

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Escola de Engenharia
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica

Marcos Antonio Alves

**Aprendizado das Preferências do Decisor usando Aprendizado de Máquina
em Problemas Multicritério**

Belo Horizonte

2023

Marcos Antonio Alves

**Aprendizado das Preferências do Decisor usando Aprendizado de Máquina
em Problemas Multicritério**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Doutor em Engenharia Elétrica.

Orientador: Prof. Dr. Frederico Gadelha Guimarães

Co-orientador: Prof. Dr. António Gaspar-Cunha

Belo Horizonte

2023

A474a

Alves, Marcos Antonio.

Aprendizado das preferências do decisor usando aprendizado de máquina em problemas multicritério [recurso eletrônico] / Marcos Antonio Alves. - 2023.

1 recurso online (89 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Frederico Gadelha Guimarães.

Coorientador: António Gaspar-Cunha

Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 82-88.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia elétrica - Teses. 2. Processo decisório - Teses. 3. Matrizes (Matemática) - Teses. 4. Algoritmos - Teses. 5. Aprendizado do computador - Teses. 6. Métodos numéricos - Teses. 7. Análise hierárquica (Psicologia). 8. Processo decisório por critério múltiplo - Teses I. Guimarães, Frederico Gadelha. II. Gaspar-Cunha, António. III. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. IV. Título.

CDU: 621.3(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
ESCOLA DE ENGENHARIA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA ELÉTRICA

FOLHA DE APROVAÇÃO

"APRENDIZADO DAS PREFERÊNCIAS DO DECISOR USANDO APRENDIZADO DE MÁQUINA EM PROBLEMAS MULTICRITÉRIO"

MARCOS ANTONIO ALVES

Tese de Doutorado submetida à Banca Examinadora designada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito para obtenção do grau de Doutor em Engenharia Elétrica. Aprovada em 18 de abril de 2023. Por:

Prof. Dr. Frederico Gadelha Guimarães
DEE (UFMG) - Orientador

Prof. Dr. António Gaspar-Cunha
Engenharia de Polímeros (Universidade do Minho) - Coorientador

Prof. Dr. Marjorie Maria Bellinello
(UTFPR)

Prof. Dr. Valerio Antonio Pamplona Salomon
Departamento de Produção (UNESP)

Prof. Dr. Leonardo Tomazeli Duarte
FCA (UNICAMP)

Prof. Dr. Gisele Lobo Pappa
DCC (UFMG)



Documento assinado eletronicamente por **Frederico Gadelha Guimaraes, Professor do Magistério Superior**, em 18/04/2023, às 17:38, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leonardo Tomazeli Duarte, Usuário Externo**, em 19/04/2023, às 14:36, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Valério Antônio Pamplona Salomon, Usuário Externo**, em 19/04/2023, às 15:06, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **António Gaspar Lopes Cunha, Usuário Externo**, em 20/04/2023, às 09:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Gisele Lobo Pappa, Professora do Magistério Superior**, em 24/04/2023, às 09:10, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Marjorie Maria Bellinello, Usuária Externa**, em 26/04/2023, às 10:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0, informando o código verificador **2231989** e o código CRC **9E28F18F**.

À Deus, minha família e à todos que participaram desta jornada.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus pelo dom da vida, pela saúde e pela família maravilhosa que tenho. Sou muito privilegiado por isto.

Ao Prof. Frederico Gadelha pela supervisão e suporte durante este trabalho. Continuo sem encontrar as palavras que expressem minha admiração e gratidão por você.

À Universidade do Minho e, em especial, ao Prof. António Gaspar pela boa recepção em Portugal, pela liberdade em poder desenvolver a pesquisa e pela coorientação.

Aos amigos do MINDS e UFMG: Petronio Silva, Bruno Oliveira, Leonardo Ferreira, Samara Santos, Giulia Zanon, Patricia Oliveira, Omid Orang, Fernando Oliveira, Alcy Rodrigues, Ramon Pereira e tantos outros. Em especial, agradeço ao Ivan Meneghini pela disponibilidade na geração dos dados de teste, pela leveza em ensinar e pela amizade. À Tamires Rezende pelas inúmeras vezes que se fez disponível para falarmos deste trabalho, pelo apoio e amizade.

À minha família: ao meu pai Antonio Nunardo pela sabedoria de vida, à minha mãe Maria das Graças pelo símbolo de força, aos meus irmãos Odair e Jedeir, pela inteligência e dedicação no que fazem. Ao agregado Lucas pela disponibilidade.

Ao Eder pelo companheirismo e paciência.

À Jaqueline Andrade e Alcides pela amizade e pelas conversas tão leves e cheias de alegria.

À FITec, pelo gosto de trabalhar nesta empresa, pelo incentivo e reconhecimento aos trabalhos que envolvem pesquisa aplicada.

À UNSL e aos colegas, especialmente Marcelo Errecalde e Guillermo. Aos colegas de San Luis por me receberem tão bem.

Agradeço ao Erlon Pereira (in memoriam) pelas valiosas dicas no início de toda esta jornada.

À CAPES pelo suporte financeiro.

E a mim mesmo, pela resiliência, força, responsabilidade e por conseguir encerrar este ciclo.

“Nenhum risco significa nenhuma exploração,
nenhuma experimentação e nenhum avanço na sociedade.”
([SINEK, 2018](#))

RESUMO

O método multicritério Análise Hierárquica de Processos (AHP) pode ser cognitivamente exigente para problemas de decisão de grande escala devido à necessidade de que o decisor faça avaliações pareadas de todas as alternativas. Para resolver esse problema, este trabalho propõe um método interativo que usa aprendizado em batches para fornecer escalabilidade para o AHP, chamado AHP Escalável. O AHP Escalável envolve um algoritmo de aprendizado de máquina que aprende as preferências do tomador de decisão por meio de avaliações de pequenos subconjuntos de soluções e orienta a busca pela solução ótima. A metodologia foi testada em diferentes problemas de otimização, artificiais e reais, com diferentes dimensões e fronteiras Pareto para validar a aplicabilidade da proposta. Uma experimentação de um fator por vez de cada hiperparâmetro foi feita, desde a avaliação do número de alternativas para serem apresentadas ao decisor, método de aprendizado de máquina mais adequado para cada problema, além das estratégias para seleção e recomendação de soluções no processo iterativo. Os resultados demonstram que o AHP Escalável é capaz de aprender a função de utilidade que caracteriza o decisor em aproximadamente 15 iterações com apenas algumas comparações, resultando em significativa economia de tempo e esforço cognitivo. O subconjunto inicial de alternativas pode ser escolhido de forma aleatória ou seguindo alguma estratégia de agrupamento. As alternativas subsequentes são recomendadas durante o processo iterativo seguindo alguma métrica baseada em distância, com a melhor estratégia de seleção dependendo do tipo de problema. A recomendação baseada apenas na menor distância Euclidiana ou Cosseno revelou melhores resultados em problemas lineares. A metodologia proposta também pode facilmente incorporar novos parâmetros e métodos multicritérios baseados em comparações pareadas.

Palavras-chave: Tomada de Decisão Escalável; Matrizes Pareadas; Tomada de Decisão Multicritério; Aprendizado em Batches; Análise Hierárquica de Processos.

ABSTRACT

The Analytic Hierarchy Process (AHP) multicriteria method can be cognitively demanding for large-scale decision problems due to the need for the decision-maker to make pairwise comparisons among all the available alternatives. To address this issue, in this thesis we propose an interactive method that uses batch learning to provide scalability for classical AHP, called Scalable AHP. The Scalable AHP involves a machine learning algorithm that learns the decision maker's preferences through evaluations of small subsets of solutions and guides the search for the optimal one. The methodology was tested on different optimization problems, artificial and real ones, with different dimensions and Pareto surfaces in order to validate the applicability of the proposal. A one-factor-at-a-time experimentation of each hyperparameter was performed, from evaluating the number of alternatives to be presented to the decision maker, the most suitable machine learning method for each problem, as well as strategies for selecting and recommending solutions in the iterative process. The results demonstrate that the Scalable AHP is capable of learning the utility function that characterizes the decision maker in approximately 15 iterations with only a few comparisons, resulting in significant savings in time and cognitive effort. The initial subset of alternatives can be chosen randomly or following some clustering strategy. Subsequent alternatives are recommended based on some distance metric throughout the iterative process, with the best selection strategy depending on the type of problem. Recommendation based solely on the smallest Euclidean or Cosine distances reveals better results on linear problems. The proposed methodology can also easily incorporate new parameters and multicriteria methods based on pairwisely comparisons.

Keywords: Scalable Decision Making, Pairwise Matrices, Multicriteria Decision-Making, Batch Learning, Analytic Hierarchy Process.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tipos de avaliação de preferências.	31
Figura 2 – Iteração do decisor no AHP Clássico. É apresentado ao decisor um conjunto de iterações \mathcal{X} (1), cujas comparações pareadas são feitas em (2) de uma única vez. Operações com matrizes são feitas em (3) e é gerado o ranking final em (4).	48
Figura 3 – Iteração do decisor no AHP Escalável. O fluxograma detalha os principais passos que compõe a metodologia, incluindo informações da fase de aprendizado e de recomendação de novas alternativas.	49
Figura 4 – Fronteiras Pareto de problemas artificiais: (a) GPD02 com 2 objetivos, (b) DTLZ1 com 3 objetivos, (c) DTLZ7 com três objetivos, (d) DTLZ1 com 7 objetivos.	50
Figura 5 – Aproximação das fronteiras Pareto dos problemas reais descritos em Tanabe e Ishibuchi (2020): (a) RE2-3-2 com 2 objetivos, (b) RE2-4-3 com 2 objetivos, (c) RE3-4-6 com 3 objetivos	51
Figura 6 – Exemplo de uso do AHP Escalável - 1a consulta ao decisor	55
Figura 7 – Exemplo de uso do AHP Escalável - 2a consulta ao decisor	55
Figura 8 – Exemplo de uso do AHP Escalável - 3a consulta ao decisor	56
Figura 9 – Escolha aleatória das q soluções iniciais utilizando os valores ‘rand’, ‘kmeans’ e ‘agglomerative’. As soluções escolhidas estão ilustradas em azul e a melhor ranqueada pelo AHP está indicada por +.	60
Figura 10 – Curva do aprendizado para os problemas PF3 em (a) e PF4 em (b) variando ι	61
Figura 11 – Distâncias utilizadas para selecionar novas alternativas que serão apresentadas ao decisor.	62
Figura 12 – Curva de aprendizado dos modelos de ML no aprendizado das preferências do decisor para o problema PF3 em (a) e PF4 em (b) variando ζ	63
Figura 13 – Aprendizado das preferências do decisor variando q para PF1 em (a), PF2 em (b), PF3 em (c) e PF4 em (d).	65
Figura 14 – Efeitos da variação de θ nos problemas PF2 em (a) e PF4 em (b), cujas superfícies são lineares.	66
Figura 15 – Posição das melhores soluções na fronteira Pareto do problema PF1 baseado no AHP clássico e no AHP escalável proposto.	68

Figura 16 – Soluções e Fronteira Pareto do problema RE22. Em (a) são ilustradas um conjunto de soluções para o problema, cuja fronteira aproximada está em (b). Em (c) são apresentadas 84 soluções utilizadas neste trabalho. A melhor solução de acordo com o AHP está indicada pelo símbolo +.	69
Figura 17 – Resultado de uma das execuções do AHP Escalável no problema RE2-3-2. As soluções recomendadas pelo <i>kmeans</i> estão em azul, a melhor solução sugerida pelo AHP indicada pelo símbolo + e a melhor solução predita pelo modelo em vermelho. Em (b) está a representação da última iteração, t_{16} .	69
Figura 18 – Resultados das métricas de desempenho do modelo para o problema RE2-3-2: (a) KDT, (b) Pos e (c) DBS.	70
Figura 19 – Resultado de uma das execuções do AHP Escalável no problema RE2-4-3. As soluções recomendadas pelo agrupamento <i>agglomerative</i> estão em azul, a melhor solução sugerida pelo AHP indicada pelo símbolo + e a melhor solução predita pelo modelo em vermelho. Em (b) está a representação da última iteração, t_9 .	72
Figura 20 – Resultado de uma das execuções do AHP Escalável no problema RE3-4-6. As soluções recomendadas pelo agrupamento <i>agglomerative</i> estão em azul, a melhor solução sugerida pelo AHP indicada pelo símbolo + e a melhor solução predita pelo modelo em vermelho. Em (b) está a representação da última iteração, t_{13} .	74

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 – Conexões da área de aprendizado de preferências. Multicriteria Decision Making (ou MCDM), em negrito, é o foco desta tese.	30
Tabela 2 – Descrição dos modelos Learning to Rank: <i>Pointwise</i> , <i>Pairwise</i> e <i>Listwise</i>	32
Tabela 3 – Escala Fundamental de Comparações	37
Tabela 4 – Índice de Consistência Aleatório (RI)	39
Tabela 5 – Propriedades dos 7 problemas de teste (PF1, ..., PF7). <i>M</i> e <i>D</i> denotam o número de objetivos e o número de variáveis de decisão, respectivamente. O número e tipo de variáveis de decisão e o formato da fronteira Pareto também são descritas.	52
Tabela 6 – Descrição dos parâmetros e hiperparâmetros da abordagem proposta e os valores esperados em cada um deles.	57
Tabela 7 – Seleção do melhor método de ML para cada problema de decisão. A ordem dos modelos e a iteração em que o melhor (em negrito) atingiu o critério de parada.	59
Tabela 8 – Número de comparações requeridas do decisor para cada problema de decisão variando <i>q</i> até alcançar a condição de parada.	64
Tabela 9 – Ranking das primeiras 15 alternativas utilizando o AHP clássico e o AHP escalável proposto.	67
Tabela 10 – Ranking das soluções obtidas para o problema RE2-3-2 pelo AHP Escalável e pelo AHP Clássico.	71
Tabela 11 – Ranking das soluções obtidas para o problema RE2-4-3 pelo AHP Escalável e pelo AHP Clássico.	72
Tabela 12 – Resultados das métricas KDT, Pos, DBS e NQ para o problema RE2-4-3.	73
Tabela 13 – Resultados das métricas KDT, Pos, DBS e NQ para o problema RE3-4-6.	74
Tabela 14 – Ranking das soluções obtidas para o problema RE3-4-6 pelo AHP Escalável e pelo AHP Clássico.	74

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AHP	Análise Hierárquica de Processos
ANN	Redes Neurais Artificiais
ANP	<i>Analytic Network Process</i>
BWM	<i>Best-Worst Method</i>
CI	Índice de Consistência
CR	Taxa de Consistência
<i>DBS</i>	<i>Distance from the Best Solution</i>
DNN	<i>Decision Neural Network</i>
DTLZ	<i>Deb, Thiele, Laumanns and Zitzler test suit</i>
GPD	<i>Generalized Position-Distance</i>
IA	Inteligência Artificial
IAHP	AHP Iterativo
IC	Inteligência Computacional
IJAHP	<i>International Journal of AHP</i>
ISAHP	<i>International Symposium on the AHP</i>
KDT	Distância Kendall Tau
LTR	<i>Learning to Rank</i>
MaOP	Otimização com Muitos Objetivos
MAPE	Erro Percentual Médio Absoluto
MAUF	Função de Utilidade Multi-Atributo
MAUT	Teoria da Utilidade Multi-Atributo
MCDM	Métodos de Tomada de Decisão Multicritério
ML	<i>Machine Learning</i> ou Aprendizado de Máquina

MLP	Rede de Perceptrons Multicamadas
MOLP	MultiObjective Linear Programming
MOO	Otimização MultiObjetivo
MSE	Erro Quadrático Médio
NNDM	<i>Neural Network Decision-Maker</i>
NQ	Number of Queries
Pos	Position Match Race
R^2	Coefficiente de Determinação
RBF	Função de Base Radial
RF	Random Forest
RMSE	Raíz do MSE
RI	Índice de Consistência Aleatório
ROI	Regiões de Interesse
RTM	Matriz Transitiva Recíproca
XGBoost	Extreme Gradient Boosting

LISTA DE SÍMBOLOS

\mathcal{X}	conjunto de alternativas disponível
\mathcal{L}	função de perda
\mathcal{Y}	saída do algoritmo de regressão
\mathcal{Q}	subconjunto de alternativas utilizadas para avaliação pareada
q	consultas feitas ao decisor
t	iterações
$r(\cdot)$	função de classificação da ordem dos itens (ranking)
u	função de utilidade
n	número de alternativas
a_i	i-ésima alternativa
a_j	j-ésima alternativa
M	número de objetivos
D	número de variáveis de decisão
a_k	k-ésima alternativa
y	saída verdadeira
y^*	saída esperada
μ	média
σ	desvio padrão
D	Matriz de decisão
C_j	j-ésimo critério
$>$	relação de preferência - mais preferida
\sim	relação de preferência - igualmente preferidas
\wedge	ou

\vee	e
θ	% de soluções aleatórias recomendadas
w	vetor de pesos
cb	custo-benefício (tipo do critério)
ι	estratégia para seleção das primeiras alternativas
ζ	medida de distancia para recomendação de novas soluções
ml	método de aprendizado de máquina a ser utilizado

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Motivação	19
1.2	Contribuições	21
1.3	Justificativa	22
1.4	Estrutura da Tese	23
1.5	Como Citar esta Tese	24
2	CONCEITOS PRELIMINARES	25
2.1	Relações de Preferência	25
2.2	Aprendizado de Preferências	29
2.3	Conceitos de Learning to Rank	31
2.4	Principais Destaques do Capítulo	33
3	ESTADO DA ARTE	35
3.1	Contextualização aos Problemas Multicritério	35
3.2	Método Análise Hierárquica de Processos	36
3.3	Aprendizado das Preferências do Decisor	40
3.4	Redução das Comparações Pareadas	43
3.5	Principais Destaques do Capítulo	45
4	METODOLOGIA	47
5	RESULTADOS	58
5.1	Estudos de Caso	58
5.2	Desempenho dos Métodos de Machine Learning	59
5.3	Escolha Inicial das Soluções	60
5.4	Similaridade entre as Soluções Recomendadas	62
5.5	Número de Alternativas Apresentadas ao Decisor	63
5.6	Estratégias para Busca Local	66
5.7	Ranking com o AHP Escalável	66
5.8	Aplicações Práticas	67
5.8.1	Caso 1: Problema de Vigas de Concreto Armado	68
5.8.2	Caso 2: Projeto de Recipiente de Pressão	71
5.8.3	Caso 3: Projeto de Engrenagens de Trem	73
5.9	Outras Análises e Direções	75
5.9.1	Preferência Implícitas - Transitividade	75
5.9.2	Comparação com Baseline	75
5.9.3	Possíveis Melhorias no AHP Escalável	76
6	CONCLUSÃO	77

7 PUBLICAÇÕES	79
7.1 Artigos Relacionados Diretamente com a Tese	79
7.2 Artigos Relacionados com a Linha de Pesquisa do PPGEE	79
REFERÊNCIAS	82
ÍNDICE REMISSIVO	89

1 INTRODUÇÃO

1.1 Motivação

De acordo com o Paradoxo da Escolha (SCHWARTZ, 2004), quanto maior o número de alternativas disponível, mais difícil será o processo de decisão. É bom que o decisor tenha muitas opções para escolher. No entanto, se este número for elevado, o processo de escolha pela alternativa mais preferida pode se tornar demorado e tedioso. Há ainda que se levar em consideração que por muitas vezes o processo de avaliação das alternativas pode ser inconsistente (KUO, 2021; SAKHARDANDE; GAONKAR, 2022).

Em muitos projetos, como os de engenharia, o decisor (ou usuário, gerente, consumidor, especialista etc.) é requerido para participar de diversos estágios da tomada de decisão, o que mantém o processo pouco automatizado e muito dependente do ser humano. Na teoria da decisão, existem vários métodos de tomada de decisão multicritério (MCDM) que ajudam a ordenar as alternativas existentes de acordo com as preferências dos decisores. Eles são aplicados em diversas áreas com o objetivo de selecionar, ordenar ou classificar alternativas no problema de decisão na presença de múltiplos critérios.

Um dos métodos de grande destaque na literatura é o método Análise Hierárquica de Processos (AHP) proposto por Saaty (1988). Ele é um método de apoio à análise de problemas de decisão multicritério complexos, que admite avaliação de critérios qualitativos e quantitativos (HO, 2008; BASÍLIO et al., 2022).

O AHP se baseia em matrizes de comparação pareadas, uma técnica de dividir-e-conquistar que analisa duas alternativas de cada vez para determinar as preferências. No entanto, o alto número de comparações feitas ao decisor em uma única consulta na construção de tais matrizes torna o método complexo e difícil de ser aplicado em problemas de larga-escala (PEDRO; TAKAHASHI, 2009; TULJAK-SUBAN; BAJEC, 2020; MUNIER; HONTORIA et al., 2021; SAKHARDANDE; GAONKAR, 2022). As principais críticas em relação a utilização do método são o elevado esforço cognitivo que requer do decisor (ALVES; MENECHINI; GUIMARÃES, 2021), inconsistência nos julgamentos (SAATY, 1977; SAKHARDANDE; GAONKAR, 2022; MUNIER; HONTORIA et al., 2021; CHU; LIU, 2002; KUO, 2021) e o tempo requerido para avaliação por parte dos especialistas (ALVES; MENECHINI; GUIMARÃES, 2021; SAKHARDANDE; GAONKAR, 2022).

O AHP, descrito posteriormente em 3.2, tem sido aplicado com sucesso em diferentes áreas como extrusão de polímeros (PEDRO; TAKAHASHI; GASPARGUNHA, 2015), engenharia (HO, 2008; ZAVADSKAS; TURSKIS; KILDIENĖ, 2014), avaliação

de riscos operacionais em subestações de energia (MAIA et al., 2021), localização de usinas (ZOLFANI et al., 2022), seleção de fornecedores para indústria automotiva (DWEIRI et al., 2016) e diversos outros, como em Ho (2008), Russo e Camanho (2015), Sakhardande e Gaonkar (2022).

Entretanto, o AHP possui um grave problema: ele requer $n \times (n - 1) / 2$ comparações de n alternativas em cada objetivo para resolver o problema de decisão (MUNIER; HONTORIA et al., 2021). O tempo investido por especialistas e a alta possibilidade de ambiguidade nos julgamentos impõe um grande desafio ao uso do método para utilização em problemas de larga-escala (SAKHARDANDE; GAONKAR, 2022; MUNIER; HONTORIA et al., 2021; RUSSO; CAMANHO, 2015; TULJAK-SUBAN; BAJEC, 2020).

O aprendizado das preferências do decisor tem sido uma alternativa para tornar os métodos MCDM, especialmente aqueles baseados em matrizes de comparações pareadas, mais práticos de serem utilizados. A motivação é porque as comparações levam muito tempo para serem realizadas e, atualmente, não há garantias de escalabilidade em problemas maiores (SAKHARDANDE; GAONKAR, 2022).

Nas empresas, cientistas de dados e estatísticos comumente buscam maneiras mais simples de apresentar as melhores alternativas aos gerentes. Isso é feito, por exemplo, excluindo as soluções dominadas, selecionando soluções em regiões mais diversas na fronteira Pareto, ou mesmo indicando ao decisor aquelas mais próximas de um ponto de referência (ou utópico) para facilitar a ordenação das soluções da mais preferida para a menos preferida. No entanto, a escolha continua difícil especialmente quando se lida com Otimização Multi-Objetivo (MOO) (2 e 3 objetivos) e Muitos Objetivos (MaOP) (4 ou mais objetivos) (MENECHINI et al., 2020).

De acordo com Tuljak-Suban e Bajec (2020), “decisores precisam de um método relativamente simples, confiável e que não seja terrivelmente custoso” (tradução nossa). Por isto, é proposto neste trabalho uma abordagem que acopla métodos de Aprendizado de Máquina (ou *Machine Learning* – ML), mais especificamente aprendizado em batches, ao método multicritério AHP para facilitar a tarefa de obtenção de preferências. A escalabilidade é melhorada apresentando menos alternativas ao decisor e de forma iterativa. Na versão clássica, todas as soluções são apresentadas e avaliadas de uma só vez. Isto não é viável para problemas de grande escala, pois muito possivelmente gerará inconsistência nos julgamentos e as decisões precisam ser tomadas rapidamente.

Para superar esses desafios, aqui é proposto o emprego de uma abordagem orientada por ML que atua em um processo iterativo junto ao AHP. Entre as consultas que são feitas ao decisor, pequenos subconjuntos de soluções são escolhidos usando diferentes estratégias para o decisor avaliar e capturar suas preferências explicitamente. Um método de ML de regressão é aplicado e otimizado para aprender essas preferências enquanto tenta prever quanto o decisor daria para os pares de alternativas restantes. Em outras palavras, o

modelo de ML busca aprender a função de utilidade multiatributo (MAUF) que representa o decisor, mas com menos comparações.

Para medir a convergência do método há diversas formas. Neste trabalho optou-se por utilizar a conhecida distância Kendall tau (KDT) (KENDALL, 1938), assim como em Alves, Meneghini e Guimarães (2021) e Pedro e Takahashi (2014). Esta métrica foi escolhida por ser amplamente utilizada na comparação entre listas e rankings e pela facilidade de implementação. Basicamente, quanto mais similares as listas (a posição dos elementos), menor a distância e melhor é o desempenho do algoritmo de ML.

Na literatura especializada, a fase de aprendizado é feita normalmente via aprendizado offline (CHEN; LIN, 2003), as preferências são tratadas como relações binárias (PEDRO; TAKAHASHI, 2014; MENDONÇA et al., 2020) e não há estratégias de escolha de alternativas que vão ser apresentadas ao decisor (ALVES; MENEGHINI; GUIMARÃES, 2021). Embora estas estratégias ajudem a diminuir a dimensão do problema ao decisor, elas não focam em escalabilidade, tampouco são baseadas em aprendizado em batches.

1.2 Contribuições

Dentre as principais contribuições deste trabalho para a literatura especializada e o tema de tomada de decisão multicritério e aprendizado de máquina/ciência de dados destacam-se:

1. Proposta de uma nova versão do AHP, denominada AHP Escalável;
2. Aplicação de ML e IA para processo de aprendizado das preferências do decisor;
3. Proposta de diferentes estratégias de seleção e recomendação de alternativas que vão ser apresentadas ao decisor;
4. Redução do número de comparações pareadas que o decisor precisa fazer no AHP para obter a ordenação total das alternativas;
5. Redução do tempo e do esforço cognitivo para avaliar as alternativas e resolver o problema de decisão;
6. Possibilidade de reutilizar o modelo em outros problemas, sem precisar de retreino ou novas consultas ao decisor;
7. Agregação de consistência ao resultado, visto que o AHP são informações atribuídas pelos decisores, ou especialistas.

Além disso, foram publicados alguns artigos durante o período de doutorado em temas relacionados diretamente à esta tese ou a linha de Inteligência Computacional. Estes artigos estão listados no final desta tese no Capítulo 7.

1.3 Justificativa

Existem uma série de razões que justificam a proposição desta pesquisa. A principal delas é fornecer escalabilidade para o AHP, pois este é o ponto mais crítico do método. Outros motivos estão relacionados a possibilidade de reduzir inconsistências nos julgamentos dos decisores, reduzir o esforço cognitivo do decisor através de um processo iterativo que envolve aprendizado em batches e aprendizado de máquina, aumentar o escopo e reduzir vies. Por motivos de praticidade, algumas justificativas são listadas a seguir.

1. Fornecer escalabilidade para o AHP. Esta é a principal justificativa que motivou o desenvolvimento deste trabalho. O método clássico proposto em Saaty (1988) não é escalável e não há, salvo melhor juízo, uma versão que utiliza aprendizado de máquina e aprendizado em batches com este propósito.
2. Reduzir as chances de inconsistências nas avaliações pareadas. É sabido que quanto maior o número de comparações, maiores as chances do decisor ser inconsistente em suas preferências. Teknomo (2006) sugeriu que 7+ comparações já é um número suficientemente elevado de comparações a serem feitas;
3. Redução no tempo requerido pelos gestores no processo de avaliação. Na versão clássica do método, $n \times (n - 1) / 2$ comparações são necessárias, de uma única vez, para comparar as n alternativas. Embora as estimativas de tempo para fazer as comparações pareadas não tenham sido foco direto deste trabalho, entende-se que a avaliação de menos alternativas auxilia na redução do tempo requerido do decisor;
4. Redução do esforço cognitivo do decisor. Neste trabalho as avaliações são requeridas sobre pequenos subconjuntos de alternativas e em um processo iterativo, o que demanda menos tempo (por consulta) e menos esforço para avaliar as alternativas apresentadas;
5. No AHP clássico parte-se do princípio que o decisor conhece o conjunto de alternativas do problema e é capaz de avaliá-las em um único round, aos pares. Na abordagem proposta, uma camada de iteração é adicionada. O decisor é consultado mais vezes, mas terá que fazer muito menos comparações do que o processo habitual e com menos chances de inconsistências nas avaliações;
6. Redução o viés do decisor. Neste caso em específico, falar-se-á apenas dos vieses de confirmação e representatividade. Ambos são reduzidos no processo de escolha

das soluções que serão apresentadas ao decisor. Diferentes estratégias de seleção e recomendação de alternativas foram implementadas que podem ser utilizadas e devem ajudar a mitigar esta deficiência.

7. O AHP é o método multicritério mais utilizado na literatura, com uma vasta gama de aplicações. Ele possui evento regular e periódico próprio dedicado à ele (BARGUEÑO et al., 2021).

Outra pergunta que ainda pode ficar é: Por que o AHP? Afinal, há dezenas de métodos na literatura. Esta pergunta é muito fácil de responder, na verdade. O AHP é, de longe, o método multicritério mais utilizado na literatura. Ele é um dos poucos que estrutura opiniões dos especialistas e retorna um valor de peso e/ou hierarquização dos critérios e depois das alternativas.

É comum ver nos surveys e literatura especializada que o número de pesquisas com o AHP é sempre crescente (ZYOUND; FUCHS-HANUSCH, 2017) e superior aos demais métodos (YU et al., 2021; EMROUZNEJAD; MARRA, 2017; SILVA et al., 2021; BASÍLIO et al., 2022). Isto sem falar da infinidade de aplicações do método. Para destacar apenas alguns exemplos recentes: seleção de fornecedores Torre e Salomon (2023), análise de redes sociais (EMROUZNEJAD; MARRA, 2017), mobilidade urbana (BARGUEÑO et al., 2021), risco operacional em subestações de energia (MAIA et al., 2021), escolha do tipo de serviço de transporte (SILVA; SOUZA; ALVES, 2019), entre outros.

Por fim, mas não menos importante, Bargueño et al. (2021) ainda destacaram que o AHP é o único método com um evento regular desde a década de 1980 no *International Symposium on the AHP* (ISAHP) e o único método multicritério com um periódico exclusivo dedicado à ele: o *International Journal of AHP* (IJAHP).

Além disso, a metodologia proposta com o AHP Escalável insere novos passos no processo de decisão do AHP. Esta estratégia torna o método mais prático de ser utilizado em problemas reais, exige bem menos comparações pareadas do decisor para construir as matrizes pareadas e oferece menos chances de avaliações inconsistentes. Esta justificativa em particular é melhor discutida na metodologia e nos resultados.

1.4 Estrutura da Tese

- Capítulo 2: Apresenta conceitos do comportamento do consumidor e as principais teorias relacionadas à eliciação de preferências. O capítulo busca conectar conceitos da teoria da decisão, microeconomia e aprendizado de preferências;
- Capítulo 3: Descreve os problemas de tomada de decisão multicritério e sua formulação básica. O método AHP, foco deste estudo, é apresentado e detalhado. As principais

referências relacionadas com o aprendizado das preferências do decisor em teoria multicritério são apresentadas, bem como os trabalhos focados na redução das comparações pareadas;

- Capítulo 4: Detalha a metodologia aplicada neste trabalho, que envolve aprendizado de máquina e aprendizado em batches para aprender as preferências do decisor em um processo iterativo. A metodologia proposta, chamada AHP Escalável, é apresentado e os parâmetros discutidos;
- Capítulo 5: Apresenta os resultados do AHP Escalável em diferentes problemas de decisão. Os parâmetros propostos são discutidos individualmente. Há, ainda, os resultados em problemas reais e comparações com outros trabalhos da literatura;
- Capítulo 6: Apresenta as conclusões e os principais achados desta pesquisa. Propostas de continuidade são discutidas;
- Capítulo 7: Lista os artigos resultantes do doutorado, seja vinculados diretamente ao tema de pesquisa ou a linha de Inteligência Computacional.

1.5 Como Citar esta Tese

O DOI (*Digital Object Identifier*) da mesma no Zenodo é: [10.5281/zenodo.8269638](https://doi.org/10.5281/zenodo.8269638). Ela pode ser encontrada no link: <https://zenodo.org/record/8269638>.

Por questões de praticidade, abaixo estão as instruções para citar esta tese utilizando LaTeX.

```
@phdthesis{TeseMarcosAlvesUFMG,  
  author = {Alves, Marcos Antonio},  
  title = {Aprendizado das preferências do decisor usando aprendizado de máquina  
em problemas multicritério},  
  year = {2023},  
  month = {Abril},  
  type = {Tese (doutorado)},  
  pages = {89},  
  school = {Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia}  
  doi = 10.5281/zenodo.8269638  
}
```

2 CONCEITOS PRELIMINARES

Este capítulo examina o comportamento do consumidor através de suas preferências. Para isto, faz-se algumas referências aos trabalhos seminais de [Bernoulli \(2011\)](#), [Pareto \(1998\)](#) e [Neumann e Morgenstern \(2007\)](#). Por meio da análise é possível entender como os consumidores tomam decisões almejando maximizar suas preferências em relação a utilidade dos bens.

O objetivo do capítulo é elucidar alguns conceitos e traçar relacionamentos destes com o processo iterativo do tipo pergunta-resposta no processo de avaliação pareada das soluções. Na literatura, este tema é tratado comumente como elicitación das preferências ([FÜRANKRANZ; HÜLLERMEIER, 2010a](#)) e aqui é analisado sob a ótica da tomada de decisão multicritério.

Os principais tópicos abordados neste capítulo são:

- Descrever os principais conceitos relacionados com os tomadores de decisão e como eles atuam no processo decisório;
- Apresentar as principais propriedades relacionadas com a elicitación de preferências;
- Relacionar os conceitos de teoria da decisão e aprendizado de preferências.

Duas analogias são feitas ao longo deste capítulo: (i) o consumidor – das teorias econômicas – pode figurar o decisor da teoria da decisão multicritério ou o usuário dos sistemas de recomendação; (ii) os bens de consumo podem representar uma solução qualquer e pode ter seu grau de utilidade aumentado ou diminuído a depender do critério avaliado. Se benefício, quanto mais melhor. Se custo, quanto menos melhor. Uma preferência neutra indica que elas são igualmente preferidas.

Está fora do escopo deste capítulo fazer uma revisão profunda ou extensa destas áreas. Referências para tais temas serão trazidos oportunamente e indicados ao longo do texto.

2.1 Relações de Preferência

O termo preferência pode ter diferentes interpretações, mas neste trabalho ele é interpretado como avaliação comparativa subjetiva que traduzem desejos específicos feitos de uma maneira declarativa pelo decisor ([FÜRANKRANZ; HÜLLERMEIER, 2010b](#)). Avaliação porque diz respeito a valor, tipicamente relacionada com o raciocínio prático do dia-a-dia. Subjetivo porque faz parte da vagueza e indecisão humana. Comparativa, pois as avaliações são expressas em relação a um item sobre outro.

Apesar da grande variedade de aplicações, como sistemas de recomendação, comércio eletrônico e jogos, este trabalho foca na aquisição e aprendizagem de preferências no contexto da tomada de decisão multicritério. As demais áreas e aplicações podem ser consultadas em [Fürnkranz e Hüllermeier \(2011\)](#). Essencialmente, percebe-se pelos trabalhos de [Perloff \(2019\)](#), [Salvatore \(2003\)](#) e [Nicholson e Snyder \(2012\)](#) que as preferências estão relacionadas à microeconomia e, mais especificamente, à teoria do consumidor.

As preferências são definidas como os gostos sobre o conjunto de itens disponível. Elas permitem classificá-los e ordená-los para satisfazer os desejos humanos ([PERLOFF, 2019](#)). Esta relação entre a utilidade e o item pode se manter inalterada durante um período de tempo, mas ela pode mudar por inúmeros motivos. Esta última asserção, inclusive, pode ser uma ótima oportunidade para futuros pesquisadores. Esta ideia de mudanças de preferências temporal é pouco estudada na literatura e pode ser um campo interessante para exploração.

As relações de preferência seguem algumas propriedades descritas em [Salvatore \(2003\)](#) e [Nicholson e Snyder \(2012\)](#). Elas são apresentadas a seguir.

- a) *Completeness*: dadas i e j , duas diferentes soluções do domínio \mathcal{X} , os decisores são capazes de expressar as preferências de uma solução sobre a outra na forma “ i é preferida à j ” ($i > j$), “ j é preferida à i ” ($j > i$) ou “ i e j são igualmente preferidas” ($i \sim j$). Esta propriedade assume que os decisores são capazes de explicitar as suas preferências sobre quaisquer par de soluções.
- b) *Transitividade* ou *Consistência* ou *Racionalidade*: se o decisor diz que “ i é preferida à j ” e “ j é preferida à k ”, então ele deve, necessariamente, concordar que “ i é preferida à k ” ($i > j \wedge j > k \Rightarrow i > k$). Isto significa que as preferências no conjunto de soluções são internamente consistentes e apresentam comportamento lógico e consistente.
- c) *Continuidade*: Se um decisor diz que “ i é preferida à j ”, então preferências muito “próximas de” i também têm que ser muito preferidas em relação a j . Esta propriedade serve para garantir a modelagem de importantes cenários e comportamentos econômicos no mundo real.
- d) *Quanto mais melhor* ou *Não-saciedade*: quanto mais de um bem é melhor do que menos dele. Isto é relacionado, por exemplo, aos objetivos do problema de otimização: *benefício* representa a avaliação favorável de um certo critério que, se atendido, mais ganho é preferível à menos ganho; e *custo* é o oposto, onde quanto menor, melhor.
- e) *Convexidade* ou *Convexidade Estrita*: significa, basicamente, que consumidores preferem médias à extremos. Por exemplo, se um decisor prefere i e j que estão próximos de dois objetivos distintos, então ele prefere uma média ponderada de i e j , $\beta i + (1 - \beta)j$, onde $0 < \beta < 1$ para k objetivos.

A partir destas propriedades, são definidas as quatro formas básicas de representação das preferências entre quaisquer par $\langle x, y \rangle \in \mathcal{X}$ definidas a seguir.

- a) preferência fraca: $i \succsim j \iff i$ não é pior que j .
- b) preferência estrita: $i \succ j \iff (i \succsim j) \wedge (j \not\succsim i)$.
- c) indiferença: $i \sim j \iff (i \succsim j) \wedge (j \succsim i)$.
- d) incomparabilidade: $i \perp j \iff (i \not\succsim j) \wedge (j \not\succsim i)$.

Três problemas foram apontados por [Mousseau \(2008\)](#) que podem ser resolvidos à partir destas representações:

1. Escolha: selecionar a melhor ou as top- n melhores dentre um conjunto de soluções;
2. Ordenação: ranquear as alternativas da mais preferida para a menos preferida, seja ordem total ou parcial;
3. Classificação: definição de categorias predefinidas.

A propriedade que permite medir a satisfação ou o bem-estar que um indivíduo experimenta em relação a um bem ou uma cesta de bens é chamada de utilidade ([SALVATORE, 2003](#)). Ela é entendida como a capacidade de um determinado bem em satisfazer desejos e necessidades humanas.

A utilidade pode ser cardinal ou ordinal. A primeira é mensurável em unidades absolutas, ou seja, pode ser expressa numericamente. Já a segunda não permite uma medida numérica precisa, mas permite a ordenação dos bens de acordo com as preferências do indivíduo.

De forma mais geral, [Garófalo e Carvalho \(1985\)](#) explicaram que a utilidade cardinal busca quantificar o bem-estar do indivíduo utilizando números reais positivos. Nas palavras de [Salvatore \(2003\)](#), “significa que um indivíduo pode atribuir valores específicos ou números de utilidades ao consumir qualquer quantidade de um bem ou cesta de bens” (tradução nossa).

No entanto, a teoria clássica assumia que a utilidade poderia ser medida numericamente e comparada entre diferentes indivíduos, o que foi contestado por outros economistas. Isto porque ela não conseguia explicar, por exemplo, como as pessoas tomam decisões em situações de incerteza ou como levam em conta fatores como o contexto social e emocional na sua tomada de decisão. Por essas razões, a teoria da utilidade cardinal perdeu popularidade e deu lugar à teoria da utilidade ordinal, que é mais flexível e não requer que a utilidade seja mensurável.

Na teoria da utilidade ordinal foi introduzida uma ordem de preferência para qualificar a utilidade sem necessariamente estabelecer a quantidade de utilidade de um bem. Nela, a utilidade não é mensurável, mas comparável. [Salvatore \(2003\)](#) diz que a teoria “apenas classifica a utilidade recebida pelo consumo de várias quantidades de um bem ou cestas de bens” (tradução nossa).

Na verdade, há de se argumentar que ambas as teorias possuem críticas. [Salvatore \(2003\)](#), por exemplo, argumentou que uma utilidade ordinal fornece uma noção de medida muito mais fraca do que a cardinal porque requer apenas a classificação dos bens em uma ordem de preferência. Quando o decisor é questionado sobre a escolha entre dois itens, a utilidade ordinal exige apenas que ele indique se prefere a primeira cesta, a segunda ou se é indiferente entre elas. Ela não exige, por exemplo, que o indivíduo especifique quanto de utilidade a mais a cesta preferida tem sobre a outra.

Em resumo, a utilidade ordinal classifica apenas várias cestas de consumo, enquanto a utilidade cardinal fornece um índice real ou medida de satisfação. As discussões sobre o tema em macro e microeconomia estão fora do escopo deste capítulo. Contudo, ao leitor interessado no tema um bom ponto de partida são os trabalhos de [Moscati \(2021\)](#), [Salvatore \(2003\)](#), [Perloff \(2019\)](#), [Nicholson e Snyder \(2012\)](#) e suas referências.

Uma função de utilidade, por sua vez, é a relação entre as medidas de utilidade e todas as cestas de bens. A base e axiomas quantitativos estabelecidos por [Neumann e Morgenstern \(2007\)](#) permitiram a construção de funções de utilidade que são consistentes com as escolhas racionais dos indivíduos.

Todos esses conceitos estão relacionados com o Paradoxo de São Petersburgo proposto por [Bernoulli \(2011\)](#) no século XVIII. Ele defendia que o valor de um artigo não é o seu preço, mas sim a utilidade que ele proporciona. Em outras palavras, a utilidade não é diretamente proporcional à riqueza. Com isto, ele propôs que a utilidade é uma função do bem-estar, que depende não apenas da riqueza, mas também de outros fatores, como o risco e a incerteza.

Essa ideia foi posteriormente incorporada na teoria da utilidade esperada, desenvolvida por [Neumann e Morgenstern \(2007\)](#). Esta teoria é uma abordagem matemática para a tomada de decisão sob incerteza e, portanto, incorpora a subjetividade humana no processo decisório. Ela utiliza uma função de utilidade para atribuir valores numéricos às diferentes consequências possíveis de uma decisão e uma função de probabilidade para medir a probabilidade de cada consequência ocorrer.

Ao final de um processo de decisão, no caso de um problema de ordenação total, o resultado é uma relação do tipo $a_i > a_j > \dots > a_n$. Assim, qualquer algoritmo de aprendizado que aprenda a partir desta relação poderia, também, aproximar da função de utilidade que representa o decisor. É fácil compreender, portanto, que uma função de

utilidade pode ser transformada em outra função de utilidade, ou mesmo mapeada, de forma que as relações de preferência sejam desejavelmente mantidas.

2.2 Aprendizado de Preferências

Aprendizado de preferências é um sub-campo do aprendizado de máquina que lida com o aprendizado de informações observadas, i.e. explícitas, ou extraídas, i.e. implícitas. Esta abordagem é frequentemente requerida para gerar uma relação de ordem total de uma coleção de alternativas (FÜRNKRANZ; HÜLLERMEIER, 2010b) que são chamadas de problemas de ranking (MELNIKOV et al., 2016).

Uma motivação importante para a modelagem de preferências é que, embora essa tarefa ainda possa ser realizada manualmente, ela é impraticável em muitas aplicações reais. No entanto, a construção de uma recomendação personalizada requer uma boa técnica para capturar as preferências individuais, especialmente porque a quantidade de dados usados para derivar as preferências do usuário cresce rapidamente. A modelagem de preferências “destina-se a apoiar e automatizar parcialmente o design de modelos de preferências” (tradução nossa) (FÜRNKRANZ; HÜLLERMEIER, 2010b).

Este apontamento traz muito valor no contexto desta tese, pois entenderemos o aprendizado de preferências como uma forma de auxiliar o tomador de decisão no moroso processo de hierarquização de soluções em problemas de larga escala.

A partir da aquisição de alguns dados (relações de preferência) de forma explícita ou implícita, o modelo de aprendizagem é construído junto ao decisor até que uma condição seja atingida. Esse critério é uma função de perda \mathcal{L} , já que o modelo treinado deve ser capaz de prever uma saída \mathcal{Y} , ou simplesmente mapear $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$. Por fim, ele é avaliado conforme representado na Equação (2.1).

$$\mathcal{L} : \mathcal{Y} \times \mathcal{Y} \longrightarrow \mathbb{R}^+ \quad (2.1)$$

e a diferença entre (y, y^*) é utilizada para penalizar a predição de y em comparação com a saída verdadeira é y^* .

Os resultados dessas métricas podem ser entendidos de duas formas. A primeira, mais óbvia, pela capacidade do método de aprender as preferências dos tomadores de decisão e auxiliá-los posteriormente no processo decisório. A segunda segunda é que os decisores entendem que existe algum nível de imprecisão no modelo e aceita algum nível de erro no ranking estimado.

Preferências do usuário desempenham um papel fundamental na tomada de decisão automatizada e aparecem em vários campos de pesquisa dentro da IA. Hüllermeier e Fürnkranz (2013) ilustraram as conexões entre as disciplinas relacionadas com a apren-

dizagem de preferências e outros campos, conforme resumido na Tabela 1. Tomada de decisão multicritério, em negrito e em inglês, está no foco desta trabalho.

Vale ressaltar também que existem outras áreas de contribuição como teoria dos grafos, estatística e otimização. Sobre as ciências da decisão, os referidos autores destacaram quatro áreas: pesquisa operacional, economia e teoria da decisão, escolha social e tomada de decisão multicritério. Embora este trabalho esteja diretamente voltado para este último, outras conexões podem ser (e serão) feitas ao longo do texto para guiar o leitor à teoria específica sobre os temas.

Tabela 1 – Conexões da área de aprendizado de preferências. Multicriteria Decision Making (ou MCDM), em negrito, é o foco desta tese.

Disciplina	Sub-campo	Referências relacionadas
Aprendizado de Máquina	Multilabel classification	Fürnkranz e Hüllermeier (2010b)
	Structured Output Prediction	
	Learning Monotone Models	
Recuperação da Informação	Learning to Rank	Melnikov et al. (2016)
	Recommender Systems	
Ciências da Decisão	Social Choice	Isern, Valls e Moreno (2006)
	Operations Research	
	Multicriteria Decision Making	
	Economics & Decision Theory	

Fonte: Adaptado de Hüllermeier e Fürnkranz (2013).

Os problemas podem ser distinguidos em várias dimensões, incluindo representação de preferências, descrição das alternativas, tipo de entrada de treinamento e assim por diante.

Hüllermeier e Fürnkranz (2013) ilustraram na Figura 1 os tipos de avaliação e comparação mais frequentemente utilizados. Perceba que as avaliações podem ser binárias ou graduais. As graduais podem ser numéricas ou ordinais. Já as comparações geram uma ordem total ou ordem parcial.

A principal diferença entre a modelagem e aprendizagem de preferências é que a primeira é completamente especificada por um especialista ou pelo próprio tomador de decisão, enquanto a última tem partes do modelo construídas com a ajuda de informações externas (FÜRNKRANZ; HÜLLERMEIER, 2011). Devido a isso, o aprendizado de preferências está relacionado principalmente com o campo de aprendizado de máquina e IA. No processo de decisão, portanto, aprender a função de utilidade que representa o perfil de risco do decisor se resume a resolver um problema de regressão .

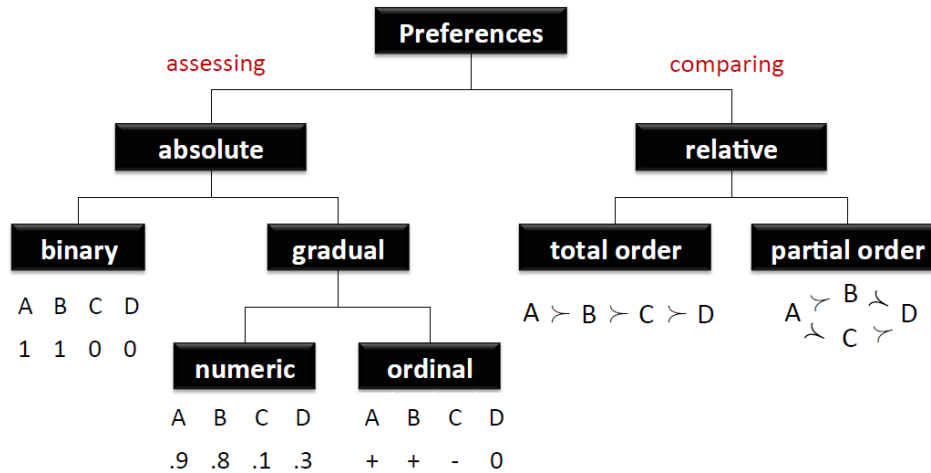


Figura 1 – Tipos de avaliação de preferências.
 Fonte: Fürnkranz e Hüllermeier (2011)

2.3 Conceitos de Learning to Rank

Na disciplina de recuperação da informação, a aprendizagem de preferências e aprendizagem de classificação são frequentemente divididas em três classes: *object ranking*, *label ranking* e *instance label*. Estes conceitos são detalhados abaixo, partindo-se da explicação fornecida por Fürnkranz e Hüllermeier (2010a).

- *Object ranking*: a tarefa é ordenar subconjuntos de objetos quanto às propriedades das alternativas. Dado um conjunto \mathcal{X} cuja representação é um vetor de características e um conjunto de preferências par a par $x_i > x_j, (x_i, x_j) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, o objetivo é encontrar uma função de classificação $r(\cdot)$ que, dado um conjunto de objetos $\mathcal{O} \in \mathcal{X}$ como entrada, retorna uma permutação (classificação) desses objetos.
- *Label ranking*: a tarefa é atribuir uma permutação de um conjunto fixo de rótulos a uma determinada instância e depende das propriedades do contexto. Dado um conjunto de instâncias de treinamento $\{x_k | k = 1, \dots, n\} \subseteq \mathcal{X}$, representado por um vetor de atributos e um conjunto de rótulos $\mathcal{L} = \{\lambda_i | i = 1, \dots, m\}$. Para cada instância de treinamento x_k é necessário um conjunto de preferências pareadas associadas $\lambda_i >_{x_k} \lambda_j$. O objetivo é encontrar uma função $r(\cdot)$ que mapeie $\mathcal{X} \rightarrow \mathcal{S}_m$ e atribua uma classificação (permutação) $>_x$ de \mathcal{L} a cada \mathcal{X} .
- *Instance label*: a tarefa é ordenar as instâncias com base na relevância de uma determinada classe. Dado um conjunto de instâncias de treinamento $\{x_l | l = 1, \dots, n\} \subseteq \mathcal{X}$, um conjunto de rótulos $\mathcal{Y} = \{y_1, \dots, y_k\}$ dotados de uma ordem $y_1 < \dots < y_k$ sendo que para cada instância x_l existe um rótulo associado y_l . O objetivo é encontrar $r(\cdot)$ para ordenar um novo conjunto de instâncias $\{x_j\}_{j=1}^t$ de acordo com seus graus de preferência.

Métodos Learning to Rank (LTR) usam algoritmos de ML para construir uma função $r(\cdot)$ e fazer a previsão de ordem relativa dos itens. LTR é dividido em três classes: *pointwise*, *pairwise*, *listwise*. explicados na Tabela 2.

Tabela 2 – Descrição dos modelos Learning to Rank: *Pointwise*, *Pairwise* e *Listwise*.

Modelo	Definição
<i>Pointwise</i>	O espaço de entrada são documentos únicos e o espaço de saída são valores reais ou categorias ordinais. O objetivo é prever a relevância do documento para a consulta atual, ou próximo ao rótulo.
<i>Pairwise</i>	Esta abordagem leva em consideração pares de documentos e a saída é a ordenação baseada na relevância.
<i>Listwise</i>	O espaço de entrada é toda a lista de documentos \mathcal{X} e normalmente uma otimização direta da função de perda é necessária para otimizar a ordem total.

Fonte: Adaptado de [Fürnkranz e Hüllermeier \(2010a\)](#).

Com base nos conceitos apresentados dos modelos LTR é possível observar que os *pairwise* são mais gerais que os *listwise*. Na primeira as preferências são obtidas para cada par de objetos e o modelo seja treinado para prever a representação entre y_i e y_j . Todavia, isto não resulta necessariamente em uma ordem total e pode ser, por exemplo, uma pré-ordem parcial. Nos métodos *listwise* a perda é calculada diretamente sobre toda a lista de documentos significando que todos eles são importantes e, portanto, espera-se uma ordem total.

Outra observação é que, intrinsecamente, essas três classes de modelos LTR estão (mais) preocupadas com a ordem relativa do que com a pontuação ou previsão exata.

No próximo capítulo será possível observar que, do ponto de vista da abordagem proposta neste trabalho, é mais fácil (ou mais geral) treinar um modelo de aprendizado de máquina que aproxime preferências pareadas do que aprender a função de utilidade global (ordem total). Isso ocorre porque, após a geração de um modelo de aprendizado de máquina, a função de utilidade é induzida a partir da matriz de comparação e, em seguida, é gerada a ordenação das soluções.

Uma melhor compreensão sobre aprendizagem de preferências, especialmente com trabalhos focados em recuperação de informação, pode ser encontrada em [Fürnkranz e Hüllermeier \(2010a\)](#) e suas referências.

No subcampo da tomada de decisão multicritério, que pertence às ciências da decisão, as preferências dos usuários estão fortemente relacionadas com as avaliações das alternativas sob os diferentes atributos.

O objetivo fundamental dos métodos é indicar ao decisor a alternativa mais preferida, hierarquizá-la ou classificá-la de acordo com suas preferências. Essas alternativas são representadas por meio de um conjunto de atributos de preferência para cada alternativa.

Esses atributos, chamados de critérios, são funções de valor real que permitem comparar qualquer par de alternativas de acordo com uma dimensão do problema.

Dado um método multicritério selecionado para modelar as preferências do decisor, um processo de elicitación de preferências consiste em uma interação entre o decisor e o analista e leva o decisor a expressar informações sobre suas preferências sobre $\mathcal{O} \in \mathcal{X}$ com a consciência de alguma perda \mathcal{L} .

Nesse campo, algumas funções que configuram a posição do tomador de decisão nas organizações podem ser, por exemplo, Chief Executive Officer (CEO), Chief Information/Operating/Technical Officer (CIO/COO/CTO) – projetos tecnológicos, Chief Product Officer (CPO), Product Manager (PM) ou até mesmo Product Owner (PO).

Estes papéis podem variar de projeto para projeto, da estrutura da organização (papéis horizontais ou verticais) e da decisão a ser tomada. No capítulo a seguir são apresentadas as preferências no contexto da teoria da decisão multicritério.

2.4 Principais Destaques do Capítulo

- As preferências dos decisores são tratadas como avaliações comparativas subjetivas. O decisor é consultado para expressar suas preferências sobre pares de alternativas, compara-as utilizando uma escala Likert de 9 pontos e entende-se que a utilidade de cada item já incorpora as incertezas e subjetividade humana;
- As propriedades das relações de preferência são: completude, transitividade, continuidade, não-saciedade e convexidade;
- A partir das preferências pode-se resolver três problemas em teoria da decisão: escolha, ordenação total/parcial e classificação. Neste trabalho, a abordagem proposta e o método original relaciona-se com a ordenação total das soluções, algo como $a_1, > \dots > a_n$. Há métodos multicritério e abordagens que tratam os outros problemas, porém não é foco deste estudo;
- A utilidade pode ser uma medida cardinal (mensurável), ou ordinal (comparável);
- A área de pesquisa de aprendizado de preferências possui como sub-campo de pesquisa a Tomada de Decisão Multicritério, foco deste estudo;
- As preferências discutidas neste trabalho são de avaliações absolutas, graduais e numéricas – baseadas na Escala de Saaty, para obter uma ordem total das alternativas;
- Este trabalho também se relaciona com os métodos LTR, mais especificamente sobre a construção de uma função $r(\cdot)$ para um modelo similar aos *listwise*. À frente fica

claro que embora a abordagem proponha o aprendizado em batches de $\mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ a ordenação feita é a de \mathcal{X} , ou seja, do conjunto completo de alternativas.

3 ESTADO DA ARTE

Este capítulo aborda a literatura relacionada aos métodos multicritério e como o processo decisório é formulado. Em especial, é discutido o método AHP, que é o foco deste estudo. Além disso, são apresentadas as principais referências sobre o aprendizado de preferências do tomador de decisão e como a literatura tem tentado reduzir o número de comparações pareadas em problemas de decisão.

3.1 Contextualização aos Problemas Multicritério

A tomada de decisão multicritério pode ser separada em duas partes: a primeira parte refere-se a otimização MOO ou MaOP. A segunda é a escolha da decisão envolvendo os múltiplos critérios. A otimização desempenha um papel importante no ciclo de concepção, e resolver problemas de grande escala representa desafios para os profissionais. Modelar os problemas sob múltiplos objetivos e disciplinas é conhecido como MCDM (MOSAVI, 2010; TANABE; ISHIBUCHI, 2020).

Fundamentalmente, o objetivo da tomada de decisão multicritério é encontrar boas soluções e apresentá-las ao decisor. Em teoria da decisão há diversos métodos multicritério para guiar o decisor na busca pela solução mais preferida de acordo com as suas preferências e necessidades. De uma maneira geral, estes métodos são separados em três grandes categorias:

1. Métodos de Agregação, que tem como característica permitir a definição de uma função que busca agregar valores de cada alternativa sob cada critério, tais como o AHP (SAATY, 1988), Analytic Network Process (ANP) (SATTY, 1996), Measuring Attractiveness by a Categorical Based Evaluation Technique (MACBETH) (BANA E COSTA; VANSNICK, 1994) e Best-Worst Method (BWM) (REZAEI, 2015);
2. Métodos de Sobreposição, que buscam construir relações de sobreclassificação, tais como Preference Ranking Organisation Method of Enrichment Evaluations (PROMETHEE) (BRANS; MARESCHAL, 1990) e Élimination et Choix Traduisant la Réalité (ELECTRE) (ROY, 1968) e família;
3. Métodos Interativos, tais como Multi-Objective Linear Programming (MOLP) (ZAVADSKAS; TURSKIS; KILDIENĖ, 2014)

Todas estas categorias podem ser utilizadas no apoio à decisão multicritério. Para uma completa revisão sobre estes métodos, suas classificações e mais recentes aplicações, sugere-se a leitura de Zavadskas, Turskis e Kildienė (2014) e Alves (2018) e suas referências.

Em geral estes métodos são estruturados em uma matriz bidimensional $D_{n \times m}$

representado em (3.1), onde C_j é o j -ésimo critério, a_i a i -ésima alternativa e $x_{ij} = C_j(a_i)$ a avaliação de a_i em respeito a C_j .

$$D = \begin{matrix} & C_1 & C_2 & \dots & C_m \\ \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1m} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nm} \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (3.1)$$

Alguns métodos fazem a transformação dos dados utilizando, por exemplo, a normalização Min-Max ($x_i^* = (x_i - x_{min}) / (x_{max} - x_{min})$) ou a padronização z -score ($z = (x_i - \mu) / \sigma$), onde μ é a média e σ é o desvio padrão. Posteriormente, os valores transformados são multiplicados por um vetor de pesos $W = w_1, \dots, w_m$ que representa a importância de cada critério, sendo $w_j \geq 0$ e $\sum_{j \in m} w_j = 1$.

Alguns métodos como o AHP são capazes de calcular os pesos dos critérios diretamente sem a necessidade da elicitacão direta por parte do decisor. Uma vez obtido o vetor de pesos, ele é utilizado para ordenar as alternativas da mais preferida para a menos preferida.

Na realidade, esta estratégia de computar W através do AHP e utilizar como entrada em outro método método multicritério é muito mais comum do que parece, veja como exemplo os trabalhos mencionados por Ho (2008), Dweiri et al. (2016), Russo e Camanho (2015). Muitos autores evitam o uso do AHP porque ele requer a avaliação pareada das n alternativas, o que torna a escolha da decisão sob múltiplos critérios praticamente impossível em problemas de larga-escala.

3.2 Método Análise Hierárquica de Processos

O AHP é um método de análise de decisão utilizado para a resolução de problemas de simples a complexos. Ele se baseia na relativa facilidade que a mente humana possui de estabelecer comparações entre dois itens dentro de uma mesma cesta de produtos (comparações pareadas). Busca-se não apenas comparações ordinais (qual alternativa é melhor que a outra? qual a preferida?), mas, sobretudo, cardinais (quanto a alternativa a_i é mais importante que a_j ?) que é feito utilizando uma escala de comparações de 9 pontos e de forma explícita pelo decisor.

As comparações pareadas são uma parte vital do procedimento de priorização no AHP. Ao realizar uma avaliação, o problema de decisão é construído em uma estrutura hierárquica similar à matriz D . Em seguida, utiliza-se a escala Likert de 9 pontos conhecida

como “Escala Fundamental de Comparações” explicada na Tabela 3 para expressar os termos verbais que serão convertidos em valores numéricos.

Para cada critério/objetivo, os decisores explicitam suas preferências numéricas e graduais para cada par de alternativas existentes. Isto entre os objetivos, e depois entre as alternativas em cada objetivo.

Tabela 3 – Escala Fundamental de Comparações

Importância	Definição	Recíproco
1	Importâncias iguais entre as duas alternativas	1 (1.000)
2	Importâncias iguais a moderada	1/2 (0.500)
3	Importância moderada a favor de uma alternativa sobre a outra	1/3 (0.333)
4	Importância moderada a forte	1/4 (0.250)
5	Importância forte a favor de uma alternativa sobre a outra	1/5 (0.200)
6	Importância forte a muito forte	1/6 (0.167)
7	Importância muito forte a favor de uma alternativa sobre a outra	1/7 (0.143)
8	Importância muito forte a absoluta	1/8 (0.125)
9	Importância absoluta de uma alternativa sobre a outra	1/9 (0.111)

Fonte: Adaptado de Saaty (2014)

O modelo é baseado em três etapas do pensamento analítico: construção de hierarquias, definição de prioridades e verificação da consistência lógica (SAATY, 2008; SAATY, 2014).

Na primeira, estrutura-se o problema estabelecendo as devidas relações entre o objetivo de decisão, critérios que traduzem o objetivo e alternativas disponíveis.

Depois, as prioridades provém dos julgamentos de valor estabelecidos pelo decisor entre as diferentes alternativas, em face de cada subcritério ou critério, entre os subcritérios de cada critério e entre diferentes critérios ante o objetivo. Evidentemente, a multiplicidade de comparações pareadas entre todas as alternativas pode gerar inconsistências que são interpretadas como erros do processo cognitivo, sendo estes um dos problemas mais críticos do método clássico.

Por isto, na ultima etapa estes erros são verificados. Se forem computadas inconsistências, elas devem ser eliminadas refazendo o processo total ou parcialmente. As alternativas são ordenadas se a consistência for satisfatória. Caso contrário, o decisor precisa participar novamente do processo para reavaliar as alternativas, em partes ou de todo o conjunto, até obter julgamentos consistentes.

Segundo Saaty (2014), através das comparações entre os dados hierarquizados as prioridades são capazes de capturar medidas baseadas em experiência, intuição e em dados físicos para solução do problema. A simplicidade do processo, permitindo avaliar fatores qualitativos e quantitativos, tangíveis ou intangíveis, aliada à fundamentação matemática tornou a abordagem uma poderosa ferramenta de apoio a decisão.

Se por um lado o modelo é capaz de subdividir o problema e tratá-lo por partes,

por outro torna-o complexo quando o número de comparações e avaliações for elevado. É moroso realizar julgamentos de grande número de critérios e alternativas e também mais provável de obter avaliações inconsistentes.

Saaty (2008) sugeriu que quando o número de alternativas for demasiadamente grande pode-se particionar o problema e utilizar os melhores resultados de cada um deles para nova aplicação do método. Esta é uma forma encontrada para não se perder entre as avaliações pareadas e manter o método robusto a um elevado número de comparações. Como modelo da realidade, uma hierarquia bem construída pode trazer vantagens. Do oposto, o modelo tende a gerar inconsistências nos julgamentos e volta novamente para avaliação pelo especialista.

Os passos para aplicar o AHP propostos pelo seu criador Saaty (2014) são:

1. Decomposição do problema em hierarquias:

O problema é decomposto em três partes: objetivo, subcritérios e alternativas, na forma hierárquica. O enfoque do AHP envolve a subdivisão do problema maior e mais complexo em diferentes sub-níveis de hierarquia.

2. Realizar comparações pareadas:

Construa uma matriz de comparações pareadas para o conjunto de alternativas \mathcal{X} , onde as entradas indicam o quão o decisor prefere uma solução ou critério o outro tomando como base a descrição ou o valor de importância da Tabela 3. Neste ponto, é importante destacar que a número de consultas feitas ao decisor é $n \times (n - 1)/2$ avaliações para cada objetivo. Perceba que a depender do tamanho de n e j este processo pode ser muito custoso.

3. Calcular a consistência das avaliações do decisor:

A matriz de avaliações é considerada consistente se todos os seus elementos forem transitivos e recíprocos, como $x_{ij} = x_{ik} \times x_{jk}$ e $x_{ij} = 1/x_{jk}$ onde i, j e k são quaisquer elementos da matriz $\mathcal{Q} \in \mathcal{X}$ e se $i = j$ (diagonal principal), então $x_{ij} = 1$. Para obter a prioridade relativa de cada critério, uma matriz normalizada é definida de acordo com a Equação (3.2).

$$w_{ij} = \frac{x_{ij}}{\sum_{i=1}^n x_{ij}} \quad (3.2)$$

onde $\sum_{i=1}^n x_{ij}$ é a soma dos elementos da coluna j . Em seguida, o peso relativo de cada linha é calculado dividindo a soma dos valores de cada linha pelo número de elementos n , conforme Equação (3.3).

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^n w_{ij}}{n} \quad (3.3)$$

4. Calcule o autovetor (*eigen vector*) para cada matriz de comparação.

O autovalor máximo (λ_{max}) é uma medida de consistência dentro da matriz de comparação pareada (SAATY, 1977). Para obter o λ_{max} , também chamado de “Eigenvalue problem” (DWEIRI et al., 2016), basta calcular a média aritmética dos elementos do vetor. O maior autovalor é maior ou igual a n ($\lambda_{max} \geq n$). Quanto mais próximo λ_{max} estiver de n , mais consistente será \mathcal{Q} . O Índice de Consistência (CI) é dado pela Equação (3.4).

$$CI = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1} \quad (3.4)$$

5. Calcule a taxa de consistência (CR):

A CR é calculada de acordo com a Equação (3.5).

$$CR = \frac{CI}{RI} \quad (3.5)$$

onde RI é o índice de consistência aleatório proposto por Saaty (1988) apresentado na Tabela 4 e amplamente discutido na literatura (PANT et al., 2022). De acordo com seu proponente, $CR \leq 0.10$ indica que o nível de inconsistência nos julgamentos realizados pelo decisor é aceitável. Caso contrário o processo precisa ser refeito, parcial ou completamente.

Tabela 4 – Índice de Consistência Aleatório (RI)

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
RI	0.00	0.00	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

Fonte: Saaty (2014)

6. Ordenação das alternativas.

As matrizes pareadas são sintetizadas para calcular as prioridades globais para as soluções alternativas. Por fim, computar as prioridades e selecione a alternativa mais preferida.

Perceba que a forma mais exaustiva de resolver um problema de decisão com o AHP é levar todas as soluções de uma única vez ao decisor e pedir que ele ou ela as avalie. Isso leva a um problema de escalabilidade grave quando o número de alternativas e/ou objetivos é elevado (PEDRO; TAKAHASHI, 2009; RUSSO; CAMANHO, 2015). Esta prática também aumenta as chances de haver inconsistências durante o processo de elicitação, o que pode aumentar o número de avaliações necessárias e complicar ainda mais o processo (SAKHARDANDE; GAONKAR, 2022; VASCONCELOS; MOTA, 2019; MUNIER; HONTORIA et al., 2021). Como resultado, o tamanho da matriz de comparação pareada permanece uma limitação crônica do método.

A complexidade dos sistemas dinâmicos tem solicitado esforços para melhorar a escalabilidade do processo de tomada de decisão na literatura. Existem muitas abordagens possíveis, inclusive com a utilização de outros métodos ou da utilização do AHP apenas para obtenção dos pesos dos critérios.

Porém, utilizando unicamente o AHP as principais formas de contornar o problema de escalabilidade são: redução de dados (MOSAVI, 2010), clusterização das alternativas (ISHIZAKA, 2012), seleção de regiões de interesse (ROI) na fronteira Pareto (PEDRO; TAKAHASHI, 2014; MENEGHINI et al., 2021), aprendizado offline (CHEN; LIN, 2003), seleção da alternativa proeminente (LEAL, 2020), particionar o problema e resolvê-los separadamente e depois refazer o processo com as melhores soluções obtidas em cada um (SAATY, 2008) e assim por diante. No entanto, eles não usam o benefício do aprendizado automático para capturar as preferências do decisor na apresentação de apenas algumas soluções por vez em um processo iterativo.

Outro aspecto importante que deve ser mencionado é que o AHP não é necessariamente linear. Em Saaty (2010), o criador do método, explica que o AHP é multilinear. Este argumento é compreendido por outros pesquisadores como aqueles participantes da thread criada no ResearchGate¹. Nela, é entendido que o AHP não é um método linear, mas sim linear por partes, i.e. multi-linear. Aos interessados em compreender melhor o método, incluindo uma revisão crítica e minuciosa do método multicritério AHP, recomenda-se a leitura de Munier, Hontoria et al. (2021), Saaty (2010).

3.3 Aprendizado das Preferências do Decisor

O aprendizado de preferências é um conceito central na tomada de decisão relacionado a “adquirir informações de preferência de maneira direta ou indireta, a partir de declarações de preferência, críticas a exemplos, observações de usuários comportamento de clique, etc” (tradução nossa) (PIGOZZI; TSOUKIAS; VIAPPIANI, 2016).

Na teoria da decisão uma ênfase particular foi dada para avaliar a função de utilidade do decisor com muita precisão. As preferências podem ser obtidas de forma explícita através de “declarações de preferência”, seja classificações, afirmações ou consultas, ou mesmo de forma implícita através da observação do decisor ou inferência. No final são geradas funções \mathcal{U} como aquelas descritas por Fürnkranz e Hüllermeier (2010c) que seguem as propriedades apresentadas em Salvatore (2003).

O aprendizado de preferências emergiu como um novo subcampo do aprendizado de máquina que lida com o aprendizado de modelos (preditivos) a partir de informações observadas, reveladas ou mesmo extraídas (FÜRNRANZ; HÜLLERMEIER, 2010c). Esta abordagem tem sido utilizada com sucesso em Teoria Multicritério sendo frequentemente

¹ www.researchgate.net/post/Is-the-AHP-a-linear-or-a-nonlinear-method. Acessado em 15/03/2023.

aplicada para gerar uma ordem total de um conjunto de alternativas (FÜRNKRANZ; HÜLLERMEIER, 2010b), também chamado de problemas de ranking.

No aprendizado em batches (*batch learning*) o número de alternativas apresentadas ao decisor para revisão deve, necessariamente, ser limitado e disponibilizado em ordem sequencial – similar ao aprendizado online. Porém, a principal diferença é a frequência de atualização dos parâmetros do modelo. No aprendizado online, o modelo é atualizado após cada exemplo de treinamento, enquanto no aprendizado em batches o modelo é atualizado após processar um (sub)conjunto de exemplos por vez.

No caso desta pesquisa, um pequeno subconjunto de número fixo de alternativas é escolhido a cada iteração, agrupados em lotes (conjuntos) antes de serem utilizados para atualizar os parâmetros do modelo. O modelo não é atualizado após um exemplo de comparação individual, mas sim após o decisor avaliar par a par todo aquele subconjunto de exemplos (um batch).

Durante as fases de aprendizado, o decisor é consultado para maximizar \mathcal{U} indicando a prioridade entre duas alternativas $\{i, j\} \in \mathcal{X}$ com respeito a cada critério durante uma sequência de iterações t . O algoritmo de ML faz uma previsão p_t e a resposta correta y_t extraída de um domínio-alvo \mathcal{Y} é revelada e o modelo sofre uma perda $\mathcal{L}(p_t, y_t)$.

Apenas para conhecimento e contextualização, para respostas e previsões binárias (sim/não), ou seja, $\mathcal{Y} \in \{0, 1\}$ o problema é chamado de classificação.

Em problemas de regressão, foco desta pesquisa, $\mathcal{X} \in \mathbb{R}^d$ corresponde a um conjunto de características que representam as soluções no espaço variável, sendo $\mathcal{Y} \in \mathbb{R}$. Após treinado o modelo, calcula-se a diferença entre p e y e computa-se as funções de perda. As mais comuns são: Erro Percentual Médio Absoluto (MAPE), Erro Quadrático Médio (MSE), Raiz do MSE (RMSE) e Coeficiente de Determinação (R2) (PEDREGOSA et al., 2011). Mais detalhes sobre funções de perda e as implementações podem ser encontradas no pacote Scikit-Learn (PEDREGOSA et al., 2011).

Essas são as maneiras explícitas de coletar as preferências do decisor. No entanto, essas avaliações também podem ser obtidas implicitamente ou mesmo inferidas. Para melhorar o processo de aprendizagem e reduzir o número de consultas, pode ser benéfico personalizar a apresentação de novas soluções com base nas avaliações e preferências anteriores do decisor.

Um dos primeiros trabalhos que buscaram modelar a estrutura de preferências que representa o decisor foi Chen e Lin (2003). Os autores argumentaram que as abordagens baseadas em ML poderiam ter esta habilidade independentemente do perfil do decisor. Uma Rede Neural Interativa (DNN) foi apresentada e testada em um problema simples de otimização. Embora os autores não trataram diretamente a questão da escalabilidade, ela era intrínseca na abordagem uma vez que eles utilizavam um conjunto menor de

alternativas para treinar a DNN. A cada vez que o modelo era treinado e não alcançava a condição de parada estabelecida eles adicionavam novas soluções e retreinavam o método. O processo era similar ao aprendizado offline e a escolha das novas soluções era feita de forma aleatória.

Pouco tempo depois, [Chen e Lin \(2004\)](#) propuseram uma DNN com uma “topologia gêmea” dirigida a encontrar as soluções mais preferidas em problemas MOO. Essas abordagens são semelhantes àquela proposta anteriormente em [Alves, Meneghini e Guimarães \(2021\)](#) onde foi sugerida uma metodologia de aprendizado baseada no algoritmo *Extreme Gradient Boosting* (XGBoost). A (KDT) ([KENDALL, 1938](#)) foi utilizada para avaliar a convergência do modelo por meio de iterações.

[Pedro e Takahashi \(2009\)](#) propuseram uma arquitetura baseada em redes de Perceptrons Multicamadas (MLP) para capturar informações do decisor e gerar ordenações parciais. Posteriormente, esses autores propuseram em [Pedro e Takahashi \(2011\)](#) uma rede neural denominada *Network Decision-Maker* (NNDM) que usa o MLP e consultas ao decisor para extração explícita das preferências e modelagem da função \mathcal{U} .

[Mendonça et al. \(2020\)](#) estenderam a NNDM para otimização de portfólio de investimentos e a nomeou NNDM-2. Nesta pesquisa, os autores propuseram um modelo multiobjetivo de otimização de portfólio comparando as redes NNDM e NNDM-2 para os perfis conservador, moderado e agressivo. Embora essas propostas sejam contribuições interessantes para a área de finanças computacionais, elas não focam no aprendizado de matrizes pareadas, na redução dos esforços cognitivos do decisor ou na complexidade do método de decisão.

[Pedro e Takahashi \(2014\)](#) focaram na seleção de alternativas na ROI. O decisor interagia com o método avaliando as alternativas uma sobre a outra (de forma binária). Uma Função de Base Radial (RBF) foi treinada para construir a função de preferência. Esta estratégia ajuda a evitar consultas redundantes e desnecessárias ao limitar as comparações a uma região específica da frente de Pareto.

Outros, fora do campo do aprendizado automático das preferências do decisor e descritos a seguir, também podem ser mencionados no que tange ao esforço de reduzir as comparações pareadas do AHP e tornar o processo decisório mais ágil.

Esses trabalhos são bastante interessantes e fornecem abordagens relevantes para reduzir o número de avaliações, mas a maioria deles sofre de escalabilidade, viés e ambiguidade nas comparações. Esses fatores podem levar à inconsistência durante o julgamento das preferências e carecem de estratégias inteligentes para apresentar novas soluções ao decisor ao longo das iterações.

3.4 Redução das Comparações Pareadas

A literatura tem tentado lidar com as matrizes pareadas de diferentes maneiras. Uma discussão comum entre os pesquisadores é sobre a possível redução no número de comparações, já que envolve menos esforços, diminui as chances de julgamentos inconsistentes e acelera o processo de decisão. Reduzir as comparações pareadas é um antigo desafio entre os pesquisadores, veja por exemplo [Lim e Swenseth \(1993\)](#), [Wedley, Schoner e Tang \(1993\)](#), [Islam, Biswal e Alam \(1997\)](#), [Xu \(2004\)](#). Outros mais recentes que podem ser mencionados são [Koczkodaj e Szybowski \(2015\)](#), [Koczkodaj et al. \(2017\)](#), [Koczkodaj e Urban \(2018\)](#), [Leal \(2020\)](#).

[Lim e Swenseth \(1993\)](#) propuseram o AHP Iterativo, ou “IAHP”, visando reduzir o número de comparações pareadas por meio da identificação de um ponto de dominância. Este ponto é determinado em um processo iterativo dentro do contexto geral do AHP clássico fundindo as etapas de coleta de dados, cálculo de pesos e agregação da classificação final.

[Wedley, Schoner e Tang \(1993\)](#) investigaram o efeito de diferentes itens de referência nas primeiras $n - 1$ comparações pareadas incompletas do AHP. Os autores examinaram seis métodos diferentes de inserir o número mínimo de comparações necessárias e avaliam como esses métodos afetam a precisão dos resultados finais do AHP.

[Xu \(2004\)](#) propôs dois modelos de programação por objetivos para obter o vetor de prioridades de uma relação de preferência fuzzy incompleta, sendo um aditivo e o outro multiplicativo. Estes modelos permitem determinar o vetor de prioridades com base em dados imprecisos e incertos. Além disso, o autor apresenta um exemplo numérico para ilustrar a aplicação do modelo proposto.

[Kułakowski, Szybowski e Prusak \(2019\)](#) demonstraram que tanto a incompletude quanto a inconsistência dos dados contribuem quase igualmente para a sensibilidade da matriz de comparações pareadas. Eles desenvolveram um novo índice que pode ajudar os tomadores de decisão a estimar o impacto das comparações ausentes na qualidade dos resultados finais.

[Islam, Biswal e Alam \(1997\)](#) investigaram o efeito no agrupamento das alternativas antes sugerido por [Saaty \(2008\)](#) para melhorar a eficiência do AHP. Eles argumentaram que a clusterização pode ajudar a reduzir o número de comparações pareadas e acelerar o processo em geral. A escolha da melhor aeronave de transporte foi utilizada como exemplo, sendo 20 alternativas e 12 critérios e número de comparações foi reduzido de 2280 para 1597. Também com foco na clusterização, [Benítez et al. \(2018\)](#) projetaram um mecanismo para reduzir o tamanho de grandes matrizes de comparação, comprimindo-as consistentemente e eventualmente agrupando alguns dos elementos originais em clusters (agrupamento a posteriori).

Kong e Liu (2005) apresentaram uma melhoria no AHP clássico. Os autores argumentaram que quando a melhor alternativa não pode ser implementada na prática e precisa ser excluída do ranking final por algum motivo, o cálculo existente do AHP não garante que a ordem seja mantida (em outras palavras, os autores estão se referindo a reversão de ranking, um outro problema do AHP). Por exemplo, se o ranking final de um problema de decisão é $a_1 > a_3 > a_2$, e a_1 é removida, a lógica existente pode gerar tanto $a_3 > a_2$ como $a_2 > a_3$. Para preservar o ranking, o truque é normalizar o peso dos atributos, não o peso das alternativas.

Islam e Abdullah (2006) investigaram a possibilidade de excluir critérios menos significativos para reduzir o tempo computacional utilizando o software Expert Choise. Eles perceberam que os critérios menos importantes podem ser excluídos do processo sem afetar o ranking final. Eles ilustraram com um exemplo simples de seleção de um hotel para um evento. O número de comparações foi reduzido de 2081 para 858 e excluídos 14 de 26 critérios. A ideia é interessante uma vez que alguns critérios podem ser descartados do processo decisório ou até mesmo computados diretamente na otimização.

Em uma série de artigos, Prof. Koczkodaj tem contribuído para o problema de comparações pareadas com foco especial nos indicadores de (in)consistência. Em resumo, Koczkodaj et al. (2017) fornece uma normalização de indicadores de inconsistência, Koczkodaj e Urban (2018) apresenta alguns axiomas e uma explicação matemática para prevenir erros no índice de consistência baseado no eigenvalue e Koczkodaj e Szybowski (2015) introduz uma noção de geradores de comparações pareadas para construir matrizes consistentes denominada Matriz Transitiva Recíproca (RTM) que permitiu reduzir o número de comparações para $jn - j$. Para mais referências sobre estes indicadores indica-se Koczkodaj e Szybowski (2016).

Para uma revisão curta sobre abordagens estatísticas para resolver matrizes de comparações pareadas sugere-se a leitura de Lin, Kou e Ergu (2013) e suas referências.

Vasconcelos e Mota (2019) explorou a influência de um elevado número de comparações de preferências na inconsistência da matriz de comparações. Os autores desenvolveram um algoritmo iterativo de ajuste de preferências para reduzir o número de comparações pareadas enquanto capturam informações efetivas do decisor para aproximar os resultados do problema às suas preferências. O foco estava na consistência da matriz de decisão reduzindo as comparações para $n - 1$.

Ishizaka (2012) propuseram um método com clusters e pivôs ordenando as alternativas para cada critério e depois dividindo-os em clusters. Um pivô em cada cluster era escolhido e as comparações são feitas. Os autores argumentaram que o método facilita a construção de matrizes consistentes ou quase consistentes e diminui o número de comparações necessárias.

Mais recentemente, [Leal \(2020\)](#) desenvolveu o “AHP-Express”, uma versão simplificada do AHP que calcula as prioridades de cada alternativa contra um conjunto de critérios com apenas $n - 1$ comparações para cada objetivo. O problema de decisão é decomposto em uma árvore invertida, do objetivo mais importante para o menos importante. Além de reduzir o número de comparações, a proposta também diminui as inconsistências AHP que são muito frequentes em problemas de larga-escala. Embora a proposta seja bastante interessante para tornar o AHP mais aplicável a problemas reais, o método depende da construção da árvore de decomposição com o objetivo principal, critérios, subcritérios e alternativas. A decomposição dos subcritérios exclui a possível interdependência entre os critérios, uma vez que não serão comparados posteriormente. Além disso, a proposta não envolve aprender as preferências do decisor, nem sugerir novas alternativas em novos problemas de decisão.

Como explicado por [Vasconcelos e Mota \(2019\)](#), o processo de decisão pode sofrer diversos desvios cognitivos e processuais. Esses desvios podem ocorrer em todo o processo (estruturação do problema, critérios e alternativas de avaliação e análise de sensibilidade) e levar a recomendações incorretas. Por conta disso, muitos esforços têm sido feitos na literatura especializada a fim de modelar as preferências do decisor e reduzir o número de inconsistências no processo de eliciação de preferências.

3.5 Principais Destaques do Capítulo

- O AHP, foco deste estudo, é um método multicritério de agregação. Ele é o método mais utilizado e mais conhecido na teoria da decisão;
- A função que corresponde ao AHP é multi-linear, ou não-linear com vários passos lineares;
- Uma revisão do método AHP é feita, bem como sua descrição e apresentação da literatura relacionada;
- Aprendizado de preferências é um conceito central na tomada de decisão e visa, sobretudo, mapear a função de utilidade nos problemas de decisão;
- No aprendizado em batches das preferências, um número limitado de soluções é apresentada ao decisor e de forma iterativa;
- Durante as fases de aprendizado, um algoritmo de regressão é treinado com um conjunto de características que representam as soluções (soluções no espaço de variáveis) com os labels reais. Depois, o modelo construído é utilizado para prever as preferências restantes;

- Redução das comparações pareadas de problemas de decisão é um tema largamente investigado na literatura e, portanto, com diferentes abordagens.

4 METODOLOGIA

Esta seção descreve a metodologia proposta para fornecer escalabilidade para o AHP. Os passos gerais do método clássico são explicados e, em seguida, é informado em quais partes há modificações, visto o processo iterativo. Cada passo é detalhadamente explicado, informando os parâmetros e hiperparâmetros e como eles podem influenciar no processo de aprendizado automático. A saber, de uma forma rápida e simples, todas as variáveis do algoritmo que são definidas antes do treinamento são hiperparâmetros, e tudo que ele aprende e adapta diretamente no processo de aprendizado e que pode influenciar na performance do algoritmo é um parâmetro.

Primeiro, é sabido que o AHP é um método multicritério simples, o que torna a tomada de decisão com este método prática e com poucos passos, como exemplificado na Figura 2. Neste caso, parte-se do princípio que o decisor conhece o conjunto de possíveis soluções para o problema, como em (1). É esperado que ele ou ela tenha informações sobre o problema e das alternativas disponíveis, pois ele participa dos processos gerenciais da empresa. Estas alternativas são apresentadas em pares à ele. As matrizes pareadas indicadas em (2) são preenchidas utilizando os termos linguísticos da Escala de Saaty. Uma vez consistentes, operações são feitas nestas matrizes (3) até a geração do ranking final (4). Exceto pela parte das avaliações pareadas, note que este processo não é iterativo. O decisor participa uma única vez do processo a fim de obter a ordenação final.

A metodologia proposta nesta tese com o AHP Escalável insere novos passos neste processo. Uma camada de iteração com o decisor é adicionada. Ele/ela será consultado mais vezes, mas terá que fazer muito menos comparações do que o processo habitual clássico e com menos chances de inconsistências nas avaliações. Estes são, provavelmente, as principais vantagens do AHP Escalável. Estes passos estão ilustrados na Figura 3.

Percebe-se que os passos apresentados anteriormente continuam, correspondendo aos números (1), (3), (6) até a obtenção do ranking. A mudança é que, agora, ao invés do decisor avaliar todas as alternativas de uma única vez, isso é feito de forma iterativa. Continua a acreditar que ele ou ela conhece o conjunto de soluções em (1). Algumas soluções são escolhidas em (2) para serem avaliadas e construir a matriz pareada (3) (em azul). Estas soluções serão utilizadas como conjunto de treinamento (4) para um algoritmo de aprendizado de máquina. As restantes fazem parte do conjunto de teste (5) (em laranja), cujo modelo utilizará para fazer as previsões. Em (6) as amostras de treinamento e as previsões do conjunto de teste são reunidas e calcula-se o ranking utilizando as operações do AHP. Métricas de convergência/erro são computadas e avalia convergência em (7). Se a condição de parada for aceita, entende-se que chegou ao ranking final. Caso contrário, novas soluções são recomendadas ao decisor com base em informações de distância. O

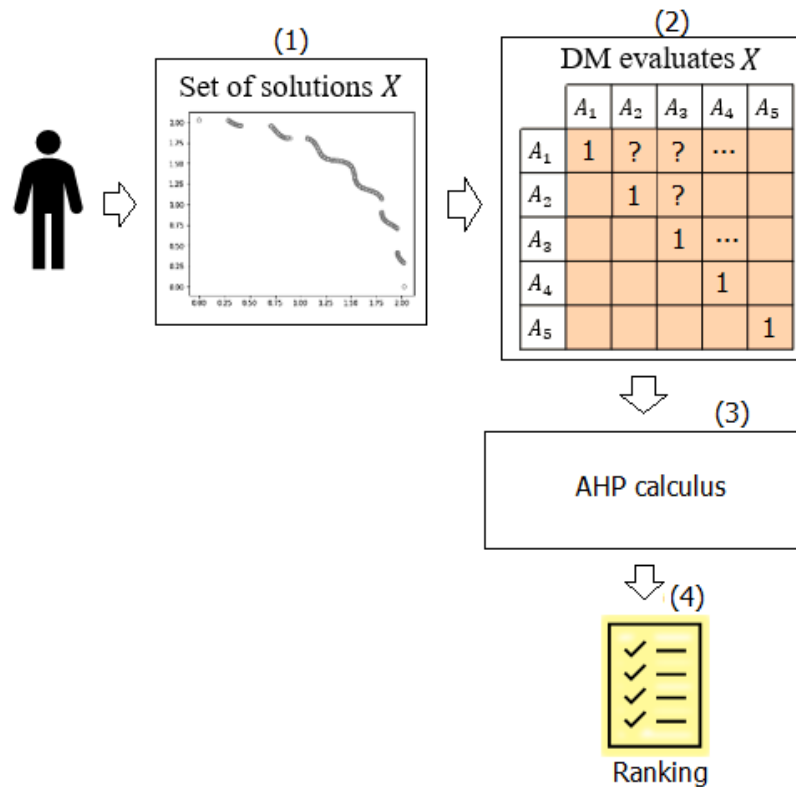


Figura 2 – Iteração do decisor no AHP Clássico. É apresentado ao decisor um conjunto de iterações \mathcal{X} (1), cujas comparações pareadas são feitas em (2) de uma única vez. Operações com matrizes são feitas em (3) e é gerado o ranking final em (4).

decisor avalia novamente apenas estas soluções recomendadas e o fluxo a partir do passo (3) continua de forma iterativa.

A escalabilidade é melhorada reduzindo o número de alternativas apresentadas ao decisor, em batches. Esta estratégia segue os principais argumentos do Paradoxo da Escolha (SCHWARTZ, 2004) trazendo dois benefícios: primeiro, mostra que o processo de tomada de decisão é mais fácil com menos opções e, segundo, facilita a tarefa de elicitare preferências.

Ao invés de apresentar todas as soluções ao decisor de uma única vez e pedir para fazer a comparação pareada entre todas as alternativas, a proposta é que isso seja feito de forma iterativa com apenas algumas alternativas de cada vez para serem comparadas. Um algoritmo de ML de regressão é empregado para aprender essas preferências e, após algumas iterações, espera-se que o modelo seja capaz de inferir o comportamento do decisor e orientar a busca de uma solução ótima para o problema de decisão.

A abordagem proposta segue os passos detalhados abaixo. O número da lista corresponde ao número entre parênteses sobre cada box da Figura 3.

1. Obter um conjunto de soluções alternativas \mathcal{X}

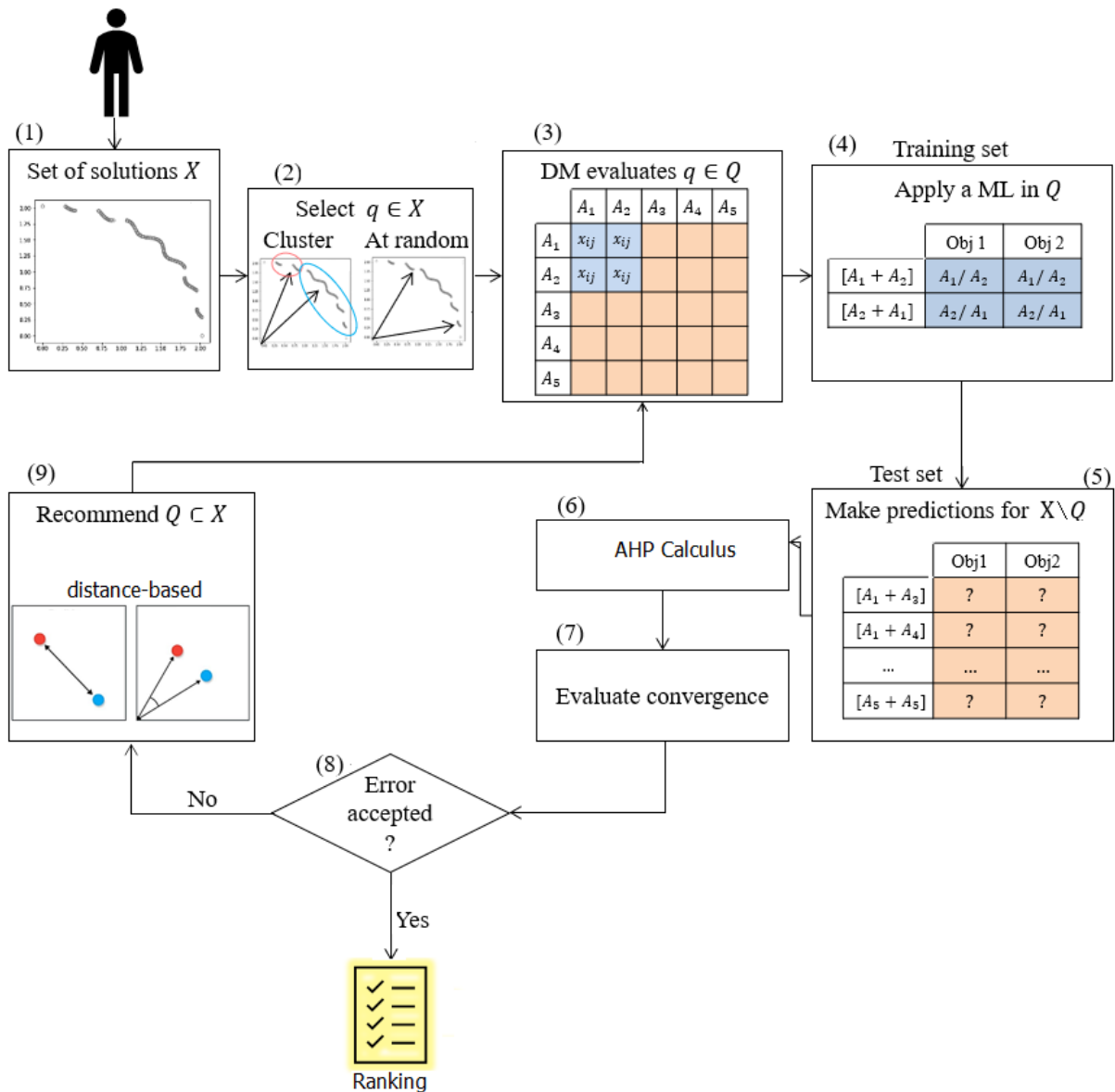


Figura 3 – Iteração do decisor no AHP Escalável. O fluxograma detalha os principais passos que compõe a metodologia, incluindo informações da fase de aprendizado e de recomendação de novas alternativas.

O início desta pesquisa de doutorado foi marcado pela publicação do *Generalized Position-Distance* (GPD) que pode ser lida em [Meneghini et al. \(2020\)](#). O GPD é uma ferramenta customizável para implementar uma infinidade de problemas de otimização. Neste trabalho, o GPD foi utilizado para simular os diferentes problemas de decisão ilustrados na Figura 4. O número de objetivos M foi variado entre 2, 3, 3 e 7 para os problemas PF1, PF2, PF3 e PF4, respectivamente. As superfícies da fronteira Pareto foram convexas, linear, descontínua e linear. O objetivo era simular problemas como aqueles que os gestores lidam no dia-a-dia nas organizações. Após obter um conjunto de alternativas promissoras, os gestores precisam avaliá-las para escolher aquela que melhor se aproxima com as suas preferências e o objetivo

da organização. Nos exemplos dados, a melhor solução indicada pelo AHP está em destaque.

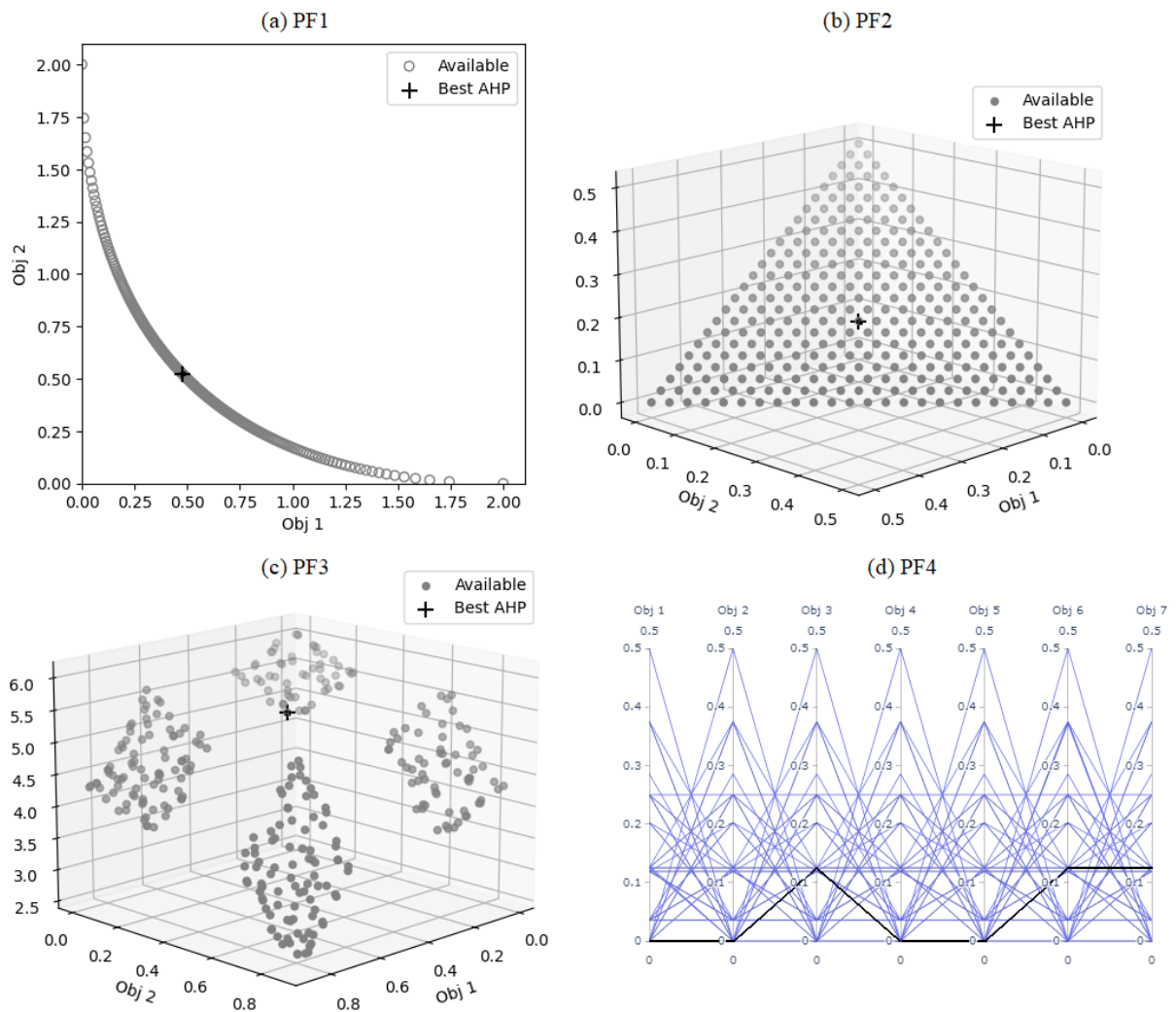


Figura 4 – Fronteiras Pareto de problemas artificiais: (a) GPD02 com 2 objetivos, (b) DTLZ1 com 3 objetivos, (c) DTLZ7 com três objetivos, (d) DTLZ1 com 7 objetivos.

Além disso, empregou-se a metodologia proposta do AHP Escalável para resolver problemas reais. Estes problemas referem-se ao RE 2-3-2 (AMIR; HASEGAWA, 1989), RE 2-4-3 (KANNAN; KRAMER, 1994) e RE 3-4-6 (DEB; SRINIVASAN, 2006) detalhados em Tanabe e Ishibuchi (2020). A aproximação das fronteiras Pareto destes três problemas são apresentados na Figura 5, incluindo suas principais características.

É necessário informar, neste ponto, que os autores Tanabe e Ishibuchi (2020) apresentaram as fronteiras Pareto aproximadas (as soluções no espaço de objetivos), porém não apresentam as variáveis de decisão correspondentes. Neste trabalho, como o foco é na tomada de decisão e não na otimização, apenas foram geradas um conjunto pequeno de alternativas no espaço de objetivos obedecendo uma relação de

não-dominância. Porém, elas podem não corresponder ao mínimo-global apresentado pelos autores.

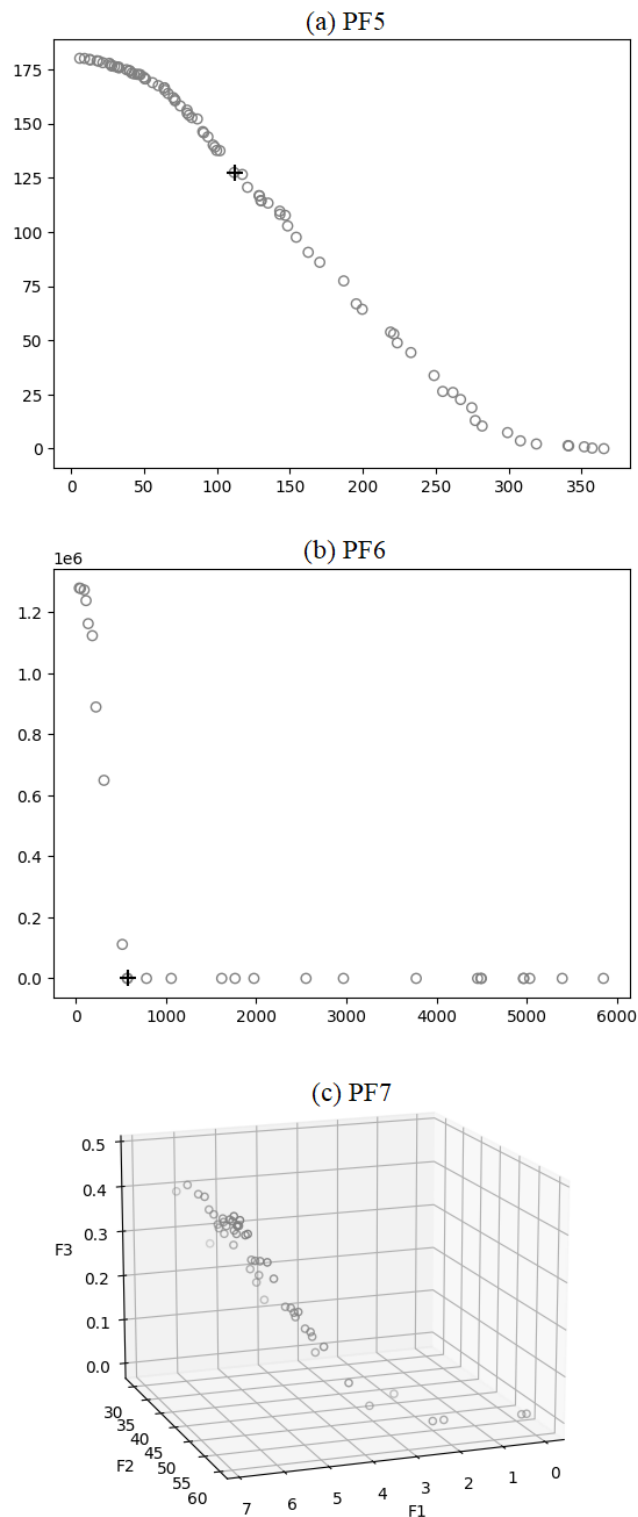


Figura 5 – Aproximação das fronteiras Pareto dos problemas reais descritos em [Tanabe e Ishibuchi \(2020\)](#): (a) RE2-3-2 com 2 objetivos, (b) RE2-4-3 com 2 objetivos, (c) RE3-4-6 com 3 objetivos

Por fim, para simplificar, as principais características destes sete problemas são

resumidas na Tabela 5.

Tabela 5 – Propriedades dos 7 problemas de teste (PF1, ..., PF7). M e D denotam o número de objetivos e o número de variáveis de decisão, respectivamente. O número e tipo de variáveis de decisão e o formato da fronteira Pareto também são descritas.

Problema	Nome original	M	D	Tipo de variáveis	Pareto front
PF1	GPD04	2	21	Contínua	Convexa
PF2	DTLZ1	3	7	Contínua	Linear
PF3	DTLZ7	3	22	Contínua	Descontínua
PF4	DTLZ1	7	11	Discreta	Linear
PF5	RE2-3-2	2	3	Mista	Mista
PF6	RE2-4-3	2	4	Mista	Mista e Descontínua
PF7	RE3-4-6	3	4	Inteira	Côncava e Descontínua

Fonte: Inspirado em [Tanabe e Ishibuchi \(2020\)](#)

2. Selecione q alternativas de \mathcal{X} .

Quando os decisores começam a avaliar as alternativas, pouco se sabe sobre suas preferências, sobre o domínio do problema e da viabilidade das alternativas. Por isto, duas formas de escolha das soluções iniciais foram implementadas: aleatória e cluster. Na primeira, q é escolhido aleatoriamente tal que $q \in \mathcal{X}$. Na outra, q agrupamentos são gerados e uma alternativa é escolhida de cada um deles. A ideia aqui é buscar diversidade e reduzir o viés do decisor ao apresentá-lo alternativas em diferentes regiões da fronteira Pareto.

3. Consulte o decisor e gere o conjunto inicial de treinamento.

O conjunto de treinamento é composto por todas as combinações das alternativas contidas em $\mathcal{Q} \subset \mathcal{X}$. Para cada par de soluções pergunte ao decisor: “*Quanto você prefere a alternativa a_i em relação a a_j no objetivo k ?*”. Seguindo a ilustração (3) da Figura 3, suponha que as duas primeiras alternativas sejam $q = [a_1, a_2]$ destacadas na parte azul. Utilizando a Escala Fundamental de Comparações, Tabela 3, o decisor explicita que “ a_1 tem uma importância muito forte sobre a_2 no objetivo 1”, o que revela que $u(a_1)/u(a_2) = \langle 7 \rangle$. Logo, $u(a_2)/u(a_1) = \langle 1/7 \rangle$. O decisor também diz que “ a_1 tem importância moderada sobre a_2 no objetivo 2”, o que leva a $u(a_1)/u(a_2) = \langle 3 \rangle$ e $u(a_2)/u(a_1) = \langle 1/3 \rangle$. Comparações entre as mesmas alternativas são descartadas por elas terem a mesma importância, além de visar reduzir o número de comparações e com pouco informação útil para os modelos de regressão. Cada amostra do conjunto de treinamento é, portanto, a concatenação das variáveis no espaço de decisão (*feature vector*) e a saída (*label*) são as preferências coletadas. Portanto, $[a_1 + a_2] = \langle 7, 3 \rangle$, e $[a_2 a_1] = \langle 0.1428, 0.3333 \rangle$.

4. Treine um método de ML de regressão.

Na fase de treinamento um método ML de regressão é utilizado. O modelo tem como

alvo o valor da utilidade esperada, i.e. importância na escala Saaty, para cada par de alternativas do conjunto \mathcal{Q} em cada objetivo, assim como o decisor precisaria fazer. Neste estágio, diferentes métodos foram implementados utilizando como fonte principal o pacote Scikit-learn (PEDREGOSA et al., 2011): (i) Gradient Boosting for Regression (GBR), (ii) Multitask Lasso e (iii) Multitask ElasticNet, ambos treinados com L1/L2 mixed-norm como fator de regularização, (iv) Ridge Regression, e (v) Random Forest (RF). O método RandomizedSearchCV¹ foi utilizado para encontrar os melhores hiperparâmetros para cada método no primeiro round de execuções.

5. Faça as predições no conjunto de teste $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Q}$.

O conjunto de teste consiste em todos os pares das alternativas restantes, ou simplesmente $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Q}$. O modelo treinado é utilizado para prever a saída de todo o conjunto simulando o comportamento do decisor. Perceba que as alternativas avaliadas nesta parte são aquelas que não foram selecionadas no passo (3). Como em um processo iterativo, quanto mais alternativas participam do conjunto \mathcal{Q} maior é a quantidade de dados para treino, porém menor é o de teste.

6. Aplica o AHP e gera o ranking das alternativas.

Neste passo, os cálculos que compõem o AHP clássico proposto por Saaty (1988) e apresentados na Seção 3.2 são aplicados para gerar a ordem total das alternativas em \mathcal{X} . Para isto, basta simplesmente concatenar as preferências dadas conforme passo 1 com aquelas preditas pelo modelo gerado no passo 5.

7. Calcule a convergência do modelo.

A KDT apresentada na Equação (4.1) é utilizada como principal métrica de avaliação de qualidade do modelo. Esta métrica mede a dissimilaridade entre duas listas (i.e. rankings) com resultados no intervalo $[0, 1]$. Quanto menor a dissimilaridade entre os rankings gerados com as predições do modelo na iteração t em relação à $t - 1$, maior a habilidade do modelo em aproximar a função de utilidade que representa o decisor. Utilização desta métrica em trabalhos correlatos podem ser encontrados em Pedro e Takahashi (2014), Mendonça et al. (2020), Alves (2018).

$$K(\tau_1, \tau_2) = |(i, j) : i < j, (\tau_1(i) < \tau_1(j) \wedge \tau_2(i) > \tau_2(j)) \vee (\tau_1(i) > \tau_1(j) \wedge \tau_2(i) < \tau_2(j))| \quad (4.1)$$

onde $\tau_1(i)$ e $\tau_2(i)$ são os rankings para os elementos no índice i . $K(\tau_1, \tau_2)$ é 0 se as listas (rankings, no caso deste trabalho) forem idênticos e 1 caso contrário.

¹ Nota: Depois dos resultados publicados em Alves et al. (2023), o código foi refatorado e no lugar do *Randomized SearchCV* agora está implementado o *Optuna* (AKIBA et al., 2019). De acordo com os autores, o *Optuna* utiliza melhores estratégias de otimização de hiperparâmetros e com menos tempo para ajustar a função de regressão.

Mais recentemente, após os resultados publicados em [Alves et al. \(2023\)](#), outras métricas de qualidade do modelo foram implementadas e podem ser utilizadas na abordagem proposta. São elas:

- *Number of Queries* (ou NQ): Corresponde ao número de comparações pareadas que o decisor faz ao avaliar as alternativas utilizando o AHP clássico. Ou seja, $(n \times (n - 1))/2 \times M$.
- *Position Match Rate* (ou Pos): Inspirada no trabalho de [Mendonça et al. \(2020\)](#), porém considera a posição de todas as soluções nos rankings. Pos equivale a distância Hamming, também normalizada em um intervalo entre $[0, 1]$.
- *Distance from the Best Solution* (ou DBS): Proposta por [Mendonça et al. \(2020\)](#), esta métrica consiste em checar a distância (em posições) entre a solução escolhida pelo melhor modelo de aprendizado de máquina e a melhor sugerida pelo AHP. Quando menor o DBS, mais próxima a melhor alternativa classificada pelo modelo está da primeira do AHP.

Além destas, métricas clássicas de regressão como MAPE, MSE, RMSE e R2 ([PEDREGOSA et al., 2011](#)) também podem ser utilizadas para avaliar overfitting e mensurar a capacidade de ajuste do modelo às preferências do decisor.

Ao final, podemos dizer que $\mathcal{L} = \{\text{'tau'}, \text{'pos'}, \text{'dbs'}, \text{'mse'}, \text{'rmse'}, \text{'r2'}, \text{'mape'}\}$.

8. Condição de parada.

Neste trabalho, $KDT \leq 0.05$ entre t e $t - 1$ foi definido como condição de parada do tuning do método. Isto quer dizer que o método de ML era retreinado e ajustado a cada t até atingir a condição de parada. Isso foi feito para que o modelo pudesse se ajustar à \mathcal{U} com o mínimo de iterações possível, pois isso se traduz em menos consultas ao decisor.

9. Recomende novas soluções para serem avaliadas pelos decisores.

Dependendo da função de utilidade e do problema, é interessante explorar novas regiões no espaço de objetivos a fim de recomendar novas soluções que provavelmente irão interessar ao decisor.

Outro aspecto é que isso impacte positivamente o desempenho do modelo. Para isso, implementou-se um parâmetro θ que representa a porcentagem de soluções aleatórias escolhidas a partir da 2ª iteração. $\theta = 0.0$ indica que as soluções recomendadas serão baseadas ou na distância cosseno ou na distância euclidiana ([VIRTANEN et al., 2020](#)), enquanto $\theta = 1.0$ significa que todas as soluções serão recomendadas aleatoriamente.

Apenas para ilustrar, considere um exemplo hipotético com cinco alternativas, escolha inicial aleatória e selecionando uma alternativa por vez. A ilustração na Figura 6, da

consulta 1, exibe que a alternativa selecionada entre a_1, \dots, a_5 foi a a_2 . Utilizando a escala Saaty, o decisor poderia compará-las. Todavia, sabemos que neste caso é desnecessário visto que a preferência é igual a 1 (em azul na tabela).

O método de ML utiliza esta informação para treinamento e o modelo é utilizado para prever as restantes. Computa-se as métricas de erro e a distância entre os rankings. Com muito pouca informação, muito possivelmente o modelo não terá um bom desempenho (*underfitting*) e precisará de mais dados numa nova rodada com o decisor.

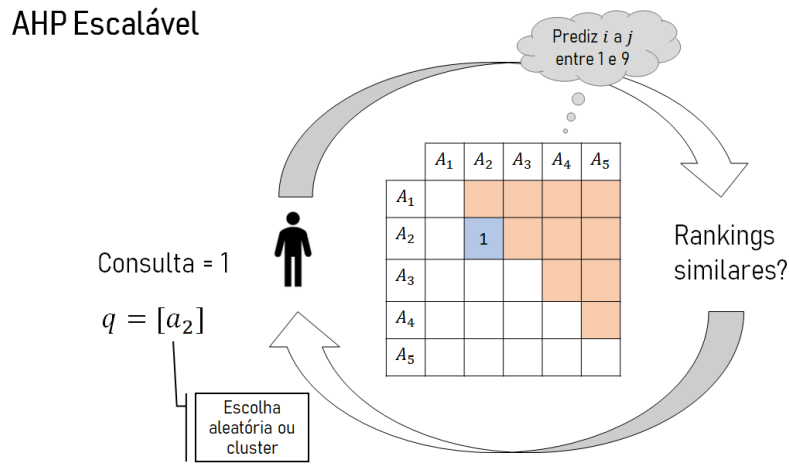


Figura 6 – Exemplo de uso do AHP Escalável - 1a consulta ao decisor

Na consulta 2 uma nova alternativa é escolhida dentre as disponíveis a_1, a_3, a_4, a_5 . Neste caso, conforme ilustrado na Figura 7, foi a a_1 . O decisor então compara a a_1 com a_2 e têm-se as preferências. O método de ML é retreinado com as preferências (em azul na tabela) e o modelo utilizado para prever as restantes (cor laranja). Computa-se as métricas de erro e verifica se os rankings obtidos foram similares. Se não foram, uma nova consulta é feita ao decisor.

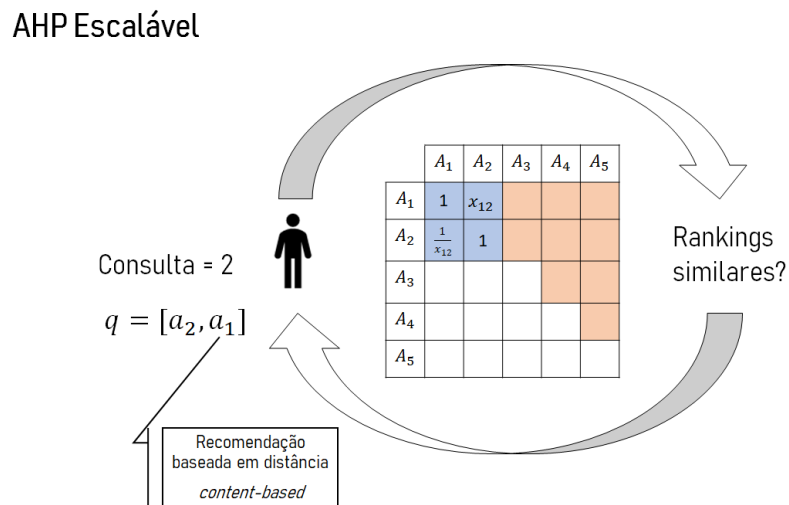


Figura 7 – Exemplo de uso do AHP Escalável - 2a consulta ao decisor

A consulta 3 indicada uma nova rodada com o decisor, conforme Figura 8. A alternativa escolhida neste ponto é a a_4 . Aos pares, o decisor então avalia as preferências com a a_1 e a_2 (em azul na tabela) e esta informação é utilizada como entrada para retreino do método de ML. Uma vez treinado, o modelo é utilizado na predição dos pares restantes, em laranja. Verifica-se se os rankings são similares e a condição de parada, por exemplo $KDT < 5\%$, é atendida. Se sim, gera-se o ranking de todas as alternativas.

AHP Escalável

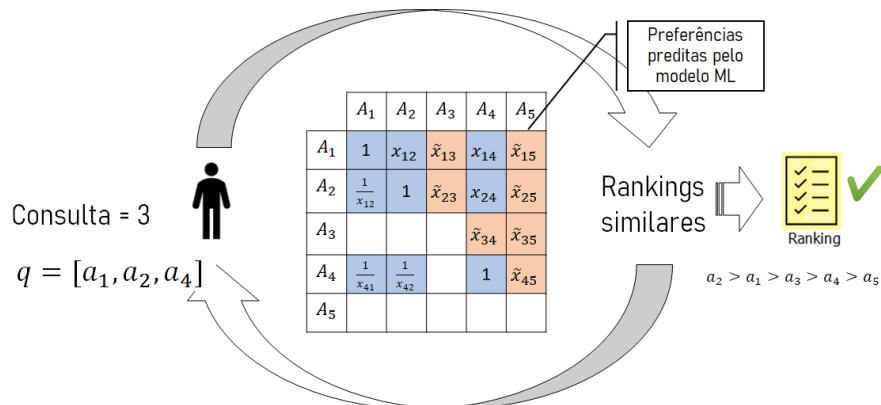


Figura 8 – Exemplo de uso do AHP Escalável - 3a consulta ao decisor

O aspecto mais interessante desta abordagem é a iteração com o decisor e o número reduzido de comparações que ele deve fazer a cada consulta. Como parâmetro, este valor é ajustável e deve ser configurado de acordo com as necessidades do negócio. Além disto, como explicado anteriormente, há outros pontos positivos como as menores chances de dar inconsistências nas avaliações e a possibilidade de utilizar o modelo treinado para avaliação de novas alternativas.

Finalmente, a Tabela 6 detalha os parâmetros e hiperparâmetros da abordagem proposta e os respectivos valores esperados. A abordagem pode facilmente incorporar novos parâmetros e funções, o que a torna mais atrativa do ponto de vista prático.

O baseline foi o AHP clássico proposto por Saaty (1988) e a pesquisa anterior publicada em Alves, Meneghini e Guimarães (2021). Para fins de comparação, o número de consultas requerido até o modelo atingir a condição de parada foi computado para o AHP clássico e para o AHP escalável.

Tabela 6 – Descrição dos parâmetros e hiperparâmetros da abordagem proposta e os valores esperados em cada um deles.

Hiperp.	Descrição	Valores
<i>mcdm</i>	Método multicritério baseado em comparações pareadas.	‘AHP’
<i>w</i>	Pesos dos critérios, quando aplicável.	[0 – 1] array
<i>cb</i>	Se critério é do tipo custo (minimizar) ou benefício (maximizar)	‘cost’ ou ‘benefit’
<i>q</i>	Número de soluções apresentadas ao decisor na 1a iteração	\mathbb{N}^*
<i>ι</i>	Estratégia para selecionar as <i>q</i> primeiras soluções.	‘rand’, ‘kmeans’ ou ‘agglomerative’
ζ	Medida utilizada para recomendar novas soluções.	‘cosine’, ‘euclidean’ ou ‘manhattan’
θ	% de soluções aleatórias a serem recomendadas.	0 – 1 float
<i>ml</i>	Método ML multi-output	‘gbr’, ‘rf’

5 RESULTADOS

Esta seção inicialmente se concentra em discutir os resultados referentes à otimização dos hiperparâmetros descritos na Tabela 6. Para isto, cada hiperparâmetro foi avaliado e discutido individualmente e apresentado nas subseções posteriores. Ao final do capítulo é apresentado um exemplo de ranking obtido pelo AHP escalável. É demonstrado que a proposta é eficaz para diferentes problemas e fornece resultados satisfatórios quando comparado ao método AHP clássico.

Os resultados são apresentados em subseções por questões de organização. A estrutura segue a seguinte ordem:

- Subseção 5.1 descreve os estudos de caso;
- Subseção 5.2 apresenta o desempenho dos métodos de ML em cada problema tratado;
- Subseção 5.3 detalha os efeitos da escolha inicial das soluções que são apresentadas ao decisor, seja via cluster ou aleatória;
- Subseção 5.4 analisa a convergência do modelo tomando como base as estratégias de recomendação das soluções;
- Subseção 5.5 explica o número de soluções mais apropriado para ser apresentado ao decisor;
- Subseção 5.6 discute como o hiperparâmetro θ ajuda a guiar a busca local para minimizar o número de consultas até a condição de parada;
- Subseção 5.7 apresenta o ranking obtido com a abordagem proposta e compara com outros trabalhos na literatura;
- Subseção 5.8 apresenta os resultados do AHP Escalável em problemas práticos, PF5, PF6 e PF7;
- Subseção 5.9 são discutidas algumas análises com outros trabalhos e dá direções futuras.

5.1 Estudos de Caso

Os problemas de benchmark PF1 a PF4 ilustrados na Figura 4 e os problemas reais PF5 a PF7 apresentados na Figura 5 foram usados para validar a aplicabilidade do AHP Escalável. Eles representam diferentes tipos de problemas que os gerentes podem

enfrentar no dia a dia, dadas as suas diferentes características apresentadas na Tabela 5. Em seguida, os hiperparâmetros são explorados, um por vez, para melhorar o desempenho do aprendizado e, conseqüentemente, reduzir o número de consultas. A análise dos resultados é realizada em quatro execuções de cada experimento.

5.2 Desempenho dos Métodos de Machine Learning

Os métodos de aprendizado de máquina GBR, Lasso, ElasticNet, Ridge e RF foram utilizados como preditores das preferências dos decisores sobre os problemas PF1 a PF4. Neste caso variou-se apenas o parâmetro ml . Os outros foram mantidos fixos: $q = 5$, $\theta = 0.2$, $\iota = 'kmeans'$, $\zeta = 'cosine'$.

Tanto o modelo construído a partir do GBR quanto o RF alcançaram a condição de parada na iteração 10 para o problema PF1. Para os problemas PF2 a PF4 isto ocorreu nas iterações 11, 15 e 10, respectivamente. A tabela 7 apresenta a ordem dos modelos com base no número de iterações mínima de cada modelo. Esta ordem é baseada no número de iterações que cada modelo precisou, em média, para alcançar a condição de parada.

Tabela 7 – Seleção do melhor método de ML para cada problema de decisão. A ordem dos modelos e a iteração em que o melhor (em negrito) atingiu o critério de parada.

Problema	Ordem	Convergência
PF1	GBR > RF > Ridge > Lasso > ElasticNet	t_{10}
PF2	RF > GBR > Lasso > Ridge > ElasticNet	t_{11}
PF3	RF > GBR > Ridge > ElasticNet > Lasso	t_{15}
PF4	RF > GBR > Ridge > ElasticNet > Lasso	t_{10}

Métodos baseados em árvore, como o XGBoost e a Decision-Tree têm sido reportados como bons preditores em tarefas de aprendizado de preferências. Anteriormente, na pesquisa inicial publicada em [Alves, Meneghini e Guimarães \(2021\)](#), o XGBoost se mostrou apto a aprender a função de utilidade e fazer as predições com poucas consultas ao decisor. No último trabalho, mais recente, em [Alves et al. \(2023\)](#) tanto o XGBoost quanto o RF se mostraram como os melhores preditores. Outros resultados que destacam estes métodos podem ser encontrados em [Qomariyah, Kazakov e Fajar \(2020\)](#), [Oliveira et al. \(2023\)](#).

Por estes motivos e por serem métodos que continuam no estado-da-arte em aprendizado de máquina, apenas estes dois métodos estão atualmente disponíveis no parâmetro ml . Anteriormente, até a publicação de [Alves et al. \(2023\)](#) estavam presentes o Ridge, Lasso e ElasticNet. Porém, optou por removê-los e manter apenas RF e XGBoost, ambos com o otimizador Optuna substituindo o RandomizedSearchCV.

5.3 Escolha Inicial das Soluções

O hiperparâmetro ι define como as q primeiras alternativas são escolhidas para serem apresentadas ao decisor. Os valores aceitos atualmente são: *rand*, *kmeans* ou *agglomerative*. A primeira refere-se à escolha aleatória das soluções. As outras referem-se a alguma estratégia de agrupamento, seja pelo método *kmeans* ou cluster hierárquico aglomerativo, respectivamente. A Figura 9 apresenta alguns exemplos de inicialização do parâmetro ι considerando $q = 5$ (em azul).

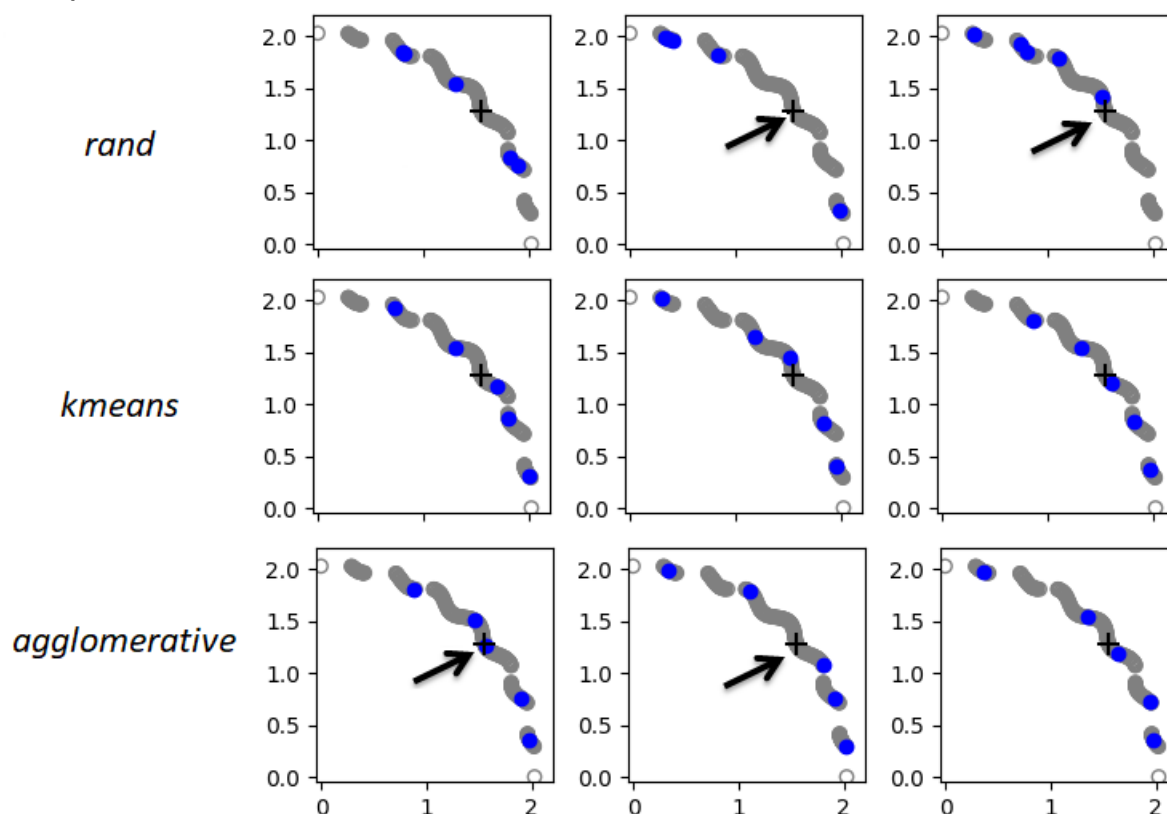


Figura 9 – Escolha aleatória das q soluções iniciais utilizando os valores ‘*rand*’, ‘*kmeans*’ e ‘*agglomerative*’. As soluções escolhidas estão ilustradas em azul e a melhor ranqueada pelo AHP está indicada por +.

Observe que das três vezes que ι foi inicializado com ‘*rand*’ as alternativas escolhidas para serem apresentadas ao decisor não estavam espalhadas de maneira uniforme na fronteira Pareto. O segundo e terceiro caso ilustram bem este argumento, pois as soluções escolhidas estavam mais polarizadas. No segundo as soluções escolhidas estavam mais nos extremos e distantes daquela melhor ranqueada pelo AHP. Neste caso, muito provavelmente o método de aprendizado de máquina vai requerer mais iterações com o decisor. No último caso, uma das soluções estava bem próxima à ótima.

Já nos casos onde $\iota = \text{‘}kmeans\text{’}$ e $\iota = \text{‘}agglomerative\text{’}$ as soluções iniciais estão melhor distribuídas ao longo da fronteira de decisão, o que garante maior probabilidade

de uma delas estarem localizadas na região daquela melhor ranqueada pelo AHP. Porém, pode haver casos como na segunda ilustração com a inicialização ‘*aglomerative*’ que nem sempre isso vai acontecer, pois isso depende, inclusive, do tamanho de q e da superfície da fronteira Pareto.

É possível argumentar, portanto, que ambas as estratégias têm prós e contras, seja aleatória ou via alguma das estratégias de agrupamento. A escolha aleatória pode sugerir uma ou mais soluções que estejam próximas ao ótimo global. Porém, por não garantir uma boa cobertura de toda a superfície de decisão, ela pode indicar soluções muito distantes e exigir mais comparações até a condição de parada. A escolha de ι vai depender do problema e do objetivo da busca do analista, pois é sabido que a diversidade pode ser um fator crucial em problemas de MOO e MaOP (MENECHINI et al., 2020).

O aprendizado das preferências do decisor variando o parâmetro ι entre as duas estratégias é apresentado na Figura 10 para o problema PF3 em (a) e PF4 em (b). A taxa de aprendizado no problema PF3 teve um comportamento diferente dos demais. A estabilidade do ranking ao longo das iterações foi maior quando se utilizou ‘*kmeans*’ para selecionar as $q = 5$ primeiras soluções. O problema PF4, seja ι com ‘*kmeans*’ ou ‘*rand*’ apresentou uma convergência muito similar ao longo das iterações, com uma pequena diferença na t_9 e t_{13-14} . Assim também aconteceu nos problemas PF1 e PF2. Na figura apresentada, as linhas pontilhadas e a área sombreada representam a média e o intervalo de confiança de 95%, respectivamente. Uma área sombreada menor indica que o modelo treinado fez previsões de forma mais consistente naquela iteração, como ocorreu no PF3 na t_5 .

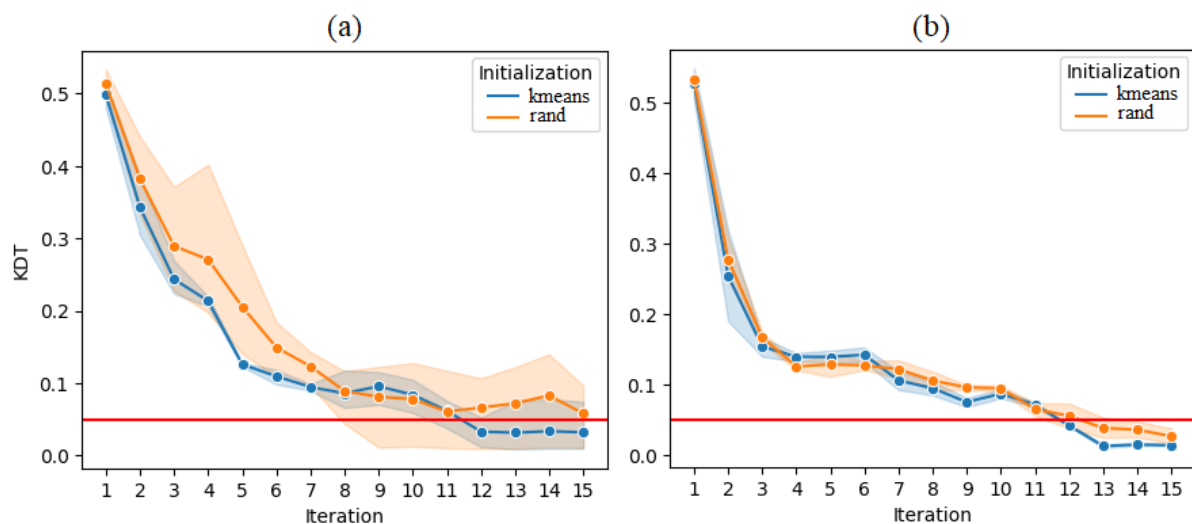


Figura 10 – Curva do aprendizado para os problemas PF3 em (a) e PF4 em (b) variando ι .

O que se pode perceber, no geral, foi que a escolha aleatória das soluções iniciais resultou em um desvio padrão maior ao longo das iterações no problema PF3, pois não

garantia a cobertura da superfície de Pareto como acontece com *kmeans* e $q = 5$. Este problema representa a função DTLZ7 cuja superfície também é altamente não linear e exibe muitas descontinuidades. Essas características dificultam a previsão das preferências e representam mais desafios para o modelo.

5.4 Similaridade entre as Soluções Recomendadas

Esta parte se refere à seleção de alternativas durante as interações com o decisor, representado pelo hiperparâmetro ζ . Estas alternativas são selecionadas iterativamente do conjunto $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Q}$ com base em métricas de distância. São elas: ‘euclidean’ (euclideana), ‘cosine’ (cosseno), ‘chebyshev’ (chebyshev), ‘manhattan’ (manhattan ou cityblock), ‘minkowski_2’ (minkowski com $p = 2$) e ‘minkowski_05’ (minkowski com $p = 0.5$). A Figura 11 foi elaborada para ilustrar as distâncias implementadas. A implementação destas distâncias pode ser encontrada junto com a documentação no pacote Scikit-Learn (PEDREGOSA et al., 2011).

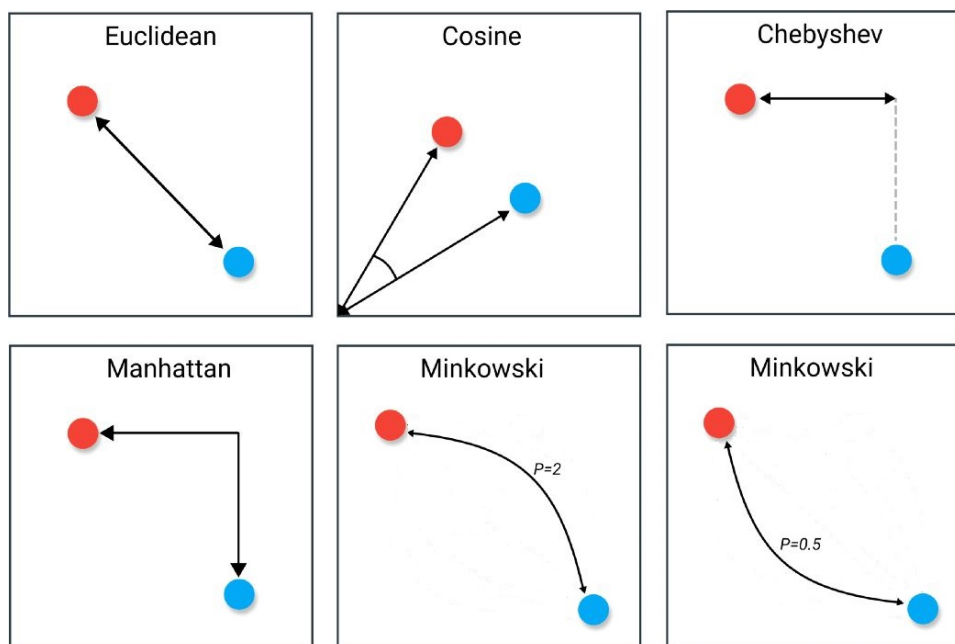


Figura 11 – Distâncias utilizadas para selecionar novas alternativas que serão apresentadas ao decisor.

Fonte: Adaptado de Grootendorst (2021).

As distâncias Euclideana e Cosseno foram utilizadas na análise a seguir. A utilizar $\iota = \text{'kmeans'}$, $q = 5$ e $\theta = 0.2$, variou-se $\zeta = [\text{'euclidean'}, \text{'cosine'}]$. Conforme ilustra a Figura 12, a principal diferença também ocorreu no problema PF3 em (a). É possível observar que o modelo que seleciona as alternativas com base na distância Cosseno superou o modelo que usa as soluções aproximadas pela distância Euclideana. A primeira atingiu a condição de parada na iteração t_{10} , enquanto a segunda na t_{12} . Em (b), percebe-se que o

problema PF4 (similar ao PF1 e PF2) não apresentou grandes diferenças ao longo das iterações.

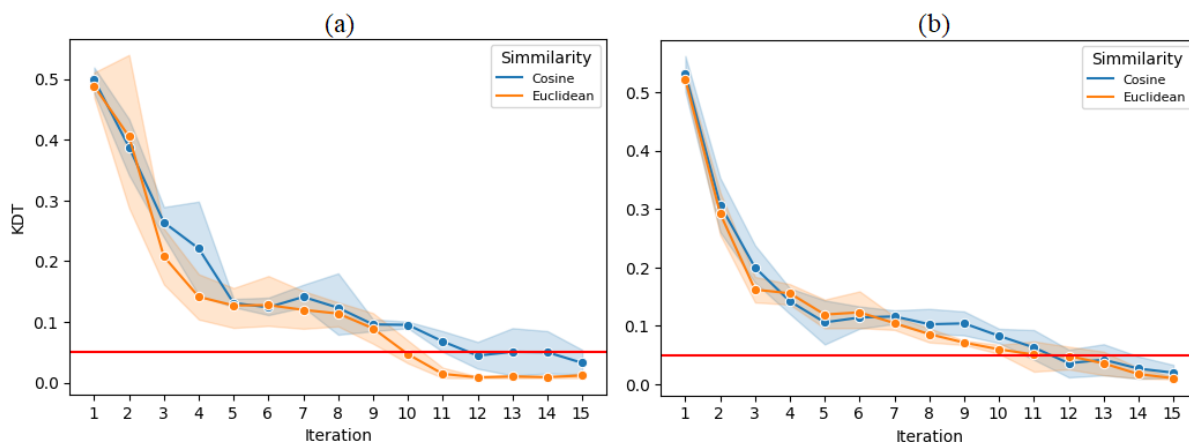


Figura 12 – Curva de aprendizado dos modelos de ML no aprendizado das preferências do decisor para o problema PF3 em (a) e PF4 em (b) variando ζ .

A distância Euclidiana é uma medida da distância entre dois pontos em um espaço euclidiano, enquanto o Cosseno visa a semelhança espacial entre dois vetores (ângulo do cosseno). Uma possível explicação para essa diferença é que a distância Euclidiana é conhecida por ter um desempenho ruim em altas dimensões (DOMINGOS, 2012), ou mesmo em superfícies descontínuas. Isso pode causar convergência tardia e gerar um desvio padrão maior na previsão de preferências nas iterações finais. Entende-se que mais estudos podem ser realizados para investigar especificamente essa diferença.

Neste trabalho, essas estratégias de recomendação são utilizadas para minimizar o viés durante o processo de seleção das alternativas que serão apresentadas ao decisor. Eles identificam as soluções mais relevantes que levam a escolhas mais esclarecidas.

5.5 Número de Alternativas Apresentadas ao Decisor

Nesta parte é feita uma análise sobre o hiperparâmetro q . Para isto, analisou-se $q = [3, 4, 5, 7, 10]$ com foco em obter um valor que reduzisse o número de consultas ao decisor. Isto se traduz diretamente em menos esforço cognitivo e menos tempo consumido, e indiretamente em maior possibilidade de avaliações consistentes. Os hiperparâmetros mais apropriados avaliados anteriormente foram levados em consideração.

O principal argumento para a escolha destes valores é que eles requerem menos comparações pareadas por parte do decisor e, obviamente, menos chances de inconsistências nas avaliações. Recorre-se também ao argumento de Teknomo (2006) de que $q > 7$ já requer muitas comparações por vez. Além disso, outro argumento é que o RI sugerido por Saaty também é limitado a um número máximo de alternativas, i.e. 15. Por isso, alguns valores

foram escolhidos de forma a avaliar a capacidade do algoritmo de aprendizado de máquina em fazer as predições com o mínimo de dados (comparações) e de forma consistente.

A Figura 13 exibe os resultados para as diferenças de q . Utilizando KDT como referência, os melhores modelos alcançaram a condição de parada nas iterações t_5 , t_7 , t_{10} e t_{11} para PF1, PF2, PF3, e PF4, respectivamente.

Percebe-se que embora mais soluções possam trazer mais informações ao decisor, houve apenas uma pequena melhoria no desempenho do modelo de aprendizado de máquina. Além disso, ao aumentar q eleva-se também o número de comparações necessárias a cada iteração. Menos iterações se traduzem em menos esforço e tempo e, conseqüentemente, seleção mais rápida da solução preferida. Vale argumentar ainda que há maiores chances de obter avaliações consistentes de forma a não extrapolar o CR descrito em (3.5).

O número de consultas feitas ao decisor até o modelo atingir a condição de parada é descrito na Tabela 8.

Tabela 8 – Número de comparações requeridas do decisor para cada problema de decisão variando q até alcançar a condição de parada.

Problema	Número de comparações				
	$q = 3$	$q = 4$	$q = 5$	$q = 7$	$q = 10$
PF1	45	72	90	126	270
PF2	36	60	80	168	315
PF3	45	84	120	231	450
PF4	57	108	130	252	495

Com base nestas análises pode-se supor que o número mais adequado de alternativas para apresentar ao decisor seja $q = 3$ por iteração, o que requer três comparações por objetivo ($((3 \times (3 - 1))/2 = 3 \times M)$). Deve ficar claro que, em termos práticos, os gestores devem destinar a disponibilidade de tempo e esforço ao analista para realizar tais avaliações. Nesta abordagem proposta, q é um hiperparâmetro que pode ser facilmente modificado de acordo com as necessidades do negócio.

Com base no principal argumento do Paradoxo da Escolha (SCHWARTZ, 2004), quanto menor, melhor. Em outras palavras, menor q implica em menos comparações, mesmo que isso exija mais interações com o decisor. Depois disso, o modelo aprende a função \mathcal{U} e está apto para predizer as preferências sobre o subconjunto $\mathcal{X} \setminus \mathcal{Q}$ em todos os objetivos sendo, inclusive, possível de ser utilizado em outros problemas de mesmo domínio sem necessitar novas consultas e treinamento de modelo.

Duas limitações do AHP são abordadas nesta parte: complexidade e escopo limitado. A complexidade é reduzida a partir desta presente proposta, pois o número de comparações necessárias é muito inferior. O escopo também é aprimorado, porque a escalabilidade permite que problemas complexos sejam divididos e resolvidos iterativamente.

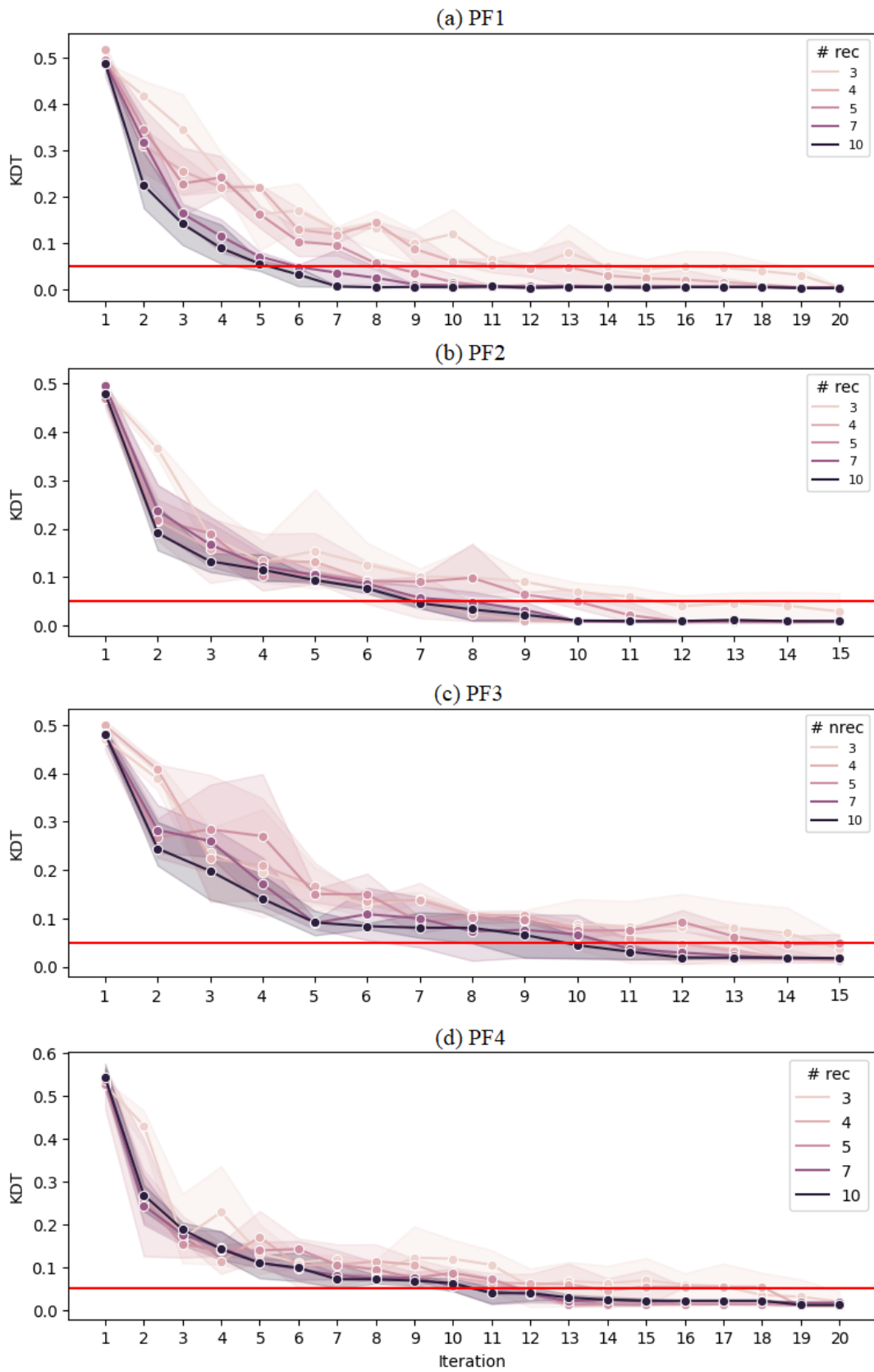


Figura 13 – Aprendizagem das preferências do decisor variando q para PF1 em (a), PF2 em (b), PF3 em (c) e PF4 em (d).

5.6 Estratégias para Busca Local

O hiperparâmetro θ guia a busca local sobre soluções mais promissoras escolhidas em cada iteração t . A busca pode ser totalmente aleatória com $\theta = 1.0$ ou apenas baseada em alguma das métricas de distância listadas em 5.4 quando $\theta = 0.0$. A considerar $q = 3$, variou-se θ para testar a busca por $[0 - q]$ soluções.

Os modelos convergiram de forma semelhante nos problemas PF1 e PF3. Entretanto, uma descoberta interessante é observada nos problemas PF2 e PF4, conforme Figura 14. A busca por soluções puramente baseadas em distância foi mais eficiente em termos de número total de iterações, o que representava também menos número de consultas.

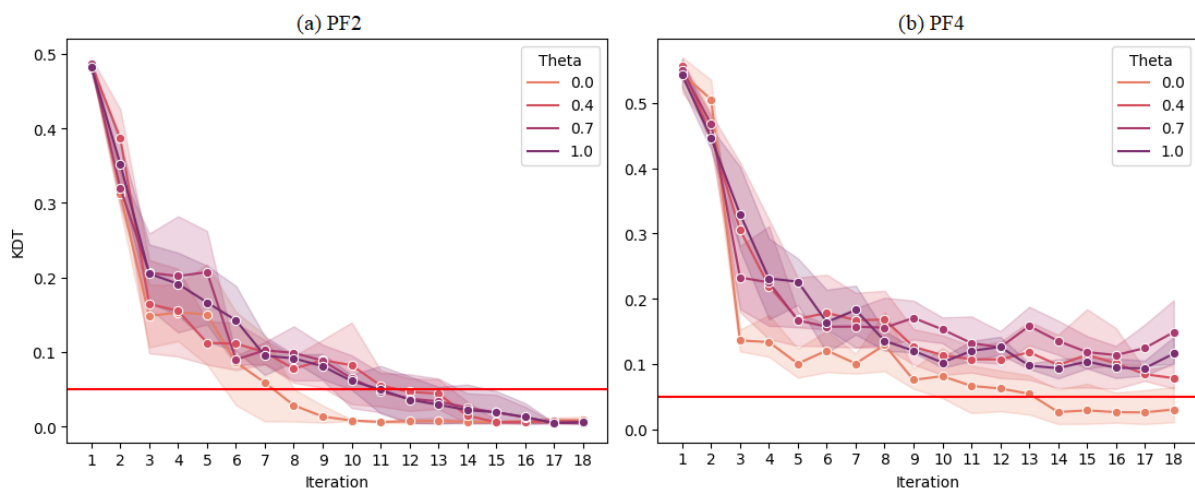


Figura 14 – Efeitos da variação de θ nos problemas PF2 em (a) e PF4 em (b), cujas superfícies são lineares.

Para problemas cujas superfícies de decisão são não-lineares e/ou descontínuas, como PF1 e PF3, um fator de aleatoriedade pode ajudar o método de ML a encontrar novos espaços de busca e escapar de mínimos locais. Porém, nos lineares, esse problema é minimizado, pois o maior desafio é a convergência.

5.7 Ranking com o AHP Escalável

Como este trabalho trata da resolução de problemas de tomada de decisão com muitos critérios, o que se espera ao final do processo é a classificação final das alternativas. Para fornecer um exemplo ilustrativo, nesta parte é apresentado o ranking do problema PF2 com $\theta = 0.0$ apresentado anteriormente em 5.6 e 14(a).

Observe que o modelo baseado no RF necessitou 8 iterações até atingir a condição de parada e aprender as preferências do decisor a partir das comparações de \mathcal{Q} . Depois disso ele foi capaz de prever as preferências entre todos os pares restantes. Na Figura são ilustradas apenas 18 iterações, porém o modelo pode ser aplicado a todas as \mathcal{X}/q demais

iterações e, certamente, iria alcançar um ranking com menor KDT. A ordenação obtida com as preferências previstas na t_{18} é apresentada na Tabela 9. O modelo criado com $\theta = 0.0$ requer 6 avaliações por consulta. Em t_{18} as preferências previstas pelo modelo geram um ranking bem semelhante ao fornecido pelo AHP analítico usando todo o conjunto \mathcal{X} . As setas indicam as trocas (swaps) entre os índices necessárias para obter o ranking exato daquelas primeiras soluções.

Tabela 9 – Ranking das primeiras 15 alternativas utilizando o AHP clássico e o AHP escalável proposto.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	12	14	15	...
AHP	169	182	2	39	59	151	94	185	67	126	60	68	34	105	120	
Proposed	2	169	39	182	151	59	94	67	185	68	126	60	105	130	141	...

A Figura 15 ilustra as soluções no espaço de objetivos. Utilizando o AHP clássico, percebe-se que a ordem das quatro melhores alternativas é $a_{169} > a_2 > a_{39} > a_{182}$, enquanto ao utilizar o AHP Escalável seria $a_2 > a_{169} > a_{39} > a_{182}$. É fácil perceber que as soluções sugeridas pelos dois métodos nas primeiras posições são as mesmas. Um exemplo disto é a a_{169} que foi melhor classificada pelo AHP clássico ficou em segundo pelo AHP Escalável. Neste caso precisaria de apenas uma troca de posição para a ordem ser exatamente a mesma. Note ainda que as melhores soluções previstas pelo método proposto com a comparação pareada entre as q soluções estão na mesma região da fronteira Pareto onde está a melhor solução do AHP clássico com a comparação das n soluções.

5.8 Aplicações Práticas

Nesta seção são descritos alguns experimentos feitos utilizando o AHP Escalável em problemas práticos. A proposta é entender o funcionamento e a efetividade da metodologia proposta em casos reais.

Antes de prosseguir, vale a pena dizer que após a publicação dos primeiros resultados com o AHP Escalável em Alves et al. (2023), várias melhorias foram implementadas na abordagem proposta. São elas: inicialização com agrupamento aglomerativo (inclusão do valor ‘agglomerative’ no parâmetro ι); inclusão das métricas NQ, Pos e DBS descritas no Passo 7 da Metodologia; e a inclusão do Optuna (AKIBA et al., 2019) como otimizador dos hiperparâmetros, ao invés do RandomizedSearchCV.

Nesta subseção, portanto, os resultados podem apresentar melhorias na convergência quando comparados aos demais reportados.

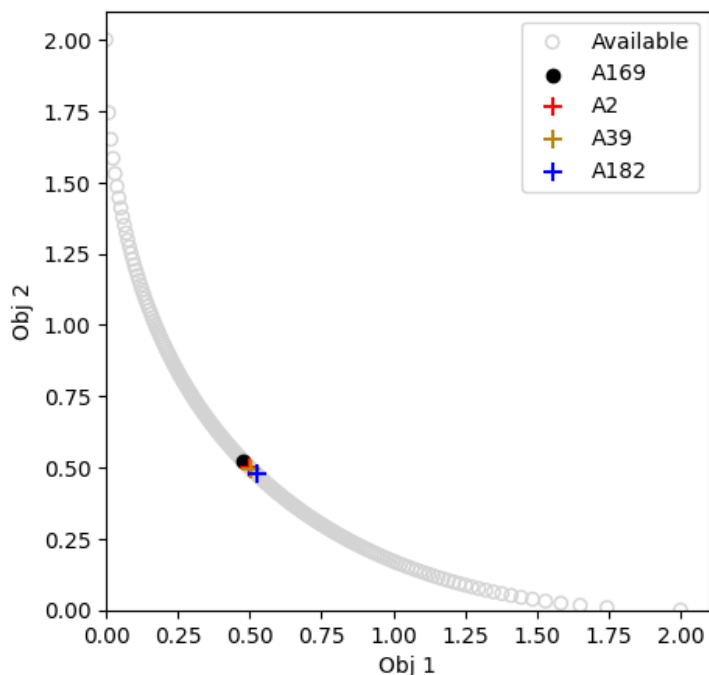


Figura 15 – Posição das melhores soluções na fronteira Pareto do problema PF1 baseado no AHP clássico e no AHP escalável proposto.

5.8.1 Caso 1: Problema de Vigas de Concreto Armado

Para o primeiro caso é utilizado um problema de vigas de concreto armado detalhado como RE2-3-2 em [Tanabe e Ishibuchi \(2020\)](#) extraído originalmente de [Amir e Hasegawa \(1989\)](#).

O problema chamado “*Reinforced Concrete Beam*” a partir da página 634 descrito em [Amir e Hasegawa \(1989\)](#) tem como objetivo é encontrar os valores ótimos dessas variáveis de decisão que minimizem o custo total da viga, sujeito a restrições de resistência e deformação. O problema é tratado como um problema de otimização misto-discreto. As três variáveis de decisão do problema são: $A_s = x_1$ = representa a quantidade de aço de reforço utilizado na viga, $b = x_2$ = representa a largura da seção transversal da viga, e $d_f = x_3$ = representa a altura da seção transversão da viga. O objetivo M_1 é minimizar o custo total de concreto e aço de armadura da viga, enquanto M_2 representa a soma pela violação de duas restrições.

No que tange a escolha da melhor alternativa para o problema com o AHP Escalável, a Figura 16 ilustra as soluções deste problema considerando 10 execuções do algoritmo, cuja superfície da fronteira Pareto é mista. Em (a) são ilustradas um conjunto de 20 mil soluções criadas para o problema, dominadas ou não. Em (b) está a fronteira Pareto aproximada que foi apresentada pelos autores. Como as variáveis de decisão para as soluções da Pareto aproximada não foram dadas, gerou-se 84 soluções não-dominadas apresentadas em (c). A melhor delas segundo o AHP considerando importâncias iguais

para os dois objetivos ($w = [0.5, 0.5]$) está indicada pelo símbolo +. Ela corresponde a alternativa a_{31} , ou $2.17x_1 + 2x_2 + 40x_3 = 111.79f_1, 127.41f_2$.

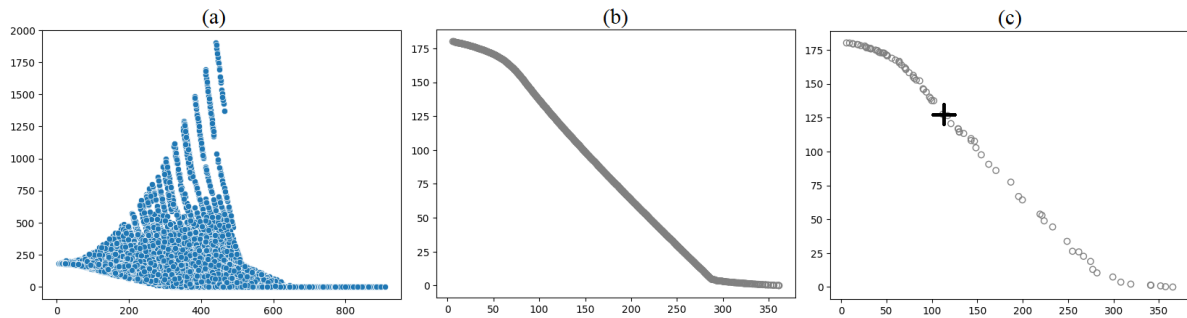


Figura 16 – Soluções e Fronteira Pareto do problema RE22. Em (a) são ilustradas um conjunto de soluções para o problema, cuja fronteira aproximada está em (b). Em (c) são apresentadas 84 soluções utilizadas neste trabalho. A melhor solução de acordo com o AHP está indicada pelo símbolo +.

Para esta análise o AHP Escalável foi ajustado com os seguintes parâmetros: $q = 5$, $mcdm = 'AHP'$, $w = [0.5, 0.5]$, $cb = ['cost', 'cost']$, $\theta = 0.5$, $\iota = 'kmeans'$, $\zeta = 'euclidean'$, $ml = 'rf'$.

A Figura 17 apresenta os resultados da primeira e última iteração utilizando a abordagem proposta. É fácil perceber que na última iteração a solução sugerida pelo modelo gerado com o RF foi a mesma que seria alcançada com o AHP.

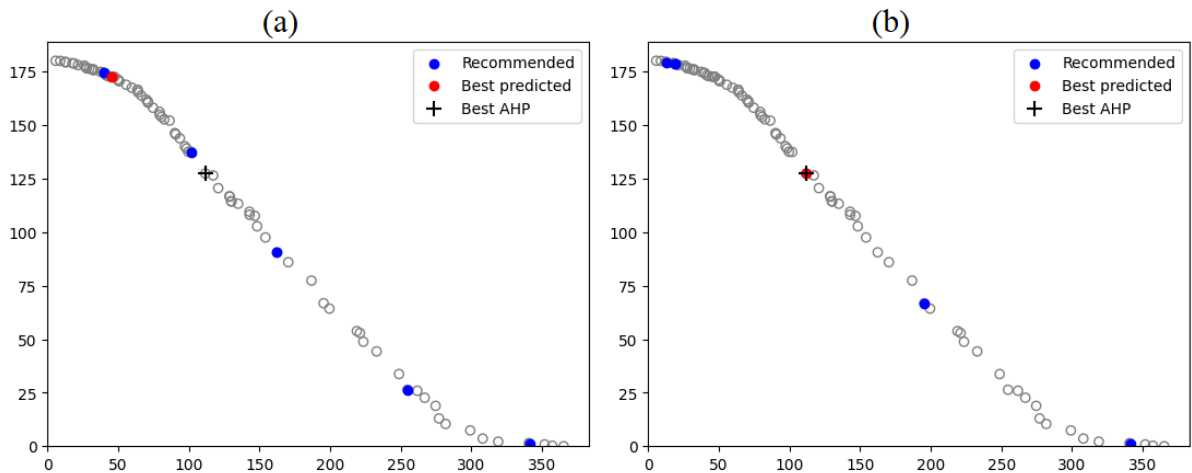


Figura 17 – Resultado de uma das execuções do AHP Escalável no problema RE2-3-2. As soluções recomendadas pelo *kmeans* estão em azul, a melhor solução sugerida pelo AHP indicada pelo símbolo + e a melhor solução predita pelo modelo em vermelho. Em (b) está a representação da última iteração, t_{16} .

Pode-se considerar, para este caso, que a aplicação do AHP Escalável foi satisfatória, uma vez que ela recomendou a mesma solução que o AHP clássico. Ao observar as métricas de qualidade do modelo na Figura 18, percebe-se que o modelo construído a partir do RF atingiu a condição de parada na t_4 , o que custaria ao decisor, em termos práticos,

$(5 \times 4)/2 = 10$, que multiplicado por 2 objetivos totaliza 20 comparações pareadas. A cada iteração a similaridade entre a ordenação predita pelo modelo e pelo AHP cresce, indicado em (b) pela Pos. Já na t_5 a alternativa a_{31} foi classificada em primeiro e assim se manteve até o final das iterações, vide o DBS.

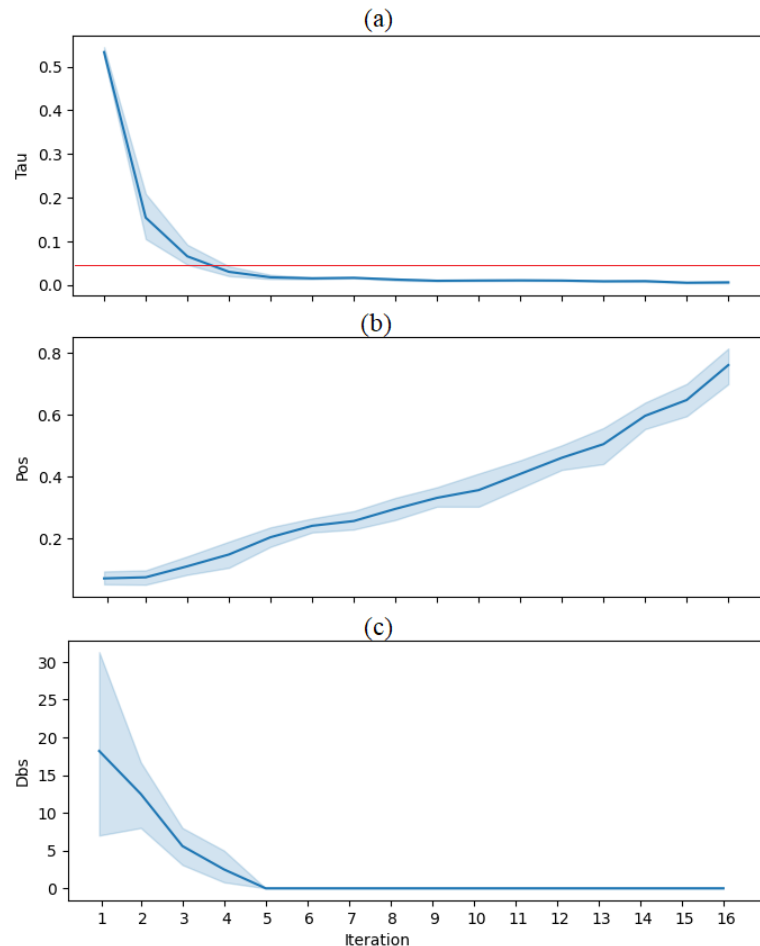


Figura 18 – Resultados das métricas de desempenho do modelo para o problema RE2-3-2: (a) KDT, (b) Pos e (c) DBS.

A percepção do grau de similaridade entre os rankings obtidos pelo AHP Escalável e a abordagem clássica fica mais clara ao se observar a ordem das soluções apresentada na Tabela 10. A primeira posição em que houve divergência foi a 10, que necessitaria apenas de uma troca (swap) com a posição 11 para estabilizar estes índices. O mesmo ocorreu com os pares 16 e 17, e alguns outros. É interessante observar que o modelo foi capaz de prever as preferências dos decisores com bastante precisão tal que a ordem das primeiras alternativas foi exatamente a mesma. Por exemplo, a ordem das cinco primeiras alternativas foram idênticas nos dois métodos: $a_{31} > a_{39} > a_{73} > a_{36} > a_{33} > \dots > a_{32}$.

No caso de uma aplicação prática deste problema, com apenas 20 comparações pareadas o decisor já teria a recomendação das soluções que mais correspondiam com as suas preferências. Neste caso, $DBS = 0$ visto que a a_{31} ficou em primeiro nos dois métodos,

Tabela 10 – Ranking das soluções obtidas para o problema RE2-3-2 pelo AHP Escalável e pelo AHP Clássico.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
AHP Escalável	31	39	73	36	33	5	77	82	56	40	41	57	20	30
AHP Clássico	31	39	73	36	33	5	77	82	56	41	40	57	20	30
Posição	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
AHP Escalável	10	2	9	24	29	3	0	25	15	63	76	12	17	8
AHP Clássico	10	9	2	24	29	3	0	25	15	63	76	12	17	8
Posição	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42
AHP Escalável	67	59	18	65	52	57	60	64	69	66	21	58	43	13
AHP Clássico	67	59	18	64	65	52	27	60	69	66	21	58	43	72
Posição	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53	54	55	56
AHP Escalável	72	44	68	16	55	53	53	11	48	79	46	74	35	26
AHP Clássico	13	44	68	16	55	74	83	53	11	48	79	46	35	26
Posição	57	58	59	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
AHP Escalável	19	4	37	71	80	75	49	51	22	54	23	47	28	42
AHP Clássico	19	4	37	71	75	80	49	28	51	22	23	54	47	42
Posição	71	72	73	74	75	76	77	78	79	80	81	82	83	84
AHP Escalável	1	81	62	45	38	70	78	14	61	6	50	34	7	32
AHP Clássico	1	81	62	68	45	70	78	14	61	6	50	34	7	32

$Pos = 0.6785$ e $KDT = 0.006$. Há ainda a vantagem de utilizar o modelo treinado para a comparação de novas alternativas deste mesmo problema ou mesmo em outros problemas de mesmo domínio.

5.8.2 Caso 2: Projeto de Recipiente de Pressão

Este estudo de caso trata-se de um projeto de recipiente de pressão originalmente descrito em [Kannan e Kramer \(1994\)](#). Em [Tanabe e Ishibuchi \(2020\)](#), os autores descrevem o problema como RE2-4-3 tendo 2 objetivos, 4 variáveis de decisão mistas e fronteira Pareto mista e descontínua.

No artigo original que descreve o problema, [Kannan e Kramer \(1994\)](#) explicam no *Case Study 2*, página 408, “*Design of a Pressure Vessel*”, um problema de otimização de design mecânico que envolve a minimização do custo total de um recipiente de pressão cilíndrico com cabeças hemisféricas em ambas as extremidades. O objetivo é encontrar as espessuras ideais da casca e da cabeça, bem como o raio interno e o comprimento da seção cilíndrica, que minimizam o custo total do recipiente, incluindo o custo do material, o custo de formação e soldagem. As quatro variáveis de decisão são: $T_s = x_1$ = a espessura da casca, $T_h = x_2$ = a espessura da cabeça, $R = x_3$ = o raio interno da seção cilíndrica e $L = x_4$ = o comprimento da seção cilíndrica. T_s e T_h são discretas e R e L contínuas. Os dois objetivos são: M_1 minimizar o custo total do recipiente de pressão e M_2 garantir que o recipiente atenda aos requisitos de projeto, como a pressão de operação e a resistência mecânica.

Para a escolha da melhor alternativa utilizando como base o AHP Escalável, nesta pesquisa foram indicados os seguintes valores para os parâmetros: $q = 3$, $mcdm = 'AHP'$, $w = [0.5, 0.5]$, $cb = ['cost', 'cost']$, $\theta = 0.5$, $\iota = 'agglomerative'$, $\zeta = 'minkowski_05'$, $ml = 'rf'$. Foram feitas 10 execuções com o AHP Escalável e utilizando as 27 alternativas disponíveis.

A Figura 19 ilustra as soluções em uma das execuções, na iteração t_0 em (a) e t_8 em (b). Em azul estão as soluções recomendadas naquela iteração, em vermelho a melhor ranqueada pelo método proposto e o símbolo + indica a melhor ranqueada pelo método clássico.

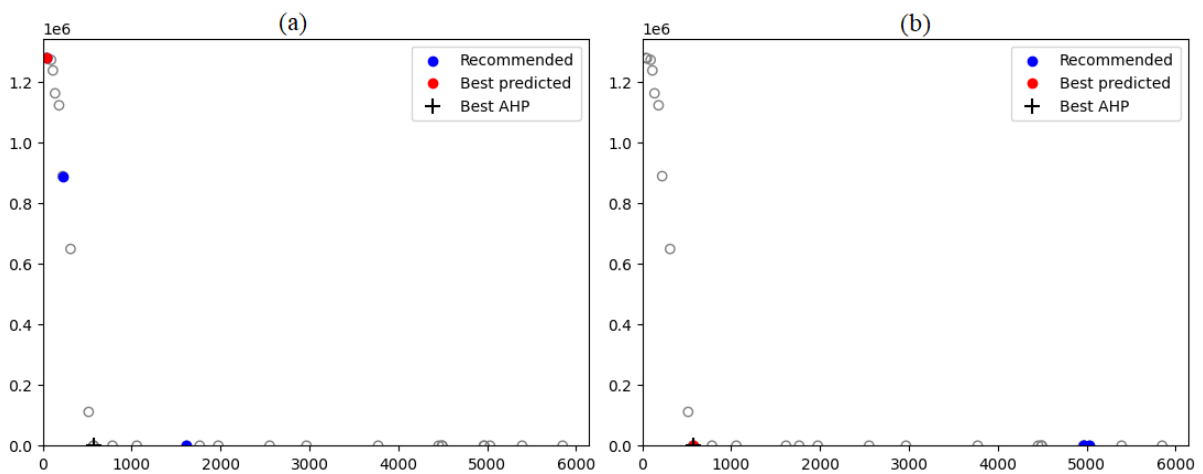


Figura 19 – Resultado de uma das execuções do AHP Escalável no problema RE2-4-3. As soluções recomendadas pelo agrupamento *agglomerative* estão em azul, a melhor solução sugerida pelo AHP indicada pelo símbolo + e a melhor solução predita pelo modelo em vermelho. Em (b) está a representação da última iteração, t_9 .

A Tabela 11 apresenta o ranking obtido pelos dois métodos. Percebe-se que o ranking gerado pelo modelo construído a partir do RF teve diferença em apenas 3 posições, e não são as primeiras.

Tabela 11 – Ranking das soluções obtidas para o problema RE2-4-3 pelo AHP Escalável e pelo AHP Clássico.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
AHP Escalável	19	0	3	5	12	10	15	9	13	7	16	17	8	22
AHP Clássico	19	0	3	5	12	10	15	9	13	7	16	17	8	22
Posição	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	
AHP Escalável	25	21	4	20	11	6	2	1	23	14	24	26	18	
AHP Clássico	25	21	4	20	11	6	2	23	14	1	24	26	18	

Os resultados para as métricas de qualidade do modelo KDT, Pos, DBS e NQ são apresentados na Tabela 12. Os valores indicam a média de 10 execuções do método proposto. O modelo convergiu na iteração t_6 quando, obedecendo o critério de parada,

atingiu $KDT < 0.05$. Nesta iteração a melhor alternativa, a_{19} , já estava sendo indicada como a melhor alternativa pelo AHP Escalável. A considerar o número de comparações foram necessárias 36 comparações para obter este ranking.

Tabela 12 – Resultados das métricas KDT, Pos, DBS e NQ para o problema RE2-4-3.

Iteração	1	2	3	4	5	6	7	8
KDT	0.5940	0.2125	0.1496	0.0826	0.0686	0.0498	0.0244	0.0168
Pos	0.2370	0.1518	0.1740	0.2296	0.3814	0.4407	0.6518	0.8370
DBS	2.2000	2.3000	1.2000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
NQ	6	12	18	24	30	36	42	48

Embora neste caso em específico o NQ com o AHP Escalável foi similar ao AHP clássico, o que se argumenta é que a primeira abordagem foram menos comparações por vez e menos chances de inconsistências. Além disso, o modelo gerado a partir destes dados poderia ser utilizado para prever as preferências entre outras muitas alternativas deste mesmo problema sem a necessidade de retreino.

5.8.3 Caso 3: Projeto de Engrenagens de Trem

Este caso de uso trata-se de um problema de engrenagens de trem foi inicialmente descrito por [Deb e Srinivasan \(2006\)](#). Em [Tanabe e Ishibuchi \(2020\)](#), os autores descrevem este problema como RE3-4-6 tendo 3 objetivos, 4 variáveis de decisão inteiras e fronteira Pareto côncava e descontínua.

[Deb e Srinivasan \(2006\)](#) detalharam o problema de design de trem de engrenagens, como um dos exemplos de aplicação da metodologia de *Innovization* proposta no artigo. Neste problema, o objetivo é projetar um trem de engrenagens que atenda a três objetivos conflitantes: M_1 = minimizar o tamanho do trem de engrenagens, M_2 = minimizar a perda de energia e M_3 maximizar a eficiência do trem de engrenagens. As quatro variáveis de decisão do problema são: x_1 = número de dentes em cada engrenagem, x_2 = diâmetro de cada engrenagem, x_3 distância entre os centros de cada engrenagem e x_4 a relação de transmissão entre a primeira e a última engrenagem.

Em relação a escolha da melhor solução utilizando o AHP Escalável, os parâmetros utilizados para os experimentos foram: $q = 3$, $mcdm = 'AHP'$, $w = [0.3333, 0.3333, 0.3333]$, $cb = ['cost', 'cost', 'cost']$, $\theta = 0.5$, $\iota = 'agglomerative'$, $\zeta = 'minkowski-2'$, $ml = 'rf'$.

Na Figura 20 está ilustrada a dinâmica em uma das execuções do AHP Escalável nas iterações t_1 e t_{13} (nota: foram utilizadas menos iterações apenas por questão de praticidade e economizar tempo de processamento). Novamente, percebe-se que na última iteração o modelo gerado com o RF está sugerindo ao decisor a mesma solução que foi gerada com o método clássico.

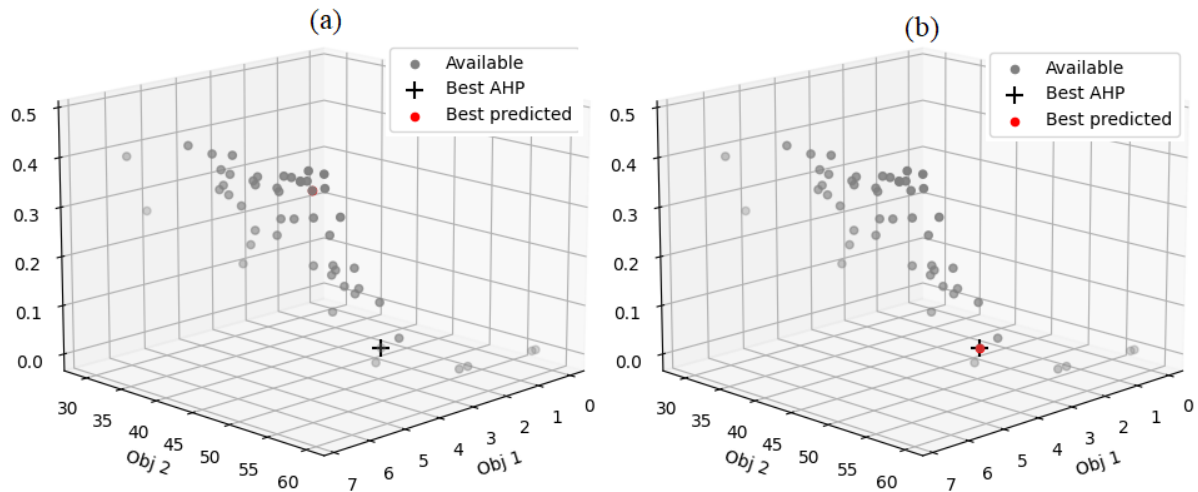


Figura 20 – Resultado de uma das execuções do AHP Escalável no problema RE3-4-6. As soluções recomendadas pelo agrupamento *agglomerative* estão em azul, a melhor solução sugerida pelo AHP indicada pelo símbolo + e a melhor solução predita pelo modelo em vermelho. Em (b) está a representação da última iteração, t_{13} .

Para avaliar a qualidade do modelo, na Tabela 13 estão resumidos os valores alcançados para as métricas KDT, Pos, DBS e NQ para o problema supracitado.

Tabela 13 – Resultados das métricas KDT, Pos, DBS e NQ para o problema RE3-4-6.

Iteração	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
KDT	0.5505	0.1972	0.1173	0.0745	0.0560	0.0398	0.0299	0.0235	0.0193	0.0156	0.0212	0.0175	0.0208
Pos	0.1058	0.0471	0.0667	0.0588	0.0745	0.1020	0.1196	0.1490	0.2000	0.2078	0.2471	0.3118	0.3490
DBS	2.3000	5.4000	7.1000	6.5000	6.3000	4.1000	1.8000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
NQ	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90	99	108	117

O modelo atingiu a condição de parada na iteração t_6 requerendo 54 comparações pareadas. A partir da t_8 a alternativa a_{26} que era a melhor ranqueada pelo AHP clássico também foi a melhor posicionada com o AHP Escalável.

O ranking gerado pelo modelo na iteração t_{13} é apresentado na Tabela 14. Perceba que, novamente, as soluções estão ou nas mesmas posições ou muito próximas, a necessitar apenas de poucas alterações.

Tabela 14 – Ranking das soluções obtidas para o problema RE3-4-6 pelo AHP Escalável e pelo AHP Clássico.

Posição	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
AHP Escalável	26	38	22	36	37	4	2	10	20	15	29	25	44	14	33	11	45
AHP Clássico	26	38	22	36	37	4	2	10	20	16	21	33	15	29	25	40	44
Posição	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34
AHP Escalável	13	30	9	12	21	39	28	23	5	16	40	34	43	42	27	31	18
AHP Clássico	11	5	14	28	45	13	12	9	30	39	23	0	24	34	43	42	27
Posição	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51
AHP Escalável	0	19	24	7	1	35	49	6	3	48	8	50	17	46	32	41	47
AHP Clássico	31	18	19	7	1	49	35	48	50	8	6	3	46	17	32	41	47

5.9 Outras Análises e Direções

5.9.1 Preferência Implícitas - Transitividade

Conforme argumentado anteriormente, as preferências podem ser obtidas explicitamente como no caso de fazer consultas ao decisor, ou implicitamente, quando elas são coletadas e/ou inferidas. O passo 3 do AHP explica a consistência e transitividade das preferências.

Essa transitividade agora é usada para obter relações implícitas entre as alternativas. Para cada objetivo, é calculada a diferença entre a_i e a_j e a_j e a_q (recomendada) e inferida para a_i em relação a a_q . Assim, a preferência é simplesmente a diferença entre a_i e a_q . Para isso, $q - 1$ são recomendados e esta última é utilizada para inferir as preferências e aumentar a base de conhecimento para o método de ML.

Com base em algumas rodadas de experimentos percebeu-se que esta estratégia não ajudou o modelo a reduzir o número de iterações para atingir o critério de parada.

A principal justificativa é que o número de dados inseridos implicitamente em cada iteração cresce linearmente com o número de amostras de treinamento. Isso significa que nas primeiras iterações, como o método convergiu rapidamente, ainda não havia muitos dados imputados de forma a acelerar a convergência do modelo.

Acredita-se que essa estratégia pode funcionar para problemas mais complexos que dependam de mais consultas e pode ser tema de pesquisa em investigações futuras.

5.9.2 Comparação com Baseline

Foi realizada uma comparação com outros trabalhos da literatura. Analisou-se o método proposto por [Alves, Meneghini e Guimarães \(2021\)](#) e o AHP clássico proposto por [Saaty \(1988\)](#). No primeiro, a proposta é mais simples. A seleção inicial é sempre escolhida de forma aleatória, bem como a recomendação.

A proposta atual incorpora a abordagem anterior proposta em [Alves, Meneghini e Guimarães \(2021\)](#), se tornando equivalente quando $\iota = \textit{‘aleatory’}$ e $\theta = 1.0$. Com base nos resultados discutidos em [5.3](#), a estratégia de cluster mostra menos variação em problemas como PF3. Além disso, em [5.6](#), a recomendação baseada em distância funciona melhor para problemas com superfícies lineares. Assim, espera-se que os resultados desta pesquisa atual superem os apresentados em [Alves, Meneghini e Guimarães \(2021\)](#) nesses casos.

Em relação ao AHP clássico proposto por [Saaty \(1988\)](#), esta atual proposta requer apenas algumas consultas para avaliação pareada de \mathcal{Q} . O método clássico, por outro lado, requer a avaliação pareada de \mathcal{X} em uma única rodada.

5.9.3 Possíveis Melhorias no AHP Escalável

Essa abordagem é uma alternativa para resolver problemas de decisão multicritério de larga escala. Quando o número de alternativas ou objetivos é elevado, a comparação entre as soluções se torna difícil de ser feita e geralmente leva à inconsistência nos julgamentos. A metodologia proposta é customizável e pode ser incrementada com novos hiperparâmetros, métodos MCDM baseados em comparações pareadas, novos métodos de ML e assim por diante.

Investigações que visam reduzir a dimensionalidade e depois reduzir o esforço decisor (cognitivo ou em número de consultas), efeito de correlação entre critérios, indicadores de consistência e outros podem ser incorporados para atuar como novos hiperparâmetros e funcionalidades, por exemplo [Ferreira et al. \(2017\)](#), [Kuo \(2021\)](#), [Islam e Abdullah \(2006\)](#), e testes em mais problemas como os elencados por [Tanabe e Ishibuchi \(2020\)](#).

6 CONCLUSÃO

Os gestores e as organizações buscam ferramentas que agilizem o processo de tomada de decisão. No entanto, métodos como o AHP que é baseado em comparações pareadas tornam este processo custoso para o decisor. Uma abordagem para tornar o método AHP escalável é proposta nesta tese. Em vez de apresentar todas as soluções aos decisores de uma única vez, isso é feito por meio de iterações sucessivas com a ajuda de um método de aprendizado de máquina para aprender as preferências e prever as restantes.

A escalabilidade é aprimorada através da otimização dos hiperparâmetros e atua diretamente tanto na redução de consultas quanto na probabilidade de inconsistência nas avaliações. Além disso, afeta indiretamente no tempo perdido e na possibilidade de ter um modelo automatizado para usar em novos problemas do mesmo domínio.

A metodologia tem como principal vantagem os diferentes hiperparâmetros que podem ajudar a explorar o problema de decisão e acelerar a convergência. Um maior número de iterações com o decisor permite uma melhor convergência para a região desejada na fronteira de decisão. No entanto, como o número de comparações está diretamente relacionado ao número de iterações é necessário que analistas e gestores avaliem a condição de parada para que a solução indicada posteriormente atenda às necessidades da organização. Neste artigo, o KDT foi utilizado como função de mérito, e outras podem ser implementadas e adicionadas. Uma vez treinado o modelo, ele pode ser reutilizado sem a necessidade de novas consultas ao decisor, exceto quando o domínio é alterado.

Os hiperparâmetros propostos foram analisados separadamente para quatro problemas de benchmark diferentes, tendo superfícies de decisão convexa, linear e descontínua. Entre os resultados destaca-se o número de soluções que requerem menos consultas ($q = 3$) e que a busca de soluções com base na menor distância tende a acelerar o aprendizado dos modelos quando o problema tem uma superfície linear. Quando θ é definido como 0.0, a busca é baseada na distância e tende a ser mais eficiente em termos de atingir condições com menos iterações. Em aplicações práticas, o esforço do decisor é reduzido de $n \times (n - 1)/2$ para $q \times (q - 1)/2$ avaliações, com $q \ll n$, em aproximadamente 15 iterações.

O método proposto também foi avaliado em três problemas reais para validar sua aplicabilidade. Os resultados foram satisfatórios, uma vez que o ranking gerado pelo modelo de aprendizado de máquina foi muito similar àquele gerado pelo método clássico, porém com menos comparações. Outra vantagem do AHP Escalável é que, uma vez treinado o modelo para um determinado domínio, ele pode ser reaplicado na avaliação de novas soluções sem a necessidade de retreino.

Entre as críticas feitas ao método AHP, este trabalho abordou diretamente a

complexidade, escopo limitado e viés, indiretamente a subjetividade e não abordou a falta de transparência. A escalabilidade atua na complexidade e na limitação do escopo. Entre duas rodadas de consultas, o modelo pode aprender a função de utilidade com menos alternativas. O viés é reduzido usando as estratégias de recomendação e também controlado pelo parâmetro θ com foco nas soluções mais relevantes. A subjetividade é melhorada reduzindo o número de comparações, o que também minimiza as chances de avaliações inconsistentes. No entanto, a incerteza ou imprecisão durante as avaliações não é discutida diretamente, podendo ser alvo de estudos futuros, como a aplicação de lógica fuzzy e investigação de cenários. Além disso, o método AHP pode ser difícil de entender ou explicar às partes interessadas, causando falta de transparência. Melhorias futuras podem envolver, por exemplo, métodos de explicabilidade.

Para pesquisas futuras, sugere-se ajustar os parâmetros e hiperparâmetros via grid-search, e estender a metodologia em mais problemas. Além disso, avaliar soluções em MaOPs é uma tarefa muito difícil, desde o cálculo da função objetivo e visualização até a escolha da melhor solução. A abordagem proposta pode suportar esta classe de problemas, e foi modelada de forma que outras características possam ser facilmente inseridas, como novos algoritmos de ML, estratégias de recomendação e seleção de soluções e até mesmo outros métodos multicritério baseados em comparações pareadas.

Por questões de replicabilidade, continuidade, manutenibilidade e avanço destas pesquisas, todos os códigos e datasets estão no Github no link <https://github.com/mvoicer/doutorado>.

7 PUBLICAÇÕES

Durante o desenvolvimento desse trabalho de doutorado foram publicados três artigos que têm relação direta com o tema investigado. Além disso, várias outras pesquisas também foram desenvolvidas que se correlacionam com as linha de pesquisa de Inteligência Computacional no PPGEE.

Eles são listados a seguir. Eles validam a contribuição para o PPGEE, para a UFMG e para a ciência como aluno de doutorado.

7.1 Artigos Relacionados Diretamente com a Tese

Os trabalhos que foram frutos diretamente desta foram tese, em ordem cronológica, foram:

1. Alves, Marcos Antonio; Meneghini, Ivan Reinaldo; Gaspar-Cunha, António; Guimarães, Frederico Gadelha. Machine learning-driven approach for large scale decision making with the analytic hierarchy process. **Mathematics**, v. 11, n. 3, p. 627, 2023.
2. Alves, Marcos Antonio; Meneghini, Ivan Reinaldo; Guimarães, Frederico Gadelha. Learning Pairwise Comparisons with Machine Learning for Large-Scale Multi-Criteria Decision Making Problems. **In: Anais do XV Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional**, v. 15, 2021.
3. Meneghini, Ivan Reinaldo; Alves, Marcos Antonio; Gaspar-Cunha, António; Guimarães, Frederico Gadelha. Scalable and customizable benchmark problems for many-objective optimization. **Applied Soft Computing**, v. 90, p. 106139-15, 2020.

7.2 Artigos Relacionados com a Linha de Pesquisa do PPGEE

Outros trabalhos também publicados durante o período do doutorado e apresentam a afiliação ao PPGEE. Eles mostram a preocupação com a pesquisa e a dedicação ao PPGEE no período do doutorado. As principais publicações foram:

1. Oliveira e Lucas, Patrícia; Alves, Marcos Antonio; Silva, Petrônio Candido Lima; Guimarães, Frederico Gadelha. Reference Evapotranspiration Prediction for Precision Agriculture using Fuzzy Time Series. **In: Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2022, Juiz de Fora. Anais do LIV Simpósio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2022.**

2. Santos, Samara Silva; Rezende, Tamires Martins; Alves, Marcos Antonio; Guimarães, Frederico Gadelha. Interpretable Diagnosis of Skin Cancer Using Deep Learning. In: Congresso Brasileiro de Automática, 2022, Fortaleza/CE. **Anais** do XXIV Congresso Brasileiro de Automática, 2022.
3. Alves, Marcos Antonio et al. Explaining Machine Learning based Diagnosis of COVID-19 from Routine Blood Tests with Decision Trees and Criteria Graphs. **Computers in Biology and Medicine**, v. 104335, p. 104335, 2021.
4. Santos, Samara Silva; Alves, Marcos Antonio; Ferreira, Leonardo Augusto; Guimarães, Frederico Gadelha. PDTX: A novel local explainer based on the Perceptron Decision Tree. In: Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional, 2021, Joinville, SC. **Anais** do 15 Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional, 2021. p. 1-8.
5. Oliveira e Lucas, Patrícia; Alves, Marcos Antonio; Silva, Petrônio Candido Lima; Guimarães, Frederico Gadelha. Reference evapotranspiration time series forecasting with ensemble of convolutional neural networks. **Computers and Electronics in Agriculture**, v. 177, p. 105700, 2020.
6. Santos, Álvaro de Aquino; Alves, Marcos Antonio; Medeiros, Elias Silva; Nunes, Igor Neves; Cardoso, Rafael J. M. M. AR (p) para previsão de demanda em uma agroindústria. **ForScience**, v. 8, p. e00507, 2020.
7. Silva, Petrônio Candido Lima; Severiano Jr, Carlos Alberto; Alves, Marcos Antonio; Silva, Rodrigo; Cohen, Miri Weiss; Guimarães, Frederico Gadelha. Forecasting in non-stationary environments with fuzzy time series. **Applied Soft Computing**, v. 97, p. 106825, 2020.
8. Silva, Petrônio Candido Lima et al. COVID-ABS: An agent-based model of COVID-19 epidemic to simulate health and economic effects of social distancing interventions. **Chaos Solitons & Fractals**, v. 139, p. 110088, 2020.
9. Souza, Lucas Pimenta; Alves, Marcos Antonio; Batista, Paulo V. C.; Silva, Petrônio Candido Lima; Guimarães, Frederico Gadelha. Tomada de Decisão Multicritério para Classificação de Políticas de Enfrentamento à COVID-19. In: LII Simposio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2020, Joao Pessoa/PB - Brasil. **Anais** do LII Simposio Brasileiro de Pesquisa Operacional, 2020.
10. Silva, Petrônio Cândido; Severiano, Carlos Alberto; Alves, Marcos Antonio; Cohen, Miri Weiss; Guimarães, Frederico Gadelha. A New Granular Approach for Multivariate Forecasting. In: Vinícius Rosa Cota, Dante Augusto Couto Barone, Diego Roberto Colombo Dias, Laila Cristina Moreira Damázio. (Org.). **Communications in Computer and Information Science**. 1aed.: Springer International Publishing, 2019, v. 1068, p. 41-58.

11. Silva, Petrônio Cândido; Severiano, Carlos Alberto; Alves, Marcos Antonio; Cohen, Miri Weiss; Guimarães, Frederico Gadelha. A New Granular Approach for Multivariate Forecasting. In: Latin American Workshop on Computational Neuroscience, 2019, São João Del Rey. In: **Annals** of II Latin American Workshop on Computational Neuroscience, 2019.
12. Alves, Marcos Antonio; Almeida, L. V. V. B. ; Rezende, T. M.; Silva, P. C. L. E. ; Severiano Junior, C. A. ; Silva, R. P.; Guimarães, F. G. . Otimização Dinâmica Evolucionária para Despacho de Energia em uma Microrrede usando Veículos Elétricos. In: 14 Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2019, Ouro Preto, Minas Gerais. In: **Anais** do 14 Simpósio Brasileiro de Automação Inteligente, 2019.
13. Silva, Petronio Candido Lima; Alves, Marcos Antonio; Severiano Jr, Carlos Alberto; Vieira, Gustavo Linhares; Guimarães, Frederico Gadelha; Sadaei, Hossein Javedani. Probabilistic Forecasting with Seasonal Ensemble Fuzzy Time-Series. In: Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional, 2018, Rio de Janeiro. In: **Proceedings** XIII Brazilian Congress on Computational Intelligence, 2018. p. 1.
14. Alves, M. A.; Silva, P. C. L. E. ; Severiano Jr, C. A. ; Vieira, G. L. ; Guimarães, F. G. ; Sadaei, H. J. . An extension of nonstationary fuzzy sets to heteroskedastic fuzzy time series. In: 26th European Symposium on Artificial Neural Networks, Computational Intelligence and Machine Learning (ESANN), 2018, Bruges. In: **Proceedings** of ESANN 2018, 2018. v. 1. p. 591-596.

REFERÊNCIAS

- AKIBA, T. et al. Optuna: A next-generation hyperparameter optimization framework. In: *Proceedings of the 25th ACM SIGKDD International Conference on Knowledge Discovery & Data Mining*. [S.l.: s.n.], 2019. p. 2623–2631. DOI: 10.1145/3292500.3330701.
- ALVES, M. A. *Proposta de agregação robusta de múltiplos métodos com incertezas em problemas de tomada de decisão multicritério*. 162 p. Tese (Dissertação de Mestrado) — Programa de Pós-Graduação em Engenharia Elétrica. Universidade Federal de Minas Gerais, Maio 2018. DOI: 10.5281/zenodo.3762766.
- ALVES, M. A. et al. Machine learning-driven approach for large scale decision making with the analytic hierarchy process. *Mathematics*, MDPI, v. 11, n. 3, p. 627, 2023. DOI: 10.3390/math11030627.
- ALVES, M. A.; MENEGHINI, I. R.; GUIMARÃES, F. G. Learning pairwise comparisons with machine learning for large-scale multi-criteria decision making problems. In: FILHO, C. J. A. B. et al. (Ed.). *Anais do 15 Congresso Brasileiro de Inteligência Computacional*. Joinville, SC: SBIC, 2021. p. 1–7. DOI: 10.21528/CBIC2021-13.
- AMIR, H. M.; HASEGAWA, T. Nonlinear mixed-discrete structural optimization. *Journal of Structural Engineering*, American Society of Civil Engineers, v. 115, n. 3, p. 626–646, 1989. DOI: 10.1061/(ASCE)0733-9445(1989)115:3(626).
- BANA E COSTA, C. A.; VANSNICK, J.-C. Macbeth—an interactive path towards the construction of cardinal value functions. *International transactions in operational Research*, Elsevier, v. 1, n. 4, p. 489–500, 1994. DOI: 10.1016/0969-6016(94)90010-8.
- BARGUEÑO, D. R. et al. State of the art review on the analytic hierarchy process and urban mobility. *Mathematics*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 9, n. 24, p. 3179, 2021. DOI: 10.3390/math9243179.
- BASÍLIO, M. P. et al. A systematic review of the applications of multi-criteria decision aid methods (1977–2022). *Electronics*, MDPI, v. 11, n. 11, p. 1720, 2022. DOI: 10.3390/electronics11111720.
- BENÍTEZ, J. et al. Consistent clustering of entries in large pairwise comparison matrices. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Elsevier, v. 343, p. 98–112, 2018. DOI: 10.1016/j.cam.2018.04.041.
- BERNOULLI, D. Exposition of a new theory on the measurement of risk. In: *The Kelly capital growth investment criterion: Theory and practice*. [S.l.]: World Scientific, 2011. p. 11–24. DOI: 10.1142/9789814293501_0002.
- BRANS, J. P.; MARESCHAL, B. The promethee methods for mcdm; the promcalc, gaia and bankadviser software. In: *Readings in multiple criteria decision aid*. [S.l.]: Springer, 1990. p. 216–252.
- CHEN, J.; LIN, S. An interactive neural network-based approach for solving multiple criteria decision-making problems. *Decision Support Systems*, Elsevier, v. 36, n. 2, p. 137–146, 2003. DOI: 10.1016/S0167-9236(02)00141-0.

- CHEN, J.; LIN, S. A neural network approach-decision neural network (dnn) for preference assessment. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics, Part C (Applications and Reviews)*, IEEE, v. 34, n. 2, p. 219–225, 2004. DOI: 10.1109/TSMCC.2003.819703.
- CHU, P.; LIU, J. K.-H. Note on consistency ratio. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 35, n. 9-10, p. 1077–1080, 2002. DOI: 10.1016/S0895-7177(02)00072-9.
- DEB, K.; SRINIVASAN, A. Innovization: Innovating design principles through optimization. In: *Proceedings of the 8th annual conference on Genetic and evolutionary computation*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 1629–1636. DOI: 10.1145/1143997.1144266.
- DOMINGOS, P. A few useful things to know about machine learning. *Communications of the ACM*, ACM New York, NY, USA, v. 55, n. 10, p. 78–87, 2012. DOI: 10.1145/2347736.2347755.
- DWEIRI, F. et al. Designing an integrated ahp based decision support system for supplier selection in automotive industry. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 62, p. 273–283, 2016. DOI: 10.1016/j.eswa.2016.06.030.
- EMROUZNEJAD, A.; MARRA, M. The state of the art development of ahp (1979–2017): A literature review with a social network analysis. *International journal of production research*, Taylor & Francis, v. 55, n. 22, p. 6653–6675, 2017. DOI: 10.1080/00207543.2017.1334976.
- FERREIRA, J. C. et al. Methodology to select solutions for multiobjective optimization problems: Weighted stress function method. *Journal of Multi-Criteria Decision Analysis*, Wiley Online Library, v. 24, n. 3-4, p. 103–120, 2017. DOI: 10.1002/mcda.1610.
- FÜRNKRANZ, J.; HÜLLERMEIER, E. Preference learning. In: _____. *Preference Learning*. [S.l.]: Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2010. p. 1–456. ISBN 978-3-642-14124-9. DOI: 10.1007/978-3-642-14125-6.
- FÜRNKRANZ, J.; HÜLLERMEIER, E. Preference learning. In: SAMMUT, C.; WEBB, G. I. (Ed.). *Encyclopedia of Machine Learning*. Boston, MA: Springer US, 2010. p. 789–795. ISBN 978-0-387-30164-8. DOI: 10.1007/978-0-387-30164-8_662.
- FÜRNKRANZ, J.; HÜLLERMEIER, E. Preference learning and ranking by pairwise comparison. In: *Preference learning*. [S.l.]: Springer, 2010. p. 65–82. DOI: 10.1007/978-3-642-14125-6_4.
- FÜRNKRANZ, J.; HÜLLERMEIER, E. *Preference Learning: A Tutorial Introduction*. [S.l.]: Fourteenth International Conference on Discovery Science (DS 2011), 2011.
- GARÓFALO, G. d. L.; CARVALHO, L. C. P. d. *Teoria microeconômica*. [S.l.]: Atlas, 1985.
- GROOTENDORST, M. *9 Distance Measures in Data Science*. 2021. Último acesso em 08-03-2023. Disponível em: <<https://www.maartengrootendorst.com/blog/distances/>>.
- HO, W. Integrated analytic hierarchy process and its applications—a literature review. *European Journal of operational research*, Elsevier, v. 186, n. 1, p. 211–228, 2008. DOI: 10.1016/j.ejor.2007.01.004.

- HÜLLERMEIER, E.; FÜRNKRANZ, J. *Preference learning and ranking*. [S.l.]: Springer, 2013. 185–189 p. DOI: 10.1007/s10994-013-5414-z.
- ISERN, D.; VALLS, A.; MORENO, A. Learning the user's preferences for multiple criteria ranking. In: *Proc of XIII congreso Español sobre tecnologías y lógica fuzzy, ESTYLF*. [S.l.: s.n.], 2006. p. 325–330.
- ISHIZAKA, A. Clusters and pivots for evaluating a large number of alternatives in ahp. *Pesquisa Operacional*, SciELO Brasil, v. 32, n. 1, p. 87–102, 2012. DOI: 10.1590/S0101-74382012005000002.
- ISLAM, R.; ABDULLAH, N. A. Management decision-making by the analytic hierarchy process: a proposed modification for large-scale problems. *Journal for International Business and Entrepreneurship Development*, Inderscience Publishers, v. 3, n. 1-2, p. 18–40, 2006. DOI: 10.1504/JIBED.2006.011949.
- ISLAM, R.; BISWAL, M.; ALAM, S. Clusterization of alternatives in the analytic hierarchy process. *Military Operations Research*, JSTOR, p. 69–78, 1997. DOI: jstor.org/stable/43940741.
- KANNAN, B.; KRAMER, S. N. An augmented lagrange multiplier based method for mixed integer discrete continuous optimization and its applications to mechanical design. *Journal of Mechanical Design*, v. 116, n. 2, p. 405–411, 1994. DOI: 10.1115/1.2919393.
- KENDALL, M. G. A New Measure of Rank Correlation. *Biometrika*, v. 30, p. 81–93, 1938. DOI: 10.2307/2332226.
- KOCZKODAJ, W. W. et al. On normalization of inconsistency indicators in pairwise comparisons. *International Journal of Approximate Reasoning*, Elsevier, v. 86, p. 73–79, 2017. DOI: 10.1016/j.ijar.2017.04.005.
- KOCZKODAJ, W. W.; SZYBOWSKI, J. Pairwise comparisons simplified. *Applied Mathematics and Computation*, Elsevier, v. 253, p. 387–394, 2015. DOI: 10.1016/j.amc.2014.12.069.
- KOCZKODAJ, W. W.; SZYBOWSKI, J. The limit of inconsistency reduction in pairwise comparisons. *International Journal of Applied Mathematics and Computer Science*, Sciendo, v. 26, n. 3, p. 721–729, 2016. DOI: 10.1515/amcs-2016-0050.
- KOCZKODAJ, W. W.; URBAN, R. Axiomatization of inconsistency indicators for pairwise comparisons. *International Journal of Approximate Reasoning*, Elsevier, v. 94, p. 18–29, 2018. DOI: 10.1016/j.ijar.2017.12.001.
- KONG, F.; LIU, H. An improvement on saaty's ahp. In: SPRINGER. *IFIP International Conference on Artificial Intelligence Applications and Innovations*. [S.l.], 2005. p. 301–312.
- KUŁAKOWSKI, K.; SZYBOWSKI, J.; PRUSAK, A. Towards quantification of incompleteness in the pairwise comparisons methods. *International Journal of Approximate Reasoning*, Elsevier, v. 115, p. 221–234, 2019. DOI: 10.1016/j.ijar.2019.10.002.
- KUO, T. An ordinal consistency indicator for pairwise comparison matrix. *Symmetry*, MDPI, v. 13, n. 11, p. 2183, 2021. DOI: 10.3390/sym13112183.

LEAL, J. E. Ahp-express: A simplified version of the analytical hierarchy process method. *MethodsX*, Elsevier, v. 7, p. 100748, 2020. DOI: 10.1016/j.mex.2019.11.021.

LIM, K. H.; SWENSETH, S. R. An iterative procedure for reducing problem size in large scale ahp problems. *European Journal of Operational Research*, Elsevier, v. 67, n. 1, p. 64–74, 1993.

LIN, C.; KOU, G.; ERGU, D. An improved statistical approach for consistency test in ahp. *Annals of Operations Research*, Springer, v. 211, n. 1, p. 289–299, 2013. DOI: 10.1007/s10479-013-1413-5.

MAIA, W. et al. Evaluation of operational risk in power substations and its rational reduction on the basis of multicriteria allocating resources. *IEEE Access*, IEEE, v. 9, p. 149383–149397, 2021. DOI: 10.1109/ACCESS.2021.3124529.

MELNIKOV, V. et al. Pairwise versus pointwise ranking: A case study. *Schedae Informaticae*, Portal Czasopism Naukowych Ejournal, v. 25, p. 73–83, 2016. DOI: 10.4467/20838476SI.16.006.6187.

MENDONÇA, G. H. et al. Multi-attribute decision making applied to financial portfolio optimization problem. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 158, p. 113527, 2020. DOI: 10.1016/j.eswa.2020.113527.

MENEGHINI, I. R. et al. Scalable and customizable benchmark problems for many-objective optimization. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 90, p. 106139, 2020. DOI: 10.1016/j.asoc.2020.106139.

MENEGHINI, I. R. et al. Incorporation of region of interest in a decomposition-based multi-objective evolutionary algorithm. In: *Advances in Evolutionary and Deterministic Methods for Design, Optimization and Control in Engineering and Sciences*. [S.l.]: Springer, 2021. p. 35–50. DOI: 10.1007/978-3-030-57422-2_3.

MOSAVI, A. The large scale system of multiple criteria decision making; pre-processing. *IFAC Proceedings Volumes*, Elsevier, v. 43, n. 8, p. 354–359, 2010. DOI: 10.3182/20100712-3-FR-2020.00060.

MOSCATI, I. *History of Utility Theory*. 1. ed. [S.l.]: Routledge, 2021. ISBN 9781315739793.

MOUSSEAU, V. *Preference elicitation for MCDA: An Introduction*. COST, 2008. “Online. Acessado em 16-08-2022”. Disponível em: www.lamsade.dauphine.fr/~projet_cost/ALGORITHMIC_DECISION_THEORY/html/mousseau.html.

MUNIER, N.; HONTORIA, E. et al. *Uses and Limitations of the AHP Method*. [S.l.]: Springer, 2021. 1–130 p. DOI: 10.1007/978-3-030-60392-2.

NEUMANN, J. V.; MORGENSTERN, O. *Theory of games and economic behavior*. [S.l.]: Princeton university press, 2007. DOI: 10.1515/9781400829460.

NICHOLSON, W.; SNYDER, C. M. *Microeconomic theory: Basic principles and extensions*. 10. ed. [S.l.]: Cengage Learning, 2012.

OLIVEIRA, B. A. S. et al. Cml-cardio: a cascade machine learning model to predict cardiovascular disease risk as a primary prevention strategy. *Medical & Biological Engineering & Computing*, Springer, p. 1–17, 2023. DOI: 10.1007/s11517-022-02757-z.

- PANT, S. et al. Consistency indices in analytic hierarchy process: A review. *Mathematics*, MDPI, v. 10, n. 8, p. 1206, 2022. DOI: 10.3390/math10081206.
- PARETO, V. *Pareto - Manual De Economia Politica*. [S.l.]: Nova Cultural, 1998. ISBN 8513001465 / 978-8513001462.
- PEDREGOSA, F. et al. Scikit-learn: Machine learning in python. *the Journal of machine Learning research*, JMLR.org, v. 12, p. 2825–2830, 2011.
- PEDRO, L. R.; TAKAHASHI, R. H. Modelling the decision-maker utility function through artificial neural networks. In: *Anais do IX Congresso Brasileiro de Redes Neurais/Inteligência Computacional (IX CBRN)*. [S.l.: s.n.], 2009. v. 1, p. 550–563.
- PEDRO, L. R.; TAKAHASHI, R. H. Modeling decision-maker preferences through utility function level sets. In: SPRINGER. *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. [S.l.], 2011. p. 550–563. DOI: 10.1007/978-3-642-19893-9_38.
- PEDRO, L. R.; TAKAHASHI, R. H. Inspm: An interactive evolutionary multi-objective algorithm with preference model. *Information Sciences*, Elsevier, v. 268, p. 202–219, 2014. DOI: 10.1016/j.ins.2013.12.045.
- PEDRO, L. R.; TAKAHASHI, R. H. C.; GASPAR-CUNHA, A. A model for a human decision-maker in a polymer extrusion process. In: SPRINGER. *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*. [S.l.], 2015. p. 358–372. DOI: 10.1007/978-3-319-15892-1_24.
- PERLOFF, J. M. *Microeconomics: Theory and Applications with Calculus*. 15. ed. [S.l.]: Pearson Addison-Wesley, 2019. 689 p. ISBN 9780135183779.
- PIGOZZI, G.; TSOUKIAS, A.; VIAPPIANI, P. Preferences in artificial intelligence. *Annals of Mathematics and Artificial Intelligence*, Springer, v. 77, n. 3, p. 361–401, 2016. DOI: 10.1007/s10472-015-9475-5.
- QOMARIYAH, N. N.; KAZAKOV, D.; FAJAR, A. N. Predicting user preferences with xgboost learning to rank method. In: IEEE. *3rd International Seminar on Research of Information Technology and Intelligent Systems (ISRITI)*. Yogyakarta, Indonesia, 2020. p. 123–128. DOI: 10.1109/ISRITI51436.2020.9315494.
- REZAEI, J. Best-worst multi-criteria decision-making method. *Omega*, Elsevier, v. 53, p. 49–57, 2015. DOI: 10.1016/j.omega.2014.11.009.
- ROY, B. Classement et choix en présence de points de vue multiples. *Revue française d'informatique et de recherche opérationnelle*, EDP Sciences, v. 2, n. 8, p. 57–75, 1968.
- RUSSO, R. F.; CAMANHO, R. Criteria in ahp: a systematic review of literature. *Procedia Computer Science*, Elsevier, v. 55, p. 1123–1132, 2015. DOI: 10.1016/j.procs.2015.07.081.
- SAATY, T. L. A scaling method for priorities in hierarchical structures. *Journal of mathematical psychology*, Elsevier, v. 15, n. 3, p. 234–281, 1977. DOI: 10.1016/0022-2496(77)90033-5.
- SAATY, T. L. What is the analytic hierarchy process? In: *Mathematical models for decision support*. [S.l.]: Springer, 1988. p. 109–121.

- SAATY, T. L. Decision Making with the Analytic Hierarchy Process. *International Journal of Services Sciences*, v. 1, n. 1, p. 83–98, 2008. DOI: 10.1504/IJSSci.2008.01759.
- SAATY, T. L. *Mathematical principles of decision making (Principia mathematica decernendi)*. [S.l.]: RWS publications, 2010.
- SAATY, T. L. Analytic heirarchy process. *Wiley statsRef: Statistics reference online*, Wiley Online Library, 2014.
- SAKHARDANDE, M. J.; GAONKAR, R. S. P. On solving large data matrix problems in fuzzy ahp. *Expert Systems with Applications*, Elsevier, v. 194, p. 116488, 2022. DOI: 10.1016/j.eswa.2021.116488.
- SALVATORE, D. *Microeconomics: theory and applications*. [S.l.]: Oxford University Press, 2003. ISBN 019513995X.
- SATTY, T. L. Decision making with dependence and feedback: The analytic network process. *RWS Publication*, 1996.
- SCHWARTZ, B. *The paradox of choice: Why more is less*. [S.l.]: Harper Collins Publishers, 2004. ISBN: 978-0-06-146158-3.
- SILVA, L. N.; SOUZA, N. K.; ALVES, M. A. Análise multicritério para escolha do serviço de transporte em uma transportadora de pequeno porte. *ForScience*, v. 7, n. 2, 2019. DOI: 10.29069/forscience.2019v7n2.e492.
- SILVA, R. F. et al. Deciding a multicriteria decision-making (mcdm) method to prioritize maintenance work orders of hydroelectric power plants. *Energies*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 14, n. 24, p. 8281, 2021. DOI: 10.3390/en14248281.
- SINEK, S. *Comece pelo porquê: Como grandes líderes inspiram pessoas e equipes a agir*. [S.l.]: Sextante, 2018.
- TANABE, R.; ISHIBUCHI, H. An easy-to-use real-world multi-objective optimization problem suite. *Applied Soft Computing*, Elsevier, v. 89, p. 106078, 2020. DOI: 10.1016/j.asoc.2020.106078.
- TEKNOMO, K. Analytic hierarchy process (ahp) tutorial. *Revoledu. com*, v. 6, n. 4, p. 1–20, 2006.
- TORRE, N.; SALOMON, V. Hydraulic supplier selection: An analytic hierarchy process approach. *Economic Policy, Business, and Management in the Post-Pandemic Perspective*, Institute of Economics Polish Academy of Sciences, p. 131, 2023.
- TULJAK-SUBAN, D.; BAJEC, P. Integration of ahp and gtma to make a reliable decision in complex decision-making problems: application of the logistics provider selection problem as a case study. *Symmetry*, Multidisciplinary Digital Publishing Institute, v. 12, n. 5, p. 766, 2020. DOI: 10.3390/sym12050766.
- VASCONCELOS, G. R.; MOTA, C. M. d. M. Exploring multicriteria elicitation model based on pairwise comparisons: Building an interactive preference adjustment algorithm. *Mathematical Problems in Engineering*, Hindawi, v. 2019, 2019. DOI: 10.1155/2019/2125740.

- VIRTANEN, P. et al. Scipy 1.0: fundamental algorithms for scientific computing in python. *Nature methods*, Nature Publishing Group, v. 17, n. 3, p. 261–272, 2020. DOI: 10.1038/s41592-019-0686-2.
- WEDLEY, W. C.; SCHONER, B.; TANG, T. S. Starting rules for incomplete comparisons in the analytic hierarchy process. *Mathematical and Computer Modelling*, Elsevier, v. 17, n. 4-5, p. 93–100, 1993. DOI: 10.1016/0895-7177(93)90178-2.
- XU, Z. Goal programming models for obtaining the priority vector of incomplete fuzzy preference relation. *International journal of approximate reasoning*, Elsevier, v. 36, n. 3, p. 261–270, 2004. DOI: 10.1016/j.ijar.2003.10.011.
- YU, D. et al. Analysis of collaboration evolution in ahp research: 1982–2018. *International Journal of Information Technology & Decision Making*, World Scientific, v. 20, n. 01, p. 7–36, 2021. DOI: 10.1142/S0219622020500406.
- ZAVADSKAS, E. K.; TURSKIS, Z.; KILDIENĖ, S. State of art surveys of overviews on mcdm/madm methods. *Technological and economic development of economy*, Taylor & Francis, v. 20, n. 1, p. 165–179, 2014. DOI: 10.3846/20294913.2014.892037.
- ZOLFANI, S. H. et al. The suitability-feasibility-acceptability strategy integrated with bayesian bwm-marcos methods to determine the optimal lithium battery plant located in south america. *Mathematics*, MDPI, v. 10, n. 14, p. 2401, 2022. DOI: 10.3390/math10142401.
- ZYOD, S. H.; FUCHS-HANUSCH, D. A bibliometric-based survey on ahp and topsis techniques. *Expert systems with applications*, Elsevier, v. 78, p. 158–181, 2017. DOI: 10.1016/j.eswa.2017.02.016.

ÍNDICE REMISSIVO

AHP, 36
aprendizado de preferências, 29
comparações pareadas, 36
critérios, 33
eigen vector, 39
elicitação das preferências, 25
função de classificação, 31
função de perda, 29
função de utilidade, 28
índice aleatório, 39
índice de consistência, 39
instance label, 31
label ranking, 31
Learning to Rank, 32
matriz de decisão, 36
modelagem de preferências, 30
modelos listwise, 32
modelos pairwise, 32
modelos pointwise, 32
object ranking, 31
preferências do usuário, 29
problema de regressão, 30
problemas de ranking, 29
relações de preferência, 26
utilidade, 27