

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**Instituto de Ciências**  
**Exatas Especialização**  
**em Estatística**

STEFANE RODRIGUES DE FIGUEIREDO

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA CARTA  $\bar{X}$  COM USO DA REGRA  
SUPLEMENTAR 3-3 DE KLEIN UTILIZANDO CADEIA DE MARKOV**

BELO HORIZONTE  
2023

STEFANE RODRIGUES DE FIGUEIREDO

**AVALIAÇÃO DO DESEMPENHO DA CARTA  $\bar{X}$  COM USO DA REGRA  
SUPLEMENTAR 3-3 DE KLEIN UTILIZANDO CADEIA DE MARKOV**

Monografia apresentada ao Programa de Pós- Graduação em Estatística do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Estatística.

Orientador: Prof. Dr. Roberto da Costa  
Quinino

BELO HORIZONTE  
2023

2023, Stefane Rodrigues de  
Figueiredo. Todos os direitos  
reservados.

Figueiredo, Stefane Rodrigues de.

F475a Avaliação do desempenho da carta **X** com uso da regra  
suplementar 3-3 de Klein utilizando cadeia de Markov [recurso  
eletrônico] / Stefane Rodrigues de Figueiredo—2023.  
1 recurso online (31 f. il, color.): pdf.

Orientadora: Roberto da Costa Quinino.

Monografia (especialização) - Universidade Federal de Minas  
Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Estatística  
Referências: 26-27.

1. Estatística. 2. Carta de controle X. 3. Controle estatístico de  
processo. 4. Markov, Processos de. I. Quinino, Roberto da  
Costa. II. Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de  
Ciências Exatas, Departamento de Estatística. III. Título.

CDU 519.2 (043)

Ficha catalográfica elaborada pela bibliotecária Belkiz Inez Rezende Costa  
CRB 6/1510 Universidade Federal de Minas Gerais – ICEX



**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
3409-5924 Departamento de Estatística  
**P Programa de Pós-Graduação /**  
**Especialização** Av. Pres. Antônio Carlos,  
6627 - Pampulha 31270-901 – Belo  
Horizonte – MG

**E-mail:** pgest@ufmg.br  
**Tel:** 3409-5923 – **FAX:**

## **ATA DO 281ª. TRABALHO DE FIM DE CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA DE STEFANE RODRIGUES DE FIGUEIREDO.**

Aos quatorze dias do mês de março de 2023, às 17:00 horas, com utilização de recursos de videoconferência a distância, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pela Comissão do Curso de Especialização em Estatística, para julgar a apresentação do trabalho de fim de curso da aluna **Stefane Rodrigues de Figueiredo**, intitulado: “*Avaliação de desempenho da carta  $X^2$  com uso da regra suplementar 3-3 de Klein*”, como requisito para obtenção do Grau de Especialista em Estatística. Abrindo a sessão, o Presidente da Comissão, Professor Roberto da Costa Quinino

– Orientador, após dar conhecimento aos presentes do teor das normas regulamentares, passou a palavra à candidata para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da candidata. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença da candidata e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a candidata foi considerada Aprovada condicional às modificações sugeridas pela banca examinadora no prazo de 30 dias a partir da data de hoje por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à candidata pelo Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 14 de março de 2023.

Roberto da Costa  
Quinino:80871291  
720

Assinado de forma digital por  
Roberto da Costa  
Quinino:80871291720  
Dados: 2023.03.14 19:06:39  
-03'00'

**Prof. Roberto da Costa Quinino (Orientador)**  
**Departamento de Estatística / UFMG**

DANILO GILBERTO DE  
OLIVEIRA  
VALADARES:06707566601

Assinado digitalmente por DANILO GILBERTO DE OLIVEIRA  
VALADARES:06707566601  
ND: C=BR, O=ICP-Brasil, OU=videoconferencia, OU=33683111000107, OU=Secretaria da Receita Federal do Brasil - RFB, OU=ARSEPRO, OU=RFB e-CPF/AS, CN=DANILO GILBERTO DE OLIVEIRA VALADARES:06707566601  
Razão: Eu sou o autor deste documento  
Localização:  
Data: 2023.03.15 09:34:02-03'00"  
Foxit PDF Reader Versão: 12.1.1

**Daniilo Gilberto de Oliveira Valadares**  
**Departamento de Estatística / UFMG**



**Universidade Federal de Minas Gerais**  
**Instituto de Ciências Exatas**  
3409-5924 Departamento de Estatística  
**P Programa de Pós-Graduação /**  
**Especialização** Av. Pres. Antônio Carlos,  
6627 - Pampulha 31270-901 – Belo  
Horizonte – MG

**E-mail: pgest@ufmg.br**  
Tel: 3409-5923 – FAX:

## **DECLARAÇÃO DE CUMPRIMENTO DE REQUISITOS PARA CONCLUSÃO DO CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM ESTATÍSTICA.**

Declaro para os devidos fins que Stefane Rodrigues de Figueiredo, número de registro 2019707513, cumpriu todos os requisitos necessários para conclusão do curso de Especialização em Estatística e que me entregou a versão final corrigida. O trabalho foi apresentado no dia 14 de dezembro de 2022 com o título “*Avaliação de desempenho da carta  $\bar{X}$  com uso da regra suplementar 3-3 de Klein*”.

Belo Horizonte, 29 de março de 2023

Roberto da Costa  
Quinino:8087129  
1720

Assinado de forma digital  
por Roberto da Costa  
Quinino:80871291720  
Dados: 2023.03.31  
13:42:34 -03'00'

**Prof. Roberto da Costa  
Quinino Coordenador do  
curso de Especialização em  
Estatística Departamento de  
Estatística / UFMG**

## RESUMO

O gráfico de controle é o mais comumente utilizado nas indústrias, em processos onde a variável a ser controlada é contínua a carta de controle  $\bar{X}$  monitora a centralidade da variável. É de interesse detectar os deslocamentos em relação à média, uma alternativa ao método tradicional de detecção é a utilização das regras suplementares de Klein com uso da Cadeias de Markov que sugerem um bom desempenho para deslocamentos pequenos na média. Em um trabalho anterior utilizou-se a regra 2-2 para análise do número médio de corridas para detectar o descontrolo no processo, com essas análises e conclusões o presente trabalho amplia o horizonte dessas análises com a regra 3-3.

**Palavras-chave:** Carta de Controle  $\bar{X}$ , Controle Estatístico de Processos, Average Run Lengths, Cadeias de Markov, Regra Suplementar de Klein.

## ABSTRACT

The control chart is the most commonly used in industries, in processes where the variable to be controlled is continuous, the control chart  $\bar{X}$  monitors the centrality of the variable. It is of interest to detect shifts in relation to the mean, an alternative to the traditional method of detection is the use of Klein's supplementary rules with the use of Markov Chains, which suggest a good performance for small shifts in the mean. In a previous work, the 2-2 rule was used to analyze the average number of runs to detect lack of control in the process. With these analyzes and conclusions, the present work expands the horizon of these analyzes with the 3-3 rule.

**Keywords:**  $\bar{X}$  Control Chart, Statistical Process Control, Average Run Lengths, Markov Chains, Klein's Supplementary Rule.

## LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Representação esquemática de processos em controle e fora de controle. (Carneiro, 2003) .....	12
Figura 2 - LCI e LCS para $k=3$ , $\mu_0=0$ e $\sigma=1$ . .....	15
Figura 3 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e as regras 2-2 e 3-3 ( $n=3$ ). .....	23
Figura 4 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e as regras 2-2 e 3-3 ( $n=4$ ). .....	23
Figura 5 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e as regras 2-2 e 3-3 ( $n=5$ ). .....	24

## LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - ARLs obtidos para $X$ clássica e $X$ com o uso das regras suplementares de Klein (2-2 e 3-3). .....	22
Tabela 2 - Resultados dos limites de controle obtidos para $X$ e Klein (2-2 e 3-3).....	22

## SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO .....	11
1.1 Construção do Gráfico de Controle $X$ .....	12
1.2 ARL para o Gráfico de Controle $X$ .....	14
2. REGRA SUPLEMENTAR POR CADEIA DE MARKOV .....	16
3.1 Cadeia de Markov .....	16
3.2 Modelando regra de Klein 3-3 por Cadeia de Markov .....	18
4. RESULTADOS .....	21
5. CONCLUSÃO .....	25
6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS .....	26
ANEXO 1 – Programa para encontrar os limites de controle da carta de controle $X$ com regra suplementar 3-3 de Klein .....	28
ANEXO 2 – Programa para encontrar ARL utilizando a regra 3-3 .....	30
ANEXO 3 – Programa para encontrar ARL utilizando a abordagem clássica .....	31

## 1. INTRODUÇÃO

A base para o controle estatístico de processos, como o próprio nome diz, está na Estatística. A Estatística surgiu para auxiliar indústrias na melhoria da qualidade de seus produtos (PIRES, 2000). O princípio de funcionamento do CEP se dá através de cartas de controle, que de acordo com Pires (2000) são ferramentas que previnem e bloqueiam reincidências das chamadas causas especiais, as quais tratam-se de problemas detectados na identificação do comportamento do processo ao longo do tempo.

As cartas de controle são as principais ferramentas utilizadas pelo CEP. Elas nada mais são que gráficos, os quais são plotados através da coleta de dados do objeto de estudos em um período de tempo tendo como objetivo, segundo Marcondes Filho e Fogliato (2001), avaliar o comportamento dinâmico da variável a partir das medições efetuadas. Essas cartas são ferramentas estatísticas que fornecem informações sobre o processo estudado. As informações são dadas através de grupos de amostras que são coletadas periodicamente. Os grupos são a imagem do que o processo está produzindo em um determinado momento (ROSÁRIO, 2004).

Segundo KUME (1993) e VIEIRA (1999), estes gráficos apresentam uma linha central (LM – Linha Média), um par de limites de controle, um dos quais se localiza acima (LSC – Limite Superior de Controle) e outro abaixo (LIC – Limite Inferior de Controle) da linha central. Para representar a condição do processo, valores característicos são apontados no gráfico. Caso todos esses valores apontados estiverem dentro dos limites de controle, sem qualquer tendência particular, o processo é julgado sob controle. Entretanto, se tais pontos incidirem fora dos limites de controle ou apresentarem uma disposição anormal, o processo é considerado fora de controle. A Figura 1 exemplifica em um único gráfico, o mesmo processo quando sob controle e quando fora de controle.

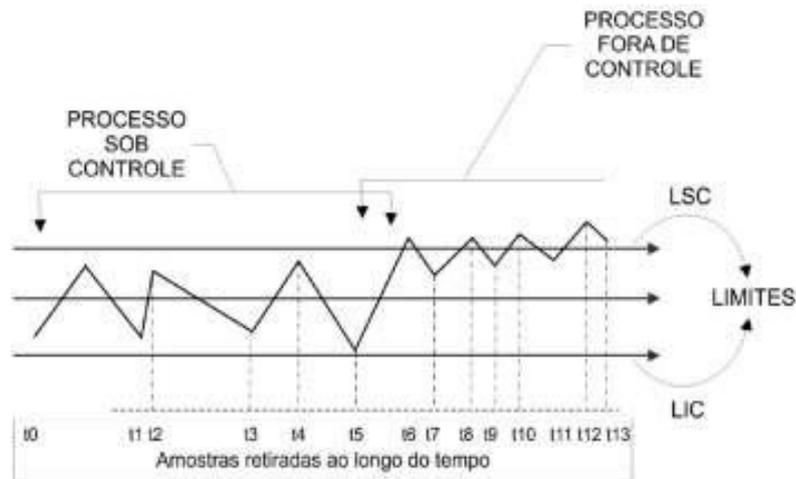


Figura 1 - Representação esquemática de processos em controle e fora de controle. (Carneiro, 2003)

### 1.1 Construção do Gráfico de Controle $\bar{X}$

O gráfico de controle conhecido como gráfico de  $\bar{X}$  (x barra) e também como gráfico da média, monitora processos cuja característica de qualidade de interesse  $X$  é uma grandeza mensurável, como por exemplo o diâmetro de um eixo, o volume de leite de um saquinho, o teor de carbono de uma liga metálica, etc. COSTA (2011). Para construção do gráfico de controle  $\bar{X}$  usaremos uma adaptação do texto de Costa, Epprecht e Carpinetti (2011, p.44-45).

A Linha Média (LM) para o gráfico de  $\bar{X}$  é localizada na média (valor esperado) de  $\bar{X}$ , e os limites de controle para o gráfico são usualmente estabelecidos a três desvios-padrão dessa média, isto é:

$$LSC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} + 3\sigma_{\bar{X}} \quad (1.1)$$

$$LM_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} \quad (1.2)$$

$$LIC_{\bar{X}} = \mu_{\bar{X}} - 3\sigma_{\bar{X}} \quad (1.3)$$

Os limites de controle com três desvio-padrão ( $k=3$ ) de afastamento em relação a linha média (“limite de 3 sigma”) foram propostos por Shewhart, que se baseou no seguinte lema: “se o processo estiver em controle, evite ajustes desnecessários, que só tendem a aumentar a sua variabilidade”. Com a abertura de três desvios-padrão, enquanto o processo estiver em

controle, raramente se cometerá o equívoco de intervir em um processo, em controle. Além disso, geram custos: custos com a interrupção do processo, custos com as investigações para descobrir problemas inexistentes, etc. COSTA (2011).

Supondo independência entre os valores individuais dos elementos da amostra, o valor esperado da estatística  $\bar{X}$  coincide com o valor esperado,  $\mu_X$ , da variável aleatória  $X$ :

$$\mu_{\bar{X}} = \mu_X \quad (1.4)$$

A relação entre a variância das observações individuais,  $\sigma_X^2$ , e dos valores de  $\bar{X}$ ,  $\sigma_{\bar{X}}^2$ , é a seguinte:  $\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma_X^2}{n}$ . Portanto, como o desvio-padrão é a raiz quadrada da variância,

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma_X}{\sqrt{n}} \quad (1.5)$$

Para fins de determinação dos limites de controle para o gráfico, interessam os valores de  $\mu$  e de  $\sigma$  quando o processo está em controle, isento de causas especiais:  $\mu_0$  e  $\sigma_0$ . Na prática esses valores não são conhecidos com precisão absoluta; em seu lugar utilizamos as estimativas disponíveis. Denotando essas estimativas por  $\hat{\mu}_0$  e  $\hat{\sigma}_0$ , obtêm-se com as expressões 1.1 a 1.3, os seguintes limites de controle e linha média para o gráfico de  $\bar{X}$  :

$$LSC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 + 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \quad (1.6)$$

$$LM_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 \quad (1.7)$$

$$LIC_{\bar{X}} = \hat{\mu}_0 - 3 \frac{\hat{\sigma}_0}{\sqrt{n}} \quad (1.8)$$

O intervalo de  $\frac{\pm 3\sigma_0}{\sqrt{n}}$  em torno de  $\hat{\mu}_0$  engloba a maioria dos valores de  $\bar{X}$  (99,73% deles) caso a dispersão do processo permaneça estável e sua média permaneça ajustada em  $\hat{\mu}_0$ , ou seja, caso  $\sigma = \sigma_0$  e  $\mu = \mu_0$ .

Portanto, enquanto o processo permanecer isento de causas especiais, a média amostral  $\bar{X}$  de cada subgrupo terá pouca chance de não “cair” no intervalo  $\mu_{\bar{X}} \pm 3\sigma_{\bar{X}}$ ; conseqüentemente, se ocorrer um valor de  $\bar{X}$  fora desse intervalo, é mais verossímil que a média do processo,  $\mu$ , tenha se alterado (não sendo mais igual a  $\mu_0$ ), em conseqüência de alguma causa especial.

## 1.2 ARL para o Gráfico de Controle $\bar{X}$

ARL representa o número médio de amostras a serem retiradas até se obter um sinal, o qual pode representar um alarme falso ou que o processo desajustou. Durante a utilização do gráfico de controle deseja-se que, em média, o gráfico demore a apresentar alarmes falsos e, em média, detecte rapidamente que o processo está fora de controle estatístico, logo deseja-se que possua um ARL alto para quando o processo está sob controle estatístico e um ARL pequeno quando há alguma causa identificável atuando no processo.

**ARL<sub>0</sub>** é o número médio de amostras até que se observa equivocadamente um ponto fora de controle (a média do processo não mudou, mas a carta de controle sinaliza uma mudança). O **ARL<sub>1</sub>** é o número médio de amostras necessário para se observar no gráfico de controle uma efetiva mudança na média do processo de  $\mu_0$  para  $\mu_1$ . Por exemplo, para  $n=1$ ,  $\mu_0=0$ ,  $\sigma=1$  e amostras independentes, os pontos (a média amostral) para um processo sob controle cairão na região superior a 3 ou inferior a -3 da Figura 3 com probabilidade 0.0027.

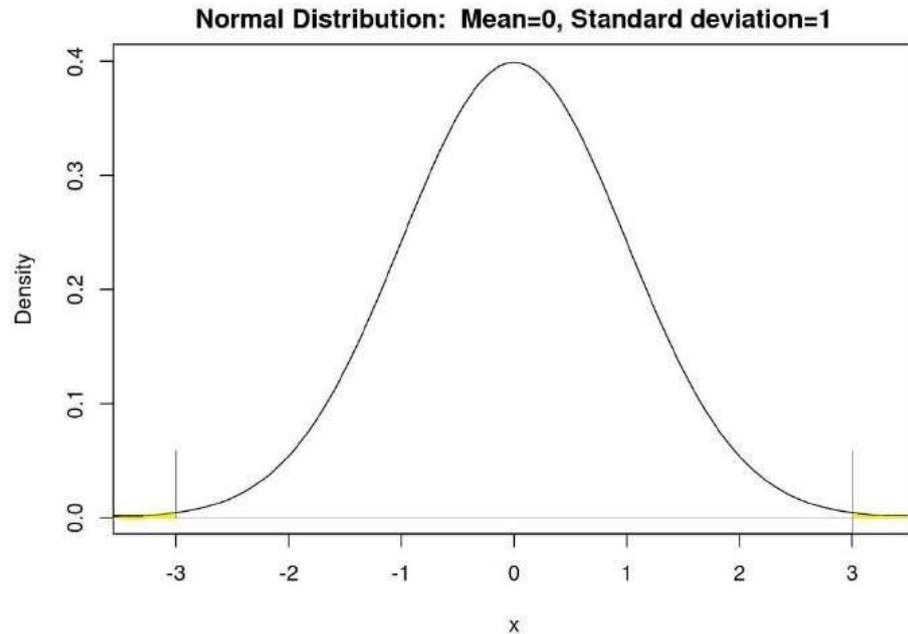


Figura 2 - LCI e LCS para  $k=3$ ,  $\mu_0=0$  e  $\sigma=1$ .

De maneira geral as equações para os cálculos dos ARL's ( $ARL_0$  e  $ARL_1$ ) são definidas como:

$$ARL = [P(\bar{X} < LIC) + P(\bar{X} > LSC)]^{-1} \quad (1.9)$$

Quando desejarmos calcular  $ARL_0$  então, usa-se a média do processo sob controle, isto é,  $\mu_0$ . Se o objetivo é calcular  $ARL_1$  então, usa-se a média do processo fora de controle, isto é  $\mu_1$ . As probabilidades são calculadas considerando que a distribuição da média  $\bar{X}$  é normal com média  $\mu$  e desvio padrão dado por  $\sigma/\sqrt{n}$ . Usualmente o desempenho de um gráfico de controle é avaliado fixando o valor do  $ARL_0$  e verificando a magnitude de  $ARL_1$  que deve ser o menor possível. Em geral é difícil termos um gráfico de controle que apresenta o melhor desempenho para todo o espaço paramétrico de  $\mu_1$ .

## 2. REGRA SUPLEMENTAR POR CADEIA DE MARKOV

Para aumentar a sensibilidade à mudança da média do processo, alguns autores sugerem utilizar regras suplementares que consideram o comportamento de mais de uma observação. A regra suplementar mais comum é a do tipo  $r$ -de- $s$  ( $r$  pontos dentro da região de advertência em uma sequência de  $s$  pontos). Com base na cadeia de Markov, KLEIN (2000) e também outros autores detalham o cálculo de  $ARL$  para  $r = 2, 3$  e  $s = 2, 3$ .

No presente trabalho a regra suplementar a ser considerada é do tipo  $r = 3$  de  $s = 3$ , ou seja, será considerado uma situação de descontrole no processo a ocorrência de três pontos seguidos acima do  $LSC$  ou 3 pontos seguidos abaixo de  $LIC$ . O objetivo é comparar, com uso das cadeias de Markov, a eficiência em termos de  $ARL$  de uma carta de controle tradicional  $\bar{X}$  descrita aqui como uma abordagem clássica com uma carta  $\bar{X}$  de controle que utiliza a regra 3-3. Utilizamos a regra suplementar 3-3, em paralelo com os resultados obtidos em análises anteriores para a regra (2-2) por Bernardo (2021). Em todos os casos os tamanhos dos subgrupos ( $n$ ) variaram de três a cinco ampliando assim o trabalho de Klein (2000) que utilizou apenas  $n=1$ . Nessa monografia a abordagem é analítica, usando cadeias de Markov, e apresentando resultados exatos.

## 3. ABORDAGEM DE KLEIN POR CADEIA DE MARKOV

### 3.1 Cadeia de Markov

Nesta seção iremos realizar uma breve introdução dos conceitos de cadeia de Markov necessários para desenvolvermos a monografia. O texto é uma adaptação de Hillier e Liberman (2006, p.715-716) e Bernardo (2021).

Um processo **estocástico**  $\{X_t\}$  é dito ter a *propriedade markoviana* se  $P\{X_{t+1} = j \mid X_0 = k_0, X_1 = k_1, \dots, X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = P\{X_{t+1} = j \mid X_t = i\}$ , para  $t = 0, 1, \dots$  e toda sequência  $i, j, k_0, k_1, \dots, k_{t-1}$ . Ou seja, a probabilidade condicional de qualquer “evento” futuro, dado quaisquer “eventos” passados e o estado presente  $X_t = i$ , é independente dos eventos passados e depende

apenas do estado atual. Um processo estocástico  $\{X_t\}$  ( $t=0, 1, \dots$ ) é uma cadeia de Markov se possuir a propriedade markoviana.

As probabilidades condicionais  $P\{X_{t+1} = j / X_t = i\}$  para uma cadeia de Markov são chamadas probabilidades de transição (uma etapa). Se, para cada  $i$  e  $j$ ,  $P\{X_{t+1} = j / X_t = i\} = P\{X_1 = j / X_0 = i\}$ , para todo  $t = 1, 2, \dots$ , então as probabilidades de transição (uma etapa) são ditas estacionárias. Portanto, ter probabilidades de transição estacionárias implica que as probabilidades não mudam ao longo do tempo. Para simplificar a notação com probabilidades de transição estacionárias, façamos que  $p_{ij} = P\{X_{t+1} = j | X_t = i\}$  e a probabilidade de transição em  $n$  etapas  $p_{ij}^{(n)}$  é simplesmente a probabilidade condicional de que o sistema estará no estado  $j$  após exatamente  $n$ -etapas (unidades de tempo), dado que ele inicia no estado  $i$  a qualquer instante  $t$ . Uma maneira conveniente de mostrar todas as probabilidades de transição de uma etapa é o formato de matriz a seguir:

$$\mathbf{P} = \begin{array}{c} \text{Estado} \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ M \end{array} \begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & M \\ \left[ \begin{array}{cccc} p_{00} & p_{01} & \dots & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & \dots & p_{1M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{M0} & p_{M1} & \dots & p_{MM} \end{array} \right] \end{array}$$

Observe que a probabilidade de transição em determinada linha e coluna é para a transição do estado de linha para o estado de coluna. Ao calcularmos as probabilidades de transição em  $n$  etapas,  $\mathbf{P}^n$ , se  $n$  for suficientemente grande, todas as linhas da matriz têm valores idênticos, de modo que a probabilidade de o sistema se encontrar em cada estado  $j$  não depende mais do estado inicial do sistema. Esta convergência pode ser avaliada facilmente computacionalmente uma vez que em algumas situações a convergência pode não existir (maiores detalhes são entrados Hillier&Lieberman (2006), por exemplo). Nas situações discutidas nessa monografia o  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)}$  existe e é independente de  $i$ , isto é,  $\lim_{n \rightarrow \infty} p_{ij}^{(n)} = \pi_j > 0$ , em que os  $\pi_j$  é o resultado de um sistema linear dado por  $\pi_j = \sum_{i=0}^M \pi_i p_{ij}$ , para  $j = 0, 1, \dots, M$ , com a restrição que  $\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$ .

Os  $\pi_j$  são chamados probabilidades de estado estacionário de uma cadeia de Markov. O termo probabilidade de estado estacionário significa que a probabilidade de encontrar o processo em certo estado, digamos  $j$ , após grande número de transições, tende a ser o valor  $\pi_j$ ,

independente da distribuição probabilística do estado inicial. Observe que as equações de estado estacionário são formadas por  $M + 2$  equações com  $M + 1$  incógnitas desconhecidas. Pelo fato de ser uma solução única, pelo menos uma equação tem de ser redundante e pode, portanto, ser eliminada e substituída por  $\sum_{j=0}^M \pi_j = 1$ .

### 3.2 Modelando regra de Klein 3-3 por Cadeia de Markov

Considere uma cadeia de Markov em que o processo de inspeção e decisão seja modelado com uso de sete estados caracterizados por  $Z = [(S; 3), (S; 2), (S; 1), (C), (I; 1), (I; 2), (I; 3)]$ . A variável C indica que a média amostral caiu entre os limites de controle (LSC e LIC), S que a média amostral foi superior ao LSC e I indica que a média amostral foi inferior a LIC. Os valores numéricos que acompanham S e I indicam a quantidade de observações sucessivas respectivamente acima ou abaixo dos limites LSC e LIC.

Com os estados contidos em Z podemos elaborar a cadeia de Markov descrita por  $\mathbf{P}_1$ . Por exemplo,  $P[(S; 1) | (C)] = p_s$  representa a probabilidade condicional de que a próxima média amostral está em S dado que a anterior média amostral estava na região C.

$$\mathbf{P}_1 = \begin{array}{c} (S; 3) \\ (S; 2) \\ (S; 1) \\ (C) \\ (I; 1) \\ (I; 2) \\ (I; 3) \end{array} \begin{array}{c} (S; 3) \\ (S; 2) \\ (S; 1) \\ (C) \\ (I; 1) \\ (I; 2) \\ (I; 3) \end{array} \begin{bmatrix} 0 & 0 & p_s & p_c & p_i & 0 & 0 \\ p_s & 0 & 0 & p_c & p_i & 0 & 0 \\ 0 & p_s & 0 & p_c & p_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_s & p_c & p_i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p_s & p_c & 0 & p_i & 0 \\ 0 & 0 & p_s & p_c & 0 & 0 & p_i \\ 0 & 0 & p_s & p_c & p_i & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Em que:

$$p_s = 1 - P(\bar{x} < LSC | \bar{x} \sim N(\mu; 1/\sqrt{n})) \quad (3.1)$$

$$p_i = P(\bar{x} < LIC | \bar{x} \sim N(\mu; 1/\sqrt{n})); \quad (3.2)$$

$$p_c = 1 - p_s - p_i \quad (3.3)$$

Sem perda de generalidade estamos adotando que os dados estão padronizados. O valor de  $k_1$  precisa ser determinado de tal forma que  $ARL_0$  seja o usual 370,4. Explicaremos nessa seção o procedimento para o cálculo de  $LSC$  e  $LIC$ .

Considere que a distribuição estacionária seja expressa por  $\boldsymbol{\pi} = [\pi_1, \pi_2, \pi_3, \pi_4, \pi_5, \pi_6, \pi_7]$  e está associada respectivamente aos estados de  $Z$ . O vetor  $\boldsymbol{\pi}$  é a solução do Sistema linear expresso por:

$$\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}_1 \quad (3.4)$$

Sujeito a restrição de que  $\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 1$ . Uma das equações do sistema  $\boldsymbol{\pi} = \boldsymbol{\pi} \mathbf{P}_1$  é redundante e pode ser eliminada.

Assim, podemos expressar o valor de  $ARL_0$  pela equação 3.5. Observe que  $ARL_0$  depende dos limites de controle LIC e LSC (que são simétricos em relação a  $\mu_0$ ). Neste sentido se fixarmos  $ARL_0$  (usualmente em 370,4) podemos obter os LIC e LSC que garanta um  $ARL_0$  igual ao valor fixado. Observe que estados  $\pi_1$  e  $\pi_7$  são as probabilidades associadas aos estados que indica a situação fora de controle.

$$ARL_0 = \frac{1}{\pi_1 + \pi_7}, \text{ adotando } \mu = \mu_0 \quad (3.5)$$

Uma vez fixado os limites de controle LIC e LSC então usamos (1.6) para o cálculo do  $ARL_1$ .

$$ARL_1 = \frac{1}{\pi_1 + \pi_7}, \text{ adotando } \mu = \mu_1 \quad (3.6)$$

#### 4. RESULTADOS

O desempenho em termos de  $ARL$  da carta de controle  $\bar{X}$  clássica e da carta de controle  $\bar{X}$  com o uso da regra de Klein (2-2) e da regra (3-3) foram calculadas adotando  $\mu_0 = 0$  e  $\mu_1$  variando de 0 a 3 com um incremento de 0,2. Os resultados usando a regra de Klein (2-2) foram obtidos em Bernardo (2021). Utilizamos respectivamente a equação (1.9) e a abordagem por meio da cadeia de Markov, equações (3.5) e (3.6). Com a utilização do software R e comandos do Matlab obteve-se os valores dos  $ARL$ 's na matriz de Markov por meio da resolução do Sistema Linear e na aplicação da fórmula para o método tradicional. Os resultados são apresentados na Tabela 1.

A Tabela 2 apresenta os limites de controle usados para a carta de controle  $\bar{X}$  clássica e a carta de controle  $\bar{X}$  com o uso das regras de Klein. Todos os cálculos apresentados nesta seção foram realizados com usos dos programas desenvolvidos no software R e apresentados no Anexo 1 e 2 ( $ARL$  e limites de controle para carta de controle  $\bar{X}$  com o uso da regra de Klein 3-3), Anexo 3 ( $ARL$  e limites de controle para carta de controle  $\bar{X}$ ).

Todos os cálculos oriundos da regra suplementar de Klein (2-2) assim como toda a lógica teórica que se assemelha para o desenvolvimento da regra (3-3) foram obtidos através de Bernardo (2021).

Tabela 1 - ARLs obtidos para  $\bar{X}$  clássica e  $\bar{X}$  com o uso das regras suplementares de Klein (2-2 e 3-3).

Média	n= 3			n= 4			n= 5		
	$\bar{X}$	2-2	3-3	$\bar{X}$	2-2	3-3	$\bar{X}$	2-2	3-3
0,0	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40	370,40
0,2	227,72	178,80	157,02	200,08	150,25	129,54	177,73	128,77	109,53
0,4	94,04	59,47	48,80	71,55	43,63	35,76	56,59	33,75	27,79
0,6	40,03	23,44	19,61	27,82	16,28	14,00	20,56	12,21	10,84
0,8	18,79	11,24	10,08	12,38	7,79	7,41	8,86	5,94	5,96
1,0	9,76	6,42	6,33	6,30	4,61	4,92	4,50	3,67	4,19
1,2	5,61	4,25	4,64	3,65	3,23	3,85	2,66	2,73	3,47
1,4	3,54	3,18	3,81	2,38	2,58	3,36	1,81	2,30	3,17
1,6	2,44	2,61	3,39	1,73	2,26	3,14	1,39	2,11	3,05
1,8	1,83	2,31	3,17	1,38	2,11	3,05	1,18	2,04	3,01
2,0	1,47	2,15	3,07	1,19	2,04	3,02	1,08	2,01	3,00
2,2	1,26	2,07	3,03	1,09	2,01	3,00	1,03	2,00	3,00
2,4	1,14	2,03	3,01	1,04	2,00	3,00	1,01	2,00	3,00
2,6	1,07	2,01	3,00	1,01	2,00	3,00	1,00	2,00	3,00
2,8	1,03	2,00	3,00	1,00	2,00	3,00	1,00	2,00	3,00
3,0	1,01	2,00	3,00	1,00	2,00	3,00	1,00	2,00	3,00

Tabela 2 - Resultados dos limites de controle obtidos para  $\bar{X}$  e Klein (2-2 e 3-3).

	n= 3	n= 4	n= 5
<b>Limite Superior de Controle <math>\bar{X}</math></b>	1,73205	1,50	1,34164
<b>Limites Superior de Controle 2-2</b>	1,028503	0,890709	0,796675
<b>Limites Superior de Controle 3-3</b>	0,692863	0,600037	0,536689

É possível observar que para  $n=3$  a regra suplementar de Klein (3-3) se mostra mais eficiente até o deslocamento da média igual a 1. Aqui a regra suplementar de Klein (2-2) apresenta melhor desempenho do que a regra (3-3) para valores com média fora de controle superior a 1 no entanto piores do que o gráfico de controle tradicional  $\bar{X}$  como pode ser visto na Figura 3.

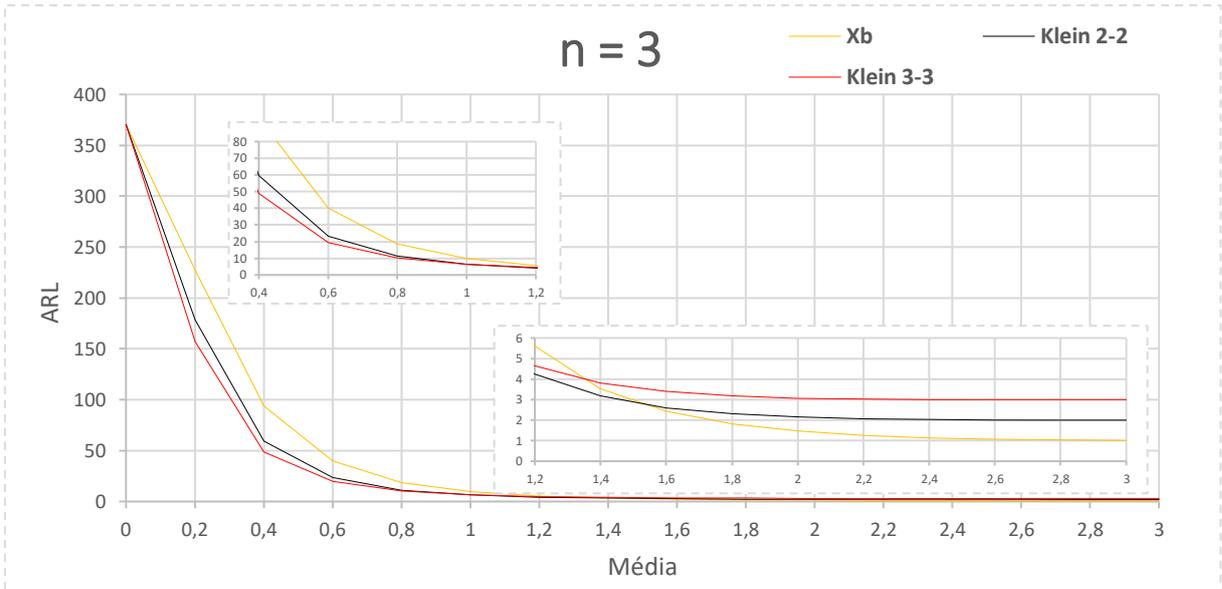


Figura 3 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e as regras 2-2 e 3-3 (n=3).

Já no gráfico da Figura 4 percebe-se que a regra (3-3), representada pela linha vermelha, se mostra eficiente até a média igual a 0,8 após essa média a regra (2-2) apresenta um ARL menor nas médias de 1,0 e 1,2 e daí em diante o método tradicional se mostra melhor que as regras de Klein.

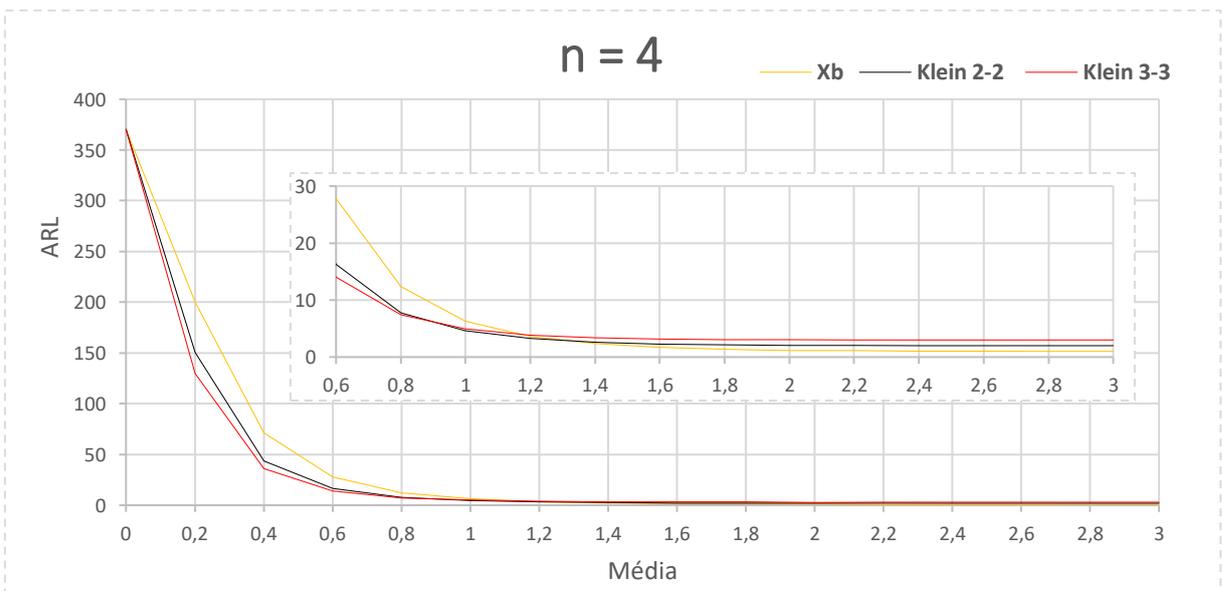


Figura 4 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e as regras 2-2 e 3-3 (n=4).

Para  $n=5$  o comportamento das médias no gráfico se assemelha com  $n=4$ , superando a abordagem clássica até a média fora de controle igual a 1, conforme observado na Figura 5. Pode-se observar também que com o aumento do tamanho amostral, existe uma melhora na abordagem clássica.

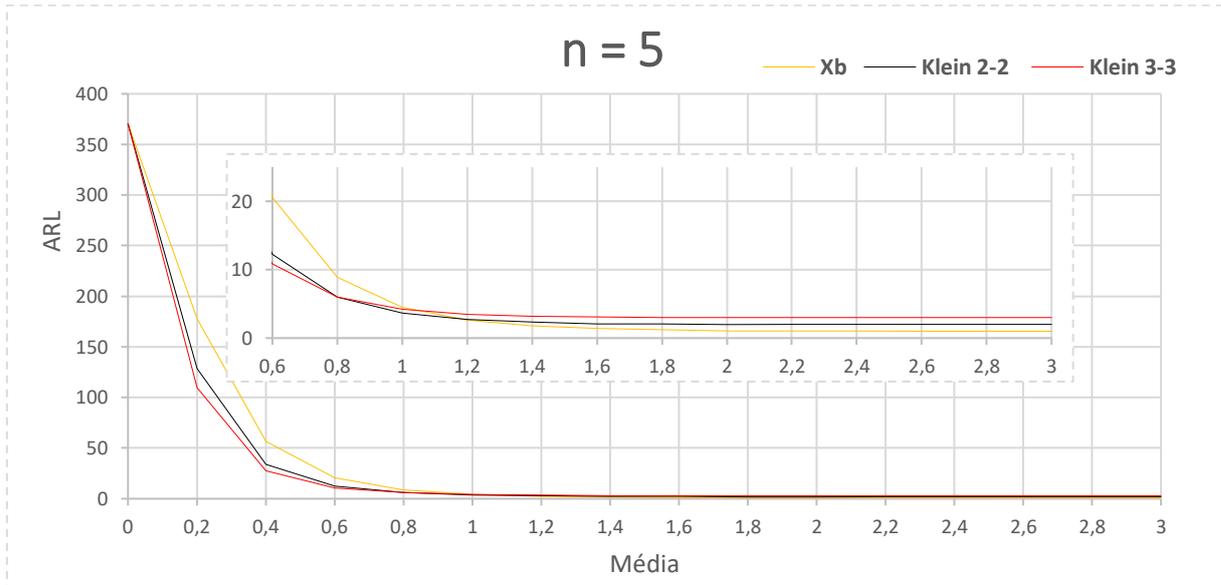


Figura 5 - Diferença entre o ARL obtido através da abordagem clássica e as regras 2-2 e 3-3 ( $n=5$ ).

## 5. CONCLUSÃO

A utilização da carta de controle  $\bar{X}$  com a regra 3-3 mostrou ser mais eficiente em termos de ARL do que a carta de controle  $\bar{X}$  clássica e a regra 2-2 em todos os casos onde a média  $\leq 0,8$ . Em deslocamentos grandes em relação à média sob controle, a carta de controle  $\bar{X}$  clássica é mais eficiente que a utilização das regras de Klein. No entanto, para deslocamentos pequenos na média do processo as regras suplementares apresentam melhores resultados, sendo a regra 3-3 a mais eficiente. Isso é importante, pois em processos atuais com alta qualidade os deslocamentos são em geral pequenos.

## 6. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

COSTA, A. F. B.; EPPRECHT, E. K.; CARPINETTI, L. C. R. **Controle Estatístico de Qualidade**. 2ª ed. São Paulo: ed Atlas S.A. 2011. p. 28-46.

CARNEIRO, N. W. **Controle estatístico de processo CEP** [CDROM]. Recife: UPE-POLI; 2003

FERNANDES, João Lucas. **Avaliação do desempenho da carta  $\bar{X}$  com uso da regra suplementar 2-2 de Klein por meio de simulação de Monte Carlo**. 2021. 14 f. Monografia (Especialização em Estatística) – UFMG, Belo Horizonte, 2021.

FILHO, D. M e Fogliatto, F.S. **Anais do XXI Encontro Nacional de Engenharia de Produção**, Salvador: 2001.

HILLIER, F. S.; LIEBERMAN, G. J. **Introdução à Pesquisa Operacional**. 8ª ed. São Paulo: McGraw Hill. 2006. p. 713-730.

JENSEN, W. A. *et. al.* Effects of Parameter Estimation on Control Chart Properties: A Literature Review, **Journal of Quality Technology**, v. 38, n. 4, p. 349-364. 2006.

KEHDY, Bernardo Okazaki. **Avaliação do desempenho da carta  $\bar{X}$  com uso da regra suplementar 2-2 de Klein por utilizando cadeia de Markov**. 2021. 14 f. Monografia (Especialização em Estatística) – UFMG, Belo Horizonte, 2021.

KLEIN, M. Two Alternatives to the Shewhart  $\bar{X}$  Control Chart. **Journal of Quality Technology**, v. 32, n. 4, p. 427-431. 2000.

KUME, H. **Métodos estatísticos para melhoria da qualidade**. São Paulo: Ed. Gente; 1993.

MACEDO, Mariano de Matos. Gestão da Produtividade nas Empresas. **Revista Organização Sistêmica**, v.1, n.1, pp. 111-119, 2012.

MONTGOMERY, D. C.; RUNGER, G. C. **Estatística Aplicada e Probabilidade para Engenheiros**. 7ª ed. Rio de Janeiro: LTC — Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda. 2021. p. 513-554.

PIRES, V. T. **Implantação do Controle Estatístico de Processo em uma empresa de manufatura de óleo de arroz** - Dissertação de Mestrado. Programa de Pós- Graduação em Engenharia de Produção, Porto Alegre: UFRGS, 2000.

QUESENBERY, C. P. (1993). “The Effect of Sample Size on Estimated Limits for  $\bar{X}$  and  $X$  Control Charts”. *Journal of Quality Technology*.

R CORE TEAM (2020). R: A language and environment for statistical computing. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria. Disponível em: <<https://www.R-project.org>>. Acesso em 20 de nov. 2021.

ROSÁRIO, Marcelo B. **Controle estatístico de processo**: Um estudo de caso em uma empresa da área de eletrodomésticos - Dissertação de Mestrado. Programa de Mestrado Profissionalizante em Engenharia. Porto Alegre: Universidade Federal do Rio Grande do Sul, 2004.

RYAN, T. P. (2011). **Statistical Methods for Quality Improvement**. John Wiley & Sons, Inc.

VIEIRA, S. **Estatística para a qualidade**: como avaliar com precisão a qualidade em produtos e serviços. Rio de Janeiro: Elsevier; 1999.

## ANEXO 1 – Programa para encontrar os limites de controle da carta de controle $\bar{X}$ com regra suplementar 3-3 de Klein

```

### Encontrar Limites de controle com regra suplementar 3-3 ###

library(pracma) #Permite comandos similares ao Matlab

tic()
clear()
n=5 #tamanho da amostra
u=0 #Média sob controle
desvio=1
#n=3; LSC= 0.692863
#n=4; LSC= 0.600037
#n=5; LSC= 0.536689

U<-seq(0.5,0.8,0.000001) #Limites a serem pesquisados par LSC.
U1<-size(U)
U2<-U1[2]
Resultados<-matrix(0,U2,3) #matriz para arquivar possíveis ARL0's.
# Looping
for (j in 1:U2){
LSC=U[j]
LIC=-LSC
pi<-pnorm(LIC,u,desvio/(n^0.5)) #Área abaixo do LIC
ps<-1-pnorm(LSC,u,desvio/(n^0.5)) #Área acima do LSC
pc=1-(pi+ps)

#Elaborando a cadeia de Markov
c1<-c(0,0,ps,pc,pi,0,0)
c2<-c(ps,0,0,pc,pi,0,0)
c3<-c(0,ps,0,pc,pi,0,0)
c4<-c(0,0,ps,pc,pi,0,0)
c5<-c(0,0,ps,pc,0,pi,0)
c6<-c(0,0,ps,pc,0,0,pi)
c7<-c(0,0,ps,pc,pi,0,0)

M<-rbind(c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7)

#Resolvendo o Sistema Linear no R
A = t(M) - eye(7)
A[7,] = ones(1,7)
B = zeros(7, 1)
B[7,1] = 1
MMA = solve(A)%*%B

PP<-1/(MMA[,1]+MMA[7]) #Valor de ARL0 para um determinado LSC
Resultados[j,1]=LSC
Resultados[j,2]=PP
}

```

```
Resultados[,3]=abs(Resultados[,2]-370.4) #Diferença ARL0 obtido e Alvo
Resultados=sortrows(Resultados,3)
cat('ARL0=',Resultados[1,2],"\\n") #Imprimindo no console ARL0 obtido
cat('LSC=',Resultados[1,1],"\\n") #Imprimindo no console LSC obtido
toc()
## elapsed time is 261.080000 seconds
#####
```

## ANEXO 2 – Programa para encontrar ARL utilizando a regra 3-3

```
### Cálculo ARL utilizando regra 3-3 ###
```

```
library(pracma)
library(expm) #Pacote para Elevar uma Matriz a determinado valor inteiro
clear()
```

```
#Cadeia de Markov
```

```
LSC=0.692863 #LSC calculado no programa do Anexo 1 para n=3
```

```
LIC=-LSC
```

```
n=3
```

```
desvio=1
```

```
Saida=c()
```

```
uA=seq(0,3,0.2)
```

```
for (i in uA){
```

```
u=i
```

```
pi<-pnorm(LIC,u,desvio/(n^0.5)) #Área abaixo do LIC
```

```
ps<-1-pnorm(LSC,u,desvio/(n^0.5)) #Área acima do LSC
```

```
pc=1-(pi+ps)
```

```
c1<-c(0,0,ps,pc,pi,0,0)
```

```
c2<-c(ps,0,0,pc,pi,0,0)
```

```
c3<-c(0,ps,0,pc,pi,0,0)
```

```
c4<-c(0,0,ps,pc,pi,0,0)
```

```
c5<-c(0,0,ps,pc,0,pi,0)
```

```
c6<-c(0,0,ps,pc,0,0,pi)
```

```
c7<-c(0,0,ps,pc,pi,0,0)
```

```
M<-rbind(c1, c2, c3, c4, c5, c6, c7)
```

```
#MM<-M%^%100000 - apenas para avaliação do resultado do sistema linear.
```

```
#Resolvendo o Sistema Linear no R
```

```
A = t(M) - eye(7)
```

```
A[7,] = ones(1,7)
```

```
B = zeros(5, 1)
```

```
B[7,1] = 1
```

```
MMA = solve(A)%*%B
```

```
PP<-1/(MMA[1]+MMA[7])
```

```
Saida=rbind(Saida,c(u,PP))
```

```
colnames(Saida)<- c("u1", "ARL0")
```

```
}
```

```
writexl::write_xlsx (Saida,"Saida.xlsx")
```

```
#####
```

## ANEXO 3 – Programa para encontrar ARL utilizando a abordagem clássica

```

### Cálculo ARL com abordagem clássica ###

# Carrega biblioteca do Matlab
library(pracma)

clear()

#Xbarra Tradicional
desvio = 1
n = 3 #Tamanho da amostra
u0 = 0
LSC = u0+3*(desvio/sqrt(n))
LIC = u0-3*(desvio/sqrt(n))

SaidaT=c()
uA=seq(0,3,0.2) #Mi1
for (i in uA){
u=i
pi<-pnorm(LIC,u,desvio/sqrt(n)) #Área abaixo do LIC
ps<-1-pnorm(LSC,u,desvio/sqrt(n)) #Área acima do LSC

ARL<-1/(pi+ps)
SaidaT=rbind(SaidaT,c(u,ARL)) #Empilha e armazena

colnames(SaidaT)<- c("u1","ARL")

}
writexl::write_xlsx (SaidaT,"SaidaT.xlsx")

#####

```