar dois fechados disjuntos por abertos disjuntos. Isso é possível se um deles é compacto.

Teorema 2.3.13. [13, p. 134] Sejam F, K subconjuntos disjuntos de um espaço uniforme $[X, \mathcal{U}]$. Se F é fechado e K é compacto, existe uma vizinhança da diagonal $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(K) \cap V(F) = \emptyset$.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que não existe tal V . Então,

$$U(K) \cap U(F) \neq \emptyset$$

para cada vizinhança $U \in \mathcal{U}$. Assim, para cada vizinhança da diagonal simétrica $V \in \mathcal{U}$, o conjunto $K \cap ((V \circ V)(F))$ é não vazio e a coleção desses conjuntos define uma base para um filtro \mathfrak{F} sobre K . Pelo Teorema 1.5.7, existe um ponto de acumulação $x \in K$ desse filtro. Logo, existe um filtro \mathfrak{G} mais fino que \mathfrak{F} e o filtro das vizinhanças de x . Desse modo, dado $V \in \mathcal{U}$ simétrica, existem $G_1, G_2 \in \mathfrak{G}$ tais que

$$G_1 \subseteq (V \circ V)(F) \quad \text{e} \quad G_2 \subseteq V(x).$$

Logo, $G = G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$ está contido em ambos os conjuntos. Desse modo, para todo $g \in G$, existem $f \in F$ e $k \in K$ tais que

$$(f, k), (k, g) \in V,$$

pois $(f, g) \in V \circ V$. Além disso, pela simetria de V , temos $(g, x) \in V$. Logo

$$(f, x) \in V^3$$

e

$$V^3(x) \cap F \neq \emptyset.$$

Dada vizinhança $U \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{U}$ simétrica tal que $V^3 \subseteq U$. Desse modo, pela simetria de V^3 ,

$$U(x) \cap F \supseteq V^3(x) \cap F \neq \emptyset,$$

ou seja, toda vizinhança de x intersecta F . O conjunto F é fechado, logo $x \in F$, mas isso é um absurdo, pois F e K são disjuntos. ■

Definição 2.3.14. [20, p. 10] Dados dois espaços uniformes $[X, \mathcal{U}]$ e $[Y, \mathcal{V}]$, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é dita **uniformemente contínua** se qualquer uma das quatro afirmações a seguir forem válidas:

i) Para cada $V \in \mathcal{V}$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $(f \times f)(U) \subset V$, em que

$$\begin{aligned} f \times f : X \times X &\longrightarrow Y \times Y \\ (x_1, x_2) &\longmapsto (f(x_1), f(x_2)) \end{aligned}$$

ii) $\{(x_1, x_2) \mid (f(x_1), f(x_2)) \in V\} = (f \times f)^{-1}(V) \in \mathcal{U} \forall V \in \mathcal{V}$.

iii) $(f \times f)^{-1}\mathcal{V} = \{(f \times f)^{-1}V \mid V \in \mathcal{V}\} \subset \mathcal{U}$.

iv) Dada qualquer vizinhança $V \in \mathcal{V}$, existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(U(x)) \subset V(f(x))$ para todo $x \in X$.

□

Observemos que essa noção de continuidade uniforme generaliza a noção de continuidade uniforme para espaços métricos. Sejam (X, d) e (Y, d') espaços métricos. Se \mathcal{U} e \mathcal{V} são as uniformidades induzidas pelas métricas d e d' , temos em particular que dado $\varepsilon > 0$, deve existir $\delta > 0$ de modo que

$$(f \times f)(U_\delta) \subseteq V_\varepsilon.$$

Agora,

$$U_\delta = \{(x, y) \mid d(x, y) < \delta\}$$

e

$$V_\varepsilon = \{(x, y) \mid d'(x, y) < \varepsilon\}.$$

Portanto,

$$d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

se

$$d(x, y) < \delta.$$

Proposição 2.3.15. [20, p. 10] Toda função uniformemente contínua entre espaços uniformes é contínua na topologia uniforme.

Demonstração: Sejam $[X, \mathcal{U}]$ e $[Y, \mathcal{V}]$ espaços uniformes e $f : X \rightarrow Y$ uniformemente contínua. Dado um aberto $W \subseteq Y$ e $x \in X$ tal que $f(x) \in W$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V(f(x)) = W$. Pela continuidade uniforme de f , existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $f(U(x)) \subseteq V(f(x))$. Portanto, existe um aberto $A_x \subseteq U(x)$ contendo x cuja imagem está contida em W . Assim, $A_x \subseteq f^{-1}(W)$ e

$$f^{-1}(W) = \bigcup_{x \in f^{-1}(W)} A_x$$

é aberto. ■

Definição 2.3.16. [24, p. 242] Dados dois espaços uniformes $[X, \mathcal{U}]$ e $[Y, \mathcal{V}]$, uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é chamada de **isomorfismo uniforme** se f é bijetora e f e f^{-1} forem uniformemente contínuas. □

Proposição 2.3.17. Todo isomorfismo uniforme é homeomorfismo na topologia uniforme.

Demonstração: Sabemos que toda função uniformemente contínua é contínua. Logo, se f é isomorfismo uniforme, f e f^{-1} são contínuas, e por ser bijetora temos que f é homeomorfismo. ■

Proposição 2.3.18. [13, p. 181] Todo espaço completamente regular é espaço uniforme.

Demonstração: Seja (X, T) um espaço topológico completamente regular. Considere todas as funções $f : X \rightarrow [0, 1]$ fornecidas pelo fato de ser completamente regular. Para cada f e $\varepsilon > 0$ definimos

$$D_{f,\varepsilon} = \{(x, y) \in X \times X \mid |f(x) - f(y)| < \varepsilon\}.$$

Notemos $D_{f,\varepsilon}$ é sempre simétrica e pela desigualdade triangular

$$D_{f,\varepsilon/2} \circ D_{f,\varepsilon/2} \subseteq D_{f,\varepsilon}.$$

Sendo assim, se tomamos a coleção de todas as interseções finitas de elementos da forma $D_{f,\varepsilon}$, temos uma base para uma uniformidade \mathcal{U} em X .

Observemos que $T_{\mathcal{U}}$ não é mais fina que T , pois

$$D_{f,\varepsilon}(x) = \{y \in X \mid |f(x) - f(y)| < \varepsilon\} = f^{-1}((f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon))$$

e a pré-imagem é aberto em (X, T) , pois f é contínua. Desse modo, todo elemento do sistema fundamental de vizinhanças de x em $T_{\mathcal{U}}$ é aberto em T . Vamos usar o fato de (X, T) ser completamente regular para provar que todo aberto na topologia T é aberto em $T_{\mathcal{U}}$, e conseqüentemente as topologias serão iguais. Dado aberto $U \in T$ e $x \in U$, existe função f tal que $U^c \subseteq f^{-1}(0)$ e $f(x) = 1$. Ora,

$$D_{f,1/2}(x) = \{y \in X \mid |f(x) - f(y)| < 1/2\},$$

portanto

$$D_{f,1/2}(x) \subseteq U.$$

Conseqüentemente, existe aberto U_x na topologia $T_{\mathcal{U}}$ que contém x e está contido em U . Fazendo isso para todo $x \in U$, podemos escrever

$$U = \bigcup_{x \in U} U_x$$

e U é aberto na topologia $T_{\mathcal{U}}$. ■

Sabemos que todo espaço topológico de Hausdorff e compacto é normal e o Lema de Urysohn (Teorema 1.9.1) mostra que todo espaço normal é completamente regular, portanto o Teorema anterior mostra que é espaço uniforme. Contudo, é possível descrever melhor a estrutura uniforme de X , como veremos no resultado a seguir. Antes, precisaremos de alguns resultados auxiliares.

Proposição 2.3.19. [13, p. 131] Seja $[X, \mathcal{U}]$ um espaço uniforme. Para cada $V \in \mathcal{U}$ simétrica e $M \subseteq X \times X$, o conjunto $V \circ M \circ V$ é uma vizinhança de M na topologia produto de $X \times X$. Além disso, se \mathcal{V} é a coleção de vizinhanças simétricas de \mathcal{U} , o fecho de M é o conjunto

$$\overline{M} = \bigcap_{V \in \mathcal{V}} V \circ M \circ V.$$

Demonstração: Dada uma vizinhança simétrica $V \in \mathcal{V}$, temos que $(x_1, x_4) \in V \circ M \circ V$ se e somente se existem $x_2, x_3 \in X$ tais que $(x_1, x_2) \in V$, $(x_2, x_3) \in M$ e $(x_3, x_4) \in V$. Pela simetria de V , isso ocorre se e somente se

$$(x_1, x_4) \in V(x_2) \times V(x_3).$$

Desse modo, podemos escrever

$$V \circ M \circ V = \bigcup_{(x_2, x_3) \in M} V(x_2) \times V(x_3),$$

e então $V \circ M \circ V$ é vizinhança de M , pois cada produto da união é vizinhança de um ponto de M .

Por um argumento análogo, temos que outra condição equivalente para ter $(x_1, x_4) \in V \circ M \circ V$ seria ter $(x_2, x_3) \in M$ tal que

$$(x_2, x_3) \in V(x_1) \times V(x_4).$$

Isso significa que existe uma vizinhança de (x_1, x_4) que intersecta M . Agora, a coleção dos conjuntos $V(x_1) \times V(x_4)$ constitui um sistema fundamental de vizinhanças de (x_1, x_4) , pois se $U_1, U_2 \in \mathcal{U}$, existe V simétrica tal que $V \subseteq U_1 \cap U_2$ e

$$V(x_1) \times V(x_4) \subseteq U_1(x_1) \times U_2(x_4).$$

Desse modo,

$$\bigcap_{V \in \mathcal{V}} V \circ M \circ V$$

é exatamente a coleção de todos os pontos de $X \times X$ para os quais toda vizinhança intersecta M , ou seja, \overline{M} . ■

Proposição 2.3.20. [13, p. 132] Se $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme, a coleção \mathcal{W} do fecho das vizinhanças da diagonal de \mathcal{U} constitui uma base para \mathcal{U} .

Demonstração: Basta mostrar que para cada $U \in \mathcal{U}$ existe $W \in \mathcal{W}$ com $W \subseteq U$, pois \mathcal{W} é subcoleção de \mathcal{U} . Ora, pela definição de uniformidade, existe vizinhança simétrica $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^3 \subseteq U$. Portanto, se \overline{V} é a coleção de vizinhanças da diagonal simétricas de \mathcal{U} , temos

$$\overline{V} = \bigcap_{V' \in \mathcal{V}} V' \circ V \circ V' \subseteq V^3 \subseteq U$$

e $\overline{V} \in \mathcal{W}$. Desse modo, \mathcal{W} é base de \mathcal{U} . ■

Teorema 2.3.21 (Unicidade da Uniformidade em Espaços de Hausdorff e Compactos). [13, p. 134]

Seja X um espaço de Hausdorff e compacto. O filtro das vizinhanças da diagonal Δ em $X \times X$ com a topologia produto constitui a única uniformidade em X tal que a topologia uniforme coincide com a topologia original.

Demonstração: A prova será realizada em três passos. Observemos que por filtro das vizinhanças da diagonal, queremos dizer o filtro induzido pela coleção de todos os conjuntos de $X \times X$ que contém um aberto que contém Δ , ou seja, vizinhanças de Δ no sentido topológico.

Passo 1: Se o filtro das vizinhanças da diagonal é uma uniformidade, então a topologia induzida por ela é a mesma que a topologia de X .

Denotaremos o filtro das vizinhanças da diagonal na topologia produto por \mathcal{U} . Por definição, a topologia de X é mais fina que $T_{\mathcal{U}}$, pois toda vizinhança da diagonal contém um aberto que contém a diagonal, conseqüentemente $V(x)$ contém um aberto A que contém x . Por outro lado, dados $x \in X$ e um aberto A que contém x , vamos estender ele a uma vizinhança da diagonal. Dado que X é Hausdorff, para cada $y \neq x$, podemos tomar um aberto A_y tal que $y \in A_y$ mas $x \notin A_y$. Assim,

$$V = (A \times A) \cup \left(\bigcup_{y \neq x} A_y \times A_y \right)$$

é uma vizinhança da diagonal na topologia produto e $V(x) = A$, pois para $x \neq y$ temos que $x \notin A_y$. Portanto, existe um aberto na topologia uniforme contido em A e $T_{\mathcal{U}}$ é mais fina que a topologia de X , portanto elas são compatíveis.

Passo 2: O filtro das vizinhanças da diagonal \mathcal{U} constitui uma uniformidade.

Por \mathcal{U} ser filtro, basta provar que

i) Para todo $V \in \mathcal{U}$ temos $V^{-1} \in \mathcal{U}$.

ii) Para todo $V \in \mathcal{U}$ temos $W \in \mathcal{U}$ tal que $W \circ W \subset V$.

O primeiro item é consequência da estrutura da topologia produto. Se $V \in \mathcal{U}$, existe aberto $A \subset V$, e podemos escrever

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda,1} \times A_{\lambda,2},$$

onde $A_{\lambda,i}$ é aberto em X , e assim

$$B = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_{\lambda,2} \times A_{\lambda,1}$$

é um aberto que contém a diagonal e tal que $B \subset V^{-1}$, portanto $V^{-1} \in \mathcal{U}$.

Para o segundo item, vamos supor por absurdo que existe $V \in \mathcal{U}$ tal que para todo $W \in \mathcal{U}$ vale $W \circ W \not\subset V$. Nesse caso, observemos que dados $W_1, W_2 \in \mathcal{U}$, não podemos ter

$$((W_1 \circ W_1) \cap V^c) \cap ((W_2 \circ W_2) \cap V^c) = \emptyset,$$

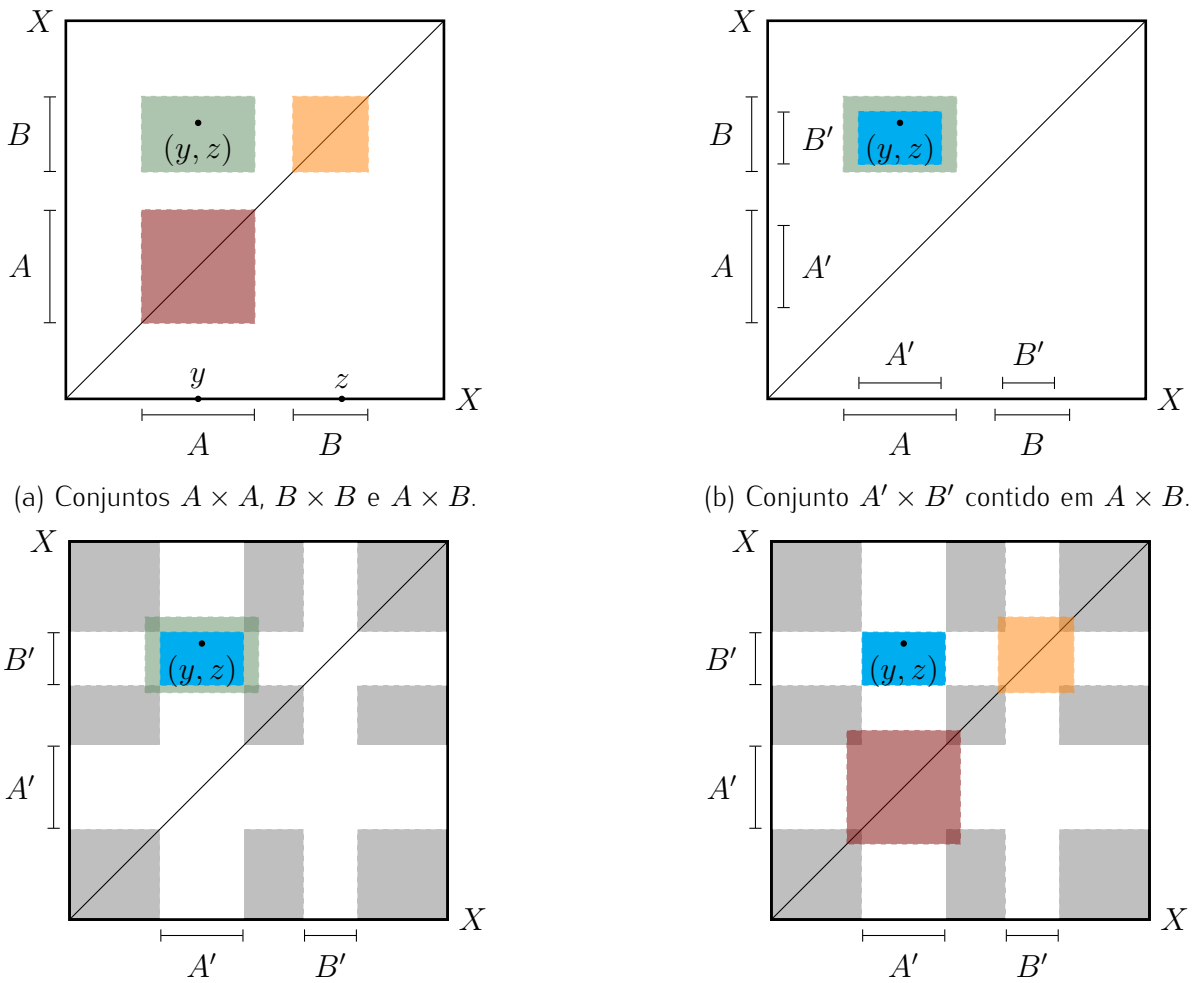
senão $W = W_1 \cap W_2$ é tal que $W \circ W \subset V$. Sendo assim, podemos usar \mathcal{U} para induzir um filtro em $X \times X$ tomando como base o conjunto

$$\mathfrak{F} = \{(W \circ W) \cap V^c \mid W \in \mathcal{U}\}.$$

Vale que $X \times X$ é compacto, portanto existe um ponto de acumulação desse filtro, digamos (y, z) .

Agora, vamos construir uma vizinhança da diagonal W para a qual existe um aberto contendo (y, z) que não intersecta $W \circ W$, obtendo uma contradição. Pelo fato de X ser Hausdorff, existem abertos disjuntos A, B com $y \in A$ e $z \in B$. Todo espaço Hausdorff compacto é normal, e consequentemente regular, portanto existem A', B' abertos com $y \in A'$ e $z \in B'$ e tais que $\overline{A'} \subset A$ e $\overline{B'} \subset B$. Escrevemos $D = \overline{A'}^c \cap \overline{B'}^c$ e obtemos a vizinhança da diagonal

$$W = (A \times A) \cup (B \times B) \cup (D \times D).$$



(a) Conjuntos $A \times A$, $B \times B$ e $A \times B$.

(b) Conjunto $A' \times B'$ contido em $A \times B$.

(c) Observemos que o conjunto $D \times D$ intersecta $A \times B$ mas não $A' \times B'$.

(d) O conjunto W é uma vizinhança da diagonal pois $W \cap (A \times A) \neq \emptyset$ e $W \cap (B \times B) \neq \emptyset$.

Figura 2.6: Construção da vizinhança $A' \times B'$ de (y, z) e vizinhança da diagonal W que são disjuntas.

Observemos que

$$(\overline{A'} \times X) \cap W = \overline{A'} \times A \quad \text{e} \quad (X \times \overline{B'}) \cap W = B \times \overline{B'}$$

e como $A \cap B = \emptyset$, concluímos que $A' \times B' \cap W \circ W = \emptyset$, pois se $a \in A'$ e $b \in B'$, por construção não temos $(a, b) \in W$, e nem pode existir $c \in X$ tal que $(a, c), (c, b) \in W$. Ora, isso significa que (y, z) não pode ser ponto de acumulação de $W \circ W$, o que é um absurdo. Assim, vale o segundo item e a coleção das vizinhanças da diagonal é uma uniformidade.

Passo 3: A estrutura uniforme é única.

Suponhamos que existe outra uniformidade \mathbf{V} compatível com a topologia. Por ser compatível com a topologia, a topologia produto induzida pelas uniformidades em $X \times X$ é a mesma. Assim, pela Proposição 2.3.19, $V \in \mathbf{V}$ deve ser vizinhança da diagonal na topologia em $X \times X$, pois existe $W \in \mathbf{U}$ tal que $W^3 \subseteq V$ e W^3 é vizinhança de W que contém a diagonal. Logo, $V \in \mathbf{U}$.

Agora precisamos mostrar que todo elemento de \mathbf{U} é elemento de \mathbf{V} . Suponhamos que existe vizinhança da diagonal D da topologia em $X \times X$ que não pertence a \mathbf{V} . Desse modo, não existe $V \in \mathbf{V}$ com $V \subset D$, ou seja,

$$D^c \cap V \neq \emptyset$$

para todo $V \in \mathbf{V}$. Podemos assumir que D é aberta, logo D^c é fechado (e compacto, pois $X \times X$ é compacto) e afirmamos que a coleção

$$\{D^c \cap V \mid V \in \mathbf{V}\}$$

constitui uma base de um filtro em D^c . De fato, isso só não ocorreria se existissem $V_1, V_2 \in \mathbf{V}$ tais que $(D^c \cap V_1) \cap (D^c \cap V_2) = \emptyset$, mas isso implicaria $(V_1 \cap V_2) \cap D^c = \emptyset$, o que é absurdo. Com isso, sabemos que existe um ponto $(y, z) \in D^c$ de acumulação deste filtro. Dado que a topologia induzida é de Hausdorff, temos

$$\Delta = \bigcap \mathbf{V}.$$

Mais do que isso, a coleção \mathbf{W} de vizinhanças da diagonal fechadas de \mathbf{V} constitui uma base da uniformidade \mathbf{V} , portanto

$$\Delta = \bigcap \mathbf{W}$$

Sendo assim, os únicos pontos de acumulação de toda vizinhança da diagonal em \mathbf{W} estão em Δ , e como (y, z) é ponto de acumulação de todo $W \in \mathbf{W}$, (y, z) está em Δ . Ora, isso é um absurdo, pois $\Delta \subset D$, enquanto $(y, z) \in D^c$. Logo, toda vizinhança topológica da diagonal está em \mathbf{V} e a unicidade está garantida. ■

Definição 2.3.22. [13, p. 108] Um subconjunto A de um espaço uniforme $[X, \mathbf{U}]$ é **totalmente limitado** e para cada $V \in \mathbf{U}$ existe uma coleção finita $\{a_1, \dots, a_n\}$ de elementos de A tais que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n V(a_i).$$

□

2.4 Grupos Topológicos - Mais um Exemplo

Definição 2.4.1. [13, p. 42] Seja (G, e, \cdot) um grupo. Se T é uma topologia em G tal que as funções

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{m} : G \times G & \longrightarrow & G \\ (g_1, g_2) & \longmapsto & g_1 \cdot g_2 \end{array} \quad \text{e} \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{u} : G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

são contínuas e (G, T) é um espaço de Hausdorff¹, então G é chamado de **grupo topológico**. $G \times G$ é considerado com a topologia produto, \mathbf{m} é chamada de produto ou multiplicação e \mathbf{u} de inversão. □

A primeira vista, pode parecer um pouco nebuloso como tratamos essa topologia no grupo. Contudo, já estamos acostumados a trabalhar com um grupo topológico: \mathbb{R} dotado da topologia Euclidiana e a operação de soma. Abertos básicos em \mathbb{R} são da forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, onde $\varepsilon > 0$. Mostraremos então que a pré-imagem desses abertos por \mathbf{m} e \mathbf{u} são abertos e assim $(\mathbb{R}, 0, +)$ é grupo topológico.

Ora, dado aberto $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, temos

$$\mathbf{u}^{-1}((x - \varepsilon, x + \varepsilon)) = (-x - \varepsilon, -x + \varepsilon),$$

que é aberto em \mathbb{R} . Portanto, \mathbf{u} é contínua. Para a função \mathbf{m} , observemos que se existe par (y_1, y_2) tal que,

$$\mathbf{m}((y_1, y_2)) \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon),$$

então podemos tomar

$$\delta = \min\{(y_1 + y_2) - (x - \varepsilon), (x + \varepsilon) - (y_1 + y_2)\}.$$

¹Alguns autores não requerem que seja um espaço de Hausdorff, porém precisaremos dessa propriedade para aplicar resultados de hiperespaços na teoria de grupos topológicos.

Desse modo, se $\delta' = \delta/2$, tomamos o aberto em $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$

$$U = (y_1 - \delta', y_1 + \delta') \times (y_2 - \delta', y_2 + \delta').$$

Dado $(z_1, z_2) \in U$, abrindo os casos para cada δ possível, mostramos que

$$\begin{aligned} \mathbf{m}((z_1, z_2)) &= z_1 + z_2 \\ &> (y_1 - \delta') + (y_2 - \delta') \\ &= (y_1 + y_2) - \delta \\ &\geq x - \varepsilon. \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{m}((z_1, z_2)) &= z_1 + z_2 \\ &< (y_1 + \delta') + (y_2 + \delta') \\ &= (y_1 + y_2) + \delta \\ &\leq x + \varepsilon. \end{aligned}$$

Assim, provamos que \mathbf{m} é contínua.

Mais profundamente a função \mathbf{u} é sempre um homeomorfismo². Basta ver que

$$\mathbf{u}^{-1}(x) = \{x^{-1}\} = \mathbf{u}(x),$$

logo para todo aberto V ,

$$\mathbf{u}(V) = \mathbf{u}^{-1}(V)$$

que é aberto. Agora, as duas funções que requeremos ser contínuas lembra as propriedades que estruturas uniformes satisfazem. De fato, todo grupo topológico é um espaço uniforme. Antes de provar isso, precisaremos de um lema. A partir de agora escreveremos $x \cdot y$ ao invés de $\mathbf{m}(x, y)$.

Lema 2.4.2. Seja (G, e, \cdot) um grupo topológico. Se $V \subseteq G$ é um aberto que contém e , existe um aberto $W \subseteq G$ que contém e tal que

$$W \cdot W = \{g \cdot h \mid g, h \in W\} \subseteq V.$$

Demonstração: Vamos usar a continuidade da função \mathbf{m} . Dado um aberto V que contém e , sabemos que existe aberto $U \subseteq G \times G$ tal que $U = \mathbf{m}^{-1}(V)$. Ora, $(e, e) \in U$, portanto existem abertos U_1 e U_2 de G tais que

$$(e, e) \in U_1 \times U_2 \subseteq U.$$

Desse modo, se $W = U_1 \cap U_2$,

$$W \cdot W \subseteq V.$$

■

Proposição 2.4.3. [13, p. 106] Seja (G, e, \cdot) um grupo topológico. Se V é uma vizinhança de e , definimos

$$R_V = \{(h, g) \mid h \cdot g^{-1} \in V\}.$$

A coleção dos conjuntos R_V constitui uma base de uma uniformidade \mathbf{U}_R em G , chamada **uniformidade direita** de G .

Demonstração: Precisamos provar quatro afirmações:

²Mas não necessariamente *homomorfismo*.

Teorema 2.4.5. Seja (G, e, \cdot) um grupo topológico. A topologia $T_{\mathbf{U}_R}$ induzida pela uniformidade \mathbf{U}_R coincide com a topologia T do grupo.

Demonstração: Lembremos que \mathbf{u} , r_g e ℓ_g são homeomorfismos. Logo, dada vizinhança V de $g \in G$,

$$\begin{aligned} R_V(g) &= \{h \mid g \cdot h^{-1} \in V\} \\ &= \{h \mid h^{-1} \in \ell_g(V)\} \\ &= \{h \mid h \in \mathbf{u}(\ell_g(V))\} \\ &= \mathbf{u}(\ell_g(V)). \end{aligned}$$

Desse modo, toda vizinhança em $T_{\mathbf{U}_R}$ é uma vizinhança em T . Por outro lado, se V é vizinhança em T

$$\begin{aligned} V &= \{h \mid h \in V\} \\ &= \{h \mid h^{-1} \in \mathbf{u}(V)\} \\ &= \{h \mid g \cdot h^{-1} \in \ell_g(\mathbf{u}(V))\} \\ &= R_{\ell_g(\mathbf{u}(V))}(g) \end{aligned}$$

Assim, toda vizinhança em T é vizinhança em $T_{\mathbf{U}_R}$ e as topologias são iguais. ■

Agora mostramos que quocientes preservam a propriedade de ser grupo topológico e consequentemente espaço uniforme.

Lema 2.4.6. Se (G, e, \cdot) é um grupo topológico e H um subgrupo normal de G , então a aplicação quociente $\pi : G \rightarrow G/H$ é aberta.

Demonstração: Observemos que dada classe gH , temos que

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(gH) &= \{x \in G \mid \pi(x) \in gH\} \\ &= \{x \in G \mid x = g \cdot h \text{ para algum } h \in H\}. \end{aligned}$$

Logo, dado aberto $U \subseteq G$,

$$\begin{aligned} \pi^{-1}(\pi(U)) &= \bigcup_{g \in U} \pi^{-1}(gH) \\ &= \bigcup_{g \in U} \{x \in G \mid x = g \cdot h \text{ para algum } h \in H\} \\ &= \bigcup_{h \in H} \{x \in X \mid x = g \cdot h \text{ para algum } g \in U\} \\ &= \bigcup_{h \in H} r_h(U), \end{aligned}$$

que é aberto, pois r_h é homeomorfismo. Desse modo, $\pi(U)$ é aberto, e temos π aberta. ■

Proposição 2.4.7. Seja (G, e, \cdot) um grupo topológico. Se H é um subgrupo normal de G , então G/H é um grupo topológico.

Demonstração: Se H é subgrupo normal de G , então G/H é um grupo. Seja π a aplicação quociente. Sabemos que U é aberto em G/H se e somente se $\pi^{-1}(U)$ é aberto em G . Com isso, mostraremos que

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}} : G/H \times G/H &\longrightarrow G/H & \bar{\mathbf{u}} : G/H &\longrightarrow G/H \\ (g_1H, g_2H) &\longmapsto (g_1 \cdot g_2)H & gH &\longmapsto \bar{g}^{-1}H \end{aligned} \quad \text{e}$$

são contínuas.

- Função \bar{m} :

Pela definição de \bar{m} , o diagrama comutativo a seguir é válido

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{m} & G \\ \downarrow \pi \times \pi & & \downarrow \pi \\ G/H \times G/H & \xrightarrow{\bar{m}} & G/H \end{array}$$

Portanto, dado aberto V em G/H , sabendo que π e m são contínuas e que π é aberta, temos

$$\bar{m}^{-1}(V) = \pi \times \pi(m^{-1}(\pi^{-1}(V))),$$

que é um aberto.

- Função \bar{u} :

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{u} & G \\ \downarrow \pi \times \pi & & \downarrow \pi \\ G/H & \xrightarrow{\bar{u}} & G/H \end{array}$$

Novamente, para um aberto V em G/H , temos

$$\bar{u}^{-1}(V) = \pi(u^{-1}(\pi^{-1}(V))),$$

aberto, pois π é contínua e aberta e u é contínua.



2.5 Coberturas Uniformes

Vamos utilizar também outra definição de espaços uniformes, que se dá por coberturas uniformes, como explicamos a seguir.

Definição 2.5.1. [20, p. 365] Dadas duas coberturas \mathfrak{C}_1 e \mathfrak{C}_2 de um conjunto X , se todo elemento de \mathfrak{C}_1 é subconjunto de algum elemento de \mathfrak{C}_2 , dizemos que \mathfrak{C}_1 **refina** \mathfrak{C}_2 e escrevemos $\mathfrak{C}_1 \prec \mathfrak{C}_2$.



Definição 2.5.2. [20, p. 366] Dado um conjunto X , uma cobertura \mathfrak{C} e $E \in \mathcal{P}(X)$, dizemos que a **estrela de E com relação à cobertura \mathfrak{C}** é o conjunto

$$\text{St}(E, \mathfrak{C}) = \bigcup \{C_\lambda \in \mathfrak{C} \mid C_\lambda \cap E \neq \emptyset\}.$$



Observe que $\text{St}(E, \mathfrak{C})$ é um conjunto composto pelos elementos de cada V_λ e não o conjunto dos V_λ .

Definição 2.5.3. [20, p. 366] Dado um conjunto X , a **cobertura baricêntrica** de uma cobertura $\mathfrak{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é a cobertura

$$\mathfrak{C}^b = \{\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}) \mid x \in X\}.$$



Definição 2.5.4. [20, p. 366] Dado um conjunto X , a **cobertura estrela** de uma cobertura $\mathfrak{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ é a cobertura

$$\mathfrak{C}^* = \{\text{St}(C_\lambda, \mathfrak{C}) \mid C_\lambda \in \mathfrak{C}\}.$$

□

Proposição 2.5.5. Dado um conjunto X , se \mathfrak{B} e \mathfrak{C} são coberturas de X tais que $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$, então para todo $E \subset X$ vale

$$\text{St}(E, \mathfrak{B}) \subset \text{St}(E, \mathfrak{C}).$$

Demonstração: Sejam $\mathfrak{B} = \{B_\gamma\}_{\gamma \in \Gamma}$ e $\mathfrak{C} = \{C_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Como $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$, para cada $B_\gamma \in \mathfrak{B}$, sabemos que existe $C_{\lambda_\gamma} \in \mathfrak{C}$ tal que $B_\gamma \subset C_{\lambda_\gamma}$, portanto

$$\begin{aligned} \text{St}(E, \mathfrak{B}) &= \bigcup \{B_\gamma \in \mathfrak{B} \mid B_\gamma \cap E \neq \emptyset\} \\ &\subset \bigcup \{C_{\lambda_\gamma} \in \mathfrak{C} \mid C_{\lambda_\gamma} \cap E \neq \emptyset\} \\ &\subset \bigcup \{C_\lambda \in \mathfrak{C} \mid C_\lambda \cap E \neq \emptyset\} \\ &= \text{St}(E, \mathfrak{C}). \end{aligned}$$

■

Definição 2.5.6. [20, p. 365] Dadas duas coberturas \mathfrak{C} e \mathfrak{D} , o **refinamento comum** de \mathfrak{C} e \mathfrak{D} é a cobertura

$$\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{D} = \{C \cap D \mid C \in \mathfrak{C}, D \in \mathfrak{D}\}.$$

□

Definição 2.5.7. [20, p. 17] Uma família de coberturas \mathcal{G} é dita uma **cobertura uniforme** se

- $\mathfrak{C}_1 \in \mathcal{G}$ e $\mathfrak{C}_1 \prec \mathfrak{C}_2$ implicam $\mathfrak{C}_2 \in \mathcal{G}$.
- $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \in \mathcal{G}$ implica na existência de uma cobertura $\mathfrak{C}_3 \in \mathcal{G}$ tal que $\mathfrak{C}_3^* \prec \mathfrak{C}_1 \wedge \mathfrak{C}_2$.

Um conjunto X dotado de uma cobertura uniforme \mathcal{G} é chamado de **espaço uniforme** e denotado por $[X, \mathcal{G}]$.

□

Observemos que $\mathfrak{C} \prec \mathfrak{C}^b \prec \mathfrak{C}^*$, portanto, se \mathfrak{C} pertence a uma cobertura uniforme, as coberturas baricêntrica e estrela de \mathfrak{C} também pertencem.

Proposição 2.5.8. Se \mathcal{G} é uma cobertura uniforme e $\mathfrak{C} \in \mathcal{G}$, então existe $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}$ tal que $\mathfrak{D}^* \prec \mathfrak{C}$.

Demonstração: Como \mathcal{G} é uma cobertura uniforme, existe uma cobertura $\mathfrak{D} \in \mathcal{G}$ tal que $\mathfrak{D}^* \prec \mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}$. Queremos mostrar então que $\mathfrak{D}^* \prec \mathfrak{C}$, mas isso é imediato, pois os elementos de $\mathfrak{C} \wedge \mathfrak{C}$ estão contidos em elementos de \mathfrak{C} , por serem a interseção destes.

■

Definição 2.5.9. [20, p. 17] Uma família de coberturas \mathcal{B} é dita uma **base de uma cobertura uniforme** se dadas coberturas $\mathfrak{C}_1, \mathfrak{C}_2 \in \mathcal{B}$ existe uma cobertura $\mathfrak{C}_3 \in \mathcal{B}$ tal que $\mathfrak{C}_3^* \prec \mathfrak{C}_1 \wedge \mathfrak{C}_2$. A cobertura uniforme \mathcal{G} gerada por tal base é dada por

$$\mathcal{G} = \{\mathfrak{C} \mid \exists \mathfrak{C}' \in \mathcal{B} : \mathfrak{C}' \prec \mathfrak{C}\}$$

□

Assim como fizemos com vizinhanças da diagonal, dada uma cobertura uniforme \mathfrak{C} , existe uma caracterização simples para verificar se uma coleção de coberturas de \mathfrak{C} é base de \mathfrak{C} .

Proposição 2.5.10. [20, p. 17] Se \mathfrak{C} é uma cobertura uniforme e \mathfrak{B} uma coleção de coberturas em \mathfrak{C} , dizemos que \mathfrak{B} é base de \mathfrak{C} se e somente se para todo $\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}$ existe $\mathfrak{B} \in \mathfrak{B}$ que refina \mathfrak{C} .

Demonstração: Pela definição de cobertura uniforme induzida por uma base, temos que se \mathfrak{B} é base, então toda cobertura de \mathfrak{C} é refinada por uma cobertura de \mathfrak{B} . Agora, se toda cobertura $\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}$ é refinada por uma cobertura $\mathfrak{B} \in \mathfrak{B}$, dadas coberturas $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2 \in \mathfrak{B}$, elas estão em \mathfrak{C} , logo existe $\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{C}^* \prec \mathfrak{B}_1 \wedge \mathfrak{B}_2$. Assim, existe $\mathfrak{B}_3 \in \mathfrak{B}$ que refina \mathfrak{C} , e pela definição de refinamento

$$\mathfrak{B}_3^* \prec \mathfrak{C}^* \prec \mathfrak{B}_1 \wedge \mathfrak{B}_2,$$

provando que \mathfrak{B} satisfaz a condição para ser base de uma cobertura uniforme $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$. Falta mostrar que a cobertura uniforme induzida por \mathfrak{B} é exatamente \mathfrak{C} . As coberturas em $\mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$ são aquelas refinadas por coberturas em \mathfrak{B} , logo $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$. Agora, se $\mathfrak{D} \in \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$, existem $\mathfrak{B} \in \mathfrak{B} \subseteq \mathfrak{C}$ e $\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}$ tais que

$$\mathfrak{C}^* \prec \mathfrak{B} \prec \mathfrak{D},$$

portanto \mathfrak{D} é refinada por uma cobertura em \mathfrak{C} e $\mathfrak{D} \in \mathfrak{C}$. Concluímos assim que $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_{\mathfrak{B}}$. ■

Fazendo um paralelo com uniformidades, observemos que podemos associar a propriedade a) de 2.5.7 à propriedade de que se V pertence a uma uniformidade \mathfrak{U} , então $W \in \mathfrak{U}$ para todo $W \supseteq V$. Da mesma forma, a propriedade b) garante uma cobertura cujos elementos estão contidos na interseção de elementos de outras duas coberturas, o que podemos associar à propriedade que garante que se $V, W \in \mathfrak{U}$, então existe $U \in \mathfrak{U}$ com $U \subset V \cap W$. A partir de a) e b), podemos encontrar a propriedade análoga à propriedade que garante que se $V \in \mathfrak{U}$, então existe $W \in \mathfrak{U}$ com $W \circ W \subset V$, o que é feito no lema a seguir, já que para todo \mathfrak{C} em uma cobertura uniforme \mathfrak{C} existe $\mathfrak{D} \in \mathfrak{C}$ tal que $\mathfrak{D}^* \prec \mathfrak{C}$, como visto na Proposição 2.5.8. A partir da Proposição 2.5.12 enunciaremos e provamos vários resultados que estabelecem uma equivalência (e de fato uma relação biunívoca) entre uniformidades e coberturas uniformes.

Lema 2.5.11. Seja \mathfrak{C} uma cobertura uniforme e $\mathfrak{C}, \mathfrak{D} \in \mathfrak{C}$ com $\mathfrak{D}^* \prec \mathfrak{C}$. Para todo $x \in X$ vale que se $y \in \text{St}(\{x\}, \mathfrak{D})$, então

$$\text{St}(\{y\}, \mathfrak{D}) \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}).$$

Demonstração: Se $y \in \text{St}(\{x\}, \mathfrak{D})$, então deve existir $D \in \mathfrak{D}$ tal que $x, y \in D$. Sendo assim,

$$D \subset \text{St}(\{y\}, \mathfrak{D}),$$

e portanto $x \in \text{St}(\{y\}, \mathfrak{D})$. Como $\mathfrak{D}^* \prec \mathfrak{C}$, existe $C \in \mathfrak{C}$ tal que

$$\text{St}(\{y\}, \mathfrak{D}) \subset C,$$

e vale $C \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C})$, pois $x \in \text{St}(\{y\}, \mathfrak{D})$. Dessa forma,

$$\text{St}(\{y\}, \mathfrak{D}) \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}).$$

A partir de uma uniformidade, podemos definir uma cobertura uniforme e vice-versa. Veremos como fazer isso baseado nas discussões presentes em [24, p. 244-246] e [20, p. 16-20]. ■

Proposição 2.5.12. Dado um espaço uniforme $[X, \mathfrak{U}]$, para cada $V \in \mathfrak{U}$, a coleção

$$\mathfrak{C}_V = \{V(x) \mid x \in X\}$$

é uma cobertura de X .

Demonstração: Como $x \in V(x)$, claramente

$$X = \bigcup_{x \in X} V(x).$$

■

Proposição 2.5.13. Dado um espaço uniforme $[X, \mathfrak{U}]$, a coleção $\mathcal{B}_{\mathfrak{U}}$ dos conjuntos

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}} = \{U(x) \mid x \in X\},$$

em que $U \in \mathfrak{U}$, constitui uma base de uma cobertura uniforme $\mathcal{C}_{\mathfrak{U}}$. A essa cobertura uniforme damos o nome de **cobertura uniforme induzida pela uniformidade \mathfrak{U}** .

Demonstração: Precisamos mostrar, já usando a linguagem de vizinhanças da diagonal, que dados $V, W \in \mathfrak{U}$ existe $U \in \mathfrak{U}$ tal que

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}^* \prec \mathfrak{C}_V \wedge \mathfrak{C}_W.$$

Uma escolha provável é buscar $U \in \mathfrak{U}$ tal que para todo $x \in X$ valha $\text{St}(U(x), \mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}) \subset V(x) \cap W(x) = (V \cap W)(x)$ para determinados $V, W \in \mathfrak{U}$. Agora,

$$\text{St}(U(x), \mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}) = \bigcup_{y \in X} \{U(y) \mid U(y) \cap U(x) \neq \emptyset\},$$

mas se $U(x) \cap U(y) \neq \emptyset$, então existe $z \in U(x) \cap U(y)$ e assim, $(x, z), (y, z) \in U$. Logo, $y \in (U \circ U)(x)$ caso U seja simétrica. Portanto, temos a priori que se tomamos U simétrica com $U^3 \subset V \cap W$, vale

$$U(y) \subset U^3(x).$$

Com isso,

$$\text{St}(U(x), \mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}) \subset \bigcup_{y \in X} \{U(y) \mid U(y) \subset U^3(x)\} \subset (V \cap W)(x).$$

Uma vez que $U^3 \subset V \cap W$, temos que

$$\text{St}(U(x), \mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}) \subset (V \cap W)(x),$$

portanto tomando U simétrica tal que $U^3 \subset V \cap W$ temos que

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{U}}^* \prec \mathfrak{C}_V \wedge \mathfrak{C}_W$$

tal como desejado, o que prova que a coleção $\mathcal{B}_{\mathfrak{U}}$ constitui uma base de uma cobertura uniforme. ■

Proposição 2.5.14. Dado um espaço uniforme $[X, \mathfrak{U}]$ e \mathfrak{V} base simétrica de \mathfrak{U} , a coleção $\mathcal{B}_{\mathfrak{V}}$ dos conjuntos

$$\mathfrak{C}_{\mathfrak{V}} = \{V(x) \mid x \in X\},$$

em que $V \in \mathfrak{V}$, constitui uma base de $\mathcal{C}_{\mathfrak{U}}$.

Demonstração: Como discutido na Proposição 2.5.13, para mostrar que é uma base, basta mostrar que dados $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$, existe $U \in \mathfrak{V}$ simétrica tal que $U^3 \subset V_1 \cap V_2$. Observemos que como \mathfrak{V} é simétrica, basta encontrar $U \in \mathfrak{V}$ tal que $U^3 \subset V_1 \cap V_2$.

Como \mathfrak{V} é base, existe $W_1 \in \mathfrak{V}$ tal que $W_1 \subset V_1 \cap V_2$ e também é possível encontrar $W_2 \in \mathfrak{V}$ tal que $W_2 \circ W_2 \subset W_1$, portanto basta tomar $U \in \mathfrak{V}$ tal que $U \circ U \subset W_2$, pois teremos

$$U^4 \subset W_2 \circ W_2 \subset W_1 \subset V_1 \cap V_2.$$

Para garantir que é base de \mathcal{C}_U , lembremos que a cobertura uniforme \mathcal{C} induzida por uma base \mathcal{B} é aquela composta por todas as coberturas refinadas por coberturas de \mathcal{B} . Como todo elemento de V é elemento de U , temos que

$$\mathcal{B}_V \subset \mathcal{B}_U,$$

e portanto a cobertura uniforme induzida por \mathcal{B}_U contém todas as coberturas da cobertura induzida por \mathcal{B}_V . Uma vez que todo elemento de U contém um elemento de V , toda cobertura induzida por \mathcal{B}_U é refinada por uma cobertura de \mathcal{B}_V , então a cobertura induzida por \mathcal{B}_V contém todas as coberturas da cobertura induzida por \mathcal{B}_U e assim ambas induzem a mesma cobertura uniforme, por induzirem a mesma coleção de coberturas. ■

Proposição 2.5.15. Dado um espaço uniforme $[X, \mathcal{C}]$, a coleção $V_{\mathcal{C}}$ dos conjuntos

$$V_{\mathcal{C}} = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \times C$$

é base simétrica de uma uniformidade $U_{\mathcal{C}}$ chamada **uniformidade induzida pela cobertura uniforme \mathcal{C}** .

Demonstração: Como $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ é cobertura de X , $V_{\mathcal{C}}$ contém a diagonal, portanto a coleção dos $V_{\mathcal{C}}$ se qualifica para constituir uma base de uma uniformidade. Para a simetria, observemos que se $(x, y) \in V_{\mathcal{C}}$, então existe $C \in \mathcal{C}$ tal que $x, y \in C$, e portanto $(y, x) \in V_{\mathcal{C}}$ também. Precisamos provar então três propriedades, já descritas usando o fato de partirmos de uma cobertura:

i) Dadas $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{C}$, existe $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ tal que $V_{\mathcal{F}} \subset V_{\mathcal{C}} \cap V_{\mathcal{D}}$.

Dadas $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in \mathcal{C}$, tomemos $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathcal{F}^* \prec \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$. Vale que $\mathcal{F} \prec \mathcal{C} \wedge \mathcal{D}$, portanto se $F \in \mathcal{F}$, existem $C_F \in \mathcal{C}$ e $D_F \in \mathcal{D}$ tais que $F \subset C_F \cap D_F$, logo

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{F}} &= \bigcup_{F \in \mathcal{F}} F \times F \subset \bigcup_{F \in \mathcal{F}} (C_F \cap D_F) \times (C_F \cap D_F) \\ &\subset \left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} C_F \times C_F \right) \cap \left(\bigcup_{F \in \mathcal{F}} D_F \times D_F \right) \\ &\subset \left(\bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \times C \right) \cap \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D \times D \right) \\ &= V_{\mathcal{C}} \cap V_{\mathcal{D}}. \end{aligned}$$

ii) Dada $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$, existe $\mathcal{D} \in \mathcal{C}$ tal que $V_{\mathcal{D}}^{-1} \subset V_{\mathcal{C}}$.

Basta tomar a própria cobertura \mathcal{C} já que $V_{\mathcal{C}}$ é simétrica.

iii) Dada $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$, existe $\mathcal{D} \in \mathcal{C}$ tal que $V_{\mathcal{D}} \circ V_{\mathcal{D}} \subset V_{\mathcal{C}}$.

Mostraremos que existe $\mathcal{D} \in \mathcal{C}$ tal que $(V_{\mathcal{D}} \circ V_{\mathcal{D}})(x) \subset V_{\mathcal{C}}(x)$ para todo $x \in X$. Começamos observando que, dados $x \in X$ e $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} V_{\mathcal{C}}(x) &= \{y \in X \mid (x, y) \in V_{\mathcal{C}}\} \\ &= \{y \in X \mid x, y \in C \text{ para algum } C \in \mathcal{C}\} \\ &= \bigcup_{C \in \mathcal{C}} \{C \mid \{x\} \cap C \neq \emptyset\} \\ &= \text{St}(\{x\}, \mathcal{C}). \end{aligned}$$

Sabemos pela Proposição 2.5.11 que se $\mathfrak{D} \in \mathcal{C}$ é tal que $\mathfrak{D}^* \prec \mathfrak{C}$, então

$$\text{St}(\{y\}, \mathfrak{D}) \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C})$$

para todo $y \in \text{St}(\{x\}, \mathfrak{D})$. Sendo assim, parece razoável tentar provar que

$$(V_{\mathfrak{D}} \circ V_{\mathfrak{D}})(x) \subset \bigcup_{y \in \text{St}(\{x\}, \mathfrak{D})} \text{St}(\{y\}, \mathfrak{D}),$$

pois isso nos daria

$$(V_{\mathfrak{D}} \circ V_{\mathfrak{D}})(x) \subset V_{\mathfrak{C}}(x)$$

e garantiria $V_{\mathfrak{D}} \circ V_{\mathfrak{D}} \subset V_{\mathfrak{C}}$. De fato,

$$\begin{aligned} (V_{\mathfrak{D}} \circ V_{\mathfrak{D}})(x) &= \{z \in X \mid (x, y), (y, z) \in V_{\mathfrak{D}} \text{ para algum } y \in X\} \\ &= \bigcup_{y \in V_{\mathfrak{D}}(x)} V_{\mathfrak{D}}(y) \\ &= \bigcup_{y \in \text{St}(\{x\}, \mathfrak{D})} \text{St}(\{y\}, \mathfrak{D}). \end{aligned}$$

Com isso, temos que para tal \mathfrak{D}

$$(V_{\mathfrak{D}} \circ V_{\mathfrak{D}})(x) \subset \bigcup_{y \in \text{St}(\{x\}, \mathfrak{D})} \text{St}(\{y\}, \mathfrak{D}) \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}) = V_{\mathfrak{C}}(x)$$

para todo $x \in X$, tal como queríamos. ■

Proposição 2.5.16. Dado um espaço uniforme $[X, \mathcal{C}]$ e \mathcal{B} uma base de \mathcal{C} , a coleção $V_{\mathcal{B}}$ dos conjuntos

$$V_{\mathcal{B}} = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \times B$$

é base simétrica da uniformidade $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$.

Demonstração: A prova de que $V_{\mathcal{B}}$ é base de uma uniformidade é a mesma da Proposição 2.5.13, já que usamos apenas propriedades básicas. Sendo assim, basta mostrar que $V_{\mathcal{B}}$ induz $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$.

Para mostrar isso, lembremos que a uniformidade \mathcal{U} induzida por uma base \mathcal{V} é aquela tal que todo elemento de \mathcal{U} contém um elemento de \mathcal{V} . Seja \mathcal{U} a uniformidade induzida por $V_{\mathcal{B}}$. Primeiramente, como $\mathcal{B} \subset \mathcal{C}$, se $V_{\mathcal{C}}$ é a base induzida por \mathcal{C} , temos que todo elemento de $V_{\mathcal{B}}$ é elemento de $V_{\mathcal{C}}$, portanto toda vizinhança da diagonal em \mathcal{U} é uma vizinhança da diagonal em $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$. Por outro lado, se $U \in \mathcal{U}_{\mathcal{C}}$, então existe $W \in V_{\mathcal{C}}$ tal que $W \subset U$. Em particular,

$$W = \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \times C$$

para algum $\mathfrak{C} \in \mathcal{C}$. Como \mathcal{B} é base de \mathcal{C} , existe $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathfrak{B} \prec \mathfrak{C}$, e dessa forma

$$V = \bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \times B \subset W \subset U,$$

e assim, U pertence à \mathcal{U} e $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$ está contida em $\mathcal{U}_{\mathcal{C}}$, portanto ambas as uniformidades são iguais. ■

Finalmente, podemos investigar como as estruturas induzidas se relacionam, o que é feito nos próximos teoremas.

Teorema 2.5.17. Dado um espaço uniforme $[X, \mathbb{W}]$, a cobertura uniforme induzida por \mathbb{W} induz a própria uniformidade \mathbb{W} em X , ou seja, $\mathbb{W} = \mathbb{U}_{\mathcal{C}_{\mathbb{W}}}$.

Demonstração: Usando as proposições 2.5.15 e 2.5.16, temos que \mathbb{W} induz uma base simétrica $\mathcal{B}_{\mathbb{W}}$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{W}}$ e $\mathcal{B}_{\mathbb{W}}$ induz uma base simétrica $\mathbb{V}_{\mathcal{B}_{\mathbb{W}}}$ de $\mathbb{U}_{\mathcal{C}_{\mathbb{W}}}$. Precisamos mostrar que $\mathbb{U}_{\mathcal{C}_{\mathbb{W}}} = \mathbb{W}$, mas para tal basta tomar uma base simétrica \mathbb{V} de \mathbb{W} e mostrar que $\mathbb{V}_{\mathcal{B}_{\mathbb{W}}}$ induz a mesma uniformidade que \mathbb{V} , e isso será feito mostrando que todo elemento de uma base contém algum da outra. Observemos que por definição

$$\mathbb{V}_{\mathcal{B}_{\mathbb{W}}} = \{V_{\mathfrak{B}} \mid \mathfrak{B} \in \mathcal{B}_{\mathbb{W}}\},$$

porém dado $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}_{\mathbb{W}}$, vale que

$$\mathfrak{B} = \{W(x) \mid x \in X\}$$

para algum $W \in \mathbb{W}$, portanto

$$V_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{x \in X} W(x) \times W(x).$$

Agora podemos seguir para a prova.

- Todo elemento de $\mathbb{V}_{\mathcal{B}_{\mathbb{W}}}$ contém um elemento de \mathbb{V} (e assim $\mathbb{U}_{\mathcal{C}_{\mathbb{W}}} \subset \mathbb{W}$).

Como vimos na discussão inicial, se $V_{\mathfrak{B}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{B}_{\mathbb{W}}}$, existe $W \in \mathbb{W}$ tal que

$$V_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{x \in X} W(x) \times W(x).$$

Agora, usando que \mathbb{V} é base de \mathbb{W} , tomamos $V \in \mathbb{V}$ tal que $V \subset W$ e concluímos que

$$V \subset W \subset V_{\mathfrak{B}}.$$

- Todo elemento de \mathbb{V} contém um elemento de $\mathbb{V}_{\mathcal{B}_{\mathbb{W}}}$ (e assim $\mathbb{W} \subset \mathbb{U}_{\mathcal{C}_{\mathbb{W}}}$).

Dado $V \in \mathbb{V}$, tome $U \in \mathbb{V}$ tal que $U \circ U \subset V$. Sabemos que existe $V_{\mathfrak{B}} \in \mathbb{V}_{\mathcal{B}_{\mathbb{W}}}$ tal que

$$V_{\mathfrak{B}} = \bigcup_{x \in X} U(x) \times U(x) = \{(y, z) \mid (x, y), (x, z) \in U\}$$

e da simetria de U podemos concluir que

$$V_{\mathfrak{B}} = \{(y, z) : (x, y), (x, z) \in U\} = \{(y, z) \mid (y, x), (x, z) \in U\} = U \circ U \subset V.$$

■

Teorema 2.5.18. Dado um espaço uniforme $[X, \mathcal{D}]$, a uniformidade induzida por \mathcal{D} induz a própria cobertura uniforme \mathcal{D} em X , ou seja, $\mathcal{D} = \mathcal{C}_{\mathbb{U}_{\mathcal{D}}}$.

Demonstração: Usando as proposições 2.5.13 e 2.5.14 temos que \mathcal{D} induz uma base simétrica $\mathbb{V}_{\mathcal{D}}$ de $\mathbb{U}_{\mathcal{D}}$ e esta última induz uma base $\mathcal{B}_{\mathbb{V}_{\mathcal{D}}}$ de $\mathcal{C}_{\mathbb{U}_{\mathcal{D}}}$. Para mostrar que $\mathcal{D} = \mathcal{C}_{\mathbb{U}_{\mathcal{D}}}$, vamos mostrar que toda cobertura de \mathcal{D} é refinada por uma cobertura de $\mathcal{B}_{\mathbb{V}_{\mathcal{D}}}$ e vice-versa. Antes disso, observemos que

$$\mathcal{B}_{\mathbb{V}_{\mathcal{D}}} = \{\mathfrak{B}_V \mid V \in \mathbb{V}_{\mathcal{D}}\}$$

em que

$$\mathbb{V}_{\mathcal{D}} = \left\{ \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D \times D \right) \mid \mathcal{D} \in \mathcal{D} \right\}$$

e

$$\mathfrak{B}_V = \{V(x) \mid V \in \mathbb{V}_{\mathcal{D}}\} = \left\{ \left(\bigcup_{D \in \mathcal{D}} D \times D \right) (x) \mid x \in X \right\}$$

para algum $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$.

- Toda cobertura de $\mathcal{B}_{V_{\mathcal{D}}}$ é refinada por uma cobertura de \mathcal{D} (e assim $\mathcal{C}_{V_{\mathcal{D}}} \subset \mathcal{D}$).

Pela discussão anterior, dado $\mathfrak{B}_V \in \mathcal{B}_{V_{\mathcal{D}}}$, existe $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}$ tal que

$$\mathfrak{B}_V = \left\{ \left(\bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D \times D \right) (x) \mid x \in X \right\},$$

mas observemos que se $D \in \mathfrak{D}$ e $x \in D$, então

$$D \subset \{y \mid (x, y) \in D \times D\} \subset \left(\bigcup_{D \in \mathfrak{D}} D \times D \right) (x).$$

Isso significa que $\mathfrak{D} \prec \mathfrak{B}_V$, como desejado.

- Toda cobertura de \mathcal{D} é refinada por uma cobertura de $\mathcal{B}_{V_{\mathcal{D}}}$ (e assim $\mathcal{D} \subset \mathcal{C}_{V_{\mathcal{D}}}$).

Dado $\mathfrak{D} \in \mathcal{D}$, existe $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}$ tal que $\mathfrak{B}^* \prec \mathfrak{D}$. Sendo assim, tomamos o respectivo $\mathfrak{B}_V \in \mathcal{B}_{V_{\mathcal{D}}}$ tal que

$$\mathfrak{B}_V = \left\{ \left(\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \times B \right) (x) \mid x \in X \right\}$$

e afirmamos que $\mathfrak{B}_V \prec \mathfrak{D}$. De fato, observemos que

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{B \in \mathfrak{B}} B \times B \right) (x) &= \{y \mid x \in B \text{ e } y \in B \text{ para algum } B \in \mathfrak{B}\} \\ &= \bigcup_{B \in \mathfrak{B}} \{B \mid B \cap \{x\} \neq \emptyset\} \\ &= \text{St}(\{x\}, \mathfrak{B}). \end{aligned}$$

Como $\mathfrak{B}^* \prec \mathfrak{D}$, temos que existe $D \in \mathfrak{D}$ tal que $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{B}) \subset D$, e conseqüentemente vale a afirmação. ■

Estes resultados que acabamos de demonstrar indicam uma relação existente entre uniformidades e coberturas uniformes, relação essa que será utilizada futuramente ao discutir como espaços uniformes induzem uma uniformidade ou uma cobertura uniforme em coleções de subconjuntos.

Teorema 2.5.19. Dado um conjunto X , se \mathcal{U} é uma uniformidade sobre X , existe uma única cobertura uniforme \mathcal{C} sobre X que induz \mathcal{U} . Da mesma forma, se \mathcal{C} é uma cobertura uniforme sobre X , existe uma única uniformidade \mathcal{U} sobre X que induz \mathcal{C} .

Demonstração: A existência de ambas é garantida pelas proposições 2.5.17 e 2.5.18. Sendo assim, suponhamos que existam duas coberturas distintas \mathcal{C} e \mathcal{D} que induzem a uniformidade \mathcal{U} . Nesse caso, sendo $\mathcal{B}_{W_{\mathcal{C}}}$ e $\mathcal{B}_{W_{\mathcal{D}}}$ as coberturas uniformes induzidas pelas uniformidades $W_{\mathcal{C}}$ e $W_{\mathcal{D}}$ induzidas por \mathcal{C} e \mathcal{D} respectivamente, observemos que como $W_{\mathcal{C}} = \mathcal{U}$ e $W_{\mathcal{D}} = \mathcal{U}$, vale que a cobertura uniforme $\mathcal{C}_{\mathcal{U}}$ induzida por \mathcal{U} é igual à $\mathcal{B}_{W_{\mathcal{C}}}$ e $\mathcal{B}_{W_{\mathcal{D}}}$. Portanto, usando a Proposição 2.5.17 temos as seguintes igualdades: $\mathcal{C}_{\mathcal{U}} = \mathcal{B}_{W_{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}$ e $\mathcal{C}_{\mathcal{U}} = \mathcal{B}_{W_{\mathcal{D}}} = \mathcal{D}$, o que significa que $\mathcal{C} = \mathcal{D}$ e a unicidade está garantida.

Da mesma forma, sejam V e W duas uniformidades que induzem uma mesma cobertura uniforme \mathcal{C} . As uniformidades $U_{\mathcal{C}_V}$ e $U_{\mathcal{C}_W}$ induzidas pelas coberturas uniformes \mathcal{C}_V e \mathcal{C}_W induzidas por V e W , respectivamente, serão iguais à uniformidade $U_{\mathcal{C}}$ induzida por \mathcal{C} (pois $\mathcal{C}_V = \mathcal{C} = \mathcal{C}_W$). Usando a Proposição 2.5.18 concluímos que $U_{\mathcal{C}} = U_{\mathcal{C}_V} = V$ e $U_{\mathcal{C}} = U_{\mathcal{C}_W} = W$, ou seja, $V = W$. ■

Definição 2.5.20. Dado um conjunto X , dizemos que uma cobertura uniforme \mathcal{C} sobre X e uma uniformidade \mathcal{U} sobre X são **equivalentes** se qualquer uma delas induz a outra. □

Pela discussão anterior, podemos facilmente obter uma cobertura uniforme associada a uma estrutura de métrica.

Exemplo 2.5.21. Se (X, d) é um espaço métrico, para cada $\varepsilon > 0$ definimos

$$\mathfrak{C}_\varepsilon = \{V_\varepsilon(x) \mid x \in X\} = \{B(x, \varepsilon) \mid x \in X\}.$$

A coleção dos \mathfrak{C}_ε constitui uma base para a cobertura uniforme induzida pela métrica.

2.6 Topologia Uniforme - Abordagem por Coberturas

Assim como uniformidades induzem topologias, coberturas uniformes também induzem topologias.

Teorema 2.6.1. Dada uma cobertura uniforme $\mathcal{C} = \{\mathfrak{C}_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ de um conjunto X e $x \in X$, a coleção $\mathcal{C}(x)$ dos conjuntos que contêm $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_\lambda)$ para algum $\lambda \in \Lambda$ é um sistema de vizinhanças de x .

Demonstração: Precisamos mostrar que esta coleção satisfaz as condições do Teorema 1.1.10.

a) Todo elemento de $\mathcal{C}(x)$ contém x .

Por definição,

$$\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_\lambda) = \bigcup_{C_\mu \in \mathfrak{C}_\lambda} \{C : \{x\} \cap C \neq \emptyset\},$$

ou seja, $x \in \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C})$, portanto todo elemento de $\mathcal{C}(x)$ contém x .

b) Todo subconjunto de X que contém um conjunto de $\mathcal{C}(x)$ pertence a $\mathcal{C}(x)$.

Sai diretamente da definição, pois se D contém $C \in \mathcal{C}(x)$, então C contém $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_\lambda)$ para algum λ , e conseqüentemente D contém $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_\lambda)$, ou seja, $D \in \mathcal{C}(x)$.

c) Toda interseção finita de conjuntos em $\mathcal{C}(x)$ é um elemento de $\mathcal{C}(x)$.

Basta mostrar que dados \mathfrak{C}_1 e \mathfrak{C}_2 em \mathcal{C} , existe $\mathfrak{D} \in \mathcal{C}$ tal que

$$\text{St}(\{x\}, \mathfrak{D}) \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_1) \cap \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_2),$$

pois dados dois conjuntos em $\mathcal{C}(x)$, cada um contém uma estrela de $\{x\}$ em alguma cobertura da cobertura uniforme. Agora, sabemos que existe $\mathfrak{D} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathfrak{D}^* \prec \mathfrak{C}_1 \wedge \mathfrak{C}_2$, e além disso,

$$\text{St}(\{x\}, \mathfrak{D}) \subset \text{St}(D_\gamma, \mathfrak{D})$$

para todo $D_\gamma \in \mathfrak{D}$ tal que $x \in D_\gamma$. Ora, como $\mathfrak{D}^* \prec \mathfrak{C}_1 \wedge \mathfrak{C}_2$, existem $C_1 \in \mathfrak{C}_1$ e $C_2 \in \mathfrak{C}_2$ tais que

$$\text{St}(D_\gamma, \mathfrak{D}) \subset C_1 \cap C_2,$$

e uma vez que $x \in \text{St}(D_\gamma, \mathfrak{D})$, $x \in C_1 \cap C_2$, portanto

$$C_1 \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_1) \quad \text{e} \quad C_2 \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_2).$$

Sendo assim, vale que

$$\text{St}(\{x\}, \mathfrak{D}) \subset \text{St}(D_\gamma, \mathfrak{D}) \subset C_1 \cap C_2 \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_1) \cap \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_2).$$

d) Se C pertence a $\mathcal{C}(x)$, então existe um conjunto D que pertence a $\mathcal{C}(x)$ tal que para todo $y \in D$ vale $C \in \mathcal{C}(y)$.

Isso é consequência do Lema 2.5.11. Como $C \in \mathcal{C}(x)$, existe $\mathfrak{C} \in \mathcal{C}$ tal que $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}) \subset C$. Tome $\mathfrak{D} \in \mathcal{C}$ tal que $\mathfrak{D}^* \prec \mathfrak{C}$. Do Lema 2.5.11 vale que para todo $y \in \text{St}(\{x\}, \mathfrak{D})$

$$\text{St}(\{y\}, \mathfrak{D}) \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}) \subset C.$$

Sendo assim, temos que o conjunto $D = \text{St}(\{x\}, \mathfrak{D}) \in \mathcal{C}(x)$ e para todo $y \in D$ vale que $C \in \mathcal{C}(y)$ pois

$$\text{St}(\{y\}, \mathfrak{D}) \subset V.$$

■

Corolário 2.6.2. [20, p. 18] Dada uma cobertura uniforme \mathcal{C} de um conjunto X , existe uma única topologia induzida pela cobertura uniforme em X e ela é aquela cujas vizinhanças de $x \in X$ são os conjuntos que contêm $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C})$ para algum $\mathfrak{C} \in \mathcal{C}$. Um conjunto é dito aberto se for vizinhança de cada um de seus pontos. Esta é chamada a **topologia uniforme** e quando X está dotado dessa topologia escreveremos $(X, T_{\mathcal{C}})$.

Demonstração: O Teorema 2.6.1 mostra que os conjuntos que contêm $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C})$ para algum $x \in X$ e $\mathfrak{C} \in \mathcal{C}$ satisfazem as condições do Teorema 1.1.10, que por sua vez implica exatamente a topologia desejada com o conjunto de vizinhanças desejado.

■

Observemos que isso significa que os conjuntos $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C})$ em que $\mathfrak{C} \in \mathcal{C}$ constituem um sistema fundamental de vizinhanças de x , mas ainda é possível obter um resultado melhor.

Teorema 2.6.3. [24, p. 246] Se \mathcal{B} é base de uma cobertura uniforme \mathcal{C} sobre X , então os conjuntos $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{B})$, em que $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}$, constituem um sistema fundamental de vizinhanças de $x \in X$ na topologia uniforme.

Demonstração: Seja A uma vizinhança de x na topologia uniforme. Precisamos mostrar que existe uma cobertura $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}$ tal que $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{B}) \subset A$. Por definição, sabemos que existe $\mathfrak{C} \in \mathcal{C}$ tal que $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}) \subset A$, mas como \mathcal{B} é base, temos que existe $\mathfrak{B} \in \mathcal{B}$ tal que $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{B}) \subset \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}) \subset A$, tal como desejado.

■

Teorema 2.6.4. Dado um conjunto X , se \mathcal{U} é uma uniformidade sobre X equivalente a uma cobertura uniforme \mathcal{C} sobre X , então as topologias $T_{\mathcal{U}}$ e $T_{\mathcal{C}}$ são iguais.

Demonstração: Por definição, os abertos na topologia $T_{\mathcal{U}}$ são os conjuntos $A \subseteq X$ tais que para cada $x \in A$ existe $U \in \mathcal{U}$ tal que $U(x) \subseteq A$, ou seja, conjuntos que são vizinhanças de todos os seus pontos. Da mesma forma, na topologia $T_{\mathcal{C}}$, um conjunto $A \subseteq X$ é aberto se para cada $x \in A$ existe uma cobertura $\mathfrak{C} \in \mathcal{C}$ tal que $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}) \subseteq A$.

Como visto no Teorema 2.5.18,

$$\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}) = \left(\bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C \times C \right) (x),$$

mas como \mathcal{U} e \mathcal{C} são equivalentes,

$$\bigcup_{C \in \mathfrak{C}} C \times C$$

é um elemento de \mathcal{U} .

Se A é aberto em $T_{\mathcal{C}}$, então para cada $x \in A$ existe $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ tal que $\text{St}(x, \mathcal{C}) \subseteq A$ e da discussão acima temos que existe uma vizinhança de x em \mathcal{U} contida em A . Uma vez que esse processo pode ser feito para todo $x \in A$, temos que A é aberto em $T_{\mathcal{U}}$ e $T_{\mathcal{C}} \subseteq T_{\mathcal{U}}$.

Por outro lado, dado $A \subset X$ aberto em $T_{\mathcal{U}}$, se $U \in \mathcal{U}$ é tal que $U(x) \subseteq A$ para algum $x \in A$, como a coleção

$$\mathcal{V}_{\mathcal{C}} = \left\{ \bigcup_{C \in \mathcal{C}} C \times C \mid \mathcal{C} \in \mathcal{C} \right\}$$

constitui uma base de \mathcal{U} , existe $\mathcal{B} \in \mathcal{C}$ tal que

$$\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \times B \subseteq U$$

e conseqüentemente

$$\text{St}(\{x\}, \mathcal{B}) = \left(\bigcup_{B \in \mathcal{B}} B \times B \right) (x) \subseteq U(x).$$

Como podemos fazer isso para todo $x \in A$, temos que A é aberto em $T_{\mathcal{C}}$, $T_{\mathcal{U}} \subseteq T_{\mathcal{C}}$ e finalmente temos que as topologias $T_{\mathcal{U}}$ e $T_{\mathcal{C}}$ são iguais. ■

Na Subseção 2.3 demonstramos uma série de implicações acerca de axiomas de separação e a topologia uniforme. De fato, mostramos que a topologia uniforme é T_3 sempre que for T_0 . Mostraremos que toda topologia uniforme é completamente regular, mais precisamente que um espaço é uniforme se e somente se a topologia for completamente regular. Sendo assim, sempre que for T_0 , um espaço uniforme será $T_{3\frac{1}{2}}$. Para isso, precisaremos da definição de função uniformemente contínua quando estamos lidando com coberturas.

Definição 2.6.5. [12, p. 6] Sejam (X, \mathcal{C}) e (Y, \mathcal{D}) dois espaços uniformes. Uma função $f : X \rightarrow Y$ é **uniformemente contínua** se para toda cobertura $\mathcal{D} \in \mathcal{D}$ existe uma cobertura $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ tal que para todo $C \in \mathcal{C}$ existe $D \in \mathcal{D}$ tal que

$$f(C) \subseteq D.$$

□

Teorema 2.6.6. [12, p. 7] Para toda cobertura $\mathcal{C} \in \mathcal{C}$ de um espaço uniforme (X, \mathcal{C}) , existe uma função uniformemente contínua $g : X \rightarrow Y$, onde (Y, d) é um espaço métrico, de modo que a imagem inversa de todo conjunto de diâmetro menor que 1 é um subconjunto de um elemento de \mathcal{C} .

Demonstração: Dada uma cobertura \mathcal{C} , denotemos ela por \mathcal{C}_0 . Existe cobertura \mathcal{D} tal que

$$\mathcal{D}^* \prec \mathcal{C}_0,$$

então definimos $\mathcal{C}_1 = \mathcal{D}$. Seguimos dessa forma, obtendo uma coleção enumerável $\{\mathcal{C}_n\}$ de coberturas de modo que

$$\mathcal{C}_{n+1}^* \prec \mathcal{C}_n.$$

Agora definimos $t : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$t(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{se } y \in \text{St}(\{x\}, \mathcal{C}_n) \text{ para todo } n, \\ 2, & \text{se } y \notin \text{St}(\{x\}, \mathcal{C}_0), \\ 2^{1-n}, & \text{onde } n \text{ é o maior } n \text{ tal que } y \in \text{St}(\{x\}, \mathcal{C}_n). \end{cases}$$

Observemos que essa função t é simétrica, ou seja,

$$t(x, y) = t(y, x)$$

pois

$$y \in \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_n)$$

se e somente se

$$x \in \text{St}(\{y\}, \mathfrak{C}_n).$$

Além disso, ela está associando 0 a pares que não podem ser separados por vizinhanças de x da forma $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_n)$ e, uma vez que

$$y \notin \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_n)$$

implica

$$y \notin \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_{n+1}),$$

$t(x, y) = 2$ quando toda vizinhança de x da forma $\text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}_n)$ não contém y .

Essa função t se assemelha a uma ideia de distância entre pontos de X . Vamos usá-la para construir uma função com propriedades de métrica sobre um conjunto adequado. Para cada sequência finita (p_0, \dots, p_m) de pontos de X , podemos tomar

$$\sum_{i=0}^{m-1} t(p_i, p_{i+1}).$$

Seja $I(x, y) \subseteq \mathbb{R}$ a coleção de todo os elementos $r \in \mathbb{R}$ que são escritos como uma soma para alguma sequência finita que contém x e y dentre os p_i 's. Agora, seja

$$d(x, y) = \min\{\inf(I(x, y)), 1\}.$$

Pela definição de t , temos $d(x, y) \geq 0$ para todo par de pontos. Além disso,

$$I(x, y) = I(y, x)$$

pois não importa a ordem de x e y nas sequências finitas tomadas para construir $I(x, y)$ e $I(y, x)$. Por fim, afirmamos que a desigualdade triangular é satisfeita por d . Dados $x, y, z \in X$, sejam (p_0, \dots, p_m) e (q_0, \dots, q_k) sequências finitas com x e z dentre os p_i 's e z e y dentre os q_j 's. Supondo sem perda de generalidade que $p_{\ell_1} = x$, $p_{\ell_2} = z$, $q_{\ell_3} = y$ e $q_{\ell_4} = z$ com $\ell_1 \leq \ell_2$ e $\ell_3 \leq \ell_4$, tomamos a sequência

$$(p_{\ell_1}, p_{\ell_1+1}, \dots, \underbrace{p_{\ell_2}}_{=q_{\ell_4}}, q_{\ell_4-1}, \dots, q_{\ell_3}).$$

Esta sequência contém x e y dentre seus elementos e a soma induzida por ela é

$$t(p_{\ell_1}, p_{\ell_1+1}) + t(p_{\ell_1+1}, p_{\ell_1+2}) + \dots + t(p_{\ell_2-1}, p_{\ell_2}) + t(q_{\ell_4}, q_{\ell_4-1}) + \dots + t(q_{\ell_3+1}, q_{\ell_3}),$$

mas isso é menor ou igual a

$$\sum_{i=0}^{m-1} t(p_i, p_{i+1}) + \sum_{j=0}^{k-1} t(q_j, q_{j+1}).$$

Desse modo, provamos que dados $r_1 \in I(x, z)$ e $r_2 \in I(z, y)$ existe $r \in I(x, y)$ tal que $r \leq r_1 + r_2$ e

$$\inf(I(x, y)) \leq \inf(I(x, z)) + \inf(I(z, y)).$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \min\{\inf(I(x, y)), 1\} \\ &\leq \min\{\inf(I(x, z)), 1\} + \min\{\inf(I(z, y)), 1\} \\ &= d(x, z) + d(z, y). \end{aligned}$$

Notemos que podemos induzir uma relação de equivalência entre os elementos de X usando d . Basta estabelecer $x \sim y$ se e somente se $d(x, y) = 0$. Desse modo, $x \sim x$ pois $t(x, x) = 0$, e portanto $d(x, x) = 0$. Além disso, a simetria de d garante que $d(x, y) = 0$ se e só se $d(y, x) = 0$, ou seja, $x \sim y$ se e só se $y \sim x$. Por fim, a desigualdade triangular garante que se $d(x, z) = 0$ e $d(z, y) = 0$, então $d(x, y) = 0$, e portanto $x \sim z$ e $z \sim y$ implicam $x \sim y$. Seja Y o conjunto das classes de equivalência de X . A aplicação d induz uma métrica \bar{d} sobre Y se definirmos

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = d(x, y).$$

A função \bar{d} está bem-definida, pois se $x_1 \sim x_2$ e $y_1 \sim y_2$,

$$\bar{d}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = d(x_1, y_1) \leq d(x_1, x_2) + d(x_2, y_2) + d(y_2, y_1) = d(x_2, y_2) = \bar{d}(\bar{x}_2, \bar{y}_2)$$

e analogamente $\bar{d}(\bar{x}_2, \bar{y}_2) \leq \bar{d}(\bar{x}_1, \bar{y}_1)$, portanto

$$\bar{d}(\bar{x}_1, \bar{y}_1) = \bar{d}(\bar{x}_2, \bar{y}_2).$$

A função $\bar{d} : Y \times Y \rightarrow \mathbb{R}$ herda as propriedades que provamos para d , e por estarmos nas classes de equivalência induzidas por $x \sim y$ se e somente se $d(x, y) = 0$, temos que \bar{d} satisfaz $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ se e somente se $\bar{x} = \bar{y}$. Consequentemente, \bar{d} é uma métrica sobre o conjunto Y e obtemos o espaço métrico (Y, \bar{d}) .

Afirmamos que a projeção $\pi : X \rightarrow Y$ que leva $x \in X$ em $\bar{x} \in Y$ é a função desejada. Primeiro precisamos provar que ela é uniformemente contínua. Ora, $x, y \in C \in \mathfrak{C}_n$

$$d(x, y) \leq t(x, y) \leq 2^{1-n}.$$

Portanto,

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \leq 2^{1-n}.$$

Sendo assim, dado $\varepsilon > 0$ basta tomar n tal que $2^{1-n} < \varepsilon$ e teremos para todos $x, y \in C \in \mathfrak{C}_n$

$$\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) \leq 2^{1-n} < \varepsilon,$$

provando que π é uniformemente contínua.

Resta provar que todo conjunto de diâmetro menor que 1 possui pré-imagem contida em um elemento $C \in \mathfrak{C} = \mathfrak{C}_0$. Se $A \subseteq Y$ possui diâmetro menor que 1, significa que para $\bar{x}, \bar{y} \in A$

$$d(x, y) < 1.$$

Assim, existe uma sequência (p_0, \dots, p_k) com $p_0 = x$ e $p_k = y$ tal que

$$2^{1-(n+1)} < t(p_0, p_1) + \dots + t(p_{k-1}, p_k) \leq 2^{1-n}$$

para algum $n \in \mathbb{N}$. Provaremos por indução em k que se existe sequência como acima, então p_0 e p_1 pertencem a $C \in \mathfrak{C}_n$. Se $k = 1$, temos

$$t(p_0, p_1) \leq 2^{1-n},$$

e por definição $p_0 \in \text{St}(p_1, \mathfrak{C}_n)$. Logo, existe $C \in \mathfrak{C}_n$ contendo p_0 e p_1 . Se

$$2^{1-(n+1)} < t(p_0, p_1) + \dots + t(p_{k-1}, p_k) \leq 2^{1-n},$$

seja p o último p_i tal que

$$t(p_0, p_1) + \dots + t(p_{i-1}, p) \leq 2^{1-(n+1)}$$

e q o último p_j tal que

$$t(p, p_{i+1}) + \dots + t(p_{j-1}, q) \leq 2^{1-(n+1)}.$$

Observemos que a escolha de p e q implicam que se $j < k$,

$$t(q, p_{j+1}) + \cdots + t(p_{k-1}, p_k) \leq 2^{1-(n+1)}.$$

Assim, existem $m_1, m_2, m_3 \geq n + 1$ de modo que

$$2^{1-(m_1+1)} < t(p_0, p_1) + \cdots + t(p_{i-1}, p) \leq 2^{1-m_1} < 2^{1-(n+1)},$$

$$2^{1-(m_2+1)} < t(p, p_{i+1}) + \cdots + t(p_{j-1}, q) \leq 2^{1-m_2} < 2^{1-(n+1)}$$

e

$$2^{1-(m_3+1)} < t(q, p_{j+1}) + \cdots + t(p_{k-1}, p_k) \leq 2^{1-m_3} < 2^{1-(n+1)}.$$

Por hipótese de indução, existem $D_1 \in \mathfrak{C}_{m_1}$, $D_2 \in \mathfrak{C}_{m_2}$ e $D_3 \in \mathfrak{C}_{m_3}$ contendo $\{p_0, p\}$, $\{p, q\}$ e $\{q, p_k\}$ respectivamente. Uma vez que $m_1, m_2, m_3 \geq n + 1$, existem C_1, C_2 e C_3 em \mathfrak{C}_{n+1} tal que $D_i \subseteq C_i$. Logo,

$$\{p_0, q, p, p_k\} \subseteq \text{St}(C_2, \mathfrak{C}_{n+1}) \in \mathfrak{C}_{n+1}^*.$$

Portanto, existe $C \in \mathfrak{C}_n$ com

$$\text{St}(C_2, \mathfrak{C}_{n+1}) \subseteq C,$$

provando o desejado. ■

Teorema 2.6.7. [12, p. 6] Todo espaço uniforme é completamente regular.

Demonstração: Dado um conjunto fechado F de um espaço uniforme (X, \mathfrak{C}) e $x_0 \in F^c$. Uma vez que F^c é aberto, existe cobertura $\mathfrak{C} \in \mathfrak{C}$ tal que

$$F \cap \text{St}(\{x_0\}, \mathfrak{C}) = \emptyset.$$

Para tal cobertura \mathfrak{C} , denotamos (Y, \bar{d}) o espaço métrico do Teorema 2.6.6 e $\pi : X \rightarrow Y$ a projeção lá definida. Definimos

$$g : X \longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \bar{d}(\pi(x_0), \pi(x)) = \bar{d}(\bar{x}_0, \bar{y}).$$

Observemos que a função que leva $y \in Y$ em $\bar{d}(\bar{x}_0, y)$ é uniformemente contínua uma vez que ela é função entre espaços métricos e as duas desigualdades obtidas a partir da desigualdade triangular

$$\bar{d}(\bar{x}_0, y) - \bar{d}(\bar{x}_0, z) \leq \bar{d}(y, z)$$

e

$$\bar{d}(\bar{x}_0, z) - \bar{d}(\bar{x}_0, y) \leq \bar{d}(y, z)$$

implicam

$$|\bar{d}(\bar{x}_0, y) - \bar{d}(\bar{x}_0, z)| \leq \bar{d}(y, z) < \delta.$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, se $\delta = \varepsilon$, temos que

$$\bar{d}(y, z) < \delta$$

implica

$$|\bar{d}(\bar{x}_0, y) - \bar{d}(\bar{x}_0, z)| < \varepsilon.$$

Desse modo, g é uniformemente contínua. Observemos que o Teorema 2.6.6 implica que se $\bar{d}(\bar{x}, \bar{y}) = 1$, então

$$y \notin \text{St}(\{x\}, \mathfrak{C}).$$

Desse modo, para todo $y \in F \subseteq \text{St}(\{x_0\}, \mathfrak{C})^c$

$$g(y) = \bar{d}(\bar{x}_0, \bar{y}) = 1.$$

e

$$g(x_0) = 0.$$

Portanto, se definirmos

$$f(x) = 1 - g(x),$$

temos que f é uma função satisfazendo

$$f(x_0) = 1 \quad \text{e} \quad f(F) = 0$$

e X é completamente regular. ■

Teorema 2.6.8. Um espaço topológico X é completamente regular se e somente se X é um espaço uniforme.

Demonstração: Um espaço uniforme é completamente regular pelo Teorema 2.6.7. Um espaço completamente regular é uniforme pelo Teorema 2.3.18. ■

Corolário 2.6.9. Se (X, \mathfrak{C}) é um espaço uniforme cuja topologia uniforme satisfaz o axioma T_0 , então ela satisfaz o axioma $T_{3\frac{1}{2}}$.

Demonstração: Basta lembrar que o Teorema 2.3.8 implica que espaços uniformes T_0 são T_1 e pelo Teorema 2.6.7 todo espaço uniforme é completamente regular. ■

Capítulo 3

Topologias em Coleções de Subconjuntos

A partir de um espaço topológico, podemos considerar conjuntos com diversos tipos de propriedades: fechados, compactos, limitados, etc. Podemos pensar em construir a coleção deles e fazer disso um espaço topológico que tenha alguma relação com a topologia do espaço onde esses conjuntos estão, o que dará origem aos hiperespaços. Neste capítulo vamos definir algumas dessas coleções e estabelecer três topologias: a topologia de Vietoris, a topologia uniforme e a métrica de Hausdorff. A partir deste capítulo, consideraremos apenas espaços topológicos que satisfazem o axioma T_1 . Esta propriedade será importante, pois a partir dela consideraremos a admissibilidade das topologias na Seção 3.2, ou seja, a possibilidade de considerar o espaço base como subespaço dos hiperespaços.

Os principais resultados se encontram nas Seções 3.3, 3.4 e 3.6. As duas primeiras tratam de uma série de propriedades úteis que as topologias de Vietoris e uniforme possuem, respectivamente, enquanto a terceira trata de discutir como podemos comparar as duas topologias. Destas duas primeiras seções citadas, podemos destacar:

- As Proposições 3.3.1, 3.3.2, 3.3.3, 3.4.1 e 3.4.2 sobre conjuntos fechados ou compactos induzidos nos hiperespaços por conjuntos fechados ou compactos no espaço base.
- Os Teoremas 3.3.15, 3.3.16, 3.4.4 e 3.4.5, sobre uniões de fechados e compactos nessas topologias, que serão fundamentais para vários resultados posteriores.

Já na Seção 3.6 temos como resultados a serem destacados:

- O Teorema da Equivalência das Topologias no Hiperespaço de Compactos 3.6.4.
- O Teorema da Existência de Uniformidade Equivalente a Vietoris no Hiperespaço de Fechados 3.6.5.

Por fim, a Seção 3.7 compara as topologias em exemplos específicos, para ajudar na compreensão e familiarização, enquanto a Seção 3.8 emprega o Teorema 3.4.5 na demonstração de resultados sobre grupos topológicos, ilustrando uma aplicação da teoria.

Tendo como base para o capítulo as Seções 1 e 2 do artigo *Topologies on Spaces of Subsets*, começamos definindo as estruturas com as quais trabalharemos e a primeira de nossas topologias em hiperespaços: a topologia de Vietoris.

Definição 3.0.1. [18, p. 152] Dado um espaço topológico (X, T) , podemos construir os seguintes conjuntos:

- $A(X) = \{E \subset X \mid E \neq \emptyset\}$;
- $F(X) = \{E \subset X \mid E \text{ é fechado e não vazio}\}$;
- $\text{Fin}_n(X) = \{E \in F(X) \mid |E| \leq n\}$;

- $\text{Fin}(X) = \{E \in F(X) \mid E \text{ é finito}\};$
- $\text{Comp}(X) = \{E \in F(X) \mid E \text{ é compacto}\};$
- $\text{Cont}(X) = \{E \in F(X) \mid E \text{ é subcontínuo}\}.$

Se X é ainda um espaço métrico, podemos definir

- $F_L(X) = \{E \subset F(X) \mid E \text{ é limitado}\}.$

Ao dotarmos estes subconjuntos de uma topologia (ou uma estrutura que induza topologia), teremos um **hiperespaço**. □

Definição 3.0.2. [18, p. 152] Se $\{U_i\}_{i \in I}$ é uma coleção de subconjuntos de um espaço topológico X , definimos a **vizinhança gerada** pela coleção $\{U_i\}_{i \in I}$ como

$$\langle U_i \rangle_{i \in I} = \left\{ E \in F(X) \mid E \subset \bigcup_{i \in I} U_i \text{ e } E \cap U_i \neq \emptyset \forall i \in I \right\}.$$

Se $I = \{1, 2, \dots, n\}$, podemos escrever

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle.$$

□

Observemos que esses conjuntos E em $\langle U_i \rangle_{i \in I}$ não estão necessariamente contidos na interseção dos U_i . Em um caso mais simples, se a coleção é finita, o conjunto dado por um elemento de cada U_i é fechado em X e satisfaz naturalmente as condições para estar na vizinhança gerada pelos U_i .

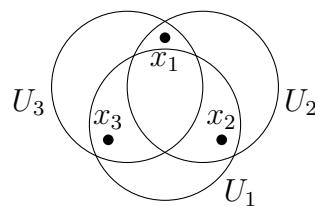


Figura 3.1: O conjunto $\{x_1, x_2, x_3\}$ é um fechado na topologia e ele é um exemplo de conjunto que não possui elemento na interseção $U_1 \cap U_2 \cap U_3$ mas que está em $\langle U_1, U_2, U_3 \rangle$.

Proposição 3.0.3. [18, p. 153] Dado um espaço topológico (X, T) , a coleção dos conjuntos da forma

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle,$$

em que $U_i \in T$ para todo i é uma base para uma topologia. A topologia gerada por essa base é chamada de **topologia de Vietoris** T_V , ou topologia finita, em $F(X)$ induzida por T .

Demonstração: Observemos que $\langle X \rangle = F(X)$, então só precisamos mostrar que dados dois elementos

$\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ e $\langle V_1, \dots, V_m \rangle$, a própria interseção é um elemento da base. De fato,

$$\begin{aligned}
\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \dots, V_m \rangle &= \left\{ E \in \mathbf{F}(X) \mid \begin{array}{l} E \subset \bigcup_{i=1}^n U_i \\ E \cap U_i \neq \emptyset \forall i \end{array} \right\} \cap \left\{ F \in \mathbf{F}(X) \mid \begin{array}{l} F \subset \bigcup_{j=1}^m V_j \\ F \cap V_j \neq \emptyset \forall j \end{array} \right\} \\
&= \left\{ E \in \mathbf{F}(X) \mid \begin{array}{l} E \subset (\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap (\bigcup_{j=1}^m V_j) \\ E \cap U_i \neq \emptyset \neq E \cap V_j \forall i, j \end{array} \right\} \\
&= \left\{ E \in \mathbf{F}(X) \mid \begin{array}{l} E \subset \bigcup_{i=1}^n (U_i \cap (\bigcup_{j=1}^m V_j)) \\ E \cap (U_i \cap (\bigcup_{j=1}^m V_j)) \neq \emptyset \neq E \cap V_j \forall i, j \end{array} \right\} \\
&= \left\{ E \in \mathbf{F}(X) \mid \begin{array}{l} E \subset \bigcup_{j=1}^m ((\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap V_j) \\ E \cap U_i \neq \emptyset \neq E \cap (V_j \cap (\bigcup_{i=1}^n U_i)) \forall i, j \end{array} \right\} \\
&= \left\{ E \in \mathbf{F}(X) \mid \begin{array}{l} E \subset \left(\bigcup_{j=1}^m ((\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap V_j) \right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^n (U_i \cap (\bigcup_{j=1}^m V_j)) \right) \\ E \cap ((\bigcup_{i=1}^n U_i) \cap V_j) \neq \emptyset \neq E \cap (U_i \cap (\bigcup_{j=1}^m V_j)) \forall i, j \end{array} \right\} \\
&= \left\langle \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right) \cap V_1, \dots, \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right) \cap V_m, U_1 \cap \left(\bigcup_{j=1}^m V_j \right), \dots, U_n \cap \left(\bigcup_{j=1}^m V_j \right) \right\rangle
\end{aligned}$$

em que as três últimas manipulações se justificam pelo fato de E estar contido em $(\bigcup_{i=1}^n U_i)$ e em $(\bigcup_{j=1}^m V_j)$. ■

Essa topologia possui uma sub-base muito simples, basta observar que se U_1, \dots, U_n são abertos de X ,

$$\begin{aligned}
\langle X, U_1 \rangle \cap \dots \cap \langle X, U_n \rangle &= \bigcap_{i=1}^n \{F \in \mathbf{F}(X) \mid F \cap U_i \neq \emptyset\} \\
&= \{F \in \mathbf{F}(X) \mid F \cap U_i \neq \emptyset \forall i\} \\
&= \langle X, U_1, \dots, U_n \rangle.
\end{aligned}$$

Além disso, se definimos $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$, então

$$\begin{aligned}
\langle U \rangle \cap \langle X, U_1, \dots, U_n \rangle &= \{F \in \mathbf{F}(X) \mid F \subseteq U\} \cap \{F \in \mathbf{F}(X) \mid F \cap U_i \neq \emptyset \forall i\} \\
&= \left\{ F \in \mathbf{F}(X) \mid F \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i, F \cap U_i \neq \emptyset \forall i \right\} \\
&= \langle U_1, \dots, U_n \rangle.
\end{aligned}$$

Proposição 3.0.4. [11, p. 4] Se (X, T) é um espaço topológico, então a coleção

$$\mathcal{S} = \{\langle U \rangle \mid U \in T\} \cup \{\langle X, V \rangle \mid V \in T\}$$

constitui uma sub-base da topologia de Vietoris T_V em $\mathbf{F}(X)$.

Demonstração: Para escrever $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$, definimos $U = U_1 \cup \dots \cup U_n$. Desse modo,

$$\langle U \rangle \cap \langle X, U_1 \rangle \cap \dots \cap \langle X, U_n \rangle = \langle U_1, \dots, U_n \rangle.$$

Uma vez que os elementos de \mathcal{S} são elementos de T_V , esta é uma sub-base de T_V . ■

3.1 As Duas Topologias em $[F(X), \tilde{\mathcal{U}}]$

Quando tínhamos um espaço topológico (X, T) , definimos a topologia de Vietoris T_V em $F(X)$ como aquela gerada pelos conjuntos

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle,$$

em que $U_i \in T$. De igual forma, se $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme, podemos induzir a topologia uniforme $T_{\mathcal{U}}$ em X e então estabelecer a topologia de Vietoris T_V em $F(X)$.

Contudo, uma uniformidade pode induzir uma topologia, a chamada topologia uniforme. Sendo assim, dado $[X, \mathcal{U}]$, podemos induzir uma uniformidade $\tilde{\mathcal{U}}$ em $F(X)$ a partir de \mathcal{U} , e acabamos obtendo imediatamente outra topologia em $F(X)$. Nesta seção detalharemos este processo e na Seção 3.6 estudaremos como as duas topologias se comparam.

Teorema 3.1.1. Dado um espaço uniforme $[X, \mathcal{U}]$, a coleção dos \widehat{V} dados por

$$\widehat{V} = \{(E, F) \in F(X) \times F(X) \mid F \subset V(E), E \subset V(F)\},$$

com $V \in \mathcal{U}$, constitui uma base para uma uniformidade em $F(X)$. Denotamos a uniformidade gerada por essa coleção como $\tilde{\mathcal{U}}$ e chamamos de **uniformidade induzida** por \mathcal{U} em $F(X)$.

Demonstração: Precisamos garantir antes que cada \widehat{V} é uma vizinhança da diagonal, mas isso sai diretamente do fato que $E \subset V(E)$ para todo $E \in F(X)$, logo $(E, E) \in \widehat{V}$. Agora, são três as condições que a coleção dos \widehat{V} , que denotaremos por $\tilde{\mathcal{V}}$ para facilitar, deve satisfazer:

- (i) dados $\widehat{V}_1, \widehat{V}_2 \in \tilde{\mathcal{V}}$, existe $\widehat{V}_3 \in \tilde{\mathcal{V}}$ com $\widehat{V}_3 \subset \widehat{V}_1 \cap \widehat{V}_2$.

Como $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, sabemos que $V_1 \cap V_2 \in \mathcal{U}$, logo $\widehat{V_1 \cap V_2} \in \tilde{\mathcal{V}}$ e esse aparenta ser um candidato natural para ser V_3 . Para mostrar que isso ocorre, começaremos analisando esses conjuntos.

$$\begin{aligned} \widehat{V}_1 \cap \widehat{V}_2 &= \left\{ (E, F) \mid \begin{array}{l} E \subset V_1(F), F \subset V_1(E) \\ E \subset V_2(F), F \subset V_2(E) \end{array} \right\} \\ &= \{(E, F) \mid E \subset V_1(F) \cap V_2(F), F \subset V_1(E) \cap V_2(E)\} \\ \widehat{V_1 \cap V_2} &= \{(E, F) \mid E \subset (V_1 \cap V_2)(F), F \subset (V_2 \cap V_1)(E)\} \end{aligned}$$

Agora, observemos que

$$\begin{aligned} V_1(F) \cap V_2(F) &= \left[\bigcup_{x \in F} V_1(x) \right] \cap \left[\bigcup_{y \in F} V_2(y) \right] = \bigcup_{x \in F} \left[V_1(x) \cap \left[\bigcup_{y \in F} V_2(y) \right] \right] \\ &= \bigcup_{x \in F} \bigcup_{y \in F} [V_1(x) \cap V_2(y)]. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$(V_1 \cap V_2)(F) = \bigcup_{x \in F} (V_1 \cap V_2)(x) \stackrel{(*)}{=} \bigcup_{x \in F} [V_1(x) \cap V_2(x)] \subset \bigcup_{x \in F} \bigcup_{y \in F} [V_1(x) \cap V_2(y)] = V_1(F) \cap V_2(F),$$

onde $(*)$ é satisfeita, pois

$$V_1(x) \cap V_2(x) = \{y \mid (x, y) \in V_1, (x, y) \in V_2\} = \{y \mid (x, y) \in V_1 \cap V_2\} = (V_1 \cap V_2)(x).$$

Assim, temos que se $E \subset (V_1 \cap V_2)(F)$, então $E \subset V_1(F) \cap V_2(F)$, e vale também o análogo para F , ou seja, se $F \subset (V_1 \cap V_2)(E)$, então $F \subset V_1(E) \cap V_2(E)$, portanto os pares (E, F) em $\widehat{V_1 \cap V_2}$ estão em $\widehat{V}_1 \cap \widehat{V}_2$ e obtemos $\widehat{V_1 \cap V_2} \subset \widehat{V}_1 \cap \widehat{V}_2$.

(ii) dado $\widehat{V}_1 \in \tilde{\mathcal{V}}$, existe $\widehat{V}_2 \in \tilde{\mathcal{V}}$ tal que $\widehat{V}_2^{-1} \subset \widehat{V}_1$.

As vizinhanças \widehat{V} são simétricas, pois afirmar $(E, F) \in \widehat{V}$ significa afirmar $E \subset V(F)$ e $F \subset V(E)$, que pode ser reescrito como $F \subset V(E)$ e $E \subset V(F)$, ou seja, $(F, E) \in \widehat{V}$.

(iii) dado $\widehat{V}_1 \in \tilde{\mathcal{V}}$, existe $\widehat{V}_2 \in \tilde{\mathcal{V}}$ tal que $\widehat{V}_2 \circ \widehat{V}_2 \subset \widehat{V}_1$.

Uma vez que \mathcal{U} é uma uniformidade, existe $V_2 \in \mathcal{U}$ tal que $V_2 \circ V_2 \subset V_1$. Vamos mostrar que tal V_2 é o que satisfaz $\widehat{V}_2 \circ \widehat{V}_2 \subset \widehat{V}_1$. Começemos partindo da definição:

$$\begin{aligned} \widehat{V}_2 \circ \widehat{V}_2 &= \{(E, G) \in F(X) \times F(X) \mid (E, F), (F, G) \in \widehat{V}_2\} \\ &= \left\{ (E, G) \in F(X) \times F(X) \mid \begin{array}{l} E \subset V_2(F), F \subset V_2(E) \\ F \subset V_2(G), G \subset V_2(F) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Dado par (E, G) em $\widehat{V}_2 \circ \widehat{V}_2$, temos que existe $F \in F(X)$ tal que $(E, F), (F, G) \in \widehat{V}_2$, logo

$$G \subset V_2(F) \subset V_2(V_2(E)) \subset V_1(E)$$

e

$$E \subset V_2(F) \subset V_2(V_2(G)) \subset V_1(G).$$

Assim, temos que $(E, G) \in \widehat{V}_1$, o que garante $\widehat{V}_2 \circ \widehat{V}_2 \subset \widehat{V}_1$. ■

Seguindo o espírito de usar bases simétricas, podemos simplificar um pouco a base apresentada.

Corolário 3.1.2. Se $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme e \mathcal{V} é uma base para \mathcal{U} , então a coleção

$$\tilde{\mathcal{V}} = \{\widehat{V} \mid V \in \mathcal{V}\}$$

constitui uma base para $\tilde{\mathcal{U}}$. Em particular, podemos tomar \mathcal{V} simétrica.

Demonstração: O Teorema 3.1.1 garantiu uma base para $\tilde{\mathcal{U}}$, logo temos que se $U \in \tilde{\mathcal{U}}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $\widehat{W} \subset U$. Agora, como \mathcal{V} é base de \mathcal{U} , temos que existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset W$. Logo, $\widehat{V} \subset \widehat{W} \subset U$, ou seja, $\tilde{\mathcal{V}}$ é uma subcoleção de $\tilde{\mathcal{U}}$ tal que todo elemento de $\tilde{\mathcal{U}}$ contém um elemento de $\tilde{\mathcal{V}}$ e pelo Teorema 2.1.8 vale que $\tilde{\mathcal{V}}$ é base de $\tilde{\mathcal{U}}$. O fato de podermos tomar \mathcal{V} simétrica sai diretamente da Proposição 2.1.9. ■

Observação 3.1.3. No caso em que \mathcal{V} é uma base simétrica para uma uniformidade, observemos que se $V \in \mathcal{V}$,

$$\begin{aligned} \widehat{V} &= \{(E, F) \in F(X) \mid F \subset V(E) \text{ e } E \subset V(F)\} \\ &= \{(E, F) \in F(X) \mid F \subset V(E) \text{ e } F \cap V(e) \neq \emptyset \forall e \in E\}, \end{aligned}$$

pois pela simetria de V

$$\begin{aligned} E \subset V(F) &\Leftrightarrow \text{para todo } e \in E \text{ existe } f \in F \text{ tal que } (f, e) \in V \\ &\Leftrightarrow \text{para todo } e \in E \text{ existe } f \in F \text{ tal que } (e, f) \in V \\ &\Leftrightarrow F \cap V(e) \neq \emptyset \forall e \in E. \end{aligned}$$

Esse tipo de conjunto aparecerá em breve sendo parte de uma outra forma de levar induzir uma estrutura uniforme em hiperespaços. ■

Uma vez que estamos assumindo que o espaço de origem é pelo menos T_1 , estamos considerando que a topologia uniforme induzida em X por determinada uniformidade \mathcal{U} é pelo menos T_1 , o que significa que conjuntos unitários são fechados em $T_{\mathcal{U}}$ e em vista da Proposição 2.6.9, os espaços uniformes considerados satisfazem o axioma $T_{3\frac{1}{2}}$. É natural se perguntar então se $(F(X), T_{\mathcal{U}})$ vai satisfazer algum axioma de separação. De fato, aproveitando o fato de termos a uniformidade $\tilde{\mathcal{U}}$, caso provemos que $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$ é T_0 , teremos que $T_{\mathcal{U}}$ é $T_{3\frac{1}{2}}$ pela Proposição 2.6.9. Mantenhamos em mente que os elementos de $F(X)$ nesse caso são os conjuntos fechados em $(X, T_{\mathcal{U}})$.

Teorema 3.1.4. Dado um espaço uniforme $[X, \mathcal{U}]$, se a topologia uniforme sobre X é T_1 , então a topologia $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$ sobre $[F(X), \tilde{\mathcal{U}}]$ é T_0 .

Demonstração: Sejam E e F elementos distintos de $F(X)$. Como $E \neq F$, podemos assumir que existe um ponto $f \in F \setminus E$. O conjunto E é fechado, então existe uma vizinhança da diagonal $V \in \mathcal{U}$ que contém $\{f\}$ e satisfaz $V(f) = E^c$, pois E^c é aberto. Se tomamos $W = V \cap V^{-1}$, como $V(f) = E^c$, vale que se $e \in E$, então

$$(f, e) \notin W$$

para todo $e \in E$, e da simetria de W temos que $(e, f) \notin W$ para todo $e \in E$. Sendo assim,

$$\widehat{W}(E) = \{G \in F(X) : G \subset W(E) \text{ e } E \subset W(G)\}$$

não pode conter F , pois $f \notin W(E)$, mas é uma vizinhança de E em $F(X)$ por definição da topologia uniforme $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$. Logo, existe um aberto que contém E e não contém F , então a topologia é T_0 . ■

3.1.1 Cobertura Uniforme em $F(X)$

Apesar de termos definido uma uniformidade em $F(X)$, o próprio Michael apresenta em [18] conjuntos que geram uma cobertura uniforme em $F(X)$, ainda que (aparentemente) considere o espaço uniforme base dotado de uma uniformidade. Sendo assim, vamos definir tal como ele indica no artigo e provar a equivalência das definições.

Lema 3.1.5. Se $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme dotado de uma uniformidade, então a coleção

$$\mathfrak{B}_V = \{\mathfrak{B}_V(E) \mid E \in F(X)\}$$

em que $V \in \mathcal{U}$ e

$$\mathfrak{B}_V(E) = \langle V(x) \rangle_{x \in E} = \{F \in F(X) \mid F \subset V(E) \text{ e } F \cap V(e) \neq \emptyset \text{ para todo } e \in E\}$$

é uma cobertura de $F(X)$.

Demonstração: Basta observar que $E \in \mathfrak{B}_V(E)$, portanto a coleção dos $\mathfrak{B}_V(E)$ cobre $F(X)$. ■

Teorema 3.1.6. Se $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme, então a coleção

$$\tilde{\mathfrak{B}}_{\mathcal{U}} = \{\mathfrak{B}_V\}_{V \in \mathcal{U}}$$

constitui uma base de uma cobertura uniforme de $F(X)$ denotada $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{U}}$.

Demonstração: Precisamos mostrar que, para $V_1, V_2 \in \mathcal{U}$, existe $W \in \mathcal{U}$ tal que $\mathfrak{B}_W^* \prec \mathfrak{B}_{V_1} \wedge \mathfrak{B}_{V_2}$. Para tal W , dado $E \in F(X)$, devemos encontrar $F, G \in F(X)$ tais que

$$\text{St}(\mathfrak{B}_W(E), \mathfrak{B}_W) \subset \mathfrak{B}_{V_1}(F) \cap \mathfrak{B}_{V_2}(G).$$

Começamos explicitando o que são esses conjuntos $\text{St}(\mathfrak{B}_W(E), \mathfrak{B}_W)$:

$$\text{St}(\mathfrak{B}_W(E), \mathfrak{B}_W) = \bigcup \{ \mathfrak{B}_W(D) \mid D \in F(X) \text{ e } \mathfrak{B}_W(D) \cap \mathfrak{B}_W(E) \neq \emptyset \}.$$

Reescrevendo isso em termos de elementos de $F(X)$, obtemos

$$\text{St}(\mathfrak{B}_W(E), \mathfrak{B}_W) = \bigcup \left\{ H \in F(X) \mid \begin{array}{l} H \in \mathfrak{B}_W(D) \\ \mathfrak{B}_W(D) \cap \mathfrak{B}_W(E) \neq \emptyset \end{array} \text{ para algum } D \in F(X) \right\}. \quad (3.1)$$

Esqueçamos momentaneamente que temos fixados V_1 e V_2 . Dado $W \in \mathcal{U}$, vamos encontrar W_1 e W_2 tais que

$$\text{St}(\mathfrak{B}_W(E), \mathfrak{B}_W) \subset \mathfrak{B}_{W_1}(F) \cap \mathfrak{B}_{W_2}(G)$$

para algum par $F, G \in F(X)$ e depois fazemos o caminho inverso para obter W a partir de V_1 e V_2 . Se $\mathfrak{B}_W(D) \cap \mathfrak{B}_W(E) \neq \emptyset$, então existe $H \in F(X)$ tal que

$$H \subset W(D) \cap W(E) \text{ e } H \cap W(d) \neq \emptyset \neq H \cap W(e) \text{ para todos } d \in D, e \in E,$$

mas de forma geral, abrindo a equação 3.1, vale que $H \in \text{St}(\mathfrak{B}_W(E), \mathfrak{B}_W)$ se e somente se as seguintes condições forem válidas

- (i) Existe $D \in F(X)$ tal que existe algum $C \subset W(D) \cap W(E)$ e $C \cap W(d) \neq \emptyset \neq C \cap W(e)$ para todo $d \in D$ e $e \in E$. (Correspondente a $C \in \mathfrak{B}_W(E) \cap \mathfrak{B}_W(D)$ pois essa interseção deve ser não vazia.)
- (ii) Para D satisfazendo a condição (i), $H \subset W(D)$ e $H \cap W(d) \neq \emptyset$ para todo $d \in D$. (Correspondente a $H \in \mathfrak{B}_W(D)$.)

Uma vez que tanto F quanto G podem ser escolhidos, seria excelente que conseguíssemos $E = F = G$, portanto, vamos buscar uma forma de encontrar uma vizinhança da diagonal que permita tomar $E = F = G$, o que significa que nosso objetivo é encontrar uma vizinhança $U \in \mathcal{U}$ tal que se $H \in \text{St}(\mathfrak{B}_W(E), \mathfrak{B}_W)$, então $H \in \mathfrak{B}_U(E)$. Observemos que se tomamos $V = W \cup W^{-1}$, como V é simétrica, se $C \in \mathfrak{B}_W(E) \cap \mathfrak{B}_W(D)$ e $H \in \mathfrak{B}_W(D)$, então

- (i) $C \cap W(d) \neq \emptyset$ para todo $d \in D \implies C \cap V(d) \neq \emptyset$ para todo $d \in D$, pois $W \subset V$.
- (ii) $C \cap V(d) \neq \emptyset$ para todo $d \in D \implies D \subset V(C)$, pela mesma discussão da observação 3.1.3.
- (iii) $C \subset W(E) \implies C \subset V(E)$.

Essas implicações nos permitem escrever a seguinte cadeia

$$H \subset W(D) \subset V^2(C) \subset V^3(E),$$

mas ainda não podemos afirmar que $H \in \mathfrak{B}_{V^3}(E)$, já que não sabemos se vale que $H \cap V^3(e) \neq \emptyset$ para todo $e \in E$. Agora, temos as seguintes implicações

- (i) $C \subset W(D) \subset V(D) \implies D \cap V(c) \neq \emptyset$ para todo $c \in C$, pela mesma discussão da observação 3.1.3.
- (ii) $H \cap W(d) \neq \emptyset$ para todo $d \in D \implies H \cap V(d) \neq \emptyset$ para todo $d \in D$, pois $W \subset V$.
- (iii) $H \cap V(d) \neq \emptyset$ para todo $d \in D$ e $D \cap V(c) \neq \emptyset$ para todo $c \in C \implies$ para todo $c \in C$ existe $d \in D$ tal que $d \in V(c)$ e como existe $h \in H$ tal que $h \in V(d)$, vale que existe $h \in V^2(c)$, ou seja, $H \cap V^2(c) \neq \emptyset$ para todo $c \in C$, pois $V(d) \subset V^2(c)$.

(iv) $H \cap V^2(c) \neq \emptyset$ para todo $c \in C$ e $C \cap V(e) \neq \emptyset$ para todo $e \in E \implies$ para todo $e \in E$ existe $c \in C$ tal que $c \in V(e)$ e como existe $h \in H$ tal que $h \in V^2(c)$, vale que existe $h \in V^3(e)$, ou seja, $H \cap V^3(e) \neq \emptyset$ para todo $e \in E$, pois $V(c) \subset V^2(e)$.

Sendo assim, concluímos que se $H \in \text{St}(\mathfrak{B}_W(E), \mathfrak{B}_W)$, então $H \in \mathfrak{B}_{V^3}(E)$, em que $V = W \cup W^{-1}$. Logo, basta tomar $W_1, W_2 \in \mathfrak{U}$ tais que $V^3 \subset W_1 \cap W_2$ que teremos o desejado.

Finalmente, podemos fazer o caminho inverso, isto é, dados $V_1, V_2 \in \mathfrak{V}$, seja $U = V_1 \cap V_2$. Se tomamos $W \in \mathfrak{U}$ simétrica tal que $W^3 \subset U$, temos pela discussão acima que

$$\text{St}(\mathfrak{B}_W(E), \mathfrak{B}_W) \subset \mathfrak{B}_{W^3}(E) \subset \mathfrak{B}_U(E)$$

e como $U \subset V_1$ e $U \subset V_2$,

$$\mathfrak{B}_U(E) \subset \mathfrak{B}_{V_1}(E) \text{ e } \mathfrak{B}_U(E) \subset \mathfrak{B}_{V_2}(E),$$

ou seja,

$$\text{St}(\mathfrak{B}_W(E), \mathfrak{B}_W) \subset \mathfrak{B}_U(E) \subset \mathfrak{B}_{V_1}(E) \cap \mathfrak{B}_{V_2}(E),$$

o que nos permite concluir que $\mathfrak{B}_W^* \prec \mathfrak{B}_{V_1} \wedge \mathfrak{B}_{V_2}$. ■

Teorema 3.1.7. Se $[X, \mathfrak{U}]$ é um espaço uniforme, então $\tilde{\mathfrak{U}}$ e $\tilde{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ são equivalentes em $F(X)$.

Demonstração: Para mostrar que são equivalentes, provaremos que a cobertura uniforme $\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ induzida pela uniformidade $\tilde{\mathfrak{U}}$ é a mesma que $\tilde{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$. Começemos analisando as estruturas.

Sabemos pelo Corolário 3.1.2 que dada uma base simétrica \mathfrak{V} de \mathfrak{U} , a coleção

$$\tilde{\mathfrak{V}} = \{\hat{V} \mid V \in \mathfrak{V}\}$$

constitui uma base simétrica da uniformidade $\tilde{\mathfrak{U}}$. Sendo assim, pela Proposição 2.5.14, temos que a coleção

$$\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{V}}} = \{\mathfrak{B}_{\hat{V}} \mid V \in \mathfrak{V}\}$$

constitui uma base da cobertura uniforme $\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ em que

$$\mathfrak{B}_{\hat{V}} = \{\hat{V}(E) \mid E \in F(X)\}.$$

Agora, por definição, as coberturas da base $\tilde{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ de $\tilde{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ são da forma

$$\mathfrak{B}_V = \{\mathfrak{B}_V(E) \mid E \in F(X)\}$$

em que $V \in \mathfrak{U}$. Sendo assim, observemos que quando $V \in \mathfrak{V}$ é simétrica

$$\begin{aligned} \hat{V}(E) &= \{F \in F(X) \mid F \subset V(E) \text{ e } E \subset V(F)\} \\ &= \{F \in F(X) \mid F \subset V(E) \text{ e } F \cap V(e) \neq \emptyset \text{ para todo } e \in E\} \\ &= \mathfrak{B}_V(E), \end{aligned}$$

ou seja, $\mathfrak{B}_V = \mathfrak{B}_{\hat{V}}$. Com tais informações, podemos passar à demonstração:

- Toda cobertura de $\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{V}}}$ é refinada por uma cobertura de $\tilde{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$ (e assim $\mathcal{C}_{\tilde{\mathfrak{U}}} \subset \tilde{\mathcal{C}}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$).

Pela discussão anterior vale que toda cobertura de $\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{V}}}$ é uma cobertura de $\tilde{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$, logo toda cobertura de $\mathcal{B}_{\tilde{\mathfrak{V}}}$ é refinada por uma cobertura de $\tilde{\mathcal{B}}_{\tilde{\mathfrak{U}}}$, ela mesma.

- Toda cobertura de $\tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}}$ é refinada por uma cobertura de $\mathcal{B}_{\tilde{\mathcal{V}}}$ (e assim $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{U}} \subset \mathcal{C}_{\tilde{\mathcal{U}}}$).

Dado $W \in \mathcal{U}$, existe $V \in \mathcal{V}$ tal que $V \subset W$ e desse modo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{B}_V(E) &= \{F \in \mathcal{F}(X) \mid F \subset V(E) \text{ e } F \cap V(e) \neq \emptyset \text{ para todo } e \in E\} \\ &\subset \{F \in \mathcal{F}(X) \mid F \subset W(E) \text{ e } F \cap W(e) \neq \emptyset \text{ para todo } e \in E\} \\ &= \mathfrak{B}_W(E). \end{aligned}$$

Com isso, dada a cobertura $\mathfrak{B}_W \in \tilde{\mathcal{B}}_{\mathcal{U}}$, temos para cada $E \in \mathcal{F}(X)$

$$\hat{V}(E) = \mathfrak{B}_V(E) \subset \mathfrak{B}_W(E),$$

o que significa que a cobertura $\mathfrak{B}_{\hat{\mathcal{V}}}$ refina \mathfrak{B}_W . ■

Corolário 3.1.8. Dado um espaço uniforme $[X, \mathcal{U}]$, as topologias $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$ e $T_{\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{U}}}$ são iguais.

Demonstração: Como visto no Teorema 3.1.7, a uniformidade $\tilde{\mathcal{U}}$ e a cobertura uniforme $\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{U}}$ são equivalentes. Portanto, pelo Teorema 2.6.4, vale que $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$ e $T_{\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{U}}}$ são iguais. ■

Com este resultado, passamos a ter a liberdade de trabalhar com as duas estruturas em $\mathcal{F}(X)$, sem se preocupar quando um resultado acerca da topologia é válido para a topologia induzida pela uniformidade ou pela cobertura uniforme.

3.2 Admissibilidade

Nesta seção mostraremos que existe uma compatibilidade entre a estrutura topológica ou uniforme do espaço topológico base X e $\mathcal{F}(X)$, mas para tal é necessário que a topologia de X seja T_1 , pois assim teremos que conjuntos unitários pertencem a $\mathcal{F}(X)$ e poderemos considerar a inclusão de X em $\mathcal{F}(X)$.

Definição 3.2.1. [18, p. 153]

- Se (X, T) é um espaço topológico, dizemos que uma topologia S é admissível em $\mathcal{F}(X)$ se a aplicação $i : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, $i(x) = \{x\}$ for um homeomorfismo sobre sua imagem.
- Se $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme, dizemos que uma uniformidade W é admissível em $\mathcal{F}(X)$ se a aplicação $i : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, $i(x) = \{x\}$ for um isomorfismo uniforme sobre sua imagem. □

Observação 3.2.2. Quando dizemos isomorfismo uniforme sobre sua imagem em $ii)$, queremos dizer que $i(X)$ é considerado como um espaço uniforme dotado do traço de $\tilde{\mathcal{U}}$ com relação a $i(X)$. Sabemos que todo isomorfismo uniforme é homeomorfismo pela Proposição 2.3.17, portanto se uma uniformidade é admissível, a topologia induzida por ela também será.

Proposição 3.2.3. A topologia de Vietoris em $\mathcal{F}(X)$ é admissível.

Demonstração: Precisamos mostrar que a aplicação $i : X \rightarrow \mathcal{F}(X)$, $i(x) = \{x\}$ é homeomorfismo sobre sua imagem. Por definição, temos que ela é bijetora. Lembrando, se (X, T) é um espaço topológico, um aberto básico em $\mathcal{F}(X)$ na topologia de Vietoris é da forma

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \left\{ F \in \mathcal{F}(X) \mid F \subset \bigcup_i^n U_i \text{ e } F \cap U_i \neq \emptyset \forall i = 1, \dots, n \right\},$$

em que $U_1, \dots, U_n \in T$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap i(X) &= \left\{ \{x\} \in F(X) \mid \{x\} \subset \bigcup_i^n U_i \text{ e } \{x\} \cap U_i \neq \emptyset \forall i = 1, \dots, n \right\} \\ &= \{ \{x\} \in F(X) \mid \{x\} \cap U_i \neq \emptyset \forall i = 1, \dots, n \} \\ &= \{ \{x\} \in F(X) \mid \{x\} \in U_1 \cap \dots \cap U_n \} \\ &= \langle U_1 \cap \dots \cap U_n \rangle \cap i(X). \end{aligned}$$

Portanto,

$$i^{-1}(\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap i(X)) = U_1 \cap \dots \cap U_n,$$

o qual é um aberto de X . Como todo aberto de $F(X)$ é formado por abertos básicos, temos a continuidade de i garantida.

Para verificar que $i : i(X) \rightarrow X$ é função aberta, observemos que se $U \in T$,

$$i(U) = \{ \{x\} \in F(X) \mid \{x\} \subset U \} = \langle U \rangle \cap i(X),$$

o qual é um aberto em $i(X)$. ■

Proposição 3.2.4. Dado um espaço uniforme $[X, \mathfrak{U}]$, a uniformidade $\tilde{\mathfrak{U}}$ é admissível em $F(X)$.

Demonstração: Se i é aplicação inclusão, vamos começar mostrando que, dada uma vizinhança da diagonal $U \in \tilde{\mathfrak{U}}$, existe uma vizinhança da diagonal $W \in \mathfrak{U}$ tal que $i(W(x)) \subset U(i(x))$ para todo $x \in X$. Assim, teremos que i é uniformemente contínua. Por definição, para todo $U \in \tilde{\mathfrak{U}}$ existe elemento básico $\hat{V} \subset U$. É natural pensar que

$$i(V(x)) \subset \hat{V}(i(x)) = \hat{V}(\{x\}),$$

mas é necessário um pouco mais para ter a inclusão. Provaremos que $W = V \cap V^{-1}$ é tal que

$$i(W(x)) \subset \hat{V}(\{x\}).$$

Temos

$$\hat{V}(\{x\}) \cap i(X) = \{ \{y\} \mid y \in V(x) \text{ e } x \in V(y) \}$$

e

$$\begin{aligned} i(W(x)) &= \{ \{y\} \mid (x, y) \in W \} \\ &= \{ \{y\} \mid y \in W(x) \text{ e } x \in W(y) \} \\ &\subset \{ \{y\} \mid y \in V(x) \text{ e } x \in V(y) \} = \hat{V}(\{x\}) \subset U(\{x\}). \end{aligned}$$

Precisamos mostrar agora que

$$\begin{array}{ccc} i^{-1} : & i(X) & \longrightarrow & X \\ & \{x\} & \longmapsto & x \end{array}$$

é uniformemente contínua, ou seja, para cada $x \in X$ e $V \in \mathfrak{U}$ existe $W \in \tilde{\mathfrak{U}}$ tal que

$$i^{-1}(W(\{x\}) \cap i(X)) \subset V(x).$$

Para tal, lembramos que dado $V \in \mathfrak{U}$, \hat{V} é simétrica, então

$$\begin{aligned} \hat{V}(\{x\}) \cap i(X) &= \{ \{y\} \mid y \in V(x) \text{ e } x \in V(y) \} \\ &= \{ \{y\} \mid (x, y) \text{ e } (y, x) \in V \} \end{aligned}$$

e assim,

$$i^{-1}(\hat{V}(\{x\}) \cap i(X)) = \{ y \in X \mid (x, y) \text{ e } (y, x) \in V \} \subset \{ y \in X \mid (x, y) \in V \} = V(x).$$

Dessa forma temos que i é uniformemente contínua. ■

Proposição 3.2.5. A topologia $T_{\tilde{U}}$ em $[F(X), \tilde{U}]$ é admissível com relação à topologia T_U em $[X, U]$.

Demonstração: Todo isomorfismo uniforme é homeomorfismo pela Proposição 2.3.17. Portanto, como a uniformidade é admissível, a topologia uniforme é admissível. ■

3.3 Propriedades da Topologia de Vietoris

Nesta seção consideraremos apenas o hiperespaço dotado da topologia de Vietoris, ou seja, por $F(X)$ nos referimos a $(F(X), T_V)$.

Proposição 3.3.1. [18, p. 156] Se (X, T) é um espaço topológico e $A \subset X$ é fechado, então

$$A^+ = \{F \in F(X) \mid F \subset A\}$$

é um conjunto fechado em $F(X)$.

Demonstração: Observemos que um conjunto $F \in F(X)$ não está contido em A se e somente se $F \cap A^c \neq \emptyset$, logo A^+ é fechado em $F(X)$ se e somente se

$$\{F \in F(X) \mid F \cap A^c \neq \emptyset\}$$

for aberto, que é o que vamos mostrar. Agora, A^c é aberto em X , poderíamos pensar em tomar

$$\langle A^c \rangle = \{F \in F(X) \mid F \subset A^c \text{ e } F \cap A^c \neq \emptyset\} = \{F \in F(X) \mid F \subset A^c\},$$

mas este conjunto não engloba todos os fechados de X que não estão contidos em A , pois eles podem muito bem ter interseção não vazia com A ou até mesmo conter A . Portanto, tomamos

$$\begin{aligned} \langle A^c, X \rangle &= \{F \in F(X) \mid F \subset (A^c \cup X) \text{ e } F \cap A^c \neq \emptyset \neq F \cap X\} \\ &= \{F \in F(X) \mid F \cap A^c \neq \emptyset\}, \end{aligned}$$

que é um conjunto aberto pela definição da topologia. ■

Temos um resultado análogo para quando A é compacto e fechado.

Proposição 3.3.2. Se (X, T) é um espaço topológico e $A \subset X$ é compacto e fechado, então

$$A^+ = \{F \in F(X) \mid F \subset A\}$$

é um conjunto compacto e fechado em $F(X)$.

Demonstração: Temos A^+ fechado pela Proposição 3.3.1. Vamos usar o Lema de Alexander (Lema 1.5.5) para provar a compacidade. Uma cobertura de A^+ por elementos da sub-base da topologia de Vietoris é da forma

$$\left(\bigcup_{\alpha} \langle X, V_{\alpha} \rangle \right) \cup \left(\bigcup_{\beta} \langle U_{\beta} \rangle \right).$$

Existem duas possibilidades:

- $A \subseteq \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$.

Nesse caso, pela compacidade de A , existem V_1, \dots, V_n em $\{V_{\alpha}\}$ tais que

$$A \subseteq V_1 \cup \dots \cup V_n.$$

Daí temos

$$A^+ \subseteq \langle X, V_1 \rangle \cup \dots \cup \langle X, V_n \rangle.$$

- $A \not\subseteq \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$.

Nesse caso, como os V_{α} são abertos, temos que

$$\left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}\right)^c \cap A$$

é fechado, portanto, deve estar contido em algum dos U_{β} , pois está em A^+ . Denotando tal aberto por U , vale que

$$A \subseteq U \cup \left(\bigcup_{\alpha} V_{\alpha}\right)$$

então, pela compacidade de A , existem V_1, \dots, V_n tais que

$$A \subseteq U \cup V_1 \cup \dots \cup V_n.$$

Logo,

$$A^+ \subseteq \langle X, V_1 \rangle \cup \dots \cup \langle X, V_n \rangle \cup \langle U \rangle,$$

pois todo fechado F contido em A intersecta um dos V_i ou está contido em U .

Com isso, provamos a compacidade de A^+ . ■

Proposição 3.3.3. [18, p. 156] Se (X, T) é um espaço topológico e $A \subset X$ é fechado, então

$$A^- = \{F \in \mathcal{F}(X) \mid F \cap A \neq \emptyset\}$$

é um conjunto fechado em $\mathcal{F}(X)$.

Demonstração: De modo análogo à Proposição 3.3.1, observemos que o complementar de A^- é o aberto

$$\langle A^c \rangle = \{F \in \mathcal{F}(X) \mid F \subset A^c\}.$$
■

Lema 3.3.4. [18, p. 156] Se (X, T) é um espaço topológico, então

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset \langle V_1, \dots, V_m \rangle \Leftrightarrow \bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{j=1}^m V_j \text{ e para todo } V_j \text{ existe } U_i \text{ tal que } U_i \subset V_j.$$

Demonstração: Para a volta,

$$\begin{aligned} \langle U_1, \dots, U_n \rangle &= \left\{ F \in \mathcal{F}(X) \mid F \subset \bigcup U_i \text{ e } F \cap U_i \neq \emptyset \text{ para todo } i = 1, \dots, n \right\} \\ &\subset \left\{ F \in \mathcal{F}(X) \mid F \subset \bigcup V_j \text{ e } F \cap U_i \neq \emptyset \text{ para todo } i = 1, \dots, n \right\} \\ &\subset \left\{ F \in \mathcal{F}(X) \mid F \subset \bigcup V_j \text{ e } F \cap V_j \neq \emptyset \text{ para todo } j = 1, \dots, m \right\} \\ &= \langle V_1, \dots, V_m \rangle, \end{aligned}$$

em que a última inclusão se dá pelo fato de que se $F \cap U_i \neq \emptyset$ para todo i , então dado V_j , sabemos que $F \cap V_j \neq \emptyset$ porque existe i tal que $U_i \subset V_j$.

Para a ida, observemos que afirmar que $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset \langle V_1, \dots, V_m \rangle$, é afirmar que

$$\left\{ F \in \mathcal{F}(X) \mid F \subset \bigcup U_i \text{ e } F \cap U_i \neq \emptyset \forall i \right\} \subset \left\{ F \in \mathcal{F}(X) \mid F \subset \bigcup V_j \text{ e } F \cap V_j \neq \emptyset \forall j \right\},$$

portanto obrigatoriamente deve valer

$$\bigcup_{i=1}^n U_i \subset \bigcup_{j=1}^m V_j.$$

Além disso, suponha por absurdo que existe j para o qual não é possível encontrar i que satisfaça $U_i \subset V_j$. Nesse caso, para todo U_i podemos encontrar $x_i \in U_i \cap V_j^c$, então o conjunto $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ está em $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ mas não em $\langle V_1, \dots, V_m \rangle$, um absurdo. ■

Antes de demonstrar alguns resultados simples, mas que serão muito úteis e que foram apenas enunciados por Michael, provaremos um pequeno lema.

Lema 3.3.5. Se (X, T) é um espaço topológico e $F_1, \dots, F_n \subset X$ são fechados, então

$$\langle F_1, \dots, F_n \rangle$$

é um conjunto fechado em $F(X)$.

Demonstração: Começamos lembrando que

$$\langle F_1, \dots, F_n \rangle = \left\{ E \in F(X) \mid E \subset \bigcup_1^n F_i \text{ e } E \cap F_i \neq \emptyset \text{ para todo } i = 1, \dots, n \right\}.$$

Mostraremos que o complementar desse conjunto é aberto. De fato, se $F = \bigcup_{i=1}^n F_i$, então

$$\begin{aligned} \langle F_1, \dots, F_n \rangle^c &= \{E \in F(X) \mid E \cap F_i = \emptyset \text{ para algum } i \in \{1, \dots, n\}\} \cup \{E \in F(X) \mid E \not\subset F\} \\ &= \left(\bigcup_1^n \{E \in F(X) \mid E \cap F_i = \emptyset\} \right) \cup \{E \in F(X) \mid E \cap F^c \neq \emptyset\} \\ &= \left(\bigcup_1^n \{E \in F(X) \mid E \subset F_i^c\} \right) \cup \langle X, F^c \rangle \\ &= \left(\bigcup_1^n \langle F_i^c \rangle \right) \cup \langle X, F^c \rangle. \end{aligned}$$

Dado que F_i é fechado para todo i , temos que F_i^c é aberto, e conseqüentemente F^c também, o que nos dá o resultado desejado. ■

Proposição 3.3.6. [18, p. 156] Se (X, T) é um espaço topológico, então em $(F(X), T_V)$

$$\overline{\langle U_1, \dots, U_n \rangle} = \langle \overline{U_1}, \dots, \overline{U_n} \rangle.$$

Demonstração: Do Lema 3.3.5 e do fato que $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset \langle \overline{U_1}, \dots, \overline{U_n} \rangle$, temos que

$$\overline{\langle U_1, \dots, U_n \rangle} \subset \langle \overline{U_1}, \dots, \overline{U_n} \rangle,$$

portanto basta mostrar a inclusão contrária.

Para mostrar que

$$\langle \overline{U_1}, \dots, \overline{U_n} \rangle \subset \overline{\langle U_1, \dots, U_n \rangle},$$

dado $F \in \langle \overline{U_1}, \dots, \overline{U_n} \rangle$ e um aberto básico $\langle V_1, \dots, V_m \rangle$ que contém F , construiremos um conjunto

$$H \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \dots, V_m \rangle.$$

Desse modo, provaremos que toda vizinhança de um ponto de $\langle \overline{U_1}, \dots, \overline{U_n} \rangle$ possui ponto de $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ e $F \in \overline{\langle U_1, \dots, U_n \rangle}$.

Dado $F \in \langle \overline{U_1}, \dots, \overline{U_n} \rangle$ e um aberto básico $\langle V_1, \dots, V_m \rangle$ que contém F , vale que

- $F \subset \bigcup_1^n \overline{U}_i$,
- $F \cap \overline{U}_i \neq \emptyset$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$,
- $F \subset \bigcup_1^m V_j$,
- $F \cap V_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$.

Assim,

$$F \subset \left(\bigcup_1^m V_j \right) \cap \left(\bigcup_1^n \overline{U}_i \right)$$

e para todo \overline{U}_i existe $f_i \in \overline{U}_i$ tal que $f_i \in V_{j_i}$ para algum $j_i \in \{1, \dots, m\}$. Uma vez que V_{j_i} é um aberto que contém f_i que está no fecho de U_i , existe elemento $g_i \in V_{j_i} \cap U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$, e definimos $G = \{g_1, \dots, g_n\}$ que satisfaz

$$G \subset \left(\bigcup_1^m V_j \right) \cap \left(\bigcup_1^n U_i \right).$$

Contudo, apesar de ter

$$G \cap U_i \neq \emptyset \text{ para todo } i \in \{1, \dots, n\},$$

não temos ainda

$$G \cap V_j \neq \emptyset \text{ para todo } j \in \{1, \dots, m\}$$

e para resolver isso usamos o fato análogo, ou seja, para todo V_j existe $f_j \in V_j$ tal que $f_j \in \overline{U}_{i_j}$ para algum $i_j \in \{1, \dots, n\}$. Assim, $V_j \cap U_{i_j} \neq \emptyset$ e podemos tomar $h_j \in V_j \cap U_{i_j}$. Dessa forma,

$$H = G \cup \{h_1, \dots, h_m\}$$

é tal que $H \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \dots, V_m \rangle$.

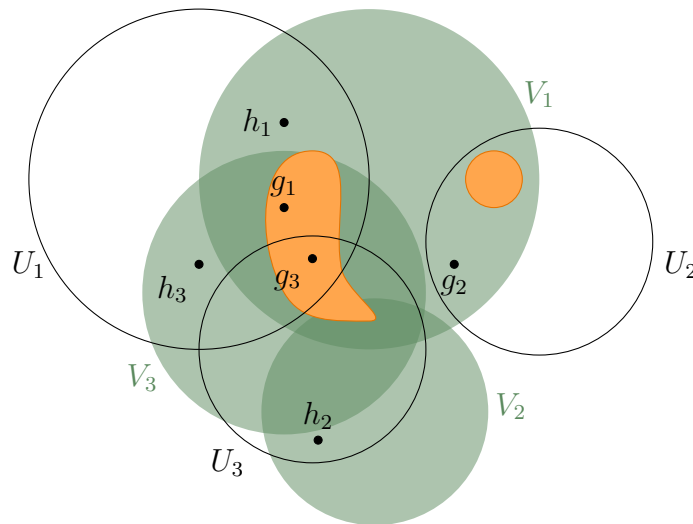


Figura 3.2: Ilustração de um caso abordado, em que o conjunto laranja seria F . Observe que para os pontos g_i escolhidos realmente é necessária a construção do conjunto H já que não existe $g_i \in V_2$.

■

Proposição 3.3.7. [18, p. 156] Dado um espaço topológico (X, T) e $x \in X$, se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x , então $\{\langle U_\alpha \rangle\}_{\alpha \in A}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $\{x\}$ em $(F(X), T_V)$.

Demonstração: Dada uma vizinhança de $\{x\}$ em $(F(X), T_V)$, sabemos que ela contém um aberto, digamos

$$\langle V_1, \dots, V_n \rangle.$$

Como $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x e cada V_i é um aberto que contém x , existe $U \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ tal que $U \subset \bigcap_1^n V_j$. Observe que esta interseção é não vazia porque $x \in V_j$ para todo j . Sendo assim,

$$\langle U \rangle \subset \langle V_1, \dots, V_n \rangle.$$

■

Proposição 3.3.8. [18, p. 156] Se (X, T) é um espaço topológico, então $\text{Fin}(X)$ é denso em $(F(X), T_V)$.

Demonstração: Por definição, todo aberto básico na topologia de Vietoris é da forma $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$, em que U_i é aberto em (X, T) para todo i . Agora, observemos que se $F = \bigcup_1^n \{x_i\}$, em que cada $x_i \in U_i$, temos um conjunto finito, fechado e em $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$, como desejado.

■

Esta propriedade global possui uma outra propriedade local associada, que essencialmente mostra que em subespaços abertos, a coleção de subconjuntos finitos do subespaço é denso no subespaço.

Proposição 3.3.9. Se (X, T) é um espaço topológico e $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ aberto básico em $(F(X), T_V)$, então

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq \overline{\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \text{Fin}(X)}$$

Demonstração: Dado $F \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ e aberto básico $\langle V_1, \dots, V_m \rangle$ contendo F , construímos o subconjunto H de F como se segue: para cada U_i tomamos um $f_{i,U} \in U_i \cap F$ e para cada V_j tomamos um $f_{j,V} \in V_j \cap F$. Assim,

$$H = \{f_{1,U}, \dots, f_{n,U}, f_{1,V}, \dots, f_{m,V}\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \dots, V_m \rangle,$$

é um conjunto finito, portanto

$$F \in \overline{\langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \text{Fin}(X)}.$$

■

Proposição 3.3.10. [18, p. 156] Se (X, T) é um espaço de Hausdorff, então $\text{Fin}_n(X)$ é fechado em $(F(X), T_V)$ para todo $n \geq 1$.

Demonstração: Vamos provar que o conjunto $\text{Fin}_n(X)^c$ é aberto. Este conjunto é a coleção de todos os subconjuntos de X com mais de n elementos. Logo, se $F \in \text{Fin}_n(X)^c$, podemos tomar f_1, \dots, f_{n+1} distintos em F e, por X ser Hausdorff, existem abertos disjuntos U_1, \dots, U_{n+1} contendo cada um desses pontos, respectivamente. Sendo assim,

$$\langle X, U_1, \dots, U_{n+1} \rangle = \{E \in F(X) \mid E \cap U_i \neq \emptyset \text{ para todo } i = 1, \dots, n+1\}.$$

Este é um aberto básico em $F(X)$ que contém conjuntos com mais de n elementos, pois os abertos U_i são disjuntos e contém F , pois $f_i \in U_i \cap F$ para todo i . Uma vez que F é arbitrário concluímos que $\text{Fin}_n(X)^c$ é uma união de abertos básicos e consequentemente aberto.

■

Agora apresentamos duas funções que serão úteis para tratar de conexidade e separação de hiperespaços.¹

Proposição 3.3.11. [18, p. 156] A projeção natural $\pi : X^n \rightarrow \text{Fin}_n(X)$, dada por

$$\pi((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\},$$

é contínua.

¹Uso nas Seções 4.3 e 4.4

Demonstração: Um aberto básico em $\text{Fin}_n(X)$ é dado por

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle = \left\{ F \in \text{Fin}_n(X) \mid F \subset \bigcup U_j \text{ e } F \cap U_j \neq \emptyset \text{ para todo } j = 1, \dots, m \right\}.$$

Vamos mostrar que todo ponto em $\pi^{-1}(\langle U_1, \dots, U_m \rangle)$ está em um aberto de X^n cuja imagem está contida em $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$.

Dado $p = (x_1, \dots, x_n) \in \pi^{-1}(\langle U_1, \dots, U_m \rangle)$, para cada i definimos

$$V_i = \bigcap \{U_j \mid x_i \in U_j\}.$$

Sendo $V = V_1 \times \dots \times V_n$, afirmamos que $\pi(V) \subset \langle U_1, \dots, U_m \rangle$. Se $y = (y_1, \dots, y_n) \in V$, então

$$\{y_1, \dots, y_n\} \in \bigcup_{i=1}^n V_i \subset \bigcup_{j=1}^m U_j.$$

Falta mostrar que $\pi(y) \cap U_j \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, \dots, m\}$. Para tal, observemos que, dado U_j , existe $x_k \in U_j$, logo $V_k \subset U_j$ e $y_k \in U_j$. ■

Proposição 3.3.12. A aplicação união $\pi : F(X)^n \rightarrow F(X)$ dada por

$$\pi(F_1, \dots, F_n) = \bigcup_{i=1}^n F_i$$

é contínua quando $F(X)^n$ está dotado da topologia produto. Em particular, a sua restrição a um subespaço $F(A_1) \times \dots \times F(A_n) \subseteq F(X)^n$ também é contínua, onde $A_i \subseteq X$ para todo i .

Demonstração: Vamos provar que a pré-imagem de abertos sub-básicos é aberta.

- Aberto da forma $\langle U \rangle$

Afirmamos que

$$\pi^{-1}(\langle U \rangle) = \langle U \rangle^n.$$

Se $(F_1, \dots, F_n) \in \langle U \rangle^n$, cada F_i está contido em U . Sendo assim,

$$\pi((F_1, \dots, F_n)) \subset U$$

e

$$\langle U \rangle^n \subseteq \pi^{-1}(\langle U \rangle).$$

Se $(F_1, \dots, F_n) \in \pi^{-1}(\langle U \rangle)$, cada F_i deve estar contido em U , portanto

$$(F_1, \dots, F_n) \in \langle U \rangle^n$$

e provamos a igualdade.

- Aberto da forma $\langle X, V \rangle$

Observemos que $\langle X, V \rangle^c = \langle V^c \rangle$ é fechado em $F(X)$. Pela parte anterior,

$$\pi^{-1}(\langle V^c \rangle) = \langle V^c \rangle^n$$

e este é um conjunto fechado em $F(X)^n$. Logo, $\pi^{-1}(\langle X, V \rangle)$ é aberto. ■

Proposição 3.3.13. [18, p. 163] Sejam X um espaço topológico, $\overline{\mathbb{R}}$ a reta real estendida e $f : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ uma função contínua. Definimos $f_+, f_- : F(X) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ como

$$f_+(E) = \sup_{x \in E} f(x) \quad \text{e} \quad f_-(E) = \inf_{x \in E} f(x).$$

Se f é contínua, então f_+ e f_- são contínuas.

Demonstração: Mostraremos que a pré-imagem de aberto sub-básico é aberto em $F(X)$. Começamos com f_+ . Dado intervalo $(a, \infty] \subset \overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} f_+^{-1}((a, \infty]) &= \left\{ E \in F(X) \mid a < \sup_{x \in E} f(x) \right\} \\ &= \{ E \in F(X) \mid \exists e \in E : f(e) > a \}. \end{aligned}$$

Sabemos que

$$U = f^{-1}((a, \infty]) = \{ x \in X \mid f(x) > a \}$$

é aberto, e assim

$$\begin{aligned} f_+^{-1}((a, \infty]) &= \{ E \in F(X) \mid \exists e \in E : f(e) > a \} \\ &= \{ E \in F(X) \mid E \cap U \neq \emptyset \} \\ &= \langle X, U \rangle, \end{aligned}$$

é aberto também.

Dado aberto sub-básico $[-\infty, b) \subset \overline{\mathbb{R}}$,

$$f_+^{-1}([-\infty, b)) = \left\{ E \in F(X) \mid \sup_{x \in E} f(x) < b \right\}.$$

Tomemos $F \in f_+^{-1}([-\infty, b))$. Vale que

$$c_F = \sup_{x \in F} f(x) < b.$$

Definindo $d = (c_F + b)/2$, vale que se $V_F = f_+^{-1}([-\infty, d))$, então

$$\begin{aligned} F &\in \left\{ E \in F(X) \mid \sup_{x \in E} f(x) \leq c_F \right\} \\ &= \{ E \in F(X) \mid F \subseteq f^{-1}([-\infty, c_F]) \} \\ &\subseteq \{ E \in F(X) \mid F \subseteq f^{-1}([-\infty, d]) \} \\ &= \langle V_F \rangle \\ &\subseteq f_+^{-1}([-\infty, b)). \end{aligned}$$

Uma vez que isso pode ser feito para todo $F \in f_+^{-1}([-\infty, b))$, temos que este é um conjunto aberto.

A demonstração para f_- é análoga. ■

Corolário 3.3.14. [18, p. 163] Considere (X, T) como subespaço de $(F(X), T_V)$. Toda função contínua real em X pode ser estendida a uma função contínua em $\text{Comp}(X)$. Se f é limitada superiormente ou inferiormente, f pode ser estendida a $F(X)$.

Demonstração: As funções f_+ e f_- definidas anteriormente constituem uma extensão cada e elas estão bem-definidas em $\text{Comp}(X)$ porque, em conjuntos compactos, funções reais atingem um máximo/mínimo. Logo, a imagem de f_+ e f_- estará em \mathbb{R} . Se f é limitada superiormente, estendemos a $F(X)$ usando f_+ , se for inferiormente estendemos usando f_- . ■

Os próximos resultados apresentam condições para que uniões, não necessariamente finitas, de fechados/compactos sejam um conjunto fechado/compacto.

Teorema 3.3.15. [18, p. 157] Seja (X, T) um espaço topológico regular. Se \mathfrak{B} está em $\text{Comp}(F(X), T_V)$, então

$$A = \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E$$

é um conjunto fechado em X , ou seja, está em $F(X)$.

Demonstração: Observemos que \mathfrak{B} é fechado, pois $F(X)$ é Hausdorff pelo Teorema 4.3.3. Tomemos $x \in \bar{A}$. Vamos provar que $x \in A$, e conseqüentemente que A é fechado por ser seu próprio fecho. Se N é uma vizinhança fechada de x , o conjunto

$$\mathfrak{F}_N = \{E \in F(X) \mid E \cap N \neq \emptyset\} \cap \mathfrak{B} = \langle X, N \rangle \cap \mathfrak{B}$$

é fechado em $F(X)$ e não vazio. Definimos \mathfrak{F} como a coleção dos \mathfrak{F}_N onde N é vizinhança fechada de x . Uma vez que a interseção finita de vizinhanças fechadas de X é uma vizinhança fechada, temos que \mathfrak{F} satisfaz a propriedade da interseção finita. Uma vez que \mathfrak{F} é uma coleção de subconjuntos de \mathfrak{B} , que é compacto, pelo Teorema 1.5.7 existe uma subcoleção não vazia

$$\mathfrak{D} \subset \bigcap \mathfrak{F}.$$

Precisamente, \mathfrak{D} é a coleção dos conjuntos fechados $E \in \mathfrak{B}$ tais que E intersecta todas as vizinhanças fechadas de x . Observemos que não necessariamente $\{x\} \in \mathfrak{B}$, logo não podemos concluir que $\{x\} \in \mathfrak{D}$. Da regularidade de X , toda vizinhança aberta de x contém uma vizinhança fechada de x , portanto existe $E \in \mathfrak{D}$ tal que toda vizinhança aberta de x intersecta E , ou seja, $x \in \bar{E} = E$, e assim $x \in A$. ■

Teorema 3.3.16. [18, p. 157] Seja (X, T) um espaço topológico. Se \mathfrak{B} está em $\text{Comp}(\text{Comp}(X), T_V)$, então

$$A = \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E$$

é um conjunto compacto em X , ou seja, está em $\text{Comp}(X)$.

Demonstração: Seja \mathfrak{U} uma cobertura aberta de A . Como $E \in \mathfrak{B}$ é compacto, existe uma subcobertura finita de \mathfrak{U}

$$\{U_{E,1}, \dots, U_{E,n(E)}\}$$

que cobre E . Desse modo, definimos

$$\mathfrak{U}_E = \langle U_{E,1}, \dots, U_{E,n(E)} \rangle$$

que é por definição uma vizinhança aberta de E em $F(X)$. Como $E \in \mathfrak{U}_E$, a coleção

$$\mathfrak{V} = \{\mathfrak{U}_E \mid E \in \mathfrak{B}\}$$

é uma cobertura aberta de \mathfrak{B} , o que significa que existe uma subcobertura finita \mathfrak{W} de \mathfrak{V} que cobre \mathfrak{B} da forma

$$\mathfrak{W} = \{\mathfrak{U}_{E_1}, \dots, \mathfrak{U}_{E_m}\}.$$

Logo, se definimos

$$\mathfrak{B} = \{U_{E_i, j(i)} \mid i \in \{1, \dots, m\} \text{ e } j(i) \in \{1, \dots, n(E_i)\}\}$$

temos uma subcobertura finita de \mathfrak{A} que cobre A , pois para todo $E \in \mathfrak{B}$ existe i tal que

$$E \subset \bigcup_{j=1}^{n(E_i)} U_{E_i, j}.$$

■

3.4 Propriedades da Topologia Uniforme em $F(X)$

Começamos com duas propriedades análogas às da topologia de Vietoris apresentadas nas Proposições 3.3.1 e 3.3.3. Ressaltamos que nesta seção, se $[X, \mathfrak{U}]$ é o espaço uniforme base, ele sempre estará dotado da topologia uniforme, assim como $F(X)$ estará dotado da uniformidade $\tilde{\mathfrak{U}}$ e da topologia uniforme.

Proposição 3.4.1. Se $[X, \mathfrak{U}]$ é um espaço uniforme e $A \subset X$ é fechado, então

$$A^+ = \{F \in F(X) \mid F \subset A\}$$

é um conjunto fechado em $(F(X), T_{\tilde{\mathfrak{U}}})$.

Demonstração: Novamente, o complementar de A^+ é

$$\{F \in F(X) \mid F \cap A^c \neq \emptyset\},$$

que mostraremos ser um conjunto aberto em $(F(X), T_{\tilde{\mathfrak{U}}})$. Dado F tal que $F \cap A^c \neq \emptyset$, existe $f \in F \cap A^c$ e pelo fato de A^c ser aberto, podemos encontrar $V \in \mathfrak{U}$ simétrica tal que $V(f) \subset A^c$. Agora,

$$\widehat{V}(F) = \{E \in F(X) \mid E \subset V(F) \text{ e } E \cap V(f) \neq \emptyset \forall f \in F\},$$

portanto, se $E \subset A$ temos $E \notin \widehat{V}(F)$ e assim existe um aberto $A_F \subset \widehat{V}(F)$ tal que

$$A_F \cap A^+ = \emptyset.$$

Como isso pode ser feito para cada F tal que $F \cap A^c \neq \emptyset$, temos que

$$\{F \in F(X) \mid F \cap A^c \neq \emptyset\}$$

é aberto, tal como queríamos.

■

Proposição 3.4.2. [18, p. 156] Seja $[X, \mathfrak{U}]$ um espaço uniforme. Se A é um compacto, então

$$A^- = \{F \in F(X) \mid F \cap A \neq \emptyset\}$$

é um conjunto fechado em $(F(X), T_{\tilde{\mathfrak{U}}})$.

Demonstração: Vamos provar que o complementar de A^- , o conjunto

$$\{F \in F(X) \mid F \subset A^c\},$$

é aberto. Dado $F \subset A^c$, podemos tomar vizinhança simétrica V tal que $V(A) \cap V(F) = \emptyset$ pelo Teorema 2.3.13. Para tal vizinhança V , temos

$$\widehat{V}(F) = \{E \in F(X) \mid E \subset V(F) \text{ e } E \cap V(A) \neq \emptyset \forall f \in F\}.$$

Logo, se $E \in \widehat{V}(F)$, então

$$E \subset V(F) \subset A^c,$$

ou seja, $\widehat{V}(F) \cap A^- = \emptyset$. Logo, o complementar de A^- é aberto, e A^- fechado.

■

Proposição 3.4.3. [18, p. 156] Dado um espaço uniforme $[X, \mathcal{U}]$ e $x \in X$, se $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de x , então $\{\langle U_\alpha \rangle\}_{\alpha \in A}$ é um sistema fundamental de vizinhanças de $\{x\}$ em $(F(X), T_{\widehat{\mathcal{U}}})$.

Demonstração: Dada uma vizinhança qualquer de $\{x\}$ em $(F(X), T_{\widehat{\mathcal{U}}})$, sabemos que existe $V \in \mathcal{U}$ simétrica tal que $\widehat{V}(\{x\})$ está contida nessa vizinhança. Portanto, basta mostrar que é possível encontrar $U \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ satisfazendo $\langle U \rangle \subset \widehat{V}(\{x\})$. Ora,

$$\widehat{V}(\{x\}) = \{F \in F(X) \mid F \subset V(x) \text{ e } F \cap V(x) \neq \emptyset\} = \{F \in F(X) \mid F \subset V(x)\},$$

e como existe $U \in \{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ contido em $V(x)$, temos

$$\langle U \rangle = \{F \in F(X) \mid F \subset U \text{ e } F \cap U \neq \emptyset\} = \{F \in F(X) \mid F \subset U\} \subset \widehat{V}(\{x\}).$$

■

Observemos que isso vale apenas para os conjuntos $\{x\}$, portanto não estamos afirmando que os abertos na topologia de Vietoris constituem um sistema fundamental de vizinhanças na topologia uniforme. Agora passamos aos resultados análogos a 3.3.15 e 3.3.16

Teorema 3.4.4. [18, p. 157] Seja $[X, \mathcal{U}]$ um espaço uniforme. Se \mathfrak{B} está em $\text{Comp}(F(X), T_{\widehat{\mathcal{U}}})$, então

$$A = \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E$$

é um conjunto fechado em X , ou seja, está em $F(X)$.

Demonstração: Vamos mostrar que A^c é aberto. Seja $x \in A^c$. Uma vez que $\{x\}$ é compacto, pelo Teorema 2.3.13, para cada $E \in \mathfrak{B}$ existe uma vizinhança da diagonal V_E tal que $V_E(E) \cap V_E(x) = \emptyset$. Assim, podemos tomar para cada $E \in \mathfrak{B}$ a vizinhança

$$\widehat{V}_E(E)$$

de E . A coleção dessas vizinhanças cobre \mathfrak{B} , então temos uma cobertura associada e pela compacidade de \mathfrak{B} obtemos $E_1, \dots, E_n \in \mathfrak{B}$ tais que

$$\mathfrak{B} \subset \bigcup_{i=1}^n \widehat{V}_{E_i}(E_i),$$

ou seja,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^n V_{E_i}(E_i).$$

Ora, escolhemos V_{E_i} tal que $V_{E_i}(x) \cap V_{E_i}(E_i) = \emptyset$ para todo i , portanto, se definimos

$$W = \bigcap V_{E_i},$$

temos que

$$W(x) \cap A = \emptyset,$$

ou seja, uma vizinhança de x que não contém pontos de A , portanto A é fechado.

■

Teorema 3.4.5. [18, p. 157] Seja $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme. Se \mathfrak{B} está em $\text{Comp}(\text{Comp}(X), T_{\widehat{\mathcal{U}}})$, então

$$A = \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E$$

é um conjunto compacto em X , ou seja, está em $\text{Comp}(X)$.

Demonstração: Pelo Teorema 3.6.4 temos que as topologias T_V e $T_{\widehat{\mathcal{U}}}$ coincidem em $\text{Comp}(X)$, portanto o resultado é corolário de 3.3.16.

■

3.5 A Métrica de Hausdorff

Vamos definir uma métrica em $F(X)$, a chamada métrica de Hausdorff, ou distância de Hausdorff. Começamos com o conceito de distância entre um ponto e um subconjunto de um espaço métrico X qualquer:

Definição 3.5.1. [1, p. 27] Dado um espaço métrico (X, d) , se B é um subconjunto não vazio de X e $x \in X$, então a distância de x a B é dada por

$$d(x, B) = \inf_{b \in B} d(x, b).$$

□

Esta noção de distância poderia ser estendida de forma a definir a distância entre dois subconjuntos quaisquer de X simplesmente tomando o ínfimo na primeira entrada da métrica, porém a distância entre qualquer par de subconjuntos distintos de X que possuem algum ponto em comum seria zero, o que não nos permitiria distingui-los com essa noção de distância. Pior ainda, isto não nos daria uma métrica. Sendo assim, utilizaremos o supremo para resolver esse problema.

Definição 3.5.2. [1, p. 29] Dado um espaço métrico (X, d) , se A e B são subconjuntos não vazios de X , então a distância de A a B é dada por

$$\bar{d}(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B).$$

□

É importante que esta definição e o que ela implica fiquem claros, portanto ilustraremos com um exemplo.

Observação 3.5.3. Em todo exemplo até o fim desta seção denotaremos por d a métrica Euclidiana. Além disso, sempre que trabalharmos com \mathbb{R}^n , ele estará dotado dessa métrica.

Exemplo 3.5.4. Seja A um segmento de reta com comprimento 1 e sobre o eixo x de \mathbb{R}^2 . Estenda este segmento para a direita, dobrando o comprimento, e desloque-o uma unidade na direção positiva do eixo y . Chamando este novo conjunto de B , temos a seguinte situação:

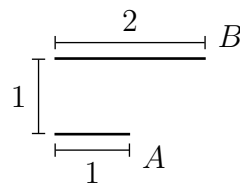


Figura 3.3: Segmentos de reta A e B .

Vamos calcular $\bar{d}(A, B)$ e $\bar{d}(B, A)$:

- $\bar{d}(A, B)$: Por definição,

$$\bar{d}(A, B) = \sup_{a \in A} \{d(a, B)\} = \sup_{a \in A} \left\{ \inf_{b \in B} d(a, b) \right\}.$$

Fixando um ponto $a \in A$, o ponto b de B que é mais próximo de a , e portanto o que satisfaz $d(a, B) = d(a, b)$, é o ponto na interseção de B e a reta ortogonal a B que passa por a , cuja distância é 1.

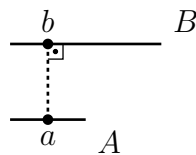


Figura 3.4: Calculando $d(a, B)$.

Portanto, para todo $a \in A$ temos que

$$\inf_{b \in B} d(a, b) = 1,$$

e isso significa que

$$\bar{d}(A, B) = 1.$$

• $\bar{d}(B, A)$:

Assim como anteriormente,

$$\bar{d}(B, A) = \sup_{b \in B} \{d(b, A)\} = \sup_{b \in B} \left\{ \inf_{a \in A} d(b, a) \right\}.$$

Este é o caso que demonstra que ainda não temos uma métrica, pois \bar{d} não é simétrica. De fato, fixado $b \in B$, existem duas possibilidades: ou existe uma reta ortogonal a A partindo de B , ou não existe. Na primeira situação, vale $d(b, A) = 1$ pela mesma discussão anterior, enquanto que na outra situação $d(b, A) > 1$ pela desigualdade triangular. De fato, para os pontos nessa segunda situação, o ponto $a \in A$ que minimiza a distância é a extremidade direita de A .

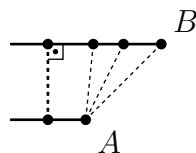


Figura 3.5: Ilustração dos dois casos quando calculamos $\bar{d}(B, A)$.

Uma vez que queremos o supremo da distância sobre B , se tomarmos o extremo direito de B obtemos

$$\bar{d}(B, A) = \sqrt{2}$$

Portanto, $\bar{d}(A, B) = 1 \neq \sqrt{2} = \bar{d}(B, A)$.

Existe uma maneira simples de resolver o problema de não termos uma métrica, o que nos leva à já mencionada métrica de Hausdorff, que apareceu pela primeira vez no livro de Felix Hausdorff *Grundzüge der Mengenlehre* publicado em 1914, e ela se apoia no fato de usarmos $\text{Comp}(X)$. Contudo, apresentaremos a métrica na forma estendida a $F(X)$. Usualmente, temos ela definida para a coleção de subconjuntos fechados e limitados de X , porém iremos além (infinitamente) e consideraremos que a métrica não precisa ser limitada, o que resulta na possível existência de conjuntos que estão a uma distância infinita um do outro.

Proposição 3.5.5. Dado um espaço métrico (X, d) , a aplicação $h : F(X) \times F(X) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$h(A, B) = \max\{\bar{d}(A, B), \bar{d}(B, A)\}$$

é uma métrica, chamada de **métrica de Hausdorff**.

Demonstração: Para mostrar que h é uma métrica, precisamos provar as três propriedades da métrica. Dados $A, B, C \in \mathcal{F}(X)$,

1. $h(A, B) = h(B, A)$.

Sai diretamente da definição.

2. $h(A, B) \geq 0$ e $h(A, B) = 0$ se e somente se $A = B$.

Uma vez que d é métrica sobre X , vale que $h(A, B) \geq 0$. Agora, para o se e somente se, observemos que se $A = B$, então para todo $a \in A$ vale $d(a, A) = 0$ e portanto $\bar{d}(A, A) = 0$. Logo,

$$h(A, B) = h(A, A) = 0.$$

Por outro lado, se $h(A, B) = 0$, então

$$\sup_{a \in A} d(a, B) = 0,$$

ou seja, para todo $a \in A$ vale

$$0 = d(a, B) = \inf_{b \in B} d(a, b).$$

Desse modo, para todo $\varepsilon > 0$ existe $b \in B$ tal que

$$d(a, b) < \varepsilon,$$

ou seja, $b \in B(a, \varepsilon)$. Logo, $a \in \bar{B} = B$, e concluímos que $A \subseteq B$. Usando que $\bar{d}(B, A) = 0$, concluímos de modo análogo que $B \subseteq A$, e portanto $A = B$.

3. $h(A, B) \leq h(A, C) + h(C, B)$.

Dado $a \in A$, observemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $c \in C$ tal que

$$d(a, c) \leq d(a, C) + \varepsilon.$$

Logo,

$$\begin{aligned} d(a, B) &= \inf_{b \in B} d(a, b) \\ &\leq \inf_{b \in B} (d(a, c) + d(c, b)) \\ &\leq d(a, C) + \varepsilon + \inf_{b \in B} d(c, b) \\ &\leq \bar{d}(A, C) + \varepsilon + \bar{d}(C, B). \end{aligned}$$

Uma vez que ε é arbitrário, podemos concluir que

$$d(a, B) \leq \bar{d}(A, C) + \bar{d}(C, B)$$

e assim

$$\bar{d}(A, B) = \sup_{a \in A} d(a, B) \leq \bar{d}(A, C) + \bar{d}(C, B).$$

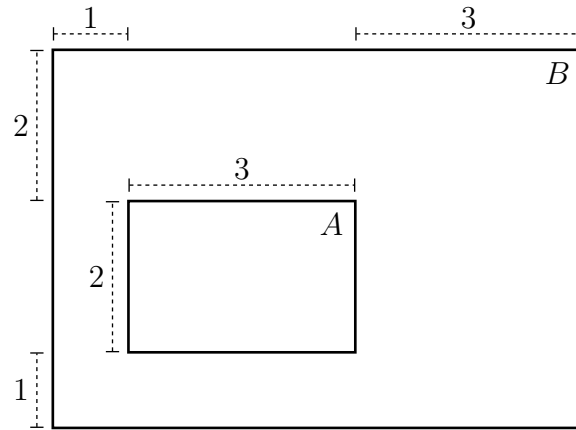
Portanto, fazendo o mesmo para $\bar{d}(B, A)$,

$$\begin{aligned} h(A, B) &= \max\{\bar{d}(A, B), \bar{d}(B, A)\} \\ &\leq \max\{\bar{d}(A, C) + \bar{d}(C, B), \bar{d}(B, C) + \bar{d}(C, A)\} \\ &\leq \max\{\bar{d}(A, C), \bar{d}(C, A)\} + \max\{\bar{d}(B, C), \bar{d}(C, B)\} \\ &= h(A, C) + h(C, B). \end{aligned}$$

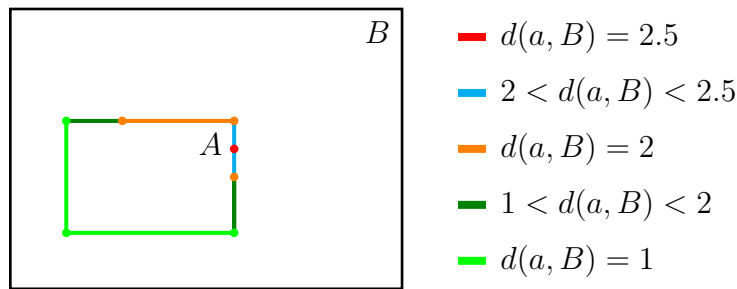


Quando $X = \mathbb{R}$, o espaço métrico $(\text{Comp}(\mathbb{R}), h)$, chamado por Barnsley de “o espaço em que os fractais vivem”. Seguimos para mais um exemplo, que facilitará a compreensão dos resultados posteriores.

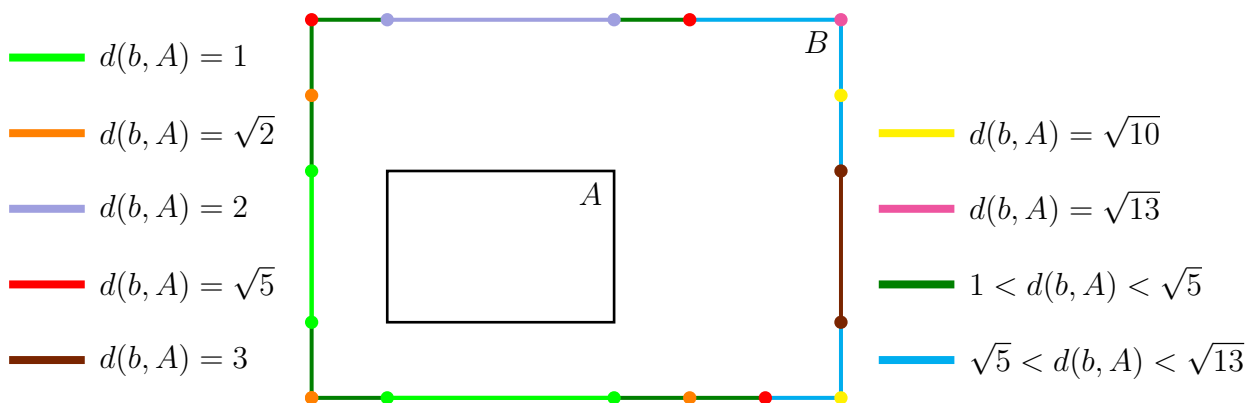
Exemplo 3.5.6. Consideremos as curvas retangulares abaixo, denotadas por A e B respectivamente. Calcularemos $h(A, B)$ mantendo em mente que A e B são apenas as curvas, sem o interior.



Vamos começar computando $\bar{d}(A, B)$. Uma vez que estamos trabalhando com curvas retangulares, é possível particionar A em conjuntos conforme a distância que seus pontos estão de B por inspeção. A seguir temos uma tal partição:



Com ela, podemos concluir que $\bar{d}(A, B) = 2,5$. Agora fazemos o mesmo para $\bar{d}(B, A)$:



Sendo assim, $\bar{d}(B, A) = \sqrt{13}$ e $h(A, B) = \sqrt{13}$.

Assim como fizemos para as topologias uniforme e de Vietoris, precisamos mostrar que a métrica de Hausdorff é admissível em $F(X)$. No caso de hiperespaços métricos, a definição de admissibilidade pode ser enunciada como

Definição 3.5.7. [18, p. 153] Se (X, T_d) é um espaço métrico, dizemos que uma métrica h_d é admissível em $F(X)$ se a aplicação $i : X \rightarrow F(X)$, $i(x) = \{x\}$ é uma isometria sobre sua imagem. \square

Proposição 3.5.8. Dado um espaço métrico (X, d) , a métrica de Hausdorff h é admissível em $F(X)$.

Demonstração: Precisamos mostrar que a aplicação inclusão $i : X \rightarrow F(X)$ é isometria. Ora, dado $x, y \in X$ vale que

$$h(i(x), i(y)) = h(\{x\}, \{y\}) = \max\{\bar{d}(\{x\}, \{y\}), \bar{d}(\{y\}, \{x\})\}.$$

Basta observar que

$$\bar{d}(\{x\}, \{y\}) = \sup_{x \in \{x\}} \inf_{y \in \{y\}} d(x, y) = d(x, y).$$

Desse modo,

$$h(i(x), i(y)) = d(x, y)$$

e temos a admissibilidade da métrica de Hausdorff. \blacksquare

Proposição 3.5.9. [18, p. 161] Seja X um espaço métrico, e seja \mathcal{U} a estrutura uniforme induzida pela métrica em X . Então, a estrutura uniforme que a métrica de Hausdorff induz em $F(X)$ é idêntica a $\tilde{\mathcal{U}}$.

Demonstração: Se (X, d) é o espaço métrico, a uniformidade induzida por d é gerada por

$$V_\varepsilon = \{(x, y) \mid d(x, y) < \varepsilon\},$$

onde $\varepsilon > 0$. Assim, temos que a coleção dos conjuntos

$$\begin{aligned} \widehat{V}_\varepsilon &= \{(E, F) \mid E \subset V_\varepsilon(F) \text{ e } F \subset V_\varepsilon(E)\} \\ &= \left\{ (E, F) \mid \begin{array}{l} \forall e \in E \exists f \in F : d(e, f) < \varepsilon \\ \forall f \in F \exists e \in E : d(f, e) < \varepsilon \end{array} \right\} \end{aligned}$$

é base da estrutura uniforme que a métrica induz em X . Por outro lado, a métrica de Hausdorff h é dada estabelecendo antes para $E, F \in F(X)$

$$\bar{d}(E, F) = \sup_{e \in E} \inf_{f \in F} d(e, f),$$

e então

$$h(E, F) = \max\{\bar{d}(E, F), \bar{d}(F, E)\}.$$

Portanto, a métrica de Hausdorff induz a uniformidade cujos elementos básicos são

$$\begin{aligned} \widehat{W}_\varepsilon &= \{(E, F) \mid h(E, F) < \varepsilon\} \\ &= \{(E, F) \mid \bar{d}(E, F) < \varepsilon \text{ e } \bar{d}(F, E) < \varepsilon\} \\ &= \left\{ (E, F) \mid \exists \delta > 0, \begin{array}{l} \forall e \in E \exists f \in F : d(e, f) < \varepsilon - \delta \\ \forall f \in F \exists e \in E : d(f, e) < \varepsilon - \delta \end{array} \right\} \end{aligned}$$

e por definição, dado $\varepsilon > 0$, $\widehat{V}_{\varepsilon/4} \subset \widehat{W}_{\varepsilon/2} \subset \widehat{V}_\varepsilon$, portanto as estruturas uniformes são iguais. \blacksquare

3.6 Relações entre as Topologias Uniforme e de Vietoris em $F(X)$

Começamos esta seção com um lema simples, que remete ao Lema 3.3.4.

Lema 3.6.1. Seja $[X, \mathcal{U}]$ um espaço uniforme, $U_1, \dots, U_n \in T_{\mathcal{U}}$ e $V \in \mathcal{U}$ simétrica. Se para algum $E \in F(X)$ vale

$$E \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset \widehat{V}(E),$$

então para cada $e \in E$ existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tal que $U_i \subset V(e)$.

Demonstração: Suponhamos que existe $e \in E$ para o qual não existe tal i . Assim, para cada i podemos tomar $x_i \in U_i \cap V(e)^c$. Uma vez que o espaço é T_1 , $F = \{x_1, \dots, x_n\}$ é fechado satisfazendo

$$F \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \quad \text{e} \quad E \not\subset V(F),$$

logo $F \notin \widehat{V}(E)$, o que é um absurdo. ■

Lema 3.6.2. [18, p. 159] Sejam $[X, \mathcal{U}]$ um espaço uniforme e $E \in F(X)$. O conjunto E é totalmente limitado se e somente se toda vizinhança de E em $T_{\mathcal{U}}$ contém uma vizinhança de E em T_V .

Demonstração: Provaremos o resultado usando vizinhanças do sistema fundamental de vizinhanças de E na topologia $T_{\mathcal{U}}$.

(\Rightarrow) : Uma vizinhança do sistema fundamental de vizinhanças de E na topologia $T_{\mathcal{U}}$ é da forma

$$\widehat{W}(E) = \{F \in F(X) \mid F \subset W(E) \text{ e } E \subset W(E)\},$$

onde $W \in \mathcal{U}$. Vamos construir um aberto da forma

$$\langle U, U_1, \dots, U_n \rangle \subset \widehat{W}(E).$$

Para isso, tomamos $V \in \mathcal{U}$ tal que $V^2 \subset W$. Dado $e \in E$, sabemos que existe aberto U_e tal que $e \in U_e \subset V(e)$. Uma vez que E é totalmente limitado, existem $e_1, \dots, e_n \in E$ tais que

$$E \subset V(e_1) \cup \dots \cup V(e_n),$$

portanto existe um aberto $U_i \subset V(e_i)$ para cada i . Se definimos

$$U = \bigcup_{e \in E} U_e,$$

vale que $E \subset U \subset V(E) \subset W(E)$ e por definição dos U_i temos $E \cap U_i \neq \emptyset$ para todo i . Logo,

$$E \in \langle U, U_1, \dots, U_n \rangle,$$

e para mostrar que $\langle U, U_1, \dots, U_n \rangle \subset \widehat{W}(E)$ basta mostrar que para todo $F \in \langle U, U_1, \dots, U_n \rangle$ vale que $E \subset W(F)$. Ora, se $F \in \langle U, U_1, \dots, U_n \rangle$, vale em particular que

$$F \subset V(E) \quad \text{e} \quad F \cap V(e_i) \neq \emptyset$$

para todo i .

Usando que dado $e \in E$ existe i tal que $e \in V(e_i)$, que existe $f \in V(e_i)$ e que pela simetria de V vale $e_i \in V(f)$, podemos concluir que

$$e \in V(e_i) \subset (V \circ V)(f) \subset W(f) \subset W(F),$$

portanto $E \subset W(F)$ e vale

$$E \in \langle U, U_1, \dots, U_n \rangle \subset \widehat{W}(E)$$

(\Leftarrow): Dado $W \in \mathcal{U}$, escolhemos $V \in \mathcal{U}$ simétrica tal que $V \circ V \subset W$. Por hipótese, existem abertos $U_1, \dots, U_n \subseteq X$ tais que

$$E \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq \widehat{V}(E).$$

Pelo Lema 3.6.1, para cada $e \in E$ existe i de modo que $U_i \subseteq V(e)$. Sendo assim, para $x \in U_i \cap E$, temos $x \in V(e)$ e pela simetria de V

$$e \in V(x).$$

Portanto,

$$U_i \subseteq V(e) \subseteq V(V(x)).$$

Agora, para qualquer outro $f \in E$ tal que $U_i \subseteq V(f)$ temos $x \in V(f)$, ou seja,

$$V(f) \subseteq V(V(x)).$$

Logo, se tomarmos $x_i \in U_i \cap E$ para cada i , vale que para todo $e \in E$ existe i tal que

$$e \in V(e) \subseteq V(V(x_i)),$$

pois existe $U_i \subseteq V(e)$. Desse modo,

$$E \subseteq \bigcup_{e \in E} V(e) \subseteq \bigcup_{i=1}^n V(V(x_i)) \subseteq \bigcup_{i=1}^n W(x_i)$$

e E é totalmente limitado. ■

Lema 3.6.3. [18, p. 159] Sejam $[X, \mathcal{U}]$ um espaço uniforme e $E \in F(X)$. Toda vizinhança de E em T_V contém uma vizinhança de E em $T_{\bar{V}}$ se e somente se para cada $F \in F(X)$ tal que $E \cap F = \emptyset$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(E) \cap F = \emptyset$.

Demonstração: (\Rightarrow): Se F é fechado, então F^c é um aberto que contém E . Por definição, $\langle F^c \rangle$ é uma vizinhança de E em T_V , e por hipótese existe uma vizinhança de E em $T_{\bar{V}}$ contida em $\langle F^c \rangle$. Podemos assumir que esta vizinhança é fundamental, ou seja, existe $V \in \mathcal{U}$ tal que

$$E \in \widehat{V}(E) \subset \langle F^c \rangle.$$

Afirmamos que $V(E) \cap F = \emptyset$. Suponhamos por absurdo que não, então existe $f \in V(E) \cap F$. O conjunto $G = E \cup \{f\}$ está em $\widehat{V}(E)$, mas não pode estar em $\langle F^c \rangle$ por possuir um ponto de F , o que é um absurdo. Logo, $V(E) \cap F = \emptyset$.

(\Leftarrow): Seja $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ uma vizinhança de E em T_V . Por definição

$$F = \left(\bigcup_{i=1}^n U_i \right)^c$$

é um conjunto fechado, então existe $V \in \mathcal{U}$ simétrica tal que

$$V(E) \cap F = \emptyset,$$

ou seja,

$$V(E) \subset \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

Para cada U_i existe $e_i \in U_i \cap E$ e W_i simétrica tal que $W_i(e_i) \subset U_i$, assim definimos

$$W = V \cap (\bigcap_i W_i).$$

Logo,

$$\begin{aligned} E \in \widehat{W}(E) &= \{G \in F(X) \mid G \subset W(E) \text{ e } E \subset W(G)\} \\ &= \{G \in F(X) \mid G \subset W(E), G \cap W(e) \neq \emptyset\} \\ &\subset \{G \in F(X) \mid G \subset \cup U_i, G \cap W(e) \neq \emptyset \forall e \in E\} \\ &\subset \{G \in F(X) \mid G \subset \cup U_i, G \cap U_i \neq \emptyset \forall i\} \\ &= \langle U_1, \dots, U_n \rangle. \end{aligned}$$

■

Usando esses dois lemas, podemos obter um resultado surpreendente: para espaços uniformes, as topologias uniforme de Vietoris no hiperespaço de compactos coincidem.

Teorema 3.6.4 (Equivalência das Topologias no Hiperespaço de Compactos). [18, p. 160]

Se $[X, \mathcal{U}]$ é um espaço uniforme, então T_V e $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$ são equivalentes em $\text{Comp}(X)$.

Demonstração: Usaremos os Lemas 3.6.2 e 3.6.3 para provar que as topologias são equivalentes. Se $F \in \text{Comp}(X)$, então F é totalmente limitado, e por 3.6.2 temos que toda vizinhança de F em $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$ contém uma vizinhança de F em T_V . Lembrando que $\text{Comp}(X) \subset F(X)$, para $E \in F(X)$ existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(F) \cap E = \emptyset$ pelo Teorema 2.3.13, então pelo Lema 3.6.3 toda vizinhança de F em T_V contém uma vizinhança de E em $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$. Portanto, as topologias são equivalentes.

■

Teorema 3.6.5 (Existência de Uniformidade Equivalente a Vietoris no Hiperespaço de Fechados). [18, p. 160]

Se X é normal e \mathcal{U} é a uniformidade compatível com a topologia da compactificação de Stone-Čech \tilde{X} de X , então as topologias T_V e $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$ são equivalentes em $F(X)$.

Demonstração: Vamos usar os Lemas 3.6.2 e 3.6.3. Primeiro, lembremos que a compactificação de Stone-Čech é um espaço de Hausdorff e compacto, portanto existe uma única uniformidade \mathcal{U} compatível com a topologia da compactificação pelo Teorema 2.3.21.

- Todo $E \in F(X)$ é totalmente limitado.

Dado $V \in \mathcal{U}$, tome $W \in \mathcal{U}$ simétrica tal que $W \circ W \subset V$. Tome a cobertura de \tilde{X}

$$\mathfrak{C} = \{W(x) \mid x \in \tilde{X}\}.$$

Pela compacidade de \tilde{X} , temos que existe uma subcobertura finita de \mathfrak{C} . Sejam $\{x_1, \dots, x_n\}$ os pontos-base das vizinhanças. Vale que

$$\{W(x_1), \dots, W(x_n)\}$$

é cobertura finita de \tilde{X} e em particular de E . Precisamos encontrar uma cobertura de E cujos pontos-base são elementos de E , mas os x_i obtidos podem estar em $\tilde{X} \setminus E$. Desse modo, usaremos as propriedades de W para encontrar uma cobertura finita de E por vizinhanças da forma $V(y)$ onde $y \in E$. Além disso, para simplificar, consideramos descartadas as vizinhanças tais que $W(x_i) \cap E = \emptyset$.

Se $x_i \in E$ definimos $e_i = x_i$, e vale

$$W(x_i) = W(e_i) \subset V(e_i).$$

Se $x_i \notin E$, podemos tomar $e_i \in E \cap W(x_i)$, e vale que se $y \in W(x_i)$, então pela simetria de W

$$y \in W(x_i) \subset (W \circ W)(e_i) \subset V(e_i).$$

Portanto, $V(e_i)$ cobre $W(x_i)$, e assim

$$\{V(e_1), \dots, V(e_n)\}$$

é cobertura finita de E por vizinhanças de pontos de E para todo $V \in \mathcal{U}$, e E é totalmente limitado. Com isso, toda vizinhança de E em $T_{\mathcal{U}}$ contém uma vizinhança de E em T_V .

- Se $E, F \in \mathcal{F}(X)$ são tais que $E \cap F = \emptyset$, então existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(E) \cap F = \emptyset$.

Sejam \overline{E} e \overline{F} o fecho de E e F em \tilde{X} , respectivamente. Afirmamos que $\overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset$, e então pela compacidade de \tilde{X} vale que eles são compactos, portanto existe $V \in \mathcal{U}$ tal que $V(\overline{E}) \cap \overline{F} = \emptyset$ e consequentemente $V(E) \cap F = \emptyset$. De fato, como X é normal, podemos usar o Lema de Urysohn (Teorema 1.9.1) para garantir a existência de uma função $g : X \rightarrow [0, 1]$ tal que $E \subset g^{-1}(0)$ e $F \subset g^{-1}(1)$. Podemos estender essa função continuamente a \tilde{X} obtendo função G , mas isso significa que $\overline{E} \cap \overline{F} = \emptyset$, caso contrário a extensão não poderia ser contínua. De fato,

$$\overline{E} \subset G^{-1}(0) \text{ e } \overline{F} \subset G^{-1}(1)$$

e $G^{-1}(0) \cap G^{-1}(1) = \emptyset$. Com isso, garantimos a existência de tal $V \in \mathcal{U}$ e toda vizinhança de E em T_V contém uma vizinhança de E em $T_{\mathcal{U}}$.

Pelos Teoremas 3.6.2 e 3.6.3, temos que as topologias são equivalentes. ■

Proposição 3.6.6. [18, p. 160] Se a estrutura uniforme de $[X, \mathcal{U}]$ é metrizável, então T_V coincide com $T_{\mathcal{U}}$ em $\mathcal{F}(X)$ se e somente se $(X, T_{\mathcal{U}})$ é compacto.

Demonstração: Se $(X, T_{\mathcal{U}})$ é compacto, todo fechado é compacto, logo, $\mathcal{F}(X) = \text{Comp}(X)$. Desse modo, por 3.6.4 as topologias coincidem. Por outro lado, se as topologias coincidem, como $[X, \mathcal{U}]$ é metrizável, vale por 4.2.1 que $(\mathcal{F}(X), T_{\mathcal{U}})$ é metrizável, portanto $(\mathcal{F}(X), T_V)$ é metrizável, e por 4.1.16 temos que $(X, T_{\mathcal{U}})$ é compacto. ■

3.7 Exemplos

Nesta seção apresentaremos alguns exemplos discutidos em [18, p. 158-159] que permitem explorar a diferença entre as topologias de Vietoris e uniforme.

Exemplo 3.7.1. Seja $X = \mathbb{R}^2$ dotado da métrica Euclidiana, que é uma estrutura uniforme em X . Tomamos a subcoleção \mathcal{D} de $\mathcal{F}(X)$ que contém todas retas horizontais do semiplano superior, isto é,

$$h_s = \{(x, s) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

e todas as retas verticais no semiplano inferior fechado, ou seja,

$$v_s = \{(s, y) \mid y \leq 0\}.$$

Observemos que os elementos de \mathcal{D} constituem uma cobertura de X por elementos disjuntos. Sendo assim, cada conjunto de \mathcal{D} constitui uma classe de equivalência, onde a relação é dada pela relação de pertencimento a um elemento, ou seja, $x \sim y$ se e somente se $x, y \in h_s$ ou $x, y \in v_s$ para o mesmo s .

Assim, podemos tomar o quociente em $X/\sim = \mathfrak{D}$ e a topologia quociente em \mathfrak{D} além das topologias de Vietoris e uniforme como subespaço de $F(X)$. Agora vamos analisar cada uma dessas topologias.

Topologia quociente em \mathfrak{D} :

Sabemos que um conjunto $U \subseteq \mathfrak{D}$ é aberto em \mathfrak{D} se a sua pré-imagem é aberta em X . Portanto, precisamos entender o que pode ser a pré-imagem. De fato, existem três casos. Primeiro, se $S_1 \subseteq \mathbb{R}_+$, temos que

$$H = \bigcup_{s \in S_1} h_s$$

é aberto se e somente se para todo ponto $(x, s) \in H$ existe uma bola de centro (x, s) e raio s' que contém o ponto e está contido em H . Logo, para que H seja aberto, deve existir s' tal que $\mathbb{R} \times (s - s', s + s') \subseteq H$. Isso significa que H é uma união de faixas horizontais no semiplano superior. Agora, se $S_2 \subseteq \mathbb{R}$, temos que

$$H = \bigcup_{s \in S_2} v_s$$

nunca pode ser aberto em \mathbb{R}^2 , pois, para $s \in S_2$, toda bola de \mathbb{R}^2 que contém $(s, 0) \in v_s$ também contém um ponto do semiplano superior. Logo, a bola não está contida em H .

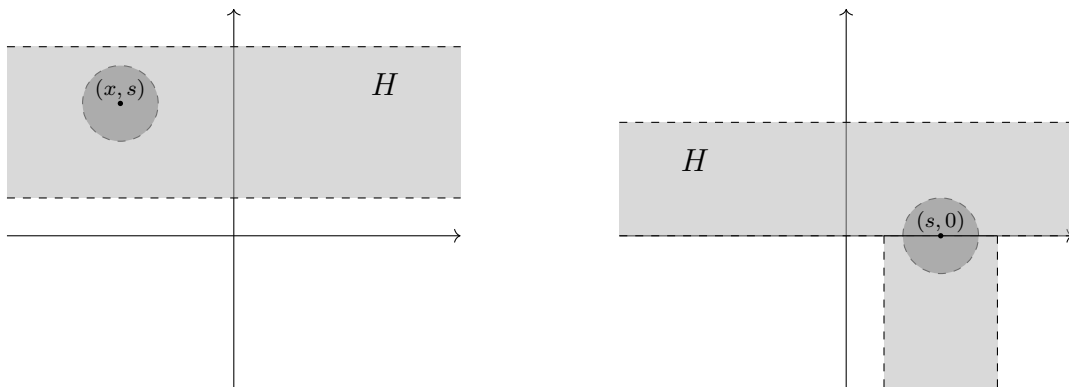


Figura 3.6: Essencialmente temos estas duas possibilidades de abertos na topologia quociente. Vizinhanças abertas dadas por tiras horizontais no semiplano superior ou vizinhanças do “tipo T ”.

Por fim, consideramos o caso em que

$$H = \left(\bigcup_{s \in S_1} h_s \right) \cup \left(\bigcup_{s \in S_2} v_s \right).$$

Se $s \in s_2$ e $y < 0$, temos (s, y) no semiplano inferior aberto e uma discussão análoga à feita para h_s mostra que existe um aberto contendo (s, y) e contido em H . Contudo, quando $y = 0$, uma bola de raio r centrada em $(s, 0)$ está contida em H se e somente se o intervalo $(0, r)$ estiver contido em S_1 . Isso nos dá uma tira horizontal no semiplano superior que se conecta a uma tira vertical no semiplano inferior, formando uma espécie de T como mostrado na figura.

Topologia uniforme em $F(X)$ e \mathfrak{D} como subespaço:

Uma vez que o espaço X é métrico, a topologia uniforme coincide com a topologia da métrica de Hausdorff em $F(X)$. Portanto, podemos analisar somente os abertos básicos induzidos pela métrica para entender a topologia de \mathfrak{D} .

Observamos que se $a = (x, s_1) \in h_{s_1}$, então $(x, s_2) \in h_{s_2}$ e $d(a, h_{s_2}) = |s_2 - s_1|$. Portanto,

$$\bar{d}(h_{s_1}, h_{s_2}) = \sup_{p \in h_{s_1}} d(p, h_{s_2}) = |s_2 - s_1|.$$

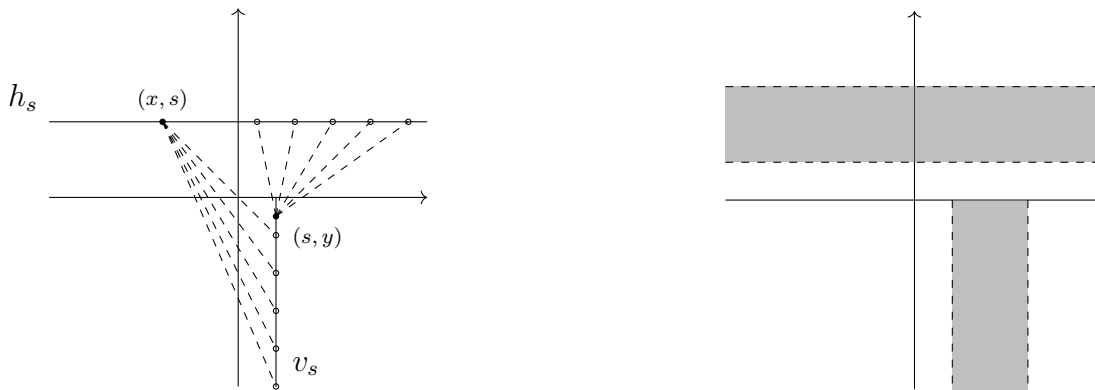
Analogamente, se $b = (s_3, y) \in v_{s_3}$, então $(s_4, y) \in v_{s_4}$ e teremos

$$\bar{d}(v_{s_3}, v_{s_4}) = |s_3 - s_4|.$$

Por fim, se $(x, s_1) \in h_{s_1}$ e $(s_3, y) \in v_{s_3}$, lembrando que $s_1 > 0 > y$,

$$\begin{aligned} \bar{d}(h_{s_1}, v_{s_3}) &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}_-^*} d((x, s_1), (s_3, y)) \\ &= \sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}_-^*} [(x - s_3)^2 + (y - s_1)^2]^{\frac{1}{2}} \\ &> \sup_{x \in \mathbb{R}} \inf_{y \in \mathbb{R}_-^*} |x - s_3| \\ &= \infty. \end{aligned}$$

De modo análogo, $\bar{d}(v_{s_3}, h_{s_1}) = \infty$. A ideia geométrica por trás dessa distância infinita é bem simples. Temos uma reta horizontal infinita, e uma semirreta vertical infinita, portanto podemos encontrar um ponto na reta horizontal que fica tão distante quanto quisermos de todos os pontos da reta vertical e vice-versa. Portanto, concluímos que abertos básicos centrados em h_s são faixas de retas horizontais centradas em h_s , enquanto que abertos básicos centrados em v_s são faixas de retas verticais centradas em v_s .



(a) Interpretação geométrica discutida acima.

(b) Os dois tipos de abertos básicos. Observemos que é possível formar a vizinhança "T" que aparece no quociente.

Figura 3.7

Topologia de Vietoris em $F(X)$ e \mathfrak{D} como subespaço:

Abertos sub-básicos na topologia de Vietoris são da forma $\langle U \rangle$ e $\langle X, V \rangle$, onde U e V são abertos em X . Observamos que $\langle U \rangle$ não é vazio apenas quando ele contém um elemento de \mathfrak{D} . Vamos tomar abertos U e V de \mathbb{R}^2 de modo a mostrar que a topologia de Vietoris é discreta.

Ora, tomemos

$$U = \left\{ (x, y) \mid -\frac{1}{|x|} < y \right\} \cup \{(0, y) \mid y \in \mathbb{R}\}.$$

Esse é um conjunto aberto. De fato, fixe $(x_1, y_1) \in U$. Se $y_1 > 0$, temos que o semiplano superior aberto está contido em U e contém (x_1, y_1) . Se $y_1 \leq 0$, defina

$$z = \begin{cases} y_1 - 1, & \text{se } x_1 = 0, \\ \frac{y_1 - \frac{1}{|x_1|}}{2}, & \text{se } x_1 \neq 0. \end{cases}$$

Note que $y_1 > z$ e $|x_1| < -1/z$ por definição de z como a média quando $x_1 \neq 0$.
Desse modo, se

$$V_1 = \{(x, y) \mid y > z\} \quad \text{e} \quad V_2 = \left\{ (x, y) \mid \frac{1}{z} < x < -\frac{1}{z} \right\},$$

então o conjunto

$$W = V_1 \cap V_2$$

é um aberto contido em U que contém (x_1, y_1) . De fato, se $(x, y) \in W$ e $x \neq 0$, uma vez que

$$\frac{1}{z} < x < -\frac{1}{z},$$

temos

$$|x| < -\frac{1}{z}.$$

Assim, lembrando que $z < 0$,

$$y > z > -\frac{1}{|x|}$$

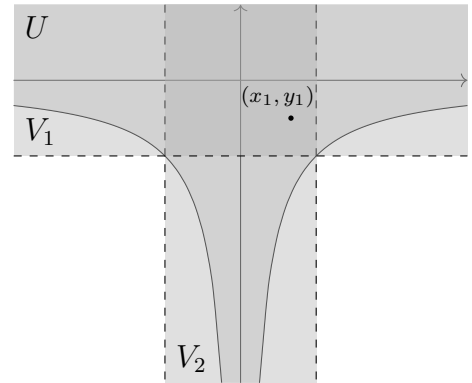


Figura 3.8: Ilustração da construção do aberto W para um ponto (x_1, y_1)

e temos $(x, y) \in U$. Se $x = 0$, $(0, y) \in U$ pela definição de U , logo $W \subseteq U$ e U é aberto. Nesse caso,

$$\langle U \rangle = \{h_s \mid s \in \mathbb{R}_+^*\} \cup \{v_0\}.$$

Portanto, se tomarmos

$$V = \{(x, y) \mid y < 1\},$$

teremos

$$\langle U \rangle \cap \langle X, V \rangle = \{v_0\}.$$

Concluimos que $\{v_0\}$ é aberto, e usando uma translação podemos mostrar que $\{v_s\}$ é aberto para todo $s \in \mathbb{R}$. Além disso, com um argumento similar, mostramos que $\{h_s\}$ também é aberto para todo $s \in \mathbb{R}_+^*$, logo a topologia de Vietoris é discreta em \mathfrak{D} .

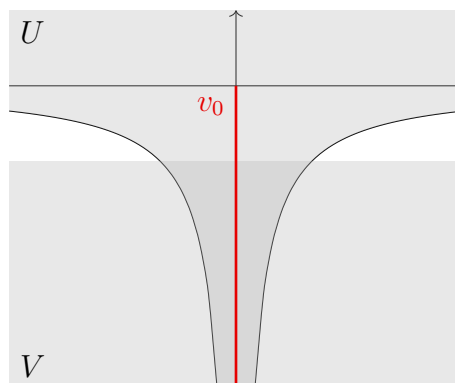


Figura 3.9: O conjunto v_0 é o único contido em U que intersecta V . Logo, $\{v_0\}$ é aberto.

.....
Com isso, podemos observar que \mathfrak{D} é conexo apenas na topologia quociente, enquanto que ele é discreto apenas na topologia de Vietoris. De fato, a coleção de semirretas verticais e das retas horizontais constitui uma cisão de \mathfrak{D} . Note que não poderíamos ter aplicado o Lema 3.6.3 diretamente, pois estamos

nos restringindo a \mathfrak{D} e esta é uma propriedade que depende de todos os elementos de $F(X)$. De fato, em $F(X)$, o gráfico da função $f(x) = -1/|x|$ é um fechado que não admite vizinhança de v_0 que não intersecta o fechado.

Exemplo 3.7.2. Seja A o gráfico da função $f(x) = 1/x$ em \mathbb{R}^2 , Y o eixo y e $X = A \cup Y$. Definimos \mathfrak{D} como a cobertura de X cujos elementos são os pontos de Y e o gráfico da função para $x > 0$ e $x < 0$, denotados por f_+ e f_- , respectivamente.

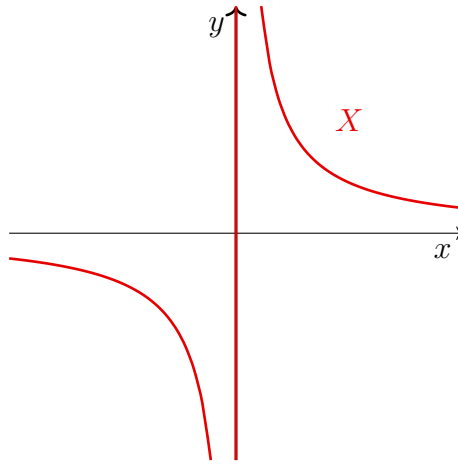


Figura 3.10: O subespaço X em vermelho. Denotamos a parte do primeiro quadrante do gráfico de f por f_+ , e no terceiro por f_- .

Novamente, temos \mathfrak{D} uma cobertura de X por conjuntos disjuntos e podemos considerar a topologia quociente em \mathfrak{D} . Primeiro, notemos que $\{f_+\}$ é aberto em X , pois se tomamos o aberto

$$U = \{(x, y) \mid x > 0\},$$

então $U \cap X = \{f_+\}$. Analogamente, $\{f_-\}$ é aberto em X também. O conjunto Y tem a mesma topologia da reta. Sendo assim, consideremos que \mathfrak{D} está dotado da topologia quociente e π é a aplicação quociente. Dado $V \subseteq \mathfrak{D}$, temos que $\pi^{-1}(V)$ é aberto se e somente se

$$\{y \mid \{y\} \in V\}$$

é aberto em Y , já que f_- e f_+ são abertos em X . Portanto, temos que abertos básicos de \mathfrak{D} correspondem a intervalos abertos em Y e os conjuntos f_- e f_+ , e \mathfrak{D} pode ser visto como (é homeomorfo à) \mathbb{R} com mais dois pontos isolados.

Já para a topologia de Vietoris, recorreremos aos abertos sub-básicos. Se U e V são abertos em X , então

$$\langle U \rangle = \{F \in \mathfrak{D} \mid F \subseteq U\}$$

só pode ser um aberto de \mathbb{R} junto, possivelmente, de f_+ ou f_- . O mesmo vale para $\langle X, V \rangle$, pois a menos de f_+ e f_- , todos os conjuntos de \mathfrak{D} são unitários. Logo, temos novamente Y com a topologia de \mathbb{R} e os outros dois pontos isolados

Por fim, vamos analisar a métrica de Hausdorff. Observemos que se $y_1, y_2 \in Y$, então pela admissibilidade da métrica

$$h(\{y_1\}, \{y_2\}) = d(y_1, y_2).$$

Portanto, a coleção dos conjuntos unitários de Y em \mathfrak{D} é também homeomorfa a \mathbb{R} . Por discussão análoga ao exemplo anterior, para todo $\{y\}$ onde $y \in Y$ temos que

$$h(\{f_+\}, \{y\}) = \infty = h(\{f_-\}, \{y\}).$$

Também temos que

$$h(\{f_+\}, \{f_-\}) = \infty,$$

portanto esses dois conjuntos são abertos e a topologia uniforme é a mesma que a de Vietoris e a induzida pelo quociente.

Exemplo 3.7.3. Seja X a reta real e $\mathfrak{B} \subseteq \mathcal{F}(X)$ a coleção dos conjuntos $\{n, 1/n\}$ com $n \in \mathbb{N}$. Por serem finitos, todo conjunto de \mathfrak{B} é totalmente limitado no espaço uniforme $(\mathcal{F}(X), \tilde{\mathcal{U}})$. Portanto, pelo Lema 3.6.2, toda vizinhança de $\{n, 1/n\}$ na topologia uniforme contém uma vizinhança de $\{n, 1/n\}$ na topologia de Vietoris. De fato, veremos que as duas topologias são iguais.

De forma geral,

$$\begin{aligned} V_r(E) &= \bigcup_{e \in E} V_r(x) \\ &= \bigcup_{e \in E} \{x \in X \mid d(e, x) < r\} \\ &= \{x \in X \mid \exists e \in E : d(e, x) < r\}. \end{aligned}$$

Logo, sendo $E = \{n, 1/n\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, quando $n \neq 1$, definimos I_1 a coleção dos i tais que se $i \in I_1$, então $n \in U_i$ e I_2 a coleção dos i tais que $1/n \in U_i$. Daí,

$$n \in W_1 = \left(\bigcap_{i \in I_1} U_i \right) \cap \left\{ \frac{1}{n} \right\}^c \quad \text{e} \quad \frac{1}{n} \in W_2 = \left(\bigcap_{i \in I_2} U_i \right) \cap \{n\}^c.$$

Portanto, podemos tomar $r \in \mathbb{R}$ tal que

$$B(n, r) \subseteq W_1 \quad \text{e} \quad B(1/n, r) \subseteq W_2.$$

Afirmamos que

$$\widehat{V}_r(E) \subseteq \langle U_1, \dots, U_n \rangle.$$

Ora,

$$\widehat{V}_r(E) = \{F \in \mathcal{F}(X) \mid F \subseteq V_r(E) \text{ e } E \subseteq V_r(F)\},$$

então, consideremos $F \in \widehat{V}_r(E)$.

- Uma vez que $F \subseteq V_r(E)$, então para todo $f \in F$ existe $e \in E$ tal que

$$d(e, f) < r.$$

Portanto, $f \in B(n, r)$ ou $f \in B(1/n, r)$. Assim,

$$F \subseteq B(n, r) \cup B(1/n, r) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i.$$

- Uma vez que $E \subseteq V_r(F)$, então para todo $e \in E$ existe $f \in F$ tal que

$$d(e, f) < r.$$

Portanto,

$$B(n, r) \cap F \neq \emptyset \quad \text{e} \quad B(1/n, r) \cap F \neq \emptyset,$$

isto é

$$F \cap U_i \neq \emptyset$$

para todo i .

Com isso, $F \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, e encontramos uma vizinhança de E na topologia uniforme contida na vizinhança de E na topologia de Vietoris. Se $n = 1$, $E = \{1\}$ e basta tomar r tal que

$$B(1, r) \subseteq \bigcap_{i=1}^n U_i.$$

Desse modo, provamos que toda vizinhança na topologia uniforme de um conjunto em \mathfrak{B} contém uma vizinhança desse conjunto na topologia de Vietoris. Portanto, as duas topologias são iguais em \mathfrak{B} .

.....
 Notemos que usamos fortemente o fato dos conjuntos de \mathfrak{B} serem finitos para conseguir mostrar que as topologias são iguais e que o Lema 3.6.2 pôde ser usado porque é uma propriedade que depende apenas do ponto "base" da vizinhança. Na verdade, o argumento funcionaria para $\text{Fin}(X)$ em geral. O interessante desse exemplo é que sabemos que

$$\bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E$$

não é um conjunto fechado em X , portanto, \mathfrak{B} não está em $\text{Comp}(F(X), T_V)$ pelo Teorema 3.3.15 ou em $\text{Comp}(F(X), T_{\tilde{V}})$ pelo Teorema 3.4.4.

3.8 Aplicação em Grupos Topológicos

Começamos observando que se G é um grupo topológico, \mathcal{U} é a estrutura uniforme natural em G e H é um subgrupo normal de G e fechado em G , então cada classe lateral gH é fechada em G , pois ℓ_g é um homeomorfismo. Sendo assim, podemos considerar G/H como uma subcoleção de $[F(G), \tilde{\mathcal{U}}]$. A pergunta é: G/H como subespaço de $[F(G), \tilde{\mathcal{U}}]$ possui a mesma topologia que G/H como espaço quociente? A resposta é sim, e provamos a seguir.

Proposição 3.8.1. [18, p. 158] Seja G um grupo topológico e H um subgrupo normal e fechado em G . Então, G/H é um grupo topológico cuja uniformidade direita (esquerda) coincide com a uniformidade de G/H considerado como subespaço de $[F(G), \tilde{\mathcal{U}}_R]$.

Demonstração: Vamos mostrar que a uniformidade $\tilde{\mathcal{U}}_R|_{G/H}$ induzida em G/H como subespaço de $F(G)$ coincide com a uniformidade \mathcal{U}_S de G/H como quociente. Sabemos que para cada vizinhança V do elemento neutro H em G/H podemos construir o conjunto

$$S_V = \{(g_1H, g_2H) \mid (g_1 \cdot g_2^{-1})H \in V\}.$$

A coleção dos S_V constitui uma base para a uniformidade \mathcal{U}_S em G/H . Agora, da mesma forma, podemos fazer isso para G com

$$R_W = \{(g, h) \mid g \cdot h^{-1} \in W\},$$

onde W é vizinhança de e . Esta é uma base para \mathcal{U}_R em G e para passar a $F(G)$ tomamos os conjuntos

$$\hat{R}_W = \{(F_1, F_2) \in F(G) \times F(G) \mid F_1 \subseteq R_W(F_2) \text{ e } F_2 \subseteq R_W(F_1)\}.$$

A coleção dos \hat{R}_W , onde W varia sobre vizinhanças de e , constitui uma base para a uniformidade em $\tilde{\mathcal{U}}_R$ em $F(G)$. Agora restringimos a G/H , obtendo

$$\hat{R}_W|_{G/H} = \{(g_1H, g_2H) \mid g_1H \subseteq R_W(g_2H) \text{ e } g_2H \subseteq R_W(g_1H)\}.$$

Observemos que $g_2H \subseteq R_W(g_1H)$ se e somente se para todo $h_2 \in H$ existe $h_1 \in H$ tal que

$$(g_1 \cdot h_1, g_2 \cdot h_2) \in R_W,$$

ou seja,

$$(g_1 \cdot h_1) \cdot (h_2^{-1} \cdot g_2^{-1}) \in W.$$

Portanto, $(g_1H, g_2H) \in \widehat{R}_W$ se e somente se para todo $h_2, h_4 \in H$ existem $h_1, h_3 \in H$ tais que

$$(g_1 \cdot h_1) \cdot (h_2^{-1} \cdot g_2^{-1}) \in W$$

e

$$(g_2 \cdot h_3) \cdot (h_4^{-1} \cdot g_1^{-1}) \in W.$$

Se π é a aplicação quociente, afirmamos que dada uma vizinhança W de e em G , então

$$S = S_{\pi(W)} \cap S_{\pi(W)}^{-1} \subseteq \widehat{R}_W|_{G/H}.$$

De fato,

$$(g_1H, g_2H) \in S \Leftrightarrow \{(g_1 \cdot g_2^{-1})H, (g_2 \cdot g_1^{-1})H\} \subseteq \pi(W),$$

mas isto ocorre se e somente se existirem $x_1, x_2 \in W$ e $y_1, y_2 \in H$ tais que

$$x_1 = (g_1 \cdot g_2^{-1}) \cdot y_1 \quad \text{e} \quad x_2 = (g_2 \cdot g_1^{-1}) \cdot y_2.$$

Portanto, para todo $h_2 \in H$ podemos escolher $h_1 = g_2^{-1} \cdot y_1 \cdot g_2 \cdot h_2$. Esse é um elemento de H , pois H é normal, e temos

$$g_1 \cdot h_1 \cdot h_2^{-1} \cdot g_2^{-1} = g_1 \cdot g_2^{-1} \cdot y_1 \in W.$$

Além disso, para todo $h_4 \in H$ podemos escolher $h_3 = g_1^{-1} \cdot y_2 \cdot g_1 \cdot h_4$, que é um elemento de H pois H é normal, e teremos

$$g_2 \cdot h_3 \cdot h_4^{-1} \cdot g_1^{-1} = g_2 \cdot g_1^{-1} \cdot y_2 \in W.$$

Desse modo, as duas condições para que (g_1H, g_2H) esteja em $\widehat{R}_W|_{G/H}$ são satisfeitas e temos $\widetilde{U}_R|_{G/H} \subseteq U_S$.

Agora, vamos mostrar que dada vizinhança V de H em G/H , temos que

$$\widehat{R}_{\pi^{-1}(V)}|_{G/H} \subseteq S_V,$$

e assim concluiremos que $U_S \subseteq \widetilde{U}_R|_{G/H}$. Ora, se

$$(g_1H, g_2H) \in \widehat{R}_{\pi^{-1}(V)}|_{G/H},$$

então para todo $h_1 \in H$ existe $h_2 \in H$ tal que

$$g_1 \cdot h_1 \cdot h_2^{-1} \cdot g_2^{-1} \in \pi^{-1}(V).$$

Daí, pela normalidade de H ,

$$g_1 \cdot h_1 \cdot h_2^{-1} \cdot g_2^{-1} = g_1 \cdot g_2^{-1} \cdot (g_2 \cdot h_1 \cdot h_2^{-1} \cdot g_2^{-1}) = g_1 \cdot g_2^{-1} \cdot h \in \pi^{-1}(V).$$

Portanto, $(g_1H, g_2H) \in S_V$, e provamos

$$\widehat{R}_{\pi^{-1}(V)}|_{G/H} \subseteq S_V.$$

Assim, U_S é a mesma uniformidade que $\widetilde{U}_R|_{G/H}$. A demonstração para a uniformidade esquerda é análoga. ■

Corolário 3.8.2. Seja G um grupo topológico e H um subgrupo normal e fechado em G . Então, G/H é um grupo topológico cuja topologia induzida pela aplicação quociente coincide com a topologia de G/H como subespaço de $[F(G), \widetilde{U}_R]$.

Agora passamos a uma aplicação dos resultados 3.4.4 e 3.4.5 a grupos topológicos.

Teorema 3.8.3. [18, p. 158] Seja G um grupo topológico, H um subgrupo compacto de G e $\pi : G \rightarrow G/H$ a aplicação quociente. Se \mathfrak{C} é um conjunto compacto em G/H , então $\pi^{-1}(\mathfrak{C})$ é um conjunto compacto em G .

Demonstração: Pelo Corolário 3.8.2, podemos considerar \mathfrak{C} como um subconjunto compacto do espaço $[\text{Comp}(G), \tilde{\mathfrak{U}}_R]$, pois cada gH é compacto. Ora,

$$\pi^{-1}(\mathfrak{C}) = \bigcup_{gH \in \mathfrak{C}} gH,$$

portanto pelo Teorema 3.4.5, $\pi^{-1}(\mathfrak{C})$ é compacto. ■

Antes de provar o último resultado usando a teoria de hiperespaços, precisamos recorrer a um lema.

Lema 3.8.4. Seja G um grupo topológico, B um subconjunto compacto de G e \mathfrak{U}_R a uniformidade direita de G . A função

$$f : [G, \mathfrak{U}_R] \longrightarrow [F(G), \tilde{\mathfrak{U}}_R]$$

$$x \longmapsto xB$$

é uma função uniformemente contínua.

Demonstração: Vamos provar que dado $\hat{R}_V \in \tilde{\mathfrak{U}}_R$, existe $R_W \in \mathfrak{U}$ tal que para todo $x \in X$

$$f(R_W(x)) \subseteq \hat{R}_V(f(x)) = \hat{R}_V(xB).$$

Novamente usaremos o fato que $F \in \hat{R}_V(xB)$ se e somente se

- para todo $f \in F$ existe $b \in B$ tal que

$$(x \cdot b) \cdot f^{-1} \in V.$$

- para todo $b \in B$ existe $f \in F$ tal que

$$f \cdot (b^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot \in V.$$

Agora, se $y \in R_W(x)$, temos que

$$x \cdot y^{-1} \in W.$$

Logo, dado $f \in yB$, existe $b_y \in B$ tal que $f = y \cdot b_y$ e vale

$$(x \cdot b_y) \cdot (b_y^{-1} \cdot y^{-1}) \in W.$$

Por outro lado, dado $b_x \in B$, se tomamos $f = y \cdot b_x \in yB$, temos

$$y \cdot b_x \cdot (b_x^{-1} \cdot x^{-1}) \in W.$$

Desse modo, se $y \in R_W(x)$, então $yB \in \hat{R}_W(xB)$. Portanto, quando $W = V$, vale que

$$f(R_V(x)) \subseteq \hat{R}_V(f(x)),$$

para toda vizinhança V de e . Uma vez que a coleção dos \hat{R}_V constitui uma base de $\tilde{\mathfrak{U}}_R$, temos que f é uniformemente contínua. ■

Teorema 3.8.5. [18, p. 158] Seja G um grupo topológico e A um subconjunto compacto de G . Se B é um subconjunto compacto (fechado) de G , então $A \cdot B$ é um conjunto compacto (fechado) de G .

Demonstração: Considere a função f do Lema 3.8.4. Uma vez que A é compacto e f é contínua, $f(A)$ é compacto em $F(G)$. Agora,

$$A \cdot B = \bigcup_{a \in A} a \cdot B = \bigcup_{a \in A} f(a) = \bigcup f(A).$$

Quando B é compacto, cada $a \cdot B$ é compacto, portanto $f(A) \in \text{Comp}(\text{Comp}(G))$ e pelo Teorema 3.4.5, concluímos que $A \cdot B$ é compacto. Quando B é fechado, $a \cdot B$ fechado, ou seja, $f(A) \in \text{Comp}(F(G))$ e pelo Teorema 3.4.4 temos $A \cdot B$ fechado. ■

Capítulo 4

Relacionando Propriedades de X e seus Hiperespaços

Definidas as topologias de nosso interesse, buscamos entender melhor como as propriedades topológicas do espaço-base influenciam os hiperespaços e como propriedades dos hiperespaços restringem os espaços-base. Isso será feito em quatro seções, e deixaremos a propriedade da conexidade por caminhos para ser discutida no capítulo seguinte. Este capítulo baseia-se principalmente nas Seções 3 e 4 do artigo *Topologies on Spaces of Subsets* [18].

Nas Seções 4.1 e 4.2 tratamos de conceitos como metrizabilidade, completude, compacidade, existência de base contável e de sistema fundamental de vizinhanças contável, primeiramente para a topologia de Vietoris e depois para a topologia uniforme. Por exemplo, veremos que:

- A compacidade de hiperespaços influencia a compacidade na topologia de Vietoris (Teorema 4.1.3).
- Metrizabilidade e existência de base contável no hiperespaço implicam que o espaço-base é compacto (Teoremas 4.1.16 e 4.1.17).
- Se o espaço-base é primeiro contável, não podemos dizer que o hiperespaço com a topologia de Vietoris é. Existe um contra-exemplo para uma afirmação presente em [18] apresentado em [22].
- Na topologia uniforme, X é completo se e somente se $F(X)$ é completo (Teorema 4.2.4).

Na Seção 4.3 tratamos dos axiomas de separação e como a validade de determinado axioma no espaço-base implica a validade de outros axiomas no hiperespaço (e vice-versa) quando estamos tratando da topologia de Vietoris. Por fim, a Seção 4.4 trata especificamente da relação da conexidade entre hiperespaços e seu espaço-base, por exemplo:

- Se X é conexo, então todo hiperespaço é conexo na topologia de Vietoris (Teorema 4.4.2).
- Se o espaço-base X não é compacto, então $F(X)$ dotado da topologia de Vietoris não é localmente conexo (Teorema 4.4.5).

4.1 Relações Entre Propriedades de X , $F(X)$ e $\text{Comp}(X)$ com a Topologia de Vietoris

A partir de agora trabalharemos apenas com a topologia de Vietoris em $F(X)$ e $\text{Comp}(X)$.

Proposição 4.1.1. Se $(F(X), T_V)$ é metrizável, então (X, T) é metrizável.

Demonstração: Seja h uma métrica em $F(X)$ compatível com T_V . Podemos definir uma métrica d em X , basta tomar

$$d(x, y) = h(\{x\}, \{y\}).$$

Agora precisamos mostrar que a topologia T_d induzida por d em X é a mesma de T . Vamos usar a aplicação

$$\begin{aligned} i : X &\longrightarrow F(X) \\ x &\longmapsto \{x\}. \end{aligned}$$

Uma vez que a topologia de Vietoris é admissível, temos que para todo conjunto

$$B_h(\{x\}, r) = \{F \in F(X) \mid h(\{x\}, F) < r\}$$

vale que

$$i^{-1}(B_h(\{x\}, r)) = \{y \in F \mid d(x, y) < r\} = B_d(x, r)$$

é aberto em (X, T) . Daí, temos que $T_d \subseteq T$. Para mostrar que $T \subseteq T_d$, mostraremos que todo aberto de T pode ser escrito como união de abertos de T_d . Dado aberto $U \in T$, temos que

$$\langle U \rangle \in T_V,$$

portanto, pelo fato de T_V ser metrizável, para cada $F \in \langle U \rangle$ existe $r_F > 0$ tal que

$$B_h(F, r_F) \subseteq \langle U \rangle.$$

Assim, vale em particular que para todo $x \in U$

$$B_h(\{x\}, r_{\{x\}}) \subseteq \langle U \rangle,$$

ou seja,

$$B_d(x, r_{\{x\}}) = i^{-1}(B_h(x, r_{\{x\}})) \subseteq i^{-1}(\langle U \rangle) = U.$$

Portanto

$$U = \bigcup_{x \in U} B_d(x, r_{\{x\}}),$$

e $T \subseteq T_d$, provando a igualdade das topologias e que (X, T) é metrizável. ■

Teorema 4.1.2. [18, p. 161] Se (X, T) é compacto, então $(F(X), T_V)$ é compacto.

Demonstração: Vamos usar o Lema da Sub-base de Alexander (Teorema 1.5.5) para provar o resultado. Lembremos que uma sub-base para $(F(X), T_V)$ é composta por conjuntos da forma

$$\langle U \rangle \quad \text{e} \quad \langle X, V \rangle,$$

onde $U, V \in T$. Dada uma cobertura da forma

$$\mathfrak{C} = \{\langle U_\alpha \rangle, \langle X, V_\beta \rangle\},$$

pode ocorrer

$$X = \bigcup_{\beta} V_\beta \quad \text{ou} \quad X \neq \bigcup_{\beta} V_\beta.$$

No primeiro caso, temos que existe uma subcobertura finita $\{V_1, \dots, V_n\}$ de X , e por definição,

$$\bigcup_{i=1}^n \langle X, V_i \rangle = \bigcup_{i=1}^n \{F \in F(X) \mid F \cap V_i \neq \emptyset\}$$

é uma cobertura de $F(X)$, pois $\{V_1, \dots, V_n\}$ é cobertura de X , e consequentemente, para todo $F \in F(X)$ existe i tal que $F \cap V_i \neq \emptyset$. Se $\{V_\beta\}$ não cobre X , tomamos o aberto

$$V = \bigcup_{\beta} V_{\beta},$$

e assim V^c é um fechado que não está em

$$\bigcup_{\beta} \langle X, V_{\beta} \rangle.$$

Portanto, existe $U \in \{U_{\alpha}\}_{\alpha}$ tal que

$$V^c \in \langle U_{\alpha} \rangle = \{F \in F(X) \mid F \subset U_{\alpha}\}.$$

Desse modo, $V^c \subset U$ e

$$X = U \cup \left(\bigcup_{\beta} V_{\beta} \right).$$

Agora, sim, temos uma cobertura de X e podemos obter uma subcobertura finita que deve ser da forma $\{U, V_1, \dots, V_n\}$. Novamente, por definição,

$$F(X) = \langle U \rangle \cup \left(\bigcup_{i=1}^n \langle X, V_i \rangle \right),$$

e concluímos que $F(X)$ é compacto. ■

A recíproca do resultado também vale, contudo provaremos algum um pouco mais forte.

Teorema 4.1.3. [18, p. 161] Se existe algum \mathcal{G} tal que $\text{Fin}_1(X) \subseteq \mathcal{G} \subseteq F(X)$ e \mathcal{G} é compacto como subespaço de $(F(X), T_V)$, então (X, T) é compacto.

Demonstração: Dada uma cobertura $\{V_{\alpha}\}$ de X , tomemos a cobertura

$$\{\langle X, V_{\alpha} \rangle \cap \mathcal{G}\}$$

de \mathcal{G} . Da compacidade, temos que existe uma subcobertura finita de \mathcal{G} cujos elementos são

$$\langle X, V_1 \rangle, \dots, \langle X, V_n \rangle.$$

Ora, para todo $x \in X$, temos $\{x\} \in \mathcal{G}$, portanto $x \in V_i$ para algum i , e assim $\{V_1, \dots, V_n\}$ é subcobertura finita de X , e X é compacto. ■

A seguir, tratamos acerca da compacidade local de $F(X)$. O material consta no artigo principal [18], contudo seguiremos as correções apresentadas no artigo [5]. Em [18], Michael afirma que $F \in F(X)$ possui vizinhança compacta se e somente se existe aberto A tal que $F \subset A$ e \bar{A} é compacto. Infelizmente ele apresenta apenas uma ideia de demonstração, e em [5] os autores afirmam que esta proposição está errada. Para que seja válida, é necessário que o espaço seja regular, contudo não é apresentado um contra-exemplo no caso em que X não é regular. Michael também faz outra afirmação incorreta, que diz que um espaço X é localmente compacto se e somente se $F(X)$ é localmente compacto, porém o mesmo artigo [5] afirma que, na verdade, temos isso quando X for regular, e que inclusive este era um resultado conhecido entre os especialistas da área na época.

Para $A \subseteq X$, retomaremos a seguinte notação:

$$A^+ = \{F \in F(X) \mid F \subseteq A\} \quad \text{e} \quad A^- = \{F \in F(X) \mid F \cap A \neq \emptyset\}.$$

Lema 4.1.4. [5, p. 585] Seja X um espaço regular, $n \in \mathbb{N}$ e $M, M_1, \dots, M_n \subseteq X$ com

$$E = M^+ \cap M_1^- \cap \dots \cap M_n^- \neq \emptyset.$$

Se E é compacto em $F(X)$, então M é compacto e fechado.

Demonstração: Vamos usar um argumento com redes. Primeiro, precisaremos mostrar que M é fechado, para depois conseguir mostrar que é compacto. Observemos que pelo fato de termos $E \neq \emptyset$, se $F \in E$, então

$$F \subseteq M \quad \text{e} \quad F \cap M_i \neq \emptyset,$$

e assim vale sempre $M \cap M_i \neq \emptyset$. Portanto, podemos tomar $x_i \in M \cap M_i$, o que nos garante

$$\{x_1, \dots, x_n\} \in E.$$

M é fechado: Suponhamos, por absurdo que M não é fechado. Nesse caso, existe uma rede $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset M$ que converge a $a \in X \setminus M$. Definimos

$$A_\lambda = \{x_1, \dots, x_n, a_\lambda\} \in E,$$

e então $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ é uma rede em E . Afirmamos que

$$(A_\lambda) \rightarrow A = \{x_1, \dots, x_n, a\}.$$

Ora, pelo fato de X ser regular, temos $F(X)$ Hausdorff por 4.3.3, então E é fechado e basta provar que A é ponto limite da rede para concluir que $A \in E$. Consideremos um aberto sub-básico em $F(X)$ que contém A . Ele é da forma

$$\langle U \rangle \quad \text{ou} \quad \langle X, V \rangle,$$

onde U, V são abertos em X . Logo, se

$$A \in \langle U \rangle = \{F \in F(X) \mid F \subset U\},$$

temos $a \in U$, e conseqüentemente existe λ_0 tal que se $\lambda \geq \lambda_0$ vale $a_\lambda \in U$, ou seja, se $\lambda \geq \lambda_0$ temos

$$\{x_1, \dots, x_n, a_\lambda\} \in \langle U \rangle.$$

Se

$$A \in \langle X, V \rangle = \{F \in F(X) \mid F \cap V \neq \emptyset\},$$

podemos ter $a \in V$ ou $x_i \in V$. No primeiro caso a discussão é a mesma que a anterior, enquanto que no segundo, se $x_i \in V$,

$$x_i \in \{x_1, \dots, x_n, a_\lambda\} \cap V$$

para todo λ e temos

$$\{x_1, \dots, x_n, a_\lambda\} \in \langle X, V \rangle.$$

Assim, concluímos que todo aberto sub-básico contém A_λ quando $\lambda \geq \lambda_0$ para algum λ_0 . Ora, abertos básicos são a interseção finita de abertos sub-básicos, portanto, dado aberto básico, ele pode ser escrito da forma

$$\langle U_1 \rangle \cap \langle X, U_2 \rangle \cap \dots \cap \langle X, V_n \rangle$$

e para cada um desses abertos sub-básicos existe λ_i tal que a rede está contida nele se $\lambda \geq \lambda_i$. Tomando

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\},$$

a rede estará no aberto básico sempre que $\lambda \geq \lambda_0$ e provamos que (A_λ) converge a A . Uma vez que $(A_\lambda) \subseteq E$ e E é fechado, devemos ter $A \in E$, o que é absurdo, pois $a \notin M$.

M é compacto: Suponhamos por absurdo que M não é compacto, ou seja, que existe uma rede $(a_\lambda)_{\lambda \in \Lambda} \subset M$ que não possui ponto de acumulação em M . Como M é fechado, isso significa que para todo $x \in X$ existe uma vizinhança W_x de x e $\lambda_0 \in \Lambda$ para os quais

$$a_\lambda \notin W_x$$

para todo $\lambda \geq \lambda_0$. Construimos a rede $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ do mesmo modo que antes e mostraremos que se (a_λ) não possui ponto de acumulação, então (A_λ) não pode ter ponto de acumulação, o que é um absurdo, pois

$$(A_\lambda) \subset E$$

e E é compacto. Para isso, mostramos que não existe sub-rede de (A_λ) que converge a qualquer $F \in F(X)$. Temos dois casos

- Se $F \subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$,

$$V = \langle W_{x_1} \cup \dots \cup W_{x_n} \rangle$$

é uma vizinhança de F , porém $a_\lambda \notin W_{x_i}$ para todo i a partir de algum λ_0 , por (a_λ) não admitir sub-rede convergente. Desse modo, $(A_\lambda) \not\subseteq V$ se $\lambda \geq \lambda_0$, e, portanto, não pode existir sub-rede de (A_λ) convergindo a F .

- Se $F \not\subseteq \{x_1, \dots, x_n\}$, podemos tomar vizinhança W_x de $x \in F \setminus \{x_1, \dots, x_n\}$ tal que

$$x_i \notin W_x$$

para todo i , pois $\{x_1, \dots, x_n\}$ é finito e X é regular e T_1 , portanto, Hausdorff. Daí,

$$\{x_1, \dots, x_n, a_\lambda\} \notin \langle X, W_x \rangle,$$

para todo λ maior que algum λ_0 , e assim (A_λ) não pode possuir sub-rede convergente a F . ■

Este Lema pode ser visto como a recíproca da Proposição 3.3.2, pois quando X é regular, temos pelo Teorema 4.3.3 que $F(X)$ é Hausdorff, portanto compactos em $F(X)$ são fechados, ou seja, E será além de compacto, fechado.

Teorema 4.1.5. [5, p. 585] Seja X um espaço regular e $F \in F(X)$. Temos que F possui vizinhança compacta em $F(X)$ se e somente se existe um aberto $A \subseteq X$ com $F \subseteq A$ tal que \overline{A} é compacto.

Demonstração: Suponhamos em primeiro lugar que $A \subseteq X$ com $F \subseteq A$ e \overline{A} compacto. Pela Proposição 3.3.2, temos que \overline{A}^+ é compacto. Ora, $A^+ = \langle A \rangle$ é aberto e

$$F \in \langle A \rangle \subseteq \langle \overline{A} \rangle = \overline{A}^+,$$

que é uma vizinhança compacta de F , ou seja, F possui vizinhança compacta.

Reciprocamente, suponha que F possui vizinhança compacta V em $F(X)$. O espaço X é regular, logo $F(X)$ é de Hausdorff e V é fechado em $F(X)$. Uma vez que todo aberto contém um aberto básico, temos que existem U, U_1, \dots, U_n abertos tais que

$$F \in U^+ \cap U_1^- \cap \dots \cap U_n^- \subseteq V$$

e

$$\overline{U^+ \cap U_1^- \cap \dots \cap U_n^-}$$

é um compacto.

Para cada U_i tome $f_i \in F \cap U_i$. Uma vez que $F, \{f_1\}, \dots, \{f_n\}$ são fechados, temos que $F^+, \{f_1\}^-, \dots, \{f_n\}^-$ são fechados. Por definição

$$F^+ \cap \{f_1\}^- \cap \dots \cap \{f_n\}^- \subset \overline{U^+ \cap U_1^- \cap \dots \cap U_n^-}$$

é fechado, portanto, compacto. Pelo Lema 4.1.4 concluímos que F é compacto.

Com isso, podemos encontrar uma vizinhança compacta de F em X . De fato, dado que X é regular e F é compacto, existe aberto A com

$$F \subseteq A \subseteq \overline{A} \subseteq U$$

Novamente usando o Lema 4.1.4, notamos que

$$\overline{A}^+ \cap \{f_1\}^- \cap \dots \cap \{f_n\}^- \subset \overline{U^+ \cap U_1^- \cap \dots \cap U_n^-}$$

é fechado, portanto, compacto e \overline{A} é uma vizinhança compacta de F em X tal que $F \subset A$. ■

Observemos que ao longo da demonstração provamos que se um ponto de $F(X)$ possui vizinhança compacta, então ele deve ser compacto. Isso antecipa o resultado que garante que $\text{Comp}(X)$ é aberto em $F(X)$, como veremos na Proposição 4.1.9.

Corolário 4.1.6. [5, p. 586] Se X é um espaço regular, então são equivalentes

- a) X é localmente compacto.
- b) Para todo $x \in X$, $\{x\}$ possui vizinhança compacta em $F(X)$.

Demonstração: Se X é localmente compacto, todo ponto possui vizinhança compacta, portanto $\{x\}$ possui vizinhança compacta pelo Teorema 4.1.5. Pelo mesmo teorema, temos que se $\{x\}$ possui vizinhança compacta, então x possui vizinhança compacta em X . Uma vez que isso pode ser feito para todo ponto $x \in X$, temos X localmente compacto. ■

Corolário 4.1.7. [5, p. 586] Se X é um espaço regular, são equivalentes

- a) X é compacto.
- b) $F(X)$ é compacto.
- c) $F(X)$ é localmente compacto.
- d) X possui vizinhança compacta em $F(X)$.

Demonstração:

- a) \Rightarrow b)
Vale pelo Teorema 4.1.2.
- b) \Rightarrow c)
Todo espaço compacto é localmente compacto.
- c) \Rightarrow d)
 X é um ponto de $F(X)$, portanto possui vizinhança compacta em $F(X)$.
- d) \Rightarrow a)
É consequência do Teorema 4.1.5.

Lema 4.1.8. [18, p. 162] Se X é localmente compacto e $F \in \text{Comp}(X)$, então existe um aberto U que contém F tal que \overline{U} é compacto. ■

Demonstração: Dado $F \in \text{Comp}(X)$, para cada $f \in F$ existe uma vizinhança aberta V_f com fecho compacto. Cobrimos F por essas vizinhanças, e pela compacidade temos $f_1, \dots, f_n \in F$ tais que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^n V_{f_i}.$$

Uma vez que $\overline{V_{f_i}}$ é compacto, vale que

$$U = \bigcup_{i=1}^n V_{f_i}$$

é aberto com \overline{U} compacto e $F \subseteq U$. ■

Proposição 4.1.9. [18, p. 162] Se X é localmente compacto, então $\text{Comp}(X)$ é aberto em $F(X)$.

Demonstração: Pelo Lema 4.1.8, dado $F \in \text{Comp}(X)$ existe aberto U contendo F tal que \overline{U} é compacto. Agora, todo fechado contido em U é compacto, portanto

$$U^+ = \{F \in F(X) \mid F \subset U\}$$

contém apenas compactos, logo este é um aberto contido em $\text{Comp}(X)$. Uma vez que isso pode ser feito para cada $F \in \text{Comp}(X)$, temos que $\text{Comp}(X)$ é aberto. ■

Proposição 4.1.10. [18, p. 162] X é separável se e somente se $F(X)$ é separável.

Demonstração: Se $F(X)$ é um espaço separável, então existe subconjunto enumerável denso

$$\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Assim, dado $x \in X$, para todo aberto U que contém x temos

$$\{x\} \in \langle U \rangle.$$

Portanto, existe n tal que

$$F_n \in \langle U \rangle,$$

ou seja,

$$F_n \subset U.$$

Para cada n , tome elemento $x_n \in F_n$. Para todo $x \in X$ e aberto U contendo x , existe n tal que

$$x_n \in U,$$

logo o conjunto $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ é denso em X e X é separável.

Se X é separável, seja

$$Y = \{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

um conjunto enumerável denso. Temos que

$$\text{Fin}(Y)$$

é enumerável e afirmamos que ele é denso em $F(X)$. Dado aberto básico

$$\langle U_1, \dots, U_m \rangle,$$

onde U_i é aberto de X , para cada i podemos tomar $x_{n_i} \in Y$ tal que $x_{n_i} \in U_i$. Assim,

$$\{x_{n_1}, \dots, x_{n_m}\} \in \text{Fin}(Y)$$

e vale

$$\{x_{n_1}, \dots, x_{n_m}\} \subset \bigcup_{i=1}^m U_i \quad \text{e} \quad \{x_{n_1}, \dots, x_{n_m}\} \cap U_i \neq \emptyset$$

para todo i , ou seja,

$$\{x_{n_1}, \dots, x_{n_m}\} \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle.$$

■

Proposição 4.1.11. [18, p. 162] Um espaço X é segundo-contável se e somente se $\text{Comp}(X)$ é segundo-contável.

Demonstração: Suponhamos que $\text{Comp}(X)$ é segundo-contável, ou seja, que existe uma base $\mathcal{B}' = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ para a topologia $(\text{Comp}(X), T_V)$. Observemos que de modo análogo à Proposição 3.2.3, podemos provar que

$$\begin{aligned} i: X &\longrightarrow \text{Comp}(X) \\ x &\longmapsto \{x\} \end{aligned}$$

é um homeomorfismo sobre sua imagem. Assim, para cada $n \in \mathbb{N}$ temos $i^{-1}(U_n)$ aberto e afirmamos que a coleção

$$\{i^{-1}(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

constitui uma base enumerável para a topologia de X . Ora, dado aberto $V \subset X$, temos que $\langle V \rangle$ é aberto em $\text{Comp}(X)$, portanto

$$\langle V \rangle = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$$

para alguma coleção $\Lambda \subset \mathbb{N}$. Uma vez que

$$V = i^{-1}(\langle V \rangle) = i^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} i^{-1}(U_\lambda),$$

concluimos que todo aberto de X pode ser escrito como união de elementos da forma $i^{-1}(U_n)$, portanto a coleção desses elementos é uma base enumerável para X e X é segundo-contável.

Agora suponhamos que X possui uma base enumerável

$$\mathcal{B} = \{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}.$$

Vamos mostrar que, para cada F em um aberto básico

$$\langle V_1, \dots, V_m \rangle,$$

existe coleção $J_F \subset \mathbb{N}$ finita tal que

$$F \in \langle U_j \rangle_{j \in J_F} \subset \langle V_1, \dots, V_m \rangle.$$

Desse modo, provaremos que

$$\langle V_1, \dots, V_m \rangle$$

pode ser escrito como união de abertos da forma

$$\langle U_j \rangle_{j \in J}$$

onde $J \subset \mathbb{N}$ é finito, e a coleção desses conjuntos constitui uma base enumerável para a topologia de Vietoris em $\text{Comp}(X)$.

Dado

$$F \in \langle V_1, \dots, V_m \rangle,$$

sabemos que

$$F \subset \bigcup_{k=1}^m V_k,$$

e por termos $\{U_n\}$ base enumerável em X , vale que existe subconjunto $\Lambda \subset \mathbb{N}$ tal que

$$\bigcup_{k=1}^m V_k = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda.$$

Em particular, esta é uma cobertura de F , que é compacto, portanto existe $\Lambda_F \subset \Lambda$ finito tal que

$$F \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda_F} U_\lambda \subset \bigcup_{k=1}^m V_k.$$

Ainda não podemos afirmar que

$$\langle U_\lambda \rangle_{\lambda \in \Lambda_F} \subseteq \langle V_1, \dots, V_m \rangle,$$

pois, em vista do Lema 3.3.4, precisamos ter também que para todo V_i exista $\lambda \in \Lambda_F$ tal que $U_\lambda \subset V_i$ para valer a inclusão. Caso para algum $i \in \{1, \dots, m\}$ não exista $\lambda \in \Lambda_F$ tal que $U_\lambda \subset V_i$, usamos novamente que $\{U_n\}$ é base enumerável para tomar um elemento U_k tal que $U_k \subseteq V_i$ e adicionamos este elemento ao conjunto $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda_F}$. Observemos que isto pode ser feito escolhendo U_k tal que $U_k \cap F \neq \emptyset$. Fazendo isso para todo i que for necessário, obtemos uma nova coleção $\{U_j\}_{j \in J_F}$, que é finita, e que satisfaz

$$F \in \langle U_j \rangle_{j \in J_F} \subseteq \langle V_1, \dots, V_m \rangle.$$

Assim, concluímos que $\text{Comp}(X)$ é segundo-contável. ■

Observemos que com uma demonstração também análoga à anterior, é possível provar a seguinte proposição:

Proposição 4.1.12. Se $(F(X), T_V)$ é segundo-contável, então X é segundo-contável.

Observemos que a outra direção depende da compacidade.

Em [18], Michael afirma que também vale a equivalência para a propriedade de ser primeiro-contável, contudo Smithson apresenta em [22] um contra-exemplo que prova que nem sempre a propriedade de ser primeiro-contável passa do espaço-base para o hiperespaço de compactos. Antes de apresentar o contra-exemplo, mostramos a direção válida.

Proposição 4.1.13. [18, p. 162] Se $\text{Comp}(X)$ é primeiro-contável, então X é um espaço primeiro-contável.

Demonstração: A demonstração é similar ao caso segundo-contável. Começamos supondo que $\text{Comp}(X)$ é primeiro-contável, ou seja, que existe um sistema fundamental de vizinhanças contável para cada ponto de $\text{Comp}(X)$. Usando que

$$\begin{aligned} i: X &\longrightarrow \text{Comp}(X) \\ x &\longmapsto \{x\} \end{aligned}$$

é um homeomorfismo sobre sua imagem, dado um sistema fundamental de vizinhanças $\{U_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ do ponto $\{x\}$, afirmamos que a coleção

$$\{i^{-1}(U_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$$

constitui um sistema fundamental de vizinhanças do ponto $x \in X$. Ora, dada vizinhança V de x , temos que $\langle V \rangle$ é vizinhança de $\{x\}$ em $\text{Comp}(X)$, portanto existe n tal que

$$\{x\} \in U_n \subset \langle V \rangle.$$

Uma vez que

$$V = i^{-1}(\langle V \rangle) \supset i^{-1}(U_n),$$

concluimos que toda vizinhança V de x contém vizinhança de x da forma $i^{-1}(U_n)$ para algum n . Logo, $\{i^{-1}(U_n)\}$ é sistema fundamental de vizinhanças de x e X é primeiro-contável. ■

Agora vamos ao contra-exemplo. Tome o espaço X composto por dois círculos distintos concêntricos em \mathbb{R}^2 . Denotemos o círculo interior por C_1 e o círculo exterior por C_2 . Definimos uma topologia em X a partir da sub-base cujos elementos são de dois tipos:

- tipo 1: pontos em C_2 .
- tipo 2: intervalo em C_1 junto de sua projeção radial em C_2 a menos do ponto médio da projeção em C_2 .

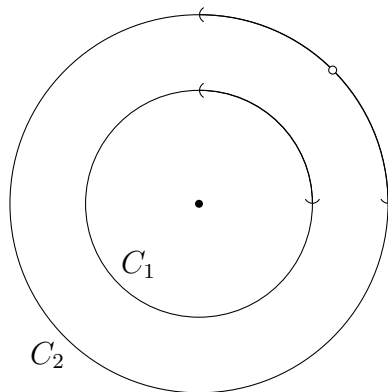


Figura 4.1: Aberto do tipo 2. Em vista da discussão a seguir, temos dois intervalos em C_2 : $(0, \pi/4)$ e $(\pi/4, \pi/2)$.

Este espaço X é primeiro-contável. Dado ponto $x \in C_2$, o próprio ponto é aberto, portanto, o próprio ponto constitui um sistema fundamental de vizinhanças dele. Agora, dado um ponto em C_1 , precisamos entender o que são abertos básicos que o contém. A partir da definição da sub-base, temos que se A é um aberto básico que contém $x \in C_1$, temos que $A \cap C_1$ é um intervalo em C_1 . Assim, a topologia relativa em C_1 é a mesma que a topologia induzida pela topologia euclidiana em \mathbb{R}^2 , que é primeiro-contável.

Vale também que este é um espaço de Hausdorff e compacto. Para a compacidade, usaremos o Lema de Alexander 1.5.5. Observemos que, dada uma cobertura \mathfrak{C} de X composta por elementos da sub-base, temos uma cobertura de C_1 associada, composta por intervalos. Com a topologia relativa, C_1 é compacto, portanto existe uma subcoleção finita

$$\{V_1, \dots, V_n\} \subset \mathfrak{C}$$

que cobre C_1 . Esta subcoleção deixa de cobrir no máximo n pontos de C_2 , portanto podemos escolher $U_1, \dots, U_n \in \mathfrak{C}$, não necessariamente distintos, que cobrem esses pontos, obtendo uma subcobertura finita de \mathfrak{C} , provando a compacidade.

Mostraremos que $\text{Comp}(X)$ não é primeiro-contável. Definimos $F \subset X$ como o conjunto composto por um intervalo fechado em C_1 , isto é, $[a, b]$, com $a \neq b$, e sua projeção radial em C_2 . Este é um conjunto fechado em X , pois $F^c \cap C_1$ é um intervalo aberto em C_1 , portanto podemos projetar radialmente em C_2 e cobrir o ponto médio ausente em C_2 com o aberto composto pelo próprio ponto.

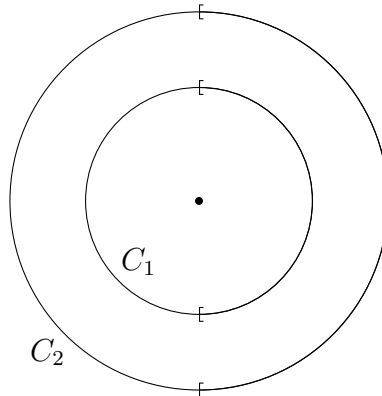


Figura 4.2: Conjunto F

Como F é fechado, temos F compacto, ou seja, $F \in \text{Comp}(X)$. Observemos que se $f \in F \cap C_2$,

$$F \in \langle X, \{f\} \rangle.$$

Além disso, se $f_1 \neq f_2$,

$$\langle X, \{f_1\} \rangle \cap \langle X, \{f_2\} \rangle^c \neq \emptyset,$$

ou seja, para cada $f \in F \cap C_2$ temos uma vizinhança da forma $\langle X, \{f\} \rangle$ diferente que não está contida em nenhuma das outras da mesma forma. Além disso, se

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset \langle X, \{f\} \rangle,$$

então $U_i = \{f\}$ para algum i .

Logo, se houvesse um sistema fundamental de vizinhanças de F contável, poderíamos escrever $C_2 \cap F$ como uma união enumerável de conjuntos finitos, o que é um absurdo.

À primeira vista, o contra-exemplo acima pode parecer totalmente artificial ou uma simples coincidência. Contudo, o próximo Teorema mostra que não é tanto assim.

Teorema 4.1.14. [22, p. 326] Seja X um espaço tal que todo subconjunto compacto é regular. Se $(\text{Comp}(X), T_V)$ é primeiro-contável, então cada subespaço compacto de X é separável na topologia relativa.

Demonstração: Seja K um subconjunto compacto de X . Uma vez que $\text{Comp}(X)$ é primeiro-contável, existe um sistema fundamental de vizinhanças contável de K que denotaremos por $\mathcal{B}(K)$. Toda vizinhança de K contém um aberto básico que contém K , portanto, podemos assumir sem perda de generalidade que os elementos de $\mathcal{B}(K)$ são da forma

$$\langle U_1^n, \dots, U_{m(n)}^n \rangle,$$

onde o n indica que este aberto está contido na n -ésima vizinhança de uma enumeração fixada de $\mathcal{B}(K)$. Para cada U_i^n existe um $a_{i,n} \in K \cap U_i^n$, então tomamos para cada $i \in \{1, \dots, m(n)\}$ um desses elementos e construímos o conjunto

$$A_m = \{a_{i,m}\}.$$

Afirmamos que o conjunto

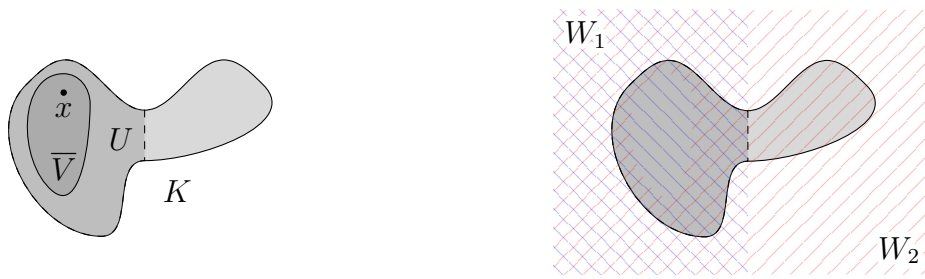
$$A = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} A_m,$$

que é enumerável, é denso em K . De fato, dado $x \in K$, seja U um aberto em K (na topologia relativa) contendo x . Pela regularidade de K , existe um aberto V tal que

$$x \in V \subseteq \bar{V} \subseteq U.$$

Logo, podemos tomar $W = \bar{V}^c$ que será um aberto em K . Portanto, existem abertos W_1 e W_2 em X tais que

$$U = K \cap W_1 \quad \text{e} \quad W = K \cap W_2.$$



(a) Compacto K , aberto U e $\bar{V} \subseteq U$.

(b) Abertos W_1 e W_2 associados à U e \bar{V}^c respectivamente.

Figura 4.3

Pela definição de W_1 e W_2 , temos que

$$K \in \langle W_1, W_2 \rangle,$$

portanto deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\langle U_1^n, \dots, U_{m(n)}^n \rangle \subseteq \langle W_1, W_2 \rangle.$$

Pelo Lema 3.3.4, existe $U_i^n \subseteq W_1$. Uma vez que $A \subseteq K$,

$$\emptyset \neq A \cap U_i^n \cap W_1 = A \cap U_i^n \cap W_1 \cap K = A \cap U_i^n \cap U,$$

temos que $U \cap A \neq \emptyset$ e A é denso em K . ■

Antes de retornar ao artigo de Michael, vamos precisar de um lema.

Lema 4.1.15. [11, p. 12] Se (Y, T) é um espaço discreto infinito, então $(F(Y), T_V)$ não possui base contável.

Demonstração: Seja \mathcal{B} uma base para T_V . Observemos que dado aberto (e fechado) $A \subset Y$, temos que $\langle A \rangle$ é aberto em $F(Y)$, portanto existe elemento da base B_A tal que

$$A \in B_A \subset \langle A \rangle.$$

Isso pode ser feito para todo aberto $A \subset Y$, e como Y é discreto, pode ser feito para todo

$$A \in \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\} = F(Y).$$

Observemos então que se $A \neq A'$, temos

$$B_A \neq B_{A'},$$

pois

$$\bigcup \{F \in B_A\} = A.$$

Assim, conseguimos uma injeção de $F(Y)$ em \mathcal{B} . Pelo Teorema de Cantor, para todo conjunto vale $|Y| < |\mathcal{P}(Y)|$ (veja [25, p. 32]). Sendo assim, \mathcal{B} não pode ser contável, uma vez que

$$|\mathcal{B}| \geq |F(Y)| = |\mathcal{P}(Y)| > |Y|.$$

■

Teorema 4.1.16. [18, p. 162] Se $(F(X), T_V)$ é métrico, então (X, T) é compacto.

Demonstração: Pela Proposição 4.1.1, temos que se $F(X)$ é métrico, então X é métrico. Suponhamos por absurdo que X não é compacto. Assim, em particular, pelo Corolário 1.5.11 existe um conjunto infinito enumerável $Y \subset X$ que não possui ponto de acumulação, portanto Y é fechado. Por não possuir ponto limite, o subespaço Y é discreto.

Uma vez que $(F(X), T_V)$ é metrizável, temos $(F(Y), T|_{Y_V}) = (F(Y), T_V|_{F(Y)})$ metrizável. Por ser enumerável, Y é separável, então $F(Y)$ é separável. Ora, $F(Y)$ metrizável e separável implica $F(Y)$ segundo-contável pela Proposição 1.7.2, mas isto é absurdo pelo Lema 4.1.15.

■

É interessante notar que este resultado evidencia a diferença entre a topologia de Vietoris e a topologia uniforme induzida por uma métrica, como vimos na Proposição 3.5.9. Por exemplo, se temos \mathbb{R}^n com a métrica euclidiana, podemos dotar $F(\mathbb{R}^n)$ da métrica de Hausdorff. Contudo, \mathbb{R}^n não é compacto, logo na topologia de Vietoris $F(\mathbb{R}^n)$ não é métrico. Existe também o mesmo resultado para quando $(F(X), T_V)$ é um espaço segundo-contável.

Teorema 4.1.17. [18, p. 162] Se $(F(X), T_V)$ é segundo-contável, então (X, T) é compacto.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que (X, T) não é um espaço compacto. Pela Proposição 4.1.12, se $(F(X), T_V)$ é segundo-contável, (X, T) também é. Logo, temos que (X, T) é T_1 , segundo-contável, mas não compacto, portanto, pelo Corolário 1.5.13, existe um subconjunto infinito enumerável $Y \subset X$ que é discreto na topologia relativa. Assim, vale que (Y, T) é segundo-contável. Usando que $(F(Y), T|_{Y_V}) = (F(Y), T_V|_{F(Y)})$, concluímos que $F(Y)$ é segundo-contável, mas isto é um absurdo pelo Lema 4.1.15.

■

4.2 Relações Entre Propriedades de X , $F(X)$ e $\text{Comp}(X)$ com a Topologia Uniforme

Proposição 4.2.1. Um espaço uniforme $[X, \mathcal{U}]$ é metrizável se e somente se $[F(X), \tilde{\mathcal{U}}]$ é metrizável.

Demonstração: Se $[X, \mathcal{U}]$ é metrizável, então existe uma métrica d em X cuja estrutura uniforme induzida é \mathcal{U} . Assim, podemos definir a métrica de Hausdorff em $F(X)$ a partir de d , e pela Proposição 3.5.9, temos que ela induz a mesma uniformidade que $\tilde{\mathcal{U}}$, portanto $[F(X), \tilde{\mathcal{U}}]$ é metrizável.

Se $[F(X), \tilde{\mathcal{U}}]$ é metrizável e h é a métrica compatível com $\tilde{\mathcal{U}}$, definimos a métrica d em X como

$$d(x, y) = h(\{x\}, \{y\}).$$

Precisamos mostrar então que a uniformidade \mathcal{U}_d induzida por d é a mesma que \mathcal{U} . Nesse caso, basta observar que para cada $\varepsilon > 0$, a coleção das vizinhanças da diagonal

$$V'_\varepsilon = \{(E, F) \mid h(E, F) < \varepsilon\}$$

constitui uma base da uniformidade 2^U . O traço de V' com relação à inclusão de X em $F(X)$ induz a uniformidade U_d em X , cujos elementos básicos são

$$\begin{aligned} V_\varepsilon &= \{(x, y) \mid h(\{x\}, \{y\}) < \varepsilon\} \\ &= \{(x, y) \mid d(x, y) < \varepsilon\}. \end{aligned}$$

A uniformidade U_d é a mesma que U , pois para todo $V \in U$ existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$V'_\varepsilon \subset \widehat{V},$$

portanto

$$V_\varepsilon \subset V,$$

e, por outro lado, para todo $\varepsilon > 0$ existe $V \in U$ tal que

$$\widehat{V} \subset V'_\varepsilon.$$

Desse modo,

$$V \subset V_\varepsilon,$$

o que garante que $U = U_d$ e assim, $[X, U]$ é metrizable. ■

Proposição 4.2.2. Um espaço uniforme $[X, U]$ é totalmente limitado se e somente se $[F(X), \tilde{U}]$ é totalmente limitado.

Demonstração: Se $[X, U]$ é totalmente limitado, para provar que $[F(X), \tilde{U}]$ é totalmente limitado, basta mostrar que para cada $V \in U$ simétrico existem $E_1, \dots, E_n \in F(X)$ tais que

$$F(X) \subset \widehat{V}(E_1) \cup \dots \cup \widehat{V}(E_n).$$

De fato, como a coleção dos \widehat{V} constitui uma base de $F(X)$, para qualquer $W \in \tilde{U}$ temos algum $\widehat{V} \subset W$ e se $E_1, \dots, E_n \in F(X)$ são tais que

$$F(X) \subset \widehat{V}(E_1) \cup \dots \cup \widehat{V}(E_n) \subset W(E_1) \cup \dots \cup W(E_n).$$

Dado $V \in U$ simétrica, existem $x_1, \dots, x_n \in X$ tais que

$$X = V(x_1) \cup \dots \cup V(x_n).$$

Se $Y = \{x_1, \dots, x_n\}$, vale que

$$Y' = \mathcal{P}(Y) \setminus \{\emptyset\} \subset F(X),$$

e afirmamos que

$$F(X) \subset \bigcup_{E \in Y'} \widehat{V}(E).$$

De fato, dado $F \in F(X)$, existe $E = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_n}\} \in Y'$ tal que

$$F \subset V(E)$$

em X . Retirando x_i de E caso necessário, podemos assumir que para todo $x_i \in E$ existe $f \in F$ tal que $(x_i, f) \in V$, então $(f, x_i) \in V$ e

$$E \subset V(F),$$

Portanto

$$F \in \widehat{V}(E).$$

Como isso pode ser feito para todo $F \in F(X)$, concluímos que

$$F(X) \subset \bigcup_{E \in Y'} \widehat{V}(E),$$

e como Y' é finito, e o processo pode ser feito para todo $V \in \mathcal{U}$, obtemos $[F(X), \widetilde{\mathcal{U}}]$ totalmente limitado.

Agora suponhamos que $[F(X), \widetilde{\mathcal{U}}]$ é totalmente limitado. Dado $V \in \mathcal{U}$, tome $W \in \mathcal{U}$ simétrica tal que $W \circ W \subset V$. Nesse caso, como $F(X)$ é totalmente limitado, existem $E_1, \dots, E_n \in F(X)$ tais que

$$F(X) = \widehat{W}(E_1) \cup \dots \cup \widehat{W}(E_n).$$

Ora, dado $x \in X$, temos que existe i tal que $\{x\} \in \widehat{W}(E_i)$, ou seja,

$$\{x\} \in \widehat{W}(E_i) = \{F : F \subset W(E_i), E_i \subset W(F)\},$$

o que significa que

$$x \in W(E_i) \quad \text{e} \quad E_i \in W(x),$$

portanto

$$W(E_i) \subset (W \circ W)(x) \subset V(x).$$

Para cada E_i tal que $\widehat{W}(E_i)$ contém algum elemento da forma $\{x_i\}$, tomamos um desses x_i , obtendo um conjunto finito $\{x_1, \dots, x_k\}$. Pela discussão anterior, todo $x \in X$ está em algum $W(E_i)$, logo está em algum $V(x_j)$ e obtemos

$$X = \bigcup_{j=1}^k V(x_j),$$

portanto $[X, \mathcal{U}]$ é totalmente limitado. ■

Para deixar a próxima demonstração mais simples, vamos definir um conjunto especial.

Definição 4.2.3. [16, p. 337] Dado um espaço topológico X e uma sequência de conjuntos (A_n) com $A_n \subset X$, o conjunto

$$\text{Ls}(A_n)$$

é o conjunto dos pontos $p \in X$ tais que todo aberto U contendo p intersecta infinitos A_n , chamado de **limite superior** de A_n . □

O conjunto $\text{Ls} A_n$ pode ser visto como o conjunto dos pontos de acumulação de sequências da forma (a_{k_n}) , onde $a_{k_n} \in A_{k_n}$ quando o espaço é métrico, ou mais geralmente, quando o espaço é primeiro-contável.

Teorema 4.2.4. [18, p. 161] Se $[X, \mathcal{U}]$ é metrizável, então $[X, \mathcal{U}]$ é completo se e somente se $[F(X), \widetilde{\mathcal{U}}]$ é completo.

Demonstração: Pela proposição 4.2.1, vale que $F(X)$ é metrizável pela métrica de Hausdorff. Estabelecemos d como a métrica em X compatível com a estrutura uniforme e h a métrica de Hausdorff em $F(X)$. Vamos começar mostrando que se $[F(X), \widetilde{\mathcal{U}}]$ é completo, então $[X, \mathcal{U}]$ é completo. Se (a_n) é uma sequência de Cauchy em $[X, \mathcal{U}]$, podemos tomar a sequência $(\{a_n\}) \subset F(X)$, que é de Cauchy, pois

$$h(\{a_n\}, \{a_m\}) = d(a_n, a_m).$$

Já que $F(X)$ é completo, existe $A \in F(X)$ que é limite da sequência. Desse modo, basta mostrar que A é unitário, ou seja, $A = \{a\}$ para algum $a \in X$, pois assim

$$h(\{a_n\}, A) = d(a_n, a),$$

e teremos que (a_n) converge a a . Pela convergência de $\{a_n\}$ sabemos que para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$

$$h(\{a_n\}, A) = \max\{\bar{d}(\{a_n\}, A), \bar{d}(A, \{a_n\})\} \leq \varepsilon.$$

Ora, em particular

$$\varepsilon \geq \bar{d}(A, \{a_n\}) = \sup_{a \in A} d(a, a_n),$$

mas isso é dizer que

$$(a_n) \rightarrow a$$

para todo $a \in A$. Contudo, o espaço X é Hausdorff, portanto limites são únicos, e temos que A é unitário. Daí concluímos que (a_n) converge em X , e X é completo.

Agora, suponhamos que X é completo e (A_n) é uma sequência de Cauchy. Denotemos

$$A = \text{Ls } A_n.$$

Afirmamos que A é o limite da sequência (A_n) . Dado $\varepsilon > 0$, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n, m \geq N$, então

$$h(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Assim,

$$h(A_n, A) \leq h(A_n, A_N) + h(A_N, A) \leq \frac{\varepsilon}{8} + h(A_N, A).$$

Basta mostrar que

$$\frac{7\varepsilon}{8} \geq h(A_N, A) = \max\{\bar{d}(A_N, A), \bar{d}(A, A_N)\}.$$

- $\bar{d}(A_N, A)$

Por definição,

$$\bar{d}(A_N, A) = \sup_{x \in A_N} \inf_{y \in A} d(x, y),$$

portanto queremos encontrar para todo $x \in A_N$ algum $y_x \in A$ tal que

$$d(x, y_x) \leq \frac{7\varepsilon}{8}.$$

Para isso, construiremos uma sequência de Cauchy em X com ponto limite em A . Defina $n_0 = N$ e $n_1 > n_0$ tal que se $n, m \geq n_1$, então

$$h(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2^4}.$$

De forma geral, sempre podemos obter $n_i > n_{i-1}$ tal que se $n, m \geq n_i$, então

$$h(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+3}}.$$

Daí, se $n, m \geq n_i$

$$\bar{d}(A_n, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+3}} \quad \text{e} \quad \bar{d}(A_m, A_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+3}}.$$

Observemos que

$$\frac{\varepsilon}{2^{i+3}} \geq \bar{d}(A_{n_i}, A_{n_{i+1}}) = \sup_{x \in A_{n_i}} d(x, A_{n_{i+1}}) = \sup_{x \in A_{n_i}} \inf_{y \in A_{n_{i+1}}} d(x, y)$$

implica que existe de fato $x \in A_{n_i}$ tal que

$$d(x, A_{n_{i+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+3}}.$$

Infelizmente não podemos garantir que existe $y \in A_{n_{i+1}}$ tal que

$$d(x, y) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+3}},$$

pois tomamos o ínfimo sobre $A_{n_{i+1}}$. Contornamos este problema observando que se $x \in A_{n_i}$, existe $z \in A_{n_{i+1}}$ tal que

$$d(x, z) - d(x, A_{n_{i+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+3}},$$

ou seja,

$$d(x, z) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+3}} + d(x, A_{n_{i+1}}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+3}} + \frac{\varepsilon}{2^{i+3}} = \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}.$$

Com isso, partindo de $x_0 = x \in A_{n_0} = A_N$, encontramos $x_1 \in A_{n_1}$ tal que

$$d(x_0, x_1) \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

depois $x_2 \in A_{n_2}$ tal que

$$d(x_1, x_2) \leq \frac{\varepsilon}{8},$$

e assim por diante de modo a construir uma seqüência (x_k) com $x_k \in A_{n_k}$ tal que

$$d(x_k, x_{i+k}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{k+2}}$$

para todo k . Esta é uma seqüência de Cauchy, e pela completude de X deve convergir a um ponto que denotamos por y_x , que deve estar em A por definição. Ora, existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que se $i \geq N'$

$$d(x_i, y_x) \leq \frac{\varepsilon}{4},$$

portanto, pela desigualdade triangular

$$\begin{aligned} d(x, y_x) &\leq \left(\sum_{i=0}^{N'-1} d(x_i, x_{i+1}) \right) + d(x_{N'}, y_x) \\ &\leq \left(\frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{8} + \cdots \right) + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} \\ &\leq \frac{7\varepsilon}{8} \end{aligned}$$

- $\bar{d}(A, A_N)$

Queremos mostrar que para todo $x \in A$ existe $y_x \in A_N$ tal que

$$d(x, y_x) \leq \frac{7\varepsilon}{8}.$$

Dado que $x \in A$ e X , existe uma sequência (a_{n_k}) com $a_{n_k} \in A_{n_k}$ que converge a x . Logo, podemos tomar k tal que $n_k \geq N$ e

$$d(x, a_{n_k}) \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

Quando $m \geq N$, vale

$$h(A_N, A_m) \leq \frac{\varepsilon}{8},$$

então vale que

$$d(a_{n_k}, A_N) \leq \frac{\varepsilon}{8}.$$

para todo $n_k \geq N$. Daí é possível encontrar $y_x \in A_N$ de modo que

$$d(a_{n_k}, y_x) \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

Assim,

$$d(x, y_x) \leq d(x, a_{n_k}) + d(a_{n_k}, y_x) \leq \frac{7\varepsilon}{8}.$$

■

Teorema 4.2.5. [18, p. 161] Se $[X, \mathcal{U}]$ é compacto, então $[F(X), \tilde{\mathcal{U}}]$ é compacto.

Demonstração: Se $[X, \mathcal{U}]$ é compacto, então todo subconjunto fechado E de X é totalmente limitado. Portanto, pelo Lema 3.6.2, toda vizinhança de $E \in F(X)$ na topologia $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$ contém uma vizinhança de E em T_V . Desse modo, dada uma cobertura $\{U_\alpha\}$ de $F(X)$ por elementos de $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$, podemos obter uma cobertura $\{V_\beta\}$ por abertos em T_V tal que para todo β existe α satisfazendo

$$V_\beta \subset U_\alpha.$$

Pelo Teorema 4.1.2, sabemos que $(F(X), T_V)$ é compacto. Desse modo, obtemos uma subcobertura finita $\{V_1, \dots, V_n\}$ de $\{V_\beta\}$ e por conseguinte, uma subcobertura finita $\{U_1, \dots, U_n\}$ de $\{U_\alpha\}$, provando que $(F(X), T_{\tilde{\mathcal{U}}})$ é compacto.

■

No mesmo estilo do Teorema 4.1.2, temos o seguinte teorema:

Teorema 4.2.6. Um espaço uniforme $[X, \mathcal{U}]$ é compacto se e somente se $[\text{Comp}(X), \tilde{\mathcal{U}}]$ é compacto.

Demonstração: Pelo Teorema 3.6.4, sabemos que as topologias T_V e $T_{\tilde{\mathcal{U}}}$ coincidem em $\text{Comp}(X)$. Usando o Teorema 4.1.3 concluímos que se $\text{Comp}(X)$ é compacto, então $[X, \mathcal{U}]$ é compacto. Por outro lado, se X é compacto, então

$$[\text{Comp}(X), \tilde{\mathcal{U}}] = [F(X), \tilde{\mathcal{U}}]$$

é compacto, pelo Teorema 4.2.5.

■

4.3 Separação de $F(X)$ e $\text{Comp}(X)$ na Topologia de Vietoris

Teorema 4.3.1. [18, p. 162] Seja X um espaço topológico não necessariamente T_1 . Então $F(X)$ é T_0 .

Demonstração: Dados $F, G \in F(X)$ distintos, podemos supor sem perda de generalidade que existe $f \in F \setminus G$. Portanto, G^c é um aberto que contém f e

$$F \in \langle X, G^c \rangle, \text{ mas } G \notin \langle X, G^c \rangle,$$

o que mostra que $F(X)$ é T_0 .

■

Teorema 4.3.2. [18, p. 162] Se X é T_1 , então $F(X)$ é T_1 .

Demonstração: Dados $F, G \in F(X)$ distintos, podemos supor sem perda de generalidade que existe $f \in F \setminus G$. Já sabemos pelo teorema anterior que existe um aberto U que contém F mas não G . Uma vez que X é T_1 , temos que $\{f\}$ é fechado em X , logo

$$G \in \langle \{f\}^c \rangle, \text{ mas } F \notin \langle \{f\}^c \rangle,$$

o que mostra que $F(X)$ é T_1 . ■

Podemos ver que a implicação reversa não vale. Para isso, basta tomar X como um conjunto com dois ou mais elementos dotado da topologia trivial, ou seja, cujos abertos são apenas X e \emptyset . Nesse caso, $F(X) = \{X\}$, que é um espaço T_1 por vacuidade, enquanto o espaço-base não o é.

Teorema 4.3.3. [18, p. 163] Um espaço X é regular se e somente se $F(X)$ é de Hausdorff.

Demonstração: Se X é regular, dados dois fechados $F, G \in F(X)$, assumindo novamente que existe $f \in F \setminus G$, existem abertos U e V disjuntos tais que

$$f \in U \quad \text{e} \quad G \subset V.$$

Tomemos os abertos $\langle X, U \rangle$ e $\langle V \rangle$ em $F(X)$. Por definição $F \in \langle X, U \rangle$ e $G \in \langle V \rangle$. Agora, $\langle X, U \rangle$ e $\langle V \rangle$ são disjuntos, pois um conjunto contido em V não pode ter pontos fora de V , logo não pode intersectar U .

Se $F(X)$ é de Hausdorff, suponhamos que X não é regular. Nesse caso, existe fechado $F \subset X$ e $x \in X$ tais que não existem abertos U e V disjuntos com

$$F \subset U \quad \text{e} \quad x \in V.$$

Tome $G = F \cup \{x\}$. Afiramos que não é possível separar F de G . De fato, se

$$F \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \quad \text{e} \quad G \in \langle V_1, \dots, V_m \rangle,$$

vamos construir um conjunto fechado $H \subset X$ que está em ambos os abertos.

Para cada i , podemos escolher $x_i \in U_i$, o que garante $H \cap U_i \neq \emptyset$ para todo i . Para garantir $H \cap V_j \neq \emptyset$ para todo j , observamos que

$$(F \cup \{x\}) \cap V_j \neq \emptyset,$$

para todo j . Logo, existem duas possibilidades para cada j :

$$F \cap V_j \neq \emptyset$$

ou

$$F \cap V_j = \emptyset.$$

Se $F \cap V_j \neq \emptyset$, podemos tomar $y_j \in F \cap (U_i \cap V_j)$ para algum i , pois $F \subset \bigcup_i U_i$. Se $F \cap V_j = \emptyset$, temos $x \in V_j$, e pela não regularidade de X , podemos tomar $y_j \in V_j \cap U_i$ para algum i , pois F é fechado contido $\bigcup_i U_i$. Assim, o conjunto

$$H = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap \langle V_1, \dots, V_m \rangle,$$

mas isto é um absurdo, pois $F(X)$ é de Hausdorff. ■

Teorema 4.3.4. [18, p. 163] X é completamente regular se e somente se $F(X)$ é completamente de Hausdorff.

Demonstração: Se X é completamente regular, dados $E, F \in F(X)$, podemos assumir sem perda de generalidade que existe $x \in F \setminus E$ e então existe função real $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(E) = 0 \quad \text{e} \quad f(x) = 1.$$

Logo, pela Proposição 3.3.13, $f_+ : X \rightarrow [0, 1]$ é contínua e satisfaz $f_+(E) = 0$ e $f_+(F) = 1$.

Se $F(X)$ é completamente de Hausdorff, considere um fechado $F \subset X$ e $x_0 \in F^c$. Existe uma função $f : F(X) \rightarrow [0, 1]$ contínua em $F(X)$ tal que $f(F) = 0$ e $f(F \cup \{x_0\}) = 1$. Desse modo, definimos em X a função

$$g : X \longrightarrow [0, 1] \\ x \longmapsto f(F \cup \{x\}).$$

Observemos que $g(x_0) = 1$ e $g(F) = 0$. Afiramos que g é contínua. Dado um aberto sub-básico $[0, a)$ de \mathbb{R} ,

$$g^{-1}([0, a)) = \{x \in X \mid f(F \cup \{x\}) < a\}.$$

Sabemos que $f^{-1}([0, a))$ é aberto em X e se $x \in g^{-1}([0, a))$, então $F \cup \{x\} \in f^{-1}([0, a))$. Sendo assim, existe aberto básico $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ tal que

$$F \cup \{x\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq f^{-1}([0, a)).$$

Vamos usar os abertos U_1, \dots, U_n para encontrar um aberto V tal que

$$x \in V \subseteq g^{-1}([0, a)).$$

Ora, vale que

$$F \cup \{x\} \subseteq U_1 \cup \dots \cup U_n,$$

portanto podemos tomar uma coleção $\{U_{i_1}, \dots, U_{i_k}\}$ dos abertos U_i que contém x , ou seja, tais que

$$\{x\} \cap U_i \neq \emptyset.$$

Seja

$$V = U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_k}.$$

Essa interseção não é vazia, pois x está em todos os U_{i_j} . Agora, se $y \in V$, $F \cup \{y\}$ está em $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ pela definição de V , portanto

$$g(y) = f(F \cup \{y\}) \in [0, a)$$

Desse modo, encontramos um aberto V contendo x tal que

$$x \in V \subseteq g^{-1}([0, a)).$$

Uma vez que isso pode ser feito para todo x em $g^{-1}([0, a))$, concluímos que $g^{-1}([0, a))$ é aberto.

A demonstração que $g^{-1}((b, 1])$ é aberto é análoga ao que foi feito anteriormente. Portanto, provamos que g é contínua e que X é completamente regular. ■

Teorema 4.3.5. [18, p. 163] São equivalentes:

- (a) X é normal;
- (b) $F(X)$ é completamente regular;

(c) $F(X)$ é regular.

Demonstração: Se X é normal, usamos o Teorema 3.6.5 para garantir que a topologia T_V em $F(X)$ é induzida por uma uniformidade, portanto, pela Proposição 2.6.7 temos que $F(X)$ é completamente regular, portanto regular. Assim, basta mostrar que se $F(X)$ é regular, então X é normal.

Suponhamos que $F(X)$ é regular e sejam $F, G \subset X$ dois fechados disjuntos. G^c é um aberto que contém F , logo, pela regularidade de $F(X)$, existe um aberto básico

$$F \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle \subset \langle G^c \rangle,$$

tal que $\langle \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n \rangle \subset \langle G^c \rangle$. Assim,

$$F \subset V = \bigcup_i V_i \subset \bar{V} \subset G^c.$$

Dessa forma, conseguimos um aberto \bar{V}^c disjunto de V que contém G , e provamos que X é normal. ■

Corolário 4.3.6. [18, p. 163] X é de Hausdorff e compacto se e somente se $F(X)$ é de Hausdorff e compacto.

Demonstração: Diretamente dos Teoremas 4.1.3 e 4.3.3 temos que se $F(X)$ é de Hausdorff e compacto, então X é de Hausdorff e compacto. Agora, se X é compacto, vale pelo Teorema 4.1.2 que $F(X)$ é compacto, portanto o que precisamos fazer é mostrar que se X é de Hausdorff e compacto, então $F(X)$ é de Hausdorff. Para tal, usamos a Proposição 1.5.15, que garante que espaços de Hausdorff e compacto são normais, para garantir que X é normal, e do Teorema 4.3.5 temos que $F(X)$ é regular, portanto de Hausdorff. ■

De fato, provamos também uma espécie de extensão do Teorema 4.3.5:

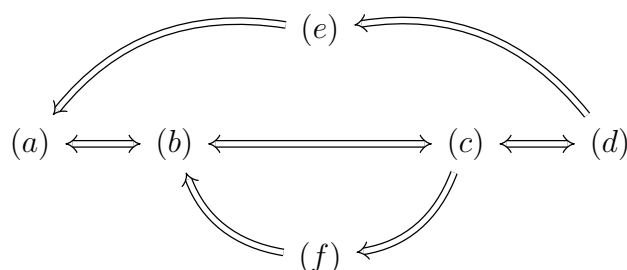
Teorema 4.3.7. Se X é de Hausdorff e compacto, então $F(X)$ é normal.

Além de relacionar resultados vistos anteriormente, o próximo resultado mostra que o fato de $F(X)$ ser metrizável na topologia de Vietoris é na verdade uma propriedade que traz consigo muitas outras propriedades.

Teorema 4.3.8. [18, p. 163] São equivalentes:

- (a) X é compacto e metrizável;
- (b) X é segundo-contável, de Hausdorff e compacto;
- (c) $F(X)$ é segundo-contável, de Hausdorff e compacto;
- (d) $F(X)$ é compacto e metrizável;
- (e) $F(X)$ é metrizável;
- (f) $F(X)$ é segundo-contável e de Hausdorff.

Demonstração: Provaremos o Teorema de acordo com o seguinte diagrama



- (a) \Rightarrow (b): Se X é compacto e metrizable, então X é de Hausdorff por ser metrizable. Pela Proposição 1.5.17 temos que espaços métricos compactos são segundo-contáveis.
- (b) \Rightarrow (a): Se X é Hausdorff e compacto, X é normal pela Proposição 1.5.15. Logo, o Teorema de Metrização de Urysohn (Teorema 1.9.2) garante que X é metrizable.
- (c) \Leftrightarrow (d): O mesmo argumento que a demonstra (a) \Leftrightarrow (b).
- (b) \Rightarrow (c): Se X é de Hausdorff e compacto, temos $F(X) = \text{Comp}(X)$. Logo, se X é segundo-contável, temos pela Proposição 4.1.11 que $F(X)$ é segundo-contável. Pelo Corolário 4.3.6 vale que $F(X)$ é de Hausdorff e compacto quando X é de Hausdorff e compacto.
- (c) \Rightarrow (b): Se $F(X)$ é de Hausdorff e compacto, o Corolário 4.3.6 garante que X é de Hausdorff e compacto. A Proposição 4.1.12 garante que X é segundo-contável quando $F(X)$ é segundo-contável.
- (d) \Rightarrow (e): Consequência imediata da hipótese.
- (e) \Rightarrow (a): Se $F(X)$ é metrizable, temos X metrizable pelo Teorema 4.1.1 e compacto pelo Teorema 4.1.16.
- (c) \Rightarrow (f): Consequência imediata da hipótese.
- (f) \Rightarrow (b): Se $F(X)$ é segundo-contável e de Hausdorff, temos X segundo-contável pela Proposição 4.1.12, compacto pelo Teorema 4.1.17 e de Hausdorff pelo Teorema 4.3.3.

■

Agora discutimos algumas relações entre propriedades de $\text{Comp}(X)$ e X .

Proposição 4.3.9. [18, p. 164] X é de Hausdorff se e somente se $\text{Comp}(X)$ é de Hausdorff

Demonstração: Se X é de Hausdorff, observemos que dado um ponto x e um compacto $F \subset X$, podemos obter abertos U e V disjuntos com $x \in U$ e $F \subset V$. Daí, dados dois compactos $F, G \subset X$ distintos, podemos supor que existe $f \in F \setminus G$ e tomar abertos U e V disjuntos tais que

$$f \in U \quad \text{e} \quad G \subset V.$$

Desse modo, $F \in \langle X, U \rangle$ e $G \in \langle V \rangle$, enquanto

$$\langle X, U \rangle \cap \langle V \rangle = \emptyset.$$

Se $\text{Comp}(X)$ é Hausdorff, dados dois pontos $x, y \in X$, temos $\{x\}, \{y\} \in \text{Comp}(X)$ e existem abertos básicos disjuntos em $\text{Comp}(X)$ tais que

$$\{x\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \quad \text{e} \quad \{y\} \in \langle V_1, \dots, V_m \rangle.$$

Por serem disjuntos, temos em particular que não existe $z \in X$ tal que

$$z \in \left(\bigcap_i U_i \right) \cap \left(\bigcap_j V_j \right),$$

portanto se definirmos

$$U = \bigcap_i U_i \quad \text{e} \quad V = \bigcap_j V_j$$

temos U e V disjuntos com $x \in U$ e $y \in V$.

■

Teorema 4.3.10. [18, p. 164] X é regular se e somente se $\text{Comp}(X)$ é regular.

Demonstração: Se X é regular, tome um ponto $F \in \text{Comp}(X)$ e um aberto básico

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle$$

que o contém. Para provar que $\text{Comp}(X)$ é regular, temos que mostrar que existe um aberto básico $\langle V_1, \dots, V_m \rangle$ que contém F e cujo fecho está contido em $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$. Seja

$$U = \bigcup_i U_i.$$

Pela compacidade de F e regularidade de X , existe um aberto V tal que $F \subseteq V \subseteq \bar{V} \subseteq U$. Além disso, para cada U_i podemos tomar $f \in U_i$, logo podemos tomar aberto $V_i \subset X$ tal que

$$f \in V_i \subset \bar{V}_i \subset U_i.$$

Daí, temos por definição e lembrando a Proposição 3.3.4

$$F \in \langle V, V_1, \dots, V_n \rangle \subset \langle \bar{V}, \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n \rangle \subset \langle U_1, \dots, U_n \rangle.$$

Se $\text{Comp}(X)$ é regular, considere um fechado $F \subset X$ e $x \in X \setminus F$. O conjunto

$$\langle X, F \rangle$$

é fechado em $\text{Comp}(X)$. Uma vez que $x \in X \setminus F$, temos

$$\{x\} \in \langle F^c \rangle = \langle X, F \rangle^c,$$

então da regularidade de $\text{Comp}(X)$ existe um aberto básico $\langle V_1, \dots, V_n \rangle$ contendo $\{x\}$ tal que

$$\{x\} \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle \subset \langle \bar{V}_1, \dots, \bar{V}_n \rangle \subset \langle X, F \rangle^c.$$

Dado que $\{x\}$ é unitário, temos $x \in V = V_1 \cap \dots \cap V_n$ e vale

$$\{x\} \in \langle V \rangle \subset \langle \bar{V} \rangle \subset \langle X, F \rangle^c,$$

mas isto significa que

$$x \in V \subset \bar{V} \subset F^c,$$

ou seja existem abertos disjuntos V e \bar{V}^c tais que

$$x \in V \quad \text{e} \quad F \subset \bar{V}^c,$$

e provamos a regularidade de X . ■

Teorema 4.3.11. [18, p. 164] X é completamente de Hausdorff e somente se $\text{Comp}(X)$ é completamente de Hausdorff.

Demonstração: Se X é completamente de Hausdorff, a Proposição 1.5.14 garante que, para cada compacto C e $x \in X \setminus C$, existe uma função $f : X \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(C) = 0 \quad \text{e} \quad f(x) = 1.$$

Logo, a função f_+ definida pela Proposição 3.3.13 é contínua e satisfaz

$$f_+(C) = 0 \quad \text{e} \quad f_+(\{x\}) = 1,$$

o que mostra que $\text{Comp}(X)$ é completamente de Hausdorff.

Se $\text{Comp}(X)$ é completamente de Hausdorff, dados $x_0, x_1 \in X$, existe uma função $f : \text{Comp}(X) \rightarrow [0, 1]$ tal que

$$f(\{x_0\}) = 0 \quad \text{e} \quad f(\{x_0, x_1\}) = 1.$$

Esta é a mesma função que a função g definida na demonstração da volta da Proposição 4.3.4, portanto ela é contínua. Assim, X é completamente de Hausdorff. ■

Teorema 4.3.12. [18, p. 164] X é completamente regular se e somente se $\text{Comp}(X)$ é completamente regular.

Demonstração: Se X é completamente regular, pelo Teorema 2.3.18, existe uma uniformidade \mathfrak{U} que induz a topologia T em X . Logo, pelo Teorema 3.6.4 temos que $T_V = T_{\mathfrak{U}}$. Desse modo, como toda topologia induzida por uma uniformidade é completamente regular, temos $\text{Comp}(X)$ completamente regular.

Se $\text{Comp}(X)$ é completamente regular, existe uma uniformidade \mathfrak{V} em $\text{Comp}(X)$ que induz a topologia de Vietoris. Assim, podemos tomar o traço de \mathfrak{V} com relação à imagem da aplicação inclusão $i : X \rightarrow \text{Comp}(X)$. Pelo fato de i ser bijeção sobre a sua imagem, o traço define uma uniformidade \mathfrak{U} em X . Afirmamos que $T_{\mathfrak{U}} = T$.

Seja A um aberto de (X, T) . O conjunto $\langle A \rangle$ é aberto em $\text{Comp}(X)$, portanto para cada $a \in A$ existe $V_a \in \mathfrak{V}$ tal que

$$V_a(\{a\}) = \langle A \rangle.$$

Se $U_a \in \mathfrak{U}$ é a vizinhança da diagonal induzida por V_a , temos

$$U_a = \{(x, y) \mid (\{x\}, \{y\}) \in V_a\}.$$

Ora,

$$A = i^{-1}(\langle A \rangle) = i^{-1}(V_a(\{a\})) = \{y \mid (\{a\}, \{y\}) \in V_a\} = U_a(a).$$

Isso significa que A é vizinhança de todos os seus pontos na topologia $T_{\mathfrak{U}}$, portanto $T \subseteq T_{\mathfrak{U}}$.

Dado aberto $A \in T_{\mathfrak{U}}$, sabemos que para cada $a \in A$ existe $U_a \in \mathfrak{U}$ tal que

$$U_a(a) = A.$$

Desse modo, existe $V_a \in \mathfrak{V}$ associado a U_a , e por definição de vizinhança, existe aberto $V \in T_V$ tal que

$$\{a\} \in V \subset V_a(\{a\}).$$

Portanto, existe aberto básico $\langle U_1, \dots, U_n \rangle \in T_V$ tal que

$$\{a\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset V \subset V_a(\{a\}).$$

Em particular, se

$$U = \bigcap_{i=1}^n U_i,$$

temos

$$\{a\} \in \langle U \rangle \subseteq \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subset V \subset V_a(\{a\}).$$

Sendo assim,

$$a \in U \subset U_a(a) = A.$$

Logo, A é aberto na topologia T e provamos $T_{\mathfrak{U}} \subseteq T$. ■

Teorema 4.3.13. [18, p. 164] X é de Hausdorff e compacto se e somente se $\text{Comp}(X)$ é de Hausdorff e compacto.

Demonstração: Se X é de Hausdorff e compacto, temos $F(X) = \text{Comp}(X)$ e pelo Corolário 4.3.6 vale que $\text{Comp}(X)$ é de Hausdorff e compacto. Se $\text{Comp}(X)$ é de Hausdorff e compacto, temos que X é de Hausdorff pela Proposição 4.3.9, então basta mostrar que X é compacto. Ora, temos $\text{Fin}_1(X)$ fechado pela Proposição 3.3.10, portanto $\text{Fin}_1(X)$ é compacto, e como $X \simeq \text{Fin}_1(X)$, temos X de Hausdorff e compacto. ■

Observemos que a Proposição 3.3.10 exige que o espaço seja de Hausdorff, portanto a volta depende fortemente da hipótese de $\text{Comp}(X)$ ser de Hausdorff para provar a compacidade de X . Contudo, a parte da compacidade da ida independe da hipótese de X ser de Hausdorff, pois estamos considerando $\text{Comp}(X) \subset F(X)$. Se por definição considerássemos $\text{Comp}(X)$ como a coleção dos compactos não vazios de X , então a hipótese de X ser Hausdorff seria usada para garantir que $F(X) = \text{Comp}(X)$. Similarmente, na seguinte proposição usamos a hipótese de ser de Hausdorff para provar a compacidade local de X .

Teorema 4.3.14. [18, p. 164] X é de Hausdorff e localmente compacto se e somente se $\text{Comp}(X)$ é de Hausdorff e localmente compacto.

Demonstração: Se $\text{Comp}(X)$ é de Hausdorff e localmente compacto, temos que X é de Hausdorff pela Proposição 4.3.9, então basta mostrar que X é localmente compacto. Ora, temos $\text{Fin}_1(X)$ fechado pela Proposição 3.3.10, portanto $\text{Fin}_1(X)$ é localmente compacto, e como $X \simeq \text{Fin}_1(X)$, temos X de Hausdorff e localmente compacto.

Se X é de Hausdorff e localmente compacto, temos novamente pela Proposição 4.3.9 que $\text{Comp}(X)$ é de Hausdorff, portanto basta provar que $\text{Comp}(X)$ é localmente compacto. Dado $F \in \text{Comp}(X)$, pelo Lema 4.1.8, temos que existe aberto U tal que $F \subset U$ e \bar{U} é compacto. Desse modo, temos que $\langle \bar{U} \rangle$ é compacto e fechado em $F(X)$ pela Proposição 3.3.2. Uma vez que $\langle \bar{U} \rangle \subset \text{Comp}(X)$, $\langle \bar{U} \rangle$ é compacto e fechado em $\text{Comp}(X)$, ou seja, é uma vizinhança compacta de F , e provamos a compacidade local de $\text{Comp}(X)$. ■

Teorema 4.3.15. [18, p. 164] X é metrizável se e somente se $\text{Comp}(X)$ é metrizável.

Demonstração: Se X é metrizável, existe uma uniformidade \mathcal{U} compatível com a topologia T em X , mas pelo Teorema 3.6.4, temos que a topologia induzida pela uniformidade $\tilde{\mathcal{U}}$ restrita a $\text{Comp}(X)$ é a mesma que T_V . Pelo Teorema 4.2.1 vale que $\text{Comp}(X)$ é metrizável. A mesma demonstração da Proposição 4.1.1 mostra que se $\text{Comp}(X)$ é metrizável, então X também é. ■

4.4 Conexidade de Hiperespaços na Topologia de Vietoris

Lema 4.4.1. [18, p. 158] Seja \mathfrak{B} uma coleção de fechados de um espaço topológico X que forma um conjunto conexo em $F(X)$ e tal que um dos elementos de \mathfrak{B} é conexo. Então

$$Y = \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E$$

é conexo.

Demonstração: Suponhamos que Y é desconexo, ou seja, existem abertos $A, B \subseteq X$ tais que

$$A \cap Y \neq \emptyset \neq B \cap Y$$

e

$$(A \cap Y) \sqcup (B \cap Y) = Y.$$

Afirmamos que um do pares

$$\langle A \rangle \text{ e } \langle X, B \rangle \quad \text{ou} \quad \langle B \rangle \text{ e } \langle X, A \rangle$$

constitui uma cisão de \mathfrak{B} , o que seria um absurdo, pois \mathfrak{B} é conexo. De fato, uma vez que \mathfrak{B} possui um elemento conexo, existe $E \in \mathfrak{B}$ tal que $E \subset A$ ou $E \subset B$. Supondo sem perda de generalidade que $E \subset A$, vamos provar que $\langle A \rangle$ e $\langle X, B \rangle$ constituem uma cisão de \mathfrak{B} . Ora, dado $F \in \mathfrak{B}$, vale que $F \subset A$ ou $F \cap B \neq \emptyset$, ou seja,

$$F \in \langle A \rangle \quad \text{ou} \quad F \in \langle X, B \rangle,$$

assim $\mathfrak{B} = (\langle A \rangle \cup \langle X, B \rangle) \cap \mathfrak{B}$. Por definição temos

$$(\langle A \rangle \cap \langle X, B \rangle) \cap \mathfrak{B} = \emptyset,$$

e como existe $E \in \mathfrak{B}$ tal que $E \subset A$, vale

$$\langle A \rangle \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset.$$

Além disso, temos

$$\langle X, B \rangle \cap \mathfrak{B} \neq \emptyset$$

pois $B \cap Y \neq \emptyset$, e desse modo temos uma cisão de \mathfrak{B} . ■

Teorema 4.4.2. [18, p. 165] Seja $\text{Fin}_1(X) \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \text{F}(X)$. Se um dos espaços X ou algum \mathfrak{S} é conexo, então todos os possíveis espaços \mathfrak{S} são conexos.

Demonstração: Vamos dividir em casos:

X é conexo.

Pela Proposição 3.3.11 temos que a projeção $\pi : X^n \rightarrow \text{Fin}_n(X)$ é contínua, logo $\text{Fin}_n(X)$ é conexo, pois X^n é conexo. Agora, dados $E, F \in \text{Fin}(X)$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $E, F \in \text{Fin}_m(X)$, porém $\text{Fin}_m(X)$ é conexo como subespaço de $\text{Fin}(X)$, portanto E, F pertencem a uma mesma componente conexa de $\text{Fin}(X)$. Uma vez que isso pode ser feito para todo par de pontos em $\text{Fin}(X)$, temos que este é um espaço conexo. Por fim, usamos que

$$\text{Fin}(X) \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \text{F}(X) = \overline{\text{Fin}(X)}$$

para concluir que \mathfrak{S} é sempre conexo.

Algum \mathfrak{S} é conexo.

Nesse caso, observamos que

$$X = \bigcup \mathfrak{S},$$

e que temos conjuntos da forma $\{x\} \in \mathfrak{S}$, que são conexos. Desse modo, podemos aplicar o Lema 4.4.1 para concluir que X é conexo e aplicamos o caso anterior. ■

Proposição 4.4.3. A coleção de conjuntos conexos de X é fechada em $\text{F}(X)$ se X é normal.¹

¹Em [18, p. 166], Michael enuncia esta proposição sem demonstrar. Por não conseguir provar sem a condição de normalidade de X e estar enunciado como exercício em [11], acreditamos que seja mais um erro do artigo.

Demonstração: Vamos mostrar que o complementar dessa coleção é um aberto. Seja F um subconjunto desconexo e fechado de X . Então, existe uma cisão $F = C_1 \sqcup C_2$ e abertos U_1, U_2 em X tais que

$$C_1 = F \cap U_1 \quad \text{e} \quad C_2 = F \cap U_2.$$

Desse modo, $F_1 = F \cap U_1^c$ e $F_2 = F \cap U_2^c$ são fechados disjuntos, e por X ser normal, existem abertos V_1, V_2 disjuntos contendo F_1 e F_2 respectivamente. Portanto, se $V = V_1 \cup V_2$

$$F \in \langle V, V_1, V_2 \rangle$$

e este aberto só pode conter conjuntos desconexos uma vez que V_1 e V_2 são disjuntos. Assim, a coleção de conjuntos conexos fechados de X é fechada em $\mathbf{F}(X)$. ■

Teorema 4.4.4. [18, p. 166] Se $\mathbf{Fin}(X) \subseteq \mathfrak{G} \subseteq \mathbf{Comp}(X)$, então X é localmente conexo se e somente se \mathfrak{G} é localmente conexo.

Demonstração: Se \mathfrak{G} é localmente conexo, dado $x \in X$ e vizinhança $U \subseteq X$ de x , existe uma vizinhança $\mathfrak{B} \subset \langle U \rangle$ de $\{x\}$ que é conexa. Esta vizinhança contém $\{x\}$ que é conexo, portanto podemos aplicar a Proposição 4.4.1 para concluir que

$$Y = \bigcup_{E \in \mathfrak{B}} E$$

é um conjunto conexo. Ora, existem abertos U_1, \dots, U_n tais que

$$\{x\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq \mathfrak{B},$$

portanto

$$W = \bigcap_{i=1}^n U_i \subset Y \subset U,$$

e Y é uma vizinhança de x conexa contida em U . Com isso, X é localmente conexo.

Se X é localmente conexo, seja $E \in \mathbf{Comp}(X)$ e U uma vizinhança de E em $\mathbf{Comp}(X)$. Sabemos que existe aberto básico tal que

$$E \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq U.$$

Lembrando que as componentes conexas de cada U_i são abertas em X , podemos cobrir E por essas componentes, e então existe uma subcobertura finita de E por componentes conexas V_1, \dots, V_m de modo que

$$E \in \langle V_1, \dots, V_m \rangle \subseteq \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq U.$$

Afirmamos que $\langle V_1, \dots, V_m \rangle$ é uma vizinhança conexa de E . Uma vez que cada V_i é conexo, $\mathbf{Fin}(V_i)$ é conexo pelo Teorema 4.4.2. Portanto, pela Proposição 3.3.12, a função

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{Fin}(V_1) \times \dots \times \mathbf{Fin}(V_m) &\longrightarrow \mathbf{Fin}(X) \\ (F_1, \dots, F_m) &\longmapsto \bigcup_{i=1}^m F_i \end{aligned}$$

é contínua e possui imagem conexa. Basta provar que

$$\pi(\mathbf{Fin}(V_1) \times \dots \times \mathbf{Fin}(V_m)) = \langle V_1, \dots, V_m \rangle \cap \mathbf{Fin}(X),$$

pois então teremos

$$\langle V_1, \dots, V_m \rangle \cap \mathbf{Fin}(X) \subseteq \langle V_1, \dots, V_m \rangle \subseteq \overline{\langle V_1, \dots, V_m \rangle \cap \mathbf{Fin}(X)}$$

então $\langle V_1, \dots, V_m \rangle$ será conexo pela Proposição 1.8.5.

Para provar que

$$\pi(\text{Fin}(V_1) \times \cdots \times \text{Fin}(V_m)) = \langle V_1, \dots, V_m \rangle \cap \text{Fin}(X).$$

observamos que se $\{x_1, \dots, x_k\}$ é um elemento da imagem, para todo V_i existe $x_i \in V_i$. Além disso, para todo x_i existe V_i tal que $x_i \in V_i$. Isso significa que

$$\{x_1, \dots, x_k\} \subseteq \bigcup_{j=1}^m V_j \quad \text{e} \quad \{x_1, \dots, x_k\} \cap V_i \neq \emptyset \quad \forall i.$$

Portanto,

$$\pi(\text{Fin}(V_1) \times \cdots \times \text{Fin}(V_m)) \subseteq \langle V_1, \dots, V_m \rangle \cap \text{Fin}(X).$$

Para a outra inclusão, se

$$\{y_1, \dots, y_k\} \in \langle V_1, \dots, V_m \rangle \cap \text{Fin}(X),$$

para cada V_j podemos definir os fechados não vazios

$$F_j = \{y_1, \dots, y_k\} \cap V_j.$$

Desse modo,

$$\pi(F_1, \dots, F_m) = \{y_1, \dots, y_k\},$$

e vale

$$\pi(\text{Fin}(V_1) \times \cdots \times \text{Fin}(V_m)) = \langle V_1, \dots, V_m \rangle \cap \text{Fin}(X).$$

■

Agora veremos uma classe de espaços cujo hiperespaço de fechados não é localmente conexo.

Teorema 4.4.5. [4, p. 383] Se X é um espaço métrico não compacto, então $(F(X), T_V)$ não é localmente conexo.

Demonstração: Pela não compacidade de X , existe uma sequência (x_n) em X que não possui ponto de acumulação. Sendo assim, denotando por C o conjunto dos pontos da sequência, C é um conjunto fechado.

Afirmamos que é possível cobrir C por uma coleção

$$\{U_n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

de abertos disjuntos. Ora, espaços métricos são T_4 , portanto, se

$$C_n = \{x_k \mid k \leq n\} \quad \text{e} \quad C^n = C_n^c \cap C,$$

ambos são fechados em X e existe um aberto V_1 que contém $C_1 = \{x_1\}$ e cujo fecho não intersecta C^1 . Podemos escolher

$$U_1 = B(x_1, \varepsilon_1) \subseteq V_1$$

Agora, suponhamos que temos os abertos $\{U_1, \dots, U_k\}$. Vamos construir o aberto U_{k+1} . Novamente, por ser T_4 , existe um aberto V que contém C_{k+1} e cujo fecho não intersecta C^{k+1} . Definindo

$$U_{k+1} = B(x_{k+1}, \varepsilon_{k+1}) \subseteq V \cap \overline{U_1}^c \cap \cdots \cap \overline{U_k}^c,$$

para algum ε_{k+1} , temos U_{k+1} disjunto a U_j se $j \leq k$ e cujo fecho não intersecta C^{k+1} . Assim, obtemos a cobertura desejada.

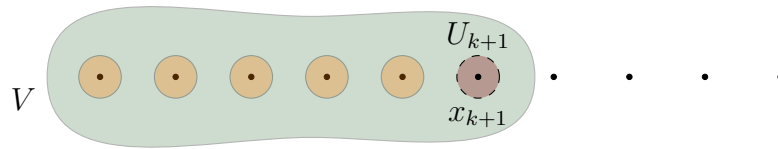


Figura 4.4: Construção de U_{k+1} .

Com essa cobertura, podemos prosseguir com a demonstração. Seja

$$U = \bigcup U_n.$$

Pela construção de U

$$C \in \langle U \rangle.$$

Agora, seja U' vizinhança aberta de C contida em $\langle U \rangle$. Existem abertos $V, V_1, \dots, V_m \subseteq X$ tais que

$$C \in W = \langle V \rangle \cap \langle X, V_1 \rangle \cap \dots \cap \langle X, V_m \rangle \subseteq U'.$$

Sendo assim, para todo $i \leq m$, existe $x_{n(i)} \in V_i \cap C$. Definimos

$$F = \{x_{n(1)}, \dots, x_{n(m)}\},$$

de modo que $F \in W \subseteq U'$. Fixe $k > \max\{n(i)\}$. Provaremos que

$$\mathcal{V} = U' \cap \langle X, U_k \rangle$$

é simultaneamente aberto e fechado em U' . Daí, por ter $F \in \mathcal{V}^c \cap U'$, $C \in \mathcal{V}$ e \mathcal{V} estar contido em U' , U' não será uma vizinhança conexa de C .

O conjunto \mathcal{V} é aberto, por ser interseção de abertos de $F(X)$. Agora observemos que

$$\mathcal{V} = U' \cap \langle X, \bar{U}_k \rangle,$$

o que provará que \mathcal{V} é fechado em U' . De fato, observemos que se $x \in \bar{U}_k \setminus U_k$, então $x \notin U$, portanto qualquer conjunto que contenha x não pode estar em $\langle U \rangle$, e assim

$$\mathcal{V} = W \cap \langle X, \bar{U}_k \rangle.$$

Desse modo, U' não é vizinhança conexa (como subespaço) e $F(X)$ não é localmente conexo. ■

Em particular temos o seguinte resultado para $(F(\mathbb{R}^n), T_V)$.

Corolário 4.4.6. $(F(\mathbb{R}^n), T_V)$ não é localmente conexo.

Demonstração: Uma vez que \mathbb{R}^n não é compacto, o Teorema 4.4.5 prova que $(F(\mathbb{R}^n), T_V)$ não é localmente conexo. ■

Finalizamos o capítulo com uma série de resultados apenas enunciados por Michael que abordam como a desconexidade de X afeta seus hiperespaços e vice-versa.

Proposição 4.4.7. [18, p. 166] X tem dimensão zero se e somente se $\text{Comp}(X)$ tem dimensão zero.

Demonstração: Se X tem dimensão zero, tomamos $F \in \text{Comp}(X)$ e aberto básico $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ que contém F . Uma vez que X possui dimensão zero, para cada $f \in F$ existe uma vizinhança aberta e fechada V_f contida em todos os abertos U_i tais que $f \in U_i$. Desse modo, obtemos uma cobertura de F pelas vizinhanças V_f . Pela compacidade de F existe uma coleção $\{f_1, \dots, f_m\} \subset F$ tal que

$$F \subset \bigcup_{i=1}^m V_{f_i}$$

e por definição

$$F \in \langle V_{f_1}, \dots, V_{f_m} \rangle \subseteq \langle U_1, \dots, U_n \rangle.$$

Uma vez que os V_{f_i} são fechados e abertos, $\langle V_{f_1}, \dots, V_{f_m} \rangle$ é fechado e aberto. Assim, provamos que todo aberto básico contém uma vizinhança aberta e fechada. Desse modo,

$$\{\langle V_1, \dots, V_n \rangle \mid V_i \text{ é aberto e fechado}\}$$

constitui um sistema fundamental de vizinhanças simultaneamente abertas e fechadas de $F(X)$.

Se $\text{Comp}(X)$ possui dimensão zero, $\text{Fin}_1(X)$ como subespaço de $\text{Comp}(X)$ também possui dimensão zero. Ora, $X \simeq \text{Fin}_1(X)$, logo, se \mathcal{V} é um sistema fundamental de vizinhanças simultaneamente abertas e fechadas de $\text{Fin}(X)$, então $i^{-1}(\mathcal{V})$ é um sistema fundamental de vizinhanças simultaneamente abertas e fechadas de X . Portanto, X possui dimensão zero. ■

Proposição 4.4.8. [18, p. 166] X é totalmente desconexo se e somente se $\text{Comp}(X)$ é totalmente desconexo.

Demonstração: Se X é totalmente desconexo, sejam E e F elementos de $\text{Comp}(X)$. Precisamos encontrar um conjunto simultaneamente aberto e fechado que contém F mas não E . Podemos supor sem perda de generalidade que existe $f \in F \setminus E$. Para cada $e \in E$ existe uma vizinhança aberta e fechada V_e de e que não contém f . Sendo assim, pela compacidade de E , existem $e_1, \dots, e_n \in E$ tais que

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n V_{e_i} = V$$

e V é um conjunto simultaneamente aberto e fechado que não contém f . Portanto,

$$E \in \langle V \rangle \quad \text{e} \quad F \in \langle V \rangle^c = \langle X, V^c \rangle,$$

mas por V ser fechado e aberto, $\langle V \rangle$ e $\langle X, V^c \rangle$ são abertos e fechados disjuntos que contém E e F respectivamente.

Se $\text{Comp}(X)$ é totalmente desconexo, então $\text{Fin}_1(X)$ também é como subespaço. Ora, temos que $\text{Fin}_1(X) \simeq X$, portanto X é totalmente desconexo. ■

Proposição 4.4.9. [18, p. 166] X é discreto se e somente se $\text{Comp}(X)$ é discreto.

Demonstração: Se X é discreto, os conjuntos compactos de X são finitos. Logo, dado um conjunto compacto $F = \{f_1, \dots, f_n\}$, temos

$$\{F\} = \{\{f_1\}, \dots, \{f_n\}\},$$

que é um aberto em $\text{Comp}(X)$. Portanto, $\text{Comp}(X)$ é discreto.

Se $\text{Comp}(X)$ é discreto, então $\text{Fin}_1(X)$ é discreto como subespaço de $\text{Comp}(X)$. Uma vez que $X \simeq \text{Fin}(X)$, temos que X é discreto. ■

Proposição 4.4.10. [18, p. 166] X não possui pontos isolados se e somente se $F(X)$ não possui pontos isolados.

Demonstração: Vamos provar a contrapositiva, isto é, X possui ponto isolado se e somente se $F(X)$ possui ponto isolado.

Se X possui ponto isolado, digamos x , então $\{x\}$ é um aberto e

$$\{\{x\}\} = \langle \{x\} \rangle$$

é um ponto isolado de $F(X)$.

Se $F(X)$ possui um ponto isolado, digamos F , temos que $\{F\}$ é aberto em $F(X)$. Desse modo, existe um aberto básico que consiste apenas de F , ou seja, existem abertos U_1, \dots, U_n de X tais que

$$\{F\} = \langle U_1, \dots, U_n \rangle.$$

Vamos encontrar um ponto de X que é aberto a partir desses U_i . Observemos que, uma vez que $\{F\} = \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, para cada i temos

$$U_i = F \cap U_i,$$

pois caso contrário poderíamos tomar $y \in F^c \cap U_i$ e o conjunto

$$G = F \cup \{y\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle,$$

o que é absurdo. Agora precisamos mostrar que para algum i vale $F \cap U_i = \{f_i\}$ para algum $f_i \in F$. Vamos supor por absurdo que para todo i temos $|F \cap U_i| > 1$.

Primeiro, observamos que se existe i tal que

$$\{f_{i,1}, f_{i,2}\} \subseteq F \cap U_i,$$

mas $f_{i,2} \notin U_j$ para $j \neq i$, então tomando $f_j \in F \cap U_j$ temos que

$$\{\{f_1, \dots, f_{i,1}, \dots, f_n\}, \{f_1, \dots, f_{i,2}, \dots, f_n\}\} \subseteq \langle U_1, \dots, U_n \rangle,$$

o que é absurdo. Portanto, podemos supor que para todo i existe $j \neq i$ tal que $f_j \in F \cap U_i \cap U_j$ e $f_j \neq f_i$. Começamos observando que, nessas condições, se

$$F \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle,$$

então existe $f_i \in U_i \cap F$ e $f_j \in U_j \cap F$ com $f_i \neq f_j$ para algum $i \neq j$, pois caso contrário

$$F = \{f\}$$

e $|F \cap U_k| = 1$ para todo k . A ideia é mostrar que dado um conjunto no aberto, podemos remover pontos dele e encontrar outro conjunto, o que é absurdo. Para i e j satisfazendo as hipóteses, se

$$F = \{f_1, \dots, f_i, \dots, f_j, \dots, f_n\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle,$$

podemos retirar f_i , obtendo um conjunto

$$F' = \{f_1, \dots, f_{i-1}, f_{i+1}, \dots, f_j, \dots, f_n\} \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle.$$

Contudo, não temos garantia que $F' \neq F$, pois pode haver $k \neq i$ tal que $f_i = f_k$. Por hipótese, para todo k que isso aconteça, podemos removê-lo, pois existe $f_\ell \neq f_k = f_i$ com $\ell \neq k$ e $f_\ell \in F \cap U_k \cap U_\ell$. Assim, obtemos um novo conjunto

$$F'' \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$$

que não possui f_i , logo é diferente de F , o que é um absurdo. ■

Capítulo 5

Caminhos em Hiperespaços

Tendo como base o artigo *Paths in Hyperspaces* [4], discutiremos neste capítulo a conexidade por caminhos de hiperespaços quando o espaço-base X é um espaço métrico não compacto. Começamos discutindo duas propriedades que a topologia de Vietoris possui. Essas propriedades nos levam ao Teorema 5.1.2, de grande importância, por apresentar uma condição mais simples para provar a conexidade por caminhos de $F_L(X)$ com a topologia de Vietoris.

Além do Teorema 5.1.2, os principais resultados se encontram nas últimas três seções. Na Seção 5.5 destacamos as Proposições 5.5.8 e 5.5.9, que provam que hiperespaços dotados da topologia de Vietoris e a métrica de Hausdorff são semirreticulados de Lawson, respectivamente. Uma vez que semirreticulados de Lawson satisfazem propriedades de conexidade que se aproximam da conexidade por caminhos (k -conexidade quando $k > 0$), passamos às duas últimas seções para investigar mais profundamente a questão da conexidade por caminhos. A penúltima, Seção 5.6, trata da topologia de Vietoris, e podemos destacar os seguintes resultados:

- Se todo subconjunto compacto de X está contido em um subcontínuo, então $(\text{Comp}(X), T_V)$ é conexo por caminhos (Teorema 5.6.6).
- Se (X, d) é separável, então $(F(X), T_V)$ é conexo por caminhos (Corolário 5.6.10).

A última, Seção 5.7, trata da métrica de Hausdorff e tem como destaque, além de explicar porquê consideramos a conexidade por caminhos de $F_L(X)$ e não em $F(X)$, os seguintes resultados:

- Uma condição mais simples para provar a conexidade por caminhos de $F_L(X)$ (Teorema 5.7.8).
- Se (X, d) é espaço métrico quase convexo, então $(F_L(X), h)$ é conexo por caminhos (Teorema 5.7.14).
- Existem duas propriedades necessárias para ter $F_L(X)$ conexo por caminhos quando dotado da métrica de Hausdorff (Teorema 5.7.30).

5.1 Mais Propriedades da Topologia de Vietoris

Agora apresentaremos uma demonstração de duas propriedades de convergência na topologia de Vietoris citadas em [4].

Proposição 5.1.1. [4, p. 380] Se X é um espaço métrico, então em $(F(X), T_V)$ valem as seguintes propriedades

1. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a A , então $(C \cup A_n)$ converge a $C \cup A$ em $F(X)$.

2. Se $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de conjuntos¹ e $\bigcup_n A_n$ é denso em X , então $\{A_n\}$ converge a X em $F(X)$.

Demonstração:

1. Uma vez que (A_n) converge a A , toda vizinhança básica $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$ de A contém a sequência (A_n) a partir de algum N , ou seja, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então

$$A_n \subseteq \bigcup_i U_i \quad \text{e} \quad A_n \cap U_i \neq \emptyset \quad \forall i.$$

Desse modo, se $\langle V_1, \dots, V_\ell \rangle$ é vizinhança básica de $C \cup A$, podemos tomar a maior subcoleção $\mathcal{V} = \{V_{1,A}, \dots, V_{\ell,A}\}$ de $\{V_1, \dots, V_\ell\}$ tal que

$$A \subseteq \bigcup_{j=1}^{\ell} V_{j,A} \quad \text{e} \quad A \cap V_{j,A} \neq \emptyset \quad \forall j \in \{1, \dots, \ell\},$$

ou seja, tal que $A \in \langle V_{1,A}, \dots, V_{\ell,A} \rangle$. Pela convergência de (A_n) a A , existe $N \in \mathbb{N}$ para o qual

$$A_n \in \langle V_{1,A}, \dots, V_{\ell,A} \rangle$$

para todo $n \geq N$. Por definição, se $V_j \notin \mathcal{V}$, devemos ter

$$C \cap V_j \neq \emptyset,$$

pois $C \cup A \in \langle V_1, \dots, V_\ell \rangle$. Portanto, se $n \geq N$

$$C \cup A_n \in \langle V_1, \dots, V_n \rangle,$$

e assim a sequência $(C \cup A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge a $C \cup A$.

2. Seja $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$ uma vizinhança básica de X . Por (A_n) ser uma sequência crescente de subconjuntos de X , temos

$$A_n \cap U_i \neq \emptyset$$

para todo $n \geq N$ se e somente se $A_N \cap U_i \neq \emptyset$. Além disso, por $\langle U_1, \dots, U_m \rangle$ ser uma vizinhança de X , para todo $n \in \mathbb{N}$

$$A_n \subseteq X = \bigcup_{i=1}^m U_i.$$

Desse modo, para mostrar que (A_n) converge a X , precisamos mostrar apenas que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_N \cap U_i \neq \emptyset$ para todo i . Sendo assim, fixamos $x_i \in U_i$. Pela densidade de

$$A = \bigcup_n A_n,$$

existe uma sequência (a_k) em A que converge a x_i . Definimos

$$N_i = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid a_k \in U_i \cap A_n \text{ para algum } k\}.$$

Portanto, se $N = \max\{N_1, \dots, N_m\}$, temos

$$A_N \cap U_i \neq \emptyset$$

para todo i e consequentemente

$$A_N \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle.$$

¹Isto é, $A_n \subseteq A_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.



Teorema 5.1.2. [4, p. 380] Se (X, T) um espaço métrico separável, então as seguintes condições são equivalentes na topologia de Vietoris em $F(X)$

(a) $F(X)$ é conexo por caminhos.

(b) Para cada par $x, y \in X$ existe um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow (F(X), T)$ tal que

$$\gamma(0) = \{x\} \quad \text{e} \quad y \in \gamma(1).$$

Demonstração: Se $F(X)$ é conexo por caminhos, então para todo par de pontos $x, y \in X$ existe um caminho de $\{x\}$ a $\{y\}$, portanto (a) \Rightarrow (b). Para provar que (b) \Rightarrow (a), usaremos o fato de X ser separável para provar que se (b) vale, então todo conjunto $F \in F(X)$ pode ser ligado por um caminho a X em $F(X)$, e $F(X)$ é conexo por caminhos. A ideia é criar um caminho que em X pode ser visto como uma expansão, que vai aumentando F de modo que ele contenha os pontos do conjunto enumerável denso e acabe cobrindo todo o espaço X .

Uma vez que X é separável, podemos tomar um subconjunto enumerável denso $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$. Dado $F \in F(X)$, defina $x_0 = f$ para algum $f \in F$. Pela condição (b), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe um caminho

$$\gamma_n : [0, 1] \rightarrow F(X)$$

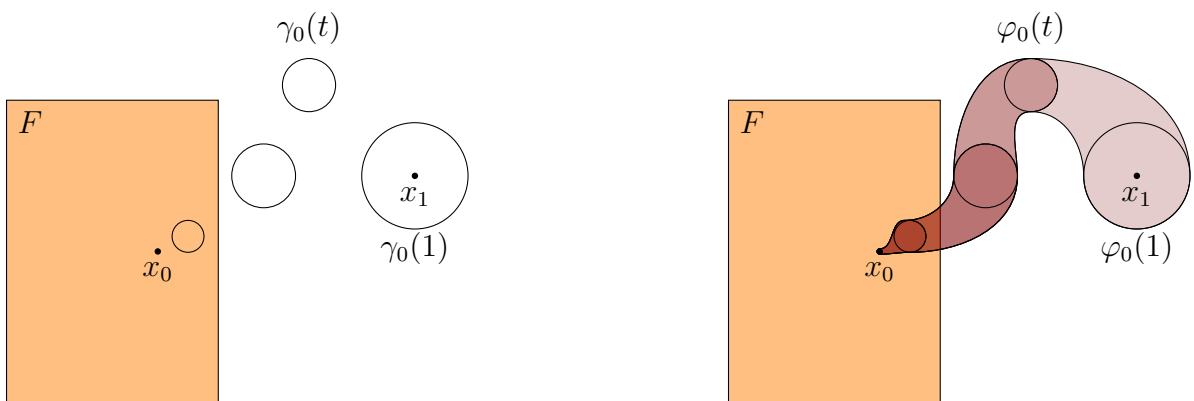
com $\gamma_n(0) = \{x_n\}$ e $x_{n+1} \in \gamma_n(1)$. Notemos que para todo $s \in [0, 1]$, pelo fato do espaço ser regular, o Teorema 3.3.15 garante que a união dos conjuntos na imagem de γ_n de 0 a s , isto é,

$$\bigcup \gamma_n([0, s]),$$

é um conjunto fechado em X , pois $\gamma_n([0, s])$ é compacto em $F(X)$. Isso vale para todo n e assim podemos definir para $n \in \mathbb{N}$

$$\varphi_n(t) = F \cup \left(\bigcup \gamma_n([0, t]) \right) \cup \left(\bigcup_{k < n} \left(\bigcup \gamma_k([0, 1]) \right) \right).$$

Observemos que φ_n está bem definida para todo n por termos uma união finita de fechados em X , constituindo um fechado em X .



(a) O conjunto fechado F em laranja e cada disco é um conjunto fechado correspondente a $\gamma_0(t)$ para algum t .

(b) A função φ_0 realiza uma expansão de F ao longo do caminho γ_0 .

Figura 5.1

Agora provaremos que cada $\varphi_n : [0, 1] \rightarrow F(X)$ é um caminho (função contínua) provando que a pré-imagem de abertos sub-básicos é aberto em $[0, 1]$. Se U é aberto em X ,

$$\varphi_n^{-1}(\langle U \rangle) = \{t \in [0, 1] \mid \varphi_n(t) \subseteq U\}.$$

Ora, se

$$G = F \cup \left(\bigcup_{k < n} \left(\bigcup \gamma_k([0, 1]) \right) \right),$$

então

$$\varphi_n(t) \subseteq U \Leftrightarrow G \cup \left(\bigcup \gamma_n([0, t]) \right) \subseteq U.$$

Portanto, se $G \not\subseteq U$, teremos $\varphi_n^{-1}(\langle U \rangle) = \emptyset$. Se $G \subseteq U$, lembremos que γ_n é um caminho, portanto é contínua e

$$\gamma_n^{-1}(\langle U \rangle) = \{t \in [0, 1] \mid \gamma_n(t) \subseteq U\}$$

é aberto em $[0, 1]$. Precisamos dividir em casos. Se $\gamma_n(0) \not\subseteq U$, uma vez que

$$\gamma_n(0) \subset \varphi_n(t),$$

temos

$$\varphi_n(t) \not\subseteq U$$

para todo t e a pré-imagem de $\langle U \rangle$ é o conjunto vazio, que é aberto. Outra possibilidade é $\gamma_n(t) \subseteq U$ para todo $t \in [0, 1]$. Então,

$$\varphi_n^{-1}(\langle U \rangle) = [0, 1]$$

é aberto. Por fim, se

$$\gamma_n(0) \subseteq U,$$

mas existe $t \in [0, 1]$ tal que $\gamma_n(t) \not\subseteq U$, afirmamos que

$$\varphi_n^{-1}(\langle U \rangle) = [0, s),$$

onde

$$s = \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma_n(r) \subseteq U \forall r \leq t\}.$$

De fato, observemos que

$$\begin{aligned} s &= \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma_n(r) \subseteq U \forall r \leq t\} \\ &= \inf\{t \in [0, 1] \mid \gamma_n(t) \not\subseteq U\} \\ &= \inf \gamma_n^{-1}(\langle X, U^c \rangle), \end{aligned}$$

e sendo este último conjunto um fechado, e portanto compacto em $[0, 1]$, o ínfimo é um elemento de $\gamma_n^{-1}(\langle X, U^c \rangle)$. Assim,

$$\varphi_n(t) \subseteq U \Leftrightarrow t < s$$

e

$$\varphi_n^{-1}(\langle U \rangle) = [0, s),$$

é aberto.

Agora, seja V um aberto em X . Se $G \cap V \neq \emptyset$, então

$$\varphi_n^{-1}(\langle X, V \rangle) = [0, 1].$$

Se $G \cap V = \emptyset$, precisamos analisar o que acontece para cada t . Se $\gamma_n(t) \subseteq V^c$ para todo $t \in [0, 1]$, temos que

$$\varphi_n^{-1}(\langle X, V \rangle) = \emptyset,$$

que é aberto. Se existe $t \in [0, 1]$ tal que

$$\gamma_n(t) \cap V \neq \emptyset,$$

afirmamos que

$$\varphi_n^{-1}(\langle X, V \rangle) = (s, 1],$$

onde

$$s = \inf\{t \in [0, 1] \mid \gamma_n(t) \cap V \neq \emptyset\}.$$

Ora,

$$\begin{aligned} s &= \inf\{t \in [0, 1] \mid \gamma_n(t) \cap V \neq \emptyset\} \\ &= \sup\{t \in [0, 1] \mid \gamma_n(t) \subseteq V^c\} \\ &= \sup \gamma_n^{-1}(\langle V^c \rangle). \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\gamma_n^{-1}(\langle V^c \rangle)$$

é fechado em $[0, 1]$, temos um conjunto compacto e o supremo é elemento de $\gamma_n^{-1}(\langle V^c \rangle)$. Desse modo,

$$\varphi_n^{-1}(\langle X, V \rangle) = (s, 1],$$

o qual é um conjunto aberto. Assim, provamos a continuidade de φ_n para todo n .

Agora, observemos que

$$\varphi_n(1) = \varphi_{n+1}(0),$$

pois $\gamma_{n+1}(0) = \{x_{n+1}\}$ e $x_{n+1} \in \gamma_n(1)$. Desse modo, podemos definir

$$\varphi : [0, 1) \rightarrow F(X)$$

onde

$$\varphi(t) = \varphi_n(2^{n+1}(t-1) + 2), \text{ se } t \in \left[1 - \frac{1}{2^n}, 1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right].$$

Por fim, definimos $\gamma : [0, 1] \rightarrow F(X)$ como

$$\gamma(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{se } t \in [0, 1), \\ X, & \text{se } t = 1. \end{cases}$$

Afirmamos que γ é contínua. Pela continuidade de φ , precisamos mostrar apenas que γ é contínua em 1. Seja (t_k) uma sequência convergente a 1, e (t_{k_ℓ}) uma subsequência crescente de (t_k) . Notemos que se $t_1 \leq t_2$, então

$$\gamma(t_1) \subseteq \gamma(t_2),$$

portanto, pela propriedade 2 da Proposição 5.1.2

$$\lim_{k_\ell \rightarrow \infty} \gamma(t_{k_\ell}) = X.$$

Queremos mostrar que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma(t_k) = X.$$

Observemos que dado aberto básico $\langle U_1, \dots, U_n \rangle$ de X , existe $L \in \mathbb{N}$ tal que se $k_\ell \geq L$, então

$$\varphi(t_{k_\ell}) \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle.$$

Sendo assim, definimos $\varepsilon = 1 - t_{k_L}$ e existe $K \in \mathbb{N}$ tal que

$$1 - t_k < \varepsilon$$

sempre que $k \geq K$. Em particular,

$$t_k \geq t_{k_L},$$

e pelo fato de φ ser crescente,

$$\varphi(t_{k_L}) \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle$$

implica

$$\varphi(t_k) \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle.$$

Portanto,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \varphi(t_k) = X$$

e γ é contínua. Desse modo, construímos um caminho de F a X . ■

5.2 Propriedades da Métrica de Hausdorff

Proposição 5.2.1. Se (X, d) é um espaço métrico e $E, F \in \mathcal{F}(X)$, então

$$d(x, E \cup F) = \min\{d(x, E), d(x, F)\}$$

Demonstração: Temos

$$d(x, E \cup F) = \inf_{y \in E \cup F} d(x, y) \leq \min\{\inf_{y \in E} d(x, y), \inf_{y \in F} d(x, y)\} = \min\{d(x, E), d(x, F)\}.$$

Agora, se

$$c = d(x, E \cup F),$$

existe uma sequência (y_n) em $E \cup F$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} d(x, y_n) = c.$$

Sendo assim, $E \cap (y_n)$ ou $F \cap (y_n)$ deve ser uma subsequência (y_{n_k}) satisfazendo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} d(x, y_{n_k}) = c,$$

portanto

$$d(x, E) \leq d(x, E \cup F) \quad \text{ou} \quad d(x, F) \leq d(x, E \cup F).$$

Assim, provamos a igualdade. ■

Proposição 5.2.2. Se (X, d) é um espaço métrico e $E_1, E_2, F_1, F_2 \in \mathcal{F}(X)$, então

$$h(E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2) \leq \max\{h(E_1, F_1), h(E_2, F_2)\}.$$

Demonstração: Por definição

$$h(E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2) = \max\{\bar{d}(E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2), \bar{d}(F_1 \cup F_2, E_1 \cup E_2)\}.$$

Ora, por argumento análogo ao da Proposição 5.2.1

$$\begin{aligned} \bar{d}(E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2) &= \sup_{x \in E_1 \cup E_2} d(x, F_1 \cup F_2) \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in E_1} d(x, F_1 \cup F_2), \sup_{x \in E_2} d(x, F_1 \cup F_2) \right\} \\ &= \max \left\{ \sup_{x \in E_1} \min \{d(x, F_1), d(x, F_2)\}, \sup_{x \in E_2} \min \{d(x, F_1), d(x, F_2)\} \right\} \\ &\leq \max \left\{ \sup_{x \in E_1} d(x, F_1), \sup_{x \in E_2} d(x, F_2) \right\} \\ &= \max\{\bar{d}(E_1, F_1), \bar{d}(E_2, F_2)\}. \end{aligned}$$

Podemos fazer o mesmo processo para mostrar que

$$\bar{d}(F_1 \cup F_2, E_1 \cup E_2) \leq \max\{\bar{d}(F_1, E_1), \bar{d}(F_2, E_2)\}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} h(E_1 \cup E_2, F_1 \cup F_2) &\leq \max\{\bar{d}(E_1, F_1), \bar{d}(E_2, F_2), \bar{d}(F_1, E_1), \bar{d}(F_2, E_2)\} \\ &= \max\{h(E_1, F_1), h(E_2, F_2)\}. \end{aligned}$$

■

5.3 Semirreticulados

Já vimos um tipo de relação entre elementos de um conjunto, chamada classe de equivalência. Outro tipo clássico de relações entre elementos são as relações chamadas de **ordem parcial**. Denotando a relação entre elementos de L por \sim , uma relação é ordem parcial se satisfaz as seguintes propriedades para todo $a, b, c \in L$:

- Reflexividade: $a \sim a$;
- Antissimetria: se $a \sim b$ e $b \sim a$, então $a = b$;
- Transitividade: se $a \sim b$ e $b \sim c$, então $a \sim c$.

Usualmente, um conjunto L dotado de uma ordem parcial \leq é denotado por (L, \sim) . Dados a e b em L , o **supremo** de a e b é $c \in L$ tal que $a \leq c$ e $b \leq c$ e para todo $d \in L$ que também satisfaça $a \leq d$ e $b \leq d$ vale $c \leq d$. Se existir, denotamos o supremo de a e b por

$$\sup\{a, b\}.$$

O **ínfimo** de a e b é $c \in L$ tal que $c \leq a$ e $c \leq b$ e para todo $d \in L$ que também satisfaça $d \leq a$ e $d \leq b$ vale $d \leq c$. Se existir, denotamos o ínfimo de a e b por

$$\inf\{a, b\}.$$

Definição 5.3.1. [9, p. 9] Seja L um conjunto dotado de uma ordem parcial \leq . Dizemos que (L, \leq) é um **reticulado** se para todo par de elementos a e b em L existe

$$\sup\{a, b\} \quad \text{e} \quad \inf\{a, b\}.$$

□

Definição 5.3.2. [9, p. 18] Se (L, \leq) é um conjunto dotado de uma relação de uma ordem parcial \leq tal que $\sup\{a, b\}$ existe para todo a e b em L , dizemos que (L, \leq) é um **semirreticulado superior**. Se $\inf\{a, b\}$ existe para todo a e b em L , então (L, \leq) é um **semirreticulado inferior**.

□

Existe uma outra forma de se pensar um reticulado, por meio de álgebras.

Definição 5.3.3. [9, p. 12] Uma **álgebra** é um conjunto A dotado de uma operação n -ária f (um produto), isto é,

$$f : \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n\text{-vezes}} \rightarrow A.$$

Se $n = 2$ dizemos que a operação é binária.

□

Definição 5.3.4. [9, p. 12] Uma álgebra (L, \vee) é chamada de **semirreticulado** se sua operação é binária e satisfaz:

- Comutatividade: se $a, b \in L$, então $a \vee b = b \vee a$.
- Associatividade: se $a, b, c \in L$, então $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$.
- Idempotência: para todo $a \in L$ vale $a \vee a = a$.

□

A partir de um semirreticulado (L, \vee) , podemos definir um semirreticulado superior (L, \leq_{\vee}) . Para isso, basta definir

$$a \leq_{\vee} b \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Proposição 5.3.5. [9, p. 18] Se (L, \vee) é um semirreticulado, então (L, \leq_{\vee}) é um semirreticulado superior.

Demonstração: Precisamos mostrar que \leq_{\vee} é uma ordem parcial e que existe supremo para todo par de pontos. Pela idempotência de \vee temos que $a \leq_{\vee} a$ para todo $a \in L$, portanto a reflexividade está garantida. Agora, se a e b em L satisfazem $a \leq_{\vee} b$ e $b \leq_{\vee} a$, então

$$b = a \vee b = a,$$

portanto $a = b$. Suponhamos que a, b e c em L satisfazem $a \leq_{\vee} b$ e $b \leq_{\vee} c$. Então

$$c = b \vee c = (a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c,$$

portanto $a \leq_{\vee} c$ e temos a transitividade está provada.

Para a parte do supremo, observemos que para todo a e b em L

$$(a \vee b) \vee b = a \vee (b \vee b) = a \vee b$$

e

$$a \vee (a \vee b) = (a \vee a) \vee b = a \vee b.$$

Desse modo, temos que $a \leq a \vee b$ e $b \leq a \vee b$. Contudo, o supremo é a menor cota superior a a e b , então devemos mostrar que $a \vee b$ é a menor cota. Ora, se c é tal que $a \leq_v c$ e $b \leq_v c$, temos que

$$a \vee c = c \quad \text{e} \quad b \vee c = c.$$

Assim,

$$(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c) = a \vee c = c,$$

portanto $a \vee b \leq_v c$ e $a \vee b$ é a menor cota superior de a e b , ou seja, o supremo. ■

A outra direção também é válida, isto é, a partir de um semirreticulado superior, podemos construir um semirreticulado. Para isso, se (L, \leq) é um semirreticulado superior e \vee_{\leq} é um produto em L definido como

$$a \vee_{\leq} b = \sup\{a, b\},$$

então (L, \vee_{\leq}) é um semirreticulado.

Proposição 5.3.6. [9, p. 18] Precisamos mostrar que \vee_{\leq} é uma operação associativa, comutativa e idempotente. Ora, se a, b e c são elementos de L , então

$$a \vee_{\leq} a = \sup\{a, a\} = a.$$

Além disso,

$$a \vee_{\leq} b = \sup\{a, b\} = b \vee_{\leq} a.$$

Por fim,

$$a \vee_{\leq} (b \vee_{\leq} c) = \sup\{a, \sup\{b, c\}\} = \sup\{\sup\{a, b\}, c\} = (a \vee_{\leq} b) \vee_{\leq} c.$$

Para concluir, podemos verificar que a maneira que induzimos uma estrutura a partir de outra é coerente com as definições. Se é $\mathfrak{A} = (L, \vee)$ um semirreticulado, denotamos por $\mathfrak{A}^{\text{ord}}$ o semirreticulado superior induzido por \mathfrak{A} . Se $\mathfrak{A} = (L, \leq)$ é um semirreticulado superior, denotamos por $\mathfrak{A}^{\text{smr}}$ o semirreticulado induzido por \mathfrak{A} .

Teorema 5.3.7. Seja L um conjunto.

1. Se $\mathfrak{A} = (L, \vee)$ é um semirreticulado, então

$$(\mathfrak{A}^{\text{ord}})^{\text{smr}} = \mathfrak{A}.$$

2. Se $\mathfrak{A} = (L, \leq)$ é um semirreticulado superior, então

$$(\mathfrak{A}^{\text{smr}})^{\text{ord}} = \mathfrak{A}.$$

Demonstração:

1. Se $\mathfrak{A} = (L, \vee)$, definimos a ordem parcial \leq_v de modo que

$$a \leq_v b \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

Daí, definimos a operação binária \vee_{\leq_v} de $\mathfrak{A}^{\text{ord}^{\text{smr}}}$ como

$$a \vee_{\leq_v} b = \sup\{a, b\} = a \vee b.$$

Sendo assim, $(\mathfrak{A}^{\text{ord}})^{\text{smr}} = \mathfrak{A}$.

2. Se $\mathfrak{A} = (L, \leq)$ é um semirreticulado superior, temos o produto \vee_{\leq} definido como

$$a \vee_{\leq} b = \sup\{a, b\}.$$

Daí, podemos definir a ordem parcial $\leq_{\vee_{\leq}}$ dada por

$$a \leq_{\vee_{\leq}} b \Leftrightarrow a \vee_{\leq} b = b \Leftrightarrow \sup\{a, b\} = b \Leftrightarrow a \leq b.$$

Desse modo, as ordens \leq e $\leq_{\vee_{\leq}}$ são iguais e $(\mathfrak{A}^{\text{smr}})^{\text{ord}} = \mathfrak{A}$. ■

Similarmente ao que fazemos para grupos, podemos dotar um reticulado de uma topologia. A topologia induzida nem sempre é de Hausdorff, contudo, para os nossos propósitos, será importante ter essa restrição.

Definição 5.3.8. [4, p. 380] Um **semirreticulado topológico** é um semirreticulado (L, \vee) dotado de uma topologia que seja de Hausdorff e tal que o produto \vee seja contínuo. □

Definição 5.3.9. [4, p. 380] Um **subsemirreticulado** de um semirreticulado (L, \vee) é um subconjunto M de L tal que (M, \vee) é um semirreticulado, ou seja, o produto de dois elementos de M é um elemento de M .² □

Definição 5.3.10. [4, p. 380] Um **semirreticulado de Lawson** é um semirreticulado topológico tal que todo ponto possui um sistema fundamental de vizinhanças compostas por subsemirreticulados.³ □

5.4 Retratos

Definição 5.4.1. [10, p. 12] Dizemos que um subconjunto A de um espaço topológico X é **retrato** de X se existir função contínua $r : X \rightarrow A$ tal que $r|_A = \text{id}_A$. A aplicação r é chamada de retração de X em A . □

Definição 5.4.2. [4, p. 380] Um espaço métrico Y é chamado de **retrato absoluto de vizinhanças** se para todo espaço métrico X e toda função $f : F \rightarrow Y$ definida em um fechado $F \subseteq X$ pode ser estendida a um aberto U que contém F . Se for possível tomar $U = X$, dizemos que Y é **retrato absoluto**. □

A princípio, o conceito de retrato absoluto pode parecer diferente de retrato. Contudo, ele é de fato uma generalização do conceito de retrato. Se X é um espaço métrico e $A \subseteq X$ é fechado, A é subespaço métrico e se for retrato absoluto, existe uma extensão $r : X \rightarrow A$ da aplicação

$$\text{id} : A \rightarrow A.$$

Definição 5.4.3. [4, p. 379] Seja $k \in \mathbb{N}$. Um espaço X é **k-conexo** se toda aplicação $f : \mathbb{S}^k \rightarrow X$ admite uma extensão contínua $F : \mathbb{B}^{k+1} \rightarrow X$. Dizemos que X é **localmente k-conexo** se, para cada $x \in X$ e vizinhança U de x , existe vizinhança $V \subseteq U$ de x tal que toda função $f : \mathbb{S}^k \rightarrow V$ se estende continuamente a uma função $F : \mathbb{B}^{k+1} \rightarrow U$. □

²Quando isto acontece, dizemos que a operação é fechada em M .

³Aparentemente este conceito foi introduzido por Lawson em seu artigo "Topological Semilattices with Small Semilattices" de 1961. Lá ele nomeia este tipo de semirreticulado de *small semilattice*, isto é, semirreticulado pequeno.

Observemos que, quando $k = 0$, a propriedade de ser k -conexo é exatamente ser conexo por caminhos.

Teorema 5.4.4. [10, p. 96] Todo espaço que é retrato absoluto é k -conexo para todo $k \in \mathbb{N}$.

Demonstração: Veja [10, p. 96]. ■

5.5 Hiperespaços e Semirreticulados

Semirreticulados de Lawson são espaços de Hausdorff, portanto podemos considerar hiperespaços de semirreticulados. Em particular, consideraremos o hiperespaço $(\text{Fin}(L), T_V)$ de um semirreticulado (L, \vee) .

Proposição 5.5.1. Se (L, \vee) é um semirreticulado de Lawson,

$$\begin{aligned} f : (\text{Fin}(L), T_V) &\longrightarrow L \\ \{a_1, \dots, a_n\} &\longmapsto a_1 \vee \dots \vee a_n \end{aligned}$$

é uma função contínua.

Demonstração: Dado aberto $U \subseteq L$, sabemos que o produto \vee é contínuo. Sendo assim, a aplicação

$$\begin{aligned} f : (\text{Fin}(L), T_V) &\longrightarrow L \\ \{a_1, \dots, a_n\} &\longmapsto a_1 \vee \dots \vee a_n \end{aligned}$$

é contínua para todo n . Portanto, dado $a_1 \vee \dots \vee a_n \in U$, existem $W_1, \dots, W_n \subseteq L$ com $a_i \in W_i$ tais que se

$$W = W_1 \times \dots \times W_n,$$

então $g(W) \subseteq U$. Contudo, não temos garantia que

$$f(\langle W_1, \dots, W_n \rangle) \subseteq U.$$

De fato, poderíamos ter, por exemplo, $b_1, \dots, b_{n+1} \in W_1$ e

$$\{a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_{n+1}\} \in \langle W_1, \dots, W_n \rangle$$

mas a função g não garante que

$$a_1 \vee \dots \vee a_n \vee b_1 \vee \dots \vee b_{n+1} \in U.$$

Isso aconteceria se

$$a_1 \vee b_1 \vee \dots \vee b_{n+1} \in W_1,$$

ou seja, se W_1 for semirreticulado. Portanto, como L é semirreticulado de Lawson, podemos tomar cada W_i como subsemirreticulado de modo que $a_i \in W_i$ e teremos

$$f(\langle W_1, \dots, W_n \rangle) \subseteq U. ■$$

Uma vez que a topologia de (L, \vee) é de Hausdorff e a topologia de Vietoris é admissível, podemos identificar (L, \vee) com o subespaço $\text{Fin}_1(L)$ de $\text{Fin}(L)$. Com isso, a proposição anterior permite afirmar o seguinte corolário:

Corolário 5.5.2. Todo semirreticulado de Lawson (L, \vee) é um retrato de $(\text{Fin}(L), T_V)$.

Demonstração: A função

$$\begin{aligned} f : (\text{Fin}(L), T_V) &\longrightarrow L \\ \{a_1, \dots, a_n\} &\longmapsto a_1 \vee \dots \vee a_n \end{aligned}$$

composta com a inclusão $L \hookrightarrow \text{Fin}_1$ constitui uma retração de $\text{Fin}(L)$ em $\text{Fin}_1(L)$, e sob a identificação de L com $\text{Fin}_1(L)$ podemos afirmar que L é retrato de $\text{Fin}(L)$. ■

Antes da próxima definição, recorremos a uma terminologia de Topologia: Um conjunto é F_σ se for união contável de fechados.

Definição 5.5.3. [6, p. 252] Seja X um espaço topológico T_1 . Um subconjunto $\mathcal{E} \subseteq \text{Fin}(X)$ é chamado de **hiperespaço de expansão** se for um conjunto F_σ satisfazendo a seguinte propriedade: se $F \in \text{Fin}(X)$ contém um elemento de \mathcal{E} , vale que $F \in \mathcal{E}$. □

Sabemos pela Proposição 3.3.10 que $\text{Fin}_n(L)$ é fechado e

$$\text{Fin}(L) = \bigcup_n \text{Fin}_n(L),$$

portanto $\text{Fin}(L)$ é F_σ . Assim, por definição, $\text{Fin}(L)$ é hiperespaço de expansão. Agora, recorremos ao artigo *Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to \aleph_0 -dimensional linear metric spaces* de Curtis e Nhu [6] para provar um resultado do artigo de Kubiś e Costantini [4].

Lema 5.5.4. [6, p. 254] Se X é metrizável e localmente conexo por caminhos, então todo hiperespaço de expansão de X é um retrato absoluto de vizinhanças.

Demonstração: Veja [6, p. 254-255]. ■

Lema 5.5.5. [6, p. 255] Seja X um espaço métrico localmente conexo por caminhos. Se \mathcal{E} é um hiperespaço de expansão de X tal que todo elemento de \mathcal{E} intersecta cada uma das componentes conexas de X , então X é um retrato absoluto.

Demonstração: Veja [6, p. 255]. ■

Proposição 5.5.6. [4, p. 381] Seja (L, \vee) um semirreticulado de Lawson metrizável. Se L é localmente conexo por caminhos, então L é retrato absoluto de vizinhanças. Além disso, se L for conexo, então L é retrato absoluto.

Demonstração: Pelos Lemas 5.5.4 e 5.5.5, temos que $\text{Fin}(L)$ é respectivamente retrato absoluto de vizinhanças e retrato absoluto. Sendo assim, usaremos este fato para construir extensões de funções contínuas $f : A \rightarrow L$, onde $A \subseteq Y$ é um fechado e Y metrizável.

Ora, se $\text{Fin}(L)$ é retrato absoluto de vizinhanças, dado $f : A \rightarrow L$, podemos usar a inclusão $i : L \rightarrow \text{Fin}(L)$ para obter uma função

$$g = i \circ f : A \rightarrow \text{Fin}(L).$$

Existe aberto $U \subseteq Y$ com $A \subseteq U$ que admite uma extensão contínua

$$G : U \rightarrow \text{Fin}(L).$$

Pelo Corolário 5.5.2, existe $r : \text{Fin}(L) \rightarrow L$ contínua que leva $\{x\}$ em x , e assim

$$F = r \circ G : U \rightarrow L$$

é uma extensão contínua de f , pois r e G são contínuas e

$$F|_A = (r \circ G)|_A = r \circ G|_A = r \circ g = r \circ i \circ f = f.$$

Desse modo, L é retrato absoluto de vizinhanças. Se $\text{Fin}(L)$ for retrato absoluto, a mesma construção garante que L é retrato absoluto ao tomarmos $U = Y$. ■

Teorema 5.5.7. [4, p. 381] Todo semirreticulado de Lawson metrizável (L, \vee) é k -conexo para todo $k > 0$.

Demonstração: Dado $f : \mathbb{S}^k \rightarrow L$, precisamos mostrar que f admite uma extensão contínua $F : \mathbb{B}^{k+1} \rightarrow L$. Podemos usar f para induzir uma nova função contínua

$$\begin{aligned} \bar{f} : \text{Fin}(\mathbb{S}^k) &\longrightarrow \text{Fin}(L) \\ \{x_1, \dots, x_n\} &\longmapsto \{f(x_1), \dots, f(x_n)\}. \end{aligned}$$

Observemos que \bar{f} é contínua de fato, pois se U é aberto de X ,

$$\begin{aligned} \bar{f}^{-1}(\langle U \rangle) &= \{F \mid f(F) \subseteq U\} \\ &= \{F \mid F \subseteq f^{-1}(U)\} \\ &= \langle f^{-1}(U) \rangle \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \bar{f}^{-1}(\langle X, U \rangle) &= \{F \mid f(F) \cap U \neq \emptyset\} \\ &= \{F \mid F \cap f^{-1}(U) \neq \emptyset\} \\ &= \langle X, f^{-1}(U) \rangle. \end{aligned}$$

Agora, $\text{Fin}(\mathbb{S}^k)$ é um hiperespaço de expansão e \mathbb{S}^k é metrizável, conexo e localmente conexo por caminhos, logo $\text{Fin}(\mathbb{S}^k)$ é retrato absoluto pelo Lema 5.5.5. Desse modo, existe uma extensão da aplicação inclusão $i : \mathbb{S}^k \rightarrow \text{Fin}(\mathbb{S}^k)$ a

$$\bar{i} : \mathbb{B}^{k+1} \rightarrow \text{Fin}(\mathbb{S}^k).$$

Se $r : \text{Fin}(L) \rightarrow L$ é uma retração de $\text{Fin}(L)$ em L , temos

$$F = r \circ \bar{f} \circ i : \mathbb{B}^{k+1} \rightarrow L.$$

A aplicação F é extensão de f , pois para todo $x \in \mathbb{S}^k$,

$$F(x) = (r \circ \bar{f} \circ i)(x) = (r \circ \bar{f})(\{x\}) = r(\{f(x)\}) = f(x). ■$$

Finalmente podemos provar os dois resultados a seguir, apresentados em [4, p. 381]. Eles afirmam que hiperespaços são semirreticulados de Lawson, assim a k -conexidade de hiperespaços será garantida para $k > 0$, restando exatamente quando $k = 0$, ou seja, quando queremos saber sobre a conexidade por caminhos. Observemos que em $F(X)$ a operação de união é sempre associativa, comutativa e idempotente. Portanto, bastará provar a continuidade. Denotaremos a união como uma função

$$\begin{aligned} \cup : F(X) \times F(X) &\longrightarrow F(X) \\ (E, F) &\longmapsto E \cup F. \end{aligned}$$

Se $A, B \subseteq F(X)$, então

$$\cup[A \times B] = \{E \cup F \mid E \in A, F \in B\}.$$

Proposição 5.5.8. O hiperespaço $F(X)$ com a topologia de Vietoris T_V é um semirreticulado de Lawson com relação à união.

Demonstração: Sabemos que uma base da topologia de Vietoris é composta de elementos da forma

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle,$$

onde U_1, \dots, U_n são abertos de X . Ora, se $E, F \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$, então

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_i \quad \text{e} \quad E \cap U_i \neq \emptyset \quad \text{para todo } i,$$

e o mesmo vale para F . Sendo assim, $E \cup F \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle$ e temos que os abertos básicos são subsemirreticulados.

Falta mostrar a continuidade da união. Seja V um aberto de X e E, F fechados tais que

$$E \cup F \in \langle V \rangle.$$

Temos ambos E e F contidos em V . Portanto, $(E, F) \in \langle V \rangle \times \langle V \rangle$ e

$$\cup[\langle V \rangle \times \langle V \rangle] \subseteq \langle V \rangle$$

por definição, então a pré-imagem de $\langle V \rangle$ pela união é um aberto. Por outro lado, se $E \cup F \in \langle X, V \rangle$, temos que $E \cap V \neq \emptyset$ ou $F \cap V \neq \emptyset$. Desse modo,

$$(E, F) \in \langle X, V \rangle \times \langle X \rangle \quad \text{ou} \quad (E, F) \in \langle X \rangle \times \langle X, V \rangle$$

e um desses será um aberto contido na pré-imagem de $\langle X, V \rangle$ que contém (E, F) . Assim, \cup é contínua na topologia de Vietoris e o hiperespaço de fechados é um semirreticulado de Lawson. ■

Proposição 5.5.9. O hiperespaço $(F(X), h)$ com a métrica de Hausdorff é um semirreticulado de Lawson com relação à união.

Demonstração: Primeiro, mostraremos que cada bola é um subsemirreticulado, ou seja, se E_1 e E_2 estão em $B(F, \varepsilon)$, então $E_1 \cup E_2$ também está. Ora, isso vem do fato que

$$h(F, E_1 \cup E_2) \leq \max\{h(F, E_1), h(F, E_2)\} < \varepsilon.$$

Para a continuidade da união, dado aberto básico $B(F, \varepsilon)$, queremos mostrar que se

$$E_1 \cup E_2 \in B(F, \varepsilon),$$

existem δ_{E_1} e δ_{E_2} tais que

$$\cup[B(E_1, \delta_{E_1}) \times B(E_2, \delta_{E_2})] \subseteq B(F, \varepsilon).$$

Em geral, se $G_1, G_2 \in F(X)$, teremos

$$\begin{aligned} h(F, G_1 \cup G_2) &\leq h(F, E_1 \cup E_2) + h(E_1 \cup E_2, G_1 \cup G_2) \\ &\leq h(F, E_1 \cup E_2) + \max\{h(E_1, G_1), h(E_2, G_2)\}. \end{aligned}$$

Portanto, sendo

$$\delta_{E_1} = \delta_{E_2} = \frac{\varepsilon - h(F, E_1 \cup E_2)}{2},$$

concluimos que se $G_1 \in B(E_1, \delta_{E_1})$ e $G_2 \in B(E_2, \delta_{E_2})$,

$$\begin{aligned} h(F, G_1 \cup G_2) &\leq h(F, E_1 \cup E_2) + \max\{h(E_1, G_1), h(E_2, G_2)\} \\ &< \frac{\varepsilon + h(F, E_1 \cup E_2)}{2} \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

E desse modo encontramos δ_{E_1} e δ_{E_2} como desejado e provamos a continuidade de \cup . ■

Corolário 5.5.10. Hiperespaços com a topologia de Vietoris metrizável e hiperespaços com a métrica de Hausdorff são k -conexos para todo $k > 0$.

Demonstração: É consequência direta das Proposições 5.5.7, 5.5.8 e 5.5.9. ■

As próximas seções discutirão a k -conexidade quando $k = 0$, ou seja, a conexidade por caminhos.

5.6 Conexidade por Caminhos na Topologia de Vietoris

Definição 5.6.1. [11, p. 80] Um **arco** em um espaço X é um conjunto homeomorfo ao intervalo $[0, 1]$. Um espaço X é dito **conexo por arcos** se todo par de pontos puder ser conectado por um arco. □

Observemos que se dois pontos podem ser ligados por um arco, existe um caminho entre eles e assim todo espaço conexo por arcos é conexo por caminhos. De fato, a diferença essencial entre um caminho e um arco é que o arco requer injetividade, ou seja, é um caminho que não tem autointerseção. Lembremos a definição de contínuo.

Definição 5.6.2. [11, p. 31] Um espaço topológico X não-vazio é um **contínuo** se for compacto, conexo e metrizável. Um subconjunto de X que é um contínuo é chamado de **subcontínuo**. □

Definição 5.6.3. [4, p. 380] Um espaço X é dito **conexo por contínuos** se cada par de pontos estiver contido em um subcontínuo de X . □

Para prosseguir, precisaremos recorrer a um Teorema presente no livro “Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances” [11].

Teorema 5.6.4. [11, p. 113] Se X é um contínuo, então $F(X)$ e $\text{Cont}(X)$ são conexos por arcos.

Demonstração: Veja [11, p. 113]. ■

Proposição 5.6.5. Seja X um espaço metrizável. Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \text{Comp}(X)$ é um caminho e $\gamma(t)$ é conexo para algum t , então

$$\bigcup \gamma([0, 1])$$

é um subcontínuo de X .

Demonstração: Uma vez que γ é contínua e $[0, 1]$ é compacto, temos que a imagem de γ é um compacto em $\text{Comp}(X)$. Sendo assim, $\gamma([0, 1])$ está em $\text{Comp}(\text{Comp}(X))$ e pelo Teorema 3.3.16

$$\bigcup \gamma([0, 1])$$

é compacto em X .

Para a conexidade, observamos que a imagem de γ é conexa, pois $[0, 1]$ é conexo. Assim, o Lema 4.4.1 garante que

$$\bigcup \gamma([0, 1])$$

é conexo em X . Uma vez que X é metrizable,

$$\bigcup \gamma([0, 1])$$

também é como subespaço, e provamos que este é um subcontínuo de X . ■

Teorema 5.6.6. [4, p. 382] Se X é um espaço metrizable, as seguintes afirmações são equivalentes:

- (i) Todo subconjunto compacto de X está contido em um subcontínuo de X .
- (ii) $(\text{Comp}(X), T_V)$ é conexo por caminhos.

Demonstração:

(i) \Rightarrow (ii):

Sejam $A, B \in \text{Comp}(X)$. O conjunto $A \cup B$ é compacto, logo está contido em um subcontínuo D de X . Em particular,

$$A, B \in \text{Comp}(D) = F(D)$$

que é um espaço conexo por caminhos pelo Teorema 5.6.4, mas por ser também subespaço de $\text{Comp}(X)$, concluímos que existe um caminho de A até B em $\text{Comp}(X)$ e este é conexo por caminhos.

(ii) \Rightarrow (i):

Se A é compacto, dado $a \in A$, existe um caminho de $\{a\}$ até A em $\text{Comp}(X)$. Usando a Proposição 5.6.5, temos que

$$A \subseteq \bigcup \gamma([0, 1])$$

que é um subcontínuo de X , provando que A está contido em um subcontínuo. ■

Observemos que este teorema garante que, por exemplo, $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ é conexo por caminhos, pois todo subconjunto compacto de \mathbb{R}^n está contido em um subcontínuo por ser limitado. Junto do Teorema 3.6.4 temos que $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ também é conexo por caminhos na métrica de Hausdorff, fato que provamos no Capítulo 6 recorrendo simplesmente à teoria de espaços métricos. Contudo, podemos usar o resultado para pensar em um subespaço X de \mathbb{R}^2 tal que $\text{Comp}(X)$ não será conexo por caminhos. Mais ainda, podemos construir um espaço X conexo por caminhos, mas que terá $(\text{Comp}(X), T_V)$ não conexo por caminhos.

Exemplo 5.6.7. [4, p. 382]

Definimos

$$X = R \cup S \cup T \subset \mathbb{R}^2$$

onde

$$R = \{(x, y) \mid x = 0 \text{ e } y \geq 0\},$$

$$S = \{(x, y) \mid 0 < x \leq 1 \text{ e } y = |\text{sen}(\pi/x)/x|\}$$

e

$$T = \{(x, y) \mid (x - 1/2)^2 + y^2 = 1/4 \text{ e } y < 0\}.$$

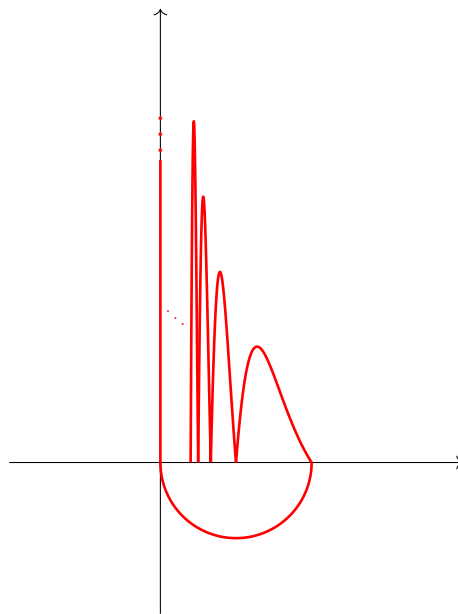


Figura 5.2: Espaço X .

Podemos tomar a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ onde $x_n = (1/n, 0)$. Ela converge a $x = (0, 0)$ e o conjunto $A = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \cup \{x\}$ é compacto em \mathbb{R}^2 , logo em X também. Agora, qualquer subcontínuo que contenha A é conexo por definição, portanto deve conter o conjunto

$$S_n = \{(x, y) \mid 1/(n+1) \leq x \leq 1/n \text{ e } y = |\text{sen}(\pi/x)/x|\},$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Ora, um contínuo é compacto, e nesse caso fechado, mas

$$\overline{\bigcup_{n \in \mathbb{N}} S_n} = \bar{S} = S \cup R.$$

A semirreta R não é compacta, portanto não deve existir um subcontínuo que contenha A , e o espaço $(\text{Comp}(X), T_V)$ não é conexo por caminhos.

O teorema a seguir abre alas para obter resultados efetivos acerca da conexidade por caminhos de $(F(X), T_V)$.

Teorema 5.6.8. [4, p. 382] Se X é um espaço metrizável, então as seguintes afirmações são equivalentes:

- (a) $(\text{Cont}(X), T_V)$ é conexo por caminhos.
- (b) Existe \mathfrak{S} tal que $\text{Fin}_1(X) \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \text{Comp}(X)$ que é conexo por caminhos.
- (c) X é conexo por contínuos.

Demonstração:

(a) \Rightarrow (b):

Basta observar que $\text{Fin}_1(X) \subseteq \text{Cont}(X) \subseteq \text{Comp}(X)$.

(b) \Rightarrow (c):

Dados $x, y \in X$, existe um caminho entre $\{x\}$ e $\{y\}$ em \mathfrak{S} . Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow \mathfrak{S}$ é um caminho, podemos tomar

$$\bigcup \gamma([0, 1])$$

e este será um subcontínuo de X que contém x e y pela Proposição 5.6.5.

(c) \Rightarrow (a):

Se todo par de pontos está em um subcontínuo, dados dois contínuos A e B , podemos tomar $a \in A$ e $b \in B$ e existirá um subcontínuo C que contém a e b . A união finita de subcontínuos é subcontínuo, portanto

$$Y = A \cup B \cup C$$

é subcontínuo. Pelo Teorema 5.6.4, $\text{Cont}(Y)$ é conexo por caminhos. Ora, A e B pertencem a $\text{Cont}(Y)$, que é subespaço de $\text{Cont}(X)$, e assim existe um caminho de A a B em $\text{Cont}(X)$ e este é conexo por caminhos. ■

Corolário 5.6.9. [4, p. 383] Seja X um espaço topológico separável. Se X é conexo por caminhos, então $(F(X), T_V)$ é conexo por caminhos.

Demonstração: Se X é conexo por caminhos, então $\text{Fin}_1(X)$ é conexo por caminhos. De fato, dados $\{x\}, \{y\} \in \text{Fin}_1(X)$, tome um caminho γ de x a y . Se $i : X \rightarrow \text{Fin}_1(X)$ é a aplicação inclusão, que é homeomorfismo,

$$\gamma' = i \circ \gamma$$

é um caminho de $\{x\}$ a $\{y\}$. Sendo assim, para todo par de pontos $x, y \in X$ existe um caminho de $\{x\}$ a um conjunto que contém y , e, pelo fato de X ser separável, podemos aplicar o Teorema 5.1.2 para concluir que $(F(X), T_V)$ é conexo por caminhos. ■

Corolário 5.6.10. [4, p. 383] Seja X um espaço topológico separável. Se X é metrizável e conexo por contínuos, então $(F(X), T_V)$ é conexo por caminhos.

Demonstração: Se X é metrizável e conexo por contínuos, então pelo Teorema 5.6.8 existe subespaço \mathfrak{S} conexo por caminhos tal que $\text{Fin}_1(X) \subseteq \mathfrak{S} \subseteq \text{Comp}(X)$. Sendo assim, dados $x, y \in X$ existe um caminho de $\{x\}$ a um conjunto que contém y em $\mathfrak{S} \subseteq F(X)$, e, pelo Teorema 5.1.2, $F(X)$ é conexo por caminhos. ■

Como consequência desses corolários temos, por exemplo, que $F(\mathbb{R}^n)$ é conexo por caminhos na topologia de Vietoris.

Corolário 5.6.11. $(F(\mathbb{R}^n), T_V)$ é conexo por caminhos na topologia de Vietoris.

Pelo Corolário 5.6.9, o hiperespaço $F(X)$ do espaço X do Exemplo 5.6.7 é conexo por caminhos, enquanto $\text{Comp}(X)$ não é, como vimos anteriormente. Isso significa que existem pares de compactos A e B tais que todo caminho de A até B passa por um conjunto não compacto.

5.7 Conexidade por Caminhos na Métrica de Hausdorff

Recordemos duas definições.

Definição 5.7.1. [7, p. 184] Dado um espaço métrico (X, d) e $A \subseteq X$ não vazio, o **diâmetro** de A é

$$\delta(A) = \sup\{d(x, y) \mid x \in A, y \in A\}.$$

Se $\delta(A) < \infty$, dizemos que o conjunto é **limitado**. □

Definição 5.7.2. [7, p. 185] Se (X, d) é um espaço métrico e $\delta(X) < \infty$, dizemos que d é uma **métrica limitada**. □

A partir de agora consideramos δ como função de $F(X)$ em $\overline{\mathbb{R}}_+$.

Lema 5.7.3. $\delta^{-1}(+\infty)$ é aberto em $(F(X), h)$.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que para algum $F \in \delta^{-1}(+\infty)$ existe um conjunto limitado

$$E_r \in B_h(F, r)$$

para cada $r > 0$. Fixados r e E_r , observamos que, por termos

$$\bar{d}(F, E_r) < r,$$

para todo $f \in F$ existe $e_f \in E_r$ tal que

$$d(f, e_f) < r.$$

Sendo assim, dados $x, y \in F$, existem $e_1, e_2 \in E$ tais que

$$d(x, e_1) < r \quad \text{e} \quad d(y, e_2) < r.$$

Portanto,

$$d(x, y) \leq d(x, e_1) + d(e_1, e_2) + d(e_2, y) < \delta(E) + 2r,$$

isto é,

$$\delta(F) = \sup\{d(x, y) \mid x, y \in F\} < \delta(E) + 2r < \infty,$$

um absurdo, pois F não é limitado. Assim, provamos que existe r tal que

$$B_h(F, r) \subseteq \delta^{-1}(+\infty),$$

e este último é um conjunto aberto em $F(X)$. ■

No que se segue, observamos que dado um conjunto $F \in F_L(X)$ e $\varepsilon > 0$,

$$B(\delta(F), \varepsilon) = (\delta(F) - \varepsilon, \delta(F) + \varepsilon) \subseteq \mathbb{R}.$$

Lema 5.7.4. Se F é limitado e $\alpha > 0$, denotamos a imagem dos elementos de uma bola de centro F e raio α por $D_{F, \alpha}$, ou seja,

$$D_{F, \alpha} = \{\delta(E) \mid E \in B_h(F, \alpha)\}.$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que

$$D_{F, \alpha} \subseteq B(\delta(F), \varepsilon).$$

Em particular,

$$B_h(F, \alpha) \subseteq \delta^{-1}(B(\delta(F), \varepsilon))$$

e $\delta^{-1}(B(\delta(F), \varepsilon))$ é aberto.

Demonstração: Primeiramente, observemos que a notação utilizada faz sentido, pois se F é limitado, $\delta(F) \in \mathbb{R}_+$, o qual é um subespaço métrico aberto de $\overline{\mathbb{R}}_+$. Se

$$E \in B_h(F, \alpha),$$

então

$$\max\{\bar{d}(E, F), \bar{d}(F, E)\} < \alpha.$$

Desse modo, dados $x, y \in E$, existem $f_1, f_2 \in F$ tais que

$$d(x, f_1) < \alpha \quad \text{e} \quad d(y, f_2) < \alpha.$$

Portanto,

$$d(x, y) \leq d(x, f_1) + d(f_1, f_2) + d(f_2, y) < \delta(F) + 2\alpha.$$

Isso significa que

$$\delta(E) \leq \delta(F) + 2\alpha.$$

Analogamente,

$$\delta(F) \leq \delta(E) + 2\alpha,$$

ou seja,

$$\delta(E) \geq \delta(F) - 2\alpha.$$

Sendo assim, se $\alpha \leq \varepsilon/3$, então

$$D_{F,\alpha} \subseteq B(\delta(F), \varepsilon).$$

Em particular, para todo

$$E \in B_h(F, \alpha)$$

temos

$$\delta(E) \in B(\delta(F), \varepsilon),$$

portanto

$$B_h(F, \alpha) \subseteq \delta^{-1}(B(\delta(F), \varepsilon)).$$

Desse modo, se

$$E \in \delta^{-1}(B(\delta(F), \varepsilon))$$

existem $\varepsilon' > 0$ e $\alpha_E > 0$ tais que

$$D_{E,\alpha_E} \subseteq B(\delta(E), \varepsilon') \subseteq B(\delta(F), \varepsilon).$$

Assim,

$$\delta^{-1}(B(\delta(F), \varepsilon)) = \bigcup_{E \in \delta^{-1}(B(\delta(F), \varepsilon))} B_h(E, \alpha_E)$$

é aberto. ■

Proposição 5.7.5. A aplicação $\delta : (F(X), h) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ é contínua.

Demonstração: Usando os Lemas 5.7.3 e 5.7.4, podemos mostrar que a pré-imagem de abertos sub-básicos $[0, a)$ e $(b, +\infty]$ são abertos. De fato, o Lema 5.7.4 garante que $\delta^{-1}([0, a))$ é aberto para todo $a \in \mathbb{R}_+$. Para $(b, +\infty]$, observamos que basta provar que

$$\delta^{-1}((b, +\infty))$$

é aberto. De fato,

$$\delta^{-1}((b, +\infty]) = \delta^{-1}((b, +\infty)) \cup \delta^{-1}(+\infty)$$

e pelo Lema 5.7.3 $\delta^{-1}(+\infty)$ é aberto. Agora,

$$\delta^{-1}((b, +\infty)) = \bigcup_{F \in \delta^{-1}((b, +\infty))} \delta^{-1}(B(\delta(F), \delta(F) - b))$$

é aberto pelo Lema 5.7.4. ■

Lembremos do seguinte hiperespaço:

$$F_L(X) = \{F \in F(X) \mid F \text{ é limitado}\}.$$

Afirmamos que $F_L(X)$ é simultaneamente aberto e fechado em $F(X)$ quando d não é uma métrica limitada. Para ver que a coleção de conjuntos limitados é aberta, observamos que

$$F_L(X) = \delta^{-1}([0, +\infty)),$$

portanto $F_L(X)$ é aberto pela continuidade de δ . O Lema 5.7.3 garante que $F_L(X)$ é fechado, pois

$$F_L(X) = \delta^{-1}([0, +\infty)) = (\delta^{-1}(+\infty))^c.$$

Essencialmente, provamos que quando d não é uma métrica limitada, $F(X)$ não é conexo na métrica de Hausdorff. Sendo assim, só faz sentido considerar discutir a conexidade por caminhos de $F_L(X)$. Mesmo que dotemos X de uma métrica equivalente de modo a ter X limitado, definindo, por exemplo,

$$\rho(x, y) = \min\{d(x, y), 1\},$$

o hiperespaço $F(X)$ continua sendo desconexo. De fato, dados $E, F \in F(X)$, temos

$$\begin{aligned} \bar{d}(E, F) &= \sup_{e \in E} \inf_{f \in F} d(e, f) \\ &\geq \sup_{e \in E} \inf_{f \in F} \min\{d(e, f), 1\} \\ &= \sup_{e \in E} \inf_{f \in F} \rho(e, f) \\ &= \bar{\rho}(E, F), \end{aligned}$$

onde a igualdade vale se e somente se para todo $e \in E$

$$\inf_{f \in F} d(e, f) < 1.$$

Sendo assim, a inclusão

$$B_{h,d}(G, r) \subseteq B_{h,\rho}(G, r)$$

sempre ocorre. Por outro lado, sempre que $r < 1$, temos

$$\begin{aligned} B_{h,\rho}(G, r) &= \{H \in F(X) \mid \bar{\rho}(G, H) < r, \bar{\rho}(H, G) < r\} \\ &= \{H \in F(X) \mid \bar{d}(G, H) < r, \bar{d}(H, G) < r\} \\ &= B_{h,d}(G, r). \end{aligned}$$

Com isso, as métricas de Hausdorff induzidas por d e ρ induzem a mesma topologia em $F(X)$, e ele será desconexo pela discussão anterior. Vemos então que ter uma métrica limitada não é suficiente para possivelmente ter $F(X)$ conexo por caminhos. Sendo assim, restringiremos nossa discussão à conexidade por caminhos de $F_L(X)$.

Antes de partirmos para um resultado que remete ao Teorema 5.1.2, precisaremos da seguinte proposição:

Proposição 5.7.6. Se (X, d) é um espaço métrico e $\gamma : X \rightarrow (F(X), h)$ é caminho, então $\Gamma : [0, 1] \rightarrow F(X)$ definida por

$$\Gamma(t) = \bigcup_{s \leq t} \gamma([0, t]) = \bigcup_{s \leq t} \gamma(t)$$

é um caminho em $(F(X), h)$.

Demonstração: Fixado $t_0 \in [0, 1]$ e dado $\varepsilon > 0$, precisamos encontrar $\delta > 0$ tal que se $|t - t_0| < \delta$, então

$$h(\Gamma(t), \Gamma(t_0)) < \varepsilon.$$

Para isso, vamos usar a continuidade de γ , pois ela permite limitar a distância entre os conjuntos $\gamma(s)$ que compõem $\Gamma(t)$ e $\Gamma(t_0)$.

De fato, existe $\delta > 0$ tal que

$$h(\gamma(s), \gamma(t_0)) < \varepsilon$$

se $|s - t_0| < \delta$. Logo, se t é tal que $0 < t - t_0 < \delta$, para mostrar que

$$h(\Gamma(t), \Gamma(t_0)) = \bar{d}(\Gamma(t), \Gamma(t_0)) < \varepsilon$$

basta encontrar, para todo $x \in \Gamma(t)$, algum $y \in \Gamma(t_0)$ de modo que

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Ora, se $x \in \Gamma(t)$, existe $s \in [0, t)$ tal que $x \in \gamma(s)$. Temos duas possibilidades, $s \in [0, t_0]$ ou $s \in (t_0, t)$. No primeiro caso, $x \in \Gamma(t_0)$. No segundo caso, como $0 < t - t_0 < \delta$, existe $y \in \gamma(t_0)$ tal que

$$d(x, y) < \varepsilon.$$

Assim,

$$\bar{d}(\Gamma(t), \Gamma(t_0)) = \sup_{x \in \Gamma(t)} \inf_{y \in \Gamma(t_0)} d(x, y) < \sup_{x \in \Gamma(t)} \inf_{y \in \Gamma(t_0)} \varepsilon = \varepsilon.$$

Por um argumento análogo, temos que quando $0 < t_0 - t < \delta$

$$h(\Gamma(t), \Gamma(t_0)) = \bar{d}(\Gamma(t_0), \Gamma(t)) < \varepsilon.$$

Portanto, encontramos $\delta > 0$ tal que se $|t - t_0| < \delta$, então

$$h(\Gamma(t), \Gamma(t_0)) < \varepsilon.$$

■

Corolário 5.7.7. Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow (F_L(X), h)$, então o caminho Γ possui imagem em $F_L(X)$.

Demonstração: Se $\gamma : [0, 1] \rightarrow F_L(X)$, basta provar que

$$\bigcup \gamma([0, 1])$$

é limitado. Pela Proposição 5.7.6, temos que

$$\Gamma : [0, 1] \longrightarrow F(X)$$

é um função contínua. Uma vez que o intervalo $[0, 1]$ é conexo, a imagem de Γ deve ser conexa. Pela discussão anterior, quando a métrica em X não é limitada, ou seja, quando

$$F_L(X) \subsetneq F(X),$$

temos que $F(X)$ não é conexo. Ora,

$$\Gamma(0) = \gamma(0) \in F_L(X),$$

então $\Gamma(t) \in F_L(X)$ para todo t , provando o desejado.

■

Teorema 5.7.8. [4, p. 384] Se (X, d) é um espaço métrico, as seguintes condições são equivalentes:

- (a) $(F_L(X), h)$ é conexo por caminhos.
- (b) Para todo $p \in X$ e $n \in \mathbb{N}$ existe um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow F_L(X)$ tal que

$$\gamma(0) = \{p\} \quad \text{e} \quad B_h(p, n) \subseteq \bigcup \gamma([0, 1]).$$

Demonstração: Observemos que este teorema se assemelha ao Teorema 5.1.2, pois dado $y \in X$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B(p, n)$ contém y . Contudo, nem sempre $X \in F_L(X)$, portanto, dados E e F em $F_L(X)$, precisaremos encontrar um conjunto que pode ser ligado por um caminho a E e F para mostrar que $(b) \Rightarrow (a)$.

Se $F_L(X)$ é conexo por caminhos, podemos tomar um caminho $\gamma : [0, 1] \rightarrow F_L(X)$ de modo que

$$\gamma(0) = \{p\} \quad \text{e} \quad \gamma(1) = \overline{B_h(p, n)}.$$

Logo, a condição (b) é satisfeita e $(a) \Rightarrow (b)$. Supondo que a condição (b) é satisfeita, dados $E, F \in F_L(X)$, $e \in E$ e $f \in F$, seja

$$n > \max\{h(E, \{f\}), h(F, \{e\})\}.$$

Para tal n , vale que

$$E \subseteq B(f, n) \quad \text{e} \quad F \subseteq B(e, n).$$

Pela propriedade (b), temos caminhos γ_1 de $\{e\}$ a um conjunto C que contém $B(e, n)$ e γ_2 de $\{f\}$ a um conjunto D que contém $B(f, n)$.

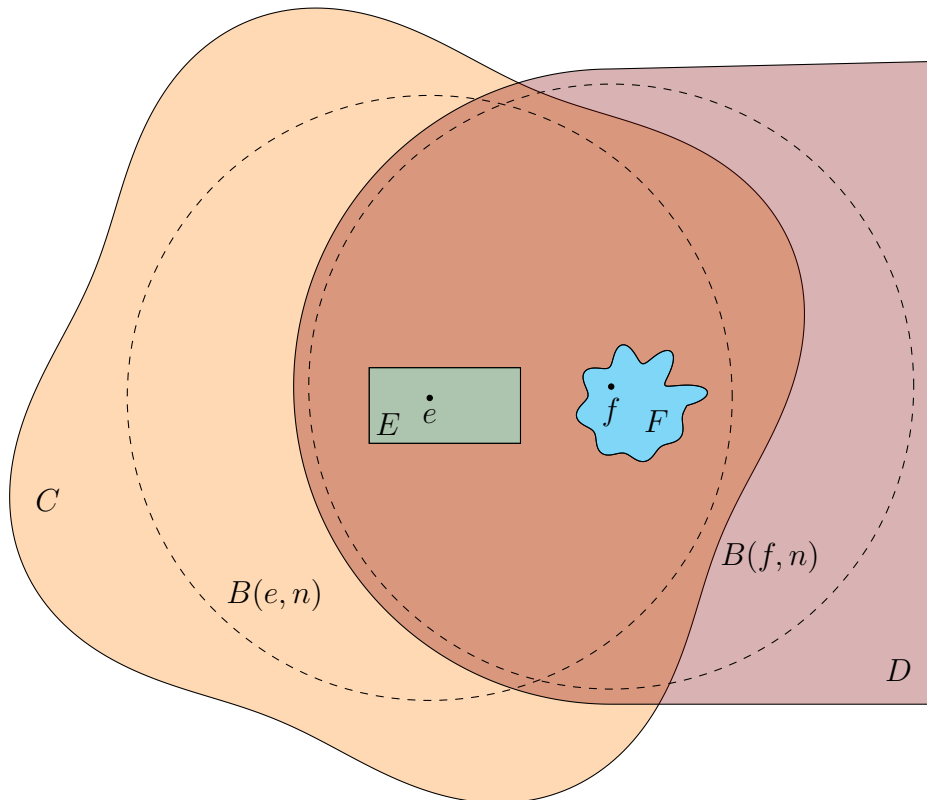


Figura 5.3: O conjunto C contém a bola $B(e, n)$ que contém F . O conjunto D contém a bola $B(f, n)$ que contém o conjunto E . Construiremos caminhos de E e F a $C \cup D$.

Definimos, então

$$\Gamma_1(t) = \bigcup_{s \leq t} \gamma_1(s)$$

e

$$\Gamma_2(t) = \bigcup_{s \leq t} \gamma_2(s).$$

Pela Proposição 5.7.6, temos que Γ_1 e Γ_2 são caminhos em $F_L(X)$.

Observemos que

$$f \in \gamma_1(1) \subseteq \Gamma_1(1).$$

Portanto, podemos construir o caminho

$$\alpha(t) = \begin{cases} E \cup \Gamma_1(t), & \text{se } t \in [0, 1], \\ E \cup \Gamma_1(1) \cup \Gamma_2(t-1), & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Analogamente, podemos construir também

$$\beta(t) = \begin{cases} F \cup \Gamma_2(t), & \text{se } t \in [0, 1], \\ F \cup \Gamma_2(1) \cup \Gamma_1(t-1), & \text{se } t \in [1, 2]. \end{cases}$$

Ora,

$$\alpha(0) = E, \quad \alpha(1) = \beta(1) = C \cup D \quad \text{e} \quad \beta(0) = F,$$

portanto existe um caminho de E a F e $F_L(X)$ é conexo por caminhos. ■

5.7.1 Espaços Métricos Quase Convexos

Definição 5.7.9. Seja (X, d) um espaço métrico. Dado $A \subseteq X$, a **bola aberta de raio r centrada em A** é o conjunto

$$B(A, r) = \{x \in X \mid \exists a \in A : d(x, a) < r\}.$$

□

Definição 5.7.10. [14, p. 94] Um espaço métrico (X, d) é **convexo** se para cada $x \neq y \in X$ existir $z \in X \setminus \{x, y\}$ tal que

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y).$$

□

Definição 5.7.11. [4, p. 384] Um espaço métrico (X, d) é dito **quase convexo** se para todos $x, y \in X$ e $s, t > 0$ tais que

$$d(x, y) < s + t,$$

existir $z \in X$ tal que $d(x, z) < s$ e $d(z, y) < t$. □

Provaremos que o espaço $F(X)$ é conexo por caminhos sempre que (X, d) for um espaço métrico quase convexo. Para tal, precisaremos de algumas propriedades desses espaços.

Proposição 5.7.12. [4, p. 384] Um espaço métrico (X, d) é quase convexo se e somente se para cada $A \subseteq X$ e para cada $s, t > 0$

$$B(B(A, s), t) = B(A, s + t).$$

Demonstração: Dado $x \in B(A, s + t)$, existe $a \in A$ tal que

$$d(a, x) < s + t.$$

Sendo assim, se X é quase convexo, existe z tal que

$$d(a, z) < s \quad \text{e} \quad d(z, x) < t,$$

ou seja,

$$z \in B(A, s)$$

e $B(B(A, s), t) \supseteq B(A, s + t)$. A inclusão contrária é sempre válida para qualquer espaço métrico, independente de ser convexo ou não. Basta observar que se $y \in B(B(A, s), t)$, então existe $z \in B(A, s)$ tal que $d(z, y) < t$ e $a \in A$ tal que $d(a, z) < s$. Desse modo,

$$d(a, y) \leq d(a, z) + d(z, y) < s + t,$$

e portanto

$$B(B(A, s), t) \subseteq B(A, s + t).$$

Agora, supondo que para cada $A \subseteq X$ vale

$$B(B(A, s), t) = B(A, s + t),$$

para $x, y \in X$ e $s, t > 0$ tais que

$$d(x, y) < s + t,$$

definimos $A = \{x\}$. Por hipótese

$$y \in B(A, s + t) = B(B(A, s), t),$$

portanto existe $z \in B(A, s)$ tal que

$$d(z, y) < t$$

e por definição

$$d(a, z) < s,$$

provando que X é quase convexo. ■

Até o fim da presente subseção denotaremos para $A \subseteq X$ e $r > 0$

$$\overline{B}(A, r) = \overline{B(A, r)}.$$

Adicionalmente,

$$\overline{B}(A, 0) = A.$$

Essa não é uma definição padrão, visto que não ocorre sempre que $\overline{B}(A, r)$ é o conjunto

$$\{x \in X \mid \exists a \in A : d(x, a) \leq r\}.$$

Teorema 5.7.13. [4, p. 384] Seja (X, d) um espaço métrico quase convexo e $F \in \mathcal{F}(X)$. A aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : [0, +\infty) &\longrightarrow \mathcal{F}(X) \\ t &\longmapsto \overline{B}(F, t) \end{aligned}$$

é Lipschitz com constante 1.

Demonstração: Primeiro, observamos que $\gamma(t_1) \subseteq \gamma(t_2)$ sempre que $t_1 \leq t_2$. Assim, se $t \geq 0$ e $r > 0$

$$\begin{aligned}
 h(\gamma(t+r), \gamma(t)) &= \bar{d}(\gamma(t+r), \gamma(t)) \\
 &= \bar{d}(\overline{B(F, t+r)}, \overline{B(F, t)}) \\
 &= \bar{d}(\overline{B(F, t+r)}, \overline{B(F, t)}) \\
 &= \bar{d}(\overline{B(B(F, t), r)}, \overline{B(F, t)}) \\
 &\leq \bar{d}(\overline{B(\overline{B(F, t)}, r)}, \overline{B(F, t)}) \\
 &= \bar{d}(\overline{B(\overline{B(F, t)}, r)}, \overline{B(F, t)}) \\
 &= r.
 \end{aligned}$$

Portanto,

$$h(\gamma(t_1), \gamma(t_2)) \leq |t_1 - t_2|,$$

e γ é Lipschitz com constante 1. ■

Corolário 5.7.14. Se (X, d) é um espaço métrico quase convexo, então $(F_L(X), h)$ é conexo por caminhos.

Demonstração: Toda função Lipschitz é contínua. Logo, provamos no Teorema 5.7.13 que, em particular, existe um caminho de $\{x\}$ a $\overline{B(x, n)}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e todo $x \in X$, que é um conjunto que contém $B(x, n)$. Portanto, pelo Teorema 5.7.8, $F_L(X)$ é conexo por caminhos. ■

Podemos obter um resultado mais forte acerca da conexidade por caminhos de hiperespaços na métrica de Hausdorff.

Teorema 5.7.15. [4, p. 385] Se (X, d) é um espaço métrico quase convexo, então $(F_L(X), h)$ é um retrato absoluto.

Demonstração: Sabemos pela Proposição 5.5.6 que todo semirreticulado de Lawson metrizável que é conexo e localmente conexo por caminhos é retrato absoluto. Além disso, pela Proposição 5.5.9 $(F(X), h)$ é semirreticulado de Lawson com relação à união, e conseqüentemente $(F_L(X), h)$ também será. Pelo Corolário 5.7.14, o espaço $F_L(X)$ é conexo por caminhos, portanto possui apenas uma componente conexa. Sendo assim, basta mostrar que $F_L(X)$ é localmente conexo por caminhos.

Mostraremos que para todo $F \in F_L(X)$ e aberto básico $B_h(F, r)$ existe $s > 0$ tal que todo os pontos em $B_h(F, s)$ podem ser ligados por um caminho em $B_h(F, r)$. Para isso, realizaremos um processo similar ao do Teorema 5.7.8. Dado $E \in B(F, s)$, temos $E \subseteq B(F, s)$ e podemos escrever o caminho crescente

$$\gamma_1(t) = \begin{cases} \overline{B(F, t)}, & \text{se } t \in [0, s] \\ \overline{B(F, s)} \cup \overline{B(E, t-s)}, & \text{se } t \in [s, 2s] \end{cases}$$

que vai de F a $\overline{B(F, s)} \cup \overline{B(E, s)}$. Analogamente, temos um caminho crescente de E a $\overline{B(F, s)} \cup \overline{B(E, s)}$. Agora, observemos que por termos $E, F \subseteq \overline{B(F, s)}$ e por (X, d) ser quase convexo,

$$\begin{aligned}
 h(\overline{B(F, s)} \cup \overline{B(E, s)}, F) &= \bar{d}(\overline{B(F, s)} \cup \overline{B(E, s)}, F) \\
 &\leq \bar{d}(\overline{B(F, s)} \cup \overline{B(B(F, s), s)}, F) \\
 &= \bar{d}(\overline{B(B(F, s), s)}, F) \\
 &= \bar{d}(\overline{B(B(F, s), s)}, F) \\
 &= \bar{d}(\overline{B(F, 2s)}, F) \\
 &= 2s.
 \end{aligned}$$

Assim, pelo fato do caminho ser crescente, temos que $h(\gamma(t), F) < 3s$ e se $s = r/3$ temos que todo par de pontos da bola $B_h(F, s)$ pode ser ligado por um caminho em $B_h(F, r)$. Como r e $F \in F_L(X)$ são arbitrários, $F_L(X)$ é localmente conexo por caminhos e portanto retrato absoluto. ■

Antes de finalizar a subseção com um corolário, vamos fazer algumas observações sobre espaços convexos e quase convexos. Começamos chamando a atenção para o fato que nem todo espaço convexo é quase convexo, ao contrário do que é afirmado em [4, p. 384].

Exemplo 5.7.16. Consideremos (\mathbb{R}, d) com a métrica Euclidiana. Definimos

$$X = \mathbb{R} \setminus [-1, 1].$$

Este conjunto é convexo. De fato, observemos que X é aberto em \mathbb{R} . Portanto, dado $x \in X$ existe $s_x > 0$ tal que

$$(x - s_x, x + s_x) \subset X.$$

Agora, observemos que dado $y \in X$,

$$d(x, x + t(y - x)) = |t(y - x)| = t|x - y|.$$

Portanto, se $0 < t < s_x/|x - y|$,

$$x + t(y - x) \in (x - s_x, x + s_x).$$

Além disso,

$$\begin{aligned} d(x, x + t(y - x)) + d(x + t(y - x), y) &= |x - x - t(y - x)| + |x + t(y - x) - y| \\ &= t|x - y| + (1 - t)|x - y| \\ &= td(x, y) + (1 - t)d(x, y) \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Desse modo, dados $x, y \in X$, se $0 < t < s_x/|x - y|$

$$z = x + t(y - x) \in X,$$

então z é tal que

$$d(x, y) = d(x, z) + d(z, y)$$

e X é convexo. Contudo, este espaço não é quase convexo. Se $p_1 = 2$ e $p_2 = -2$,

$$d(p_1, p_2) = 4.$$

Agora, em \mathbb{R}

$$B(p_1, 3) \cap B(p_2, 3) = (-1, 1) = X^c,$$

portanto em X não existe q tal que

$$d(p_1, q) < 3 \quad \text{e} \quad d(p_2, q) < 3$$

ainda que

$$d(p_1, p_2) = 4 < 3 + 3.$$

Ainda assim, existem condições para esta implicação ser válida.

Proposição 5.7.17. Se (X, d) é um espaço vetorial normado com a métrica induzida pela norma, então X é espaço métrico convexo e quase convexo.

Demonstração: Se $x, y \in X$, então para todo $t \in [0, 1]$ temos

$$z_t = x + t(y - x) \in X.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} d(x, z_t) + d(z_t, y) &= \|z_t - x\| + \|y - z_t\| \\ &= \|x + t(y - x) - x\| + \|x + t(x - y) - y\| \\ &= t\|x - y\| + (1 - t)\|x - y\| \\ &= \|x - y\| \\ &= d(x, y). \end{aligned}$$

Assim, X é convexo.

Para mostrar que é quase convexo, afirmamos que, dados $s_1, s_2 > 0$ tais que

$$d(x, y) < s_1 + s_2,$$

existe $t \in (0, 1)$ para o qual

$$d(x, z_t) < s_1 \quad \text{e} \quad d(z_t, y) < s_2.$$

Supondo por absurdo que não existe, definimos as funções contínuas $f_1 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ e $f_2 : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$f_1(t) = d(x, z_t) \quad \text{e} \quad f_2(t) = d(z_t, y).$$

Por hipótese

$$f_1^{-1}((-\infty, s_1)) \cap f_2^{-1}((-\infty, s_2)) = \emptyset,$$

logo

$$(0, 1) = f_1^{-1}([s_1, \infty)) \cup f_2^{-1}([s_2, \infty))$$

e os conjuntos da união não podem ser disjuntos, pois $(0, 1)$ é conexo. Assim, para algum t

$$f_1(t) = d(x, z_t) \geq s_1 \quad \text{e} \quad f_2(t) = d(z_t, y) \geq s_2$$

e

$$d(x, y) = d(x, z_t) + d(z_t, y) \geq s_1 + s_2,$$

o que é um absurdo e X é quase convexo. ■

Definição 5.7.18. [7, p. 411] Um **subconjunto convexo** de um espaço linear normado (X, d) é um subconjunto $Y \subseteq X$ tal que para todos $x, y \in Y$

$$x + t(y - x) \in Y$$

para todo $t \in [0, 1]$. □

Proposição 5.7.19. Se Y é um subconjunto convexo de um espaço vetorial normado (X, d) , então (Y, d) é espaço convexo e quase convexo.

Demonstração: Se Y é convexo como subconjunto, para todos $x, y \in Y$

$$x + t(y - x) \in Y$$

para todo $t \in [0, 1]$. Logo, o mesmo processo da Proposição 5.7.17 mostra que Y é convexo e quase convexo. ■

Proposição 5.7.20. Todo subconjunto denso Y de um espaço métrico (X, d) quase convexo é um subespaço métrico quase convexo.

Demonstração: Se $x_1, x_2 \in Y$ e $s, t > 0$ são tais que

$$d(x_1, x_2) < s + t,$$

existe $z \in X$ tal que

$$d(x_1, z) < s \quad \text{e} \quad d(z, x_2) < t.$$

Ora, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$B(z, \varepsilon) \subseteq B(x_1, s) \cap B(x_2, t).$$

Pela densidade de Y , existe

$$y \in Y \cap B(z, \varepsilon).$$

Portanto,

$$d(x_1, y) < s \quad \text{e} \quad d(x_2, y) < t$$

e (Y, d) é quase convexo. ■

Corolário 5.7.21. [4, p. 385] Seja (X, d) um espaço vetorial normado dotado da métrica induzida pela norma. Se Y é um subconjunto denso de um subconjunto convexo de X , então $(F_L(X), h)$ é um retrato absoluto.

Demonstração: Pelas Proposições 5.7.19 e 5.7.20, (Y, d) é subespaço quase convexo de X . Logo, pela Proposição 5.7.15, $(F_L(Y), h)$ é retrato absoluto. ■

5.7.2 C-conexidade

Definição 5.7.22. [4, p. 385] Um espaço métrico (X, d) é **C-conexo** se para cada $a, b \in X$ e para cada $\varepsilon > 0$ existirem $x_0, \dots, x_n \in X$ tais que $x_0 = a$, $x_n = b$ e

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$$

para $i < n$. □

Definição 5.7.23. [4, p. 385] Seja (X, d) um espaço métrico. Uma sequência (x_0, x_1, \dots, x_n) satisfazendo $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$ para algum $\varepsilon > 0$ é chamada de **ε -sequência** de tamanho n ligando x_0 a x_n . □

Definição 5.7.24. [4, p. 385] Um subconjunto Y de um espaço métrico (X, d) é **uniformemente C-conexo** se para cada $\varepsilon > 0$ existir $k \in \mathbb{N}$ de modo que para todo par de pontos $x, y \in Y$ existe uma ε -sequência em X de tamanho máximo k ligando x a y . O espaço métrico (X, d) é chamado **uniformemente C-conexo** se todo subconjunto limitado é uniformemente C-conexo. □

Antes de discutir sobre relações entre a C-conexidade do espaço e a conexidade do hiperespaço, vamos discutir a relação entre conexidade e C-conexidade.

Proposição 5.7.25. O fecho de um conjunto (uniformemente) C-conexo é (uniformemente) C-conexo.

Demonstração: Se A é um conjunto C -conexo, dados $a, b \in \overline{A} \setminus A$ e $\varepsilon > 0$, existem $a', b' \in A$ tais que

$$d(a, a') < \varepsilon \quad \text{e} \quad d(b', b) < \varepsilon.$$

Portanto, pela C -conexidade de A , existe uma ε -sequência (x_0, \dots, x_k) ligando a' a b' , e

$$(a, x_0, \dots, x_k, b)$$

é uma ε -sequência que liga a a b , portanto \overline{A} é C -conexo. Se A é uniformemente conexo, observemos que o processo acima aumentou o tamanho da ε -sequência em dois. Logo, se as ε -sequências em A possuem tamanho até k , em \overline{A} possuem tamanho até $k + 2$, o que prova que \overline{A} é uniformemente C -conexo. ■

Proposição 5.7.26. Todo espaço métrico conexo é C -conexo

Demonstração: Para $x \in X$ e $\varepsilon > 0$, definimos o conjunto

$$C_\varepsilon = \{y \in X \mid \text{existe uma } \varepsilon\text{-sequência ligando } x \text{ a } y\}.$$

Provaremos que este é um conjunto aberto e fechado, e pela conexidade de X , deve ser o próprio X . Para provar que é aberto, se $y \in C_\varepsilon$, existe ε -sequência (x_0, x_1, \dots, x_n) ligando x a y . Portanto,

$$y \in B(x_{n-1}, \varepsilon)$$

e existe um aberto A que contém y e está contido em $B(x_{n-1}, \varepsilon)$. Desse modo, $A \subseteq C_\varepsilon$, e C_ε é aberto. Contudo, este conjunto é fechado também, pois se $y \in \overline{C_\varepsilon}$, existe $z \in C_\varepsilon$ tal que

$$d(z, y) < \varepsilon.$$

Assim, se (x_0, \dots, x_n) é um ε -sequência de x a z , então (x_0, \dots, x_n, y) é ε -sequência de x a y .

Logo, temos $C_\varepsilon = X$ para todo $\varepsilon > 0$. Sendo assim, para todo par de pontos $y, z \in X$ e $\varepsilon > 0$ existe uma ε -sequência (x_0, \dots, x_n) de x a y e uma ε -sequência (x'_0, \dots, x'_m) de x a z . Portanto,

$$(x_n, \dots, x_0, x'_1, \dots, x'_m)$$

é uma ε -sequência de y a z e temos que todo par de pontos pode ser ligado por uma ε -sequência para todo $\varepsilon > 0$ e X é C -conexo. ■

A implicação contrária requer que o espaço seja compacto.

Proposição 5.7.27. Seja (X, d) um espaço compacto. Se X é C -conexo, então X é conexo.

Demonstração: Suponhamos por absurdo que X não é conexo. Nesse caso, existe uma cisão $X = V \cup W$. Se $x \in V$, existe ε_x tal que

$$B(x, \varepsilon_x) \subseteq V$$

e o mesmo vale para $x \in W$. Logo,

$$X = \bigcup_{x \in X} B(x, \varepsilon_x)$$

e pelo Lema do Número de Lebesgue (Teorema 1.5.26) existe um $\delta > 0$ tal que para cada $x \in X$ existe $y \in X$ de modo que

$$B(x, \delta) \subseteq B(y, \varepsilon_y).$$

Em particular, se $x \in V$

$$B(x, \delta) \subseteq V,$$

e portanto

$$V = \bigcup_{x \in V} B(x, \delta).$$

Desse modo, para $x \in V$ não existe uma δ -sequência a nenhum $y \in W$ com, o que é absurdo, pois X é C -conexo. ■

Proposição 5.7.28. [4, p. 386] Seja (X, d) um espaço métrico. O hiperespaço $(F_L(X), h)$ é C-conexo se e somente se (X, d) é uniformemente C-conexo.

Demonstração: Se $(F_L(X), h)$ é C-conexo, sejam B um subconjunto limitado de X e $\varepsilon > 0$. Primeiro, fixamos $p \in B$. Existe uma ε -sequência (A_0, A_1, \dots, A_k) ligando $\{p\}$ a B . Assim, dado $x \in B$, podemos tomar $x_{k-1} \in A_{k-1}$ de modo que

$$d(x_{k-1}, x) < \varepsilon$$

e continuamos indutivamente tomando $x_i \in A_i$ de modo que

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$$

para todo $i < k$. Observemos que $A_0 = \{p\}$, logo só existe uma escolha para x_0 , o ponto p . Desse modo, obtemos uma ε -sequência (x_0, x_1, \dots, x_k) com $x_0 = p$, $x_k = x$ e

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$$

para todo $i < k$. Dados $a, b \in B$, podemos tomar ε -sequências de tamanho k que ligam p a a e p a b , digamos

$$(a, a_1, \dots, p) \quad \text{e} \quad (b, b_1, \dots, p).$$

A ε -sequência

$$(a, a_1, \dots, p, \dots, b_1, b)$$

de tamanho $2k$ liga a a b . Uma vez que k não depende da escolha de a e b , provamos que (X, d) é uniformemente C-conexo.

Seja (X, d) uniformemente C-conexo. Primeiro, vamos mostrar que para qualquer conjunto limitado B e $b \in B$ existe ε -sequência de $\{b\}$ a B . Sabemos que para cada $x \in B$ existe uma $\varepsilon/2$ -sequência $(b, b_{1,x}, \dots, b_{n,x})$ de tamanho máximo k_B ligando b a x . Se o tamanho for menor que k_B , estendemos a sequência definindo

$$b_{\ell,x} = x$$

para todo $\ell \in \{n+1, \dots, k_B\}$. Agora, seja

$$B_i = \overline{\{b_{i,x} \mid x \in B\}}$$

para todo $i \in \{0, 1, \dots, k_B\}$. Vale que

$$B_0 = \{b\} \quad \text{e} \quad B_{k_B} = B.$$

Pela definição dos B_i , eles estão em $F_L(X)$ e

$$h(B_i, B_{i+1}) < \varepsilon,$$

portanto (B_0, \dots, B_{k_B}) é uma ε -sequência que liga $\{b\}$ a B . Se A é outro conjunto fechado limitado, para $a \in A$ também temos uma ε -sequência $(A_0, A_1, \dots, A_{k_A})$ ligando $\{a\}$ a A . Por fim, observamos que pelo fato de (X, d) ser uniformemente C-conexo, existe uma ε -sequência $(a, x_1, \dots, x_{n-1}, b)$ em X e

$$(\{a\}, \{x_1\}, \dots, \{x_{n-1}\}, \{b\})$$

é uma ε -sequência de $\{a\} = A_0$ a $\{b\} = B_0$. Logo,

$$(A_{k_A}, \dots, A_1, A_0, \{x_1\}, \dots, \{x_{n-1}\}, B_0, \dots, B_{k_B})$$

é uma ε -sequência de A a B .



Essa proposição nos permite obter uma classe de hiperespaços que não são C-conexos.

Exemplo 5.7.29. Seja (X, ρ) um espaço métrico não-limitado. Definimos uma métrica equivalente a ρ dada por

$$d(x, y) = \min\{\rho(x, y), 1\}.$$

Observemos que mesmo (X, d) não pode ser uniformemente C-conexo, pois isso implicaria que para $0 < \varepsilon < 1$ existe $k \in \mathbb{N}$ de modo que para todos $x, y \in X$ existe uma ε -sequência de tamanho até k ligando x a y . Isso seria um absurdo, pois existem $x, y \in X$ tais que

$$\rho(x, y) > \varepsilon k$$

e como $\varepsilon > 0$, se (x_0, x_1, \dots, x_n) é uma ε -sequência ligando x a y com $n \leq k$, temos

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon < 1,$$

ou seja,

$$d(x_i, x_{i+1}) = \rho(x_i, x_{i+1})$$

e

$$\rho(x, y) \leq \sum_{i=0}^{k-1} d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon n \leq \varepsilon k.$$

Contudo, isso não pode ocorrer, pois (X, ρ) não é limitado. Portanto, $(F(X), h_d) = (F_L(X), h_d)$ não é C-conexo pela Proposição 5.7.28.

Proposição 5.7.30. [4, p. 386] Seja (X, d) um espaço métrico tal que $(F_L(X), h)$ é conexo por caminhos. Então (X, d) possui as propriedades

- (1) Cada conjunto limitado de X está contido em um subconjunto uniformemente C-conexo.
- (2) Para cada $p \in X$ e cada $r > s > 0$ tal que $B(p, r) \setminus B(p, s) \neq \emptyset$, existe um subconjunto $S \subseteq B(p, r)$ uniformemente C-conexo tal que

$$p \in S \quad \text{e} \quad S \cap (B(p, r) \setminus B(p, s)) \neq \emptyset.$$

Demonstração: Uma vez que $(F_L(X), h)$ é conexo por caminhos, existe um caminho γ de $\{p\}$ a um conjunto $B(p, r)$. Para provar a Propriedade (1), seguiremos de modo análogo à Proposição 5.7.28. Consideremos novamente o caminho

$$\Gamma(t) = \bigcup_{s \leq t} \gamma(s).$$

Pelo fato de ser uma função contínua com domínio compacto, o caminho é uniformemente contínuo. Logo, para cada $\varepsilon > 0$, existe $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que se $|t - s| \leq 1/k_\varepsilon$, então

$$h(\Gamma(t), \Gamma(s)) < \varepsilon.$$

Assim, fixado $x \in \Gamma(1)$ existe $x_{k_\varepsilon-1} \in \Gamma(1 - 1/k_\varepsilon)$ tal que

$$d(x, x_{k_\varepsilon-1}) < \varepsilon.$$

Prosseguindo indutivamente, obtemos $x_{k_\varepsilon-i} \in \Gamma(1 - i/k_\varepsilon)$ para $i \in 1, 2, \dots, k_\varepsilon$ satisfazendo

$$d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon.$$

Portanto, existe uma ε -sequência de tamanho k ligando p a $x \in \Gamma(1)$ e todo par de pontos de $\Gamma(1)$ pode ser ligado por uma ε -sequência de comprimento $2k$. Assim, $B(p, r) \subseteq \Gamma(1)$ que provamos ser um conjunto uniformemente C-conexo, provando que a Propriedade (1) é satisfeita.

Para provar que a Propriedade (2) é satisfeita, observemos que o argumento anterior prova que todo $\Gamma(t)$ é uniformemente C-conexo, e assim, basta encontrar $t_0 \in [0, 1]$ tal que

$$\Gamma(t_0) \cap (B(p, r) \setminus B(p, s)) \neq \emptyset \quad \text{e} \quad \Gamma(t_0) \subseteq B(p, r).$$

Ora, fixado $p \in X$, a aplicação

$$f : F_L(X) \longrightarrow \mathbb{R} \\ F \longmapsto h(\{p\}, F)$$

é contínua (veja p. 44), portanto $f \circ \Gamma$ é contínua e possui imagem conexa, precisamente $[0, f(\Gamma(1))] \supseteq [0, r)$. Logo, existe t_0 tal que $(f \circ \Gamma)(t_0) \in [s, r)$ e tal $\Gamma(t_0)$ satisfaz as condições da Propriedade (2). ■

Por fim, analisamos mais profundamente um espaço métrico (X, d) , apresentado em [4, p. 387], que não possui $(F_L(X), h)$ conexo por caminhos por não satisfazer a Propriedade (2) ainda que satisfaça a Propriedade (1). Contudo, o hiperespaço será conexo.

Exemplo 5.7.31. Sejam

$$A = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (3^{-n}, 2 \cdot 3^{-n}) \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [3^{-n}, 2 \cdot 3^{-n}]$$

subconjuntos de \mathbb{R} . Definimos o conjunto

$$X = \{(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1] \mid \chi_A(x) \leq y \leq \chi_B(x)\},$$

onde

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in A, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

e χ_B é análoga para o conjunto B .

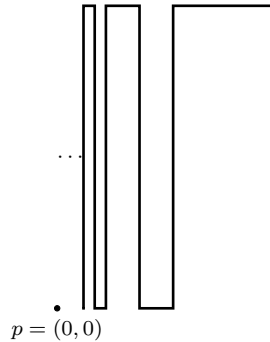


Figura 5.4: Ilustração do conjunto X .

Dotemos X da topologia induzida pela métrica Euclidiana no plano. (X, d) é um espaço métrico limitado, portanto $F_L(X) = F(X)$. Mostraremos que a Propriedade (2) da Proposição 5.7.30 não é satisfeita, e portanto $(F_L(X), h)$ não pode ser conexo por caminhos.

Consideremos o ponto $p = (0, 0)$ e o aberto de X induzido por $B(p, 2^{-1})$. Esta bola não contém nenhum conjunto uniformemente C-conexo que contenha p , pois o único conjunto C-conexo que contém p e está contido em $B(p, 2^{-1})$ é $\{p\}$. De fato, se $S \subseteq B(p, 2^{-1})$ contém um ponto $x = (a, b)$ além de p , então $a \geq 3^{-j}$ para algum j . Supondo que $a = 3^{-j}$ e $b = 0$, o próximo ponto mais próximo a p deve ser $(2 \cdot 3^{-j-1}, 0)$, que está a uma distância 3^{-j-1} de x . Portanto, não existe ε -sequência ligando x a p quando $\varepsilon < 3^{-j-1}$. Assim, a Propriedade (2) não é satisfeita e o hiperespaço $(F_L(X), h) = (F(X), h)$ não é conexo por caminhos.

Contudo, é possível mostrar que $(F_L(X), h) = (F(X), h)$ é conexo. Pelo Teorema 4.4.2, o hiperespaço $(\text{Comp}(X), T_V)$ é conexo, pois X é conexo. Além disso, pelo Teorema 3.6.4, as topologias de Vietoris e da métrica de Hausdorff coincidem em $\text{Comp}(X)$, portanto $(\text{Comp}(X), h)$ é conexo. Assim, se provarmos que $(\text{Comp}(X), h)$ é denso em $(F(X), h)$, teremos que este último é conexo. Para isso, observemos que se $F \in F(X)$ e

$$\inf\{x \mid (x, y) \in F\} > 0,$$

então F é fechado e limitado em \mathbb{R}^2 , portanto compacto. Intuitivamente, a ideia é “cortar” os conjuntos que não forem compactos, de modo a obter um compacto que não diferencie muito do fechado, possivelmente adicionando alguns pontos. Dado $\varepsilon > 0$ e $F \in F(X)$, tomamos $k \in \mathbb{N}$ tal que $3^{-k} < \varepsilon/2$. Definimos então os conjuntos

$$E_1 = \{(x, y) \in F \mid x \geq 3^{-k}\} \quad \text{e} \quad E_2 = \{(3^{-k}, y) \mid (x, y) \in F \text{ e } x < 3^{-k}\}.$$

Observemos que o conjunto E_2 é a projeção dos pontos de F com coordenada $x < 3^{-k}$ sobre a reta $x = 3^{-k}$. O conjunto

$$E = E_1 \cup \overline{E_2}$$

é fechado e limitado em \mathbb{R}^2 , portanto é compacto em X também. Agora, afirmamos que

$$h(E, F) < \varepsilon.$$

De fato, dado $f = (x, y) \in F$, o ponto $f = e$ ou $e = (3^{-k}, y)$ pertence a E , e devido ao fato de termos $0 \leq x < 3^{-k} < \varepsilon/2$, vale que

$$d(f, e) < \frac{\varepsilon}{2}$$

em ambos os casos. Portanto,

$$\overline{d}(F, E) \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por outro lado, dado $e \in E$, temos três casos:

1. $e \in F$

Nesse caso $d(e, F) = 0$.

2. $e = (3^{-k}, y)$ e existe $f \in F$ tal que $f = (x, y)$ com $x < 3^{-k}$. Nesse caso, tal e satisfaz

$$d(e, f) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

3. $e = (3^{-k}, y)$ e não existe $f \in F$ tal que $f = (x, y)$ com $x < 3^{-k}$. Nesse caso, $e \in \overline{E_2} \setminus E_2$ e existe uma sequência $(e_n) = ((3^{-k}, y_n)) \subseteq E_2$ convergindo a e . Para todo e_n existe $f_n = (x_n, y_n) \in F$ tal que

$$d(e_n, f_n) < \frac{\varepsilon}{2}$$

e assim, quando n é suficientemente grande

$$d(e, f_n) \leq d(e, e_n) + d(e_n, f_n) < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{2} = \frac{5\varepsilon}{6}.$$

Com isso, garantimos que

$$\overline{d}(E, F) < \varepsilon$$

e consequentemente

$$h(E, F) < \varepsilon.$$

Assim, $(\text{Comp}(X), h)$ é denso em $(F(X), h)$ e $F(X)$ é conexo.

Capítulo 6

Prova Elementar da Conexidade por Caminhos de $(\text{Comp}(\mathbb{R}^n), h)$

Neste capítulo apresentaremos uma demonstração elementar da conexidade por caminhos, inspirada na demonstração da conexidade por caminhos de $(\text{Comp}(\mathbb{R}), h)$ apresentada em [1, p. 38-40]. A abordagem baseia-se no fato de termos como espaço base um espaço vetorial métrico e é totalmente independente dos resultados anteriores.

6.1 Caminhos em $(\text{Comp}(\mathbb{R}^n), h)$

De agora em diante, assumiremos que \mathbb{R}^n está equipado com a métrica Euclidiana e por $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ queremos dizer $(\text{Comp}(\mathbb{R}^n), h)$. Nosso objetivo é mostrar que, dados dois elementos A e B em (\mathbb{R}^n) , existe um caminho de A para B .

Naturalmente, surge a seguinte questão: podemos interpretar geometricamente esses caminhos em $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$? Uma vez que queremos algo contínuo no espaço de subconjuntos compactos, será que tem algo acontecendo com A a medida que o parâmetro varia? A resposta é sim, e a continuidade possui um papel fundamental nisso. Se f como anteriormente é contínua, dado $t_0 \in [0, 1]$ e $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que se $t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \cap [0, 1]$, então

$$h(f(t_0), f(t)) < \varepsilon.$$

Isso significa que qualquer ponto de $f(t)$ não está mais distante que ε de algum ponto de $f(t_0)$.

Sendo assim, podemos pensar os caminhos como deformações de A em B e graças ao fato de estarmos trabalhando em \mathbb{R}^n , conseguimos ter uma ideia melhor disso porque podemos visualizar em \mathbb{R}^2 . Buscando deixar isso o mais claro possível, passaremos por alguns exemplos que apresentam essa ideia de visualizar caminhos em $\text{Comp}(\mathbb{R}^2)$ em \mathbb{R}^2 . O primeiro deles trabalha uma ideia que será utilizada novamente ao longo do texto.

Exemplo 6.1.1. Sejam $A \in \mathbb{R}^2$ um ponto de coordenadas $\{(a_x, a_y)\}$ e B o retângulo $[c_1, c_3] \times [c_2, c_4]$. Deformamos A em B utilizando a função $f : [0, 1] \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^2)$ que é de fato um caminho de A a B em $\text{Comp}(\mathbb{R}^2)$:

$$f(t) = [a_x + t(c_1 - a_x), a_x + t(c_3 - a_x)] \times [a_y + t(c_2 - a_y), a_y + t(c_4 - a_y)].$$

Abaixo, ilustramos a evolução de f para alguns valores de t .

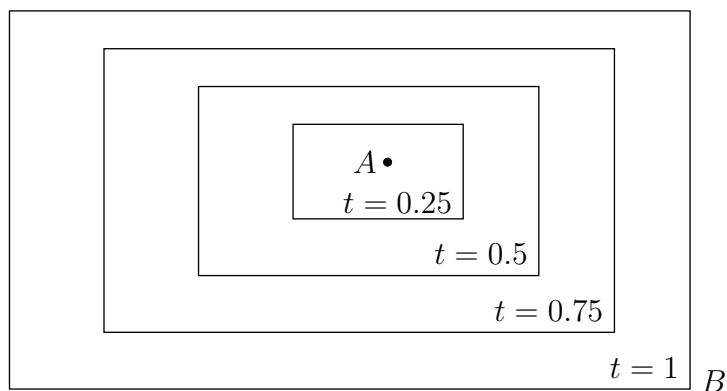
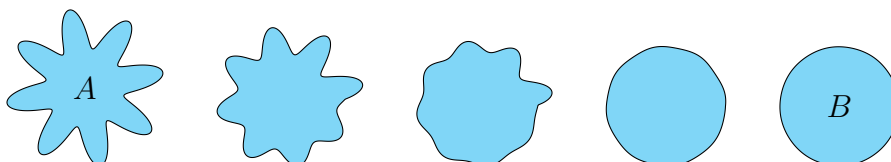
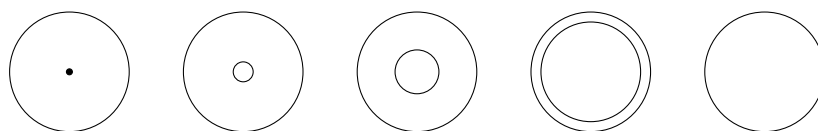


Figura 6.1: Ilustração de como podemos interpretar um caminho de A para B .

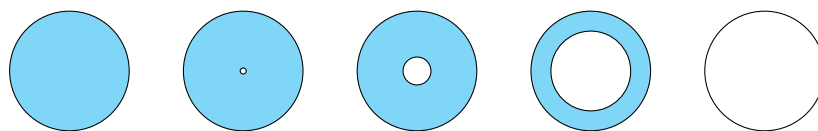
Esse é um exemplo bem simples, ainda que não o mais simples, e podemos buscar exemplos muito mais elaborados:



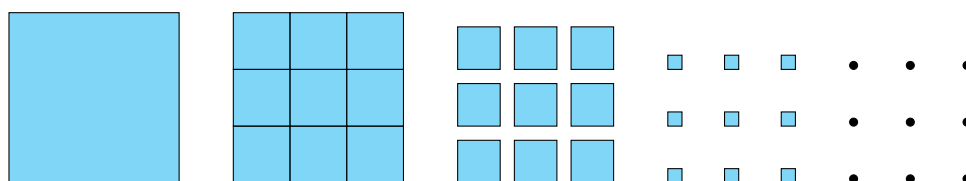
O mais interessante aqui é que estes caminhos podem começar em um conjunto conexo por caminhos e terminar em um conjunto discreto, ou vice-versa, eles podem criar buracos ou preenchê-los. Existem muitas possibilidades. Veremos mais três exemplos, agora com alguma descrição.



(a) Conjunto em \mathbb{R}^2 composto de uma circunferência e um ponto que é levado à mesma circunferência pelo caminho f definido em $[0, 1]$ por $f(t) = S(0; 1) \cup S(0; t)$ onde $S(x, t)$ é a coleção dos pontos que estão a uma distância t de x .



(b) Disco unitário sendo deformado em uma circunferência pelo caminho f definido em $[0, 1]$ por $f(t) = \overline{B(0; 1)} \setminus B(0; t)$



(c) Um quadrado pode ser transformado em um conjunto discreto composto por nove pontos. Para obter o caminho que faz isso, descrevemos o quadrado como a união de nove produtos cartesianos e usamos as ideias exploradas anteriormente, encolhendo os intervalos que definem esse produto cartesiano a medida que t cresce.

6.2 A Ideia da Demonstração

Começamos com duas definições que simplificarão o processo. Denotaremos as coordenadas de um ponto $x \in \mathbb{R}^n$ por $x = (x^1, x^2, \dots, x^n)$.

Definição 6.2.1. Sejam $x, y \in \mathbb{R}^n$. Os pontos x e y definem o retângulo

$$\prod_{i=1}^n [\min\{x^i, y^i\}, \max\{x^i, y^i\}].$$

De fato, x e y são vértices desse retângulo. □

Observação 6.2.2. Chamamos a atenção para o fato que aqui um retângulo não precisa ser um objeto n -dimensional. Ele pode ser um ponto ou um cubo no sentido usual de 3 dimensões quando $n \geq 3$. Tudo depende das coordenadas de x e y .

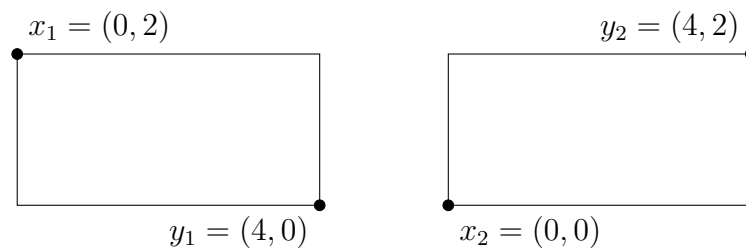


Figura 6.3: Duas maneiras de definir o mesmo retângulo, usando os vértices x_1, y_1 ou x_2, y_2 .

Observação 6.2.3. Notemos que, como representado na última figura, existe mais de uma escolha de vértices que definem o mesmo retângulo R . Para qualquer retângulo R dado, escolheremos como seus vértices aqueles que satisfazem

$$x^i = \min\{x^i, y^i\}, \quad y^i = \max\{x^i, y^i\}$$

e

$$R = \prod_{i=1}^n [x^i, y^i].$$

A próxima definição se baseia na estrutura vetorial de \mathbb{R}^n e nos permite estabelecer uma classe especial de caminhos.

Definição 6.2.4. Seja A um subconjunto de \mathbb{R}^n e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. A translação de A por \vec{v} é denotada por:

$$A + \vec{v} = \{a + \vec{v} : a \in A\}.$$

□

Com a compreensão do que é um caminho em $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ e as definições acima, podemos começar a discutir a prova da conexidade por caminhos de $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$. Ela é simples, mas um pouco longa, portanto dividiremos em três partes:

- 1) Mostrar que a translação de um conjunto é um conjunto que está conectado por um caminho ao conjunto original. Em particular isso implica que conjuntos unitários, ou pontos, são conexos por caminhos.

- 2) Mostrar que qualquer ponto está conectado por um caminho a um retângulo que contém o ponto.
- 3) Mostrar que qualquer conjunto compacto está conectado por um caminho a um retângulo que contém ele.

Dessa forma, se temos dois conjuntos compactos A e B , existem retângulos A_R e B_R que contêm A e B , respectivamente, e podemos tomar A_R e B_R de tal forma que um seja uma translação do outro. Tendo feito isso, só precisamos justapor os caminhos de A para A_R , A_R para B_R e B_R para B , obtendo um caminho de A para B , o que conclui a prova da conexidade por caminhos de $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$.

6.3 Demonstração

Lema 6.3.1. Sejam $A \in \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ e $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. A aplicação

$$f : [0, 1] \longrightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n) \\ t \longmapsto A + t\vec{v}$$

é um caminho de A para $A + \vec{v}$. Esse caminho é chamado de **caminho translação**.

Demonstração: Claramente, $f(0) = A$ e $f(1) = A + \vec{v}$. Além disso, f está bem-definida, pois translações não afetam a compacidade. Resta mostrar que f é contínua, mas mostraremos mais do que isso, provaremos que ela é uniformemente contínua. Quando $\vec{v} = \vec{0}$, f é o caminho constante, portanto é uniformemente contínuo. Se $\vec{v} \neq \vec{0}$, supondo que $|t_1 - t_2| < \delta$, para cada $a \in A$ vale

$$d(a + t_1\vec{v}, A + t_2\vec{v}) \leq d(a + t_1\vec{v}, a + t_2\vec{v}) = |t_1\vec{v} - t_2\vec{v}| \\ = |t_1 - t_2||\vec{v}| \\ < \delta|\vec{v}|.$$

Seja dado $\varepsilon > 0$. Definindo $\delta = \frac{\varepsilon}{|\vec{v}|}$, acabamos obtendo $d(a + t_1\vec{v}, A + t_2\vec{v}) < \varepsilon$. Sendo assim,

$$\bar{d}(A + t_1\vec{v}, A + t_2\vec{v}) = \max_{a \in A} d(a + t_1\vec{v}, A + t_2\vec{v}) < \varepsilon.$$

Analogamente, se $|t_1 - t_2| < \delta$, então também teremos $\bar{d}(A + t_2\vec{v}, A + t_1\vec{v}) < \varepsilon$. Isso prova a continuidade uniforme, pois se $\delta < \varepsilon/|\vec{v}|$, então

$$h(f(t_1), f(t_2)) = \max\{\bar{d}(f(t_1), f(t_2)), \bar{d}(f(t_2), f(t_1))\} \\ = \max\{\bar{d}(A + t_1\vec{v}, A + t_2\vec{v}), \bar{d}(A + t_2\vec{v}, A + t_1\vec{v})\} < \varepsilon.$$

■

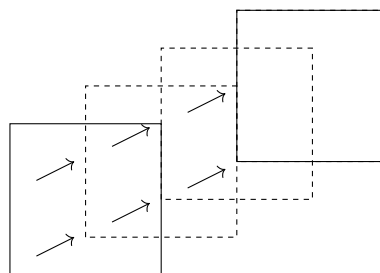


Figura 6.4: Um caminho translação em $\text{Comp}(\mathbb{R}^2)$ sendo visualizado em \mathbb{R}^2 .

Agora provaremos um lema que será muito útil no próximo resultado.

Lema 6.3.2. Dados dois retângulos A e C , com $A \subsetneq C$, existem vértices x de A e y de C tais que

$$h(A, C) = d(x, y). \tag{6.1}$$

Demonstração: Suponhamos que A é definido pelos vértices a e b , e C pelos vértices c e d . Primeiro, observemos que $\bar{d}(A, C) = 0$ e se $y \in C \cap A$, então $d(y, A) = 0$. Dessa forma, tomamos $y \in C \setminus A$. Em particular, existem dois conjuntos de índices $J_1, J_2 \subset \{1, \dots, n\}$ tais que se $j \in J_1$, então

$$c^j < y^j \leq a^j$$

e se $k \in J_2$, então

$$b^k < y^k \leq d^k.$$

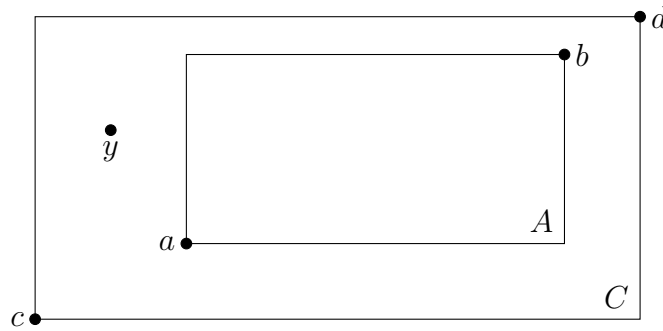


Figura 6.5: Uma ilustração para uma possível escolha de y . Neste caso, $1 \in J_1$ e $2 \notin J_1 \cup J_2$.

Uma vez que $y \notin A$, pelo menos um desses conjuntos de índices é não vazio. Dessa forma, se queremos encontrar $x \in A$ que está mais próximo de y , é razoável tomar x_y tal que

- $x^i = a^i$, se $i \in J_1$;
- $x^i = b^i$, se $i \in J_2$;
- $x^i = y^i$, se $i \notin J_1$ e $i \notin J_2$.

Nesse caso,

$$d(y, A) = d(y, x_y) = \left[\sum_{i \in J_1} (y^i - a^i)^2 + \sum_{i \in J_2} (y^i - b^i)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

já que não pode haver outro elemento de A mais próximo a y . Uma vez que queremos maximizar $d(y, A)$ sobre $y \in C \setminus A$, isto é, queremos tornar a soma dentro da raiz quadrada a maior possível, é suficiente escolher y tal que $\{1, \dots, n\} = J_1 \cup J_2$ e cujo x_y associado satisfaça

$$|y^i - x^i| = \max\{a^i - c^i, d^i - b^i\},$$

ou seja, $y^i = c^i$ ou $y^i = d^i$ para cada $i = 1, \dots, n$. Em outras palavras, y é um vértice de C e por construção x_y é um vértice de A . Com isso, concluímos que $h(A, C) = d(x, y)$. ■

Lema 6.3.3. Sejam $a, m, M \in \mathbb{R}^n$ com $m \neq M$ e tal que o retângulo definido por m e M contém a . A aplicação $f_{a,m,M} : [0, 1] \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$f_{a,m,M}(t) = \prod_{i=1}^n [(m^i - a^i)t + a^i, (M^i - a^i)t + a^i]$$

é um caminho em $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ de $\{a\}$ até o retângulo definido por m e M .

Demonstração: Notemos que $f_{a,m,M}$ está bem definida, pois $f_{a,m,M}(t)$ é um retângulo para todo t , portanto um compacto. Para provar a continuidade, novamente provaremos que $f_{a,m,M}$ é uniformemente contínua. Suponhamos que $t_2 > t_1$ e denotaremos $T_j = f_{a,m,M}(t_j)$ para $j = 1, 2$. Temos $T_1 \subset T_2$ uma vez que

$$[(m^i - a^i)t_1 + a^i, (M^i - a^i)t_1 + a^i] \subset [(m^i - a^i)t_2 + a^i, (M^i - a^i)t_2 + a^i],$$

para todo i . (Observemos que $a \in f_{a,m,M}(t)$ para todo t , então $m^i - a^i \leq 0$ e $M^i - a^i \geq 0$ para todo i .)

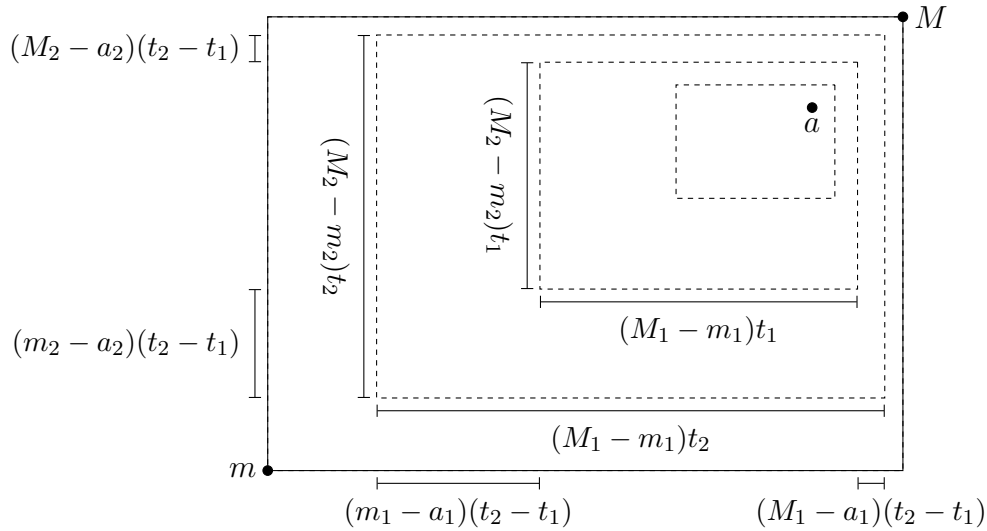


Figura 6.6: A aplicação $f_{a,M,m}(t)$ visualizada em \mathbb{R}^2 para alguns valores de t .

Do Lema 6.3.2 temos que $h(T_1, T_2) = d(x, y)$, onde x e y são vértices de T_1 e T_2 , respectivamente, tais que

$$|x^i - y^i| = \max\{(t_2 - t_1)(M^i - a^i), (t_2 - t_1)(a^i - m^i)\}.$$

Definindo

$$S = \max \left\{ \max_i |m_i - a_i|, \max_i |M_i - a_i| \right\}$$

temos

$$\begin{aligned} d(x, y) &= \left[\sum_{i=1}^n \max \{ [(m_i - a_i)(t_2 - t_1)]^2, [(M_i - a_i)(t_2 - t_1)]^2 \} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left[\sum_i S^2 (t_2 - t_1)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = n^{\frac{1}{2}} S (t_2 - t_1). \end{aligned}$$

Portanto, dado $\varepsilon > 0$, se tomamos $\delta = \varepsilon / (n^{\frac{1}{2}} S)$ para todo $t_1, t_2 \in [0, 1]$ tais que $|t_1 - t_2| < \delta$, valerá

$$h(f(t_1), f(t_2)) = h(T_1, T_2) = d(x, y) < \varepsilon.$$

■

Agora, mostraremos que para qualquer conjunto compacto e qualquer retângulo que contenha esse compacto, existe um caminho que os conecta.

Lema 6.3.4. Seja A um conjunto compacto de \mathbb{R}^n e $m, M \in \mathbb{R}^n$ com $m \neq M$ de modo que o retângulo definido por m e M contém A . A aplicação $f_{A,m,M} : [0, 1] \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ definida por

$$f_{A,m,M}(t) = \bigcup_{a \in A} f_{a,m,M}(t)$$

é um caminho em $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ de A até o retângulo de vértices m e M .

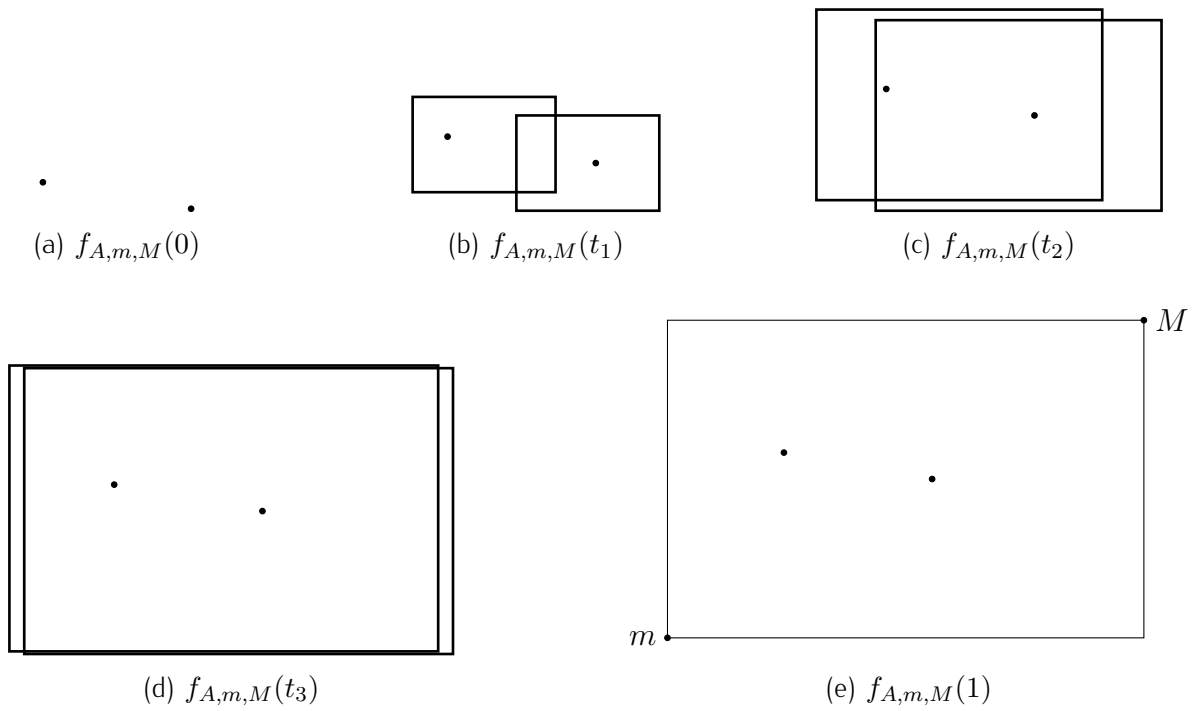


Figura 6.7: Aplicação $f_{A,m,M}(t)$ quando A é um conjunto de dois pontos. Para cada t , $f_{A,m,M}(t)$ é a união de dois retângulos. Nesta figura temos $0 < t_1 < t_2 < t_3 < 1$.

Demonstração: A demonstração será feita em dois passos. No que se segue, escreveremos f_a no lugar de $f_{a,m,M}$ e f_A no lugar de $f_{A,m,M}$.

Passo 1 - Mostrar que $f_A(t)$ é compacto para cada $t \in [0, 1]$.

Para $t = 0$, $f_A(t)$ é compacto, pois A é compacto. Para $t = 1$, $f_A(t)$ é compacto por ser um retângulo. Fixado $t \in (0, 1)$, $f_A(t)$ é um conjunto limitado em \mathbb{R}^n , pois para cada $a \in A$ o conjunto $f_a(t)$ está contido em $f_a(1) = f_A(1)$, o qual é um retângulo. Sendo assim, precisamos apenas provar que $f_A(t)$ é fechado. Para fazer isso, seja (x_n) uma sequência contida em $f_A(t)$ que converge a x . Uma vez que $x_n \in f_A(t)$, para todo n existe $a_n \in A$ tal que $x_n \in f_{a_n}(t)$. Isso nos permite criar uma sequência $(a_n) \subset A$, e da compacidade de A obtemos uma subsequência que converge a $a \in A$, subsequência essa que denotaremos por (a_n) para simplificar a notação. Afirmamos que $x \in f_a(t)$ e conseqüentemente $x \in f_A(t)$.

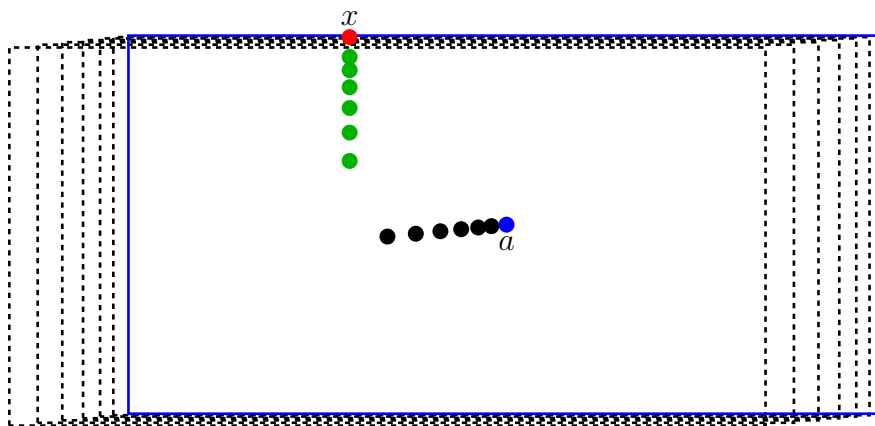


Figura 6.8: Em verde temos a sequência (x_n) e em preto a sequência (a_n) em A (ausente na ilustração). Os retângulos tracejados representam alguns dos $f_{a_n}(t)$. A partir da imagem é natural pensar que $x \in f_a(t)$.

Suponhamos que $x \notin f_a(t)$. Uma vez que $f_a(t)$ é um conjunto fechado, existe uma bola aberta

$B(x, \delta) \subset \mathbb{R}^n \setminus f_a(t)$. Encontraremos um elemento de $f_a(t)$ nesta bola, obtendo uma contradição.

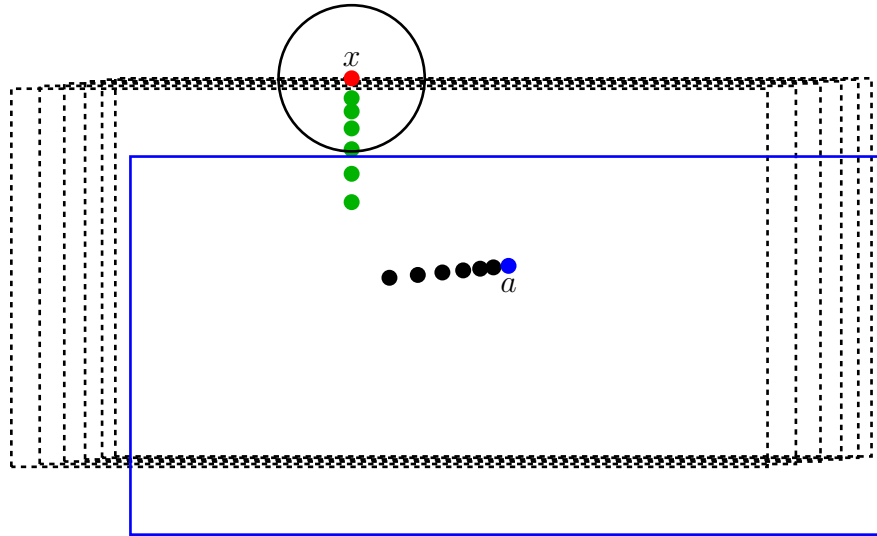


Figura 6.9: A situação considerada na contradição.

Dado $\varepsilon > 0$, seja $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$, então $d(a_n, a) < \varepsilon$. Encontraremos uma cota superior para $h(f_a(t), f_{a_n}(t))$ em função de ε . Primeiro, os conjuntos $f_{a_n}(t)$ e $f_a(t)$ são

$$f_{a_n}(t) = \prod_{i=1}^n [(m^i - a_n^i)t + a_n^i, (M^i - a_n^i)t + a_n^i]$$

$$f_a(t) = \prod_{i=1}^n [(m^i - a^i)t + a^i, (M^i - a^i)t + a^i].$$

Para encontrar uma cota superior para a distância de Hausdorff, definimos dois retângulos especiais para cada n . Um deles será denotado por W_n e é determinado pelos vértices Q_n e R_n , onde

$$R_n^i = \max\{(M^i - a_n^i)t + a_n^i, (M^i - a^i)t + a^i\}$$

e

$$Q_n^i = \min\{(m^i - a_n^i)t + a_n^i, (m^i - a^i)t + a^i\},$$

enquanto o outro será denotado por w_n e é determinado pelos vértices r_n e q_n , onde

$$r_n^i = \min\{(M^i - a_n^i)t + a_n^i, (M^i - a^i)t + a^i\}$$

e

$$q_n^i = \max\{(m^i - a_n^i)t + a_n^i, (m^i - a^i)t + a^i\}.$$

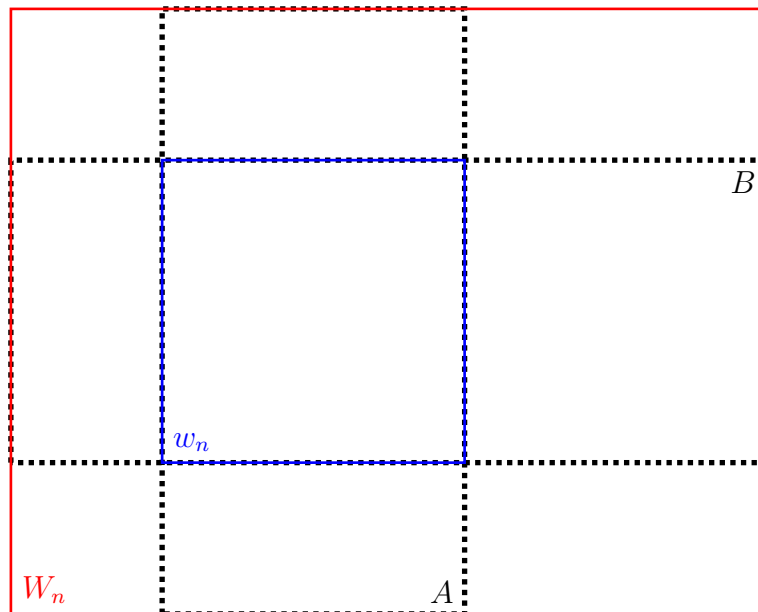


Figura 6.10: Exemplo de como os retângulos A e B geram os retângulos W_n e w_n em \mathbb{R}^2 .

Observemos que temos $w_n \subset f_a(t) \cap f_{a_n}(t) \subset f_a(t) \cup f_{a_n}(t) \subset W_n$, portanto

$$h(f_a(t), f_{a_n}(t)) \leq h(w_n, W_n)$$

e em particular ambos $|R_n^i - r_n^i|$ e $|Q_n^i - q_n^i|$ são iguais a $(1-t)|a^i - a_n^i|$. Uma vez que $w_n \subset W_n$, pela discussão da demonstração do Lema 6.3.2, obtemos nossa cota

$$\begin{aligned} h(w_n, W_n) &= \left(\sum_{i=1}^n \max\{|R_n^i - r_n^i|^2, |Q_n^i - q_n^i|^2\} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n (1-t)^2 |a^i - a_n^i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1-t) \left(\sum_{i=1}^n |a^i - a_n^i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= (1-t)d(a, a_n) \\ &< (1-t)\varepsilon. \end{aligned}$$

Desse modo, escolhendo $\varepsilon = \frac{\delta}{2(1-t)}$ para $n \geq N$, concluímos que

$$h(f_a(t), f_{a_n}(t)) \leq h(w_n, W_n) < \frac{\delta}{2}.$$

Isso significa que para $x_n \in f_{a_n}(t)$ existe algum $b \in f_a(t)$ tal que $d(x_n, b) < \delta/2$. Ora, $(x_n) \rightarrow x$, portanto existe $N' \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N'$, então $d(x_n, x) < \delta/2$. Tomando $N_0 = \max\{N, N'\}$, obtemos para todo $n \geq N_0$

$$d(x, b) \leq d(x, x_n) + d(x_n, b) < \frac{\delta}{2} + \frac{\delta}{2} = \delta.$$

Portanto

$$B(x, \delta) \cap f_a(t) \neq \emptyset,$$

o que é a contradição desejada. Agora sabemos que $f_A(t)$ é fechado, e consequentemente compacto.

Passo 2 - Mostrar que $f_A(t)$ é um caminho, isto é, é uma aplicação contínua. De fato, ela é uniformemente contínua.

Usaremos a continuidade uniforme de $f_a(t)$. Como visto na demonstração do Lema 6.3.3, dado $\varepsilon > 0$ e $a \in A$, existe $\delta(a) = \frac{\varepsilon}{n^{\frac{1}{2}} S_a}$ tal que se $|t_1 - t_2| < \delta$ então $h(f_a(t_1), f_a(t_2)) < \varepsilon$, onde

$$S_a = \max \left\{ \max_i |m_i - a_i|, \max_i |M_i - a_i| \right\}.$$

Seja

$$S = \sup_{a \in A} S_a = \max_{a \in A} S_a \leq \max_i |M^i - m^i|$$

onde a última desigualdade vem do fato que

$$m^i \leq a^i \leq M^i$$

para todo i , pois a está em um retângulo definido por m e M . Sendo assim, se $|t_1 - t_2| < \delta = \frac{\varepsilon}{nS}$, temos

$$h(f_a(t_1), f_a(t_2)) < \varepsilon$$

para todo $a \in A$, já que $\delta < \delta(a)$ para todo $a \in A$.

Agora,

$$h(f_A(t_1), f_A(t_2)) = \max\{\bar{d}(f_A(t_1), f_A(t_2)), \bar{d}(f_A(t_2), f_A(t_1))\}$$

então podemos assumir sem perda de generalidade que $t_1 < t_2$ e analisar apenas $\bar{d}(f_A(t_2), f_A(t_1))$, pois $\bar{d}(f_A(t_1), f_A(t_2))$ será zero. Da definição

$$\bar{d}(f_A(t_2), f_A(t_1)) = \bar{d} \left(\bigcup_a f_a(t_2), \bigcup_a f_a(t_1) \right) = \sup_{x \in \bigcup_a f_a(t_2)} d \left(x, \bigcup_a f_a(t_1) \right).$$

Uma vez que $x \in f_a(t_2)$ para algum $a \in A$, $f_a(t_1) \subset \cup_a f_a(t_1)$ e $h(f_a(t_1), f_a(t_2)) < \varepsilon$ para todo $a \in A$, temos

$$d \left(x, \bigcup_a f_a(t_1) \right) < d(x, f_a(t_1)) \leq \sup_{x \in f_a(t_2)} d(x, f_a(t_1)) = \bar{d}(f_a(t_2), f_a(t_1)) < \varepsilon.$$

Intuitivamente, essa distância é menor que ε , porque para cada $x \in \cup_a f_a(t_2)$ existe um ponto y em algum $f_a(t_1)$ cuja distância a x é menor que ε . Sendo assim,

$$h(f_A(t_1), f_A(t_2)) = \bar{d}(f_A(t_2), f_A(t_1)) < \varepsilon$$

e f é uniformemente contínua, portanto um caminho. ■

Observemos que no processo acabamos mostrando que uma certa união de compactos, não necessariamente contável, é um conjunto compacto, o que remete ao Teorema 3.4.5.

Teorema 6.3.5. $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ é conexo por caminhos.

Demonstração: Sejam A e B elementos de $\text{Comp}(\mathbb{R}^n)$. Uma vez que eles são subconjuntos compactos de \mathbb{R}^n , podemos encontrar dois retângulos A_R e B_R tais que $A \subset A_R$, $B \subset B_R$ e B_R é uma translação de A_R . Juntando tudo o que foi feito, sabemos que existe

- 1) um caminho $f : [0, 1] \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ tal que $f(0) = A$ e $f(1) = A_R$ pelo Lema 6.3.4;
- 2) um caminho $g : [0, 1] \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ tal que $g(0) = A_R$ e $g(1) = B_R$ pelo Lema 6.3.1;

3) um caminho $h : [0, 1] \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ tal que $h(0) = B$ e $h(1) = B_R$ pelo Lema 6.3.4.

Utilizando as parametrizações

$$\begin{aligned}\alpha &: [0, 1] \rightarrow [0, 3], \alpha(t) = 3t; \\ \gamma &: [1, 2] \rightarrow [0, 1], \gamma(t) = t - 1; \\ \gamma_0 &: [2, 3] \rightarrow [0, 1], \gamma(t) = 3 - t,\end{aligned}$$

obtemos um caminho $F : [0, 1] \rightarrow \text{Comp}(\mathbb{R}^n)$ de A a B definindo

$$F(t) = \begin{cases} (f \circ \alpha)(t), & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{3} \\ (g \circ \gamma \circ \alpha)(t), & \text{se } \frac{1}{3} < t \leq \frac{2}{3} \\ (h \circ \gamma_0 \circ \alpha)(t), & \text{se } \frac{2}{3} < t \leq 1. \end{cases}$$

■

Bibliografia

- [1] Barnsley, Michael F. *Fractals Everywhere*. Second Edition. Academic Press, 1993.
- [2] Bourbaki, Nicolas. *Elements of Mathematics: General Topology. Part 1*. Addison-Wesley, 1966.
- [3] Cobzaş, Ştefan, Miculescu, Radu e Nicolae, Adriana. *Lipschitz functions*. Springer, 2019.
- [4] Costantini, Camillo e Kubiś, Wiesław. "Paths in Hyperspaces". Em: *Applied General Topology* 4.2 (2003), pp. 377–390.
- [5] Costantini, Camillo, Levi, Sandro e Pelant, Jan. "Compactness and Local Compactness in Hyperspaces". Em: *Topology and its Applications* 123.3 (2002), pp. 573–608.
- [6] Curtis, Doug e Nhu, Nguyen To. "Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to \aleph_0 -dimensional linear metric spaces". Em: *Topology and its Applications* 19.3 (1985), pp. 251–260.
- [7] Dugundji, J. *Topology*. Allyn e Bacon, 1966.
- [8] Engelking, Ryszard. "General topology". Em: *Sigma series in pure mathematics* 6 (1989).
- [9] Grätzer, George A. *Lattice theory: foundation*. Vol. 2. Springer, 2011.
- [10] Hu, Sze-Tsen. *Theory of Retracts*. Wayne State University Press, 1965.
- [11] Illanes, Alejandro e Nadler, Sam. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*. Vol. 216. CRC Press, 1999.
- [12] Isbell, John R. *Uniform Spaces*. 12. American Mathematical Society, 1964.
- [13] James, Ioan M. *Topologies and Uniformities*. Springer-Verlag London Limited, 1999.
- [14] Kaplansky, Irving. *Set Theory and Metric Spaces*. Allyn e Bacon, 1977.
- [15] Kelley, John L. *General Topology*. Springer-Verlag New York, 1975.
- [16] Kuratowski, K. *Topology*. Vol. 1. Academic Press, 1966.
- [17] Kuratowski, K. *Topology*. Vol. 2. Academic Press, 1968.
- [18] Michael, Ernest A. "Topologies on Spaces of Subsets". Em: *Transactions of the American Mathematical Society* 71.1 (1951), pp. 152–182.
- [19] Munkres, James R. *Topology*. Second Edition. Pearson Education Limited, 2014.
- [20] Page, Warren. *Topological Uniform Structures*. Dover Books on Mathematics, 1989.
- [21] Sierpiński, Wacław. "Sur les ensembles connexes et non connexes". Em: *Fundamenta Mathematicae* 2.1 (1921), pp. 81–95. URL: <http://eudml.org/doc/212954>.
- [22] Smithson, R. E. "First countable hyperspaces". Em: *Proceedings of the American Mathematical Society* 56.1 (1976), pp. 325–328.
- [23] Steen, Lynn Arthur e Seebach, J Arthur. *Counterexamples in topology*. Dover Publications, Inc., 1995.
- [24] Willard, Stephen. *General Topology*. Addison-Wesley, 1970.
- [25] Winfried, Just e Weese, Martin. *Discovering Modern Set Theory. I: The Basics*. American Mathematical Society, 1995.

Índice Remissivo

- ε -sequência, 187
- k -conexo, 168
- Álgebra, 166
- Aplicação
 - quociente, 21
- Arco, 173
- Base
 - de um filtro, 23
 - de uma cobertura uniforme, 75
 - de uma topologia, 14
 - para uma uniformidade, 58
 - simétrica, 58
- Bola
 - aberta, 19
 - aberta centrada em um conjunto, 182
- Caminho, 53
- Cisão, 51
- Cobertura, 34
 - aberta, 34
 - baricêntrica, 74
 - estrela, 75
 - refinada, 74
 - uniforme, 75
 - uniforme induzida pela uniformidade, 77
- Compactificação, 54
 - de Stone-Čech, 54
- Completamente
 - regular, 34
- Componente
 - conexa, 51
- Conexo
 - por arcos, 173
 - por caminhos, 53
 - por contínuos, 173
- Conjunto
 - aberto, 14
 - compacto, 35
 - direcionado, 22
 - fechado, 14
 - limitado, 48
 - totalmente limitado, 70
 - uniformemente C -conexo, 187
- Contínuo, 53
- Dimensão zero, 52
- Distância
 - de um ponto a um conjunto, 44
- Diâmetro, 48
- Equivalência
 - de coberturas uniformes e uniformidades, 82
- Espaço
 - T_0 , 32
 - T_1 , 32
 - T_2 ou de Hausdorff, 32
 - T_3 , 33
 - $T_{3\frac{1}{2}}$, 34
 - T_4 , 34
 - conexo, 51
 - discreto, 39
 - localmente compacto, 46
 - localmente conexo, 51
 - localmente conexo por caminhos, 53
 - metrizável, 47
 - métrico, 19
 - métrico completo, 47
 - normal, 34
 - primeiro-contável, 18
 - quociente, 21
 - regular, 33
 - segundo-contável, 18
 - separável, 14
 - topológico, 14
 - uniforme, 57, 75
 - uniformemente C -conexo, 187
- Espaço métrico
 - C -conexo, 187
 - convexo, 182
 - quase convexo, 182

- Filtro, 23
 - convergente, 24
 - induzido por uma base, 23
 - induzido por uma função, 30
 - induzido por uma rede, 24
 - mais fino, 24
 - relativo, 29
- Função
 - aberta, 31
 - contínua, 29
 - contínua em um ponto, 29
 - Lipschitz, 31
 - uniformemente contínua, 31, 65, 84
- Grupo
 - Topológico, 70
- Hereditariamente
 - desconexo, 52
- Hiperespaço, 90
 - de expansão, 170
- Homeomorfismo, 31
- Ínfimo, 43
- Isomorfismo uniforme, 65
- Limitado
 - inferiormente, 43
 - superiormente, 43
- Limite
 - superior (Ls), 142
- Localmente
 - k -conexo, 168
- Mergulho, 31
- Métrica, 19
 - de Hausdorff, 111
 - limitada, 48
- Número de Lebesgue, 45
- Ordem
 - parcial, 165
- Ponto
 - de acumulação de um filtro, 27
 - de acumulação de uma rede, 26
 - isolado, 51
- Propriedade
 - da interseção finita, 36
- Rede, 23
 - convergente, 24
 - induzida por um filtro, 24
- Refinamento comum, 75
- Reta real estendida, 20
- Reticulado, 166
- Retrato, 168
 - absoluto, 168
 - absoluto de vizinhanças, 168
- Semirreticulado, 166
 - de Lawson, 168
 - inferior, 166
 - superior, 166
 - topológico, 168
- Sequência
 - de Cauchy, 47
 - finita, 22
- Sequência (ver redes), 22
- Sistema
 - de vizinhanças, 16
 - fundamental de vizinhanças de um ponto, 17
- Sub-base, 20
- Sub-rede, 23
- Subcobertura, 34
- Subconjunto
 - convexo, 186
 - denso, 14
- Subcontínuo, 53
- Subespaço
 - topológico, 18
- Subsemirreticulado, 168
- Subsequência, 23
- Supremo, 43
- Topologia, 14
 - de Vietoris, 90
 - induzida pela métrica, 19
 - mais fina, 18
 - mais grossa, 18
 - produto, 21
 - quociente, 21
 - uniforme, 61, 83
- Totalmente
 - desconexo, 52
- Traço
 - de uma vizinhança da diagonal, 58
- Uniformidade, 57
 - direita, 71
 - induzida pela cobertura uniforme, 78
 - induzida pela métrica, 59
 - relativa, 58

Vizinhança, 15
gerada, 90

induzida por uniformidade, 60
tubular da diagonal, 59

Símbolos e Notações

$B_d(x, r) = \{y \in X : d(x, y) < r\}$	p. 19
$A(X) = \{E \subset X \mid E \neq \emptyset\}$	p. 89
$F(X) = \{E \subset X \mid E \text{ é fechado e não vazio}\}$	p. 89
$F_n(X) = \{E \in F(X) \mid E \leq n\}$	p. 89
$\text{Fin}(X) = \{E \in F(X) \mid E \text{ é finito}\}$	p. 90
$\text{Comp}(X) = \{E \in F(X) \mid E \text{ é compacto}\}$	p. 90
$\text{Cont}(X) = \{E \in F(X) \mid E \text{ é subcontínuo}\}$	p. 90
$F_L(X) = \{E \subset F(X) \mid E \text{ é limitado}\}$	p. 90
$\langle U_i \rangle_{i \in I} = \{E \in F(X) \mid E \subset \bigcup_{i \in I} U_i \text{ e } E \cap U_i \neq \emptyset \forall i \in I\}$	p. 90
$\widehat{V} = \{(E, F) \mid F \subset V(E) \text{ e } E \subset V(F)\}$	p. 92

Alfabeto na fonte `\mathtt`

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Alfabeto na fonte `\mathfrak`

ℵ ℶ ℷ ℸ ℹ ℺ ℻ ℼ ℽ ℾ ℿ ℰ ℱ Ⅎ ℳ ℴ ℵ ℶ ℷ ℸ ℹ ℺ ℻ ℼ ℽ ℾ ℿ

Alfabeto na fonte `\mathcal`

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z

Alfabeto na fonte `\mathscr`

ℒ ™ ℣ ℤ ℥ Ω ℧ ℨ ℩ ℰ ℱ Ⅎ ℳ ℴ ℵ ℶ ℷ ℸ ℹ ℺ ℻ ℼ ℽ ℾ ℿ