

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Escola de Engenharia**  
**Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas**

Gabriela Marinho Fonseca

**ESTIMADORES DE ERRO *A POSTERIORI* E ESTRATÉGIAS ADAPTATIVAS  
PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS COM  
ENRIQUECIMENTO GLOBAL-LOCAL APLICADO A PROBLEMAS DA  
MECÂNICA DA FRATURA**

Belo Horizonte  
2023

Gabriela Marinho Fonseca

**ESTIMADORES DE ERRO *A POSTERIORI* E ESTRATÉGIAS ADAPTATIVAS  
PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS COM  
ENRIQUECIMENTO GLOBAL-LOCAL APLICADO A PROBLEMAS DA  
MECÂNICA DA FRATURA**

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos necessários à obtenção do título de “Doutora em Engenharia de Estruturas”.

Orientador: Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros

Belo Horizonte

2023

F676e

Fonseca, Gabriela Marinho.

Estimadores de erro *a posteriori* e estratégias adaptativas para o método dos elementos finitos generalizados com enriquecimento global-local aplicado a problemas da mecânica da fratura [recurso eletrônico] / Gabriela Marinho Fonseca. - 2023.

1 recurso online (201 f. : il., color.) : pdf.

Orientador: Felício Bruzzi Barros.

Tese (doutorado) Universidade Federal de Minas Gerais, Escola de Engenharia.

Bibliografia: f. 191-201.

Exigências do sistema: Adobe Acrobat Reader.

1. Engenharia de estruturas - Teses. 2. Método dos elementos finitos - Teses. 3. Mecânica da fratura - Teses. 4. Métodos numéricos - Teses. 5. Métodos de simulação - Teses. I. Barros Felício Bruzzi. II. Universidade Federal de Minas Gerais. Escola de Engenharia. III. Título.

CDU: 624(043)



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS



PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS



**ATA DA DEFESA DE TESE DE DOUTORADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS Nº:  
93 DA ALUNA GABRIELA MARINHO FONSECA**

Às **13:00** horas do dia **12** do mês de **maio** de **2023**, reuniu-se em ambiente virtual, na Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais - UFMG, a Comissão Examinadora indicada pelo Colegiado do Programa em **05 de maio de 2023**, para julgar a defesa da Tese de Doutorado intitulada "**Estimadores de Erro a Posteriori e Estratégias Adaptativas para o Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local Aplicado a Problemas da Mecânica da Fratura**", cuja aprovação é um dos requisitos para a obtenção do Grau de DOUTOR EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS na área de ESTRUTURAS.

Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, **Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros**, após dar a conhecer aos presentes o teor das Normas Regulamentares passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores, com a respectiva defesa do candidato. Logo após, a Comissão se reuniu, sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final.

**Prof. Dr. Felício Bruzzi Barros - DEES - UFMG (Orientador)**

**Prof. Dr. Roque Luiz da Silva Pitangueira - DEES - UFMG**

**Prof. Dr. Samuel Silva Penna - DEES - UFMG**

**Prof. Dr. Sergio Persival Baroncini Proença - EESC - USP**

**Prof. Dr. Rafael Marques Lins - Instituto Tecnológico de Aeronáutica**

Após reunião, a Comissão considerou o candidato **APROVADO**, conforme pareceres em anexo.

O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ATA, que será assinada por todos os membros participantes da Comissão Examinadora.

Belo Horizonte, 12 de julho de 2023.

Observações:

1. A aprovação do candidato na defesa da Tese de Doutorado não significa que o mesmo tenha cumprido todos os requisitos necessários para obtenção do Grau de Doutor em Engenharia de Estruturas;

- Este documento não terá validade sem a assinatura do Coordenador do Programa de Pós-Graduação.



Documento assinado eletronicamente por **Felicio Bruzzi Barros, Professor do Magistério Superior**, em 12/07/2023, às 16:40, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Samuel Silva Penna, Professor do Magistério Superior**, em 12/07/2023, às 16:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Sergio Persival Baroncini Proenca, Usuário Externo**, em 12/07/2023, às 16:41, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Roque Luiz da Silva Pitangueira, Professor do Magistério Superior**, em 12/07/2023, às 16:42, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Rafael Marques Lins, Usuário Externo**, em 12/07/2023, às 16:45, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



Documento assinado eletronicamente por **Leandro Lopes da Silva, Subcoordenador(a)**, em 14/08/2023, às 09:34, conforme horário oficial de Brasília, com fundamento no art. 5º do [Decreto nº 10.543, de 13 de novembro de 2020](#).



A autenticidade deste documento pode ser conferida no site [https://sei.ufmg.br/sei/controlador\\_externo.php?acao=documento\\_conferir&id\\_orgao\\_acesso\\_externo=0](https://sei.ufmg.br/sei/controlador_externo.php?acao=documento_conferir&id_orgao_acesso_externo=0), informando o código verificador **2439244** e o código CRC **02CBAFF3**.

*À Olga, minha amada afilhada.*

# Agradecimentos

Gostaria de expressar meus sinceros agradecimentos a todas as pessoas que contribuíram, de diferentes formas, para a realização deste trabalho.

Em primeiro lugar, agradeço à minha família (em especial aos meus pais Geraldo e Jussara), pelo apoio incondicional, amor e incentivo à distância durante toda a minha longa jornada acadêmica. Sem eles, certamente não teria chegado até aqui.

Também agradeço ao meu orientador, professor Felício, pela orientação atenciosa e pelo incentivo constante ao longo deste trabalho. Mesmo durante os difíceis tempos de pandemia, não faltou dedicação à minha pesquisa e ao meu novo caminho como professora. Após dez anos como sua aluna e orientanda, o professor Felício segue sendo o meu maior exemplo profissional.

Ao meu namorado, João, agradeço pela paciência, compreensão e pelo carinho sempre presente em todos os momentos. Sua confiança me fez acreditar em meu trabalho nos (muitos) momentos de crise.

À minha amiga Iara, por torcer por mim como eu jamais poderia imaginar.

Às minhas companheiras de curso Larissa e Lívia, pelos estudos compartilhados e por estarem sempre dispostas a ajudar. Agradeço, também, a todos os colegas que me antecederam no grupo de pesquisa INSANE.

Aos professores da UFMG, em especial aos professores Roque e Samuel, pelas aulas excepcionais e por contribuírem para o meu crescimento como pesquisadora e professora.

Por fim, agradeço a todos os meus alunos, cuja presença em minha vida acadêmica tem sido enriquecedora e inspiradora.

# Resumo

O Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento global-local (MEFG<sup>gl</sup>) tem se consolidado, nos últimos anos, como importante ferramenta para a solução de problemas contendo descontinuidades e/ou singularidades. Sua formulação se baseia na decomposição da solução em duas escalas de análise: uma escala grosseira (global), buscando representar a parcela suave da solução, e uma escala refinada (local), na qual são inseridas as particularidades do problema estudado. Apesar dos avanços já alcançados na aplicação desse método numérico, verificam-se lacunas no que diz respeito ao controle dos erros da simulação. Nesse sentido, o presente trabalho propõe, pela primeira vez, estimadores de erro *a posteriori* e procedimentos adaptativos para o MEFG<sup>gl</sup>, aplicados a problemas bidimensionais da Mecânica da Fratura Linear Elástica. Formulam-se medidas de erro nas duas escalas de análise (problema local e problema global), tendo como base a norma energia e, ainda, um estimador orientado ao objetivo especialmente concebido para o fator de intensidade de tensão. Tais medidas são empregadas em procedimentos adaptativos com o objetivo de aprimorar a solução aproximada e diminuir a dependência em relação ao usuário do sistema computacional. As simulações numéricas são desenvolvidas no sistema *INSANE* (*INteractive Structural ANalysis Environment*), um projeto de *software* livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais.

Palavras-Chave: método dos elementos finitos generalizados; enriquecimento global-local; estimador de erro *a posteriori*; adaptatividade; mecânica da fratura linear elástica.



# Abstract

The Generalized Finite Element Method with global-local enrichments (GFEM<sup>gl</sup>) has been consolidated, in recent years, as an important tool for solving problems containing discontinuities and singularities. The formulation is based on a two-scale decomposition of the solution: a coarse scale (global), capable of representing the smooth component of the solution, and a fine scale (local), where the special features of the problem are inserted. Despite the advances in the application of this numerical method, there is a lack of studies concerning approximation errors. Therefore, the present work proposes, for the first time, a posteriori error estimators and adaptive procedures for the GFEM<sup>gl</sup>, considering two-dimensional Linear Elastic Fracture Mechanics problems. Error measures are formulated in the two solution scales (local and global problems) based on the energy norm and, additionally, a goal-oriented error estimator specially designed for the stress intensity factors. These measures are employed in adaptive procedures to improve the approximate solution and reduce the dependence on the user of the computational platform. The numerical simulations are performed in INSANE (*INteractive Structural ANalysis Environment*), a free software project developed at the Department of Structural Engineering of the Federal University of Minas Gerais.

Keywords: generalized finite element method; global-local enrichment; a-posteriori error estimator; adaptivity; linear elastic fracture mechanics.

# Lista de Figuras

2.1	Sistema de coordenadas associado às funções de singularidade (Equação (2.20)), com a trinca representada em vermelho. . . . .	41
2.2	Estratégia do $\text{MEFG}^{\text{gl}}$ para um problema da Mecânica da Fratura. Os nós enriquecidos com a solução do problema local são destacados em amarelo. A presença da trinca no problema global inicial é meramente ilustrativa. . . . .	44
2.3	Ilustração da estratégia de ciclos global-local para um problema da Mecânica da Fratura. . . . .	47
2.4	Domínio local $\Omega_L$ e subdomínio $\Omega_L^\delta$ (Gupta, Kim e Duarte, 2012). . . . .	48
2.5	Zona de enriquecimento (em verde) e zona <i>buffer</i> (em amarelo) sobre um problema local genérico, cujo contorno é destacado em vermelho. . . . .	49
4.1	Problema A: chapa contendo uma trinca de borda, na qual se impõe a solução exata como condições de contorno de Neumann. . . . .	92
4.2	Problema B: chapa contendo uma trinca de borda em modo I de abertura, com $a = 3, 5$ , $B = 7, 0$ e $H = 16, 0$ (em unidades consistentes.) . . . . .	93
4.3	Problema C: chapa contendo uma trinca de borda em modo misto de abertura, com $a = 3, 5$ , $B = 7, 0$ e $H = 16, 0$ (em unidades consistentes). . . . .	94
5.1	Domínios locais (em azul) localizados sobre a malha global (em cinza). Os nós globais enriquecidos com as funções global-local são destacados em amarelo. (a) Domínio local sem zona <i>buffer</i> . (b) Domínio local com zona <i>buffer</i> . . . . .	100
5.2	Nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Domínio local sem zona <i>buffer</i> , (b) Domínio local com zona <i>buffer</i> . . . . .	101
5.3	Resultados do $\text{MEFG}^{\text{gl}}$ para as medidas de erro nos problemas local e global enriquecido, considerando as três configurações de condições de contorno. . . . .	102

5.4	Resultados do <b>MEFG-E<sup>gl</sup></b> para as medidas de erro nos problemas local e global enriquecido considerando as três configurações de condições de contorno. . . . .	103
5.5	Domínios locais <b>topológicos</b> (em azul) localizados sobre a malha global (em cinza). (a) Malha $10 \times 10$ , (b) Malha $20 \times 20$ e (c) Malha $40 \times 40$ . . . . .	105
5.6	Domínios locais <b>geométricos</b> (em azul) localizados sobre a malha global (em cinza). (a) Malha $10 \times 10$ , (b) Malha $20 \times 20$ e (c) Malha $40 \times 40$ . . . . .	106
5.7	Domínios locais <b>topológicos</b> : Nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Malha $10 \times 10$ , (b) Malha $20 \times 20$ e (c) Malha $40 \times 40$ . Figuras fora de escala entre si. . . . .	106
5.8	Domínios locais <b>geométricos</b> : Nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Malha $10 \times 10$ , (b) Malha $20 \times 20$ e (c) Malha $40 \times 40$ . . . . .	106
5.9	Convergência dos erros exato e estimado no problema global enriquecido, considerando a sequência de 3 malhas globais. (a) <b>MEFG-<sup>gl</sup></b> e (b) <b>MEFG-E<sup>gl</sup></b> . As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. “NGL” se refere ao número de graus de liberdade do problema global enriquecido. Eixos $x$ e $y$ em escala logarítmica. . . . .	108
5.10	Índice de efetividade ( $\theta_G$ ) do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido, considerando a sequência de 3 malhas globais. As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. “NGL” se refere ao número de graus de liberdade do problema global enriquecido. Eixo $x$ em escala logarítmica. . . . .	109
5.11	Distribuição dos erros exato e estimado por elemento, considerando cada uma das três malhas globais. <b>Resultados do MEFG<sup>gl</sup></b> obtidos no quarto ciclo global-local. . . . .	110
5.12	Distribuição dos erros exato e estimado por elemento, considerando cada uma das três malhas globais. <b>Resultados do MEFG-E<sup>gl</sup></b> obtidos no quarto ciclo global-local. . . . .	111

5.13	Índices de efetividade do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido ao longo dos ciclos global-local, para cada uma das três malhas globais. <b>Resultados do MCFG<sup>gl</sup></b> . As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. Na Malha $10 \times 10$ , os modelos topológico e geométrico são idênticos. . . . .	112
5.14	Índices de efetividade do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido ao longo dos ciclos global-local, para cada uma das três malhas globais. <b>Resultados do MCFG-E<sup>gl</sup></b> . As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. Na Malha $10 \times 10$ , os modelos topológico e geométrico são idênticos. . . . .	113
5.15	Erros exato e estimado por elemento, ao longo dos quatro ciclos global-local, obtidos na Malha 20x20 com domínio local geométrico. <b>Resultados do MCFG<sup>gl</sup></b> . . . . .	114
5.16	Erros exato e estimado por elemento, ao longo dos quatro ciclos global-local, obtidos na Malha 20x20 com domínio local geométrico. <b>Resultados do MCFG-E<sup>gl</sup></b> . . . . .	115
5.17	Convergência dos erros exato e estimado na norma energia do problema local, considerando a sequência de 3 malhas globais. (a) <b>MCFG-<sup>gl</sup></b> e (b) <b>MCFG-E<sup>gl</sup></b> . As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. “NGL” se refere ao número de graus de liberdade do problema local. Eixos $x$ e $y$ em escala logarítmica. . . . .	117
5.18	Índices de efetividade ( $\theta$ ) do estimador ZZ-BD no problema local, considerando a sequência de 3 malhas globais. As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. “NGL” representa o número de graus de liberdade do problema local. Eixo $x$ em escala logarítmica. . . . .	119
5.19	Erros exato e estimado por elemento no problema local, considerando os <b>domínios locais topológicos</b> e a solução do MCFG-E <sup>gl</sup> . Figuras fora de escala entre si. . . . .	120
5.20	Erros exato e estimado por elemento no problema local, considerando os <b>domínios locais geométricos</b> e a solução do MCFG-E <sup>gl</sup> . . . . .	121

5.21	Índices de efetividade do estimador ZZ-BD no problema local e no global enriquecido ao longo dos ciclos global-local, em cada uma das três malhas globais. <b>Resultados do MEFG<sup>gl</sup></b> . As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. Na Malha $10 \times 10$ , os modelos topológico e geométrico são idênticos. . . . .	122
5.22	Índices de efetividade do estimador ZZ-BD no problema local e no problema global enriquecido ao longo dos ciclos global-local, em cada uma das três malhas globais. <b>Resultados do MEFG-E<sup>gl</sup></b> . As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. Na Malha $10 \times 10$ , os modelos topológico e geométrico são idênticos. . . . .	123
5.23	Erros exato e estimado por elemento no problema local, considerando a Malha $20 \times 20$ com <b>domínio local topológico</b> e a solução do MEFG-E <sup>gl</sup> . . .	124
5.24	Erros exato e estimado por elemento no problema local, considerando a Malha $20 \times 20$ com <b>domínio local geométrico</b> e a solução do MEFG-E <sup>gl</sup> . . .	125
5.25	Domínios locais <b>topológicos</b> com enriquecimento mínimo: nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Malha $10 \times 10$ , (b) Malha $20 \times 20$ e (c) Malha $40 \times 40$ . Figuras fora de escala entre si. . . . .	126
5.26	Domínios locais <b>geométricos</b> com enriquecimento mínimo: nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Malha $10 \times 10$ , (b) Malha $20 \times 20$ e (c) Malha $40 \times 40$ . . . . .	126
6.1	Contorno de integração $\Gamma$ , raio $r$ , vetor unitário normal $\mathbf{n}$ e eixos locais $x_1$ e $x_2$ associados à Integral J e à Integral de Interação. . . . .	130
6.2	(a) Em verde, os elementos que compõem o domínio $A$ para a integral de interação definida por um raio $r$ . (b) Em amarelo, os elementos nos quais as derivadas da função $q$ assumem valores diferentes de zero. . . . .	131
6.3	Sequência de malhas adotada para o estudo do estimador orientado ao objetivo no MEFG. (a) Malha $10 \times 10$ , (b) Malha $20 \times 20$ , (c) Malha $40 \times 40$ e (d) Malha $80 \times 80$ . . . . .	137
6.4	Nós enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho) para a Malha $20 \times 20$ . A trinca é representada em azul. . . . .	138
6.5	Malha $10 \times 10$ , $r = 2h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	141

6.6	Malha $20 \times 20$ , $r = 2h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	141
6.7	Malha $40 \times 40$ , $r = 2h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	141
6.8	Malha $80 \times 80$ , $r = 2h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	142
6.9	Erros exato e estimado para os fatores de intensidade de tensão, considerando o problema em modo misto (resultados da Tabela 6.6). Eixos $x$ e $y$ em escala logarítmica. . . . .	144
6.10	Índices de efetividade do estimador para os fatores de intensidade de tensão, considerando o problema em modo misto (resultados da Tabela 6.6). Eixo $x$ em escala logarítmica. . . . .	144
6.11	Malha $10 \times 10$ , $r = 3h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	145
6.12	Malha $20 \times 20$ , $r = 6h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	145
6.13	Malha $40 \times 40$ , $r = 12h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	145
6.14	Malha $80 \times 80$ , $r = 24h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	146
6.15	Erros exato e estimado para os fatores de intensidade de tensão, considerando o problema em modo misto (resultados das Tabelas 6.9 e 6.12). A sigla NGL representa o número de graus de liberdade do problema global enriquecido. Eixos $x$ e $y$ em escala logarítmica. . . . .	152
6.16	Índices de efetividade do estimador para os fatores de intensidade de tensão no problema global enriquecido, considerando a condição de modo misto (resultados das Tabelas 6.9 e 6.12). A sigla NGL representa o número de graus de liberdade do problema global enriquecido. Eixo $x$ em escala logarítmica. . . . .	153
6.17	Malha $10 \times 10$ , <b>MEFG</b> <sup>gl</sup> : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	153
6.18	Malha $20 \times 20$ , <b>MEFG</b> <sup>gl</sup> : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	154
6.19	Malha $40 \times 40$ , <b>MEFG</b> <sup>gl</sup> : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	154

6.20	Malha $10 \times 10$ , <b>MEFG-E<sup>gl</sup></b> : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	154
6.21	Malha $20 \times 20$ , <b>MEFG-E<sup>gl</sup></b> : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	155
6.22	Malha $40 \times 40$ , <b>MEFG-E<sup>gl</sup></b> : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de $K_I$ . . . . .	155
6.23	Índices de efetividade do estimador para os fatores de intensidade de tensão no problema global enriquecido, avaliados ao longo dos ciclos global-local, em cada uma das três malhas globais. <b>Resultados do MEFG<sup>gl</sup></b> para o problema em modo misto. . . . .	156
6.24	Índices de efetividade do estimador para os fatores de intensidade de tensão no problema global enriquecido, avaliados ao longo dos ciclos global-local, em cada uma das três malhas globais. <b>Resultados do MEFG-E<sup>gl</sup></b> para o problema em modo misto. . . . .	157
6.25	Erro estimado de $K_I$ por elemento na Malha $20 \times 20$ , ao longo dos ciclos global-local. <b>Resultados do MEFG<sup>gl</sup></b> . (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3 e (d) Ciclo 4. . . . .	158
6.26	Erro estimado de $K_I$ por elemento na Malha $20 \times 20$ , ao longo dos ciclos global-local. <b>Resultados do MEFG-E<sup>gl</sup></b> . (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3 e (d) Ciclo 4. . . . .	159
6.27	Malhas globais (em cinza) e domínios locais (em azul) utilizados no Problema B. (a) Malha 1, (b) Malha 2 e (c) Malha 3. . . . .	159
6.28	Domínios locais adotados no Problema B. Nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Malha 1, (b) Malha 2 e (c) Malha 3. . . . .	160
6.29	Valores aproximado e corrigido de $K_I$ em função do número de graus de liberdade do problema global enriquecido (NGL) no Problema B. . . . .	161
6.30	Valores aproximado e corrigido dos fatores de intensidade de tensão em função do número de graus de liberdade do problema global enriquecido (NGL) no Problema C. . . . .	163
7.1	Ilustração do processo de <b>adaptatividade-e</b> em um problema local genérico. Os nós enriquecidos com funções de singularidade são destacados com círculos vermelhos. Já os nós selecionados pelos indicadores de erro em cada ciclo (listas $\{\mathcal{N}_s^2\}$ e $\{\mathcal{N}_s^3\}$ ) são destacados com quadrados verdes. . . . .	168

7.2	Discretização inicial do problema local adotada no Problema A - Modo Misto. Nós locais enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. . . . .	169
7.3	Nós locais enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho) a cada ciclo global-local com a adaptatividade-e no Problema A - Modo Misto. A trinca é representada em azul. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (c) Ciclo 4 e (d) Ciclo 5. . . . .	172
7.4	Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local <b>com</b> a adaptatividade-e no Problema A - Modo Misto. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5. . . . .	173
7.5	Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local <b>sem</b> a adaptatividade-e no Problema A - Modo Misto. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5. . . . .	174
7.6	Malha global (em cinza) e domínio local topológico (em azul) adotados no Problema B. Os nós globais enriquecidos com as funções global-local são destacados em amarelo. . . . .	175
7.7	Discretização inicial do problema local adotada no Problema B. Nós locais enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. . . . .	175
7.8	Nós locais enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho) a cada ciclo global-local com a adaptatividade-e no Problema B. A trinca é representada em azul. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5. . . . .	176
7.9	Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local <b>com</b> a adaptatividade-e no Problema B. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5. . . . .	177
7.10	Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local <b>sem</b> a adaptatividade-e no Problema B. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5. . . . .	178
7.11	Nós locais enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho) a cada ciclo global-local com a adaptatividade-e no Problema C. A trinca é representada em azul. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5. . . . .	180



7.12	Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local <b>com</b> a adaptatividade-e no Problema A - Modo Misto. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5. . . . .	180
7.13	Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local <b>sem</b> a adaptatividade-e no Problema C. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5. . . . .	181
7.14	Ilustração do processo de construção do <b>domínio local adaptativo</b> do ciclo $t + 1$ , partindo-se do domínio local do ciclo $t$ , em um problema genérico. Por simplificação, o erro estimado em cada elemento não é representado e as configurações obtidas, portanto, são meramente ilustrativas. . . . .	186
7.15	Ilustração da solução do MEFG <sup>sl</sup> usando <b>modelos locais adaptativos</b> em um problema genérico. Os nós enriquecidos com funções de singularidade são destacados em vermelho. Os nós enriquecidos com as funções global local, por sua vez, são destacados em amarelo. Já os nós selecionados pelos indicadores de erro no problema local (lista $\{N_s^2\}$ são destacados em verde. . . . .	187
7.16	Comparação entre os resultados obtidos com o modelo local mínimo, a adaptatividade-e e o modelo local adaptativo, considerando medidas relacionadas à norma energia. . . . .	190
7.17	Comparação entre os resultados obtidos com o modelo local mínimo, a adaptatividade-e e o modelo local adaptativo, considerando medidas relacionadas aos fatores de intensidade de tensão. Eixo $y$ escala logarítmica na figura (a). . . . .	191
7.18	Domínios locais adaptativos (em azul) e erro estimado na norma energia por elemento no problema global enriquecido, obtidos no Problema A - Modo Misto. . . . .	193
7.19	Nós enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho) e erro estimado na norma energia por elemento, considerando o modelo local adaptativo no Problema A - Modo Misto. A trinca é representada em azul. . . . .	194
7.20	(a) Domínio local geométrico (em azul) sobre a Malha 20x20 (em cinza). (b) Malha local, com nós enriquecidos com as funções de singularidade em vermelho. . . . .	195
7.21	Comparação entre os resultados obtidos com os modelos locais geométrico e adaptativo, considerando medidas relacionadas à norma energia. . . . .	196

7.22	Comparação entre os resultados obtidos com os modelos locais geométrico e adaptativo, considerando medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão. . . . .	197
7.23	Comparação entre o número de graus de liberdade nos problemas local e global enriquecido referentes aos modelos locais geométrico e adaptativo. . .	198
7.24	Comparação entre os resultados obtidos com o modelo local mínimo, a adaptatividade-e e o modelo local adaptativo, no Problema B. Na figura (d), as linhas cheias se referem aos valores aproximados de $K_I$ e as linhas tracejadas aos valores corrigidos ( $K_I^{COR}$ ). . . . .	199
7.25	Domínios locais adaptativos (em azul) e erro estimado na norma energia por elemento no problema global enriquecido, obtidos no Problema B. . .	200
7.26	Nós enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho) e erro estimado na norma energia por elemento no modelo local adaptativo do Problema B. . . . .	200
7.27	Comparação entre os resultados obtidos com os modelos locais geométrico e adaptativo no Problema B. Na figura (d), as linhas cheias se referem aos valores aproximados de $K_I$ e as linhas tracejadas aos valores corrigidos ( $K_I^{COR}$ ). . . . .	201
8.1	Obtenção do novo segmento de trinca no primeiro passo de propagação a partir de $\Delta_c$ e $\theta_c$ . O termo $a_0$ indica o comprimento inicial da trinca. . . .	203
8.2	Ilustração dos dois primeiros passos da <b>propagação automatizada</b> em um problema genérico. Nós enriquecidos com funções de Heaviside em verde, funções de de singularidade em vermelho e funções global-local em amarelo.	206
8.3	Ilustração dos dois primeiros passos da <b>propagação adaptativa</b> em um problema genérico. Nós enriquecidos com funções de Heaviside em verde, funções de de singularidade em vermelho e funções global-local em amarelo. . . . .	207
8.4	Erros de referência de $K_I$ em função do tamanho da trinca ( $a$ ) obtidos ao longo de dez passos de propagação. . . . .	208
8.5	Erros de referência de $K_I$ em função do tamanho da trinca ( $a$ ) obtidos ao longo de dez passos de propagação, com a inclusão da estratégia Adaptativa <sup>+</sup> . . . . .	209
8.6	Número de graus de liberdade no problema global enriquecido e no problema local em função do tamanho $a$ da trinca, considerando as três estratégias da Figura 8.5. . . . .	209

8.7	Domínios locais (em azul) gerados a cada passo $k$ na <b>propagação automatizada</b> . . . . .	210
8.8	Domínios locais (em azul) gerados a cada passo $k$ na <b>propagação adaptativa</b> . . . . .	210
8.9	Erros de referência de $K_I$ e $K_I^{COR}$ em função do tamanho da trinca ( $a$ ) obtidos ao longo de dez passos de propagação. . . . .	211

\*

# Lista de Tabelas

5.1	Índice de efetividade e erros relativo exato e estimado obtidos com <b>domínios locais topológicos + enriquecimento mínimo</b> no problema local . . . . .	127
5.2	Índice de efetividade e erros relativo exato e estimado obtidos com <b>domínios locais topológicos + enriquecimento amplo</b> no problema local . . . . .	127
5.3	Índice de efetividade e erros relativo exato e estimado obtidos com <b>domínios locais geométricos + enriquecimento mínimo</b> no problema local . . . . .	127
5.4	Índice de efetividade e erros relativo exato e estimado obtidos com <b>domínios locais geométricos + enriquecimento amplo</b> no problema local . . . . .	127
6.1	Resultados do MEFG para o Problema A em Modo I de abertura, com $r = 2h$ . . . . .	140
6.2	Resultados do MEFG para o Problema A em Modo II de abertura, com $r = 2h$ . . . . .	140
6.3	Resultados do MEFG para o Problema A em Modo Misto de abertura, com $r = 2h$ . . . . .	140
6.4	Resultados do MEFG para o Problema A em Modo I de abertura, com o aumento do raio $r$ . . . . .	143
6.5	Resultados do MEFG para o Problema A em Modo II de abertura, com o aumento do raio $r$ . . . . .	143
6.6	Resultados do MEFG para o Problema A em Modo Misto de abertura, com o aumento do raio $r$ . . . . .	143
6.7	Resultados do MEFG <sup>gl</sup> para o Problema A em Modo I de abertura. . . . .	149
6.8	Resultados do MEFG <sup>gl</sup> para o Problema A em Modo II de abertura. . . . .	149
6.9	Resultados do MEFG <sup>gl</sup> para o Problema A em Modo Misto de abertura. . . . .	149
6.10	Resultados do MEFG-E <sup>gl</sup> para o Problema A em Modo I de abertura. . . . .	150
6.11	Resultados do MEFG-E <sup>gl</sup> para o Problema A em Modo II de abertura. . . . .	150
6.12	Resultados do MEFG-E <sup>gl</sup> para o Problema A em Modo Misto de abertura. . . . .	150
6.13	Resultados do MEFG <sup>gl</sup> para o Problema B. . . . .	158

6.14	Resultados do MEFG-E <sup>gl</sup> para o Problema B. . . . .	160
6.15	Resultados do MEFG <sup>gl</sup> para o Problema C. . . . .	162
6.16	Resultados do MEFG-E <sup>gl</sup> para o Problema C. . . . .	162
7.1	Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema A - Modo Misto, <b>sem</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	169
7.2	Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema A - Modo Misto, <b>com</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	169
7.3	Resultados obtidos para as medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão no Problema A - Modo Misto, <b>sem</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	171
7.4	Resultados obtidos para as medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão no Problema A - Modo Misto, <b>com</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	171
7.5	Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema B, <b>sem</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	173
7.6	Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema B, <b>com</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	174
7.7	Resultados obtidos para as medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão no Problema B, <b>sem</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	175
7.8	Resultados obtidos para as medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão no Problema B, <b>com</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	176
7.9	Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema C, <b>sem</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	177
7.10	Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema C, <b>com</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	177
7.11	Resultados obtidos para as medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão no Problema C, <b>sem</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	179
7.12	Resultados obtidos para as medidas relacionadas aos fatores de intensidade de tensão no Problema C, <b>com</b> a adaptatividade-e no problema local. . . . .	179
7.13	Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema A - Modo Misto, com o <b>modelo local adaptativo</b> . . . . .	188
7.14	Resultados obtidos para as medidas relacionadas a $K_I$ no Problema A - Modo Misto, com o <b>modelo local adaptativo</b> . . . . .	189
7.15	Resultados obtidos para as medidas relacionadas a $K_{II}$ no Problema A - Modo Misto, com o <b>modelo local adaptativo</b> . . . . .	189

7.16	Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema B, com o <b>modelo local adaptativo</b> . . . . .	198
7.17	Resultados obtidos para as medidas relacionadas no fator de intensidade de tensão no Problema B, com o <b>modelo local adaptativo</b> . . . . .	198

\*

# Lista de Abreviaturas e Siglas

MEF	Método dos Elementos Finitos
MEFG	Método dos Elementos Finitos Generalizados
MEFG <sup>gl</sup>	Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local
MEFG-E	Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável
MEFX	Método dos Elementos Finitos Estendidos
MFLE	Mecânica da Fratura Linear Elástica
<i>INSANE</i>	<i>INteractive Structural ANalysis Environment</i>
PU	Partição da Unidade
<i>SPR</i>	<i>Superconvergent Patch Recovery</i>
<i>SPR-C</i>	<i>Constrained Superconvergent Patch Recovery</i>
<i>SPR<sub>XFEM</sub></i>	<i>eXtended Superconvergent Patch Recovery</i>
<i>XGR</i>	<i>eXtended Global Recovery</i>
<i>XMLS</i>	<i>eXtended Moving Least Squares</i>
ZZ	Zienkiewicz e Zhu
ZZ-BD	Zienkiewicz e Zhu Bloco-Diagonal

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>27</b>
1.1	Motivações . . . . .	27
1.2	A Tese . . . . .	29
1.3	Justificativa . . . . .	31
1.4	Objetivos . . . . .	32
1.5	Organização do Texto . . . . .	32
<b>2</b>	<b>Fundamentação Teórica</b>	<b>34</b>
2.1	Formulação do Problema de Valor de Contorno . . . . .	34
2.1.1	Equações de Equilíbrio e Forma Variacional . . . . .	34
2.1.2	Solução Aproximada . . . . .	36
2.2	Método dos Elementos Finitos Generalizados . . . . .	37
2.2.1	Histórico . . . . .	37
2.2.2	Formulação . . . . .	38
2.2.3	Estimativa de erro <i>a priori</i> . . . . .	39
2.2.4	Funções de enriquecimento para a representação de trincas . . . . .	40
2.2.5	Estratégia Estável . . . . .	41
2.3	Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global- local . . . . .	43
2.3.1	Contextualização . . . . .	43
2.3.2	Formulação . . . . .	44
2.3.3	Ciclos Global-local . . . . .	46
2.3.4	Estimativa de Erro <i>a priori</i> para o Problema Local . . . . .	46
2.3.5	Versão estável . . . . .	50
2.4	Estimadores de Erro <i>a posteriori</i> . . . . .	50
2.4.1	Visão Geral . . . . .	50
2.4.2	Conceitos Básicos das Técnicas de Recuperação . . . . .	52



2.4.3	Estimador ZZ-BD . . . . .	54
2.4.4	Estimadores de Erro Orientados ao Objetivo . . . . .	60
2.5	Adaptatividade . . . . .	64
2.5.1	Visão Geral . . . . .	64
2.5.2	Processo $p$ aplicado ao MEFG . . . . .	66
<b>3</b>	<b>Estado da Arte</b>	<b>68</b>
3.1	Modelagem de Trincas via MEFG <sup>gl</sup> . . . . .	68
3.2	Estimadores de Erro <i>a posteriori</i> para o MEFG . . . . .	73
3.2.1	Estimadores Baseados em Técnicas de Recuperação . . . . .	73
3.2.2	Estimadores Residuais . . . . .	76
3.2.3	Estimadores Orientados ao Objetivo . . . . .	77
3.3	Estratégias Adaptativas para o MEFG . . . . .	78
<b>4</b>	<b>Metodologia</b>	<b>82</b>
4.1	Contexto de Aplicação . . . . .	82
4.2	Estimadores de erro para a norma energia no MEFG <sup>gl</sup> . . . . .	83
4.2.1	Implementação do estimador ZZ-BD e validação no MEFG . . . . .	83
4.2.2	Formulação e validação do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido do MEFG <sup>gl</sup> . . . . .	84
4.2.3	Formulação e validação do estimador ZZ-BD no problema local do MEFG <sup>gl</sup> . . . . .	85
4.3	Estimador para o erro do fator de intensidade de tensão no MEFG <sup>gl</sup> . . . . .	86
4.4	Estratégias adaptativas para o MEFG <sup>gl</sup> : trincas estáticas . . . . .	87
4.4.1	Procedimento Adaptativo para o Problema Local . . . . .	87
4.4.2	Procedimento Adaptativo para o Problema Global . . . . .	89
4.5	Estratégias adaptativas para o MEFG <sup>gl</sup> : propagação de trincas . . . . .	90
4.6	Apresentação dos exemplos numéricos . . . . .	91
4.6.1	Problema A . . . . .	91
4.6.2	Problema B . . . . .	93
4.6.3	Problema C . . . . .	94
4.7	Medidas de Erro Adotadas . . . . .	95
<b>5</b>	<b>Estimadores de Erro para a Norma Energia no MEFG<sup>gl</sup></b>	<b>98</b>
5.1	Condições de Contorno no Problema Local: Uso das Tensões Recuperadas	98
5.1.1	Considerações Iniciais . . . . .	98

5.1.2	Simulações Numéricas . . . . .	99
5.2	Estimador ZZ-BD no Problema Global Enriquecido do MEF <sup>gl</sup> : norma energia . . . . .	104
5.2.1	Considerações Iniciais . . . . .	104
5.2.2	Simulações Numéricas . . . . .	104
5.3	Estimador ZZ-BD no Problema Local do MEF <sup>gl</sup> : norma energia . . . . .	115
5.3.1	Considerações Iniciais . . . . .	115
5.3.2	Simulações Numéricas . . . . .	116
<b>6</b>	<b>Estimador para o Erro do Fator de Intensidade de Tensão no MEF e no MEF<sup>gl</sup></b>	<b>128</b>
6.1	Formulação do Estimador Orientado ao Objetivo . . . . .	128
6.1.1	Considerações Iniciais . . . . .	128
6.1.2	Integral de Interação . . . . .	129
6.1.3	Formulação do Problema Dual . . . . .	132
6.1.4	Obtenção do Erro Estimado para o Fator de Intensidade de Tensão	135
6.2	Validação do estimador no MEF . . . . .	136
6.2.1	Considerações Iniciais . . . . .	136
6.2.2	Simulações Numéricas . . . . .	137
6.3	Validação do estimador no MEF <sup>gl</sup> . . . . .	146
6.3.1	Considerações Iniciais . . . . .	146
6.3.2	Simulações Numéricas . . . . .	147
6.4	Aplicação do Estimador no MEF <sup>gl</sup> : Exemplos Adicionais . . . . .	153
6.4.1	Considerações Iniciais . . . . .	153
6.4.2	Problema B . . . . .	155
6.4.3	Problema C . . . . .	160
<b>7</b>	<b>Estratégias Adaptativas para o MEF<sup>gl</sup></b>	<b>164</b>
7.1	Estratégia Adaptativa para o Erro da Discretização no Problema Local . .	164
7.1.1	Considerações Iniciais . . . . .	164
7.1.2	Descrição da estratégia . . . . .	165
7.1.3	Simulações Numéricas . . . . .	167
7.2	Estratégia Adaptativa para a Seleção de Domínios Locais . . . . .	181
7.2.1	Considerações Iniciais . . . . .	181
7.2.2	Descrição da estratégia . . . . .	182
7.2.3	Combinação com a adaptatividade-e . . . . .	184
7.2.4	Simulações Numéricas . . . . .	185

## SUMÁRIO

<b>8</b>	<b>Estratégia Adaptativa para a Propagação de Trincas via MEFG<sup>gl</sup></b>	<b>202</b>
8.1	Considerações Iniciais . . . . .	202
8.2	Descrição da estratégia . . . . .	203
8.3	Simulações Numéricas . . . . .	205
8.3.1	Considerações Iniciais . . . . .	205
8.3.2	Comparação entre as Estratégias Automatizada e Adaptativa . . .	208
8.3.3	Correção do Fator de Intensidade de Tensão . . . . .	211
<b>9</b>	<b>Considerações Finais</b>	<b>212</b>
9.1	Síntese das principais contribuições . . . . .	212
9.1.1	Uso das tensões recuperadas nas condições de contorno de Cauchy .	212
9.1.2	Estimador de erro para a norma energia no problema global enri- quecido . . . . .	213
9.1.3	Estimador de erro para a norma energia no problema local . . . . .	213
9.1.4	Estimador de erro para o fator de intensidade de tensão . . . . .	214
9.1.5	Estratégias adaptativas para o MEFG <sup>gl</sup> . . . . .	214
9.1.6	Propagação adaptativa . . . . .	215
9.2	Propostas de Trabalhos Futuros . . . . .	216
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>217</b>

# Capítulo 1

## Introdução

### 1.1 Motivações

Componentes estruturais com a presença de trincas são frequentemente encontrados em diversas aplicações de engenharia. Em tais elementos, danos microscópicos podem surgir no material, inicialmente na forma de pequenos defeitos. Em determinadas condições, o dano acumulado pode evoluir para uma trinca ou outro defeito macroscópico capaz de levar à falha do componente. O fenômeno de propagação de trincas é um dos principais temas da Mecânica da Fratura e, no contexto de um projeto estrutural adequado, demanda a adoção de métodos numéricos apropriados.

No atual cenário da Mecânica Computacional, o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG)<sup>1</sup> (Duarte et al., 2000; Strouboulis et al., 2000) tem se consolidado como importante ferramenta para a solução de problemas de fratura. Apesar de não ser considerado um método sem malha, o MEFG compartilha com essas formulações a construção de uma aproximação que busca minimizar a dependência em relação à malha de elementos finitos. Isso é feito através do enriquecimento da aproximação original com funções especiais (funções enriquecedoras) previamente determinadas, com o objetivo de capturar fenômenos particulares do problema analisado. Tal estratégia permite, por exemplo, a modelagem de trincas não conformes à malha, tornando possível o uso de discretizações mais grosseiras em relação ao que se exige no tradicional Método dos Elementos Finitos (MEF).

---

<sup>1</sup>O MEFG e o Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFX) (do inglês, *Extended Finite Element Method (XFEM)*) são tratados neste texto como métodos equivalentes, conforme Belytschko et al. (2009).

Apesar de promover avanços significativos em simulações de propagação de trincas, algumas limitações na formulação do MEF<sup>g</sup> podem dificultar a sua utilização. Uma delas é o uso de funções enriquecedoras expressas analiticamente (funções descontínuas e de singularidade), que podem ser incapazes de fornecer resultados precisos em malhas relativamente grosseiras, especialmente em problemas tridimensionais (Kim et al., 2009). Nesse caso, um refinamento local da malha pode ser demandado – de maneira semelhante ao MEF – contrapondo-se às vantagens da estratégia de enriquecimento. Em simulações de propagação, isso implica na definição de uma malha refinada “o suficiente” ao longo de uma região, possivelmente extensa, na qual o analista espera que a trinca se propague. Tais limitações motivaram o desenvolvimento do chamado Método dos Elementos Finitos Generalizados com enriquecimento global-local (MEFG<sup>gl</sup>) (Duarte e Babuška, 2005), que utiliza funções enriquecedoras numericamente obtidas da solução de um problema de valor de contorno local, construído apenas na região de interesse do problema em questão. Esse problema local recebe como condições de contorno a solução do modelo global (que abrange todo o domínio do problema), em termos de tensões e/ou deslocamentos.

A abordagem do MEF<sup>gl</sup> é bastante vantajosa em problemas da Mecânica da Fratura. A representação direta das trincas pode ser feita apenas no modelo local, sem exigir nenhuma modificação na malha global. A construção numérica das funções de enriquecimento – específicas para o problema analisado – classifica o MEF<sup>gl</sup> como uma forma mais geral do MEF<sup>g</sup>, além de lhe conferir uma natureza multi-escala<sup>2</sup>, capaz modelar fenômenos que sejam significativamente menores do que o tamanho dos elementos empregados na simulação (O’Hara et al., 2016).

Aplicações do MEF<sup>gl</sup> a exemplos de propagação de trincas podem ser encontradas em Pereira et al. (2011), O’Hara et al. (2016) e O’Hara et al. (2015). Ainda que os resultados sejam bastante relevantes, em especial para o cálculo do **fator de intensidade de tensão** – medida que caracteriza completamente as condições na ponta da trinca, assumindo papel central em simulações de propagação de trincas na Mecânica da Fratura Linear Elástica (MFLE) – é possível identificar problemas ainda não solucionados no método, em especial

---

<sup>2</sup>O termo multi-escala é adotado aqui para identificar diferentes níveis de discretização, sem abranger aspectos micromecânicos do material.

no que diz respeito ao controle dos erros da simulação.

Conforme apresentado por Gupta, Kim e Duarte (2012), o erro da aproximação no problema global é limitado pelo erro da solução do problema local. Isso faz com que a qualidade desta solução seja decisiva para a resposta final do MEF<sup>gl</sup>. Nesse mesmo trabalho, os autores desenvolvem uma estimativa de erro *a priori* para o problema local, mostrando a atuação de duas componentes de erro distintas: uma delas se refere ao erro da discretização e a outra compreende o efeito das condições de contorno inexatas, provenientes do problema global. A primeira pode ser controlada pelo refinamento da malha ou pela adição de funções de enriquecimento previamente definidas (como polinômios ou funções de singularidade). A segunda, por sua vez, exige modificações no tamanho do domínio local ou a utilização de uma estratégia iterativa. Apesar de comprovarem a influência desses fatores sobre a precisão dos resultados, as estimativas de erro *a priori* são incapazes de determinar valores “ótimos” para o tamanho e/ou discretização do modelo local, deixando tais escolhas a cargo da experiência do analista, ou mesmo de uma sequência de testes preliminares. Para mitigar essas limitações e, mais ainda, certificar a qualidade da solução aproximada, torna-se necessária a introdução de estimativas *a posteriori*: medidas de erro baseadas em informações extraídas da própria solução (Barros, 2002).

## 1.2 A Tese

O presente trabalho propõe, pela primeira vez, o uso de estimadores de erro *a posteriori* no MEF<sup>gl</sup>, com o objetivo de avaliar e controlar medidas de erro nas duas escalas de análise: problema local e problema global. O estudo é iniciado, naturalmente, com medidas de erro relacionadas à norma energia, valendo-se de um estimador baseado em técnicas de recuperação – derivado da proposta original de Zienkiewicz e Zhu (1987).

Tendo em vista a já mencionada relevância do fator de intensidade de tensão em problemas da MFLE, formula-se, neste trabalho, um estimador de erro especialmente concebido para tal medida. Esse estimador (dito “orientado ao objetivo”) é validado,

inicialmente, para o MEF $G$  e, em seguida, estendido para o problema global enriquecido do MEF $G^{\text{gl}}$ . As estimativas de erro para o fator de intensidade de tensão recebem grande enfoque no texto que se segue, uma vez que representam uma importante contribuição para futuras aplicações do MEF $G^{\text{gl}}$ .

Dada a disponibilidade de um estimador de erro orientado ao objetivo, além das já mencionadas estimativas baseadas na norma energia, desenvolveu-se no âmbito desta investigação uma estratégia adaptativa para o MEF $G^{\text{gl}}$ . Tal estratégia é empregada nas escalas local e global, buscando o aprimoramento mútuo da aproximação nesses dois níveis. Procura-se mostrar, ao longo do texto, como as técnicas adaptativas podem contribuir para o sucesso da análise e também para a diminuição da dependência em relação ao usuário da plataforma computacional.

Finalmente, após um estudo das estratégias adaptativas em problemas contendo trincas estáticas, propõe-se a sua aplicação em um processo incremental de propagação, visando posicionar as técnicas propostas em um contexto mais amplo. Conforme será discutido no Capítulo 8, a abordagem desenvolvida não se conclui em si mesma e representa um primeiro avanço na obtenção de um MEF $G^{\text{gl}}$  adaptativo e computacionalmente eficiente.

Este trabalho foi desenvolvido no sistema computacional *INSANE* (*IN*teractive *Str*uctural *AN*alysis *En*vironment), um *software* livre desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais (Fonseca e Pitangueira, 2007). Esse sistema dispõe, atualmente, de recursos diversos para análise estrutural, incluindo aplicações específicas para o MEF $G$  e o MEF $G^{\text{gl}}$ . As implementações desenvolvidas nesta pesquisa expandiram o núcleo numérico do *INSANE*, incorporando estimadores de erro *a posteriori* e estratégias adaptativas que poderão, futuramente, contribuir para a evolução de outras pesquisas envolvendo o MEF $G^{\text{gl}}$  e, ainda, outros métodos numéricos de análise estrutural.

### 1.3 Justificativa

Conforme discutido na seção 1.1, a estratégia do MEFG<sup>gl</sup> é bastante vantajosa para problemas da Mecânica da Fratura. A representação de trincas no modelo local evita a necessidade de remalhamento/refinamento excessivo no problema global, garantindo maior flexibilidade em relação à abordagem padrão do MEFG. Além disso, diversas publicações (com destaque para os trabalhos de O’Hara et al. (2015) e O’Hara et al. (2016)) confirmam a capacidade do enriquecimento global-local de incorporar descontinuidades no domínio global do problema analisado.

Apesar da consolidação do MEFG<sup>gl</sup>, no meio acadêmico, como ferramenta eficaz para a modelagem da propagação de trincas, observa-se uma lacuna no que se refere ao uso de estimadores de erro *a posteriori* neste método. Com a introdução desses estimadores, torna-se possível contornar limitações como o erro das condições de contorno impostas no modelo local, a determinação do tamanho do problema local e, ainda, a própria discretização desse modelo, conforme se propõe no presente trabalho.

O controle dos erros da simulação, de fato, é essencial para qualquer método numérico. No caso do MEFG<sup>gl</sup>, isso é especialmente evidente no modelo local, onde atuam componentes de erro de diferentes naturezas (conforme será exposto na seção 2.3.4). Além disso, o problema global, em geral, é modelado com uma malha pouco refinada, estando sujeito a elevados níveis de erro. Logo, a concepção de estimadores de erro e de procedimentos adaptativos deve, preferencialmente, envolver as duas escalas de análise.

Em simulações de propagação de trincas – exploradas, com êxito, em diversos trabalhos do MEFG<sup>gl</sup> – exige-se grande precisão para o fator de intensidade de tensão. Em problemas de fadiga, em especial, tal parâmetro é parte fundamental da previsão da vida em fadiga (através de equações como a Lei de Paris (Paris e Erdogan, 1963)), tornando-se essencial no projeto de componentes estruturais submetidos a solicitações cíclicas. Nesse contexto, a disponibilidade de estimadores especialmente formulados para o erro do fator de intensidade de tensão torna o método numérico bastante atrativo.

Por meio dos estimadores de erro e dos procedimentos adaptativos aqui propostos,



pretende-se contribuir para o desenvolvimento do MEFG<sup>gl</sup>, tornando sua aplicação ainda mais vantajosa em problemas da MFLE. Até o presente momento, não se tem notícia da utilização de estimadores de erro *a posteriori* nesse método numérico, sendo conhecidas apenas estimativas *a priori* (como a de Gupta, Kim e Duarte (2012)). Diante desse fato e do que já foi exposto, é válido julgar que a pesquisa proposta é relevante e as estratégias adotadas são originais.

## 1.4 Objetivos

Tendo em vista as premissas discutidas nas seções 1.1-1.3, esta tese objetiva o desenvolvimento de estimadores de erro *a posteriori* e técnicas adaptativas para o MEFG<sup>gl</sup>. Delimita-se a aplicação das estratégias propostas a problemas bidimensionais da MFLE, vislumbrando, futuramente, uma expansão para problemas tridimensionais. Através dos estimadores de erro desenvolvidos e, em especial, da técnica orientada ao objetivo, almeja-se garantir resultados precisos para o fator de intensidade de tensão e contornar algumas limitações identificadas no MEFG<sup>gl</sup>. As propostas adaptativas permitem, ainda, uma redução substancial da interferência do usuário do sistema computacional.

## 1.5 Organização do Texto

Seguindo este capítulo introdutório, apresentam-se, no Capítulo 2, fundamentos teóricos pertinentes ao tema deste trabalho. Discutem-se as formulações do MEFG e do MEFG<sup>gl</sup>, assim como o embasamento teórico dos estimadores de erro utilizados.

No Capítulo 3, é feita uma revisão da literatura contendo um apanhado histórico e o registro de referências relevantes. São discutidos os trabalhos que abordam a propagação de trincas pelo MEFG<sup>gl</sup> e seus respectivos avanços. Em seguida, apresenta-se uma descrição dos estimadores de erro *a posteriori* e das técnicas adaptativas já desenvolvidas para o MEFG.

A metodologia da pesquisa é apresentada no Capítulo 4, no qual se busca introduzir o leitor às etapas de desenvolvimento do trabalho, servindo de preparação para os capítulos

que o sucedem.

No Capítulo 5, apresentam-se a formulação e a validação dos estimadores de erro para a norma energia propostos para o MEF<sup>gl</sup>. Aspectos da aplicação do estimador nos problemas global e local são expostos, juntamente com os resultados de diversas simulações numéricas.

Em seguida, no Capítulo 6, a formulação do estimador orientado ao objetivo é descrita para as abordagens do MEF e do MEF<sup>gl</sup>. A aplicação desse novo estimador sobre o problema global enriquecido do MEF<sup>gl</sup> é avaliada em três exemplos numéricos, considerando diferentes modos de abertura de trinca.

No Capítulo 7, discutem-se as estratégias adaptativas propostas para o MEF<sup>gl</sup>. Apresenta-se, inicialmente, uma proposta para a discretização do modelo local e, em seguida, uma estratégia para a determinação do seu tamanho.

No Capítulo 8, as estratégias adaptativas são expandidas para um exemplo de propagação de trincas. Através desse exemplo, busca-se avaliar as particularidades das simulações de propagação e a viabilidade das estratégias propostas.

Finalmente, no Capítulo 9, são sintetizadas as considerações finais deste trabalho e apontadas sugestões para a continuidade da pesquisa.

No que diz respeito à notação, matrizes e vetores são denotados, respectivamente, por letras maiúsculas ( $\mathbf{A}$ ) e minúsculas ( $\mathbf{f}$ ) em negrito. Escalares, por sua vez, são representados por letras minúsculas simples ( $e$ ). Espaços vetoriais são indicados por letras cursivas maiúsculas ( $\mathcal{H}$ ). Demais notações serão oportunamente definidas.

## Capítulo 2

# Fundamentação Teórica

Neste capítulo, apresentam-se os principais conceitos pertinentes ao tema deste trabalho. Inicialmente, na seção 2.1, apresenta-se a formulação do Problema de Valor de Contorno da elasticidade linear elástica. Na sequência, na seção 2.2, a formulação do MEFG é apresentada. Aspectos da abordagem global-local são registrados na seção 2.3. Quanto ao estudo do erro, abordam-se os estimadores *a posteriori* na seção 2.4. Finalmente, a seção 2.5 se dedica ao tema da adaptatividade.

### 2.1 Formulação do Problema de Valor de Contorno

Esta seção registra algumas definições importantes para a sequência do texto, em especial para a formulação dos métodos numéricos e para o estudo do erro. Apresenta-se o problema bidimensional governado pelas equações da elasticidade linear elástica, para o qual se aplicam as propostas deste trabalho.

#### 2.1.1 Equações de Equilíbrio e Forma Variacional

Para um domínio bidimensional  $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$ , deseja-se encontrar o campo de deslocamentos  $\mathbf{u}$  que satisfaz o seguinte Problema de Valor de Contorno (PVC), sem forças de volume (por simplificação):

$$\begin{cases} \nabla^T \boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{0} \text{ em } \Omega \\ \mathbf{u} = 0 \text{ em } \partial\Omega^D \text{ (homogênea por simplificação)} \\ \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \text{ em } \partial\Omega^N \end{cases} \quad (2.1)$$

sendo:

- $\boldsymbol{\Sigma}$  o tensor de tensões de Cauchy;
- $\partial\Omega^D$  e  $\partial\Omega^N$  os contornos de Dirichlet e de Neumann, respectivamente;
- $\mathbf{n}$  o vetor unitário normal à  $\partial\Omega^N$ ;
- $\bar{\mathbf{t}}$  o vetor de tensões de superfícies prescritas.

A Equação (2.1) define a chamada forma forte do problema, cuja forma variacional associada pode ser representada pelo PVC a seguir:

Encontre  $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$  tal que:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.2)$$

na qual  $\mathcal{V}$  é um espaço de funções – contido no espaço de Hilbert  $\mathcal{H}^1(\Omega)$  – que atende às condições de contorno de Dirichlet homogêneas:

$$\mathcal{V} = \{\mathbf{v} \in \mathcal{H}^1(\Omega) : \mathbf{v} = \mathbf{0} \text{ em } \partial\Omega^D\} \quad (2.3)$$

e  $B$  e  $l$  representam as formas bilinear e linear, respectivamente:

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})^T \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}) \, d\mathbf{x} \quad (2.4)$$

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\partial\Omega^N} \mathbf{v}^T \bar{\mathbf{t}} \, d\mathbf{s} \quad (2.5)$$

sendo as tensões e deformações representadas por  $\boldsymbol{\sigma} = \{\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}\}^T$  e  $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}\}^T$ , respectivamente, utilizando a notação de Voigt.

Considerando um meio linear elástico, a relação constitutiva é dada pela Lei de Hooke generalizada:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.6)$$

na qual  $\mathbf{C}$  é a matriz de propriedades constitutivas elásticas.

A relação entre deformações e deslocamentos, por sua vez, é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{L}\mathbf{u}, \quad \mathbf{L} = \begin{bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

Ressalta-se, ainda, uma importante medida relacionada à forma bilinear, conhecida como **norma energia**:

$$\|\mathbf{w}\|_{\varepsilon(\Omega)} \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{B(\mathbf{w}, \mathbf{w})}, \quad \forall \mathbf{w} \in \mathcal{H}^1(\Omega) \quad (2.8)$$

### 2.1.2 Solução Aproximada

Utilizando o procedimento de Galerkin, busca-se uma solução aproximada  $\tilde{\mathbf{u}}$  para o problema (2.2) em sub-espços  $\tilde{\mathcal{V}}$  de dimensão finita, de tal maneira que  $\tilde{\mathcal{V}} \subset \mathcal{V}$  (Barros, 2002). Desse modo, a forma variacional passa a ser escrita como:

Encontre  $\tilde{\mathbf{u}} \in \tilde{\mathcal{V}}$  tal que:

$$B(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{\mathbf{v}}) = l(\tilde{\mathbf{v}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathcal{V}} \quad (2.9)$$

O espaço  $\tilde{\mathcal{V}}$  é gerado pelas funções de forma do método numérico utilizado, correspondendo, portanto, ao espaço de discretização.

Considerando a aproximação do problema (2.9), define-se o **erro** da solução numérica como a diferença entre a solução exata e a solução aproximada:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.10)$$

Outro conceito importante se refere ao **resíduo** da aproximação. Substituindo a solução exata  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{e}$  no PVC (2.2), obtém-se:

$$B(\tilde{\mathbf{u}} + \mathbf{e}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.11)$$

Denotando  $R$  como o resíduo, chega-se a um novo PVC:

$$B(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = R(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.12)$$

com:

$$R(\mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) - B(\tilde{\mathbf{u}}, \mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.13)$$

O resíduo, portanto, depende dos dados do problema analisado e da solução aproximada  $\tilde{\mathbf{u}}$ . Em Oden e Prudhomme (2001), o resíduo é interpretado como a fonte do erro da solução, pois define os dados excitantes do PVC do erro em (2.12).

## 2.2 Método dos Elementos Finitos Generalizados

Esta seção apresenta um breve histórico do MEFG, com o registro de alguns trabalhos que deram origem ao método. Em seguida, apresenta-se a sua formulação.

### 2.2.1 Histórico

De acordo com Duarte et al. (2000), o MEFG foi proposto de maneira independente por:

- Babuška e colaboradores (Babuška et al., 1994; Babuška e Melenk, 1997; Melenk e Babuška, 1996), sob a denominação de “Método dos Elementos Finitos Especiais” e “Método da Partição da Unidade”.
- Duarte e Oden (1995) na proposta do “Método das Nuvens-*hp*”.

Conforme consta em Barros (2002), a denominação atual de “Método dos Elementos Finitos Generalizados” surgiu no trabalho de Melenk (1995).

É igualmente importante registrar, além dos trabalhos precursores do MEFG, os primeiros trabalhos do Método dos Elementos Finitos Estendido (MEFX), de Belytschko e

Black (1999) e Moes et al. (1999). Assim como o MEFG, o MEFX busca manter em sua formulação a mesma base que existe no MEF convencional. Apesar disso, uma característica que distingue o MEFX dos trabalhos iniciais do MEFG é o enriquecimento de apenas uma parte do domínio, idealizado para problemas da Mecânica da Fratura (Belytschko et al., 2009). Ainda segundo Belytschko et al. (2009), a distinção entre o MEFG e o MEFX tornou-se bastante confusa, mas é possível tratá-los, atualmente, como métodos numéricos equivalentes.

### 2.2.2 Formulação

A estratégia fundamental do MEFG consiste no enriquecimento da Partição da Unidade (PU) com funções especiais previamente determinadas, escolhidas de acordo com o comportamento esperado para o problema em análise. Como Partição da Unidade, entende-se um conjunto de funções que somam a unidade em cada um dos pontos de um domínio  $\Omega$ <sup>1</sup>.

No caso do MEFG, a PU é construída da maneira mais simples possível: utilizando as funções de forma de elementos finitos convencionais, como as funções de Lagrange (Strouboulis et al., 2000). O termo **nuvem** ( $\omega_\alpha$ ) também é um conceito essencial na formulação, representando o conjunto de elementos finitos que compartilham um mesmo nó  $\alpha$ .

O conjunto de funções enriquecedoras é definido como:

$$I_\alpha \stackrel{def}{=} \{L_{\alpha 1}, L_{\alpha 2}, \dots, L_{\alpha q_\alpha}\} = \{L_{\alpha i}\}_{i=1}^{q_\alpha} \quad \text{com } L_{\alpha 1} = 1 \quad (2.14)$$

sendo um conjunto linearmente independente constituído por um número  $q_\alpha$  de funções  $L_{\alpha i}$ , definidas para cada nó  $\alpha$ . Tais funções devem representar adequadamente a solução sobre a nuvem a elas associada, podendo ser polinomiais ou não (Barros, 2002). A capacidade de inserir funções não-polinomiais na aproximação é, precisamente, a grande

---

<sup>1</sup>A definição de Partição da Unidade exige, rigorosamente, que o conjunto de funções verifique outras condições além da que foi citada (Oden e Reddy (1976)). Apesar disso, segundo Barros (2002), esta é a característica mais importante para as interpretações do MEFG, o que permite o relaxamento de propriedades mais restritivas.

vantagem do MEFG em relação ao MEF.

Valendo-se dos conceitos de PU, nuvem e funções de enriquecimento, é possível construir as funções de forma do MEFG. O espaço de aproximação é ampliado através da multiplicação da função de forma original de cada nó pelo respectivo conjunto de funções enriquecedoras, definindo, de tal maneira, as funções de forma do método:

$$\{\phi_{\alpha i}\}_{i=1}^{q_\alpha} = N_\alpha \{L_{\alpha i}\}_{i=1}^{q_\alpha} \quad (\text{sem somatório em } \alpha) \quad (2.15)$$

na qual  $N_\alpha$  representa a função de forma original (PU) do nó  $\alpha$ .

Finalmente, é possível definir uma aproximação global genérica  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  do MEFG por meio da seguinte combinação linear:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha=1}^{NN} N_\alpha(\mathbf{x}) \left\{ u_\alpha + \sum_{i=2}^{q_\alpha} L_{\alpha i}(\mathbf{x}) b_{\alpha i} \right\} \quad (2.16)$$

na qual  $NN$  representa o número total de nós do modelo e  $u_\alpha$  e  $b_{\alpha i}$  são parâmetros nodais associados a cada componente  $N_\alpha$  do MEF e  $N_\alpha L_{\alpha i}$  do MEFG, respectivamente.

### 2.2.3 Estimativa de erro *a priori*

O trabalho de Babuška et al. (2004) estabelece a seguinte estimativa de erro *a priori* para o MEFG:

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}\|_{\varepsilon(\Omega)} \leq C \left( \sum_{\alpha=1}^{NN} \inf_{L_{\alpha i} \in \mathcal{X}_\alpha} \|\mathbf{u} - L_{\alpha i}\|_{\varepsilon(\omega_\alpha)}^2 \right)^{1/2} \quad (2.17)$$

na qual  $C$  é uma constante,  $NN$  o número total de nós do modelo e  $\mathcal{X}_\alpha$  o **espaço de aproximação local** associado a cada nuvem  $\omega_\alpha$ , podendo ser definido como:

$$\mathcal{X}_\alpha = \text{span} \{ L_{\alpha i}, 1 \leq i \leq q_\alpha, L_{\alpha i} \in \mathcal{H}^1(\omega_\alpha) \} \quad (2.18)$$

A Equação (2.17) pode ser interpretada da seguinte maneira: se existirem funções  $L_{\alpha i}$  que aproximem bem a solução exata  $\mathbf{u}$  sobre cada nuvem a elas associadas, então a solução do MEFG ( $\tilde{\mathbf{u}}$ ) aproximará bem a solução exata sobre o domínio  $\Omega$ . Tal conclusão



reforça a necessidade de se utilizarem informações disponíveis sobre o comportamento da solução exata para a correta definição das funções de enriquecimento.

## 2.2.4 Funções de enriquecimento para a representação de trincas

A formulação do MEEG permite que trincas sejam representadas por diferentes combinações de funções enriquecedoras. A introdução de uma descontinuidade forte no domínio, ou seja, um salto no campo de deslocamentos, pode ser feita através da função de Heaviside (Moes et al., 1999):

$$H(x) = \begin{cases} 1 & \forall \xi > 0 \\ 0, & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (2.19)$$

na qual  $\xi$  representa a posição em relação à descontinuidade assumida em  $\xi = 0$ .

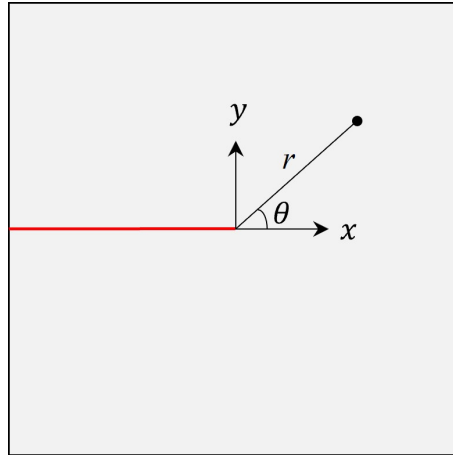
Para descrever a singularidade existente nas vizinhanças da ponta da trinca, é possível utilizar funções baseadas na solução assintótica da elasticidade para o campo de deslocamentos, considerando os modos I e II de abertura (podendo ser encontradas, por exemplo, em Szabo e Babuska (1991)). Os trabalhos de Oden e Duarte (1996) e Belytschko e Black (1999) propõem diferentes conjuntos de funções enriquecedoras, sendo apresentada, a seguir, a proposta de Oden e Duarte (1996):

$$\begin{aligned} \{L_x\} &= \frac{\sqrt{r}}{2G} \left\{ [(\kappa - 1/2) \cos \theta/2 - 1/2 \cos 3\theta/2], [(\kappa + 3/2) \sin \theta/2 + 1/2 \sin 3\theta/2] \right\} \\ \{L_y\} &= \frac{\sqrt{r}}{2G} \left\{ [(\kappa + 1/2) \sin \theta/2 - 1/2 \sin 3\theta/2], [-(\kappa - 3/2) \cos \theta/2 - 1/2 \cos 3\theta/2] \right\} \end{aligned} \quad (2.20)$$

sendo:

- $L_x$  e  $L_y$  as funções empregadas nas direções  $x$  e  $y$ , respectivamente, ilustradas na Figura 2.1. Em cada vetor, o primeiro elemento é associado ao modo I e o segundo elemento ao modo II de abertura de trinca;
- $G$  o módulo de elasticidade transversal;

- $\kappa = (3 - 4\nu)$  para estado plano de deformação e  $\frac{(3-\nu)}{1+\nu}$  para estado plano de tensão, sendo  $\nu$  o coeficiente de Poisson;
- $r$  e  $\theta$  coordenadas polares com origem na ponta da trinca (Figura 2.1).



**Figura 2.1:** Sistema de coordenadas associado às funções de singularidade (Equação (2.20)), com a trinca representada em vermelho.

Na sequência do texto, as funções de Oden e Duarte (1996) serão identificadas como **funções de singularidade**.<sup>2</sup>

### 2.2.5 Estratégia Estável

O Método dos Elementos Finitos Generalizados Estável (MEFG-E) foi proposto inicialmente por Babuška e Banerjee (2012), restrito a problemas unidimensionais. Em seguida, Gupta, Duarte, Babuška e Banerjee (2013) e Gupta et al. (2015) apresentaram a expansão dessa abordagem para problemas bi e tridimensionais da Mecânica da Fratura, respectivamente.

A técnica do MEFG-E consiste em subtrair da função enriquecedora do MEFG o seu interpolante de elementos finitos. Essa abordagem foi concebida, inicialmente, para contornar um problema bastante conhecido do MEFG: o mau condicionamento do sistema de equações. De acordo com Gupta, Duarte, Babuška e Banerjee (2013), a modificação

<sup>2</sup>A denominação “funções de singularidade” é utilizada, no presente texto, para identificar funções cujas derivadas são singulares em  $r = 0$ , considerando o sistema de coordenadas da Equação (2.20).

proposta contribui para a redução do número de condicionamento da matriz de rigidez, que passa a apresentar valores da mesma ordem de grandeza daqueles obtidos com o MEF.

Adicionalmente, o MEFG-E lida com outra limitação importante do MEFG, relacionada aos **elementos de mistura**: elementos parcialmente enriquecidos, resultantes da aplicação do enriquecimento em regiões específicas do domínio. Conforme apresentado, inicialmente, em Chessa et al. (2003), o erro nesses elementos pode ser maior do que nos demais elementos da malha, o que compromete as taxas de convergência da solução.

Segundo Gupta, Duarte, Babuška e Banerjee (2013), a técnica do MEFG-E se baseia na seguinte modificação local das funções enriquecedoras padrão ( $L_{\alpha i}$ ) do MEFG:

$$\tilde{L}_{\alpha i} = L_{\alpha i} - I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i}) \quad (2.21)$$

na qual  $I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i})$  é a função interpolante, definida como:

$$I_{\omega_\alpha}(L_{\alpha i})(\mathbf{x}) = \sum_{k=1}^n N_k(\mathbf{x}) L_{\alpha i}(\mathbf{x}_k) \quad (2.22)$$

sendo:

- $\mathbf{x}_k$  as coordenadas do nó  $k$  do elemento que contém o ponto de cálculo  $\mathbf{x}$ ;
- $n$  o número de pontos nodais do elemento que contém o ponto de cálculo  $\mathbf{x}$ ;
- $L_{\alpha i}(\mathbf{x}_k)$  a função enriquecedora original do MEFG (Equação (2.14)).

A modificação imposta na Equação (2.21) consiste na eliminação dos termos redundantes que já apareciam na PU, subtraindo das funções enriquecedoras as suas projeções no espaço daquela (Oliveira, 2018). Valendo-se do enriquecimento modificado, as funções de forma do MEFG-E são construídas de maneira análoga às do MEFG:

$$\{\tilde{\phi}_{\alpha i}\}_{i=1}^{q_\alpha} = N_\alpha \{\tilde{L}_{\alpha i}\}_{i=1}^{q_\alpha} \quad (\text{sem somatório em } \alpha) \quad (2.23)$$

## 2.3 Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-local

Esta seção apresenta o MEF<sup>gl</sup>, principal estratégia numérica deste trabalho. Após uma breve contextualização do método, registra-se a sua formulação. Destaque é dado, também, para a estimativa de erro *a priori* de Gupta, Kim e Duarte (2012).

### 2.3.1 Contextualização

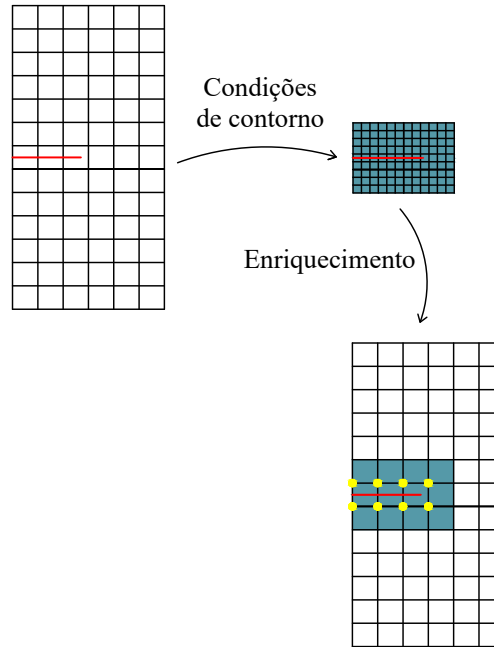
Conforme apresentado no capítulo introdutório deste trabalho, o uso de funções enriquecedoras previamente determinadas representa uma importante limitação na abordagem do MEF<sup>gl</sup>, seja por exigir um conhecimento antecipado da solução do problema ou por demandar certo grau de refinamento da malha. É nesse contexto que surge a proposta do MEF<sup>gl</sup>, apresentada inicialmente em Duarte e Babuška (2005).

O MEF<sup>gl</sup> combina o conceito clássico da técnica global-local aplicada ao MEF (Noor, 1986) com o enriquecimento da Partição da Unidade característico do MEF<sup>gl</sup>. Do ponto de vista teórico, o método se baseia na decomposição da solução em duas escalas: uma escala grosseira (global), que representa a parcela suave da solução, e uma escala refinada (local), responsável por descrever fenômenos localizados. Emprega-se o enriquecimento da PU para incorporar a aproximação local ao espaço de solução global, garantindo, ao mesmo tempo, um espaço de solução  $C^0$  (Kim et al., 2009).

A solução do MEF<sup>gl</sup> é dividida em três etapas, ilustradas na Figura 2.2:

1. Primeiramente, obtém-se a solução do problema global inicial. Nesta etapa, adota-se uma discretização grosseira em todo o domínio.
2. Define-se um problema local abrangendo a região que contém o fenômeno de interesse (no caso da Figura 2.2, uma trinca). Sobre o contorno do domínio local, impõe-se a solução da primeira etapa na forma de condições de contorno.
3. Resolve-se novamente o problema global, desta vez utilizando funções enriquecedoras

numericamente construídas a partir da solução do problema local. Por esse motivo, tal problema passa a ser chamado de problema global enriquecido.



**Figura 2.2:** Estratégia do MFG<sup>gl</sup> para um problema da Mecânica da Fratura. Os nós enriquecidos com a solução do problema local são destacados em amarelo. A presença da trinca no problema global inicial é meramente ilustrativa.

### 2.3.2 Formulação

As formulações das três etapas do MFG<sup>gl</sup> podem ser encontradas em Duarte e Kim (2008) e Kim et al. (2009), considerando um problema típico da elasticidade linear elástica.

A solução do problema global inicial, identificada aqui como  $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$ , é obtida via MEF ou MFG – neste último, considerando a inclusão de enriquecimentos polinomiais no modelo global, por exemplo. Nesta etapa, a formulação se define conforme a seção 2.1.

No problema local, a formulação é modificada pela imposição de condições de contorno advindas de  $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$ . Considerando um domínio local  $\Omega_L$ , a aproximação  $\tilde{\mathbf{u}}_L$  é a solução do seguinte problema:

$$\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_L \in \tilde{\mathcal{V}}_L(\Omega_L) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_L) \forall \tilde{\mathbf{v}}_L \in \tilde{\mathcal{V}}_L(\Omega_L)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}}_L)^T \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) d\mathbf{x} + \kappa \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{v}}_L^T \tilde{\mathbf{u}}_L ds = \\
& \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^N} \tilde{\mathbf{v}}_L^T \bar{\mathbf{t}} ds + \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{v}}_L^T (\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) + \kappa \tilde{\mathbf{u}}_G^0) ds
\end{aligned} \tag{2.24}$$

sendo:

- $\partial\Omega_G$  e  $\partial\Omega_L$  os contornos dos problemas global e local, respectivamente;
- $\partial\Omega_G^N$  o contorno de Neumann do problema global;
- $\bar{\mathbf{t}}$  as tensões de superfície prescritas no problema global;
- $\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0)$  as tensões de superfície obtidas no problema global;
- $\kappa$  o parâmetro de rigidez para a imposição das condições de contorno;
- $\tilde{\mathcal{V}}_L(\Omega_L)$  o espaço de discretização do modelo local, construído com as funções de forma do MEFG.

Segundo Kim et al. (2009), é possível definir as condições de contorno a serem impostas no domínio local – provenientes de  $\tilde{\mathbf{u}}_G^0$  – a partir do parâmetro de rigidez  $\kappa$ . Diferentes ordens de grandeza são necessárias para a imposição de tensões, deslocamentos ou ambos (condições de contorno de Neumann, Dirichlet ou Cauchy, respectivamente). Mais detalhes podem ser encontrados no referido trabalho.

Para o problema global enriquecido, a formulação é a mesma do problema global inicial, exceto pelo enriquecimento da Partição da Unidade com funções provenientes da solução local. Nesta etapa, procura-se representar a peculiaridade do problema através de  $\tilde{\mathbf{u}}_L$ , que define uma  $i$ -ésima função de forma (Equação (2.15)) dada por:

$$\phi_{\alpha i} = N_\alpha \tilde{u}_{L_i} \tag{2.25}$$

sendo  $N_\alpha$  a PU utilizada no problema global. As componentes cartesianas de  $\tilde{\mathbf{u}}_L$  ( $\tilde{u}_{L_i}$ , na Equação (2.25)) são adicionadas ao espaço de aproximação local  $\mathcal{X}_\alpha$  (Equação 2.18). Tais funções são utilizadas em nós  $\alpha$  da malha global cuja nuvem ( $\omega_\alpha$ ) esteja contida no domínio local  $\Omega_L$ .

É importante ressaltar que o problema global enriquecido utiliza a mesma malha adotada no problema global inicial. Para problemas bidimensionais, as funções de enriquecimento global-local adicionam apenas dois graus de liberdade a cada nó global enriquecido, independentemente do nível de refinamento existente no problema local. Isso permite que malhas bastante refinadas sejam utilizadas no domínio local – capazes de descrever adequadamente o fenômeno de interesse – sem aumentar significativamente o tamanho do problema na terceira etapa da solução (Kim et al., 2009).

### 2.3.3 Ciclos Global-local

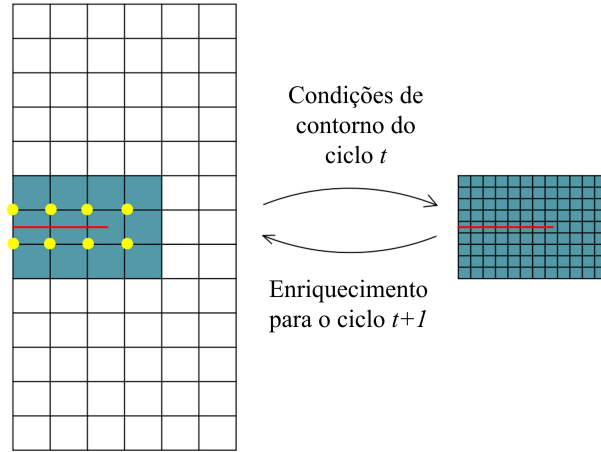
A técnica de ciclos global-local (ou iterações global-local), inicialmente apresentada no trabalho de O’Hara et al. (2009), propõe a execução de um passo adicional na análise do MEFG<sup>gl</sup>: adota-se a solução do problema global enriquecido como condições de contorno em uma nova análise do problema local. Em seguida, repete-se a sequência tradicional do método, com a construção numérica das funções de enriquecimento para o espaço de aproximação global.

O trabalho de Gupta, Kim e Duarte (2012) expande essa estratégia para problemas da Mecânica da Fratura, sugerindo a execução de iterações até que se atinja uma tolerância pré-especificada para alguma grandeza de interesse. Neste caso, as condições de contorno para o problema local do ciclo  $t + 1$  são obtidas da solução do problema global enriquecido do ciclo  $t$ , conforme mostra a Figura 2.3.

Desse modo, a estratégia de ciclos visa reduzir o erro associado às condições de contorno inexatas que são impostas no problema local, uma vez que a solução do problema global inicial pode apresentar erros excessivos mesmo em regiões mais distantes da ponta da trinca. A análise desse efeito a partir de uma estimativa de erro *a priori* para o problema local, proposta no mesmo trabalho de Gupta, Kim e Duarte (2012), é discutida a seguir.

### 2.3.4 Estimativa de Erro *a priori* para o Problema Local

Em Gupta, Kim e Duarte (2012), apresenta-se uma estimativa de erro *a priori* para o problema local, considerando o efeito das condições de contorno inexatas provenientes do



**Figura 2.3:** Ilustração da estratégia de ciclos global-local para um problema da Mecânica da Fratura.

problema global. Para isso, os autores recorrem à estimativa *a priori* para o MEFG de Babuška et al. (2004) (Equação (2.17)) adaptando-a ao problema global enriquecido do MEFG<sup>gl</sup> :

$$\|\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}_G^E\|_{\varepsilon(\Omega_G)} \leq C \left( \sum_{\alpha=1}^{NN} \inf_{\mathbf{v}_\alpha \in \mathcal{X}_\alpha} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_\alpha\|_{\varepsilon(\omega_\alpha)}^2 \right)^{1/2} \quad (2.26)$$

na qual  $C$  é uma constante,  $NN$  o número total de nós do modelo global e  $\tilde{\mathbf{u}}_G^E$  a solução aproximada do problema global enriquecido. O termo  $\mathbf{v}_\alpha$ , por sua vez, indica uma função do espaço de aproximação local  $\mathcal{X}_\alpha$  do problema global enriquecido (sendo, portanto, associada à solução  $\tilde{\mathbf{u}}_L$ ).

A Equação (2.26) implica que o erro na norma energia da aproximação global é limitado pelo erro na norma energia da aproximação local. Em outras palavras, se  $\tilde{\mathbf{u}}_L$  aproximar bem a função exata  $\mathbf{u}$  sobre  $\omega_\alpha$ ,  $\alpha = 1, \dots, NN$ , então a solução  $\tilde{\mathbf{u}}_G^E$  conseguirá aproximar bem a função  $\mathbf{u}$  sobre o domínio global  $\Omega_G$  (Gupta, Kim e Duarte, 2012).

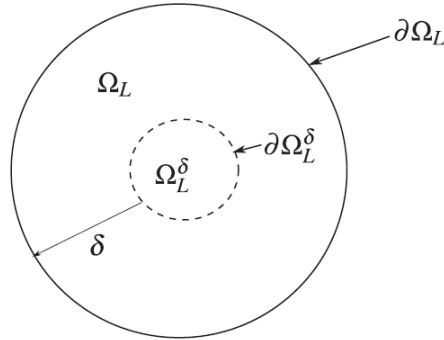
Na sequência, os autores desenvolvem a formulação do problema local considerando a aplicação de condições de contorno de Dirichlet exatas ou inexatas sobre  $\partial\Omega_L$ . Neste momento, é necessário definir os seguintes termos:

- $\mathbf{u}^{\text{CCex}}$  indica a solução exata do problema local submetido a condições de contorno exatas;



- $\mathbf{u}^{\text{CCinex}}$  indica a solução exata do problema local submetido a condições de contorno inexatas;
- $\mathbf{u}^{\text{dif}} = \mathbf{u}^{\text{CCex}} - \mathbf{u}^{\text{CCinex}}$  ;
- $\tilde{\mathbf{u}}^{\text{CCinex}}$  indica a solução aproximada do problema local submetido a condições de contorno inexatas.

Para avaliar o efeito das condições de contorno, considera-se um subdomínio local  $\Omega_L^\delta \subset \Omega_L$ , conforme ilustra a Figura 2.4:



**Figura 2.4:** Domínio local  $\Omega_L$  e subdomínio  $\Omega_L^\delta$  (Gupta, Kim e Duarte, 2012).

Após a utilização de propriedades da forma bilinear e da aproximação de Galerkin, além da inequação de Caccioppoli<sup>3</sup>, obtém-se a seguinte estimativa de erro<sup>4</sup>:

$$\|\mathbf{u}^{\text{CCex}} - \tilde{\mathbf{u}}^{\text{CCinex}}\|_{\varepsilon(\Omega_L^\delta)} \leq C \inf_{\mathbf{v} \in \tilde{\mathcal{V}}_L(\Omega_L)} \|\mathbf{u}^{\text{CCinex}} - \mathbf{v}\|_{\varepsilon(\Omega_L)} + \frac{C_1}{\delta} \|\mathbf{u}^{\text{dif}}\|_{L_2(\Omega_L)} \quad (2.27)$$

na qual  $\|\cdot\|_{L_2(\Omega)}$  representa a norma  $L_2$ :

$$\|\mathbf{u}\|_{L_2(\Omega)} = \left[ \int_{\Omega} |\mathbf{u}|^2 d\Omega \right]^{1/2} \quad (2.28)$$

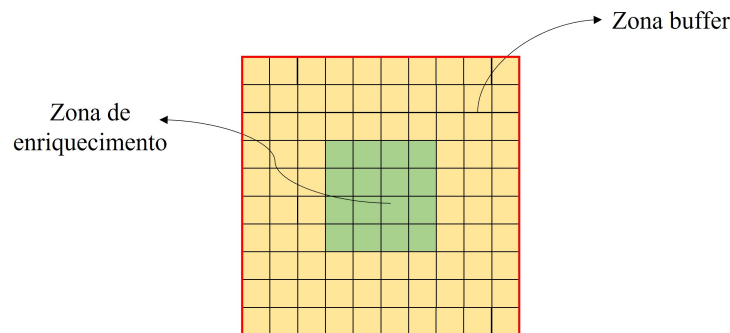
A inequação (2.27) mostra que o erro da solução aproximada de um problema local sujeito a condições de contorno inexatas é composto de duas parcelas:

<sup>3</sup>A inequação de Caccioppoli relaciona a norma  $L_2$  de uma função em  $\omega^*$  com a sua norma energia sobre um subdomínio  $\omega \subset \omega^*$  (Babuška e Lipton, 2011).

<sup>4</sup>Por simplificação, o desenvolvimento analítico da estimativa *a priori* para o problema local não é apresentado neste texto, podendo ser encontrado, em sua totalidade, em Gupta, Kim e Duarte (2012).

1. O **erro da discretização de elementos finitos**, referente ao primeiro termo do lado direito de (2.27). Esse termo pode ser controlado pelo refinamento da malha local ou pela adição de funções enriquecedoras previamente determinadas.
2. O **erro associado às condições de contorno inexatas** impostas sobre  $\partial\Omega_L$ , dado pelo segundo termo do lado direito de (2.27). É possível reduzir essa parcela através do aumento do parâmetro  $\delta$ , definido, em Gupta, Kim e Duarte (2012), como o tamanho de uma região denominada “zona *buffer*”.

A Figura 2.5 ilustra o conceito da zona *buffer* de Gupta, Kim e Duarte (2012). A área em verde, identificada como “zona de enriquecimento”, representa a região da qual se extraem as informações para a construção do enriquecimento global-local (ou seja, onde se computa o termo  $\tilde{\mathbf{u}}_L$  da Equação (2.25)). Na região localizada entre a zona de enriquecimento e o contorno do problema local, por sua vez, define-se a zona *buffer*: região que não é utilizada para a construção do enriquecimento global-local (destacada em amarelo na Figura 2.5).



**Figura 2.5:** Zona de enriquecimento (em verde) e zona *buffer* (em amarelo) sobre um problema local genérico, cujo contorno é destacado em vermelho.

É importante mencionar que a zona de enriquecimento poderia abranger todo o domínio local – sem a presença da zona *buffer*. Nesse caso, o erro relacionado às condições de contorno poderia ser controlado pela técnica de iterações global-local (seção 2.3.3).

Dada a sua pertinência ao tema do presente trabalho, a discussão sobre o trabalho de Gupta, Kim e Duarte (2012) será retomada no Capítulo 3.

### 2.3.5 Versão estável

Dada a generalidade da construção das funções de forma modificadas, é possível aplicar diretamente a estratégia estável do MEF-G-E (seção 2.2.5) sobre o enriquecimento global-local. Obtém-se, desse modo, uma versão estável do MEF-G-E<sup>gl</sup>, identificada aqui como MEF-G-E<sup>gl</sup> (Método dos Elementos Finitos Generalizados com Enriquecimento Global-Local Estável).

Considera-se, neste caso, a solução local  $\tilde{\mathbf{u}}_L$  composito as funções  $L_{\alpha i}$  na Equação (2.21). Em razão do grande ganho de precisão garantido por essa estratégia (comprovado pela autora e co-autores em Fonseca et al. (2020)), o MEF-G-E<sup>gl</sup> será utilizado em diversas simulações numéricas do presente trabalho (Capítulos 5 a 8). Em todas as análises a serem apresentadas, a estratégia estável é aplicada **somente sobre funções de enriquecimento global-local**. As funções enriquecedoras utilizadas para a representação direta das trincas (seção 2.2.4) são mantidas em sua versão padrão do MEF-G.

## 2.4 Estimadores de Erro *a posteriori*

Esta seção apresenta uma base teórica dos estimadores de erro *a posteriori*, com enfoque nas técnicas baseadas na recuperação dos gradientes da solução. Após uma visão geral sobre o tema, apresenta-se o estimador ZZ-BD, adotado no presente trabalho. Discute-se, também, a formulação dos estimadores orientados ao objetivo.

### 2.4.1 Visão Geral

“A presença de erros numéricos tem sido uma importante fonte de preocupação desde as primeiras simulações computacionais de fenômenos físicos. O erro numérico é intrínseco a essas simulações: o processo de discretização, que transforma um modelo físico contínuo em um que seja tratável por computadores, não consegue capturar todas as informações embutidas em problemas descritos por equações diferenciais parciais ou equações integrais. Qual é o erro da aproximação em tais simulações? Como o erro pode ser mensurado,

controlado e efetivamente minimizado? Essas indagações confrontam profissionais práticos e teóricos desde as primeiras aplicações de métodos numéricos na engenharia e na ciência.

Avanços concretos para a solução de tais questões foram alcançados na forma de teorias e métodos de estimativas *a posteriori*, nas quais a própria solução é utilizada para avaliar a precisão da simulação. O impressionante sucesso de alguns estimadores *a posteriori* abriu um novo capítulo capaz de revolucionar a Matemática e a Mecânica Computacional.” (Ainsworth e Oden, 2000).

O estudo de estimadores de erro *a posteriori* para o MEF iniciou-se no trabalho pioneiro de Babuška e Rheinboldt (1978), com estimativas baseadas no resíduo da solução. Essa estratégia foi desenvolvida inicialmente na versão explícita, utilizando diretamente a aproximação de elementos finitos e os dados disponíveis do problema. Desde então, diversas abordagens foram propostas e os procedimentos atuais podem, essencialmente, ser reduzidos a dois tipos (Zienkiewicz, 2006):

- **Estimadores residuais:** são construídos a partir do resíduo da solução aproximada e medem o quanto a solução obtida falha em satisfazer as equações que governam o PVC (Barros, 2002). Desde a proposta inicial de Babuška e Rheinboldt (1978), maior atenção tem sido dada à chamada versão implícita, que utiliza soluções de PVCs auxiliares associados a erros locais. Neste caso, destacam-se o Método dos Resíduos em Subdomínios e o Método dos Resíduos em Elementos<sup>5</sup>.
- **Estimadores baseados em técnicas de recuperação:** propostos inicialmente no trabalho de Zienkiewicz e Zhu (1987), utilizam um processo de suavização dos gradientes da solução, no qual se obtém a chamada “solução recuperada”. A diferença entre a solução recuperada e a solução original é utilizada para o cálculo do erro. Essa abordagem, apesar de bastante simples e, de certo modo, heurística, é capaz de fornecer resultados surpreendentemente precisos (Grätsch e Bathe, 2005).

---

<sup>5</sup>Uma vez que o presente trabalho utiliza apenas estimadores baseados em técnicas de recuperação, maiores detalhes acerca dos estimadores residuais não serão apresentados.

Considerando a aproximação do MEF para o problema da elasticidade (seção 2.1), as técnicas de recuperação exploram o fato de que o gradiente da solução é descontínuo nas interfaces entre os elementos. Valendo-se dessa propriedade, é possível calcular uma aproximação para o gradiente em cada nó, utilizando contribuições de cada um dos elementos ao redor deste. Em seguida, uma aproximação contínua em todo o domínio pode ser construída por meio de uma interpolação dos valores nodais (Ainsworth e Oden, 2000).

Dada a sua simplicidade, as técnicas de recuperação, em geral, apresentam menor custo computacional quando comparadas aos estimadores residuais. Além disso, a maioria dos códigos de elementos finitos já incorpora algum nível de pós-processamento, através do qual a aproximação descontínua para o gradiente é suavizada antes de ser apresentada ao usuário (Ainsworth e Oden, 2000). Nesse contexto, os cálculos relacionados ao estimador de erro podem apresentar um custo adicional pequeno (Zienkiewicz et al., 1999).

### 2.4.2 Conceitos Básicos das Técnicas de Recuperação

Na formulação dos estimadores *a posteriori*, define-se o erro da solução numérica como a diferença entre a solução exata e a solução aproximada. Conforme mencionado na seção 2.1, o erro em deslocamentos, em qualquer ponto do domínio, é dado por <sup>6</sup>:

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}} \quad (2.29)$$

De maneira análoga, define-se o erro em tensões:

$$\mathbf{e}_\sigma = \boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}} \quad (2.30)$$

na qual  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  representa o campo de tensões aproximado.

É mais conveniente, entretanto, definir o erro em termos de alguma norma que represente uma grandeza escalar. Utilizando, por exemplo, a norma energia (Equação (2.8)), obtém-se a seguinte medida de erro em cada elemento da malha:

---

<sup>6</sup>Considera-se, neste caso, apenas o erro da discretização. Ressalta-se que a Equação (2.29) não representa o erro total da solução, pois não inclui erros de arredondamento, da integração numérica ou da representação do carregamento e da geometria (Barros, 2002).

$$\|e\|_{\varepsilon(\Omega_e)} = \left[ \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega_e \right]^{1/2} \quad (2.31)$$

na qual  $\Omega_e$  representa o domínio do elemento  $e$  e  $\mathbf{C}$  é a matriz que relaciona tensões e deformações (Equação (2.6)).

Uma vez que a solução exata  $\boldsymbol{\sigma}$  nem sempre é conhecida, é necessário buscar valores capazes de substituir o campo de tensões exato em (2.31). Valendo-se de um pós-processamento da solução, a estratégia de recuperação fornece, idealmente, uma **solução recuperada**  $\boldsymbol{\sigma}^*$  mais precisa do que a solução aproximada original (Zienkiewicz et al., 1999). Logo, a norma energia do erro pode ser estimada da seguinte maneira:

$$\|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_e)} = \left[ \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega_e \right]^{1/2} \quad (2.32)$$

A partir das medidas de erro computadas em cada elemento, é possível obter uma estimativa para a norma energia do erro global:

$$\|e^*\|_{\varepsilon(\Omega)} = \left( \sum_{e=1}^{NE} \|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_e)}^2 \right)^{1/2} \quad (2.33)$$

sendo  $NE$  o número total de elementos da malha.

A Equações (2.32) e (2.33) sintetizam o conceito geral dos estimadores de erro baseados em técnicas de recuperação. As etapas específicas para a obtenção do campo de tensões recuperado – particularmente, os valores nodais de  $\boldsymbol{\sigma}^*$  – distinguem os diferentes estimadores e têm grande influência sobre sua precisão e robustez (Ainsworth e Oden, 2000).

Também é importante destacar uma medida bastante utilizada em estimativas *a posteriori*, conhecida como **índice de efetividade** ( $\theta$ ):

$$\theta = \frac{\|e^*\|_{\varepsilon(\Omega)}}{\|e\|_{\varepsilon(\Omega)}} \quad (2.34)$$

O estimador é dito assintoticamente exato se  $\theta$  se aproximar de 1,0 quando o erro exato tender a zero. Isso significa que o estimador sempre irá convergir para o erro exato à medida que este decresce (Zienkiewicz e Zhu, 1992b). Cabe ressaltar que o índice de efetividade só pode ser calculado em problemas cuja solução exata é conhecida.

O processo original de Zienkiewicz e Zhu (1987) (frequentemente identificado como “estimador ZZ”) obtém os valores nodais de  $\sigma^*$  através de um simples processo de média nodal ou projeção  $L_2$ . Apesar do sucesso alcançado por essa abordagem, os autores buscaram novas técnicas capazes de aprimorar a descrição da solução recuperada, culminando, em 1992, na técnica denominada *SPR* (do inglês, *Superconvergent Patch Recovery* (Zienkiewicz e Zhu, 1992*a,b*)) (Zienkiewicz, 2006).

Embora representem importantes ferramentas para o estudo do erro no MEF, os estimadores do tipo *ZZ* e *SPR*, em razão do processo de suavização que se utiliza para construir o campo de tensões recuperado, não são adequados para regiões de gradientes elevados – que ocorrem, por exemplo, em problemas da MFLE. No âmbito do MEFG, diversas abordagens já foram propostas para contornar essa limitação, conforme será registrado na seção 3.2. Apresenta-se, a seguir, a formulação do estimador *ZZ-BD*, adotado nas estratégias numéricas propostas no presente trabalho (a serem apresentadas nos capítulos 5 a 8).

### 2.4.3 Estimador ZZ-BD

O estimador *ZZ-BD*, proposto no trabalho de Lins et al. (2019), apresenta uma técnica de recuperação para o MEFG e o MEFG-E aplicável a problemas da MFLE. A formulação se baseia no estimador de Prange et al. (2012), que parte de um conceito básico da técnica original de Zienkiewicz e Zhu (1987): o campo de tensões recuperado é interpolado pelas mesmas funções de forma utilizadas na aproximação do campo de deslocamentos. Considerando a aproximação do MEFG, entretanto, tais funções precisam ser modificadas para representar diretamente o campo de tensões ao redor da trinca (e não o campo de deslocamentos, como na seção 2.2.4). Desse modo, Prange et al. (2012) propõem que as funções enriquecedoras utilizadas para a construção de  $\sigma^*$  sejam diferentes daquelas empregadas para o campo de deslocamentos aproximado pelo MEFG.

Na técnica de Prange et al. (2012), o campo de tensões recuperado é definido da seguinte forma<sup>7</sup>:

---

<sup>7</sup>No trabalho de Prange et al. (2012), a função de Heaviside também é incluída na representação de  $\sigma^*$ . A expressão (2.35) segue o formato apresentado em Lins et al. (2019), que considera apenas o

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^* \\ \sigma_{yy}^* \\ \sigma_{xy}^* \end{pmatrix} = \sum_{\beta=1}^{NN} N_{\beta} \begin{pmatrix} a_{\beta,0}^1 \\ a_{\beta,0}^2 \\ a_{\beta,0}^3 \end{pmatrix} + \sum_{\beta \in I} \sum_{n=1}^2 N_{\beta} \begin{pmatrix} a_{\beta,n}^1 g_n^1(r, \theta) \\ a_{\beta,n}^2 g_n^2(r, \theta) \\ a_{\beta,n}^3 g_n^3(r, \theta) \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

sendo  $NN$  o número total de nós do modelo,  $r$  e  $\theta$  coordenadas polares com origem na ponta da trinca e  $I$  o conjunto de nós enriquecidos com as funções  $g_n^d$  (com  $d = 1, 2, 3$  denotando as componentes de tensão do problema bidimensional e  $n = 1, 2$  indicando os modos de abertura da trinca). Tais funções representam contribuições para as componentes de tensão da solução assintótica nas vizinhanças de uma trinca, considerando os modos I e II de abertura, definidas no mesmo sistema de coordenadas da Equação (2.20):<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} g_1^1 &= r^{-1/2} \cos(\theta/2) (1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)) \\ g_1^2 &= -r^{-1/2} \sin(\theta/2) (2 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)) \\ g_2^1 &= r^{-1/2} \cos(\theta/2) (1 + \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)) \\ g_2^2 &= r^{-1/2} \sin(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ g_3^1 &= r^{-1/2} \cos(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ g_3^2 &= r^{-1/2} \cos(\theta/2) (1 - \sin(\theta/2) \sin(3\theta/2)) \end{aligned} \quad (2.36)$$

Na Equação (2.35), os coeficientes  $a_{\beta,n}^d$  ( $n = 0, 1, 2$ ) representam parâmetros nodais do campo de tensões recuperado, a serem determinados pelas técnicas de projeção  $L_2$  apresentadas a seguir.

Seguindo o formalismo matemático de Lins et al. (2019), a seguinte notação é introduzida:

---

enriquecimento com as funções  $g_n^d$ .

<sup>8</sup>Em Lins et al. (2019), as funções  $g_n^d$  são generalizadas para a solução assintótica do campo de tensões ao redor de uma reentrância. No presente trabalho, optou-se por representar, na Equação (2.36), o caso particular de uma trinca fechada.



$$g_0^d = 1, \quad d = 1, 2, 3 \quad (2.37)$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_1^* \\ \sigma_2^* \\ \sigma_3^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^* \\ \sigma_{yy}^* \\ \sigma_{xy}^* \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

na qual o termo unitário ( $g_0^d$ ) representa o caso em que não há enriquecimento.

De maneira semelhante, definem-se as seguintes funções de forma do MEEG:

$$\phi_{\alpha,n}^d = N_\alpha g_n^d \quad (2.39)$$

Em relação às funções de forma apresentadas na Equação (2.15), a notação da Equação (2.39) considera as funções  $g_n^d$  no lugar de  $L_{\alpha i}$ . Neste caso, são definidas funções de forma distintas para cada componente de tensão – razão pela qual se utiliza o superíndice  $d$ .

Valendo-se das definições anteriores, é possível reescrever a Equação (2.35) como:

$$\boldsymbol{\sigma}^* = \begin{pmatrix} \sigma_1^* \\ \sigma_2^* \\ \sigma_3^* \end{pmatrix} = \sum_{\beta=1}^{NN} \sum_{n=0}^{NFE(\beta)} \begin{pmatrix} a_{\beta,n}^1 \phi_{\beta,n}^1 \\ a_{\beta,n}^2 \phi_{\beta,n}^2 \\ a_{\beta,n}^3 \phi_{\beta,n}^3 \end{pmatrix} \quad (2.40)$$

na qual  $NFE(\beta)$  representa o número de funções enriquecedoras do nó  $\beta$ .

A partir de (2.40), pode-se representar uma componente  $\sigma_d^*$  do campo de tensões recuperado da seguinte maneira:

$$\sigma_d^* = \sum_{\beta=1}^{NN} \sum_{n=0}^{NFE(\beta)} a_{\beta,n}^d \phi_{\beta,n}^d \quad (2.41)$$

Dada a representação de  $\boldsymbol{\sigma}^*$ , os parâmetros nodais  $a_{\beta,n}^d$  podem ser calculados através da minimização do seguinte funcional, conforme proposto por Zienkiewicz e Zhu (1987):

$$\Pi = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (2.42)$$

sendo  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}$  o campo de tensões aproximado pelo MEEG.

A minimização de (2.42) deve ser feita com respeito aos parâmetros  $a_{\beta,n}^d$  para cada componente de tensão  $\sigma_d^*$ , resultando na seguinte condição de ortogonalidade:

$$(\sigma_d^* - \tilde{\sigma}_d, \phi_{\alpha,m}^d)_{L_2(\Omega)} = 0 \quad (2.43)$$

com  $\alpha = 1, \dots, NN$  e  $m = 0, \dots, NFE(\alpha)$ . A notação  $(\cdot, \cdot)_{L_2(\Omega)}$  representa o produto interno  $L_2$ <sup>9</sup>.

Usando (2.43) e (2.41), obtém-se o seguinte sistema de equações:

$$(\phi_{\beta,n}^d, \phi_{\alpha,m}^d)_{L_2(\Omega)} a_{\beta,n}^d = (\tilde{\sigma}_d, \phi_{\alpha,m}^d)_{L_2(\Omega)} \quad (2.45)$$

com  $\alpha, \beta = 1, \dots, NN$ ,  $m = 0, \dots, NFE(\alpha)$  e  $n = 0, \dots, NFE(\beta)$ . Tal sistema pode ser reescrito como:

$$\mathbf{A}^d \mathbf{a}^d = \mathbf{f}^d \quad (2.46)$$

sendo:

$$\mathbf{A}^d = [A_{(\beta,n)(\alpha,m)}^d] \quad (2.47)$$

$$A_{(\beta,n)(\alpha,m)}^d = (\phi_{\beta,n}^d, \phi_{\alpha,m}^d)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \phi_{\beta,n}^d \phi_{\alpha,m}^d d\Omega = (N_{\beta} g_n^d, N_{\alpha} g_m^d)_{L_2(\Omega)} \quad (2.48)$$

$$\mathbf{a}^d = \{a_{(\beta,n)}^d\} \quad (2.49)$$

$$\mathbf{f}^d = \{f_{(\alpha,m)}^d\} \quad (2.50)$$

$$f_{(\alpha,m)}^d = (\tilde{\sigma}_d, \phi_{\alpha,m}^d)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_d \phi_{\alpha,m}^d d\Omega \quad (2.51)$$

As Equações (2.46) a (2.51) definem, segundo Lins et al. (2019), uma técnica de **projeção global**. Em Prange et al. (2012), essa técnica é aplicada sobre a aproximação do

---

<sup>9</sup>O produto interno  $L_2$  é definido como:

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} f g d\Omega \quad \forall f, g \in L_2(\Omega) \quad (2.44)$$

sendo  $L_2(\Omega)$  um espaço de funções de quadrado integrável definido sobre o domínio  $\Omega$  (Reddy, 1986).

*C-XFEM*<sup>10</sup>. Posteriormente, uma adaptação do estimador para o abordagem do MEEG-E foi apresentada em Lins et al. (2015).

Definida a estratégia de projeção global, é possível, finalmente, formalizar o estimador ZZ-BD, que emprega uma **projeção  $L_2$  localmente ponderada** sobre as nuvens de elementos. Segundo Lins et al. (2019), essa técnica garante um processo de recuperação robusto e computacionalmente eficiente.

Considerando um domínio  $\Omega$ , o produto interno  $L_2$  ponderado por uma função peso  $w$  ( $w : w \geq 0$  em  $\Omega$ ) é definido da seguinte forma:

$$(f, g)_{L_2(\Omega)}^w = \int_{\Omega} f g w d\Omega \quad \forall f, g \in L_2(\Omega) \quad (2.52)$$

Tomando o termo  $f_{(\alpha, m)}^d$  na Equação (2.51) e o suporte compacto da PU ( $N_{\alpha}$ ), é possível reinterpretar as componentes do vetor  $\mathbf{f}^d$  como um produto interno  $L_2$  entre  $\tilde{\sigma}_d$  e  $g_m^d$ , ponderado pela Partição da Unidade  $N_{\alpha}$ :

$$f_{(\alpha, m)}^d = (\tilde{\sigma}_d, N_{\alpha} g_m^d)_{L_2(\Omega)} = \int_{\Omega} \tilde{\sigma}_d N_{\alpha} g_m^d d\Omega = \int_{\omega_{\alpha}} \tilde{\sigma}_d N_{\alpha} g_m^d d\Omega = (\tilde{\sigma}_d, g_m^d)_{L_2(\omega_{\alpha})}^{N_{\alpha}} \quad (2.53)$$

Considera-se, neste caso, que a PU definida por  $N_{\alpha}$  é não-negativa sobre a nuvem  $\omega_{\alpha}$ .

O mesmo produto interno localmente ponderado pode ser explorado na definição da matriz  $\mathbf{A}^d$  (Equação (2.48)). Nesse caso, a ideia é aproveitar a semelhança entre  $\mathbf{A}^d$  e a matriz de massa consistente de problemas dinâmicos<sup>11</sup>. Um procedimento para a obtenção de uma matriz de massa concentrada – uma aproximação para a matriz de massa consistente, com o objetivo de facilitar a solução do sistema de equações global – é apresentado no trabalho de Schweitzer (2013), considerando métodos numéricos baseados na Partição da Unidade. Valendo-se desse desenvolvimento, Lins et al. (2019) propõem a construção de uma matriz  $\mathbf{A}^d$  modificada, representada por  $\tilde{\mathbf{A}}^d$ , definida como:

<sup>10</sup>O *C-XFEM* (do inglês, *Corrected Extended Finite Element Method*) (Fries, 2008) propõe uma correção para os elementos de mistura através da multiplicação das funções enriquecedoras por funções rampa que variam linearmente de 1 a 0.

<sup>11</sup>A matriz de massa consistente, na formulação do MEF, é definida por:

$$M_{i,j} = \int_{\Omega} N_i N_j d\Omega \quad \text{sendo } N_i \text{ e } N_j \text{ as funções de forma convencionais do MEF.} \quad (2.54)$$

$$\tilde{A}_{(\alpha,m)(\beta,n)}^d = \begin{cases} 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \\ (g_n^d, g_m^d)_{L_2(\omega_\alpha)}^{N_\alpha}, & \text{se } \alpha = \beta \end{cases} \quad (2.55)$$

$$(g_n^d, g_m^d)_{L_2(\omega_\alpha)}^{N_\alpha} = \int_{\omega_\alpha} g_n^d g_m^d N_\alpha d\Omega \quad (2.56)$$

Usando (2.53) e (2.55), define-se o seguinte sistema de equações para o cálculo dos parâmetros nodais de  $\boldsymbol{\sigma}^*$ :

$$\tilde{\mathbf{A}}^d \tilde{\mathbf{a}}^d = \mathbf{f}^d \quad (2.57)$$

no qual  $\tilde{\mathbf{a}}^d$ , assim como  $\mathbf{a}^d$  em (2.46), reúne os parâmetros nodais a serem calculados. Ressalta-se que as matrizes desse sistema podem ser montadas a partir das contribuições de cada elemento da malha.

A definição de  $\tilde{\mathbf{A}}^d$  resulta em uma matriz simétrica, positiva-definida e bloco-diagonal (razão por trás da denominação ZZ-BD (do inglês, *Block Diagonal*)). Cada bloco de  $\tilde{\mathbf{A}}^d$  é atrelado a um dos nós do modelo, possuindo dimensão de  $1 \times 1$  ou  $3 \times 3$  – a depender do uso ou não das funções  $g_n^d$ , conforme a expressão do campo de tensões recuperado (2.35). Logo, é possível representar essa matriz da seguinte forma (Bento, 2019):

$$\tilde{\mathbf{A}}^d = \tilde{B}_1^d \oplus \dots \oplus \tilde{B}_{NN}^d = \begin{bmatrix} \tilde{B}_1^d & \dots & 0 \\ & \ddots & \\ \vdots & \tilde{B}_\gamma^d & \vdots \\ & & \ddots & \\ 0 & \dots & & \tilde{B}_{NN}^d \end{bmatrix} \quad (2.58)$$

$$\tilde{B}_\gamma^d = \left[ (g_n^d, g_m^d)_{L_2(\omega_\gamma)}^{N_\gamma} \right], \quad m, n = 0, \dots, NFE(\gamma) \quad (2.59)$$

Em razão da propriedade bloco-diagonal, a fatorização da matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^d$  exige um esforço computacional muito menor do que na técnica de projeção global. Verifica-se, ainda, que a integração numérica de cada bloco de  $\tilde{\mathbf{A}}^d$  envolve apenas os elementos pertencentes à nuvem de cada nó. Nesse sentido, é possível estabelecer uma relação entre a técnica de projeção localmente ponderada e os estimadores formulados para nuvens de elementos – como, por exemplo, o *SPR* (Lins et al., 2019).

A formulação discutida nesta seção permite a obtenção do campo de tensões recuperado  $\boldsymbol{\sigma}^*$ . Em seguida, é possível calcular o erro estimado para a norma energia através das Equações (2.32) e (2.33).

#### 2.4.4 Estimadores de Erro Orientados ao Objetivo

Até meados da década de 90, a formulação da maioria dos estimadores *a posteriori* era voltada para o cálculo da norma energia do erro. A partir de então, a teoria foi estendida para o cálculo do erro em grandezas específicas, calculadas a partir da solução aproximada. Esse desenvolvimento mais recente é referido na literatura como **estimativa orientada ao objetivo**, dado que a sua finalidade é fornecer estimativas de erro para uma determinada quantidade de interesse (Grätsch e Bathe, 2005).

De acordo com Zienkiewicz (2006), Babuška e Miller foram os primeiros a se dedicarem ao estudo do erro em grandezas diferentes da norma energia. Uma série de trabalhos desses autores (Babuška e Miller, 1984*a,b,c*) estabeleceu uma base para as metodologias que se desenvolveram cerca de dez anos mais tarde. Atualmente, diversas formulações para o erro em quantidades de interesse podem ser encontradas na literatura, como, por exemplo, em Cirak e Ramm (1998), Ainsworth e Oden (2000) e Prudhomme e Oden (1999); Oden e Prudhomme (2001). Optou-se, neste trabalho, por apresentar o equacionamento de Oden e Prudhomme (2001).

Inicialmente, considera-se um funcional linear e limitado  $Q : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$  atuando sobre o espaço de funções admissíveis do problema analisado. Assume-se, neste caso, que o objetivo da simulação é calcular uma grandeza  $Q(\mathbf{u})$ . Considerando a solução aproximada  $\tilde{\mathbf{u}}$ , o método numérico adotado fornece uma aproximação  $Q(\tilde{\mathbf{u}})$ , cuja precisão pode ser quantificada da seguinte maneira:

$$Q(\mathbf{u}) - Q(\tilde{\mathbf{u}}) = Q(\mathbf{u} - \tilde{\mathbf{u}}) = Q(\mathbf{e}) \quad (2.60)$$

sendo  $Q(\mathbf{e})$  o erro da aproximação para a quantidade de interesse  $Q(\mathbf{u})$ .

Uma abordagem direta para o cálculo de  $Q(\mathbf{e})$  seria aproximar o erro da solução  $\mathbf{e}$ , então, aplicar o funcional  $Q$ . Entretanto, a solução numérica do problema (2.10) para o

erro, na maioria dos casos, é muito cara computacionalmente. Uma alternativa possível consiste em relacionar  $Q(\mathbf{e})$  ao resíduo  $R$ , sem a necessidade de se computar  $\mathbf{e}$ . Essa ideia se justifica pela própria definição do resíduo, que contém toda a informação que origina o erro da aproximação (Oden e Prudhomme, 2001).

Nesse contexto, o ponto inicial da formulação é encontrar uma relação entre  $Q(\mathbf{e})$  e a fonte de erro  $R$ . Logo, deseja-se encontrar um funcional linear  $\mathbf{w}$  tal que:

$$Q(\mathbf{e}) = \mathbf{w}(R) \quad (2.61)$$

O termo  $\mathbf{w}$  é identificado como **função de influência** (ou função generalizada de Green) com respeito a  $Q$ , uma vez que representa a influência do resíduo sobre  $Q(\mathbf{e})$ . Em outras palavras,  $\mathbf{w}$  indica como a informação é propagada do resíduo para o erro na grandeza de interesse (Oden e Prudhomme, 2001).

Na sequência, valendo-se do fato de que o espaço de funções admissíveis  $\mathcal{V}$  (Equação (2.3)) é assumido como um espaço de Hilbert (sendo, portanto, reflexivo <sup>12</sup>), é possível escrever a seguinte relação:

$$Q(\mathbf{e}) = R(\mathbf{w}) \quad (2.62)$$

Substituindo a definição do resíduo (Equação (2.12)) em (2.62), obtém-se:

$$Q(\mathbf{e}) = B(\mathbf{e}, \mathbf{w}) \quad (2.63)$$

A igualdade anterior é verificada quando  $\mathbf{w} \in \mathcal{V}$  é a solução do seguinte problema:

$$B(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = Q(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{V} \quad (2.64)$$

O problema (2.64) é denominado **problema dual** (ou problema adjunto) com relação ao problema primal (Equação (2.2)), tendo como solução a variável dual  $\mathbf{w}$ . O funcional

---

<sup>12</sup>Dado um espaço vetorial normado  $V$ , o conjunto de todos os funcionais lineares definidos sobre  $V$  forma o espaço dual de  $V$  ( $V^*$ ). Uma vez que  $V^*$  também é um espaço normado, é possível construir  $V^{**} = (V^*)^*$ , denominado espaço bidual de  $V$ . Quando  $V = V^{**}$ , o espaço  $V$  é dito **reflexivo** (Reddy, 1986).

$Q(\mathbf{v})$ , referente à grandeza de interesse analisada, pode ser interpretado como o carregamento de um problema mecânico – sendo equivalente, por exemplo, a forças de superfície, forças de corpo ou deformações/tensões iniciais.

Considerando o mesmo espaço de aproximação  $\tilde{\mathcal{V}}$  adotado no problema primal, é possível obter uma solução aproximada  $\tilde{\mathbf{w}} \in \tilde{\mathcal{V}}$  através do seguinte problema:

$$B(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) = Q(\tilde{\mathbf{v}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathcal{V}} \quad (2.65)$$

Assim como no problema primal, pode-se definir o seguinte erro para a aproximação da função de influência:

$$\mathbf{e}^w = \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}} \quad (2.66)$$

Finalmente, o teorema a seguir fornece uma medida de erro para a quantidade de interesse a partir dos erros  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{e}^w$  obtidos nos problemas primal e dual, respectivamente.

**Teorema 2.4.1.** *Seja  $\tilde{\mathbf{w}}$  uma aproximação de elementos finitos de  $\mathbf{w}$ , conforme a Equação (2.65). Então, o erro cometido ao se calcular a quantidade  $Q(\mathbf{u})$  usando a aproximação  $Q(\tilde{\mathbf{u}})$  é dado por:*

$$Q(\mathbf{e}) = B(\mathbf{e}, \mathbf{e}^w) \quad (2.67)$$

sendo  $\mathbf{e}$  e  $\mathbf{e}^w$  os erros das aproximações de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{w}$ , respectivamente.

*Demonstração.* Tomando a Equação (2.63) e aplicando a relação de ortogonalidade de Galerkin, obtém-se:

$$Q(\mathbf{e}) = B(\mathbf{e}, \mathbf{w}) = B(\mathbf{e}, \mathbf{w}) - \overbrace{B(\mathbf{e}, \tilde{\mathbf{w}})}^0 = B(\mathbf{e}, \mathbf{w} - \tilde{\mathbf{w}}) \quad (2.68)$$

Valendo-se da definição do erro em  $\mathbf{w}$  (Equação (2.66)), chega-se a expressão desejada:

$$Q(\mathbf{e}) = B(\mathbf{e}, \mathbf{e}^w)$$

□

Segundo Ainsworth e Oden (2000), a Equação (2.67) mostra que o erro na quantidade de interesse  $Q(\mathbf{e})$  é limitado pelos erros da aproximação de  $\mathbf{u}$  e da função de influência  $\mathbf{w}$ , medidos na norma energia. Essa afirmação pode ser comprovada através da desigualdade de Cauchy-Schwarz:

$$\|Q(\mathbf{e})\| = B(\mathbf{e}, \mathbf{e}^w) \leq \|\mathbf{e}\|_{\varepsilon(\Omega)} \|\mathbf{e}^w\|_{\varepsilon(\Omega)} \quad (2.69)$$

Logo, qualquer estimador formulado para o erro na norma energia pode ser utilizado para se estimar o erro na quantidade de interesse (Ainsworth e Oden, 2000).

A partir da definição do erro exato (2.67), diversas abordagens para a obtenção de um **estimador** de erro para a quantidade de interesse podem ser encontradas em Grätsch e Bathe (2005). Apresenta-se, a seguir, o desenvolvimento baseado na recuperação dos gradientes da solução (foco deste trabalho), conforme proposto por Rüter e Stein (2006).

Valendo-se da definição da forma bilinear (2.4), é possível expressar o erro  $Q(\mathbf{e})$  (Equação (2.67)) em termos do erro em tensões. Para isso, é necessário definir grandezas no problema dual que equivalem a tensões e deformações de um problema mecânico auxiliar, utilizado para se extrair o erro na quantidade de interesse:

$$\boldsymbol{\sigma}^w = \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon}^w \quad (2.70)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^w = \mathbf{L} \mathbf{w} \quad (2.71)$$

com  $\mathbf{C}$  definida na relação constitutiva (Equação (2.6)) e  $\mathbf{L}$  dada na Equação (2.7).

A partir dessas definições, reescreve-se a equação do erro exato da seguinte maneira:

$$Q(\mathbf{e}) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^w - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^w) d\Omega \quad (2.72)$$

na qual  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_w$  (Equação (2.71)) representa o equivalente às tensões aproximadas no problema dual.

A expressão de  $Q(\mathbf{e})$  em (2.72) torna evidente que as técnicas de recuperação – inicialmente propostas para a norma energia do erro – podem ser utilizadas nos problemas



primal e dual, visando obter soluções recuperadas  $\boldsymbol{\sigma}^*$  e  $\boldsymbol{\sigma}_w^*$  que substituem os campos exatos  $\boldsymbol{\sigma}$  e  $\boldsymbol{\sigma}_w$ . Desse modo, chega-se à seguinte estimativa de erro  $Q(\mathbf{e}^*)$  para a quantidade de interesse:

$$Q(\mathbf{e}^*) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^{w*} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^w) d\Omega \quad (2.73)$$

Ressalta-se que o erro estimado pode ser computado para cada elemento da malha e, em seguida, as contribuições de cada elemento somadas para o cálculo o erro global definido em (2.73):

$$Q^k(\mathbf{e}^*) = \int_{\Omega_k} (\boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^{w*} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^w) d\Omega_k \quad (2.74)$$

$$Q(\mathbf{e}^*) = \sum_{k=1}^{NE} Q^k(\mathbf{e}^*) \quad (2.75)$$

sendo  $Q^k(\mathbf{e}^*)$  o erro estimado no elemento  $k$  e  $NE$  o número total de elementos da malha.

No presente trabalho, um estimador orientado ao objetivo será formulado especificamente para o erro do fator de intensidade de tensão, calculado através da Integral de Interação. O desenvolvimento analítico do estimador será apresentado no Capítulo 6, juntamente com os resultados das simulações numéricas.

## 2.5 Adaptatividade

Esta seção apresenta uma breve discussão sobre o tema da adaptatividade. Após uma visão geral sobre o assunto, discute-se uma técnica proposta especificamente para o MEFG.

### 2.5.1 Visão Geral

Uma vez disponíveis as estimativas de erro *a posteriori*, é natural que se busquem processos de aprimoramento da solução numérica. É nesse contexto que surgiram os procedimentos adaptativos, desenvolvidos para o MEF no começo dos anos 80 (Li e Bettess, 1997).

De acordo com Barros (2002), define-se como adaptativo qualquer processo que utilize resultados intermediários, gerados durante a própria solução, para aprimorar de maneira ótima a resposta numérica. As estratégias adaptativas propostas para o MEF se baseiam nos seguintes processos:

- **Processo  $p$ :** a ordem das funções de interpolação é aumentada, mantendo-se inalterada a configuração da malha.
- **Processo  $h$ :** os elementos da malha são subdivididos em elementos menores.
- **Processo  $r$ :** os nós são redistribuídos ao longo do domínio, mantendo-se constantes o número de elementos e o grau polinomial da aproximação.

Para garantir a qualidade da aproximação, os procedimentos adaptativos utilizam alguma medida de erro global. O refinamento da aproximação, por sua vez, é deflagrado por medidas de erro locais, denominadas **indicadores de erro** (Barros, 2002).

A sequência da análise adaptativa é determinada por uma combinação entre o erro global e os indicadores de erro, definida pelo critério de adaptatividade adotado. Bastante consolidado é o chamado critério da equidistribuição do erro (Babuška e Rheinboldt, 1979; Zienkiewicz e Zhu, 1987), no qual a aproximação é considerada ótima quando o erro se distribui igualmente entre todos os elementos da malha. Desse modo, a aproximação é refinada nas regiões que apresentarem indicadores de erro superiores em relação ao restante do domínio (Barros, 2002).

Considerando a aproximação do MEFG, a estratégia de enriquecimento da Partição da Unidade torna bastante interessante a utilização do processo  $p$ . O aumento do grau da aproximação, nesse caso, pode ser prontamente alcançado pela inclusão de funções enriquecedoras polinomiais. Como exemplo de processo  $p$  aplicado ao MEFG, apresenta-se, a seguir, a técnica proposta por Barros et al. (2004b).

### 2.5.2 Processo $p$ aplicado ao MEFG

O trabalho de Barros et al. (2004b) apresenta uma técnica adaptativa do tipo  $p$  para o MEFG, avaliada para problemas bidimensionais da elasticidade linear elástica. Considerando uma malha de elementos finitos fixa, o objetivo dessa técnica é obter uma ordem de aproximação ótima (respeitada uma determinada tolerância) que produza uma distribuição uniforme da norma energia do erro. As medidas de erro consideradas são:

- Erro relativo global:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\%} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\|\tilde{e}\|_{\varepsilon(\Omega)}}{\sqrt{(\|\tilde{u}\|_{\varepsilon(\Omega)})^2 + (\|\tilde{e}\|_{\varepsilon(\Omega)})^2}} \times 100\% \quad (2.76)$$

na qual  $\|\tilde{e}\|_{\varepsilon(\Omega)}$  representa a norma energia do erro estimado global. O termo  $\|\tilde{u}\|_{\varepsilon(\Omega)}$ , por sua vez, representa a norma energia da solução aproximada.

- Indicador de erro:

$$\tilde{\mathcal{E}}_{\omega_{\alpha}} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \omega_{\alpha}} \frac{V_k \|\tilde{e}\|_{\varepsilon(\Omega_k)}}{V_{\omega_{\alpha}}} \quad (2.77)$$

na qual  $\omega_{\alpha}$  representa a nuvem do nó  $\alpha$ ,  $V_k$  o volume do elemento  $k$ ,  $V_{\omega_{\alpha}}$  o volume total da nuvem  $\omega_{\alpha}$  e  $\|\tilde{e}\|_{\varepsilon(\Omega_k)}$  a norma energia do erro estimado no elemento  $k$ .

Os indicadores de erro, portanto, são associados à cada nuvem do domínio, sendo obtidos através da média ponderada do erro estimado em cada elemento da nuvem (utilizando como peso o volume desses elementos). Isso é feito com o objetivo de compatibilizar o procedimento adaptativo com o enriquecimento nodal do MEFG.

A cada passo de refinamento, compara-se o indicador de erro em cada nuvem a um parâmetro de tolerância local representado por  $\mu \tilde{\mathcal{E}}_{max}$ , sendo  $\tilde{\mathcal{E}}_{max}$  o máximo valor de  $\tilde{\mathcal{E}}_{\omega_{\alpha}}$  obtido no passo adaptativo corrente. O espaço de aproximação é aumentado (através do enriquecimento com funções polinomiais) nas nuvens com  $\tilde{\mathcal{E}}_{\omega_{\alpha}} > \mu \tilde{\mathcal{E}}_{max}$ . O parâmetro  $\mu$ , portanto, caracteriza a velocidade do procedimento adaptativo.

Além do controle do erro a nível local, considera-se também o erro global. Um novo passo de refinamento é necessário se o erro relativo global  $\tilde{\mathcal{E}}_{\%}$  for superior à uma tolerância  $TOL_{\text{erro}}$  assumida para a análise. Considera-se, ainda, um valor limite  $p_{max}$  para o grau da aproximação, visando evitar que este aumente indefinidamente. Caso todas as nuvens com  $\tilde{\mathcal{E}}_{\omega_{\alpha}} > \mu \tilde{\mathcal{E}}_{max}$  já tenham atingido o grau  $p_{max}$ , o parâmetro  $\mu$  deve ser reduzido. Isso permite que o processo adaptativo incremente novas regiões e possibilite a redução do erro global. Caso o valor de  $p_{max}$  seja atingido em todas as nuvens do domínio, não há como atingir uma solução com tolerância igual a  $TOL_{\text{erro}}$ , através do refinamento polinomial, para a malha de elementos adotada. Nesse caso, o procedimento adaptativo é interrompido.

Em Barros et al. (2004b), as estimativas de erro são calculadas através do Método dos Resíduos em Elementos. Considerando as técnicas de recuperação, a norma energia do erro estimado em cada elemento ( $\|\tilde{e}\|_{\varepsilon(\Omega_K)}$ , em (7.1)) seria dada pela Equação (2.32). A norma energia do erro estimado global ( $\|\tilde{e}\|_{\varepsilon(\Omega)}$ , em 2.76), por sua vez, seria dada pela Equação (2.33).

## Capítulo 3

### Estado da Arte

Neste capítulo, apresenta-se uma revisão bibliográfica de publicações relacionadas ao tema deste trabalho. Primeiramente, registram-se na seção 3.1 os principais trabalhos com aplicações do MEFG<sup>gl</sup> a problemas da MFLE. Em seguida, a seção 3.2 apresenta avanços do estudo do erro no MEFG, registrando diversos estimadores *a posteriori* propostos para o método. Finalmente, a seção 3.3 reúne trabalhos com estratégias adaptativas aplicadas ao MEFG.

#### 3.1 Modelagem de Trincas via MEFG<sup>gl</sup>

No atual estágio de desenvolvimento do MEFG<sup>gl</sup>, a simulação de problemas da MFLE assume papel de destaque. A representação de trincas de maneira precisa e computacionalmente eficiente, contornando limitações verificadas na estratégia de enriquecimento padrão do MEFG, constituiu a principal motivação para o desenvolvimento do método. Desde então, diferentes aspectos da formulação passaram a ser avaliados, mantendo-se a MFLE como matéria mais profusa em trabalhos. É nesse contexto que se situa a compilação apresentada nesta seção, cujo objetivo é pontuar – sem a intenção de esgotar o assunto – marcos significativos na evolução dos trabalhos.

A estratégia do MEFG<sup>gl</sup> é apresentada inicialmente em Duarte e Babuška (2005). Nesse trabalho, os aspectos fundamentais da formulação – a imposição, no problema local, das condições de contorno provenientes do problema global e a construção numérica das funções de enriquecimento – são idealizados para problemas tridimensionais da Mecânica

da Fratura. Dois anos mais tarde, os mesmos autores avançam na concepção do método, detalhando as formulações das três etapas da análise em Duarte et al. (2007). Como exemplo numérico, modela-se um problema tridimensional contendo múltiplas trincas, o que representa um progresso significativo em relação ao trabalho anterior. Além disso, é feita uma comparação do custo computacional em relação ao MEF<sup>gl</sup>, mostrando que, em determinadas condições, o MEF<sup>gl</sup> apresenta desempenho superior.

Posteriormente, Kim et al. (2008) desenvolvem análises numéricas mais detalhadas a respeito do desempenho computacional do método. Além de confirmarem as conclusões do trabalho anterior, os autores sugerem que a eficiência do MEF<sup>gl</sup> pode ser aumentada através da definição de múltiplos problemas locais. Adicionalmente, esse trabalho apresenta uma discussão inicial sobre a influência do tamanho do problema local e das condições de contorno provenientes do problema global. Os resultados indicam que tais fatores têm efeito mínimo sobre a precisão dos resultados (avaliados em termos da energia de deformação), sendo interpretados como uma comprovação da robustez do método. Anos mais tarde, tais conclusões seriam contrapostas no já mencionado trabalho de Gupta, Kim e Duarte (2012), que será retomado nesta mesma seção.

Em Kim et al. (2009), a formulação é ampliada de modo a permitir a imposição de diferentes tipos de condições de contorno sobre o problema local. Além da imposição de deslocamentos (Dirichlet), considera-se a aplicação de tensões (Neumann) ou ambos (Cauchy). Os experimentos numéricos sugerem que as condições de contorno de Cauchy, em geral, fornecem resultados mais precisos, apesar de dependerem da correta definição do parâmetro de rigidez (representado por  $\kappa$  na Equação (2.24)).

A partir do ano de 2011, é possível identificar uma tendência na literatura em direção à modelagem da propagação de trincas pelo MEF<sup>gl</sup>. Até então, maior foco era dado a problemas envolvendo trincas estáticas. É no trabalho de Pereira et al. (2011) que se apresenta, em detalhes, um algoritmo de propagação por fadiga, aplicado a problemas tridimensionais em regime linear elástico. Um aspecto fundamental da abordagem é o uso das condições de contorno do problema global enriquecido do passo anterior para a construção do espaço de aproximação do passo corrente do processo de crescimento da

trinca. Tal estratégia é viável desde que sejam adotados incrementos de trinca suficientemente pequenos entre cada passo. Também é interessante destacar as estratégias de geração automática de modelos locais, formados a partir dos elementos globais atravessados pela trinca. Os algoritmos propostos são capazes de construir modelos locais contendo superfícies de trinca complexas, sendo aplicáveis, também, a outros tipos de problemas físicos.

Em Gupta, Kim e Duarte (2012), avalia-se o efeito do tamanho do incremento de trinca sobre a estratégia de propagação de Pereira et al. (2011), considerando, novamente, um problema tridimensional da MFLE. Os resultados mostram, conforme o esperado, que o aumento desse incremento provoca erros consideráveis na análise. Verifica-se, ainda, que esse efeito diminui com o aumento do tamanho do problema local. Apesar de analisarem valores bastante elevados para o incremento de trinca, os autores reforçam a necessidade de se utilizar, na prática, valores pequenos para esse parâmetro (capazes de descrever satisfatoriamente as trajetórias de propagação da simulação).

No mesmo trabalho de Gupta, Kim e Duarte (2012), apresenta-se um estudo detalhado sobre a aplicação das condições de contorno no problema local – conforme exposto na seção 2.3.4 deste texto. Valendo-se da formulação da estimativa *a priori* (Equação (2.27)), os autores propõem duas estratégias para mitigar o efeito das condições de contorno inexatas: a técnica de ciclos global-local e a utilização da zona *buffer*. Com a técnica de ciclos, observa-se uma redução bastante significativa dos erros (em termos da energia de deformação e do fator de intensidade de tensão), em especial da primeira para a segunda iteração. Após a execução de quatro ciclos, observa-se uma estabilização do nível de erro, indicando a existência de uma solução limite.

Relativamente à zona *buffer*, os autores comprovam que aumentar o tamanho do problema local diminui o erro da análise (novamente, em termos da energia de deformação e do fator de intensidade de tensão). Para o problema analisado, a solução exata é suave em regiões distantes da superfície de trinca, sendo corretamente representada pela discretização grosseira adotada no modelo global. Adicionalmente, os autores verificam que **o mesmo nível de erro** pode ser alcançado com a utilização de uma zona *buffer* extensa ou

com a execução de dois ciclos global-local (neste último caso, sem o uso da zona *buffer*). Sendo assim, ficaria a cargo do usuário a escolha da estratégia a ser utilizada<sup>1</sup>.

No que diz respeito ao custo computacional, os autores afirmam que aumentar o tamanho da zona *buffer* não provoca impactos significativos, desde que o refinamento da malha local seja concentrado na região próxima à trinca. Cabe ressaltar que não há uma comparação direta entre o tempo de processamento relacionado às duas abordagens (zona *buffer* ou ciclos global-local). Destaca-se, também, que os resultados desse trabalho não possibilitam a definição de um tamanho “ótimo” para o problema local ou um critério de parada específico para a execução dos ciclos global-local.

Anos mais tarde, O’Hara et al. (2015) apresentam uma aplicação do MEFG<sup>gl</sup> a problemas de propagação por fadiga, utilizando elementos hexaédricos no problema global. Até então, os trabalhos anteriores (no caso tridimensional) empregavam malhas tetraédricas nos modelos global e local. Segundo os autores, essa novidade demonstra a habilidade do MEFG<sup>gl</sup> em tratar fenômenos locais que são muito menores do que os elementos utilizados na malha global. Os resultados desse trabalho confirmam a eficácia da estratégia proposta, que cumpre o objetivo de representar diversas superfícies de trincas em um único elemento do problema global. Os autores afirmam que isso evidencia a maior generalidade do MEFG<sup>gl</sup> em relação ao MEFG, uma vez que não existem, em geral, funções previamente definidas para a representação de descontinuidades em proximidade suficiente para interagir entre si. Na análise de propagação por fadiga, apresenta-se um estudo interessante sobre um painel enrijecido (apresentado como uma estrutura representativa da engenharia aeronáutica), cujos resultados confirmam a capacidade do MEFG<sup>gl</sup> em simular fenômenos de complexidade industrial.

Em O’Hara et al. (2016), os mesmos autores apresentam aplicações bastante avançadas do MEFG<sup>gl</sup> no contexto da MFLE. São analisados cenários envolvendo a interação e a coalescência de múltiplas superfícies de trincas, considerando análises estáticas e a propagação por fadiga. Neste último caso, os autores destacam a importância de se desenvolver uma ferramenta numérica capaz de simular a interação e eventual união de diferentes

---

<sup>1</sup>É importante ressaltar que a equivalência entre os ciclos global-local e o uso da zona *buffer* foi constatada para um único exemplo numérico no trabalho de Gupta, Kim e Duarte (2012).



superfícies de trincas, uma vez que esta é uma situação bastante comum na fase inicial da fadiga de alto ciclo<sup>2</sup>. Assim como no trabalho anterior, uma característica notável da abordagem proposta é a representação de múltiplas superfícies de trincas em malhas globais bastante grosseiras, valendo-se apenas do enriquecimento global-local. No estudo da propagação por fadiga, mais completo em relação ao artigo anterior, simula-se, novamente, um painel enrijecido. Neste caso, os autores verificam divergências entre a solução do MEFG<sup>gl</sup> e os valores de referência na avaliação da vida em fadiga. Uma justificativa é apresentada em razão da dependência não linear entre o número acumulado de ciclos de carregamento e o fator de intensidade de tensão. Segundo os autores, isso evidencia a necessidade de se obterem valores precisos para o fator de intensidade de tensão em simulações de propagação por fadiga.

Também cabe destacar a publicação de Fonseca et al. (2020), que analisa o desempenho do MEFG<sup>gl</sup> associado à estratégia estável do MEFG-E (seção 2.2.5) para problemas bidimensionais da MFLE. Os resultados obtidos indicam que essa combinação (avaliada anteriormente para trincas estáticas em Gupta (2014) e Malekan e Barros (2016)) apresenta excelente desempenho em simulações de propagação de trincas, em especial para o cálculo do fator de intensidade de tensão ao longo do crescimento da trinca.

Finalmente, referenciam-se brevemente outras obras relevantes do MEFG<sup>gl</sup> para o tratamento de descontinuidades, considerando ou não as hipóteses da MFLE:

- Kim et al. (2010): propõem a solução paralela de problemas locais, aplicada a trincas estáticas em problemas tridimensionais.
- Gupta, Pereira, Kim, Duarte e Eason (2012), Fillmore e Duarte (2018): apresentam implementações não intrusivas do MEFG<sup>gl</sup> para *softwares* comerciais, associadas a um código específico para o MEFG. Consideram-se problemas de trincas estáticas em duas e três dimensões.
- Gupta, Kim e Duarte (2013); Kim e Duarte (2015): contêm aplicações do MEFG<sup>gl</sup>

---

<sup>2</sup>O termo **fadiga de alto ciclo** identifica situações de longa vida em fadiga, nas quais os níveis de tensão são suficientemente baixos para que as deformações elásticas dominem o comportamento do componente (Dowling, 2013).

a problemas não lineares da Mecânica da Fratura.

- Geelen et al. (2020): apresentam uma formulação do MEF<sup>gl</sup> associada ao método *phase-field* para problemas de propagação de trincas em duas e três dimensões.
- Li et al. (2021): propõem a utilização do MEF<sup>gl</sup> em uma abordagem de acoplamento não intrusivo entre *softwares* acadêmicos e comerciais, aplicada em problemas tridimensionais de propagação de trincas e, também, problemas envolvendo plasticidade localizada.

## 3.2 Estimadores de Erro *a posteriori* para o MEF<sup>gl</sup>

Conforme discutido na seção 2.4.3, a estratégia de enriquecimento do MEF<sup>gl</sup> pode ser vantajosa para a construção de estimadores de erro *a posteriori*. Técnicas especificamente formuladas para o método têm sido exploradas, nas últimas décadas, especialmente em aplicações da Mecânica da Fratura. Nesse contexto, é possível afirmar que a maior parte das publicações emprega, sob diferentes enfoques, procedimentos baseados na recuperação dos gradientes da solução.

A compilação apresentada nesta seção reúne diversos estimadores propostos para o MEF<sup>gl</sup>, destacando suas principais características. Para facilitar o entendimento do leitor, discutem-se, inicialmente, os estimadores que utilizam técnicas de recuperação. Em seguida, mencionam-se brevemente alguns estimadores residuais. Finalmente, discutem-se publicações relacionadas ao erro em quantidades de interesse.

### 3.2.1 Estimadores Baseados em Técnicas de Recuperação

Segundo Duflo e Bordas (2008), os estimadores baseados em técnicas de recuperação podem ser divididos em duas categorias: recuperação local ou global. Na primeira, a solução recuperada é uma média local da solução aproximada, construída, por exemplo, para cada nuvem de elementos da malha. Na segunda, por sua vez, a solução recuperada é obtida a partir de uma minimização global que envolve todo o domínio do problema. Em razão do custo computacional envolvido na minimização global, as estratégias de recuperação local (tais como o *SPR*) são mais favoráveis a aplicações práticas.

Em Bordas e Duflot (2007); Bordas et al. (2007), apresenta-se um estimador de erro baseado no **XMLS** (do inglês, *eXtended Moving Least Squares* (Método dos Mínimos Quadrados Móveis Estendido)). Trata-se de uma modificação na formulação do Método dos Mínimos Quadrados Móveis convencional, feita através de um enriquecimento intrínseco da base de funções. Segundo os autores, a ideia é utilizar os deslocamentos aproximados pelo MEFG para computar um campo de deformações recuperado. Tal campo é obtido pela aplicação do operador de derivadas (Equação (2.7)) sobre um campo de deslocamentos suavizado pelo *XMLS*. Em cada elemento, o estimador de erro local é dado pela norma  $L_2$  da diferença entre o campo de deformações recuperado e aquele aproximado pelo MEFG. A proposta se aplica a problemas da MFLE, sendo a base do *XMLS* enriquecida com funções de singularidade. Os autores afirmam, entretanto, que o enriquecimento intrínseco (feito em todo o domínio) pode comprometer o custo computacional da análise.

O trabalho de Ródenas et al. (2008) propõe uma adaptação do clássico estimador *SPR* para a aproximação do MEFG em problemas da MFLE. A técnica resultante, denominada **SPR<sub>XFEM</sub>**, baseia-se na decomposição do campo de tensões recuperado em duas parcelas: uma parcela suave, fornecida pelo *SPR* padrão, e uma parcela singular, construída a partir da solução assintótica para as tensões nas vizinhanças de uma trinca:

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yy} \end{Bmatrix} &= \frac{K_I}{\sqrt{2\pi r}} \cos(\theta/2) \begin{Bmatrix} 1 - \text{sen}(\theta/2) \text{sen}(3\theta/2) \\ \text{sen}(\theta/2) \cos(3\theta/2) \\ 1 + \text{sen}(\theta/2) \text{sen}(3\theta/2) \end{Bmatrix} \\ &+ \frac{K_{II}}{\sqrt{2\pi r}} \begin{Bmatrix} -\text{sen}(\theta/2) [2 + \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2)] \\ \cos(\theta/2) [1 - \text{sen}(\theta/2) \text{sen}(3\theta/2)] \\ \text{sen}(\theta/2) \cos(\theta/2) \cos(3\theta/2) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (3.1)$$

na qual  $K_I$  e  $K_{II}$  representam os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II de abertura, respectivamente, e  $r$  e  $\theta$  são coordenadas polares com origem na ponta da trinca.

Os autores propõem a utilização, na Equação (3.1), dos fatores de intensidade de tensão aproximados pelo MEFG. Assume-se, neste caso, que a estratégia de enriquecimento do método é capaz de fornecer valores bastante precisos para essas grandezas. Cabe ressaltar

que a decomposição do campo de tensões recuperado é utilizada apenas em uma pequena região circular ao redor da ponta da trinca, na qual é esperado o comportamento singular da solução. Os resultados obtidos confirmam o bom desempenho do estimador, tanto a nível global quanto local.

Anos mais tarde, Ródenas et al. (2010) propõem uma modificação para o  $SPR_{XFEM}$ , capaz de gerar um campo de tensões recuperado estaticamente admissível<sup>3</sup>. Isso é feito através da imposição, em cada nuvem, das equações de equilíbrio do PVC (aplicada via multiplicadores de Lagrange sobre o funcional que define a solução recuperada, considerando apenas sua parcela suave). Essa modificação, denominada ***SPR-CX***, é baseada na técnica do *SPR-C* (do inglês, *Constrained SPR*) proposta para o MEF em Díez et al. (2007); Ródenas et al. (2007). Apesar de não garantir um campo de tensões estaticamente admissível de forma exata, essa técnica pode fornecer limites superiores práticos para a norma energia do erro<sup>4</sup>.

Em Duffot e Bordas (2008), apresenta-se um estimador denominado ***XGR*** (do inglês, *eXtended Global Recovery* (Recuperação Global Estendida)). Trata-se de uma generalização, para aproximações enriquecidas, do conceito de recuperação global de Hinton e Campbell (1974). A diferença está na construção do campo de deformações recuperado: ao invés de se utilizarem as mesmas funções de forma empregadas para o campo de deslocamentos, adotam-se funções de forma convencionais do MEF enriquecidas com funções que formam uma base para o campo de deformações exato nas vizinhanças de uma trinca. Em seguida, parâmetros nodais da solução recuperada são obtidos através da minimização, em todo o domínio, da norma  $L_2$  da diferença entre os campos de deformações recuperado e aproximado. A performance do estimador é comparada à do *XMLS*, apresentando resultados um pouco inferiores para as taxas de convergência e índices de efetividade.

Outro estimador baseado em recuperação global é aquele proposto por Prange et al.

---

<sup>3</sup>Um campo de tensões é dito estaticamente admissível se for contínuo e atender às equações de equilíbrio no domínio e no contorno de Neumann (Equação (2.1)).

<sup>4</sup>Conforme apresentado, por exemplo, em Díez et al. (2010), um campo de tensões estaticamente admissível gera uma estimativa para a norma energia do erro sempre maior ou igual ao erro exato. Essa propriedade é chamada de **limite superior**.

(2012), discutido na seção 2.4.3. A estratégia é semelhante à do estimador  $XGR$ , considerando, porém, um conjunto diferente de funções enriquecedoras para construção da solução recuperada. Os autores afirmam que a técnica de suavização é feita sobre o campo de tensões (e não de deformações, como no  $XGR$ ) para garantir sua aplicação a problemas envolvendo plasticidade. Posteriormente, o trabalho de Lins et al. (2015) avaliou o mesmo estimador para a estratégia estável do MEFG-E, modificando-o para a consideração da função de Heaviside linear. Nesse caso, foram observados índices de efetividade superiores em relação aos obtidos com o MEFG.

Finalmente, destaca-se, mais uma vez, o estimador ZZ-BD de Lins et al. (2019). Conforme apresentado na seção 2.4.3, a técnica de projeção  $L_2$  localmente ponderada garante menor custo computacional em comparação à técnica de Prange et al. (2012) e Lins et al. (2015). Além disso, essa abordagem fornece, em geral, estimativas de erro mais próximas do erro exato. Tal fato é mais claro nas análises feitas para o MEFG, mas bons resultados também são verificados para o MEFG-E. Em um trabalho posterior, Bento et al. (2019) avaliaram o desempenho do estimador no MEFG-E de alta ordem <sup>5</sup>, tendo verificado índices de efetividade mais próximos da unidade em relação aos resultados do MEFG-E. Em um trabalho mais recente, Bento et al. (2023) analisaram a aplicação do estimador ZZ-BD em uma formulação de segunda ordem do MEFG (identificada como  $FEM^2 - G/XFEM$ ), baseada no uso de funções de Lagrange de segunda ordem.

### 3.2.2 Estimadores Residuais

Esta seção sintetiza alguns trabalhos envolvendo estimadores de erro residuais para o MEFG. Uma vez que essa abordagem não é tratada no presente trabalho, optou-se por listar apenas as publicações mais significativas (maiores detalhes sobre o uso desses estimadores podem ser encontrados no trabalho de Ferreira (2016)):

- Barros et al. (2004b): Método dos Resíduos em Elementos para problemas da elasticidade bidimensional;

---

<sup>5</sup>O MEFG-E de alta ordem, proposto por Zhang et al. (2014), considera a utilização de uma PU *flat-top* para o espaço relacionado às funções de enriquecimento, garantindo que as funções de forma desse espaço sejam, localmente, quase linearmente independentes (Sato, 2017). Além do bom condicionamento do sistema, tal modificação garante elevadas taxas de convergência.

- Barros et al. (2004a): Método dos Resíduos em Elementos para modelos não-lineares de dano no concreto;
- Strouboulis et al. (2006): Método dos Resíduos em Subdomínios aplicado a um problema de Neumann;
- Gerasimov et al. (2012): estimador do tipo explícito para problemas da MFLE;
- Barros et al. (2013): Método dos Resíduos em Elementos e Método dos Resíduos por Subdomínios para problemas da elasticidade bidimensional e da MFLE.

### 3.2.3 Estimadores Orientados ao Objetivo

No contexto do MEEG, o estudo do erro em quantidades de interesse representa um campo menos explorado em relação às estimativas para a norma energia. Até o presente momento, as publicações se concentram em problemas da Mecânica da Fratura, analisando (majoritariamente) medidas associadas ao fator de intensidade de tensão.

O erro em quantidades de interesse é avaliado inicialmente no trabalho de Pannachet et al. (2008), considerando a propagação de trincas coesivas. Como quantidade de interesse, define-se a componente de tensão principal na região da ponta da trinca (utilizada no critério de propagação adotado). O erro é computado através de um estimador residual na abordagem explícita, sendo utilizado para guiar um procedimento adaptativo do tipo  $p$ .

Posteriormente, Panetier, Ladevèze e Louf (2009) propõem um estimador orientado ao objetivo que utiliza o erro na relação constitutiva (denotado por  $CRE$  (do inglês, *Constitutive Relation Error* (Erro na Relação Constitutiva))), para o qual são construídos campos de tensão estaticamente admissíveis. Para a obtenção do erro associado ao fator de intensidade de tensão, calcula-se a solução de um problema adjunto, de maneira semelhante ao que é descrito na seção 2.4.4. Em seguida, os autores apresentam uma expansão dessa estratégia em Panetier, Ladevèze e Chamoin (2009), considerando a inclusão da função de Heaviside nos campos estaticamente admissíveis. Neste caso, limites precisos para o erro são obtidos para o fator de intensidade de tensão em problemas de modo misto de

abertura.

Anos mais tarde, Rüter e Stein (2011) propõem a utilização de um estimador residual implícito para avaliar o erro associado à integral  $J$ , considerando problemas da MFLE. Em um trabalho posterior (Rüter et al., 2012), os mesmos autores avaliam um estimador do tipo explícito, expandindo o trabalho de Gerasimov et al. (2012) para o cálculo do erro em quantidades de interesse. Para os problemas bidimensionais apresentados, são analisadas a média de uma componente de deslocamentos em um contorno de interesse e a Integral  $J$ .

Finalmente, destaca-se o trabalho de González-Estrada et al. (2015). O erro associado ao fator de intensidade de tensão é avaliado através do estimador *SPR-CX*, discutido na seção 3.2.1. Os autores afirmam que a imposição das condições de equilíbrio na solução recuperada, neste caso, visa melhorar a efetividade do estimador (e não obter limites superiores para o erro). A abordagem proposta utiliza as definições do problema adjunto e da função de influência, no mesmo formato apresentado na seção 2.4.4. Para os problemas bidimensionais da MFLE avaliados nesse trabalho, o estimador apresenta bons resultados para o índice de efetividade. Além disso, é feita uma análise interessante da distribuição do erro estimado em cada elemento da malha, na qual se verifica que o estimador orientado ao objetivo é capaz de capturar, além do erro concentrado ao redor da ponta da trinca, os erros existentes no domínio de extração do fator de intensidade de tensão.

### 3.3 Estratégias Adaptativas para o MEFG

Conforme discutido na seção 2.5, a formulação do MEFG é bastante vantajosa para a aplicação de procedimentos adaptativos do tipo  $p$ . Apesar disso, é possível encontrar algumas publicações que avaliam o processo  $h$ , no qual a malha de elementos é modificada ao longo da análise. A compilação apresentada nesta seção reúne as propostas mais relevantes para o MEFG, destacando os critérios de adaptatividade adotados em cada caso. Cabe ressaltar que alguns trabalhos já mencionados na seção 3.2 serão novamente avaliados, considerando, agora, aspectos da análise adaptativa.

O já mencionado trabalho de Barros et al. (2004b) propõe, pela primeira vez, um

processo adaptativo do tipo  $p$  para o MEFG. Conforme discutido na seção 2.5.2, indicadores de erro são construídos para cada nuvem de elementos – com base no princípio da equidistribuição do erro – de modo a compatibilizar o refinamento  $p$  com a estratégia de enriquecimento nodal do MEFG. Posteriormente, essa estratégia é expandida para modelos não lineares em Barros et al. (2004a).

Em Waisman e Belytschko (2008), propõe-se uma abordagem de enriquecimento adaptativo paramétrico, na qual parâmetros das funções enriquecedoras são otimizados por meio da minimização de medidas de erro baseadas em resíduos locais. A estratégia é aplicada a problemas de camada limite, que exigem um refinamento considerável da aproximação nos contornos do domínio analisado. O problema de minimização utiliza um procedimento de solução não-linear para o cálculo dos parâmetros das funções de enriquecimento, podendo comprometer o custo computacional da análise. Apesar disso, os autores defendem a validade da estratégia pelo fato de que os clássicos processos  $h$  e  $p$  também exigem uma sequência de soluções para o controle do erro da discretização.

Anos mais tarde, Jin et al. (2017) apresentam uma estratégia adaptativa para problemas tridimensionais de propagação por fadiga, tendo em vista simulações de tolerância ao dano. A abordagem utiliza um processo  $h$ , cujo refinamento da malha acompanha a trajetória de propagação da trinca. Segundo os autores, apesar da convicção inicial de que o MEFG poderia simular a propagação de trincas sem a redefinição da malha, o refinamento  $h$  pode ser interpretado como um “casamento por conveniência”, já que a malha adaptada não precisa ser conforme à geometria da trinca ao longo da propagação. Além do princípio da equidistribuição do erro, considera-se um critério que objetiva atingir determinado nível de precisão com o menor número de elementos possível (Ladevèze et al., 1991). Em cada elemento, a regra de refinamento considera, além de medidas locais, um parâmetro de erro global – ambos avaliados em termos da norma energia pelo estimador  $XGR$  (seção 3.2.1). A abordagem proposta garante resultados precisos para o fator de intensidade de tensão e para o número acumulado de ciclos de carregamento. Apesar dos bons resultados obtidos nesse trabalho, os autores destacam que a análise poderia ser mais eficiente com o uso de estimadores orientados ao objetivo, considerando como quantidades de interesse,



por exemplo, o fator de intensidade de tensão.

Também é importante mencionar o trabalho de Bento (2019), que apresenta estratégias  $h$  e  $p$  adaptativas utilizando o estimador de erro ZZ-BD. Para o processo  $h$ , consideram-se como critérios de otimalidade a distribuição igualitária do erro global e do erro específico (neste último, considerando a distribuição do erro por volume). Já o processo  $p$  se baseia na proposta de Barros et al. (2004b). Os resultados obtidos confirmam a eficiência do estimador ZZ-BD para guiar análises adaptativas, sendo verificados passos de refinamento/enriquecimento muito próximos daqueles fornecidos pelo erro exato. Além disso, conclusões importantes são relatadas a respeito do condicionamento da matriz de rigidez no procedimento  $p$ . O aumento do grau da aproximação, neste caso, deteriora consideravelmente o número de condicionamento. Tal problema é contornado, nesse trabalho, pelo uso da PU *flat-top* no MEFG-E de alta ordem.

Além dos tradicionais processos  $h$  e  $p$ , é possível conceber, para o MEFG, um tipo especial de procedimento adaptativo. É no trabalho de Duflot e Bordas (2008) que se propõe a chamada **adaptatividade- $e$** , idealizada para problemas da MFLE. Ao verificarem que o aumento da zona de enriquecimento do MEFG (definida como a região enriquecida com funções de singularidade nas vizinhanças da ponta da trinca<sup>6</sup>) diminui o erro da simulação, os autores sugerem um novo tipo de adaptatividade especialmente concebido para aproximações enriquecidas. A ideia consiste em minimizar o erro através da definição de um tamanho ótimo para a zona de enriquecimento – razão por trás da denominação “adaptatividade- $e$ ”. Em seguida, caso a medida de erro seja superior a uma determinada tolerância, pode-se considerar a aplicação dos clássicos processos  $h$  e/ou  $p$ , mantendo-se constante o tamanho da zona de enriquecimento. Nesse trabalho, os autores apresentam a adaptatividade- $e$  como uma ideia em desenvolvimento.

O tamanho da zona de enriquecimento em problemas da MFLE, de fato, influencia fortemente a solução do MEFG. Em Béchet et al. (2005) e Laborde et al. (2005), propõe-se, pela primeira vez, uma estratégia de enriquecimento geométrico: define-se uma região

---

<sup>6</sup>Apesar de descrever uma região semelhante, o conceito da zona de enriquecimento, neste caso, é diferente daquele de Gupta, Kim e Duarte (2012) para o MEFG<sup>gl</sup>, discutido na seção 2.3.4. Apesar disso, optou-se, no presente texto, por manter a denominação original dos dois trabalhos.

circular fixa, ao redor da ponta da trinca, na qual os nós são enriquecidos com funções de singularidade. Desse modo, o tamanho dessa região (definido por um raio de enriquecimento com origem na ponta da trinca) não depende do tamanho dos elementos da malha. Nesses trabalhos, exemplos numéricos comprovam que o enriquecimento geométrico garante taxas ótimas de convergência para a norma energia, sendo verificadas, também, taxas superiores para o fator de intensidade de tensão. Desde então, essa abordagem tem sido adotada em diversos trabalhos contendo aplicações do MEEG a problemas da MFLE (como, por exemplo, Fries (2008), Ródenas et al. (2008), Lins et al. (2015), Lins et al. (2019) e Jin et al. (2017)). Apesar disso, Béchet et al. (2005) afirmam que o enriquecimento geométrico pode deteriorar o condicionamento do sistema de equações e aumentar significativamente o número de graus de liberdade do problema, sendo necessária a definição de um valor adequado para o raio de enriquecimento – que passa a representar um novo parâmetro a ser definido pelo usuário do sistema computacional. Nesse mesmo trabalho, já se aponta a possibilidade de empregar estimadores de erro *a posteriori* para a correta definição desse parâmetro.

Anos mais tarde, Bordas e Duflo (2017) afirmam que a adaptatividade-*e* tem o poder de revolucionar a maneira como são concebidos os procedimentos adaptativos, promovendo meios flexíveis de se enriquecer localmente a aproximação. Segundo os autores, a ideia é desenvolver técnicas nas quais uma combinação dos processos  $h$ ,  $p$  e  $e$ , aplicados em ordem a ser definida, otimize a aproximação numérica de acordo com a distribuição de erro obtida na análise. No entendimento da autora, não existem publicações (até o momento) que tenham implementado, de fato, essa estratégia de adaptatividade para o MEEG.

# Capítulo 4

## Metodologia

Neste capítulo, apresenta-se a metodologia desta pesquisa. Delimita-se o desenvolvimento do trabalho em etapas e discute-se o objetivo de cada uma delas. Apresentam-se, também, os exemplos numéricos escolhidos para a validação/aplicação das estratégias propostas. Maiores detalhes acerca de cada etapa – incluindo particularidades da formulação dos estimadores e dos procedimentos adaptativos – serão discutidos, juntamente com as simulações numéricas, nos capítulos 5 a 8.

### 4.1 Contexto de Aplicação

As técnicas propostas neste trabalho são idealizadas para modelos contendo trincas cuja geometria inicial é previamente definida. Nesse caso, não se considera o fenômeno de nucleação da trinca. Tal situação é corretamente tratada pela MFLE, que se aplica tanto a um corpo com algum defeito inerente, quanto a um corpo perfeito que tenha atingido o estágio final do processo de nucleação da trinca (da Rosa, 2002).

No contexto da MFLE, as condições na ponta da trinca são completamente caracterizadas pelo fator de intensidade de tensão ( $K$ ). Em termos gerais, esse parâmetro reúne uma combinação entre tamanho da trinca, geometria e carregamento (Dowling, 2013). Expressões analíticas ou empíricas para o cálculo de  $K$  podem ser encontradas em manuais da Mecânica da Fratura (por exemplo, em (Tada et al., 2000)), sendo limitadas a modelos específicos. Por esse motivo, os valores de  $K$  são tipicamente extraídos de soluções

numéricas que contenham as trincas previstas no componente estrutural de interesse.

Em todas as estratégias apresentadas neste trabalho, a representação das trincas se dá por meio de funções de singularidade e/ou funções descontínuas, descritas na seção 2.2.4 e já bastante tradicionais na literatura do MEF<sup>g</sup>. Com o objetivo final fixado na correta obtenção do fator de intensidade de tensão, busca-se, primeiramente uma descrição adequada da singularidade induzida pela trinca. Adicionalmente, deseja-se uma aproximação com erro em energia controlado – o que contribui, indiretamente, para a correta representação da trinca e também garante que o comportamento geral do problema seja bem descrito.

## 4.2 Estimadores de erro para a norma energia no MEF<sup>g</sup>

Conforme mencionado no Capítulo 1, o presente trabalho propõe, pela primeira vez, estimadores de erro *a posteriori* para o MEF<sup>g</sup>. O estimador ZZ-BD (seção 2.4.3) é utilizado em todas as estratégias numéricas aqui propostas. A escolha por esse estimador se fundamenta em duas propriedades: o baixo custo computacional – verificado por Lins et al. (2019) em comparação à técnica de projeção global – e a independência em relação ao fator de intensidade de tensão. Esta última, de fato, pesa à favor do estimador ZZ-BD em comparação ao  $SPR_{XFEM}$  (ou ao  $SPR-CX$ ), uma vez que se evita a necessidade de calcular o fator de intensidade de tensão nas duas escalas de análise (problemas local e global) quando se deseja avaliar o erro em ambas (ver Equação (3.1)).

O desenvolvimento dos estimadores de erro para a norma energia no MEF<sup>g</sup> se baseou nas seguintes etapas:

### 4.2.1 Implementação do estimador ZZ-BD e validação no MEF<sup>g</sup>

Nesta primeira etapa do trabalho, o estimador ZZ-BD foi implementado para o MEF<sup>g</sup> no sistema INSANE, mantendo-se a mesma formulação apresentada em Lins et al. (2019). No processo de validação da implementação, foram reproduzidos todos os resultados daquele trabalho. Por simplificação, optou-se por omitir os resultados desta etapa no presente texto.

### 4.2.2 Formulação e validação do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido do MFG<sup>gl</sup>

Após a validação do estimador no MFG, foi feita a sua extensão para o problema global enriquecido do MFG<sup>gl</sup> e da sua versão estável (MFG-E<sup>gl</sup>), com modificações pertinentes na construção das tensões recuperadas.

Em Lins et al. (2019), o campo de tensões recuperado  $\sigma^*$  ((Equação (2.35))) é construído com as funções  $g_n^d$ , que são análogas às funções de singularidade adotadas no campo de deslocamentos (com a diferença de que as funções  $g_n^d$  descrevem o campo de tensões exato e as funções de singularidade o campo de deslocamentos exato). Nesse trabalho, empregam-se apenas funções de singularidade para a descrição da trinca via MFG e, conseqüentemente, apenas funções  $g_n^d$  em  $\sigma^*$ . Por outro lado, no problema global enriquecido do MFG<sup>gl</sup>, a descrição da trinca é feita unicamente através das **funções de enriquecimento global-local** (Equação 2.25). Nesse contexto, haviam duas opções para a construção das funções de forma de  $\sigma^*$  no presente trabalho: utilizar funções derivadas do enriquecimento global-local ou manter o uso das funções  $g_n^d$  (neste caso, apenas para a solução recuperada, sem alterar a formulação do MFG<sup>gl</sup>). Optou-se, aqui, pela segunda opção, uma vez que as funções  $g_n^d$  descrevem, de fato, a solução exata nas vizinhanças da ponta da trinca. Além disso, o enriquecimento global-local pode não fornecer bons resultados antes que técnicas de controle do erro no modelo local sejam efetuadas. Logo, considerou-se mais favorável o uso das funções  $g_n^d$  nesta etapa da análise.

O campo de tensões recuperado da técnica ZZ-BD, portanto, segue a seguinte equação no problema global enriquecido:

$$\sigma^* = \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^* \\ \sigma_{yy}^* \\ \sigma_{xy}^* \end{pmatrix} = \sum_{\beta=1}^{NN} N_{\beta} \begin{pmatrix} a_{\beta,0}^1 \\ a_{\beta,0}^2 \\ a_{\beta,0}^3 \end{pmatrix} + \sum_{\beta \in I_{GL}} \sum_{n=1}^2 N_{\beta} \begin{pmatrix} a_{\beta,n}^1 g_n^1(r, \theta) \\ a_{\beta,n}^2 g_n^2(r, \theta) \\ a_{\beta,n}^3 g_n^3(r, \theta) \end{pmatrix} \quad (4.1)$$

sendo  $NN$  o número total de nós do modelo,  $r$  e  $\theta$  coordenadas polares com origem na ponta da trinca e  $I_{GL}$  o conjunto de nós enriquecidos com as funções  $g_n^d$  (Equação (2.36)). Nesse caso,  $I_{GL}$  é igual ao conjunto de nós enriquecidos com as funções global-local no campo de deslocamentos.

Conforme será exposto no Capítulo 5, o processo de recuperação de tensões no problema global enriquecido foi explorado em duas estratégias:

1. Uso das tensões recuperadas na construção das condições de contorno de Cauchy no problema local, com o objetivo de aprimorar a solução global a ser imposta. Tal estratégia garantiu resultados bastante favoráveis e dispensou o uso da zona *buffer* (seção 2.3.4) no presente trabalho, conforme será discutido na seção 5.1.
2. Emprego das tensões recuperadas para a obtenção do estimador de erro *a posteriori*. Nesta etapa, após o cálculo de  $\sigma^*$ , aplica-se a Equação (2.32) para computar o erro estimado na norma energia em cada elemento da malha e, em seguida, a Equação 2.33 para a obtenção do erro estimado global.

Os resultados e discussões desta etapa, considerando o MEFG<sup>gl</sup> e o MEFG-E<sup>gl</sup> serão expostos na seção 5.2. A análise do índice de efetividade e das taxas de convergência mostrou, conforme será visto, tendências semelhantes às aquelas observadas no MEFG. Particularidades no comportamento do erro estimado ao longo do processo de ciclos global-local também serão discutidas.

### 4.2.3 Formulação e validação do estimador ZZ-BD no problema local do MEFG<sup>gl</sup>

Após a validação do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido, passou-se à etapa de aplicação desse estimador sobre o problema local. Nesta fase, buscou-se validar o estimador para um posterior uso em estratégias adaptativas – a serem introduzidas ainda neste capítulo.

No presente trabalho, a representação das trincas no problema local segue as mesmas premissas tipicamente adotadas em modelos do MEFG. Logo, a formulação do estimador ZZ-BD no problema local, desde a construção das tensões recuperadas até o cálculo do erro estimado global, é a mesma já adotada para o MEFG – seguindo integralmente a técnica de Lins et al. (2019).

Contudo, é possível identificar uma particularidade desta aplicação a partir da estimativa de erro *a priori* para o problema local (seção 2.3.4). O erro da solução aproximada

no problema local é composto, como visto, por duas parcelas: o erro das condições de contorno provenientes do problema global e o erro da discretização. Qualquer estimador de erro concebido para o erro da discretização, portanto, é incapaz de enxergar a primeira dessas parcelas. Por conseguinte, uma prevalência do erro das condições de contorno sobre o erro da discretização pode levar à uma significativa subestimação do erro, conforme será discutido na seção 5.3.2.4.

Assim como feito no problema global enriquecido, índices de efetividade, taxas de convergência e mapas de erro foram avaliados para a validação do estimador nesta etapa, considerando o  $\text{MEFG}^{\text{gl}}$  e o  $\text{MEFG-E}^{\text{gl}}$ . Detalhes da aplicação do estimador serão apresentados na seção 5.3, juntamente com os resultados das simulações numéricas.

### 4.3 Estimador para o erro do fator de intensidade de tensão no $\text{MEFG}^{\text{gl}}$

Após a validação do estimador de erro para a norma energia, desenvolveu-se um estimador de erro orientado ao objetivo para o  $\text{MEFG}^{\text{gl}}$ . Tal estimador é especialmente concebido para medir o erro associado ao fator de intensidade de tensão, cuja relevância em problemas de fratura já foi devidamente registrada neste texto. O desenvolvimento desse novo estimador é considerado uma das principais contribuições do presente trabalho.

A formulação do  $\text{MEFG}^{\text{gl}}$  permite a extração do fator de intensidade de tensão tanto no problema local quanto no problema global enriquecido. A maior parte dos trabalhos da literatura, entretanto, o faz no problema global enriquecido. Tal escolha se justifica pela convergência mais acelerada da solução neste modelo, enquanto o modelo local exige um maior número de ciclos global-local (ou a utilização de uma zona *buffer* muito extensa) até que seja alcançada uma resposta apropriada. Por essa razão, o estimador orientado ao objetivo é aplicado sobre o problema global enriquecido no presente trabalho.

Conforme apresentado na seção 2.4.4, o estimador de erro orientado ao objetivo utiliza a definição de um **problema dual**, cuja forma variacional foi apresentada na Equação (2.64). No problema dual, a matriz de rigidez é a mesma do problema primal (aquele que se deseja resolver), podendo, inclusive, ser reaproveitada ao longo do processo de solução.

Já os termos associados ao vetor de forças são computados com base no funcional de interesse – neste caso, o fator de intensidade de tensão.

Adota-se, neste trabalho, a Integral de Interação (Yau et al., 1980) como método de extração do fator de intensidade de tensão. Trata-se de um método derivado da Integral J, sendo baseado, portanto, na taxa de liberação de energia. Sua utilização é frequente na literatura do MEF<sup>g</sup> e os resultados obtidos são, em geral, bastante precisos. A aplicação desse método no MEF<sup>gl</sup> foi previamente investigada pela autora e co-autores em Fonseca et al. (2020). Além disso, a viabilidade de um estimador orientado ao objetivo para a Integral de Interação é assegurada pelo fato de esta ser expressa como um funcional linear do campo de deslocamentos.

Visando otimizar a leitura e o entendimento, optou-se por descrever detalhadamente a formulação do estimador orientado ao objetivo no Capítulo 6, juntamente com os resultados das simulações numéricas. O estimador será validado, primeiramente, para o MEF<sup>g</sup> e, na sequência, para o MEF<sup>gl</sup>. Nesta etapa, serão considerados exemplos com diferentes modos de abertura de trinca e soluções de referência exatas ou empíricas/numéricas.

## **4.4 Estratégias adaptativas para o MEF<sup>gl</sup>: trincas estáticas**

Dada a disponibilidade de estimadores de erro, é natural que se busquem técnicas de aprimoramento da solução numérica. Conforme discutido no capítulo introdutório deste texto, a interação entre as escalas global e local no MEF<sup>gl</sup> motiva o desenvolvimento de técnicas adaptativas em ambas. O presente trabalho propõe, portanto, dois processos adaptativos distintos – podendo ser adotados em conjunto ou isoladamente – conforme busca-se elucidar a seguir. Tais procedimentos serão, inicialmente, formulados para trincas estáticas, sem considerar a possibilidade de propagação.

### **4.4.1 Procedimento Adaptativo para o Problema Local**

A concepção de uma estratégia adaptativa para o problema local exige, inicialmente, uma reflexão à respeito dos princípios básicos do MEF<sup>gl</sup> e das razões que motivaram o



seu desenvolvimento. No contexto de um problema de fratura, é encargo da solução local descrever adequadamente as trincas presentes no modelo para, na etapa seguinte da análise, levar tal descrição ao domínio global. Quando se busca o aprimoramento da solução local, portanto, deve-se concentrar na representação das descontinuidades/singularidades.

Apesar de o domínio local ser, de modo geral, pequeno em comparação ao domínio global, o refinamento da malha local implica em aumento considerável do tempo de montagem do sistema de equações do problema global enriquecido. Isso ocorre porque os elementos locais são utilizados como células de integração para a correta avaliação de  $\tilde{\mathbf{u}}_L$  nas funções de forma enriquecidas (Equação 2.25), conforme proposto desde as primeiras aplicações do método (Duarte e Kim, 2008). Por esse motivo, procedimentos adaptativos do tipo  $h$  não serão abordados no presente trabalho.

Um procedimento adaptativo do tipo  $p$ , por sua vez, se justificaria pela independência em relação à malha de elementos finitos. O aumento do grau da aproximação local em problemas bidimensionais, entretanto, não é tão significativo para a resposta final do MEF<sup>gl</sup> – em especial para o fator de intensidade de tensão extraído no problema global enriquecido, conforme proposto neste trabalho<sup>1</sup> – e deteriora significativamente o condicionamento do sistema de equações. O procedimento adaptativo aqui proposto, portanto, se baseia no conceito da **adaptatividade-e**.

Conforme discutido na seção 3.3, a adaptatividade-e busca adaptar o tamanho da região enriquecida com as funções de singularidade. A definição de uma região fixa ao redor da ponta da trinca para a aplicação de tais funções, de fato, já é bastante consolidada nas aplicações do MEF<sup>gl</sup> a problemas da MFLE. No entanto, não há uma regra geral para a definição do tamanho da região enriquecida. Conforme ressaltado por Duflo e Bordas (2008), não existe um verdadeiro valor ótimo para esse tamanho, uma vez que o erro continua a diminuir à medida que a região enriquecida aumenta. Apesar disso, o enriquecimento descreve o comportamento local ao redor da trinca e, portanto, seu efeito tende a diminuir em regiões mais distantes da singularidade. Logo, é provável que uma

---

<sup>1</sup>Em problemas tridimensionais, o uso de elementos locais de alta ordem ou de enriquecimentos polinomiais é frequente e pode ser muito vantajoso, conforme presente, por exemplo em (O’Hara et al., 2015), onde se utiliza uma aproximação de ordem  $p = 3$  no problema local.

região computacionalmente ótima possa ser encontrada.

No Capítulo 7, será apresentado um procedimento de adaptatividade-*e* para o problema local, no qual o erro estimado na norma energia (fornecido pelo estimador ZZ-BD) é utilizado, em um procedimento iterativo, para a seleção de novos nós a serem enriquecidos com funções de singularidade. O processo é iniciado em uma configuração de “mínimo enriquecimento” para a representação da trinca no problema local e termina com uma discretização otimizada, na qual a singularidade é melhor descrita. Para facilitar entendimento do leitor, optou-se por detalhar as etapas da solução na seção 7.1, juntamente com os resultados das simulações numéricas e a discussão sobre os impactos dessa abordagem sobre a resposta final do MEF<sup>gl</sup>.

#### 4.4.2 Procedimento Adaptativo para o Problema Global

O procedimento adaptativo proposto para o problema local, descrito na seção anterior, busca resolver a questão da escolha da discretização desse modelo. A definição do tamanho da região local, por sua vez, exige o uso de medidas de erro na escala global. Nesse sentido, o presente trabalho propõe o uso do estimador de erro no problema global enriquecido para a seleção dos elementos que irão compor o problema local, conforme será exposto na seção 7.2.

Assim como na adaptatividade-*e*, a elaboração de um procedimento adaptativo para a seleção da região local demanda reflexões sobre o propósito do MEF<sup>gl</sup>. O aumento da região local, especialmente quando acompanhado do aumento do número de nós globais enriquecidos com a solução local, implica, naturalmente, na melhoria da solução final. Apesar disso, um aumento excessivo do domínio local faz com que o aprimoramento se dê pela parcela suave da solução global, e não apenas pela correta descrição da singularidade. Em outras palavras, é desejável que o problema local seja incumbido somente de representar corretamente as trincas (ou outros fenômenos particulares). Usar a solução local para aprimorar a parcela suave da solução no problema global enriquecido é algo que vai contra a essência do MEF<sup>gl</sup> em problemas de fratura.

Nesse sentido, o procedimento adaptativo aqui proposto teve o cuidado de evitar a

obtenção de domínios locais excessivamente extensos. Devido a características particulares da distribuição do erro estimado para o fator de intensidade de tensão – a serem discutidas no Capítulo 6 – optou-se por empregar o erro estimado na norma energia nesta etapa do trabalho. Formulou-se um critério de seleção de elementos globais para compor a chamada **zona de enriquecimento** (região que é enriquecida com as funções global-local), valendo-se de um procedimento iterativo que acompanha, também, a execução dos ciclos global-local. Desse modo, o tamanho da região local é atualizado a cada ciclo. Assim como nas seções anteriores, optou-se por minuciar as etapas da solução juntamente com os resultados das simulações numéricas na seção 7.2. Nessa seção, a adaptatividade-e do problema local também será incluída na análise, caracterizando, finalmente, uma estratégia adaptativa com o aprimoramento mútuo da solução do MEF<sup>gl</sup> nas duas escalas.

## 4.5 Estratégias adaptativas para o MEF<sup>gl</sup>: propagação de trincas

Nas simulações de propagação de trincas da MFLE, efetua-se um procedimento incremental de crescimento da trinca – valendo-se de um incremento de trinca inicialmente prescrito – com a avaliação do fator de intensidade de tensão a cada passo do processo. O ângulo que define a orientação assumida pela trinca também é calculado em função desse parâmetro. A precisão do fator de intensidade de tensão, portanto, é essencial nesse tipo de modelagem.

As estratégias adaptativas discutidas na seção anterior, com o propósito de aprimorar o fator de intensidade de tensão e, adicionalmente, o comportamento global do problema, poderiam ser aplicadas diretamente em uma simulação de propagação. Contudo, certas particularidades desse tipo de modelagem podem exigir modificações nos procedimentos adaptativos.

Desde que se adote um incremento de trinca pequeno, a solução aproximada tende a ser pouco alterada entre um passo e outro do processo de propagação. Logo, é possível simplificar critérios, relaxando determinadas condições, sem grande prejuízo aos resultados finais. É nesse sentido que caminha a estratégia adaptativa de propagação a ser

apresentada no Capítulo 8. Trata-se de uma concepção inicial para simulações adaptativas de propagação de trincas, sem o objetivo de esgotar o assunto. Nesse mesmo capítulo, chama-se atenção para a qualidade do fator de intensidade de tensão associado a uma correção pelo erro estimado (via estimador orientado ao objetivo). Pormenores a respeito das medidas de erro e dos procedimentos adaptativos serão discutidos no Capítulo 8.

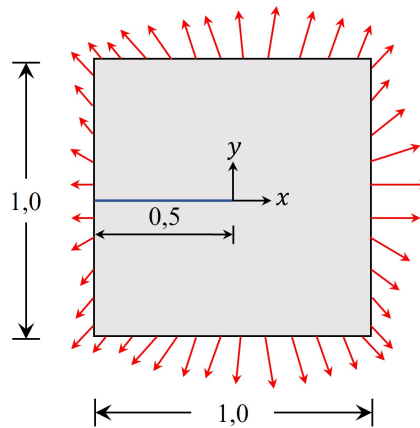
## 4.6 Apresentação dos exemplos numéricos

Na sequência do presente texto, diversas simulações numéricas serão apresentadas com o objetivo de analisar as medidas de erro e as técnicas adaptativas propostas. Foram escolhidos problemas com soluções de referência disponíveis e já consolidados na literatura do MEF/MEFG<sup>gl</sup>. Uma vez que tais exemplos serão estudados em múltiplos capítulos, optou-se por apresentá-los separadamente na presente seção.

### 4.6.1 Problema A

Nos capítulos 5 a 7, será abordado o exemplo de uma chapa contendo uma trinca de borda, ilustrada na Figura 4.1. Neste caso, a solução exata para as tensões em qualquer ponto é fornecida pelos primeiros termos da expansão assintótica da elasticidade para os modos I e II de abertura, considerando o caso particular de uma fissura fechada (Equações (4.2) e (4.3), respectivamente, com o mesmo sistema de coordenadas da Equação (2.20)). Tais funções são impostas como condições de contorno de Neumann e, conseqüentemente, é possível computar os erros exatos na norma energia e os índices de efetividade dos estimadores.

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}^{Modo I} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left( 3 \cos \frac{\theta}{2} + \cos \frac{5\theta}{2} \right) \\ \sigma_{yy}^{Modo I} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left( 5 \cos \frac{\theta}{2} - \cos \frac{5\theta}{2} \right) \\ \tau_{xy}^{Modo I} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left( \sin \frac{5\theta}{2} - \sin \frac{\theta}{2} \right)\end{aligned}\tag{4.2}$$



**Figura 4.1:** Problema A: chapa contendo uma trinca de borda, na qual se impõe a solução exata como condições de contorno de Neumann.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{xx}^{Modo II} &= -\frac{1}{4\sqrt{r}} \left( 7 \sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) \\
 \sigma_{yy}^{Modo II} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left( -\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{5\theta}{2} \right) \\
 \tau_{xy}^{Modo II} &= \frac{1}{4\sqrt{r}} \left( \cos \frac{5\theta}{2} + 3 \cos \frac{\theta}{2} \right)
 \end{aligned}
 \tag{4.3}$$

Para este problema, os valores exatos dos fatores de intensidade de tensão são:

$$K_I^{\text{ex}} = K_{II}^{\text{ex}} = \sqrt{2\pi} \tag{4.4}$$

Este exemplo será tratado em estado plano de deformação, com  $E = 1,0$  e  $\nu = 0,3$  (em unidades consistentes). Usando as expressões (4.2), (4.3) ou a superposição de ambas, é possível se impor condições de modo I, II ou misto de abertura. Tais casos serão referenciados, nos próximos capítulos, como “Problema A - Modo I”, “Problema A - Modo II” e “Problema A - Modo Misto”, respectivamente.

Em todas as análises deste exemplo, consideram-se  $4 \times 4$  pontos de Gauss nos elementos do problema global. Tal número também é adotado no problema local, exceto nos elementos imediatamente abaixo ou acima da trinca, nos quais se adotam  $12 \times 12$  pontos de Gauss para melhor representar as funções descontínuas/singulares. No problema global enriquecido, empregam-se os elementos locais como células de integração, conforme

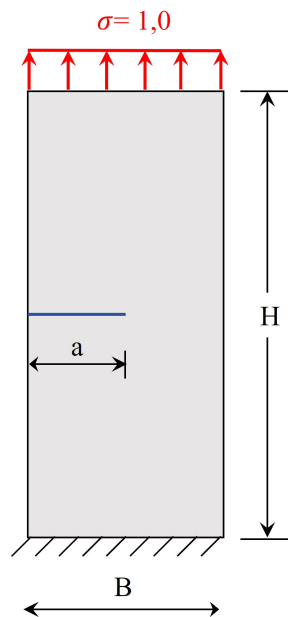
mencionado na seção 4.4.1.

#### 4.6.2 Problema B

Nos Capítulos 6 a 8, será estudado o exemplo apresentado na Figura 4.2. Trata-se de uma chapa contendo uma trinca de borda em modo I de abertura, para a qual se tem a seguinte solução de referência para  $K_I$ , com precisão de 0,5% (Tada et al., 2000):

$$K_I^{\text{REF}} = \sqrt{\frac{2B}{\pi a} \tan \frac{\pi a}{2B} \frac{0,752 + 2,02(a/B) + 0,37 \left(1 - \sin \frac{\pi a}{2B}\right)^3}{\cos \frac{\pi a}{2B}}} \sigma \sqrt{\pi a} \quad (4.5)$$

na qual  $a$  representa o comprimento da trinca,  $B$  a largura da chapa e  $\sigma$  o carregamento imposto, conforme mostrado na Figura 4.2.



**Figura 4.2:** Problema B: chapa contendo uma trinca de borda em modo I de abertura, com  $a = 3,5$ ,  $B = 7,0$  e  $H = 16,0$  (em unidades consistentes.)

Neste exemplo, será considerado estado plano de tensão com  $E = 1 \times 10^5$  e  $\nu = 0,3$  (em unidades consistentes). O esquema de integração numérica é o mesmo adotado no Problema A, com uma modificação na região associada à trinca no problema local. Neste caso, considera-se o procedimento de subdivisão em elementos triangulares e mapeamento de coordenadas implementado por Campos (2020) no sistema INSANE. Esse procedimento é utilizado sempre que a trinca não estiver localizada sobre as arestas dos elementos locais.

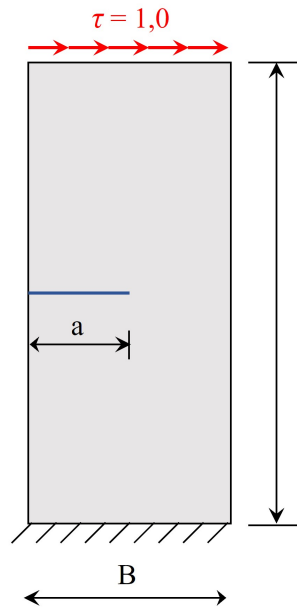
### 4.6.3 Problema C

No Capítulo 6, também será abordado o exemplo da Figura 4.3, que contém uma trinca de borda em modo misto de abertura. Nesse problema, mantêm-se a geometria e as propriedades materiais do Problema B, alterando-se o sentido do carregamento imposto. O esquema de integração numérica do Problema B também é mantido em sua integridade. Adota-se como referência para os fatores de intensidade de tensão a seguinte solução numérica obtida no *software* comercial *ANSYS*<sup>2</sup>:

$$K_I^{\text{REF}} = 34,1240$$

$$K_{II}^{\text{REF}} = 4,5441$$

(4.6)



**Figura 4.3:** Problema C: chapa contendo uma trinca de borda em modo misto de abertura, com  $a = 3,5$ ,  $B = 7,0$  e  $H = 16,0$  (em unidades consistentes).

<sup>2</sup>Foram utilizados elementos *Solid 183* (Q8) em uma malha com 11042 nós. Adotou-se uma densidade de malha de 1/60 em uma região quadrada (lado igual a 3,5) ao redor da ponta da trinca.

## 4.7 Medidas de Erro Adotadas

Nos capítulos seguintes, diversas medidas de erro são analisadas no decorrer das simulações numéricas. Para facilitar o entendimento do leitor, uma síntese de todas as medidas a serem referenciadas, com seus devidos símbolos, é apresentada a seguir, com a repetição de algumas equações da seção 2.4.

- **Erro exato global (norma energia):** calculado através da solução exata e construído a partir da contribuição de cada elemento  $e$ :

$$\|e\|_{\varepsilon(\Omega_a)} = \left( \sum_{e=1}^{NE} \|e\|_{\varepsilon(\Omega_e)}^2 \right)^{1/2} \quad (4.7)$$

com  $a = G$  no problema global enriquecido e  $a = L$  no problema local. O termo  $\|e\|_{\varepsilon(\Omega_e)}^2$  é dado na Equação (2.31).

- **Erro estimado global (norma energia):** calculado através da solução recuperada e construído a partir da contribuição de cada elemento  $e$ :

$$\|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_a)} = \left( \sum_{e=1}^{NE} \|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_e)}^2 \right)^{1/2} \quad (4.8)$$

com  $a = G$  no problema global enriquecido e  $a = L$  no problema local. O termo  $\|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_e)}^2$  é dado na Equação (2.32).

- **Índice de efetividade:** razão entre a norma energia dos erros estimado e exato:

$$\theta_a = \frac{\|e^*\|_{\varepsilon(\Omega)}}{\|e\|_{\varepsilon(\Omega_a)}} \quad (4.9)$$

com  $a = G$  no problema global enriquecido e  $a = L$  no problema local.

- **Erro exato relativo global (norma energia):** razão entre a norma energia do erro exato (4.7) e da solução exata:

$$\mathcal{E}_{\% \Omega_a} = \frac{\|e\|_{\varepsilon(\Omega_a)}}{\|u\|_{\varepsilon(\Omega_a)}} \times 100\% \quad (4.10)$$

com  $a = G$  no problema global enriquecido e  $a = L$  no problema local.



- **Erro estimado relativo global (norma energia):** razão entre a norma energia do erro estimado (2.33) e da solução aproximada, corrigida pelo erro estimado:

$$\mathcal{E}_{\% \Omega_a}^* = \frac{\|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_a)}}{\sqrt{\|\tilde{\mathbf{u}}\|_{\varepsilon(\Omega_a)} + \|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_a)}}} \times 100\% \quad (4.11)$$

com  $a = G$  no problema global enriquecido e  $a = L$  no problema local.

- **Erro exato do fator de intensidade de tensão:** calculado apenas no Problema A, usando (4.4):

$$\mathcal{E}(K_i) = \sqrt{2\pi} - K_i \quad (4.12)$$

com  $i = 1$  para  $K_I$  e  $i = 2$  para  $K_{II}$ .

- **Erro de referência do fator de intensidade de tensão:** calculado nos Problemas B e C, usando os valores de referência (4.5 e 4.6):

$$\mathcal{E}^{\text{REF}}(K_i) = K_i^{\text{REF}} - K_i \quad (4.13)$$

com  $i = 1$  para  $K_I$  e  $i = 2$  para  $K_{II}$ .

- **Erro estimado do fator de intensidade de tensão:** calculado conforme a Equação (2.75):

$$\mathcal{E}^*(k_i) = \sum_{k=1}^{NE} Q^k(e^*) \quad (4.14)$$

com  $i = 1$  para  $K_I$ ,  $i = 2$  para  $K_{II}$  e  $Q^k(e^*)$  dado pela Equação (2.74). Maiores detalhes serão dados no Capítulo 6.

- **Erro exato relativo do fator de intensidade de tensão:** calculado apenas no Problema A, usando a Equação (4.4):

$$\mathcal{E}_{\%}(K_i) = \frac{\sqrt{2\pi} - K_i}{\sqrt{2\pi}} \times 100\% \quad (4.15)$$

com  $i = 1$  para  $K_I$  e  $i = 2$  para  $K_{II}$ .

- **Erro de referência relativo do fator de intensidade de tensão:** calculado nos Problemas B e C, usando os valores de referência (Equações (4.5) e (4.6)):

$$\mathcal{E}_{\%}^{\text{REF}}(K_i) = \frac{K_i^{\text{REF}} - K_i}{K_i^{\text{REF}}} \times 100\% \quad (4.16)$$

com  $i = 1$  para  $K_I$  e  $i = 2$  para  $K_{II}$ .

- **Erro estimado relativo do fator de intensidade de tensão:** razão entre o erro estimado (Equação (4.14)) e o valor aproximado para o fator de intensidade de tensão, corrigido pelo erro estimado:

$$\mathcal{E}_{\%}^*(K_i) = \frac{\mathcal{E}^*(K_i)}{K_i + \mathcal{E}^*(K_i)} \times 100\% \quad (4.17)$$

com  $i = 1$  para  $K_I$  e  $i = 2$  para  $K_{II}$ .

- **Índice de efetividade do estimador orientado ao objetivo:** razão entre o erro exato e o erro estimado do fator de intensidade de tensão, calculado apenas no Problema A:

$$\theta^{K_i} = \frac{\mathcal{E}^*(K_i)}{\mathcal{E}(K_i)} \quad (4.18)$$

com  $i = 1$  para  $K_I$ ,  $i = 2$  para  $K_{II}$ .

- **Índice de efetividade aproximado do estimador orientado ao objetivo:** razão entre o erro de referência e o erro estimado do fator de intensidade de tensão, calculado nos Problemas B e C:

$$\tilde{\theta}^{K_i} = \frac{\mathcal{E}^*(K_i)}{\mathcal{E}^{\text{REF}}(K_i)} \quad (4.19)$$

com  $i = 1$  para  $K_I$  e  $i = 2$  para  $K_{II}$ .

## Capítulo 5

# Estimadores de Erro para a Norma Energia no MEFG<sup>gl</sup>

Neste capítulo, apresenta-se o estimador de erro proposto para o MEFG<sup>gl</sup>, considerando medidas baseadas na norma energia. Inicialmente, o processo de recuperação de tensões é utilizado na etapa de imposição das condições de contorno no problema local. Em seguida, avalia-se o estimador de erro construído com esse mesmo processo, aplicado sobre problema global enriquecido e, em seguida, sobre o problema local.

### 5.1 Condições de Contorno no Problema Local: Uso das Tensões Recuperadas

#### 5.1.1 Considerações Iniciais

Conforme discutido na seção 2.3.4, o trabalho de Gupta, Kim e Duarte (2012) apresentou um estudo detalhado a respeito do erro associado à imposição de condições de contorno inexatas sobre o problema local do MEFG<sup>gl</sup>. Nesse trabalho, os autores avaliam a zona *buffer* e o processo de ciclos global-local, considerando, em ambos os casos, somente a imposição de deslocamentos no contorno local (condições de contorno de Dirichlet).

No presente trabalho, uma nova abordagem é proposta. Em simulações com a utilização de estimadores de erro baseados em técnicas de recuperação, o campo de tensões

recuperado ( $\boldsymbol{\sigma}^*$ ) pode, também, ser aplicado com outros objetivos. O que se propõe aqui é o uso das tensões recuperadas na imposição das condições de contorno de Cauchy no problema local. Desse modo, substitui-se o **campo de tensões aproximado** do problema global pelo **campo de tensões recuperado** pelo procedimento ZZ-BD (seção 2.4.3). A formulação do problema local (Equação (2.24)), neste caso, sofre uma alteração no termo  $\mathbf{t}(\tilde{\mathbf{u}}_G^0)$ :

$$\text{Encontre } \tilde{\mathbf{u}}_L \in \tilde{\mathcal{V}}_L(\Omega_L) \subset \mathcal{H}^1(\Omega_L) \forall \tilde{\mathbf{v}}_L \in \tilde{\mathcal{V}}_L(\Omega_L)$$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_L} \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}}_L)^T \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{u}}_L) d\mathbf{x} + \kappa \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{v}}_L^T \tilde{\mathbf{u}}_L ds = \\ \int_{\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G^N} \tilde{\mathbf{v}}_L^T \bar{\mathbf{t}} ds + \int_{\partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G)} \tilde{\mathbf{v}}_L^T (\mathbf{t}^*(\tilde{\mathbf{u}}_G^0) + \kappa \tilde{\mathbf{u}}_G^0) ds \end{aligned} \quad (5.1)$$

sendo  $\mathbf{t}^*(\tilde{\mathbf{u}}_G^0)$  o vetor de tensões de superfície calculado no modelo global a partir das tensões recuperadas  $\boldsymbol{\sigma}^*$ :

$$\mathbf{t}^* = \boldsymbol{\sigma}^* \cdot \mathbf{n} \quad \text{em } \partial\Omega_L \setminus (\partial\Omega_L \cap \partial\Omega_G) \quad (5.2)$$

Outro fator determinante na imposição das condições de contorno sobre o problema local é o parâmetro de rigidez  $\kappa$  na Equação (5.1). O presente trabalho adota o procedimento proposto por Birner e Schweitzer (2019), que elimina a necessidade de pré-definição desse parâmetro. Tal procedimento calcula o valor de  $\kappa$  através de um balanceamento das normas de vetores calculados nos contornos global e local. Mais detalhes podem ser encontrados em Birner e Schweitzer (2019) e em Pereira (2019).

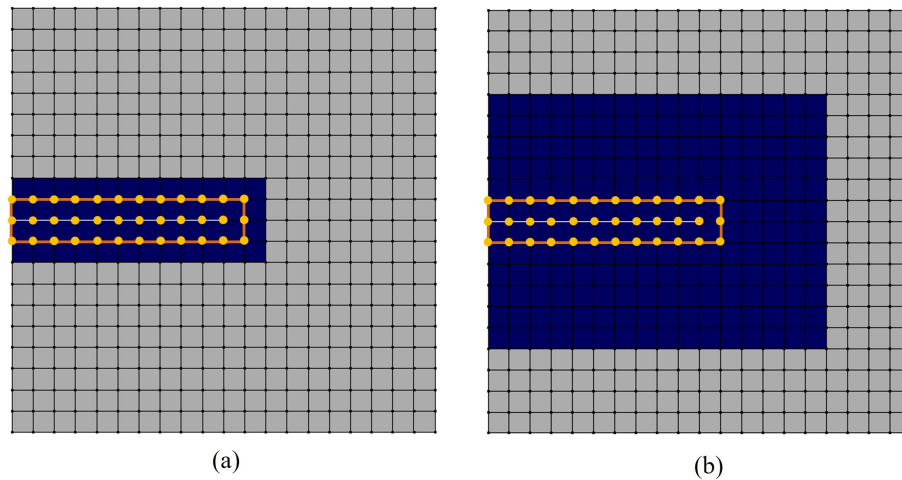
### 5.1.2 Simulações Numéricas

Para analisar a viabilidade da estratégia proposta, considera-se o **Problema A - Modo Misto** (seção 4.6.1). A malha global adotada é um *grid* de  $20 \times 20$ , cujos elementos são divididos em  $2 \times 2$  partes para a definição da malha local. São utilizados elementos Q4 nos dois modelos.

Para o estudo das condições de contorno no problema local, consideram-se três configurações distintas:

1. Domínio local sem zona *buffer* + condições de contorno de Dirichlet;
2. Domínio local com zona *buffer* + condições de contorno de Dirichlet.
3. Domínio local sem zona *buffer* + condições de contorno de Cauchy recuperadas.

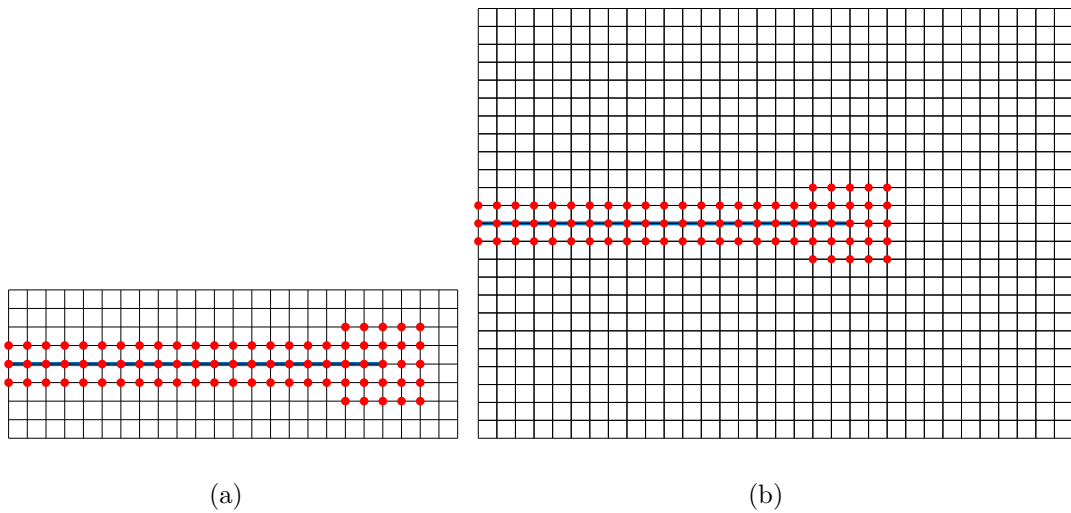
Na Figura 5.1, ilustram-se os dois tamanhos de domínios locais utilizados. No domínio local com zona *buffer*, considera-se a adição de 4 camadas de elementos ao redor da zona de enriquecimento<sup>1</sup>. Em ambos os casos, mantêm-se o mesmo conjunto de nós globais enriquecidos com as funções global-local (ou seja, a zona de enriquecimento é a mesma nos dois casos). A representação da trinca no modelo local é feita através das funções de singularidade, conforme mostra a Figura 5.2.



**Figura 5.1:** Domínios locais (em azul) localizados sobre a malha global (em cinza). Os nós globais enriquecidos com as funções global-local são destacados em amarelo. (a) Domínio local sem zona *buffer*. (b) Domínio local com zona *buffer*.

Para a comparação entre as três configurações de condições de contorno aqui analisadas, são consideradas as seguintes medidas:

<sup>1</sup>Adotou-se o número de camadas igual a 4 para a zona *buffer* por este ser o maior valor empregado nas análises de Gupta, Kim e Duarte (2012).

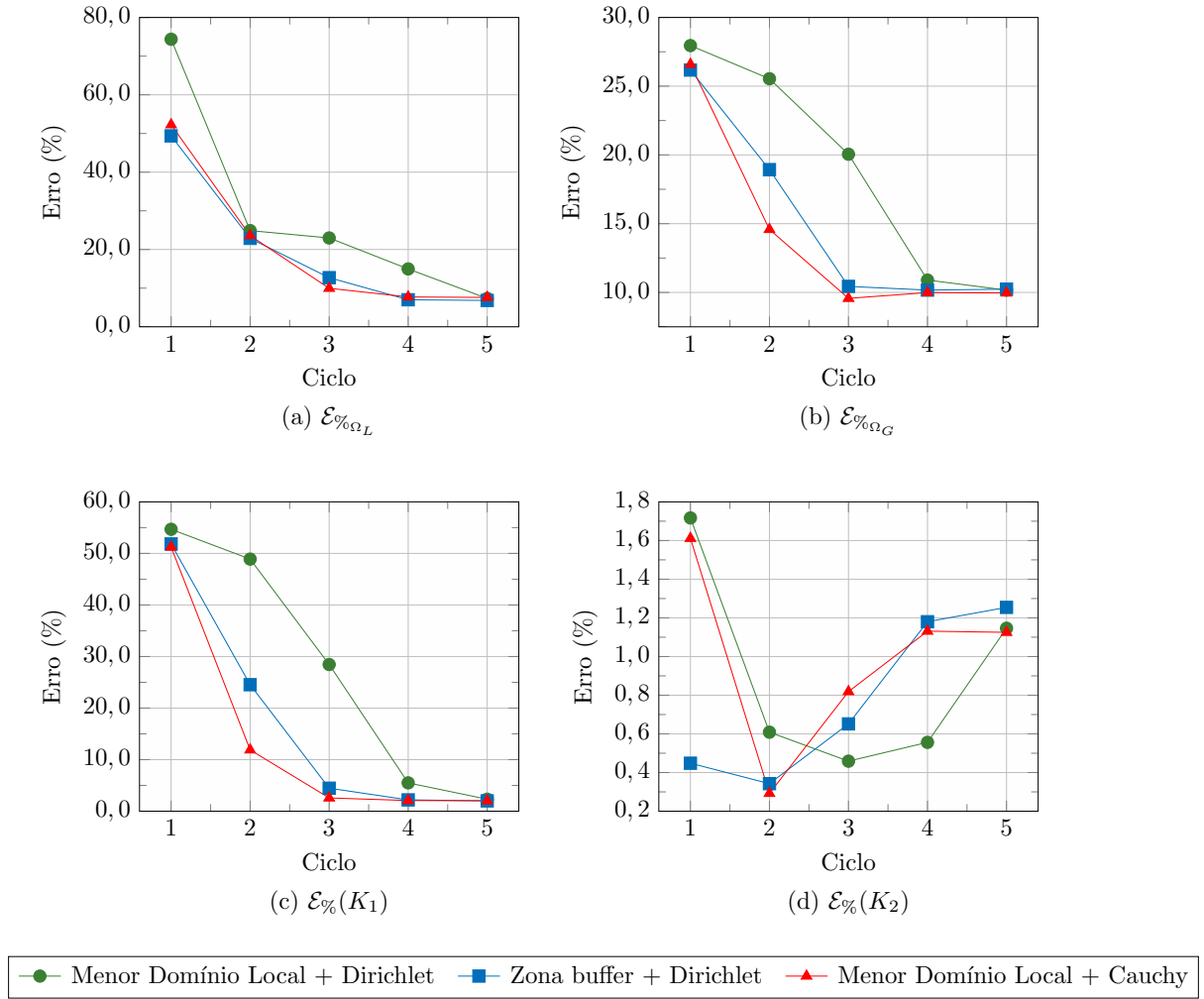


**Figura 5.2:** Nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Domínio local sem zona *buffer*, (b) Domínio local com zona *buffer*.

- Erro exato relativo na norma energia do problema global enriquecido:  $\mathcal{E}_{\%_{\Omega_G}}$ , Equação (4.10);
- Erro exato relativo na norma energia do problema local:  $\mathcal{E}_{\%_{\Omega_L}}$ , calculado nos elementos internos ao contorno laranja da Figura 5.1 (Equação (4.10) com  $\Omega_L$  igual ao domínio citado). Mantém-se, assim, um mesmo domínio de avaliação do erro nas duas configurações de modelo local;
- Erro exato relativo dos fatores de intensidade de tensão:  $\mathcal{E}_{\%}(K_i)$ , Equação (4.15).

Os resultados obtidos ao longo de cinco ciclos global-local são apresentados na Figura 5.3, considerando a abordagem padrão do MEFG<sup>gl</sup>. Em seguida, apresentam-se os resultados do MEFG-E<sup>gl</sup> na Figura 5.4.

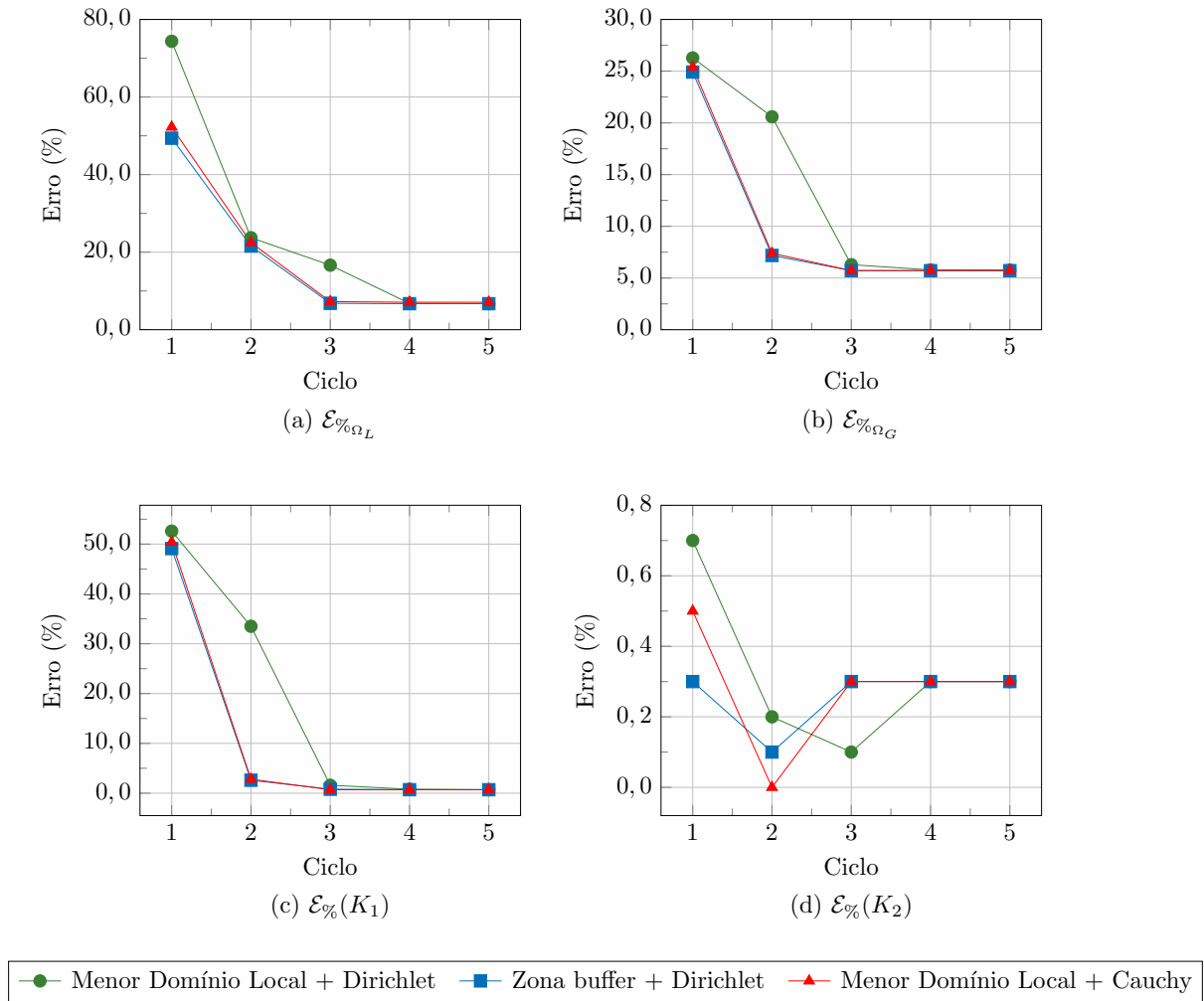
Conforme se observa na Figura 5.3, as três abordagens atingem praticamente os mesmos resultados após a execução de 5 ciclos global-local. Entretanto, verificam-se diferenças significativas na convergência dos resultados. As condições de contorno de Dirichlet associadas ao menor domínio local requerem, de modo geral, 4-5 ciclos para atingir o patamar final de erro. Quando se adota a zona *buffer*, a convergência é acelerada, com erros menores sendo obtidos já no terceiro ciclo global-local. Finalmente, quando as condições de contorno de Cauchy recuperadas são empregadas, a convergência é ainda mais rápida, em



**Figura 5.3:** Resultados do **MEFG<sup>gl</sup>** para as medidas de erro nos problemas local e global enriquecido, considerando as três configurações de condições de contorno.

especial para o erro em energia no problema global e para  $K_I$  (observar como a curva associada a Cauchy fica abaixo das demais). Esses resultados confirmam a validade da estratégia proposta, mostrando que as tensões recuperadas fornecem, de fato, resultados vantajosos quando utilizadas na imposição das condições de contorno do problema local.

Quanto aos resultados do **MEFG-E<sup>gl</sup>** (Figura 5.4), verifica-se, novamente, uma convergência acelerada das soluções obtidas com as condições de contorno de Cauchy recuperadas. A diferença em relação ao uso da zona *buffer*, neste caso, é bem menor do que no **MEFG<sup>gl</sup>**. Tal resultado pode ser explicado pelo ganho de precisão garantido pelo enriquecimento global-local estável – estudado pela autora e co-autores, conforme já mencionado, em Fonseca et al. (2020) – que promove uma grande redução dos erros entre o primeiro e



**Figura 5.4:** Resultados do **MEFG-E<sup>gl</sup>** para as medidas de erro nos problemas local e global enriquecido considerando as três configurações de condições de contorno.

o segundo ciclo.

Cabe ressaltar que os resultados do primeiro ciclo são, de fato, precários, já que a trinca não é representada no problema global inicial. A partir do segundo ciclo, o problema local recebe condições de contorno mais adequadas (já com algum nível de descrição da trinca) e todas as grandezas analisadas são consideravelmente aprimoradas. A intensidade desse aprimoramento, entretanto, depende de como são impostas as condições de contorno no problema local. O que se verifica aqui, na comparação entre as condições de Cauchy recuperadas e a zona *buffer*, é uma superioridade da primeira no caso do MEFG<sup>gl</sup> e uma equivalência entre ambas no MEFG-E<sup>gl</sup>. No caso das condições de Cauchy recuperadas, entretanto, dispensa-se o uso de domínios locais mais extensos.



Também é importante destacar o comportamento de  $K_{II}$  nas Figuras 5.3 e 5.4. Ao contrário do que ocorre com  $K_I$  e com as medidas relacionadas à norma energia, o de erro de  $K_{II}$  chega a aumentar no decorrer dos ciclos global-local (especialmente com a abordagem padrão do MEFG<sup>gl</sup>). Tais resultados refletem a complexidade inerente ao modo II de abertura de trinca, que influencia fortemente a precisão do cálculo de  $K_{II}$ .

Com base nos resultados desta seção, considera-se apropriada a imposição das tensões recuperadas no problema local, com o objetivo de reduzir o erro associado às condições de contorno e garantir uma convergência acelerada da solução ao longo do processo de ciclos global-local. Por esse motivo, as condições de contorno de Cauchy recuperadas serão adotadas em **todas** as simulações numéricas do restante deste trabalho. Análises adicionais sobre essa estratégia, incluindo a utilização de tensões descontínuas, podem ser encontradas em Marques et al. (2021).

## 5.2 Estimador ZZ-BD no Problema Global Enriquecido do MEFG<sup>gl</sup>: norma energia

### 5.2.1 Considerações Iniciais

Conforme introduzido na seção 4.2.2, formula-se, no presente trabalho, o estimador ZZ-BD no problema global enriquecido do MEFG<sup>gl</sup>. Nesta aplicação, o processo de recuperação de tensões – já utilizado na imposição de condições de contorno de Cauchy (seção 5.1) – é empregado na construção de um estimador de erro (valendo-se dos conceitos gerais de estimadores baseados em recuperação, descritos na seção 2.4). Os resultados das simulações numéricas de validação do estimador para o MEFG<sup>gl</sup> e a sua versão estável são discutidos a seguir.

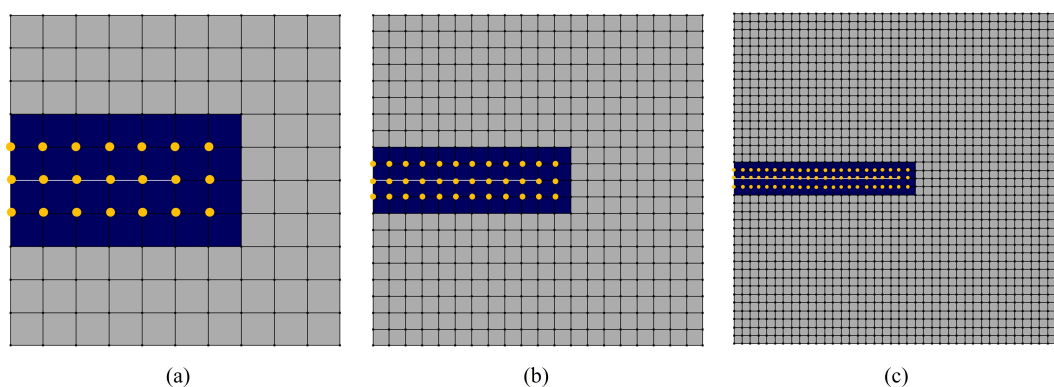
### 5.2.2 Simulações Numéricas

Visando estudar o comportamento do novo estimador, aborda-se, nesta seção, o **Problema A - Modo Misto** (seção 4.6.1). Adota-se uma sequência de três malhas globais

aninhadas (*grids* de  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$  e  $40 \times 40$ ), compostas por elementos do tipo Q4. Em todos os casos, dividem-se os elementos globais em  $2 \times 2$  partes para a definição da malha local, também formada por elementos Q4. Duas configurações de domínios locais são analisadas:

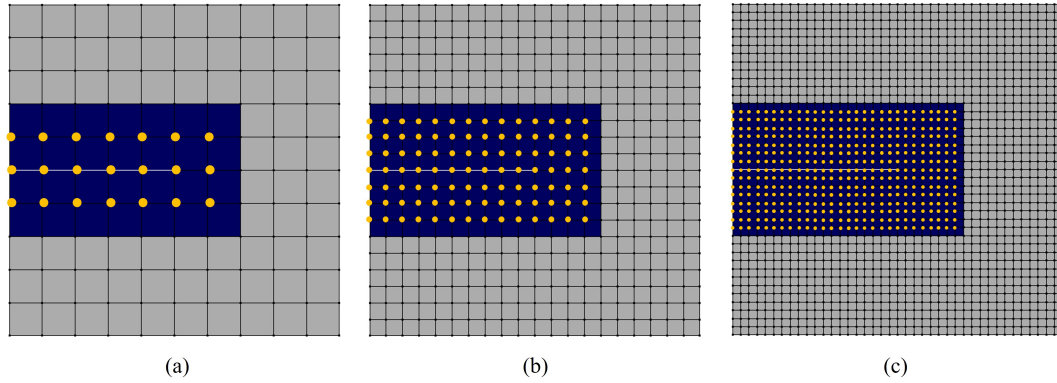
- **Domínios locais topológicos:** a região enriquecida com as funções global-local é limitada aos elementos globais atravessados pela trinca e, portanto, diminui à medida que a malha global é refinada;
- **Domínios locais geométricos:** a região enriquecida com as funções global-local independe do tamanho da malha global.

Em ambas as configurações, a zona de enriquecimento no problema global é a maior possível, ou seja, todos os nós localizados no interior da região local são enriquecidos (em outras palavras, não há zona *buffer*). Os domínios locais associados a cada uma das malhas são ilustrados nas Figuras 5.5 e 5.6 para as configurações topológica e geométrica, respectivamente.

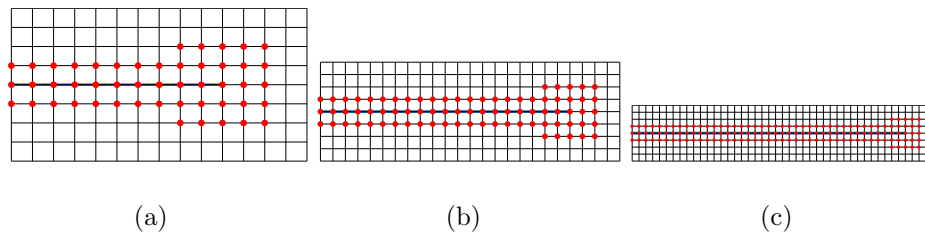


**Figura 5.5:** Domínios locais **topológicos** (em azul) localizados sobre a malha global (em cinza). (a) Malha  $10 \times 10$ , (b) Malha  $20 \times 20$  e (c) Malha  $40 \times 40$ .

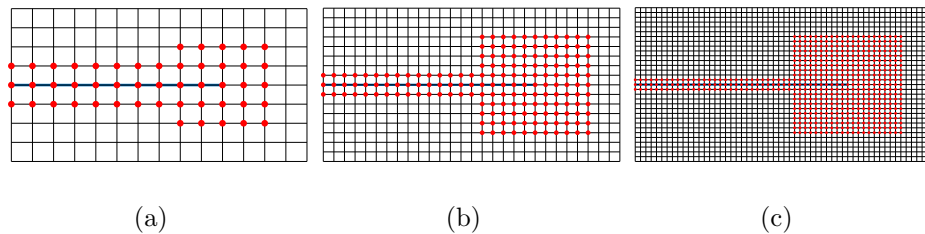
Em todos os problemas locais aqui tratados, representa-se a trinca através de funções de singularidade (Equação 2.20). A disposição dos nós enriquecidos é ilustrada nas Figuras 5.7 e 5.8 para os domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente.



**Figura 5.6:** Domínios locais **geométricos** (em azul) localizados sobre a malha global (em cinza). (a) Malha  $10 \times 10$ , (b) Malha  $20 \times 20$  e (c) Malha  $40 \times 40$ .



**Figura 5.7:** Domínios locais **topológicos**: Nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Malha  $10 \times 10$ , (b) Malha  $20 \times 20$  e (c) Malha  $40 \times 40$ . Figuras fora de escala entre si.



**Figura 5.8:** Domínios locais **geométricos**: Nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Malha  $10 \times 10$ , (b) Malha  $20 \times 20$  e (c) Malha  $40 \times 40$ .

### 5.2.2.1 Taxas de Convergência e Índices de Efetividade

Tendo como base a formulação descrita no capítulo de metodologia (seção 4.2.2), apresentam-se, na Figura 5.9, os erros exato e estimado na norma energia do problema global enriquecido ( $\|e\|_{\varepsilon(\Omega_G)}$  e  $\|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_G)}$ , conforme as Equações (4.7) e (4.8), respectivamente), bem como suas taxas de convergência ( $\beta$ ), considerando a sequência de três

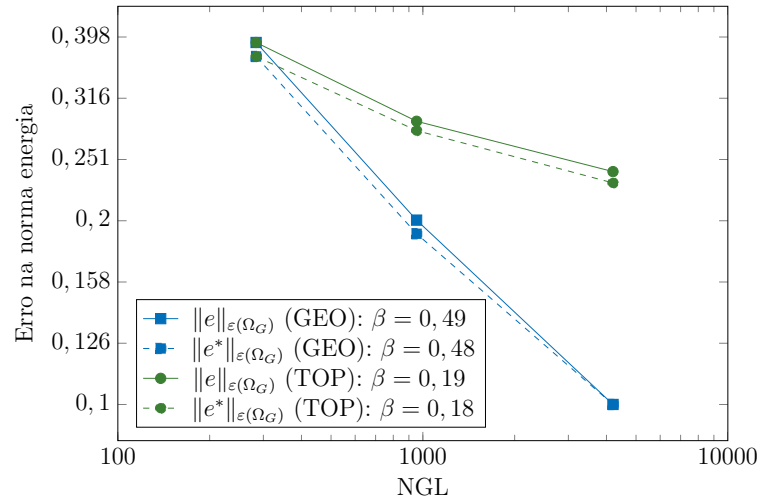
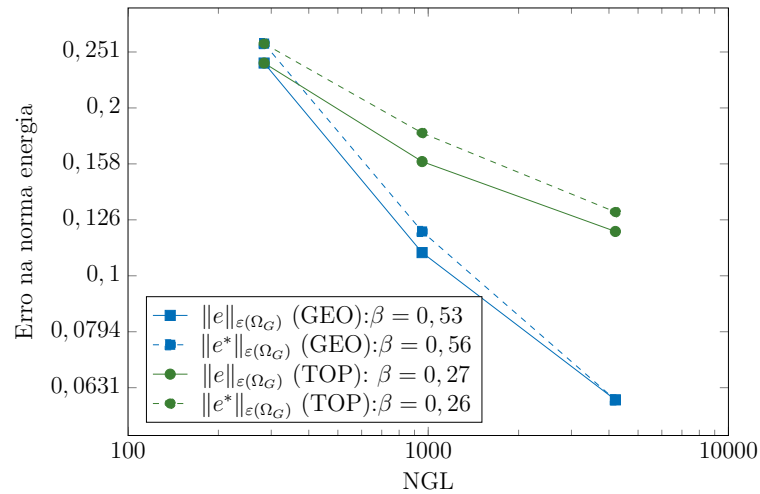
malhas globais. Nessa figura, são exibidos os resultados finais de cada uma das malhas após a execução de 4 ciclos global-local. A proximidade entre as curvas dos erros exato e estimado mostra a habilidade do estimador ZZ-BD em descrever corretamente o comportamento do problema analisado. Mesmo na configuração de domínios locais topológicos (curvas em azul na Figura 5.9), na qual a região enriquecida com as funções global-local é pequena e, conseqüentemente, a descrição da trinca é penalizada, o estimador fornece uma boa aproximação para o erro em energia. Tal resultado confirma a robustez do estimador proposto.

Também é interessante observar, na Figura 5.9, o aumento significativo das taxas de convergência da solução quando a configuração de domínios locais geométricos é empregada. Assim como observado por Fonseca et al. (2020), os resultados da estratégia topológica não atingem a taxa ótima de convergência<sup>2</sup>. Tal fato se justifica pela má representação da singularidade associada à trinca. Quando se adota a estratégia geométrica, por sua vez, a taxa de convergência do MCFG<sup>gl</sup> torna-se bastante próxima do valor ótimo, enquanto a do MCFG-E<sup>gl</sup> ultrapassa esse valor – confirmando, mais uma vez, a superioridade do enriquecimento global-local estável em relação à versão padrão.

Na Figura 5.10, apresentam-se os índices de efetividade do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido (Equação 2.34), avaliados, novamente, na sequência de três malhas globais após a execução de 4 ciclos global-local. Valores próximos de 1,0 foram atingidos em todos os casos, ilustrando quantitativamente o comportamento observado na Figura 5.9 e confirmando a validade do estimador proposto. É interessante notar que as curvas referentes à configuração geométrica convergem de maneira mais evidente para o valor unitário – o que é um resultado desejável, por confirmar que o estimador é assintoticamente exato (Zienkiewicz e Zhu, 1992b). Observam-se, também, superestimativas de erro no caso do MCFG-E<sup>gl</sup> (valores de  $\theta_G$  sempre superiores a 1,0), com comportamento semelhante ao observado por Lins et al. (2019) na aplicação do estimador ZZ-BD ao MCFG-E. Apesar disso, em ambas as estratégias estáveis (MCFG-E e MCFG-<sup>gl</sup>), a efetividade do estimador diminui – aproximando-se da unidade – à medida que a malha é

---

<sup>2</sup>Considera-se ótima a taxa de convergência igual a 0,5 em uma curva *log-log* do erro na norma energia em função do número de graus de liberdade.

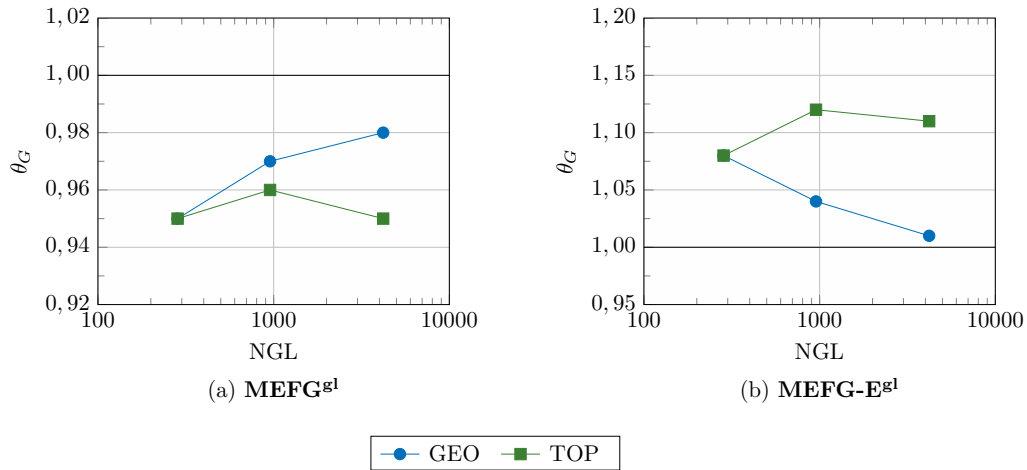
(a) MEFG-g<sup>1</sup>(b) MEFG-E<sup>g1</sup>

**Figura 5.9:** Convergência dos erros exato e estimado no problema global enriquecido, considerando a sequência de 3 malhas globais. (a) MEFG-g<sup>1</sup> e (b) MEFG-E<sup>g1</sup>. As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. “NGL” se refere ao número de graus de liberdade do problema global enriquecido. Eixos  $x$  e  $y$  em escala logarítmica.

refinada.

### 5.2.2.2 Erro Estimado por Elemento

Na Figura 5.11, apresenta-se a distribuição dos erros exato e estimado por elemento, considerando os resultados finais (quarto ciclo global-local) do MEFG-g<sup>1</sup>. Por simplificação, apresentam-se apenas os resultados obtidos com os domínios locais geométricos. Em todas

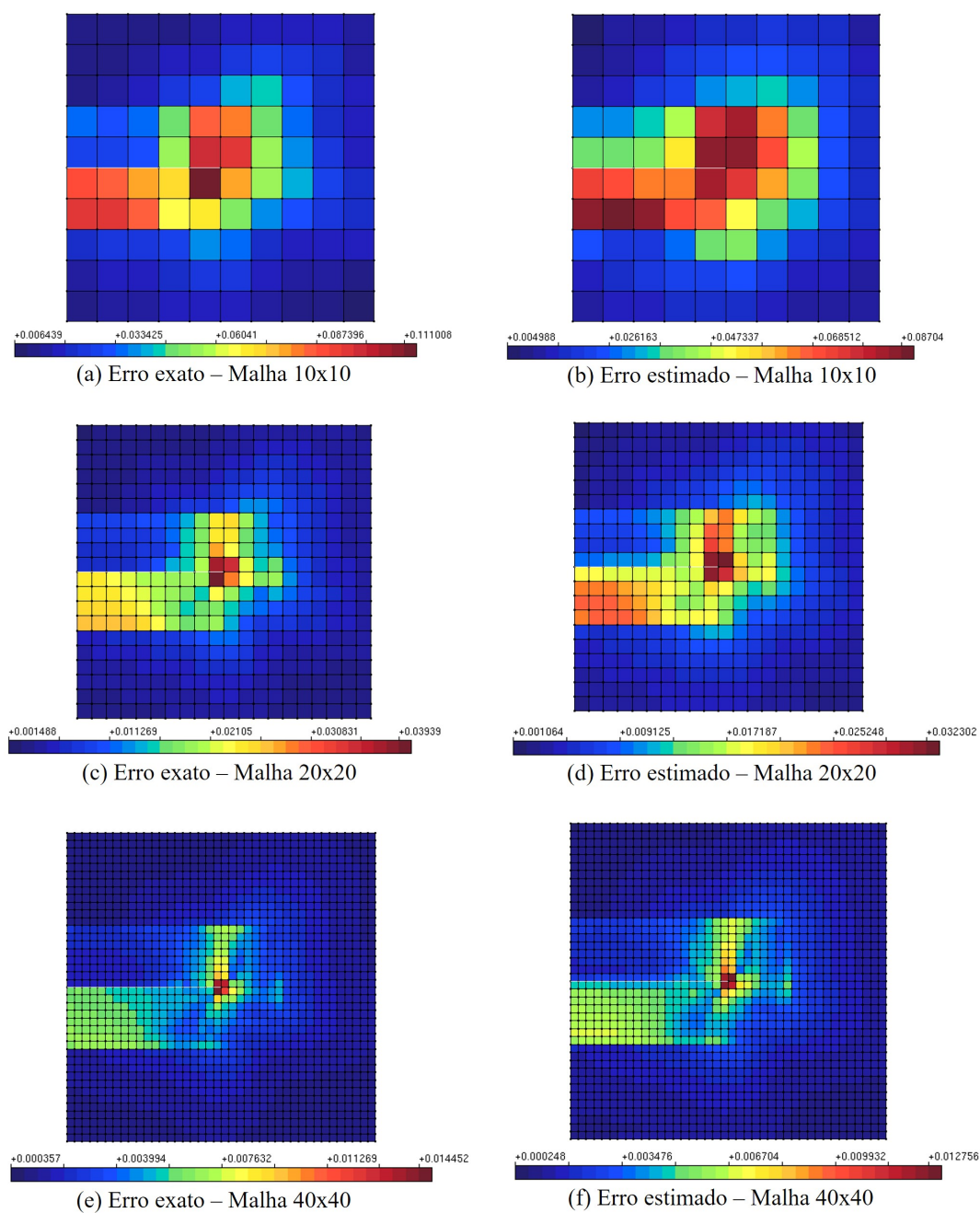


**Figura 5.10:** Índice de efetividade ( $\theta_G$ ) do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido, considerando a sequência de 3 malhas globais. As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. “NGL” se refere ao número de graus de liberdade do problema global enriquecido. Eixo  $x$  em escala logarítmica.

as malhas, é possível observar que o estimador ZZ-BD, de fato, fornece uma distribuição de erro coerente e próxima à do erro exato. Verifica-se, também, uma certa concentração de erro ao longo do comprimento da trinca, diferentemente do que acontece no MEFG (resultados de Lins et al. (2019) para este mesmo problema). Tal concentração, entretanto, diminui à medida que a malha é refinada. A distribuição dos erros por elemento fornecida pelo MEFG-E<sup>gl</sup>, por sua vez, é mostrada na Figura 5.12. Nesta figura, verificam-se erros menores ao longo do comprimento da trinca, especialmente nas duas últimas malhas. O aprimoramento das funções global-local garantido pela abordagem estável, portanto, corrige a representação do erro nessa região, tornando mais evidente a concentração dos erros exato e estimado nas vizinhanças da ponta da trinca.

### 5.2.2.3 Comportamento ao Longo dos Ciclos Global-local

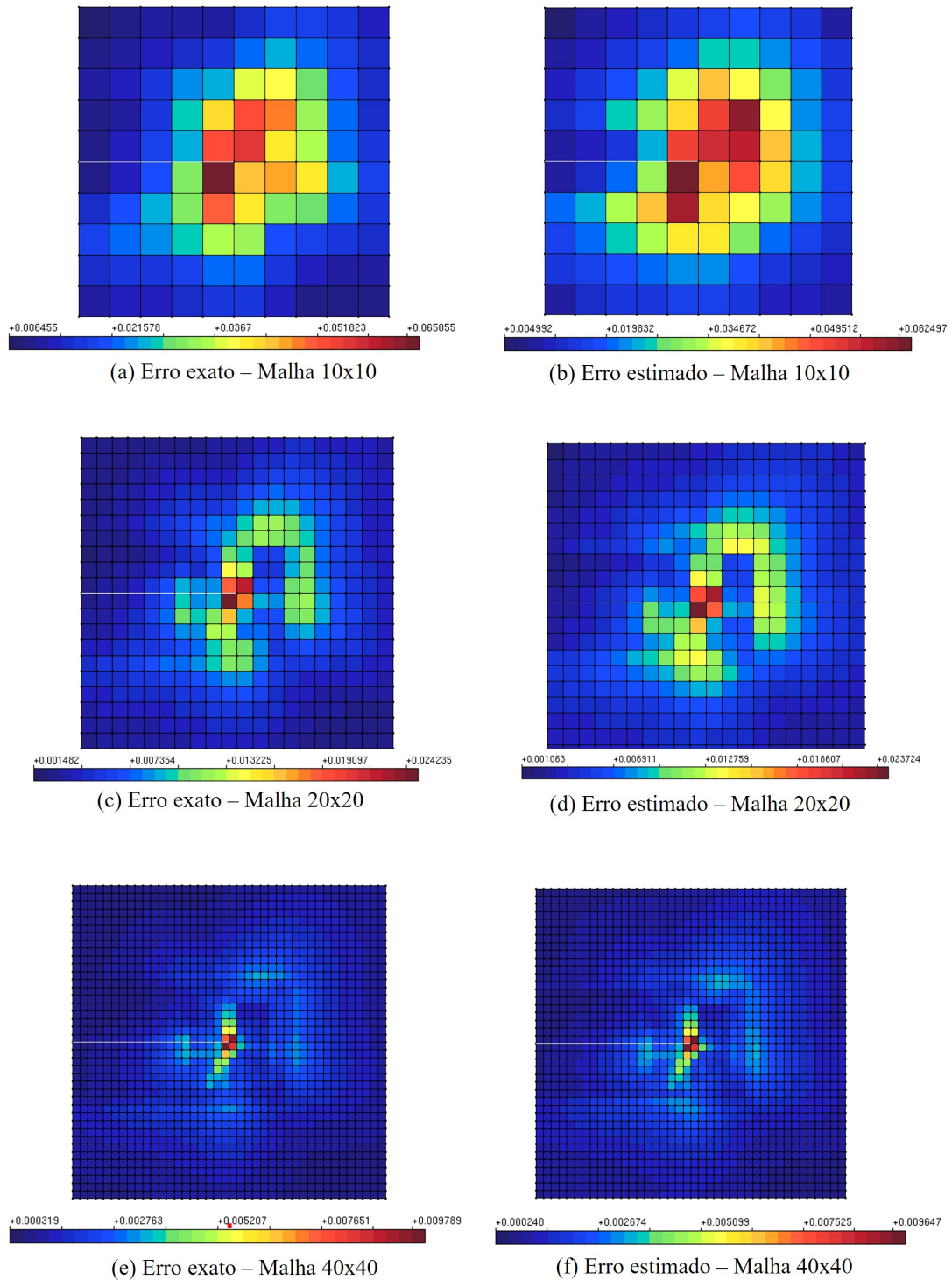
Na seção anterior, analisaram-se os resultados finais, obtidos no problema global enriquecido, após a execução de quatro ciclos global-local. Tais resultados permitiram análises semelhantes às que são tipicamente feitas para o MEFG (em termos do índice de efetividade e, em especial, das taxas de convergência dos erros exato e estimado). Dada a particularidade da construção das funções de enriquecimento no MEFG<sup>gl</sup>, entretanto, é



**Figura 5.11:** Distribuição dos erros exato e estimado por elemento, considerando cada uma das três malhas globais. **Resultados do MEFG<sup>gl</sup>** obtidos no quarto ciclo global-local.

necessário uma estudo adicional do comportamento do estimador ao longo do processo de ciclos global-local.

A evolução do índice de efetividade do estimador ZZ-BD ao longo dos ciclos global-local é apresentada nas Figuras 5.13 e 5.14. Para melhor visualização, os resultados de cada malha são apresentados separadamente, levando-se em conta o MEFG<sup>gl</sup>, na Figura

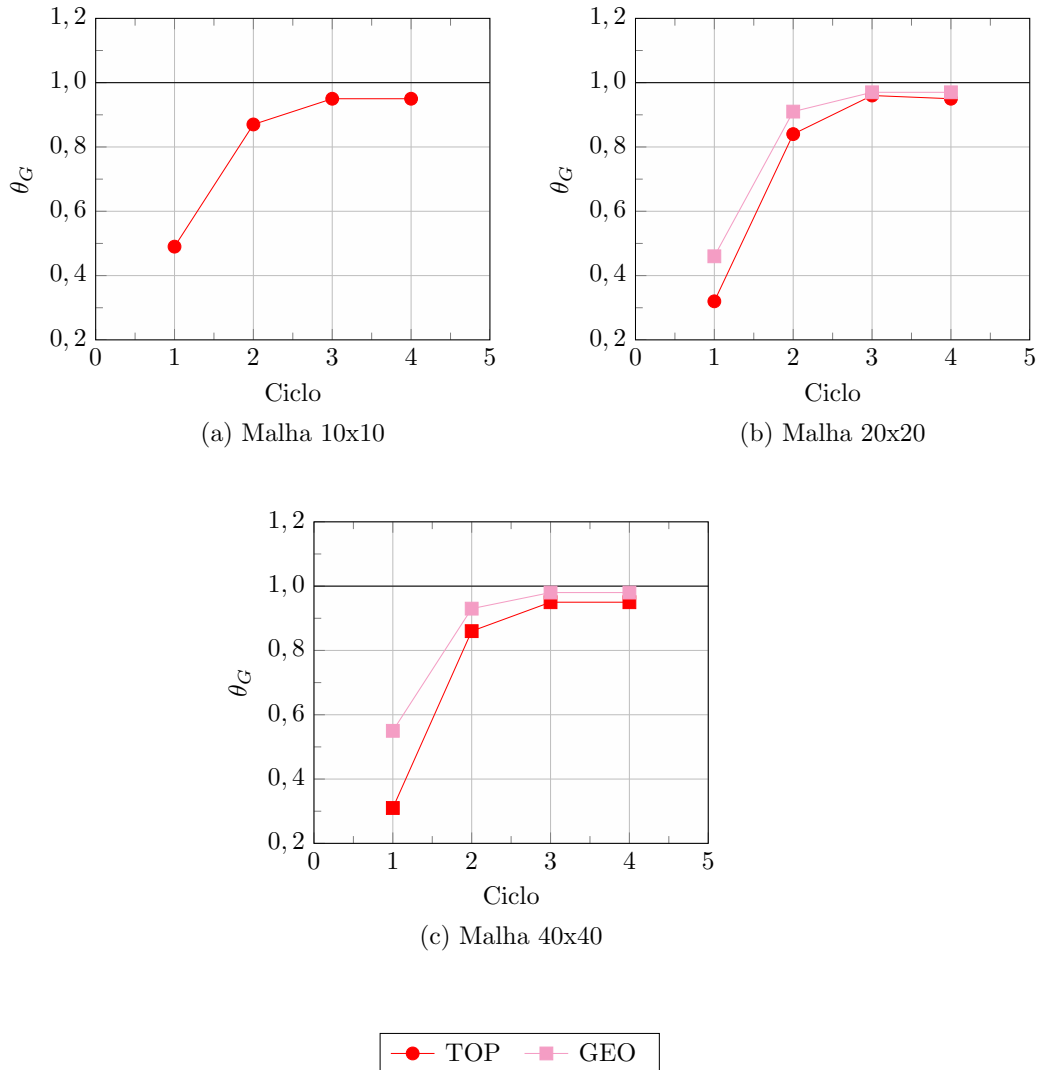


**Figura 5.12:** Distribuição dos erros exato e estimado por elemento, considerando cada uma das três malhas globais. **Resultados do MEF $G$ -E $^{gl}$**  obtidos no quarto ciclo global-local.

5.13, e o MEF $G$ -E $^{gl}$ , na Figura 5.14. De maneira geral, observa-se a convergência do índice de efetividade no terceiro ciclo global-local, no caso do MEF $G$ - $^{gl}$ . Na versão estável, por sua vez, a convergência é mais rápida, com a obtenção de valores próximos da unidade

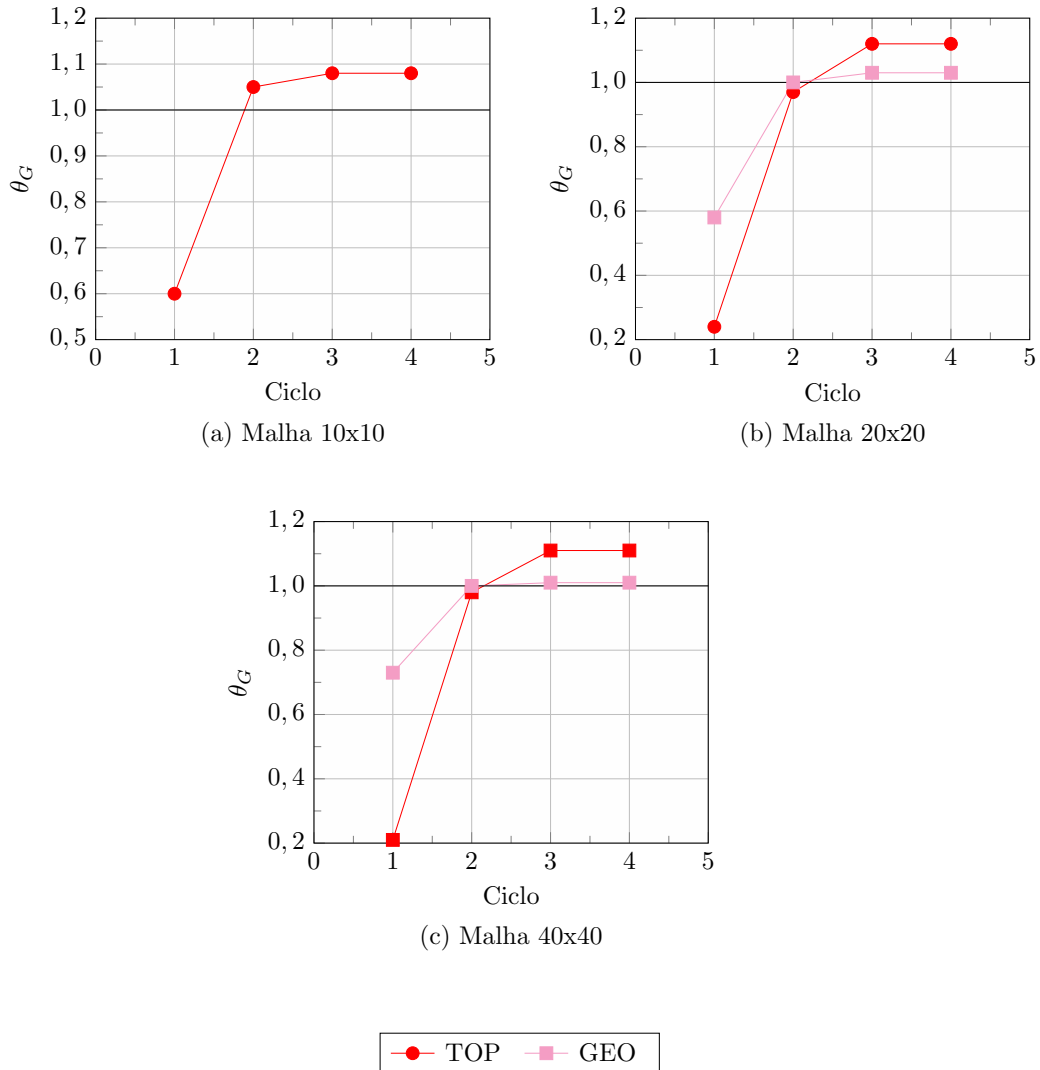


já no segundo ciclo global-local. Os resultados da Figura 5.14 também evidenciam que a tendência de superestimação do erro, discutida para a versão estável na seção anterior, é amenizada pelo uso de domínios locais geométricos.



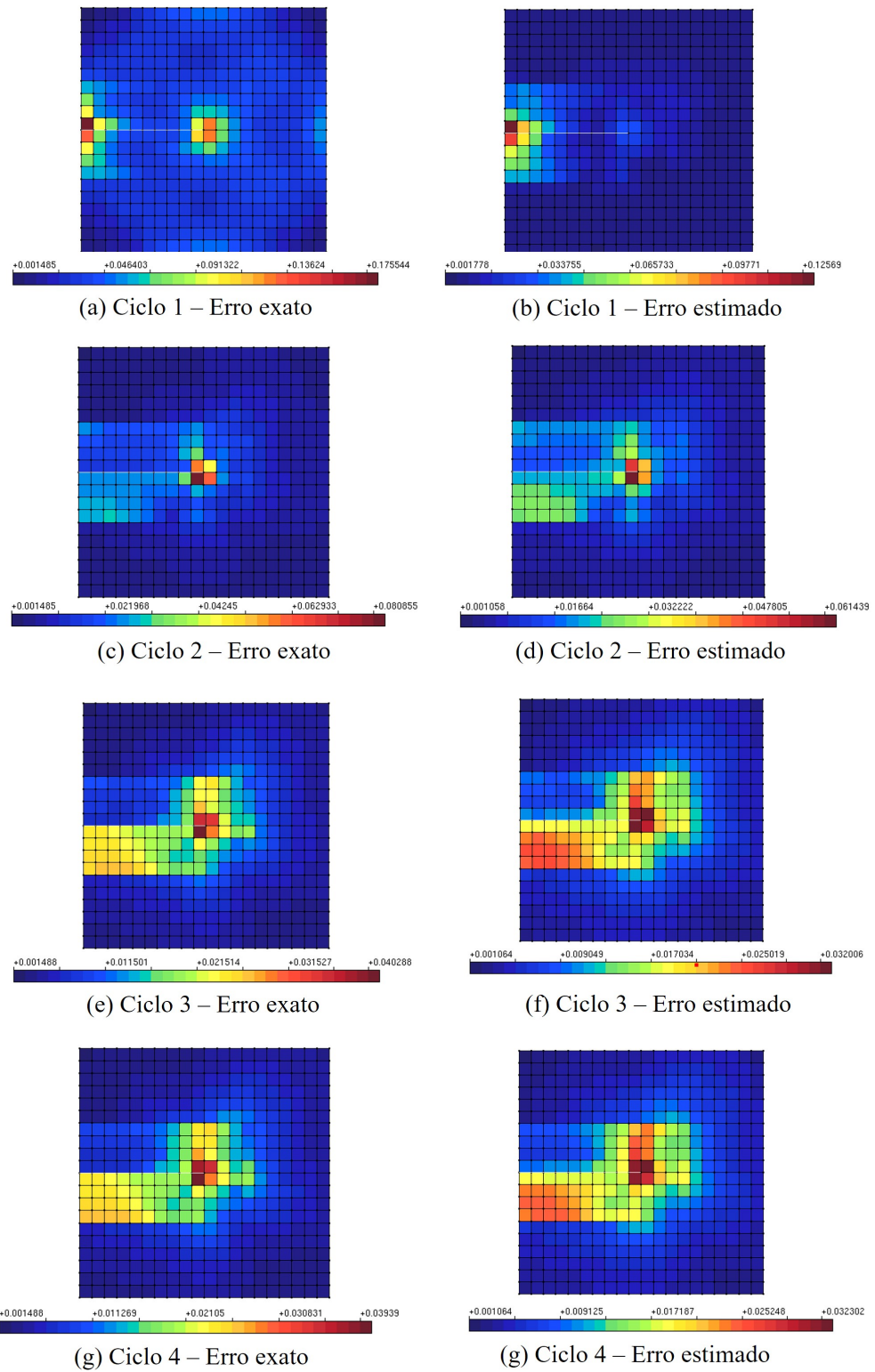
**Figura 5.13:** Índices de efetividade do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido ao longo dos ciclos global-local, para cada uma das três malhas globais. **Resultados do MEFG<sup>gl</sup>.** As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. Na Malha  $10 \times 10$ , os modelos topológico e geométrico são idênticos.

Finalmente, apresenta-se a evolução dos erro exato e estimado por elemento ao longo dos ciclos global-local nas Figuras 5.15 e 5.16 (resultados do MEFG<sup>gl</sup> e do MEFG-E<sup>gl</sup>, respectivamente). Considera-se, por simplicidade, somente a Malha  $20 \times 20$  na configuração de domínio local geométrico. No caso do MEFG<sup>gl</sup>, a concordância entre os mapas

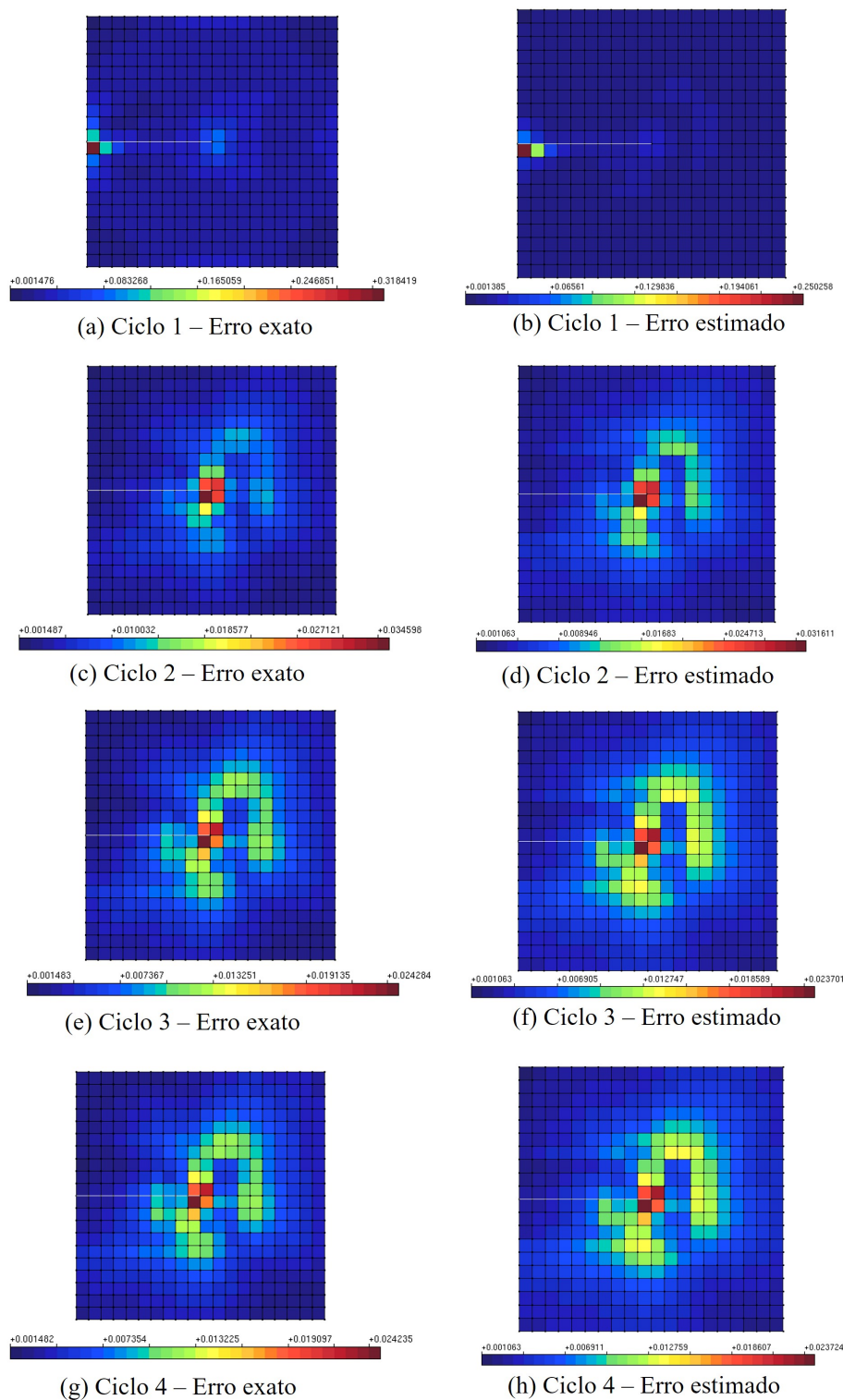


**Figura 5.14:** Índices de efetividade do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido ao longo dos ciclos global-local, para cada uma das três malhas globais. **Resultados do MFG- $E^h$** . As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. Na Malha  $10 \times 10$ , os modelos topológico e geométrico são idênticos.

de erro exato e estimado é mais evidente a partir do segundo ciclo. Já na versão estável, tal concordância se verifica desde o primeiro ciclo – mesmo com o índice de efetividade ainda distante de 1,0. Tais resultados confirmam a robustez do estimador ZZ-BD no contexto da análise global-local e são bastante favoráveis à sua utilização em procedimentos adaptativos, conforme se discutirá no Capítulo 7.



**Figura 5.15:** Erros exato e estimado por elemento, ao longo dos quatro ciclos global-local, obtidos na Malha 20x20 com domínio local geométrico. **Resultados do MFG<sup>gl</sup>.**



**Figura 5.16:** Erros exato e estimado por elemento, ao longo dos quatro ciclos global-local, obtidos na Malha 20x20 com domínio local geométrico. **Resultados do MEF $G^{gl}$ -E $^g$ .**

## 5.3 Estimador ZZ-BD no Problema Local do MEF $G^{gl}$ : norma energia

### 5.3.1 Considerações Iniciais

do estimador é a mesma daquela aplicada ao MEF<sub>G</sub> por Lins et al. (2019). Contudo, é possível identificar características específicas da abordagem global-local, decorrentes da imposição de condições de contorno inexatas sobre o problema local. Os resultados das simulações numéricas de validação do estimador são analisados nas seções seguintes.

### 5.3.2 Simulações Numéricas

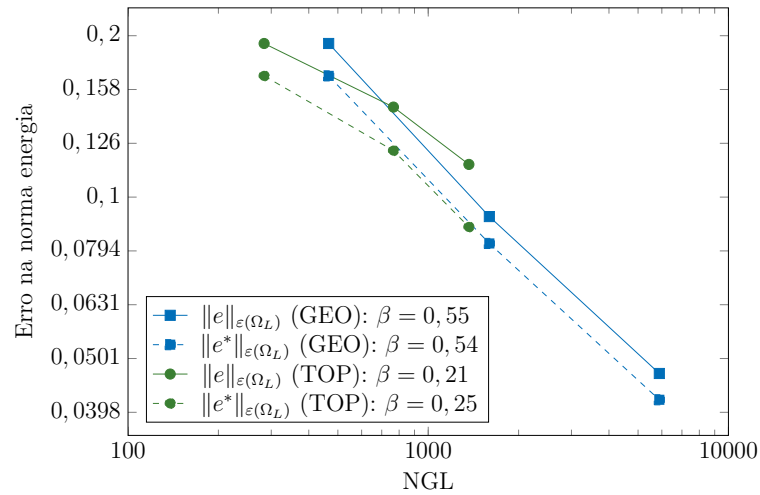
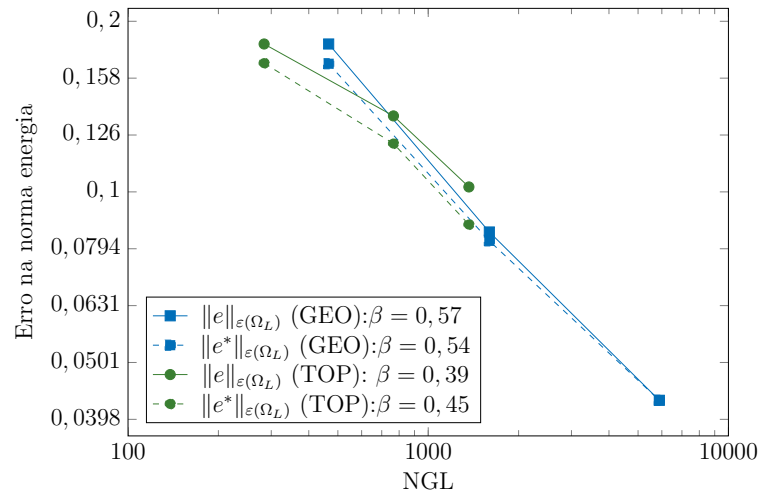
Para a avaliação do estimador ZZ-BD no modelo local do MEF<sub>G</sub><sup>gl</sup>, adota-se, novamente, o **Problema A - Modo Misto** (seção 4.1). As análises desta seção utilizam a mesma sequência de três malhas globais da seção 5.2.2, considerando, ainda, as configurações de domínios locais topológicos e geométricos (Figuras 5.5 e 5.6). Neste primeiro momento, também se mantém o mesmo esquema de enriquecimento com funções de singularidade, no modelo local, apresentado nas Figuras 5.7 e 5.8. Posteriormente, na seção 5.3.2.4, um outro esquema de enriquecimento será avaliado e devidamente apresentado.

#### 5.3.2.1 Taxas de Convergência e Índices de Efetividade

Seguindo os mesmos passos das análises feitas para o estimador ZZ-BD no problema global enriquecido, apresentam-se, na Figura 5.17, os erros exato e estimado na norma energia no problema local ( $\|e\|_{\varepsilon(\Omega_L)}$  e  $\|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_L)}$ , conforme as Equações (4.7) e (4.8), respectivamente), bem como suas taxas de convergência ( $\beta$ ), em função do número de graus de liberdade do modelo local. Consideram-se, neste caso, os resultados obtidos na sequência de três malhas globais. Uma vez que a convergência das medidas analisadas pode, em alguns casos, ser mais lenta no problema local, os resultados presentes nessas figuras são aqueles obtidos, em cada uma das malhas, após a execução de 5 ciclos global-local.

O comportamento das taxas de convergência observado na Figura 5.17 é semelhante ao que se observou na aplicação do estimador sobre o problema global enriquecido (Figura 5.9). Apesar de a representação da trinca no modelo local ser efetuada, em todos os casos, através da aplicação de funções de singularidade sobre uma região mais ampla ao redor da ponta da trinca, a configuração de domínios locais topológicos não alcança a taxa ótima de convergência na norma energia. Quando domínios locais geométricos são

adotados, entretanto, a taxa ótima é superada (tanto no MEFG<sup>gl</sup> quanto no MEFG-E<sup>gl</sup>). A melhor performance da configuração geométrica é consequência do aprimoramento da solução global quando mais nós são enriquecidos com as funções global-local e, ainda, da imposição de condições de contorno, no problema local, provenientes de regiões mais distantes da trinca.

(a) MEFG<sup>gl</sup>(b) MEFG-E<sup>gl</sup>

**Figura 5.17:** Convergência dos erros exato e estimado na norma energia do problema local, considerando a sequência de 3 malhas globais. (a) MEFG<sup>gl</sup> e (b) MEFG-E<sup>gl</sup>. As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. “NGL” se refere ao número de graus de liberdade do problema local. Eixos  $x$  e  $y$  em escala logarítmica.

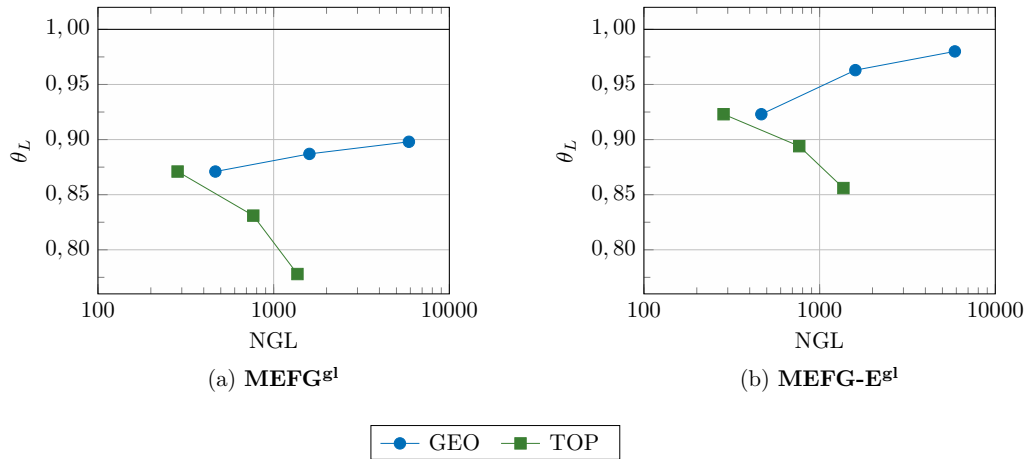
Para melhor avaliar a precisão do estimador ZZ-BD no problema local, apresentam-se,

na Figura 5.18, os índices de efetividade do estimador em função do número de graus de liberdade do modelo local, considerando, novamente, a sequência de três malhas globais e os resultados obtidos após a execução de 5 ciclos global-local.

Em todos os casos da Figura 5.18, verificam-se valores inferiores a 1,0 para o índice de efetividade – o que reflete uma consistente subestimação do erro pelo estimador. No caso da estratégia de domínios locais geométricos, porém, é possível visualizar uma tendência de crescimento de  $\theta_L$  com o aumento do número de graus de liberdade. Tal tendência é mais discreta no caso do MEF $G^{\text{gl}}$  (com  $\theta_L$  atingindo 0,90 na última malha) e mais acentuada no MEF $G^{\text{Egl}}$  (com  $\theta_L$  próximo de 0,98 na última malha). Esse comportamento reflete o efeito das duas componentes de erro presentes no problema local (seção 2.3.4): o erro da discretização e o erro associado às condições de contorno. O estimador de erro para a norma energia aqui proposto, de fato, é concebido para o erro da discretização. A parcela de erro relativa às condições de contorno, por sua vez, é invisível ao estimador. Para que efetividades próximas da unidade sejam atingidas, é necessário que o erro da discretização seja dominante no problema – ou, em outras palavras, que a contribuição desse erro para o erro total do problema local seja bem maior do que a contribuição do erro associado às condições de contorno. Logo, valores de  $\theta_L$  progressivamente próximos da unidade são obtidos nas configurações que garantem as melhores condições de contorno (domínios locais geométricos e uso do enriquecimento global-local estável).

À princípio, o raciocínio anterior pode parecer contraditório em relação aos resultados obtidos com domínios locais topológicos na Figura 5.18. Nesses casos, tanto no MEF $G^{\text{gl}}$  quanto na versão estável, o índice de efetividade diminui à medida que o número de graus de liberdade aumenta. No caso do MEF $G^{\text{gl}}$  padrão, essa diminuição é ainda mais acentuada. A explicação de tais resultados passa, novamente, pelo erro associado às condições de contorno no problema local. Na configuração de domínios locais topológicos (ver Figura 5.5), o contorno do modelo local se aproxima progressivamente da trinca à medida que a malha global é refinada. Nesta situação, é esperado que o refinamento da malha global **diminua o erro total** no problema local – conforme verificado na análise de convergência (Figura 5.17) – mas **auente a contribuição das condições de contorno** para

o erro total. Logo, apesar de o erro no modelo local ser progressivamente menor à medida que a malha global (e conseqüentemente, a malha local) é refinada, o índice de efetividade do estimador se torna cada vez menor. Trata-se, portanto, de uma característica inerente à abordagem global-local (e não de uma limitação do estimador proposto).

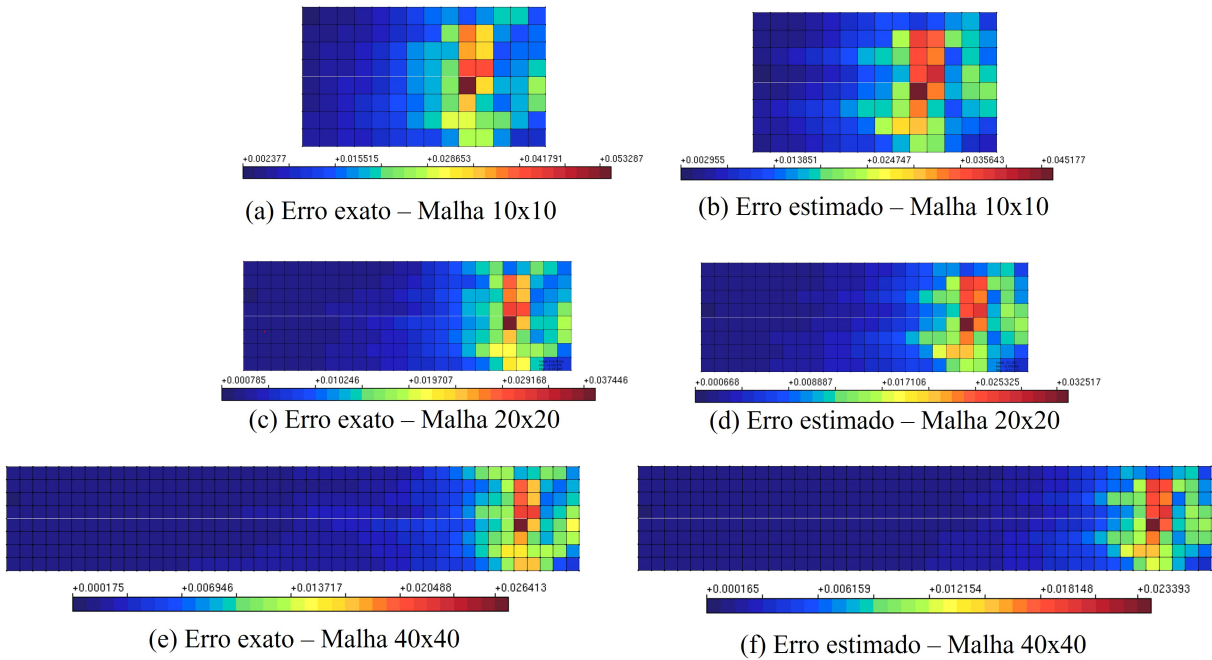


**Figura 5.18:** Índices de efetividade ( $\theta$ ) do estimador ZZ-BD no problema local, considerando a sequência de 3 malhas globais. As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. “NGL” representa o número de graus de liberdade do problema local. Eixo  $x$  em escala logarítmica.

### 5.3.2.2 Erro Estimado por Elemento

Assim como feito no problema global enriquecido (seção 5.2.2.2), apresentam-se, nas Figuras 5.19 e 5.20, a distribuição dos erros exato e estimado por elemento no problema local, considerando os resultados obtidos após cinco ciclos global-local. Por simplificação, exibem-se somente os resultados do MEFG-E<sup>gl</sup>, na configuração de domínios locais topológicos (Figura 5.19) e geométricos (Figura 5.20). Em ambos os casos, verifica-se que o estimador proposto é capaz de descrever adequadamente a distribuição do erro, mesmo com índices de efetividade relativamente distantes da unidade (caso dos domínios locais topológicos nas malhas  $20 \times 20$  e  $40 \times 40$ , por exemplo). Esse comportamento é essencial para que o estimador possa ser utilizado com enfoque qualitativo em procedimentos adaptativos de melhoria da solução local, conforme será visto no Capítulo 7.



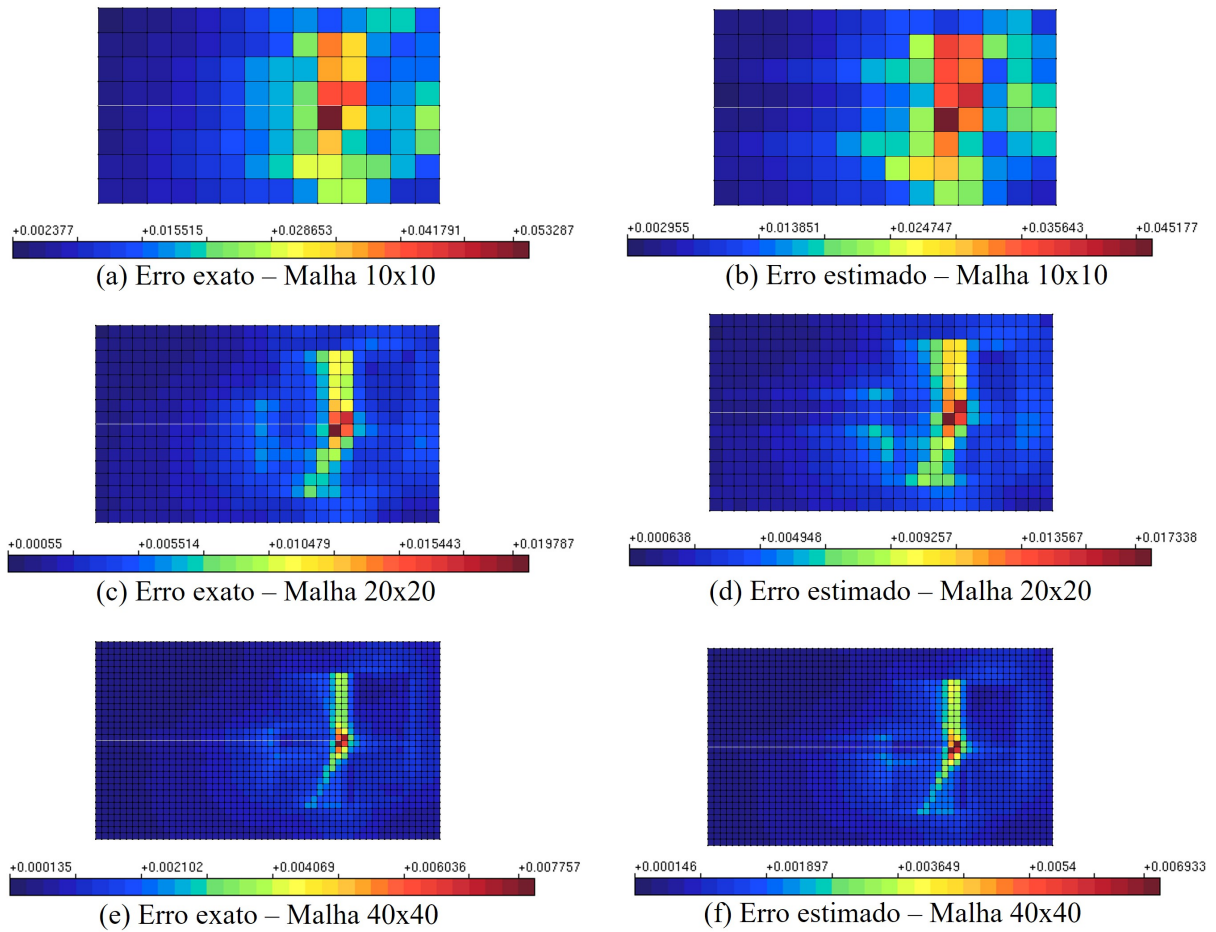


**Figura 5.19:** Erros exato e estimado por elemento no problema local, considerando os **domínios locais topológicos** e a solução do MCFG- $E^{gl}$ . Figuras fora de escala entre si.

### 5.3.2.3 Comportamento ao Longo dos Ciclos Global-local

Nas Figuras 5.21 e 5.22, apresenta-se a evolução do índice de efetividade do estimador ZZ-BD ao longo dos ciclos global-local considerados nesta seção. Para uma melhor comparação dos resultados, exibem-se, também, os índices de efetividade calculados no problema global enriquecido (já discutidos na seção 5.2.2.3). É interessante observar, em todos os casos, a diferença na convergência dos resultados obtidos nos problemas local e global enriquecido. De modo geral, os resultados no problema global enriquecido se estabilizam com um ciclo a menos em relação ao problema local. Além disso, os valores finais de  $\theta$  são sempre mais próximos da unidade no problema global enriquecido. Nesse contexto, é possível afirmar que a aplicação de estimadores de erro **com um enfoque quantitativo** no MCFG $^{gl}$  é mais favorável sobre o problema global enriquecido.

Finalmente, a evolução dos erro exato e estimado por elemento no problema local, ao longo dos ciclos global-local, é ilustrada nas Figuras 5.23 e 5.24 – nas configurações de domínio local topológico e geométrico, respectivamente. Por simplificação, exibem-se apenas os resultados obtidos na Malha  $20 \times 20$  com o MCFG- $E^{gl}$ . É possível observar

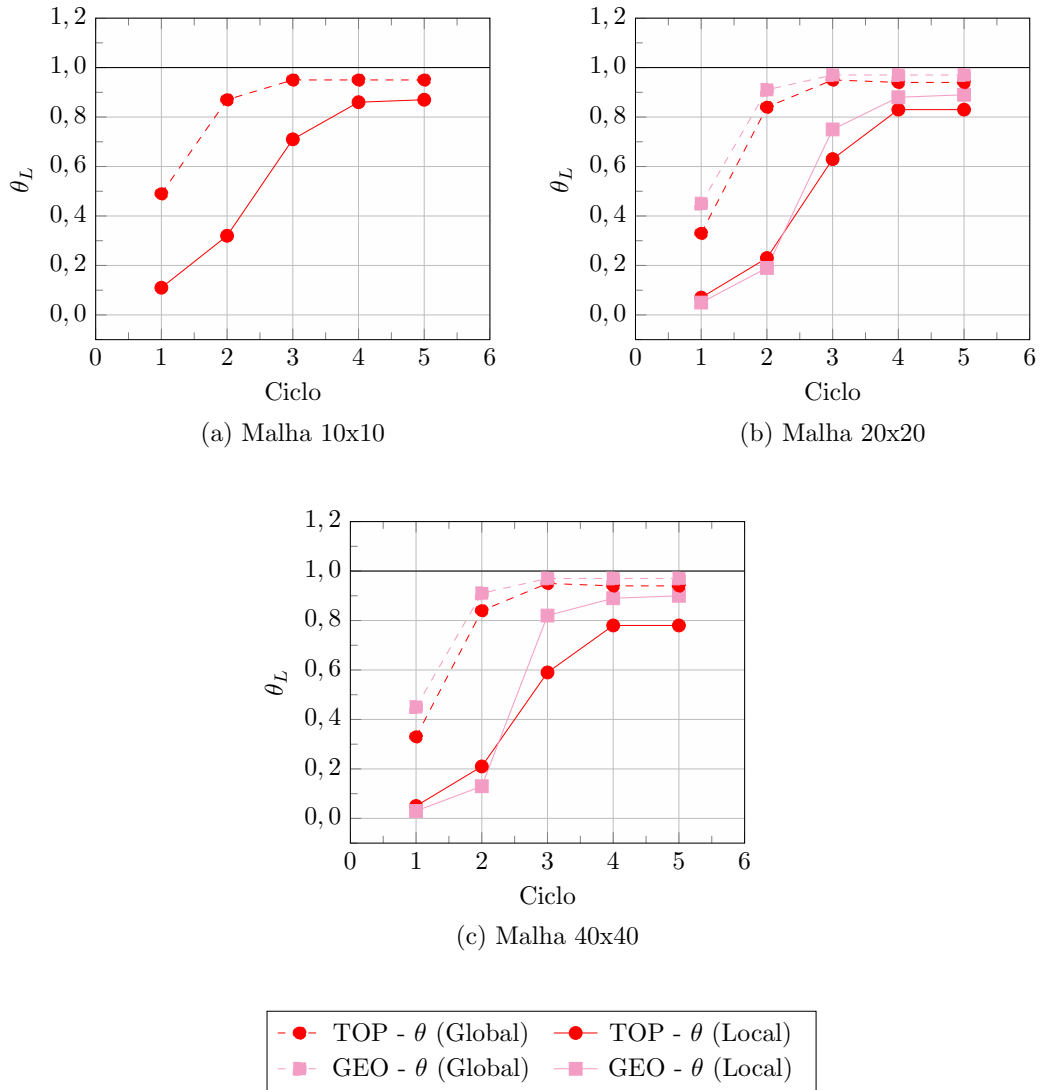


**Figura 5.20:** Erros exato e estimado por elemento no problema local, considerando os **domínios locais geométricos** e a solução do MCFG- $E^{gl}$ .

uma grande diferença entre as distribuições de erro obtidas no primeiro ciclo, com uma certa concentração do erro estimado no contorno do domínio – o que não acontece com o erro exato. Tal fato se deve à má qualidade das condições de contorno impostas sobre o modelo local, que prejudicam mais fortemente o desempenho do estimador nessa região. A partir do segundo ciclo, por sua vez, a distribuição do erro estimado torna-se mais coerente, tanto na configuração topológica quanto na geométrica.

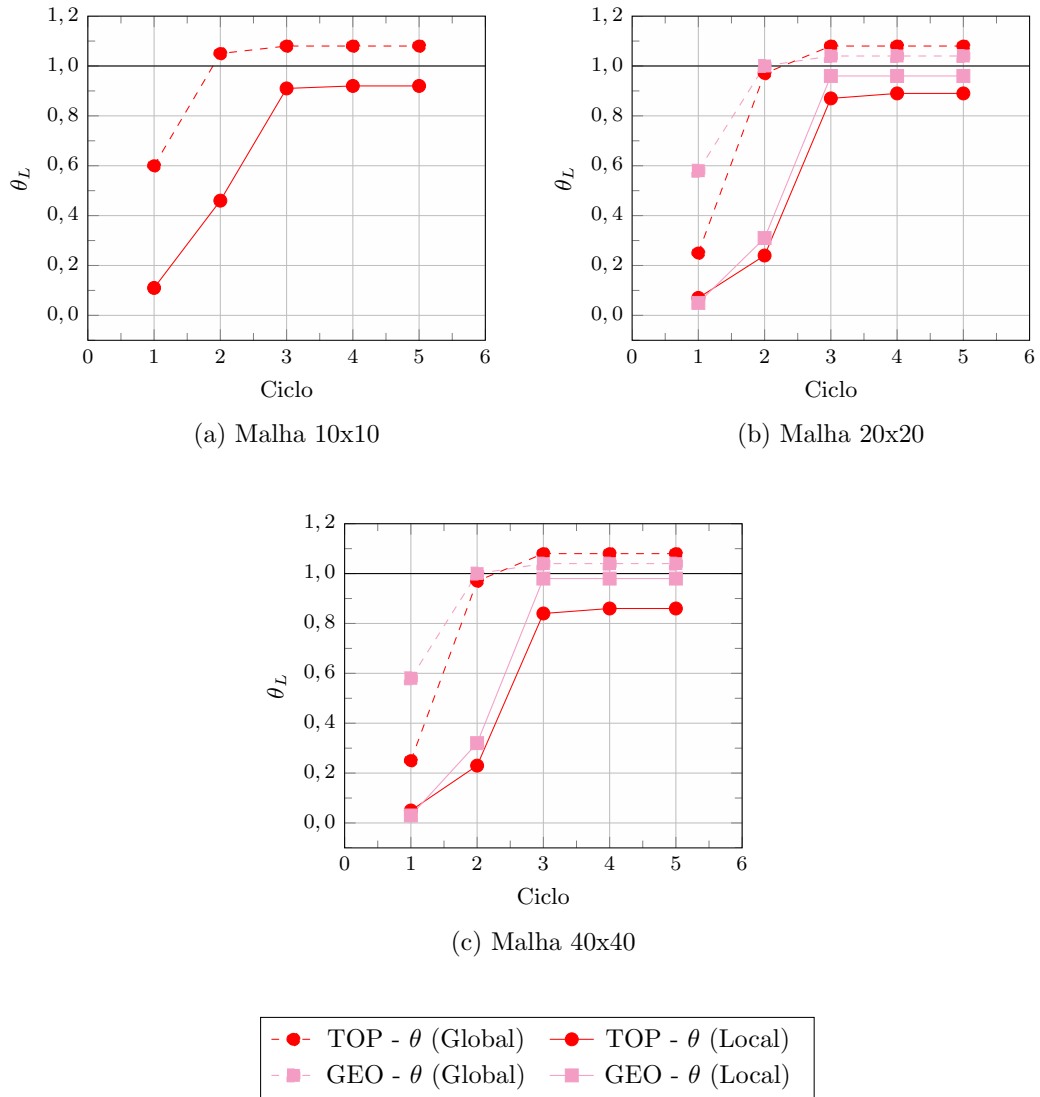
#### 5.3.2.4 Efeito das Funções de Singularidade Sobre o Índice de Efetividade no Problema Local

Conforme discutido nas seções anteriores, a relação entre o erro da discretização e o erro associado às condições de contorno no problema local influencia fortemente os



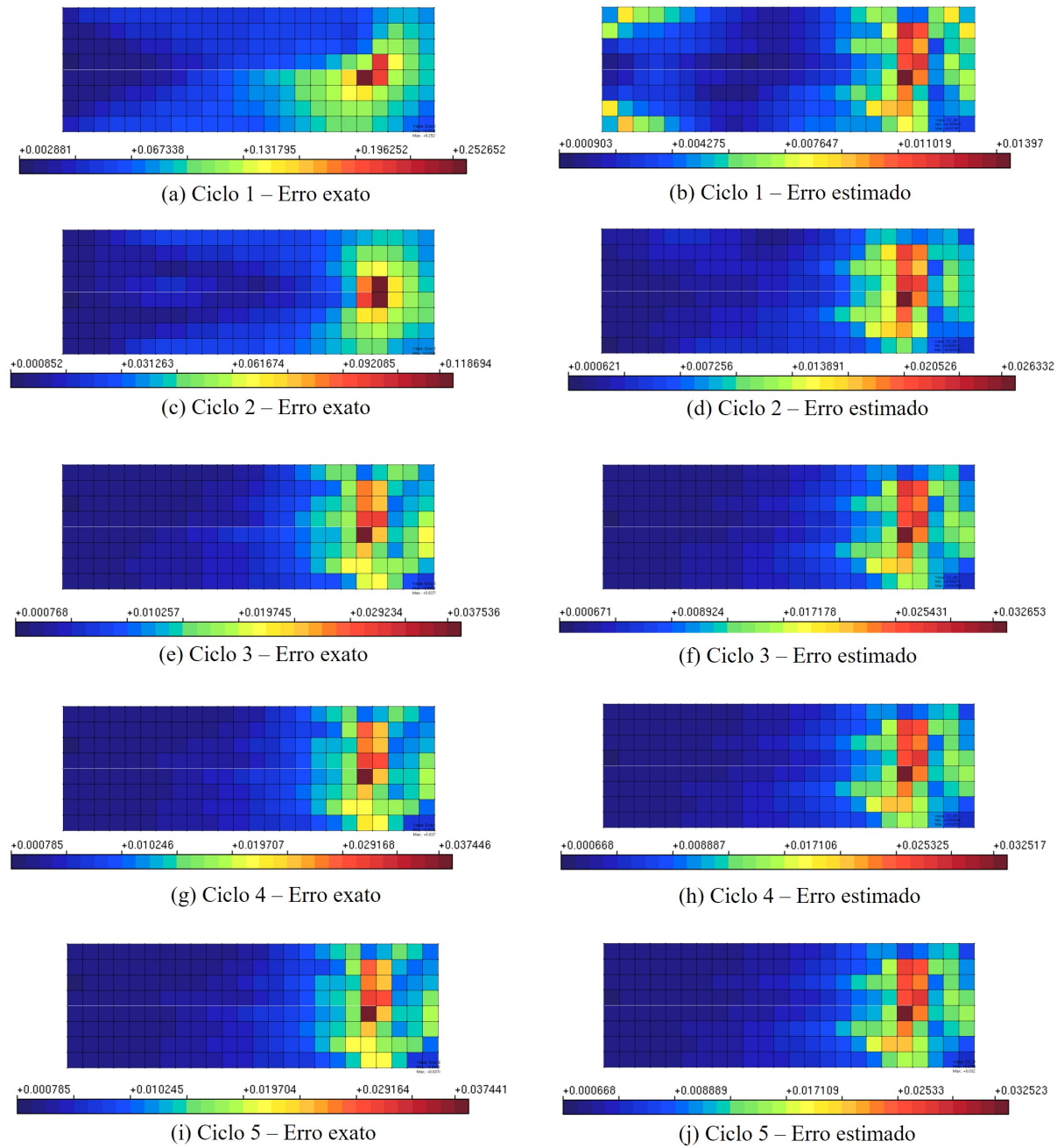
**Figura 5.21:** Índices de efetividade do estimador ZZ-BD no problema local e no global enriquecido ao longo dos ciclos global-local, em cada uma das três malhas globais. **Resultados do MEFG<sup>gl</sup>.** As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. Na Malha  $10 \times 10$ , os modelos topológico e geométrico são idênticos.

resultados dos índices de efetividade nesse modelo. Até então, todos os modelos locais aqui propostos continham uma região enriquecida (com funções de singularidade) mais ampla ao redor da trinca (Figuras 5.7 e 5.8). Para efeito de comparação, considera-se, na presente seção, a configuração de mínimo enriquecimento no problema local, na qual apenas os nós coincidentes com a aresta da trinca são enriquecidos com as funções de singularidade. Os tamanhos dos domínios locais se mantêm os mesmos das seções anteriores, conforme ilustrado nas Figuras 5.25 e 5.26.



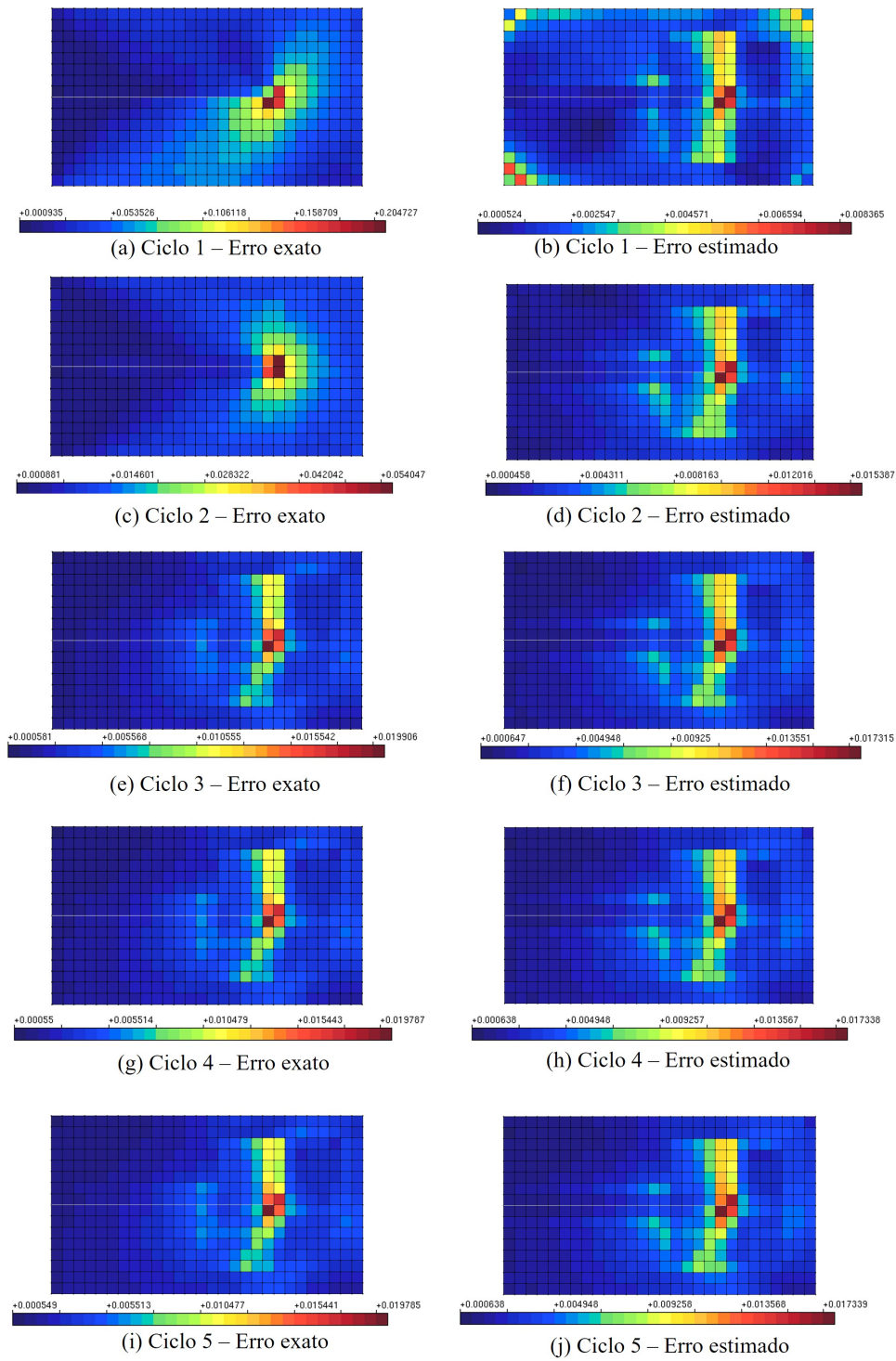
**Figura 5.22:** Índices de efetividade do estimador ZZ-BD no problema local e no problema global enriquecido ao longo dos ciclos global-local, em cada uma das três malhas globais. **Resultados do MEFG- $E^{\text{gl}}$** . As siglas “TOP” e “GEO” indicam as configurações de domínios locais topológicos e geométricos, respectivamente. Na Malha  $10 \times 10$ , os modelos topológico e geométrico são idênticos.

Por simplificação, esta seção considera apenas os resultados fornecidos pelo MEFG- $E^{\text{gl}}$ . Nas Tabelas 5.1 a 5.4, apresentam-se os resultados obtidos com as duas configurações de domínios locais (topológico e geométrico) e, também, as duas estratégias de enriquecimento com funções de singularidade no problema local (mínimo e amplo). Os resultados obtidos confirmam as conclusões da seção 5.3.2.1: quando se adota o enriquecimento



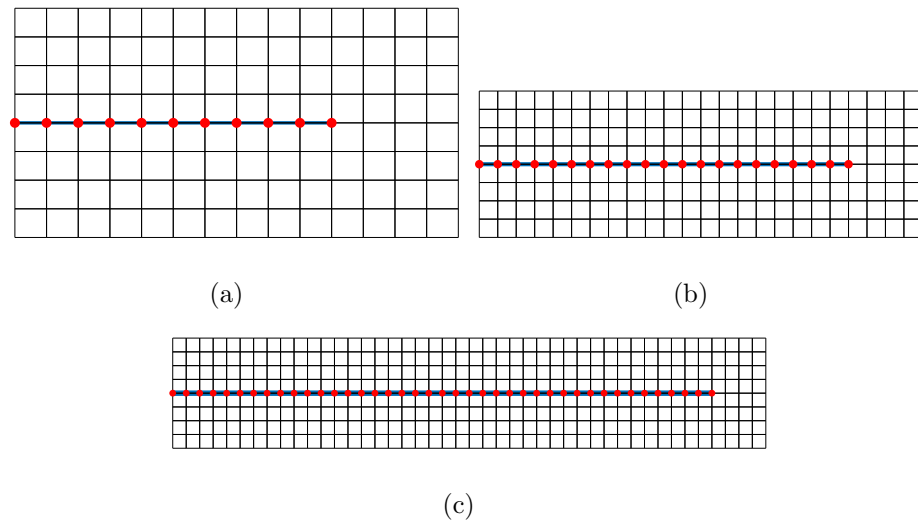
**Figura 5.23:** Erros exato e estimado por elemento no problema local, considerando a Malha 20x20 com **domínio local topológico** e a solução do MEF $G$ -E $^{\text{gl}}$ .

mínimo no problema local, o erro da discretização aumenta significativamente e o estimador ZZ-BD representa melhor o problema, com índices de efetividade mais próximos de 1,0 (coluna “ $\theta_L$ ” nas Tabelas 5.1 e 5.3). Nesses casos, o erro relativo estimado (coluna “ $\mathcal{E}^*_{\% \Omega_L}$ ”) é bastante próximo do erro relativo exato (coluna “ $\mathcal{E}_{\% \Omega_L}$ ”), que leva em conta as duas parcelas de erro. Já quando as funções de singularidade são impostas sobre uma

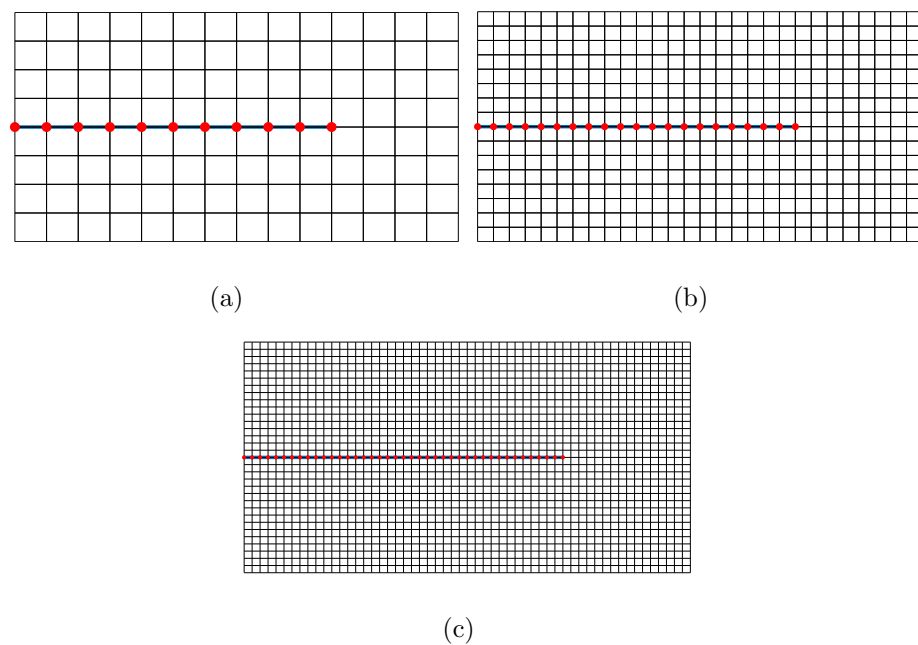


**Figura 5.24:** Erros exato e estimado por elemento no problema local, considerando a Malha 20x20 com **domínio local geométrico** e a solução do MEF $G$ -E $^{gl}$ .

região mais ampla, o erro da discretização diminui, tendo sua influência reduzida, e os índices de efetividade são menores (coluna “ $\theta_L$ ” nas Tabelas 5.2 e 5.4).



**Figura 5.25:** Domínios locais **topológicos** com enriquecimento mínimo: nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Malha  $10 \times 10$ , (b) Malha  $20 \times 20$  e (c) Malha  $40 \times 40$ . Figuras fora de escala entre si.



**Figura 5.26:** Domínios locais **geométricos** com enriquecimento mínimo: nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Malha  $10 \times 10$ , (b) Malha  $20 \times 20$  e (c) Malha  $40 \times 40$ .

**Tabela 5.1:** Índice de efetividade e erros relativo exato e estimado obtidos com **domínios locais topológicos + enriquecimento mínimo** no problema local

Malha	$\theta_L$	$\mathcal{E}_{\%_{\Omega_L}}$	$\mathcal{E}_{\%_{\Omega_L}}^*$
10x10	1,01	15,08%	15,30%
20x20	1,00	14,18%	14,28%
40x40	0,99	13,52%	13,47%

**Tabela 5.2:** Índice de efetividade e erros relativo exato e estimado obtidos com **domínios locais topológicos + enriquecimento amplo** no problema local

Malha	$\theta_L$	$\mathcal{E}_{\%_{\Omega_L}}$	$\mathcal{E}_{\%_{\Omega_L}}^*$
10x10	0,92	7,84%	7,30%
20x20	0,89	7,60%	6,86%
40x40	0,86	7,51%	6,49%

**Tabela 5.3:** Índice de efetividade e erros relativo exato e estimado obtidos com **domínios locais geométricos + enriquecimento mínimo** no problema local

Malha	$\theta_L$	$\mathcal{E}_{\%_{\Omega_L}}$	$\mathcal{E}_{\%_{\Omega_L}}^*$
10x10	1,01	15,08%	15,30%
20x20	1,02	10,73%	10,99%
40x40	1,03	7,67%	7,87%

**Tabela 5.4:** Índice de efetividade e erros relativo exato e estimado obtidos com **domínios locais geométricos + enriquecimento amplo** no problema local

Malha	$\theta_L$	$\mathcal{E}_{\%_{\Omega_L}}$	$\mathcal{E}_{\%_{\Omega_L}}^*$
10x10	0,92	7,84%	7,30%
20x20	0,96	3,65%	3,52%
40x40	0,98	1,86%	1,83%



## Capítulo 6

# Estimador para o Erro do Fator de Intensidade de Tensão no MEF<sub>G</sub> e no MEF<sub>G</sub><sup>gl</sup>

Apresenta-se, neste capítulo, o novo estimador de erro orientado ao objetivo proposto no presente trabalho. Inicialmente, desenvolve-se a formulação do estimador e detalha-se a solução do problema dual. Em seguida, apresenta-se a validação do estimador, inicialmente para o MEF<sub>G</sub> e, em seguida para o MEF<sub>G</sub><sup>gl</sup> (e sua versão estável). Após a etapa de validação (considerando problemas cuja solução exata é conhecida), avalia-se o comportamento do estimador em outros dois exemplos numéricos.

### 6.1 Formulação do Estimador Orientado ao Objetivo

#### 6.1.1 Considerações Iniciais

Dada a validação do estimador ZZ-BD para a norma energia (Capítulo 5), propõe-se, no presente trabalho, a construção de um estimador orientado ao objetivo para o MEF<sub>G</sub> e o MEF<sub>G</sub><sup>gl</sup>. Conforme introduzido no capítulo de metodologia (seção 4.3), a grandeza de interesse, no contexto de aplicação da MFLE, é o fator de intensidade de tensão. Com base nas premissas já desenvolvidas na Fundamentação Teórica (seção 2.4.4), a formulação do novo estimador será descrita nas seções seguintes.

Como visto, o presente trabalho adota a Integral de Interação como método de extração para o fator de intensidade de tensão. A formulação do estimador orientado ao objetivo, portanto, é diretamente associada a esse método. Por esse motivo, apresenta-se, a seguir, o desenvolvimento analítico da Integral de Interação.

### 6.1.2 Integral de Interação

A formulação da Integral de Interação apresentada a seguir segue o trabalho de Moes et al. (1999), no qual se apresenta uma integral de domínio adaptada de Yau et al. (1980).

Dado um corpo contendo uma trinca<sup>1</sup>, dois estados são considerados:

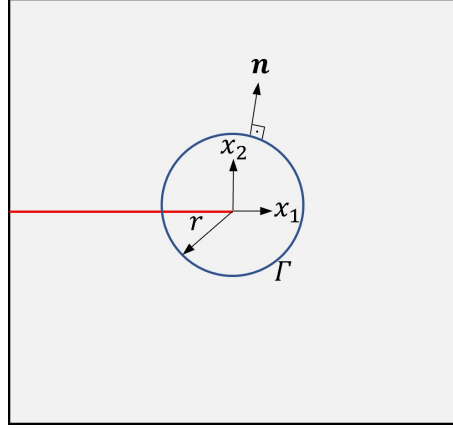
- **Estado 1:** é o estado corrente do modelo, com  $K_I^{(1)}$  e  $K_{II}^{(1)}$  indicando os fatores de intensidade de tensão para os modos I e II de abertura, respectivamente. Os campos de tensão, deformação e deslocamentos ( $\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)}$ ,  $\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$  e  $\tilde{u}_{ij}^{(1)}$ , respectivamente) são obtidos a partir da solução aproximada fornecida pelo método numérico adotado – neste caso, MEF, MEF<sup>gl</sup> ou MEF-E<sup>gl</sup>.
- **Estado 2:** é um estado auxiliar escolhido especialmente para o problema analisado. Os fatores de intensidade de tensão associados a esse estado são representados por  $K_I^{(2)}$  e  $K_{II}^{(2)}$ . Para o caso particular de trinca fechada, os campos  $\sigma_{ij}^{(2)}$ ,  $\varepsilon_{ij}^{(2)}$  e  $u_{ij}^{(2)}$  são calculados a partir do primeiro termo da expansão assintótica da elasticidade, podendo ser encontrados em Szabo e Babuska (1991).

A Integral J avaliada para a soma dos estados 1 e 2 pode ser expressa como:

$$J^{(1+2)} = \int_{\Gamma} \left[ \frac{1}{2} (\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) (\tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)} + \varepsilon_{ij}^{(2)}) \delta_{1j} - (\tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} + \sigma_{ij}^{(2)}) \frac{\partial (\tilde{u}_i^{(1)} + u_i^{(2)})}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (6.1)$$

na qual  $n_j$  representa uma componente do vetor unitário normal a um contorno de integração pré-definido e teoricamente arbitrário  $\Gamma$ , conforme mostra a Figura 6.1. Nessa figura, também são indicados os eixos locais  $x_1$  e  $x_2$  que compõem o sistema de coordenadas da Equação (6.1).

<sup>1</sup>Considera-se, aqui, o caso particular de trinca fechada.



**Figura 6.1:** Contorno de integração  $\Gamma$ , raio  $r$ , vetor unitário normal  $\mathbf{n}$  e eixos locais  $x_1$  e  $x_2$  associados à Integral J e à Integral de Interação.

Rearranjando os termos da Equação (6.1), obtém-se:

$$J^{(1+2)} = J^{(1)} + J^{(2)} + I^{(1,2)} \quad (6.2)$$

na qual o termo  $I^{(1,2)}$  é definido como a Integral de Interação para os estados 1 e 2, uma vez que reúne o produto dos termos cruzados dos estados 1 e 2:

$$I^{(1,2)} = \int_{\Gamma} \left[ W^{(1,2)} \delta_{1j} - \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} - \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial \tilde{u}_i^{(1)}}{\partial x_1} \right] n_j d\Gamma \quad (6.3)$$

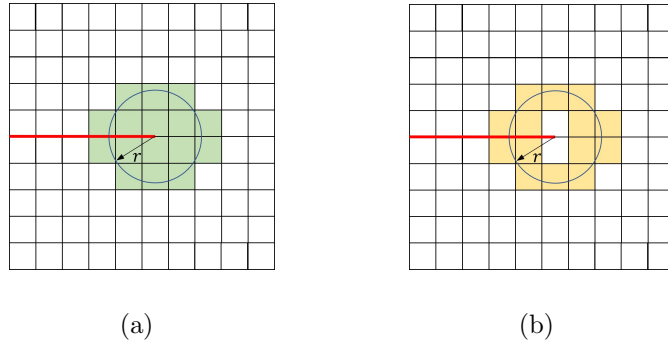
sendo  $W^{(1,2)}$  a energia de deformação de interação:  $W^{(1,2)} = \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \varepsilon_{ij}^{(2)} = \sigma_{ij}^{(2)} \tilde{\varepsilon}_{ij}^{(1)}$ .

A Integral de Interação da Equação (6.3) pode ser reescrita na forma de uma integral de domínio equivalente, através da multiplicação do integrando por uma função peso  $q$  e posterior aplicação do Teorema da Divergência:

$$I^{(1,2)} = \int_A \left[ \tilde{\sigma}_{ij}^{(1)} \frac{\partial \tilde{u}_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial u_i^{(1)}}{\partial x_1} - W^{(1,2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (6.4)$$

na qual o domínio de integração  $A$  é um conjunto de elementos finitos selecionado através do raio  $r$  medido a partir da ponta da trinca (apresentado anteriormente na Figura 6.1). Os elementos que compõem o domínio  $A$  em um problema genérico são ilustrados na Figura 6.2(a). A função peso  $q$  assume valor unitário em todos os nós localizados no interior do círculo definido por  $r$  e é nula em todos os outros nós. Em cada elemento finito,  $q$  é dada pela interpolação de seus valores nodais. Logo, as derivadas de  $q$  (presentes na Equação

(6.4)) são diferentes de zero apenas nos elementos que possuem algum nó, mas não todos, dentro do círculo associado a  $r$ , conforme ilustrado na Figura 6.2(b).



**Figura 6.2:** (a) Em verde, os elementos que compõem o domínio  $A$  para a integral de interação definida por um raio  $r$ . (b) Em amarelo, os elementos nos quais as derivadas da função  $q$  assumem valores diferentes de zero.

A Integral  $J$  para a soma dos estados 1 e 2 (Equação (6.2)) pode ser associada aos respectivos fatores de intensidade de tensão:

$$J^{(1+2)} = \frac{(K_I^{(1)} + K_I^{(2)})^2}{E^*} + \frac{(K_{II}^{(1)} + K_{II}^{(2)})^2}{E^*} \quad (6.5)$$

com  $E^* = E$  para estado plano de tensões e  $E^* = \frac{E}{1-\nu^2}$  para estado plano de deformações. Substituindo (6.5) em (6.2), obtém-se a seguinte relação:

$$I^{(1,2)} = \frac{2}{E^*} \left( K_I^{(1)} K_I^{(2)} + K_{II}^{(1)} K_{II}^{(2)} \right) \quad (6.6)$$

Finalmente, os fatores de intensidade de tensão podem ser obtidos através da escolha adequada do estado 2. Definindo-se esse estado como o de modo I puro (com  $K_I^{(2)} = 1$  e  $K_{II}^{(2)} = 0$ ), a Equação (6.6) fornece a expressão a seguinte expressão para  $K_I^{(1)}$ :

$$K_I^{(1)} = \frac{E^*}{2} I^{(1,2)} \quad (6.7)$$

Definindo-se, agora, o estado 2 como o de modo II puro ( $K_I^{(2)} = 0$  e  $K_{II}^{(2)} = 1$ ), obtém-se a expressão de  $K_{II}^{(1)}$ :

$$K_{II}^{(1)} = \frac{E^*}{2} I^{(1,2)} \quad (6.8)$$

No restante deste texto, os fatores de intensidade de tensão do estado 1 terão os superíndices omitidos, sendo representados pelos símbolos  $K_I$  e  $K_{II}$ .

### 6.1.3 Formulação do Problema Dual

Conforme discutido na Fundamentação Teórica (seção 2.4.4), o funcional de interesse associado ao estimador de erro orientado ao objetivo é representado pelo termo  $Q(\mathbf{u})$ . Quando se considera a solução aproximada pelo método numérico adotado, por sua vez, tal funcional é indicado denotado por  $Q(\tilde{\mathbf{u}})$ .

Escolhendo-se o fator de intensidade de tensão como grandeza de interesse (inicialmente, sem particularizar  $K_I$  ou  $K_{II}$ ), temos, usando a Equação (6.7):

$$Q(\tilde{\mathbf{u}}) = K = \frac{E^*}{2} I^{(1,2)} \quad (6.9)$$

Para a definição de  $Q(\tilde{\mathbf{u}})$ , basta substituir a Integral de Interação (Equação (6.4)) em (6.9). Expandindo o termo  $W^{(1,2)}$  e omitindo o superíndice (1) do estado 1, temos:

$$Q(\tilde{\mathbf{u}}) = \frac{E^*}{2} \int_A \left[ \tilde{\sigma}_{ij} \frac{\partial \tilde{u}_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial \tilde{u}_i}{\partial x_1} - \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (6.10)$$

Retomando a formulação da seção 2.4.4, associa-se o funcional  $Q(\tilde{\mathbf{u}})$  à solução do chamado **problema dual**, cuja forma variacional aproximada é dada pela equação a seguir:

$$B(\tilde{\mathbf{v}}, \tilde{\mathbf{w}}) = Q(\tilde{\mathbf{v}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathcal{V}} \quad (6.11)$$

na qual  $\tilde{\mathbf{w}}$  indica a solução aproximada do problema dual, fornecida pelo método numérico adotado.

Para o problema dual associado ao fator de intensidade de tensão, o termo  $Q(\tilde{\mathbf{v}})$  é obtido pela substituição, em (6.10), do campo de deslocamentos  $\tilde{\mathbf{u}}$  pelo campo de deslocamentos arbitrários (funções teste)  $\tilde{\mathbf{v}}$ :

$$Q(\tilde{\mathbf{v}}) = \frac{E^*}{2} \int_A \left[ \tilde{\sigma}_{ij} \frac{\partial u_i^{(2)}}{\partial x_1} + \sigma_{ij}^{(2)} \frac{\partial \tilde{v}_i}{\partial x_1} - \tilde{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij}^{(2)} \delta_{1j} \right] \frac{\partial q}{\partial x_j} dA \quad (6.12)$$

com  $\tilde{\sigma}_{ij}$  representando, agora, o campo de tensões associado a  $\tilde{\mathbf{v}}$ .

Na formulação do problema dual, adota-se, como visto, o mesmo espaço de aproximação do problema primal. O lado esquerdo da igualdade em (6.11), portanto, é o mesmo do problema primal – o que permite o reaproveitamento da sua matriz de rigidez. Substituindo a equação que define a forma bilinear (2.4) em (6.11), temos:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}(\tilde{\mathbf{v}})^T \boldsymbol{\sigma}(\tilde{\mathbf{w}}) d\mathbf{x} = Q(\tilde{\mathbf{v}}), \quad \forall \tilde{\mathbf{v}} \in \tilde{\mathcal{V}} \quad (6.13)$$

com  $Q(\tilde{\mathbf{v}})$  dado pela Equação (6.12).

Para a construção da forma matricial da Equação (6.13), é necessário um rearranjo dos termos de  $Q(\tilde{\mathbf{v}})$  que isole o campo de deslocamentos arbitrário  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Tal rearranjo é possível pelo fato de a Integral de Interação ser um funcional linear do campo de deslocamentos – premissa da formulação do estimador orientado ao objetivo, conforme mencionado na seção 2.4.4. Para isso, reescreve-se a Equação (6.12), aproveitando-se a simetria dos componentes de tensão e deformação, como:

$$Q(\tilde{\mathbf{v}}) = \frac{E^*}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1,1}^{(2)} q_{,1} \\ u_{2,1}^{(2)} q_{,2} \\ u_{1,1}^{(2)} q_{,2} + u_{2,1}^{(2)} q_{,1} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \tilde{v}_{1,1} \\ \tilde{v}_{2,1} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{(2)} q_{,1} + \sigma_{12}^{(2)} q_{,2} \\ \sigma_{21}^{(2)} q_{,1} + \sigma_{22}^{(2)} q_{,2} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{(2)} q_{,1} \\ \varepsilon_{22}^{(2)} q_{,1} \\ 2\varepsilon_{12}^{(2)} q_{,1} \end{Bmatrix} dA \quad (6.14)$$

na qual os subíndices 1 e 2 após a vírgula indicam a derivação em relação ao eixos locais  $x_1$  e  $x_2$ , respectivamente, ilustrados na Figura 6.1.

Na Equação (6.14), identificam-se três vetores que não dependem de  $\tilde{\mathbf{v}}$ . Para tais vetores, a seguinte notação é introduzida:

$$\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \begin{Bmatrix} u_{1,1}^{(2)} q_{,1} \\ u_{2,1}^{(2)} q_{,2} \\ u_{1,1}^{(2)} q_{,2} + u_{2,1}^{(2)} q_{,1} \end{Bmatrix} \\
\mathbf{l} &= \begin{Bmatrix} \sigma_{11}^{(2)} q_{,1} + \sigma_{12}^{(2)} q_{,2} \\ \sigma_{21}^{(2)} q_{,1} + \sigma_{22}^{(2)} q_{,2} \end{Bmatrix} \\
\mathbf{m} &= \begin{Bmatrix} \varepsilon_{11}^{(2)} q_{,1} \\ \varepsilon_{22}^{(2)} q_{,1} \\ 2\varepsilon_{12}^{(2)} q_{,1} \end{Bmatrix}
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Logo, a expressão (6.14) pode ser reescrita como:

$$Q(\tilde{\mathbf{v}}) = \frac{E^*}{2} \int_A \begin{Bmatrix} \tilde{\sigma}_{11} \\ \tilde{\sigma}_{22} \\ \tilde{\sigma}_{12} \end{Bmatrix} (\mathbf{k} - \mathbf{m}) + \begin{Bmatrix} \tilde{v}_{1,1} \\ \tilde{v}_{2,1} \end{Bmatrix} \mathbf{l} dA \tag{6.16}$$

A partir da Equação (6.16), colocando em evidência os valores nodais do campo de deslocamentos arbitrário  $\tilde{\mathbf{v}}$ , obtém-se o equivalente a um **vetor de forças do problema dual**. Tal denominação é utilizada, no presente trabalho, por mera semelhança em relação ao tradicional sistema de equações do MEF para o problema da elasticidade, cabendo ressaltar, porém, que o referido vetor do problema dual não possui o mesmo lastro físico do vetor de forças do problema primal<sup>2</sup>.

A obtenção da solução aproximada  $\tilde{\mathbf{w}}$  do problema dual, portanto, segue os seguintes passos:

1. Obtenção da matriz de rigidez do problema dual: nesta etapa, pode-se reaproveitar a matriz de rigidez já computada no problema primal – obtida a partir do lado esquerdo da igualdade na Equação (6.13).
2. Montagem do vetor de forças do problema dual: feita através da avaliação da Equação (6.16) em cada elemento finito pertencente ao domínio de integração  $A$ . Para um problema em modo misto de abertura, é necessária a montagem de dois vetores

---

<sup>2</sup>Os vetores  $\mathbf{k}$  e  $\mathbf{m}$ , de fato, poderiam ser interpretados como deformações iniciais, pelo fato de serem multiplicados por termos equivalentes a tensões. O vetor  $\mathbf{l}$ , por sua vez, não tem relação com o equilíbrio mecânico.

de forças (um deles associado a  $K_I$  e o outro a  $K_{II}$ ). A diferença entre ambos está nos termos que definem os vetores  $\mathbf{k}$ ,  $\mathbf{l}$  e  $\mathbf{m}$ , associados aos campos do estado 2 da Integral de Interação. Logo, para o problema dual associado a  $K_I$ , tais termos são obtidos do Modo I puro e, para o problema dual associado a  $K_{II}$ , do Modo II puro (conforme descrito na formulação da Integral de Interação, seção 6.1.2).

Após o cálculo do vetor de forças em cada elemento pertencente ao domínio  $A$ , monta-se o vetor de forças global (do modelo) de maneira análoga ao que é feito no problema primal.

3. Solução do sistema de equações do problema dual: dada a matriz de rigidez e o vetor de forças do problema dual, resolve-se o sistema de equações de maneira análoga ao que é feito no problema primal, obtendo-se, neste caso, os parâmetros nodais da solução  $\tilde{\mathbf{w}}$ . No presente trabalho, adota-se um procedimento iterativo proposto para o MEFM por Strouboulis et al. (2000).
4. Pós-processamento do problema dual: obtidos os parâmetros nodais de  $\tilde{\mathbf{w}}$ , é possível calcular as tensões e aplicar um estimador de erro para a norma energia (neste caso, o estimador ZZ-BD) sobre o problema dual, conforme será descrito na próxima seção.

#### 6.1.4 Obtenção do Erro Estimado para o Fator de Intensidade de Tensão

Para facilitar o entendimento do leitor, repetem-se, nesta seção, algumas equações da seção 2.4.4. Como visto, o erro exato cometido ao se aproximar o funcional de interesse  $Q(\mathbf{u})$  por  $Q(\tilde{\mathbf{u}})$  pode ser escrito em termos do erro da solução primal  $\tilde{\mathbf{u}}$  e da solução dual  $\tilde{\mathbf{w}}$ :

$$Q(\mathbf{e}) = B(\mathbf{e}, \mathbf{e}^w) \quad (6.17)$$

Logo, qualquer estimador de erro formulado para a norma energia pode ser aplicado sobre os problemas primal e dual com o objetivo de fornecer uma estimativa  $Q(\mathbf{e}^*)$  para o erro exato:



$$Q(\mathbf{e}^*) = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \tilde{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{C}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^{w*} - \tilde{\boldsymbol{\sigma}}^w) d\Omega \quad (6.18)$$

na qual  $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}_w$  representa o equivalente às tensões aproximadas no problema dual e  $\boldsymbol{\sigma}^{w*}$  o equivalente às tensões recuperadas nesse mesmo problema.

No presente trabalho, os campos  $\boldsymbol{\sigma}^*$  e  $\boldsymbol{\sigma}^{w*}$  da Equação (6.18) são fornecidos pela técnica de recuperação do estimador ZZ-BD. É necessária, portanto, a aplicação dessa técnica sobre os problemas primal e dual. É importante ressaltar que as etapas de validação do estimador para a norma energia (feitas, para o MEF<sup>g</sup>, por Lins et al. (2019) e, para o MEF<sup>gl</sup>, no presente trabalho (Capítulo 5)) são essenciais para o sucesso do estimador orientado ao objetivo.

Na sequência deste texto, o erro estimado para o fator de intensidade de tensão será denotado por  $\mathcal{E}^*(K_i)$  (com  $i = 1$  para  $K_I$  e  $i = 2$  para  $K_{II}$ , respectivamente), conforme indicado anteriormente na seção 4.7.

## 6.2 Validação do estimador no MEF<sup>g</sup>

### 6.2.1 Considerações Iniciais

Nesta seção, apresenta-se a validação do estimador de erro orientado ao objetivo aqui proposto, considerando, inicialmente, a sua utilização no MEF<sup>g</sup>. Neste caso, aplica-se o estimador ZZ-BD para a norma energia sobre problemas primal e dual, com o objetivo de se obter uma estimativa adequada para o erro associado ao fator de intensidade de tensão.

Apesar de a estratégia proposta exigir a solução de dois PVCs – além da aplicação do estimador de erro para a norma energia em ambos – alguns processos importantes podem ser efetuados uma única vez. Conforme mencionado na seção anterior, os problemas primal e dual se definem no mesmo espaço de discretização, ou seja, utilizam a mesma malha de elementos finitos e as mesmas funções de enriquecimento do MEF<sup>g</sup>. Tal fato permite que a matriz de rigidez do problema primal seja reaproveitada no problema dual, o que torna a solução do problema dual consideravelmente mais econômica<sup>3</sup>. Além disso,

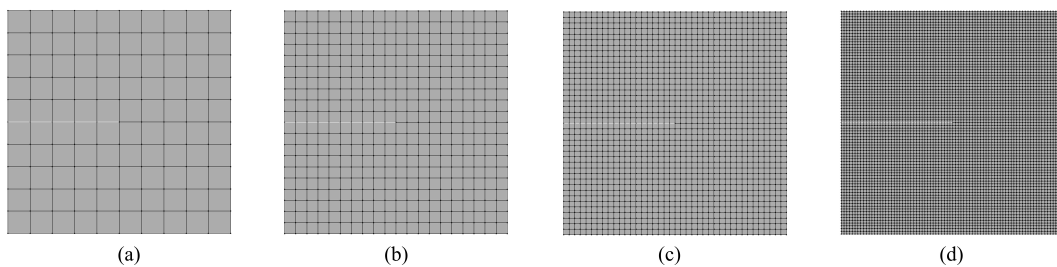
<sup>3</sup>Nas aplicações do MEF<sup>g</sup> e, mais ainda, do MEF<sup>gl</sup>, o processo de montagem da matriz de rigidez

os nós enriquecidos com as funções  $g_n^d$  no campo de tensões recuperado (Equação (2.36)) são, também, os mesmos. Logo, ao se aplicar o estimador ZZ-BD para a norma energia sobre o problema dual, é possível reaproveitar a matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^d$  (Equação (2.48)) já computada no problema primal, o que torna essa etapa menos onerosa.

## 6.2.2 Simulações Numéricas

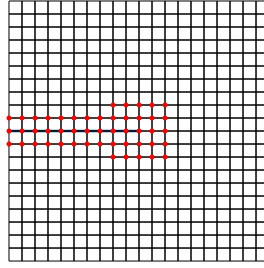
Para a validação do estimador de erro orientado ao objetivo aqui proposto, considera-se o **Problema A** em três modos distintos: modo I, modo II e modo misto de abertura. Conforme mencionado na seção 4.6.1, o que diferencia esses três casos é a natureza da solução exata imposta como condições de contorno de Neumann no modelo.

Para o estudo do comportamento do estimador, considera-se uma sequência de quatro malhas aninhadas, com elementos do tipo Q4, ilustradas na Figura 6.3. Trata-se da mesma sequência adotada por Lins et al. (2019) para a validação do estimador ZZ-BD na norma energia. Considera-se, também, a mesma estratégia de enriquecimento geométrico adotada para a representação da trinca: são enriquecidos todos os nós localizados dentro de um quadrado de lado igual a 0,25, centralizado na ponta da trinca, além dos nós pertencentes aos elementos imediatamente abaixo e acima desta. Os nós enriquecidos na Malha  $20 \times 20$  são ilustrados na Figura 6.4.



**Figura 6.3:** Sequência de malhas adotada para o estudo do estimador orientado ao objetivo no MEEG. (a) Malha  $10 \times 10$ , (b) Malha  $20 \times 20$ , (c) Malha  $40 \times 40$  e (d) Malha  $80 \times 80$ .

No procedimento da Integral de Interação, é necessária a escolha do raio  $r$ , que define o tamanho do domínio de integração  $A$  (Equação (6.4)). Dada a definição da função peso  $q$  e o fato de suas derivadas serem utilizadas na referida integral, somente os elementos impacta significativamente o tempo total da análise.



**Figura 6.4:** Nós enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho) para a Malha  $20 \times 20$ . A trinca é representada em azul.

intersectados pelo círculo associado a  $r$  contribuem, de fato, para o resultado da Integral de Interação. Em outras palavras, é necessário que o elemento possua algum nó no interior do círculo definido por  $r$ , mas não todos (neste último caso, a função  $q$  seria unitária em todos os nós do elemento e, conseqüentemente, teria derivadas nulas, zerando a contribuição do elemento na integral (ver Figura 6.2)). O valor adotado para  $r$ , portanto, afeta o resultado do fator de intensidade de tensão e, ainda, interfere diretamente na construção do problema dual e na distribuição do erro estimado nesse modelo.

Inicialmente, o estimador proposto foi aplicado sobre a sequência de malhas ilustrada na Figura 6.3, considerando  $r = 2h$ , com  $h$  representando o diâmetro (raiz quadrada da área) do elemento que contém a ponta da trinca. Em cada uma das malhas, as seguintes medidas são analisadas:

- Erro exato relativo na norma energia, calculado no problema primal:  $\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$ , Equação (4.10);
- Índice de efetividade do estimador para a norma energia, calculado no problema primal:  $\theta_G$ , Equação (4.9);
- Fator de intensidade de tensão aproximado:  $K_I$ ,  $K_{II}$  ou ambos, a depender do modo de abertura, calculados no problema primal;
- Erro exato do fator de intensidade de tensão:  $\mathcal{E}(K_i)$ , Equação (4.12);
- Erro exato relativo do fator de intensidade de tensão:  $\mathcal{E}_{\%}(K_i)$ , Equação (4.15);
- Erro estimado do fator de intensidade de tensão:  $\mathcal{E}^*(K_i)$ , Equação (4.14);

- Erro estimado relativo do fator de intensidade de tensão:  $\mathcal{E}_{\%}^*(K_i)$ , Equação (4.17);
- Índice de efetividade do estimador orientado ao objetivo:  $\theta^{K_i}$ , Equação (4.18).

Os resultados obtidos em cada malha nas condições de modo I, modo II e modo misto de abertura, respectivamente, são apresentados nas Tabelas 6.1 a 6.3. Nessas condições, é possível observar que o estimador proposto, apesar de apresentar excelentes efetividades para a norma energia no problema primal (coluna “ $\theta_G$ ”), não consegue descrever corretamente o erro dos fatores de intensidade de tensão. As efetividades obtidas para  $K_I$  e  $K_{II}$  (colunas  $\theta^{K_I}$  e  $\theta^{K_{II}}$ , respectivamente), em praticamente todos os casos, são bem distantes de 1,0. O erro exato dos fatores de intensidade de tensão, por sua vez, é pequeno (especialmente a partir da Malha  $20 \times 20$ ), o que mostra que a parcela singular da solução em si é corretamente representada.

Uma explicação para o mau desempenho do estimador orientado ao objetivo, nesse caso, pode ser obtida em uma análise da distribuição dos erros por elemento. Nas Figuras 6.5 a 6.8, apresentam-se, para cada uma das malhas, os erros estimados na norma energia por elemento dos problema primal e dual e o erro estimado de  $K_I$  por elemento. Por simplicidade, apresentam-se apenas os resultados referentes à condição de modo misto de abertura. É possível observar que, para o valor adotado de  $r = 2h$ , a imposição das forças no problema dual ocorre em uma região próxima à ponta da trinca, o que dificulta a representação do problema e, conseqüentemente, penaliza a aplicação do estimador de erro nesse modelo. Uma vez que os maiores erros do problema primal também ocorrem nessa região, a distribuição do erro estimado de  $K_I$ , em todas as malhas, acaba se concentrando nas vizinhanças da ponta da trinca.

Tendo em vista o diagnóstico anterior, novos valores foram selecionados para o raio  $r$ , visando a aplicação das forças em uma região mais distante da ponta da trinca no problema dual. Tendo em vista a redução de  $h$  com o refinamento da malha, adotam-se os seguintes valores:  $r = 3h$  na Malha  $10 \times 10$ ,  $r = 6h$  na Malha  $20 \times 20$ ,  $r = 12h$  na Malha  $40 \times 40$  e  $r = 24h$  na Malha  $80 \times 80$ . Os valores obtidos com essa nova configuração são apresentados nas Tabelas 6.4 a 6.6.

**Tabela 6.1:** Resultados do MEEG para o Problema A em Modo I de abertura, com  $r = 2h$ .

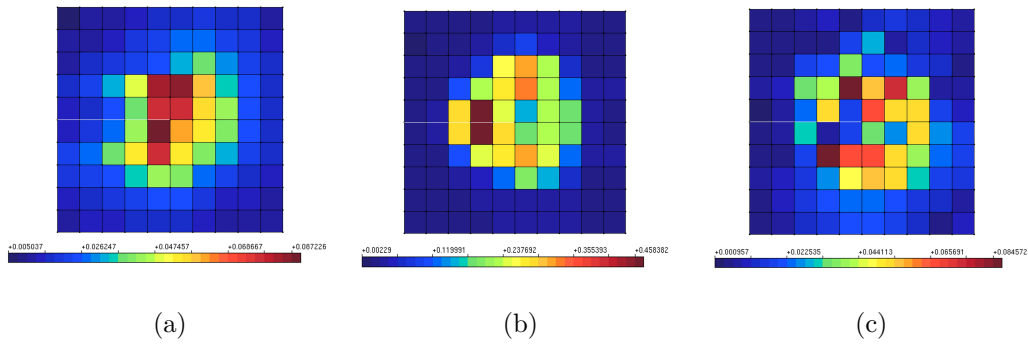
Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$
$10 \times 10$	284	11,97%	1,01	2,467	0,0398	1,59%	0,0799	3,14%	2,01
$20 \times 20$	980	7,47%	0,99	2,492	0,0143	0,57%	0,0211	0,84%	1,47
$40 \times 40$	3694	3,98%	0,98	2,507	-0,0004	-0,02%	0,0010	0,04%	-2,33
$80 \times 80$	14184	2,16%	0,99	2,511	-0,0040	-0,16%	-0,0019	-0,08%	0,48

**Tabela 6.2:** Resultados do MEEG para o Problema A em Modo II de abertura, com  $r = 2h$ .

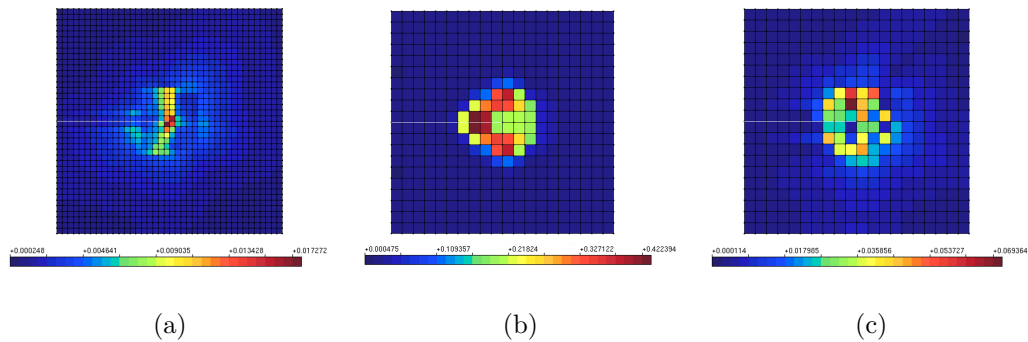
Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
$10 \times 10$	284	9,46%	1,00	2,486	0,0203	0,81%	0,0434	1,72%	2,14
$20 \times 20$	980	5,70%	0,99	2,505	0,0021	0,08%	0,0021	0,08%	1,01
$40 \times 40$	3694	2,83%	0,99	2,506	0,0008	0,03%	0,0003	0,01%	0,44
$80 \times 80$	14184	1,46%	0,99	2,505	0,0014	0,06%	0,0004	0,01%	0,25

**Tabela 6.3:** Resultados do MEEG para o Problema A em Modo Misto de abertura, com  $r = 2h$ .

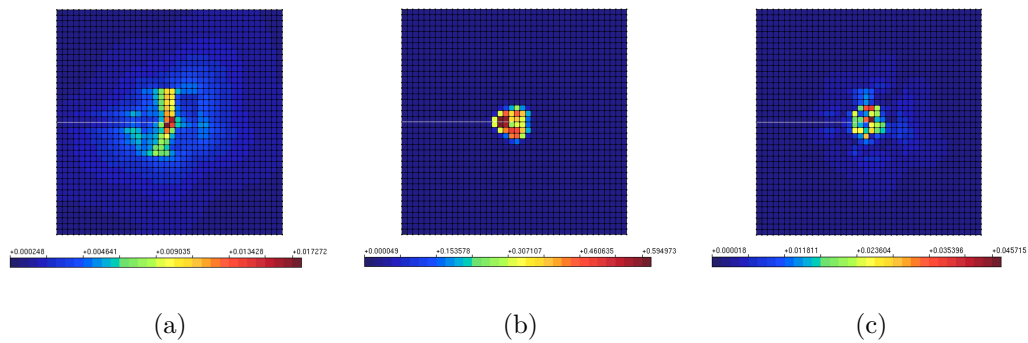
Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
$10 \times 10$	284	9,46%	1,00	2,486	0,0203	0,81%	0,0434	1,72%	2,14	2,486	0,0203	0,81%	0,0434	1,72%	2,14
$20 \times 20$	980	5,70%	0,99	2,498	0,0085	0,34%	0,0153	0,61%	1,80	2,505	0,0021	0,08%	0,0021	0,08%	1,01
$40 \times 40$	3694	2,83%	0,99	2,508	-0,0015	-0,06%	-0,0024	-0,09%	1,57	2,506	0,0008	0,03%	0,0003	0,01%	0,44
$80 \times 80$	14184	1,46%	0,99	2,510	-0,0032	-0,13%	-0,0023	-0,09%	0,73	2,505	0,0015	0,06%	0,0003	0,01%	0,19



**Figura 6.5:** Malha  $10 \times 10$ ,  $r = 2h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .

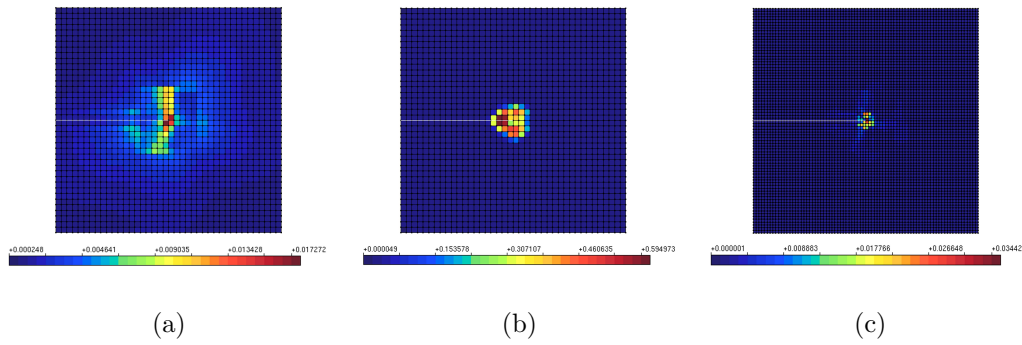


**Figura 6.6:** Malha  $20 \times 20$ ,  $r = 2h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .



**Figura 6.7:** Malha  $40 \times 40$ ,  $r = 2h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .

Os resultados das Tabelas 6.4 a 6.6 comprovam a validade da estratégia proposta. Valores próximos da unidade são obtidos para os índices de efetividade de  $K_I$  e  $K_{II}$  em praticamente todos os casos, com exceção da Malha  $10 \times 10$ . De fato, o caráter mais grosseiro dessa malha prejudica o desempenho do estimador orientado ao objetivo. Cabe ressaltar que o erro estimado para a grandeza de interesse é calculado através do



**Figura 6.8:** Malha  $80 \times 80$ ,  $r = 2h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .

produto entre duas medidas de erro (Equação (6.18)). Logo, é natural que se obtenham efetividades mais distantes de 1,0 em comparação ao estimador para a norma energia no problema primal.

Para melhor visualização dos resultados, apresentam-se, na Figura 6.9, a variação dos erros exato e estimado dos fatores de intensidade de tensão em função do número de graus de liberdade do modelo (considerando a sequência de 4 malhas). Por simplificação, são exibidos somente os resultados na condição de modo misto de abertura (Tabela 6.6). É possível observar uma boa concordância entre as curvas, cuja proximidade aumenta à medida que a malha é refinada.

A variação dos índices de efetividade de  $K_I$  e  $K_{II}$  em função do número de graus de liberdade, por sua vez, é apresentada na Figura 6.10. A convergência dos dois índices não é necessariamente monotônica, mas a tendência observada nas malhas mais refinadas indica uma proximidade adequada em relação ao valor de 1,0.

Finalmente, a distribuição dos erros estimados por elemento, considerando os novos valores de  $r$ , são apresentados nas Figuras 6.11 a 6.14 (fazendo um paralelo com as Figuras 6.5 a 6.8, obtidas com  $r = 2h$  em todas as malhas). É bastante claro o efeito do raio  $r$  sobre os mapas de erro, especialmente a partir da Malha  $20 \times 20$ . Quando se aumenta o valor de  $r$ , o erro estimado no problema dual se destaca, de forma muito evidente, na região de aplicação das forças (diretamente associada a  $r$ ), enquanto a distribuição do erro estimado no problema primal não é alterada (esta última, de fato, não depende de  $r$ ). A distribuição do erro estimado de  $K_I$ , por sua vez, reflete essencialmente o produto entre os erros dos problemas primal e dual.

**Tabela 6.4:** Resultados do MEFG para o Problema A em Modo I de abertura, com o aumento do raio  $r$ .

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$
$10 \times 10$	284	11,97%	1,01	2,452	0,0548	2,19%	0,0814	3,21%	1,49
$20 \times 20$	980	7,47%	0,99	2,486	0,0210	0,84%	0,0232	0,93%	1,11
$40 \times 40$	3694	3,98%	0,98	2,501	0,0059	0,24%	0,0065	0,26%	1,09
$80 \times 80$	14184	2,16%	0,99	2,505	0,0017	0,07%	0,0019	0,07%	1,12

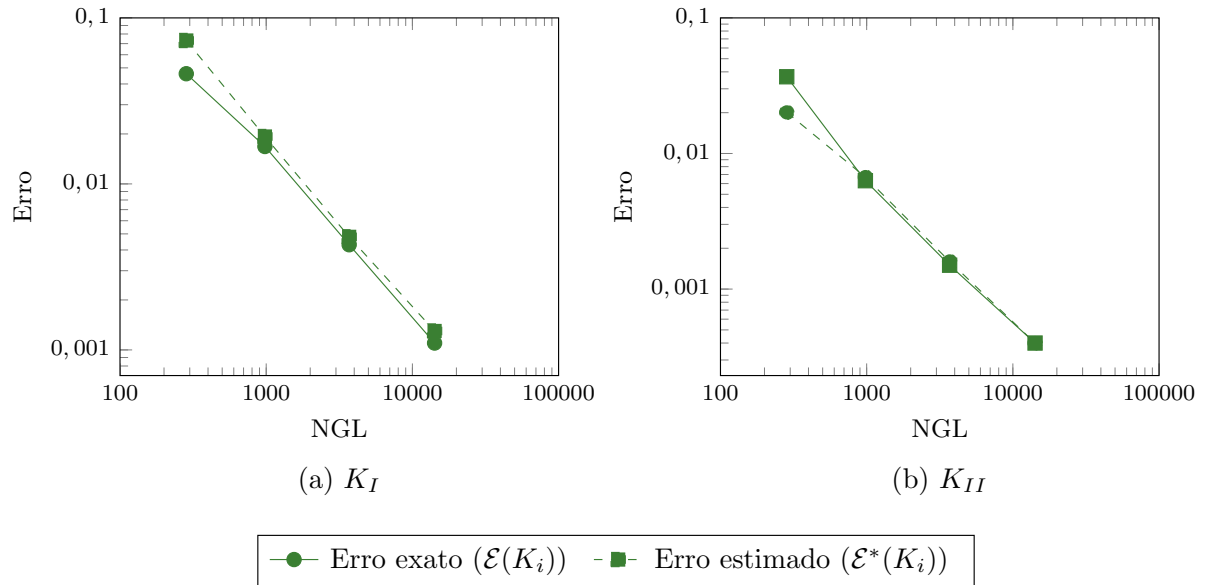
**Tabela 6.5:** Resultados do MEFG para o Problema A em Modo II de abertura, com o aumento do raio  $r$ .

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
$10 \times 10$	284	9,32%	0,95	2,484	0,0229	0,91%	0,0394	1,56%	1,72
$20 \times 20$	980	5,91%	0,95	2,498	0,0086	0,35%	0,0073	0,29%	0,85
$40 \times 40$	3694	3,25%	0,96	2,504	0,0026	0,10%	0,0023	0,09%	0,89
$80 \times 80$	14184	1,79%	0,97	2,506	0,0008	0,03%	0,0007	0,03%	0,94

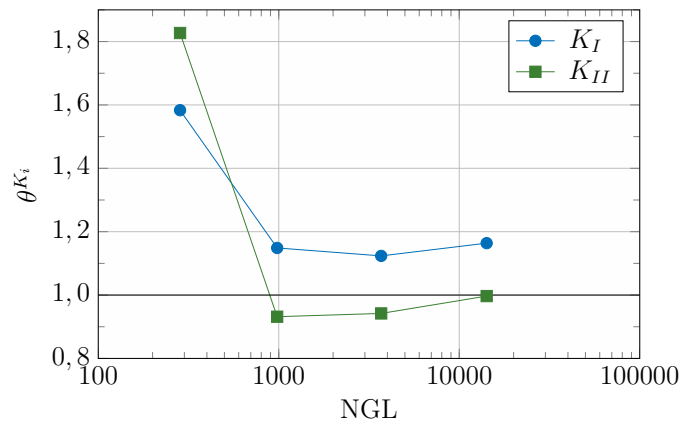
**Tabela 6.6:** Resultados do MEFG para o Problema A em Modo Misto de abertura, com o aumento do raio  $r$ .

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
$10 \times 10$	284	9,46%	1,00	2,460	0,0461	1,84%	0,0731	2,88%	1,58	2,486	0,0201	0,80%	0,0368	1,46%	1,83
$20 \times 20$	980	5,70%	0,99	2,490	0,0168	0,67%	0,0193	0,77%	1,15	2,500	0,0067	0,27%	0,0063	0,25%	0,93
$40 \times 40$	3694	2,83%	0,99	2,502	0,0043	0,17%	0,0048	0,19%	1,12	2,505	0,0016	0,06%	0,0015	0,06%	0,94
$80 \times 80$	14184	1,46%	0,99	2,506	0,0011	0,04%	0,0013	0,05%	1,16	2,506	0,0004	0,01%	0,0004	0,01%	1,00

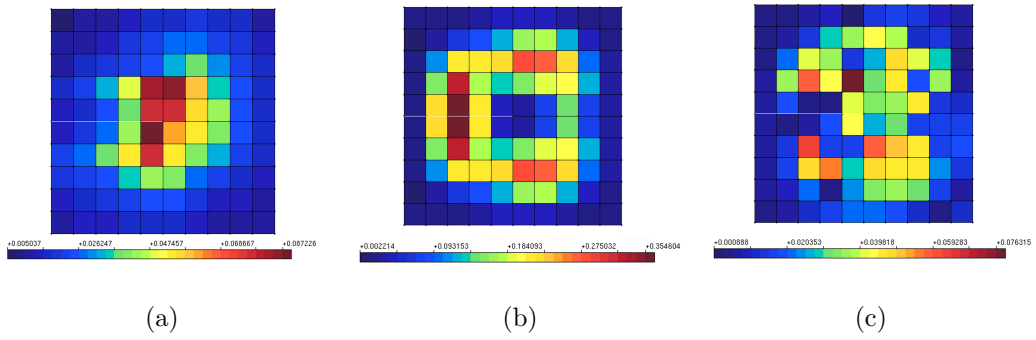




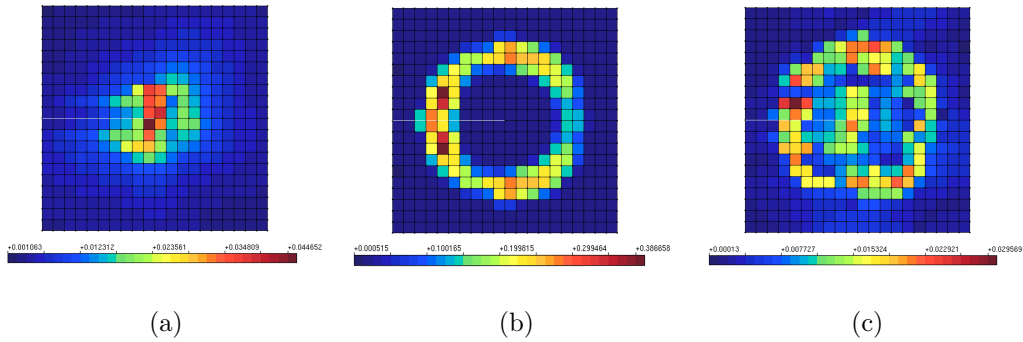
**Figura 6.9:** Erros exato e estimado para os fatores de intensidade de tensão, considerando o problema em modo misto (resultados da Tabela 6.6). Eixos  $x$  e  $y$  em escala logarítmica.



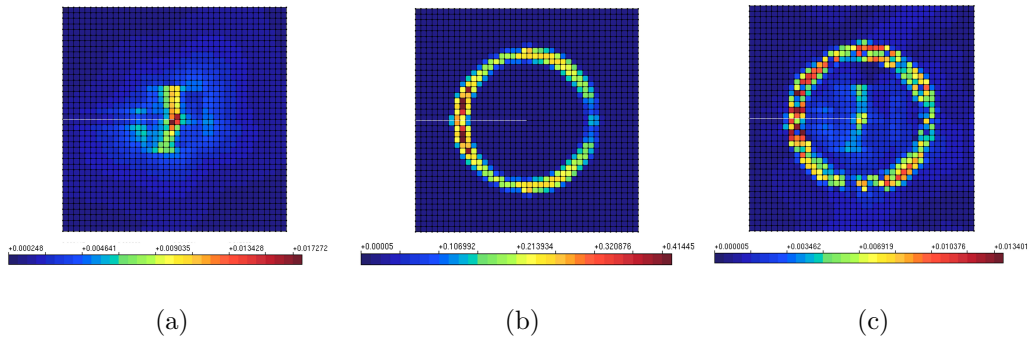
**Figura 6.10:** Índices de efetividade do estimador para os fatores de intensidade de tensão, considerando o problema em modo misto (resultados da Tabela 6.6). Eixo  $x$  em escala logarítmica.



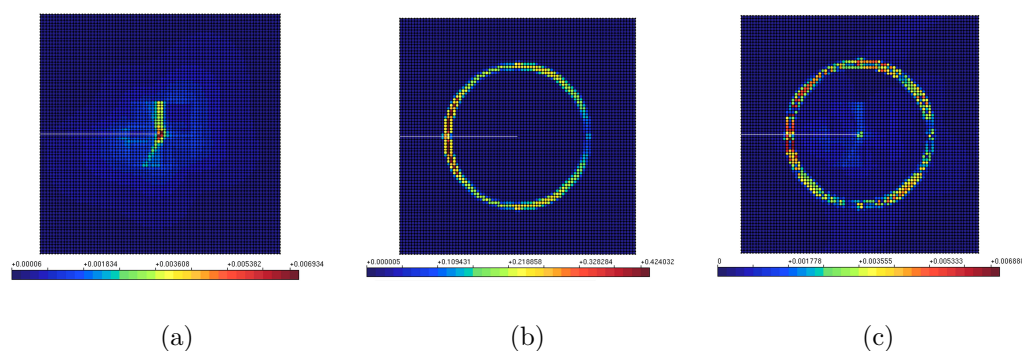
**Figura 6.11:** Malha  $10 \times 10$ ,  $r = 3h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .



**Figura 6.12:** Malha  $20 \times 20$ ,  $r = 6h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .



**Figura 6.13:** Malha  $40 \times 40$ ,  $r = 12h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .



**Figura 6.14:** Malha  $80 \times 80$ ,  $r = 24h$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .

## 6.3 Validação do estimador no MEF $G^{\text{gl}}$

### 6.3.1 Considerações Iniciais

Na presente seção, apresenta-se a validação do estimador de erro orientado ao objetivo aqui proposto, considerando, agora, a sua aplicação sobre o MEF $G^{\text{gl}}$  e o MEF $G\text{-}E^{\text{gl}}$ . Conforme mencionado ao longo do texto, deseja-se desenvolver um estimador capaz de descrever adequadamente o erro do fator de intensidade de tensão calculado no problema global enriquecido.

Assim como no MEF $G$ , a formulação se baseia na solução dos problemas primal e dual – exigindo a aplicação do estimador de erro para a norma energia em ambos – e alguns processos podem ser executados uma única vez. A cada vez que se resolve o problema global enriquecido (primal), é necessário resolver um outro problema global enriquecido (dual). Neste problema dual, adota-se, assim como no MEF $G$ , o mesmo espaço de discretização do problema primal. Logo, os nós enriquecidos com as funções global-local, no problema dual, são os mesmos do problema primal. Naturalmente, as funções de enriquecimento em si também precisam ser as mesmas. Logo, **um único modelo local é empregado** na análise, sendo utilizado para a construção das funções de enriquecimento global-local e, ainda, como células de integração no problemas globais enriquecidos primal e dual.

Sobre o modelo local, são impostas somente as condições de contorno provenientes do problema global enriquecido primal – aquele que, de fato, representa o problema que se deseja resolver. O problema global enriquecido dual, portanto, não exerce influência sobre o problema local.

Finalmente, ressalta-se que, assim como no MEFG, a matriz de rigidez e a matriz  $\tilde{\mathbf{A}}^d$  do estimador ZZ-BD (Equação (2.48)) podem ser reaproveitadas no problema global enriquecido dual ao longo do processo de solução do MEFG<sup>gl</sup>.

## 6.3.2 Simulações Numéricas

### 6.3.2.1 Convergência e Índices de Efetividade

Assim como feito para o MEFG (seção 6.2.2), aborda-se, na presente seção, o **Problema A** nas condições de modo I, modo II e modo misto de abertura. Para o estudo do estimador orientado ao objetivo, emprega-se a mesma sequência de malhas globais utilizada na validação do estimador ZZ-BD para a norma energia no problema global enriquecido (seção 5.2), com a configuração de domínios locais geométricos (Figura 5.6). Em cada malha, representa-se a trinca, no problema local, através de funções de singularidade como enriquecimento geométrico (assim como na seção 5.2, como mostrado na Figura 5.8).

Conforme discutido no estudo do estimador orientado ao objetivo para o MEFG, o raio  $r$  da Integral de Interação afeta diretamente a construção do problema dual, definindo a região na qual se impõem as forças nesse modelo. Quando se considera o MEFG<sup>gl</sup>, naturalmente, tal influência se mantém. Uma vez que as malhas globais, neste caso, são as mesmas empregadas no MEFG (seção 6.2.2), adotam-se os valores de  $r = 3d$ ,  $6d$  e  $12d$  nas malhas  $10 \times 10$ ,  $20 \times 20$  e  $40 \times 40$ , respectivamente, em todas as análises desta seção.

Na análise do estimador ZZ-BD para a norma energia no problema global enriquecido (seção 5.2.2.3), foi constatada a estabilização dos índices de efetividade após a execução de três ciclos global-local (no caso do MEFG<sup>gl</sup>). Por esse motivo, os resultados do estimador orientado ao objetivo, a serem discutidos a seguir, são aqueles obtidos ao final do terceiro ciclo. As medidas de erro analisadas, considerando a norma energia e os fatores de intensidade de tensão, são as mesmas abordadas na validação do estimador para o MEFG (seção 6.2.2).

Nas Tabelas 6.7 a 6.9, apresentam-se os resultados fornecidos pelo MEFG<sup>gl</sup>, considerando as condições de modo I, modo II e modo misto de abertura, respectivamente. Nos problemas envolvendo modo I ou modo II puros (Tabelas 6.7 e 6.8), observa-se uma boa convergência dos índices de efetividade do estimador para  $K_I$  e  $K_{II}$ , que atingem valores bastante próximos da unidade na última malha. No problema em modo misto (Tabela 6.9), por sua vez, tais índices atingem valores abaixo de 0,90. Esse resultado se deve, provavelmente, à natureza mais complexa do comportamento em modo misto. Observa-se

que os erros exatos de  $K_I$  e  $K_{II}$ , em todos os casos, também são maiores nessa condição. A convergência dos índices de efetividade para valores abaixo de 0,90 indica que o estimador adotado, neste caso, é incapaz de descrever a totalidade do erro – deixando de capturar parte do erro total. É provável, portanto, que uma melhor descrição da trinca no problema global enriquecido (através do aprimoramento das funções de enriquecimento global-local) possa resolver esse problema.

Tendo em vista a hipótese anterior, apresentam-se, nas Tabelas 6.10 a 6.12, os resultados obtidos com o enriquecimento global-local estável (MEFG-E<sup>gl</sup>). Com efeito, a aplicação da estratégia estável corrige o problema da subestimação do erro na condição de modo misto: na Tabela 6.12, os índices de efetividade de  $K_I$  e  $K_{II}$  convergem para valores bastante próximos de 1,0. Considerando os modos I e II isolados, os resultados também são próximos da unidade. Também é importante observar o grande ganho de precisão garantido pela estratégia estável, tanto em termos de energia (coluna  $\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$ ) quanto dos fatores de intensidade de tensão. Os erros exatos de  $K_I$  e  $K_{II}$  (colunas  $\mathcal{E}_{\%}(K_1)$  e  $\mathcal{E}_{\%}(K_2)$ ), em praticamente todos os casos, reduzem-se à menos da metade dos valores obtidos com o MEFG<sup>gl</sup> (Tabelas 6.7 a 6.9).

Para melhor visualização dos resultados fornecidos pelo MEFG<sup>gl</sup> e sua versão estável, apresenta-se, na Figura 6.15, a variação dos erros exato e estimado do fator de intensidade de tensão em função do número de graus de liberdade do problema global enriquecido (considerando a sequência de três malhas). Por simplificação, são exibidos somente os resultados na condição de modo misto de abertura (resultados das Tabelas 6.9 e 6.12). Observa-se uma melhor concordância entre as curvas no caso da versão estável, com uma notável tendência de equivalência à medida que a malha global é refinada.

Na Figura 6.16, apresenta-se a evolução dos índices de efetividade de  $K_I$  e  $K_{II}$  em função do número de graus de liberdade do problema global enriquecido, considerando o MEFG<sup>gl</sup> e o MEFG-E<sup>gl</sup>. Aborda-se, novamente, apenas a condição de modo misto de abertura. É possível observar, no caso do MEFG-E<sup>gl</sup>, uma tendência de convergência para o valor ideal de 1,0 – não necessariamente monotônica, assim como no MEFG (Figura 6.10). A mesma tendência de convergência (porém menos pronunciada) também se verifica no MEFG<sup>gl</sup> padrão.

**Tabela 6.7:** Resultados do MEFG<sup>gl</sup> para o Problema A em Modo I de abertura.

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$
$10 \times 10$	284	13,50%	0,98	2,438	0,0687	2,74%	0,0921	3,64%	1,34
$20 \times 20$	1078	7,21%	0,97	2,487	0,0197	0,79%	0,0188	0,75%	0,95
$40 \times 40$	4202	3,75%	0,98	2,501	0,0053	0,21%	0,0055	0,22%	1,04

**Tabela 6.8:** Resultados do MEFG<sup>gl</sup> para o Problema A em Modo II de abertura.

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
$10 \times 10$	284	9,19%	0,96	2,475	0,0321	1,28%	0,0276	1,10%	0,86
$20 \times 20$	1078	4,82%	0,96	2,498	0,0084	0,33%	0,0071	0,28%	0,84
$40 \times 40$	4202	2,54%	0,98	2,504	0,0023	0,09%	0,0023	0,09%	0,99

**Tabela 6.9:** Resultados do MEFG<sup>gl</sup> para o Problema A em Modo Misto de abertura.

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
$10 \times 10$	284	11,97%	0,95	2,405	0,1018	4,06%	0,1082	4,31%	1,06	2,461	0,0456	1,82%	0,0297	1,19%	0,65
$20 \times 20$	1078	6,21%	0,97	2,483	0,0233	0,93%	0,0165	0,66%	0,71	2,495	0,0121	0,48%	0,0088	0,35%	0,73
$40 \times 40$	4202	3,16%	0,98	2,501	0,0057	0,23%	0,0046	0,18%	0,80	2,503	0,0033	0,13%	0,0028	0,11%	0,86

**Tabela 6.10:** Resultados do MEFG-E<sup>gl</sup> para o Problema A em Modo I de abertura.

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$
10 × 10	284	9,61%	1,08	2,472	0,0342	1,37%	0,0434	1,72%	1,27
20 × 20	1078	4,82%	1,02	2,498	0,0086	0,34%	0,0094	0,38%	1,10
40 × 40	4202	2,48%	1,01	2,504	0,0022	0,09%	0,0024	0,10%	1,11

**Tabela 6.11:** Resultados do MEFG-E<sup>gl</sup> para o Problema A em Modo II de abertura.

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
10 × 10	284	6,96%	1,07	2,493	0,0140	0,56%	0,0151	0,60%	1,08
20 × 20	1078	3,46%	1,02	2,503	0,0032	0,13%	0,0029	0,11%	0,89
40 × 40	4202	1,81%	1,00	2,506	0,0009	0,03%	0,0008	0,03%	0,98

**Tabela 6.12:** Resultados do MEFG-E<sup>gl</sup> para o Problema A em Modo Misto de abertura.

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
10 × 10	284	7,42%	1,08	2,475	0,0317	1,27%	0,0396	1,57%	1,25	2,494	0,0125	0,50%	0,0144	0,57%	1,15
20 × 20	1078	3,52%	1,04	2,499	0,0075	0,30%	0,0078	0,31%	1,05	2,504	0,0025	0,10%	0,0024	0,09%	0,94
40 × 40	4202	1,76%	1,01	2,505	0,0018	0,07%	0,0019	0,08%	1,06	2,506	0,0006	0,02%	0,0006	0,02%	1,05

### 6.3.2.2 Erros estimados por Elemento

Para o problema em modo misto, os erros estimados por elemento são apresentados nas Figuras 6.17 a 6.19, considerando o  $\text{MEFG}^{\text{gl}}$ , e nas Figuras 6.20 a 6.22, considerando o  $\text{MEFG-E}^{\text{gl}}$ . São exibidos os erros estimados na norma energia por elemento dos problemas primal e dual, além do erro estimado de  $K_I$  por elemento (fazendo um paralelo com os resultados do MEFG (Figuras 6.11 a 6.13)).

Tanto no  $\text{MEFG}^{\text{gl}}$  quanto na versão estável, observam-se distribuições de erro semelhantes às do MEFG. Maiores diferenças em relação ao MEFG se observam no problema primal, no qual ocorre uma certa concentração de erro ao longo do comprimento da trinca (já discutida na validação do estimador ZZ-BD para norma energia, seção 5.2.2.2). Apesar disso, é interessante notar que a distribuição do erro estimado de  $K_I$  reproduz diretamente o produto entre os erros estimados nos problemas primal e dual, assim como no MEFG.

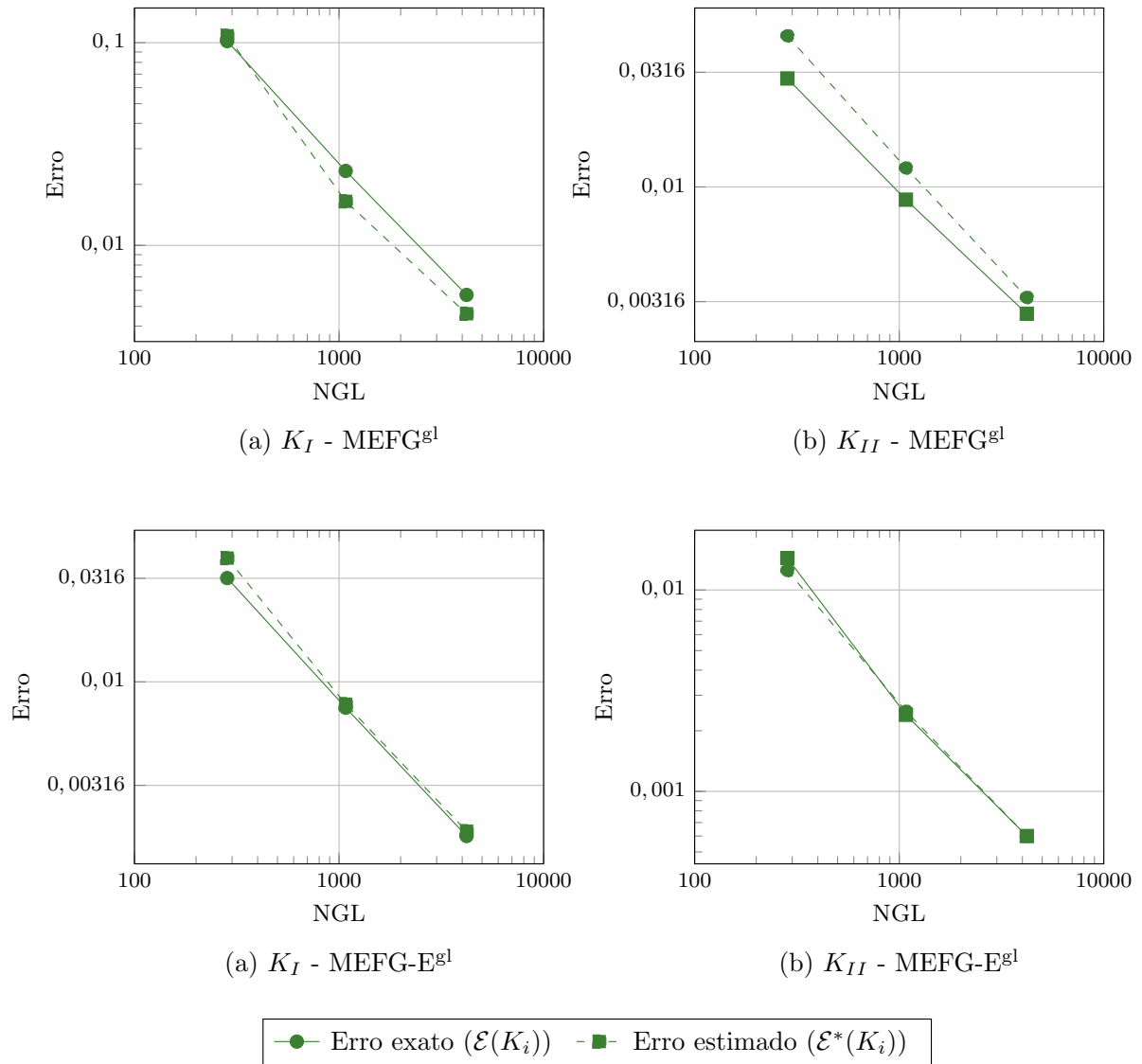
### 6.3.2.3 Comportamento ao Longo dos Ciclos Global-local

Na seção anterior, o comportamento do estimador orientado ao objetivo foi analisado através dos resultados finais, no problema global enriquecido, alcançados após a execução de três ciclos global-local. Assim como feito na validação do estimador ZZ-BD para a norma energia (seção 5.2.2.3), também é interessante analisar o comportamento do novo estimador ao longo do processo de ciclos global-local.

A evolução dos índices de efetividade do estimador orientado ao objetivo ao longo dos ciclos global-local é apresentada nas Figuras 6.23 e 6.24, considerando a condição de modo misto de abertura. Para facilitar o entendimento do leitor, os resultados de cada malha são apresentados separadamente, levando-se em conta o  $\text{MEFG}^{\text{gl}}$ , na Figura 6.23, e o  $\text{MEFG-E}^{\text{gl}}$ , na Figura 6.24. De maneira geral, os índices de efetividade de  $K_I$  e  $K_{II}$  convergem no terceiro ciclo global-local. No caso do  $\text{MEFG-E}^{\text{gl}}$ , os resultados convergem para valores bem próximos da unidade, conforme discutido anteriormente. É interessante observar que o intervalo de variação de  $\theta^{K_I}$  e  $\theta^{K_{II}}$  é mais amplo em relação ao estimador para a norma energia (Figuras 5.13 e 5.14, seção 5.2.2.3). No caso de  $K_{II}$ , aparecem até mesmo índices de efetividade negativos (o que não é possível para a norma energia). Tal situação ocorre quando o erro exato do fator de intensidade de tensão é muito pequeno (da ordem de 0,01% no segundo ciclo das malhas  $10 \times 10$  e  $20 \times 20$  com o  $\text{MEFG-E}^{\text{gl}}$ , por exemplo), o que faz com que pequenas variações no erro estimado impliquem em grandes alterações no índice de efetividade.

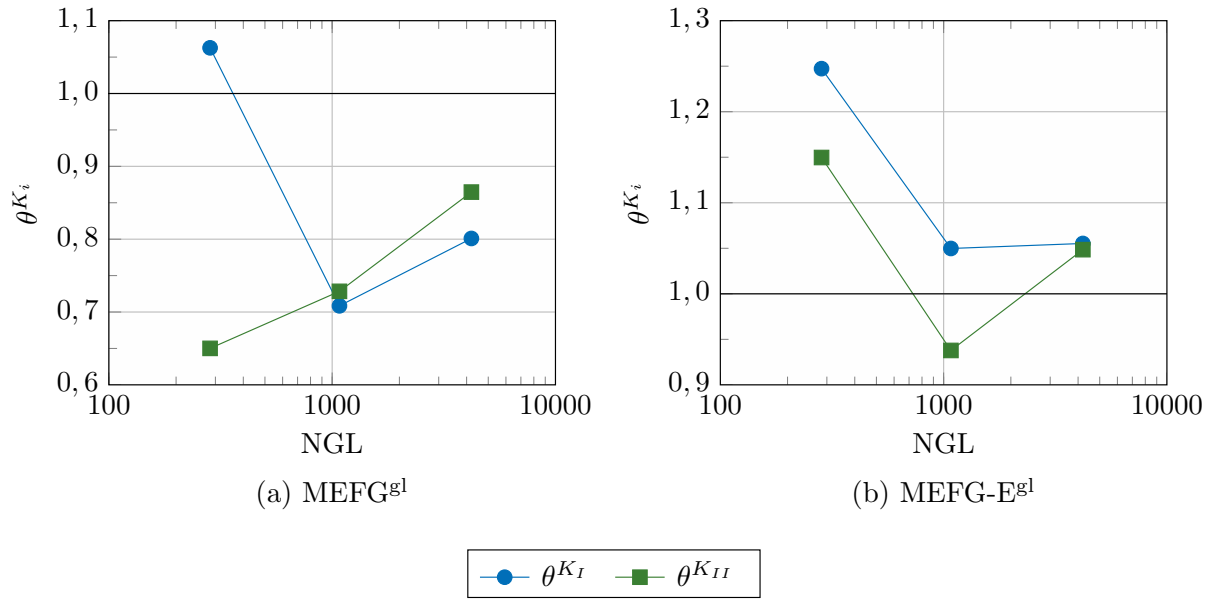
Finalmente, a distribuição do erro estimado de  $K_I$  por elemento, ao longo dos ciclos



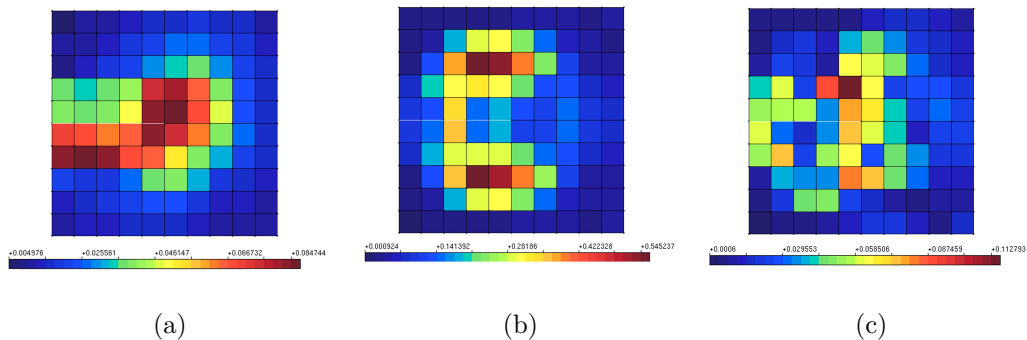


**Figura 6.15:** Erros exato e estimado para os fatores de intensidade de tensão, considerando o problema em modo misto (resultados das Tabelas 6.9 e 6.12). A sigla NGL representa o número de graus de liberdade do problema global enriquecido. Eixos  $x$  e  $y$  em escala logarítmica.

global-local, é apresentada nas Figuras 6.25 e 6.26. Por simplificação, apresentam-se somente os resultados da Malha  $20 \times 20$  no problema em modo misto de abertura. Em todos os ciclos, o erro estimado de  $K_I$  reflete o comportamento dos problemas globais enriquecidos primal e dual. No primeiro ciclo, quando a representação da trinca ainda é precária, o erro na região de imposição das forças no problema dual é menor em comparação ao erro do problema primal. A partir do segundo ciclo, o erro nessa região torna-se mais evidente e a distribuição do erro estimado de  $K_I$  se torna mais próxima daquela obtida com o MEFG – exibindo concentrações de erro nas vizinhanças da ponta da trinca e também nos elementos associados ao domínio  $A$  da Integral de Interação.



**Figura 6.16:** Índices de efetividade do estimador para os fatores de intensidade de tensão no problema global enriquecido, considerando a condição de modo misto (resultados das Tabelas 6.9 e 6.12). A sigla NGL representa o número de graus de liberdade do problema global enriquecido. Eixo  $x$  em escala logarítmica.

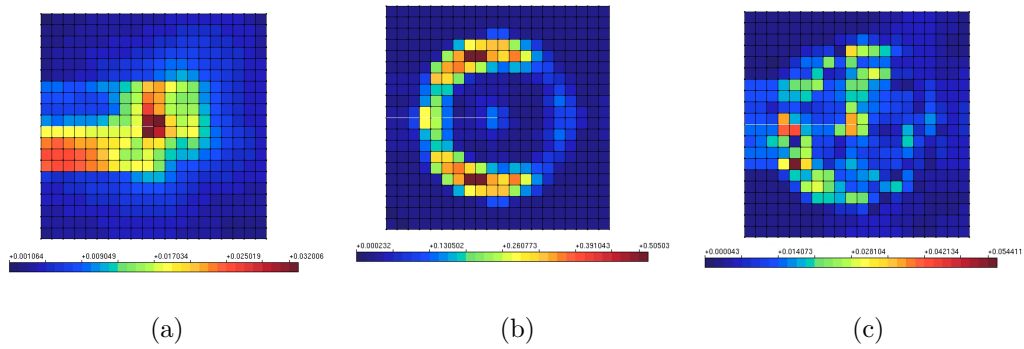


**Figura 6.17:** Malha  $10 \times 10$ ,  $\text{MEFG}^{\text{gl}}$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .

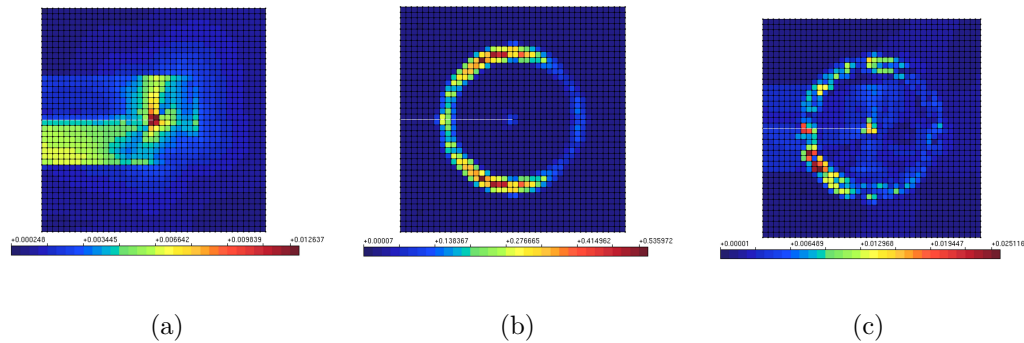
## 6.4 Aplicação do Estimador no $\text{MEFG}^{\text{gl}}$ : Exemplos Adicionais

### 6.4.1 Considerações Iniciais

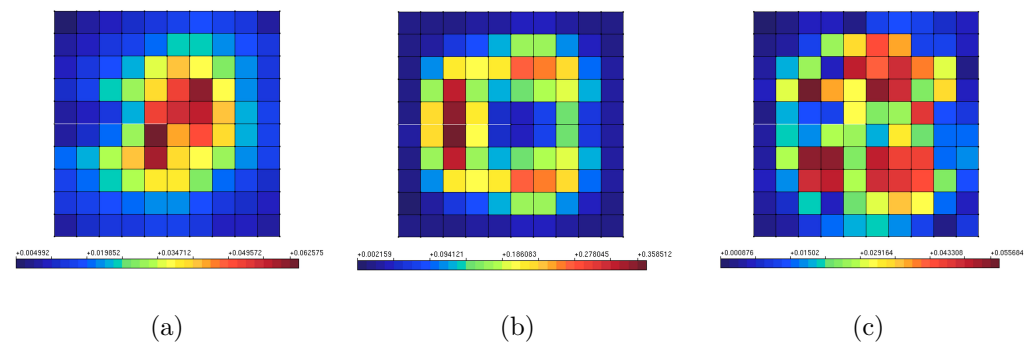
Na seção anterior, problemas com solução exata conhecida foram utilizados em um estudo abrangente sobre o estimador de erro orientado ao objetivo proposto neste trabalho.



**Figura 6.18:** Malha  $20 \times 20$ ,  $\text{MEFG}^{\text{gl}}$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .

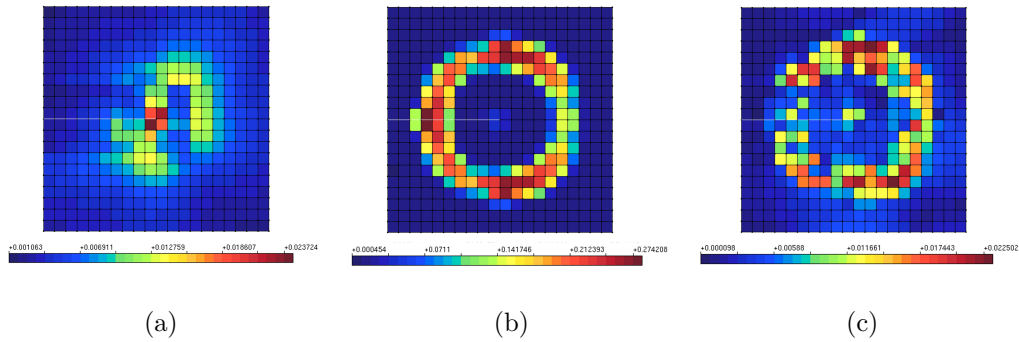


**Figura 6.19:** Malha  $40 \times 40$ ,  $\text{MEFG}^{\text{gl}}$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .

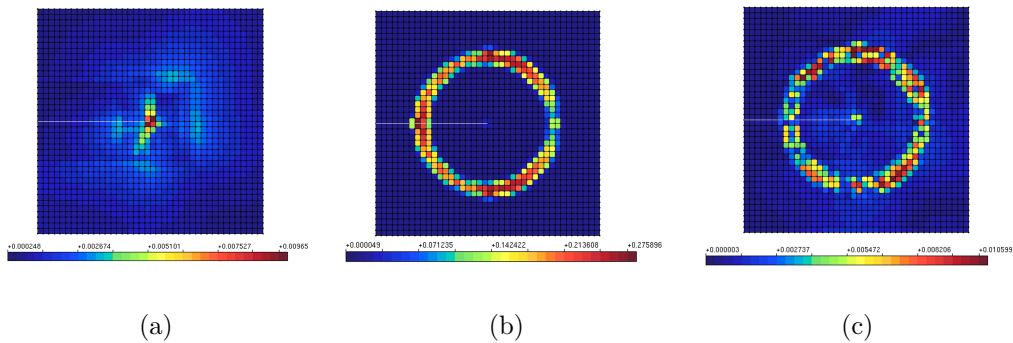


**Figura 6.20:** Malha  $10 \times 10$ ,  $\text{MEFG-E}^{\text{gl}}$ : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .

Na presente seção, avalia-se a aplicação do estimador em dois problemas adicionais – tradicionais na literatura do MEFG – cuja solução exata não é conhecida. Neste caso, o desempenho do estimador é avaliado através de soluções de referência para o fator de intensidade de tensão. Naturalmente, existe algum nível de erro nas soluções de referência, o que exige cautela na avaliação dos resultados. O índice de efetividade aproximado do



**Figura 6.21:** Malha  $20 \times 20$ , **MEFG- $E^{\text{gl}}$** : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .



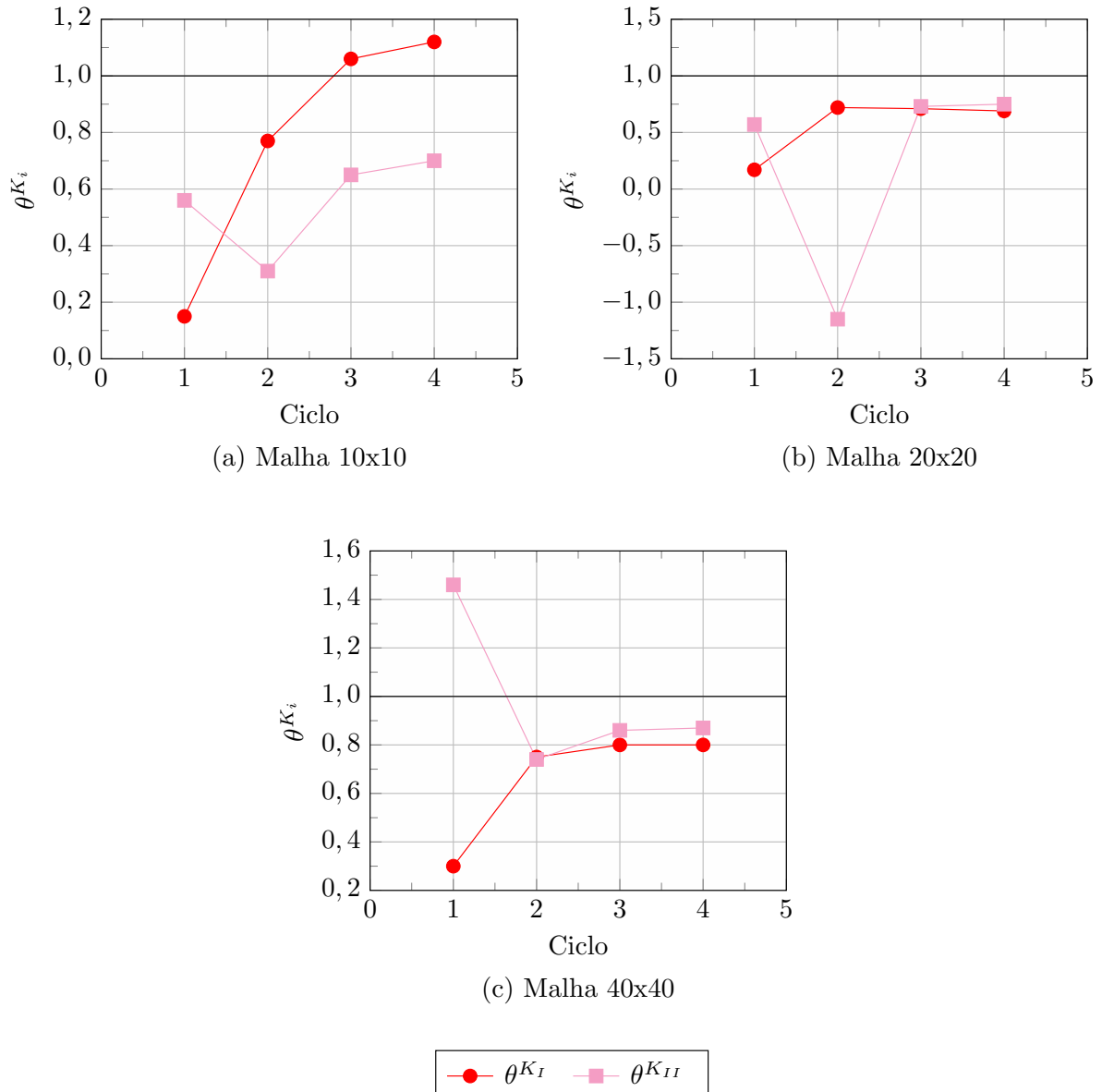
**Figura 6.22:** Malha  $40 \times 40$ , **MEFG- $E^{\text{gl}}$** : erros estimados por elemento. (a) Problema primal, (b) Problema dual e (c) Erro de  $K_I$ .

estimador ( $\tilde{\theta}^{K_I}$ , definido na Equação 4.19 do capítulo de metodologia), em especial, é bastante sensível à solução de referência adotada. Por esse motivo, menor ênfase será dada a esse parâmetro nas discussões desta seção.

A aplicação do estimador orientado ao objetivo será avaliada, primeiramente, sobre o **Problema B** (descrito na seção 4.6.2). Em seguida, será abordado o **Problema C** (apresentado na seção 4.6.3).

## 6.4.2 Problema B

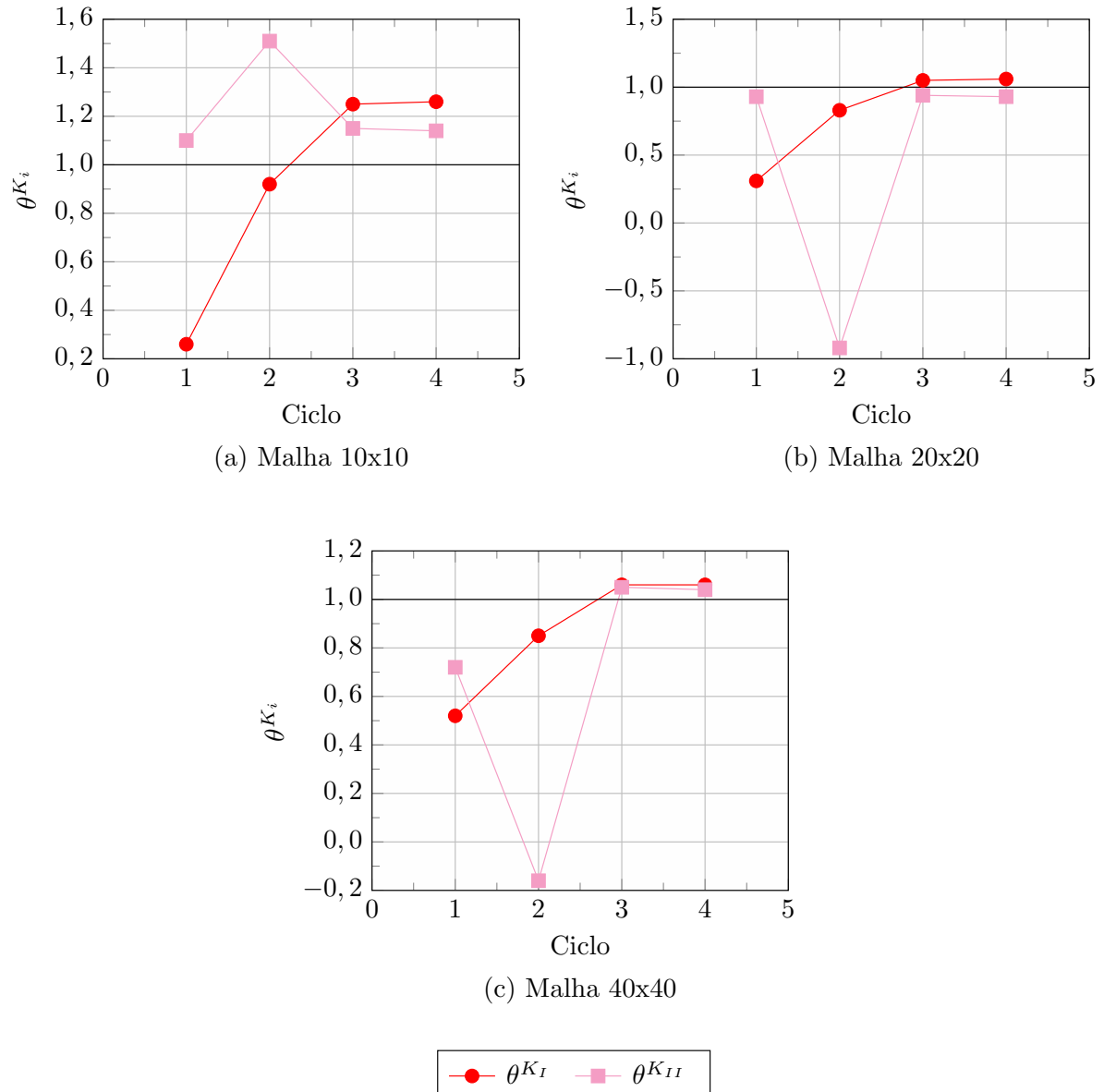
Para o estudo do estimador no Problema B, adota-se a sequência de três malhas globais, compostas por elementos do tipo Q4, ilustrada na Figura 6.27. Adotam-se, assim como na seção 6.3, domínios locais geométricos (representados em azul na Figura 6.27). Os elementos globais são divididos em  $3 \times 3$  partes para a definição da malha local, também formada por elementos Q4. Em cada modelo local, representa-se a trinca através de funções de singularidade como enriquecimento geométrico (círculo de raio igual a 1,75 centralizado na ponta da trinca), como mostra a Figura 6.28.



**Figura 6.23:** Índices de efetividade do estimador para os fatores de intensidade de tensão no problema global enriquecido, avaliados ao longo dos ciclos global-local, em cada uma das três malhas globais. **Resultados do MEFG<sup>gl</sup>** para o problema em modo misto.

Para o cálculo do fator de intensidade de tensão e a definição do problema dual, adotam-se os valores de  $r = 1,5h, 3h$  e  $4,5h$  nas malhas 1, 2 e 3, respectivamente. Assim como feito no Problema A (seção 6.3), apresentam-se, a seguir, os resultados finais obtidos após a execução de três ciclos global-local. Para este problema, consideram-se medidas de erro análogas às que foram tratadas no Problema A (adaptadas para o presente caso, em que não há solução exata conhecida).

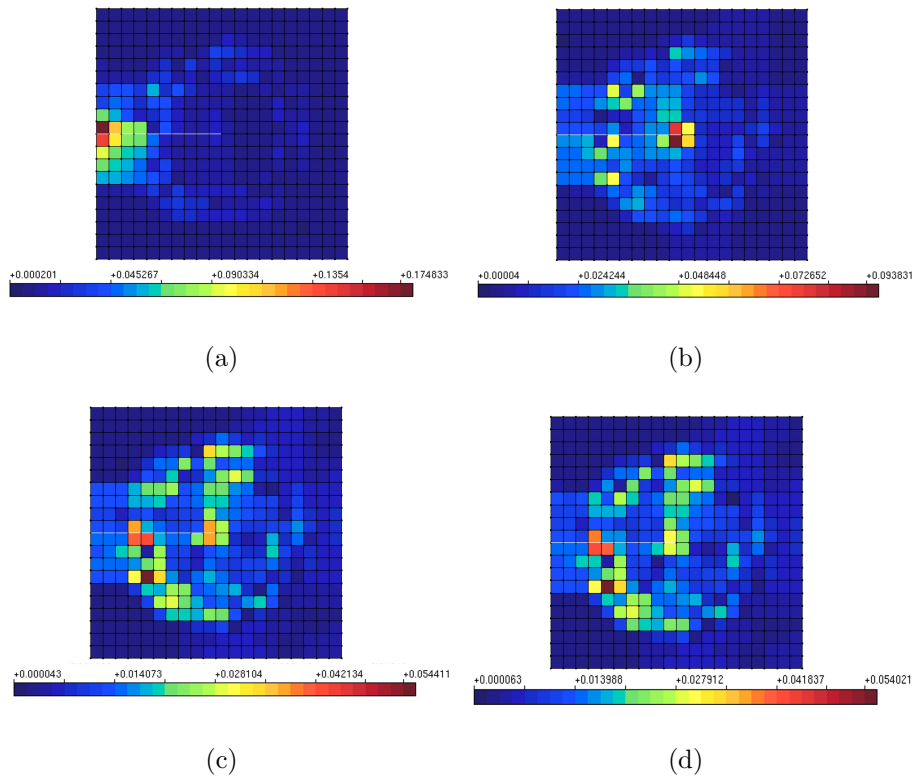
Os resultados obtidos através do MEFG<sup>gl</sup> são apresentados na Tabela 6.13. Neste caso, verificam-se erros bastante elevados, tanto em termos de energia quanto do fator de



**Figura 6.24:** Índices de efetividade do estimador para os fatores de intensidade de tensão no problema global enriquecido, avaliados ao longo dos ciclos global-local, em cada uma das três malhas globais. **Resultados do MEFG-E<sup>gl</sup>** para o problema em modo misto.

intensidade de tensão. Apesar disso, o estimador orientado ao objetivo consegue descrever corretamente o erro associado a  $K_I$ , apresentando valores próximos da unidade para  $\tilde{\theta}^{K_I}$ . Uma vez que as malhas globais são grosseiras (especialmente as Malhas 1 e 2) e não há a utilização de enriquecimentos polinomiais, é provável que um aprimoramento das funções global-local seja capaz de reduzir os níveis de erro da análise, contribuindo para a representação da singularidade e, também, da parcela suave da solução global.

Nesse sentido, apresentam-se, na Tabela 6.14, os resultados obtidos com o MEFG-E<sup>gl</sup>. O aprimoramento associado ao enriquecimento estável, de fato, reduz substancialmente



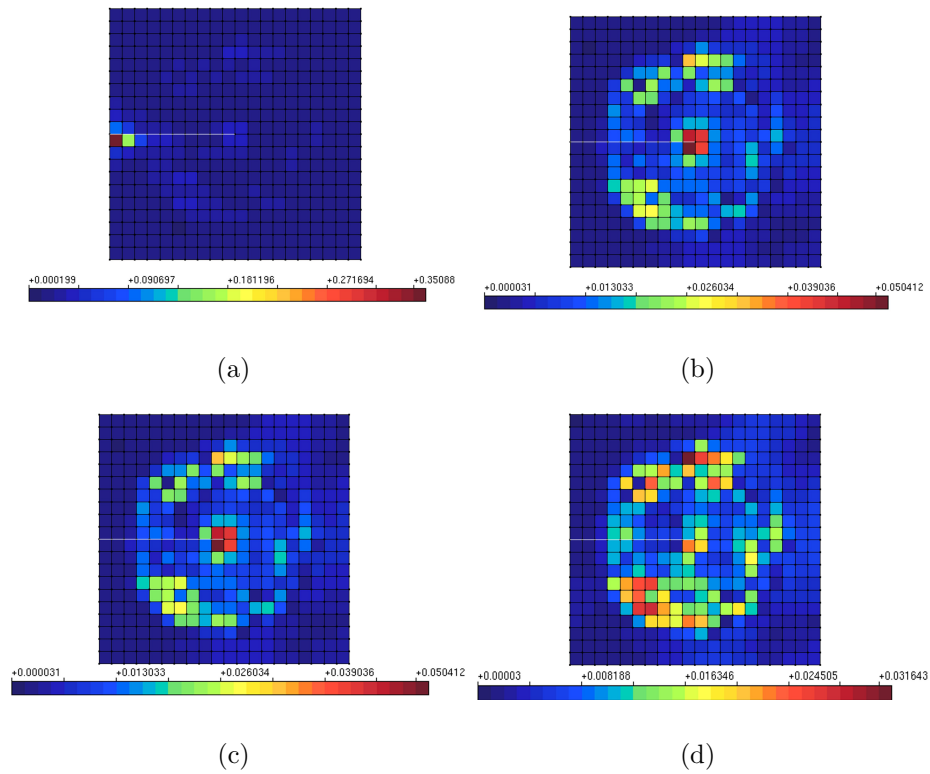
**Figura 6.25:** Erro estimado de  $K_I$  por elemento na Malha  $20 \times 20$ , ao longo dos ciclos global-local. **Resultados do MEFG<sup>gl</sup>.** (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3 e (d) Ciclo 4.

**Tabela 6.13:** Resultados do MEFG<sup>gl</sup> para o Problema B.

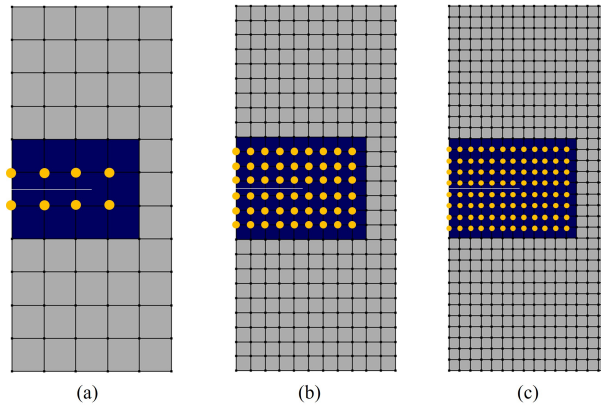
Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}^*$	$K_I$	$\mathcal{E}^{\text{REF}}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^{\text{REF}}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\tilde{\theta}^{K_I}$
1	153	35,46%	7,28	2,0976	22,38%	1,6007	18,03%	0,76
2	719	20,65%	8,79	0,5796	6,18%	0,5900	6,29%	1,02
3	1263	16,44%	8,97	0,4064	4,34%	0,3835	4,10%	0,94

os níveis de erro em todas as malhas. Os erros de referência de  $K_I$ , por exemplo, são reduzidos a menos de 1/3 dos valores obtidos com o MEFG<sup>gl</sup> padrão (Tabela 6.13). O estimador orientado ao objetivo, por sua vez, apresenta um comportamento mais instável, com  $\tilde{\theta}^{K_I}$  bem acima de 1,0 na Malha 1 e, por outro lado, muito abaixo de 1,0 na Malha 3. A interpretação dos resultados  $\tilde{\theta}^{K_I}$ , como visto, deve levar em conta o erro existente na solução de referência do fator de intensidade de tensão ( $K_I^{\text{REF}}$ ). No caso do MEFG-E<sup>gl</sup>, os valores de  $K_I$  são mais próximos da solução de referência e, portanto, o parâmetro  $\tilde{\theta}^{K_I}$  pode sofrer maior influência do erro embutido em  $K_I^{\text{REF}}$ . Nesse contexto, considera-se válido o desempenho do estimador proposto.

Uma vez que o índice de efetividade é um parâmetro comprometido em problemas



**Figura 6.26:** Erro estimado de  $K_I$  por elemento na Malha  $20 \times 20$ , ao longo dos ciclos global-local. **Resultados do MEFG- $E^{gl}$** . (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3 e (d) Ciclo 4.



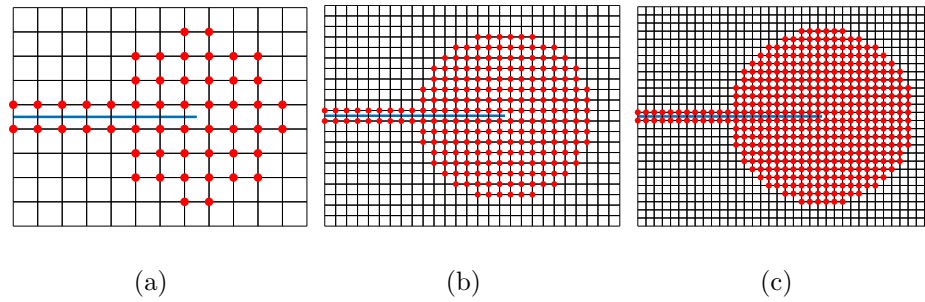
**Figura 6.27:** Malhas globais (em cinza) e domínios locais (em azul) utilizados no Problema B. (a) Malha 1, (b) Malha 2 e (c) Malha 3.

cuja solução exata é desconhecida, é interessante analisar o comportamento do estimador através de uma **correção do fator de intensidade de tensão**, valendo-se do erro estimado  $\mathcal{E}^*(K_1)$ . Nesse caso, o valor corrigido de  $K_I$ , indicado por  $K_I^{COR}$ , é calculado como:

$$K_I^{COR} = K_I + \mathcal{E}^*(K_1) \quad (6.19)$$

Na Figura 6.29, apresenta-se uma comparação entre os valores aproximado e corrigido





**Figura 6.28:** Domínios locais adotados no Problema B. Nós locais enriquecidos com funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul. (a) Malha 1, (b) Malha 2 e (c) Malha 3.

**Tabela 6.14:** Resultados do MFG- $E^{gl}$  para o Problema B.

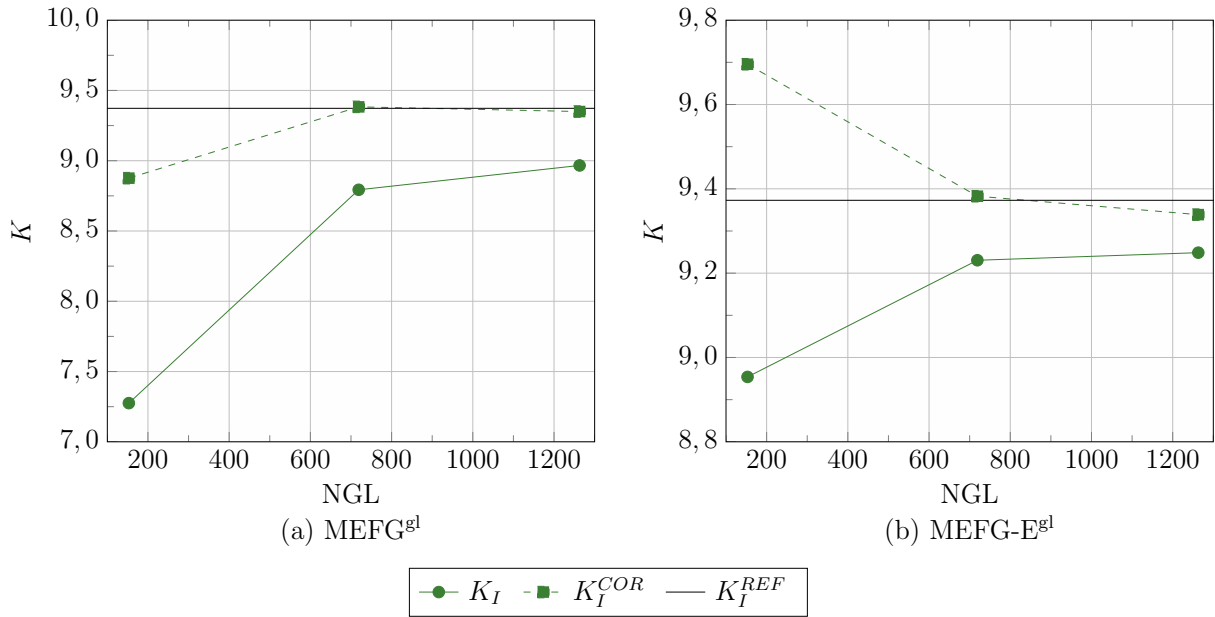
Malha	NGL	$\varepsilon_{\% \Omega_G}$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\varepsilon_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}^*_{\%}(K_1)$	$\tilde{\theta}^{K_I}$
1	153	23,24%	8,95	0,4189	4,47%	0,7417	7,65%	1,77
2	719	9,18%	9,23	0,1422	1,52%	0,1519	1,62%	1,07
3	1263	6,87%	9,25	0,1242	1,32%	0,0902	0,97%	0,73

de  $K_I$ , obtidos em cada uma das malhas através do MFG- $E^{gl}$  e do MFG- $E^{gl}$ . Em todos os casos, verifica-se um considerável aumento de precisão do valor corrigido em relação ao respectivo valor aproximado. Tal fato se observa, inclusive, nas malhas com efetividades pobres (Malhas 1 e 3 com o MFG- $E^{gl}$ , por exemplo). Logo, é possível afirmar que a correção do fator de intensidade de tensão através do erro estimado é uma estratégia bastante favorável, cuja aplicação será retomada em outras análises do presente trabalho.

### 6.4.3 Problema C

Para a aplicação do estimador no Problema C – cuja geometria é a mesma do Problema B, exceto pela direção do carregamento imposto – adotam-se as mesmas malhas globais e configurações de problemas locais apresentadas na seção 6.4.2. As medidas analisadas também são as mesmas já discutidas, incluindo, agora, os erros de referência e estimado para  $K_{II}$  (por se tratar de um problema em modo misto de abertura).

Os resultados obtidos com a aplicação do estimador de erro no MFG- $E^{gl}$  são apresentados na Tabela 6.15. Assim como ocorrido no Problema B, verificam-se erros elevados para os fatores de intensidade de tensão e para a norma energia. O estimador orientado ao objetivo, por sua vez, representa corretamente o erro de  $K_I$ , atingindo o valor de  $\tilde{\theta}^{K_I} = 0,99$  na Malha 3. No caso de  $K_{II}$ , ocorre uma excessiva subestimação do erro em todas as



**Figura 6.29:** Valores aproximado e corrigido de  $K_I$  em função do número de graus de liberdade do problema global enriquecido (NGL) no Problema B.

malhas (valores abaixo de 0,5 para  $\tilde{\theta}^{K_{II}}$ ). Esse resultado pode ser justificado pela complexidade inerente ao modo misto de abertura e à má qualidade da solução aproximada em si (observar como os valores aproximados de  $K_{II}$ , nas duas últimas malhas, são ainda mais imprecisos do que os de  $K_I$ ).

Na Tabela 6.16, apresentam-se os resultados fornecidos pelo MEFG-E<sup>gl</sup>. Observa-se, mais uma vez, um aumento bastante expressivo na precisão dos resultados: na Malha 3, os erros de referência de  $K_I$  e  $K_{II}$  são menores que 1%. Tal resultado fortalece as conclusões dos exemplos anteriores sobre o desempenho do MEFG-E<sup>gl</sup>. O erro estimado de  $K_{II}$ , neste caso, também é melhor representado em comparação à versão padrão. Quanto ao erro estimado de  $K_I$ , verificam-se superestimativas de erro em todas as malhas, porém com uma tendência de decréscimo em direção ao valor de referência.

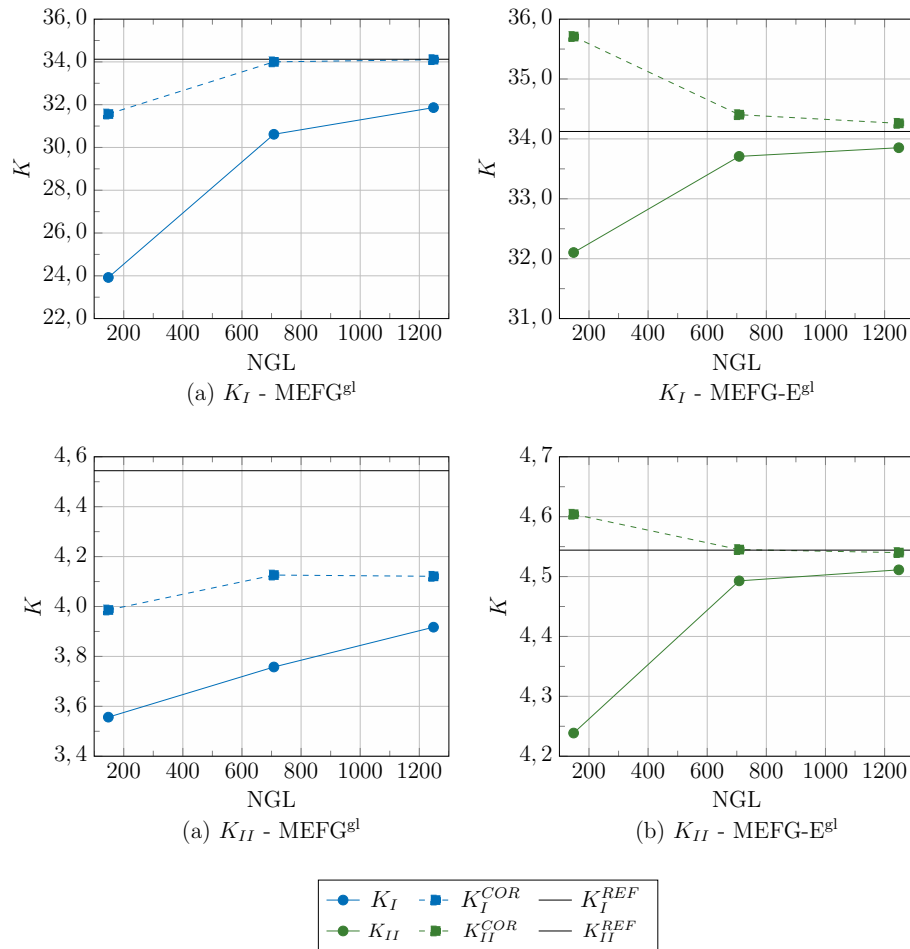
Finalmente, a comparação entre os valores aproximado e corrigido dos fatores de intensidade de tensão é apresentada na Figura 6.30. O valor corrigido de  $K_{II}$  ( $K_{II}^{COR}$ ) é computado de maneira análoga ao de  $K_I$  (Equação (6.19)). Assim como no Problema B, é possível observar que os valores corrigidos convergem de modo mais próximo aos valores de referência. Maior divergência se verifica, como visto, apenas na solução do MEFG<sup>gl</sup> padrão para  $K_{II}$ .

**Tabela 6.15:** Resultados do MEFG<sup>gl</sup> para o Problema C.

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$K_I$	$\mathcal{E}^{\text{REF}}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^{\text{REF}}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\tilde{\theta}^{K_I}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}^{\text{REF}}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^{\text{REF}}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\tilde{\theta}^{K_{II}}$
1	148	38,2%	23,9220	10,2020	29,90%	7,6404	24,21%	0,75	3,5566	0,9875	21,73%	0,4298	10,78%	0,44
2	708	23,9%	30,6152	3,5088	10,28%	3,3859	9,96%	0,96	3,7576	0,7865	17,31%	0,3687	8,94%	0,47
3	1248	19,4%	31,8626	2,2614	6,63%	2,2415	6,57%	0,99	3,9171	0,6270	13,80%	0,2040	4,95%	0,33

**Tabela 6.16:** Resultados do MEFG-E<sup>gl</sup> para o Problema C.

Malha	NGL	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\tilde{\theta}^{K_I}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\tilde{\theta}^{K_{II}}$
1	148	26,6%	32,1028	2,0212	5,92%	3,6066	10,10%	1,78	4,2387	0,3054	6,72%	0,3649	7,93%	1,19
2	708	11,1%	33,7080	0,4160	1,22%	0,6960	2,02%	1,67	4,4928	0,0513	1,13%	0,0521	1,15%	1,02
3	1248	8,3%	33,8525	0,2715	0,80%	0,4076	1,19%	1,50	4,5112	0,0329	0,72%	0,0291	0,64%	0,88



**Figura 6.30:** Valores aproximado e corrigido dos fatores de intensidade de tensão em função do número de graus de liberdade do problema global enriquecido (NGL) no Problema C.

## Capítulo 7

# Estratégias Adaptativas para o MEF<sup>gl</sup>

O presente capítulo apresenta as estratégias adaptativas concebidas para o MEF<sup>gl</sup>. Inicialmente, desenvolve-se um procedimento adaptativo para o erro da discretização no problema local, baseado no uso de funções de singularidade. Em seguida, apresenta-se uma abordagem adaptativa para a seleção do domínio local a partir de medidas de erro calculadas no problema global enriquecido. Objetiva-se, em ambos os casos, aprimorar o resultado do fator de intensidade de tensão e, ainda, reduzir a dependência em relação ao usuário do sistema computacional.

## 7.1 Estratégia Adaptativa para o Erro da Discretização no Problema Local

### 7.1.1 Considerações Iniciais

Conforme introduzido no capítulo de metodologia (seção 4.4.1), a estratégia adaptativa aqui proposta se baseia no conceito da adaptatividade-e (Duffot e Bordas, 2008). Dada a importância da descrição da trinca no modelo local, propõe-se a utilização do estimador ZZ-BD (já validado para a norma energia nesse modelo, seção 5.3) em um procedimento iterativo de seleção dos nós a serem enriquecidos com funções de singularidade. Almeja-se, neste caso, a obtenção de uma discretização otimizada na qual a singularidade é melhor descrita.

## 7.1.2 Descrição da estratégia

O algoritmo adaptativo é inspirado no processo  $p$  de Barros et al. (2004b), no qual indicadores de erro são empregados para a definição de enriquecimentos polinomiais (conforme visto na seção 2.5.2). A cada iteração desse algoritmo, obtém-se uma lista de nós a serem enriquecidos com funções polinomiais (de ordem adequada) e, ainda na mesma iteração, os enriquecimentos são adicionados e o sistema de equações do modelo (atualizado) é resolvido. Tal processo se desenvolve até que uma tolerância para o erro global seja atingida ou que um número máximo de iterações seja executado.

No caso do MEFG<sup>gl</sup>, avaliado no presente trabalho, já se desenvolve um procedimento iterativo no decorrer da solução: o processo de ciclos global-local. Logo, a estratégia aqui proposta **combina as iterações adaptativas com o processo de ciclos**, de modo a evitar que o problema local seja resolvido repetidas vezes dentro de um mesmo ciclo global-local.

A solução do MEFG<sup>gl</sup> considerando a adaptatividade-e no problema local se desenvolve nas seguintes etapas:

1. Resolve-se o problema global inicial, assim como na abordagem padrão (não-adaptativa) do MEFG<sup>gl</sup>.
2. Resolve-se o problema local do ciclo  $t = 1$ , com a imposição das condições de contorno provenientes do problema global inicial, considerando uma configuração de **enriquecimento mínimo** para a representação da trinca. Tal configuração equivale à estratégia topológica de enriquecimento com funções de singularidade, descrita na seção 5.3.2.4, na qual apenas os nós dos elementos atravessados pela trinca são enriquecidos. Nesta etapa, portanto, a seleção dos nós é automatizada e independe da definição de critérios pelo usuário.
3. Aplica-se o estimador ZZ-BD para a norma energia sobre o modelo local do item 2, visando a construção de uma lista de novos nós a serem enriquecidos com funções de singularidade – identificada, aqui, como  $\{\mathcal{N}_s^{t+1}\}$ , com  $t$  referenciando o ciclo global-local. Considerando a distribuição de erro obtida, calculam-se os indicadores de erro associados a cada nuvem do domínio, conforme definido por Barros et al. (2004b) (Equação 7.1, repetida a seguir):

$$\mathcal{E}_{\omega_\alpha}^* \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k \in \omega_\alpha} \frac{V_k \|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_k)}}{V_{\omega_\alpha}} \quad (7.1)$$

na qual  $\omega_\alpha$  representa a nuvem do nó  $\alpha$ ,  $V_k$  o volume do elemento  $k$ ,  $V_{\omega_\alpha}$  o volume total da nuvem  $\omega_\alpha$  e  $\|e^*\|_{\varepsilon(\Omega_k)}$  a norma energia do erro estimado no elemento  $k$ .

Após o cálculo dos indicadores, compara-se o valor obtido em cada nuvem a um parâmetro de tolerância local dado por  $\mu_e \mathcal{E}^*_{max}$ , com  $\mathcal{E}^*_{max}$  igual ao máximo valor de  $\mathcal{E}^*_{\omega_\alpha}$  no modelo corrente. O parâmetro  $\mu_e$ , assim como o parâmetro  $\mu$  de Barros et al. (2004b), funciona como um controlador da velocidade do procedimento adaptativo. Desse modo, a lista  $\{\mathcal{N}_s^{t+1}\}$  (neste caso,  $\{\mathcal{N}_s^2\}$ ) é preenchida com as nuvens nas quais  $\mathcal{E}^*_{\omega_\alpha} > \mu_e \mathcal{E}^*_{max}$ .

Nesta etapa da solução, não se faz o enriquecimento de nenhum nó adicional com as funções de singularidade. É feita apenas a seleção dos nós (montagem de  $\{\mathcal{N}_s^{t+1}\}$ ), cujos enriquecimentos serão adicionados sobre o modelo local do ciclo seguinte (razão do superíndice  $t+1$ ). Logo, o **problema local é resolvido uma única vez** a cada ciclo global-local. Naturalmente, é feita uma checagem dos enriquecimentos já presentes em cada nó para a montagem da lista  $\{\mathcal{N}_s^{t+1}\}$ , de modo a evitar que um mesmo nó venha a ser enriquecido mais de uma vez com as mesmas funções.

4. Resolve-se o problema global enriquecido do ciclo  $t = 1$ , usando a solução do problema local do item 2 para a construção do enriquecimento global-local (assim como na abordagem não-adaptativa do MEFG<sup>gl</sup>).
5. Controi-se o modelo local do ciclo  $t = 2$ . Nesta etapa, parte-se do modelo local do ciclo anterior ( $t = 1$ ) e adicionam-se funções de singularidade aos nós pertencentes à lista  $\{\mathcal{N}_s^2\}$ . Obtém-se, desse modo, uma discretização aprimorada em relação ao ciclo anterior. Em seguida, resolve-se o modelo local e aplica-se o estimador ZZ-BD para o cálculo dos indicadores e o preenchimento de uma nova lista  $\{\mathcal{N}_s^{t+1}\}$  (neste caso,  $\{\mathcal{N}_s^3\}$ ), repetindo-se os procedimentos do item 3. Na solução do problema local, aplicam-se as condições de contorno provenientes do problema global enriquecido do ciclo  $t = 1$ , como de costume.
6. Resolve-se o problema global enriquecido do ciclo  $t = 2$ , utilizando como enriquecimento a solução do modelo local definido no item 5.
7. Para a construção do modelo local do ciclo  $t = 3$ , repete-se um procedimento análogo ao do item 5. Esse processo de geração de modelos locais e solução do problema global enriquecido é replicado até que o número máximo de ciclos global-local (especificado pelo usuário) seja atingido. Assim como no algoritmo de Barros et al. (2004b), caso todas as nuvens com  $\mathcal{E}^*_{\omega_\alpha} > \mu_e \mathcal{E}^*_{max}$  em determinado ciclo já estejam enriquecidas, o parâmetro  $\mu_e$  deve ser reduzido. Considera-se uma redução de 10%, de modo a permitir que o processo adaptativo incremente novas regiões.

O processo de seleção e enriquecimento dos nós em um problema local genérico, considerando 3 ciclos global-local, é exemplificado na Figura 7.1. Por simplificação, a figura não ilustra os indicadores de erro. Desse modo, a disposição dos nós que compõem a lista de cada ciclo ( $\{\mathcal{N}_s^2\}$  e  $\{\mathcal{N}_s^3\}$ ) é meramente ilustrativa.

Conforme descrito anteriormente, a proposta adaptativa é capaz de reduzir significativamente a interferência do usuário na definição da região enriquecida com funções de singularidade. Neste caso, é necessário apenas o fornecimento do parâmetro  $\mu_e$ , o que torna a automatização da solução bastante próxima da configuração de enriquecimento topológico. Além disso, o tamanho da região obtida reflete características específicas do problema analisado.

Finalmente, ressalta-se que a adaptatividade-e descrita nesta seção fornece critérios para a discretização do modelo local, e não para a definição do seu tamanho. Por esse motivo, a estratégia será avaliada com o uso de domínios locais topológicos, formados a partir dos elementos globais atravessados pela trinca (seção 5.2.2). A construção de domínios locais topológicos pode ser automatizada em qualquer problema, valendo-se apenas de operações de geometria computacional associadas à malha global e às coordenadas da trinca. Mantém-se, desse modo, maior independência em relação ao usuário do sistema computacional. Posteriormente, na seção 7.2, será proposta uma nova técnica adaptativa para a seleção do domínio local.

### 7.1.3 Simulações Numéricas

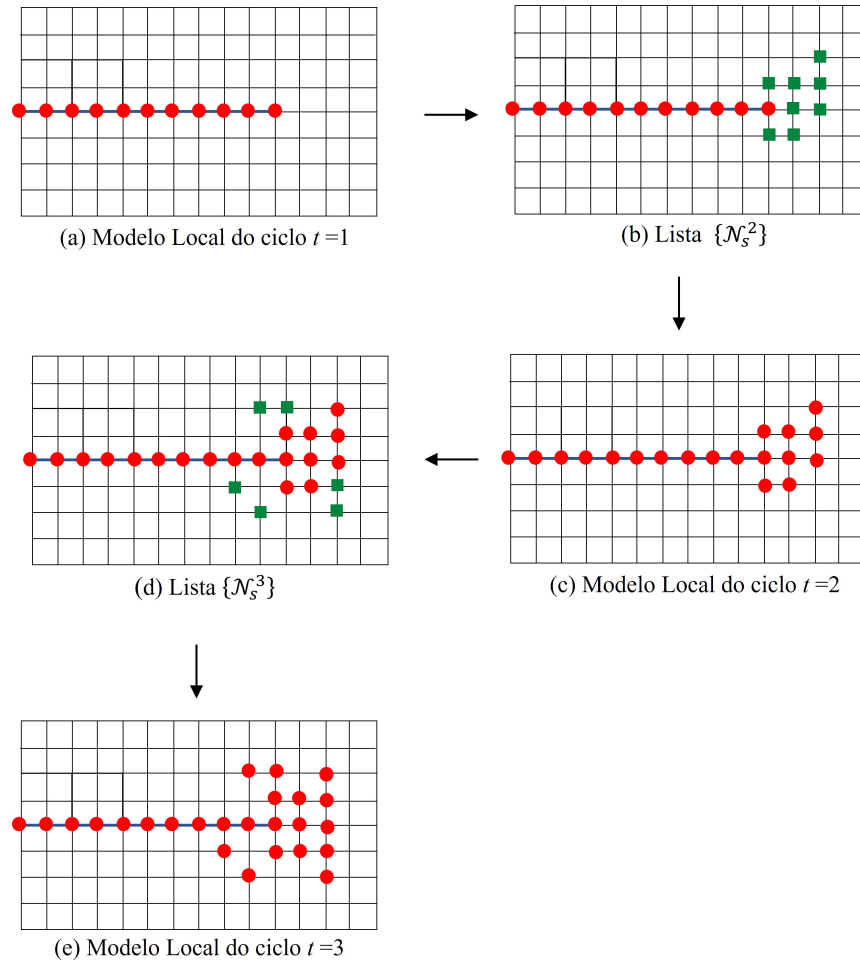
Na presente seção, apresentam-se as simulações numéricas realizadas para a avaliação da estratégia adaptativa proposta. Inicialmente, considera-se o Problema A - Modo Misto (seção 4.1). Em seguida, avaliam-se os Problemas B e C (seções 4.6.2 e 4.6.3, respectivamente).

Em razão do desempenho superior da abordagem estável em comparação à abordagem padrão do MEFG<sup>gl</sup>, constatado em diversas análises dos Capítulos 5 e 6, somente o MEFG-E<sup>gl</sup> será considerado em todas as análises do presente capítulo.

#### 7.1.3.1 Problema A - Modo Misto

Para o estudo da adaptatividade-e no problema local, adota-se a malha global  $20 \times 20$  com domínio local topológico – utilizada nas validações do estimador ZZ-BD para a norma energia (Figura 5.5(b)). Assim como nos capítulos anteriores, os elementos globais são divididos em  $2 \times 2$  partes para a definição da malha local. Além disso, ambos os modelos

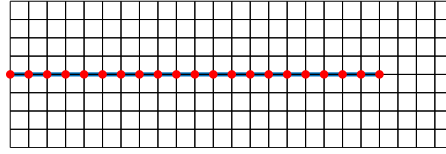




**Figura 7.1:** Ilustração do processo de **adaptatividade-e** em um problema local genérico. Os nós enriquecidos com funções de singularidade são destacados com círculos vermelhos. Já os nós selecionados pelos indicadores de erro em cada ciclo (listas  $\{\mathcal{N}_s^2\}$  e  $\{\mathcal{N}_s^3\}$ ) são destacados com quadrados verdes.

utilizam elementos Q4. A configuração inicial do modelo local adaptativo adotada nesta seção, composta, como visto, por um esquema de enriquecimento mínimo para a descrição da trinca, é ilustrada na Figura 7.2.

Para a avaliação da adaptatividade-e, é feita uma comparação de desempenho em relação à configuração de enriquecimento mínimo (sem adaptatividade). Adota-se, neste caso,  $\mu_e = 0,5$ . Em ambos os casos, calculam-se os fatores de intensidade de tensão no problema global enriquecido. Além disso, aplicam-se os estimadores de erro para a norma energia e para os fatores de intensidade de tensão sobre este modelo, valendo-se das técnicas descritas nos Capítulos 5 e 6, respectivamente. Busca-se avaliar, neste caso, o efeito da adaptatividade-e, desenvolvida no problema local, sobre o desempenho dos estimadores de erro aplicados sobre o problema global.



**Figura 7.2:** Discretização inicial do problema local adotada no Problema A - Modo Misto. Nós locais enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul.

Nas Tabelas 7.1 e 7.2, apresentam-se os resultados fornecidos pelas duas estratégias (sem e com a adaptatividade-e, respectivamente), ao longo de cinco ciclos global-local, considerando medidas relacionadas à norma energia nos problemas local e global enriquecido.

**Tabela 7.1:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema A - Modo Misto, **sem** a adaptatividade-e no problema local.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$\mathcal{E}_{\% \Omega_L}$	$\theta_L$	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$
1	534	53,51%	0,13	25,91%	0,31
2	534	25,68%	0,46	9,58%	0,96
3	534	14,30%	1,00	8,56%	0,99
4	534	14,18%	1,00	8,56%	0,99
5	534	14,18%	1,00	8,56%	0,99

**Tabela 7.2:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema A - Modo Misto, **com** a adaptatividade-e no problema local.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$\mathcal{E}_{\% \Omega_L}$	$\theta_L$	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$
1	534	53,51%	0,13	25,91%	0,31
2	618	23,60%	0,25	7,43%	0,98
3	710	6,93%	0,82	5,41%	1,09
4	730	6,54%	0,82	5,37%	1,09
5	738	6,48%	0,82	5,35%	1,09

Os resultados das Tabelas 7.1 e 7.2 mostram que, de fato, a adaptatividade-e reduz significativamente o erro em energia nos problemas local e global enriquecido. No problema

local, em especial, o erro em energia se reduz à menos da metade em relação os resultados sem adaptatividade. Quanto ao desempenho dos estimadores de erro, observam-se valores muito próximos de 1,0 para a efetividade no problema global, em ambos os casos. Já no problema local, verificam-se subestimativas de erro com a adaptatividade-e ( $\theta_L$  converge para um valor abaixo de 0,90 na Tabela 7.2). Tais resultados refletem a menor influência do erro da discretização sobre o erro total do problema local, conforme discutido na seção 5.3.2.4.

É interessante observar que os resultados obtidos com a adaptatividade-e (Tabela 7.2), tanto no modelo local quanto no modelo global, se estabilizam após a execução de 3 ciclos global-local – de maneira semelhante aos resultados sem adaptatividade. A partir do quarto ciclo, o número de graus de liberdade do modelo local cresce mais lentamente, refletindo o enriquecimento de um menor número de nós através da técnica adaptativa. Nesse caso, o algoritmo adaptativo seleciona nós mais distantes da ponta da trinca, onde as funções de singularidade têm menor efeito. No caso do ciclo 5, o parâmetro  $\mu_e$  foi reduzido em 20% para que novos nós fossem selecionados. A obtenção de bons resultados após execução de apenas três ciclos global-local é uma característica favorável da estratégia proposta.

Nas Tabelas 7.3 e 7.4, apresentam-se os resultados obtidos para medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão. Os valores de  $K_I$  e  $K_{II}$  são bastante aprimorados com a adaptatividade-e e todos os valores se estabilizam no terceiro ciclo global-local. Os índices de efetividade do estimador orientado ao objetivo, por sua vez, passam a apresentar valores mais distantes da unidade com a estratégia adaptativa. Uma provável explicação para esses resultados está no pequeno número de nós globais enriquecidos com as funções global-local (lembrar que apenas os nós dos elementos globais atravessados pela trinca são enriquecidos (Figura (5.7(b)))). Nesse cenário, o comportamento do estimador é mais preciso para níveis de erro mais elevados – como ocorre nos resultados sem adaptatividade (Tabela (7.3)). Apesar disso, os valores alcançados com a adaptatividade-e podem ser considerados adequados.

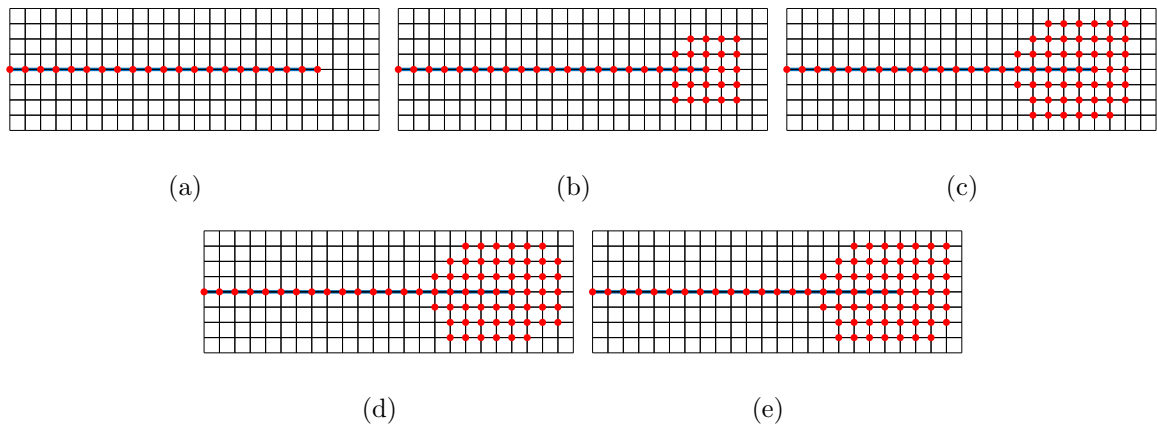
Na Figura 7.3 ilustram-se os nós enriquecidos com funções de singularidade, a cada ciclo global-local, com a adaptatividade-e. Observa-se que o conjunto de nós enriquecidos reflete diretamente a distribuição do erro estimado por elemento, apresentada na Figura 7.4. Já a distribuição do erro estimado por elemento obtida sem a adaptatividade-e é ilustrada na Figura 7.5. Em razão da má representação da singularidade, neste caso, o erro estimado se concentra ainda mais na região próxima à ponta da trinca.

**Tabela 7.3:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão no Problema A - Modo Misto, **sem** a adaptatividade-e no problema local.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_i)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
1	534	1,241	1,2657	50,50%	0,0194	1,54%	0,02	2,487	0,0200	0,80%	0,0162	0,65%	0,81
2	534	2,424	0,0828	3,30%	0,0688	2,76%	0,83	2,496	0,0104	0,41%	0,0131	0,52%	1,26
3	534	2,469	0,0374	1,49%	0,0392	1,56%	1,05	2,491	0,0160	0,64%	0,0156	0,62%	0,98
4	534	2,469	0,0376	1,50%	0,0394	1,57%	1,05	2,491	0,0159	0,63%	0,0156	0,62%	0,98
5	534	2,469	0,0376	1,50%	0,0394	1,57%	1,05	2,491	0,0159	0,63%	0,0156	0,62%	0,98

**Tabela 7.4:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão no Problema A - Modo Misto, **com** a adaptatividade-e no problema local.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_i)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
1	534	1,241	1,2657	50,50%	0,0194	1,54%	0,02	2,487	0,0200	0,80%	0,0162	0,65%	0,81
2	618	2,438	0,0691	2,75%	0,0558	2,24%	0,81	2,505	0,0012	0,05%	0,0055	0,22%	4,46
3	710	2,490	0,0167	0,66%	0,0206	0,82%	1,23	2,500	0,0062	0,25%	0,0079	0,31%	1,27
4	730	2,490	0,0168	0,67%	0,0206	0,82%	1,23	2,501	0,0060	0,24%	0,0077	0,31%	1,29
5	738	2,490	0,0167	0,66%	0,0205	0,82%	1,23	2,501	0,0060	0,24%	0,0077	0,31%	1,29



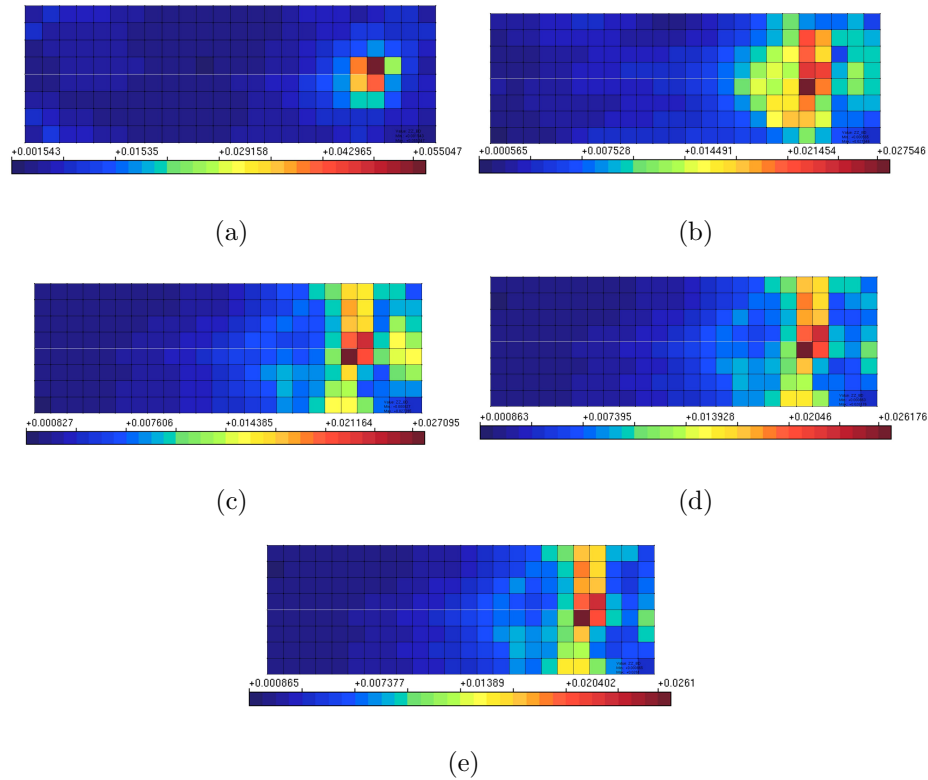
**Figura 7.3:** Nós locais enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho) a cada ciclo global-local com a adaptatividade-e no Problema A - Modo Misto. A trinca é representada em azul. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (c) Ciclo 4 e (d) Ciclo 5.

### 7.1.3.2 Problema B

Para o estudo da adaptatividade-e no Problema B, adota-se a Malha 2 da seção 6.4.2. Assim como no Problema A, adota-se um domínio local topológico, ilustrado na Figura 7.6 e  $\mu_e = 0,5$ . A configuração inicial do modelo local adaptativo, por sua vez, é ilustrado na Figura 7.7. Assim como nas análises anteriores do presente exemplo (seção 6.4.2), cada elemento global é dividido em  $3 \times 3$  partes para a definição da malha local e ambos os modelos utilizam elementos Q4. No caso da solução que não utiliza a adaptatividade-e, mantém-se fixo o modelo local da Figura 7.7 (configuração de enriquecimento mínimo) em todos os ciclos.

Nas Tabelas 7.5 e 7.6, apresentam-se os resultados obtidos para as medidas de erro relacionadas à norma energia, considerando, novamente, as duas estratégias analisadas nesta seção (sem e com a adaptatividade-e). São exibidos apenas os erros relativos estimados, já que não há solução exata no presente exemplo. Observa-se uma grande redução do erro em energia no problema local no caso da adaptatividade-e, assim como verificado no Problema A. No problema global enriquecido, entretanto, a diminuição do erro é mais discreta. Tal resultado é consequência do erro associado à parcela suave da solução global, além da limitação do número de nós globais enriquecidos com as funções global-local. Nesse cenário, a melhor da descrição da singularidade no modelo local, por si só, não é capaz de reduzir expressivamente o erro em energia no problema global enriquecido.

Os resultados obtidos para as grandezas associadas ao fator de intensidade de tensão

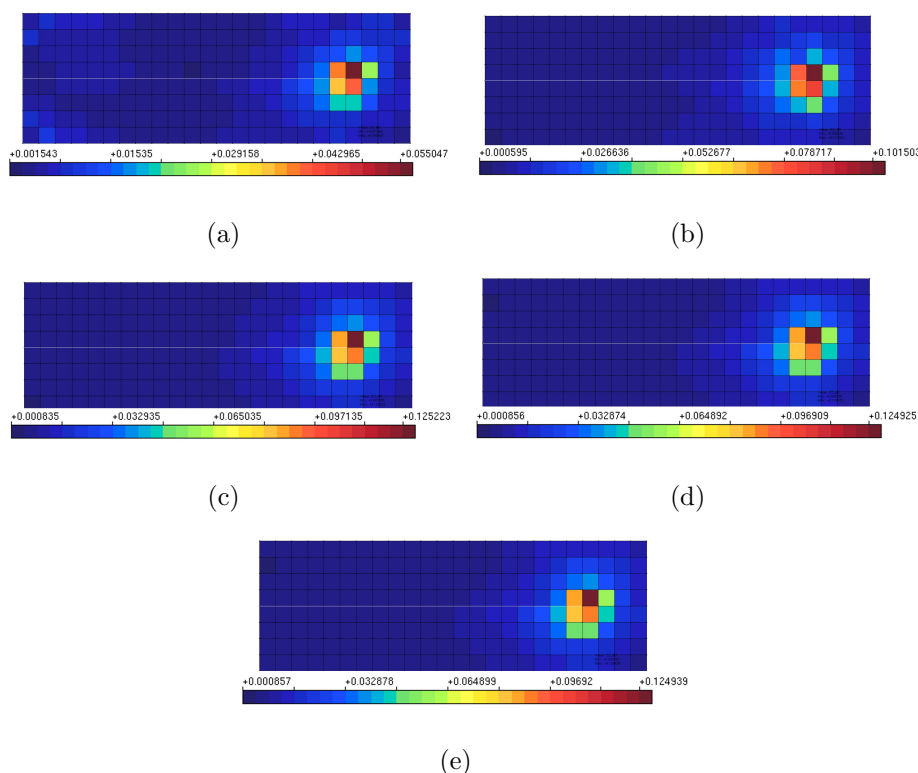


**Figura 7.4:** Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local **com** a adaptatividade-e no Problema A - Modo Misto. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5.

**Tabela 7.5:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema B, **sem** a adaptatividade-e no problema local.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$\mathcal{E}^* \%_{\Omega_L}$	$\mathcal{E}^* \%_{\Omega_G}$
1	584	23,16%	17,70%
2	584	22,19%	17,37%
3	584	22,21%	17,37%
4	584	22,22%	17,37%
5	584	22,22%	17,37%

são apresentados nas Tabelas 7.7 e 7.8. Uma vez que não há solução exata, consideram-se algumas medidas diferentes em relação ao Problema A (seção 7.1.3.1), baseadas na solução de referência  $K_I^{REF} = 9,3728$ . É possível observar que o uso da adaptatividade-e, como esperado, garante menores erros para  $K_I$ . Neste caso, o ganho associado à adaptatividade-e é um pouco mais significativo em relação ao que se verificou para a norma energia (Tabelas 7.5 e 7.6). A qualidade do estimador orientado ao objetivo, por



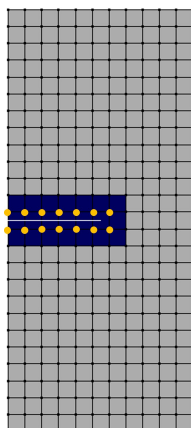
**Figura 7.5:** Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local **sem** a adaptatividade-e no Problema A - Modo Misto. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5.

**Tabela 7.6:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema B, **com** a adaptatividade-e no problema local.

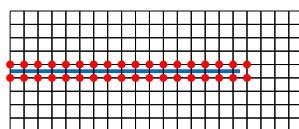
Ciclo	$NGL_{Local}$	$\mathcal{E}^* \%_{\Omega_L}$	$\mathcal{E}^* \%_{\Omega_G}$
1	584	23,16%	17,70%
2	672	15,48%	15,63%
3	772	12,75%	15,33%
4	776	12,74%	15,33%
5	792	12,50%	15,30%

sua vez, é semelhante nas duas estratégias – sendo um pouco melhor na solução sem adaptatividade, com valores de  $\tilde{\theta}^{K_I}$  mais próximos de 1,0.

Na Figura 7.8, apresentam-se os nós enriquecidos com as funções de singularidade a cada ciclo global-local da solução com a adaptatividade-e. As distribuições obtidas refletem o comportamento do erro estimado ao longo dos ciclos, exibido na Figura 7.9. Assim como no Problema A, verifica-se que a distribuição do erro estimado é mais concentrada



**Figura 7.6:** Malha global (em cinza) e domínio local topológico (em azul) adotados no Problema B. Os nós globais enriquecidos com as funções global-local são destacados em amarelo.



**Figura 7.7:** Discretização inicial do problema local adotada no Problema B. Nós locais enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho). A trinca é representada em azul.

**Tabela 7.7:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão no Problema B, **sem** a adaptatividade-e no problema local.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$K_I$	$\mathcal{E}^{REF}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^{REF}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\tilde{\theta}^{K_I}$
1	584	9,071	0,302	3,22%	0,3636	3,85%	1,20
2	584	9,069	0,303	3,24%	0,3397	3,61%	1,12
3	584	9,067	0,305	3,26%	0,3393	3,61%	1,11
4	584	9,067	0,306	3,26%	0,3394	3,61%	1,11
5	584	9,067	0,306	3,26%	0,3394	3,61%	1,11

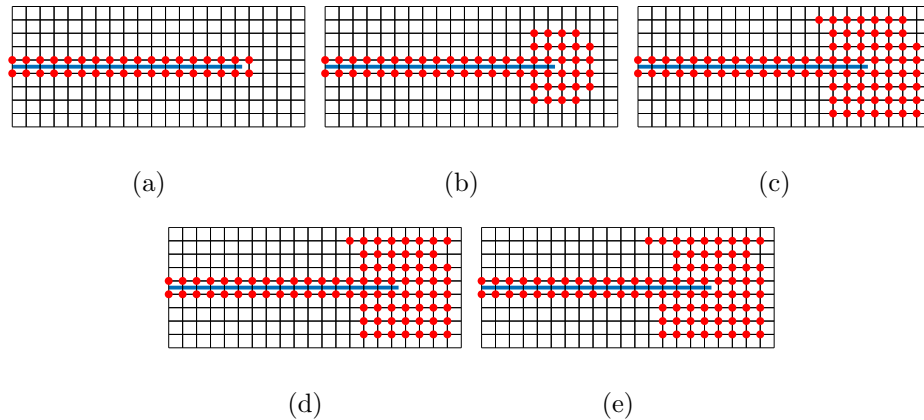
na ponta da trinca quando se adota a configuração de enriquecimento mínimo (Figura 7.10).

Finalmente, é interessante observar que as medidas de erro analisadas neste exemplo se estabilizam no segundo ciclo global-local (e não apenas no terceiro ciclo, como no Problema A). Tal fato sugere que, para a configuração de domínio local adotada neste exemplo, a adição de funções de singularidade em regiões mais distantes da ponta da trinca é ainda menos significativa.



**Tabela 7.8:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão no Problema B, **com** a adaptatividade-e no problema local.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$K_I$	$\mathcal{E}^{REF}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^{REF}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\tilde{\theta}^{K_I}$
1	584	9,071	0,3021	3,22%	0,3636	3,85%	1,20
2	672	9,144	0,2283	2,44%	0,2803	2,97%	1,23
3	772	9,153	0,2193	2,34%	0,2700	2,86%	1,23
4	776	9,153	0,2198	2,35%	0,2700	2,87%	1,23
5	792	9,154	0,2188	2,33%	0,2688	2,85%	1,23



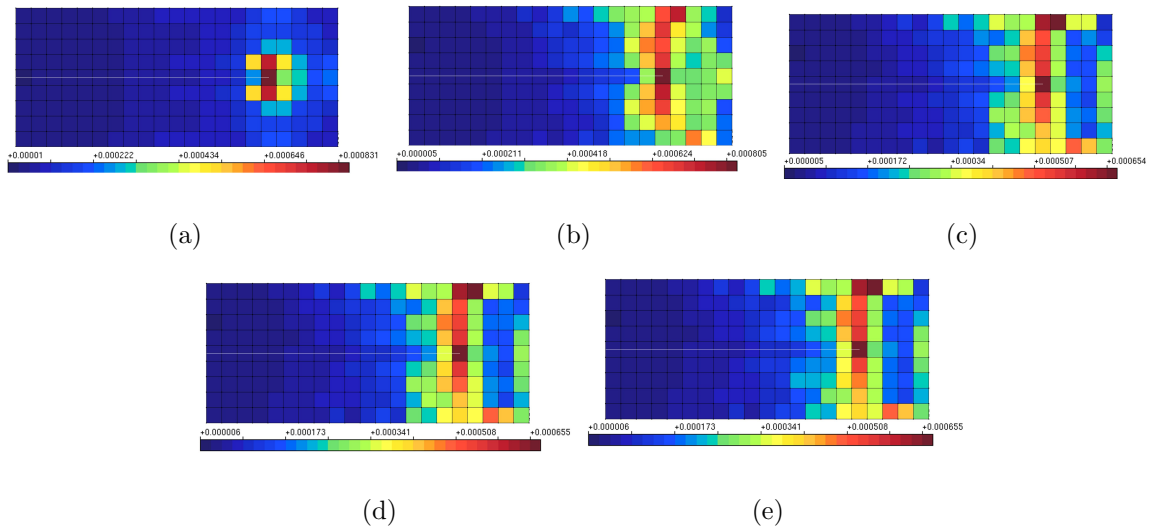
**Figura 7.8:** Nós locais enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho) a cada ciclo global-local com a adaptatividade-e no Problema B. A trinca é representada em azul. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5.

### 7.1.3.3 Problema C

Finalmente, a estratégia adaptativa aqui proposta é analisada no Problema C. Neste caso, adotam-se a mesma malha global e a mesma configuração inicial do modelo local adaptativo utilizadas no Problema B (Figuras 7.6 e 7.7), bem como o valor de 0,5 para o parâmetro adaptativo  $\mu_e$ .

Seguindo os mesmos passos das seções anteriores, apresentam-se, nas Tabelas 7.9 e 7.10, os resultados obtidos para as medidas de erro relacionadas à norma energia (sem e com o uso da adaptatividade-e). Neste caso, os resultados obtidos são muito semelhantes aos do Problema B (Tabelas 7.5 e 7.5) e compartilham as mesmas conclusões.

Para as grandezas associadas aos fatores de intensidade de tensão, apresentam-se os resultados nas Tabelas 7.11 e 7.12. Consideram-se as mesmas medidas analisadas no Problema B, com a inclusão de termos associados a  $K_{II}$ . Os resultados obtidos com a



**Figura 7.9:** Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local **com** a adaptatividade-e no Problema B. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5.

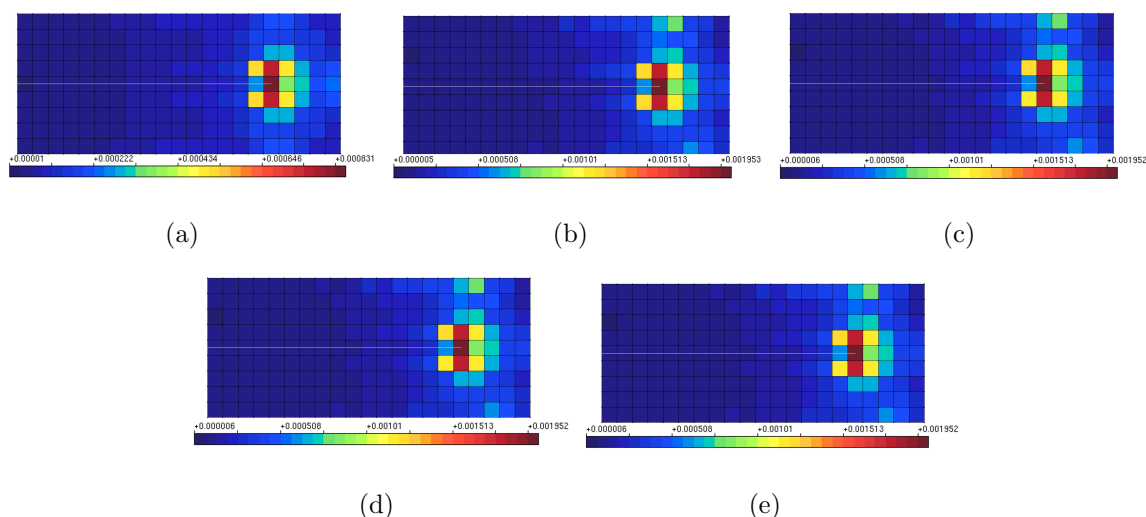
**Tabela 7.9:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema C, **sem** a adaptatividade-e no problema local.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$\mathcal{E}^*_{\% \Omega_L}$	$\mathcal{E}^*_{\% \Omega_G}$
1	584	24,48%	18,90%
2	584	22,75%	17,06%
3	584	22,32%	17,02%
4	584	22,39%	17,02%
5	584	22,36%	17,02%

**Tabela 7.10:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema C, **com** a adaptatividade-e no problema local.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$\mathcal{E}^*_{\% \Omega_L}$	$\mathcal{E}^*_{\% \Omega_G}$
1	584	24,48%	18,90%
2	680	14,72%	15,84%
3	764	11,78%	15,61%
4	768	11,77%	15,62%
5	788	11,33%	15,57%

adaptatividade-e apresentam menores erros para  $K_I$ , porém com uma diferença menor em



**Figura 7.10:** Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local **sem** a adaptatividade-e no Problema B. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5.

relação ao Problema B (e mais ainda em relação ao Problema A). A descrição do erro de  $K_I$  pelo estimador orientado ao objetivo se mantém semelhante nas duas estratégias, com uma pequena vantagem para a solução não-adaptativa (valores de  $\tilde{\theta}^{K_I}$  mais próximos da unidade). Os resultados de  $K_{II}$ , por sua vez, apresentam um comportamento oscilatório ao longo dos ciclos global-local nos dois casos, nos quais não se observa uma convergência clara. Uma provável explicação para tais resultados passa, novamente, pelo comportamento da solução global quando poucos nós são enriquecidos com as funções global-local (caso do domínio local topológico, adotado nesta seção). Na validação do estimador orientado ao objetivo neste exemplo (seção 6.4.3), com a utilização de domínios locais mais extensos e enriquecimento geométrico com funções de singularidade, não houve problemas de convergência em  $K_{II}$ . Logo, a má representação de  $K_{II}$  na Tabela 7.12 é consequência do tamanho do domínio local, e não da estratégia de adaptatividade-e.

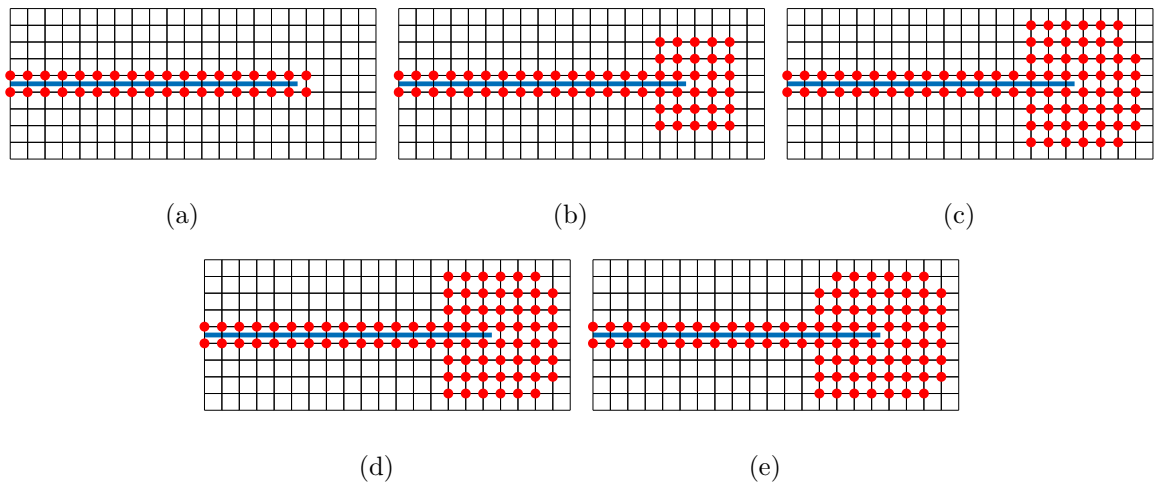
Finalmente, apresentam-se na Figura 7.11 os nós enriquecidos com as funções de singularidade a cada ciclo global-local da solução com a adaptatividade-e. Já a distribuição do erro estimado no problema local, com e sem o uso da adaptatividade-e, é mostrada nas Figuras 7.13 e 7.12, respectivamente. Na análise de tais figuras, reafirmam-se as conclusões discutidas nos Problemas A e C.

**Tabela 7.11:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão no Problema C, **sem** a adaptatividade-e no problema local.

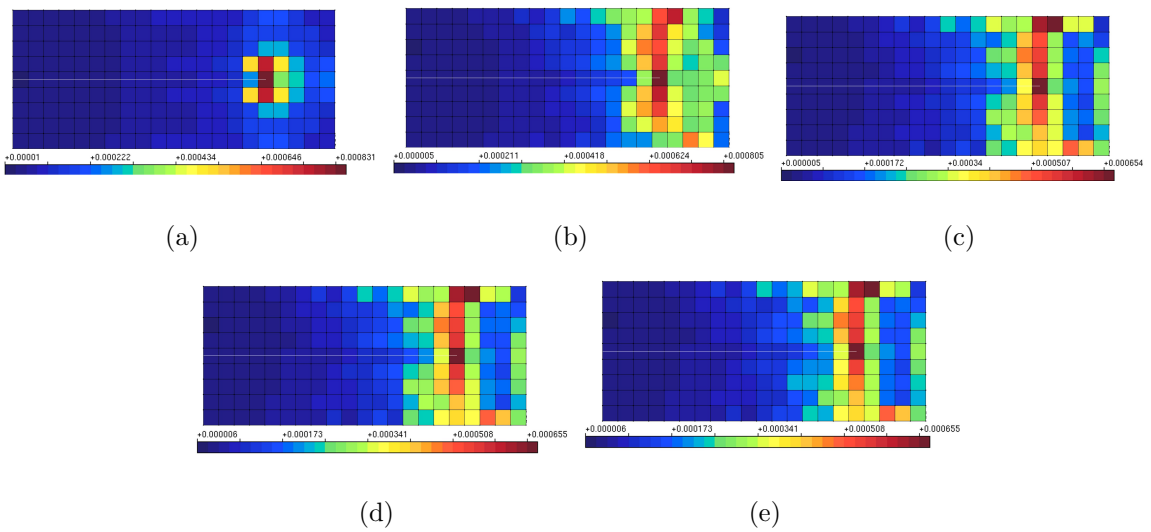
Ciclo	$NGL_{Local}$	$K_I$	$\mathcal{E}^{REF}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^{REF}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\tilde{\theta}^{K_I}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}^{REF}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^{REF}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\tilde{\theta}^{K_{II}}$
1	584	32,189	1,9351	5,67%	1,7801	5,24%	0,92	4,097	0,4473	9,84%	0,0971	2,31%	0,22
2	584	32,787	1,3372	3,92%	1,5199	4,43%	1,14	4,951	-0,4072	-8,96%	0,0335	0,67%	-0,08
3	584	32,860	1,2641	3,70%	1,4757	4,30%	1,17	4,370	0,1737	3,82%	0,0778	1,75%	0,45
4	584	32,816	1,3080	3,83%	1,4922	4,35%	1,14	4,742	-0,1983	-4,36%	0,0575	1,20%	-0,29
5	584	32,850	1,2737	3,73%	1,4811	4,31%	1,16	4,505	0,0394	0,87%	0,0716	1,56%	1,82

**Tabela 7.12:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas aos fatores de intensidade de tensão no Problema C, **com** a adaptatividade-e no problema local.

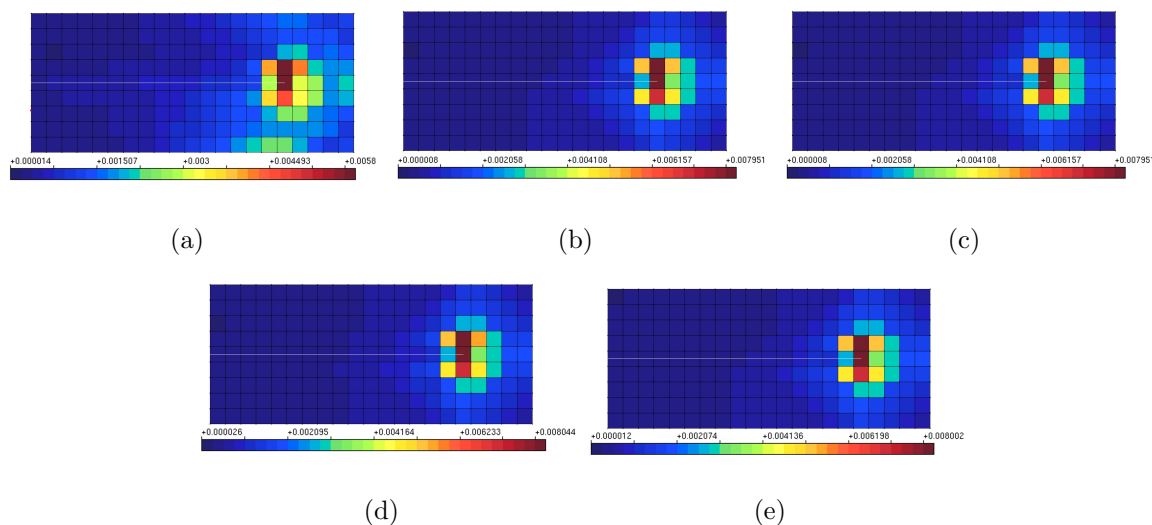
Ciclo	$NGL_{Local}$	$K_I$	$\mathcal{E}^{REF}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^{REF}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\tilde{\theta}^{K_I}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}^{REF}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^{REF}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\tilde{\theta}^{K_{II}}$
1	584	32,189	1,9351	5,67%	1,7801	5,24%	0,92	4,097	0,4473	9,84%	0,0971	2,31%	0,22
2	680	33,054	1,0699	3,14%	1,3001	3,78%	1,22	4,998	-0,4535	-9,98%	0,0188	0,38%	-0,04
3	764	33,177	0,9469	2,77%	1,2174	3,54%	1,29	4,357	0,1872	4,12%	0,0692	1,56%	0,37
4	768	33,129	0,9954	2,92%	1,2358	3,60%	1,24	4,769	-0,2247	-4,94%	0,0448	0,93%	-0,20
5	788	33,175	0,9486	2,78%	1,2141	3,53%	1,28	4,504	0,0404	0,89%	0,0612	1,34%	1,51



**Figura 7.11:** Nós locais enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho) a cada ciclo global-local com a adaptatividade-e no Problema C. A trinca é representada em azul. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5.



**Figura 7.12:** Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local **com** a adaptatividade-e no Problema A - Modo Misto. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5.



**Figura 7.13:** Erro estimado por elemento (no problema local) a cada ciclo global-local **sem** a adaptatividade-e no Problema C. (a) Ciclo 1, (b) Ciclo 2, (c) Ciclo 3, (d) Ciclo 4 e (e) Ciclo 5.

## 7.2 Estratégia Adaptativa para a Seleção de Domínios Locais

### 7.2.1 Considerações Iniciais

Na seção 4.4.2 do Capítulo de Metodologia, foi introduzida a estratégia adaptativa de seleção de domínios locais para o MEF<sup>gl</sup> proposta no presente trabalho. Consideram-se, neste caso, medidas de erro calculadas no problema global enriquecido para a formação de uma **zona de enriquecimento otimizada**. Conforme descrito na seção 2.3.4, a zona de enriquecimento do problema global enriquecido corresponde à região na qual são aplicadas as funções de enriquecimento global-local. Logo, a definição de tal região é decisiva para os resultados finais do método.

Assim como na adaptatividade-e, a nova proposta almeja o aprimoramento dos resultados (em especial, do fator de intensidade de tensão) em relação à configuração de domínio local topológico, mantendo um nível de independência semelhante em relação ao usuário do sistema computacional. Valendo-se dos estimadores de erro, é possível identificar regiões críticas no problema global enriquecido e conceber domínios locais específicos para o problema analisado, evitando a definição prévia de domínios mais extensos.

## 7.2.2 Descrição da estratégia

Conforme introduzido na seção 4.4.2, a estratégia proposta utiliza medidas de erro relacionadas à norma energia do problema global enriquecido. O estimador orientado ao objetivo (seção 6.3), neste caso, segue sendo aplicado para a avaliação do erro associado ao fator de intensidade de tensão. O seu emprego para a identificação da região local, entretanto, implicaria em domínios locais muito extensos – envolvendo regiões muito distantes da ponta da trinca – em razão da distribuição do erro estimado associada a esse estimador<sup>1</sup>. Por esse motivo, a estratégia proposta utiliza apenas informações extraídas do estimador de erro para a norma energia no problema global enriquecido (seção 5.2).

Assim como na adaptatividade-e, a seleção do domínio local adaptativo acompanha o processo de ciclos global-local. **Um novo domínio local é definido a cada ciclo**, a partir de uma análise do erro estimado por elemento computado através do estimador ZZ-BD.

Uma vez que o problema global inicial não possui a representação da trinca (e, portanto, a distribuição do erro nesse modelo não é relevante), o domínio local do ciclo  $t = 1$  é definido pela configuração topológica – que pode ser gerada automaticamente em qualquer problema, conforme mencionado ao final da seção 7.1.2. Nesta etapa, a zona de enriquecimento do problema global enriquecido é formada apenas pelas nuvens dos elementos globais atravessados pela trinca. Em outras palavras, a solução parte de um domínio local pequeno para a representação da trinca.

A partir do problema global enriquecido do ciclo  $t = 1$  (no qual a trinca passa a ser incorporada via funções global-local) executam-se as seguintes etapas para a definição do domínio local adaptativo  $\Omega_L^t$  de cada ciclo  $t$ :

- (a) Cria-se uma lista (inicialmente vazia) de elementos globais que irão formar a zona de enriquecimento do ciclo seguinte, identificada como  $\{Z_e^{t+1}\}$ .
- (b) Adicionam-se os elementos globais pertencentes à atual zona de enriquecimento ( $\{Z_e^t\}$  (destacada em laranja na Figura 7.14(a)) à lista  $\{Z_e^{t+1}\}$  (destacada em rosa na Figura 7.14(b)) . Desse modo, garante-se que  $\Omega_L^t \subset \Omega_L^{t+1}$ .
- (c) Buscam-se os elementos correspondentes ao contorno da região  $\{Z_e^{t+1}\}$ , adicionando-os a uma lista identificada como  $\{\Gamma_{Z_e}^{t+1}\}$ , conforme mostrado na Figura 7.14(c).
- (d) Cria-se uma lista com o erro estimado na norma energia em cada um dos elementos de  $\{\Gamma_{Z_e}^{t+1}\}$ , em ordem decrescente.

---

<sup>1</sup>Como consequência da utilização de maiores valores para o raio da Integral de Interação, a distribuição do erro estimado para o fator de intensidade de tensão apresenta picos de erro em regiões mais distantes da ponta da trinca, conforme consta nos itens (c) das Figuras 6.17 a 6.22.

- (e) Sobre o primeiro termo da lista do item (d) (identificado como  $e_{max}^*(\Gamma_{z_e}^{t+1})$ , representando o erro estimado máximo nos elementos pertencentes a  $\{\Gamma_{z_e}^{t+1}\}$ ) é feita a seguinte verificação:

$$e_{max}^*(\Gamma_{z_e}^{t+1}) > \mu_{\Omega_L} e_{tr}^* \quad (7.2)$$

na qual  $\mu_{\Omega_L}$  representa um parâmetro adaptativo (análogo ao que foi definido na adaptatividade-e (seção ao 7.1.2)) e  $e_{tr}^*$  indica o erro estimado no elemento que contém a ponta da trinca. Caso a ponta da trinca esteja localizada sobre um nó global,  $e_{tr}^*$  é dado pelo erro estimado médio na nuvem associada a esse nó.

O critério definido na Equação (7.2), portanto, verifica se o erro máximo na região definida por  $\{\Gamma_{z_e}^{t+1}\}$  é maior que uma determinada fração do erro associado à ponta da trinca. Optou-se por utilizar uma medida relacionada à ponta da trinca, ao invés do erro máximo no domínio global, para evitar que possíveis concentrações de erro não relacionadas à trinca interferissem no algoritmo de geração do domínio local – domínio este que, em problemas de fratura, deve se dedicar à representação das trincas. Na Figura 7.1.2(d), o elemento correspondente ao erro  $e_{max}^*(\Gamma_{z_e}^{t+1})$ , escolhido de modo meramente ilustrativo, é destacado em vermelho.

- (f) Caso a verificação da Equação (7.2) seja verdadeira, adiciona-se o respectivo elemento à lista  $\{Z_e^{t+1}\}$ , conforme representado na Figura 7.1.2(e), na qual a região em rosa passa a incluir o referido elemento.
- (g) Considerando a lista  $\{Z_e^{t+1}\}$  atualizada, buscam-se os elementos do seu contorno, formando uma nova lista  $\{\Gamma_{z_e}^{t+1}\}$ . Essa nova lista também é ilustrada na Figura 7.1.2(e), com o aumento da região verde em relação à Figura 7.1.2(d).
- (h) Repetem-se os procedimentos dos itens (d) a (g), conforme ilustrado na Figura 7.1.2(f-g). Tal repetição ocorre até que a verificação da Equação (7.2) não seja atendida. Ao final desse processo, obtém-se o domínio local final para o ciclo  $t + 1$ , destacado em azul na Figura 7.1.2(i) e definido por:

$$\Omega_L^{t+1} = \{Z_e^{t+1}\} + \{\Gamma_{z_e}^{t+1}\} \quad (7.3)$$

Após a identificação do domínio local, basta aplicar os critérios já estabelecidos para a geração da malha local (efetuando-se subdivisões em cada elemento global) e atribuição



de propriedades para a obtenção do modelo local do MEF<sup>g</sup><sup>1</sup>. Em seguida, resolve-se o problema local e, na sequência, o problema global enriquecido do ciclo seguinte. Como visto, os processos descritos anteriormente são executados a cada ciclo global-local, tornando possível que cada um deles seja resolvido com um modelo local diferente<sup>2</sup>.

A estratégia proposta, portanto, permite a identificação de uma região local diretamente associada à distribuição do erro estimado no problema global enriquecido. Em cada ciclo, a quantidade de elementos adicionados ao domínio adaptativo pode ser controlada através do parâmetro  $\mu_{\Omega_L}$ : conforme a Equação (7.2), um número maior de elementos é adicionado para valores menores de  $\mu_{\Omega_L}$ .

### 7.2.3 Combinação com a adaptatividade-e

Uma vez que as duas estratégias adaptativas aqui propostas (domínio local adaptativo e adaptatividade-e) podem ser executadas a cada ciclo global-local, é possível combiná-las de maneira simples para a obtenção de um **modelo local adaptativo**. Esta nomenclatura, no presente trabalho, indica um modelo local cujo **tamanho e discretização** (no caso, o esquema de enriquecimento com funções de singularidade) são determinados adaptativamente.

A obtenção de domínios locais adaptativos, decrita na seção anterior, pode ser efetuada considerando qualquer configuração de enriquecimento no problema local. Para a inclusão da adaptatividade-e nesse processo, são feitas as seguintes etapas, ilustradas na Figura 7.15:

1. Para o ciclo  $t = 1$ , gera-se o domínio local topológico (destacado em laranja na Figura 7.15(a)) com a configuração de enriquecimento mínimo com funções de singularidade (assim como no item 2 da seção 7.1.2), ilustrado na Figura 7.15(b).
2. Resolve-se o problema local e aplica-se o estimador ZZ-BD sobre esse modelo para a seleção da lista  $\{\mathcal{N}_s^2\}$  (assim como no item 3 da seção 7.1.2). Essa etapa é representada pelos nós destacados em verde na 7.15(c).
3. Resolve-se o problema global enriquecido do ciclo  $t = 1$ , ilustrado na Figura 7.15(d). Nessa figura, os nós enriquecidos com as funções global-local são destacados em amarelo.

---

<sup>2</sup>Em alguns casos, é possível que o algoritmo adaptativo não indique a inclusão de nenhum novo elemento no zona de enriquecimento  $\{\mathcal{Z}_e^{t+1}\}$ . Logo, o modelo local seria mantido o mesmo em relação ao ciclo anterior.

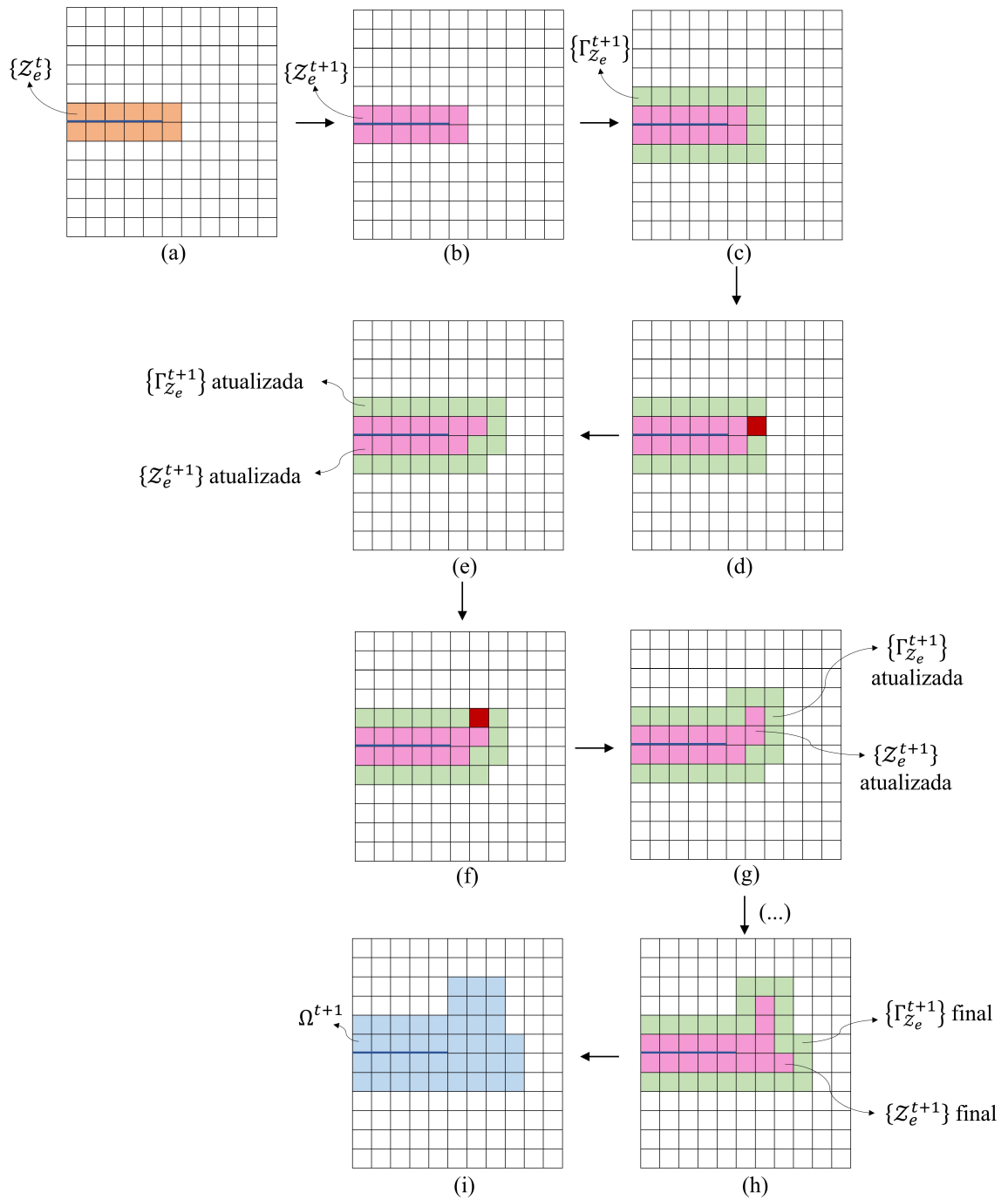
4. Aplica-se o procedimento para a seleção do domínio local adaptativo do ciclo  $t = 2$ , conforme os itens (a) a (h) da seção 7.2.2. O domínio obtido, meramente ilustrativo, é destacado em azul na Figura 7.15(e).
5. Constroi-se o modelo local do ciclo  $t = 2$ . Considera-se, neste caso, o domínio obtido no item 3 e, inicialmente, o esquema de enriquecimento mínimo para a representação da trinca, ilustrado na Figura 7.15(f). Em seguida, adicionam-se funções de singularidade aos nós da lista  $\{\mathcal{N}_s^2\}$ , identificada no item 2, como mostra a Figura 7.15(g). Na sequência, resolve-se o problema local e aplica-se, novamente, o estimador ZZ-BD para o cálculo dos indicadores de erro e a montagem da lista  $\{\mathcal{N}_s^3\}$  (por simplificação, essa etapa é omitida na Figura 7.15).
6. Resolve-se o problema global enriquecido do ciclo  $t = 2$ , ilustrado na Figura 7.15(h).
7. Calcula-se o domínio local adaptativo para o ciclo  $t = 3$ , assim como no item 3, e repetem-se os procedimentos dos itens 4 e 5 até que o número máximo de ciclos global-local (especificado pelo usuário) seja atingido.

## 7.2.4 Simulações Numéricas

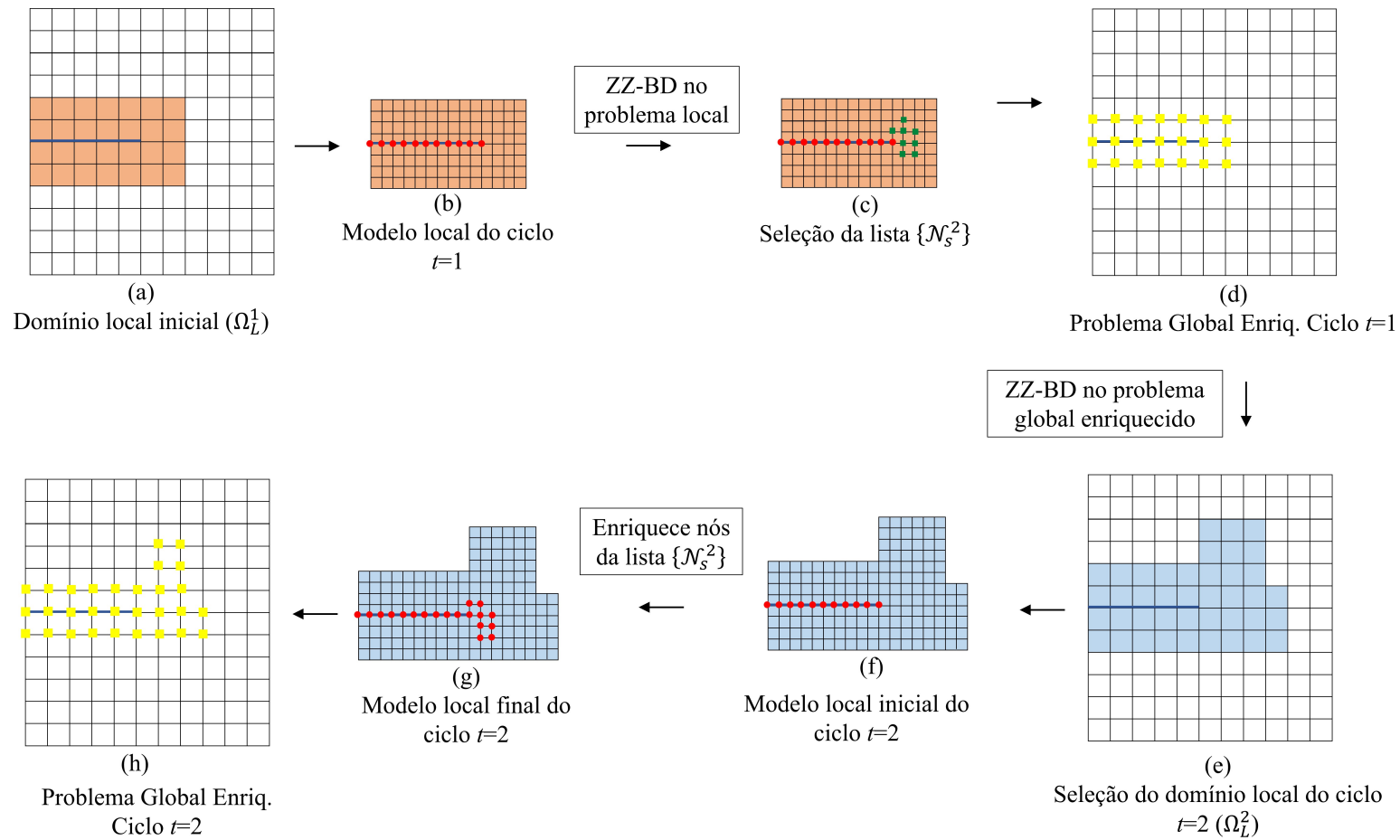
Apresentam-se, na presente seção, as simulações numéricas realizadas para a avaliação da proposta de domínios locais adaptativos. O estudo se inicia no Problema A - Modo Misto (seção 4.1) e, em seguida, avalia-se o Problema B (seção 4.6.2). Ressalta-se, novamente, que apenas o MEF-G-E<sup>gl</sup> é utilizado em todas as simulações.

Em todas as análises desta seção, a abordagem de domínios locais adaptativos é utilizada em conjunto com a adaptatividade-e (conforme exposto na seção 7.2.3). Nesse cenário, é feita uma comparação de desempenho entre as soluções do MEF-G-E<sup>gl</sup> obtidas com as seguintes configurações:

- **Modelo local mínimo:** definida por domínios locais topológicos + enriquecimento mínimo com funções de singularidade;
- **Adaptatividade-e:** definida por domínios locais topológicos + técnica adaptativa para a seleção dos nós enriquecidos com funções de singularidade (resultados da seção 7.1.3);
- **Modelo local adaptativo:** definida por domínios locais adaptativos + técnica adaptativa para a seleção dos nós enriquecidos com funções de singularidade problema local (seção 7.2.3).



**Figura 7.14:** Ilustração do processo de construção do **domínio local adaptativo** do ciclo  $t + 1$ , partindo-se do domínio local do ciclo  $t$ , em um problema genérico. Por simplificação, o erro estimado em cada elemento não é representado e as configurações obtidas, portanto, são meramente ilustrativas.



**Figura 7.15:** Ilustração da solução do MEFG<sup>gl</sup> usando **modelos locais adaptativos** em um problema genérico. Os nós enriquecidos com funções de singularidade são destacados em vermelho. Os nós enriquecidos com as funções global local, por sua vez, são destacados em amarelo. Já os nós selecionados pelos indicadores de erro no problema local (lista  $\{\mathcal{N}_s^2\}$  são destacados em verde.

Em todas as análises, calculam-se os fatores de intensidade de tensão no problema global enriquecido e aplica-se o estimador orientado ao objetivo nesse mesmo modelo. Desse modo, busca-se avaliar a qualidade dos fatores de intensidade de tensão extraídos com a configuração de modelo local adaptativo e ainda, analisar o desempenho do estimador orientado ao objetivo nesse contexto.

#### 7.2.4.1 Problema A - Modo Misto

Considera-se, nesta seção, a mesma Malha  $20 \times 20$  adotada no estudo da adaptatividade-e (seção 7.1.3.1). O modelo local mínimo também é o mesmo daquela seção, ilustrado na Figura 7.2. Além disso, adotam-se os valores de  $\mu_e = \mu_{\Omega_L} = 0,5$  para os parâmetros adaptativos.

#### Comparação com o Modelo Local Mínimo e a Adaptatividade-e

Nas Tabelas 7.13 a 7.15, apresentam-se os resultados obtidos com o modelo local adaptativo, considerando medidas relacionadas à norma energia e aos fatores de intensidade de tensão – fazendo um paralelo com as Tabelas 7.1 a 7.4, com os resultados oriundos do modelo local mínimo e da adaptatividade-e.

**Tabela 7.13:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema A - Modo Misto, com o **modelo local adaptativo**.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$\mathcal{E}_{\% \Omega_L}$	$\theta_L$	$NGL_{Global}$	$\mathcal{E}_{\% \Omega_G}$	$\theta_G$
1	534	53,51%	0,13	954	25,91%	0,31
2	858	22,96%	0,23	998	6,75%	0,94
3	1102	5,00%	0,96	1024	4,16%	1,03
4	1890	3,94%	0,99	1186	3,48%	1,00
5	1902	3,88%	0,99	1186	3,45%	1,01

A comparação entre os resultados da Tabela 7.13 e aqueles obtidos sem adaptatividade (Tabela 7.1) e apenas com a adaptatividade-e (Tabela 7.2) mostram, como esperado, que a técnica de modelo local adaptativo diminui o erro na norma energia no problema global enriquecido. O estimador para a norma energia, nesse caso, mantém índices de efetividade próximos da unidade. No caso do problema local, como consequência da melhor representação da solução no contorno global, os índices de efetividade são mais próximos de 1,0 em relação aos resultados da adaptatividade-e (Tabela 7.2).

**Tabela 7.14:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas a  $K_I$  no Problema A - Modo Misto, com o **modelo local adaptativo**.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$NGL_{Global}$	$K_I$	$\mathcal{E}(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_1)$	$\theta^{K_I}$
1	534	954	1,241	1,2657	50,50%	0,0194	1,54%	0,02
2	858	998	2,444	0,0627	2,50%	0,0481	1,93%	0,77
3	1102	1024	2,496	0,0104	0,42%	0,0102	0,41%	0,98
4	1890	1186	2,500	0,0069	0,27%	0,0075	0,30%	1,09
5	1902	1186	2,500	0,0067	0,27%	0,0073	0,29%	1,09

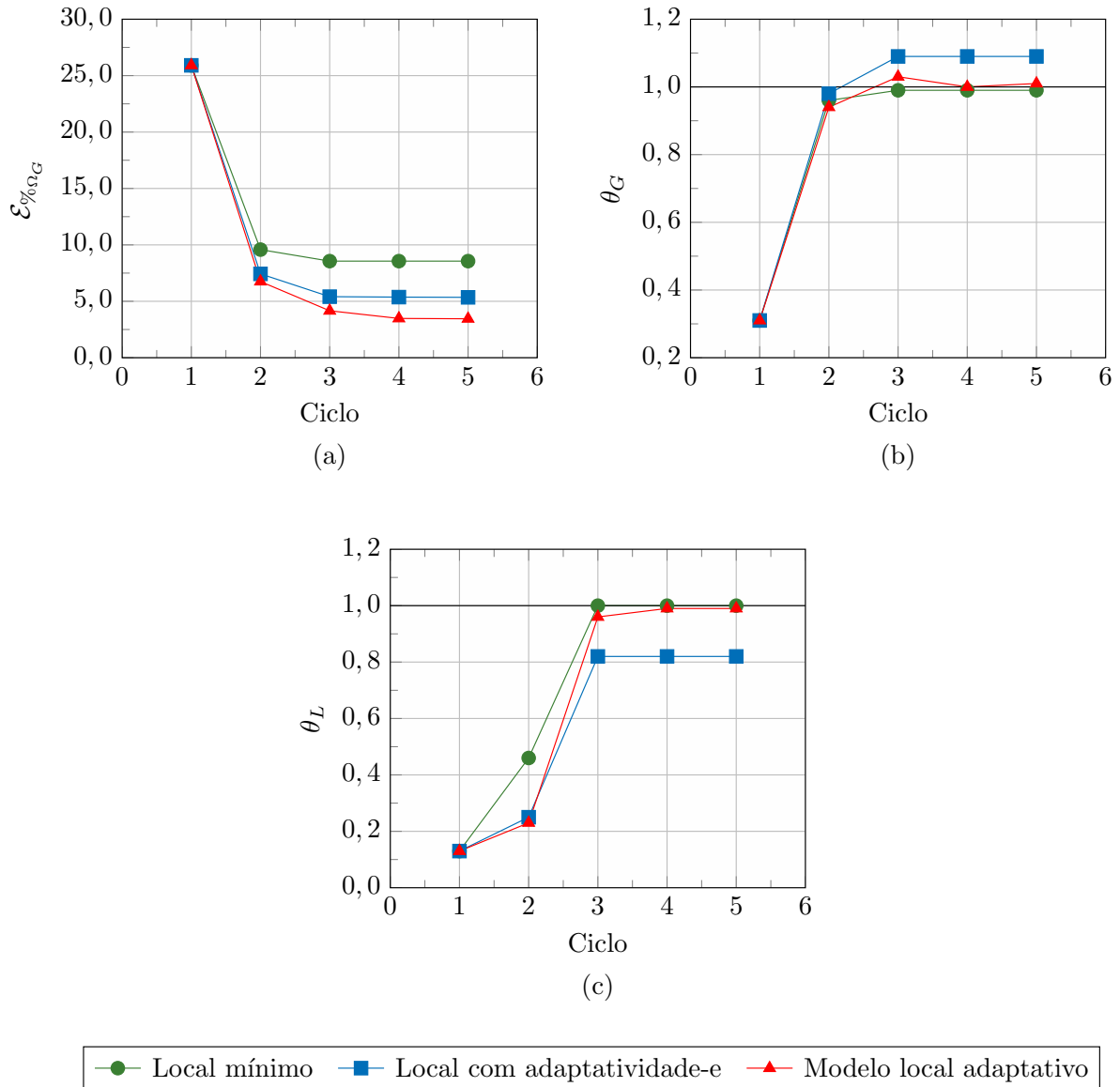
**Tabela 7.15:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas a  $K_{II}$  no Problema A - Modo Misto, com o **modelo local adaptativo**.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$NGL_{Global}$	$K_{II}$	$\mathcal{E}(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}(K_2)$	$\mathcal{E}^*(K_2)$	$\mathcal{E}_{\%}^*(K_2)$	$\theta^{K_{II}}$
1	534	954	2,487	0,0200	0,80%	0,0162	0,65%	0,81
2	858	998	2,507	-0,0006	-0,02%	0,0029	0,12%	-5,07
3	1102	1024	2,503	0,0036	0,14%	0,0034	0,14%	0,96
4	1890	1186	2,504	0,0030	0,12%	0,0045	0,18%	1,50
5	1902	1186	2,504	0,0029	0,12%	0,0044	0,18%	1,51

Nas Tabelas 7.14 e 7.15, observa-se o ganho de precisão alcançado em  $K_I$  e  $K_{II}$  com o modelo local adaptativo em relação aos resultados sem adaptatividade (Tabela 7.3) e apenas com a adaptatividade-e (Tabela 7.4). Nesse caso, os erros exatos são ainda menores em relação aos da adaptatividade-e. O índice de efetividade  $\theta^{K_I}$  também é mais próximo do valor ideal com o modelo local adaptativo. No caso de  $K_{II}$ , entretanto, verificam-se efetividades mais elevadas nos dois últimos ciclos.

Para facilitar a comparação entre as três estratégias, as principais grandezas analisadas nas tabelas anteriores são apresentadas graficamente nas Figuras 7.16 e 7.17.

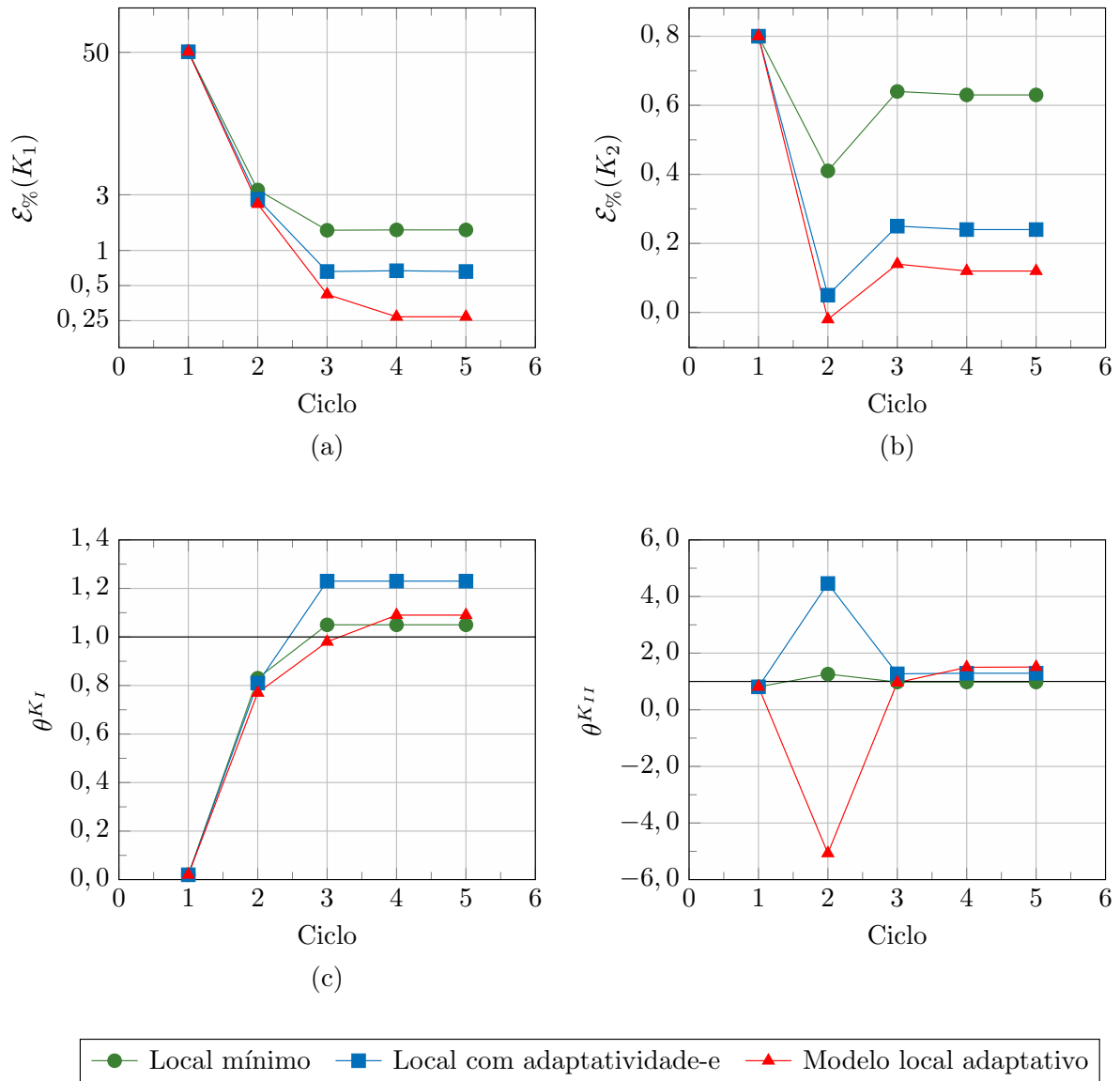
De modo geral, todas as grandezas nas Figuras 7.16 e 7.17 convergem no terceiro ou quarto ciclo global-local quando o modelo local adaptativo é utilizado. Mesmo quando a convergência ocorre no quarto ciclo (caso do erro em energia no problema global enriquecido, do erro exato de  $K_I$  e de  $\theta^{K_I}$ , por exemplo), a diferença em relação ao terceiro ciclo é pequena. Em outras palavras, três ciclos global-local são suficientes, assim como nas outras estratégias, para a obtenção de resultados precisos com o modelo local adaptativo. Tal fato mostra que, a partir do quarto ciclo, o aumento do domínio local efetuado nessa



**Figura 7.16:** Comparação entre os resultados obtidos com o modelo local mínimo, a adaptatividade-e e o modelo local adaptativo, considerando medidas relacionadas à norma energia.

estratégia (a ser discutido a seguir) não contribui significativamente para a representação do problema.

Na Figura 7.18, apresentam-se os domínios locais gerados a cada ciclo global-local com a estratégia de modelo local adaptativo. O erro estimado por elemento (considerando a norma energia) no problema global enriquecido também é apresentado nessa figura, o que permite uma correlação visual entre a distribuição do erro estimado e o domínio local selecionado a cada ciclo. É interessante observar como a distribuição do erro no ciclo  $t$  determina o domínio local do ciclo  $t + 1$  ( $\Omega_L^{t+1}$ ). A partir do terceiro ciclo, quando a



**Figura 7.17:** Comparação entre os resultados obtidos com o modelo local mínimo, a adaptatividade-e e o modelo local adaptativo, considerando medidas relacionadas aos fatores de intensidade de tensão. Eixo  $y$  escala logarítmica na figura (a).

singularidade já está bem descrita, o erro passa a se destacar em regiões mais distantes da ponta da trinca. Por esse motivo, o tamanho do problema local aumenta expressivamente no quarto ciclo. Nesse caso, a expansão do domínio local passa a ser governada pelo erro da parcela suave da solução global e, conforme mencionado anteriormente, o ganho de precisão associado não é muito relevante.

Finalmente, os nós enriquecidos com funções de singularidade no modelo local adaptativo, a cada ciclo, são apresentados na Figura 7.19. O erro estimado na norma energia de cada modelo também é exibido. É possível observar, assim como na adaptatividade-e



aplicada ao domínio local topológico (seção 7.1.3.1), a correlação entre o erro estimado por elemento no ciclo  $t$  e os nós enriquecidos no ciclo  $t + 1$ .

### **Critério de Parada para os Ciclos Global-local**

Com base nas análises desta seção, é possível formular um critério de parada para os ciclos global-local na solução que utiliza o modelo local adaptativo. A execução de um número excessivo de ciclos, de fato, aumenta o custo computacional da análise e não garante que a solução seja progressivamente melhorada. Por outro lado, é possível que características particulares em outros exemplos de fratura – além dos que são abordados neste texto – demandem um número maior de ciclos para a convergência das grandezas de interesse. É interessante, portanto, a utilização de um critério de parada adequado que evite a definição prévia do número total de ciclos pelo usuário.

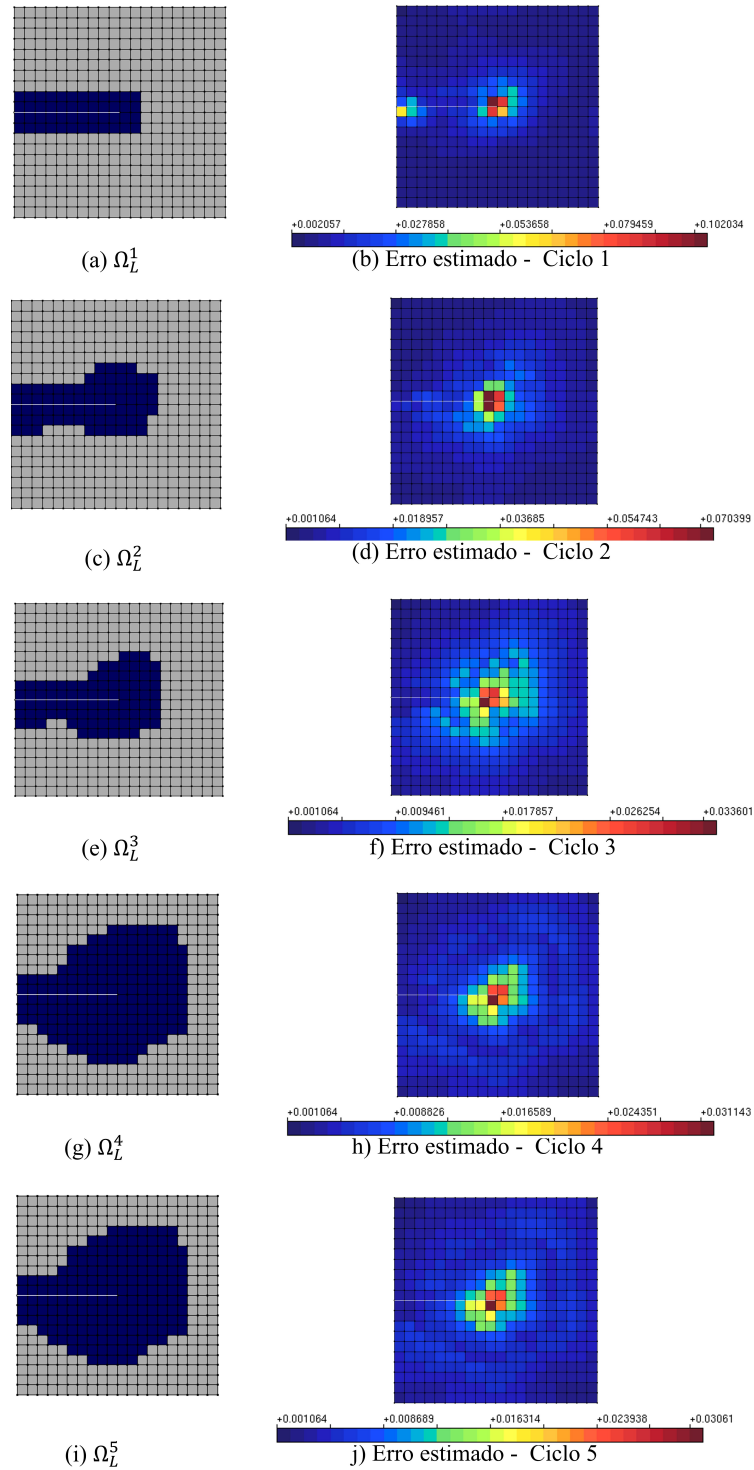
O critério de parada aqui proposto utiliza o estimador orientado ao objetivo computado no problema global enriquecido. Sugere-se a execução dos ciclos global-local até que ao menos uma das seguintes condições seja atendida:

$$\begin{aligned} \text{Condição 1 : } |\mathcal{E}_{\%}^{*t}(K_i)| &< TOL_1 \\ \text{Condição 2 : } |\mathcal{E}_{\%}^{*t}(K_i) - \mathcal{E}_{\%}^{*(t-1)}(K_i)| &< TOL_2 \end{aligned} \quad (7.4)$$

sendo  $\mathcal{E}_{\%}^{*t}(K_i)$  e  $\mathcal{E}_{\%}^{*(t-1)}(K_i)$  o erro estimado relativo do fator de intensidade de tensão calculado no ciclo corrente ( $t$ ) e no ciclo anterior ( $t-1$ ), respectivamente. Os termos  $TOL_1$  e  $TOL_2$  representam medidas de tolerância especificadas pelo usuário. Para problemas em modo misto de abertura, ambas as condições devem ser verificadas simultaneamente para  $K_I$  e  $K_{II}$  (com  $i = 1$  para  $K_I$  e  $i=2$  para  $K_{II}$ ).

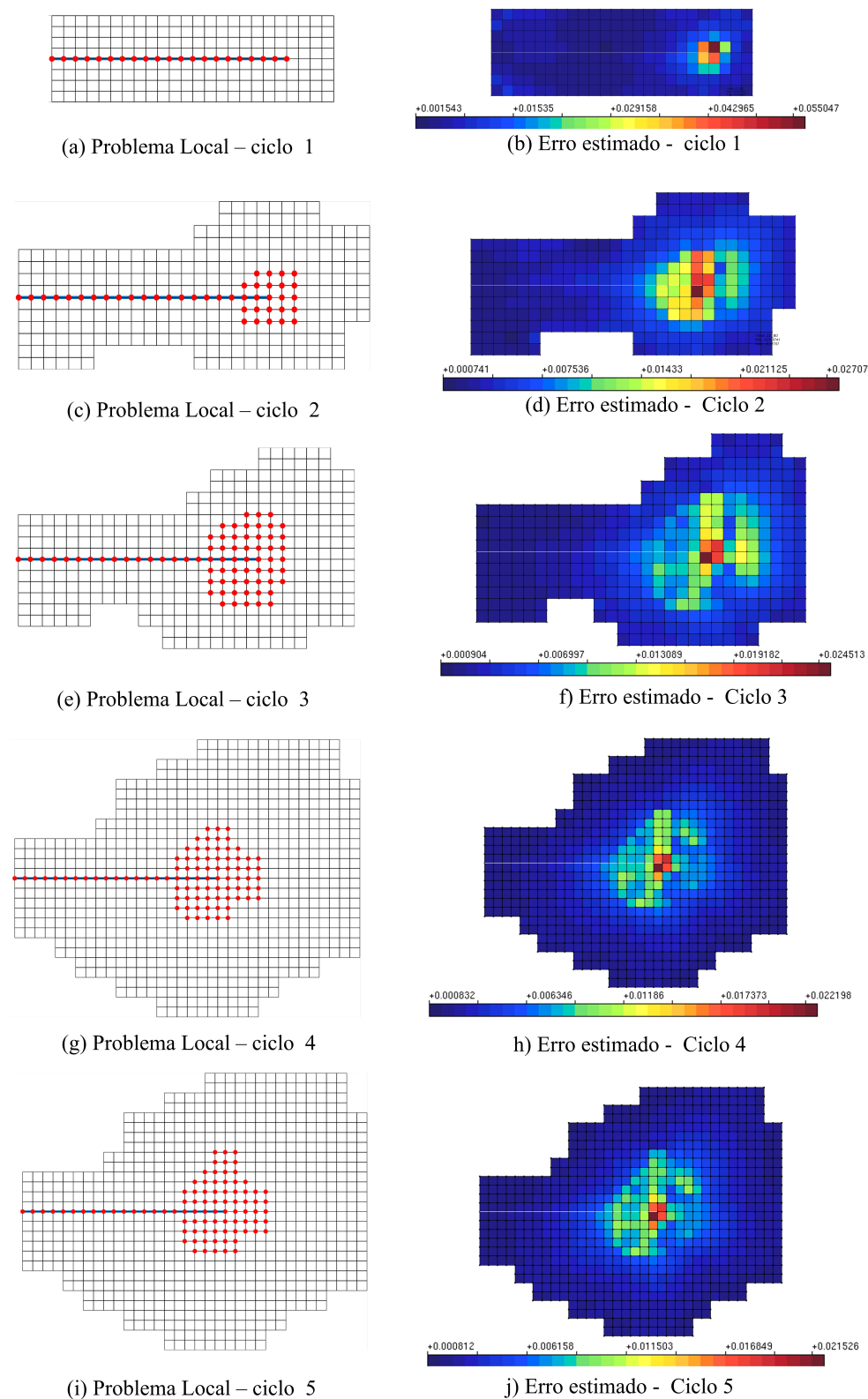
A Condição 1, portanto, equivale à especificação de um erro máximo para o fator de intensidade de tensão (representado por  $TOL_1$  na Equação (7.4)). No contexto do MEF<sup>gl</sup>, tal condição poderia acarretar um número infinito de ciclos, já que outros fatores (além da contribuição do enriquecimento global-local) podem contribuir para a qualidade do fator de intensidade de tensão. Por esse motivo, se faz necessária a inclusão de um critério associado à variação da solução entre ciclos consecutivos, representado pela Condição 2 na Equação (7.4).

Tendo em vista os resultados desta seção (e também dos capítulos anteriores), sugerem-se os valores de  $TOL_1 = 1,0\%$  e  $TOL_2 = 0,50\%$ . Nesse caso, a solução com o modelo local adaptativo (Tabelas 7.13 a 7.15) seria encerrada no terceiro ciclo com o atendimento



**Figura 7.18:** Domínios locais adaptativos (em azul) e erro estimado na norma energia por elemento no problema global enriquecido, obtidos no Problema A - Modo Misto.

da Condição 1. O número de graus de liberdade final do problema global enriquecido, portanto, seria apenas 7% maior em relação ao ciclo inicial.



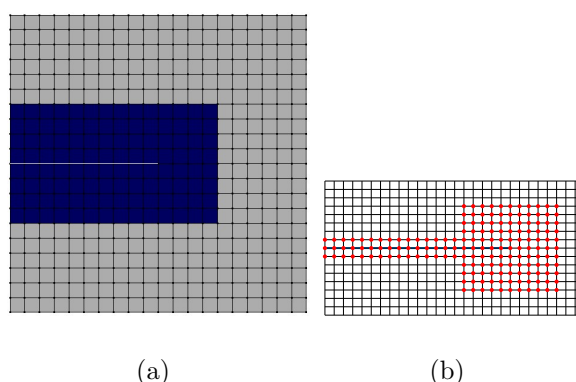
**Figura 7.19:** Nós enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho) e erro estimado na norma energia por elemento, considerando o modelo local adaptativo no Problema A - Modo Misto. A trinca é representada em azul.

Cabe ressaltar que o critério de parada proposto pode ser utilizado em qualquer configuração de modelo local (e não apenas no modelo adaptativo), bastando a aplicação do estimador orientado ao objetivo sobre o problema global enriquecido.

### Comparação com o modelo local geométrico

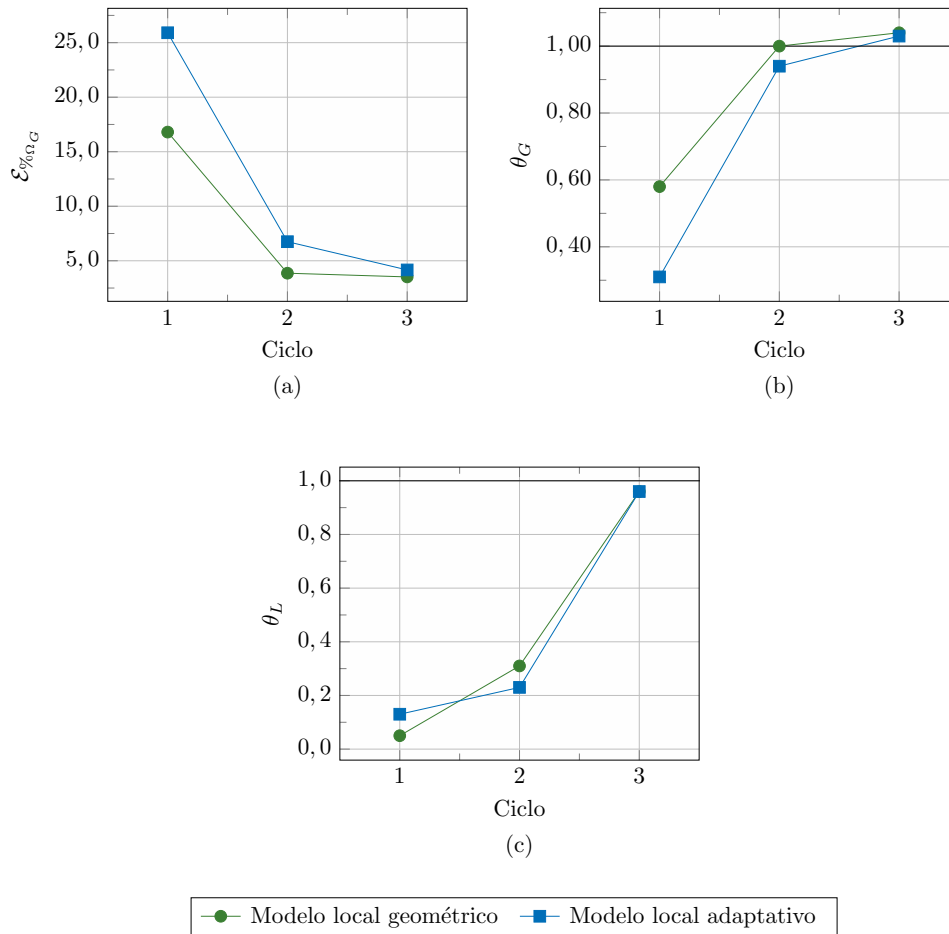
Finalmente, é possível confrontar o modelo local adaptativo com o modelo local geométrico, utilizado anteriormente na validação dos estimadores (Capítulos 5 e 6). Na configuração geométrica, o domínio local e a região enriquecida com funções de singularidade são aumentados, em relação ao modelo local mínimo, de forma **pré-determinada** pelo usuário. Para facilitar o entendimento do leitor, o modelo local geométrico adotado nesta seção é ilustrado na Figura 7.20.

Os resultados obtidos com as duas estratégias são confrontados nas Figuras 7.21 a 7.23, considerando a execução de três ciclos global-local (de acordo com o critério de parada definido anteriormente).



**Figura 7.20:** (a) Domínio local geométrico (em azul) sobre a Malha 20x20 (em cinza). (b) Malha local, com nós enriquecidos com as funções de singularidade em vermelho.

Uma vez que a estratégia de modelo local geométrico já se inicia com um domínio local extenso e uma grande região enriquecida com funções de singularidade (prescritos pelo usuário), seu desempenho é notavelmente melhor no primeiro ciclo das Figuras 7.21 e 7.22. No segundo e terceiro ciclos, por sua vez, a solução adaptativa é bastante aprimorada e chega a alcançar resultados muito próximos aos do modelo geométrico. Além disso, o modelo adaptativo garante um menor número de graus de liberdade nas duas escalas de análise, conforme indica a Figura 7.23. Tais resultados são bastante favoráveis ao modelo adaptativo e mostram que, de fato, a estratégia proposta fornece resultados precisos sem a necessidade de se definir previamente o tamanho do domínio local e a extensão da região enriquecida com funções de singularidade.



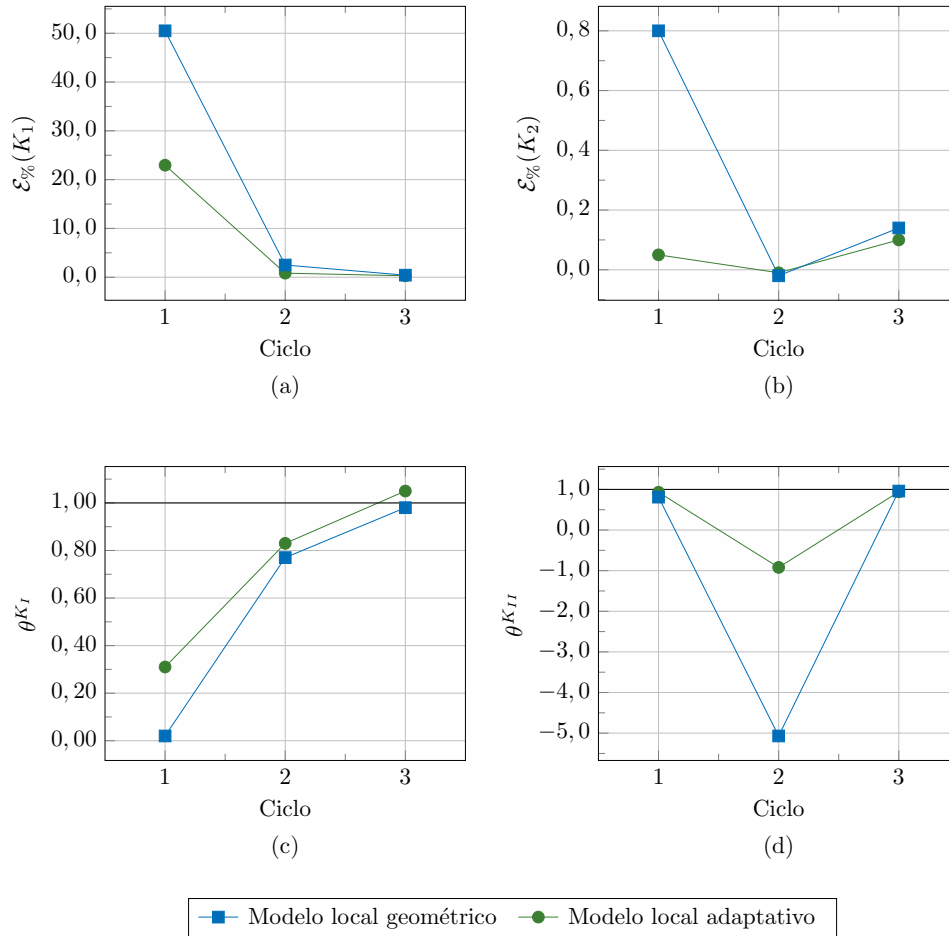
**Figura 7.21:** Comparação entre os resultados obtidos com os modelos locais geométrico e adaptativo, considerando medidas relacionadas à norma energia.

#### 7.2.4.2 Problema B

Considera-se, nesta seção, a mesma Malha 2 adotada no estudo da adaptatividade-e (seção 7.1.3.2). O modelo local mínimo também é o mesmo da referida seção, já mostrado nas Figuras 7.6 e 7.7. Adotam-se, assim como no Problema A, os valores de  $\mu_e = \mu_{\Omega_L} = 0,5$  para os parâmetros adaptativos.

Nas Tabelas 7.16 e 7.17, exibem-se os resultados obtidos com o modelo local adaptativo, considerando as medidas relacionadas à norma energia e aos fatores de intensidade de tensão, respectivamente. Tais tabelas fazem um paralelo com as Tabelas 7.5 a 7.8, que contêm os resultados obtidos com o modelo local mínimo e a adaptatividade-e. Comparações gráficas entre as três estratégias são apresentadas na Figura 7.24.

Os resultados da Figura 7.24 mostram que o modelo local adaptativo, assim como no Problema A (seção 7.2.4.1), diminui o erro em energia no problema global enriquecido e o erro associado a  $K_I$ . O ganho de precisão alcançado com o aumento do domínio

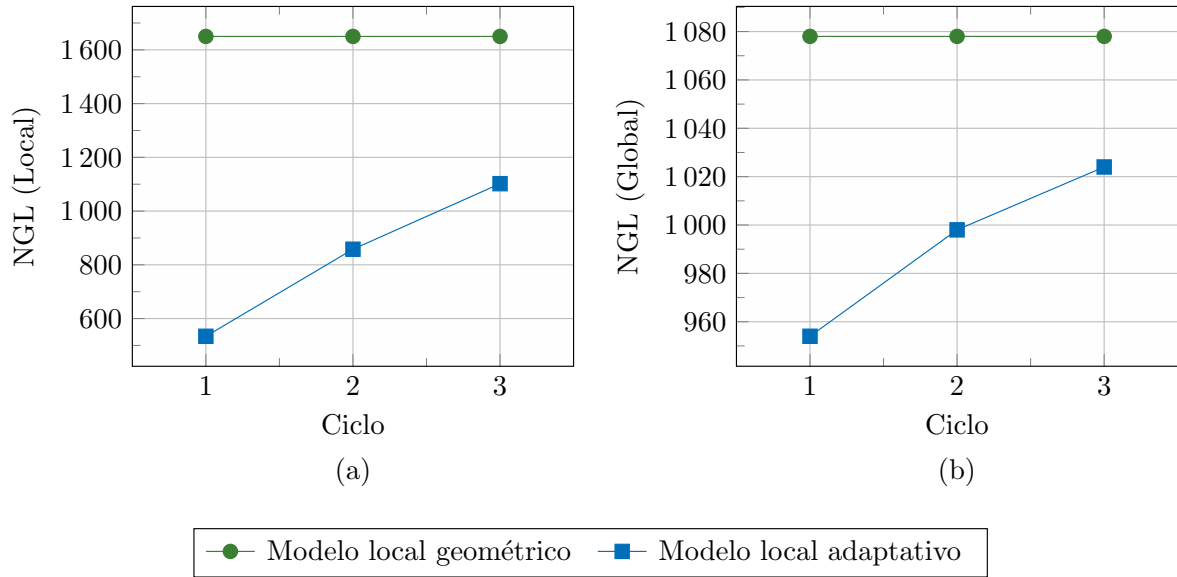


**Figura 7.22:** Comparação entre os resultados obtidos com os modelos locais geométrico e adaptativo, considerando medidas relacionadas ao fator de intensidade de tensão.

local, neste caso, é ainda mais significativo do que no Problema A. Tal fato reflete um possível aprimoramento da parcela suave da solução global, de forma semelhante ao que foi discutido na seção 6.4.2. Em razão desse efeito, os resultados convergem apenas no quarto ciclo – com o atendimento da Condição 2 do critério de parada da Equação (7.4).

Quanto ao estimador orientado ao objetivo no modelo local adaptativo, verifica-se uma tendência de superestimação do erro com (valores bem acima de 1,0 para  $\tilde{\theta}^{K_I}$ ). Conforme discutido na aplicação inicial do estimador (seção 6.4.2), valores de  $K_I$  mais próximos da solução de referência tornam o índice de efetividade aproximado ( $\tilde{\theta}^{K_I}$ ) mais sensível ao erro embutido em  $K_I^{REF}$ . Tal fato pode explicar a piora de  $\tilde{\theta}^{K_I}$  quando o modelo local adaptativo é utilizado. Apesar disso, o valor corrigido ( $K_I^{COR}$ ) continua adequado quando essa estratégia é empregada, conforme se verifica na Figura 7.24(d).

Os modelos locais adaptativos gerados até o quarto ciclo global-local são apresentados na Figura 7.25. Assim como no Problema A, é possível observar a relação entre a distribuição do erro no ciclo  $t$  e o domínio local selecionado para o ciclo  $t + 1$  ( $\Omega_L^{t+1}$ ).



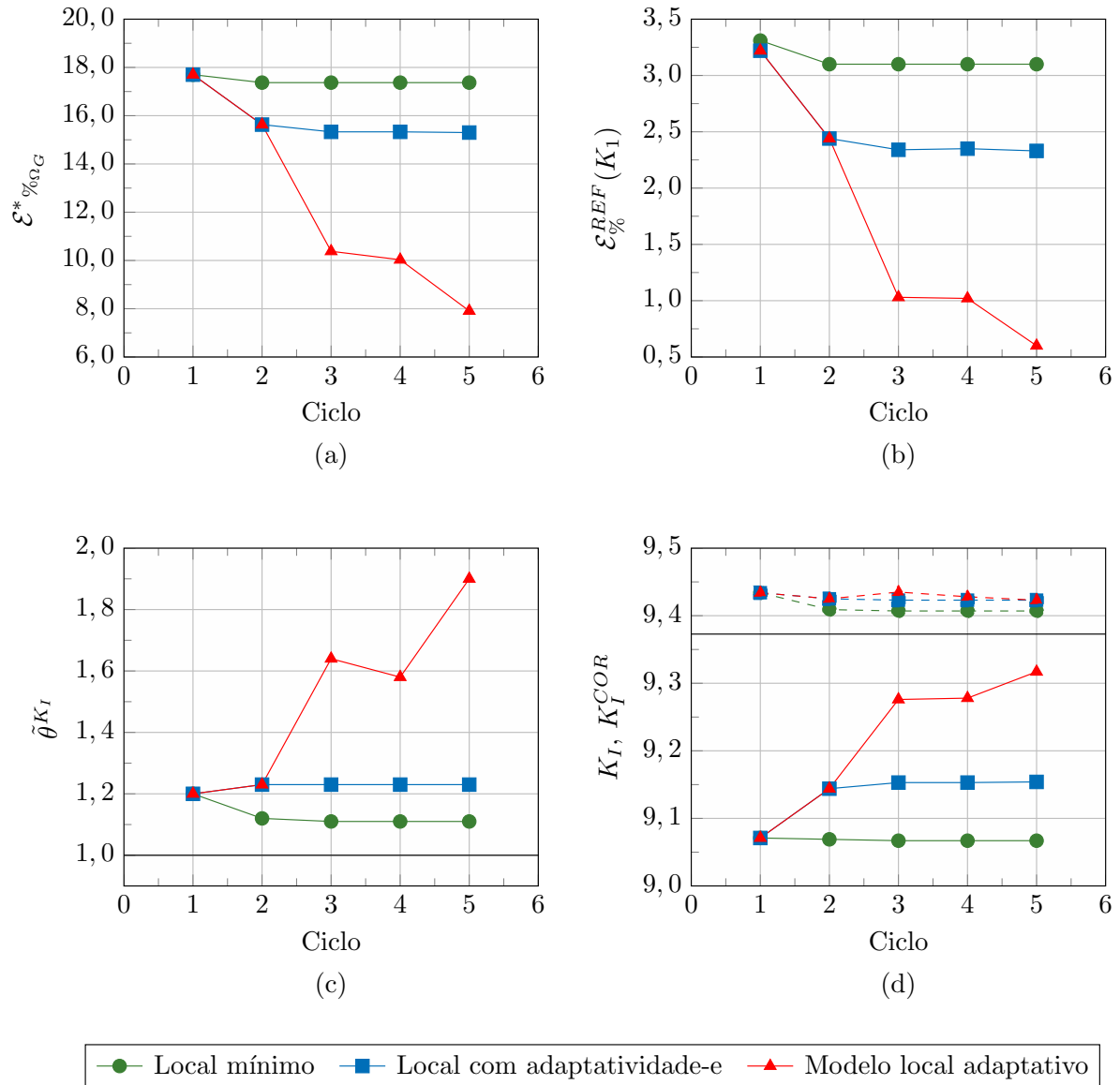
**Figura 7.23:** Comparação entre o número de graus de liberdade nos problemas local e global enriquecido referentes aos modelos locais geométrico e adaptativo.

**Tabela 7.16:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas à norma energia no Problema B, com o **modelo local adaptativo**.

Ciclo	$NGL_{Local}$	$NGL_{Global}$	$\mathcal{E}^*_{\% \Omega_L}$	$\mathcal{E}^*_{\% \Omega_G}$
1	584	639	23,16%	17,70%
2	672	639	15,48%	15,63%
3	1258	677	8,24%	10,38%
4	1394	681	8,33%	10,03%
5	1978	721	7,51%	7,91%

**Tabela 7.17:** Resultados obtidos para as medidas relacionadas no fator de intensidade de tensão no Problema B, com o **modelo local adaptativo**.

Ciclo	$K_I$	$\mathcal{E}^{REF}(K_1)$	$\mathcal{E}^{REF}_{\%}(K_1)$	$\mathcal{E}^*(K_1)$	$\mathcal{E}^*_{\%}(K_1)$	$\tilde{\theta}^{K_I}$	$K_I^{COR}$
1	9,071	0,3021	3,22%	0,3636	3,85%	1,20	9,434
2	9,144	0,2283	2,44%	0,2803	2,97%	1,23	9,425
3	9,276	0,0964	1,03%	0,1581	1,68%	1,64	9,435
4	9,278	0,0952	1,02%	0,1501	1,59%	1,58	9,428
5	9,317	0,0558	0,60%	0,1057	1,12%	1,90	9,423

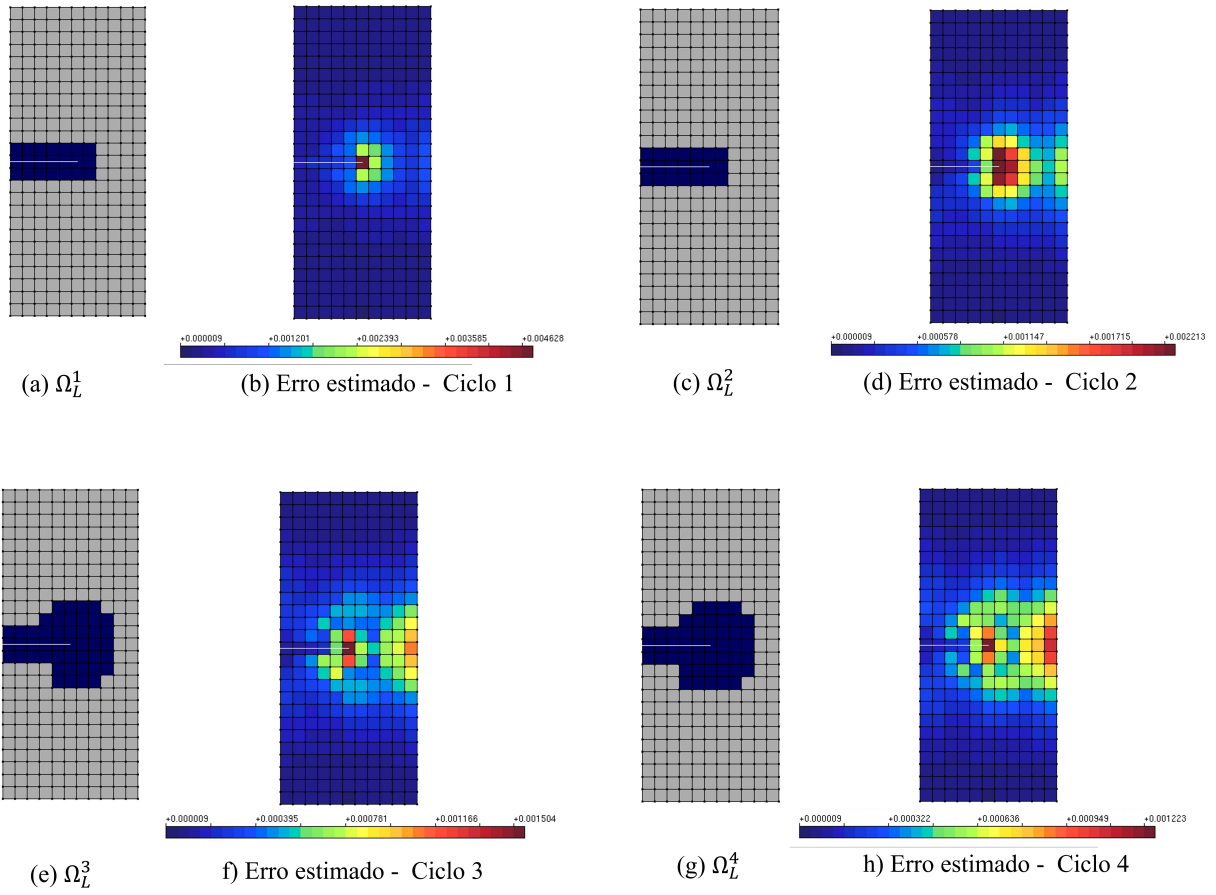


**Figura 7.24:** Comparação entre os resultados obtidos com o modelo local mínimo, a adaptatividade-e e o modelo local adaptativo, no Problema B. Na figura (d), as linhas cheias se referem aos valores aproximados de  $K_I$  e as linhas tracejadas aos valores corrigidos ( $K_I^{COR}$ ).

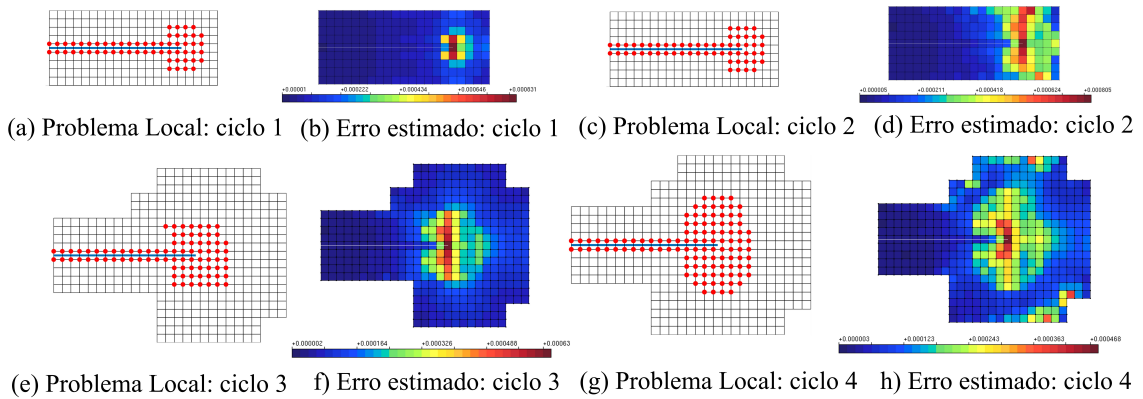
Neste caso, devido à baixa dispersão do erro verificada no ciclo 1, não houve aumento do domínio entre os ciclos 1 e 2. Finalmente, a distribuição dos nós enriquecidos com funções de singularidade é apresentada na Figura 7.26.

Assim como no Problema A, é interessante comparar o modelo local adaptativo com o modelo local geométrico, utilizado na seção 6.4.2 para o estudo do estimador orientado ao objetivo (ver Figuras 6.27(b) e 6.28(b)). Os resultados obtidos com as duas estratégias são confrontados na Figura 7.27, considerando apenas o número de ciclos correspondente à convergência dos resultados em cada caso (dois no modelo geométrico e quatro no





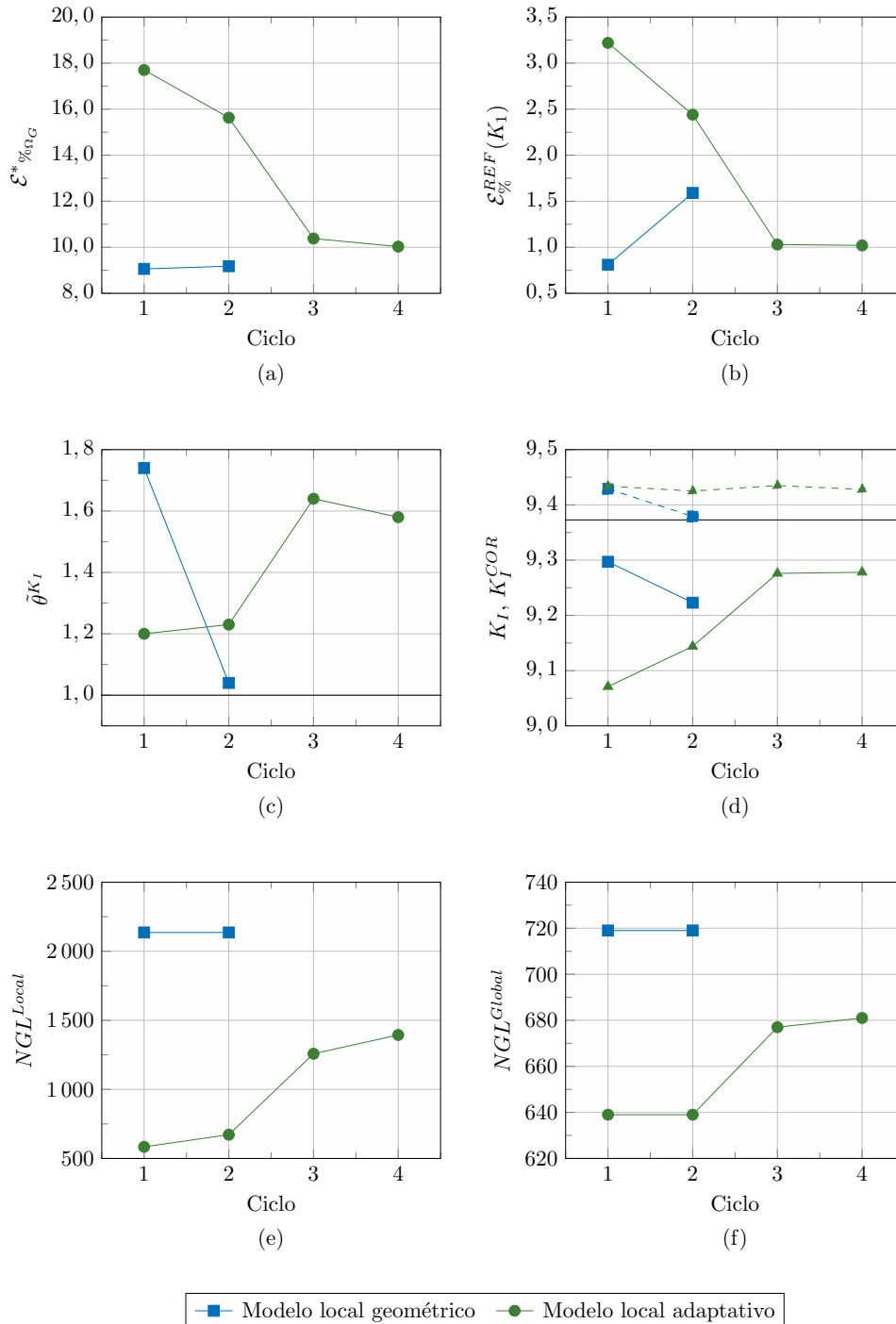
**Figura 7.25:** Domínios locais adaptativos (em azul) e erro estimado na norma energia por elemento no problema global enriquecido, obtidos no Problema B.



**Figura 7.26:** Nós enriquecidos com as funções de singularidade (em vermelho) e erro estimado na norma energia por elemento no modelo local adaptativo do Problema B.

modelo adaptativo, com base no critério de parada da Equação (7.4)). Nos dois casos, observam-se valores semelhantes para o erro estimado na norma energia no problema global enriquecido. O erro atingido para  $K_I$ , por sua vez, é inferior com o modelo local

adaptativo. Já o índice de efetividade aproximado  $\tilde{\theta}^{K_I}$ , conforme já discutido, é mais distante da unidade neste modelo. Por fim, o número de graus de liberdade – tanto no problema local quanto no problema global enriquecido – é menor quando se aplica a estratégia adaptativa.



**Figura 7.27:** Comparação entre os resultados obtidos com os modelos locais geométrico e adaptativo no Problema B. Na figura (d), as linhas cheias se referem aos valores aproximados de  $K_I$  e as linhas tracejadas aos valores corrigidos ( $K_I^{COR}$ ).

## Capítulo 8

# Estratégia Adaptativa para a Propagação de Trincas via MEFG<sup>gl</sup>

O presente capítulo apresenta uma proposta de adaptatividade para simulações de propagação de trincas via MEFG<sup>gl</sup>. Os procedimentos descritos no Capítulo 7, idealizados para problemas contendo trincas estáticas, são ajustados de acordo com particularidades do fenômeno de propagação. Para o estudo dessa nova abordagem, avalia-se o fator de intensidade de tensão extraído a cada passo de propagação.

### 8.1 Considerações Iniciais

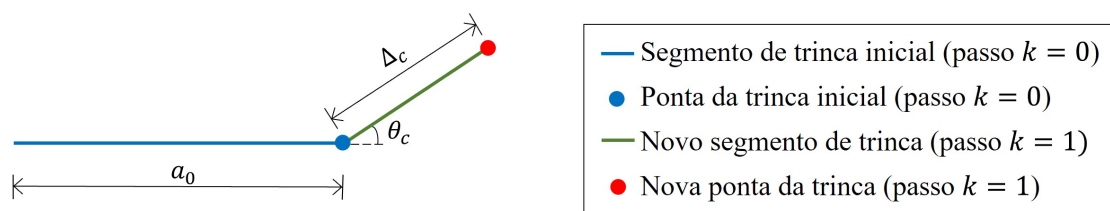
Conforme introduzido no Capítulo 4 (seção 4.5), a nova abordagem a ser discutida a seguir apresenta ideias iniciais para simulações adaptativas de propagação de trincas via MEFG<sup>gl</sup>. Considera-se, neste caso, o crescimento progressivo de uma trinca inicial (prescrita pelo usuário), com base em um incremento de trinca  $\Delta_c$  (também fornecido pelo usuário). A cada passo do processo de propagação, a ponta da trinca é avançada de  $\Delta_c$  segundo uma direção  $\theta_c$  calculada através do critério da máxima tensão circunferencial (Erdogan e Sih, 1963):

$$\theta_c = 2 \arctan \left[ \frac{-2K_{II}/K_I}{1 + \sqrt{1 + 8 \left( \frac{K_{II}}{K_I} \right)^2}} \right] \quad (8.1)$$

sendo  $K_I$  e  $K_{II}$  os fatores de intensidade de tensão fornecidos pelo método numérico adotado.

O procedimento de propagação utilizado, descrito detalhadamente em Fonseca (2019) e Fonseca et al. (2020), constrói um novo segmento de trinca a cada passo de propagação

$k$ . A posição da ponta da trinca, nesse caso, é atualizada a cada passo com base em  $\Delta_c$  e  $\theta_c$ , conforme ilustra a Figura 8.1 para o passo  $k = 1$ .



**Figura 8.1:** Obtenção do novo segmento de trinca no primeiro passo de propagação a partir de  $\Delta_c$  e  $\theta_c$ . O termo  $a_0$  indica o comprimento inicial da trinca.

À cada passo de propagação, portanto, associa-se uma lista de segmentos de trinca. No caso do MEF $G^{\text{gl}}$ , essa lista é adicionada ao problema local para a definição dos nós a serem enriquecidos com funções de singularidade ou de Heaviside. A seleção de tais nós pode ser feita a partir dos pontos de interseção dos segmentos de trinca com os elementos da malha local, valendo-se de métodos de geometria computacional. No trabalho de Fonseca et al. (2020), os elementos atravessados pela trinca são enriquecidos com a função de Heaviside e aquele que contém a ponta da trinca é enriquecido com funções de singularidade. Esse esquema de enriquecimento pode ser automatizado para qualquer malha local e geometria de trinca.

No contexto do MEF $G^{\text{gl}}$ , o problema local do passo  $k$  recebe condições de contorno oriundas do problema global enriquecido do passo  $k - 1$ , com uma configuração anterior da trinca. Há, portanto, um erro associado ao “atraso” da representação da trinca nas condições de contorno – identificado como “*crack lag*” no trabalho de Gupta, Kim e Duarte (2012). Apesar disso, tal erro é pouco significativo quando se adotam valores pequenos para  $\Delta_c$ , conforme mencionado na seção 3.1.

## 8.2 Descrição da estratégia

Na seção 7.2, foi apresentada a solução do MEF $G^{\text{gl}}$  utilizando modelos locais adaptativos, cujo tamanho e discretização eram atualizados a cada ciclo global-local a partir de estimadores de erro. No âmbito de simulações de propagação, como visto, a solução tende a ser pouco alterada entre dois passos consecutivos, o que permite algumas simplificações na geração do modelo local adaptativo.

No primeiro passo da propagação ( $k = 0$ ), sem a representação da trinca no modelo global inicial, propõe-se a execução de ciclos global-local até que o critério de parada

(Equação (7.4)) seja atendido. A partir do passo  $k = 1$ , propõe-se a execução de apenas um ciclo – o que não traz prejuízo para a representação do problema desde que o incremento  $\Delta_c$  seja pequeno. Além disso, o aumento do domínio local adaptativo, efetuado a cada ciclo na estratégia da seção 7.2, também pode ser simplificado nas simulações de propagação.

Na abordagem de Fonseca et al. (2020), o domínio local é o menor possível para a inclusão de todos os segmentos de trinca no passo corrente. Tal domínio só é aumentado, portanto, quando o último segmento de trinca do passo  $k$  (aquele que contém a ponta) ultrapassa os limites da zona de enriquecimento (no problema global enriquecido) do passo  $k - 1$ . Desse modo, o aumento do domínio local é pequeno, envolvendo a inclusão de um número modesto de novos elementos, e não é efetuado em todos os passos de propagação. A discretização do modelo local também sofre poucas alterações entre passos consecutivos, com a inclusão de novos enriquecimentos de Heaviside e a alteração dos nós enriquecidos com funções de singularidade, conforme o avanço da ponta da trinca. Para a utilização de modelos locais adaptativos nesse contexto, propõem-se as seguintes condições:

1. Aumenta-se o domínio local somente quando necessário – quando o último segmento de trinca do passo corrente ultrapassar os limites da zona de enriquecimento (do problema global enriquecido) do passo anterior – assim como na abordagem de Fonseca et al. (2020). Tal aumento, entretanto, passa ser governado pelo erro estimado no problema global enriquecido, conforme o procedimento da seção 7.2. Almeja-se, desse modo, uma melhor representação dos segmentos de trinca no modelo global via funções de enriquecimento global-local.
2. Altera-se a discretização do modelo local a cada passo de propagação, assim como feito em Fonseca et al. (2020). Essa alteração, entretanto, passa a ser conduzida pelo erro estimado no problema local (adaptatividade-e, seção 7.1), visando a melhor descrição da singularidade nesse modelo. Ao contrário do que se fez nos capítulos anteriores, considera-se o uso da função de Heaviside nos nós associados ao comprimento da trinca.
3. Sobre o problema local de cada passo, não se mantêm os enriquecimentos selecionados adaptativamente nos passos anteriores. Isso é feito de modo a evitar que funções de singularidade sejam aplicadas ao longo do comprimento da trinca, onde já se aplica a função de Heaviside (lembrar que a ponta da trinca avança ao longo da propagação). A cada passo, portanto, o modelo local parte da configuração de enriquecimento mínimo para a descrição de todos os segmentos de trinca. Em seguida, considera-se a execução de **duas iterações adaptativas**, com a seleção de novos nós a

serem enriquecidos com funções de singularidade e, em seguida, uma nova análise do problema local. Propõe-se, portanto, que o problema local seja resolvido duas vezes a cada passo de propagação, para que o processo da adaptatividade-e se desenvolva e a discretização seja aprimorada.

Em síntese, a atualização do modelo local na proposta adaptativa mantém duas premissas da abordagem de Fonseca et al. (2020): o aumento do domínio local somente quando necessário e a alteração da discretização local a cada passo de propagação. A diferença, agora, está no uso de estimadores de erro para conduzir tais mudanças. No restante deste capítulo, a abordagem de Fonseca et al. (2020) será referida como **propagação automatizada** e a nova proposta como **propagação adaptativa**. A diferença entre as duas estratégias pode ser melhor compreendida através das Figuras 8.2 e 8.3.

Por simplificação, os ciclos executados no passo inicial da Figura 8.3 foram omitidos. Na configuração ilustrada, o domínio local (selecionado adaptativamente) no passo inicial é extenso o suficiente para a inclusão do novo segmento de trinca no item (g). Tal tamanho seria mantido por um determinado número de passos, até que o último segmento de trinca ultrapassasse os limites da zona de enriquecimento. Nesse passo, o domínio local seria aumentado através do estimador para a norma energia no problema global enriquecido (seção 7.2.2).

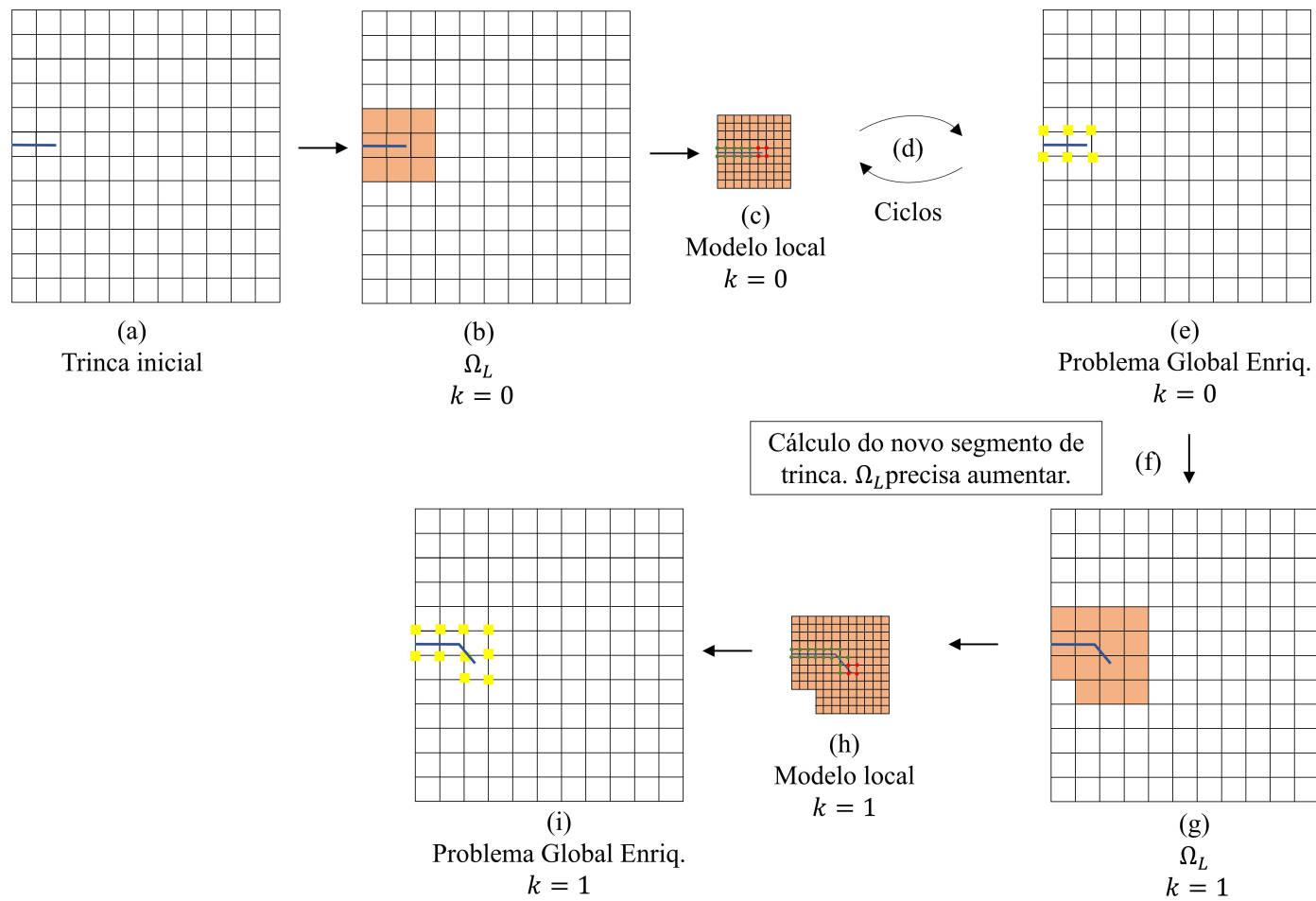
## 8.3 Simulações Numéricas

### 8.3.1 Considerações Iniciais

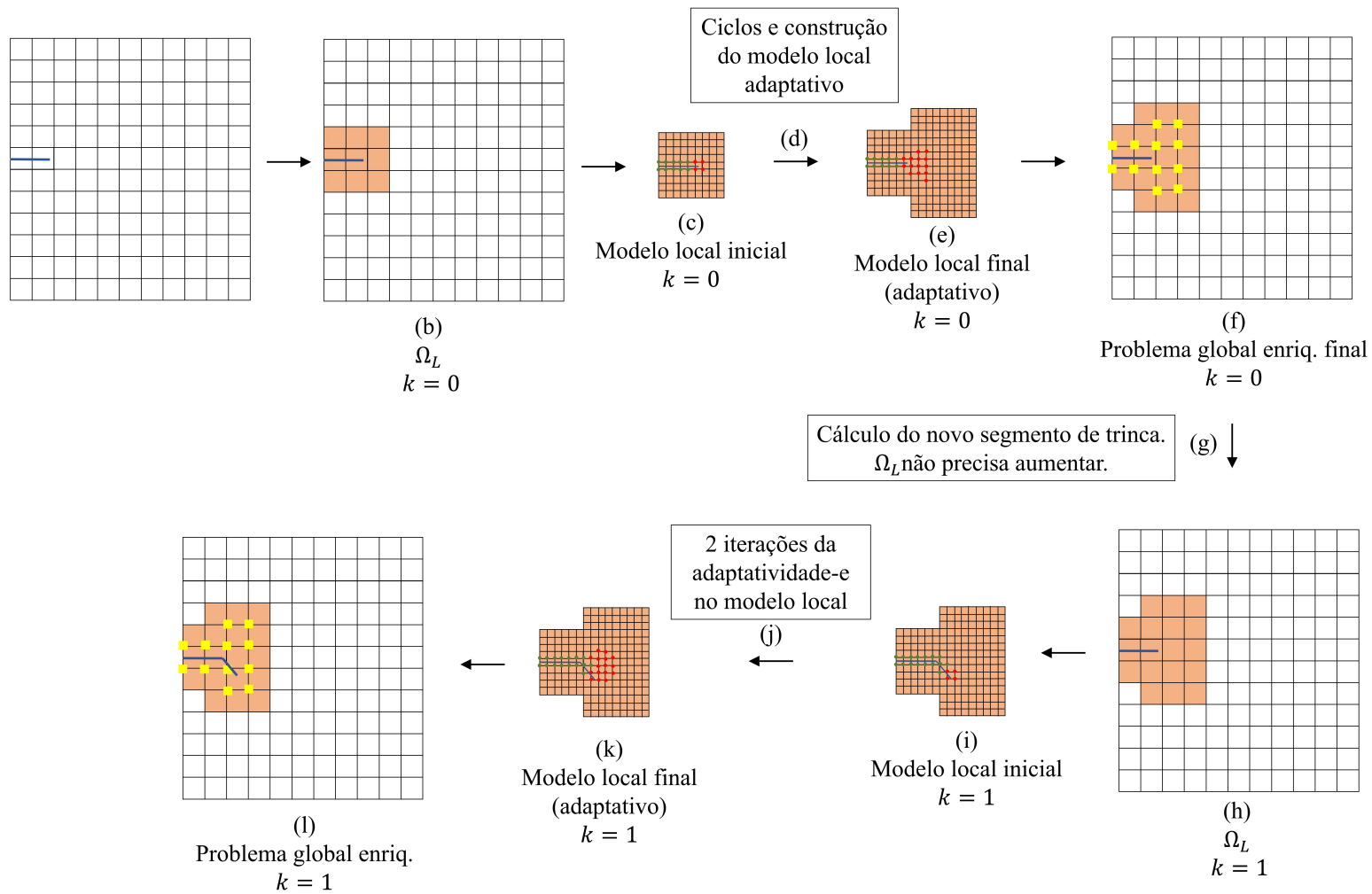
Para o estudo da propagação adaptativa, considera-se o Problema B (seção 4.6.2). Tal problema foi escolhido em razão da disponibilidade de uma solução de referência  $K_I^{\text{REF}}$  para qualquer tamanho de trinca (Equação (4.5)), com precisão de 0,5%.

Adota-se, nesta seção, a mesma malha global utilizada no estudo do modelo local adaptativo (seções 7.1.3.2 e 7.2.4.2). Considera-se o uso de elementos Q4 e a divisão de cada elemento global em  $3 \times 3$  partes para a formação da malha local. Em todas as análises, utiliza-se apenas o MEFQ-E<sup>gl</sup> (assim como no Capítulo 7). Tanto na propagação adaptativa quanto na automatizada, adotam-se os seguintes parâmetros:

- Tamanho inicial da trinca:  $a_0 = 1,38$ ;
- Incremento de trinca:  $\Delta_c = 0,21$ , aproximadamente igual à largura dos elementos locais;



**Figura 8.2:** Ilustração dos dois primeiros passos da **propagação automatizada** em um problema genérico. Nós enriquecidos com funções de Heaviside em verde, funções de singularidade em vermelho e funções global-local em amarelo.



**Figura 8.3:** Ilustração dos dois primeiros passos da **propagação adaptativa** em um problema genérico. Nós enriquecidos com funções de Heaviside em verde, funções de singularidade em vermelho e funções global-local em amarelo.

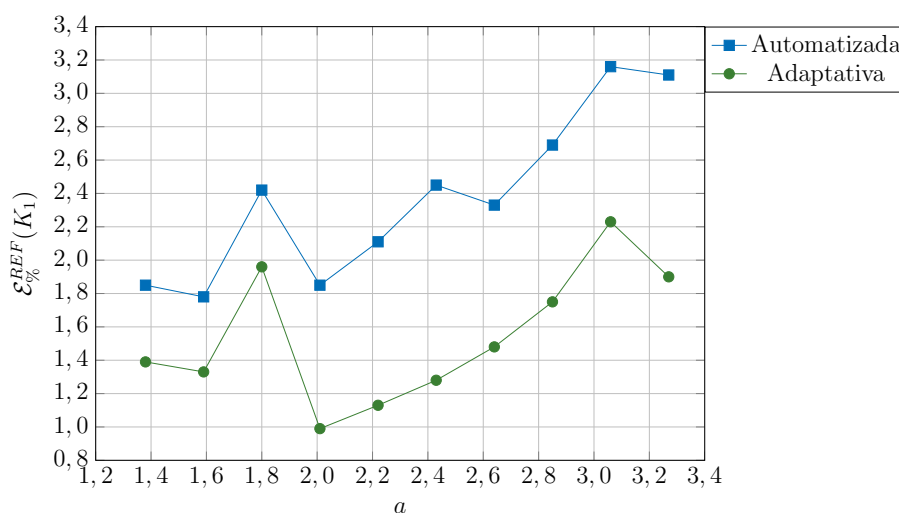


- Raio da Integral de Interação:  $r = 2d$  nos dois primeiros passos e  $r = 3d$  nos demais;
- Número total de passos de propagação: 10.

Além disso, adotam-se os valores de  $\mu_e = 0,4$  e  $\mu_{\Omega_L} = 0,5$  para os parâmetros adaptativos.

### 8.3.2 Comparação entre as Estratégias Automatizada e Adaptativa

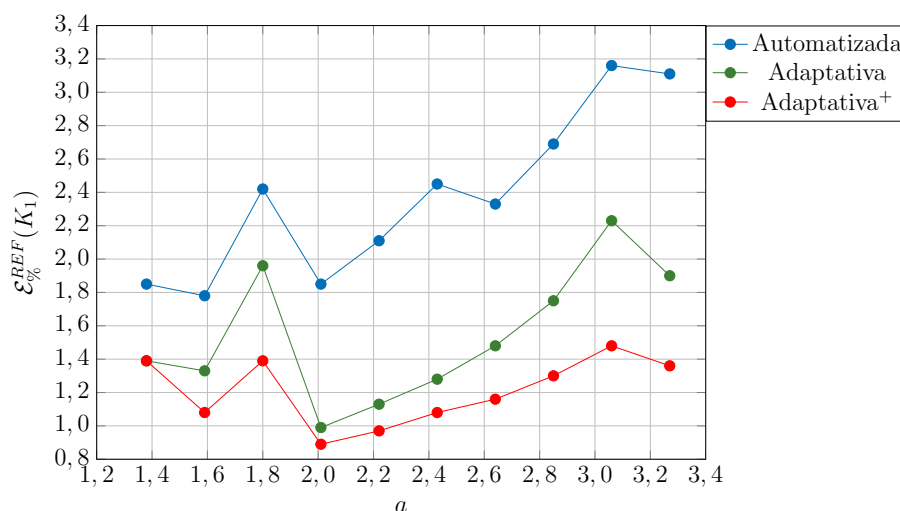
Os erros de referência relativos de  $K_I$  ( $\mathcal{E}_{\%}^{\text{REF}}(K_I)$ ) em função do comprimento da trinca, obtidos com as estratégias automatizada e adaptativa ao longo dos dez passos de propagação, são apresentados na Figura 8.4. É possível observar que a estratégia adaptativa garante menores erros em todos os passos do processo. Em ambas as estratégias, verifica-se uma queda de precisão à medida que o tamanho da trinca aumenta. Apesar disso, ocorre uma redução súbita do erro com a técnica adaptativa em  $a = 2,0$  e  $a = 3,06$ , que correspondem aos passos nos quais o domínio local foi aumentado adaptativamente (o que será discutido ainda nesta seção). Tal resultado sugere que a perda de precisão ao longo do crescimento da trinca está associada à quantidade de nós enriquecidos com as funções global-local e, também, à relação entre o tamanho da trinca e o tamanho do domínio local.



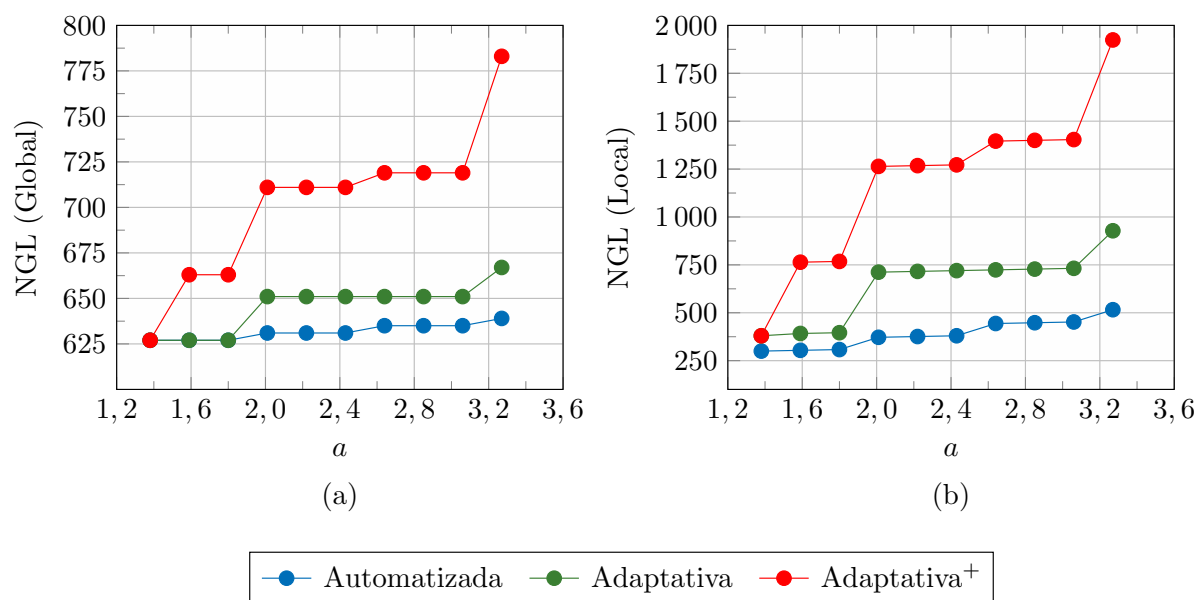
**Figura 8.4:** Erros de referência de  $K_I$  em função do tamanho da trinca ( $a$ ) obtidos ao longo de dez passos de propagação.

Na Figura 8.5, repetem-se os resultados da Figura 8.4 com a inclusão de uma nova estratégia, denominada “adaptativa<sup>+</sup>”. Nessa estratégia, efetua-se o aumento do domínio local (em função do erro estimado no problema global enriquecido), em todos os passos

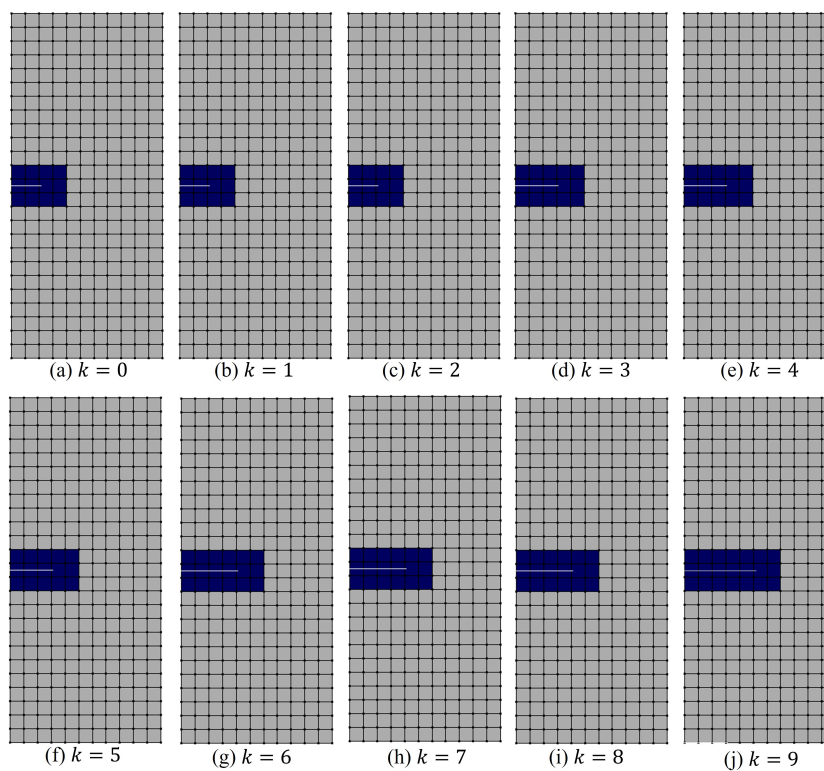
da propagação. Trata-se, portanto, de uma abordagem mais onerosa. Os resultados obtidos confirmam a hipótese anterior, mostrando que o aumento do número de nós globais enriquecidos com as funções global-local estabiliza o nível do erro de  $K_I$  em um patamar mais baixo.



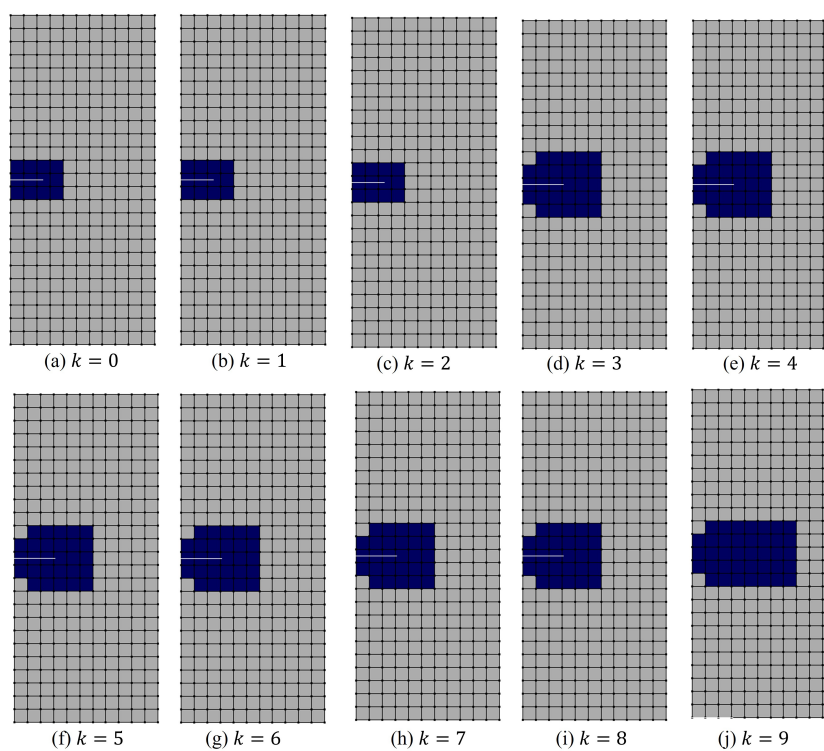
**Figura 8.5:** Erros de referência de  $K_I$  em função do tamanho da trinca ( $a$ ) obtidos ao longo de dez passos de propagação, com a inclusão da estratégia Adaptativa+.



**Figura 8.6:** Número de graus de liberdade no problema global enriquecido e no problema local em função do tamanho  $a$  da trinca, considerando as três estratégias da Figura 8.5.



**Figura 8.7:** Domínios locais (em azul) gerados a cada passo  $k$  na **propagação automatizada**.

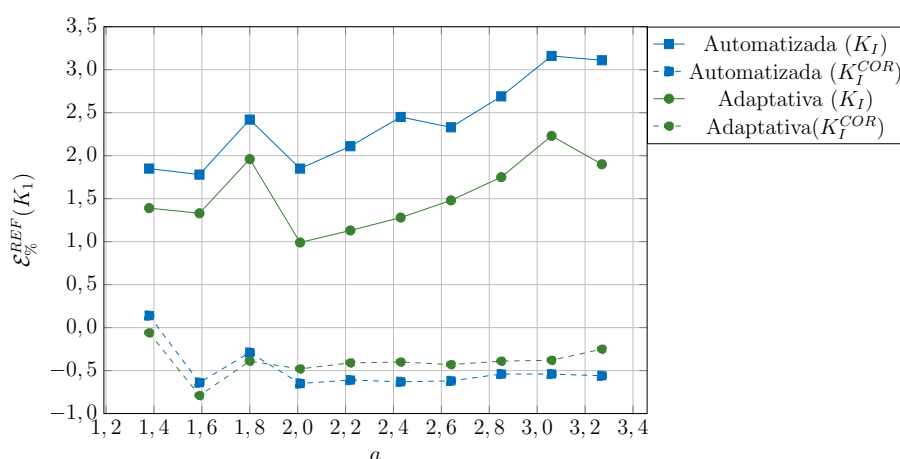


**Figura 8.8:** Domínios locais (em azul) gerados a cada passo  $k$  na **propagação adaptativa**.

### 8.3.3 Correção do Fator de Intensidade de Tensão

Em simulações de propagação, o estimador orientado ao objetivo (aplicado com sucesso sobre o problema global enriquecido nos capítulos 6 e 7) pode ser aplicado sobre o problema global enriquecido em todos os passos do processo. Na propagação adaptativa, já se considera a aplicação desse estimador na definição do critério de parada para os ciclos global-local do primeiro passo (conforme mencionado na seção 8.2). O que se propõe, na presente seção, é a utilização desse estimador para a correção dos valores de  $K_I$  em todos os passos de propagação da trinca.

Na Figura 8.9, os erros de referência relativos de  $K_I$ , já exibidos na Figura 8.4, são comparados aos erros dos valores corrigidos ( $K_I^{COR}$ , conforme a Equação (6.19)). É bastante clara a superioridade dos valores corrigidos, que atingem erros absolutos menores que 1% em todos os dez passos. Também é interessante observar a proximidade entre as curvas associadas a  $K_I^{COR}$ , que exibem comportamentos bastante semelhantes nas abordagens automatizada e adaptativa. Tal observação mostra que a correção dos valores de  $K_I$  é uma estratégia bastante eficiente nesse tipo de problema e pode, até mesmo, dispensar o uso de modelos locais mais elaborados. Naturalmente, essa afirmação é válida quando o objetivo da análise se limita ao fator de intensidade de tensão. Além disso, o tamanho e a discretização do modelo local são mais influentes em problemas mais complexos (que envolvem diferentes modos de abertura ou efeitos tridimensionais, por exemplo). Nesses casos, é provável que a estratégia adaptativa, considerando os valores corrigidos, supere a estratégia automatizada nas mesmas condições.



**Figura 8.9:** Erros de referência de  $K_I$  e  $K_I^{COR}$  em função do tamanho da trinca ( $a$ ) obtidos ao longo de dez passos de propagação.

# Capítulo 9

## Considerações Finais

Conforme se discutiu ao longo deste trabalho, o MEFG<sup>gl</sup> tem sido aplicado com sucesso, nas últimas décadas, em diversas simulações da Mecânica da Fratura. A construção numérica das funções de enriquecimento garante maior generalidade ao método e contorna certas limitações inerentes à formulação do MEFG.

Apesar da ampla utilização do MEFG<sup>gl</sup>, no meio acadêmico, em problemas tridimensionais de caráter complexo, existe uma lacuna no que se refere ao controle dos erros da simulação. No contexto do MEFG, há uma considerável gama de trabalhos com diferentes propostas de estimadores de erro *a posteriori*, conforme descrito na seção 3.2. Apesar disso, há um vasto campo a ser explorado no âmbito do MEFG<sup>gl</sup>.

Nesse sentido, o presente trabalho propôs diferentes técnicas para a exploração desse nicho e expansão do MEFG<sup>gl</sup>. Foram propostas diferentes aplicações de estimadores de erro nas duas escalas da análise (problema local e problema global), considerando medidas relacionadas à norma energia e ao fator de intensidade de tensão. Através das estratégias adaptativas desenvolvidas, procurou-se explorar tais medidas de forma ampla e pertinente em simulações da MFLE.

As contribuições mais relevantes deste trabalho, na opinião da autora, são sintetizadas a seguir com base nos resultados dos capítulos 5 a 8.

### 9.1 Síntese das principais contribuições

#### 9.1.1 Uso das tensões recuperadas nas condições de contorno de Cauchy

O presente trabalho apresentou uma contribuição importante para a imposição das condições de contorno no problema local do MEFG<sup>gl</sup>. Conforme descrito na seção 5.1, o uso das tensões recuperadas – computadas através da técnica ZZ-BD – nas condições de contorno de Cauchy fornece resultados finais precisos. Além disso, tal estratégia garante uma convergência mais rápida da solução ao longo do processo de ciclos global-local,

dispensando o uso da zona *buffer*. A utilização dessa técnica é ainda mais vantajosa quando se prevê a aplicação do estimador ZZ-BD no problema global enriquecido.

### 9.1.2 Estimador de erro para a norma energia no problema global enriquecido

Conforme apresentado na seção 5.2, foi proposta a aplicação do estimador de erro ZZ-BD (formulado para o MEFG no trabalho de Lins et al. (2019)) no problema global enriquecido do MEFG<sup>gl</sup>. O comportamento do estimador foi avaliado em diferentes configurações de modelos locais e, ainda, com a consideração do enriquecimento global-local estável (MEFG-E<sup>gl</sup>).

Em todos os casos analisados, o desempenho do estimador foi positivo. Índices de efetividade próximos da unidade foram obtidos até mesmo nas configurações com maior nível de erro. No caso do MEFG-E<sup>gl</sup>, observaram-se tendências semelhantes àquelas obtidas com o MEFG-E no trabalho de Lins et al. (2019). Além disso, foi possível verificar características específicas da distribuição do erro estimado por elemento no problema global enriquecido, com concentrações de erro ao longo do comprimento da trinca, conforme apontado na seção 5.2.2.2. Com base nesses resultados, foi possível confirmar a validade do estimador proposto e, finalmente, garantir uma contribuição importante para o MEFG<sup>gl</sup> e a sua versão estável.

### 9.1.3 Estimador de erro para a norma energia no problema local

Na seção 5.3, foi proposta a aplicação do estimador de erro ZZ-BD sobre o problema local do MEFG<sup>gl</sup>. Nesse contexto, foi necessário analisar o efeito das duas parcelas de erro na solução local (erro das condições de contorno e erro da discretização). A consideração de tais parcelas no estudo do estimador, de fato, é uma contribuição importante do presente trabalho.

Na avaliação do estimador, índices de efetividade favoráveis foram obtidos nas configurações contendo condições de contorno mais aprimoradas. Quando o erro associado a essa parcela era mais elevado, por sua vez, a efetividade do estimador foi consideravelmente reduzida – refletindo uma característica inerente à abordagem global-local. Ainda assim, a distribuição do erro estimado por elemento mostrou a habilidade do estimador em descrever corretamente o comportamento do problema. Tal conclusão foi especialmente importante para a aplicação de uma estratégia adaptativa sobre o problema local, avaliada no Capítulo 6.

### 9.1.4 Estimador de erro para o fator de intensidade de tensão

No Capítulo 6, formulou-se um estimador de erro especialmente concebido para o fator de intensidade de tensão. O estimador proposto baseou-se na Integral de Interação, amplamente utilizada nas aplicações do MEF<sup>g</sup> a problemas da MFLE. Na opinião da autora, o desenvolvimento desse estimador representa uma das principais contribuições do presente trabalho.

Inicialmente, o estimador orientado ao objetivo foi formulado para o MEF<sup>g</sup> como uma expansão do estimador ZZ-BD. Os resultados obtidos (apresentados na seção 6.2) foram bastante favoráveis em diferentes modos de abertura de trinca. Foi possível confirmar a precisão do erro estimado em relação ao erro exato, considerando  $K_I$  e  $K_{II}$ , e, ainda, avaliar o efeito do raio da Integral de Interação sobre o comportamento do estimador.

Em seguida, a aplicação do novo estimador foi explorada no problema global enriquecido do MEF<sup>g</sup>. O desempenho do estimador foi bastante positivo, em especial, na abordagem estável do MEF<sup>g</sup>-E (conforme discutido na seção 6.3.2). Exemplos adicionais com solução exata desconhecida também foram avaliados, com maior cautela em relação aos índices de efetividade. Nesses exemplos, foi proposta uma correção do valor aproximado do fator de intensidade de tensão em função do erro estimado. Tal correção se mostrou bastante eficiente e foi novamente explorada na proposta de propagação adaptativa (Capítulo 8), conforme será retomado a seguir.

### 9.1.5 Estratégias adaptativas para o MEF<sup>g</sup>

No Capítulo 7, desenvolveram-se técnicas adaptativas para o MEF<sup>g</sup> com base nos estimadores de erro formulados nos capítulos 5 e 6. Conforme discutido ao longo do texto, manteve-se a preocupação de controlar os níveis de erro nas duas escalas de análise, valendo-se da aplicação de estimadores *a posteriori* sobre os problemas local e global enriquecido.

Com o objetivo de aprimorar a descrição da singularidade associada à trinca, foi proposta uma estratégia de adaptatividade-e no problema local (seção 7.1). O estimador ZZ-BD (formulado para a norma energia) foi empregado para a seleção adaptativa dos nós a serem enriquecidos com funções de singularidade. No entendimento da autora, é a primeira vez que essa abordagem, idealizada por Duflot e Bordas (2008) para o MEF<sup>g</sup>, é, de fato, implementada. A estratégia proposta, combinada com a execução dos ciclos global-local, foi capaz de selecionar regiões de enriquecimento pertinentes e aprimorar a qualidade dos resultados em relação à estratégia de enriquecimento mínimo. Desse modo,

evita-se a necessidade de definir previamente o tamanho da região a ser enriquecida, diminuindo a dependência em relação ao usuário do sistema computacional – um dos principais objetivos desta pesquisa.

Na sequência do Capítulo 7, foi proposta uma estratégia adaptativa de seleção de domínios locais baseada em medidas de erro calculadas no problema global enriquecido. Através dessa estratégia, é possível construir problemas locais em regiões críticas (com maior nível de erro) e, na sequência da análise, garantir o aprimoramento da solução via enriquecimento global-local. O domínio local, nesse caso, passa a incluir características particulares do problema analisado e deixa de ser pré-definido pelo analista – atingindo outro grande objetivo do presente trabalho. Na aplicação dessa estratégia (seção 7.2), foi constatado um aumento de precisão considerável em relação à configuração de domínio local topológico (que pode ser automatizada em qualquer problema e, por esse motivo, é bastante utilizada nas aplicações do MEFG<sup>gl</sup> a problemas de fratura). A combinação entre domínios locais adaptativos e adaptatividade-e permitiu a obtenção de **modelos locais adaptativos**, cujo tamanho e discretização são determinados adaptativamente.

Também é importante ressaltar que todos os resultados do presente trabalho foram obtidos sem o uso de enriquecimentos polinomiais (tanto no problema global quanto no local). Além disso, foram utilizadas apenas malhas uniformes nos dois modelos. As estratégias propostas, portanto, partem de discretizações bastante simples e atingem níveis de erro adequados (especialmente para o fator de intensidade de tensão).

### 9.1.6 Propagação adaptativa

Finalmente, o Capítulo 8 apresentou uma proposta de propagação de trincas adaptativa para o MEFG<sup>gl</sup>. A concepção desse tipo de estratégia é bastante complexa, por envolver diferentes medidas de erro que se inter-relacionam ao longo do processo. A abordagem apresentada, como visto, constitui uma proposta inicial e abre caminho para o desenvolvimento de outras estratégias.

Na comparação com a chamada propagação automatizada (seção 8.3), a proposta adaptativa garantiu melhores resultados para o fator de intensidade de tensão em todos os passos do processo. A correção de  $K_I$  através do erro estimado também se mostrou bastante eficiente e, conforme discutido na seção 8.3.3, forneceu ótimos resultados até mesmo em modelos mais pobres. Por esse motivo, reforça-se a afirmação do estimador orientado ao objetivo como principal contribuição deste trabalho.



## 9.2 Propostas de Trabalhos Futuros

Como visto, o presente trabalho apresentou contribuições importantes para o desenvolvimento de estimadores de erro e técnicas adaptativas para o MEF<sup>gl</sup>. Apesar disso, diversos tópicos podem ser sugeridos para trabalhos futuros relacionados aos temas desta tese:

1. Aplicação de outros estimadores de erro *a posteriori*, formulados para a norma energia, sobre os problemas local e global enriquecido. Considera-se válida, por exemplo, a consideração do estimador  $SPR_{XFEM}$ , citado na seção 3.2.1.
2. Avaliação dos estimadores propostos em malhas não uniformes construídas com elementos triangulares.
3. Desenvolvimento de estimadores orientados ao objetivo com base em outros métodos de extração, além da Integral de Interação. Ressalta-se, por exemplo, o *Contour Integral Method* (CIM) e o *Displacement Correlation Method* (DCM).
4. Aplicação da adaptatividade-e, no problema local, em conjunto com um procedimento do tipo  $h$ , com a adaptação da malha no decorrer da simulação. Apesar de mais onerosa, tal estratégia poderia fornecer ganhos consideráveis em problemas tridimensionais.
5. Expansão das estratégias propostas para problemas tridimensionais da Mecânica da Fratura, de modo a capturar fenômenos mais complexos e, ainda, mais próximos da prática de engenharia (como aqueles apresentados em O'Hara et al. (2016) e O'Hara et al. (2015)).
6. Avaliação da técnica de propagação adaptativa em problemas de fadiga, tendo em vista a aplicação da Lei de Paris (Paris e Erdogan, 1963). Através da Lei de Paris, é possível calcular a vida em fadiga (definida em termos do número de ciclos de carregamento) a partir do fator de intensidade de tensão. Há, portanto, um grande potencial de exploração do estimador orientado ao objetivo proposto no presente trabalho.
7. Dado o excelente desempenho do MEF<sup>gl</sup>-E, considera-se válida a avaliação de outras técnicas estáveis sobre o enriquecimento global-local, além do MEF<sup>gl</sup>-E.

## Referências Bibliográficas

- Ainsworth, M. e Oden, J. T. (2000), *A Posteriori Error Estimation in Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, INC.
- Babuška, I. e Banerjee, U. (2012), ‘Stable generalized finite element method (SGFEM)’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **201-204**, 91–111.
- Babuška, I., Banerjee, U. e Osborn, J. E. (2004), ‘Generalized finite element methods - main ideas, results and perspective’, *International Journal of Computational Methods* **01(01)**, 67–103.
- Babuška, I., Caloz, G. e Osborn, J. E. (1994), ‘Special finite element methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients’, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **31(4)**, 945–981.
- Babuška, I. e Lipton, R. (2011), ‘L2-Global to local projection: an approach to multiscale analysis’, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* **21(11)**, 2211–2226.
- Babuška, I. e Melenk, J. M. (1997), ‘The Partition of Unity Method’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **40(4)**, 727–758.
- Babuška, I. e Miller, A. (1984a), ‘The post-processing approach in the finite element method—part 1: Calculation of displacements, stresses and other higher derivatives of the displacements’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **20(6)**, 1085–1109.
- Babuška, I. e Miller, A. (1984b), ‘The post-processing approach in the finite element method—part 2: The calculation of stress intensity factors’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **20(6)**, 1111–1129.
- Babuška, I. e Miller, A. (1984c), ‘The post-processing approach in the finite element method—part 3: a posteriori error estimates and adaptive mesh selection’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **20(12)**, 2311–2324.

- Babuška, I. e Rheinboldt, W. (1979), ‘On the reliability and optimality of the finite element method’, *Computers & Structures* **10**(1-2), 87–94.
- Babuška, I. e Rheinboldt, W. C. (1978), ‘A-posteriori error estimates for the finite element method’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **12**(10), 1597–1615.
- Barros, F. B. (2002), Métodos Sem Malha e Método dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas, PhD thesis, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Barros, F. B., de Barcellos, C. S., Duarte, C. A. e Torres, D. A. F. (2013), ‘Subdomain-based error techniques for generalized finite element approximations of problems with singular stress fields’, *Computational Mechanics* **52**(6), 1395–1415.
- Barros, F. B., Proença, S. P. B. e de Barcellos, C. S. (2004a), ‘Generalized finite element method in structural nonlinear analysis: a p-adaptive strategy’, *Computational Mechanics* **33**(2), 95–107.
- Barros, F. B., Proença, S. P. B. e de Barcellos, C. S. (2004b), ‘On error estimator and p-adaptivity in the generalized finite element method’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **60**(14), 2373–2398.
- Béchet, E., Minnebo, H., Moes, N. e Burgardt, B. (2005), ‘Improved implementation and robustness study of the x-FEM for stress analysis around cracks’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **64**(8), 1033–1056.
- Belytschko, T. e Black, T. (1999), ‘Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **45**(5), 601–620.
- Belytschko, T., Gracie, R. e Ventura, G. (2009), ‘A review of extended/generalized finite element methods for material modeling’, *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering* **17**(4), 043001.
- Bento, M. H. C. (2019), Técnicas adaptativas baseadas em estimativas de erro a posteriori para o método dos elementos finitos generalizados e suas versões estáveis, Master’s thesis, Escola de Engenharia de São Carlos da Universidade de São Paulo.

- Bento, M. H. C., Proença, S. P. B. e Duarte, C. A. (2023), ‘Recovery strategies, a posteriori error estimation, and local error indication for second-order g/xfem and fem’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **n/a**.
- Bento, M. H. C., Ramos, C. S. e Proença, S. B. P. (2019), Numerical assessment of a stress recovery procedure applied to sgfem using flat-top partition of unity, *in* ‘Proceedings of XL CILAMCE (Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)’.
- Birner, M. e Schweitzer, M. A. (2019), Global-local enrichments in PUMA, *in* ‘Mesh-free Methods for Partial Differential Equations IX’, Springer International Publishing, pp. 167–183.
- Bordas, S. e Dufлот, M. (2007), ‘Derivative recovery and a posteriori error estimate for extended finite elements’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **196**(35-36), 3381–3399.
- Bordas, S., Dufлот, M. e Le, P. (2007), ‘A simple error estimator for extended finite elements’, *Communications in Numerical Methods in Engineering* **24**(11), 961–971.
- Bordas, S. P. A. e Dufлот, M. (2017), Error estimation and adaptivity, *in* ‘CISM Course Towards a Seamless Integration of CAD and Simulation’, Udine.
- Campos, B. C. (2020), Integração numérica por decomposição de elementos no contexto do metodo dos elementos finitos generalizados, Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Chessa, J., Wang, H. e Belytschko, T. (2003), ‘On the construction of blending elements for local partition of unity enriched finite elements’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **57**(7), 1015–1038.
- Cirak, F. e Ramm, E. (1998), ‘A posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **156**(1-4), 351–362.
- da Rosa, E. (2002), *Análise de Resistência Mecânica (Mecânica da Fratura e Fadiga)*, Universidade Federal de Santa Catarina.
- Díez, P., Parés, N. e Huerta, A. (2010), ‘Error estimation and quality control’, *Encyclopedia of Aerospace Engineering* .

- Díez, P., Ródenas, J. J. e Zienkiewicz, O. C. (2007), ‘Equilibrated patch recovery error estimates: simple and accurate upper bounds of the error’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **69**(10), 2075–2098.
- Dowling, N. E. (2013), *Mechanical Behavior of Materials*.
- Duarte, C. A. e Babuška, I. (2005), A global-local approach for the construction of enrichment functions for the generalized fem and its application to propagating three-dimensional cracks, in ‘ECCOMAS Thematic Conference on Meshless Methods, Lisbon, Portugal’.
- Duarte, C. A., Kim, D.-J. e Babuška, I. (2007), A global-local approach for the construction of enrichment functions for the generalized FEM and its application to three-dimensional cracks, in ‘Advances in Meshfree Techniques’, Springer Netherlands, pp. 1–26.
- Duarte, C. A. e Oden, J. T. (1995), Hp-Clouds - A Meshless Method to Solve Boundary-Value Problems, Technical report.
- Duarte, C., Babuška, I. e Oden, J. (2000), ‘Generalized finite element methods for three-dimensional structural mechanics problems’, *Computers & Structures* **77**(2), 215–232.
- Duarte, C. e Kim, D.-J. (2008), ‘Analysis and applications of a generalized finite element method with global–local enrichment functions’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **197**(6-8), 487–504.
- Duflot, M. e Bordas, S. (2008), ‘A posteriori error estimation for extended finite elements by an extended global recovery’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **76**(8), 1123–1138.
- Erdogan, F. e Sih, G. C. (1963), ‘On the crack extension in plates under plane loading and transverse shear’, *Journal of Basic Engineering* **85**(4), 519–525.
- Ferreira, I. P. (2016), Estimadores de erro a posteriori para o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) aplicados à análise de estruturas de concreto, PhD thesis, UFMG, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fillmore, T. B. e Duarte, C. A. (2018), ‘A hierarchical non-intrusive algorithm for the generalized finite element method’, *Advanced Modeling and Simulation in Engineering Sciences* **5**(1).

- Fonseca, F. T. e Pitangueira, R. L. (2007), An object oriented class organization for dynamic geometrically non-linear, *in* ‘Proceedings of CILAMCE(Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)’.
- Fonseca, G. M. (2019), Propagacção de trincas em meios elásticos lineares via método dos elementos finitos generalizados com estratégia global-local automatizada, Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil.
- Fonseca, G. M., Barros, F. B., de Oliveira, T. S., Monteiro, H. A., Novelli, L. e Pitangueira, R. L. (2020), ‘2-d crack propagation analysis using stable generalized finite element method with global-local enrichments’, *Engineering Analysis with Boundary Elements* **118**, 70–83.
- Fries, T.-P. (2008), ‘A corrected XFEM approximation without problems in blending elements’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **75**(5), 503–532.
- Geelen, R., Plews, J., Tupek, M. e Dolbow, J. (2020), ‘An extended/generalized phase-field finite element method for crack growth with global-local enrichment’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **121**(11), 2534–2557.
- Gerasimov, T., Rüter, M. e Stein, E. (2012), ‘An explicit residual-type error estimator for q1-quadrilateral extended finite element method in two-dimensional linear elastic fracture mechanics’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **90**(9), 1118–1155.
- González-Estrada, O., Ródenas, J., Bordas, S., Nadal, E., Kerfriden, P. e Fuenmayor, F. (2015), ‘Locally equilibrated stress recovery for goal oriented error estimation in the extended finite element method’, *Computers & Structures* **152**, 1–10.
- Grätsch, T. e Bathe, K.-J. (2005), ‘A posteriori error estimation techniques in practical finite element analysis’, *Computers & Structures* **83**(4-5), 235–265.
- Gupta, P., Pereira, J. P., Kim, D. J., Duarte, C. A. e Eason, T. (2012), ‘Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A non-intrusive approach using a generalized finite element method’, *Engineering Fracture Mechanics* **90**, 41–64.
- Gupta, V. (2014), Improved Conditioning and Accuracy of a two-scale Generalized Finite Element Method for Fracture Mechanics, PhD thesis, University of Illinois, Urbana-Champaign, EUA.

- Gupta, V., Duarte, C., Babuška, I. e Banerjee, U. (2013), ‘A stable and optimally convergent generalized FEM (SGFEM) for linear elastic fracture mechanics’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **266**, 23–39.
- Gupta, V., Duarte, C., Babuška, I. e Banerjee, U. (2015), ‘Stable GFEM (SGFEM): Improved conditioning and accuracy of GFEM/XFEM for three-dimensional fracture mechanics’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **289**, 355–386.
- Gupta, V., Kim, D.-J. e Duarte, C. A. (2012), ‘Analysis and improvements of global–local enrichments for the generalized finite element method’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **245-246**, 47–62.
- Gupta, V., Kim, D.-J. e Duarte, C. A. (2013), ‘Extensions of the two-scale generalized finite element method to nonlinear fracture problems’, *International Journal for Multiscale Computational Engineering* **11**(6), 581–596.
- Hinton, E. e Campbell, J. S. (1974), ‘Local and global smoothing of discontinuous finite element functions using a least squares method’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **8**(3), 461–480.
- Jin, Y., González-Estrada, O., Pierard, O. e Bordas, S. (2017), ‘Error-controlled adaptive extended finite element method for 3d linear elastic crack propagation’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **318**, 319–348.
- Kim, D.-J., Duarte, C. A. e Pereira, J. P. (2008), ‘Analysis of interacting cracks using the generalized finite element method with global-local enrichment functions’, *Journal of Applied Mechanics* **75**(5).
- Kim, D.-J., Duarte, C. A. e Sobh, N. A. (2010), ‘Parallel simulations of three-dimensional cracks using the generalized finite element method’, *Computational Mechanics* **47**(3), 265–282.
- Kim, D.-J., Pereira, J. P. e Duarte, C. A. (2009), ‘Analysis of three-dimensional fracture mechanics problems: A two-scale approach using coarse-generalized FEM meshes’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* pp. 335–365.
- Kim, J. e Duarte, C. A. (2015), ‘A new generalized finite element method for two-scale simulations of propagating cohesive fractures in 3-d’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **104**(13), 1139–1172.

- Laborde, P., Pommier, J., Renard, Y. e Salaün, M. (2005), ‘High-order extended finite element method for cracked domains’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **64**(3), 354–381.
- Ladevèze, P., Pelle, J.-P. e Rougeot, P. (1991), ‘Error estimation and mesh optimization for classical finite elements’, *Engineering Computations* **8**(1), 69–80.
- Li, H., O’Hara, P. e Duarte, C. (2021), ‘Non-intrusive coupling of a 3-d generalized finite element method and abaqus for the multiscale analysis of localized defects and structural features’, *Finite Elements in Analysis and Design* **193**, 103554.  
**URL:** <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0168874X2100038X>
- Li, L. Y. e Bettess, P. (1997), ‘Adaptive finite element methods: A review’, *Applied Mechanics Reviews* **50**(10), 581–591.
- Lins, R. M., Ferreira, M. D. C., Proença, S. P. B. e Duarte, C. A. (2015), ‘An a-posteriori error estimator for linear elastic fracture mechanics using the stable generalized/extended finite element method’, *Computational Mechanics* **56**(6), 947–965.
- Lins, R., Proença, S. P. e Duarte, C. A. (2019), ‘Efficient and accurate stress recovery procedure and a posteriori error estimator for the stable generalized/extended finite element method’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* .
- Malekan, M. e Barros, F. B. (2016), ‘Well-conditioning global–local analysis using stable generalized/extended finite element method for linear elastic fracture mechanics’, *Computational Mechanics* **58**(5), 819–831.
- Marques, T. R. E., Fonseca, G. M. e Barros, F. B. (2021), On the imposition of the local boundary conditions in the g-xfem-gl analysis, in ‘Proceedings of XLII CILAMCE (Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering)’.
- Melenk, J. e Babuška, I. (1996), ‘The partition of unity finite element method: Basic theory and applications’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **139**(1-4), 289–314.
- Melenk, J. M. (1995), On generalized finite element methods, PhD thesis, University of Maryland, College Park, Maryland, EUA.



- Moes, N., Dolbow, J. e Belytschko, T. (1999), ‘A finite element method for crack growth without remeshing’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **46**(1), 131–150.
- Noor, A. K. (1986), ‘Global-local methodologies and their application to nonlinear analysis’, *Finite Elements in Analysis and Design* **2**(4), 333–346.
- Oden, J. e Prudhomme, S. (2001), ‘Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method’, *Computers & Mathematics with Applications* **41**(5-6), 735–756.
- Oden, J. T. e Duarte, C. A. (1996), Solution of singular problems using h-p clouds, in ‘INMAFELAP 96’.
- Oden, J. T. e Reddy, J. (1976), *And Introduction to the Mathematical Theory of Finite Elements*, John Willey & Sons.
- O’Hara, P., Duarte, C. e Eason, T. (2009), ‘Generalized finite element analysis of three-dimensional heat transfer problems exhibiting sharp thermal gradients’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **198**(21-26), 1857–1871.
- O’Hara, P., Duarte, C. e Eason, T. (2016), ‘A two-scale generalized finite element method for interaction and coalescence of multiple crack surfaces’, *Engineering Fracture Mechanics* **163**, 274–302.
- O’Hara, P., Hollkamp, J., Duarte, C. A. e Eason, T. (2015), ‘A two-scale generalized finite element method for fatigue crack propagation simulations utilizing a fixed, coarse hexahedral mesh’, *Computational Mechanics* **57**(1), 55–74.
- Oliveira, T. S. (2018), Análise de problemas bidimensionais pelo método dos elementos finitos generalizados estável (mefge), Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Panetier, J., Ladevèze, P. e Chamoin, L. (2009), ‘Strict and effective bounds in goal-oriented error estimation applied to fracture mechanics problems solved with XFEM’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **81**(6), 671–700.
- Panetier, J., Ladevèze, P. e Louf, F. (2009), ‘Strict bounds for computed stress intensity factors’, *Computers & Structures* **87**(15-16), 1015–1021.

- Pannachet, T., Sluys, L. J. e Askes, H. (2008), ‘Error estimation and adaptivity for discontinuous failure’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **78**(5), 528–563.
- Paris, P. e Erdogan, F. (1963), ‘A critical analysis of crack propagation laws’, *Journal of Basic Engineering* **85**(4), 528–533.
- Pereira, J. P. A., Kim, D.-J. e Duarte, C. A. (2011), ‘A two-scale approach for the analysis of propagating three-dimensional fractures’, *Computational Mechanics* **49**(1), 99–121.
- Pereira, L. C. B. (2019), Implementações para o pelo método global local no sistema insane, Master’s thesis, Universidade Federal de Minas Gerais.
- Prange, C., Loehnert, S. e Wriggers, P. (2012), ‘Error estimation for crack simulations using the XFEM’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **91**(13), 1459–1474.
- Prudhomme, S. e Oden, J. (1999), ‘On goal-oriented error estimation for elliptic problems: application to the control of pointwise errors’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **176**(1-4), 313–331.
- Reddy, J. N. (1986), *Applied Functional Analysis and Variational Methods in Engineering*, McGraw-Hill Book Company.
- Ródenas, J., González-Estrada, O., Díez, P. e Fuenmayor, F. (2010), ‘Accurate recovery-based upper error bounds for the extended finite element framework’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **199**(37-40), 2607–2621.
- Ródenas, J. J., González-Estrada, O. A., Tarancón, J. E. e Fuenmayor, F. J. (2008), ‘A recovery-type error estimator for the extended finite element method based on singular + smooth stress field splitting’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **76**(4), 545–571.
- Ródenas, J. J., Tur, M., Fuenmayor, F. J. e Vercher, A. (2007), ‘Improvement of the superconvergent patch recovery technique by the use of constraint equations: the SPR-c technique’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **70**(6), 705–727.
- Rüter, M., Gerasimov, T. e Stein, E. (2012), ‘Goal-oriented explicit residual-type error estimates in XFEM’, *Computational Mechanics* **52**(2), 361–376.

- Rüter, M. e Stein, E. (2006), ‘Goal-oriented a posteriori error estimates in linear elastic fracture mechanics’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195**(4-6), 251–278.
- Rüter, M. e Stein, E. (2011), Goal-oriented residual error estimates for XFEM approximations in LEFM, *in* ‘Recent Developments and Innovative Applications in Computational Mechanics’, Springer Berlin Heidelberg, pp. 231–238.
- Sato, F. M. (2017), Numerical experiments with stable versions of the generalized finite element method, Master’s thesis, EESC - USP, São Carlos, SP, Brasil.
- Schweitzer, M. A. (2013), ‘Variational mass lumping in the partition of unity method’, *SIAM Journal on Scientific Computing* **35**(2), A1073–A1097.
- Strouboulis, T., Babuška, I. e Copps, K. (2000), ‘The design and analysis of the generalized finite element method’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **181**(1-3), 43–69.
- Strouboulis, T., Zhang, L., Wang, D. e Babuška, I. (2006), ‘A posteriori error estimation for generalized finite element methods’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195**(9-12), 852–879.
- Szabo, B. e Babuska, I. (1991), *Finite Element Analysis*, John Wiley & Sons, Inc.
- Tada, H., Paris, P. C. e Irwin, G. R. (2000), *The Stress Analysis of Cracks Handbook*, ASME Press.
- Waisman, H. e Belytschko, T. (2008), ‘Parametric enrichment adaptivity by the extended finite element method’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **73**(12), 1671–1692.
- Yau, J. F., Wang, S. S. e Corten, H. T. (1980), ‘A Mixed-Mode Crack Analysis of Isotropic Solids Using Conservation Laws of Elasticity’, *Journal of Applied Mechanics* **16**, 247–259.
- Zhang, Q., Banerjee, U. e Babuška, I. (2014), ‘Higher order stable generalized finite element method’, *Numerische Mathematik* **128**(1), 1–29.

- Zienkiewicz, O., Boroomand, B. e Zhu, J. (1999), ‘Recovery procedures in error estimation and adaptivity part i: Adaptivity in linear problems’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **176**(1-4), 111–125.
- Zienkiewicz, O. C. (2006), ‘The background of error estimation and adaptivity in finite element computations’, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **195**(4-6), 207–213.
- Zienkiewicz, O. C. e Zhu, J. Z. (1987), ‘A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **24**(2), 337–357.
- Zienkiewicz, O. C. e Zhu, J. Z. (1992a), ‘The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 1: The recovery technique’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **33**(7), 1331–1364.
- Zienkiewicz, O. C. e Zhu, J. Z. (1992b), ‘The superconvergent patch recovery and a posteriori error estimates. part 2: Error estimates and adaptivity’, *International Journal for Numerical Methods in Engineering* **33**(7), 1365–1382.