

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
Instituto de Ciências Exatas
Programa de Pós-Graduação em Matemática

Roney Pereira dos Santos

SUBVARIEDADES COM BORDO LIVRE EM BOLAS DE FORMAS ESPACIAIS

Belo Horizonte
2022

Roney Pereira dos Santos

SUBVARIEDADES COM BORDO LIVRE EM BOLAS DE FORMAS ESPACIAIS

Tese de Doutorado submetida ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ezequiel Rodrigues Barbosa

Coorientador: Prof. Dr. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória

Belo Horizonte

2022

Santos, Roney Pereira dos

S237s Subvariedades com bordo livre em bolas de formas espaciais
[recurso eletrônico] / Roney Pereira dos Santos – 2022.
1 recurso online (57 f. il, color.): pdf.

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa.
Coorientador: Feliciano Marcílio Aguiar Vitória
Tese (doutorado) - Universidade Federal de Minas
Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática.

Referências: f. 53-55

1. Matemática – Teses. 2. Subvariedades – Teses. 3.
Superfícies (Matemática)i – Teses. 4. Desigualdades
(Matemática). I Barbosa, Ezequiel Rodrigues. II. Feliciano
Marcílio Aguiar Vitória. III. Universidade Federal de Minas
Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de
Matemática. III. Título.

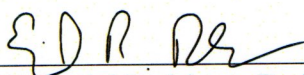
CDU 51(043)

FOLHA DE APROVAÇÃO

*Subvariedades com Bordo Livre em Bolas de
Formas Espaciais*

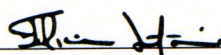
RONEY PEREIRA DOS SANTOS

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída por:




Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa

UFMG



Prof. Feliciano Marcílio Aguiar Vitória

UFAL




Prof. Celso dos Santos Viana

UFMG



Prof. Emerson Alves Mendonça de Abreu

UFMG



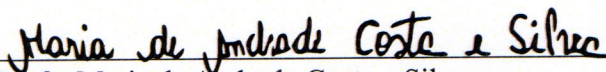
Prof. Ivaldo Paz Nunes

UFMA



Prof. Lucas Ambrózio

IMPA



Prof. Maria de Andrade Costa e Silva

UFS

Belo Horizonte, 25 de março de 2022.

Agradecimentos

Quanto a meus familiares, agradeço a todos que me apoiaram de variadas formas, quase nunca de maneira tradicional. Em especial, cito alguns familiares sem os quais seria impossível caminhar até aqui. Minha mãe, Jovelina Santos, e minha tia-mãe, Albenia Santos, pessoas que sei que sempre poderia confiar. Minha irmã, Geislane Santos, pelos diversos incentivos. Minha avó, Maria Santos, minha tia, Alda Santos, e meu primo, Cláudio Santos, pelo financiamento no primeiro ano de doutorado.

No âmbito acadêmico, agradeço ao meu orientador, Ezequiel Barbosa, e meu coorientador, Feliciano Vitório, pelas muitas ajudas, e pela alta dose de paciência que acredito ter sido necessária durante essa caminhada. Agradeço a Iury Domingos (que fez as figuras deste texto) e a Alcides de Carvalho, amigos de graduação que hoje são também parceiros de pesquisa. Agradeço aos amigos da UFMG pelos diversos cafés em diversas tardes, momentos esses cruciais para se evitar a loucura.

Também agradeço à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pelo financiamento durante meu doutorado.

Círculo Vicioso

Bailando no ar, gemia inquieto vagalume:

– “Quem me dera que fosse aquela loura estrela,
Que arde no eterno azul, como uma eterna vela!”
Mas a estrela, fitando a lua, com ciúme:

– “Pudesse eu copiar o transparente lume,
Que, da grega coluna à gótica janela,
Contemplou, suspirosa, a fronte amada e bela!”
Mas a lua, fitando o sol, com azedume:

– “Mísera! tivesse eu aquela enorme, aquela
Claridade imortal, que toda a luz resume!”
Mas o sol, inclinando a rútila capela:

– “Pesa-me esta brilhante auréola de nune...
Enfara-me esta azul e desmedida umbela...
Por que não nasci eu um simples vaga-lume?”

Resumo

Nesta tese, gostaríamos de investigar o comportamento de hipersuperfícies com bordo livre no contexto de bolas geodésicas de formas espaciais.

Primeiramente, estamos interessados em entender como a condição de bordo livre afeta as geometrias do bordo de uma hipersuperfície visto tanto da hipersuperfície original quanto da esfera que delimita a bola em questão. Com essas relações, estaremos aptos a derivar duas desigualdades integrais. Uma dessas desigualdades dá uma relação entre a geometria e a topologia de tais hipersuperfícies no caso de dimensão três. Outras aplicações das equações obtidas ao longo do bordo livre são uma identidade que conta o número de pontos umbílicos (com multiplicidades) da superfície de acordo com sua topologia, a reobtenção do Teorema de Nitsche, uma equivalência entre a topologia e a existência de pontos umbílicos em uma superfície, e uma reformulação da Conjectura do Catenoide.

Palavras-chaves: problema de bordo livre; superfície mínima; desigualdade geométrica; resultado de rigidez.

Abstract

In this thesis, we would like to investigate the behavior of hypersurfaces with free boundary in the context of geodesic balls in space forms.

Firstly, we are interested in understanding how the boundary condition affects the geometries along the boundary of hypersurfaces viewed both the original hypersurface and the sphere delimiting the ball in question. With these relations, we will be able to find two integral inequalities. One of these inequalities provides a relation between the geometry and topology of these hypersurfaces in the dimension three case. Others applications of the equations along the free boundary are a identity that counts the umbilical points (with multiplicities) of the surface according with its topology, the recovery of the Nitsche Theorem, an equivalence between the topology and the existence of umbilic points on the surface, and a reformulation of the Catenoid Conjecture.

Keywords: free boundary problem; minimal surface; geometric inequality; rigidity result.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	9
2	MÉTRICAS RIEMANNIANAS	18
2.1	Definições Iniciais	18
2.2	Geometria de Subvariedades	20
2.3	Formas Espaciais	23
3	HIPERSUPERFÍCIES COM BORDO LIVRE	26
3.1	Resultados Preliminares	26
3.2	Pontos Umbílicos e Característica de Euler	31
3.3	Desigualdades Integrais em Formas Espaciais	34
	REFERÊNCIAS	40
	Índice	43

1 Introdução

A teoria de superfícies mínimas é um campo de pesquisa tradicional e frutífero em Geometria Diferencial desde pelo menos o século XVIII. Motivados por um problema variacional, L. Euler e J. Lagrange consideraram o problema de encontrar uma superfície que minimiza a área e tem como o bordo uma curva fixada. Em 1849, foi verificado por J. Plateau que o processo de mergulhar uma armação fechada de arame numa solução de água com sabão produz uma superfície que minimiza a área, e desde então o problema proposto por L. Euler e J. Lagrange passou a ser conhecido como Problema de Plateau. O problema foi solucionado independentemente por J. Douglas e T. Radó em 1931.

Já o problema de fixar uma superfície fechada Σ^2 e encontrar uma superfície contida no domínio delimitado por Σ^2 que minimiza a área dentre todas as variações dessa superfície que mantêm seu bordo em Σ^2 foi estudado no século XX por R. Courant e H. Lewy. Isto é uma extensão natural do Problema de Plateau. Este problema visto especificamente para uma superfície na bola Euclidiana unitária tocando o bordo esférico em um ângulo constante tem início no trabalho de J. Nitsche [28], mas foi pouco desenvolvido após isso.

As superfícies estudadas por J. Nitsche, assim como suas generalizações, são soluções de um problema variacional que passamos a descrever agora. Considerada uma imersão isométrica $u : (M^k, g) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$, onde M^k e \bar{M}^n são compactas, seja $u_t : (M^k, g_t) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma variação de u (cf. Definição 2.15) com as seguintes propriedades:

$$u_t(\text{int}(M^k)) \subset \text{int}(\bar{M}^n) \quad \text{e} \quad u_t(\partial M^k) \subset \partial \bar{M}^n.$$

Se $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ denota o funcional área da variação (cf. Definição 2.16), então pela fórmula de Primeira Variação da Área (cf. Teorema 2.17),

$$\mathcal{A}'(0) = - \int_{M^k} g(X, \vec{H}) d\sigma + \int_{\partial M^k} g(X, \nu) ds,$$

onde X é o campo variacional de u_t , \vec{H} é o vetor curvatura média de u e ν é a normal exterior a M^k ao longo de ∂M^k . Supondo que u é mínima e $u(M^k)$ toca \bar{M}^n ortogonalmente ao longo de $\partial \bar{M}^n$, deve-se ter $\mathcal{A}'(0) = 0$, o que significa que u é ponto crítico do funcional área.

Em [17, 20], A. Fraser e R. Schoen estudaram o espectro do problema de Dirichlet-Neumann em superfícies com bordo e mostraram que a maximização do primeiro autovalor de Steklov normalizado deve ser realizada por uma métrica cuja imersão isométrica é mínima e toca ortogonalmente o bordo da bola Euclidiana unitária centrada na origem do espaço Euclidiano. Fato é que desde então essas subvariedades têm recebido muita atenção dos matemáticos.

De modo genérico, temos a seguinte definição.

Definição. Sejam (M^k, g) e (\bar{M}^n, \bar{g}) duas variedade Riemannianas compactas. Dizemos que $u : (M^k, g) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$ é uma imersão (isométrica) com *bordo livre* se:

- (i) $u(\text{int}(M^k)) \subset \text{int}(\bar{M}^n)$ e $u(\partial M^k) \subset \partial \bar{M}^n$
- (ii) o ângulo de contato entre $u(M^k)$ e $\partial \bar{M}^n$ é constante igual a $\pi/2$.

Apesar de a definição acima não impor condição sobre a curvatura média, a minimalidade da imersão, como vimos anteriormente, é um caso interessante que implica em solução para o problema variacional de que falamos. Damos a seguir alguns exemplos desse tipo de hipersuperfícies no caso mínimo.

Exemplos. Seja B^3 a bola Euclidiana fechada, unitária e centrada na origem do \mathbb{R}^3 .

- (i) **Os dois primeiros exemplos.** Do mesmo modo que na teoria geral de superfícies mínimas os exemplos conhecidos foram apenas planos e catenoides por muitos anos, a existência de outros exemplos de superfícies mínimas com bordo livre em B^3 além das duas que descrevemos a seguir demorou para ser demonstrada.
 - Os exemplos mais simples de superfícies mínimas com bordo livre em B^3 são os pedaços de planos contidos em B^3 que passam pela origem do \mathbb{R}^3 . Eles são denominados *discos equatoriais*.
 - Consideremos o catenoide $u : [-R_0, R_0] \times [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ parametrizado por

$$u(r, \theta) = a(\cosh r \cos \theta, \cosh r \sin \theta, r),$$

onde a é uma constante real. A escolha de R_0 como a única solução positiva que satisfaz $r \tanh r = 1$ e $a = (R_0 \cosh R_0)^{-1}$ tem como imagem um pedaço de catenoide contido em B^3 cujo bordo toca \mathbb{S}^2 de modo ortogonal, denominado *catenoide crítico*. Para mais detalhes, veja [18].

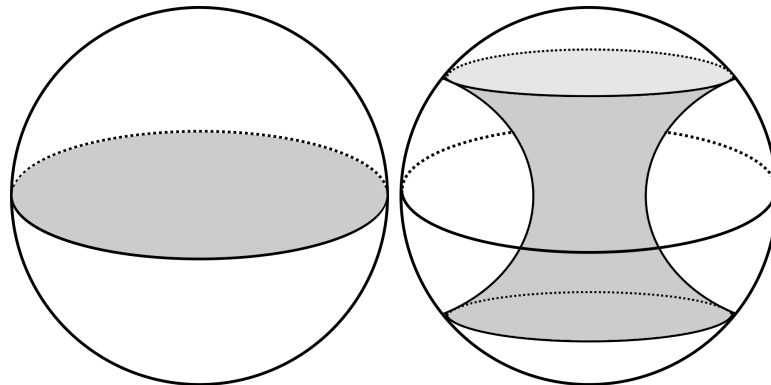


Figura 1 – O disco equatorial e o catenoide crítico.

- (ii) **Exemplos com outras topologias.** Devido ao crescente interesse no estudo de superfícies mínimas com bordo livre na bola Euclidiana, fez-se necessário conhecer outros exemplos. Citamos aqui alguns deles. Denotemos por $\Sigma_{g,r}^2$ uma superfície mínima com bordo livre em B^3 que tem gênero g e r componentes de bordo.
- Em [20], A. Fraser e R. Schoen encontraram uma sequência de superfícies $\Sigma_{0,r}^2$ que tem o disco equatorial e o catenoide crítico como exemplos particulares e que, quando r tende ao infinito, converge pra dois discos equatoriais que coincidem.
 - Em [24], N. Kapouleas e D. Wiygul encontraram exemplos de superfícies $\Sigma_{g,1}^2$ para g suficientemente grande, demonstrando ser a falsa a conjectura que dizia que o disco equatorial era o único exemplo de superfície mínima com bordo livre em B^3 com apenas uma componente conexa de bordo. Posteriormente, A. Carlotto, G. Franz e M. Schulz deram, em [7], exemplos em que não se pede que g seja necessariamente grande.
 - Em [15], A. Folha, F. Pacard e T. Zolotareva, sob a hipótese que r seja suficientemente grande, encontraram superfícies $\Sigma_{1,r}^2$, além de terem dado outra demonstração da existência de $\Sigma_{0,r}^2$ sob a condição de r ser suficientemente grande.
 - Em [25], N. Kapouleas e M. Li deram exemplos de $\Sigma_{g,3}^2$ para g suficientemente grande.
- (iii) Mesmo em dimensão alta, há exemplos como os construídos por B. Freidin, M. Gulian e P. McGrath em [21].

Um importante e celebrado resultado de rigidez para superfícies mínimas com bordo livre em B^3 afirma ser equatorial todo disco topológico com bordo livre em B^3 que é minimamente imerso aí. Aqui, enunciarmo-lo em sua versão para imersões mínimas, tanto em codimensão um [28] quanto em codimensão alta [19].

Teorema de Nitsche. *Todo disco topológico bidimensional mínimo com bordo livre na bola Euclidiana unitária centrada na origem do \mathbb{R}^n é equatorial.*

Alguns resultados sugerem uma analogia entre as classes de subvariedades mínimas fechadas da esfera unitária \mathbb{S}^n e de subvariedades mínimas com bordo livre em B^n . Sob esta similitude, certos objetos de cada uma das classes são vistos como correspondentes. Por exemplo, esferas equatoriais e toros topológicos em \mathbb{S}^n são análogos respectivamente a discos equatoriais e anéis topológicos no contexto de bordo livre em B^n . Tendo em vista essa analogia e a validade da Conjectura de Lawson (cf. [6]), a seguinte conjectura foi proposta.

Conjectura do Catenoide (Fraser-Li [16]). *A menos de rotação, o único anel topológico minimamente mergulhado com bordo livre em B^3 é o catenoide crítico.*

No contexto de superfícies com curvatura média constante, um resultado muito conhecido é o seguinte, devido a H. Hopf [22].

Teorema de Hopf. Toda esfera topológica imersa em \mathbb{R}^3 com curvatura média constante é redonda.

Posteriormente, A. Alexandrov mostrou em [3] que é possível substituir no Teorema de Hopf a hipótese de se ter um esfera topológica por compacidade e mergulho.

Teorema de Alexandrov. Toda superfície compacta mergulhada com curvatura média constante em \mathbb{R}^3 é uma esfera redonda.

A hipótese de mergulho é essencial no Teorema de Alexandrov como mostrou H. Wente [36]. É um problema em aberto demonstrar o análogo ao Teorema de Hopf ou ao Teorema de Alexandrov quando a topologia da superfície que se considera é a de um disco. No entanto, existem alguns resultados parciais. Por exemplo, quando o disco topológico tem bordo livre na bola de uma forma espacial e curvatura média constante, necessariamente ele deve ser uma superfície totalmente umbílica contida numa subvariedade totalmente geodésica tridimensional da forma espacial, tanto em codimensão um [31, 32], quanto em codimensão alta [19], com a hipótese de curvatura média constante, nesse segundo caso, substituída naturalmente por vetor curvatura média paralelo. Observe que este resultado é uma generalização do Teorema de Nitsche para bolas em formas espaciais.

Dada uma imersão isométrica $u : (M^n, g) \rightarrow (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$, onde M^n e \overline{M}^{n+1} são compactas, seja $u_t : (M^n, g_t) \rightarrow (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma variação de u que respeita as seguintes propriedades:

$$u_t(\text{int}(M^n)) \subset \text{int}(\overline{M}^{n+1}) \quad \text{e} \quad u_t(\partial M^n) \subset \partial \overline{M}^{n+1}.$$

Se $\mathcal{V} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ denota o funcional volume da variação (cf. Definição 2.18), pela fórmula de Primeira Variação do Volume (cf. Teorema 2.19),

$$\mathcal{V}'(0) = \int_{M^n} g(X, \eta) d\sigma,$$

onde X é o campo variacional de u_t e η é um campo unitário normal a $u(M^n)$. Nesse caso, se u tiver curvatura média constante e bordo livre, então u é tal que $\mathcal{V}'(0) = 0$ desde que a variação preserve volume (cf. Definição 2.18).

Ser solução de um problema variacional juntamente com a generalização citada acima do Teorema de Nitsche nos motiva a estudar hipersuperfícies com bordo livre que têm curvatura média constante num dado ambiente.

Exemplos de superfícies com bordo livre numa bola Euclidiana e com curvatura média constante são algumas calotas esféricas.

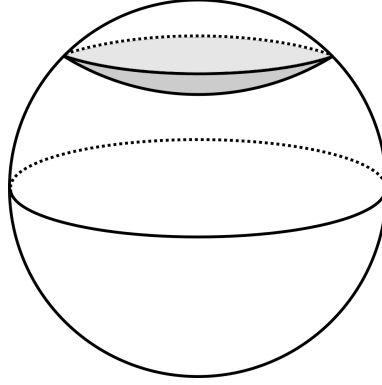


Figura 2 – Calota esférica.

Esta tese foi desenvolvida e escrita na esperança de contribuir para o estudo de hipersuperfícies com bordo livre em bolas de formas espaciais quando a imersão isométrica que estamos considerando tem curvatura média constante.

Nosso primeiro resultado é uma relação, ao longo do bordo livre, entre as geometrias dos bordos de hipersuperfícies com bordo livre e curvatura média constante quando observados de dois pontos de vistas diferentes: (i) como hipersuperfície da hipersuperfície original e (ii) como hipersuperfície da esfera que delimita a bola geodésica na forma espacial. A bola geodésica – denotada digamos por B^n – a que estamos nos referindo é modelada por uma bola Euclidiana cujo raio r é escolhido de modo B^n tenha raio um na forma espacial.

Lema A (Identidades Tipo-Stahl). *Seja Σ^n uma hipersuperfície com bordo livre na bola unitária B^{n+1} de uma forma espacial \mathbb{M}_c^{n+1} , $c \in \{-1, 0, 1\}$. Se Σ^n tem curvatura média constante H , tensor de umbilicidade ϕ e normal unitária exterior ν , então nos pontos de $\partial\Sigma^n$ temos:*

$$(i) \quad |\phi|^2 = |\tilde{S}|^2 + (H - \tilde{H})^2 - \frac{H^2}{n};$$

$$(ii) \quad \partial_\nu |\phi|^2 = -2\mu_0 \left(|\tilde{S}|^2 + (n+1)(H - \tilde{H})^2 - 2H(H - \tilde{H}) \right),$$

onde \tilde{S} e \tilde{H} são respectivamente o operador de Weingarten e a curvatura média de $\partial\Sigma^n$ como hipersuperfície de ∂B^{n+1} , enquanto μ_0 é a curvatura principal de ∂B^{n+1} em \mathbb{M}_c^{n+1} na direção de ν .

Tanto no Lema A quanto em tudo que se segue, $\partial\Sigma^n$ como hipersuperfície de ∂B^{n+1} está orientada com o campo unitário normal a Σ^n previamente escolhido restrito aos pontos de $\partial\Sigma^n$. A partir de então, passaremos a fazer aplicações Lema A. Duas delas são imediatas. A primeira é uma propriedade de superfícies com bordo livre em B^3 cuja curvatura seccional é constante ao longo de uma componente conexa de bordo de $\partial\Sigma^2$.

Corolário B. *Seja Σ^2 uma superfície com bordo livre na bola unitária B^3 de uma forma espacial \mathbb{M}_c^3 , $c \in \{-1, 0, 1\}$. Se Σ^2 tem curvatura média constante H e curvatura seccional*

constante ao longo de uma componente conexa de bordo Γ de Σ^2 , então Γ é um círculo. Em particular, se $H = c = 0$, então Σ^2 é ou um disco equatorial ou um catenoide crítico.

Já a segunda é uma conclusão sobre o comportamento do tensor de umbilicidade ao longo de $\partial\Sigma^n$ quando sua norma ao quadrado é uma função sub-harmônica na hipersuperfície.

Corolário C. *Seja Σ^n uma hipersuperfície com bordo livre em B^{n+1} . Se Σ^n tem curvatura média constante H e $\Delta|\phi|^2 \geq 0$, onde ϕ é o tensor de umbilicidade de Σ^n , então $\tilde{\phi} = 0$ e $(n-1)H = n\tilde{H}$ em $\partial\Sigma^n$, onde $\tilde{\phi}$ e \tilde{H} são respectivamente o tensor de umbilicidade e a curvatura média de $\partial\Sigma^n$ como hipersuperfície de ∂B^{n+1} . Além disso, Σ^2 é totalmente umbílica.*

A próxima aplicação do Lema A é uma relação que conta a quantidade de pontos umbílicos – com multiplicidade – de uma superfície com curvatura média constante e bordo livre em B^3 de maneira dependente da topologia.

Teorema D. *Seja Σ^2 uma superfície com bordo livre na bola unitária B^3 de uma forma espacial \mathbb{M}_c^3 , $c \in \{-1, 0, 1\}$. Se Σ^2 tem curvatura média constante e não é totalmente umbílica, então*

$$\chi(\Sigma^2) = -\frac{k_\Sigma}{2} - \frac{k_{\partial\Sigma}}{4},$$

onde k_Σ e $k_{\partial\Sigma}$ são a ordem de $|\phi|$ respectivamente em $\text{int}(\Sigma^2)$ e $\partial\Sigma^2$.

Para o significado de ordem de $|\phi|$, veja Definição 3.10. O Teorema D tem duas consequências diretas.

Corolário E. *Seja Σ^2 uma superfície com curvatura média constante e bordo livre na bola unitária B^3 de uma forma espacial \mathbb{M}_c^3 , $c \in \{-1, 0, 1\}$.*

- (i) *Se Σ^2 for um disco topológico, então Σ^2 é totalmente umbílica.*
- (ii) *A superfície Σ^2 é um anel topológico se, e somente se, não tem ponto umbílico.*

A primeira parte do Corolário E é o Teorema de Nitsche em bolas de formas espaciais. Já a segunda mostra que [26, Lema 4.3] tem a afirmação inversa como verdadeira e também vale tanto em bolas de formas espaciais quanto no contexto de curvatura média constante.

Em seguida, estabeleceremos algumas desigualdades integrais. Para condensar as equações que aí aparecem, consideraremos o polinômio p_H associado à curvatura média H da hipersuperfície Σ^n estudada na forma espacial \mathbb{M}_c^{n+1} dado por

$$p_H(t) = t^2 + \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|H|t - \frac{H^2}{n} - nc, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Este polinômio aparece de maneira natural na demonstração da Desigualdade de Simons que está enunciada no texto (cf. Lema 2.26). Mais informações sobre p_H pode ser encontrada no parágrafo anterior ao Lema 2.26.

Teorema F. *Seja Σ^n , $n \geq 3$, uma hipersuperfície com bordo livre na bola unitária B^{n+1} de uma forma espacial \mathbb{M}_c^{n+1} , $c \in \{-1, 0\}$. Se Σ^n tem curvatura média constante H e tensor de umbilicidade ϕ , então*

$$\int_{\Sigma^n} |\phi|^2 (p_H(|\phi|) - C_{n,H}) d\sigma \geq \frac{n}{2} \int_{\partial\Sigma^n} \left((H - \tilde{H})^2 - |\tilde{S}|^2 \right) ds + 2\mu_0 H \int_{\partial\Sigma^n} \tilde{H} ds - \frac{3n-2}{2n} H^2 V(\partial\Sigma^n) + F(\mu_0),$$

onde $V(\partial\Sigma^n)$ é o volume total de $\partial\Sigma^n$ e $\mu_0 > 0$ é a curvatura principal de ∂B^{n+1} , enquanto \tilde{S} e \tilde{H} são respectivamente o operador de Weingarten e a curvatura média de $\partial\Sigma^n$ como hipersuperfície de ∂B^{n+1} ,

$$C_{n,H} = \frac{(n+2)(n^2 - H^2)}{4n}$$

e

$$F(\mu_0) = (\mu_0 - 1) \left((n+1) \int_{\partial\Sigma^n} (H - \tilde{H})^2 ds + \int_{\partial\Sigma^n} |\tilde{S}|^2 ds - 2H^2 V(\partial\Sigma^n) \right)$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ^n é totalmente umbílica.

Tanto a restrição da dimensão quanto da curvatura seccional da forma espacial são devidas a um resultado de M. Batista, H. Mirandola e F. Vitória [5] que utilizamos na demonstração do Teorema F. Como consequência do Teorema F, pudemos relacionar a geometria e a topologia de uma hipersuperfície tridimensional com curvatura média constante e bordo livre em B^4 .

Corolário G. *Seja Σ^3 uma hipersuperfície com bordo livre na bola unitária B^4 de uma forma espacial \mathbb{M}_c^4 , $c \in \{-1, 0\}$. Se Σ^3 tem curvatura média constante H e tensor de umbilicidade ϕ , então*

$$\int_{\Sigma^3} |\phi|^2 (p_H(|\phi|) - C_{3,H}) d\sigma \geq 6\pi \sum_{i=1}^m \chi(\Gamma_i) + (2\mu_0 - 3)H \int_{\partial\Sigma^3} \tilde{H} ds + \frac{H^2 - 9c - 9\mu_0^2}{3} A(\partial\Sigma^3) + F(\mu_0),$$

onde $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$ denotam as m componentes conexas de bordo de Σ^3 e $A(\partial\Sigma^3)$ denota a área total de $\partial\Sigma^3$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ^3 é totalmente umbílica.

Observe que no caso Euclidiano devemos ter $F(\mu_0) = 0$. Os Corolários 3.16 e 3.18 no texto são as versões respectivamente do Teorema F e do Corolário G para o caso $H = c = 0$.

Sob inspiração do trabalho de G. Catino [9], outra desigualdade obtida, agora não impedindo que a forma espacial tenha curvatura seccional positiva nem impondo a condição de bordo livre, foi a seguinte.

Teorema H. *Seja Σ^n , $n \geq 2$, uma hipersuperfície compacta de \mathbb{M}_c^{n+1} , $c \in \{-1, 0, 1\}$. Se Σ^n não é totalmente umbílica, tem curvatura média constante H , tensor de umbilicidade ϕ e $|\phi|^{-\frac{n+2}{n}} \partial_\nu |\phi|^2$ é uma função integrável ao longo de $\partial\Sigma^n$, então*

$$-\int_{\Sigma^n} |\phi|^{\frac{n-2}{n}} p_H(|\phi|) d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^n} |\phi|^{-\frac{n+2}{n}} \partial_\nu |\phi|^2 ds.$$

Além disso, para $n \geq 3$, a igualdade ocorre se, e somente se:

- (i) Σ^n é um catenoide quando $H = 0$ e $c \leq 0$;
- (ii) Σ^n é um toro de Clifford ou uma hipersuperfície de Otsuki quando $H = 0$ e $c > 0$;
- (iii) Σ^n é uma hipersuperfície de Delaunay quando $H \neq 0$.

Sobre Hipersuperfícies de Otsuki, veja o parágrafo logo após o enunciado do Lema 2.26.

O caso bidimensional do Teorema H, lido como a seguir, tem uma demonstração diferente que se apoia no fato de que, em superfícies com curvatura média constante numa forma espacial, os pontos umbílicos são isolados sempre que esta não é totalmente umbílica.

Teorema I. *Seja Σ^2 uma superfície compacta de \mathbb{M}_c^3 , $c \in \{-1, 0, 1\}$. Se Σ^2 não é totalmente umbílica, tem curvatura média constante H , tensor de umbilicidade ϕ e $\partial_\nu \log |\phi|^2$ é uma função integrável ao longo de $\partial\Sigma^2$, então*

$$(*) \quad \int_{\Sigma^2} \left(\frac{H^2}{2} - |\phi|^2 + 2c \right) d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^2} \partial_\nu \log |\phi|^2 ds.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ^2 não tem ponto umbílico.

Uma vez que em dimensão maior do que dois a igualdade deve ocorrer, por exemplo, em catenoides pelo Teorema H, torna-se interessante, por causa da Conjectura do Catenoide, procurar essa rigidez no caso de bordo livre no Teorema I. Aplicando as relações do Lema A, desse caso bidimensional segue o Corolário abaixo.

Corolário J. *Seja Σ^2 uma superfície com curvatura média constante e bordo livre na bola unitária B^3 de uma forma espacial \mathbb{M}_c^3 , $c \in \{-1, 0, 1\}$. Então Σ^2 não é totalmente umbílica se, e somente se, $\chi(\Sigma^2) \leq 0$. Além disso, a igualdade em (*) é equivalente a se ter $\chi(\Sigma^2) = 0$.*

Duas consequências são observadas a partir do Corolário J:

- (i) podemos recuperar o Corolário E;
- (ii) podemos reformular a Conjectura do Catenoide como um problema de unicidade para a igualdade em (*) no seguinte sentido: provar que dois anéis mínimos com bordo livre que satisfazem a igualdade em (*) são movimento rígido um do outro significa dizer que ambos são catenoides.

Esta tese está organizada da seguinte maneira. O primeiro capítulo será inteiramente dedicado a firmar notações e enunciar resultados clássicos que serão usados no capítulo subsequente.

Na Seção 3.1, reuniremos os resultados que serão importantes na demonstração dos nossos resultados que estarão nas seções seguintes. Os dois primeiros estarão enunciados sem demonstração, mas elas podem ser encontradas nas referências ali feitas. O terceiro resultado será demonstrado, pois sua prova é bastante simples. Finalmente, aplicaremos um resultado de A. Stahl (cf. Teorema 3.4) para estabelecer o Lema A.

Após isso, faremos aplicações do Lema A. Assim é que na Seção 3.2, provaremos a relação entre a ordem do tensor de umbilicidade e a característica de Euler de superfícies com bordo livre e curvatura média constante em B^3 . Já na Seção 3.3, provaremos algumas desigualdade integrais em formas espaciais e delas derivaremos relações entre a geometria e a topologia de hipersuperfícies com curvatura média constante e bordo livre em bolas de formas espaciais nos casos bidimensional e tridimensional.

2 Métricas Riemannianas

Neste primeiro capítulo, temos por intuito estabelecer as definições e as notações que serão usadas durante todo o texto. A maioria das demonstrações podem ser encontradas em [12, 13, 27] e as que não são encontradas em algum desses três livros estão devidamente referenciadas.

2.1 Definições Iniciais

Dada a variedade diferenciável n -dimensional M^n , para cada $p \in M^n$, o espaço vetorial formado por todos os vetores tangentes a M^n em p será denotado por $T_p M^n$. A escolha de uma maneira adequada para se fazer geometria – dentro do escopo desta tese – no espaço topológico M^n é nosso primeiro objetivo.

Definição 2.1. Seja M^n uma variedade diferenciável. Uma *métrica Riemanniana* em M^n é uma aplicação $g_p : T_p M^n \times T_p M^n \rightarrow \mathbb{R}$ que é bilinear, simétrica e positiva definida para todo $p \in M^n$ e tal que, para todo $X, Y \in \mathfrak{X}(M^n)$, a função $p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$ é diferenciável. Nesse caso, (M^n, g) , isto é, M^n munida com a métrica Riemanniana g , é dita uma *variedade Riemanniana*.

Vê-se que toda variedade diferenciável pode ser munida com uma métrica Riemanniana. Esta, sempre possui associada a si uma conexão linear particular.

Teorema 2.2 (Levi-Civita). *Dada uma variedade Riemanniana (M^n, g) , existe e é única a conexão linear $\nabla : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$ que simultaneamente satisfaz*

$$\partial_Z g(X, Y) = g(\nabla_Z X, Y) + g(X, \nabla_Z Y) \quad e \quad [X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$. Esta conexão linear é denominada *conexão de Levi-Civita de g* .

Alguns objetos do cálculo em \mathbb{R}^n se generalizam para variedades Riemannianas arbitrárias como a seguir.

Definição 2.3. Considere uma variedade Riemanniana (M^n, g) e uma função diferenciável $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$.

- (i) O *gradiente* ∇f de f segundo g é o único campo tangente a M^n tal que, para todo $X \in \mathfrak{X}(M^n)$, se tenha

$$g(\nabla f, X) = \partial_X f.$$

(ii) O *Hessiano* $\nabla^2 f : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathbb{R}$ de f segundo g é definido por

$$\nabla^2 f(X, Y) = g(\nabla_X \nabla f, Y).$$

(iii) O *Laplaciano* $\Delta f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ de f segundo g é definido por

$$\Delta f = \text{tr}_g(\nabla^2 f).$$

No estudo de variedades Riemannianas, um importante aspecto é a compreensão de como a métrica Riemanniana “dobra” M^n . Essa noção é dada pela seguinte definição.

Definição 2.4. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ . Escolhidos $p \in M^n$ e um plano σ contido em $T_p M^n$ gerado pelos vetores ortonormais $\{v, w\}$, a *curvatura seccional* K_g de g ao longo de σ é definida por

$$K_g(v, w) = g(\nabla_v \nabla_w w - \nabla_w \nabla_v w + \nabla_{[v, w]} w, v).$$

A curvatura seccional não depende dos vetores escolhidos, apenas do plano gerado por eles.

Outra noção de curvatura, essa especificamente para curvas, nos mostra a maneira como uma curva se “dobra” dentro de uma variedade Riemanniana.

Definição 2.5. Seja (M^n, g) uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita ∇ . Sejam $\gamma : I \rightarrow M^n$ uma curva regular tal que $g(\gamma', \gamma') = 1$ e $\nu \in T_\gamma M^n$ um campo unitário normal a γ . A *curvatura geodésica* de γ na direção de ν é a função $\kappa_g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\kappa_g = g(\nabla_{\gamma'} \gamma', \nu).$$

Quando κ_g se anula identicamente em I , dizemos que γ é uma *geodésica* de (M^n, g) .

Possivelmente o Teorema de Gauss-Bonnet é um dos resultados mais reverenciados da Geometria Diferencial. Ele estabelece uma conexão entre a geometria e a topologia de variedades Riemannianas bidimensionais, como enunciado a seguir.

Teorema 2.6 (Gauss-Bonnet). *Seja (M^2, g) uma superfície Riemanniana compacta. Se K_g é a curvatura seccional de g e κ_g é a curvatura geodésica de ∂M^2 na direção da normal unitária interior de M^2 ao longo de ∂M^2 , então*

$$\int_{M^2} K_g d\sigma + \int_{\partial M^2} \kappa_g ds = 2\pi\chi(M^2).$$

2.2 Geometria de Subvariedades

Sejam M^k e \overline{M}^n duas variedades diferenciáveis. Considere uma imersão $u : M^k \rightarrow \overline{M}^n$. Supondo que \overline{M}^n está equipada com uma métrica Riemanniana \overline{g} , u induz em M^k uma métrica Riemanniana g da seguinte maneira: para cada $p \in M^k$ e $X, Y \in T_p M^k$, definimos

$$g_p(X, Y) = \overline{g}_{u(p)}(du_p(X), du_p(Y)).$$

Resumidamente, $g = u^*\overline{g}$. Sob essas condições, diz-se que g é a *métrica induzida por u* . Não havendo perigo em deixar de explicitar a imersão u , podemos identificar M^k com $u(M^k)$, assim como $X \in \mathfrak{X}(M^k)$ com $du(X) \in \mathfrak{X}(\overline{M}^n)$. Desse modo, \overline{g} decompõe $T_p \overline{M}^n$ na soma direta

$$T_p \overline{M}^n = T_p M^k \oplus T_p^\perp M^k,$$

onde $T_p^\perp M^k$ é o complemento ortogonal de $T_p M^k$. Por sua vez, essa decomposição nos permite definir e verificar que a conexão de Levi-Civita ∇ de g é dada por

$$\nabla_X Y = (\overline{\nabla}_X Y)^\top,$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de \overline{g} e $(\cdot)^\top$ denota a projeção ortogonal em $T_p M^k$.

Definição 2.7. Dizemos que $u : (M^k, g) \rightarrow (\overline{M}^n, \overline{g})$ é uma *imersão isométrica* quando as métricas Riemannianas g e \overline{g} são tais que $g = u^*\overline{g}$.

Doravante, as imersões serão implicitamente consideradas isométricas.

As geometrias de métricas como na Definição 2.7 estão relacionadas de diversas formas. Através, por exemplo, da Equação de Gauss, que mostra como a curvatura seccional de uma influencia a da outra. Antes de enunciá-la, precisamos de uma definição.

Definição 2.8. Seja $u : (M^k, g) \rightarrow (\overline{M}^n, \overline{g})$ uma imersão. A *segunda forma fundamental* de u é a aplicação $\alpha : \mathfrak{X}(M^k) \times \mathfrak{X}(M^k) \rightarrow \mathfrak{X}(M^k)^\perp$ dada por

$$\alpha(X, Y) = (\overline{\nabla}_X Y)^\perp,$$

onde $\overline{\nabla}$ é a conexão de Levi-Civita de \overline{g} . Quando $\alpha = 0$ em todo ponto de M^k , dizemos que u é *totalmente geodésica*.

A seguinte expressão é a citada *Equação de Gauss*, que relaciona as curvaturas seccionais de variedades isométricas através da segunda forma fundamental da imersão.

Teorema 2.9 (Gauss). *Seja $u : (M^k, g) \rightarrow (\overline{M}^n, \overline{g})$ uma imersão. Dado $p \in M^k$, considere uma base ortonormal $\{v, w\}$ de um plano σ contido em $T_p M^k$. Se $K_g(v, w)$ e $K_{\overline{g}}(v, w)$ denotam respectivamente as curvaturas seccionais de g e \overline{g} ao longo de σ , temos*

$$K_g(v, w) - K_{\overline{g}}(v, w) = \overline{g}(\alpha(v, v), \alpha(w, w)) - |\alpha(v, w)|^2,$$

onde $|\cdot|$ é a norma induzida por \overline{g} .

Associada à segunda forma fundamental, tem-se a aplicação linear autoadjunta definida como se segue.

Definição 2.10. Seja $u : (M^k, g) \rightarrow (\overline{M}^n, \overline{g})$ uma imersão. O operador de Weingarten de u é a aplicação $S : \mathfrak{X}(M^k) \times \mathfrak{X}(M^k)^\perp \rightarrow \mathfrak{X}(M^k)$ dada por

$$S(X, \eta) = -(\overline{\nabla}_X \eta)^\top.$$

Fixado η unitário, quando $S(v, \eta) = \lambda v$, com v também unitário, denominamos λ uma *curvatura principal* e v uma *direção principal* de u , ambos segundo η .

Observação 2.11. É comum fixar o campo η acima e escrever $S_\eta X = S(X, \eta)$ e é usual omiti-lo no caso de codimensão um.

O traço da segunda forma fundamental define um campo normal que aparece em diversos contextos diferentes dentro da Geometria Diferencial.

Definição 2.12. Sejam $u : (M^k, g) \rightarrow (\overline{M}^n, \overline{g})$ uma imersão e α sua segunda forma fundamental. Para cada $p \in M^k$, o vetor

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^k \alpha(v_i, v_i),$$

onde $\{v_1, \dots, v_k\}$ é uma base ortonormal de $T_p M^k$ é chamado *vetor curvatura média* de u . Quando $k = n - 1$ e M^k é orientável, existe uma função $H : M^k \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{H} = H\eta$, onde η é um campo unitário normal a M^k globalmente definido. A função H é chamada *curvatura média* de u na direção de η .

Outra maneira de se ver o vetor curvatura média \vec{H} de uma dada imersão é usando seu operador de Weingarten. Dada um conjunto $\{\eta_1, \dots, \eta_{n-k}\}$ ortonormal de vetores normais a M^k , tem-se que

$$\vec{H} = \sum_{i=1}^{n-k} \text{tr}(S_{\eta_i})\eta_i.$$

Isto termina por demonstrar que a definição do vetor curvatura média independe da base escolhida. Observe ainda que, no caso de codimensão 1, a curvatura média H na direção do campo unitário η normal a M^k é dada por $H = \text{tr}(S_\eta)$.

Outro objeto geométrico definido nesta seção e que desempenhará um importante papel no próximo capítulo é o seguinte tensor.

Definição 2.13. Sejam $u : (M^n, g) \rightarrow (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma imersão e S seu operador de Weingarten. O *tensor de umbilicidade* de u é a aplicação $\phi : \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathfrak{X}(M^n)$ dada por

$$\phi = S - \frac{H}{n}I,$$

onde I é o tensor identidade em TM^n . Quando $\phi = 0$ em todo ponto de M^n , dizemos que u é *totalmente umbílica*.

Pode-se ver que as normas do tensor de umbilicidade ϕ e do operador de Weingarten S de uma imersão que tem curvatura média H se relacionam por

$$(2.1) \quad |\phi|^2 = |S|^2 - \frac{H^2}{n}.$$

O vetor curvatura média também pode ser usado para caracterizar imersões que, sob certo ponto de vista, minimizam o volume na métrica Riemanniana induzida.

Definição 2.14. Dizemos que $u : (M^k, g) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$ é uma *imersão mínima* quando seu vetor curvatura média se anula identicamente em M^k .

O termo “mínima” encontra fundamento especialmente em questões históricas. Há, no entanto, uma justificativa analítica para ele. Para entender isso, precisamos definir o que se entende por variação de uma imersão.

Definição 2.15. Uma *variação* da imersão $u : (M^k, g) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$ é uma família de imersões $u_t : (M^k, g_t) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$ que varia diferenciavelmente com $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ e tal que $u_0 = u$. O *campo variacional* X de uma tal variação é definido por

$$X = \left. \frac{\partial u_t}{\partial t} \right|_{t=0}.$$

Quando o volume da métrica Riemanniana que está sendo perturbada é finito, temos associado a essa variação o seguinte funcional.

Definição 2.16. Se (M^k, g) tem volume finito e $d\sigma_t$ denota o elemento de volume de uma variação $u_t : (M^k, g_t) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, da imersão $u : (M^k, g) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$, definimos o *funcional área* $\mathcal{A} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ da variação pondo

$$\mathcal{A}(t) = \int_{M^k} d\sigma_t.$$

Tem-se a seguinte fórmula para primeira variação do funcional área no tempo zero. Para uma demonstração, veja [10, Equação 1.45].

Teorema 2.17 (Primeira Variação da Área). *Sejam $u : (M^k, g) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$ uma imersão, onde M^k é compacta, e $u_t : (M^k, g_t) \rightarrow (\bar{M}^n, \bar{g})$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma variação de u . Se \mathcal{A} denota o funcional área da variação, então*

$$\mathcal{A}'(0) = - \int_{M^k} g(X, \vec{H}) d\sigma + \int_{\partial M^k} g(X, \nu) ds,$$

onde X é o campo variacional da variação, \vec{H} é o vetor curvatura média de u e ν é a normal unitária exterior a M^k ao longo de ∂M^k .

Assim, se, por exemplo, $\partial M^k = \emptyset$, uma imersão mínima é ponto crítico do funcional área. Nesse caso, ela deverá minimizar a área quando a segunda variação do funcional área for não negativa na métrica Riemanniana inicial. Outro funcional associado a uma variação é o seguinte.

Definição 2.18. Considere uma variação $u_t : (M^n, g_t) \rightarrow (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, da imersão $u : (M^n, g) \rightarrow (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$. Se (M^n, g) tem volume finito e $d\overline{\sigma}$ denota o elemento de volume de $(\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$, definimos o *funcional volume* $\mathcal{V} : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$ da variação pondo

$$\mathcal{V}(t) = \int_{M^n \times [0, t]} u^* d\overline{\sigma}.$$

Dizemos que u *preserva volume* se $\mathcal{V}'(t) = 0$ para todo t .

Tem-se a seguinte fórmula para primeira variação do funcional volume no tempo zero. Para uma demonstração, veja [23, Equação 5.3.5].

Teorema 2.19 (Primeira Variação do Volume). *Sejam $u : (M^n, g) \rightarrow (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$ uma imersão, onde M^n é compacta, e $u_t : (M^n, g_t) \rightarrow (\overline{M}^{n+1}, \overline{g})$, $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$, uma variação de u . Se \mathcal{V} denota o funcional volume da variação, então*

$$\mathcal{V}'(0) = - \int_{M^n} g(X, \eta) d\sigma,$$

onde X é o campo variacional da variação e η é um campo unitário normal a $u(M^n)$.

2.3 Formas Espaciais

Para cada métrica Riemanniana g em uma variedade diferenciável M^n , se $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função positiva diferenciável é imediato verificar que $\tilde{g} = fg$ também define uma métrica Riemanniana em M^n . Isso nos permite dar a seguinte definição.

Definição 2.20. Dizemos que duas métricas Riemannianas g e \tilde{g} em uma variedade diferenciável M^n são *métricas conformes* se existe uma função diferenciável $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$. Nessa situação, (M^n, g) e (M^n, \tilde{g}) são ditas *variedades conformes*. A função φ é chamada *fator de conformidade* de g e \tilde{g} .

Uma importante classe de variedades conformes são aquelas cujas métricas são proporcionais à métrica Euclidiana.

Definição 2.21. Sejam B_R^n a bola Euclidiana aberta de raio $0 < R \leq \infty$ centrada na origem do \mathbb{R}^n e g a métrica Euclidiana padrão. Para cada função $\varphi : B_R^n \rightarrow \mathbb{R}$, considere a métrica $\tilde{g} = e^{2\varphi}g$. A variedade Riemanniana $M^n = (B_R^n, \tilde{g})$ é dita *conformemente Euclidiana*.

As conexões de Levi-Civita de variedades conformes são relacionadas pela seguinte equação.

Proposição 2.22. *Sejam (M^n, g) e (M^n, \tilde{g}) duas variedades conformes com fator de conformidade $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$. Se ∇ e $\tilde{\nabla}$ denotam as conexões de Levi-Civita respectivamente de g e \tilde{g} , então, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(B_R^n)$,*

$$(2.2) \quad \tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + g(\nabla\varphi, X)Y + g(\nabla\varphi, Y)X - g(X, Y)\nabla\varphi.$$

As conexões de Levi-Civita de variedades conformemente Euclidianas dadas por um fator de conformidade radial, quando derivando o campo posição do \mathbb{R}^n , possuem certa proporcionalidade, como vemos a seguir.

Exemplo 2.23 (Conexão de Levi-Civita de uma Variedade Conformemente Euclidiana). Seja M^n uma variedade conformemente Euclidiana. Suponha que o fator de conformidade $\varphi : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ é dado por uma *função radial* $f : [0, R^2) \rightarrow \mathbb{R}$, isto é, $\varphi(x) = f(|x|^2)$, onde $|x|^2 = g(x, x)$. Note que, nesse caso,

$$(2.3) \quad \nabla\varphi(x) = 2f'(|x|^2)x,$$

onde $\nabla\varphi$ é o gradiente de φ com respeito a g . Denotando por ∇ e $\tilde{\nabla}$ as conexões de Levi-Civita respectivamente de g e \tilde{g} , para cada $X \in \mathfrak{X}(B_R^n)$, por (2.2) e (2.3), considerando $x \in \mathfrak{X}(B_R^n)$ o vetor posição devemos ter

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \tilde{\nabla}_X x &= \nabla_X x + g(\nabla\varphi, X)x + g(\nabla\varphi, x)X - g(x, X)\nabla\varphi \\ &= X + 2u'(|x|^2)(g(x, X)x + g(x, x)X - g(x, X)x) \\ &= \mu(x)X, \end{aligned}$$

onde $\mu : B_R^n \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $\mu(x) = 1 + 2f'(|x|^2)|x|^2$ é a chamada *função potencial* de x .

Antes de prosseguirmos, precisamos definir o que se entende por um tensor de Codazzi.

Definição 2.24. Um *tensor* em uma variedade Riemanniana (M^n, g) é uma aplicação bilinear $T : \mathfrak{X}(M^n) \times \mathfrak{X}(M^n) \rightarrow \mathcal{D}(M^n)$, onde $\mathcal{D}(M^n)$ denota o conjunto de todas as funções diferenciáveis definidas em M^n . A *derivada covariante* de T é definida por

$$(\nabla_X T)(Y, Z) = \partial_X T(Y, Z) - T(\nabla_X Y, Z) - T(Y, \nabla_X Z), \quad X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n),$$

onde ∇ denota a conexão de Levi-Civita de g . Dizemos que T é um *tensor de Codazzi* se $(\nabla_X T)(Y, Z) = (\nabla_Y T)(X, Z)$ para todo $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M^n)$.

A definição que demos acima é facilmente estendida para r -tensores, isto é, aplicações r -lineares em $\mathfrak{X}(M^n) \times \dots \times \mathfrak{X}(M^n)$ cujo contradomínio é $\mathcal{D}(M^n)$. De fato, o objeto nomeado “tensor” na Definição 2.24 é comumente referenciado como um 2-tensor, e será suficiente para nossos propósitos.

Dentre as variedades conformemente Euclidianas, os espaços cuja curvatura seccional é constante desempenham um importante papel na Geometria Diferencial. Uma vantagem de se trabalhar nestes espaços é que o operador de Weingarten de qualquer de suas subvariedades é um tensor de Codazzi.

Exemplo 2.25 (Formas Espaciais). Dado $c \in \mathbb{R}$, sejam B_R^n a bola Euclidiana aberta de raio $0 < R \leq \infty$ centrada na origem do \mathbb{R}^n e $\varphi_c : B_R^n \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\varphi_c(x) = \log \frac{1}{1 + \frac{c}{4}|x|^2},$$

onde $R = \infty$ se $c \in \{0, 1\}$ e $R = 2$ se $c = -1$. Nas notações da Definição 2.21, $\mathbb{R}^n = (\mathbb{R}^n, e^{\varphi_0}g)$ é o espaço Euclidiano padrão, $\mathbb{S}^n \setminus \{p\} = (\mathbb{R}^n, e^{2\varphi_1}g)$ é a esfera unitária excluindo o pólo p e $\mathbb{H}^n = (B_2^n, e^{2\varphi_{-1}}g)$ é o espaço hiperbólico com curvatura seccional igual a -1 .

As formas espaciais podem ser modeladas de diversas outras maneiras. Escolhemos os modelos do Exemplo 2.25 por serem conformemente Euclidianos, o que nos permitirá usar a equação (2.4).

Um importante e muito útil resultado em formas espaciais é a seguinte inequação conhecida como *Desigualdade de Simons*. No enunciado, consideraremos o polinômio p_H associado à curvatura média H da imersão estudada, à dimensão n da variedade imersa e à curvatura seccional c da forma espacial definido por

$$p_H(t) = t^2 + \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}}|H|t - \frac{H^2}{n} - nc, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Em [1, 2], a expressão de p_H é ligeiramente diferente da que escrevemos acima porque os autores consideram a curvatura média como o traço do operador de Weingarten da imersão dividido por n , como classicamente é feito. Uma demonstração para a Desigualdade de Simons pode ser encontrada em [1, 2]. O polinômio p_H aparece naturalmente na demonstração. A caracterização para igualdade enunciada abaixo está provada em [11, 34, 35].

Lema 2.26 (Simons). *Seja $u : M^n \rightarrow \mathbb{M}_c^{n+1}$ uma imersão com curvatura média constante H . Então*

$$(2.5) \quad |\phi|^2 p_H(|\phi|) \geq \frac{n+2}{n} |\nabla|\phi||^2 - \frac{1}{2} \Delta|\phi|^2,$$

onde ϕ é o tensor de umbilicidade de u . Além disso, se $n \geq 3$ e u não é totalmente umbílica, a igualdade ocorre se, e somente se:

- (i) $u(M^n)$ é um catenoide quando $H = 0$ e $c \leq 0$;
- (ii) $u(M^n)$ é um toro de Clifford ou uma hipersuperfície de Otsuki quando $H = 0$ e $c > 0$;
- (iii) $u(M^n)$ é uma hipersuperfície de Delaunay quando $H \neq 0$.

Lembramos que uma hipersuperfície de Otsuki é uma hipersuperfície mínima de rotação imersa na esfera nomeada assim devido a T. Otsuki [29]. Vale mencionar também que, para $n = 2$ e $H = 0$, a Desigualdade de Simons é uma identidade, como é possível ver, por exemplo, em [35, Corolário 3.2].

3 Hipersuperfícies com Bordo Livre

Neste capítulo, estudaremos subvariedades com bordo livre em bolas de formas espaciais, dando ênfase principalmente aos casos em que o vetor curvatura média se anula ou a curvatura média é constante.

3.1 Resultados Preliminares

Relembremos o que significa uma imersão ter bordo livre. O leitor pode consultar o capítulo introdutório do texto para detalhes e alguns exemplos.

Definição 3.1. Sejam (M^k, g) e $(\overline{M}^n, \overline{g})$ duas variedades Riemannianas compactas. Dizemos que $u : (M^k, g) \rightarrow (\overline{M}^n, \overline{g})$ é uma imersão com *bordo livre* se:

- (i) $u(\text{int}(M^k)) \subset \text{int}(\overline{M}^n)$ e $u(\partial M^k) \subset \partial \overline{M}^n$
- (ii) o ângulo de contato entre $u(M^k)$ e $\partial \overline{M}^n$ é constante igual a $\pi/2$.

O primeiro resultado coletado aqui é uma desigualdade do tipo Hardy para hipersuperfícies com bordo livre e dimensão pelo menos três em formas espaciais com curvatura seccional não positiva. Ela é simplesmente uma aplicação de [5, Teorema 3.2] com as escolhas $p = 2$ e $\gamma = 0$, uma vez observado que $r \leq 1$ na hipersuperfície que queremos estudar, enquanto $r = 1$ em seu bordo.

Lema 3.2 (Batista-Mirandola-Vitório [5]). *Seja Σ^n , $n \geq 3$, uma hipersuperfície com bordo livre na bola unitária B^{n+1} de uma forma espacial \mathbb{M}_c^{n+1} , $c \in \{-1, 0\}$. Se Σ^n tem curvatura média constante H , cada função diferenciável não negativa $f : \Sigma^n \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaz*

$$(3.1) \quad \int_{\Sigma^n} f^2 d\sigma \leq \frac{4}{n^2} \int_{\Sigma^n} |\nabla f|^2 d\sigma + \frac{H^2}{n^2} \int_{\Sigma^n} f^2 d\sigma + \frac{2}{n} \int_{\partial \Sigma^n} f^2 ds.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, f se anula identicamente em Σ^n .

O segundo resultado é uma igualdade entre os volumes interior e de bordo de subvariedades mínimas com bordo livre na Euclidiana unitária. A demonstração é simples e será reproduzida abaixo.

Proposição 3.3. *Seja Σ^k uma subvariedade mínima com bordo livre na bola Euclidiana unitária centrada na origem do \mathbb{R}^n . Então,*

$$(3.2) \quad V(\partial \Sigma^k) = kV(\Sigma^k),$$

onde $V(\Sigma^k)$ é o volume de Σ^k e $V(\partial \Sigma^k)$ é o volume total de $\partial \Sigma^k$.

Demonstração. Seja $\rho : \Sigma^k \rightarrow \mathbb{R}$ a função definida por

$$\rho(x) = \frac{|x|^2}{2}.$$

Pela minimalidade de Σ^k , vale $\Delta\rho = k$. Além disso, se ν denota a normal unitária exterior a Σ^k ao longo de $\partial\Sigma^k$, segue da condição de bordo livre que $\nabla\rho = \nu$. Pelo Teorema da Divergência,

$$kV(\Sigma^k) = \int_{\Sigma^k} \Delta\rho \, d\sigma = \int_{\partial\Sigma^k} (\partial_\nu\rho) \, ds = V(\partial\Sigma^k),$$

como queríamos verificar. \square

Finalmente, como um terceiro resultado, dada uma hipersuperfície com curvatura média constante e bordo livre na bola unitária de uma forma espacial, relacionaremos as geometrias de seu bordo visto da hipersuperfície original e da esfera que delimita a bola. Antes, enunciaremos um resultado de A. Stahl que será útil para nossos objetivos.

Afim de sermos mais precisos, façamos a seguinte construção inspirados no trabalho de L. Alías, J. de Lira e J. Miguel Malacarne (cf. [4]). Seja B_r^{n+1} uma bola Euclidiana centrada na origem do \mathbb{R}^{n+1} cujo raio r é escolhido de modo que a bola B^{n+1} , modelada por B_r^{n+1} , seja unitária na forma espacial \mathbb{M}_c^{n+1} dada como no Exemplo 2.25. Consideremos uma hipersuperfície compacta Σ^n contida em B^{n+1} de tal forma que $\text{int}(\Sigma^n) \subset \text{int}(B^{n+1})$ e $\partial\Sigma^n \subset \partial B^{n+1}$. Se respectivamente α_N^M e S_N^M denotam a segunda forma fundamental e o operador de Weingarten de N^k como subvariedade de M^n , como casos particulares, fixaremos as seguintes notações:

$$\alpha = \alpha_{\Sigma}^{\mathbb{M}_c}, \quad S = S_{\Sigma}^{\mathbb{M}_c}, \quad \tilde{\alpha} = \alpha_{\partial\Sigma}^{\partial B} \quad \text{e} \quad \tilde{S} = S_{\partial\Sigma}^{\partial B}.$$

Com isso, para cada $X, Y \in \mathfrak{X}(\partial\Sigma^n)$, a conexão de Levi-Civita ∇ de \mathbb{M}_c^{n+1} é decomposta das seguintes maneiras:

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X^{\partial B} Y + \alpha_{\partial B}^{\mathbb{M}_c}(X, Y) \\ &= \nabla_X^{\partial\Sigma} Y + \tilde{\alpha}(X, Y) + \alpha_{\partial B}^{\mathbb{M}_c}(X, Y) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \nabla_X^{\Sigma} Y + \alpha(X, Y) \\ &= \nabla_X^{\partial\Sigma} Y + \alpha_{\partial\Sigma}^{\Sigma}(X, Y) + \alpha(X, Y), \end{aligned}$$

onde $\nabla^{\partial B}$, $\nabla^{\partial\Sigma}$ e ∇^{Σ} são respectivamente as conexões de Levi-Civita de ∂B^{n+1} , $\partial\Sigma^n$ e Σ^n como subvariedades de \mathbb{M}_c^{n+1} . Daí,

$$(3.3) \quad \alpha_{\partial B}^{\mathbb{M}_c}(X, Y) + \tilde{\alpha}(X, Y) = \alpha_{\partial\Sigma}^{\Sigma}(X, Y) + \alpha(X, Y)$$

nos pontos de $\partial\Sigma^n$. Como ∂B^{n+1} é uma esfera em \mathbb{R}^{n+1} , por conformidade existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $S_{\partial B}^{\mathbb{M}_c} = \lambda I$, onde I é o tensor identidade em $T\partial B^{n+1}$. Portanto, se $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota a

métrica Riemanniana de \mathbb{M}_c^{n+1} , para cada $x \in \partial B^{n+1}$, temos por (2.4) que, para qualquer vetor unitário $v \in \mathfrak{X}(\partial B^{n+1})$, vale

$$(3.4) \quad \lambda = \langle S_{\partial B}^{\mathbb{M}_c} v, v \rangle = -\langle (\nabla_v x)^\top, v \rangle = -\mu_0,$$

onde $\mu_0 = 1 + 2f'(r^2)r^2$ é a função potencial do vetor posição calculada ao longo de ∂B^{n+1} e $(\cdot)^\top$ denota a projeção ortogonal em $\mathfrak{X}(\partial B^{n+1})$. Daí, por (3.3),

$$(3.5) \quad -\mu_0 \langle X, Y \rangle x + \langle \tilde{S}X, Y \rangle \xi = \langle S_{\partial \Sigma}^\Sigma X, Y \rangle \nu + \langle SX, Y \rangle \eta,$$

onde x é o vetor posição em B_r^{n+1} , $\xi \in \mathfrak{X}(\partial B^{n+1})$ um campo unitário normal a $\partial \Sigma^n$, ν a normal unitária exterior a Σ^n ao longo de $\partial \Sigma^n$ e η um campo unitário globalmente definido em Σ^n restrito a $\partial \Sigma^n$.

Com esta construção, podemos enunciar o seguinte resultado devido a A. Stahl. Note que, se Σ^n tem bordo livre em B^{n+1} , então $x = \nu$ e $\xi = \eta$ ao longo de $\partial \Sigma^n$.

Teorema 3.4 (Stahl [33]). *Seja Σ^n uma hipersuperfície com bordo livre na bola B^{n+1} descrita acima. Considere os tensores*

$$T : \mathfrak{X}(\Sigma^n) \times \mathfrak{X}(\Sigma^n) \rightarrow \mathcal{D}(\Sigma^n) \text{ dado por } T(X, Y) = \langle SX, Y \rangle$$

e

$$T^{\partial B} : \mathfrak{X}(\partial B^{n+1}) \times \mathfrak{X}(\partial B^{n+1}) \rightarrow \mathcal{D}(\partial B^{n+1}) \text{ dado por } T^{\partial B}(X, Y) = \mu_0 \langle X, Y \rangle.$$

Então

$$(\nabla_{v_i} T)(\nu, v_i) = -(\nabla_{v_i}^{\partial B} T^{\partial B})(\eta, v_i) - 2\mu_0 T(v_i, v_i) + \mu_0 (T(\nu, \nu) + T(v_i, v_i)), \quad i = 1, \dots, n-1,$$

onde $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é uma base ortonormal de vetores tangentes a $\partial \Sigma^n$, enquanto $\nabla_X T$ e $\nabla_X^{\partial B} T^{\partial B}$ denotam as derivadas covariantes respectivamente de T e $T^{\partial B}$ na direção de X .

Na demonstração do Teorema 3.4, A. Stahl utilizou uma definição para os “símbolos de Christoffel” diferente da usual. Ele considera uma base de vetores ortonormais tangentes à subvariedade que se quer estudar e decompõe sua conexão de Levi-Civita em termos desses vetores. Em outras palavras, se $\{v_1, \dots, v_n\}$ é uma base ortonormal tangente a Σ^n , então os símbolos de Christoffel Γ_{ij}^k da conexão de Levi-Civita ∇ de Σ^n é definido como os únicos coeficientes que satisfazem

$$\nabla_{v_i} v_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k v_k.$$

Com essa definição, os símbolos de Christoffel ganham certas propriedades que são importantes na demonstração de A. Stahl. Veja, por exemplo, [33, Equações 2.3].

Usaremos o Teorema 3.4 para provar o seguinte.

Lema 3.5 (Identidades Tipo-Stahl). *Seja Σ^n uma hipersuperfície com bordo livre em B^{n+1} . Se Σ^n tem curvatura média constante H , então nos pontos de $\partial \Sigma^n$ temos:*

- (i) $|\phi|^2 = |\tilde{S}|^2 + (H - \tilde{H})^2 - \frac{H^2}{n}$;
- (ii) $\partial_\nu |\phi|^2 = -2\mu_0 \left(|\tilde{S}|^2 + (n+1)(H - \tilde{H})^2 - 2H(H - \tilde{H}) \right)$,

onde ϕ é o tensor de umbilicidade de Σ^n , enquanto \tilde{S} e \tilde{H} são respectivamente o operador de Weingarten e a curvatura média de $\partial\Sigma^n$ como hipersuperfície de ∂B^{n+1} .

Demonstração. (i) Como Σ^n tem bordo livre em B^{n+1} , temos $x = \nu$ e $\xi = \eta$ em $\partial\Sigma^n$. Daí, pela equação (3.5), $S = \tilde{S}$ ao longo de $\partial\Sigma^n$. Portanto, se $\{v_1, \dots, v_{n-1}\}$ é um conjunto ortonormal de vetores em $\partial\Sigma^n$ dado por autovetores de \tilde{S} e $\tilde{\lambda}_1, \dots, \tilde{\lambda}_{n-1}$ seus respectivos autovalores, a matriz de S em $\{v_1, \dots, v_{n-1}, \nu\}$ é dada por

$$S = \begin{pmatrix} \tilde{\lambda}_1 & 0 & \cdots & 0 & \langle S\nu, v_1 \rangle \\ 0 & \tilde{\lambda}_2 & \cdots & 0 & \langle S\nu, v_2 \rangle \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \tilde{\lambda}_{n-1} & \langle S\nu, v_{n-1} \rangle \\ \langle S\nu, v_1 \rangle & \langle S\nu, v_2 \rangle & \cdots & \langle S\nu, v_{n-1} \rangle & \langle S\nu, \nu \rangle \end{pmatrix}.$$

Agora, considere a função suporte $f(x) = \langle x, \eta \rangle$, $x \in \Sigma^n$. Dado $X \in \mathfrak{X}(\Sigma^n)$, por (2.4), temos $\partial_X f = \langle x, \nabla_X \eta \rangle$. Em particular, pela condição de bordo livre, para $X \in \mathfrak{X}(\partial\Sigma^n)$,

$$0 = \langle \nu, \nabla_X \eta \rangle = -\langle \nu, SX \rangle.$$

Assim, ao longo de $\partial\Sigma^n$, ν é uma direção principal de Σ^n e o conjunto $\{v_1, \dots, v_{n-1}, \nu\}$ diagonaliza S . Daí,

$$S = \begin{pmatrix} \tilde{S} & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$

onde $\lambda_n = \langle S\nu, \nu \rangle$. Além disso, como $H = \tilde{H} + \lambda_n$, obtemos que $\lambda_n^2 = (H - \tilde{H})^2$ e, por (2.1),

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= |S|^2 - \frac{H^2}{n} \\ &= |\tilde{S}|^2 + (H - \tilde{H})^2 - \frac{H^2}{n}. \end{aligned}$$

(ii) Uma vez que H é constante, temos, por (2.1),

$$\partial_\nu |\phi|^2 = \partial_\nu |S|^2 = 2 \sum_{i=1}^{n-1} \tilde{\lambda}_i \partial_\nu \tilde{\lambda}_i - 2\lambda_n \sum_{i=1}^{n-1} \partial_\nu \tilde{\lambda}_i.$$

Como $\langle SX, Y \rangle$ é um tensor de Codazzi, segue do Teorema 3.4 que $\partial_\nu \tilde{\lambda}_i = \mu_0(\lambda_n - \tilde{\lambda}_i)$ para cada $i = 1, \dots, n-1$ e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \partial_\nu |\phi|^2 &= 2\mu_0 \left((H - \lambda_n)\lambda_n - |S|^2 + \lambda_n^2 - (n-1)\lambda_n^2 + (H - \lambda_n)\lambda_n \right) \\ &= -2\mu_0 \left(|\tilde{S}|^2 + (n+1)(H - \tilde{H})^2 - 2H(H - \tilde{H}) \right). \end{aligned}$$

□

Como consequência imediata da demonstração do Lema 3.5, podemos obter a seguinte conclusão acerca de Σ^2 quando a curvatura seccional de Σ^2 é constante ao longo de uma componente conexa de bordo.

Corolário 3.6. *Seja Σ^2 uma superfície com bordo livre em B^3 . Se Σ^2 tem curvatura média constante H e curvatura seccional constante ao longo de uma componente conexa de bordo Γ de Σ^2 , então Γ é um círculo. Em particular, se $c = H = 0$ então Σ^2 é ou um disco equatorial ou um catenoide crítico.*

Demonstração. Como $S = \tilde{S}$ em Γ , então, pela Equação de Gauss, $K = \kappa_g(H - \kappa_g) + c$, onde K e κ_g são respectivamente a curvatura seccional de Σ^2 nos pontos de Γ e a curvatura geodésica de Γ em ∂B^3 . Assim,

$$\kappa_g = \frac{H \pm \sqrt{H^2 + 4(c - K)}}{2},$$

e portanto Γ é um círculo. Nesse caso, quando $c = H = 0$, Σ^2 é ou um disco equatorial ou um catenoide crítico, sendo esta segunda afirmação verdadeira por [30, Teorema 1.2]. \square

Observação 3.7. Substituindo a relação (2.1) nas equações obtidas no Lema 3.5, obtemos

$$(3.6) \quad \begin{aligned} |\phi|^2 &= |\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n(n-1)} \left((n-1)H - n\tilde{H} \right)^2, \\ \partial_\nu |\phi|^2 &= -2\mu_0 \left(|\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n-1} \left((n-1)H - n\tilde{H} \right)^2 \right), \end{aligned}$$

onde $\tilde{\phi}$ é o tensor de umbilicidade de $\partial\Sigma^n$ como hipersuperfície de ∂B^{n+1} . De fato,

$$\begin{aligned} |\phi|^2 &= |\tilde{S}|^2 + (H - \tilde{H})^2 - \frac{H^2}{n} \\ &= |\tilde{\phi}|^2 + \frac{\tilde{H}^2}{n-1} + H^2 - 2H\tilde{H} + \tilde{H}^2 - \frac{H^2}{n} \\ &= |\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n(n-1)} \left(n\tilde{H}^2 + n(n-1)H^2 - 2n(n-1)H\tilde{H} + n(n-1)\tilde{H}^2 - (n-1)H^2 \right) \\ &= |\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n(n-1)} \left(n^2\tilde{H}^2 - 2n(n-1)H\tilde{H} + (n-1)^2H^2 \right) \\ &= |\tilde{\phi}|^2 + \frac{1}{n(n-1)} \left(n\tilde{H} - (n-1)H \right)^2. \end{aligned}$$

A segunda equação de (3.6) se verifica de maneira análoga.

Como consequência das equações (3.6), podemos dar uma caracterização das hipersuperfícies com bordo livre em B^{n+1} cuja norma ao quadrado do tensor de umbilicidade é uma função sub-harmônica.

Corolário 3.8. *Seja Σ^n uma hipersuperfície com bordo livre em B^{n+1} . Se Σ^n tem curvatura média constante H e $\Delta|\phi|^2 \geq 0$, onde ϕ é o tensor de umbilicidade de Σ^n , então $\tilde{\phi} = 0$*

e $(n-1)H = n\tilde{H}$ em $\partial\Sigma^n$, onde $\tilde{\phi}$ e \tilde{H} são respectivamente o tensor de umbilicidade e a curvatura média de $\partial\Sigma^n$ como hipersuperfície de ∂B^{n+1} . Além disso, Σ^2 é totalmente umbílica.

Demonstração. Pela hipótese de sub-harmonicidade e pelo Teorema da Divergência, temos

$$0 \leq \int_{\Sigma^n} \Delta|\phi|^2 d\sigma = \int_{\partial\Sigma^n} \partial_\nu|\phi|^2 ds \leq 0,$$

com a última desigualdade válida por causa da segunda identidade em (3.6). Portanto, $\partial_\nu|\phi|^2 = 0$ em $\partial\Sigma^n$, o que implica, pela primeira das equações (3.6), que $\phi = 0$ em $\partial\Sigma^n$, ou seja, $\tilde{\phi} = 0$ e $(n-1)H = n\tilde{H}$. No caso bidimensional, isso significa que a sub-harmonicidade de $|\phi|^2$ implica na existência de um subconjunto de pontos umbílicos de Σ^2 que não é discreto e portanto Σ^2 é totalmente umbílica. \square

3.2 Pontos Umbílicos e Característica de Euler

Usando as equações (3.6), relacionaremos a geometria e a topologia de superfícies com bordo livre numa bola B^3 como descrita acima. Antes, precisamos de algumas definições e um resultado preliminar.

Definição 3.9. Seja $\psi : \Omega^2 \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde Ω^2 é um domínio de \mathbb{C} . A *multiplicidade* de um zero $z_0 \in \Omega^2$ de ψ é o número inteiro não negativo k tal que $0 = \psi'(z_0) = \dots = \psi^{(k-1)}(z_0)$, mas $\psi^{(k)}(z_0) \neq 0$.

Definição 3.10. Sejam (M^2, g) uma superfície Riemanniana e $\beta : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não nula tal que $\beta = |\psi|f$, onde ψ é uma função holomorfa e f é uma função diferenciável positiva, ambas definidas em M^2 . Se $x \in M^2$ é um zero de β , a *multiplicidade* de $\beta(x)$ é definida como a multiplicidade de $\psi(x)$. A *ordem* de β num subconjunto de M^2 é a soma de suas multiplicidades nesse subconjunto.

O seguinte Lema é um extensão direta de [14, Lema 1] para o caso de superfícies com bordo. Na demonstração, dada a superfície Riemanniana (M^2, g) , dizer que λ^2 é o “fator de conformidade” de g significa que $g = \lambda^2 dzd\bar{z}$, onde $dzd\bar{z}$ é a métrica Riemanniana canônica do plano complexo.

Lema 3.11. *Seja (M^2, g) uma superfície Riemanniana compacta. Se ν é a normal unitária exterior a M^2 ao longo de ∂M^2 e $\partial_\nu \log \beta$ é integrável ao longo de ∂M^2 , então*

$$(3.7) \quad \int_{M^2} \Delta \log \beta d\sigma = -2\pi k_M - \pi k_{\partial M} + \int_{\partial M^2} \partial_\nu \log \beta ds,$$

onde k_M e $k_{\partial M}$ são a ordem de β respectivamente em $\text{int}(M^2)$ e ∂M^2 .

Demonstração. Seja $\{x_1, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_m\}$, $m \geq 0$, o conjunto dos pontos de M^2 tais que $\beta(x_i) = 0$. Suponha que $x_i \in \text{int}(M^2)$ para $i = 1, \dots, \ell$ e $x_i \in \partial M^2$ para $i = \ell + 1, \dots, m$. Agora, considere coordenadas conformes z_i em torno de cada x_i com fator de conformidade λ^2 e defina as bolas

$$\mathcal{B}_i(\delta) = \{x \in M^2 : |z_i(x) - z_i(x_i)| < \delta\}, \quad i = 1, \dots, m,$$

tais que $\mathcal{B}_i(\delta) \cap \mathcal{B}_j(\delta) = \emptyset$ se $i \neq j$. Considere a superfície $M^2(\delta) = M^2 \setminus \cup_{i=1}^m \mathcal{B}_i(\delta)$, e fixe as

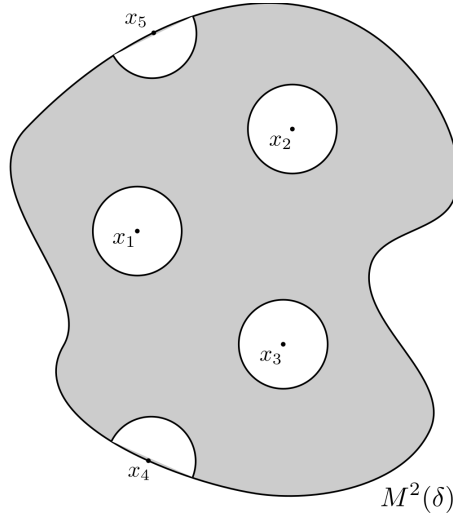


Figura 3 – $M^2(\delta) = M^2 \setminus \cup_{i=1}^m \mathcal{B}_i(\delta)$.

notações: $M_i(\delta) = \text{int}(M^2) \cap \partial \mathcal{B}_i(\delta)$ para $i = \ell + 1, \dots, m$ e $N(\delta) = \partial M^2 \setminus \cup_{i=\ell+1}^m N_i(\delta)$, onde $N_i(\delta)$ é o complementar de $M_i(\delta)$ em $\partial \mathcal{B}_i(\delta)$. Pelo Teorema da Divergência,

(3.8)

$$\int_{M^2(\delta)} \Delta \log \beta \, d\sigma = \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\partial \mathcal{B}_i(\delta)} \partial_{\nu_i} \log \beta \, ds + \sum_{i=\ell+1}^m \int_{M_i(\delta)} \partial_{\nu_i} \log \beta \, ds + \int_{N(\delta)} \partial_{\nu} \log \beta \, ds.$$

Seja $r_i = |z_i(x) - z_i(x_i)|$, e admita que $\beta(x_i)$ tem multiplicidade k_i . Nesse caso, em $\mathcal{B}_i(\delta)$, β assume a forma $\beta = r_i^{k_i} f$ para alguma função diferenciável positiva $f : M^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Daí,

$$\partial_{\nu_i} \log \beta = -\frac{k_i}{\lambda} \frac{d}{dr_i} \log r_i + \partial_{\nu_i} \log f = -\frac{k_i}{\lambda r_i} + \partial_{\nu_i} \log f.$$

Por um lado, se $x_i \in \text{int}(M^2)$, temos

$$\int_{\partial \mathcal{B}_i(\delta)} \partial_{\nu_i} \log \beta \, ds - \int_{\partial \mathcal{B}_i(\delta)} \partial_{\nu_i} \log f \, ds = -\frac{k_i}{\delta} \int_{\partial \mathcal{B}_i(\delta)} \frac{1}{\lambda} \, ds = -\frac{k_i}{\delta} \int_{\{r_i=\delta\}} dz_i d\bar{z}_i = -2\pi k_i$$

e assim, como $f > 0$, concluímos que

$$(3.9) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\partial \mathcal{B}_i(\delta)} \partial_{\nu_i} \log \beta = -2\pi k_i.$$

Por outro lado, se $x_i \in \partial M^2$, pelo mesmo argumento usado acima, uma vez que o comprimento de $\{r_i = \delta\}$ é aproximado por $\pi\delta$ para δ suficientemente pequeno, temos

$$(3.10) \quad \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{M_i(\delta)} \nu_i(\log \varphi) = -\pi k_i.$$

Substituindo as equações (3.9) e (3.10) em (3.8), como $\partial_\nu \log \beta$ é integrável,

$$\int_{M^2} \Delta \log \beta \, d\sigma = -2\pi k_M - \pi k_{\partial M} + \int_{\partial M^2} \partial_\nu \log \beta \, ds,$$

como queríamos demonstrar. \square

Agora estamos prontos para estabelecer a relação de que falamos.

Teorema 3.12. *Seja Σ^2 uma superfície com bordo livre em B^3 . Se Σ^2 tem curvatura média constante e não é totalmente umbílica, então*

$$\chi(\Sigma^2) = -\frac{k_\Sigma}{2} - \frac{k_{\partial\Sigma}}{4},$$

onde k_Σ e $k_{\partial\Sigma}$ são a ordem de $|\phi|$ respectivamente em $\text{int}(\Sigma^2)$ e $\partial\Sigma^2$.

Demonstração. Por um lado, como $\Delta \log |\phi| = 2K$ por [14, Teorema 0] sempre que $\phi \neq 0$, onde K é a curvatura seccional de Σ^2 , segue do Teorema de Gauss-Bonnet que, usando a notação da prova do Lema 3.7, como a curvatura geodésica de uma componente conexa de bordo de Σ^2 calculada na direção da normal unitária exterior a Σ^2 ao longo dessa componente conexa é igual a $-\mu_0$ pela equação (3.5), devemos ter

$$(3.11) \quad \begin{aligned} \int_{\Sigma^2} \Delta \log |\phi| \, d\sigma &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Sigma^2(\delta)} \Delta \log |\phi| \, d\sigma = 2 \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\Sigma^2(\delta)} K \, d\sigma \\ &= 2 \int_{\Sigma^2} K \, d\sigma = 2(2\pi\chi(\Sigma^2) - \mu_0 L(\partial\Sigma^2)), \end{aligned}$$

onde $L(\partial\Sigma^2)$ é o comprimento total de $\partial\Sigma^2$. Por outro lado, note que, pelas equações (3.6),

$$\int_{\partial\Sigma^2} \partial_\nu \log |\phi| \, ds = \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^2} |\phi|^{-2} \partial_\nu |\phi|^2 \, ds = -2\mu_0 L(\partial\Sigma^2)$$

e, conseqüentemente, a equação (3.7) implica que

$$(3.12) \quad \int_{\Sigma^2} \Delta \log |\phi| \, d\sigma = -2\pi k_\Sigma - \pi k_{\partial\Sigma} - 2\mu_0 L(\partial\Sigma^2).$$

Combinando (3.11) e (3.12), obtemos que $4\chi(\Sigma^2) = -2k_\Sigma - k_{\partial\Sigma}$, como gostaríamos de verificar. \square

É imediato, a partir do Teorema 3.12, inferir algumas informações acerca discos e anéis topológicos com curvatura média constante e bordo livre em B^3 .

Corolário 3.13. *Seja Σ^2 uma superfície com curvatura média constante e bordo livre na bola unitária B^3 de uma forma espacial \mathbb{M}_c^3 , $c \in \{-1, 0, 1\}$.*

- (i) Se Σ^2 for um disco topológico, então Σ^2 é totalmente umbílica.
- (ii) A superfície Σ^2 é um anel topológico se, e somente se, não tem ponto umbílico.

Demonstração. (i) Supondo que Σ^2 é um disco topológico, devemos ter $\chi(\Sigma^2) = 1$. Nesse caso, se Σ^2 não fosse totalmente umbílico, obteremos uma contradição pelo Teorema 3.12 uma vez que a ordem de $|\phi|$ é um número não negativo.

(ii) Novamente devido ao fato de a ordem de $|\phi|$ ser um número não negativo, se Σ^2 é um anel topológico, o Teorema 3.12 garante que $k_\Sigma = k_{\partial\Sigma} = 0$. Inversamente, se $k_\Sigma = k_{\partial\Sigma} = 0$, então $\chi(\Sigma^2) = 0$. \square

Observação 3.14. Alguns comentários podem ser feitos sobre o Corolário 3.13.

- (i) A primeira parte do Corolário 3.13 é o Teorema de Nitsche para superfícies com bordo livre e curvatura média constante em bolas de formas espaciais tridimensionais, como demonstrados em [31, 32].
- (ii) Por [26, Lema 4.3], no caso Euclidiano, um anel topológico mínimo com bordo livre em B^3 não pode ter ponto umbílico. O Corolário 3.13 mostra que sua afirmação inversa também é verdadeira. De fato, o Corolário 3.13 tanto generaliza [26, Lema 4.3] para superfícies com curvatura média constante em bolas de formas espaciais tridimensionais quanto sua recíproca.

3.3 Desigualdades Integrais em Formas Espaciais

Para os próximos dois resultados, fixaremos a constante $C_{n,H}$ que depende apenas da curvatura média H e da dimensão n da hipersuperfície Σ^n contida em B^{n+1} e relembremos o polinômio p_H definido anteriormente

$$C_{n,H} = \frac{(n+2)(n^2 - H^2)}{4n} \quad \text{e} \quad p_H(t) = t^2 + \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |H|t - \frac{H^2}{n} - nc.$$

Teorema 3.15. *Seja Σ^n , $n \geq 3$, uma hipersuperfície com bordo livre em B^{n+1} , $c \in \{-1, 0\}$. Se Σ^n tem curvatura média constante H e tensor de umbilicidade ϕ , então*

$$(3.13) \quad \int_{\Sigma^n} |\phi|^2 (p_H(|\phi|) - C_{n,H}) d\sigma \geq \frac{n}{2} \int_{\partial\Sigma^n} \left((H - \tilde{H})^2 - |\tilde{S}|^2 \right) ds \\ + 2\mu_0 H \int_{\partial\Sigma^n} \tilde{H} ds - \frac{3n-2}{2n} H^2 V(\partial\Sigma^n) + F(\mu_0),$$

onde é o $V(\partial\Sigma^n)$ é o volume total de $\partial\Sigma^n$, enquanto \tilde{S} e \tilde{H} são respectivamente o operador de Weingarten e a curvatura média de $\partial\Sigma^n$ como hipersuperfície de ∂B^{n+1} , e

$$F(\mu_0) = (\mu_0 - 1) \left((n+1) \int_{\partial\Sigma^n} (H - \tilde{H})^2 ds + \int_{\partial\Sigma^n} |\tilde{S}|^2 ds - 2H^2 V(\partial\Sigma^n) \right).$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ^n é totalmente umbílica.

Demonstração. Integrando a Desigualdade de Simons (2.5), segue de (3.1) e do Teorema da Divergência que

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^n} |\phi|^2 p_H(|\phi|) d\sigma &\geq \frac{n+2}{n} \int_{\Sigma^n} |\nabla|\phi||^2 d\sigma - \frac{1}{2} \int_{\Sigma^n} \Delta|\phi|^2 d\sigma \\ &\geq \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n^2}{4} \left(\left(1 - \frac{H^2}{n^2}\right) \int_{\Sigma^n} |\phi|^2 d\sigma - \frac{2}{n} \int_{\partial\Sigma^n} |\phi|^2 ds \right) - \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^n} \partial_\nu |\phi|^2 ds \\ &= C_{n,H} \int_{\Sigma^n} |\phi|^2 d\sigma - \frac{n+2}{2} \int_{\partial\Sigma^n} |\phi|^2 ds - \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^n} \partial_\nu |\phi|^2 ds. \end{aligned}$$

Note que o Lema 3.5 implica que, ao longo de $\partial\Sigma^n$,

$$\begin{aligned} \frac{n+2}{2} |\phi|^2 + \frac{1}{2} \partial_\nu |\phi|^2 &= \frac{n+2-2\mu_0}{2} |\tilde{S}|^2 + \frac{n+2-2(n+1)\mu_0}{2} (H - \tilde{H})^2 \\ &\quad - 2\mu_0 H \tilde{H} - \frac{n+2-4n\mu_0}{2n} H^2. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^n} |\phi|^2 (p_H(|\phi|) - C_{n,H}) d\sigma &\geq \frac{2(n+1)\mu_0 - (n+2)}{2} \int_{\partial\Sigma^n} (H - \tilde{H})^2 ds \\ &\quad + \frac{2\mu_0 - (n+2)}{2} \int_{\partial\Sigma^n} |\tilde{S}|^2 ds + 2\mu_0 H \int_{\partial\Sigma^n} \tilde{H} ds - \frac{4n\mu_0 - (n+2)}{2n} H^2 V(\partial\Sigma^n). \end{aligned}$$

Um cálculo direto completa a demonstração da desigualdade. No mais, pelo Lema 3.2, a igualdade ocorre se, e somente se, ϕ se anula identicamente em Σ^n . \square

No caso Euclidiano e mínimo, o Teorema 3.15 pode ser reescrito da seguinte maneira.

Corolário 3.16. *Seja Σ^n , $n \geq 3$, uma hipersuperfície com bordo livre em B^{n+1} , $c \in \{-1, 0\}$. Se Σ^n é mínima e tem operador de Weingarten S , então*

$$\int_{\Sigma^n} |S|^2 \left(|S|^2 - \frac{n(n+2)}{4} \right) d\sigma \geq \frac{n}{2} \int_{\partial\Sigma^n} (\tilde{H}^2 - |\tilde{S}|^2) ds.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ^n é totalmente geodésica.

Como consequência do Teorema 3.15, podemos relacionar a geometria e a topologia de hipersuperfícies com curvatura média constante e bordo livre em B^4 .

Corolário 3.17. *Seja Σ^3 uma hipersuperfície com bordo livre em B^4 , $c \in \{-1, 0\}$. Se Σ^3 tem curvatura média constante H , tensor de umbilicidade ϕ e componentes conexas de bordo $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, então*

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^3} |\phi|^2 (p_H(|\phi|) - C_{3,H}) d\sigma &\geq 6\pi \sum_{i=1}^m \chi(\Gamma_i) + (2\mu_0 - 3)H \int_{\partial\Sigma^3} \tilde{H} ds \\ &\quad + \frac{H^2 - 9c - 9\mu_0^2}{3} A(\partial\Sigma^3) + F(\mu_0), \end{aligned}$$

onde $A(\partial\Sigma^3)$ é a área total de $\partial\Sigma^3$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ^3 é totalmente umbílica.

Demonstração. Pela Equação de Gauss e por (3.5), para cada $i = 1, \dots, m$,

$$\tilde{H}^2 = |\tilde{S}|^2 + 2(\tilde{K}_i - c - \mu_0^2),$$

onde \tilde{K}_i é a curvatura seccional de Γ_i . Assim, por (3.13) e pelo Teorema de Gauss-Bonnet

$$\begin{aligned} & \int_{\Sigma^3} |\phi|^2 (p_H(|\phi|) - C_{3,H}) d\sigma - F(\mu_0) \\ & \geq \frac{3}{2} \int_{\partial\Sigma^3} \left(H^2 - 2H\tilde{H} + \tilde{H}^2 - |\tilde{S}|^2 \right) ds + 2\mu_0 H \int_{\partial\Sigma^3} \tilde{H} ds - \frac{7}{6} H^2 A(\partial\Sigma^3) \\ & = 6\pi \sum_{i=1}^m \chi(\Gamma_i) + (2\mu_0 - 3)H \int_{\partial\Sigma^3} \tilde{H} ds + \frac{H^2 - 9c - 9\mu_0^2}{3} A(\partial\Sigma^3). \end{aligned}$$

□

No caso Euclidiano e mínimo, o Corolário 3.17 pode ser reescrito da seguinte maneira.

Corolário 3.18. *Seja Σ^3 uma hipersuperfície com bordo livre na bola Euclidiana unitária B^4 . Se Σ^3 é mínima, tem operador de Weingarten S e componentes conexas de bordo $\Gamma_1, \dots, \Gamma_m$, então*

$$(3.14) \quad \int_{\Sigma^3} |S|^2 \left(|S|^2 - \frac{15}{4} \right) d\sigma + 9V(\Sigma^3) \geq 6\pi \sum_{i=1}^m \chi(\Gamma_i).$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ^3 é totalmente geodésica.

Note que estamos usando a equação (3.2) para chegar na desigualdade (3.14).

Uma segunda desigualdade, esta sem a imposição da condição de bordo livre, está demonstrada a seguir.

Teorema 3.19. *Seja Σ^n , $n \geq 2$, uma hipersuperfície compacta de \mathbb{M}_c^{n+1} , $c \in \{-1, 0, 1\}$. Se Σ^n não é totalmente umbílica, tem curvatura média constante H , tensor de umbilicidade ϕ e $|\phi|^{-\frac{n+2}{n}} \partial_\nu |\phi|^2$ é uma função integrável ao longo de $\partial\Sigma^n$, então*

$$- \int_{\Sigma^n} |\phi|^{\frac{n-2}{n}} p_H(|\phi|) d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^n} |\phi|^{-\frac{n+2}{n}} \partial_\nu |\phi|^2 ds.$$

Além disso, para $n \geq 3$, a igualdade ocorre se, e somente se:

- (i) Σ^n é um catenoide quando $H = 0$ e $c \leq 0$;
- (ii) Σ^n é um toro de Clifford ou uma hipersuperfície de Otsuki quando $H = 0$ e $c > 0$;
- (iii) Σ^n é uma hipersuperfície de Delaunay quando $H \neq 0$.

Demonstração. Como ϕ se anula no máximo em um subconjunto de medida nula de Σ^n (cf. [8, Lema 2.2]), dado $\varepsilon > 0$, defina o conjunto não vazio

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Sigma^n : |\phi|(x) \geq \varepsilon\}$$

e a função contínua

$$f_\varepsilon(x) = \begin{cases} |\phi|(x) & \text{se } x \in \Omega_\varepsilon \\ \varepsilon & \text{se } x \in \Sigma \setminus \Omega_\varepsilon. \end{cases}$$

Pela Identidade de Green,

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma^n} \Delta |\phi|^2 f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} d\sigma &= - \int_{\Sigma^n} \langle \nabla |\phi|^2, \nabla f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} \rangle d\sigma + \int_{\partial \Sigma^n} \partial_\nu |\phi|^2 f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} ds \\ &= \frac{2(n+2)}{n} \int_{\Sigma^n} \langle \nabla |\phi|, \nabla f_\varepsilon \rangle |\phi| f_\varepsilon^{-\frac{2(n+1)}{n}} d\sigma + \int_{\partial \Sigma^n} \partial_\nu |\phi|^2 f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} ds. \end{aligned}$$

Aplicando a igualdade acima e o Teorema da Divergência à Desigualdade de Simons (2.5),

$$(3.15) \quad \begin{aligned} \frac{n+2}{n} \int_{\Sigma^n} \left(|\nabla |\phi||^2 f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} - \langle \nabla |\phi|, \nabla f_\varepsilon \rangle |\phi| f_\varepsilon^{-\frac{2(n+1)}{n}} \right) d\sigma \\ - \int_{\Sigma^n} |\phi|^2 p_H(|\phi|) f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial \Sigma^n} \partial_\nu |\phi|^2 f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} ds. \end{aligned}$$

Como $f_\varepsilon = |\phi|$ em Ω_ε e $\nabla f_\varepsilon = 0$ em $\Sigma^n \setminus \Omega_\varepsilon$,

$$(3.16) \quad \int_{\Sigma^n} \left(|\nabla |\phi||^2 f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} - \langle \nabla |\phi|, \nabla f_\varepsilon \rangle |\phi| f_\varepsilon^{-\frac{2(n+1)}{n}} \right) d\sigma = \int_{\Sigma^n \setminus \Omega_\varepsilon} |\nabla |\phi||^2 \varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} d\sigma \geq 0,$$

e conseqüentemente a equação (3.15) se torna

$$- \int_{\Sigma^n} |\phi|^2 p_H(|\phi|) f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial \Sigma^n} \partial_\nu |\phi|^2 f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} ds.$$

Portanto, como $|\phi|^{\frac{n+2}{n}} f_\varepsilon^{-\frac{n+2}{n}} \rightarrow 1$ em quase todo ponto de Σ^n quando $\varepsilon \rightarrow 0$ e $|\phi|^{-\frac{n+2}{n}} \partial_\nu |\phi|^2$ é integrável em $\partial \Sigma^n$ por hipótese, temos

$$\int_{\Sigma^n} |\phi|^{\frac{n-2}{n}} \left(\frac{H^2}{n} - |\phi|^2 - \frac{n-2}{\sqrt{n(n-1)}} |H| |\phi| + nc \right) d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial \Sigma^n} |\phi|^{-\frac{n+2}{n}} \partial_\nu |\phi|^2 ds.$$

No mais, a igualdade ocorre se, e somente se, ocorre também na Desigualdade de Simons (2.5) e em (3.16). Logo, o Lema 2.26 conclui a prova. \square

Quando $n = 2$ é possível dar outra prova do Teorema 3.19.

Teorema 3.20. *Seja Σ^2 uma superfície compacta com curvatura média constante H em \mathbb{M}_c^3 , $c \in \{-1, 0, 1\}$. Se Σ^2 não é totalmente umbílica, tem tensor de umbilicidade ϕ e $\partial_\nu \log |\phi|^2$ é uma função integrável ao longo de $\partial \Sigma^2$, então*

$$(3.17) \quad - \int_{\Sigma^2} p_H(|\phi|) d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial \Sigma^2} \partial_\nu \log |\phi|^2 ds.$$

Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, Σ^2 não tem ponto umbílico.

Demonstração. Sejam $\{x_1, \dots, x_\ell, x_{\ell+1}, \dots, x_m\}$, $m \geq 0$, o conjunto de todos os pontos umbílicos de Σ^2 e $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_m$ vizinhanças respectivamente em torno de x_1, \dots, x_m tais que $\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j = \emptyset$ sempre que $i \neq j$. Considere a superfície $\widehat{\Sigma}^2 = \Sigma^2 \setminus \cup_{i=1}^m \mathcal{U}_i$. Segue da Desigualdade de Simons que

$$-2 \int_{\widehat{\Sigma}^2} p_H(|\phi|) d\sigma \leq \int_{\widehat{\Sigma}^2} \Delta \log |\phi|^2 d\sigma$$

já que $\phi \neq 0$ em $\widehat{\Sigma}^2$. Suponha que $x_i \in \text{int}(\Sigma^2)$ para $i = 1, \dots, \ell$ e $x_i \in \partial\Sigma^2$ para $i = \ell + 1, \dots, m$ e fixe as seguintes notações: $M_i = \text{int}(\Sigma^2) \cap \partial\mathcal{U}_i$ para $i = \ell + 1, \dots, m$ e $N = \partial\Sigma^2 \setminus \cup_{i=\ell+1}^m N_i$, onde N_i é o complementar de M_i em $\partial\mathcal{U}_i$. Pelo Teorema da Divergência,

$$\begin{aligned} -2 \int_{\Sigma^2} p_H(|\phi|) d\sigma + 2 \sum_{i=1}^m \int_{\mathcal{U}_i} p_H(|\phi|) d\sigma &\leq \int_N |\phi|^{-2} \partial_\nu |\phi|^2 ds \\ &+ \sum_{i=1}^{\ell} \int_{\partial\mathcal{U}_i} |\phi|^{-2} \partial_{\nu_i} |\phi|^2 ds + \sum_{i=\ell+1}^m \int_{M_i} |\phi|^{-2} \partial_{\nu_i} |\phi|^2 ds, \end{aligned}$$

onde ν é a normal unitária exterior a Σ^2 ao longo de $\partial\Sigma^2$ e ν_i é a normal unitária exterior a $\partial\widehat{\Sigma}^2$ ao longo de $\partial\mathcal{U}_i$. Por regularidade da função $|\phi|^2$, podemos supor que $\partial\mathcal{U}_i$ é um conjunto

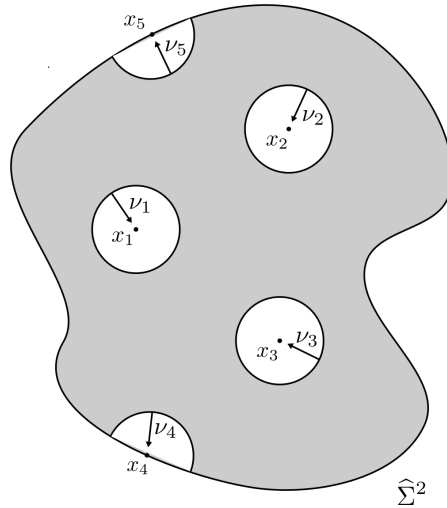


Figura 4 – $\widehat{\Sigma}^2 = \Sigma^2 \setminus \cup_{i=1}^m \mathcal{U}_i$.

de nível de $|\phi|^2$. Nesse caso, ν_i aponta na direção contrária de $\nabla|\phi|^2$ e, conseqüentemente, fazendo com que o diâmetro de \mathcal{U}_i tenda a zero, a desigualdade acima se torna

$$- \int_{\Sigma^2} p_H(|\phi|) d\sigma \leq \frac{1}{2} \int_{\partial\Sigma^2} \partial_\nu \log |\phi|^2 ds.$$

No mais, a igualdade ocorre se, e somente se, $m = 0$, isto é, Σ^2 não tem ponto umbílico. \square

Corolário 3.21. *Seja Σ^2 uma superfície com curvatura média constante e bordo livre em B^3 , $c \in \{-1, 0, 1\}$. Então Σ^2 não é totalmente umbílica se, e somente se, $\chi(\Sigma^2) \leq 0$. Além disso, a igualdade em (*) é equivalente a se ter $\chi(\Sigma^2) = 0$.*

Demonstração. Como Σ^2 tem no máximo um subconjunto discreto de pontos umbílicos ao longo de $\partial\Sigma^2$, denotando por $L(\partial\Sigma^2)$ o comprimento total de $\partial\Sigma^2$, segue de (3.6) que

$$(3.18) \quad \int_{\partial\Sigma^2} |\phi|^{-2} \partial_\nu |\phi|^2 ds = -4\mu_0 L(\partial\Sigma^2),$$

Agora, usando a Equação de Gauss, podemos ver que $|\phi|^2 = -2(K - c) + H^2/2$, onde K é a curvatura seccional de Σ^2 . Além disso, a curvatura geodésica calculada na direção da normal exterior a Σ^2 ao longo de uma componente conexa de bordo de Σ^2 é igual a $-\mu_0$ por (3.5). Daí, as equações (3.17) e (3.18) juntas com o Teorema de Gauss-Bonnet implicam que

$$2\mu_0 L(\partial\Sigma^2) \leq \int_{\Sigma^2} p_H(|\phi|) d\sigma = 2(\mu_0 L(\partial\Sigma^2) - 2\pi\chi(\Sigma^2)),$$

Portanto, $\chi(\Sigma^2) \leq 0$. Em particular, a igualdade ocorre se, e somente se, $\chi(\Sigma^2) = 0$. \square

Observação 3.22. Chamamos a atenção para algumas consequências que dizem respeito ao Corolário 3.21.

- (i) A primeira parte é novamente o Corolário 3.13.
- (ii) A partir do Corolário 3.21, a Conjectura do Catenóide pode ser vista como um problema de solução única para igualdade em (3.17) da seguinte maneira: se dois anéis mínimos com bordo livre que satisfazem a igualdade em (3.17) são movimento rígido um do outro, isso significa que ambos são catenóides.

Referências

- [1] Hilário Alencar and Manfredo do Carmo, *Hypersurfaces with constant mean curvature in space forms*, An. Acad. Brasil. Cienc. **66** (1994), 265–274.
- [2] ———, *Hypersurfaces with constant mean curvature in spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. **120** (1994), no. 4, 1223–1229. MR 1172943
- [3] A. D. Alexandrov, *A characteristic property of spheres*, Ann. Mat. Pura Appl. (4) **58** (1962), 303–315. MR 143162
- [4] Luis J. Alías, Jorge H. S. de Lira, and J. Miguel Malacarne, *Constant higher-order mean curvature hypersurfaces in Riemannian spaces*, J. Inst. Math. Jussieu **5** (2006), no. 4, 527–562. MR 2261223
- [5] Marcio Batista, Heudson Mirandola, and Feliciano Vitório, *Hardy and Rellich inequalities for submanifolds in Hadamard spaces*, J. Differential Equations **263** (2017), no. 9, 5813–5829. MR 3688433
- [6] Simon Brendle, *Embedded minimal tori in S^3 and the Lawson conjecture*, Acta Math. **211** (2013), no. 2, 177–190. MR 3143888
- [7] Alessandro Carlotto, Giada Franz, and Mario B. Schulz, *Free boundary minimal surfaces with connected boundary and arbitrary genus*, 2020.
- [8] Giovanni Catino, *On conformally flat manifolds with constant positive scalar curvature*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 6, 2627–2634. MR 3477081
- [9] ———, *A remark on compact hypersurfaces with constant mean curvature in space forms*, Bull. Sci. Math. **140** (2016), no. 8, 901–907. MR 3569196
- [10] Tobias Holck Colding and William P. Minicozzi, II, *A course in minimal surfaces*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 121, American Mathematical Society, Providence, RI, 2011. MR 2780140
- [11] Manfredo do Carmo and Marcos Dajczer, *Rotation hypersurfaces in spaces of constant curvature*, Trans. Amer. Math. Soc. **277** (1983), no. 2, 685–709. MR 694383
- [12] Manfredo P. do Carmo, *Geometria Riemanniana*, Projeto Euclides, Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), Rio de Janeiro, 2015, 5^a edição. MR 3791495
- [13] Manfredo Perdigão do Carmo, *Formas diferenciais e aplicações*, Institute of Pure and Applied Mathematics of the National Research Council, Rio de Janeiro, 1971,

- Lecture series of the Eighth Brazilian Mathematical Colloquium (Poços de Caldas, 5–23 July 1971). MR 0436182
- [14] Jost-Hinrich Eschenburg and Renato de Azevedo Tribuzy, *Constant mean curvature surfaces in 4-space forms*, Rend. Sem. Mat. Univ. Padova **79** (1988), 185–202. MR 964030
- [15] Abigail Folha, Frank Pacard, and Tatiana Zolotareva, *Free boundary minimal surfaces in the unit 3-ball*, Manuscripta Math. **154** (2017), no. 3-4, 359–409. MR 3713919
- [16] Ailana Fraser and Martin Man-chun Li, *Compactness of the space of embedded minimal surfaces with free boundary in three-manifolds with nonnegative Ricci curvature and convex boundary*, J. Differential Geom. **96** (2014), no. 2, 183–200. MR 3178438
- [17] Ailana Fraser and Richard Schoen, *The first Steklov eigenvalue, conformal geometry, and minimal surfaces*, Adv. Math. **226** (2011), no. 5, 4011–4030. MR 2770439
- [18] ———, *Minimal surfaces and eigenvalue problems*, Geometric analysis, mathematical relativity, and nonlinear partial differential equations, Contemp. Math., vol. 599, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2013, pp. 105–121. MR 3202476
- [19] ———, *Uniqueness theorems for free boundary minimal disks in space forms*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 17, 8268–8274. MR 3404014
- [20] ———, *Sharp eigenvalue bounds and minimal surfaces in the ball*, Invent. Math. **203** (2016), no. 3, 823–890. MR 3461367
- [21] Brian Freidin, Mamikon Gulian, and Peter McGrath, *Free boundary minimal surfaces in the unit ball with low cohomogeneity*, Proc. Amer. Math. Soc. **145** (2017), no. 4, 1671–1683. MR 3601558
- [22] Heinz Hopf, *Differential geometry in the large*, second ed., Lecture Notes in Mathematics, vol. 1000, Springer-Verlag, Berlin, 1989, Notes taken by Peter Lax and John W. Gray, With a preface by S. S. Chern, With a preface by K. Voss. MR 1013786
- [23] Jürgen Jost, *Riemannian geometry and geometric analysis*, seventh ed., Universitext, Springer, Cham, 2017. MR 3726907
- [24] Nicolaos Kapouleas and David Wiygul, *Free-boundary minimal surfaces with connected boundary in the 3-ball by tripling the equatorial disc*, 2017.
- [25] Nikolaos Kapouleas and Martin Man-chun Li, *Free boundary minimal surfaces in the unit three-ball via desingularization of the critical catenoid and the equatorial disc*, J. Reine Angew. Math. **776** (2021), 201–254. MR 4279102

-
- [26] Martin Man-chun Li, *Free boundary minimal surfaces in the unit ball: recent advances and open questions*, Proceedings of the International Consortium of Chinese Mathematicians 2017, Int. Press, Boston, MA, [2020] ©2020, pp. 401–435. MR 4251121
- [27] Antonio Caminha Muniz Neto, *Tópicos de geometria diferencial*, 2015.
- [28] Johannes C. C. Nitsche, *Stationary partitioning of convex bodies*, Arch. Rational Mech. Anal. **89** (1985), no. 1, 1–19. MR 784101
- [29] Tominosuke Ôtsuki, *Minimal hypersurfaces in a Riemannian manifold of constant curvature*, Amer. J. Math. **92** (1970), 145–173. MR 264565
- [30] Juncheol Pyo, *Minimal annuli with constant contact angle along the planar boundaries*, Geometriae Dedicata **146** (2010), no. 1, 159–164.
- [31] Antonio Ros and Enaldo Vergasta, *Stability for hypersurfaces of constant mean curvature with free boundary*, Geom. Dedicata **56** (1995), no. 1, 19–33. MR 1338315
- [32] Rabah Souam, *On stability of stationary hypersurfaces for the partitioning problem for balls in space forms*, Math. Z. **224** (1997), no. 2, 195–208. MR 1431192
- [33] Axel Stahl, *Convergence of solutions to the mean curvature flow with a Neumann boundary condition*, Calc. Var. Partial Differential Equations **4** (1996), no. 5, 421–441. MR 1402731
- [34] Luen-Fai Tam and Detang Zhou, *Stability properties for the higher dimensional catenoid in R^{n+1}* , Proc. Amer. Math. Soc. **137** (2009), no. 10, 3451–3461. MR 2515414
- [35] Biao Wang, *Simons' equation and minimal hypersurfaces in space forms*, Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018), no. 1, 369–383. MR 3723147
- [36] Henry C. Wente, *Counterexample to a conjecture of H. Hopf*, Pacific J. Math. **121** (1986), no. 1, 193–243. MR 815044

Índice

- Campo variacional, 31
- Catenoide crítico, 18
- Conexão de Levi-Civita, 27
- Conjectura do Catenoide, 19
- Curvatura
 - geodésica, 28
 - média, 30
 - principal, 30
 - seccional, 28
- Derivada covariante de um tensor, 34
- Desigualdade de Simons, 35
- Direção principal, 30
- Disco equatorial, 18
- Equação de Gauss, 29
- Fator de conformidade, 33
- Forma espacial, 34
- Função
 - potencial, 33
 - radial, 33
- Funcional
 - área, 31
 - volume, 32
- Geodésica, 28
- Gradiente, 27
- Hessiano, 28
- Imersão
 - com bordo livre, 18, 37
 - isométrica, 29
 - mínima, 31
 - totalmente geodésica, 29
 - totalmente umbílica, 31
- Laplaciano, 28
- Métrica
 - induzida, 29
 - Riemanniana, 27
- Métricas conformes, 33
- Multiplicidade
 - de uma função holomorfa, 42
 - de uma função real, 42
- Operador de Weingarten, 30
- Ordem de uma função real, 42
- Primeira variação
 - da área, 32
 - do volume, 32
- Segunda forma fundamental, 29
- Tensor, 34
 - de Codazzi, 34
- Tensor de umbilicidade, 31
- Teorema
 - de Gauss-Bonnet, 28
 - de Levi-Civita, 27
 - de Nitsche, 19
- Variação
 - de uma imersão, 31
 - que preserva volume, 32
- Variedade
 - conformemente Euclidiana, 33
 - Riemanniana, 27
- Variedades conformes, 33
- Vetor curvatura média, 30